



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Mérida

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA

**“Reglas de suma para decaimientos fuertes de  
dibariones con rompimiento de la  
simetría de sabor  $SU(3)$ ”**

TESIS

Que presenta

**Elías Natanael Polanco Euán**

Para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

en la especialidad de

**Física Teórica**

Director de Tesis

**Dr. Gabriel Sánchez Colón**

Mérida, Yucatán, México.

Agosto de 2017



# Dedicatoria

*Dedicado a mi familia que me enseñó que:  
"Si, pues, coméis o bebéis, o hacéis otra cosa,  
hacedlo todo para la gloria de Dios".  
1 Corintios 10:31*

# Agradecimientos

Esta etapa de mi vida no hubiera sido posible sin el apoyo humano de muchas personas las cuales merecen reconocimiento. Extiendo mi agradecimiento:

*A mis padres, Elías y Silvia Margarita, a mis hermanos, Silvia y Asael por apoyarme siempre, por su cariño y cuidado.*

*A mi director de tesis, el doctor Gabriel Sánchez Colón por su paciencia y constante asesoría.*

*A los doctores sinodales por sus correcciones y recomendaciones.*

*A Zhirnay Rodriguez por su valioso apoyo secretarial y en general a todo el personal del Departamento de Física Aplicada del Cinvestav-IPN Unidad Mérida por todas las atenciones prestadas a mi persona durante mis estudios de posgrado*

*A mis amigos y compañeros por sus críticas y por generar un ambiente ameno durante mis estudios.*

*Al CONACyT por su apoyo económico durante estos años de estudio del doctorado.*

# Resumen

En 1963 se observó que el deuterón, un dibarión estable, pertenece al multiplete  $\mathbf{10}^*$  del grupo de sabor  $SU(3)$ . Recientemente, en la literatura se reportan los resultados para las reglas de suma con rotura de la simetría de sabor  $SU(3)$  a primer orden entre las amplitudes de decaimiento fuerte de los dibariones en los decupletes  $\mathbf{10}^*$  y  $\mathbf{10}$  al decaer en dos bariones de espín  $1/2$  pertenecientes al octete de  $SU(3)$ . Sobre la base de modelos teóricos y del análisis de datos experimentales, se ha sugerido en la literatura la posible existencia de dibariones pertenecientes a las representaciones de  $SU(3)$  con dimensiones  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{27}$ . Extendiendo los resultados previamente publicados, en esta tesis se determinan reglas de suma con rotura a primer orden de la simetría de sabor  $SU(3)$  entre las amplitudes de decaimiento fuerte de los dibariones en los multipletes  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{27}$  al decaer en dos bariones de espín  $1/2$  y también al decaer en un barión de espín  $1/2$  y un barión de espín  $3/2$ .

# Abstract

In 1963 it was observed that the deuteron, a stable dibaryon, belongs to the  $\mathbf{10}^*$  multiplet of the  $SU(3)$  flavor group. Recently, in the literature are reported results for sum rules with first order rupture of the  $SU(3)$  flavor symmetry between the strong decay amplitudes of dibaryons in the decuplets  $\mathbf{10}^*$  and  $\mathbf{10}$  decaying into two spin  $1/2$  baryons belonging to the  $SU(3)$  octet. On the basis of theoretical models and the analysis of experimental data, it has been suggested in the literature the possible existence of dibaryons belonging to the  $SU(3)$  representations with dimensions  $\mathbf{8}$  and  $\mathbf{27}$ . Extending the previously published results, in this thesis are determined sum rules with first order breaking of the  $SU(3)$  symmetry between the strong decay amplitudes of dibaryons in the multiplets  $\mathbf{8}$  and  $\mathbf{27}$  when they decay into two baryons of spin  $1/2$  and also on decays into a baryon of spin  $1/2$  and a baryon of spin  $3/2$ .

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Objetivo</b>	<b>5</b>
<b>1. Grupos y Simetrías</b>	<b>6</b>
1.1. Teoría de Grupos . . . . .	6
1.2. El Grupo $SU(2)$ . . . . .	9
1.3. Combinación de Representaciones . . . . .	10
1.4. $SU(2)$ de Isoespín . . . . .	13
<b>2. <math>SU(3)</math> de Sabor y Modelo Quark</b>	<b>16</b>
2.1. El Grupo de Sabor $SU(3)$ . . . . .	17
2.1.1. Diagramas de Young . . . . .	18
2.1.2. Coeficientes de Clebsch-Gordan para $SU(3)$ . . . . .	22
2.2. Modelo Quark . . . . .	23
2.2.1. Bariones . . . . .	23
2.2.2. Mesones . . . . .	27

2.3. Hadrones Exóticos . . . . .	27
<b>3. Amplitudes y Reglas de Suma</b>	<b>31</b>
3.1. Amplitud de Decaimiento . . . . .	31
3.1.1. Limite de Simetría . . . . .	32
3.1.2. Rompimiento de la Simetría . . . . .	33
3.1.3. Amplitud de Decaimiento . . . . .	35
3.2. Reglas de Suma . . . . .	36
<b>4. Reglas de Suma para Dibariones</b>	<b>40</b>
4.1. Decaimientos $D_8 \rightarrow B + B'$ . . . . .	41
4.1.1. Estado Final Antisimétrico . . . . .	43
4.1.2. Estado Final Simétrico . . . . .	47
4.2. Decaimientos $D_8 \rightarrow B + R$ . . . . .	49
4.3. Decaimientos $D_{27} \rightarrow B + B'$ . . . . .	56
4.3.1. Estado Final Antisimétrico . . . . .	59
4.3.2. Estado Final Simétrico . . . . .	63
4.4. Decaimientos $D_{27} \rightarrow B + R$ . . . . .	68
<b>Resultados</b>	<b>82</b>
Resultados . . . . .	82
Discusión . . . . .	84
Perspectivas . . . . .	84
Conclusiones . . . . .	85
<b>A. Verificación <math>D_8 \rightarrow B + B'</math></b>	<b>86</b>
A.1. Método de Operadores . . . . .	86
A.1.1. Estado Final Antisimétrico . . . . .	88
A.1.2. Estado Final Simétrico . . . . .	89
<b>B. Extensión a SU(4)</b>	<b>91</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>

# Índice de figuras

2.1. Asignaciones de bariones con espín $1/2$ y paridad positiva a los estados $(Y, I, I_3)$ del octete de $SU(3)$ . . . . .	25
2.2. Asignaciones de bariones con espín $3/2$ y paridad positiva a los estados $(Y, I, I_3)$ del decuplete de $SU(3)$ . . . . .	26
2.3. Asignaciones de mesones con espín $0$ y paridad negativa a los estados $(Y, I, I_3)$ del octete de $SU(3)$ . . . . .	28
4.1. Asignaciones de dibariones a los estados $(Y, I, I_3)$ del octete de $SU(3)$ . . . . .	43
4.2. Asignaciones de dibariones a los estados $(Y, I, I_3)$ del multiplete <b>27</b> de $SU(3)$ . . . . .	57

# Índice de tablas

4.1. Tipo de decaimiento, cuantificación y referencias a las amplitudes de decaimiento independientes y reglas de suma para cada proceso analizado. . . . .	83
---	----

# Introducción

El **Modelo Estándar** es una teoría cuántica que resume el conocimiento actual de la física de las partículas fundamentales y las interacciones fundamentales. Este modelo incluye a la teoría de la interacción **fuerte** (**Cromodinámica Cuántica**) y a la teoría unificada (llamada **Teoría Cuántica Electrodébil**) de las interacciones **débil** (**Teoría Cuántica Débil**) y **electromagnética** (**Electrodinámica Cuántica**). La **gravedad** es una interacción fundamental aunque no es parte del Modelo Estándar. Las interacciones se manifiestan por fuerzas y por razones de decaimiento de partículas inestables. Respecto a la interacción electromagnética, las intensidades relativas de las interacciones gravitacional, débil y fuerte son  $10^{-41}$ ,  $10^{-4}$  y 60, respectivamente.

En el Modelo Estándar los constituyentes de la materia son **fermiones** (espín semientero) y los portadores de las interacciones son **bosones** (espín entero o cero). Los fermiones fundamentales tienen espín  $1/2$  y se dividen en **leptones** y **quarks**. Los portadores de la interacción electrodébil unificada son los bosones  $\gamma$  (interacción electromagnética),  $W^\pm$  y  $Z^0$  (interacción débil), mientras que el gluón (eléctricamente neutro) es el bosón portador de la interacción fuerte. Los bosones fundamentales tienen espín 1. El bosón **Higgs**, denotado  $H$ , tiene espín 0 y es un componente crítico del Modelo Estándar, su descubrimiento ayudó a confirmar el mecanismo por el cual las partículas fundamentales adquieren masa.

Para cada tipo de partícula existe un correspondiente tipo de **antipartícula**, denotada por una barra sobre el símbolo de la partícula (a menos que la **carga eléctrica**  $+$ ,  $0$  o  $-$  se muestre explícitamente). Partícula y antipartícula tienen masa y espín idénticos pero cargas eléctricas opuestas.

Leptones y quarks existen en diferentes estados de “**sabor**”:  $|\nu_e\rangle$ ,  $|\nu_\mu\rangle$  y  $|\nu_\tau\rangle$  con carga eléctrica 0 y  $|e\rangle$ ,  $|\mu\rangle$  y  $|\tau\rangle$  con carga eléctrica  $-1$ , en el caso de los leptones; mientras que para los quarks los estados de sabor son  $|u\rangle$ ,

$|c\rangle$  y  $|t\rangle$  con carga eléctrica  $+2/3$  y  $|d\rangle$ ,  $|s\rangle$  y  $|b\rangle$  con carga eléctrica  $-1/3$ . El sabor es la “carga” de la interacción débil y así como las partículas con carga eléctrica tienen interacciones electromagnéticas, las partículas con estados de sabor definidos tienen interacciones débiles. Los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  también poseen carga sabor.

Sólo quarks y gluones poseen carga “fuerte”, también llamada carga “**color**”, y pueden tener interacciones fuertes. Cada quark puede tener uno de tres tipos de carga color y existen ocho tipos de carga color para los gluones. Estas cargas no tienen nada que ver con los colores visibles de la luz. Así como las partículas eléctricamente cargadas interactúan intercambiando fotones, en las interacciones fuertes, las partículas con carga color interactúan intercambiando gluones.

Quarks y gluones no pueden encontrarse aislados, están confinados en partículas de color neutro (carga color neta cero) llamadas **hadrones**. Este confinamiento (enlace) resulta del intercambio múltiple de gluones entre los constituyentes fundamentales que poseen carga color. Conforme las partículas con carga color (quarks y gluones) se apartan, la energía en el campo de fuerza color entre ellas se incrementa y esta energía eventualmente se convierte en pares adicionales quark-antiquark. Los quarks y antiquarks entonces se combinan en hadrones y estas son las partículas que emergen.

Las combinaciones más sencillas de quarks  $|q\rangle$ 's y antiquarks  $|\bar{q}\rangle$ 's con carga color nula son los **mesones**  $|M\rangle = |q_1\rangle|\bar{q}_2\rangle \equiv |q_1\bar{q}_2\rangle$  y **bariones**  $|B\rangle = |q_1\rangle|q_2\rangle|q_3\rangle \equiv |q_1q_2q_3\rangle$ . En concordancia con el **Modelo Quark**, entre los muchos tipos de bariones observados están el protón  $|p\rangle = |uud\rangle$ , antiprotón  $|\bar{p}\rangle = |\bar{u}\bar{u}\bar{d}\rangle$  y neutrón  $|n\rangle = |udd\rangle$ . Las cargas eléctricas de los quarks se suman de tal forma que hacen que el protón tenga carga eléctrica  $+1$  y el neutrón carga eléctrica  $0$ . Otro número cuántico aditivo es el **número bariónico**, con valor de  $+1/3$  para cada quark y  $-1/3$  para cada antiquark, de tal forma que bariones y mesones tienen número bariónico  $+1$  y  $0$ , respectivamente. También se tiene el **número leptónico** con el valor  $+1$  para los leptones y  $0$  para los quarks. La carga eléctrica y los números bariónico y leptónico son números cuánticos aditivos que se conservan en cualquier proceso físico. La conservación del número bariónico implica que es imposible destruir o crear un quark individualmente, pero es posible crear o aniquilar un par quark-antiquark. Aun más, los quarks retienen su identidad bajo transiciones electromagnéticas o fuertes; esto es, transacciones tales como  $s \rightarrow u + \text{leptones}$  o  $s \rightarrow u + d\bar{u}$  ( $\bar{u}$  denota al antiquark  $u$ ) ocurren solo por interacciones débiles. Entre los muchos tipos de mesones están el pión

$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$ , kaón  $|K^-\rangle = |s\bar{u}\rangle$  y  $|B^0\rangle = |d\bar{b}\rangle$ .

El Modelo Estándar es un ejemplo de una **Teoría de Norma**, siendo los ingredientes más importantes en una teoría de norma el que es una **Teoría Cuántica de Campos** y el que su dinámica es gobernada por simetrías internas específicas. En una teoría cuántica de campos relativistas, dado el **Lagrangiano** de un sistema, el análisis teórico del decaimiento o dispersión de las partículas se realiza utilizando la técnica matemática conocida como **Reglas de Feynman** que con una serie de pasos simples permite determinar la estructura de la **amplitud de probabilidad** para cada interacción, de donde se calcula finalmente la **razón de decaimiento** o la **sección transversal** de colisión entre partículas. Los principios de simetría que gobiernan la dinámica de las partículas en una teoría de norma son los que principalmente permiten determinar la estructura del Lagrangiano.

Las simetrías constituyen además una guía útil para el estudio de las propiedades de estados ligados (como los hadrones), que son difíciles de analizar con una teoría cuántica de campos por sí sola y es entonces mucho más sencillo tener como guía únicamente a las simetrías. Así, a nivel de hadrones, en la parte de interacción del Lagrangiano, las simetrías de las interacciones entre ellos tienen un papel fundamental al determinar las **amplitudes de dispersión o de decaimiento** en términos de **constantes de acoplamiento** (que constituyen una medida de la intensidad de la interacción). Es importante enfatizar que las simetrías son actores principales en estas tareas y la estructura matemática para tratar con simetrías es la **Teoría de Grupos**.

Independientemente, es un hecho teórico la posibilidad física de tener otras combinaciones de quarks y antiquarks, también sin carga color neta. Experimentalmente es posible determinar la existencia de estos nuevos **hadrones exóticos** o **estados multiquark** teóricos, a través de sus productos de decaimiento permitidos por la física de partículas. Una herramienta teórica, auxiliar en el análisis de los decaimientos de partículas son las llamadas **Reglas de Suma**, que establecen relaciones entre las diferentes amplitudes de decaimiento de los estados involucrados.

La importancia de las reglas de suma no solo reside en su utilidad para realizar predicciones teóricas sobre procesos diferentes con base en un modelo, sino que además constituyen una herramienta para verificar las hipótesis del modelo empleado. Nuevas partículas han sido descubiertas con base en las predicciones de las reglas de suma para su masa o para sus posibles procesos de decaimiento.

En el Capítulo 1 se presentan temas básicos de la Teoría de Grupos ne-

cesarios para la realización de este trabajo y se comenta su utilidad en la descripción de las simetrías en la física de partículas. En el Capítulo 2 se detallan las características del grupo  $SU(3)$  en relación con el papel fundamental de los quarks en la composición de hadrones y se describe el Modelo Quark, incluyendo los estados barión, mesón y hadrones exóticos. En el Capítulo 3 se analiza como se determinan las expresiones generales para las amplitudes de decaimiento fuerte en el límite de simetría de sabor y considerando el rompimiento de la simetría a primer orden, además, se da un ejemplo del cálculo de las reglas de suma para un proceso particular. Finalmente, en el Capítulo 4 se obtienen las reglas de suma para los decaimientos de los estados multiquark a considerar en esta tesis.

# Objetivo

El objetivo del presente trabajo es determinar reglas de suma para las amplitudes de decaimiento fuerte de estados multiquark con número bariónico  $+2$  al decaer en dos bariones de espín  $1/2$  y también al decaer en un barión de espín  $1/2$  y un barión de espín  $3/2$ , extendiendo así resultados recientemente reportados en la literatura.

# Capítulo 1

## Grupos y Simetrías

La teoría de grupos es la rama de las matemáticas que subyace en el tratamiento de la simetría. Aunque no será necesaria la maquinaria formal de la teoría de grupos, es útil introducir algunos de los conceptos y la terminología que pertenece a la jerga de la física de partículas. Se tomará al **grupo de rotaciones** como un ejemplo ilustrativo.

### 1.1. Teoría de Grupos

El conjunto de rotaciones de un sistema forma un **grupo**, siendo cada rotación un elemento del grupo y siendo la aplicación sucesiva de rotaciones la regla de composición del grupo. Aun más, las rotaciones forman un **grupo de simetría** del sistema, es decir, constituyen un conjunto de operaciones que dejan sin cambio al sistema.

Por definición, la física no cambia por una operación de simetría, en particular, estas operaciones dejan invariantes las amplitudes de probabilidad de transición de un sistema. Por ejemplo, si bajo una rotación  $R$  el sistema se transforma como

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle. \quad (1.1)$$

La probabilidad de que un sistema descrito por  $|\psi\rangle$  sea encontrado en el estado  $|\phi\rangle$  no debe cambiar bajo  $R$ ,

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle|^2 \quad (1.2)$$

y entonces  $U(R)$  debe ser un **operador unitario**. Los operadores  $U(R_1)$ ,  $U(R_2)$ , etc., forman un grupo con exactamente la misma estructura que el grupo original  $R_1$ ,  $R_2$ , etc.; se dice que estos operadores forman una **representación unitaria** del grupo de rotaciones.

Aun más, el Hamiltoniano no cambia por una operación de simetría  $R$  sobre el sistema y los elementos de matriz se preservan:

$$\langle \phi' | H | \psi' \rangle = \langle \phi | U^\dagger H U | \psi \rangle = \langle \phi | H | \psi \rangle \quad (1.3)$$

de forma que

$$H = U^\dagger H U \quad \text{o} \quad [U, H] \equiv UH - HU = 0. \quad (1.4)$$

La transformación  $U$  no tiene dependencia explícita en el tiempo de forma que la **ecuación de movimiento**,

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (1.5)$$

no cambia por la operación de simetría. En consecuencia el valor de expectación de  $U$  es una **constante de movimiento**:

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | U | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | UH - HU | \psi(t) \rangle = 0. \quad (1.6)$$

El grupo de rotaciones es un **grupo de Lie** y la propiedad fundamental es que toda rotación se puede expresar como el producto de una sucesión de rotaciones infinitesimales, rotaciones arbitrariamente cercanas a la identidad. El grupo está completamente definido por la **vecindad de la identidad**. Como caso particular, considere una rotación a través de un ángulo infinitesimal  $\epsilon$  alrededor del eje 3 (o  $z$ ). A primer orden en  $\epsilon$ ,

$$U = 1 - i\epsilon J_3. \quad (1.7)$$

El operador  $J_3$  se denomina el **generador** de rotaciones alrededor del eje 3. Se puede identificar al generador  $J_3$  con la tercera componente del **operador momento angular**,  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z) = (J_1, J_2, J_3)$ , donde  $J_z = xp_y - yp_x$ .

El generador  $J_3$  es **hermiteano**:

$$1 = U^\dagger U = (1 + i\epsilon J_3^\dagger)(1 - i\epsilon J_3) = 1 + i\epsilon(J_3^\dagger - J_3) + O(\epsilon^2) \quad (1.8)$$

y en consecuencia es un **observable mecánico cuántico**. De (1.6) se concluye que los **eigenvalores** del observable  $J_3$  son constantes de movimiento. Son números cuánticos que se conservan. Una simetría del sistema conduce a una **ley de conservación**. La simetría rotacional implica la conservación del momento angular.

Una rotación a través de un ángulo finito  $\theta$  alrededor del eje 3 puede construirse entonces por una sucesión de  $n$  rotaciones infinitesimales

$$U(\theta) = (U(\epsilon))^n = \left(1 - i\frac{\theta}{n}J_3\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-i\theta J_3}. \quad (1.9)$$

Análogamente se definen los generadores hermiteanos de las rotaciones alrededor de los ejes 1 y 2,  $J_1$  y  $J_2$ , respectivamente. El **álgebra** de los generadores se puede escribir como

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l, \quad (1.10)$$

con  $\epsilon_{jkl}$  el tensor de Levi-Civita. Las relaciones (1.10) definen completamente las propiedades del grupo; los coeficientes  $\epsilon_{jkl}$  se denominan las **constantes de estructura** del grupo. Se dice que los  $J_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) forman un **álgebra de Lie**.

Solo los eigenvalores de un generador son números cuánticos que se conservan ya que dos generadores no conmutan entre sí. Funciones no lineales de los generadores que conmutan con todos los generadores se llaman **operadores de Casimir**. Para el grupo de rotaciones,

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \quad (1.11)$$

es el único operador de Casimir,

$$[J^2, J_i] = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.12)$$

En consecuencia, se pueden construir **eigenestados** simultáneos  $|jm\rangle$  de  $J^2$  y de uno de los generadores, digamos  $J_3$ . Usando solo (1.10), es posible demostrar que

$$J^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle \quad \text{y} \quad J_3|jm\rangle = m|jm\rangle \quad (1.13)$$

con los eigenvalores determinados por

$$j = \text{entero o semientero o cero} \quad \text{y} \quad m = -j, -j+1, \dots, j. \quad (1.14)$$

Un estado  $|jm\rangle$  no es eigenestado del operador  $J_2$ , sin embargo, este operador tiene elementos de matriz no nulos unicamente entre estados con el mismo valor de  $j$ , así que la posibilidad mas general es que  $|jm\rangle$  se transforme bajo una rotación alrededor del eje 2 en un ángulo  $\theta$  como una combinación lineal de los  $2j + 1$  estados  $|jm'\rangle$

$$e^{-i\theta J_2}|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^j d_{m'm}^j(\theta)|jm'\rangle, \quad (1.15)$$

donde los coeficientes  $d_{m'm}^j(\theta) = \langle jm'|e^{-i\theta J_2}|jm\rangle$ . De (1.15) se observa que los estados con el mismo valor de  $j$  pero con todos los posibles valores de  $m$  se transforman entre ellos mismos bajo rotaciones. Se dice entonces que estos estados constituyen la base de una **representación irreducible** con dimensión  $2j + 1$  del grupo de rotación. Al conjunto de estados se le llama **multiplete**.

## 1.2. El Grupo SU(2)

En la representación no trivial ( $j \neq 0$ ) de dimensión mas baja del grupo de rotaciones,  $j = 1/2$ , los generadores pueden escribirse como

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.16)$$

donde  $\sigma_i$  son las **matrices de Pauli**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

La base (o conjunto de estados base),  $|j, m\rangle$ , para esta representación se elige, por convención, como los eigenestados (eigenvectores) de  $\sigma_3$ , esto es, los vectores columna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad (1.18)$$

este multiplete tiene dimensión dos y constituye a un **doblete**.

Los generadores, es decir, las matrices de Pauli, son hermiteanos, ver (1.8), y las transformaciones (matrices de transformación) (1.9)

$$U(\theta_i) = e^{-i\theta_i\sigma_i/2} \quad (1.19)$$

son unitarias.

El conjunto de todas las matrices unitarias  $2 \times 2$  se conoce como el grupo  $U(2)$ . Sin embargo, el grupo  $U(2)$  es mas grande que el grupo de matrices  $U(\theta_i)$ , Ec. (1.19), ya que los generadores  $\sigma_i$  tienen todos traza cero. Ahora, para cualquier matriz sin traza, hermiteana,  $\sigma$ , se puede demostrar que

$$\det(e^{i\sigma}) = e^{i\text{Tr}(\sigma)} = 1. \quad (1.20)$$

Ya que el determinante unitario se preserva en la multiplicación de matrices, el conjunto de matrices unitarias sin traza  $2 \times 2$  forman un **subgrupo**, **SU(2)** de  $U(2)$ . El grupo  $SU(2)$  se denomina **grupo especial unitario** en dos dimensiones. El álgebra de  $SU(2)$  es justamente el álgebra de los generadores  $J_i$ , Ecs. (1.10). Existen entonces representaciones de  $SU(2)$  con dimensiones 1, 2, 3, 4, ... que corresponden a  $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ , respectivamente. La representación matricial de dimensión dos de  $SU(2)$  la constituyen justamente las matrices de Pauli y se denomina la **representación fundamental** de  $SU(2)$ , la representación a partir de la cual se pueden construir todas las otras representaciones.

### 1.3. Combinación de Representaciones

Considere un sistema compuesto formado por dos partes,  $a$  y  $b$ , cada una con momento angular descrito por un operador de momento angular  $\vec{J}_a$  o  $\vec{J}_b$ .  $a$  y  $b$  pueden ser, por ejemplo, los espines de dos partículas, o el espín y el momento angular orbital de una sola partícula. Si los momentos angulares son cinemáticamente independientes, es decir si  $[\vec{J}_a, \vec{J}_b] = 0$ , entonces los eigenvalores de los operadores  $J_a^2$  y  $J_{a3}$  y  $J_b^2$  y  $J_{b3}$  se pueden determinar independientemente. En consecuencia, un posible estado del sistema completo que es un eigenestado de estos cuatro operadores es de la forma

$$|j_a m_a\rangle |j_b m_b\rangle. \quad (1.21)$$

Sin embargo, el operador momento angular total

$$\vec{J} = \vec{J}_a + \vec{J}_b, \quad (1.22)$$

cuyo operador tercera componente

$$J_3 = J_{a3} + J_{b3}, \quad (1.23)$$

también satisface el álgebra de Lie (1.10) y los números cuánticos que se conservan son los eigenvalores de los operadores  $J^2$  y  $J_3$ .

De (1.23) se observa que  $|j_a m_a\rangle|j_b m_b\rangle$  es un eigenestado de  $J_3$  con eigenvalor

$$m = m_a + m_b. \quad (1.24)$$

Sin embargo,  $|j_a m_a\rangle|j_b m_b\rangle$  no es en general un eigenestado del operador  $J^2 = (\vec{J}_a + \vec{J}_b)^2 = J_a^2 + J_b^2 + 2\vec{J}_a \cdot \vec{J}_b$  debido al último término. En general,  $|j_a m_a\rangle|j_b m_b\rangle$  será una combinación lineal de eigenestados  $|j m\rangle$  de los operadores  $J_3$  y  $J^2$ , todos con  $m = m_a + m_b$  y con valores diferentes de  $j$ :

$$|j_a m_a\rangle|j_b m_b\rangle = \sum_j C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j m} |j m\rangle. \quad (1.25)$$

Las bases  $|j_a m_a\rangle|j_b m_b\rangle$  y  $|j m\rangle$  se pueden expresar una en términos de la otra:

$$|j m\rangle = \sum_{m_a} C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j m} |j_a m_a\rangle|j_b m_b\rangle, \quad (1.26)$$

aquí no se requiere una suma separada sobre  $m_b$  ya que su valor está determinado por  $m$  y  $m_a$ .

Los coeficientes  $C$  se llaman **coeficientes de Clebsch-Gordan**. Estos coeficientes se calculan sistemáticamente a partir del estado  $|j m\rangle$  con el mayor valor posible de  $m = m_a + m_b$ . Esto ocurre cuando  $m_a = j_a$  y  $m_b = j_b$  que son sus máximos valores posibles. Para permitir este valor de  $m$ , pero no uno mayor,  $j$  debe ser  $j_a + j_b$ . De (1.26) se observa que en esta caso la suma solo puede contener un término

$$|j_a + j_b, j_a + j_b\rangle = C_{j_a j_a, j_b j_b}^{j_a + j_b, j_a + j_b} |j_a j_a\rangle|j_b j_b\rangle, \quad (1.27)$$

la normalización de estados requiere que  $|C|^2 = 1$  y con la elección de fase  $C = +1$  se obtiene que

$$|j_a + j_b, j_a + j_b\rangle = |j_a j_a\rangle|j_b j_b\rangle, \quad (1.28)$$

aplicando el **operador escalera**,  $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ , que tiene la propiedad

$$J_{\pm}|j m\rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{1/2} |j, m \pm 1\rangle \quad (1.29)$$

a ambos lados de (1.28) se obtiene

$$\begin{aligned} & [2(j_a + j_b)]^{1/2} |j_a + j_b, j_a + j_b - 1\rangle = \\ & = (2j_b)^{1/2} |j_a j_a\rangle |j_b, j_b - 1\rangle + (2j_a)^{1/2} |j_a, j_a - 1\rangle |j_b j_b\rangle. \end{aligned} \quad (1.30)$$

la comparación de (1.30) con (1.26) para  $j = j_a + j_b$  y  $m = j_a + j_b - 1$  permite determinar los coeficientes de Clebsch-Gordan

$$C_{j_a, j_a; j_b, j_b - 1}^{j_a + j_b, j_a + j_b - 1} = \left( \frac{j_b}{j_a + j_b} \right)^{1/2}, \quad C_{j_a, j_a - 1; j_b, j_b}^{j_a + j_b, j_a + j_b - 1} = \left( \frac{j_a}{j_a + j_b} \right)^{1/2}. \quad (1.31)$$

Este procedimiento (usando ortogonalización cuando sea necesario) para obtener los eigenestados de momento angular total recorriendo todos los posibles valores del eigenvalor  $j$  hasta alcanzar su valor, mínimo que corresponde a  $|j_a - j_b|$ , permite determinar los correspondientes coeficientes de Clebsch-Gordan en cada etapa.

Así, el “producto” de las dos representaciones irreducibles de dimensiones  $2j_a + 1$  y  $2j_b + 1$ , se puede descomponer en la suma de representaciones irreducibles de dimensión  $2j + 1$  con

$$j = |j_a - j_b|, |j_a - j_b| + 1, \dots, j_a + j_b. \quad (1.32)$$

Las Ec. (1.32) junto con  $m = m_a + m_b$  constituyen las **reglas de adición de momentos angulares de SU(2)**.

Como un ejemplo, considere dos partículas,  $a$  y  $b$ , de espín  $1/2$  donde cada estado tiene proyecciones de espín  $\pm 1/2$  (ver (1.18))

$$|s_a m_a\rangle = \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{y} \quad |s_b m_b\rangle = \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (1.33)$$

De acuerdo a (1.32), el sistema total  $|s, m\rangle$ , compuesto por estos dos dobletes, puede tener espín total  $s = 1$  o  $s = 0$ . Las proyecciones de espín a lo largo del eje 3 son  $m = -1, 0, +1$  para  $s = 1$  (**triplete**) y  $m = 0$  para  $s = 0$  (**singlete**)

$$|s m\rangle = |1, \pm 1 \text{ o } 0\rangle \quad \text{y} \quad |s m\rangle = |0, 0\rangle. \quad (1.34)$$

De (1.26) y empleando el operador escalera  $J_-$  (1.29), la descomposición en términos de los estados individuales (1.33) está dada por

$$\begin{aligned}
 |1, 1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \\
 |1, 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\
 |1, -1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
 |0, 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \right),
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

cada descomposición de los estados con  $s = 1$  es simétrica ante el intercambio de los estados individuales y por ortogonalidad el estado  $|0, 0\rangle$  tiene una descomposición antisimétrica.

Usando las dimensiones (esto es, los tamaños de los multipletes) para etiquetar a las representaciones irreducibles, la descomposición (1.35) puede escribirse simbólicamente como

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}. \tag{1.36}$$

## 1.4. $SU(2)$ de Isoespín

La masa del protón y la del neutrón son muy parecidas. Este hecho sugirió que en física nuclear se considere al protón y al neutrón como distintas manifestaciones de una misma partícula llamada **nucleón**,  $|N\rangle$ , en analogía con el electrón cuyos estados con proyecciones de espín  $+1/2$  o  $-1/2$  se consideran como una y no dos partículas. Se dice que un nucleón puede estar en un estado protón o en un estado neutrón.

La estructura matemática usada para describir la similitud en masas del protón y el neutrón es una copia de la usada para el espín, llamado en este caso **isoespín**. Se postula que cada nucleón tiene isoespín total  $I = 1/2$  con terceras componentes  $I_3 = \pm 1/2$  para protón y neutrón, respectivamente.

Existe amplia evidencia experimental de que la interacción fuerte es invariante ante transformaciones de isoespín, por ejemplo, que es independiente de los valores de  $I_3$ . Además, la invariancia de isoespín requiere que para cada  $I$  se obtenga la misma física nuclear para cada uno de los subestados  $I_3 = -I, -I+1, \dots, +I$ . Exactamente como la invariancia rotacional asegura

que los  $2J + 1$  subestados de un sistema aislado de momento angular total  $J$  describen sistemas físicos exactamente equivalentes.

Así, el concepto de isoespín se introduce debido a que se puede considerar que el nucleón tiene un grado de libertad interno con dos estados permitidos, el protón  $|p\rangle$  y el neutrón  $|n\rangle$ , a los que la interacción fuerte no distingue. Se tiene entonces una simetría  $SU(2)$ , en este caso una simetría  $SU(2)$  de isoespín, en la que los estados  $|I, I_3\rangle$ ,

$$|p\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{y} \quad |n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (1.37)$$

forman al doblete que constituye la representación fundamental de  $SU(2)$ . En general, la partícula con mayor carga positiva se escoge para tener el máximo valor de  $I_3$ . Esta es una copia matemática del espín, en la que los generadores de isoespín satisfacen el álgebra (ver (1.10))

$$[I_j, I_k] = i\epsilon_{jkl}I_l. \quad (1.38)$$

En la representación fundamental los generadores se denotan

$$I_i = \frac{1}{2}\tau_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.39)$$

donde

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

son la versión isoespín de las matrices de Pauli (1.17). Estas matrices actúan sobre los estados protón y neutrón representados por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |p\rangle \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |n\rangle. \quad (1.41)$$

Un sistema compuesto nucleón-nucleón tiene estados de isoespín  $|I, I_3\rangle$  dados por (compare con (1.35))

$$\begin{aligned} |1, +1\rangle &= |p\rangle |p\rangle \\ |1, 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} (|p\rangle |n\rangle + |n\rangle |p\rangle) \\ |1, -1\rangle &= |n\rangle |n\rangle \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$|0, 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|p\rangle |n\rangle - |n\rangle |p\rangle).$$

Note que los estados del triplete ( $I = 1$ ) son simétricos ante el intercambio  $|p\rangle \leftrightarrow |n\rangle$  y el estado singlete ( $I = 0$ ) es antisimétrico.

## Capítulo 2

# SU(3) de Sabor y Modelo Quark

El nucleón perdió su papel único en la física de partículas con el descubrimiento del pión en 1947. Posteriormente, muchos más hadrones fueron identificados. Sin embargo, algunas de las nuevas partículas a pesar de ser lo suficientemente masivas como para decaer en objetos más ligeros sin violar la conservación de la carga eléctrica o del número bariónico, tenían tiempos de vida muy grandes en la escala de tiempos de la interacción fuerte. Se consideró entonces la propuesta de un nuevo número cuántico aditivo, llamado **extrañeza**,  $S$ , para clasificar a los hadrones. Se asignó un valor de extrañeza a cada hadrón y se postuló que las interacciones electromagnética y fuerte están prohibidas a menos que la reacción conserve el valor de  $S$ .

Con la existencia de un segundo número cuántico aditivo  $S$ , además de  $I_3$ , se propuso ampliar el grupo de simetría SU(2) de isospín a un grupo mayor. El nuevo grupo de simetría tendría que agrupar de forma natural conjuntos de hadrones con propiedades similares en sus representaciones multiplete. Esta tarea fue relativamente sencilla para el grupo SU(2) de isospín, el neutrón y el protón, que siendo casi idénticos en masa, se agrupan fácilmente en un doblete de SU(2) clasificados por su valor de  $I_3$ . Sin embargo, no existen partículas con extrañeza distinta de cero cercanas en masa al nucleón, así que fue difícil de identificar el agrupamiento apropiado y la elección del nuevo grupo de simetría estuvo lejos de ser obvia. El grupo SU(3) fue propuesto originalmente en 1961 (Gell-Mann 1961, Ne'eman 1961) y agrupa a las partículas conocidas en representaciones de SU(3). Es claro que la simetría extra que enlaza partículas extrañas con no extrañas es mucho más aproxi-

mada que la de isoespín. No fue sino hasta 1964 que la simetría de SU(3) fue firmemente establecida (Gell-Mann y Ne'eman 1964). La estructura en representaciones de SU(3) sugería fuertemente la existencia de una subestructura. El papel del grupo SU(3) de isoespín y extrañeza es el de poner el escenario para la entrada de los quarks en la física de partículas. El grupo de simetría SU(3) que incorpora a los quarks como estructuras fundamentales se conoce como el grupo **SU(3) de sabor**, siendo los quarks con sabor  $|u\rangle$ ,  $|d\rangle$  y  $|s\rangle$  los más ligeros. El modelo teórico que describe a los hadrones en términos de quarks constituyentes se llama Modelo Quark (Gell-Mann 1964; Zweig 1964).

## 2.1. El Grupo de Sabor SU(3)

En general, el conjunto de matrices unitarias  $3 \times 3$  con determinante 1 forman el grupo SU(3). Se pueden tomar como generadores a cualquiera de las  $3^2 - 1 = 8$  matrices  $3 \times 3$  linealmente independientes, hermiteanas y de traza cero. El número máximo de generadores que conmutan entre sí es 2 ya que solo es posible tener a dos de estas matrices sin traza diagonales. Este número se llama el **rango** del grupo, así que SU(3) tiene rango 2 y SU(2) tiene rango 1. Se puede demostrar que el número de operadores de Casimir y el número de representaciones fundamentales del grupo son iguales al rango.

La **primera representación fundamental de SU(3)** es un triplete. En esta representación, los generadores son matrices  $3 \times 3$ . Tradicionalmente se denotan como  $\lambda_i$ , con  $i = 1, \dots, 8$ , y como matrices diagonales se toman a

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

con eigenvalores simultáneos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Por convención, en lugar de la extrañeza,  $S$ , los estados quark se describen utilizando un nuevo número cuántico aditivo conocido como **hipercarga**,  $Y$ , sin significado físico adicional, definido por

$$Y = S + B, \quad (2.3)$$

donde a cada quark se le ha asignado número bariónico  $B = +1/3$  y espín  $1/2$ . La carga eléctrica (en unidades de la carga del electrón) es

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (2.4)$$

Con tres sabores y siendo que la primera representación fundamental de SU(3) es un triplete, los números cuánticos  $Y$ ,  $I$ , e  $I_3$ , asignados a los estados  $|\boldsymbol{\mu}, Y, I, I_3\rangle$  en el multiplete quark base ( $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{3}$ ) son:

$$\begin{aligned} |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |u\rangle, \\ |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |d\rangle, \\ |\mathbf{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |s\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Es decir, al quark  $|u\rangle$  se le asignan los números cuánticos  $I = 1/2$ ,  $I_3 = +1/2$  y  $S = 0$ , al quark  $|d\rangle$  se le asignan  $I = 1/2$ ,  $I_3 = -1/2$  y  $S = 0$  y al quark  $|s\rangle$ ,  $I = 0$  y  $S = -1$ .

### 2.1.1. Diagramas de Young

Una notación general para el multiplete  $\boldsymbol{n}$  (dimensión  $n$ ) de la primera representación fundamental de SU( $n$ ) es por medio del **diagrama de Young** de una sola caja:

$$\square : \boldsymbol{n} \quad (2.6)$$

Así, el triplete (2.5) de la primera representación fundamental de SU(3) tiene como simbolo el diagrama

$$\square : \mathbf{3}. \quad (2.7)$$

Las reglas generales para obtener la descomposición del producto de dos representaciones por medio de los diagramas de Young son: Dibuje los dos diagramas de las representaciones, marcando cada caja del segundo diagrama con el numero de fila a la que pertenece. Adjunte al primer diagrama cada caja del segundo, en todas las formas posibles, restringiendo el diagrama combinado a las siguientes reglas de un **arreglo estándar**:

- (1) Ninguna fila es mas larga que la fila de arriba.
- (2) Ninguna columna tiene mas de  $n$  cajas si el grupo es SU( $n$ ).
- (3) Al recorrer el diagrama, iniciando desde la derecha con la fila superior, en cada punto el numero de cajas encontradas con el numero  $i$  debe ser menor o igual al numero de cajas con  $i - 1$ .
- (4) Los números no deben de disminuir al ir de izquierda a derecha a lo largo de cada fila.
- (5) Los números deben incrementarse al ir de arriba a abajo en cada columna.

Como un ejemplo trivial, la descomposición del producto de dos representaciones fundamentales de SU( $n$ ) es,

$$\square \times \square = \square \times \boxed{1} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}. \quad (2.8)$$

Para SU(3), con la identificación

$$\boxed{1} = |u\rangle, \quad \boxed{2} = |d\rangle, \quad \boxed{3} = |s\rangle, \quad (2.9)$$

los nueve posibles estados de las representaciones  $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$  y  $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$  están dados por los arreglos estándar,

$$\begin{array}{|c|c|}, \quad \begin{array}{|c|c|}, \quad \begin{array}{|c|c|}, \quad \begin{array}{|c|c|}, \quad \begin{array}{|c|c|}, \quad \begin{array}{|c|c|}, \quad (2.10)$$

y

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad (2.11)$$

respectivamente. Es decir, en SU(3), la **multiplicidad** de  $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$  es la de un sextete y la multiplicidad de  $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$  es la de un triplete,

$$\square \times \square = \square\square + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} : \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^*, \quad (2.12)$$

se ha utilizado el símbolo  $\mathbf{3}^*$  para el triplete  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  ya que  $\square$  y  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  no son representaciones equivalentes.

En general, para  $SU(n)$ , los estados de dos partículas pertenecientes a la representación compuesta  $\square\square$  son *totalmente simétricos* ante el intercambio de los estados mientras que los estados de  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  son *totalmente anti-simétricos*.

Un multiplete dado de  $SU(3)$  contiene un número de multipletes de  $SU(2)$ , por ejemplo, la primera representación fundamental de  $SU(3)$ , Ecs. (2.5), contiene a un doblete y a un singlete de  $SU(2)$ . En general, la receta para encontrar los multipletes de  $SU(n-1)$  en un diagrama de  $SU(n)$  es considerar todas las posibles formas de poner  $n$ 's en las cajas, siendo consistente con las reglas de un arreglo estándar, desde cero  $n$ 's hasta el máximo número permitido. Entonces se eliminan todas las cajas con  $n$ 's y los diagramas restantes son las representaciones de  $SU(n-1)$ .

Por ejemplo, para el antitriplete  $\mathbf{3}^*$  de  $SU(3)$ ,  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ , las formas posibles de poner un 3 y obtener un arreglo estándar, son  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  y  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ . Al retirar las cajas con el número 3 se obtienen las representaciones de  $SU(2)$ ,

$$SU(3) : \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \supset \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \square \equiv \bullet + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} : SU(2), \quad (2.13)$$

en  $SU(2)$   $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  es un singlete (representado por  $\bullet$ ) y  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  es un doblete. Es decir,

$$SU(3) : \mathbf{3}^* \supset \mathbf{1} + \mathbf{2} : SU(2). \quad (2.14)$$

Los números cuánticos,  $Y$ ,  $I$ , e  $I_3$ , de los estados  $|\mu, Y, I, I_3\rangle$  en las representaciones  $\mu = \mathbf{6}$  y  $\mu = \mathbf{3}^*$  de  $SU(3)$  se obtienen fácilmente a partir de

los números cuánticos de los estados en el triplete fundamental  $\mathbf{3}$ , Ecs. (2.5), utilizando las **reglas de adición para los números cuánticos en SU(3)** (correspondientes a las reglas de adición de momentos angulares de SU(2) descritas en la Sec. 1.3):

$$\left. \begin{array}{l} \nu_a = (Y_a, I_a, I_{3a}) \\ \nu_b = (Y_b, I_b, I_{3b}) \end{array} \right\} \Rightarrow \nu = (Y, I, I_3), \text{ con } \begin{cases} Y = Y_a + Y_b; \\ I = |I_a - I_b|, \dots, I_a + I_b; \\ I_3 = I_{3a} + I_{3b}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Entonces, para el multiplete  $\mathbf{6}$  (simétrico):

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \Rightarrow |\mathbf{6}, \frac{2}{3}, 1, +1\rangle \\ |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \Rightarrow |\mathbf{6}, \frac{2}{3}, 1, 0\rangle \\ |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \Rightarrow |\mathbf{6}, \frac{2}{3}, 1, -1\rangle \end{array} \right\} : 3 \quad (2.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle |\mathbf{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0\rangle \Rightarrow |\mathbf{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\mathbf{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0\rangle \Rightarrow |\mathbf{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{array} \right\} : 2$$

$$|\mathbf{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0\rangle |\mathbf{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0\rangle \Rightarrow |\mathbf{6}, -\frac{4}{3}, 0, 0\rangle \} : 1$$

Y para el  $\mathbf{3}^*$  (antisimétrico):

$$|\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \Rightarrow |\mathbf{3}^*, \frac{2}{3}, 0, 0\rangle \equiv |\bar{s}\rangle \} : 1$$

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle |\mathbf{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0\rangle \Rightarrow |\mathbf{3}^*, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv |\bar{d}\rangle \\ |\mathbf{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\mathbf{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0\rangle \Rightarrow |\mathbf{3}^*, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |\bar{u}\rangle \end{array} \right\} : 2 \quad (2.17)$$

Al extremo derecho se muestra el contenido en multipletes de SU(2) y se ha introducido la notación  $|\bar{u}\rangle$ ,  $|\bar{d}\rangle$  y  $|\bar{s}\rangle$ , para los estados de la representación antisimétrica debido a que estos sirven también como los estados base de la **segunda representación fundamental de SU(3)**.  $|\bar{u}\rangle$ ,  $|\bar{d}\rangle$  y  $|\bar{s}\rangle$ , se interpretan como los antiquarks de los estados  $|u\rangle$ ,  $|d\rangle$  y  $|s\rangle$ , respectivamente.

### 2.1.2. Coeficientes de Clebsch-Gordan para SU(3)

Notación general, como hasta ahora una representación de dimensión  $\mu$  de SU(3) se denotará por  $\boldsymbol{\mu}$  y los números cuánticos,  $Y$ ,  $I$  e  $I_3$  de los estados en el multiplete se denotarán en forma conjunta por  $\nu$ . Así, el estado  $|\boldsymbol{\mu}, Y, I, I_3\rangle$  en la representación  $\boldsymbol{\mu}$  de SU(3) se representará por  $|\boldsymbol{\mu}, \nu\rangle$ .

En SU(3) (al igual que en SU(2)), el estado compuesto,  $|\boldsymbol{\mu}_a, \nu_a\rangle|\boldsymbol{\mu}_b, \nu_b\rangle$  está dado por una combinación lineal:

$$|\boldsymbol{\mu}_a, \nu_a\rangle|\boldsymbol{\mu}_b, \nu_b\rangle = \sum_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu} \left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_a & \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ \nu_a & \nu_b & \nu \end{array} \right) |\boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu\rangle, \quad (2.18)$$

donde  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  recorre todas las representaciones contenidas en la serie Clebsch-Gordan del producto  $\boldsymbol{\mu}_a \otimes \boldsymbol{\mu}_b$  y el índice  $\gamma$  cubre la posibilidad de que una misma representación aparezca mas de una ocasión en esta expansión (como es el caso del octete en la expansión  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{27}$ ).

Los números cuánticos  $\nu$  se obtienen a partir de  $\nu_a$  y  $\nu_b$  utilizando las reglas de adición para SU(3), Ecs. (2.15).

Los coeficientes,

$$\left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_a & \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ \nu_a & \nu_b & \nu \end{array} \right), \quad (2.19)$$

son los **coeficientes de Clebsch-Gordan para SU(3)**, en este trabajo se utilizaron las tablas de coeficientes determinadas por McNAMEE, J. y CHILTON 1964.

Los coeficientes de Clebsch-Gordan para SU(3) se pueden factorizar en un **factor isoescalar** y un coeficiente de Clebsch-Gordan para SU(2) de *isoespín* (descritos en la Sec. 1.3 para el momento angular):

$$\left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_a & \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ \nu_a & \nu_b & \nu \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_a & \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ Y_a I_a & Y_b I_b & Y I \end{array} \right) C_{I_a I_{3a}, I_b I_{3b}}^{II I_3}. \quad (2.20)$$

Además, se satisfacen relaciones de ortogonalidad que permiten invertir (2.18):

$$|\boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu\rangle = \sum_{\nu_a, \nu_b} \left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_a & \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ \nu_a & \nu_b & \nu \end{array} \right) |\boldsymbol{\mu}_a, \nu_a\rangle|\boldsymbol{\mu}_b, \nu_b\rangle. \quad (2.21)$$

## 2.2. Modelo Quark

De acuerdo al Modelo Quark, todos los hadrones están formados por una pequeña variedad de entidades mas básicas llamadas quarks, ligados juntos en formas diferentes.

### 2.2.1. Bariones

En el Modelo Quark, los bariones están formados por tres quarks ligados juntos. Las representaciones en que se encuentran organizados los bariones se obtienen entonces por la combinación de tres representaciones fundamentales,

$$\begin{aligned}
 \square \times \square \times \square &= \\
 &= \square \times \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = \left( \square \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \left( \square \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = \\
 &= \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

En  $SU(3)$ , con tres sabores de quarks, se tiene entonces

$$\square \times \square \times \square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \bullet. \tag{2.23}$$

es decir,

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3} \otimes (\mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^*) = (\mathbf{3} \otimes \mathbf{6}) \oplus (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*) = (\mathbf{10} \oplus \mathbf{8}) \oplus (\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}). \tag{2.24}$$

La descomposición de cada uno de los estados compuestos en el multiplete **10** es completamente simétrica ante el intercambio de cualquiera de los tres quarks, en el primer **8** cada descomposición tiene simetría mezclada simétrica (simétrica ante el intercambio de los dos primeros quarks) y en el segundo **8** simetría mezclada antisimétrica, la descomposición del singlete **1** es completamente antisimétrica.

Por lo tanto, en el Modelo Quark para  $SU(3)$ , los bariones están organizados en los multipletes

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M_S} \oplus \mathbf{8}_{M_A} \oplus \mathbf{1}_A. \quad (2.25)$$

Los números cuánticos,  $Y$ ,  $I$ , e  $I_3$ , de los estados  $|\mu, Y, I, I_3\rangle$  en estos multipletes se obtienen utilizando las reglas de adición para  $SU(3)$ , Ecs. (2.15), a partir de los números cuánticos de los estados en las representaciones  $\mathbf{3}$ ,  $\mathbf{6}$  y  $\mathbf{3}^*$ , de acuerdo a (2.24). Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{10}, 1, \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle \equiv |\Delta^{++}\rangle \\ |\mathbf{10}, 1, \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv |\Delta^+\rangle \\ |\mathbf{10}, 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |\Delta^0\rangle \\ |\mathbf{10}, 1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle \equiv |\Delta^-\rangle \end{array} \right\} : 4 \quad \left. \begin{array}{l} |\mathbf{10}, 0, 1, +1\rangle \equiv |\Sigma^{*+}\rangle \\ |\mathbf{10}, 0, 1, 0\rangle \equiv |\Sigma^{*0}\rangle \\ |\mathbf{10}, 0, 1, -1\rangle \equiv |\Sigma^{*-}\rangle \end{array} \right\} : 3 \quad (2.26)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{10}, -1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv |\Xi^{*0}\rangle \\ |\mathbf{10}, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |\Xi^{*-}\rangle \end{array} \right\} : 2 \quad |\mathbf{10}, -2, 0, 0\rangle \equiv |\Omega^-\rangle \quad \left. \right\} : 1$$

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{8}, 1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv |p\rangle \\ |\mathbf{8}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |n\rangle \end{array} \right\} : 2 \quad \left. \begin{array}{l} |\mathbf{8}, 0, 1, +1\rangle \equiv |\Sigma^+\rangle \\ |\mathbf{8}, 0, 1, 0\rangle \equiv |\Sigma^0\rangle \\ |\mathbf{8}, 0, 1, -1\rangle \equiv |\Sigma^-\rangle \end{array} \right\} : 3 \quad (2.27)$$

$$|\mathbf{8}, 0, 0, 0\rangle \equiv |\Lambda\rangle \quad \left. \begin{array}{l} |\mathbf{8}, -1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv |\Xi^0\rangle \\ |\mathbf{8}, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |\Xi^-\rangle \end{array} \right\} : 2$$

$$|\mathbf{1}, 0, 0, 0\rangle \quad \left. \right\} : 1 \quad (2.28)$$

la dimensión en  $SU(2)$  de cada uno de los multipletes en  $SU(3)$  se muestra al extremo derecho.

Es un hecho experimental que con tres sabores de quarks unicamente se observan bariones que corresponden a los multipletes  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{10}$  de  $SU(3)$ , estas representaciones tienen en común que la descomposición de sus estados es simétrica ante el intercambio de los dos primeros quarks. El octete contiene

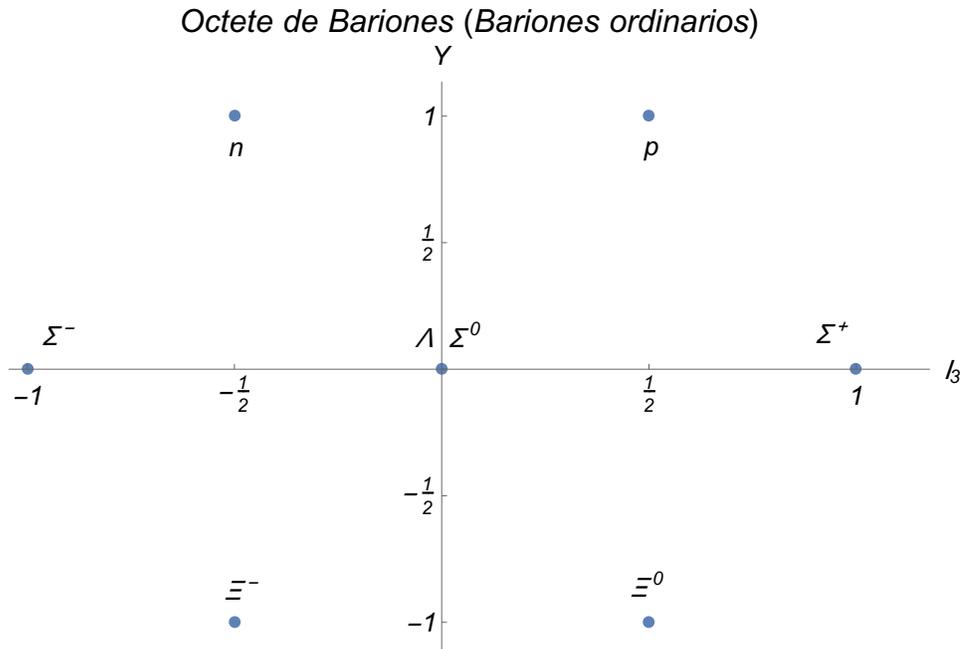


Figura 2.1: Asignaciones de bariones con espín  $1/2$  y paridad positiva a los estados  $(Y, I, I_3)$  del octete de  $SU(3)$ .

a los **bariones ordinarios** (Fig. 2.1), es decir, los bariones de espín  $1/2$  y paridad positiva: el **isodoublete** (doblete de  $SU(2)$  de isoespín) de nucleones,  $|p\rangle$  y  $|n\rangle$ ; el **isotriplete**,  $|\Sigma\rangle$ , el **isosinglete**  $|\Lambda\rangle$  y el isodoublete que consiste de las llamadas partículas Cascada,  $|\Xi^0\rangle$  y  $|\Xi^-\rangle$ . La representación **10** de  $SU(3)$  o **decuplete** acomoda a los bariones con espín  $3/2$  y paridad positiva, conocidos también como **resonancias** (Fig. 2.2), y contiene un **isocuartete**, un isotriplete, un isodoublete y un isosinglete. Usando los números cuánticos de estos isomultipletes en la Ec. (2.4) se determinan las cargas eléctricas de cada componente. En el isocuartete las cargas son  $+2$ ,  $+1$ ,  $0$  y  $-1$ , a estas cuatro partículas se les llama, en conjunto,  $|\Delta\rangle$ . El isotriplete es similar al triplete  $|\Sigma\rangle$  encontrado en el octete de bariones ordinarios y se llama  $|\Sigma^*\rangle$ . Análogamente, el isodoublete se llama  $|\Xi^*\rangle$ . Finalmente, el isosinglete se denomina  $|\Omega^-\rangle$ . Las asignaciones de los bariones correspondientes a los estados en las representaciones de  $SU(3)$  se incluyen en las Ecs. (2.26) y (2.27).

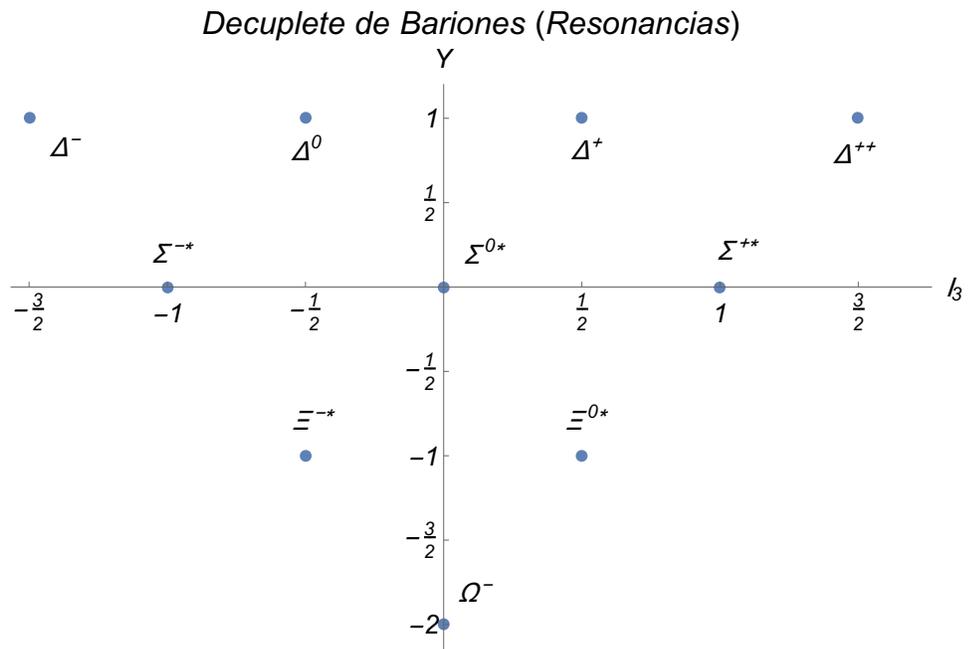


Figura 2.2: Asignaciones de bariones con espín  $3/2$  y paridad positiva a los estados  $(Y, I, I_3)$  del decuplete de  $SU(3)$ .

### 2.2.2. Mesones

En el Modelo Quark los mesones están formados por un quark y un antiquark. En general, los estados base que constituyen a la segunda representación fundamental de  $SU(n)$ ,  $\mathbf{n}^*$ , se interpretan como las antipartículas de los estados de la primera representación fundamental,  $\mathbf{n}$ . Por lo tanto, en  $SU(3)$ , las representaciones correspondientes a los mesones se obtienen por la combinación de la primera y segunda representaciones fundamentales de  $SU(3)$ , (2.5) y (2.17), respectivamente, es decir, de (2.24):

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (2.29)$$

Los números cuánticos  $Y$ ,  $I$ , e  $I_3$ , las correspondientes asignaciones de **mesones pseudoescalares** (espín 0 y paridad negativa) en los estados  $|\mu, Y, I, I_3\rangle$ , octete ( $\mu = \mathbf{8}$ ) y singlete ( $\mu = \mathbf{1}$ ) y el contenido en multipletes de  $SU(2)$  son (Fig. 2.3):

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{8}, 1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv |K^+\rangle \\ |\mathbf{8}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |K^0\rangle \end{array} \right\} : 2 \quad \left. \begin{array}{l} |\mathbf{8}, 0, 1, +1\rangle \equiv |\pi^+\rangle \\ |\mathbf{8}, 0, 1, 0\rangle \equiv |\pi^0\rangle \\ |\mathbf{8}, 0, 1, -1\rangle \equiv |\pi^-\rangle \end{array} \right\} : 3 \quad (2.30)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{8}, 0, 0, 0\rangle \equiv |\eta\rangle \end{array} \right\} : 1 \quad \left. \begin{array}{l} |\mathbf{8}, -1, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv |\bar{K}^0\rangle \\ |\mathbf{8}, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |K^-\rangle \end{array} \right\} : 2$$

$$|\mathbf{1}, 0, 0, 0\rangle \equiv |\eta'\rangle \} : 1 \quad (2.31)$$

## 2.3. Hadrones Exóticos

Un hadrón exótico (barión o mesón) se puede definir en el contexto del Modelo Quark. Un **barión exótico** es aquel estado multiquark cuyos números cuánticos son tales que este no puede ser un estado ligado de tres quarks,  $|q_1 q_2 q_3\rangle$ , y un **mesón exótico** es aquel estado multiquark cuyos números cuánticos son tales que este no puede ser un estado ligado de un quark y un antiquark,  $|q_1 \bar{q}_2\rangle$ .

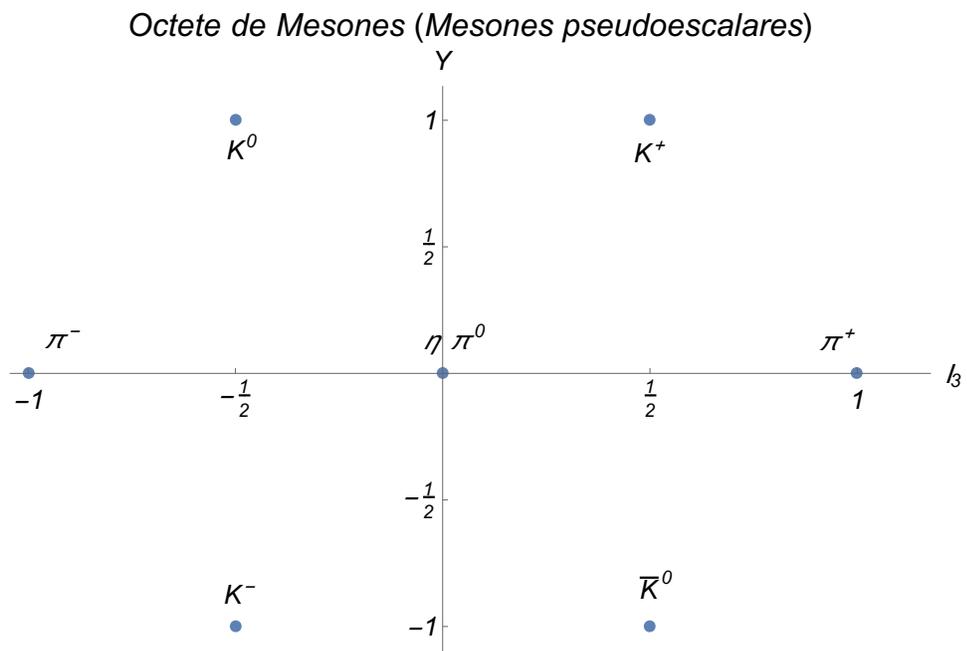


Figura 2.3: Asignaciones de mesones con espín 0 y paridad negativa a los estados  $(Y, I, I_3)$  del octete de  $SU(3)$ .

El concepto de hadrones exóticos no es nuevo, los **tetraquarks** (R. J. Jaffe 1977) son estados mesón-mesón,  $|T\rangle = |M_1 M_2\rangle = |q_1 \bar{q}_2 q_3 \bar{q}_4\rangle$  pero solo hasta la década pasada se empezaron a observar nuevas partículas consistentes con estos estados, las partículas  $X(3872)$  (Choi y col. 2003) y  $Z_c(3900)$  (Ablikim y col. 2013). Los **pentaquarks** (Strottman 1979; Högaasen y Sorba 1978; Lipkin 1987),  $|P\rangle = |BM\rangle = |q_1 q_2 q_3 q_4 \bar{q}_5\rangle$ , son combinaciones barión-mesón y a la fecha solo se han observado los pentaquarks  $P_c^+(4380)$  y  $P_c^+(4450)$ , descubiertos en 2015 por la colaboración LHCb (Aaij y col. 2015). Los **hexaquarks o sextaquarks**, considerados en este trabajo de tesis, son más interesantes, pueden ser de dos tipos, con número bariónico igual a 0 o 2.

El sextaquark con número bariónico 0 puede ser visto como un estado barión-antibarión, esto es,  $|B_6\rangle = |B_1 \bar{B}_2\rangle = |q_1 q_2 q_3 \bar{q}_4 \bar{q}_5 \bar{q}_6\rangle$ , o como un estado de tres mesones,  $|M_6\rangle = |M_1 M_2 M_3\rangle = |q_1 \bar{q}_2 q_3 \bar{q}_4 q_5 \bar{q}_6\rangle$ , se esperaría que estos sextaquarks decayeran en tres mesones, sin embargo, a la fecha no hay evidencia experimental de que esto ocurra.

Los **dibariones** (Oakes 1963), esto es, sextaquarks con número bariónico 2 están compuestos por dos bariones,  $|D\rangle = |B_1 B_2\rangle = |q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6\rangle$  y son aún más interesantes, de hecho, uno de estos sextaquarks ya existe en la naturaleza y es estable, este es el deuterón.

En términos de teoría de grupos, los bariones ordinarios pertenecen a la representación de dimensión ocho del grupo de sabor  $SU(3)$  y en la descomposición de los estados compuestos por dos bariones ordinarios:

$$\underbrace{\mathbf{8}}_{\text{Bariones}} \otimes \underbrace{\mathbf{8}}_{\text{Bariones}} = \underbrace{\mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{27}}_{\text{Multipletes de Dibariones}} \quad (2.32)$$

el deuterón aparece en la representación resultante  $\mathbf{10}^*$  (Oakes 1963). Los hexaquarks recibieron más atención después de la predicción de un estado ligado singlete de  $SU(3)$  conocido como dibarión H ( $|uuddss\rangle$ ) en 1977 usando el modelo de bolsa MIT (R. L. Jaffe 1977a, Erratum: R. L. Jaffe 1977b), este modelo también predice un octete de dibariones. Independientemente, usando el modelo quark, se ha estudiado la posible existencia de varias resonancias dibariónicas pertenecientes a este octete (Oka 1988). Sobre la base del análisis de datos experimentales se ha sugerido también la posible existencia de dibariones pertenecientes al multiplete  $\mathbf{27}$  (Xie y Zhang 1984, Xie 1989). Experimentalmente, la búsqueda de dibariones es una larga historia que se remonta a los años 50, con altas y bajas. Las primeras predicciones de un vasto número de estados dibariones inició una plétora de supuestas

reivindicaciones experimentales, pero finalmente ninguna de ellas sobrevivió a cuidadosas investigaciones experimentales adicionales. No obstante la difícil historia en la búsqueda experimental de dibariones, recientemente la colaboración WASA em COSY han finalmente confirmado evidencia solida para la existencia de un dibarión (Adlarson y col. [2014a](#), Adlarson y col. [2014b](#)), denotado  $d^*(2380)$ .

# Capítulo 3

## Amplitudes y Reglas de Suma

El proceso para determinar las reglas de suma en decaimientos mediados por una interacción con determinadas propiedades de simetría se describe detalladamente en este capítulo. La descripción de este proceso se presenta en dos etapas, inicia en la Sec. 3.1 con el cálculo de la amplitud de decaimiento y en la Sec. 3.2, con un caso particular como ejemplo, se detallan los pasos necesarios para obtener las reglas de suma entre amplitudes de decaimiento independientes.

### 3.1. Amplitud de Decaimiento

La aplicación mas inmediata del Modelo Quark es la de contar el número de amplitudes independientes de dispersión o de decaimiento en una teoría con propiedades específicas ante transformaciones de  $SU(3)$ .

Considere los decaimientos en dos cuerpos de un estado  $|\mu_a, \nu_a\rangle \equiv |a\rangle$  en dos partículas  $|\mu_b, \nu_b\rangle \equiv |b\rangle$  y  $|\mu_c, \nu_c\rangle \equiv |c\rangle$ , donde  $\mu$  es la representación a la que pertenece el estado correspondiente y donde  $\nu = (Y, I, I_3)$  denota el conjunto de sus números cuánticos, simbólicamente,  $a \rightarrow b + c$ .

La amplitud está dada por el elemento de matriz:

$$(\langle c| \langle b|) H_{\text{int}} |a\rangle = (\langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b |) H_{\text{int}} | \mu_a, \nu_a \rangle \equiv G [a \rightarrow b c], \quad (3.1)$$

donde  $H_{\text{int}}$  es la parte de interacción del Hamiltoniano. El estado final compuesto se expande utilizando los coeficientes de Clebsch-Gordan para  $SU(3)$ , Ec. (2.18),

$$|\boldsymbol{\mu}_b, \nu_b\rangle |\boldsymbol{\mu}_c, \nu_c\rangle = \sum_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu} \left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_c & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu \end{array} \right) |\boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu\rangle, \quad (3.2)$$

donde  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\boldsymbol{\mu}_b \otimes \boldsymbol{\mu}_c$  y el índice  $\gamma$  considera las posibles apariciones múltiples de  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  en esta expansión.

Los números cuánticos  $\nu$  se obtienen a partir de  $\nu_b$  y  $\nu_c$  utilizando las reglas de adición para SU(3), Ecs. (2.15):

$$\left. \begin{array}{l} \nu_b = (Y_b, I_b, I_{3b}) \\ \nu_c = (Y_c, I_c, I_{3c}) \end{array} \right\} \Rightarrow \nu = (Y, I, I_3), \text{ con } \begin{cases} Y = Y_b + Y_c; \\ I = |I_b - I_c|, \dots, I_b + I_c; \\ I_3 = I_{3b} + I_{3c}. \end{cases} \quad (3.3)$$

La expresión para el elemento de matriz (3.1) toma entonces la forma:

$$\langle \boldsymbol{\mu}_c, \nu_c | \langle \boldsymbol{\mu}_b, \nu_b | \rangle H_{\text{int}} | \boldsymbol{\mu}_a, \nu_a \rangle = \sum_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu} \left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_c & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu \end{array} \right) \langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu | H_{\text{int}} | \boldsymbol{\mu}_a, \nu_a \rangle. \quad (3.4)$$

### 3.1.1. Limite de Simetría

Las transiciones,  $a \rightarrow b + c$  debidas a la interacción fuerte, donde el Hamiltoniano de interacción es  $H_{\text{int}} = H_{\text{st}}$  con  $H_{\text{st}}$ , son invariantes ante el grupo SU(3) de sabor. En este limite de simetría SU(3), el elemento de matriz que aparece en el lado derecho de la expresión general (3.4) satisface (con  $H_{\text{int}} = H_{\text{st}}$ ):

$$\langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu | H_{\text{st}} | \boldsymbol{\mu}_a, \nu_a \rangle = g_{\boldsymbol{\mu}_\gamma}^{0\gamma} \delta_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \boldsymbol{\mu}_a} \delta_{\nu, \nu_a}, \quad (3.5)$$

donde  $g_{\boldsymbol{\mu}_\gamma}^{0\gamma}$  es una constante de acoplamiento, un parámetro constante ( $\gamma$  considera las posibles apariciones múltiples de  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  en  $\boldsymbol{\mu}_b \otimes \boldsymbol{\mu}_c$  y  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  recorre las representaciones en esta expansión). La Ec. (3.5) expresa el hecho de que, en el limite de simetría de SU(3), las transiciones,  $a \rightarrow b + c$ , solo pueden realizarse entre estados pertenecientes al mismo tipo de multiplete,  $\boldsymbol{\mu}_a$ , y que la amplitud no puede depender de los números cuánticos del estado inicial en particular (es decir, de  $\nu_a$ ). Sustituyendo (3.5) en (3.4) es posible realizar la suma sobre  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  y  $\nu$ .

Por lo tanto, en el límite de simetría de SU(3), *todas* las amplitudes de decaimiento para el proceso  $a \rightarrow b + c$  están descritas en términos de coeficientes de Clebsch-Gordan y de las constantes de acoplamiento  $g_{\mu_a}^{0\gamma}$ :

$$\langle \langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b | \rangle H_{\text{st}} | \mu_a, \nu_a \rangle = \left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_a \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_a}^{0\gamma}, \quad (3.6)$$

donde aquí  $\gamma$  distingue la posible aparición múltiple de la representación  $\mu_a$  en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c$ .

### 3.1.2. Rompimiento de la Simetría

En términos del Modelo Quark, la simetría de sabor SU(3) está rota por la desigualdad de las masas de los quarks  $|u\rangle$  y  $|d\rangle$  y el quark  $|s\rangle$ . Esto justifica la hipótesis de que la parte del Hamiltoniano de interacción que viola SU(3) se transforma como la componente de la representación octete de SU(3) con isoespín e hipercarga cero. Esto puede entenderse considerando que el responsable del rompimiento de la simetría de sabor SU(3) es el término de masa en el Hamiltoniano,  $m_s \bar{s}s$ , donde  $m_s$  es la masa del quark  $|s\rangle$ . Este término no tiene valores netos de isoespín e hipercarga y bajo SU(3) se transforma como la suma directa de las representaciones singlete y octete,  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$  (ya  $|s\rangle$  y  $|\bar{s}\rangle$  pertenecen a las representaciones  $\mathbf{3}$  y  $\mathbf{3}^*$ , respectivamente). Entonces, sin considerar a la representación trivial singlete, el rompimiento de la simetría está inducido por la representación octete, sin cambiar los valores de isoespín e hipercarga.

Para implementar en los procesos de decaimiento la hipótesis de que la parte del Hamiltoniano de interacción que viola SU(3), denotada  $H_{\text{ms}}$ , consta de un operador que pertenece al octete de SU(3) con hipercarga e isoespín cero, es conveniente utilizar la **técnica del espurión** y definir un estado ficticio, llamado **espurión**, como el estado  $Y = 0$  e  $I = 0$  del octete de SU(3):  $|\mu, Y, I, I_3\rangle = |\mathbf{8}, 0, 0, 0\rangle \equiv |S_{\mathbf{8}}\rangle$ . Esta técnica permite operar con el Hamiltoniano de interacción invariante bajo SU(3),  $H_{\text{st}}$ , en un proceso de decaimiento,  $a \rightarrow b + c$ . La acción del operador que rompe la simetría se considera como la interacción entre el espurión y el estado inicial que decae y el proceso de decaimiento se transforma en uno de “dispersión”, invariante bajo SU(3):

$$a \xrightarrow{H_{\text{ms}}} b + c \quad \Rightarrow \quad S_{\mathbf{8}} + a \xrightarrow{H_{\text{st}}} b + c. \quad (3.7)$$

Considere el rompimiento a primer orden de la simetría SU(3) de sabor en los decaimientos  $a \rightarrow b + c$ . Con  $H_{\text{int}} = H_{\text{ms}}$  y aplicando la técnica del espurión, el elemento de matriz en el lado derecho de la expresión general (3.4) es entonces:

$$\langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu | H_{\text{ms}} | \boldsymbol{\mu}_a, \nu_a \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu | H_{\text{st}} (|S_{\mathbf{8}}\rangle | \boldsymbol{\mu}_a, \nu_a \rangle), \quad (3.8)$$

con  $|S_{\mathbf{8}}\rangle = |\mathbf{8}, 0, 0, 0\rangle$ . La expansión del estado inicial,  $S_{\mathbf{8}} + a$ , en términos de los coeficientes de Clebsch-Gordan para SU(3), Ec. (2.18), es:

$$|\mathbf{8}, 0, 0, 0\rangle | \boldsymbol{\mu}_a, \nu_a \rangle = \sum_{\boldsymbol{\mu}_\tau, \nu'} \left( \begin{array}{c} \mathbf{8} \\ (0, 0, 0) \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_a \\ \nu_a \end{array} \middle| \begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_\tau \\ \nu' \end{array} \right) | \boldsymbol{\mu}_\tau, \nu' \rangle, \quad (3.9)$$

donde  $\boldsymbol{\mu}_\tau$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mathbf{8} \otimes \boldsymbol{\mu}_a$  y  $\tau$  considera la posible presencia múltiple de  $\boldsymbol{\mu}_\tau$  en la expansión  $\mathbf{8} \otimes \boldsymbol{\mu}_a$ .

En este caso, de acuerdo a las reglas de adición para SU(3), Ecs. (2.15), los números cuánticos  $\nu'$  son:

$$\left. \begin{array}{l} (0, 0, 0) \\ \nu_a = (Y_a, I_a, I_{3a}) \end{array} \right\} \Rightarrow \nu' = (Y, I, I_3), \text{ con } \begin{cases} Y = Y_a; \\ I = I_a; \\ I_3 = I_{3a}. \end{cases} \quad (3.10)$$

por lo que el único valor de  $\nu'$  es  $\nu' = \nu_a$ .

Sustituyendo en (3.8) se obtiene:

$$\langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu | H_{\text{ms}} | \boldsymbol{\mu}_a, \nu_a \rangle = \sum_{\boldsymbol{\mu}_\tau} \left( \begin{array}{c} \mathbf{8} \\ (0, 0, 0) \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_a \\ \nu_a \end{array} \middle| \begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_\tau \\ \nu_a \end{array} \right) \langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu | H_{\text{st}} | \boldsymbol{\mu}_\tau, \nu_a \rangle. \quad (3.11)$$

Con  $H_{\text{st}}$  invariante ante SU(3):

$$\langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu | H_{\text{st}} | \boldsymbol{\mu}_\tau, \nu_a \rangle = g_{\boldsymbol{\mu}_\tau}^\gamma \delta_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \boldsymbol{\mu}_\tau} \delta_{\nu, \nu_a}, \quad (3.12)$$

con  $g_{\boldsymbol{\mu}_\tau}^\gamma$  una constante de acoplamiento ( $\gamma$  considera las posibles apariciones múltiples de  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  en  $\boldsymbol{\mu}_b \otimes \boldsymbol{\mu}_c$  y  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  recorre las representaciones en esta expansión,  $\tau$  considera las posibles apariciones múltiples de  $\boldsymbol{\mu}_\tau$  en  $\mathbf{8}_b \otimes \boldsymbol{\mu}_a$  y  $\boldsymbol{\mu}_\tau$  recorre las representaciones en esta expansión). Por lo tanto, (3.11) toma la forma:

$$\langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \nu | H_{\text{ms}} | \boldsymbol{\mu}_a, \nu_a \rangle = \sum_{\boldsymbol{\mu}_\tau} \left( \begin{array}{c} \mathbf{8} \\ (0, 0, 0) \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_a \\ \nu_a \end{array} \middle| \begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_\tau \\ \nu_a \end{array} \right) g_{\boldsymbol{\mu}_\tau}^\gamma \delta_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \boldsymbol{\mu}_\tau} \delta_{\nu, \nu_a}. \quad (3.13)$$

Sustituyendo esta expresión en la formula general (3.4) y realizando la sumatoria sobre  $\nu$  se obtiene que el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) en las amplitudes de decaimiento para los procesos  $a \rightarrow b + c$ , está dado por:

$$\begin{aligned} & \langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b | H_{\text{ms}} | \mu_a, \nu_a \rangle = \\ & = \sum_{\mu_\gamma, \mu_\tau} \left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mu_a & \mu_\tau \\ (0,0,0) & \nu_a & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_\tau}^{\gamma} \delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\gamma$  considera las posibles apariciones múltiples de  $\mu_\gamma$  en  $\mu_b \otimes \mu_c$  y  $\mu_\gamma$  recorre las representaciones en esta expansión,  $\tau$  considera las posibles apariciones múltiples de  $\mu_\tau$  en  $\mathbf{8}_b \otimes \mu_a$  y  $\mu_\tau$  recorre las representaciones en esta expansión.

### 3.1.3. Amplitud de Decaimiento

De acuerdo a los resultados de las secciones 3.1.1 y 3.1.2, la amplitud de decaimiento que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) (esto es,  $H_{\text{int}} = H_{\text{st}} + H_{\text{ms}}$ ) para los decaimientos  $a \rightarrow b + c$ , está dada por las suma de las expresiones (3.6) y (3.14):

$$\begin{aligned} G[a \rightarrow bc] &= \langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b | H_{\text{int}} | \mu_a, \nu_a \rangle = \\ &= \left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_a \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_a}^{0\gamma} \\ &+ \sum_{\mu_\gamma, \mu_\tau} \left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mu_a & \mu_\tau \\ (0,0,0) & \nu_a & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_\tau}^{\gamma'} \delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $\gamma$  distingue las posibles apariciones múltiples de la representación  $\mu_a$  en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c$ ;  $\mu_\gamma$  recorre las representaciones en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c$  y el indice  $\gamma'$  considera las posibles apariciones múltiples de  $\mu_\gamma$  en esta expansión;  $\mu_\tau$  recorre las representaciones en la expansión  $\mathbf{8}_b \otimes \mu_a$  y el indice  $\tau$  considera las posibles apariciones múltiples de  $\mu_\tau$  en esta expansión.

## 3.2. Reglas de Suma

Como ilustración del calculo de reglas de suma entre amplitudes independientes que incluyan el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3), se analizará el decaimiento fuerte en que un estado singlete pentaquark decae en un barión ordinario (2.27) mas un miembro del octete de mesones (2.30).

La amplitud de decaimiento está dada por la Ec. (3.15), en este caso:  $|a\rangle = |\mathbf{1}, \nu_P\rangle \equiv |P_1\rangle$ , con  $\nu_P = (0, 0, 0)$ ;  $|b\rangle = |\mathbf{8}, \nu_B\rangle \equiv |B\rangle$  y  $|c\rangle = |\mathbf{8}, \nu_M\rangle \equiv |M\rangle$ . Simbólicamente,  $P_1 \rightarrow B + M$ .

Como  $\mu_a = \mathbf{1}$  y  $\mu_b = \mu_c = \mathbf{8}$ , el elemento de matriz en la expresión (3.15) toma la forma:

$$(\langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b | H_{\text{int}} | \mu_a, \nu_a \rangle = (\langle \mathbf{8}, \nu_M | \langle \mathbf{8}_B, \nu_B | H_{\text{int}} | \mathbf{1}, \nu_P \rangle.$$

ademas  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{27}$  y  $\mathbf{8} \otimes \mu_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{8}$ .

En el primer término de (3.15), la parte en el limite de simetría, el indice  $\gamma$  no es necesario ya que este distingue las apariciones múltiples de  $\mu_a = \mathbf{1}$  en  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  y solo hay un singlete  $\mathbf{1}$  en la expansión  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ . Por lo tanto, el primer termino de (3.15) se reduce a:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_a \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_a}^{0\gamma} = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \nu_B & \nu_M & \nu_P \end{array} \right) g_{\mathbf{1}}^0.$$

Para el ultimo término en (3.15), el término que incluye el rompimiento de la simetría,  $\mu_\gamma$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ , por lo que  $\mu_\gamma = \mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{8}', \mathbf{10}, \mathbf{10}^*, \mathbf{27}$ ; mientras que  $\mu_\tau$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mathbf{8} \otimes \mu_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{8}$  y que son iguales a  $\mu_\gamma$  (debido a la presencia de  $\delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau}$  en (3.15)), por lo que  $\mu_\tau = \mathbf{8}$ ; en consecuencia, el indice  $\tau$  tampoco es necesario ya que este considera las apariciones múltiples de  $\mu_\tau = \mathbf{8}$  en  $\mathbf{8} \otimes \mu_a = \mathbf{8}$ . Finalmente, debido a la doble presencia de  $\mu_\tau = \mathbf{8}$  en la descomposición  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ , el indice  $\gamma'$  distingue las representaciones  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{8}'$ . Así, el ultimo termino en (3.15) se reduce a

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu_\gamma, \mu_\tau} \left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_c & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \boldsymbol{\mu}_a & \boldsymbol{\mu}_\tau \\ (0,0,0) & \nu_a & \nu_a \end{array} \right) g_{\boldsymbol{\mu}_\tau}^{\gamma'} \delta_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \boldsymbol{\mu}_\tau} = \\
= \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_M & \nu_P \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_P & \nu_P \end{array} \right) g_{\mathbf{8}} \\
+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_M & \nu_P \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_P & \nu_P \end{array} \right) g'_{\mathbf{8}} \\
= \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_M & \nu_P \end{array} \right) g_{\mathbf{8}} + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_M & \nu_P \end{array} \right) g'_{\mathbf{8}},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

debido a que el coeficiente de Clebsch-Gordan:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_P & \nu_P \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \end{array} \right) = 1. \tag{3.17}$$

La forma final de (3.15) es en este caso (con  $\nu_P = (0,0,0)$ ):

$$\begin{aligned}
G[P_1 \rightarrow B M] &= \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \nu_B & \nu_M & \nu_P \end{array} \right) g_{\mathbf{1}}^0 \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_M & \nu_P \end{array} \right) g_{\mathbf{8}} + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_M & \nu_P \end{array} \right) g'_{\mathbf{8}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por lo tanto, en los decaimientos fuertes,  $P_1 \rightarrow B + M$ , incluyendo la rotura a primer orden de la simetría de sabor SU(3), *todas* las amplitudes están descritas en términos de solo tres parámetros o constantes de acoplamiento:  $g_{\mathbf{1}}^0$ ,  $g_{\mathbf{8}}$  y  $g'_{\mathbf{8}}$ .

De acuerdo a los números cuánticos de los estados en los octetes de bariones, (2.27), y mesones, (2.30), y utilizando las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan de SU(3) (McNAMEE, J. y CHILTON 1964), las amplitudes de decaimiento (3.18) diferentes de cero que incluyen el rompimiento de la simetría son:

$$\begin{aligned}
G [P_1 \rightarrow p K^-] &= \frac{1}{\sqrt{8}} g_1^0 + \frac{1}{\sqrt{20}} g_8 + \frac{1}{2} g'_8, \\
G [P_1 \rightarrow n \bar{K}^0] &= -G [P_1 \rightarrow p K^-],
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
G [P_1 \rightarrow \Sigma^+ \pi^-] &= \frac{1}{\sqrt{8}} g_1^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} g_8, \\
G [P_1 \rightarrow \Sigma^0 \pi^0] &= -G [P_1 \rightarrow \Sigma^+ \pi^-], \\
G [P_1 \rightarrow \Sigma^- \pi^+] &= -G [P_1 \rightarrow \Sigma^+ \pi^-],
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$G [P_1 \rightarrow \Lambda \eta] = -\frac{1}{\sqrt{8}} g_1^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} g_8, \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
G [P_1 \rightarrow \Xi^0 K^0] &= -\frac{1}{\sqrt{8}} g_1^0 - \frac{1}{\sqrt{20}} g_8 + \frac{1}{2} g'_8, \\
G [P_1 \rightarrow \Xi^- K^+] &= -G [P_1 \rightarrow \Xi^0 K^0].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Se observa de las Ecs. (3.19) a (3.22) que cuatro amplitudes del total de ocho son linealmente independientes, las cuatro restantes quedan determinadas por las relaciones mostradas en estas ecuaciones.

Las cuatro amplitudes independientes se encuentran descritas por las tres constantes de acoplamiento,  $g_1^0$ ,  $g_8$  y  $g'_8$ , por lo que es posible determinar una relación lineal entre las amplitudes (la convención de signos es la de Swart 1963, erratum Swart 1965):

$$2G [P_1 \rightarrow p K^-] - 2G [P_1 \rightarrow \Xi^0 K^0] = G [P_1 \rightarrow \Sigma^+ \pi^-] - 3G [P_1 \rightarrow \Lambda \eta]. \tag{3.23}$$

La Ec. (3.23) constituye la *regla de suma* entre las amplitudes de decaimiento fuerte con rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3)

para el singlete pentaquark al decaer en un barión ordinario mas un mesón pseudoescalar.

# Capítulo 4

## Reglas de Suma para Dibariones

En 1963 se observó que el deuterón, un dibarión estable, pertenece al multiplete  $\mathbf{10}^*$  del grupo de sabor  $SU(3)$  (Oakes 1963). Recientemente, en la literatura se reportan los resultados para las reglas de suma con rotura de la simetría de sabor  $SU(3)$  a primer orden entre las amplitudes de decaimiento fuerte de los dibariones en los decupletes  $\mathbf{10}^*$  y  $\mathbf{10}$  al decaer en dos bariones de espín  $1/2$  pertenecientes al octete de  $SU(3)$  (Gupta y Sánchez-Colón 2015). Sobre la base de modelos teóricos y del análisis de datos experimentales, se ha sugerido en la literatura la posible existencia de estados dibariónicos pertenecientes a las representaciones  $\mathbf{8}$  (R. L. Jaffe 1977a, Erratum: R. L. Jaffe 1977b, Oka 1988) y  $\mathbf{27}$  (Xie y Zhang 1984, Xie 1989) del grupo  $SU(3)$  de sabor.

Tomando como referencia el proceso descrito en el Capítulo 3, en particular las Secs. 3.1.3 y 3.2, en este capítulo se desarrollan los cálculos necesarios para determinar las reglas de suma con rompimiento a primer orden de la simetría de sabor  $SU(3)$  entre las amplitudes de decaimiento fuerte de los dibariones en los multipletes  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{27}$  al decaer en dos bariones de espín  $1/2$  y también al decaer en un barión de espín  $1/2$  y un barión de espín  $3/2$ . Extendiendo los resultados previamente publicados en la literatura.

En la Sec. 4.1 se estudia el caso de un posible octete de dibariones en  $SU(3)$ , denotado  $D_{\mathbf{8}}$ , y se analizan los decaimientos fuertes de estos estados al decaer en dos bariones ordinarios (estados (2.27)), simbólicamente,  $D_{\mathbf{8}} \rightarrow B + B'$ . En la Sec. 4.2 se analiza el caso del mismo octete de dibariones pero ahora al decaer en un barión ordinario mas un barión del decuplete

(resonancias (2.26)), simbólicamente,  $D_{\mathbf{8}} \rightarrow B + R$ . La posible existencia de un multiplete  $\mathbf{27}$  de dibariones, denotado  $D_{\mathbf{27}}$ , y los decaimientos fuertes de sus estados, en dos bariones ordinarios,  $D_{\mathbf{27}} \rightarrow B + B'$ , y en un barión ordinario mas una resonancia,  $D_{\mathbf{27}} \rightarrow B + R$ , son estudiados en la Secs. 4.3 y Secs. 4.4, respectivamente.

## 4.1. Decaimientos $D_{\mathbf{8}} \rightarrow B + B'$

La amplitud de decaimiento que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) está dada por la Ec. (3.15), para el caso de los decaimientos  $D_{\mathbf{8}} \rightarrow B + B'$  se tiene:

$$|a\rangle = |\mathbf{8}, \nu_D\rangle \equiv |D_{(Y,I,I_3)}^{\mathbf{8}}\rangle, \quad |b\rangle = |\mathbf{8}, \nu_B\rangle \equiv |B\rangle \quad \text{y} \quad |c\rangle = |\mathbf{8}, \nu_{B'}\rangle \equiv |B'\rangle.$$

Se utiliza la notación del barión primado para distinguir ambos bariones en el estado final, ya que pertenecen al mismo octete (ver Fig. 2.1).  $D_{(Y,I,I_3)}^{\mathbf{8}}$  denota el estado del octete de dibariones  $D_{\mathbf{8}}$  con hipercarga  $Y$ , isoespín  $I$  y tercera componente de isoespín  $I_3$ , Fig. 4.1.

Como  $\mu_a = \mathbf{8}$  y  $\mu_b = \mu_c = \mathbf{8}$ , el elemento de matriz en la expresión (3.15) toma la forma:

$$(\langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b |) H_{\text{int}} | \mu_a, \nu_a \rangle = (\langle \mathbf{8}, \nu_{B'} | \langle \mathbf{8}_B, \nu_B |) H_{\text{int}} | \mathbf{8}, \nu_D \rangle. \quad (4.1)$$

Ademas,

$$\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mu_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{27}. \quad (4.2)$$

Para la parte de (3.15) en el limite de simetría, el indice  $\gamma$  distingue la doble aparición,  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{8}'$ , de  $\mu_a = \mathbf{8}$  en  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ . Por lo tanto, el primer termino de (3.15) toma la forma:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_a \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_a}^{0\gamma} = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{8}}^0 + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{8}}^{0'}. \quad (4.3)$$

En el termino de (3.15) que incluye el rompimiento de la simetría,  $\mu_\gamma$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ ,

por lo que  $\mu_\gamma = \mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{8}', \mathbf{10}, \mathbf{10}^*, \mathbf{27}$ ; mientras que  $\mu_\tau$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mathbf{8} \otimes \mu_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  y que son iguales a  $\mu_\gamma$  (debido a la presencia de  $\delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau}$  en (3.15)), por lo que en este caso  $\mu_\tau = \mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{8}', \mathbf{10}, \mathbf{10}^*, \mathbf{27}$ ; en consecuencia, el índice  $\tau$  distingue la aparición doble,  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{8}'$ , de  $\mu_\tau = \mathbf{8}$  en  $\mathbf{8} \otimes \mu_a$ . Finalmente, debido a la doble presencia de  $\mu_\tau = \mathbf{8}$  en la descomposición  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ , el índice  $\gamma'$  distingue también a las representaciones  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{8}'$ . Así, el término en (3.15) que rompe la simetría es:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu_\gamma, \mu_\tau} \left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mu_a & \mu_\tau \\ (0,0,0) & \nu_a & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_\tau}^{\gamma'} \delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau} = \\
& = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{1}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{8}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g'_{\mathbf{8}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{8}'} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g'_{\mathbf{8}'} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{10}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10}^* \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10}^* \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{10}^*} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{27}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para los decaimientos  $D_{\mathbf{8}} \rightarrow B + B'$  la amplitudes de decaimiento que incluyen el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) están dadas por la suma de las expresiones (4.3) y (4.4). Todas las amplitudes quedan

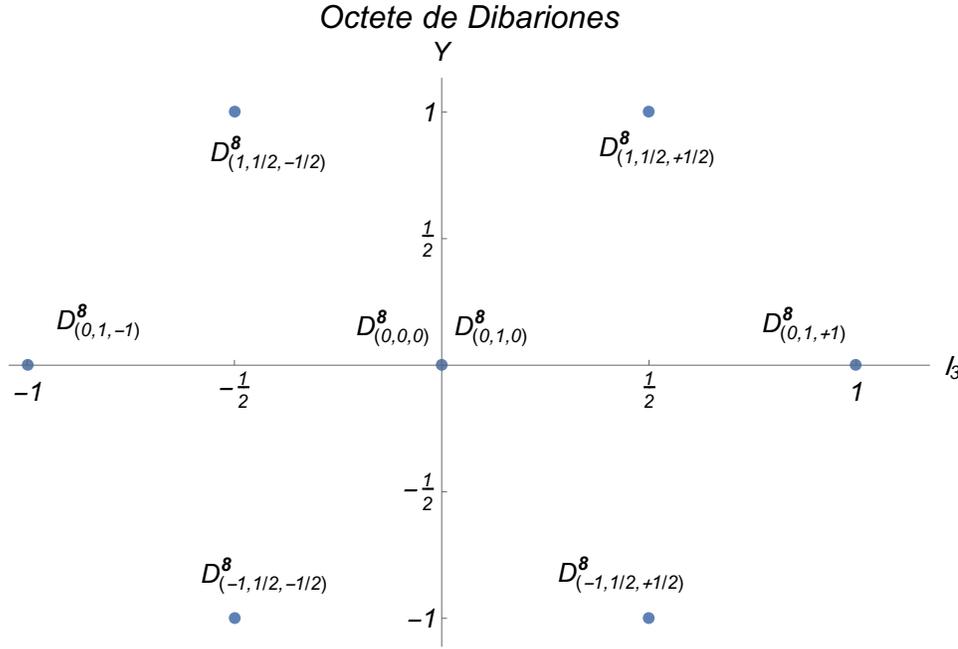


Figura 4.1: Asignaciones de dibariones a los estados  $(Y, I, I_3)$  del octete de  $SU(3)$ .

descritas por diez parámetros o constantes de acoplamiento.

Debido a que en los decaimientos  $D_8 \rightarrow B + B'$  el estado final consta de dos fermiones, es importante tener en cuenta la simetría del estado ante el intercambio de los dos bariones. En la expansión de los multipletes en el estado final, Ec. (4.2), las representaciones singlete **1**, **8** y **27** son simétricas ante el intercambio de los dos estados en los octetes, mientras que las representaciones **8'**, **10** y **10\*** son antisimétricas. Con base a esto, se analizarán por separado los casos en que el estado final es antisimétrico y simétrico.

#### 4.1.1. Estado Final Antisimétrico

Considere primero los acoplamientos con representaciones antisimétricas ante el intercambio de los dos bariones en el estado final, representaciones **8'**, **10** y **10\***. En este caso las amplitudes de decaimiento quedan descritas en términos de cinco parámetros: uno,  $g_8^0$ , proveniente de (4.3), la parte en el límite de simetría y cuatro,  $g_8'$ ,  $g_{8'}$ ,  $g_{10}$  y  $g_{10^*}$ , de (4.4), la parte que incluye

el rompimiento a primer orden de la simetría:

$$\begin{aligned}
G[D_{\mathbf{8}} \rightarrow B B'] &= \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{8}}^{0'} + \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g'_{\mathbf{8}} \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g'_{\mathbf{8}'} \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{10}} \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10}^* \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10}^* \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{10}^*}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

De acuerdo a los números cuánticos de los estados en el octete de bariones, (2.27), y utilizando las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan de SU(3) (McNAMEE, J. y CHILTON 1964), son ocho las amplitudes de decaimiento linealmente independientes a ser determinadas, por definición se eligen las siguientes:

$$\begin{aligned}
X_1^A &\equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Sigma^{0'} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}} g_{\mathbf{8}}^{0'} + \frac{1}{\sqrt{12}} \left( -\frac{1}{\sqrt{20}} \right) g'_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{12}} \left( -\frac{1}{2} \right) g'_{\mathbf{8}'} - \frac{1}{\sqrt{12}} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{\mathbf{10}^*},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
X_2^A &\equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Lambda' \right] = \\
&= \frac{1}{2} g_{\mathbf{8}}^{0'} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{20}} \right) g'_{\mathbf{8}} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) g'_{\mathbf{8}'} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{\mathbf{10}^*},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
X_3^A &\equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Xi^{0'} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} g_{\mathbf{8}}^{0'} + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{5}} g'_{\mathbf{8}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{\mathbf{10}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{\mathbf{10}^*},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$X_4^A \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Lambda' \right] = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{\mathbf{10}} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{\mathbf{10}^*}, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
X_5^A &\equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{0'} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} g_{\mathbf{8}}^{0'} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{5}} g'_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{12}} \left(-\frac{1}{2}\right) g_{\mathbf{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} \left(-\frac{1}{2}\right) g_{\mathbf{10}^*},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$X_6^A \equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{2} g_{\mathbf{8}}^{0'} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} g'_{\mathbf{8}}, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
X_7^A &\equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-'} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} g_{\mathbf{8}}^{0'} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) g'_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{2} g'_{\mathbf{8}'} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{2}\right) g_{\mathbf{10}},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
X_8^A &\equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda \Xi^{0'} \right] = \\
&= \frac{1}{2} g_{\mathbf{8}}^{0'} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) g'_{\mathbf{8}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} g'_{\mathbf{8}'} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) g_{\mathbf{10}},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Las amplitudes de decaimiento restantes, diferentes de cero, están dadas por:

$$G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Sigma^{+'} \right] = -\sqrt{2} X_1^A, \tag{4.14}$$

$$G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Sigma^{-'} \right] = \sqrt{2} X_1^A,$$

$$G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Sigma^{0'} \right] = -X_1^A, \tag{4.15}$$

$$G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Lambda' \right] = X_2^A,$$

$$G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} X_3^A, \quad G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Xi^{0'} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} X_3^A, \tag{4.16}$$

$$G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-'} \right] = X_5^A, \quad G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Lambda' \right] = X_4^A,$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Xi^{-\prime} \right] &= X_3^A, \\
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{-\prime} \right] &= X_5^A,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^{-} \Lambda' \right] = X_4^A,$$

$$G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Xi^{0\prime} \right] = -X_6^A, \tag{4.18}$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{0\prime} \right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} X_7^A, \tag{4.19}$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{-\prime} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} X_7^A,$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^{-} \Xi^{0\prime} \right] = -X_7^A, \tag{4.20}$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda \Xi^{-\prime} \right] = X_8^A,$$

con relaciones idénticas para  $G \left[ D_{(Y,I,I_3)}^{\mathbf{8}} \rightarrow B'B \right] = -G \left[ D_{(Y,I,I_3)}^{\mathbf{8}} \rightarrow BB' \right]$ .

Las ocho amplitudes de decaimientos independientes (4.6) - (4.13) están descritas por cinco parámetros. Entonces se pueden deducir tres reglas de suma entre las amplitudes de decaimiento fuerte con rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) para los dibariones en el octete al decaer en un estado antisimétrico compuesto por dos bariones ordinarios:

$$2\sqrt{2}X_1^A = \sqrt{6}X_6^A - X_3^A + \sqrt{2}X_5^A - 2X_7^A, \tag{4.21}$$

$$2\sqrt{6}X_2^A = 3\sqrt{6}X_6^A + 5X_3^A - \sqrt{2}X_5^A - 2\sqrt{6}X_8^A, \tag{4.22}$$

$$\sqrt{6}X_4^A = 2X_3^A - \sqrt{2}X_5^A + 3X_7^A - \sqrt{6}X_8^A. \tag{4.23}$$

### 4.1.2. Estado Final Simétrico

Considere ahora los acoplamientos con representaciones simétricas ante el intercambio de los dos bariones en el estado final, representaciones  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{27}$ . Las amplitudes de decaimiento quedan descritas nuevamente en términos de cinco parámetros: el primero es  $g_8^0$  y proviene de la parte en el límite de simetría, Ec. (4.3), y los cuatro restantes,  $g_1$ ,  $g_8$ ,  $g_{8'}$  y  $g_{27}$ , de (4.4), la parte que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría:

$$\begin{aligned}
G[D_8 \rightarrow B B'] &= \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) g_8^0 + \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_1 \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_8 \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{8'} \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{27}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

De acuerdo a los números cuánticos de los estados en el octete de bariones, (2.27), y utilizando las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$  (McNAMEE, J. y CHILTON 1964), son nueve las amplitudes de decaimiento linealmente independientes a ser determinadas, por definición se eligen las siguientes:

$$\begin{aligned}
X_1^S &\equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Sigma^{0'} \right] = \\
&= \sqrt{\frac{3}{20}} g_8^0 + \sqrt{\frac{3}{20}} \left( -\frac{1}{\sqrt{20}} \right) g_8 + \sqrt{\frac{3}{20}} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{8'} + \frac{1}{\sqrt{60}} \frac{3}{\sqrt{20}} g_{27},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
X_2^S &\equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Lambda' \right] = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{20}} g_8^0 - \frac{1}{\sqrt{20}} \left( -\frac{1}{\sqrt{20}} \right) g_8 - \frac{1}{\sqrt{20}} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{8'} + \frac{3}{\sqrt{20}} \frac{3}{\sqrt{20}} g_{27},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$X_3^S \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Xi^{0'} \right] = -\sqrt{\frac{3}{10}} g_{\mathbf{8}}^0 - \sqrt{\frac{3}{10}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) g_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{3}{10}} g_{27}, \quad (4.27)$$

$$X_4^S \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Lambda' \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} g_{\mathbf{8}}^0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} g_{\mathbf{8}} + \sqrt{\frac{3}{10}} \sqrt{\frac{3}{10}} g_{27}, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} X_5^S &\equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Xi^{-'} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{20}} g_{\mathbf{8}}^0 + \frac{1}{\sqrt{20}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) g_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right) g_{\mathbf{1}} + \sqrt{\frac{3}{40}} \sqrt{\frac{27}{40}} g_{27}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} X_6^S &\equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-'} \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} g_{\mathbf{8}}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) g_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right) g_{\mathbf{1}} - \frac{1}{\sqrt{120}} \sqrt{\frac{27}{40}} g_{27}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} X_7^S &\equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda \Lambda' \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} g_{\mathbf{8}}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) g_{\mathbf{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right) g_{\mathbf{1}} + \sqrt{\frac{27}{40}} \sqrt{\frac{27}{40}} g_{27}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} X_8^S &\equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-'} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{3}{10}} g_{\mathbf{8}}^0 + \sqrt{\frac{3}{10}} \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) g_{\mathbf{8}} + \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{1}{2} g_{\mathbf{8}'} + \frac{1}{\sqrt{30}} \frac{3}{\sqrt{20}} g_{27}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} X_9^S &\equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda \Xi^{0'} \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{20}} g_{\mathbf{8}}^0 - \frac{1}{\sqrt{20}} \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) g_{\mathbf{8}} - \frac{1}{\sqrt{20}} \frac{1}{2} g_{\mathbf{8}'} + \frac{3}{\sqrt{20}} \frac{3}{\sqrt{20}} g_{27}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Las constantes de acoplamiento restantes, diferentes de cero, están dadas por las mismas relaciones, Ecs. (4.14) – (4.20), con  $G[D_{(0,1,+1)}^8 \rightarrow \Sigma^+\Sigma^0] = 0$  y  $G[D_{(0,0,0)}^8 \rightarrow \Sigma^0\Sigma^0] = -X_6^S$ . Al ser procesos simétricos se cumple que  $G[D_{(Y,I,I_3)}^8 \rightarrow B'B] = G[D_{(Y,I,I_3)}^8 \rightarrow BB']$ .

Las nueve constantes de acoplamiento (4.25) – (4.33) están descritas por cinco parámetros. De tal manera que en este caso se pueden establecer cuatro relaciones lineales independientes entre las amplitudes de decaimiento:

$$\sqrt{6}X_2^S = -\sqrt{2}X_1^S - \sqrt{6}X_9^S + X_8^S, \quad (4.34)$$

$$\sqrt{6}X_4^S = -2X_3^S - \sqrt{6}X_9^S + X_8^S, \quad (4.35)$$

$$\sqrt{6}X_5^S = 2\sqrt{2}X_1^S + X_3^S + \sqrt{6}X_9^S + X_8^S, \quad (4.36)$$

$$3\sqrt{3}X_7^S = -8X_1^S - 2\sqrt{2}X_3^S - 3\sqrt{3}X_6^S - 6\sqrt{3}X_9^S - \sqrt{2}X_8^S. \quad (4.37)$$

Las Ecs. (4.34) a (4.37) constituyen las reglas de suma entre las amplitudes de decaimiento fuerte con rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) para los dibariones en el octete al decaer en un estado simétrico compuesto por dos bariones ordinarios.

## 4.2. Decaimientos $D_8 \rightarrow B + R$

La amplitud de decaimiento que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) está dada por la Ec. (3.15), para el caso de los decaimientos  $D_8 \rightarrow B + R$  se tiene:

$$|a\rangle = |\mathbf{8}, \nu_D\rangle \equiv |D_{(Y,I,I_3)}^8\rangle, \quad |b\rangle = |\mathbf{8}, \nu_B\rangle \equiv |B\rangle \quad \text{y} \quad |c\rangle = |\mathbf{10}, \nu_R\rangle \equiv |R\rangle.$$

Los estados en el decuplete del estado final son las resonancias barionicas de espín 3/2 y paridad positiva y sus números cuánticos están dados en las Ecs. (2.26), ver Fig. 2.2.

Como  $\mu_a = \mathbf{8}$ ,  $\mu_b = \mathbf{8}$  y  $\mu_c = \mathbf{10}$ , el elemento de matriz en la expresión (3.15) toma la forma:

$$\langle \langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b | \rangle H_{\text{int}} | \mu_a, \nu_a \rangle = \langle \langle \mathbf{10}, \nu_R | \langle \mathbf{8}_B, \nu_B | \rangle H_{\text{int}} | \mathbf{8}, \nu_D \rangle.$$

Ademas,

$$\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{27} \oplus \mathbf{35} \quad (4.38)$$

y

$$\mathbf{8} \otimes \mu_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{27}. \quad (4.39)$$

Para la parte de (3.15) en el limite de simetría, el indice  $\gamma$  no es necesario ya que  $\mu_a = \mathbf{8}$  aparece solo una vez en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{10}$ . Por lo tanto, el primer termino de (3.15) toma la forma:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_a \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_a}^{0\gamma} = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{8}}^0. \quad (4.40)$$

En el termino de (3.15) que incluye el rompimiento de la simetría,  $\mu_\gamma$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{10}$ , por lo que  $\mu_\gamma = \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{27}, \mathbf{35}$ ; mientras que  $\mu_\tau$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mathbf{8} \otimes \mu_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  y que son iguales a  $\mu_\gamma$  (debido a la presencia de  $\delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau}$  en (3.15)), por lo que  $\mu_\tau = \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{27}$ ; en consecuencia, el indice  $\tau$  distingue la aparición doble,  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{8}'$ , en  $\mathbf{8} \otimes \mu_a$  cuando  $\mu_\tau = \mu_\gamma = \mathbf{8}$ . Finalmente, el indice  $\gamma'$  no es necesario debido a que cada representación  $\mu_\tau$  aparece solo una vez en la descomposición  $\mu_b \otimes \mu_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{10}$ . Así, el termino en (3.15) que rompe la simetría es, en este caso:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu_\gamma, \mu_\tau} \left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mu_a & \mu_\tau \\ (0,0,0) & \nu_a & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_\tau}^{\gamma'} \delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau} = \\
= \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_8 \\
+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{8'} \\
+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{10} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{10} \\
+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{27}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Finalmente, para los decaimientos  $D_8 \rightarrow B + R$ , las amplitudes de decaimiento que incluyen el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor  $SU(3)$  están dadas por la suma de las expresiones (4.40) y (4.41). Todas las amplitudes quedan descritas por cinco parámetros o constantes de acoplamiento:

$$\begin{aligned}
G[D_8 \rightarrow BR] = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) g_8^0 + \\
+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_8 \\
+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{8'} \\
+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{10} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{10} \\
+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{27}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

De acuerdo a los números cuánticos de las resonancias bariónicas, Ecs. (2.26) y Fig. 2.2, así como de los bariones en el octete, Ecs. (2.27) y Fig. 2.1, y utilizando las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$  (McNAMEE,

J. y CHILTON 1964), se encuentra que para este caso existen 12 amplitudes de decaimiento linealmente independientes que por definición se eligen como las siguientes:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p\Sigma^{0*} \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{15}}g_{\mathbf{8}}^0 - \frac{1}{\sqrt{15}}\left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right)g_{\mathbf{8}} - \frac{1}{\sqrt{15}}\left(-\frac{1}{2}\right)g_{\mathbf{8}'} - \frac{2}{\sqrt{15}}\frac{3}{\sqrt{20}}g_{\mathbf{27}}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} X_2 &\equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+\Delta^0 \right] = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{15}}g_{\mathbf{8}}^0 - \sqrt{\frac{2}{15}}\left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right)g_{\mathbf{8}} - \sqrt{\frac{2}{15}}\left(-\frac{1}{2}\right)g_{\mathbf{8}'} + \frac{1}{\sqrt{30}}\frac{3}{\sqrt{20}}g_{\mathbf{27}}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} X_3 &\equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p\Xi^{0*} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{15}}g_{\mathbf{8}}^0 + \sqrt{\frac{2}{15}}\frac{1}{\sqrt{5}}g_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)g_{\mathbf{10}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{3}{10}}g_{\mathbf{27}}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} X_4 &\equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+\Sigma^{0*} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}}g_{\mathbf{8}}^0 + \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{1}{\sqrt{5}}g_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}\right)g_{\mathbf{10}} - \frac{3}{\sqrt{40}}\sqrt{\frac{3}{10}}g_{\mathbf{27}}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$X_5 \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda\Sigma^{+*} \right] = -\frac{1}{\sqrt{5}}g_{\mathbf{8}}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}g_{\mathbf{8}} - \sqrt{\frac{3}{10}}\sqrt{\frac{3}{10}}g_{\mathbf{27}}, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} X_6 &\equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^0\Delta^+ \right] = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{15}}g_{\mathbf{8}}^0 - \sqrt{\frac{2}{15}}\frac{1}{\sqrt{5}}g_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{12}}\left(-\frac{1}{2}\right)g_{\mathbf{10}} + \frac{1}{\sqrt{80}}\sqrt{\frac{3}{10}}g_{\mathbf{27}}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$X_7 \equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p\Xi^{-*} \right] = -\frac{1}{\sqrt{5}}g_{\mathbf{8}}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)g_{\mathbf{8}} - \sqrt{\frac{3}{10}}\sqrt{\frac{27}{40}}g_{\mathbf{27}}, \quad (4.49)$$

$$X_8 \equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-*} \right] = -\frac{1}{\sqrt{5}} g_8^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) g_8 + \sqrt{\frac{2}{15}} \sqrt{\frac{27}{40}} g_{27}, \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} X_9 \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Omega^- \right] &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{5}} g_8^0 + \sqrt{\frac{2}{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) g_8 + \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{2} g_{8'} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) g_{10} + \frac{3}{\sqrt{40}} \sqrt{\frac{3}{20}} g_{27}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} X_{10} \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-*} \right] &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{15}} g_8^0 + \sqrt{\frac{2}{15}} \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) g_8 + \sqrt{\frac{2}{15}} \frac{1}{2} g_{8'} + \frac{1}{\sqrt{12}} \left(-\frac{1}{2}\right) g_{10} - \sqrt{\frac{49}{120}} \sqrt{\frac{3}{20}} g_{27}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} X_{11} \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda \Xi^{0*} \right] &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} g_8^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) g_8 - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2} g_{8'} + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(-\frac{1}{2}\right) g_{10} - \frac{3}{\sqrt{80}} \frac{3}{\sqrt{20}} g_{27}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} X_{12} \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^0 \Sigma^{0*} \right] &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{15}} g_8^0 - \frac{1}{\sqrt{15}} \left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) g_8 - \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{1}{2} g_{8'} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{2}\right) g_{10} + \frac{1}{\sqrt{60}} \frac{3}{\sqrt{20}} g_{27}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Las amplitudes de decaimiento restantes están dadas por:

$$\begin{aligned} G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Sigma^{+*} \right] &= -\sqrt{2} X_1, \\ G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Delta^+ \right] &= -\sqrt{2} X_2, \\ G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^- \Delta^{++} \right] &= \sqrt{3} X_2, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Sigma^{-*} \right] &= \sqrt{2} X_1, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Sigma^{0*} \right] &= -X_1, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Delta^- \right] &= \sqrt{3} X_2, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Delta^0 \right] &= -\sqrt{2} X_2, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^- \Delta^+ \right] &= X_2,
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{+*} \right] &= -X_4, \\
G \left[ D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^- \Delta^{++} \right] &= -\sqrt{3} X_6,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow p \Xi^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} X_3, \quad G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Xi^{0*} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} X_3, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-*} \right] &= X_4, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{+*} \right] &= -X_4, \quad G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda \Sigma^{0*} \right] = X_5, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^0 \Delta^0 \right] &= \sqrt{2} X_6, \quad G \left[ D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^- \Delta^+ \right] = -\sqrt{2} X_6,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Xi^{-*} \right] &= X_3, \quad G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{-*} \right] = X_4, \\
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{0*} \right] &= -X_4, \quad G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda \Sigma^{-*} \right] = X_5, \\
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^0 \Delta^- \right] &= \sqrt{3} X_6, \quad G \left[ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^- \Delta^0 \right] = -X_6,
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Xi^{0*} \right] &= -X_7, \\
G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{0*} \right] &= -X_8, \\
G \left[ D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{+*} \right] &= X_8,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{0*} \right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} X_{10}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^- \Sigma^{+*} \right] &= -\sqrt{2} X_{12},
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow n \Omega^- \right] &= X_9, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} X_{10}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{0*} \right] &= -X_{10}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Lambda \Xi^{-*} \right] &= X_{11}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^0 \Sigma^{-*} \right] &= \sqrt{2} X_{12}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Xi^- \Sigma^{0*} \right] &= -X_{12}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Las doce amplitudes de decaimiento independientes (4.43) a (4.48) están descritas por los cinco parámetros:  $g_8^0$ ,  $g_8$ ,  $g_{8'}$ ,  $g_{10}$  y  $g_{27}$ . En consecuencia, se pueden deducir siete relaciones lineales independientes entre ellas:

$$\sqrt{2} X_4 = \sqrt{2} X_1 - X_2 + X_3, \tag{4.63}$$

$$\sqrt{2} X_5 = -\sqrt{3} X_3 + X_9 + \sqrt{2} X_{11}, \tag{4.64}$$

$$2 X_6 = -\sqrt{2} X_1 + X_2 - 2 X_3 + \sqrt{3} X_9 + \sqrt{6} X_{11}, \tag{4.65}$$

$$3\sqrt{2} X_7 = 2\sqrt{6} X_1 + \sqrt{3} X_3 - 2 X_9, \quad (4.66)$$

$$3\sqrt{2} X_8 = -\sqrt{6} X_1 + 3\sqrt{3} X_2 + \sqrt{3} X_3 - 2 X_9, \quad (4.67)$$

$$\sqrt{3} X_{10} = \sqrt{6} X_1 - \sqrt{3} X_2 + X_9, \quad (4.68)$$

$$2\sqrt{6} X_{12} = -\sqrt{6} X_1 + \sqrt{3} X_2 + X_9 + 3\sqrt{2} X_{11}. \quad (4.69)$$

Las Ecs. (4.63) a (4.69) constituyen las reglas de suma entre las amplitudes de decaimiento fuerte con rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) para los dibariones en el octete al decaer en un estado compuesto por un barión ordinario mas una resonancia.

### 4.3. Decaimientos $D_{27} \rightarrow B + B'$

En esta sección se analiza el caso de los decaimientos fuertes de un posible multiplete  $27$  de dibariones en dos bariones ordinarios. La amplitud de decaimiento que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) está dada por la Ec. (3.15), para el caso de los decaimientos  $D_{27} \rightarrow B + B'$  se tiene:

$$|a\rangle = |27, \nu_D\rangle \equiv |D_{(Y,I,I_3)}^{27}\rangle, \quad |b\rangle = |8, \nu_B\rangle \equiv |B\rangle \quad \text{y} \quad |c\rangle = |8, \nu_{B'}\rangle \equiv |B'\rangle.$$

Se utiliza la notación del barión primado para distinguir ambos bariones en el estado final, ya que pertenecen al mismo octete (ver Fig. 2.1).  $D_{(Y,I,I_3)}^{27}$  denota el estado del multiplete  $27$  de dibariones  $D_{27}$  con hipercarga  $Y$ , isoespín  $I$  y tercera componente de isoespín  $I_3$ , ver Fig. 4.2.

Como  $\mu_a = 27$  y  $\mu_b = \mu_c = 8$ , el elemento de matriz en la expresión (3.15) toma la forma:

$$\langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b | H_{\text{int}} | \mu_a, \nu_a \rangle = \langle \langle 8, \nu_{B'} | \langle 8_B, \nu_B | H_{\text{int}} | 27, \nu_D \rangle. \quad (4.70)$$

Ademas,

$$\mu_b \otimes \mu_c = 8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8' \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 27 \quad (4.71)$$

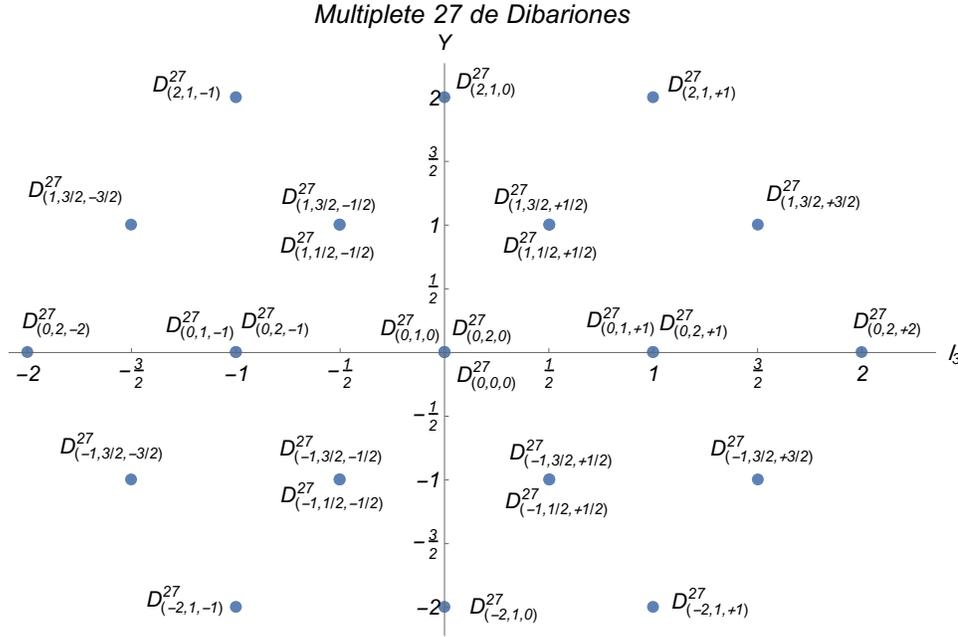


Figura 4.2: Asignaciones de dibariones a los estados  $(Y, I, I_3)$  del multiplete **27** de  $SU(3)$ .

y

$$\mathbf{8} \otimes \boldsymbol{\mu}_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{27} = \mathbf{64} \oplus \mathbf{35} \oplus \overline{\mathbf{35}} \oplus \mathbf{27} \oplus \overline{\mathbf{27}} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{8}. \quad (4.72)$$

Por lo tanto, para la parte de (3.15) en el limite de simetría, el indice  $\gamma$  no es necesario ya que la representación  $\boldsymbol{\mu}_a = \mathbf{27}$  aparece solo una vez en la expansión  $\boldsymbol{\mu}_b \otimes \boldsymbol{\mu}_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ . Entonces, el primer termino de (3.15) toma la forma:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_c & \boldsymbol{\mu}_a \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) g_{\boldsymbol{\mu}_a}^{0\gamma} = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{27}}^0. \quad (4.73)$$

En el termino de (3.15) que incluye el rompimiento de la simetría,  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\boldsymbol{\mu}_b \otimes \boldsymbol{\mu}_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ , por lo que  $\boldsymbol{\mu}_\gamma = \mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{8}', \mathbf{10}, \mathbf{10}^*, \mathbf{27}$ ; mientras que  $\boldsymbol{\mu}_\tau$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mathbf{8} \otimes \boldsymbol{\mu}_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{27}$  y que son iguales a  $\boldsymbol{\mu}_\gamma$  (debido a la presencia de  $\delta_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \boldsymbol{\mu}_\tau}$  en (3.15)), por lo que en este caso  $\boldsymbol{\mu}_\tau = \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{10}^*, \mathbf{27}$ ; en

consecuencia, el índice  $\tau$  distingue la aparición doble,  $\mathbf{27}$  y  $\mathbf{27}'$ , en  $\mathbf{8} \otimes \boldsymbol{\mu}_a = \mathbf{8} \otimes \mathbf{27}$  cuando  $\boldsymbol{\mu}_\tau = \boldsymbol{\mu}_\gamma = \mathbf{27}$ . Finalmente, debido a la doble presencia de  $\boldsymbol{\mu}_\tau = \mathbf{8}$  en la descomposición  $\boldsymbol{\mu}_b \otimes \boldsymbol{\mu}_c = \mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ , el índice  $\gamma'$  distingue también a las representaciones  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{8}'$ . Así, el termino en (3.15) que rompe la simetría es:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \boldsymbol{\mu}_\tau} \left( \begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\mu}_b & \boldsymbol{\mu}_c & \boldsymbol{\mu}_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \boldsymbol{\mu}_a & \boldsymbol{\mu}_\tau \\ (0,0,0) & \nu_a & \nu_a \end{array} \right) g_{\boldsymbol{\mu}_\tau}^{\gamma'} \delta_{\boldsymbol{\mu}_\gamma, \boldsymbol{\mu}_\tau} = \\
& = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{8}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g'_{\mathbf{8}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{10} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{10}} \quad (4.74) \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10}^* \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{10}^* \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{10}^*} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{27} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{27}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{27}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{27}'}.
\end{aligned}$$

Para los decaimientos  $D_{\mathbf{27}} \rightarrow B + B'$  la amplitudes de decaimiento que incluyen el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) están dadas por la suma de las expresiones (4.73) y (4.74). Todas las amplitudes quedan descritas por siete parámetros o constantes de acoplamiento.

Debido a que en los decaimientos  $D_{\mathbf{27}} \rightarrow B + B'$  el estado final consta de dos fermiones, es importante tener en cuenta la simetría del estado ante el intercambio de los dos bariones. En la expansión de los multipletes en el estado final, Ec. (4.71), las representaciones singlete  $\mathbf{1}$ , octete  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{27}$  son simétricas ante el intercambio de los dos estados en los octetes, mientras que las representaciones  $\mathbf{8}'$ ,  $\mathbf{10}$  y  $\mathbf{10}^*$  son antisimétricas. Con base a esto, se analizaran por separado los casos en que el estado final es antisimétrico y simétrico.

### 4.3.1. Estado Final Antisimétrico

Considere primero los acoplamientos con representaciones antisimétricas ante el intercambio de los dos bariones en el estado final, representaciones  $\mathbf{8}'$ ,  $\mathbf{10}$  y  $\mathbf{10}^*$ . En este caso las amplitudes de decaimiento quedan descritas en términos de tres parámetros unicamente, todos provenientes de (4.74), la parte que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría:  $g'_8$ ,  $g_{10}$  y  $g_{10^*}$ .

$$\begin{aligned}
G[D_{27} \rightarrow B B'] &= \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{8} & | & \mathbf{8}' \\ \nu_B & \nu_{B'} & | & \nu_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{27} & | & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & | & \nu_D \end{pmatrix} g'_8 \\
&+ \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{8} & | & \mathbf{10} \\ \nu_B & \nu_{B'} & | & \nu_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{27} & | & \mathbf{10} \\ (0,0,0) & \nu_D & | & \nu_D \end{pmatrix} g_{10} \\
&+ \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{8} & | & \mathbf{10}^* \\ \nu_B & \nu_{B'} & | & \nu_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{27} & | & \mathbf{10}^* \\ (0,0,0) & \nu_D & | & \nu_D \end{pmatrix} g_{10^*}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

De acuerdo a los números cuánticos de los dibariones en el multiplete  $\mathbf{27}$ , Fig. 4.2, así como de los bariones en el octete, Ecs. (2.27) y Fig. 2.1, y utilizando las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan de SU(3) (McNAMEE, J. y CHILTON 1964), se encuentra que para este caso existen 10 amplitudes de decaimiento linealmente independientes que por definición se eligen como las siguientes:

$$Z_1^A \equiv G[D_{(1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{+'}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{5}{24}} g_{10}, \tag{4.76}$$

$$Z_2^A \equiv G[D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{0'}] = \frac{1}{\sqrt{12}} \left(-\sqrt{\frac{2}{15}}\right) g'_8 - \frac{1}{\sqrt{12}} \left(-\frac{1}{\sqrt{24}}\right) g_{10^*}, \tag{4.77}$$

$$Z_3^A \equiv G[D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow p \Lambda'] = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{15}}\right) g'_8 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{24}}\right) g_{10^*}, \tag{4.78}$$

$$Z_4^A \equiv G[D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow p \Xi^{0'}] = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{\sqrt{45}}\right) g'_8 - \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{3} g_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{3}\right) g_{10^*}, \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
Z_5^A &\equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{0'} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\frac{2}{\sqrt{45}} \right) g'_8 + \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{1}{3} g_{10} - \frac{1}{\sqrt{12}} \left( -\frac{1}{3} \right) g_{10}^*,
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$Z_6^A \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Lambda' \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{3} g_{10} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3} \right) g_{10}^*, \tag{4.81}$$

$$Z_7^A \equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow p \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) g'_8, \tag{4.82}$$

$$Z_8^A \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g'_8 + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{24}} g_{10}, \tag{4.83}$$

$$Z_9^A \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Lambda \Xi^{0'} \right] = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g'_8 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{24}} g_{10}, \tag{4.84}$$

$$Z_{10}^A \equiv G \left[ D_{(-1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{0'} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\sqrt{\frac{5}{24}} \right) g_{10}^*, \tag{4.85}$$

Las amplitudes de decaimiento restantes, diferentes de cero, están dadas por:

$$G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{0'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_1^A, \tag{4.86}$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{+'} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_1^A,$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_1^A, \tag{4.87}$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{0'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_1^A,$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{-'} \right] = Z_1^A, \tag{4.88}$$

$$G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{+'} \right] = -\sqrt{2} Z_2^A, \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{-'} \right] &= \sqrt{2} Z_2^A, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{0'} \right] &= -Z_2^A,
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow n \Lambda' \right] &= Z_3^A, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow p \Xi^{-'} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_4^A, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow n \Xi^{0'} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_4^A,
\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-'} \right] &= Z_5^A, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Lambda^{-'} \right] &= Z_6^A,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow n \Xi^{-'} \right] &= Z_4^A, \\
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{-'} \right] &= Z_5^A,
\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Lambda' \right] &= Z_6^A, \\
G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow n \Xi^{0'} \right] &= -Z_7^A,
\end{aligned} \tag{4.93}$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{0'} \right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} Z_8^A, \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{-'} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_8^A, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{0'} \right] &= -Z_8^A,
\end{aligned} \tag{4.95}$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Lambda \Xi^{-'} \right] = Z_9^A,$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{10}^A, \quad (4.96)$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{0'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_{10}^A,$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{-'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_{10}^A, \quad (4.97)$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{0'} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{10}^A,$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{-'} \right] = Z_{10}^A. \quad (4.98)$$

con relaciones idénticas para  $G \left[ D_{(Y,I,I_3)}^{27} \rightarrow B'B \right] = -G \left[ D_{(Y,I,I_3)}^{27} \rightarrow BB' \right]$ .

Las diez amplitudes de decaimiento independientes (4.76) – (4.85) están descritas por tres parámetros. Es posible entonces deducir siete reglas de suma entre las amplitudes de decaimiento fuerte con rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) para los dibariones en el multiplete **27** al decaer en un estado antisimétrico compuesto por dos bariones ordinarios:

$$3\sqrt{5} Z_4^A - 3\sqrt{5} Z_3^A + \sqrt{15} Z_2^A - 2\sqrt{2} Z_1^A = 0, \quad (4.99)$$

$$3\sqrt{5} Z_5^A - 3\sqrt{30} Z_2^A + 2 Z_1^A = 0, \quad (4.100)$$

$$\sqrt{15} Z_6^A - \sqrt{10} Z_3^A + \sqrt{30} Z_2^A - 2 Z_1^A = 0, \quad (4.101)$$

$$2\sqrt{2} Z_7^A - \sqrt{3} Z_3^A - 3 Z_2^A = 0, \quad (4.102)$$

$$\sqrt{30} Z_8^A - \sqrt{5} Z_3^A - \sqrt{15} Z_2^A + \sqrt{2} Z_1^A = 0, \quad (4.103)$$

$$2\sqrt{5} Z_9^A - \sqrt{5} Z_3^A - \sqrt{15} Z_2^A - \sqrt{2} Z_1^A = 0, \quad (4.104)$$

$$\sqrt{2} Z_{10}^A - \sqrt{5} Z_3^A + \sqrt{15} Z_2^A = 0. \quad (4.105)$$

### 4.3.2. Estado Final Simétrico

Considere ahora los acoplamientos con representaciones simétricas ante el intercambio de los dos bariones en el estado final, representaciones **1**, **8** y **27**. Las amplitudes de decaimiento quedan descritas ahora en términos de cuatro parámetros: el primero es  $g_{27}^0$  y proviene de la parte en el límite de simetría, Ec. (4.73), y los tres restantes,  $g_8$ ,  $g_{27}$  y  $g_{27'}$ , de (4.74), la parte que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría:

$$\begin{aligned}
G[D_8 \rightarrow B B'] &= \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) g_{27}^0 + \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_8 \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{27} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{27} \\
&+ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_{B'} & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{27}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{27'}.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

De acuerdo a los números cuánticos de los dibariones en el multiplete **27**, Fig. 4.2, así como de los bariones en el octete, Ecs. (2.27) y Fig. 2.1, y utilizando las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan de SU(3) (McNAMEE, J. y CHILTON 1964), se encuentra que para este caso existen 14 amplitudes de decaimiento linealmente independientes que por definición se eligen como las siguientes:

$$Z_1^S \equiv G[D_{(2,1,+1)}^{27} \rightarrow p p'] = g_{27}^0 - \sqrt{\frac{5}{56}} g_{27} - \sqrt{\frac{3}{8}} g_{27'}, \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}
Z_2^S &\equiv G[D_{(1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{+'}] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} g_{27}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{5}{224}} g_{27} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{\frac{3}{32}}\right) g_{27'},
\end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}
Z_3^S &\equiv G[D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{0'}] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{60}} g_{27}^0 + \sqrt{\frac{3}{20}} \left(-\sqrt{\frac{2}{15}}\right) g_8 + \frac{1}{\sqrt{60}} \left(-\sqrt{\frac{169}{1120}}\right) g_{27} + \frac{1}{\sqrt{60}} \left(-\sqrt{\frac{3}{32}}\right) g_{27'},
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}
Z_4^S &\equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow p \Lambda' \right] = \\
&= \frac{3}{\sqrt{20}} g_{27}^0 - \frac{1}{\sqrt{20}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_8 + \frac{3}{\sqrt{20}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} \right) g_{27} + \frac{3}{\sqrt{20}} \left( -\sqrt{\frac{3}{32}} \right) g_{27}',
\end{aligned} \tag{4.110}$$

$$Z_5^S \equiv G \left[ D_{(0,2,2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma'^+ \right] = g_{27}^0 + \sqrt{\frac{5}{14}} g_{27}, \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}
Z_6^S &\equiv G \left[ D_{(0,1,1)}^{27} \rightarrow p \Xi^{0'} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} g_{27}^0 - \sqrt{\frac{3}{10}} \left( -\frac{2}{\sqrt{45}} \right) g_8 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{1}{\sqrt{70}} \right) g_{27},
\end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
Z_7^S &\equiv G \left[ D_{(0,1,1)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Lambda' \right] = \\
&= \sqrt{\frac{3}{10}} g_{27}^0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{2}{\sqrt{45}} \right) g_8 + \sqrt{\frac{3}{10}} \left( -\frac{1}{\sqrt{70}} \right) g_{27},
\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}
Z_8^S &\equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow p \Xi^{-'} \right] = \\
&= \sqrt{\frac{3}{40}} g_{27}^0 + \frac{1}{\sqrt{20}} \left( -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) g_8 + \sqrt{\frac{3}{40}} \left( -\sqrt{\frac{8}{35}} \right) g_{27},
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}
Z_9^S &\equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma'^- \right] = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{120}} g_{27}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) g_8 - \frac{1}{\sqrt{120}} \left( -\sqrt{\frac{8}{35}} \right) g_{27},
\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}
Z_{10}^S &\equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow \Lambda \Lambda' \right] = \\
&= \sqrt{\frac{27}{40}} g_{27}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) g_8 + \sqrt{\frac{27}{40}} \left( -\sqrt{\frac{8}{35}} \right) g_{27},
\end{aligned} \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned}
Z_{11}^S &\equiv G \left[ D_{(-1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{0'} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} g_{27}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{5}{224}} g_{27} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27}',
\end{aligned} \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}
Z_{12}^S &\equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-'} \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} g_{27}^0 + \sqrt{\frac{3}{10}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_8 + \frac{1}{\sqrt{30}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} \right) g_{27} + \frac{1}{\sqrt{30}} \left( -\sqrt{\frac{3}{32}} \right) g_{27'},
\end{aligned} \tag{4.118}$$

$$\begin{aligned}
Z_{13}^S &\equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Lambda \Xi^{0'} \right] = \\
&= \frac{3}{\sqrt{20}} g_{27}^0 - \frac{1}{\sqrt{20}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_8 + \frac{3}{\sqrt{20}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} \right) g_{27} + \frac{3}{\sqrt{20}} \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27'},
\end{aligned} \tag{4.119}$$

$$Z_{14}^S \equiv G \left[ D_{(-2,1,+1)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Xi^{0'} \right] = g_{27}^0 - \sqrt{\frac{5}{56}} g_{27} + \sqrt{\frac{3}{8}} g_{27'}. \tag{4.120}$$

Las amplitudes de decaimiento restantes, diferentes de cero, quedan determinadas por las relaciones siguientes:

$$G \left[ D_{(2,1,0)}^{27} \rightarrow pn' \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_1^S, \quad G \left[ D_{(2,1,-1)}^{27} \rightarrow nn' \right] = Z_1^S, \tag{4.121}$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{0'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_2^S, \tag{4.122}$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{+'} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2^S,$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2^S, \tag{4.123}$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{0'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_2^S,$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{-'} \right] = Z_2^S, \tag{4.124}$$

$$G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{+'} \right] = -\sqrt{2} Z_3^S, \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{-'} \right] &= \sqrt{2} Z_3^S, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{0'} \right] &= -Z_3^S,
\end{aligned} \tag{4.126}$$

$$G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow n \Lambda' \right] = Z_4^S$$

$$G \left[ D_{(0,2,+1)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{0'} \right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} Z_5^S, \tag{4.127}$$

$$G \left[ D_{(0,2,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{6}} Z_5^S, \quad G \left[ D_{(0,2,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{0'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_5^S, \tag{4.128}$$

$$G \left[ D_{(0,2,-1)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_5^S, \tag{4.129}$$

$$G \left[ D_{(0,2,-2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{-'} \right] = Z_5^S, \tag{4.130}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow p \Xi^{-'} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_6^S, & G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow n \Xi^{0'} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_6^S, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Lambda' \right] &= Z_7^S,
\end{aligned} \tag{4.131}$$

$$G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow n \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_6^S, \quad G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Lambda' \right] = -Z_7^S, \tag{4.132}$$

$$G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow n \Xi^{0'} \right] = -Z_8^S, \quad G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{0'} \right] = -Z_9^S, \tag{4.133}$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{11}^S, \quad (4.134)$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{0'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_{11}^S,$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{-'} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} Z_{11}^S, \quad (4.135)$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{0'} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{11}^S,$$

$$G \left[ D_{(-1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{-'} \right] = Z_{11}^S, \quad (4.136)$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{0'} \right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} Z_{12}^S, \quad (4.137)$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_{12}^S,$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{0'} \right] = -Z_{12}^S, \quad (4.138)$$

$$G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Lambda \Xi^{-'} \right] = Z_{13}^S,$$

$$G \left[ D_{(-2,1,0)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Xi^{-'} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_{14}^S, \quad (4.139)$$

$$G \left[ D_{(-2,1,-1)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Xi^{-'} \right] = Z_{14}^S, \quad (4.140)$$

con relaciones idénticas para  $G \left[ D_{(Y,I,I_3)}^{27} \rightarrow B'B \right] = G \left[ D_{(Y,I,I_3)}^{27} \rightarrow BB' \right]$ .

Las 14 amplitudes de decaimiento independientes, (4.107) – (4.120), están descritas por 4 parámetros. Es posible entonces deducir 10 reglas de suma entre las amplitudes de decaimiento fuerte con rompimiento a primer orden

de la simetría de sabor SU(3) para los dibariones en el multiplete **27** al decaer en un estado simétrico compuesto por dos bariones ordinarios:

$$Z_5^S = 2\sqrt{2} Z_2^S - Z_1^S, \quad (4.141)$$

$$3\sqrt{5} Z_6^S = 3\sqrt{5} Z_4^S - \sqrt{15} Z_3^S + 2\sqrt{2} Z_2^S - 3Z_1^S, \quad (4.142)$$

$$\sqrt{30} Z_7^S = \sqrt{20} Z_4^S + 2\sqrt{15} Z_3^S + 2\sqrt{2} Z_2^S - 18 Z_1^S, \quad (4.143)$$

$$2\sqrt{10} Z_8^S = \sqrt{15} Z_4^S + 3\sqrt{5} Z_3^S - \sqrt{3} Z_1^S, \quad (4.144)$$

$$2\sqrt{30} Z_9^S = -4\sqrt{15} Z_3^S + Z_1^S, \quad (4.145)$$

$$2\sqrt{10} Z_{10}^S = 2\sqrt{60} Z_4^S - 3\sqrt{3} Z_1^S, \quad (4.146)$$

$$3\sqrt{5} Z_4^S = -\sqrt{15} Z_3^S - 4\sqrt{2} Z_2^S + 3\sqrt{2} Z_{11}^S + 6Z_1^S, \quad (4.147)$$

$$3\sqrt{5} Z_4^S = -7\sqrt{15} Z_3^S + 3\sqrt{30} Z_{13}^S - \sqrt{2} Z_2^S + 6Z_1^S, \quad (4.148)$$

$$5\sqrt{5} Z_4^S = -\sqrt{15} Z_3^S + 2\sqrt{5} Z_{13}^S - \sqrt{2} Z_2^S + 6Z_1^S, \quad (4.149)$$

$$6\sqrt{5} Z_4^S = -2\sqrt{15} Z_3^S - 2\sqrt{2} Z_2^S + 9Z_1^S + 3Z_{14}^S. \quad (4.150)$$

#### 4.4. Decaimientos $D_{27} \rightarrow B + R$

La amplitud de decaimiento que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) está dada por la Ec. (3.15), para el caso de los decaimientos  $D_{27} \rightarrow B + R$  se tiene:

$$|a\rangle = |\mathbf{27}, \nu_D\rangle \equiv |D_{(Y,I,I_3)}^{27}\rangle, \quad |b\rangle = |\mathbf{8}, \nu_B\rangle \equiv |B\rangle \quad \text{y} \quad |c\rangle = |\mathbf{10}, \nu_R\rangle \equiv |R\rangle.$$

Los estados en el decuplete del estado final son las resonancias barionicas de espín 3/2 y paridad positiva y sus números cuánticos están dados en las Ecs. (2.26), ver Fig. 2.2.

Como  $\mu_a = 27$ ,  $\mu_b = 8$  y  $\mu_c = 10$ , el elemento de matriz en la expresión (3.15) toma la forma:

$$\langle \langle \mu_c, \nu_c | \langle \mu_b, \nu_b | \rangle H_{\text{int}} | \mu_a, \nu_a \rangle = \langle \langle 10, \nu_R | \langle 8_B, \nu_B | \rangle H_{\text{int}} | 27, \nu_D \rangle.$$

Ademas,

$$\mu_b \otimes \mu_c = 8 \otimes 10 = 8 \oplus 10 \oplus 27 \oplus 35 \quad (4.151)$$

y

$$8 \otimes \mu_a = 8 \otimes 27 = 64 \oplus 35 \oplus \bar{35} \oplus 27 \oplus 27' \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8. \quad (4.152)$$

Para la parte de (3.15) en el limite de simetría, el indice  $\gamma$  no es necesario ya que  $\mu_a = 27$  aparece solo una vez en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c = 8 \otimes 10$ . Por lo tanto, el primer termino de (3.15) toma la forma:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_a \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_a}^{0\gamma} = \left( \begin{array}{cc|c} 8 & 10 & 27 \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) g_{27}^0. \quad (4.153)$$

En el termino de (3.15) que incluye el rompimiento de la simetría,  $\mu_\gamma$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $\mu_b \otimes \mu_c = 8 \otimes 10$ , por lo que  $\mu_\gamma = 8, 10, 27, 35$ ; mientras que  $\mu_\tau$  recorre las representaciones que aparecen en la expansión  $8 \otimes \mu_a = 8 \otimes 27$  y que son iguales a  $\mu_\gamma$  (debido a la presencia de  $\delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau}$  en (3.15)), por lo que  $\mu_\tau = 8, 10, 27, 35$ ; en consecuencia, el indice  $\tau$  distingue la aparición doble,  $27$  y  $27'$ , en  $8 \otimes \mu_a$  cuando  $\mu_\tau = \mu_\gamma = 27$ . Finalmente, el indice  $\gamma'$  no es necesario debido a que cada representación  $\mu_\tau$  aparece solo una vez en la descomposición  $\mu_b \otimes \mu_c = 8 \otimes 10$ . Así, el termino en (3.15) que rompe la simetría es, en este caso:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu_\gamma, \mu_\tau} \left( \begin{array}{cc|c} \mu_b & \mu_c & \mu_\gamma \\ \nu_b & \nu_c & \nu_a \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mu_a & \mu_\tau \\ (0,0,0) & \nu_a & \nu_a \end{array} \right) g_{\mu_\tau}^{\gamma'} \delta_{\mu_\gamma, \mu_\tau} = \\
& = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{8}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{10} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{10} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{10}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{27} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{27}} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{27}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{27}'} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{35} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{35} & \mathbf{35} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{\mathbf{35}}.
\end{aligned} \tag{4.154}$$

Finalmente, para los decaimientos  $D_{\mathbf{27}} \rightarrow B + R$ , las amplitudes de decaimiento que incluyen el rompimiento a primer orden de la simetría de sabor  $SU(3)$  están dadas por la suma de las expresiones (4.153) y (4.154). Todas las amplitudes quedan descritas por seis parámetros o constantes de acoplamiento:

$$\begin{aligned}
G [D_{27} \rightarrow BR] = & \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) g_{27}^0 \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{8} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_8 \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{10} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{10} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{10} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{27} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{27} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{27} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{27}' \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{27'} \\
& + \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{35} \\ \nu_B & \nu_R & \nu_D \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{35} \\ (0,0,0) & \nu_D & \nu_D \end{array} \right) g_{35}.
\end{aligned} \tag{4.155}$$

De acuerdo a los números cuánticos de las resonancias bariónicas, Ecs. (2.26) y Fig. 2.2, así como de los bariones en el octete, Ecs. (2.27) y Fig. 2.1, y utilizando las tablas de coeficientes de Clebsch-Gordan de SU(3) (McNAMEE, J. y CHILTON 1964), se encuentra que para este caso existen 22 amplitudes de decaimiento linealmente independientes que por definición se eligen como las siguientes:

$$Z_1 \equiv G \left[ D_{(2,1,+1)}^{27} \rightarrow p \Delta^+ \right] = -\frac{1}{2} g_{27}^0 - \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{5}{56}} g_{27} - \sqrt{\frac{3}{8}} g_{27'} \right), \tag{4.156}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 \equiv G \left[ D_{(1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{+*} \right] = & \frac{1}{\sqrt{8}} g_{27}^0 \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{24}} g_{10} + \frac{1}{\sqrt{8}} \left( \sqrt{\frac{5}{224}} g_{27} - \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27'} \right) + \sqrt{\frac{5}{8}} \left( -\sqrt{\frac{5}{48}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.157}$$

$$\begin{aligned}
Z_3 \equiv G \left[ D_{(1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Delta^+ \right] &= -\frac{1}{\sqrt{8}} g_{27}^0 \\
&+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{24}} g_{10} - \frac{1}{\sqrt{8}} \left( \sqrt{\frac{5}{224}} g_{27} - \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27'} \right) - \frac{1}{\sqrt{40}} \left( -\sqrt{\frac{5}{48}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.158}$$

$$\begin{aligned}
Z_4 \equiv G \left[ D_{(1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow \Lambda \Delta^{++} \right] &= -\frac{3}{\sqrt{16}} g_{27}^0 \\
&- \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{5}{24}} g_{10} - \frac{3}{\sqrt{16}} \left( \sqrt{\frac{5}{224}} g_{27} - \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27'} \right) + \sqrt{\frac{5}{16}} \left( -\sqrt{\frac{5}{48}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.159}$$

$$\begin{aligned}
Z_5 \equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{0*} \right] &= \\
&= -\frac{2}{\sqrt{15}} g_{27}^0 - \frac{1}{\sqrt{15}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_8 - \frac{2}{\sqrt{15}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} g_{27} - \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27'} \right),
\end{aligned} \tag{4.160}$$

$$\begin{aligned}
Z_6 \equiv G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Delta^0 \right] &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{30}} g_{27}^0 - \sqrt{\frac{2}{15}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_8 + \frac{1}{\sqrt{30}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} g_{27} - \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27'} \right),
\end{aligned} \tag{4.161}$$

$$Z_7 \equiv G \left[ D_{(0,2,+2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{+*} \right] = \frac{1}{2} g_{27}^0 + \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{5}{14}} \right) g_{27} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{35}, \tag{4.162}$$

$$Z_8 \equiv G \left[ D_{(0,2,+2)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Delta^{+*} \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} g_{27}^0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\sqrt{\frac{5}{14}} \right) g_{27} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{35}, \tag{4.163}$$

$$\begin{aligned}
Z_9 \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow p \Xi^{0*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{5}} g_{27}^0 \\
&+ \sqrt{\frac{2}{15}} \left( -\frac{2}{\sqrt{45}} \right) g_8 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{3} g_{10} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{1}{\sqrt{70}} \right) g_{27} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\sqrt{\frac{5}{36}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.164}$$

$$\begin{aligned}
Z_{10} \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{0*} \right] &= -\frac{3}{\sqrt{40}} g_{27}^0 \\
&+ \sqrt{\frac{1}{15}} \left( -\frac{2}{\sqrt{45}} \right) g_8 + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{3} g_{10} - \frac{3}{\sqrt{40}} \left( -\frac{1}{\sqrt{70}} \right) g_{27} - \frac{1}{\sqrt{24}} \left( -\sqrt{\frac{5}{36}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.165}$$

$$\begin{aligned}
Z_{11} \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow \Lambda \Sigma^{+*} \right] &= -\sqrt{\frac{3}{10}} g_{27}^0 \\
&- \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{2}{\sqrt{45}} \right) g_8 - \sqrt{\frac{3}{10}} \left( -\frac{1}{\sqrt{70}} \right) g_{27} + \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{5}{36}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.166}$$

$$\begin{aligned}
Z_{12} \equiv G \left[ D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Delta^+ \right] &= \frac{1}{\sqrt{80}} g_{27}^0 \\
&- \sqrt{\frac{2}{15}} \left( -\frac{2}{\sqrt{45}} \right) g_8 + \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{1}{3} g_{10} + \frac{1}{\sqrt{80}} \left( -\frac{1}{\sqrt{70}} \right) g_{27} - \frac{1}{\sqrt{48}} \left( -\sqrt{\frac{5}{36}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.167}$$

$$\begin{aligned}
Z_{13} \equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow p \Xi^{-*} \right] &= \\
&= -\sqrt{\frac{3}{10}} g_{27}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) g_8 - \sqrt{\frac{3}{10}} \left( -\sqrt{\frac{8}{35}} \right) g_{27},
\end{aligned} \tag{4.168}$$

$$\begin{aligned}
Z_{14} \equiv G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-*} \right] &= \\
&= \sqrt{\frac{2}{15}} g_{27}^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) g_8 + \sqrt{\frac{2}{15}} \left( -\sqrt{\frac{8}{35}} \right) g_{27},
\end{aligned} \tag{4.169}$$

$$\begin{aligned}
Z_{15} \equiv G \left[ D_{(-1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{0*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} g_{27}^0 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{5}{224}} g_{27} + \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27'} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.170}$$

$$\begin{aligned}
Z_{16} \equiv G \left[ D_{(-1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Sigma^{+*} \right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} g_{27}^0 \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{5}{224}} g_{27} + \sqrt{\frac{3}{32}} g_{27'} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) g_{35},
\end{aligned} \tag{4.171}$$

$$\begin{aligned}
Z_{17} \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow p \Omega^- \right] &= \frac{3}{\sqrt{40}} g_{\mathbf{27}}^0 + \sqrt{\frac{2}{5}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_{\mathbf{8}} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{24}} g_{\mathbf{10}} + \frac{3}{\sqrt{40}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} g_{\mathbf{27}} + \sqrt{\frac{3}{32}} g_{\mathbf{27}'} \right) + \frac{1}{\sqrt{8}} \left( -\sqrt{\frac{5}{48}} \right) g_{\mathbf{35}},
\end{aligned} \tag{4.172}$$

$$\begin{aligned}
Z_{18} \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-*} \right] &= -\sqrt{\frac{49}{120}} g_{\mathbf{27}}^0 + \sqrt{\frac{2}{15}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_{\mathbf{8}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{1}{\sqrt{24}} g_{\mathbf{10}} - \sqrt{\frac{49}{120}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} g_{\mathbf{27}} + \sqrt{\frac{3}{32}} g_{\mathbf{27}'} \right) - \frac{1}{\sqrt{24}} \left( -\sqrt{\frac{5}{48}} \right) g_{\mathbf{35}},
\end{aligned} \tag{4.173}$$

$$\begin{aligned}
Z_{19} \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Lambda \Xi^{0*} \right] &= -\frac{3}{\sqrt{80}} g_{\mathbf{27}}^0 \\
&- \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{24}} g_{\mathbf{10}} - \frac{3}{\sqrt{80}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} \right) g_{\mathbf{27}} + \frac{3}{\sqrt{16}} \left( -\sqrt{\frac{5}{48}} \right) g_{\mathbf{35}},
\end{aligned} \tag{4.174}$$

$$\begin{aligned}
Z_{20} \equiv G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Xi^0 \Sigma^{0*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{60}} g_{\mathbf{27}}^0 - \frac{1}{\sqrt{15}} \left( -\sqrt{\frac{2}{15}} \right) g_{\mathbf{8}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{24}} g_{\mathbf{10}} + \frac{1}{\sqrt{60}} \left( -\sqrt{\frac{169}{1120}} g_{\mathbf{27}} + \sqrt{\frac{3}{32}} g_{\mathbf{27}'} \right) - \frac{1}{\sqrt{12}} \left( -\sqrt{\frac{5}{48}} \right) g_{\mathbf{35}},
\end{aligned} \tag{4.175}$$

$$\begin{aligned}
Z_{21} \equiv G \left[ D_{(-2,1,+1)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Sigma^+ \Omega^- \right] &= \frac{\sqrt{3}}{2} g_{\mathbf{27}}^0 \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\sqrt{\frac{5}{56}} g_{\mathbf{27}} + \sqrt{\frac{3}{8}} g_{\mathbf{27}'} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{\mathbf{35}},
\end{aligned} \tag{4.176}$$

$$\begin{aligned}
Z_{22} \equiv G \left[ D_{(-2,1,+1)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Xi^0 \Xi^{0*} \right] &= -\frac{1}{2} g_{\mathbf{27}}^0 \\
&- \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{5}{56}} g_{\mathbf{27}} + \sqrt{\frac{3}{8}} g_{\mathbf{27}'} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) g_{\mathbf{35}}.
\end{aligned} \tag{4.177}$$

Las amplitudes de decaimiento restantes, diferentes de cero, quedan determinadas por las relaciones siguientes:

$$G \left[ D_{(2,1,+1)}^{27} \rightarrow n \Delta^{++} \right] = -\sqrt{3} Z_1, \quad (4.178)$$

$$G \left[ D_{(2,1,0)}^{27} \rightarrow p \Delta^0 \right] = \sqrt{2} Z_1, \quad G \left[ D_{(2,1,0)}^{27} \rightarrow n \Delta^+ \right] = -\sqrt{2} Z_1, \quad (4.179)$$

$$G \left[ D_{(2,1,-1)}^{27} \rightarrow p \Delta^- \right] = \sqrt{3} Z_1, \quad G \left[ D_{(2,1,-1)}^{27} \rightarrow n \Delta^0 \right] = -Z_1, \quad (4.180)$$

$$G \left[ D_{(1,3/2,+3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Delta^{++} \right] = -\sqrt{\frac{3}{2}} Z_3, \quad (4.181)$$

$$\begin{aligned} G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{0*} \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} Z_2, \\ G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{+*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2, \\ G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Delta^0 \right] &= \frac{2}{\sqrt{3}} Z_3, \\ G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Delta^+ \right] &= -\frac{1}{\sqrt{6}} Z_3, \\ G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Delta^{++} \right] &= -Z_3, \\ G \left[ D_{(1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Lambda \Delta^+ \right] &= Z_4, \end{aligned} \quad (4.182)$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2, \\
G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{0*} \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} Z_2, \\
G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Delta^- \right] &= Z_3, \\
G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Delta^0 \right] &= \frac{1}{\sqrt{6}} Z_3, \\
G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Delta^+ \right] &= -\frac{2}{\sqrt{3}} Z_3, \\
G \left[ D_{(1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Lambda \Delta^0 \right] &= Z_4,
\end{aligned} \tag{4.183}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{-*} \right] &= Z_2, \\
G \left[ D_{(1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Delta^- \right] &= \sqrt{\frac{3}{2}} Z_3, \\
G \left[ D_{(1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Delta^0 \right] &= -Z_3, \\
G \left[ D_{(1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow \Lambda \Delta^- \right] &= Z_4,
\end{aligned} \tag{4.184}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{+*} \right] &= -\sqrt{2} Z_5, \\
G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Delta^+ \right] &= -\sqrt{2} Z_6, \\
G \left[ D_{(1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Delta^{++} \right] &= \sqrt{3} Z_6,
\end{aligned} \tag{4.185}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow p \Sigma^{-*} \right] &= \sqrt{2} Z_5, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow n \Sigma^{0*} \right] &= -Z_5, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Delta^+ \right] &= \sqrt{3} Z_6, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Delta^0 \right] &= -\sqrt{2} Z_6, \\
G \left[ D_{(1,1/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Delta^+ \right] &= Z_6,
\end{aligned} \tag{4.186}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,2,+1)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{0*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_7, & G \left[ D_{(0,2,+1)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{+*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_7, \\
G \left[ D_{(0,2,+1)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Delta^+ \right] &= \frac{\sqrt{3}}{2} Z_8, & G \left[ D_{(0,2,+1)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Delta^{++} \right] &= \frac{1}{2} Z_8,
\end{aligned} \tag{4.187}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,2,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{6}} Z_7, & G \left[ D_{(0,2,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{0*} \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} Z_7, \\
G \left[ D_{(0,2,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{+*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{6}} Z_7, & G \left[ D_{(0,2,0)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Delta^0 \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_8, \\
G \left[ D_{(0,2,0)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Delta^+ \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_8,
\end{aligned} \tag{4.188}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,2,-1)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_7, & G \left[ D_{(0,2,-1)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{0*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_7, \\
G \left[ D_{(0,2,-1)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Delta^- \right] &= \frac{1}{2} Z_8, & G \left[ D_{(0,2,-1)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Delta^0 \right] &= \frac{\sqrt{3}}{2} Z_8,
\end{aligned} \tag{4.189}$$

$$G \left[ D_{(0,2,-2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{-*} \right] = Z_7, \quad G \left[ D_{(0,2,-2)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Delta^- \right] = Z_8, \tag{4.190}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{+*} \right] &= -Z_{10}, \\
G \left[ D_{(0,1,+1)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Delta^{++} \right] &= -\sqrt{3} Z_{12},
\end{aligned} \tag{4.191}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow p \Xi^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_9, & G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow n \Xi^{0*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_9, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^{-*} \right] &= Z_{10}, & G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{+*} \right] &= -Z_{10}, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow \Lambda \Sigma^{0*} \right] &= Z_{11}, & G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Delta^0 \right] &= \sqrt{2} Z_{12}, \\
G \left[ D_{(0,1,0)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Delta^+ \right] &= -\sqrt{2} Z_{12},
\end{aligned} \tag{4.192}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow n \Xi^{-*} \right] &= Z_9, & G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{-*} \right] &= Z_{10}, \\
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{0*} \right] &= -Z_{10}, & G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow \Lambda \Sigma^{-*} \right] &= Z_{11}, \\
G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Delta^- \right] &= \sqrt{3} Z_{12}, & G \left[ D_{(0,1,-1)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Delta^0 \right] &= -Z_{12},
\end{aligned} \tag{4.193}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow n \Xi^{0*} \right] &= -Z_{13}, & G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Sigma^{0*} \right] &= -Z_{14}, \\
G \left[ D_{(0,0,0)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Sigma^{+*} \right] &= Z_{14},
\end{aligned} \tag{4.194}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{15}, \\
G \left[ D_{(-1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{0*} \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} Z_{15}, \\
G \left[ D_{(-1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Sigma^{0*} \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} Z_{16}, \\
G \left[ D_{(-1,3/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Sigma^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{16},
\end{aligned} \tag{4.195}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{-*} \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} Z_{15}, \\
G \left[ D_{(-1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{0*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{15}, \\
G \left[ D_{(-1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Xi^0 \Sigma^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{3}} Z_{16}, \\
G \left[ D_{(-1,3/2,-1/2)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Sigma^{0*} \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} Z_{16},
\end{aligned} \tag{4.196}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{-*} \right] &= Z_{15}, \\
G \left[ D_{(-1,3/2,-3/2)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Sigma^{-*} \right] &= Z_{16},
\end{aligned} \tag{4.197}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{0*} \right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} Z_{18}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,+1/2)}^{27} \rightarrow \Xi^- \Sigma^{+*} \right] &= -\sqrt{2} Z_{20},
\end{aligned} \tag{4.198}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow n \Omega^- \right] &= Z_{17}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Sigma^0 \Xi^{-*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_{18}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Sigma^- \Xi^{0*} \right] &= -Z_{18}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Lambda \Xi^{-*} \right] &= Z_{19}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Xi^0 \Sigma^{-*} \right] &= \sqrt{2} Z_{20}, \\
G \left[ D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Xi^- \Sigma^{0*} \right] &= -Z_{20},
\end{aligned} \tag{4.199}$$

$$\begin{aligned}
G \left[ D_{(-2,1,0)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Sigma^0 \Omega^- \right] &= Z_{21}, \quad G \left[ D_{(-2,1,0)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Xi^0 \Xi^{-*} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_{22}, \\
G \left[ D_{(-2,1,0)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Xi^- \Xi^{0*} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} Z_{22},
\end{aligned} \tag{4.200}$$

$$G \left[ D_{(-2,1,-1)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Sigma^- \Omega^- \right] = Z_{21}, \quad G \left[ D_{(-2,1,-1)}^{\mathbf{27}} \rightarrow \Xi^- \Xi^{-*} \right] = Z_{22}. \tag{4.201}$$

Las 22 amplitudes de decaimiento independientes, (4.156) – (4.177), están descritas por 6 parámetros. Es posible entonces deducir 16 reglas de suma entre las amplitudes de decaimiento fuerte con rompimiento a primer orden de la simetría de sabor SU(3) para los dibariones en el multiplete  $\mathbf{27}$  al decaer en un estado compuesto por un barión ordinario y una resonancia bariónica:

$$Z_1 = -\sqrt{2} Z_2 + \sqrt{2} Z_3 + Z_7, \tag{4.202}$$

$$\sqrt{6} Z_1 = \sqrt{3} Z_3 + \sqrt{6} Z_4 - \sqrt{2} Z_8, \tag{4.203}$$

$$\sqrt{6} Z_1 = \sqrt{3} Z_3 + \sqrt{6} Z_4 - \sqrt{2} Z_8, \tag{4.204}$$

$$6Z_1 = -4\sqrt{2}Z_2 + 2\sqrt{15}Z_5 + 3\sqrt{5}Z_9, \quad (4.205)$$

$$9Z_1 = -3\sqrt{10}Z_{10} - \sqrt{2}Z_2 + 5\sqrt{2}Z_3 + 2\sqrt{15}Z_5 - 2\sqrt{30}Z_6, \quad (4.206)$$

$$3\sqrt{2}Z_1 = -\sqrt{15}Z_{11} + 2Z_2 + 2\sqrt{2}Z_4 + \sqrt{30}Z_5, \quad (4.207)$$

$$3\sqrt{2}Z_1 = 6\sqrt{10}Z_{12} - 5Z_3 + 3\sqrt{2}Z_4 - 4\sqrt{15}Z_6, \quad (4.208)$$

$$2\sqrt{3}Z_1 = -\sqrt{10}Z_{13} + 3\sqrt{5}Z_5, \quad (4.209)$$

$$4Z_1 = \sqrt{30}Z_{14} + \sqrt{15}Z_5 - 2\sqrt{30}Z_6, \quad (4.210)$$

$$6\sqrt{2}Z_1 = 3Z_{15} - 4Z_2 + 4Z_3 + \sqrt{30}Z_5 - \sqrt{15}Z_6, \quad (4.211)$$

$$6\sqrt{2}Z_1 = -3Z_{16} + 2Z_2 + Z_3 + 3\sqrt{2}Z_4 + \sqrt{30}Z_5 - \sqrt{15}Z_6, \quad (4.212)$$

$$3\sqrt{2}Z_1 = \sqrt{5}Z_{17} - Z_2 + \sqrt{30}Z_5, \quad (4.213)$$

$$21\sqrt{2}Z_1 = -3\sqrt{15}Z_{18} - 2Z_2 + 5Z_3 + 5\sqrt{30}Z_5 - 8\sqrt{15}Z_6, \quad (4.214)$$

$$3Z_1 = -\sqrt{5}Z_{19} + \sqrt{2}Z_2 + Z_4 + \sqrt{15}Z_5, \quad (4.215)$$

$$6\sqrt{2}Z_1 = 2Z_2 + 3\sqrt{30}Z_{20} - 5Z_3 + 3\sqrt{2}Z_4 + \sqrt{30}Z_5 - 4\sqrt{15}Z_6, \quad (4.216)$$

$$9Z_1 = -\sqrt{2}Z_2 + \sqrt{3}Z_{21} + \sqrt{2}Z_3 + 2\sqrt{15}Z_5 - \sqrt{30}Z_6, \quad (4.217)$$

$$9\sqrt{2}Z_1 = 4Z_2 - 3\sqrt{2}Z_{22} - Z_3 + 3\sqrt{2}Z_4 + 2\sqrt{30}Z_5 - 2\sqrt{15}Z_6. \quad (4.218)$$

# Resultados

## Resultados

Los descubrimientos recientes de tetraquarks (Choi y col. 2003, Ablikim y col. 2013), pentaquarks (Aaij y col. 2015) y del dibarión  $d^*(2380)$  (Adlarson y col. 2014a, Adlarson y col. 2014b), han renovado el interés en el desarrollo de técnicas auxiliares tanto teóricas como experimentales que contribuyan al descubrimiento de hadrones exóticos adicionales. Recientemente, se han reportado los resultados para las reglas de suma con rotura de la simetría de sabor SU(3) a primer orden entre las amplitudes de decaimiento fuerte para estados tetraquark (GUPTA, SÁNCHEZ-COLÓN y RAJPOOT 2012, GUPTA, SÁNCHEZ-COLÓN y RAJPOOT 2013) así como para dibariones en los decupletes  $\mathbf{10}^*$  (al que pertenece el deuterón) y  $\mathbf{10}$ , al decaer en dos bariones de espín 1/2 pertenecientes al octete de SU(3) (Gupta y Sánchez-Colón 2015). Adicionalmente, en la literatura se ha analizado la posible existencia de estados dibariónicos pertenecientes a las representaciones  $\mathbf{8}$  (R. L. Jaffe 1977a, Erratum: R. L. Jaffe 1977b, Oka 1988) y  $\mathbf{27}$  (Xie y Zhang 1984, Xie 1989) del grupo SU(3) de sabor.

En este contexto, el objetivo de esta tesis ha sido el determinar reglas de suma para las amplitudes de decaimiento fuerte de los dibariones en los multipletes  $\mathbf{8}$  y  $\mathbf{27}$ , al decaer en dos bariones ordinarios y al también al decaer en un barión ordinario mas un barión del decuplete (resonancia) (Polanco-Euán, Sánchez-Colón y Gupta 2017, Polanco-Euán, Gupta y col. 2016).

En la Tabla 4.1 se hace referencia y cuantifican los resultados obtenidos para las amplitudes decaimiento independientes y las reglas de suma en cada proceso estudiado en esta tesis.

Decaimiento (Sección)	Amplitudes independientes (Ecs.)	Reglas de suma (Ecs.)
$D_8 \rightarrow B + B'$ (antisimétrico) (4.1.1)	8 (4.6)-(4.13)	3 (4.21)-(4.23)
$D_8 \rightarrow B + B'$ (simétrico) (4.1.2)	9 (4.25)-(4.33)	4 (4.34)-(4.37)
$D_8 \rightarrow B + R$ (4.2)	12 (4.43)-(4.54)	7 (4.63)-(4.69)
$D_{27} \rightarrow B + B'$ (antisimétrico) (4.3.1)	10 (4.76)-(4.85)	7 (4.99)-(4.105)
$D_{27} \rightarrow B + B'$ (simétrico) (4.3.2)	14 (4.107)-(4.120)	10 (4.141)-(4.150)
$D_{27} \rightarrow B + R$ (4.4)	22 (4.156)-(4.177)	16 (4.202)-(4.218)

Tabla 4.1: Tipo de decaimiento, cuantificación y referencias a las amplitudes de decaimiento independientes y reglas de suma para cada proceso analizado.

## Discusión

Es improbable que los dibariones miembros de los multipletes **8** y **27** estudiados en este trabajo sean estables. Sin embargo, un modo de decaimiento en particular puede resultar que no está permitido por conservación de la energía. En este caso, la amplitud de decaimiento correspondiente sería cero. Por ejemplo, si el decaimiento  $D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \rightarrow \Sigma^+ \Xi^{-'}$  no está permitido energéticamente, entonces la amplitud de decaimiento  $X_7^A = 0$  (ver Ec. (4.12)) y esto modificaría las reglas de suma de las Ecs. (4.21) y (4.23).

Las diferentes amplitudes de decaimiento,  $G$ , que aparecen en las reglas de suma pueden obtenerse de las correspondientes razones de decaimiento,  $\Gamma$ . Por ejemplo, para el decaimiento de un estado dibarión en el octete con espín 1 y paridad positiva ( $J^P = 1^+$ ) en dos bariones ordinarios,  $B$  y  $B'$ , con  $J^P = (1/2)^+$ , la razón de decaimiento diferencial en el sistema de reposo del dibarión está dada por:

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{|\vec{p}|}{M^2} d\Omega, \quad (4.219)$$

donde  $M$  es la masa del dibarión,  $\vec{p}$  es el momentum de uno de los bariones,  $d\Omega$  es el ángulo sólido del barión  $B$  y  $\mathcal{M}$  es la amplitud invariante de Feynman. Para un decaimiento de onda- $s$  y de acuerdo a las dimensiones se toma  $\mathcal{M} = GM$  con  $G$  la correspondiente amplitud de decaimiento fuerte..

Por otra parte, es muy importante verificar la certeza de los resultados obtenidos y en este sentido en el Apéndice A se presenta un procedimiento basado en la teoría cuántica de campos y el uso de tensores, alterno e independiente al desarrollado en el Capítulo 3 y en la Sec. 4.1, para determinar las reglas de suma en el caso de los decaimientos del octete de dibariones en dos bariones ordinarios (Polanco-Euán, Gupta y col. 2016). Los resultados por ambos métodos coinciden exactamente, lo que verifica la exactitud de los resultados obtenidos en esta tesis.

## Perspectivas

Resulta un poco sorprendente que la evidencia más convincente para la existencia de hadrones exóticos proviene de experimentos realizados en sectores donde están involucrados los quarks pesados  $c$  y  $b$ . Esto sugiere que la atracción entre cúmulos de quarks es más grande si cada uno de los cúmulos contiene un quark (o antiquark) pesado. Esto también se ve corroborado por

una serie de cálculos de modelos independientes que apoyan la esperanza de que en este sector también se encontrarán sistemas dibariónicos en un futuro próximo. Ante este panorama y como posible escenario de una próxima investigación, en el Apéndice B se describe el esquema general para extender el análisis de la Sec. 4.1 al sector pesado, SU(4) de sabor. Se analiza el procedimiento para determinar las reglas de suma con rompimiento de la simetría en el caso de los decaimientos de dibariones en el multiplete  $\mathbf{64}$  de SU(4) a dos bariones de espín 1/2 en el sector pesado, pertenecientes al multiplete  $\mathbf{20}'$  de SU(4) (Polanco-Euán, Gupta y col. 2016, Gupta 1976).

## Conclusiones

Del estudio de estas nuevas formas de materia quark, se espera aprender más acerca de las fuerzas complejas entre quarks ligados, es decir se aprenderá más acerca de las soluciones a la teoría de muchos cuerpos de la Cromodinámica Cuántica. El descubrimiento y confirmación de hadrones exóticos es un escalón importante en el entendimiento de la interacción fuerte, la menos bien conocida de las cuatro interacciones en la naturaleza.

# Apéndice A

## Verificación $D_8 \rightarrow B + B'$

### A.1. Método de Operadores

En el caso de los decaimientos fuertes de los dibariones del octete en un estado final de dos bariones ordinarios, Sec. 4.1, es posible realizar una determinación independiente de las reglas de suma lo que permite confirmar la certeza de los cálculos realizados para obtener las Ecs. (4.21) a (4.23) y (4.34) a (4.37) (Polanco-Euán, Gupta y col. 2016).

La aproximación alterna es en el ámbito de la teoría cuántica de campos y tiene su origen en el uso de análisis tensorial para la construcción de representaciones irreducibles de SU(n). El procedimiento consiste primero en escribir el octete de bariones ordinarios (en este caso operadores de creación) como una matriz  $3 \times 3$  (siguiendo la convención de signos de Carruthers 1966):

$$B_8 \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & n \\ -\Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

la matriz (A.1) fue escrita originalmente por Ne'eman 1961. Análogamente, para el octete de dibariones de la Fig. 4.1 (en este caso operadores de destrucción) se define la matriz:

$$D_{\mathbf{8}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}}D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} & D_{(0,1,+1)}^{\mathbf{8}} & D_{(1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} \\ D_{(0,1,-1)}^{\mathbf{8}} & \frac{1}{\sqrt{6}}D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} - \frac{1}{\sqrt{2}}D_{(0,1,0)}^{\mathbf{8}} & D_{(1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} \\ -D_{(-1,1/2,-1/2)}^{\mathbf{8}} & D_{(-1,1/2,+1/2)}^{\mathbf{8}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}D_{(0,0,0)}^{\mathbf{8}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

En este esquema, es posible demostrar que el termino del Hamiltoniano de interacción invariante ante transformaciones de  $SU(3)$ ,  $H_{\text{st}}$ , para los acoplamientos de un elemento de la matriz  $D_{\mathbf{8}}$  con un par de bariones ordinarios involucra la traza de productos de matrices:

$$H_{\text{st}} \sim \text{Tr} \{ \bar{D}_{\mathbf{8}} [B_{\mathbf{8}}B'_{\mathbf{8}} \pm B'_{\mathbf{8}}B_{\mathbf{8}}] \}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\bar{D}_{\mathbf{8}} = D_{\mathbf{8}}^T$  y donde la prima solo se emplea para diferenciar a la misma matriz  $B_{\mathbf{8}}$  para el estado final de dos bariones.

Ademas, el termino de interacción,  $H_{\text{ms}}$ , que rompe la simetría  $SU(3)$  de sabor está dado por la inclusión de la matriz diagonal  $\lambda_{\mathbf{8}}$ , de la Ec. (2.1):

$$\lambda_{\mathbf{8}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

La justificación de esta afirmación puede establecerse como en la Sec. 3.1.2, al considerar nuevamente que, en términos del Modelo Quark, la simetría de sabor  $SU(3)$  está rota por la desigualdad de las masas entre los quarks  $|u\rangle$  y  $|d\rangle$  (isodoblete, de masa  $m_d \approx m_u$ ) y el quark  $|s\rangle$  (isosinglete, de masa  $m_s$ ). El término de masa en el Hamiltoniano es:

$$m_d(\bar{u}u + \bar{d}d) + m_s\bar{s}s. \quad (\text{A.5})$$

Introduciendo la masa promedio  $m_0 = (2/3)m_d + 1/3m_s$ , se puede escribir (A.5) en la forma (Carruthers 1966):

$$m_0\bar{q}q - \frac{1}{\sqrt{3}}(m_d - m_s)\bar{q}\lambda_{\mathbf{8}}q, \quad (\text{A.6})$$

donde,

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

La Ec. (A.6) también puede ser escrita en términos de trazas de producto de matrices, en forma similar a la expresión (A.3). La Ec. (A.6) establece el rompimiento a primer orden de la simetría SU(3) de sabor en el término de masa del Hamiltoniano.

La amplitud de decaimiento fuerte,  $G[D_{(Y,I,I_3)}^8 \rightarrow BB']$ , de un estado dibarión en el octete,  $D_{(Y,I,I_3)}^8$ , en dos bariones ordinarios,  $B$  y  $B'$ , que incluye el rompimiento a primer orden de la simetría SU(3) de sabor, está dada por:

$$G[D_{(Y,I,I_3)}^8 \rightarrow BB'] = \langle D_{(Y,I,I_3)}^8 | H_{\text{st}} + H_{\text{ms}} | BB' \rangle. \quad (\text{A.8})$$

Al desarrollar los productos de matrices indicados en (A.3) y (A.6) y después de factorizar los diferentes tipos de acoplamientos, se determinan las amplitudes de decaimiento (A.8) aplicando los operadores de destrucción y creación a los estados inicial y final involucrados. En este esquema es necesario tomar en cuenta la convención de fases para la creación de estados (Carruthers 1966), en este caso:  $|\Sigma^+|0\rangle = -|\Sigma^+\rangle$  y, en forma correspondiente,  $D_{(0,1,+1)}^8|0\rangle = -|D_{(0,1,+1)}^8\rangle$ .

Como se mencionó al final de la Sec. 4.1, es importante analizar por separado los casos en que el estado final es antisimétrico y simétrico.

### A.1.1. Estado Final Antisimétrico

Considere primero los decaimientos fuertes de los dibariones en el octete hacia un estado final antisimétrico constituido por dos bariones ordinarios. En el límite de simetría los acoplamientos invariantes bajo SU(3) están dados por la parte antisimétrica de la expresión (A.3) e involucran una sola constante de acoplamiento:

$$H_{\text{st}} = g_8^{0'} \text{Tr} \{ \bar{D}_8 [B_8 B'_8 - B'_8 B_8] \}. \quad (\text{A.9})$$

El rompimiento de la simetría SU(3) de sabor se consigue sumando términos que contienen a  $\lambda_8$  en la forma establecida por la Ec. (A.6), considerando además todas las formas independientes posibles de antisimetría entre  $B_8$  y  $B'_8$  (Muraskin y Glashow 1963). Esto añade 4 constantes de acoplamiento:

$$\begin{aligned}
H_{\text{ms}} = & g_1 \text{Tr} \{ \overline{D}_8 \lambda_8 [B_8 B'_8 - B'_8 B_8] \} \\
& + g_2 \text{Tr} \{ \overline{D}_8 [B_8 \lambda_8 B'_8 - B'_8 \lambda_8 B_8] \} \\
& + g_3 \text{Tr} \{ \overline{D}_8 [B_8 B'_8 - B'_8 B_8] \lambda_8 \} \\
& + g_4 \{ \text{Tr} [\overline{D}_8 B_8] \text{Tr} [B'_8 \lambda_8] - \text{Tr} [\overline{D}_8 B'_8] \text{Tr} [B_8 \lambda_8] \}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Al igual que en la Sec. 4.1.1, se tienen en total 5 constantes de acoplamiento.

Después de desarrollar los productos de matrices indicados en (A.9) y (A.10) y de emplear la formula (A.8), se encuentra que existen 8 amplitudes linealmente independientes descritas por las 5 constantes  $g$ . Las tres reglas de suma o relaciones entre las amplitudes independientes coinciden exactamente con las expresiones (4.21) a (4.23), confirmando así la certeza de los cálculos realizados.

### A.1.2. Estado Final Simétrico

Ahora considere los decaimientos fuertes del octete de dibariones en un estado simétrico formado por dos bariones ordinarios. Repitiendo el procedimiento descrito en la sección anterior, en el límite de simetría los acoplamientos invariantes bajo SU(3) están dados por la parte simétrica de la expresión (A.3) y nuevamente involucran una sola constante de acoplamiento:

$$H_{\text{st}} = g_8^0 \text{Tr} \{ \overline{D}_8 [B_8 B'_8 + B'_8 B_8] \}. \tag{A.11}$$

El rompimiento de la simetría SU(3) de sabor se consigue sumando términos que contienen a  $\lambda_8$  en la forma establecida por la Ec. (A.6), considerando además todas las posibles formas simétricas independientes entre  $B_8$  y  $B'_8$  (Muraskin y Glashow 1963). En principio, en este caso, esto añade 5 constantes de acoplamiento  $g'_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) además de  $g_8^0$ :

$$\begin{aligned}
H_{\text{ms}} &= g'_1 \text{Tr} \{ \overline{D}_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}} [B_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}} + B'_{\mathbf{8}} B_{\mathbf{8}}] \} \\
&+ g'_2 \text{Tr} \{ \overline{D}_{\mathbf{8}} [B_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}} + B'_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}} B_{\mathbf{8}}] \} \\
&+ g'_3 \text{Tr} \{ \overline{D}_{\mathbf{8}} [B_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}} + B'_{\mathbf{8}} B_{\mathbf{8}}] \lambda_{\mathbf{8}} \} \\
&+ g'_4 \{ \text{Tr} [\overline{D}_{\mathbf{8}} B_{\mathbf{8}}] \text{Tr} [B'_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}}] + \text{Tr} [\overline{D}_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}}] \text{Tr} [B_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}}] \} \\
&+ g'_5 \text{Tr} [\overline{D}_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}}] \text{Tr} [B_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}}] .
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Sin embargo, los términos en (A.12) no son linealmente independientes, existe la identidad matemática:

$$\begin{aligned}
&\text{Tr} \{ \overline{D}_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}} [B_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}} + B'_{\mathbf{8}} B_{\mathbf{8}}] \} + \text{Tr} \{ \overline{D}_{\mathbf{8}} [B_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}} + B'_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}} B_{\mathbf{8}}] \} \\
&+ \text{Tr} \{ \overline{D}_{\mathbf{8}} [B_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}} + B'_{\mathbf{8}} B_{\mathbf{8}}] \lambda_{\mathbf{8}} \} = \\
&= \text{Tr} [\overline{D}_{\mathbf{8}} B_{\mathbf{8}}] \text{Tr} [B'_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}}] + \text{Tr} [\overline{D}_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}}] \text{Tr} [B_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}}] \\
&+ \text{Tr} [\overline{D}_{\mathbf{8}} \lambda_{\mathbf{8}}] \text{Tr} [B_{\mathbf{8}} B'_{\mathbf{8}}] .
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Usando (A.13) es posible eliminar el término con  $g'_2$ , de manera que al final solo se tienen 5 términos independientes en total y 5 constantes de acoplamiento.

Después de desarrollar los productos de matrices indicados en (A.11) y (A.12) (excluyendo el término con  $g'_2$ ) y de emplear la formula (A.8), se encuentra que existen ahora 9 amplitudes linealmente independientes descritas por 5 constantes de acoplamiento. Las 4 reglas de suma o relaciones entre las amplitudes independientes coinciden exactamente con las expresiones (4.34) a (4.37), confirmando nuevamente la certeza de los cálculos realizados para este caso.

# Apéndice B

## Extensión a SU(4)

La simetría exacta de SU(4) de sabor es usada frecuentemente para hacer estimaciones en acoplamientos que involucran bariones que contienen al quark  $c$ . Esto da lugar a resultados imprecisos debido a que SU(4) está roto fuertemente. En este Apéndice se comenta sobre la extensión a SU(4) del análisis de la Sec. 4.1 (Polanco-Euán, Gupta y col. 2016, Gupta 1976). Por simplicidad se trata el caso de un estado final antisimétrico, el caso simétrico se analiza en forma similar.

El grupo SU(4) incluye un nuevo número cuántico, el **encanto**, mediante la presencia de un nuevo quark,  $c$ . Los bariones se acomodan en representaciones de SU(4) determinadas por los términos en la expansión:

$$\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{4}^* \oplus \mathbf{20}' \oplus \mathbf{20}' \oplus \mathbf{20}, \quad (\text{B.1})$$

los  $J^P = (1/2)^+$  bariones se asignan a las representaciones  $\mathbf{20}'$  y las resonancias  $J^P = (3/2)^+$  se colocan en el multiplete  $\mathbf{20}$ .

En las Secs. 4.1.1 y A.1.1 se estudiaron los decaimientos fuertes del octete de dibariones  $D_{\mathbf{8}}$  en un estado final antisimétrico  $B_{\mathbf{8}} + B_{\mathbf{8}}$ . En forma correspondiente, para los decaimientos de dibariones con encanto, se tienen que considerar los decaimientos de los dibariones en el multiplete  $\mathbf{64}$  de SU(4),  $D_{\mathbf{64}}$ , en un estado final antisimétrico,  $B_{\mathbf{20}'} + B_{\mathbf{20}'}$ , como puede verse de la descomposición:

$$\mathbf{20}' \otimes \mathbf{20}' = \mathbf{6} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{50} \oplus \mathbf{64}_A \oplus \mathbf{64}_S \oplus \mathbf{70} \oplus \mathbf{126}, \quad (\text{B.2})$$

al comparar con la descomposición correspondiente en SU(3),

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}_A \oplus \mathbf{8}_S \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{27}. \quad (\text{B.3})$$

En el límite de simetría SU(4) de sabor, los decaimientos se caracterizan por una sola constante de acoplamiento ya que la representación antisimétrica  $\mathbf{64}_A$  aparece solo una vez en la descomposición  $\mathbf{20}' \otimes \mathbf{20}'$ .

Al considerar el rompimiento de la simetría utilizando el método del espurión, se debe tomar a este como la componente con  $Y = I = 0$  de la representación  $\mathbf{15}$  de SU(4). Esto debido a que en SU(3) el espurión  $S_8$  es el estado  $(Y, I) = (0, 0)$  de la representación  $\mathbf{8}$  que está contenida en la representación  $\mathbf{15}$  de SU(4).

Denote al espurión como  $S_{15}$ , el estado  $(Y, I) = (0, 0)$  de la representación  $\mathbf{15}$  de SU(4), y considere la reacción

$$S_{15} + D_{64} \rightarrow B_{20'} + B_{20'} \quad (\text{B.4})$$

como invariante ante SU(4). Compare la descomposición

$$\mathbf{15} \otimes \mathbf{64} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{50} \oplus 3(\mathbf{64}) \oplus \mathbf{70} \oplus \mathbf{70}^* \oplus \mathbf{126} \oplus \mathbf{126}^* \oplus \mathbf{300} \quad (\text{B.5})$$

y la descomposición de  $\mathbf{20}' \otimes \mathbf{20}'$ , Eq. (B.2), donde las representaciones  $\mathbf{6}$ ,  $\mathbf{50}$ ,  $\mathbf{64}_A$  y  $\mathbf{70}$  son antisimétricas. Para que los dos bariones  $\mathbf{20}'$  en el estado final se encuentren en un estado de sabor antisimétrico, se tiene que a primer orden existen 6 términos que rompen la simetría SU(4):  $\langle \mathbf{6} | H_{\text{st}} | \mathbf{6} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{50} | H_{\text{st}} | \mathbf{50} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{64} | H_{\text{st}} | \mathbf{64}_A \rangle$ ,  $\langle \mathbf{64}' | H_{\text{st}} | \mathbf{64}_A \rangle$ ,  $\langle \mathbf{64}'' | H_{\text{st}} | \mathbf{64}_A \rangle$  y  $\langle \mathbf{70} | H_{\text{st}} | \mathbf{70} \rangle$ .

Las reglas de suma con rompimiento de SU(4) junto con la simetría exacta de SU(3) se pueden calcular en esta primera etapa. Para una segunda etapa, es decir, el rompimiento combinado a primer orden de las simetrías de sabor SU(4) y SU(3) se debe considerar al espurión  $S_8$  que, como se ha mencionado, es el estado  $(Y, I) = (0, 0)$  de la representación  $\mathbf{8}$  de SU(3) que está contenida en la representación  $\mathbf{15}$  de SU(4).

Ya que la violación de la simetría SU(4) es del orden de las masas de los estados involucrados, es difícil afirmar que el análisis teórico de un rompimiento lineal de la simetría sea suficiente para aplicaciones fenomenológicas de tal forma que la rotura a segundo orden de solo SU(4) podría ser aún mas importante que el rompimiento lineal combinado SU(3) + SU(4).

# Bibliografía

- Aaij, R. y col., LHCb Collaboration (2015). «Observation of  $J/\psi p$  Resonances Consistent with Pentaquark States in  $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$  Decays». En: *Phys. Rev. Lett.* **115** (7), pág. 072001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.115.072001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.072001). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.072001>.
- Ablikim, M. y col., BESIII Collaboration (2013). «Observation of a Charged Charmoniumlike Structure in  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$  at  $\sqrt{s}=4.26$  GeV». En: *Phys. Rev. Lett.* **110** (25), pág. 252001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.252001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.252001). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.252001>.
- Adlarson, P. y col. (2014a). «Evidence for a New Resonance from Polarized Neutron-Proton Scattering». En: *Phys. Rev. Lett.* **112** (20), pág. 202301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.112.202301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.202301). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.202301>.
- (2014b). «Neutron-proton scattering in the context of the  $d^*(2380)$  resonance». En: *Phys. Rev. C* **90** (3), pág. 035204. DOI: [10.1103/PhysRevC.90.035204](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.90.035204). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.90.035204>.
- Carruthers, P. (1966). *Introduction to Unitary Symmetry*. New York: Interscience.
- Choi, S.-K. y col., Belle Collaboration (2003). «Observation of a Narrow Charmoniumlike State in Exclusive  $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$  Decays». En: *Phys. Rev. Lett.* **91** (26), pág. 262001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.91.262001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.262001). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.262001>.
- Gell-Mann, M. (1961). «THE EIGHTFOLD WAY: A THEORY OF STRONG INTERACTION SYMMETRY». En: *Cal. Tech. Rept.* **CTSL-20**, pág. 1. DOI: [10.2172/4008239](https://doi.org/10.2172/4008239).

- Gell-Mann, M. (1964). «A schematic model of baryons and mesons». En: *Physics Letters* **8.3**, págs. 214-215. ISSN: 0031-9163. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0031-9163\(64\)92001-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0031-9163(64)92001-3). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031916364920013>.
- Gell-Mann, M. y Y. Ne'eman (1964). *The Eightfold Way [a review, with a collection of reprints, by] Murray Gell-Mann [and] Yuval Ne'eman*. New York: W. A. Benjamin. URL: <https://lccn.loc.gov/65013009>.
- Gupta, V. (1976). «Sum rules for the baryon 20, baryon 20' and meson 16-plet coupling constants in broken SU(4) and SU(3) symmetry». En: *Pramana* **6.5**, págs. 259-271. ISSN: 0973-7111. DOI: [10.1007/BF02872203](https://doi.org/10.1007/BF02872203). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02872203>.
- Gupta, V. y G. Sánchez-Colón (2015). «Decays of dibaryon sextaquarks in broken SU(3) symmetry». En: *Modern Physics Letters A* **30.02**, pág. 1550010. DOI: [10.1142/S0217732315500108](https://doi.org/10.1142/S0217732315500108). eprint: <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217732315500108>. URL: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732315500108>.
- GUPTA, V., G. SÁNCHEZ-COLÓN y S. RAJPOOT (2012). «SUM RULES FOR TETRAQUARK DECAY COUPLING CONSTANTS WITH BROKEN SU(3) SYMMETRY». En: *Modern Physics Letters A* **27.29**, pág. 1250165. DOI: [10.1142/S0217732312501659](https://doi.org/10.1142/S0217732312501659). eprint: <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217732312501659>. URL: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732312501659>.
- (2013). «DECAY COUPLING CONSTANT SUM RULES FOR TETRAQUARKS  $T[(\bar{Q}q)(Q\bar{q})]$  WITH BROKEN SU(3) SYMMETRY». En: *Modern Physics Letters A* **28.06**, pág. 1350015. DOI: [10.1142/S0217732313500156](https://doi.org/10.1142/S0217732313500156). eprint: <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217732313500156>. URL: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732313500156>.
- Högaasen, H. y P. Sorba (1978). «The systematics of possibly narrow quark states with baryon number one». En: *Nuclear Physics B* **145.1**, págs. 119-140. ISSN: 0550-3213. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(78\)90417-0](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(78)90417-0). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321378904170>.

- Jaffe, R. J. (1977). «Multiquark hadrons. I. Phenomenology of  $Q^2\bar{Q}^2$  mesons». En: *Phys. Rev. D* **15** (1), págs. 267-280. DOI: [10.1103/PhysRevD.15.267](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.267). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.267>.
- Jaffe, R. L. (1977a). «Perhaps a Stable Dihyperon». En: *Phys. Rev. Lett.* **38** (5), págs. 195-198. DOI: [10.1103/PhysRevLett.38.195](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.195). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.195>.
- (1977b). «Perhaps a Stable Dihyperon». En: *Phys. Rev. Lett.* **38** (11), págs. 617-617. DOI: [10.1103/PhysRevLett.38.617](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.617). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.617>.
- Lipkin, Harry J. (1987). «New possibilities for exotic hadrons — anticharmed strange baryons». En: *Physics Letters B* **195**.3, págs. 484-488. ISSN: 0370-2693. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90055-4](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(87)90055-4). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269387900554>.
- McNAMEE, P., S. J. y FRANK CHILTON (1964). «Tables of Clebsch-Gordan Coefficients of  $SU_3$ ». En: *Rev. Mod. Phys.* **36** (4), págs. 1005-1024. DOI: [10.1103/RevModPhys.36.1005](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.36.1005). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.1005>.
- Muraskin, M. y S. L. Glashow (1963). «Coupling-Constant Sum Rules». En: *Phys. Rev.* **132** (1), págs. 482-484. DOI: [10.1103/PhysRev.132.482](https://doi.org/10.1103/PhysRev.132.482). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.132.482>.
- Ne'eman, Y. (1961). «Derivation of strong interactions from a gauge invariance». En: *Nuclear Physics* **26**.2, págs. 222-229. ISSN: 0029-5582. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582\(61\)90134-1](http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582(61)90134-1). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558261901341>.
- Oakes, R. J. (1963). «Baryon-Baryon Interactions and the Eightfold Way». En: *Phys. Rev.* **131** (5), págs. 2239-2241. DOI: [10.1103/PhysRev.131.2239](https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2239). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2239>.
- Oka, Makoto (1988). «Flavor-octet dibaryons in the quark model». En: *Phys. Rev. D* **38** (1), págs. 298-303. DOI: [10.1103/PhysRevD.38.298](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.38.298). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.38.298>.
- Polanco-Euán, E. N., V. Gupta y col. (2016). «Decay coupling constants sum rules for dibaryon octet into two baryon octets with  $\lambda_8$  first order  $SU(3)$  symmetry breaking». En: *Journal of Physics: Conference Series* **761**.1, pág. 012086. URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/761/i=1/a=012086>.

- Polanco-Euán, E. N., G. Sánchez-Colón y V. Gupta (2017). «Dibaryon octet strong decay coupling constants sum rules with first-order SU(3) symmetry breaking». En: *Modern Physics Letters A* **32**.07, pág. 1750041. DOI: [10.1142/S0217732317500419](https://doi.org/10.1142/S0217732317500419). eprint: <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217732317500419>. URL: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732317500419>.
- Strottman, D. (1979). «Multiquark baryons and the MIT bag model». En: *Phys. Rev. D* **20** (3), págs. 748-767. DOI: [10.1103/PhysRevD.20.748](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.20.748). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.748>.
- Swart, J. J. de (1963). «The Octet Model and its Clebsch-Gordan Coefficients». En: *Rev. Mod. Phys.* **35** (4), págs. 916-939. DOI: [10.1103/RevModPhys.35.916](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.35.916). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.35.916>.
- (1965). «Erratum: The Octet Model and Its Clebsch-Gordan Coefficients». En: *Rev. Mod. Phys.* **37** (2), págs. 326-326. DOI: [10.1103/RevModPhys.37.326](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.37.326). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.37.326>.
- Xie, Shu-Qin (1989). «Possible SU(3) multiplets of the dibaryons». En: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **15**.3, pág. 287. URL: <http://stacks.iop.org/0954-3899/15/i=3/a=006>.
- Xie, Shu-Qin y Qi-Ren Zhang (1984). «A possible 27-plet of dibaryons». En: *Physics Letters B* **143**.4, págs. 441-444. ISSN: 0370-2693. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(84\)91498-9](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(84)91498-9). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269384914989>.
- Zweig, G. (1964). En: *CERN preprint* **8409/Th**, pág. 412. No publicado (reimpreso en Gell-Mann y Ne'eman [1964](#)).