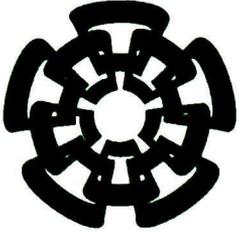




CT 709 SSI  
DON - 7013

xx(202111.1)



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional  
Unidad Guadalajara

# **Estabilización de Sistemas Electromecánicos por medio de Control Variacional y Modos Deslizantes**

Tesis que presenta:

**Humberto Valadez Rangel**

para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias  
en la especialidad de:**

**Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis

**Dr. Eduardo José Bayro Corrochano  
Dr. Alexander Georgievich Loukianov**



CLASIF. CT-00613  
ADQUIS. CT-309-SSI  
FECHA: 22-01-2013  
PROCED. 2011-2013  
\$

10-

# **Estabilización de Sistemas Electromecánicos por medio de Control Variacional y Modos Deslizantes**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Humberto Valadez Rangel**

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Universidad Autónoma de Aguascalientes 2004-2009

Becario del CONACyT, expediente no. 243171

Directores de Tesis

**Dr. Eduardo José Bayro Corrochano**

**Dr. Alexander Georgievich Loukianov**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto de 2012.

# Resumen

El control de alta variación es una técnica que puede ser aplicada a sistemas no lineales afines y consiste en la generación de trayectorias por medio de la construcción de campos vectores no conmutativos del Algebra de Lie que están relacionados con la controlabilidad del sistema. Con dicha metodología, se construye un campo vector infinitesimal y su correspondiente inclusión diferencial, la cual es llamada sistema infinitesimal en cuya estructura matemática intrínseca se encuentran un conjunto de controles agregados que no aparecen en el sistema original y que permiten diseñar la ley de control conmutada estabilizante que actúa en pequeños intervalos de tiempo de longitud  $h$  de tal forma que, la trayectoria del sistema original bajo la acción conmutada de una alta tasa de muestreo se va aproximando en el régimen estable a la trayectoria del sistema infinitesimal. La estabilización del sistema infinitesimal se logra por medio de los controles agregados los cuales se diseñan en función de la elección variedad deslizante apropiada.

# Abstract

The high-order control variations is a technique that applies to affine non linear systems and involves the generation of paths through the construction of noncommutative vector fields of the Lie algebra that are related to the controllability of the system. With this methodology we construct an infinitesimal vector field and its corresponding differential inclusion, which is referred to as an infinitesimal system, and in whose mathematical structure are a set of added controls that do not appear in the original system. This allows us to design the switching control stabilizer law, that acts in small time intervals of length  $h$  in such a way that the path of the original system under the switching action of a high sampling rate approaches, within the stable regime a path of the infinitesimal system.

# Agradecimientos

Este trabajo lo dedico de corazón a toda mi familia, por todo su amor y apoyo incondicional. Agradezco a mi director de tesis al Dr. Eduardo Bayro Corrochano por sus consejos, paciencia, tiempo y flexibilidad en el desarrollo de esta tesis. Agradezco al Dr. Alexander G. Loukianov persona que admiro mucho por su bondad, sabiduría e inteligencia. Toda mi gratitud a todos mis sinodales por su tiempo en la revisión de esta tesis. Mi agradecimiento al CONACYT por su apoyo económico y por contribuir en la transformación de este país, y finalmente ofrezco todo mi afecto a mis compañeros del Cinvestav a quienes por fortuna tuvimos la maravillosa oportunidad de coincidir juntos un pequeño instante de esta eternidad.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación .	1
1.2. Descripción del problema	1
1.3. Estado del Arte	2
1.4. Objetivos	2
1.5. Estructura de la Tesis	2
<b>2. Fundamentos Matemáticos</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción	5
2.2. Conjunto de Medida Cero	5
2.3. Espacios Topológicos	7
2.4. Espacio de Hausdorff .	7
2.5. Mapeo Abierto, Continuo y Homeomorfismo entre Espacios Topológicos	7
2.6. Difeomorfismo	8
2.7. Variedades	9
2.8. Espacio Tangencial	16
2.9. Haz Tangente	18
2.10. Campos Vectores	18
2.11. Curva Integral de un Campo Vector	20
2.12. Flujos	21
2.13. Derivada de Lie	21

2.14. Bracket de Lie	22
2.15. Distribuciones	23
2.15.1. Teorema de Frobenius	25
2.16. Algebras	26
2.17. Pull Back y el Teorema de Campbell Baker Hausdorff	27
<b>3. Sistemas No Lineales y Modos Deslizantes</b>	<b>29</b>
3.1. Introducción	29
3.2. Sistema de Control Afín	29
3.3. Linealización de Sistemas no Lineales por medio de la matriz Jacobiana	30
3.4. Difeomorfismo, y Linealización por retroalimentación de un Sistema afín .	31
3.5. Teoría de Modos Deslizantes	33
3.6. Forma Regular	34
3.6.1. Caso Lineal	34
3.6.2. Caso no lineal	35
<b>4. Dinámica Lagrangiana</b>	<b>39</b>
4.1. Introducción	39
4.2. Dinámica Lagrangiana definida sobre Variedades	39
4.2.1. Principio de Mínima Acción de Hamilton	42
4.2.2. Ecuaciones de Lagrange	42
4.3. Formulación Dinámica para Sistemas Mecánicos Multicuerpo	43
4.4. Sistemas Subactuados	44
<b>5. Diseño del Control de Alta Variación</b>	<b>47</b>
5.1. Introducción	47
5.2. Control de Alta Variación de Memoria m	47
5.2.1. Vecindad Compacta	47
5.2.2. Control de Alta Variación	47
5.3. Estabilización Práctica	49

5.4. Estabilización Asintótica	49
5.5. Función S de Lyapunov	50
5.6. Control Alta Variación Homogéneo	50
5.7. Aplicación del Control de Alta Variación a Sistemas Afines	51
5.7.1. Doble Integrador	51
5.7.2. Sistema no lineal con terminos cuadráticos	57
5.7.3. Sistema no lineal con multiples entradas	62
5.7.4. Sistema triangular	66
5.7.5. Control Variacional y Linealización por Retroalimentación de Estados	69
<b>6. Estabilización de Sistemas Electromecánicos</b>	<b>73</b>
6.1. Introducción	73
6.2. Péndulo Simple	73
6.3. Péndulo Invertido Controlado por un Motor de C.D.	80
6.4. Robot Manipulador con unión flexible .	85
6.5. Sistema Carro Péndulo Invertido	89
6.6. Sistema Masa Resorte Péndulo Invertido	96
6.7. Sistema Balancín Pelota	102
6.8. Pendubot	110
<b>7. Conclusiones</b>	<b>117</b>
7.1. Conclusiones .	117
7.2. Trabajo Futuro	118
<b>Bibliografía</b>	<b>121</b>

# Índice de figuras

2.1. Vecindad pequeña de $\mathbb{S}^2$ homeomorfa a una vecindad de $\mathbb{R}^2$	8
2.2. Relación entre homeomorfismo, carta y variedad	10
2.3. Condición de compatibilidad de cartas $(U, \phi), (V, \psi)$	11
2.4. El grafo $G(f)$ de una $C^\infty$ -función visto como variedad .	12
2.5. La variedad $\mathbb{S}^1$ con un atlas de cuatro cartas	14
2.6. La variedad $\mathbb{S}^2$ con un atlas de seis cartas .	15
2.7. Toro topológico $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	15
2.8. Espacio tangencial $T_p M$ en $p \in M$	16
2.9. Espacio tangencial $T_p \mathbb{S}^2$ en $\mathbf{x} = p_i \in \mathbb{S}^2$	17
2.10. Espacio tangencial para elipse en el punto $r_0 = p$ .	18
2.11. Campos vectores $X_p$ tangenciales a la variedad $M$	19
2.12. Campo vectorial definido sobre la variedad $\mathbb{S}^2$	20
2.13. Curva integral asociada al campo vector $X$	20
2.14. Relación de flujos	28
3.1. Establecimiento de un régimen deslizante sobre la superficie $s(\mathbf{x}) = 0$	34
5.1. Estabilización del sistema doble integrador	52
5.2. Superficie deslizante $s(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$	52
5.3. Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie $s_1$	54
5.4. Control de alta variación diseñado con la superficie $s_1$	55
5.5. Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie $s_2$	56

5.6. Control de alta variación diseñado con la superficie $s_2$	56
5.7. Control de alta variación generado por funciones continuas	57
5.8. Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie $s_3$	59
5.9. Control de alta variación diseñado con la superficie deslizante $s_3$	60
5.10. Control de alta variación diseñado con la dilatación $r$	61
5.11. Función S-Lyapunov $V(x) =  x_3 $	61
5.12. Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie $s_1$ y $s_2$	64
5.13. Control de alta variación	65
5.14. Control de alta variación	65
5.15. Función S-Lyapunov $V(x) =  x_3  +  x_4 $	66
5.16. Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie $s = x_2$	68
5.17. Control de alta variación	68
5.18. Control de alta variación	69
5.19. Control de alta variación	72
6.1. Péndulo simple, su espacio de configuración $\mathbb{S}^1$ , espacio tangencial $T_qM$ y espacio de estado $TM$	74
6.2. Atlas para el péndulo simple	75
6.3. Respuesta del sistema infinitesimal del péndulo simple (caso no lineal)	78
6.4. Control de alta variación aplicado al péndulo simple (caso no lineal)	78
6.5. Control de alta variación aplicado al péndulo simple (caso no lineal)	79
6.6. Control de alta variación aplicado al péndulo simple (caso lineal)	80
6.7. Sistema péndulo invertido controlado por motor de c.d.	81
6.8. Control de alta variación aplicado al péndulo invertido con motor (caso lineal)	84
6.9. Control de alta variación aplicado al péndulo invertido con motor (caso no lineal)	84
6.10. Robot de un eslabón con unión flexible	86
6.11. Estabilización del brazo robótico con unión flexible	89
6.12. Sistema carro péndulo invertido, espacio de configuración $Q$ y espacio tangencial $T_qQ$	90

6.13. Respuesta del Sistema Infinitesimal del Sistema Carro Pendulo Invertido	94
6.14. Respuesta del sistema en forma regular	94
6.15. Respuesta del sistema carro péndulo invertido con Control de alta variación	95
6.16. Respuesta del sistema carro péndulo invertido con control de alta variación (Caso no lineal)	96
6.17. Sistema masa resorte péndulo invertido	97
6.18. Respuesta del sistema infinitesimal masa resorte péndulo invertido	100
6.19. Control de alta variación	101
6.20. Control de alta variación aplicado al sistema masa resorte péndulo invertido	101
6.21. Sistema balancín pelota y espacio de configuración .	103
6.22. Respuesta del sistema infinitesimal balancín pelota	108
6.23. Control $\alpha_1$	109
6.24. Control de alta variación aplicado al sistema balancín pelota	110
6.25. Sistema pendubot y espacio de configuración $Q$	111
6.26. Control de alta variación aplicado al pendubot	116

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

El problema de la estabilización de sistemas dinámicos es uno de los más importantes tópicos de la teoría de control. La convergencia de las técnicas rigurosas del álgebra no conmutativa, las nuevas geometrías y el control, ha permitido desarrollar un conjunto de herramientas elegantes y eficientes para abordar dicho problema. La principal motivación para el desarrollo de este trabajo es estudiar la técnica de control de alta variación aplicada a una amplia gama de sistemas físicos. En particular, aquellos que han sido frecuentemente utilizados en la literatura especializada para probar diferentes leyes de control tales como sistemas de naturaleza pendular acoplados a motores eléctricos. Esto permitirá visualizar de manera más amplia la efectividad y capacidad del control de alta variación para resolver el problema de estabilización de dichos sistemas.

### 1.2. Descripción del problema

Esta tesis abordará el problema fundamental de estabilización de varios sistemas electromecánicos por medio de una ley de control conmutada, de alta tasa de muestreo, diseñada a partir de la elección adecuada de ciertas funciones que desempeñan el papel de controles agregados que aparecen en lo que se llamará sistema infinitesimal. Bajo este escenario se usarán técnicas de la teoría de modos deslizantes para encontrar de manera explícita dichos controles.

## 1.3. Estado del Arte

El empleo de técnicas de álgebra no conmutativa, muy en particular, el uso de la fórmula de Campbell Baker Hausdorff (CBH) y de la geometría diferencial para el desarrollo de leyes de control se remonta a S.Monaco y D.Normand Cyrot (1990) quienes establecen una relación algebraica entre sistemas no lineales continuos y su versión discreta. J.P. Barbot(1991) et al, emplean la fórmula de CBH para el estudio de sistemas discretos con perturbación. I.Duleba (1999) et al, utilizan la fórmula de CBH para generar y planear trayectorias de sistemas holonómicos. El diseño de leyes de control discontinuas empleadas para resolver el problema de estabilización de sistemas lineales y no lineales es un tema reciente y muy poco tratado. Los primeros trabajos se remontan a H. Michalska y M. Torres Torriti (2004) y recientemente por R. Hirschorn (2007). Ambos esquemas utilizan la generación de trayectorias por medio de la construcción de campos vectores no conmutativos del álgebra de Lie que están relacionados con la controlabilidad del sistema. Sin embargo, en el tratamiento de Hirschorn [1] se generan las trayectorias deseadas por medio de campos vectores infinitesimales y su correspondiente inclusión diferencial, para posteriormente diseñar la ley de control conmutada sobre superficies deslizantes. Hasta la fecha prácticamente no existen trabajos que apliquen la técnica de control de alta variación a sistemas electromecánicos, y la mayoría de los ejemplos se limitan a ejemplos académicos.

## 1.4. Objetivos

El núcleo central de esta tesis se basa principalmente en el trabajo de R. Hirschorn(2007) y el tratado de Algebras no conmutativas de A. Bonfiglioli (2012). El presente trabajo de investigación pretende principalmente:

- 1.- Desarrollar y proponer leyes de control conmutadas para resolver el problema de estabilización de sistemas electromecánicos representativos tanto actuados como subactuados.
- 2.- Combinar el control de alta variación propuesto en [1] con la técnica de linealización por retroalimentación de estados [2].

## 1.5. Estructura de la Tesis

El contenido y desarrollo de los principales temas de esta tesis está distribuido de la siguiente manera:

El capítulo 2 proporciona una breve introducción a ciertos tópicos de geometría diferencial y de álgebra no conmutativa que son esenciales para el estudio de sistemas no lineales. En este capítulo se describe la estructura de variedad, campos vectores, espacio tangencial, curvas integrales, flujos, el teorema de Frobenius, álgebras de Lie y el teorema de Campbell Baker Hausdorff.

El núcleo del capítulo 3 son los difeomorfismos, vistos como herramienta para el cambio de coordenadas y la linealización por retroalimentación de estados, técnica esencial de control no lineal basada fuertemente en el teorema de Frobenius. Finalmente se describe en forma breve el concepto de variedad deslizante y su papel en el control de sistemas dinámicos discontinuos.

El capítulo 4 hace una descripción de los sistemas mecánicos en general, presentados desde el punto de vista de la estructura de variedad diferenciable. Se derivan las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton y se construye la ecuación dinámica general para sistemas mecánicos de  $n$  grados de libertad

En el capítulo 5 se presenta la técnica control de alta variación aplicado al problema de estabilización de sistemas afines, así como su descripción matemática completa a través de diversos ejemplos académicos.

El capítulo 6 es la parte central de esta tesis, y aquí se muestra los resultados de aplicar el control de alta variación con modos deslizantes a un amplio conjunto de sistemas electromecánicos tanto actuados como subactuados, abarcando tanto el ámbito lineal y no lineal.

Finalmente en el capítulo 7 se dan las conclusiones de este trabajo, así como las perspectivas futuras sobre este tema de investigación.

## Capítulo 2

# Fundamentos Matemáticos

### 2.1. Introducción

El estudio de sistemas cuyas dinámicas son descritas por medio de ecuaciones diferenciales requieren de ser definidas sobre la estructura topológica de variedad. Los métodos clásicos usados de análisis frecuencial en general, no son aplicables a los sistemas no lineales. Los primeros tratamientos modernos sobre el uso de estructuras diferenciables se remontan a Brockett [3],[4], Sussmann [5], Crouch [6], Isidori [2] y recientemente Bullo y Lewis [7]. En este capítulo se dará una breve descripción de ciertos conceptos de geometría diferencial que son usados frecuentemente en el estudio de sistemas no lineales.

### 2.2. Conjunto de Medida Cero

**Definición 1** Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto acotado del plano. Diremos  $C$  tiene medida cero si  $\forall \epsilon > 0$  se da un conjunto finito de rectángulos  $Q_i$  de área  $\Delta Q_i$  con  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  de tal forma que:

1.  $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n Q_i$
- 2.-  $\sum_{i=1}^n \Delta(Q_i) < \epsilon$

En otras palabras el conjunto  $C$  es de medida cero si lo podemos cubrir con una cantidad finita de rectángulos cuya suma de áreas es igual o menor a cualquier  $\epsilon > 0$ . La extensión de esta definición a subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  se da de manera natural como a continuación se indica.

**Definición 2** Un cubo  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  es el producto cartesiano de  $n$ -intervalos compactos:

$$A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

**Definición 3** El volúmen  $n$ -dimensional de un cubo

$$A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

se define como:

$$v(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Notemos que si  $A$  es un cubo  $n$ -dimensional de lado  $a$ , entonces el volúmen es:  $v(A) = a^n$

**Definición 4** Llamaremos cubo  $n$ -dimensional abierto, al interior de un cubo  $A$ , es decir,

$$\text{int}(A) = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$$

**Definición 5** Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$ . decimos que  $X$  tiene medida cero, si  $\forall \varepsilon > 0$  existen cubos abiertos  $\{A_1, A_2, \dots\}$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que:

- 1.-  $X \subset \bigcup A_i$ .
- 2.-  $\sum v(A_i) < \varepsilon$ .

Observación: Los siguientes resultados se verifican para conjuntos de medida cero:

- 1.- Todo subconjunto de un conjunto de medida cero tiene medida cero.
- 2.- Toda unión numerable de conjuntos de medida cero es un conjunto de medida cero.
- 3.- Todo conjunto numerable tiene medida cero.
- 4.- Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  función continua. Entonces el grafo de  $f$  definido como:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = f(x)\}$$

tiene medida cero.

## 2.3. Espacios Topológicos

**Definición 6** Sea  $X$  conjunto no vacío y  $\tau$  una colección de conjuntos abiertos de  $X$ , es decir:  $\tau = \{O \subseteq X \mid O \text{ abierto en } X\}$ . Diremos que el conjunto  $\tau$  es una topología para  $X$ , si satisface las siguientes propiedades:

- 1.-  $X, \emptyset \in \tau$
- 2.- Si  $I$  es un conjunto arbitrario de índices y  $O_\alpha \in \tau$  entonces  $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau$  (La unión arbitraria de elementos de  $\tau$  también pertenece a  $\tau$ ).
1. Si  $O_1, \dots, O_n \in \tau$  entonces  $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$  (La intersección finita de elementos de  $\tau$  pertenece a  $\tau$ ).

## 2.4. Espacio de Hausdorff

**Definición 7** Diremos que el espacio topológico  $(X, \tau)$  es de Hausdorff si para puntos distintos  $x_1, x_2 \in X$  existen vecindades  $\mathcal{V}(x_1), \mathcal{V}(x_2)$  tales que:  $\mathcal{V}(x_1) \cap \mathcal{V}(x_2) = \emptyset$ .

A continuación se indican algunas propiedades importantes de los espacios de Hausdorff:

1. Todos los espacios métricos son de Hausdorff.
- 2.- Cualquier subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.
- 3.- Sea  $I$  un conjunto arbitrario de índices. Dada una familia de espacios topológicos  $\{X_i\}_{i \in I}$  no vacíos, el producto es un espacio de Hausdorff si y solo si  $X_i$  es un espacio de Hausdorff para cada  $i \in I$ .

## 2.5. Mapeo Abierto, Continuo y Homeomorfismo entre Espacios Topológicos

**Definición 8** Sean  $(X, \tau_1)$ ,  $(Y, \tau_2)$  dos espacios topológicos. Considere el mapeo:

$$\phi : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$$

Sea  $O_X, O_Y$  conjuntos abiertos de los espacios  $X, Y$  respectivamente.

1. El mapeo  $\phi$  es abierto si y solo si  $\forall \mathcal{O}_X$  se cumple  $f(\mathcal{O}_X)$  es abierto en  $Y$ .
2. El mapeo  $\phi$  es continuo si y solo si  $\forall \mathcal{O}_Y$  se cumple  $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$  sea un conjunto abierto en  $X$ .
3. El mapeo  $\phi$  es un homeomorfismo si y solo si  $\phi$  es biyectiva y ademàs tanto  $\phi$  como su inversa  $\phi^{-1}$  son funciones continuas.

Se dice que dos espacios topol3gicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

## 2.6. Difeomorfismo

**Definici3n 9** Sea  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  donde  $U, V$  son abiertos. Diremos que  $\Phi$  es un difeomorfismo local sobre  $U$  si:

1. el mapeo  $\Phi$  es biyectivo.
2. los mapeos  $\Phi$  y  $\Phi^{-1}$  son de clase  $C^\infty$ .

**Definici3n 10** Un espacio topol3gico  $(X, \tau)$  se dice que es un espacio localmente Euclidiano de dimensi3n  $n$  si para  $\forall p \in X$ ,  $\exists \mathcal{V}_\varepsilon(p)$  y un homeomorfismo  $\phi$  tal que  $\phi(\mathcal{V}_\varepsilon(p))$  es una bola abierta  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 1** Si consideramos la esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r\}$  y tomamos una vecindad lo suficientemente peque~na alrededor de un punto de la superficie  $p \in \mathbb{S}^2$  observamos que dicha vecindad se parece a una vecindad tomada de  $\mathbb{R}^2$  (ver 2.1). El homeomorfismo correspondiente se describe en el ejemplo 5.

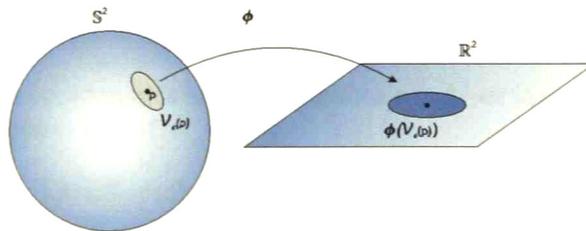


Figura 2.1: Vecindad peque~na de  $\mathbb{S}^2$  homeomorfa a una vecindad de  $\mathbb{R}^2$

## 2.7 Variedades

**Definición 11** Un espacio topológico  $(M, \tau)$  se dice que es una variedad de dimensión  $n$  si:

- 1.- Es un espacio localmente Euclidiano de dimensión  $n$ .
- 2.- Es un espacio de Hausdorff.
- 3.- Tiene una base topológica contable.

Puede entenderse una variedad como una superficie suave embebida en un espacio Euclidiano de cierta dimensión, es decir podemos pensar en una variedad como un espacio que en una pequeña escala, o a nivel local es un espacio Euclidiano.

**Definición 12** Sea  $M$  una variedad. Considere el subconjunto  $U \subseteq M$  y la aplicación:

$$\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Diremos que el par  $(U, \phi)$  es una carta coordenada definida sobre la variedad  $M$  si:

- 1.-  $U$  es un subconjunto abierto de  $M$ .
- 2.-  $\phi$  es un homeomorfismo de  $U$  sobre un abierto  $\phi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$

Si  $p \in U$  y  $\phi(p) = 0$  entonces, la carta coordenada  $(U, \phi)$  se dice centrada en  $p$ . Algunas veces el mapeo  $\phi$  se representa por medio del conjunto:

$$(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

donde:

$$\phi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

representa la  $i$ -ésima función coordenada. Si  $p \in M$  la  $n$ -upla de números reales:

$$(\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p))$$

se llama el conjunto de coordenadas locales del punto  $p \in M$  en la carta  $(U, \phi)$ , es decir  $\phi(p)$  es la coordenada del punto  $p \in M$ :

$$(\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p)) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Que en las aplicaciones se le suele representar como un vector columna:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(p) \\ \phi_2(p) \\ \vdots \\ \phi_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

El homeomorfismo inverso  $\phi_i^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow U$  se le llama parametrización de la variedad  $M$ .

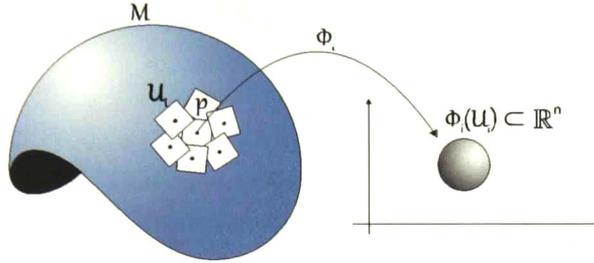


Figura 2.2: Relación entre homeomorfismo, carta y variedad

Sean  $(U, \phi), (V, \psi)$  dos cartas coordenadas definidas sobre la variedad  $M$  donde  $U \cap V \neq \emptyset$ . El siguiente homeomorfismo de superposición  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  que permite expresar las coordenadas  $(\psi_1(p), \psi_2(p), \dots, \psi_n(p))$  en términos de las coordenadas  $(\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p))$  (Observe que  $\phi(U \cap V), \psi(U \cap V)$  son conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ ). Este mapeo es una transformación de coordenadas sobre  $U \cap V$ . Claramente  $\phi \circ \psi^{-1}$  representa el mapeo inverso, el cual proporciona las coordenadas:

$$(\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p))$$

en términos de las coordenadas:

$$(\psi_1(p), \psi_2(p), \dots, \psi_n(p))$$

Si representamos:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(p) \\ \phi_2(p) \\ \vdots \\ \phi_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_1(p) \\ \psi_2(p) \\ \vdots \\ \psi_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La transformación  $\psi \circ \phi^{-1}$  puede ser representada como:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(p) \\ \psi_2(p) \\ \vdots \\ \psi_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p)) \\ y_2(\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p)) \\ \vdots \\ y_n(\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p)) \end{pmatrix}$$

**Definición 13** Diremos que dos cartas coordenadas sobrelapadas  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  son  $C^\infty$ -compatibles o  $C^\infty$ -relacionadas si los mapeos  $\phi \circ \psi^{-1}$  y  $\psi \circ \phi^{-1}$  son de clase  $C^\infty$  (ver figura 2.3).

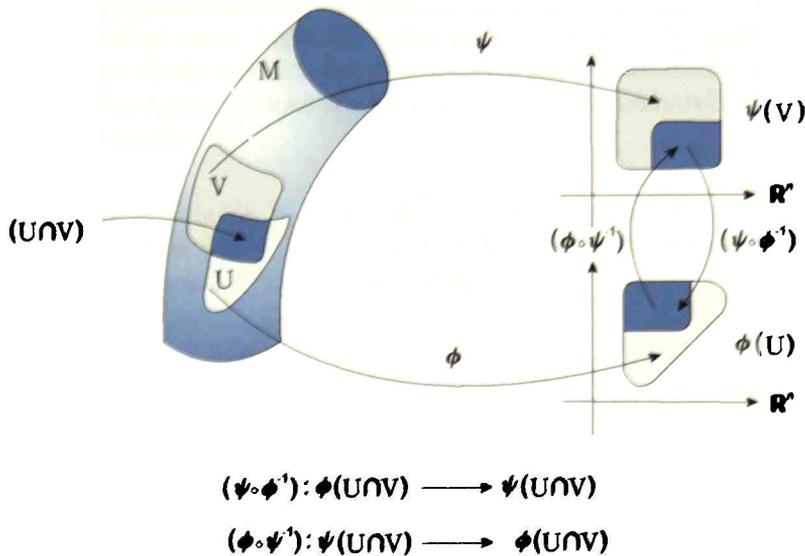


Figura 2.3: Condición de compatibilidad de cartas  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$

**Definición 14** Un  $C^\infty$ -Atlas definido sobre la variedad  $M$  es una colección de cartas:

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$$

tal que:

- 1.-  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ .
- 2.- La colección de cartas de  $\mathcal{A}$  son  $C^\infty$ -compatibles por parejas.

Un Atlas  $\mathcal{A}$  se dice completo si no esta contenido propiamente en otro Atlas. Diremos que dos  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  son equivalentes si  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es un  $C^\infty$ -Atlas. Si  $\mathcal{A}$  es cualquier  $C^\infty$ -Atlas sobre la variedad  $M$ , entonces existe un único  $C^\infty$ -Atlas  $\mathcal{A}^*$  completo que contiene a  $\mathcal{A}$ .

**Definición 15** Sea  $M$  una variedad. Diremos que la variedad  $M$  es  $C^\infty$  si esta equipada con un  $C^\infty$ -Atlas completo.

A continuación se darán algunos ejemplos básicos de algunas variedades que son de suma importancia para esta tesis:

**Ejemplo 2** El espacio  $\mathbb{R}^n$  es una variedad, cuyo atlas está dotado de una sola carta es decir  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, i_{\mathbb{R}^n})\}$ , más aún cualquier abierto de  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es una variedad con el Atlas  $\mathcal{A} = \{(U, i_U)\}$ . En ambos casos tanto  $\mathbb{R}^n$  como para cualquier subconjunto abierto de él, podemos establecer que tienen la propiedad de separabilidad de Hausdorff y siempre es posible encontrar una base topológica conformada de abiertos que sea numerable (tómese las bolas con centro en los racionales).

**Ejemplo 3** Considere la función  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (figura 2.4) y su correspondiente grafo definido como  $G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times \mathbb{R}^m\}$ . Si  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación  $C^\infty$ , entonces el mapeo:

$$\begin{aligned} \phi : G(f) &\rightarrow U \\ (x, f(x)) &\rightarrow x \\ \phi^{-1} : U &\rightarrow G(f) \\ x &\rightarrow (x, f(x)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. De esta manera el grafo  $G(f)$  de una  $C^\infty$ -función es una variedad dotada de un atlas de una sola carta  $\mathcal{A} = \{(G(f), \phi)\}$ .

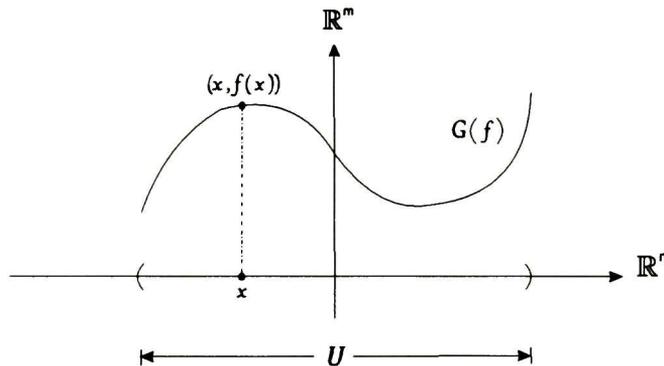


Figura 2.4: El grafo  $G(f)$  de una  $C^\infty$ -función visto como variedad

**Ejemplo 4** Considere el conjunto  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ . Este conjunto no es globalmente homeomorfo (ni difeomorfo) a  $\mathbb{R}$ , por lo que no es posible encontrar una sola carta cuyo dominio incluya a todo  $S^1$ . Para cualquier punto  $x \in S^1$  podemos encontrar una vecindad que sea homeomorfa a  $\mathbb{R}$ . Si definimos un conjunto de cartas, podemos construir un

atlas para  $\mathbb{S}^1$ . En efecto, para las siguientes cuatro cartas  $(U_i, \phi_i)$  donde  $\phi_i : U \rightarrow (-1, 1)$  con  $i \in \{1, 2\}$  establecen un homeomorfismo de los conjuntos  $U_1, U_2$  al subconjunto  $(-1, 1)$  del eje de las abscisas. De manera analoga  $\phi_i : U \rightarrow (-1, 1)$  con  $i \in \{3, 4\}$  establecen un homeomorfismo de los conjuntos  $U_3, U_4$  al subconjunto  $(-1, 1)$  del eje de las ordenadas y las parametrizaciones:

$$\phi_i^{-1} : (-1, 1) \rightarrow U_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

dadas por las expresiones:

$$1.- U_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 : x_2 > 0\}, \quad \phi_1(\mathbf{x}) = x_1, \quad \phi_1^{-1}(x_1) = (x_1, \sqrt{1-x_1^2})$$

$$2.- U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 : x_2 < 0\}, \quad \phi_2(\mathbf{x}) = x_1, \quad \phi_2^{-1}(x_1) = (x_1, -\sqrt{1-x_1^2})$$

$$3.- U_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 : x_1 > 0\}, \quad \phi_3(\mathbf{x}) = x_2, \quad \phi_3^{-1}(x_2) = (\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$$

$$4.- U_4 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 : x_1 < 0\}, \quad \phi_4(\mathbf{x}) = x_2, \quad \phi_4^{-1}(x_2) = (-\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$$

Estas cartas cubren a  $\mathbb{S}^1$  y la composición de los homeomorfismos  $\phi_i \circ \phi_j$ :

$$1. \quad \phi_1 \circ \phi_3^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1), \quad \phi_3 \circ \phi_1^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$$

$$2.- \phi_1 \circ \phi_4^{-1} : (0, 1) \rightarrow (-1, 0), \quad \phi_4 \circ \phi_1^{-1} : (-1, 0) \rightarrow (0, 1)$$

$$3.- \phi_2 \circ \phi_3^{-1} : (-1, 0) \rightarrow (0, 1), \quad \phi_3 \circ \phi_2^{-1} : (0, 1) \rightarrow (-1, 0)$$

$$4.- \phi_2 \circ \phi_4^{-1} : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0), \quad \phi_4 \circ \phi_2^{-1} : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$$

son  $\mathcal{C}^\infty$  relacionadas o compatibles. Por ejemplo sobre el conjunto  $U_1 \cap U_3$  tendremos:

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1}(x) = \phi_3(x_1, \sqrt{1-x_1^2}) = \sqrt{1-x_1^2}$$

La colección  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^4$  es un  $\mathcal{C}^\infty$ -atlas para la variedad  $\mathbb{S}^1$  (ver figura 2.5).

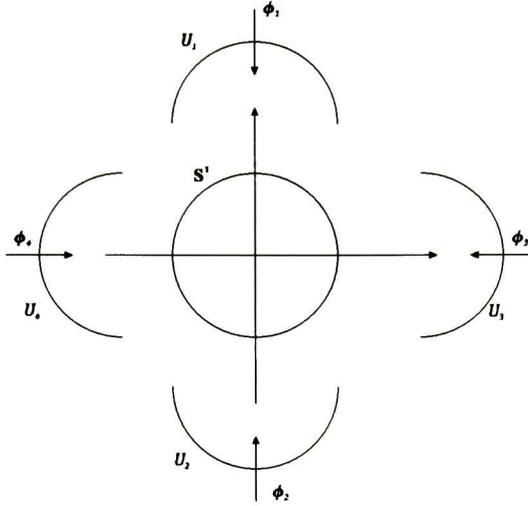


Figura 2.5: La variedad  $\mathbb{S}^1$  con un atlas de cuatro cartas

**Ejemplo 5** Considere la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$ . Dotaremos a la esfera  $\mathbb{S}^2$  de un  $\mathcal{C}$ -atlas. Considere el siguiente conjunto de seis cartas  $(U_i, \phi_i)$ , con los mapeos homeomorficos:

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathcal{B}$$

donde  $\mathcal{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$  descritos como:

- 1.-  $U_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : x_1 > 0\}$ ,  $\phi_1(\mathbf{x}) = (x_2, x_3)$ ,  $\phi_1^{-1}(x_2, x_3) = (\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3)$
- 2.-  $U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : x_2 > 0\}$ ,  $\phi_2(\mathbf{x}) = (x_1, x_3)$ ,  $\phi_2^{-1}(x_1, x_3) = (x_1, \sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3)$
- 3.-  $U_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : x_3 > 0\}$ ,  $\phi_3(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$ ,  $\phi_3^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$
- 4.-  $U_4 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : x_1 < 0\}$ ,  $\phi_4(\mathbf{x}) = (x_2, x_3)$ ,  $\phi_4^{-1}(x_2, x_3) = (-\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3)$
- 5.-  $U_5 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : x_2 < 0\}$ ,  $\phi_5(\mathbf{x}) = (x_1, x_3)$ ,  $\phi_5^{-1}(x_1, x_3) = (x_1, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3)$
- 6.-  $U_6 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : x_3 < 0\}$ ,  $\phi_6(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$ ,  $\phi_6^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$

Los homeomorfismos  $\phi_i$  descritos, muestran que  $\mathbb{S}^2$  es un conjunto localmente Euclidiano y de igual manera puede verificarse que las cartas son compatibles. Por ejemplo para el

conjunto  $U_1 \cap U_2$  tendremos  $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = \phi_1(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3) = (\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_3)$ . La colección  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^6$  es un  $C^\infty$ -atlas para la variedad  $S^2$  (ver figura 2.6)

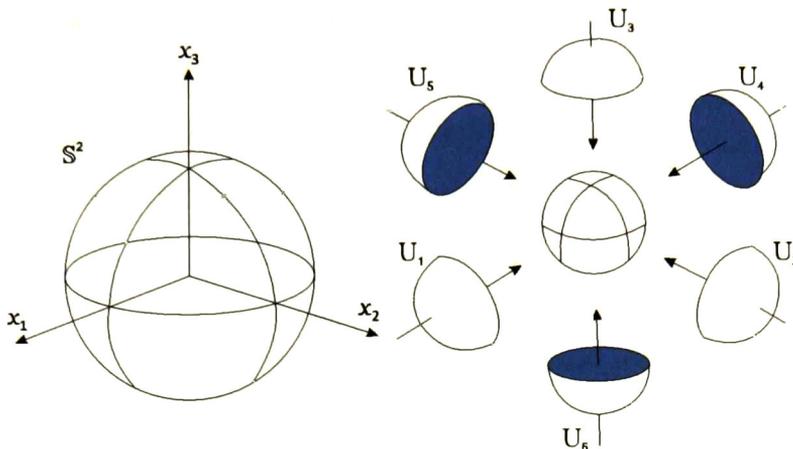


Figura 2.6: La variedad  $S^2$  con un atlas de seis cartas

**Teorema 1** Si  $\{(U_i, \phi_i)\}$  y  $\{(V_j, \psi_j)\}$  son  $C^\infty$ -atlas para las variedades  $M$  y  $N$ , de dimensión  $m, n$ , respectivamente, entonces la colección  $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}$  de cartas es un  $C^\infty$ -atlas para  $M \times N$ , mas aun  $M \times N$  es una variedad de dimensión  $m + n$ .

El teorema anterior puede generalizarse a  $k$ -productos cartesianos de variedades. Un ejemplo muy importante de aplicación de este teorema es el Toro  $n$ -dimensional, el cual lo podemos construir a partir del producto cartesiano de  $n$  círculos, es decir  $\mathbb{T} = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ . En la figura (2.7) se muestra el Toro para el caso  $n = 2$ .

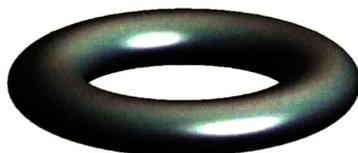


Figura 2.7: Toro topológico  $\mathbb{T} \cong S^1 \times S^1$

**Definición 16** Sea  $M$  una variedad  $n$  dimensional y sea  $X \subset M$ . Decimos que  $X$  tiene medida cero si, para cada carta  $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  el conjunto  $\phi(U \cap X)$  tiene medida cero en  $\mathbb{R}^n$

## 2.8. Espacio Tangencial

**Definición 17** Sea  $M$  una  $C^r$ -variedad,  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$  de dimensión  $n$  y sea  $p \in M$ . Un mapeo  $C^r \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada una derivación si para toda  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $f, g \in C^r$  si satisface:

- 1.-  $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$  Linealidad.
- 2.-  $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$  Regla de Leibniz.

El conjunto de todas las derivaciones  $X_p$  define un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{R}$  bajo las operaciones:

$$\begin{aligned}(X_p + Y_p)f &= X_p f + Y_p f \\ (\alpha X_p)f &= \alpha(X_p f)\end{aligned}$$

El espacio tangencial de  $M$  en el punto  $p$  denotado  $T_p M$  es el conjunto de todas las derivaciones  $X_p : C^r \rightarrow \mathbb{R}$ . Los elementos del espacio tangencial son llamados vectores tangentes. Sea  $(U, \phi)$  una carta coordenada sobre  $M$  con coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$ . El conjunto de derivaciones  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$  forma una base para  $T_p M$  y por tanto podemos escribir:

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

El vector  $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$  es la local representación de  $X_p \in T_p M$ .

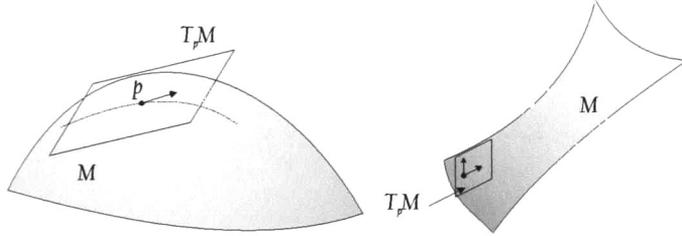


Figura 2.8: Espacio tangencial  $T_p M$  en  $p \in M$

**Ejemplo 6** Considere la variedad  $M = \mathbb{R}^n$ . El espacio tangencial  $T_x \mathbb{R}^n$  de esta variedad es simplemente  $\mathbb{R}^n$ . En efecto, el mapeo natural:

$$\begin{aligned}f : T_p \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} &\rightarrow (a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

proporciona el isomorfismo entre  $T_x \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n$

**Ejemplo 7** El espacio tangencial para la esfera  $\mathbb{S}^n$  esta dado por el conjunto:

$$T_x \mathbb{S}^n = \left\{ \mathbf{v}_x \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_x = \sum_{i=1}^{n+1} x^i v_x^i = 0 \right\}$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es un punto de la esfera. En la figura (2.9) se muestra el espacio tangencial en varios puntos  $\mathbf{x} = p_i$  de la esfera para el caso  $n = 2$

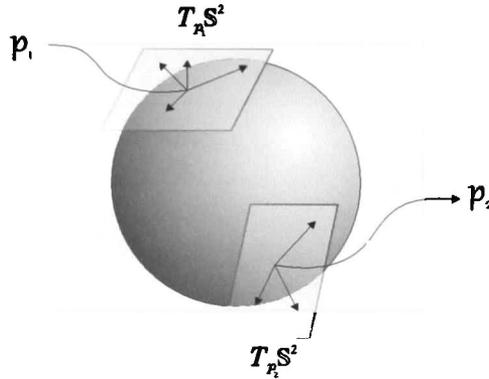


Figura 2.9: Espacio tangencial  $T_p \mathbb{S}^2$  en  $\mathbf{x} = p_i \in \mathbb{S}^2$

**Ejemplo 8** Considere la siguiente variedad dada en termino de coordenadas locales:

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \right\}$$

sea:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$$

La ecuación del plano tangente en el punto  $\mathbf{x}_0$  esta dada por:

$$\langle \nabla f, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Ahora bien si consideramos la parametrización:

$$r(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, b \sin \theta \sin \phi, c \cos \phi)$$

Entonces los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial r}{\partial \theta} = (-a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, b \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi, 0)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\partial r}{\partial \phi} = (a \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi, b \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi, -c \operatorname{sen} \phi)$$

son tales que  $\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \phi} \neq \mathbf{0}$ , (ver figura 2.10). De esta forma el espacio tangencial en el punto  $r_0 = (\theta_0, \phi_0)$  esta dado por:

$$T_{r_0} M = \operatorname{span} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \theta} (\theta_0, \phi_0), \frac{\partial r}{\partial \phi} (\theta_0, \phi_0) \right\} = \{t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

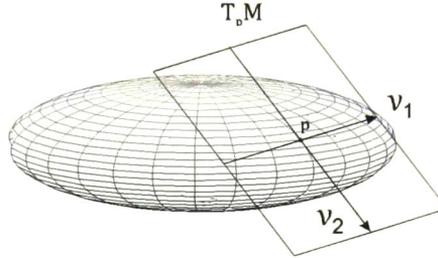


Figura 2.10: Espacio tangencial para elipse en el punto  $r_0 = p$

## 2.9. Haz Tangente

**Definición 18** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y  $p \in M$ . Se define el haz tangente (denotado como  $TM$ ) a la variedad de dimensión  $2n$  formado por la unión de todos los espacios tangentes  $T_p M$  de la variedad, esto es:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

*Nota:* Observe que el hecho de que cada  $T_p M$  sea un espacio vectorial eso no garantiza que  $TM$  también lo sea. Por ejemplo la suma de un vector de  $T_p M$  con otro vector de  $T_q M$  no necesariamente es un vector tangente a la variedad  $M$ .

## 2.10. Campos Vectoriales

**Definición 19** Sea  $M$  una variedad. Un campo vector  $X$  de clase  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$  definido sobre  $M$  es una función  $X : M \rightarrow T_p M$  que asigna cada punto  $p \in M$  un vector

$v_p \in T_p M$ . Denotaremos como  $\mathfrak{X}^\infty(M)$  o simplemente  $\mathfrak{X}(M)$  al conjunto de todos los  $C^r$ -campos vectores.

A los  $C^r$ -campos vectores se les suele denotar tradicionalmente con las letras capitales  $X, Y, Z$  o con las minúsculas  $u, v, w$ . Relativo a la carta coordenada  $(U, \phi)$  el campo vector  $X$  se le escribe en terminos de la base canonica  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$  de  $T_p M$  como:

$$X = X_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde  $X_i$  son funciones  $C^\infty$  en una vecindad  $\phi(p) = x$ .

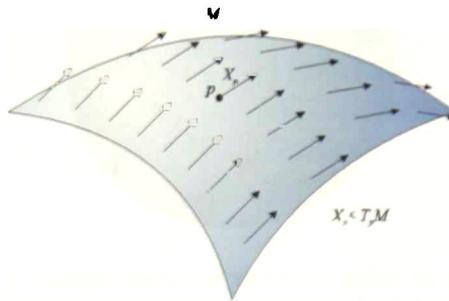


Figura 2.11: Campos vectores  $X_p$  tangenciales a la variedad  $M$

**Ejemplo 9** El campo gravitacional generado por una distribución de masa homogénea puede ser descrito por medio de campos vectores de la forma:

$$X_p : \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow T_p \mathbb{R}^3$$

Si introducimos coordenadas cartesianas, la fuerza de atracción gravitacional en cada punto de la variedad  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  esta dada por:

$$X_p(x) = -\frac{Gm}{\|r\|^3} \left( x_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + x_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + x_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right)$$

donde:  $\|r\| = ((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2)^{1/2}$

**Definición 20** Suponga que  $X$  es un  $C^r$ -campo vector tangente sobre  $M$ . con  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$  y  $p \in M$ . Si  $X_p = 0$ , o el campo vector  $X$  no esta definido en  $p$  entonces  $p$  es llamado punto singular de  $X$ .

**Ejemplo 10** En el ejemplo 9 el campo vector  $X$  tiene una singularidad en el origen  $(0, 0, 0)$ , ya que en este punto el campo vector no esta definido.

**Ejemplo 11** No es posible proporcionar un campo vectorial sobre  $S^2$  sin que este tenga una singularidad. Cada sección del haz tangente de  $S^2$  es cero en algun punto. Este resultado (conocido como el teorema de la bola peluda) (figura 2.12) es una consecuencia del teorema de Poincaré Hopf y puede consultarse la referencia [8] para la demostración.



Figura 2.12: Campo vectorial definido sobre la variedad  $S^2$

## 2.11. Curva Integral de un Campo Vector

**Definición 21** Sea  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$  y  $I$  un intervalo con  $0 \in I$ . Una curva diferenciable  $\gamma : I \rightarrow M$  en  $x \in M$  es una curva integral en  $x$  para todo  $C^r$ -campo vector  $X$  si:  $\dot{\gamma} = X(\gamma(t))$  y  $\gamma(0) = x$ .

La curva integral describe el conjunto de puntos alcanzables de  $M$  a  $x$  siguiendo al campo vector  $X$  hacia adelante y hacia atras en el tiempo (Ver figura 2.13)

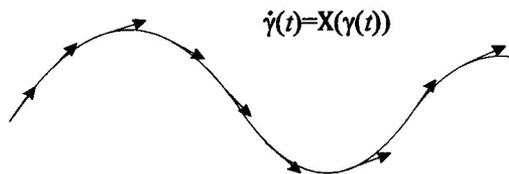


Figura 2.13: Curva integral asociada al campo vector  $X$

## 2.12. Flujos

Sea  $f$  un campo vector suave definido sobre la variedad  $M$ . Considere la curva integral parametrizada maximal que pasa por  $p \in M$ :

$$\gamma(t) = \Phi_t^f : I \times M \longrightarrow M$$

donde  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $0 \in I$ . Entonces diremos que  $\Phi_t^f$  es el flujo generado por el campo vector  $f$ . El campo vector  $f$  es completo si  $I = \mathbb{R}$  (El flujo es definido sobre  $\mathbb{R} \times M$ ).

**Teorema 2** Sea  $p \in M$ . El flujo  $\Phi_t^f$  de un campo vector  $f$  cumple las siguientes propiedades:

1.-  $\frac{d}{dt} \Phi_t^f = f(\Phi_t^f)$

2.- Tiene la propiedad de semigrupo:  $\Phi_{t_2}^f \left( t_1, \Phi_{t_1}^f(t, p) \right) = \Phi_{t_1+t_2}^f(t, p) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

## 2.13. Derivada de Lie

Sea  $M$  una variedad y  $\mathbf{x} \in M$ . Considere la función suave  $\lambda(\mathbf{x})$ , que mapea de la siguiente manera:  $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $f(\mathbf{x})$  un campo vector suave que va de  $M$  a  $T_{\mathbf{x}}M$ . Para la carta  $(U, \phi)$  se define la derivada de Lie de  $\lambda$  a través de  $f(x)$  en coordenadas locales como:

$$L_f \lambda(\mathbf{x}) = \langle d\lambda(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle = \left\langle \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, f(\mathbf{x}) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(x)$$

donde:

$$d\lambda(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

es el diferencial exacto. Para la función  $\zeta(\mathbf{x})$  definida como:

$$\zeta : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tendremos que la derivada de Lie de  $\zeta(\mathbf{x})$  es:

$$L_f \zeta(\mathbf{x}) = \frac{\partial \zeta(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

donde:

$$\frac{\partial \zeta(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

es la matriz Jacobiana. Podemos aplicar de manera consecutiva la derivada de Lie sobre la función  $L_f \lambda(\mathbf{x})$  con lo que se obtiene la derivada de Lie de  $L_f \lambda(\mathbf{x})$  a través de otro campo vector  $g(\mathbf{x})$ :

$$L_g L_f \lambda(\mathbf{x}) = L_g [L_f \lambda(\mathbf{x})] = \frac{\partial L_f \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(x)$$

Si  $\lambda$  es diferenciable  $k$ -veces a través de  $f$ , podemos obtener la derivada  $k$ -ésima de  $\lambda$  a través de  $f(\mathbf{x})$  recursivamente como:

$$L_f^k \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_f^{k-1} \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

Donde  $L_f^0 \lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$ . Una de las propiedades más importantes que tiene la derivada de Lie es la propiedad de linealidad:  $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty$

$$L_{\alpha f_1 + \beta f_2} \lambda(\mathbf{x}) = \alpha L_{f_1} \lambda(\mathbf{x}) + \beta L_{f_2} \lambda(\mathbf{x})$$

## 2.14. Bracket de Lie

**Definición 22** Sea  $\mathfrak{X}(M)$  el espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de los campos vectores definidos sobre la variedad  $M$ . Sean  $f, g \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f(p), g(p) \in T_p M$ . Definimos el bracket de Lie de  $f, g$  (denotado como  $[f, g]$ ), al nuevo campo vector cuyo valor en  $p \in M$  es un vector tangente en  $T_p M$ :

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \quad (f, g) \longrightarrow [f, g]$$

Sean  $f, g$  campos vectores suaves definidos sobre la variedad  $M$ . El bracket de Lie en coordenadas locales dada la carta  $(U, \phi)$  esta dado por la expresión:

$$[f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})] = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{x}_1} \dots \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial \mathbf{x}_1} \dots \frac{\partial g_n}{\partial \mathbf{x}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1} \dots \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{x}_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{x}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

donde:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} g(x) = \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}$$

La siguiente notación es de uso frecuente en la literatura:

$$[f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})] = ad_f g$$

Con esta notación podemos calcular más fácilmente los brackets de Lie anidados de manera recursiva:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f g &= [f, g] \\ ad_f^2 g &= [f, ad_f g] = [f, [f, g]] \\ &\vdots \\ ad_f^k g &= [f, ad_f^{k-1} g] \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

**Teorema 3** Sean  $f, g \in \mathfrak{X}$ . Entonces el operador binario de Lie  $[\cdot, \cdot]$  satisface las siguientes propiedades:

- 1.- *Linealidad:*  $[f, g](a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2) = a_1 [f, g](\lambda_1) + a_2 [f, g](\lambda_2) \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$
- 2.- *Antisimetría:*  $[f, g] = -[g, f]$
- 3.- *Primera Identidad de Jacobi:*  $[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$
- 4.- *Segunda Identidad de Jacobi:*  $L_{[f, g]} \lambda(\mathbf{x}) = L_f L_g \lambda(\mathbf{x}) - L_g L_f \lambda(\mathbf{x})$  donde  $L_{[f, g]} \lambda(\mathbf{x})$  representa la derivada de Lie  $\lambda(\mathbf{x})$  con respecto al campo vector  $[f, g]$
- 5.- *Propiedades de bilinealidad:*
  - a)  $[af_1 + bf_2, g] = a[f_1, g] + b[f_2, g] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
  - b)  $[f, ag_1 + bg_2] = a[f, g_1] + b[f, g_2] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- 6.- *Regla de la Cadena:*  $[\alpha f, \beta g] = \alpha \beta [f, g] + \alpha (L_f \beta) g - \beta (L_g \alpha) f \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty$

## 2.15. Distribuciones

**Definición 23** Sea  $M$  una  $\mathcal{C}^\infty$ -variedad  $n$ -dimensional. Una distribución es una asignación de un punto  $p \in M$  a un suespacio de  $T_p M$ . Denotaremos la distribución como  $\Delta(p)$ .

**Definición 24** Una distribución  $\Delta$  es suave ( $\mathcal{C}^\infty$ -distribución) si  $\forall p \in M$  existe una vecindad  $\mathcal{V}_\varepsilon(p)$  y un conjunto de  $\mathcal{C}^\infty$ -campos vectores  $\{f_1 \dots f_r\}$  definidos sobre  $\mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$  tal que:

$$\Delta = \text{span} \{f_1(\mathbf{x}) \dots f_r(\mathbf{x})\}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$$

**Definición 25** Sea  $f$  un campo vector definido sobre  $\mathcal{V}_\varepsilon(p)$ . Diremos que el campo vector  $f$  pertenece a la distribución  $\Delta$ , si  $f(\mathbf{x}) \in \Delta$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$ .

**Definición 26** La dimensión de una distribución  $\Delta(\mathbf{x})$  en un punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$  es la dimensión del subespacio generado por los campos vectores  $\{f_1 \dots f_r\}$ . Una distribución  $\Delta(\mathbf{x})$  es de dimensión constante si  $\dim[\Delta(\mathbf{x})]$  es constante,  $\forall \mathbf{x} \in M$

**Teorema 4** Sea  $M = \mathbb{R}^n$  Considere la distribución  $\Delta(\mathbf{x})$  generada por los  $r$ -campos vectores  $\{f_1 \dots f_r\}$  definidos sobre  $\mathbb{R}^n$  y sea la matriz  $M(\mathbf{x})$ :

$$\begin{pmatrix} f_{11}(\mathbf{x}) & \dots & f_{1r}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}) & \dots & f_{nr}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

donde:  $f_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{f_1(\mathbf{x}) \dots f_r(\mathbf{x})\} = \text{Im}[M(\mathbf{x})]$$

y además  $\dim[\Delta(\mathbf{x}_0)] = \text{rank}[M(\mathbf{x}_0)]$  para algún  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 27** Sea  $\Delta(\mathbf{x})$  una distribución definida en  $\mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$ . Se dice que  $\Delta(\mathbf{x})$  es una distribución no singular, si existe un  $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  tal que:

$$\dim[\Delta(\mathbf{x})] = k, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$$

Un punto  $\mathbf{x}_0$  de  $\mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$  se dice un punto regular de la distribución  $\Delta(\mathbf{x})$  si existe una vecindad  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  con la propiedad de que  $\Delta(\mathbf{x})$  es no singular sobre  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ . Un punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$  el cual no es un punto regular se dice que es un punto singular.

**Teorema 5** Sea  $\Delta(\mathbf{x})$  una  $C^\infty$ -distribución y  $\mathbf{x}_0$  un punto regular de  $\Delta(\mathbf{x})$ . Suponga que  $\dim[\Delta(\mathbf{x})] = k$ . Entonces existe una vecindad  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  y un conjunto de campos vectores  $\{f_1 \dots f_r\}$  definidos sobre  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  con las siguientes propiedades:

- 1.- El conjunto  $\{f_1 \dots f_r\}$  es linealmente independiente  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ .
- 2.-  $\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{f_1 \dots f_r\}$ .
- 3.- Cada campo vector  $f_m \in \Delta$  puede ser expresado sobre  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  como:

$$f_m(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$$

donde  $c_i(\mathbf{x})$  son funciones suaves definidas sobre  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$

**Definición 28** Sea  $M$  una  $C^\infty$ -variedad  $n$ -dimensional. Sea  $p \in M$ . Considere los campos vectores  $f, g$  definidos  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$ . Diremos que la distribución es involutiva  $\Delta$  si  $f, g \in \Delta$  implica  $[f, g] \in \Delta$

El siguiente teorema, es el mas importante en la teoría de distribuciones, y su impacto en la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales es fundamental como se demostrará a continuación:

**Definición 29** Considere el conjunto de  $C^\infty$ -campos vectores  $\{f_1, \dots, f_r\}$  sobre la vecindad  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap M$ . Se dicen completamente integrables para cada  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}_\varepsilon(p) \cap M$ , si existe una vecindad  $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0)$  y  $n - r$  funciones de clase  $C^\infty$   $\{h_1(\mathbf{x}), \dots, h_{n-r}(\mathbf{x})\}$  que satisfacen el sistema matricial:

$$\frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq n - r$$

y los gradiente  $\nabla h_i$  son linealmente independientes.

### 2.15.1. Teorema de Frobenius

**Teorema 6** Una distribución  $\Delta(\mathbf{x})$  no singular es completamente integrable si y solo si es involutiva.

Para la demostración de este teorema, puede consultar [2].

**Ejemplo 12** Considere el conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [2]:

$$\begin{aligned} 2x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} &= 0 \\ -x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

El sistema (2.1) puede ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2x_3 & -x_1 \\ -1 & -2x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = 0$$

en forma compacta:

$$\nabla h(f_1(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x})) = 0$$

donde:

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Para determinar si el conjunto de ecuaciones diferenciales (2.1) es resoluble o, equivalentemente la distribución  $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$  es completamente integrable, observamos que  $\dim(\Delta) = 2$ ,  $\forall \mathbf{x} \in D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ . Calculando el bracket  $[f_1, f_2]$ , obtenemos:

$$f_3 = [f_1, f_2] = \begin{pmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo que finalmente:

$$(f_1 \ f_2 \ f_3) = \begin{pmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que esta matriz tiene rango 2 para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . De esto se sigue que la distribución es involutiva y por tanto integrable por el teorema de Frobenius.

## 2.16. Algebras

**Definición 30** Sea  $A$  un conjunto no vacío y sea  $*$  una ley de composición interna definida sobre  $A$ . Diremos que el par  $(A, *)$  es un Magma si la operación  $*$  se define como:

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, a') &\longrightarrow a * a' \end{aligned}$$

**Definición 31** Se dice que el par  $(A, *)$  es un algebra si:

- 1.- El par  $(A, *)$  es un Magma
- 2.-  $A$  es un espacio vectorial
- 3.- La operación es bilineal

**Definición 32** El par  $(A, *)$  es un algebra de Lie si:

- 1.-  $(A, *)$  es un algebra

2.- La operación  $*$  es anti-simétrica

3.- La operación  $*$  verifica la identidad de Jacobi

A continuación se darán algunos ejemplos de álgebras de Lie:

**Ejemplo 13** El espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  dotado con el producto cruz es un álgebra de Lie.

**Ejemplo 14** El conjunto de mapeos lineales  $\mathcal{L}(V, V)$  definidos sobre un espacio vectorial es un álgebra de Lie usando el conmutador:  $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ .

**Ejemplo 15** El espacio vectorial  $\mathfrak{X}(M)$  definido sobre  $\mathbb{R}$  bajo la operación de bracket de Lie  $[f, g]$  es un álgebra de Lie.

**Definición 33** Sea  $M$  una variedad y  $(G, *)$  un grupo. La acción izquierda de  $G$  sobre  $M$  es el mapeo:  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  que satisface  $\forall x \in M$ :

1.  $\Phi(e, x) = x$

2.-  $\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 * g_2, x)$

Similarmente la acción derecha de  $G$  sobre  $M$  es un mapeo  $\Phi : M \times G \rightarrow M$  que satisface:

1.-  $\Phi(x, e) = x$

2.-  $\Phi(\Phi(x, g_2), g_1) = \Phi(x, g_2 * g_1)$

## 2.17 Pull Back y el Teorema de Campbell Baker Hausdorff

**Definición 34** Dado un difeomorfismo  $\Phi$  y un campo vector  $Y$  definimos el pull-back de  $Y$  a través de  $\Phi$  denotado como  $\Phi^*Y$  como el campo vector:

$$\Phi^*Y \triangleq \left( \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x} \circ Y \circ \Phi \right) (x)$$

Sean los campos vectores  $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ . Estamos interesados en encontrar una relación entre el flujo del campo vector  $X + Y$  y los flujos producidos por  $X$  y  $Y$ . Para ello, considera a  $X$  como un campo vector de perturbación para  $Y$ . El siguiente resultado establece una importante relación entre estos flujos.

**Teorema 7** Para  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$ , sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $Y \in \mathfrak{X}^{r+1}(M)$ . Para  $x_0 \in M$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$  y  $t \in [0, T]$ . Asuma que  $\Phi_{0,t}^Y$  es un  $C^{r+1}$ -difeomorfismo de una vecindad  $\mathcal{V}(x_0)$  sobre su imagen. Defina  $\Delta \in \mathfrak{X}^r(M)$  como  $\Delta(\tau, t) = ((\Phi_{0,\tau}^Y)^* X_\tau)(t)$ . Entonces  $\Phi_{0,t}^{X+Y}(x_0) = \Phi_{0,t}^Y \circ \Phi_{0,t}^\Delta(x_0)$

$$\Phi^{X+Y}(x_0) = \Phi^Y(\delta x_0)$$

flujo a través de  
 $X+Y$

flujo a través de  
 $Y$

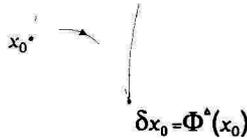


Figura 2.14: Relación de flujos

El siguiente teorema es de suma importancia ya que permite representar el pull-back del campo vector  $X$  a través del flujo del campo vector  $Y$

**Teorema 8** Sean los campos vectores  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Si la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} (ad_{Y_{s_k}} \dots ad_{Y_{s_1}} X_t(x)) ds_k \dots ds_1$$

contiene únicamente un número finito de términos diferentes de cero entonces:

$$((\Phi_{0,t}^Y)^* X)(x, y) = X(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} (ad_{Y_{s_k}} \dots ad_{Y_{s_1}} X_t(x)) ds_k \dots ds_1 \quad (2.2)$$

Si los campos vectores  $X, Y$  son independientes del tiempo, entonces la ecuación (2.2) se transforma en:

$$((\Phi_{0,t}^Y)^* X)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} ad_Y^k X \quad (2.3)$$

La expresión (2.3) se le conoce como fórmula infinitesimal de Campbell Baker Hausdorff.

## Capítulo 3

# Sistemas No Lineales y Modos Deslizantes

### 3.1. Introducción

En este capítulo se abordará el concepto de difeomorfismo y su utilidad para efectuar transformaciones sobre la base de coordenadas en las que se representa los sistemas no lineales, desembocando en la linealización por retroalimentación de estados. Esta estrategia de control, bajo ciertas hipótesis, permite transformar vía un difeomorfismo un sistema no lineal en una forma lineal [2]. Finaliza con una breve descripción de la técnica de control por modos deslizantes y se presenta una discusión sobre la transformación que permite llevar un sistema a la forma regular [9].

### 3.2. Sistema de Control Afín

**Definición 35** Sea  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$ . Un  $C^r$ -sistema de control afín se define como la tripleta  $\Sigma = (M, \mathcal{F}, U)$ , donde  $M$  es una  $C^r$ -variedad,  $\mathcal{F} = \{f\}_{i=0}^m$  es un conjunto de  $C^r$ -campos vectores suaves completos definidos sobre  $M$  y  $U \subset \mathbb{R}^m$ . La trayectoria de control descrita por el par de funciones:

$$(\mathbf{x} : I \rightarrow M; u : I \rightarrow U)$$

definidas sobre el intervalo  $I \subset \mathbb{R}^m$  satisfacen el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f_0(\mathbf{x}(t)) + \sum_{a=1}^n u^a(t) f_a(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \in M \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $u$  es una función Lebesgue medible y  $\mathbf{x}(t)$  es una función continua.

### 3.3. Linealización de Sistemas no Lineales por medio de la matriz Jacobiana

Considere el sistema no lineal afín cuya representación en coordenadas locales esta dada por la expresión (3.1). Para el caso en que solo se tenga una entrada  $u$ , el sistema (3.1) se puede escribir en terminos del campo vector  $f(\mathbf{x})$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{3.2}$$

**Definición 36** Sea el sistema no lineal en la forma (3.2). Suponga que  $u = u^* \equiv 0$ . Entonces diremos que  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_e$  es un punto de equilibrio para el sistema (3.2) si  $f(\mathbf{x}^*) = 0$

Sea el sistema no lineal (3.2) y el punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$  obtenido cuando  $u = u^* \equiv 0$ . Considere la transformación de coordenadas:

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix}$$

De manera similar  $\Delta u = u - u^*$ ,  $\Delta y = y - h(\mathbf{x}^*)$ . Las nuevas coordenadas  $\Delta \mathbf{x}, \Delta u$  y  $\Delta y$  representan las variaciones de  $\mathbf{x}$ ,  $u$  y  $y$  alrededor o en la cercanía del punto de equilibrio. La linealización del sistema (3.2) en el punto  $\mathbf{x}^*$  esta dada por:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta u\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde:

$$\mathbf{A} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, \dots, x_n^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1^*, \dots, x_n^*) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1^*, \dots, x_n^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1^*, \dots, x_n^*) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = g(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_1^*, \dots, x_n^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_1^*, \dots, x_n^*) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \left[ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right] = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, \dots, x_n^*) \dots \frac{\partial h}{\partial x_n}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right]$$

El modelo así obtenido solo es válido en una pequeña vecindad  $\mathcal{V}_\epsilon(x^*)$  alrededor del punto de equilibrio.

### 3.4. Difeomorfismo, y Linealización por retroalimentación de un Sistema afín

**Teorema 9** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave. Si la matriz Jacobiana  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  no es singular  $\forall \mathbf{x}_0 \in U$  entonces la aplicación  $f$  define un difeomorfismo local sobre un conjunto  $\mathcal{V} \subset U$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$ .

Considere el caso  $n = 1$  en el sistema no lineal afín (3.1) de tal manera que lo podamos expresar como:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (3.4)$$

Sea el difeomorfismo dado por el siguiente cambio de coordenadas:

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(\mathbf{x}(t)) \quad (3.5)$$

diferenciando ambos lados (3.5):

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u]$$

Como  $\mathbf{x}(t) = \Phi^{-1}(\mathbf{z})$  tendremos que la representación del sistema (3.4) en las nuevas coordenadas estará dada por la expresión:

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t)_{\mathbf{x}(t)=\Phi^{-1}(\mathbf{z})} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, t)_{\mathbf{x}(t)=\Phi^{-1}(\mathbf{z})} u(t)$$

$$y = h(\mathbf{x}, t)_{\mathbf{x}(t)=\Phi^{-1}(\mathbf{z})}$$

**Definición 37** Sea sistema de control afín descrito por (3.4). Se dice que el sistema es localmente linealizable por retroalimentación en una vecindad  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x})$  si existe un difeomorfismo  $\Phi$  dado por:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \Phi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

y una ley de control  $u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$  con  $\beta(\mathbf{x}_0) \neq 0$  tal que:

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}(t)=\Phi^{-1}(\mathbf{z})} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}(t)=\Phi^{-1}(\mathbf{z})} u(t) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}v$$

donde el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  está en la forma canónica controlable o forma normal de Brunovski.

A continuación se enunciarán dos teoremas importantes sobre la técnica de Linealización por retroalimentación de estados para sistemas no lineales afines de la forma (3.4).

**Teorema 10** Dado el sistema no lineal expresado en coordenadas locales (3.4) diremos que es linealizable por retroalimentación si y solo si existe una vecindad  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x})$  que contiene al origen de  $\mathbb{R}^n$  tal que las siguientes condiciones se cumplen:

- 1.- Los campo vectores  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  son linealmente independientes en  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x})$ .
- 2.- La distribución  $\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  es involutiva en  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x})$

**Teorema 11** La linealización local por retroalimentación para el sistema (3.4) es factible en una vecindad  $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x})$  si y solo si existe un difeomorfismo  $\Phi_1$  tal que  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_\varepsilon(\mathbf{x})$  se cumple:

- 1.-  $L_g L_f \Phi_1(\mathbf{x}) = 0$
- 2.-  $L_g L_f^{n-1} \Phi_1(\mathbf{x}_0) \neq 0, k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$

El cambio de coordenadas y la ley de control están dados por:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ L_f \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \Phi_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

$$u = \frac{v - L_f^n \Phi_1(\mathbf{x})}{L_g L_f^{n-1} \Phi_1(\mathbf{x})}$$

### 3.5. Teoría de Modos Deslizantes

**Definición 38** Una subvariedad conectada embebida  $S$  de  $M$  es una superficie deslizante para el sistema (3.1) si:

1.  $\mathbf{x}_e \in dS$
- 2.-  $T_{\mathbf{x}}S + \mathcal{L}_0(f, g_1, \dots, g_l)(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{x}}M \quad \forall \mathbf{x} \in S$

donde  $\mathcal{L}(f, g_1, \dots, g_l)(\mathbf{x})$  es el algebra de Lie de los  $C^\infty$ -campos vectores y  $\mathcal{L}_0$  es un ideal de esta algebra [10].

Considere el sistema no lineal descrito en la forma (3.4). Sea la función de conmutación suave  $s : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo gradiente  $\nabla s$  no es nulo en  $U$ . El conjunto  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : s(\mathbf{x}) = 0\}$  define una variedad  $(n - 1)$ -dimensional que es regular en  $U$ . Un control de estructura variable, es una ley que toma dos valores diferentes de acuerdo al signo de  $s(\mathbf{x})$  y se define como:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^+ & s(\mathbf{x}) > 0 \\ u^- & s(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

donde  $u^+ \neq u^-$  son niveles superior e inferior del control  $u(\mathbf{x})$  los cuales son funciones suaves. Supongase que producto de la ley de control establecida las trayectorias de estado del sistema (3.4) alcanzan la superficie de deslizamiento  $S$ , quedando a partir de ese momento, confinadas en su vecindad. Se dice entonces que se ha establecido un régimen deslizante sobre la variedad  $s(\mathbf{x}) = 0$  (figura 3.1). La condición para que esto suceda se resume en el siguiente teorema:

**Teorema 12** La condición necesaria y suficiente para la existencia del regimen deslizante es:

1.  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + gu^+ \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^+} L_{f+gu^+} s < 0$
2.  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + gu^- \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^+} L_{f+gu^-} s > 0$

Este teorema implica que la variación de la función escalar  $s(\mathbf{x})$  en la dirección del campo controlado siempre se opone al signo de  $s(\mathbf{x})$ , garantizando así, el cruce de  $S$  a ambos lados de la superficie.

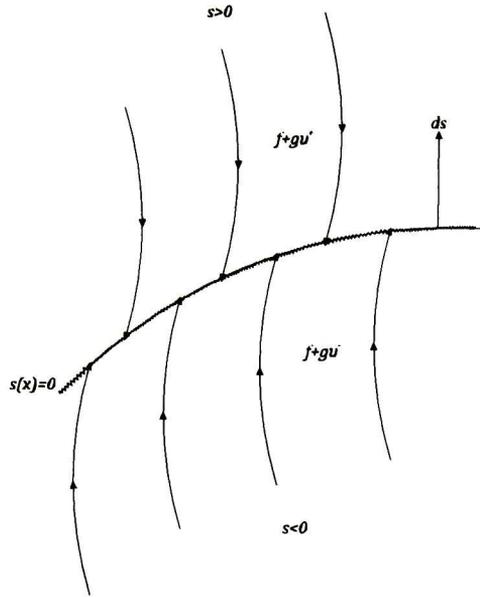


Figura 3.1: Establecimiento de un régimen deslizante sobre la superficie  $s(\mathbf{x}) = 0$

La selección de una variedad deslizante y el control que force el modo deslizante es una tarea que se facilita para sistemas cuya representación en el espacio de estados es de la forma regular [9]. En la siguiente sección se presentará un breve análisis para la obtención de la ecuación de modos deslizantes para sistemas reducidos a la forma regular, tanto para el caso lineal como el no lineal.

## 3.6. Forma Regular

### 3.6.1. Caso Lineal

Considere el sistema lineal controlable representado en el espacio de estado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.6)$$

donde:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  y  $\text{rank}(\mathbf{B}) = m$ . Es posible particionar al sistema (3.6) en la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad (3.7)$$

donde:  $\mathbf{B}_1 \in \mathcal{M}_{(n-m) \times m}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{B}_2 \in \mathcal{M}_{m \times m}$  y la condición  $|\mathbf{B}_2| \neq 0$ . La transformación no singular:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

con el cambio de coordenadas  $\mathbf{y}=\mathbf{T}\mathbf{x}$ , transforma al sistema (3.6) a la forma regular:

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{y}_2 \quad (3.9)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{y}_2 + \mathbf{u} \quad (3.10)$$

donde:  $\mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $\mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^m$  Observese que esta representación esta constituida por dos subsistemas. Dado que inicialmete asumimos que el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es controlable, del sistema (3.9) se desprende el siguiente teorema de controlabilidad:

**Teorema 13** *Si el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  en (3.6) es controlable entonces el par  $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12})$  es controlable tambien.*

Tomando el vector  $\mathbf{y}_2$  como un control ficticio  $m$ -dimensional para el primer subsistema  $(n - m)$  dimensional controlable, todos los  $(n - m)$  eigenvalores pueden ser asignados adecuadamente por medio de la elección de la matriz  $\mathbf{C}$  de forma que  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{C}\mathbf{y}_1$ , asi por medio de la superficie  $s = \mathbf{y}_2 + \mathbf{C}\mathbf{y}_1$ , despues de que el modo deslizante se produce la dinámica para el primer subsistema esta dado por:

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}) \mathbf{y}_1$$

De esta forma la elección adecuada del control es:

$$\mathbf{u} = -(K|\mathbf{y}| + \delta) \text{sign}(s)$$

con  $K, \delta > 0$ . Para la función de Lyapunov:  $V = \frac{1}{2}s^2$  tendremos:

$$\dot{V} \leq |s| |(\mathbf{C}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{21})\mathbf{y}_1 + (\mathbf{C}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22})\mathbf{y}_2| - (K|\mathbf{y}| + \delta) |s| \quad (3.11)$$

es evidente que existe un valor de  $K$  tal que para cualquier  $\delta$  se cumple  $\dot{V} \leq 0$ .

### 3.6.2. Caso no lineal

Considere el sistema afín:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ . Se considera que campo vector  $f$  y las columnas de  $\mathbf{B}$  son mapeos  $\mathcal{C}^\infty$ . Asuma que  $\text{rank}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = m$ ,  $\forall \mathbf{x} \in X$ . Sea  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

Si existe un bloque  $\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  de dimensión  $m \times m$  tal que  $\text{rank}(\mathbf{B}_2(\mathbf{x})) = m$  entonces podemos particionar el sistema (3.12) en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{u} \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{u} \quad (3.14)$$

donde:  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$  Sea el difeomorfismo:

$$\mathbf{y}_1 = \Phi(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 \quad (3.16)$$

La ecuación para  $\mathbf{y}_1$ :

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} f + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B} \mathbf{u}$$

va ser independiente del control, si el difeomorfismo  $\Phi(\mathbf{x})$  es una solución del siguiente sistema matricial de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.17)$$

Para resolver el sistema diferencial (3.17) se requiere encontrar un conjunto de variedades correspondientes al sistema de Pfaffian:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (3.18)$$

donde  $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)^T$  y  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  es de rango pleno de  $(n-m) \times n$ . La matriz de Pfaffian esta conformada por los coeficientes de las 1-formas diferenciales:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \omega_1^1(x) dx_1 + \dots + \omega_n^1(x) dx_n \\ &\vdots \\ \omega^{n-m} &= \omega_1^{n-m}(x) dx_1 + \dots + \omega_n^{n-m}(x) dx_n \end{aligned} \quad (3.19)$$

Los coeficientes del sistema de 1-formas de Pfaffian (3.19) son funciones de  $\mathbf{x}$  y pueden ser encontrados bajo la condición de que cada 1-forma diferencial  $\omega^1, \dots, \omega^{n-m}$  se haga cero cuando es multiplicada por cada vector columna de la matriz  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , esto es:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.20)$$

Para encontrar dichos coeficientes, es conveniente descomponer las matrices  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{B}$  de el sistema (3.17) de la siguiente manera:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \left[ \mathbf{W}_1(\mathbf{x}) \quad \vdots \quad \mathbf{W}_2(\mathbf{x}) \right] \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Donde  $\text{rank}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \text{rank}(\mathbf{B}_2(\mathbf{x})) = m$ . Reescribiendo ecuación (3.20) como:

$$\mathbf{W}_1(\mathbf{x})\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{W}_2(\mathbf{x})\mathbf{B}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

y definiendo la matrix  $\mathbf{W}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_{n-m}$  encontramos:

$$\mathbf{W}_2(\mathbf{x}) = -\mathbf{B}_1(\mathbf{x})\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

Como resultado, el sistema Pfaffian (3.18) es determinado únicamente con la sustitución del sistema equivalente:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}_2 + d\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{B}_1(\mathbf{x})\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x}) = \{a_{ij}\} \\ d\mathbf{x}_1^T &= (dx_1, \dots, dx_{n-m})^T \\ d\mathbf{x}_2^T &= (dx_{n-m+1}, \dots, dx_n)^T \end{aligned}$$

con  $i = 1, \dots, n-m$   $j = n-m+1, \dots, n$ . Dado que el sistema (3.23) es integrable, es posible encontrar las  $n-m$  variedades integrales en forma explícita:

$$\mathbf{x}_1 = \bar{\Phi}(\mathbf{x}_2, \mathbf{c}) \quad (3.24)$$

donde  $\mathbf{c}$  es un vector constantes de integración y  $\bar{\Phi} \in \mathbb{R}^{n-m}$ . Resolviendo para  $\mathbf{c}$  obtenemos las  $n-m$  variedades integrales:

$$\mathbf{c} = \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (3.25)$$

De esta forma podemos usar las funciones  $\Phi$  como el mapeo de transformación para (3.15) obteniendo la forma regular:

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = f_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \quad (3.26)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2 = f_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) + \mathbf{B}_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\mathbf{u} \quad (3.27)$$

El uso de la forma regular ofrece las siguientes ventajas:

- 1.- El cálculo del control equivalente para encontrar la ecuación en modos deslizantes no es necesario.
- 2.- El modo deslizante es invariante con respecto a las funciones  $f_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) + \mathbf{B}_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\mathbf{u}$  en el segundo bloque.
- 3.- La condición  $\mathbf{B}_2 \neq 0$ , es necesaria para forzar el modo deslizante sobre la variedad  $s(\mathbf{y}) = 0$  preseleccionada.

Si tomamos el vector  $\mathbf{y}_2$  como un control ficticio para el primer bloque de la forma regular (3.26) con la asignación de una dinámica deseada:  $\mathbf{y}_2 = -s_0(\mathbf{y}_1)$ , entonces es posible diseñar un control discontinuo para forzar el modo deslizante sobre la variedad  $s(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_2 + s_0(\mathbf{y}_1)$ . Después de un tiempo finito, el modo deslizante sobre esta superficie comienza y el sistema se comporta con la siguiente dinámica:

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = f_1[\mathbf{y}_1, -s_0(\mathbf{y}_1), t]$$

## Capítulo 4

# Dinámica Lagrangiana

### 4.1. Introducción

Las ecuaciones de Euler-Lagrange surgen de manera natural, al estudiar las condiciones bajo las cuales un funcional alcanza un extremo. Desde el punto de vista físico, estas ecuaciones son una herramienta muy poderosa para obtener el modelo dinámico de un sistema embebido en un campo de fuerzas. Las ecuaciones de Euler-Lagrange proporcionan un puente entre la teoría de control, la mecánica geométrica, Bullo y Lewis[7] y los sistemas no holonomicos Bloch[11]. En este capítulo se deducirán dichas ecuaciones a partir del principio básico de mínima acción de Hamilton. Se finalizará con la deducción de la ecuación general de los sistemas mecánicos multicuerpo.

### 4.2. Dinámica Lagrangiana definida sobre Variedades

**Definición 39** Considere la  $C^\infty$ -variedad  $M$  y su espacio tangencial  $T_x M$ . La forma cuadrática definida positiva:

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : T_x M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\end{aligned}$$

Se llama *métrica de Riemann*. Sea  $(U, \phi)$  una carta de un  $C^\infty$ -atlas  $\mathcal{A}$  para la variedad  $M$ , la cual define las coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . La métrica de Riemann  $\mathbb{G}$  se puede expresar en términos del tensor métrico  $g$  en la forma:

$$ds^2 = \sum_{ij=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$$

donde  $g_{ij} = g_{ji}$ . Una variedad diferenciable a la cual se le a definido un producto interior para cada espacio tangencial  $T_x M$  (dotada con una métrica de Riemann) se dice que es una variedad Riemanniana.

La estructura de variedad diferenciable, permite describir adecuadamente la evolución de todas las posibles configuraciones que puede adoptar físicamente un sistema. El conjunto de todas estas posibles configuraciones se le llama espacio de configuración y como se verá mas adelante, se puede representar por medio de una variedad (teorema 14), la cual denotaremos como  $Q$ . El sistema de coordenadas locales  $q$  sobre la variedad  $Q$  son llamadas coordenadas generalizadas, el espacio tangencial  $T_q Q$ , es el conjunto de todas las posibles velocidades del sistema en la coordenada  $q$ . El espacio de estado del sistema esta determinado por todos aquellos puntos  $(q, \dot{q})$  que estan en el haz tangente  $TQ$ . La dimensión del espacio de configuración se conoce como los grados de libertad del sistema.

**Definición 40** Sea  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$ . Se define como un sistema mecánico  $C^r$ -forzado a la  $7$ -upla  $(Q, \mathbb{G}, V, F, T_q Q, \mathfrak{F}, U)$  donde:

1. La variedad  $Q$  es el espacio de configuración.
- 2.-  $\mathbb{G}$  es la métrica de Riemann definida sobre  $Q$ , es decir la dupla  $(Q, \mathbb{G})$  es una variedad de Riemann.
- 3.-  $V$  es la función de energía potencial definida sobre  $Q$ .
4.  $F$  es el conjunto de fuerzas externas no controlables.
- 5.-  $T_q Q$  es el espacio tangencial de velocidades.
- 6.-  $\mathfrak{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$  es la colección de campos covectores definidos sobre  $Q$ , llamadas fuerzas de control.
- 7.-  $U \subset \mathbb{R}^n$  es el conjunto de control.

Es importante entender la relevancia física de cada uno de los elementos de la definición anterior. La variedad  $Q$  añade el sentido geometrico de todas las posibles fases de posicionamiento del sistema en cuestion. En la tabla 4.1 se muestran los espacios de configuración de algunos sistemas mecánicos típicos. La métrica de Riemann  $\mathbb{G}$  definida sobre la variedad  $Q$  proporciona la descripción de la energía cinética del sistema. Los campos covectores  $\mathfrak{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$  representan todas aquellas fuerzas que podemos controlar. Las fuerzas de entrada del sistema son una combinación lineal de los campos covectores  $F_1, \dots, F_m$  con coeficientes que pertenecen las  $U$ -funciones que son Lebesgue integrables en el tiempo.

Tabla 4.1: Espacio de Configuración de Sistemas Mecánicos

Sistema	Espacio de Configuración
Robot móvil trasladándose en el plano	$\mathbb{R}^2$
Cuerpo rígido moviéndose en el espacio	$\mathbb{R}^3$
Péndulo simple	$\mathbb{S}^1$
Péndulo esférico	$\mathbb{S}^2$
Pendubot y péndulo de Furuta	$\mathbb{T}$
Nave espacial	$\mathbb{R}^3 \times SO3$
Robot móvil planar con un brazo de n eslabones	$SE(2) \times \mathbb{T}^n$

**Teorema 14** Sea  $Q$  el espacio de configuración de algún sistema mecánico. Entonces existe una  $C^\infty$ -variedad  $M$  y compacta tal que  $M$  es difeomorfa a  $Q$ .

**Definición 41** Sea  $M$  una variedad de Riemann y  $M = Q$  el espacio de configuración de un sistema mecánico. La forma cuadrática para cada espacio tangencial  $T_q Q$  definida como  $K = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  con  $\mathbf{v} \in T_q Q$ , se llama energía cinética. La función diferenciable  $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$  se llama energía potencial.

En los sistemas mecánicos la métrica de Riemann  $\mathbb{G}$  determina la magnitud de las cantidades inerciales de los elementos que componen al sistema. La manera en que esta métrica asocia los vectores de velocidad  $\dot{q} \in T_q Q$  con la energía  $K$ , es por medio de la matriz de inercia del sistema mecánico, la cual denotaremos como  $M(q)$ . De esta forma tendremos:

$$(\dot{q}, \dot{q}) \xrightarrow{\mathbb{G}} K = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot M(q) \dot{q}^T$$

**Definición 42** Sea  $Q$  una  $C^\infty$ -variedad de dimensión  $n$ , la cual describe el espacio de configuración del sistema y  $TQ$  el haz tangente. La función:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\rightarrow \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \end{aligned}$$

definida como la diferencia entre la energía cinética y potencial:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = K(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) \tag{4.1}$$

se le llama función Lagrangiana.

### 4.2.1. Principio de Mínima Acción de Hamilton

El principio de Hamilton establece que el movimiento de un sistema mecánico en el espacio de configuración  $Q$  de  $t = t_1$  a  $t = t_2$  es tal que la integral:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (4.2)$$

es un extremo (máximo o mínimo) de la trayectoria de movimiento.

### 4.2.2. Ecuaciones de Lagrange

Un sistema físico que no disipa energía, se dice que es conservativo. Un sistema mecánico conservativo es aquel en el cual la energía aparece solamente como energía cinética y energía potencial. De la teoría del cálculo de variaciones es posible deducir las ecuaciones de Lagrange, las cuales describen el movimiento del sistema para cualquier trayectoria admisible  $(q_1 \dots q_n)$ . Sea  $q$  la función para la cual  $I$  es un extremo. Supóngase que  $\delta q$  es una función arbitraria que es continua en  $t_1 \leq t \leq t_2$  y tiene una derivada continua  $\delta \dot{q}$  en el mismo intervalo. Las condiciones de frontera se asumen fijas,  $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$ . De esta forma tendremos:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (4.3)$$

Diferenciando (4.3) con respecto al parámetro infinitesimal  $\delta$  tendremos:

$$\frac{dI}{d\delta} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \delta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \delta} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta} \right) dt \quad (4.4)$$

Considere la segunda integral de (4.4):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \delta} \right) dt \quad (4.5)$$

En ecuación (4.5) aplicamos integración por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \delta} \right) dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \delta} \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \delta} \right) dt \quad (4.6)$$

Por las condiciones de frontera, el primer término del lado derecho de (4.6) se convierte en cero y la ecuación (4.4) queda como:

$$\frac{dI}{d\delta} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \delta} dt = 0 \quad (4.7)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo de variaciones, el integrando de la ecuación (4.7) debe ser cero:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad (4.8)$$

La ecuación obtenida (4.8) se denomina ecuación de Euler Lagrange. Ahora bien si el sistema se somete a una fuerza externa de entrada  $\tau$  entonces las ecuaciones de Lagrange toman la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad (4.9)$$

### 4.3. Formulación Dinámica para Sistemas Mecánicos Multicuerpo

De la formulación Lagrangiana es posible obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico multicuerpo tal como se indica a continuación: Considere la función Lagrangiana, en terminos de los elementos de la matriz de inercia  $M(q)$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q) \quad (4.10)$$

Sustituyendo la expresión (4.10) en las ecuaciones de Lagrange (4.9) obtendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( M_{ij} \ddot{q}_j + \dot{M}_{ij} \dot{q}_i \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \sum_{j,k}^n \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Los terminos  $\dot{M}_{ij}$  pueden desarrollarse en terminos de derivadas parciales con lo que obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j,k}^n \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j \right) + \frac{\partial V(q)}{\partial q_i} = \tau \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Rearreglando terminos tendremos:

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j,k}^n \Gamma_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial V(q)}{\partial q_i} = \tau \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.11)$$

donde:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} \right) \quad (4.12)$$

Las funciones  $\Gamma_{ijk}$  se les denomina simbolos de Christoffel correspondientes a la matriz de inercia  $M(q)$ . Los terminos de la forma  $\dot{q}_i \dot{q}_j$ ,  $i \neq j$  se les llama fuerzas de Coriolis y los terminos de la forma  $\dot{q}_i^2$  son las fuerzas centrifugas. Definiremos la matriz de Coriolis  $C(q, \dot{q})$  como:

$$C_{ij}(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \quad (4.13)$$

El vector  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  proporciona los terminos de las fuerzas de Coriolis y centrifugas en la ecuación de movimiento. Finalmente podemos escribir la ecuación (4.11) como:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (4.14)$$

Donde  $G(q) = \frac{\partial V}{\partial q_i}$  es el vector de fuerzas gravitacionales. Las principales propiedades estructurales de la ecuación (4.14) son las siguientes:

- 1.- La matriz  $M(q)$  es simétrica y positiva definida. Por lo tanto la matriz inversa  $M^{-1}(q)$  existe.
- 2.- La matriz  $\dot{M} - 2C$  es una matriz antisimétrica (propiedad de pasividad).

Dado que la matriz  $M(q)$  es una matriz definida positiva es posible expresar el modelo dinámico (4.14) como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \left( M(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q)] \right) \quad (4.15)$$

donde  $(q, \dot{q}) \in TQ$ .

## 4.4. Sistemas Subactuados

En las ultimas décadas a surgido un enorme interes por estudiar el comportamiento de los sistemas mecánicos en función del número de actuadores y los grados de libertad que posee, en particular aquellos en los que el número de actuadores independientes es menor que el número de grados de libertad del sistema. A estos sistemas se les suele denominar sistemas mecánicos subactuados. Ejemplos de sistemas subactuados son los robots bipedos, robots montados sobre plataformas rodantes, la familia de péndulos invertidos (pendubot, péndulo rotatorio, monociclo, péndulo con rueda de reacción), aeronaves, satélites, vehículos

subacuáticos, aerodeslizadores, helicópteros, etc. El interés sobre estos sistemas radica en el hecho, de que en muchas ocasiones, los actuadores son caros o representan un peso extra que limita el desempeño del sistema. Es por ello que se estudian algoritmos que permitan a un sistema mecánico efectuar ciertas tareas con el menor número de actuadores. A continuación se dará una definición formal de un sistema subactuado.

**Definición 43** *Sea el sistema descrito por la ecuación diferencial:*

$$\ddot{q} = F_1(q, \dot{q}) + F_2(q)u \quad (4.16)$$

donde  $q \in Q$ ,  $\dot{q} \in T_qQ$ ,  $F_1(\cdot)$  es el campo vector que describe la dinámica del sistema,  $F_2$  es la matriz de entrada y  $u$  es el vector de fuerzas generalizadas. Diremos que el sistema (4.16) es subactuado si  $\text{rank}(F_2) < \dim(Q)$ .

# Capítulo 5

## Diseño del Control de Alta Variación

### 5.1. Introducción

En este capítulo se explicará como dado el sistema de control afín (3.1) la ley de control de conmutación  $u_h^{sm}$  definida en intervalos constantes de longitud  $h$  permitirán llevar las trayectorias  $\mathbf{x}(t)$  a aquellos puntos que satisfacen  $\{\mathbf{x}_e \in M : f_0(\mathbf{x}_e) = 0\}$ . La ley de conmutación estará dada en función de los controles  $\alpha_{ij}^p(\mathbf{x})$  que aparecen en el sistema infinitesimal generalizado. La elección de las funciones  $\alpha_{ij}^p(\mathbf{x})$  se realizara con el objetivo de estabilizar el sistema infinitesimal por medio de una superficie deslizante  $s(\mathbf{x}) = 0$  previamente definida. La mayor parte de este capítulo se basa en los trabajos de R. Hirschorn [1], [12] y de A. Isidori [2].

### 5.2. Control de Alta Variación de Memoria m

#### 5.2.1. Vecindad Compacta

**Definición 44** Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que la vecindad  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  es una vecindad compacta si:

- 1.-  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \exists M > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}\| < M$
- 2.- la vecindad  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$  es cerrada (contiene a todos sus puntos frontera)

#### 5.2.2. Control de Alta Variación

**Definición 45** Sea  $m, q \in \mathbb{Z}^+$  y  $h > 0$ . Un control  $\mathbf{u}_h = (u_h^1 \dots u_h^l)$  es llamado control de variación de memoria  $m$  para el sistema (3.1) si existen funciones  $\alpha_{i,j}^p(\mathbf{x})$   $i \in$

$\{0, 1, \dots, m-1\}$ ;  $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$ ;  $p \in \{0, 1\}$  sobre  $M$  las cuales son suaves fuera de un conjunto  $M_0$  de medida cero tal que para todo  $t \in [kh, (k+1)h]$

$$1.- u_h^j(\mathbf{x}(kh), t) = \alpha_{i,j}^0(\mathbf{x}(kh)) + \alpha_{i,j}^1(\mathbf{x}(kh))/h \text{ para } t \in [(k+i/m)h, (k+(i+1)/m)h],$$

$$i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}, j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$$

2.-  $\mathbf{x}(h, \mathbf{u}_h, \mathbf{x}_0) = q_h^{h, \mathbf{x}_0}$  donde  $t \rightarrow q_t^{h, \mathbf{x}_0}(p)$  es la curva integral a través de  $p$  para el campo vector suave  $q^{h, \mathbf{x}_0}$  sobre  $M \setminus M_0$  definido por:

$$q^{h, \mathbf{x}_0} = f + \sum_{i=1}^q \beta_i(\alpha(\mathbf{x}_0)) f^i + \sum_1^l \gamma_i(\alpha(\mathbf{x}_0)) g_i + r^{h, \mathbf{x}_0}$$

donde  $f_i, r^{h, \mathbf{x}_0} \rightarrow 0$  uniformemente sobre conjuntos compactos como  $h \rightarrow 0$ ,  $\alpha = \{\alpha_{i,j}^k \mid i = 0, 1, 2, \dots, m-1, j = 1, 2, \dots, l, k = 0, 1\}$

3.- La solución de la inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x})$  sobre  $M$  correspondiente a:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^q \beta_i(\alpha(\mathbf{x}_0)) f^i(\mathbf{x}) + \sum_1^l \gamma_i(\alpha(\mathbf{x}_0)) g_i(\mathbf{x}) + r^{h, \mathbf{x}_0}$$

$\mathbf{x} \in M \setminus M_0$  existe para todo  $t \geq 0$ .

4.- Las funciones  $\alpha_{i,j}^0$  son acotadas sobre una vecindad compacta de  $\mathbf{x}_e$  y  $\alpha_{i,j}^1(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  conforme  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_e$ . El campo vector:

$$f^\alpha = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^q \beta_i(\alpha(\mathbf{x}_0)) f^i(\mathbf{x}) + \sum_1^l \gamma_i(\alpha(\mathbf{x}_0)) g_i(\mathbf{x}) + r^{h, \mathbf{x}_0}$$

sobre  $M \setminus M_0$  es llamado el campo vector infinitesimal correspondiente a  $\mathbf{u}_h$ . La correspondiente inclusión diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in M \tag{5.1}$$

se le denomina sistema infinitesimal correspondiente a  $\mathbf{u}_h$ .

**Definición 46** Sea  $S$  una superficie deslizante para el sistema (3.1). El control de variación  $\mathbf{u}_h^{sm}$  con memoria  $m$  es llamado control de variación en modos deslizantes para la superficie  $S$  si el sistema infinitesimal (5.1) correspondiente a  $\mathbf{u}_h^{sm}$  tiene las siguientes propiedades:

1. Las trayectorias del sistema infinitesimal alcanza  $S$  en un tiempo finito y permanece en  $S$ , con  $\mathbf{x}_e$  un punto de equilibrio asintóticamente estable para el modo deslizante.

- 2.- La superficie  $S$  es localmente atractiva, es decir cada vecindad  $U$  de  $p \in S$  contiene una vecindad abierta  $W$  de  $p$  tal que  $W \cup S \cup \{\mathbf{x}_e\}$  es invariante bajo trayectorias del sistema infinitesimal  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha$

### 5.3. Estabilización Práctica

**Definición 47** Suponga que  $\mathbf{x}_e$  es un estado de equilibrio para el sistema (3.1) y  $u_h^{sm}$  un control de alta variación de memoria  $m$  indexado por  $h \in \mathbb{R}^+$  Entonces,  $\mathbf{x}_e$  se dice que es prácticamente estabilizado por  $\{u_h\}$  si:

- 1.- Las trayectorias de los estados  $\mathbf{x}(t, u_h, \mathbf{x}_0)$  correspondiente a  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in M$ ,  $u = u_h$  existe  $\forall t > 0$ .
- 2.- Dada cualquier vecindad compacta  $D$  de  $\mathbf{x}_e$  y un subconjunto abierto  $U$  de  $D$  que contiene  $\mathbf{x}_e$ , existe  $T, H > 0$  tal que  $\mathbf{x}(t, u_h, \mathbf{x}_0) \in U$ ,  $\forall t \geq T$ ,  $h \leq H$ ,  $\forall \mathbf{x}_0 \in D$

**Teorema 15** Suponga que  $S$  es una superficie deslizante para el sistema (3.1) y sea  $u_h^{sm}$  un control de variación en modo deslizante para  $S$ . Entonces  $\mathbf{x}_e$  es prácticamente estabilizado por  $\{u_h^{sm}\}$

### 5.4. Estabilización Asintótica

**Definición 48** Sea  $\mathbf{x}_e$  es un estado de equilibrio para el sistema 3.1 y  $u_h$  un control de alta variación de memoria  $m$  indexado por  $h \in \mathbb{R}^+$  Entonces,  $\mathbf{x}_e$  se dice que es asintóticamente estabilizado por el conjunto de controles  $\{u_h\}$  si:

- 1.- Las trayectorias de los estados  $\mathbf{x}(t, u_h, \mathbf{x}_0)$  correspondiente a  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in M$ ,  $u = u_h$  existe  $\forall t > 0$ .
- 2.- Dada cualquier vecindad compacta  $D$  de  $\mathbf{x}_e$ , existe  $H > 0$  tal que  $\forall h \leq H$ ,  $\mathbf{x}_0 \in D$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, u_h, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_e$$

y para cada vecindad de  $V$  de  $\mathbf{x}_e$  existe una vecindad de  $W$  de  $\mathbf{x}_e$  tal que los estados iniciales en  $W$  son dirigidos a  $\mathbf{x}_e$  sin dejar  $V$

## 5.5. Función S de Lyapunov

**Definición 49** Sea  $M$  una variedad y  $S$  una superficie deslizante para el sistema afín (3.1). La función  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  se dice que es una función S-Lyapunov en  $\mathbf{x}_e$  para el sistema infinitesimal  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x})$  si:

- i)  $V$  es una función continua y continuamente diferenciable sobre un conjunto abierto que contiene a  $S$  tal que la restricción  $V : S \cup \{\mathbf{x}_e\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función definida positiva en  $\mathbf{x}_e$  y  $L_{f^{eq}}V \leq 0$  sobre  $S$ , donde  $\dot{\mathbf{x}} = f^{eq}(\mathbf{x})$  es la dinámica equivalente sobre  $S$ .
- ii) Si  $\exists T_{\mathbf{x}_0} > 0 \quad \forall \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in S, \forall t \geq T_{\mathbf{x}_0}, \exists \delta > 0$  tal que:  $L_f V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \leq -\delta V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \quad \forall t \geq T_{\mathbf{x}_0}, \hat{f} \in F^\alpha$  donde  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  es el estado del sistema infinitesimal  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

**Teorema 16** Suponga que  $S$  es una superficie deslizante para el sistema (3.1) y sea  $u_h^{sm}$  un control asintótico de variación en modo deslizante para  $S$ . Entonces  $\mathbf{x}_e$  es asintóticamente estabilizado por  $\{u_h^{sm}\}$

## 5.6. Control Alta Variación Homogéneo

**Definición 50** Un campo vector  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  sobre  $\mathbb{R}^n$  se dice homogéneo de grado  $\tau$  con respecto a la dilatación  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  si  $\forall \epsilon > 0$ :

$$f_i(\epsilon^{r_1}x_1, \epsilon^{r_2}x_2, \dots, \epsilon^{r_n}x_n) = \epsilon^{\tau+r_i} f_i(\mathbf{x}) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.2)$$

**Definición 51** Una función  $\phi$  sobre  $\mathbb{R}^n$  se dice que es una función homogénea de grado  $\tau$  con respecto a la dilatación  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  si  $\forall \epsilon > 0$ :

$$\phi(\epsilon^{r_1}x_1, \epsilon^{r_2}x_2, \dots, \epsilon^{r_n}x_n) = \epsilon^\tau \phi(\mathbf{x}) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.3)$$

**Definición 52** Un control de alta variación deslizante  $u_h^{sm}$  para el sistema (3.1) con  $M = \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_e = 0$ , es llamado control de alta variación deslizante homogéneo con respecto a la dilatación  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ , si sobre  $M \setminus M_0$ , los campos vectores  $f$  y  $u_h^{sm} g_i, i = 1, \dots, l$  son homogéneos de grado 0 con respecto  $(r_1, r_2, \dots, r_n), \forall h > 0$

**Definición 53** La superficie deslizante  $S$  se dice superficie deslizante homogénea para el sistema (3.1) con respecto a la dilatación  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  si  $\forall \epsilon > 0, \mathbf{x} \in S$  implica  $\epsilon^\tau \mathbf{x} \in S$

**Teorema 17** Suponga que  $S$  es una superficie deslizante homogénea,  $V$  una función S-Lyapunov homogénea, y  $u_h^{sm}$  un control de alta variación deslizante homogéneo para el sistema (3.1). Entonces  $\mathbf{x}_e = 0$  es estabilizado asintóticamente por  $\{u_h^{sm}\}$

## 5.7 Aplicación del Control de Alta Variación a Sistemas Afines

Los siguientes sistemas afines son tomados principalmente de la referencia [1] efectuándose cambios en los coeficientes de los sistemas infinitesimales y se proponen otros controles que no dependen de la función signo, esto con la finalidad de permitir mostrar más claramente como el control de alta variación actúa bajo una tasa de conmutación alta en intervalos de longitud  $h$ . Se muestra también como bajo este esquema, es posible diseñar el control estabilizante sobre variedades deslizantes, en las cuales no están en el ámbito de los modos deslizantes estándar. El sistema del ejemplo 20 fue tomado de [2] para mostrar como se puede usar en conjunto la técnica de Linealización por retroalimentación de estados y el control de alta variación.

### 5.7.1. Doble Integrador

**Ejemplo 16** Considere el doble integrador descrito por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde los campos vectores  $f, g$  del sistema están claramente dados por  $f^T(\mathbf{x}) = (x_2 \ 0)^T$   $g^T(\mathbf{x}) = (0 \ 1)^T = \frac{\partial}{\partial x_2}$ . Es posible por medio del uso del control por modos deslizantes estabilizar dicho sistema en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e = (0 \ 0)^T$ . En efecto, si elegimos la superficie estándar de deslizamiento  $s(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$  (ver figura 5.2) tendremos que cuando  $s(\mathbf{x}) = 0$  implica  $x_1 + x_2 = 0$  y esto es, si y solo si  $\dot{x}_1 = -x_1$  y así la dinámica del modo deslizante es estable. La elección del control puede realizarse por medio del control equivalente. Haciendo uso de la derivada de la superficie obtenemos:  $\dot{s} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2 + u_{Eq} = 0$  lo cual implica  $u_{Eq} = -x_2$ . Así es posible proponer la ley de control  $u = u_{Eq} - K \text{sign}(s)$  con  $K > 0$ . Podemos ver fácilmente que este diseño con modos deslizantes es estable. Sea la función de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}s^2$  entonces tendremos  $\dot{V} = s\dot{s} = s(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = s(x_2 + u) = s(-K \text{sign}(s)) = -K|s| < 0$ . La respuesta de dicho sistema se muestra en la figura 5.1

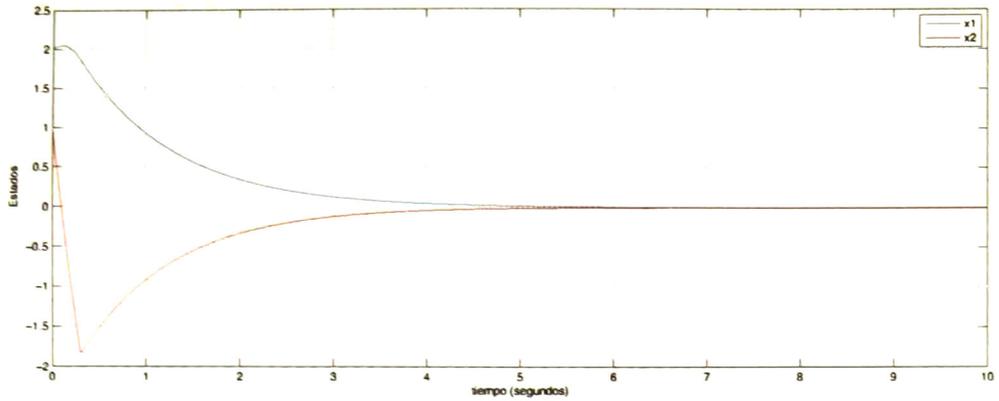


Figura 5.1: Estabilización del sistema doble integrador

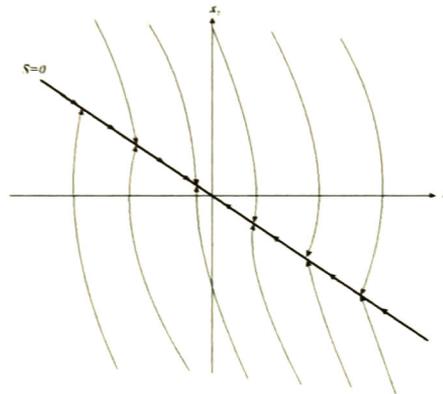


Figura 5.2: Superficie deslizante  $s(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$

Sean las funciones de variable real  $\alpha_{i,j}^p$  definidas como  $\alpha_{i,j}^p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $p \in \{1, 0\}$  expresadas explícitamente por  $\alpha_{0,1}^0 = \alpha_0$ ,  $\alpha_{1,1}^0 = \alpha_0$ ,  $\alpha_{0,1}^1 = -4\alpha_1$ ,  $\alpha_{0,1}^1 = 4\alpha_1$  y considere el control de alta variación de memoria 2 definido por la ley de conmutación:

Para  $k = 0$ ,  $t \in [0, h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{x}_0) + 4\alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{x}_0) - 4\alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

Para  $k = n$ ,  $t \in [nh, (n+1)h]$ :

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}(nh), t - nh) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{x}(nh)) + 4\alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{x}(nh)) - 4\alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

Para este sistema lineal es posible calcular el estado del sistema en el tiempo  $t = h$  por medio de la formula de Cauchy:

$$\mathbf{x}(h) = e^{hA}\mathbf{x}_0 + \int_0^h e^{(h-\tau)A}b u(\tau) d\tau$$

Separando la integral en las regiones de integración  $t \in [0, h/2]$  y  $t \in [h/2, h]$  tendremos:

$$\mathbf{x}(h) = e^{hA}\mathbf{x}_0 + \int_0^{h/2} e^{(h-\tau)A}b(\alpha_0(\mathbf{x}_0) + 4\alpha_1(\mathbf{x}_0)/h) d\tau + \int_{h/2}^h e^{(h-\tau)A}b(\alpha_0(\mathbf{x}_0) - 4\alpha_1(\mathbf{x}_0)/h) d\tau$$

$$\mathbf{x}(h) = e^{hA}\mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \alpha_0(\mathbf{x}_0)h^2/2 + \alpha_1(\mathbf{x}_0)h \\ \alpha_0(\mathbf{x}_0)h \end{bmatrix}$$

los brackets de Lie correspondientes para el sistema (5.4) estan dados por:

$$ad_g f = \frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_g^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y para  $k \geq 3$  tendremos para este simple sistema  $ad_g^k f = 0$ . Aplicando la formula de Campbell Baker Hausdorff obtenemos una expresi3n para el estado resultante  $\mathbf{x}(h)$  para el sistema (5.4) con la ley de control  $u_h^{sm}$  con condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  de la forma  $\mathbf{x}(h) = q_h^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{\mathbf{x}_0}(p)$  denota la curva integral a travez de  $p$  para el campo vector suave sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus S$  definido como:

$$q^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \alpha_0(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}) + \alpha_1(\mathbf{x}_0)ad_g f(\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

Observamos que la curva integral de  $q^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$  no es general una trayectoria alcanzable por el sistema. El sistema infinitesimal correspondiente a la inclusi3n diferencial  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x})$  esta dado por la expresi3n:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \alpha_1(\mathbf{x})ad_g f(\mathbf{x}) + \alpha_0 g(\mathbf{x}) \quad (5.6)$$

En coordenadas locales el sistema (5.6) lo podemos expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \alpha_1(\mathbf{x}(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha_0(\mathbf{x}(t)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Es claro que, para este simple sistema  $\beta_1(\alpha_1) = \alpha_1(\mathbf{x})$ ,  $\gamma_1(\alpha_0) = \alpha_0(\mathbf{x})$ . Para la superficie deslizante  $s_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$  cuando  $s = 0$  tendremos  $x_2 = -x_1$  lo que implica  $\dot{x}_1 = \alpha_1 - x_1$ . Eligiendo  $\alpha_1 = -\alpha x_1$ ,  $\alpha > -1$  la dinámica para  $x_1$  esta gobernada por la ecuación diferencial  $\dot{x}_1 = -(\alpha + 1)x_1$ . La elección del control  $\alpha_0$  se describe a continuación. Partiendo de  $\dot{s} = 0$  encontramos el control equivalente  $\dot{s} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2 + \alpha_1 + (\alpha_0)_{E_q} = 0$  entonces  $(\alpha_0)_{E_q} = -(x_2 + \alpha_1)$ , de esta forma obtenemos  $\alpha_0 = (\alpha_0)_{E_q} - K\|\mathbf{x}\|sign(s)$  con  $K > 0$ . Para la función de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}s^2$  tendremos  $\dot{V} = s\dot{s} = s(x_2 + \alpha_1 + (\alpha_0)_{E_q}) = s(x_2 + \alpha_1 - (x_2 + \alpha_1) - K\|\mathbf{x}\|sign(s)) = -s(K\|\mathbf{x}\|sign(s)) = -K\|\mathbf{x}\||s| < 0$  si y solo si  $K > 0$ . De esta forma el modo deslizante es estable y la condición de alcanzabilidad es satisfecha. Los resultados de la simulación para el sistema infinitesimal (5.7) se muestran en la figura 5.3. Las graficas 5.4 muestran la simulación del sistema (5.4) con la aplicación del control de alta variación sobre la variedad  $s(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ , con los valores  $\alpha = 2$ ,  $K = 2$ ,  $h = 0.1$ ,  $\mathbf{x}(0) = (2, 1)$ , con la técnica de Runge Kutta con un tamaño de paso de 0.001.

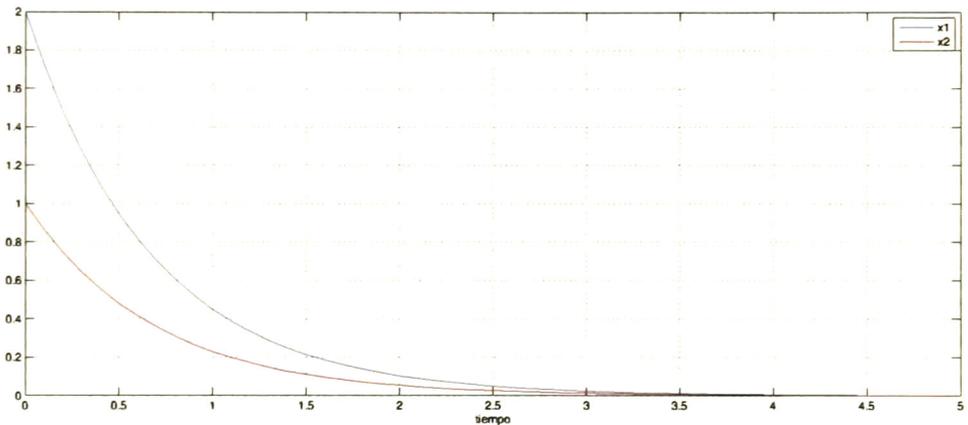


Figura 5.3: Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie  $s_1$

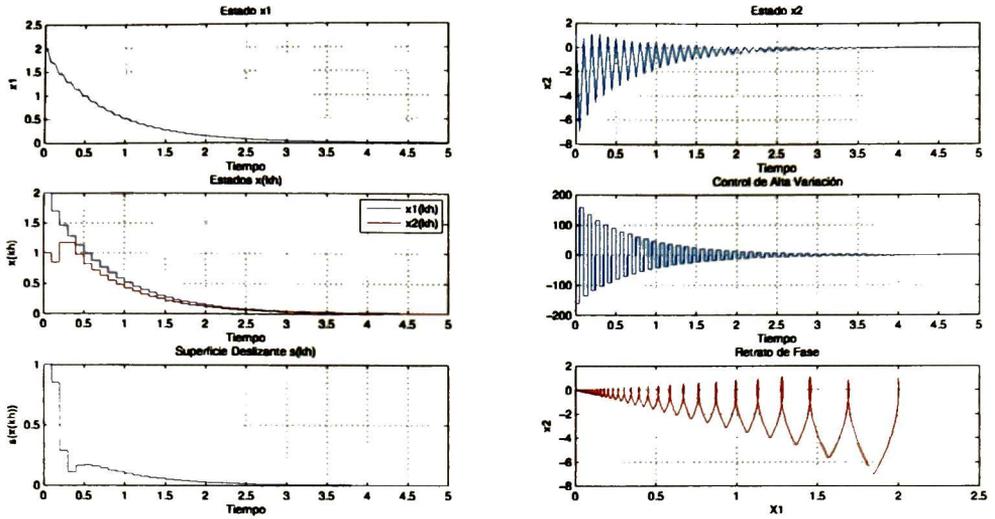


Figura 5.4: Control de alta variación diseñado con la superficie  $s_1$

Si ahora consideramos la superficie deslizante  $s_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$  para diseñar el control que estabilice al sistema (5.4) dentro del marco de la teoría de los modos deslizantes estandar observamos que cuando  $s_2(\mathbf{x}) = 0$  implica que  $\dot{x}_1 = x_1$  la cual es una dinámica inestable y por ello no es posible estabilizar el sistema en esta superficie. Sin embargo por medio de la técnica de alta variación de control es posible desarrollar un control de estabilización de estados que utilice esta superficie como a continuación se detalla. En efecto, cuando  $s_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$  tenemos la dinámica  $\dot{x}_1 = \alpha_1 + x_1$ . Eligiendo  $\alpha_1 = -2x_1$  tendremos  $\dot{x}_1 = -x_1$ . Como  $\dot{s} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2 + \alpha_1 - (\alpha_0)_{Eq} = 0$ , de esta forma el control equivalente es  $(\alpha_0)_{Eq} = x_2 + \alpha_1$ . Finalmente la ley de control  $\alpha_0$  esta dada por la expresión  $\alpha_0 = (\alpha_0)_{Eq} - K\|\mathbf{x}\|sign(s)$ . De manera análoga que en el caso anterior para la función de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}s^2$  tendremos  $\dot{V} = s\dot{s} = s(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = s(x_2 + \alpha_1 - (x_2 + \alpha_1) + K\|\mathbf{x}\|sign(s)) = K\|\mathbf{x}\||s| < 0$  esto es si y solo si  $K < 0$ . El resultado de la simulación para el sistema infinitesimal (5.7) se muestra en la figura 5.5. La simulación del sistema (5.4) bajo el control de alta variación se expone en la figura 5.6 con los mismos valores de los parámetros y condiciones iniciales del caso anterior.

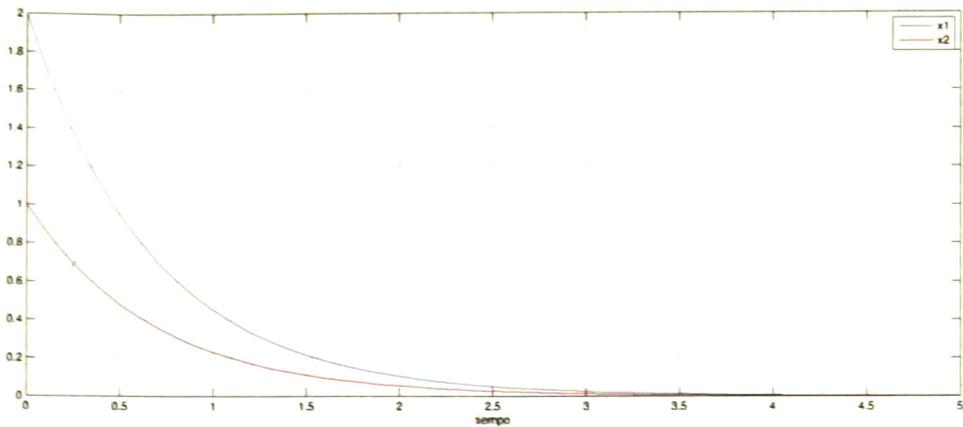


Figura 5.5: Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie  $s_2$

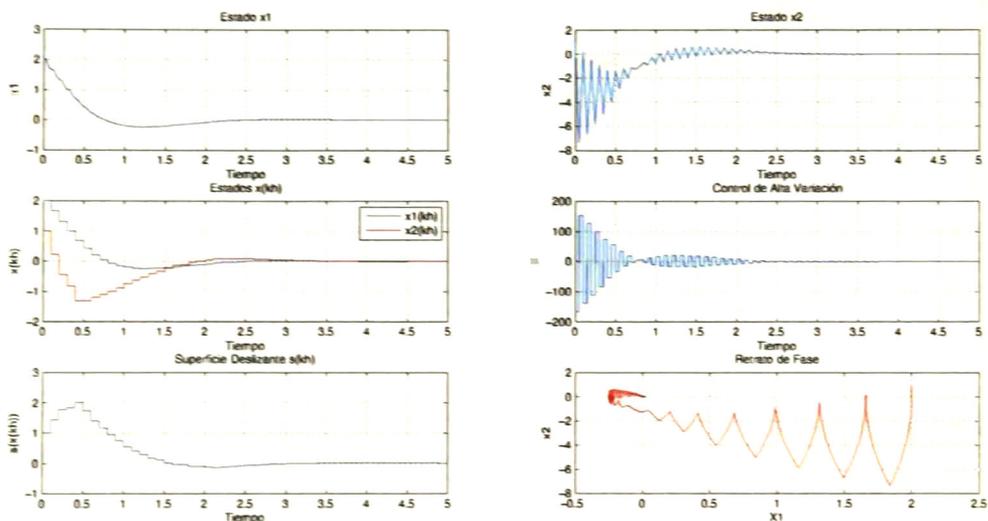


Figura 5.6: Control de alta variación diseñado con la superficie  $s_2$

Se observa que las trayectorias correspondientes en el control de alta variación son concatenaciones de curvas integrales suaves, por lo tanto, no es necesario estudiarlas como soluciones

de una inclusión diferencial. En el ejemplo anterior las funciones  $\alpha_{i,j}^0$  son acotadas sobre una vecindad del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  y  $\alpha_{i,j}^1 \rightarrow 0$  conforme  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_e$ . Como una extensión al presente ejemplo propuesto originalmente en [1] se exploró la alternativa de generar control de alta variación independientemente del uso de la función signo. Por ejemplo las funciones  $\alpha_{0,1}^0 = \alpha_0$ ,  $\alpha_{1,1}^0 = \alpha_0$ ,  $\alpha_{0,1}^1 = -\alpha_1$ ,  $\alpha_{1,1}^1 = \alpha_1$  definidas por  $\alpha_0 = -x_2$ ,  $\alpha_1 = -x_2 - 5x_1$  cumplen con dicho proposito. Los resultados de la simulación se exponen en la figura 5.7 usando el método de integración de Runge Kutta con un tamaño de paso de 0.001

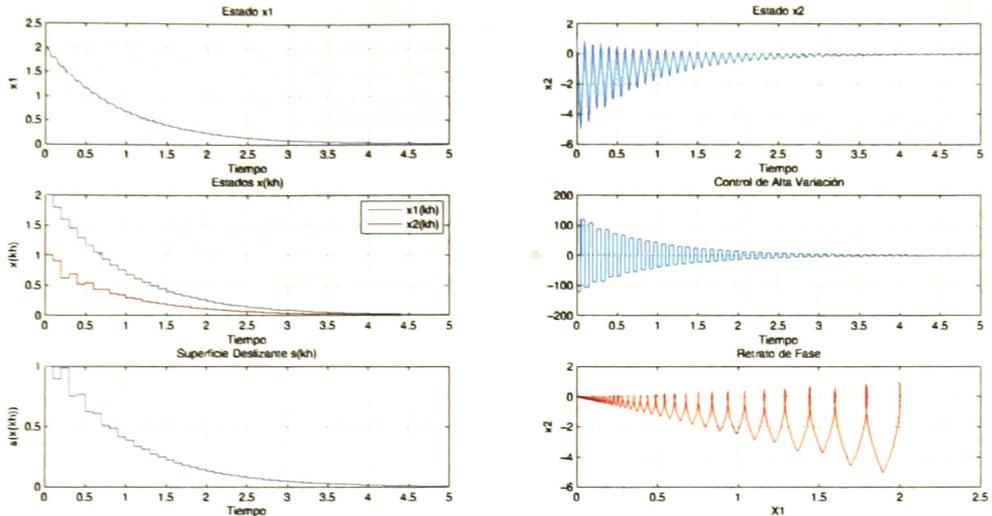


Figura 5.7: Control de alta variación generado por funciones continuas

### 5.7.2. Sistema no lineal con terminos cuadráticos

**Ejemplo 17** Considere el sistema no lineal afín con terminos cuadráticos descrito en coordenadas locales por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 - x_2^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Es claro que  $\mathbf{x} \in M = \mathbb{R}^3$  y el punto de equilibrio es  $\mathbf{x}_e = (0, 0, 0)$ . Los campos vectores asociados a este sistema son  $f^T(\mathbf{x}) = (0 \quad x_1 \quad x_1^2 - x_2^2) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_1^2 - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_3}$ ,  $g^T(\mathbf{x}) = (1 \quad 0 \quad 0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Tal como se señala en [1], este sistema no lineal afín tiene la

característica de que no satisface las condiciones necesarias para el diseño de un control estabilizante continuo [13]. La superficie deslizante de codimensión 1 descrita por  $s = x_1$  es transversal al campo vector  $g(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Sin embargo, cuando  $s = 0$ , las dinámicas resultantes son inestables ya que tendremos  $\dot{x}_2 = 0$ ,  $\dot{x}_3 = -x_2^2$ . Se considera la superficie deslizante de codimensión 2 definida como  $s_3(\mathbf{x}) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 < 0\}$ . Para obtener un control de alta variación de memoria  $m = 2$  se consideran las funciones suaves  $\alpha_{i,j}^p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:  $\alpha_{1,1}^0 = \alpha_0$ ,  $\alpha_{2,1}^0 = \alpha_0$ ,  $\alpha_{1,1}^1 = -\alpha_1$ ,  $\alpha_{2,1}^1 = \alpha_1$ , donde  $\alpha_0$  es una función acotada sobre una vecindad del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  y la aplicación  $\alpha_1 \rightarrow 0$  conforme  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_e$ . La ley de control de alta variación estará conformada por la siguiente función de conmutación:  $t \in [nh, (n+1)h]$  y  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}(kh), t - kh) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{x}(kh)) + \alpha_1(\mathbf{x}(kh))/h, & \text{si } kh \leq t < (2k+1)h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{x}(kh)) - \alpha_1(\mathbf{x}(kh))/h, & \text{si } \frac{(2k+1)h}{2} \leq t < (k+1)h \end{cases}$$

El cálculo de los brackets de Lie  $ad_g^k f$  para los campos vectores  $f, g$  del sistema (5.8) se exhiben a continuación:

$$\begin{aligned} ad_g f &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \\ ad_g^2 f &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ ad_g^3 f &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando la formula de Campbell Baker Haussdorf obtenemos una expresión del estado del sistema 5.8 en el tiempo  $t = h$  con  $u = u_h^{sm}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  de la forma:  $\mathbf{x}(h, u_h^{sm}, \mathbf{x}_0) = q_h^{h, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{h, \mathbf{x}_0}(p)$  denota la curva integral que pasa por  $p$  para el campo vector infinitesimal  $q_t^{h, \mathbf{x}_0}(p)$ . En el presente trabajo se propone un campo vector infinitesimal con coeficientes numéricos diferentes al que se indica en [1] el cual esta dado por la expresión:

$$f^\alpha(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \beta_1(\alpha(\mathbf{x})) f^1(\mathbf{x}) + \beta_2(\alpha(\mathbf{x})) f^2(\mathbf{x}) + \gamma_1(\alpha(\mathbf{x})) g(\mathbf{x})$$

donde:  $\beta_1(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_1$ ,  $\beta_2(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_1^2$  y  $\gamma_1(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_0$ . La representación en coordenadas locales del sistema infinitesimal es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_0 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha_1 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 - x_2^2 + 2\alpha_1 x_1 + \alpha_1^2\end{aligned}\quad (5.9)$$

Eligiremos los controles  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  tal que las soluciones del sistema infinitesimal (5.9) existan para  $t \geq 0$ . Tomando los controles  $\alpha_0(\mathbf{x}) = -K \text{sign}(x_1)$ ,  $\alpha_1(\mathbf{x}) = -(7/2|x_3|)^{1/2} \text{sign}(x_2 x_3)$ . La elección de  $\alpha_0$  asegura que  $x_1$  llegue a cero en tiempo finito. Cuando  $x_1 = 0$  la dinámica residual del sistema esta dada por el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \alpha_1 \\ \dot{x}_3 &= -x_2^2 + \alpha_1^2\end{aligned}\quad (5.10)$$

La elección de  $\alpha_1(\mathbf{x}) = -(7/2|x_3|)^{1/2} \text{sign}(x_2 x_3)$  garantiza que la dinámica del sistema (5.10) sea estable. Los resultados de la simulación del sistema infinitesimal (5.9) se muestran en la figura 5.8 con el valor de ganancia  $K = 2$ , y condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (1, 2, 3)$

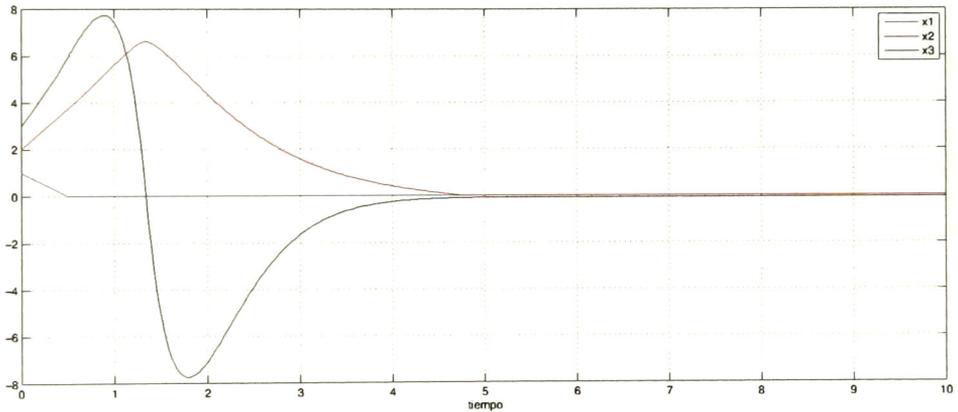


Figura 5.8: Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie  $s_3$

La figura 5.9 reproduce la simulación obtenida al aplicar el control de alta variación al sistema (5.8) usando el método de integración de Runge Kutta con un tamaño de paso de 0.001. Para el control se tomó como longitud del intervalo de  $h = 0.05$  con condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)$

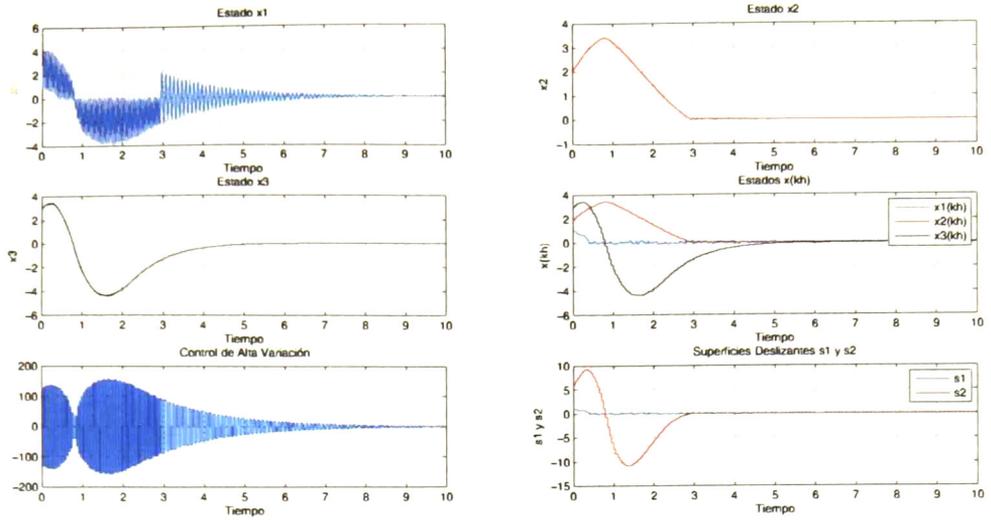


Figura 5.9: Control de alta variación diseñado con la superficie deslizante  $s_3$

para la dilatación  $r = (1, 1, 2)$  si consideramos los controles  $\alpha_0(\mathbf{x}) = -K\omega(\mathbf{x}) \text{sign}(x_1)$ , donde  $\omega(\mathbf{x}) = |x_1| + |x_2| + |x_3|^{1/3}$  y  $\alpha_1(\mathbf{x}) = (2|x_3|)^{1/2} \text{sign}(x_2x_3)$ . Entonces los campos vectores  $f$  y  $u_h^{sm}$  son homogéneos de grado 0 con respecto a la dilatación  $r$  y la superficie deslizante es homogénea para  $(a, b, c) \in s$ . La función De Lyapunov  $V(\mathbf{x}) = |x_3|$  es una función de S-Lyapunov homogénea de grado 2 con respecto a la dilatación  $r$  (ver figura 5.11). La figura 5.10 muestra el resultado de la simulación del sistema (5.8) donde  $h = 0.05$ ,  $K = 5$ , con condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (7, -1, 5)$  con el método de integración de Runge Kutta con un tamaño de paso 0.001

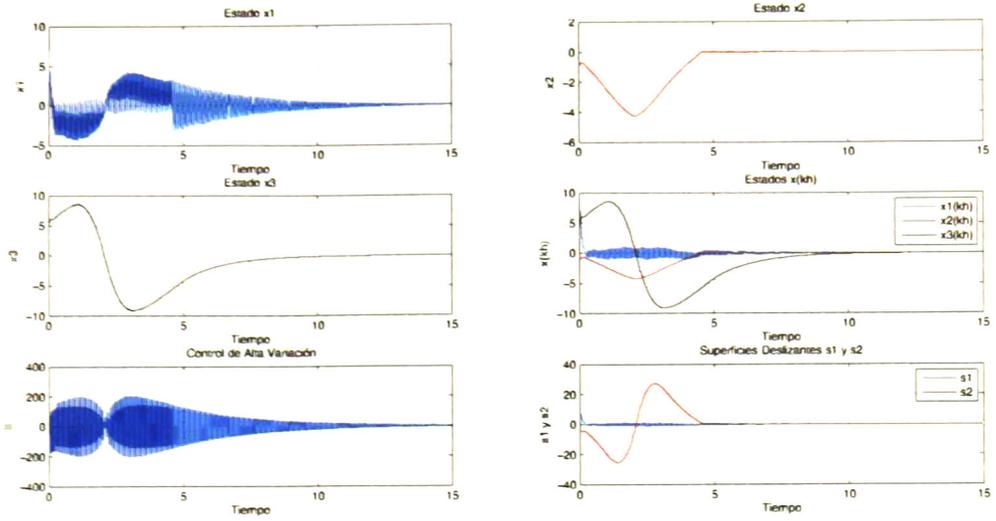


Figura 5.10: Control de alta variación diseñado con la dilatación  $\tau$

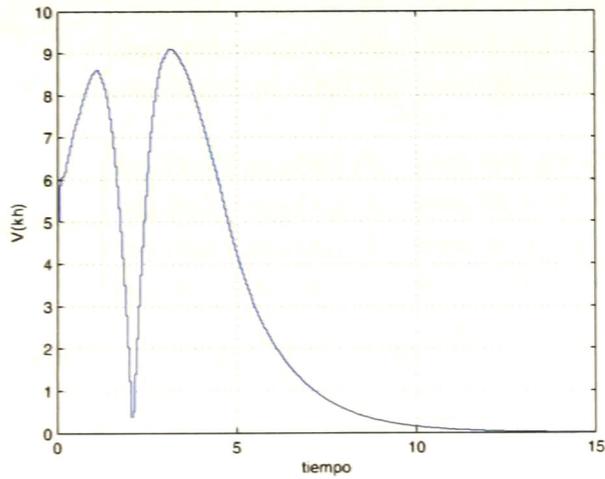


Figura 5.11: Función S-Lyapunov  $V(x) = |x_3|$

### 5.7.3. Sistema no lineal con multiples entradas

**Ejemplo 18** Sobre la variedad  $M = \mathbb{R}^4$  consideraremos el siguiente sistema afin no lineal con dos entradas descrito en terminos de las cordenadas locales como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_4 &= x_1^2 - x_2^2\end{aligned}\tag{5.11}$$

con el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e = (0, 0, 0, 0)$ . Como se menciona en [1] la superficie deslizante de codimensión 2 definida por la expresión  $S_4 = \{s_1(\mathbf{x}) = 0\} \cap \{s_2(\mathbf{x}) = 0\}$  donde  $s_1(\mathbf{x}) = x_1 + (x_3)^{1/2}$  y  $s_2(\mathbf{x}) = x_2 + (|x_3|)^{1/2}$  es transversal al campo vector controlado, sin embargo la dinámica sobre la superficie no permite llevar los estados del sistema 5.11 al punto de equilibrio. En efecto, si  $s_1(\mathbf{x}) = 0$  y  $s_2(\mathbf{x}) = 0$  implica  $x_1 = -|x_3|^{1/2}$  y  $x_2 = \text{sign}(x_3) |x_3|^{1/2}$  entonces  $\dot{x}_3 = x_1 x_2 = -\text{sign}(x_3) |x_3|$ . Si  $x_3 > 0$  tenemos  $\dot{x}_3 = -x_3$  y tambien  $\dot{x}_4 = x_1^2 + x_2^2 = x_3 - |x_3| = 0$ . Para llevar los estados de este sistema al punto de equilibrio considere el control de variación  $u_h^{sm} = (u_h^1, u_h^2)$  definido como:

Para  $k = 0$ ,  $t \in [0, h]$  aplicamos el control  $u_h^1$  en  $[0, h/2]$  con  $u_h^2 = 0$  y después aplicamos  $u_h^2$  en  $[h/2, h]$  con  $u_h^1 = 0$ . La ley de control de conmutación estara dada por:

$$u_h^1(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} \alpha_{0.1}(\mathbf{x}_0) + \alpha_{1.1}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } 0 \leq t < h/8 \\ \alpha_{0.1}(\mathbf{x}_0) - \alpha_{1.1}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } h/8 \leq t < h/4 \\ \alpha_{0.1}(\mathbf{x}_0) - \alpha_{1.1}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } h/4 \leq t < 3h/8 \\ \alpha_{0.1}(\mathbf{x}_0) + \alpha_{1.1}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } 3h/8 \leq t < h/2 \end{cases}$$

$$u_h^2(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} \alpha_{0.2}(\mathbf{x}_0) + \alpha_{1.2}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } h/2 \leq t < 5h/8 \\ \alpha_{0.2}(\mathbf{x}_0) - \alpha_{1.2}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } 5h/8 \leq t < 3h/4 \\ \alpha_{0.2}(\mathbf{x}_0) - \alpha_{1.2}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } 3h/4 \leq t < 7h/8 \\ \alpha_{0.2}(\mathbf{x}_0) + \alpha_{1.2}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } 7h/8 \leq t < h \end{cases}$$

De manera similar para  $k = n$ ,  $t \in [nh, (n+1)h]$  tendremos:

$$u_h^1(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} \alpha_{0.1}(\mathbf{x}_0) + \alpha_{1.1}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } nh \leq t < (h/8) + nh \\ \alpha_{0.1}(\mathbf{x}_0) - \alpha_{1.1}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } (h/8) + nh \leq t < (h/4) + nh \\ \alpha_{0.1}(\mathbf{x}_0) - \alpha_{1.1}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } (h/4) + nh \leq t < (3h/8) + nh \\ \alpha_{0.1}(\mathbf{x}_0) + \alpha_{1.1}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } (3h/8) + nh \leq t < (h/2) + nh \end{cases}$$

$$u_h^2(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} \alpha_{0,2}(\mathbf{x}_0) + \alpha_{1,2}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } (h/2) + nh \leq t < (5h/8) + nh \\ \alpha_{0,2}(\mathbf{x}_0) - \alpha_{1,2}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } (5h/8) + nh \leq t < (3h/4) + nh \\ \alpha_{0,2}(\mathbf{x}_0) - \alpha_{1,2}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } (3h/4) + nh \leq t < (7h/8) + nh \\ \alpha_{0,2}(\mathbf{x}_0) + \alpha_{1,2}(\mathbf{x}_0)/h, & \text{para } (7h/8) + nh \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

Los brackets de Lie construidos a partir de los campos vectores  $f, g_1, g_2$  del sistema (5.11) se muestran a continuación:

$$ad_{g_1} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$ad_{g_1}^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$ad_{g_2} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$ad_{g_2}^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la formula de Campbell Baker Haussdorf obtenemos una expresión del estado del sistema (5.11) en el tiempo  $t = h$  con  $u = u_h^{sm}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  de la forma:  $\mathbf{x}(h, u_h^{sm}, \mathbf{x}_0) = q_h^{h, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{h, \mathbf{x}_0}(p)$  denota la curva integral que pasa por  $p$ , para el campo vector infinitesimal  $q_t^{h, \mathbf{x}_0}(p)$ . Nuevamente se propone un campo vector infinitesimal con otros coeficientes al que se indica en [1] el cual esta dado por la expresión:

$$f^\alpha(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^2 \beta_i(\alpha(\mathbf{x})) f^i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^2 \gamma_i(\alpha(\mathbf{x})) g_i(x)$$

Donde:  $\beta_1(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_{1,1}^2$ ,  $\beta_2(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_{1,2}^2$ ,  $\gamma_1(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_{0,1}$ ,  $\gamma_2(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_{0,2}$  En terminos de las coordenadas locales la correspondiente inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x})$  o sistema infinitesimal esta dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_{0,1} \\ \dot{x}_2 &= \alpha_{0,2} \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_4 &= x_1^2 - x_2^2 + \alpha_{1,1}^2 - \alpha_{1,2}^2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Tomando  $\alpha_{0,1}(\mathbf{x}) = -KN(\mathbf{x}) \text{sign}(s_1)$ ,  $\alpha_{0,2}(\mathbf{x}) = -KN(\mathbf{x}) \text{sign}(s_2)$ , donde  $N(\mathbf{x}) = |x_1| + |x_2| + |x_3|^{1/2} + |x_4|^{1/2}$ ,  $\alpha_{1,1}(\mathbf{x}) = K|x_4|^{1/2}$  para  $x_4 < 0$  y 0 en el otro caso,  $\alpha_{1,2} = K|x_4|^{1/2}$  para  $x_4 > 0$  y  $\alpha_{1,2} = 0$  si  $x_4 < 0$ . El resultado de la simulación del sistema (5.12), se exhibe en la figura 5.12 con las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (1, 2, 3, 4)$ . En las figuras 5.13 y 5.14 se muestran los resultados de aplicar el control de alta variación al sistema (5.11) con  $h = 0.08$ ,  $K = 10$  y condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (-1, 2, -1, 3)$

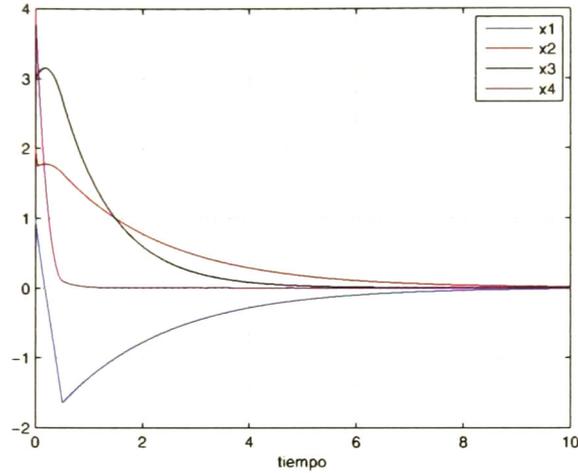


Figura 5.12: Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie  $s_1$  y  $s_2$

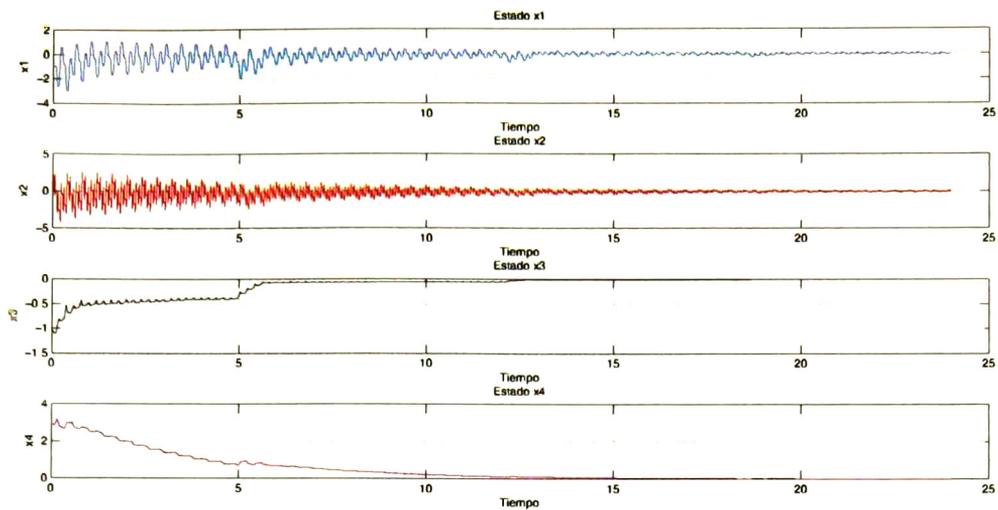


Figura 5.13: Control de alta variación

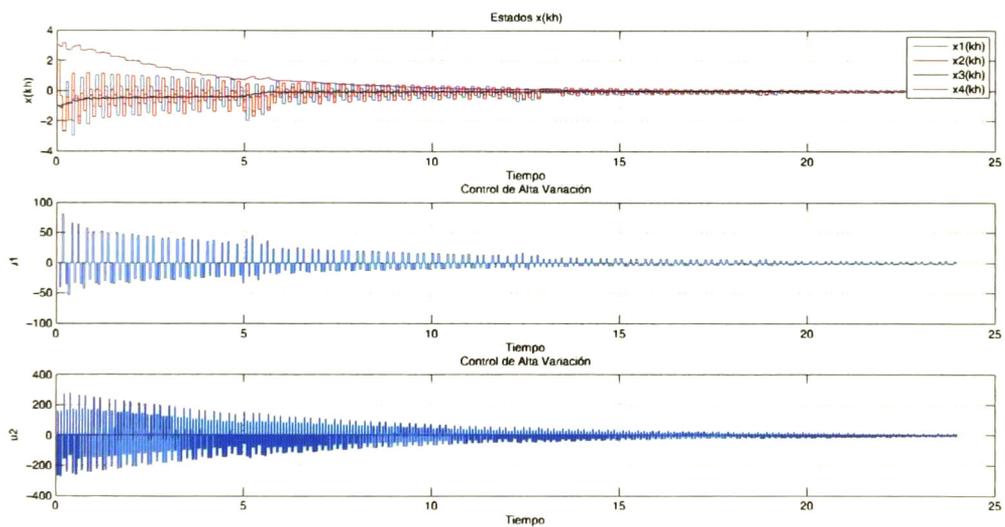


Figura 5.14: Control de alta variación

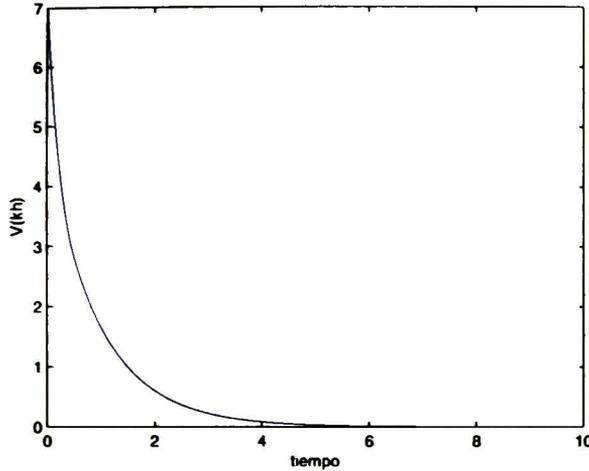


Figura 5.15: Función S-Lyapunov  $V(\mathbf{x}) = |x_3| + |x_4|$

#### 5.7.4. Sistema triangular

**Ejemplo 19** Considere el sistema no lineal en la forma triangular definido sobre la variedad  $M = \mathbb{R}^2$  descrito en coordenadas locales por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\tag{5.13}$$

Donde  $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ ,  $f^T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2^3 \ 0) = (x_1 + x_2^3) \frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $g^T(\mathbf{x}) = (0 \ 1) = \frac{\partial}{\partial x_2}$ . Tal como se menciona en [1] la superficie  $s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2^3 + 2x_1 = 0\}$  proporciona una dinámica estable en el régimen del modo deslizante a saber  $\dot{x}_1 = -x_1$ , pero en este caso el campo vector controlado o de entrada no es transversal a la superficie deslizante en el origen. Esta pérdida de transversabilidad se traduce en un esfuerzo muy grande por parte del controlador para mantener los estados en la superficie. Por otro lado el campo vector  $g^T(\mathbf{x}) = (0 \ 1) = \frac{\partial}{\partial x_2}$  es transversal a la superficie  $s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$  sin embargo tiene un movimiento deslizante inestable  $\dot{x}_1 = x_1$ . La aplicación del control de alta variación permitirá modificar la dinámica deslizante. Considere el control de alta variación dado por la siguiente ley de conmutación: Para  $k = 0$ ,  $t \in [0, h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{x}_0) + \alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{x}_0) - \alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

y para  $k = n$ ,  $t \in [nh, (n+1)h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}(nh), t - nh) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{x}(nh)) + \alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{x}(nh)) - \alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

Los brackets de Lie calculados a partir de los campos vectores  $f, g$  asociados al sistema (5.13) se exhiben a continuación:

$$\begin{aligned} ad_g f &= \begin{pmatrix} 1 & 3x_2^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ ad_g^2 f &= \begin{pmatrix} 0 & 6x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ ad_g^3 f &= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Claramente  $ad_g^k f = 0 \quad \forall k \geq 4$ . Nuevamente aplicando la formula de Campbell Baker Hausdorff obtenemos una expresión para el estado del sistema 5.13 de la forma  $\mathbf{x}(h, u_h^{sm}, \mathbf{x}_0) = q_h^{h, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{h, \mathbf{x}_0}(p)$  denota la curva integral del campo vector  $q^{h, \mathbf{x}_0}$ . El campo vector infinitesimal esta dado por la expresión:

$$f^\alpha = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^q \beta_i(\alpha(\mathbf{x}_0)) f^i(\mathbf{x}) + \gamma_1(\alpha(\mathbf{x}_0)) g_1(\mathbf{x}) + r^{h, \mathbf{x}_0}$$

donde:  $\beta_1(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_1$ ,  $\beta_2(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_1^2/2$ ,  $\beta_3(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_1^3/6$ ,  $\gamma_1(\alpha(\mathbf{x})) = \alpha_0$ . La correspondiente inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  o sistema infinitesimal, en coordenadas locales esta dado por las expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2^3 + 3\alpha_1 x_2^2 + 3\alpha_1^2 x_2 + \alpha_1^3 \\ \dot{x}_2 &= \alpha_0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Observese que este sistema infinitesimal difiere ligeramente al propuesto en [1]. Eligiendo  $\alpha_0 = -(|x_2| + |x_1|^{1/3}) \text{sign}(x_2)$  tendremos que  $x_2 \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . La dinámica reducida del sistema queda  $\dot{x}_1 = x_1 + \alpha_1^3$ . Tomando  $\alpha_1 = (-2x_1)^{1/3}$  aseguramos una dinámica estable para el estado  $x_1$ . Para la función de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}s^2$  tendremos  $\dot{V} = s\dot{s} = -s(|x_2| + |x_1|^{1/3}) \text{sign}(x_2)$  si y solo si  $-|x_2||s| - |x_1|^{1/3}|s| < 0$ . Observese que  $f, u_h^{sm}g$  son homogéneos de grado cero con respecto a la dilatación  $r = (1, 1/3)$ . En la figura 5.16 se muestra el resultado de la simulación del sistema infinitesimal (5.14) con las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (1, -2)$ . Finalmente en la figura 5.17 se exhibe el resultado de la simulación del sistema (5.13) con  $h = 0.05$ ,  $\mathbf{x}(0) = (1, 2)$  usando el método de integración de Runge-Kutta con un tamaño de paso fijo de 0.001.

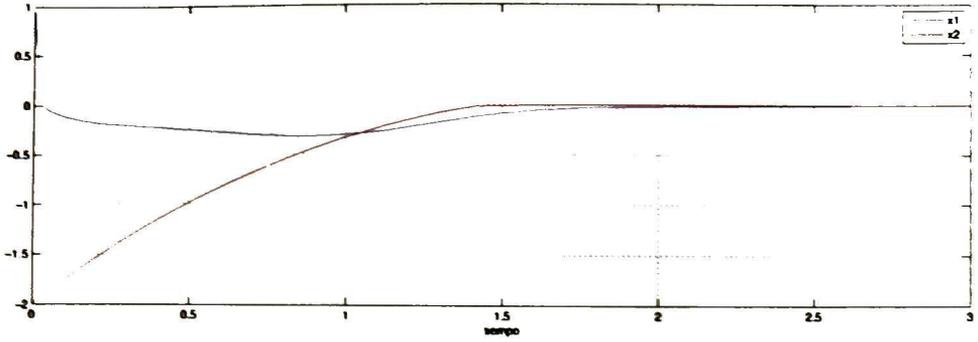


Figura 5.16: Estabilización del sistema infinitesimal sobre la superficie  $\mu = \tau_2$

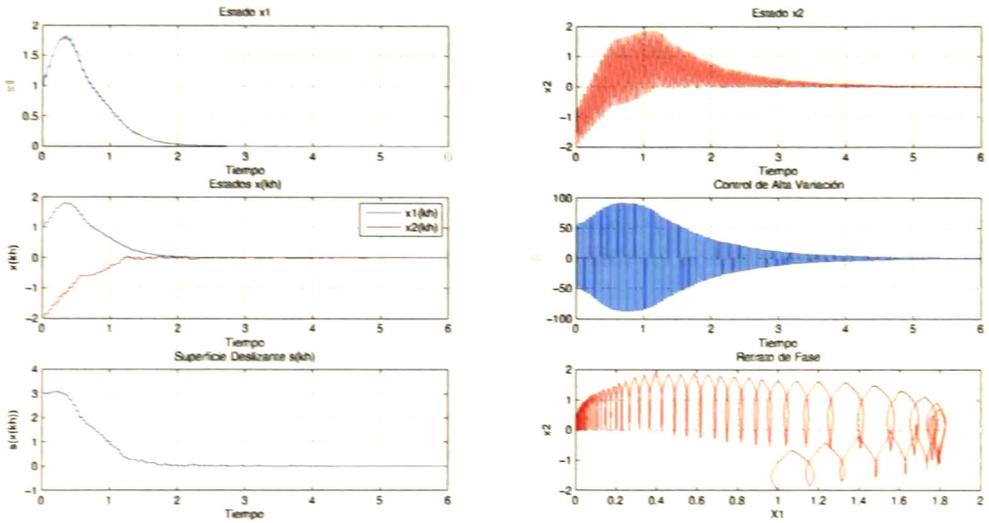


Figura 5.17: Control de alta variación

Para el sistema (5.13) es posible seleccionar otros controladores  $\alpha_{i,j}$  para generar el control de alta variación y cambiar el desempeño del sistema. La figura 5.18 muestra el resultado de la simulación con  $\alpha_0 = -35x_2$ ,  $\alpha_1 = (-2x_1)^{1/3}$  y  $h = 0.05$

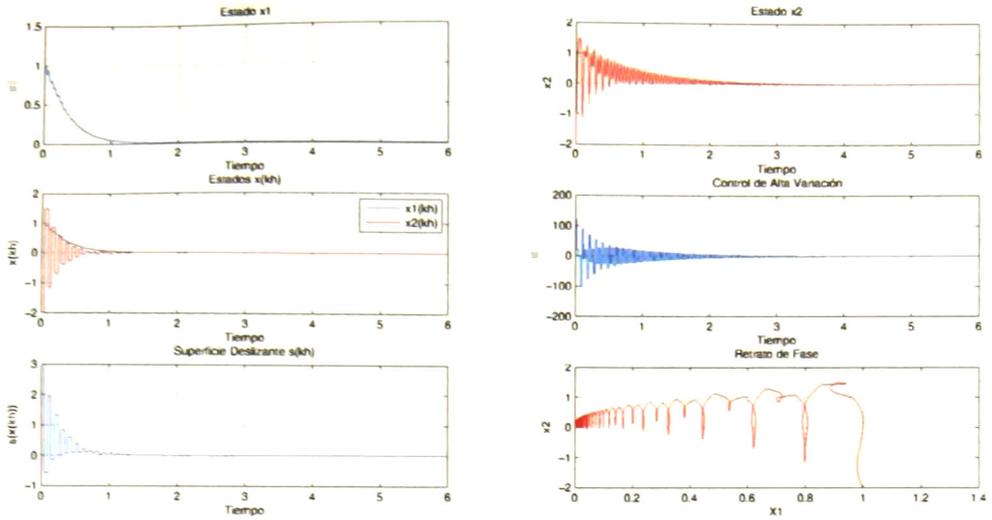


Figura 5.18: Control de alta variación

### 5.7.5. Control Variacional y Linealización por Retroalimentación de Estados

En este ejemplo se mostrará como puede combinarse la técnica de control de alta variación con la linealización por retroalimentación de estados.

**Ejemplo 20** Sea el sistema no lineal definido como:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= e^{x_2} u \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 + e^{x_2} u \\
 \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 \\
 y &= x_3
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
 g(\mathbf{x}) &= e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \\
 h(\mathbf{x}) &= x_3
 \end{aligned}$$

Las derivadas de Lie para este sistema son:

$$\begin{aligned}
 L_g L_f^0 h(\mathbf{x}) &= 0 \\
 L_g L_f h(\mathbf{x}) &= 0 \\
 L_g L_f^2 h(\mathbf{x}) &= -(1 + 2x_2) e^{x_2} \\
 L_f h(\mathbf{x}) &= x_1 - x_2 \\
 L_f^2 h(\mathbf{x}) &= -(x_1 + x_2^2) \\
 L_f^3 h(\mathbf{x}) &= -2x_2 (x_1 + x_2^2)
 \end{aligned}$$

claramente observamos que el grado relativo del sistema es  $n = 3$  en cada punto de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  que cumpla  $1 + 2x_2 \neq 0$ . El difeomorfismo que proporciona el cambio de coordenadas esta descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \Phi_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) = x_3 \\
 z_2 &= \Phi_2(\mathbf{x}) = L_f h(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \\
 z_3 &= \Phi_3(\mathbf{x}) = L_f^2 h(\mathbf{x}) = -(x_1 + x_2^2)
 \end{aligned}$$

La siguiente ley de control:

$$u = -\frac{L_f^3 h(\mathbf{x})}{L_g L_f^2 h(\mathbf{x})} + \frac{1}{L_g L_f^2 h(\mathbf{x})} v = -\frac{2x_2 (x_1 + x_2^2) + v}{(1 + 2x_2) e^{x_2}}$$

permite llevar el sistema en la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= v
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Considere el control de alta variación dado por la siguiente ley de conmutación:

Para  $k = 0, t \in [0, h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{z}_0, t) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{z}_0) + \alpha_1(\mathbf{z}_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{z}_0) - \alpha_1(\mathbf{z}_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

y para  $k = n, t \in [nh, (n+1)h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{z}(nh), t - nh) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{z}(nh)) + \alpha_1(\mathbf{z}(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{z}(nh)) - \alpha_1(\mathbf{z}(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

El bracket de Lie calculado a partir de los campos vectores  $f(z), g(z)$  asociados al sistema (5.16) es:

$$ad_g f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tendremos que  $ad_g^k f = 0 \quad \forall k \geq 2$ . Aplicando la formula de Campbell Baker Hausdorff obtenemos una expresión para el estado del sistema (5.16) de la forma  $\mathbf{z}(h, u_h^{sm}, \mathbf{z}_0) = q_h^{h, \mathbf{z}_0}(\mathbf{z}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{h, \mathbf{z}_0}(p)$  denota la curva integral del campo vector  $q^{h, \mathbf{z}_0}$ . El campo vector infinitesimal esta dado por la expresión:

$$f^\alpha = f(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^q \beta_i(\alpha((\mathbf{z}_0))) f^i(\mathbf{z}) + \gamma_1(\alpha((\mathbf{z}_0))) g_i(\mathbf{z}) + r^{h, \mathbf{z}_0}$$

donde:  $\beta_1(\alpha(\mathbf{z})) = \alpha_1, \gamma_1(\alpha(\mathbf{z})) = \alpha_0$ . La correspondiente inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{z}} \in F^\alpha(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$  o sistema infinitesimal, en coordenadas locales esta dado por las expresion:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \alpha_1 \\ \dot{z}_3 &= \alpha_0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

La elección del control  $\alpha_1 = -k_1 z_1 - k_2 z_2, \alpha_0 = -K z_3$  con  $k_1, k_2, K > 0$  estabilizará al sistema (5.17). Los resultados de la simulación al aplicar el control de alta variación al sistema (5.16) se muestran en la figura 5.19 con  $K = 50, k_1 = 30, k_2 = 30, h = 0.054$ , condiciones iniciales  $\mathbf{z}(0) = (1, 0.5, -2)$  usando el método de Runge Kutta con un tamaño de paso de 0.001

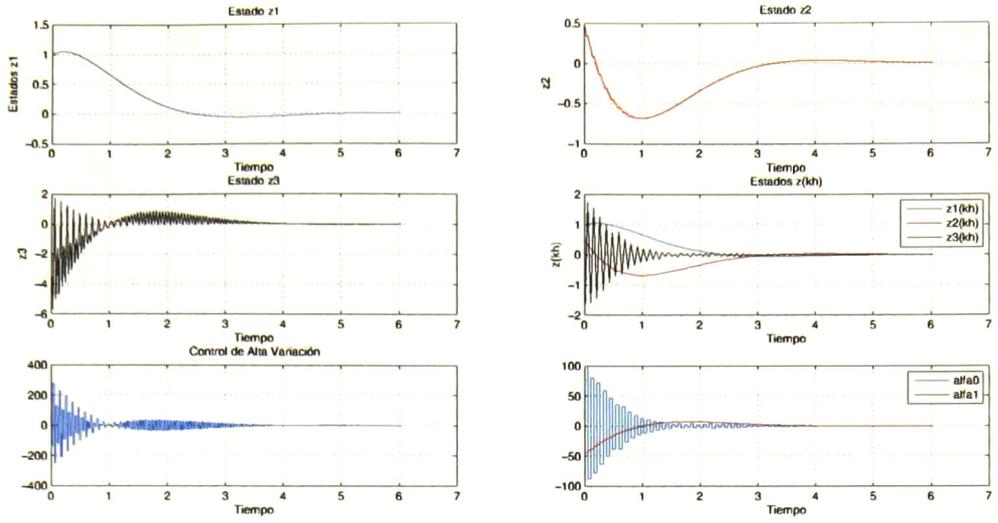


Figura 5.19: Control de alta variación

## Capítulo 6

# Estabilización de Sistemas Electromecánicos

### 6.1. Introducción

En este capítulo se muestran los resultados de aplicar el control de alta variación a sistemas electromecánicos tanto actuados como subactuados. Se comienza haciendo una descripción del sistema, señalando sus principales elementos constituyentes, así como proporcionando una descripción geométrica cuando se considere necesario. Después se plantea un modelo matemático apropiado del sistema que describa su dinámica para enseguida proponer el control. Finalmente se exhibe la simulación del comportamiento del sistema sujeto a la ley de control previamente diseñada.

### 6.2. Péndulo Simple

#### Descripción del Sistema

El péndulo simple, es uno de los sistemas mecánicos más importantes, ya que su modelo es una plataforma de base para el estudio de sistemas más complejos. Para este sistema actuado (figura 6.1), el espacio de configuración para la coordenada generalizada  $q$  está determinado por la variedad  $\mathbb{S}^1$ , es decir  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Si consideramos los siguientes grupos abelianos  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}, +)$ , observamos que el ángulo  $q(t)$  es un miembro del espacio cociente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . La velocidad del centro de masa  $\dot{q}$  es un elemento del espacio tangencial  $T_q\mathbb{S}^1$ . Similarmente el correspondiente momentum  $p(t)$  es un elemento que pertenece al espacio cotangente  $T_q^*\mathbb{S}^1$  y el estado  $(q(t), p(t))$  es un elemento del haz tangente  $T^*\mathbb{S}^1$ . Sin embargo por medio de los isomorfismos  $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  tendremos el isomorfismo  $T_q\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}$  y de manera

natural el isomorfismo  $T_q^* \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}$ . En consecuencia  $T\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . De esta forma se verifica  $(q(t), p(t)) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Necesitamos proporcionar un atlas apropiado para la variedad  $\mathbb{S}^1$ . Sea  $\mathbb{S}^1 = \{e^{iq} \in \mathbb{C} : 0 \leq q \leq 2\pi\}$ . Sean los abiertos  $U_1, U_2 \subset \mathbb{S}^1$  y los homeomorfismos  $\phi_1, \phi_2$  definidos como  $U_1 = \{e^{iq} \in \mathbb{C} : -\pi < q < \pi\} = \{0 \leq q < \pi\} \cup \{\pi < q \leq 2\pi\}$   $U_2 = \{e^{iq} \in \mathbb{C} : 0 < q < 2\pi\}$ ,  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi_i(e^{iq}) = q$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$  con la ley de correspondencia  $\phi_1(U_1) = (-\pi, \pi)$  y  $\phi_2(U_2) = (0, 2\pi)$  respectivamente (ver figura 6.2).

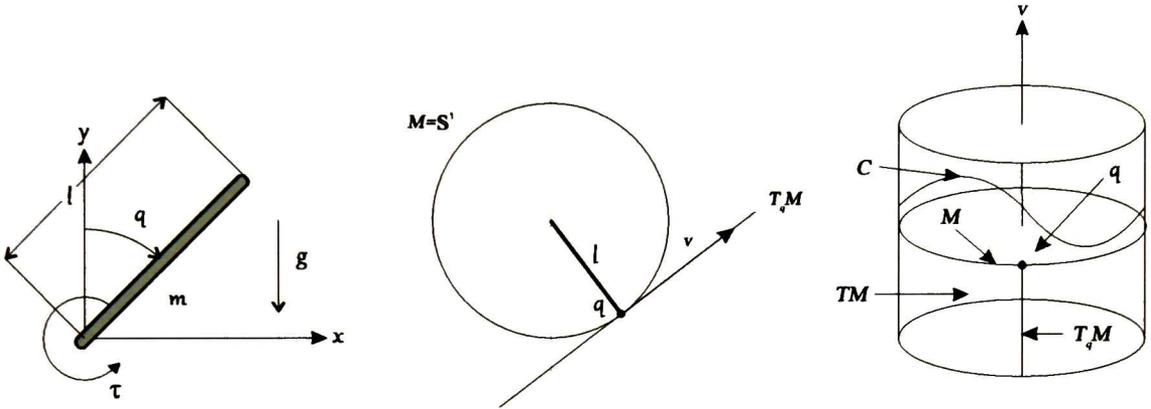


Figura 6.1: Péndulo simple, su espacio de configuración  $\mathbb{S}^1$ , espacio tangencial  $T_q M$  y espacio de estado  $TM$

Para las cartas  $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$  anteriormente definidas tendremos que su intersección esta dada por el conjunto  $U_1 \cap U_2 = \{q \in \mathbb{R} : 0 < q < \pi\} \cup \{q \in \mathbb{R} : -\pi < q < 0\}$ . De esta forma el mapeo homeomorfo para la intersección de las cartas esta dado por  $\phi_1(U_1 \cap U_2) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ ,  $\phi_2(U_1 \cap U_2) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ . El emparejamiento de cartas es entonces:

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(q) = \begin{cases} q + 2\pi & -\pi < q < 0 \\ q & 0 < q < \pi \end{cases} \quad \phi_1 \circ \phi_2^{-1}(q) = \begin{cases} q - 2\pi & \pi < q < 2\pi \\ q & 0 < q < \pi \end{cases}$$

Por lo tanto el conjunto  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^2$  es un  $\mathcal{C}^\infty$ -atlas para el espacio de configuración del péndulo simple.

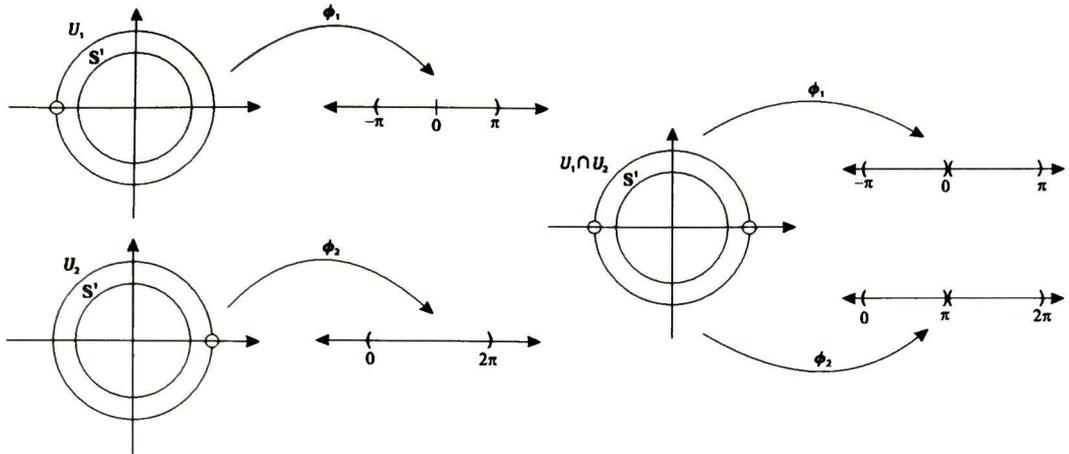


Figura 6.2: Atlas para el péndulo simple

### Modelo Dinámico

Considerando que el cuerpo del péndulo está conformado por una distribución de masa homogénea, las coordenadas del centro de masa de la configuración son:

$$x = \frac{l}{2} \operatorname{sen}(q)$$

$$y = \frac{l}{2} \cos(q)$$

La energía cinética y potencial están determinadas por:

$$K = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 = \frac{m l^2}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{\dot{q}^2}{3} \right)$$

$$V = -mgy = -\frac{1}{2} mgl \cos(q)$$

En consecuencia la función Lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = K(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 + mgy = \frac{m l^2}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{\dot{q}^2}{3} \right) + \frac{1}{2} mgl \cos(q) \quad (6.1)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange (4.9) a la expresión (6.1) obtenemos las ecuaciones dinámicas de movimiento del sistema:

$$\ddot{q} + \frac{3g}{2l} \operatorname{sen}(q) = \frac{3}{m l^2} \tau \quad (6.2)$$

Con el vector de estados  $\mathbf{x}$  en la variedad  $M = \mathbb{R}^2$  seleccionamos las variables de estado  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$  y definiendo  $k_1 = -\frac{3g}{2l}$ ,  $k_2 = \frac{3}{ml^2}$ , obtenemos la representación en el espacio de estado del sistema (6.2):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1 \sin(x_1) + k_2 u\end{aligned}\tag{6.3}$$

con los campos vectores:

$$\begin{aligned}f^T(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} x_2 & k_1 \sin(x_1) \end{pmatrix} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + k_1 \sin(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ g^T(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & k_2 \end{pmatrix} = k_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para este sistema mecánico son dados por la condición:

$$\mathbf{x}_e = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid f(\mathbf{x}) = 0 \}$$

es decir:  $\mathbf{x}_e = \{(0, 0), (\pi, 0)\}$ . El modelo linealizado del péndulo simple lo obtenemos aplicando (3.3) en los puntos de operación  $\mathbf{x}^* = (0, 0), u^* = 0$  obteniendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 \cos(x_1) & 0 \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{x}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= g(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por lo que el sistema linealizado está dado por la expresión:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 + k_2 u\end{aligned}\tag{6.4}$$

## Estrategia de Control

Diseñaremos un control de alta variación  $u_h^{sm}$  para llevar los estados de los sistemas (6.3), (6.4) al punto de equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Sean  $\alpha_0(\mathbf{x})$ ,  $\alpha_1(\mathbf{x})$  funciones definidas sobre la variedad  $M = \mathbb{R}^2$ . Considere el control de variación: Para  $k = 0$ ,  $t \in [0, h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{x}_0) + \alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{x}_0) - \alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

Para  $k = n$   $t \in [nh, (n+1)h]$ :

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}(nh), t - nh) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{x}(nh)) + \alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{x}(nh)) - \alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

El cálculo de los brackets de Lie a partir de los campos vectores asociados al sistema no lineal (6.3) son:

$$ad_g f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 \cos(x_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ k_1 \sin(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cumplíndose  $ad_g^k f = 0$  para  $k \geq 2$ . Aplicando la fórmula de Campbell Baker Hausdorff proporciona una expresión para el estado resultante  $\mathbf{x}(h)$  con  $\mathbf{x}(0) = 0$  de la forma  $\mathbf{x}(h) = q_h^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$  para el sistema (6.3) con la ley de control  $u_h^{sm}$  con condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  de la forma  $\mathbf{x}(h) = q_h^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{\mathbf{x}_0}(p)$  denota la curva integral a través de  $p$  para el campo vector suave sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus S$  definido como:

$$q^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \alpha_0(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}) + \alpha_1(\mathbf{x}_0)ad_g f(\mathbf{x})$$

El sistema infinitesimal correspondiente a la inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x})$  esta dado por la expresión:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \alpha_1(\mathbf{x})ad_g f(\mathbf{x}) + \alpha_0 g(\mathbf{x}) \quad (6.5)$$

En coordenadas locales el sistema (6.5) lo podemos expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + k_2 \alpha_1(x(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= k_1 \sin(x_1) + k_2 \alpha_0(x(t)) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Es claro que, para este simple sistema mecánico  $\beta_1(\alpha_1) = \alpha_1(\mathbf{x})$ ,  $\gamma_1(\alpha_0) = \alpha_0(\mathbf{x})$ . Considere la superficie deslizante  $s(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ . Si  $s = 0$  entonces  $\dot{x}_1 = -x_1 - k_2 \alpha_1$ . Con la elección  $\alpha_1 = -x_1$  garantizamos una dinámica de la forma  $\dot{x}_1 = -(1 + k_2)x_1$  la cual es estable. Por otro lado la derivada de la superficie  $\dot{s}(\mathbf{x}) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2 + k_2 \alpha_1 + k_1 \sin(x_1) + k_2 (\alpha_0)_{eq} = 0$ , proporciona el control equivalente, el cual esta dado por la expresión  $(\alpha_0)_{eq} = x_1 - \frac{x_2}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \sin(x_1)$ , por lo tanto  $\alpha_0 = (\alpha_0)_{eq} - K \|\mathbf{x}\| \text{sign}(x_1 + x_2)$ . Para la siguiente función de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}s^2$  es inmediato  $\dot{V} = -K|s| < 0 \Leftrightarrow K > 0$ . En la figura 6.3 se muestra el comportamiento del sistema infinitesimal (6.6) con el control propuesto con las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (0.3, 0.1)$  y en la figura 6.4 se exhibe el resultado de la simulación del sistema (6.3) aplicando el control de alta variación con el valor de los siguientes parametros  $l = 1m$ ,  $g = 9.8m/s^2$ ,  $m = 0.27kg$ ,  $h = 0.01$ ,  $K = 10$  usando el método de integración de Runge-Kutta con un tamaño de paso de 0.001

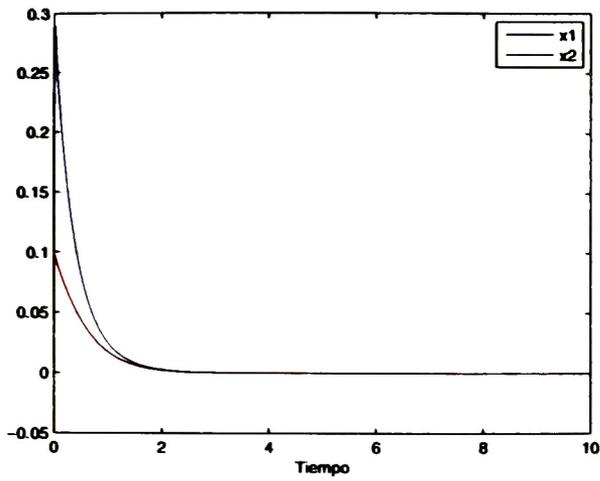


Figura 6.3: Respuesta del sistema infinitesimal del péndulo simple (caso no lineal)

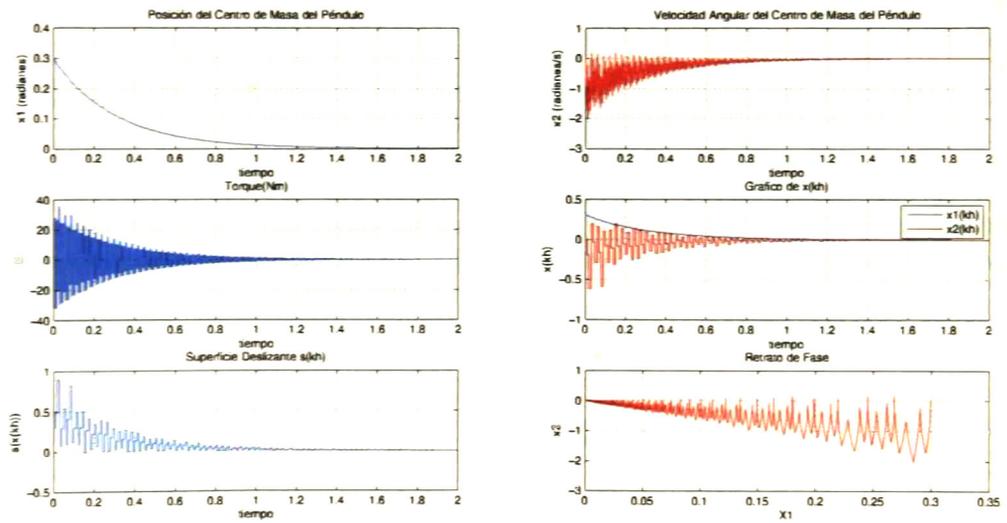


Figura 6.4: Control de alta variación aplicado al péndulo simple (caso no lineal)

Es posible otra selección de funciones  $\alpha_{ij}^p$  para construir la ley de conmutación. Por ejemplo si tomamos  $\alpha_1 = -\frac{x_2}{k_2} - \frac{15}{k_2}x_1$ ,  $\alpha_0 = -\frac{k_1}{k_2}\text{sen}(x_1) - \frac{15}{k_2}x_2$  generaremos el control de variación aplicable al sistema (6.3). Los resultados de la simulación se exhiben en la figura 6.5 con los mismos valores de los parámetros.

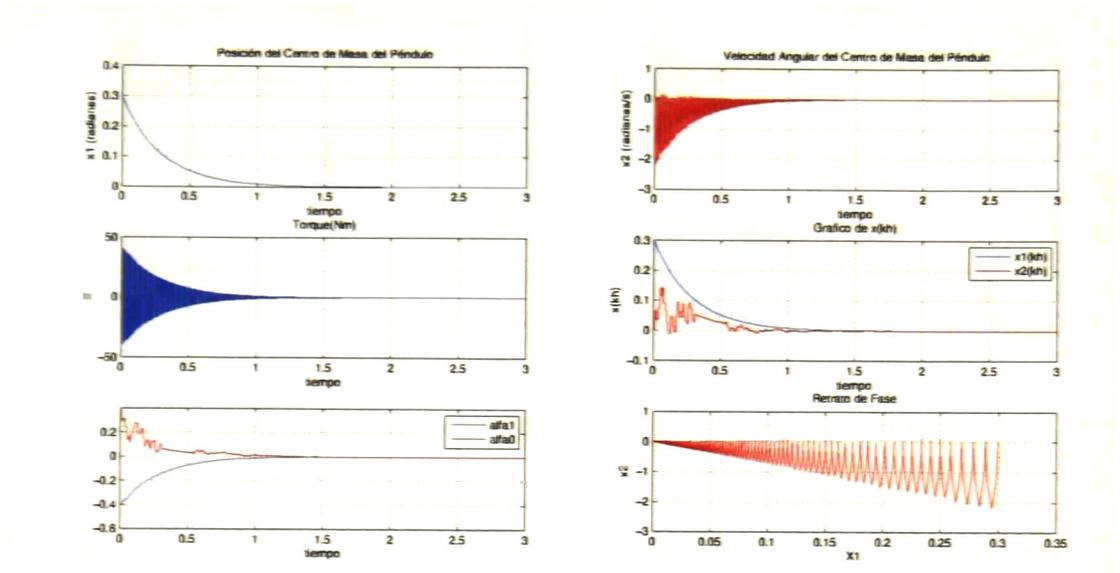


Figura 6.5: Control de alta variación aplicado al péndulo simple (caso no lineal)

Para el modelo lineal del péndulo simple realizamos un procedimiento análogo al caso no lineal. La representación en coordenadas locales del sistema infinitesimal correspondiente al modelo (6.4) esta dado por las expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + k_1\alpha_1(\mathbf{x}(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= k_1x_1 + k_2\alpha_0(\mathbf{x}(t)) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Para la superficie  $s(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ , el diseño del control resultante es  $\alpha_1 = -x_1$ ,  $\alpha_0 = \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right)x_1 - \frac{1}{k_2}x_2 - K\|\mathbf{x}\|\text{sign}(s)$ . En la figura (6.6) se muestra el resultado de la simulación del sistema (6.4) con los mismos valores de los parámetros que en el caso no lineal.

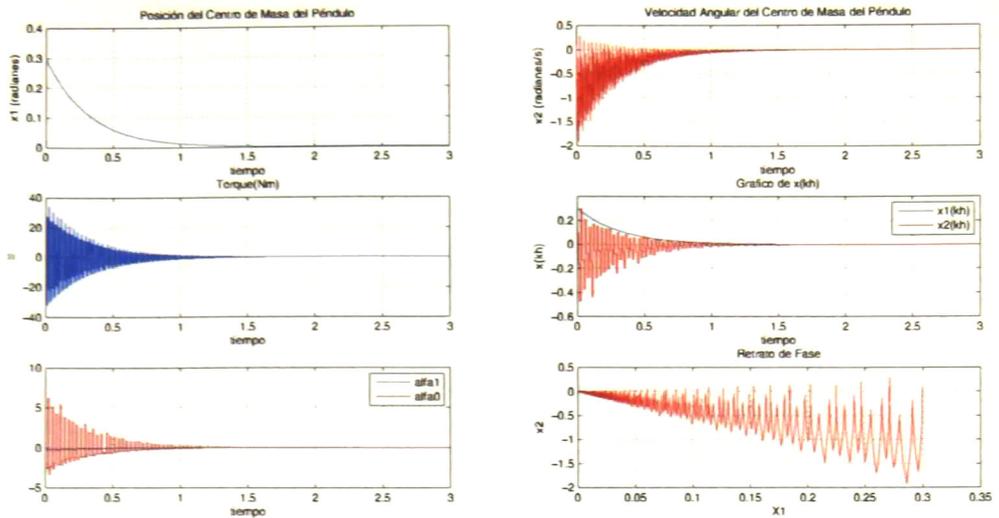


Figura 6.6: Control de alta variación aplicado al péndulo simple (caso lineal)

### 6.3. Péndulo Invertido Controlado por un Motor de C.D.

#### Descripción del Sistema

Consideremos el péndulo invertido controlado por un motor de armadura de c.d. tal como se ilustra en la figura 6.7. Es obvio que este sistema comparte las mismas características geométricas que el péndulo simple, la diferencia radica en incluir la dinámica del actuador que en este caso es el motor eléctrico. Este sistema es ampliamente usado en la literatura especializada [14], [15], para poner a prueba diversas leyes de control. Una de las motivaciones de elegir este sistema, es porque permite comparar de manera directa la respuesta entre el modelo lineal y el no lineal bajo la acción de control.

#### Modelo Dinámico

Consideraremos que el momento de inercia del motor es despreciable comparado con el momento de inercia del péndulo.

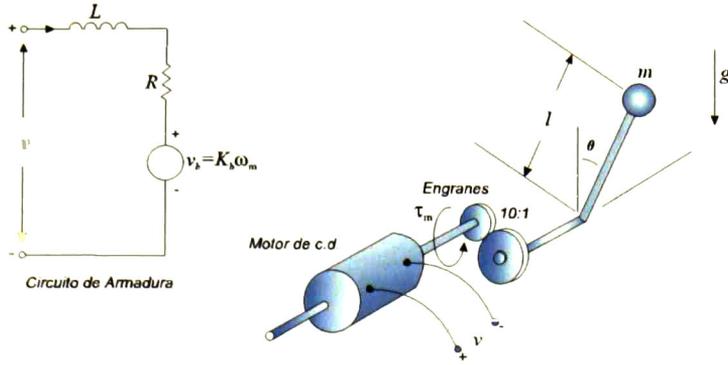


Figura 6.7: Sistema péndulo invertido controlado por motor de c.d.

El torque del motor de c.d. esta dado por:

$$\tau_m = K_m i$$

El torque aplicado al péndulo es:

$$\tau_p = 10\tau_m = 10K_m i$$

Del circuito de armadura tendremos aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$v = Li + Ri + 10K_b \dot{\theta}$$

La cinemática del péndulo puede ser descrita por la ecuación:

$$\tau_p = -l^2 m \ddot{\theta} + lmg \sin \theta$$

Introduciendo las variables de estado  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (\theta, \dot{\theta}, i)$  obtendremos la representación del sistema en el espacio de estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{10K_m}{l^2 m} x_3 \\ -\frac{10K_b}{L} x_2 - \frac{R}{L} x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u \quad (6.8)$$

$$y = x_1$$

Haciendo:  $K_1 = \frac{g}{l}$ ,  $K_2 = \frac{10K_m}{l^2 m}$ ,  $K_3 = -\frac{10K_b}{L}$ ,  $K_4 = -\frac{R}{L}$ ,  $K_5 = \frac{1}{L}$ , en terminos de estas nuevas constantes el sistema (6.8) lo podemos expresar como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ K_1 \sin x_1 + K_2 x_3 \\ K_3 x_2 + K_4 x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_5 \end{pmatrix} u \quad (6.9)$$

$$y = x_1$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_e = \{(0, 0), (\pi, 0)\}$ . Aplicando el proceso de linealización alrededor del punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ ,  $u^* = 0$  obtenemos el modelo lineal del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_1 & 0 & K_2 \\ 0 & K_3 & K_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_5 \end{pmatrix} u \quad (6.10)$$

$y = x_1$

La matriz de controlabilidad para el sistema (6.9) sistema esta dada por:

$$\mathbf{C}_2 = [g[f, g] \quad [f, [f, g]]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_2 K_5 \\ 0 & -K_2 K_5 & K_2 K_4 K_5 \\ K_5 & -K_4 K_5 & K_2 K_3 K_5 + K_4^2 K_5 \end{pmatrix}$$

Observamos que  $\text{rank}(\mathbf{C}_2) = 3$  y la distribución  $\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g\}$  es involutiva. Entonces es posible encontrar un difeomorfismo que transforme al sistema (6.9) a la forma normal. El difeomorfismo esta dado por:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \\ \Phi_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ L_f \Phi_1(\mathbf{x}) \\ L_f \Phi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{1}{K_2 K_5} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ K_1 \text{sen} x_1 + K_2 x_3 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Aplicando (6.11) al sistema (6.9) obtenemos el sistema transformado:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ (K_1 \cos(K_2 K_5 z_1) + K_2 K_3) z_2 + K_4 z_3 - \frac{K_1 K_4}{K_2 K_5} \text{sen}(K_2 K_5 z_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Finalmente, la transformación de la ley de control:

$$u = v - \left( (K_1 \cos(K_2 K_5 z_1) + K_2 K_3) z_2 + K_4 z_3 - \frac{K_1 K_4}{K_2 K_5} \text{sen}(K_2 K_5 z_1) \right) \quad (6.12)$$

Proporciona la siguiente representación:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ v \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

con la siguiente relación entre los sistemas de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= k_2 k_5 z_1 \\ x_2 &= k_2 k_5 z_2 \\ x_3 &= k_5 z_3 - \frac{k_1}{k_2} \text{sen}(k_2 k_3 z_1) \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_e = \{(0, 0), (\pi, 0)\}$ . Aplicando el proceso de linealización alrededor del punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$  obtenemos el modelo lineal del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_1 & 0 & K_2 \\ 0 & K_3 & K_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_5 \end{pmatrix} u \quad (6.10)$$

$y = x_1$

La matriz de controlabilidad para el sistema (6.9) sistema esta dada por:

$$\mathbf{C}_2 = [g[f, g] \quad [f \cdot [f, g]]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_2 K_5 \\ 0 & -K_2 K_5 & K_2 K_4 K_5 \\ K_5 & -K_4 K_5 & K_2 K_3 K_5 + K_4^2 K_5 \end{pmatrix}$$

Observamos que  $\text{rank}(\mathbf{C}_2) = 3$  y la distribución  $\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g\}$  es involutiva. Entonces es posible encontrar un difeomorfismo que transforme al sistema (6.9) a la forma normal. El difeomorfismo esta dado por:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \\ \Phi_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ L_f \Phi_1(\mathbf{x}) \\ L_f \Phi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{1}{K_2 K_5} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ K_1 \text{sen} x_1 + K_2 x_3 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Aplicando (6.11) al sistema (6.9) obtenemos el sistema transformado:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ (K_1 \cos(K_2 K_5 z_1) + K_2 K_3) z_2 + K_4 z_3 - \frac{K_1 K_4}{K_2 K_5} \text{sen}(K_2 K_5 z_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Finalmente, la transformación de la ley de control:

$$u = v - \left( (K_1 \cos(K_2 K_5 z_1) + K_2 K_3) z_2 + K_4 z_3 - \frac{K_1 K_4}{K_2 K_5} \text{sen}(K_2 K_5 z_1) \right) \quad (6.12)$$

Proporciona la siguiente representación:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ v \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

con la siguiente relación entre los sistemas de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= k_2 k_5 z_1 \\ x_2 &= k_2 k_5 z_2 \\ x_3 &= k_5 z_3 - \frac{k_1}{k_2} \text{sen}(k_2 k_3 z_1) \end{aligned}$$

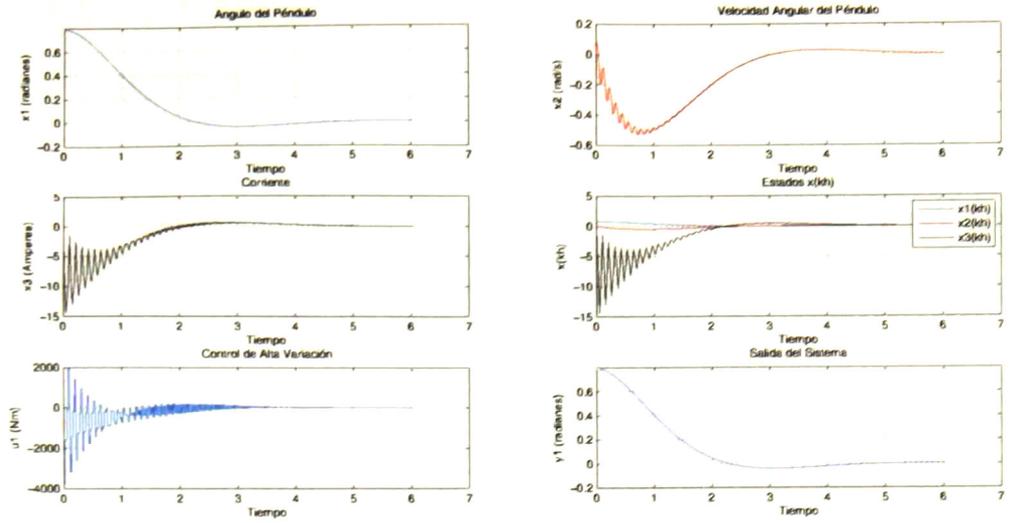


Figura 6.8: Control de alta variación aplicado al péndulo invertido con motor (caso lineal)

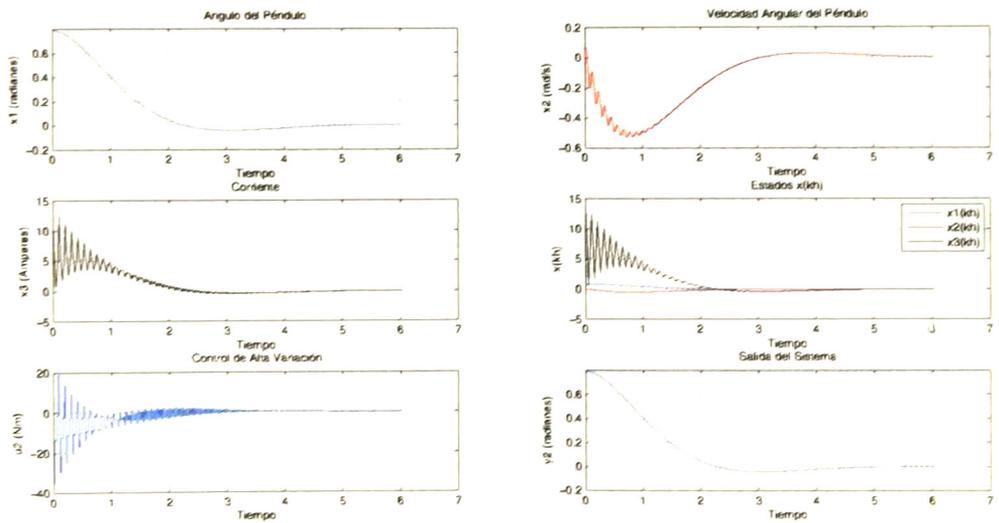


Figura 6.9: Control de alta variación aplicado al péndulo invertido con motor (caso no lineal)

## 6.4. Robot Manipulador con unión flexible

### Descripción del Sistema

Una de las hipótesis básicas en el modelado de manipuladores roboticos es suponer que las uniones de los diferentes eslabones son rígidas. Sin embargo, muchos mecanismos son diseñados pensando en proporcionarles cierta flexibilidad en las uniones, tal como sucede en manipuladores espaciales y manos artificiales articuladas para aplicaciones diversas. En la actualidad, existen numerosos trabajos de investigación para diseñar controladores para robots manipuladores subactuados con uniones flexibles [16].

### Modelo Dinámico

Sean  $\theta_1, \dots, \theta_n$  los desplazamientos angulares de los  $n$  eslabones del manipulador. Definido el vector  $\mathbf{q}_1$  como:

$$\mathbf{q}_1 = (\theta_1, \dots, \theta_n)$$

y sea:

$$\mathbf{q}_2 = \left( \frac{1}{r_{m_1}} \theta_{m_1}, \dots, \frac{1}{r_{m_n}} \theta_{m_n} \right)$$

el vector de desplazamientos angulares medidos desde eje de los motores (tomados de la uniones que estan antes de los engranes). Entonces la diferencia  $(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$  es el vector de las deflexiones elásticas. Despreciando la energía cinética de los rotores, tendremos que la función Lagrangiana del sistema esta dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T M(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T J \dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{P}(\mathbf{q}_1) + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^T \mathbf{K} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde  $\mathbf{P}(\mathbf{q}_1)$  es la matriz de energía potencial elástica,  $\mathbf{J}$  es la matriz diagonal de inercias de los actuadores y  $\mathbf{K}$  es la matriz diagonal de constantes de rigidez de las uniones. Aplicando las ecuaciones de Lagrange (4.9) a la función (6.16) obtendremos las ecuaciones generales que describen la dinámica de un manipulador con uniones flexibles:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_2) \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{G}(\mathbf{q}_1) + \mathbf{K}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{K}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Consideraremos el caso de un manipulador con un solo eslabón con unión elástica (figura 6.10) en el que se ha despreciado el amortiguamiento viscoso. En este caso las ecuaciones

(6.17) toman la forma:

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + mgl\text{sen}q_1 + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 + k(q_2 - q_1) &= u \end{aligned} \quad (6.18)$$

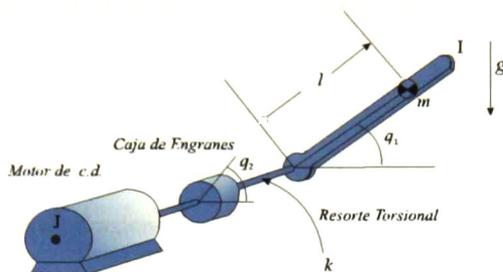


Figura 6.10: Robot de un eslabón con unión flexible

Sean las variables de estado  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ . La representación en el espacio de estado del sistema (6.18) esta dada por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{I}\text{sen}x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} u \quad (6.19)$$

La matriz de controlabilidad para este sistema es:

$$[g, ad_f g, ad_f^2 g, ad_f^3 g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que para este sistema:  $\text{rank}[g, ad_f g, ad_f^2 g, ad_f^3 g] = 4$ , siempre que  $k > 0$ ,  $I, J < \infty$  y la distribución  $\{g, ad_f g, ad_f^2 g\}$  es involutiva. El siguiente difeomorfismo:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \\ \Phi_3(\mathbf{x}) \\ \Phi_4(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{mgl}{I}\text{sen}x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ -\frac{mgl}{I}\text{cos}x_1 x_2 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

y la ley de control:

$$u = \frac{IJ}{k} (v - a(\mathbf{x}))$$

$$a(\mathbf{x}) = \frac{mgl}{I} \operatorname{sen}(x_1) \left( x_2^2 + \frac{mgl}{I} \cos(x_1) + \frac{k}{I} \right) + \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \left( \frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{mgl}{I} \cos(x_1) \right)$$

transforman el sistema (6.19) a la forma canónica de Brunovski:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= v \end{aligned} \tag{6.21}$$

La relación entre el cambio de coordenadas esta dado por:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_1 + \frac{I}{k} \left( y_3 + \frac{mgl}{I} \operatorname{sen}(y_1) \right) \\ x_4 &= y_2 + \frac{I}{k} \left( y_4 + \frac{mgl}{I} \cos(y_1) y_2 \right) \end{aligned}$$

## Estrategia de Control

Sean  $\alpha_0, \alpha_1$  funciones definidas sobre la variedad  $M = \mathbb{R}^4$ . Considere el control de variación:

Para  $k = 0, t \in [0, h]$

$$u_h^{sm}(y_0, t) = \begin{cases} \alpha_0(y_0) + \alpha_1(y_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ \alpha_0(y_0) - \alpha_1(y_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

Para  $k = n \quad t \in [nh, (n+1)h]$ :

$$u_h^{sm}(y(nh), t - nh) = \begin{cases} \alpha_0(y(nh)) + \alpha_1(y(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ \alpha_0(y(nh)) - \alpha_1(y(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

El bracket de Lie obtenido a partir de los campos vectores asociados al sistema (6.21) es:

$$ad_g f = [g, f] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde claramente  $ad_g^k f = 0 \forall k \geq 2$ . Aplicando la formula de Campbell Baker Hausdorff proporciona una expresión para el estado resultante  $\mathbf{y}(h)$  con  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$  de la forma  $\mathbf{y}(h) = q_h^{\mathbf{y}_0}(\mathbf{y}_0)$  para el sistema (6.21) con la ley de control  $u_h^{sm}$  con condiciones iniciales  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  de la forma  $\mathbf{y}(h) = q_h^{\mathbf{y}_0}(\mathbf{y}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{\mathbf{y}_0}(p)$  denota la curva integral a través de  $p$  para el campo vector suave sobre  $\mathbb{R}^4 \setminus S$  definido como:

$$q^{\mathbf{y}_0}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) + \alpha_0(\mathbf{y}_0)g(\mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{y}_0)ad_g f(\mathbf{y})$$

El sistema infinitesimal correspondiente a la inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{y}} \in F^\alpha(\mathbf{y})$  esta dado por la expresión:

$$\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{y})ad_g f(\mathbf{y}) + \alpha_0 g(\mathbf{y}) \quad (6.22)$$

En coordenadas locales el sistema (6.22) lo podemos expresar como:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \alpha_1(\mathbf{y}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_0(\mathbf{y}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

La elección del control  $\alpha_0(\mathbf{y}) = -Ky_4$ ,  $\alpha_1(\mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^3 \eta_i y_i$ , con  $K, \eta_i > 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$  permitirá estabilizar el sistema infinitesimal (6.23) en el punto de equilibrio  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ . Los resultados de la simulación al aplicar el control de alta variación  $u_h^{sm}$  al sistema (6.19) se muestran en la figura 6.11 para los siguientes valores de la planta:  $l = 1kg, k = 10Nm/rad, I = 1kgm^2, J = 1kgm^2$ , con las condiciones iniciales  $\mathbf{x} = (0.7853, 0, 0.7504, 0)$ , con un valor de  $h = 0.05$ , usando el método de integración de Runge Kutta con un tamaño de paso de 0.001.

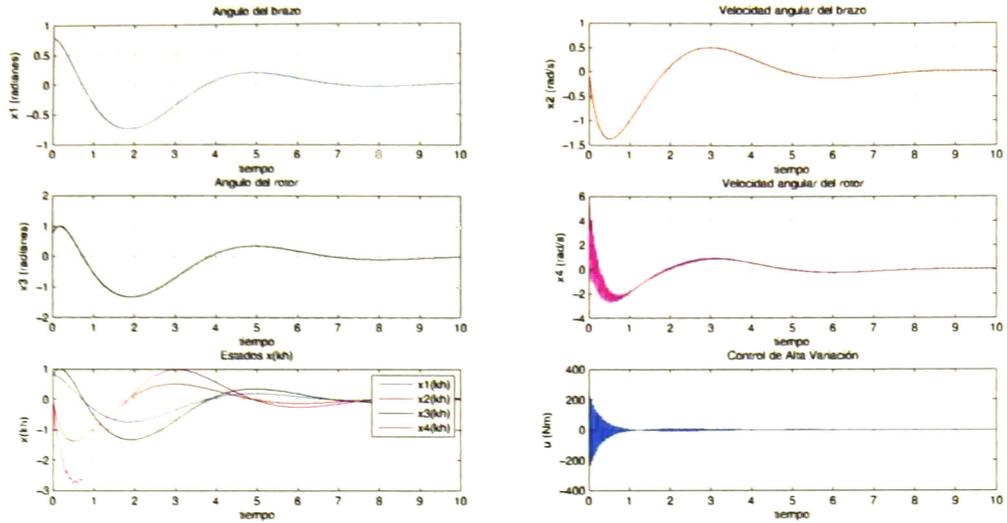


Figura 6.11: Estabilización del brazo robótico con unión flexible

## 6.5. Sistema Carro Péndulo Invertido

### Descripción del Sistema

Considere el problema de balacear un péndulo invertido montado sobre un carro. Para este sistema mecánico subactuado el objetivo del control es mantener verticalmente el péndulo invertido por medio de la aplicación de una fuerza horizontal sobre el carro. El espacio de configuración para este sistema, esta determinado por la variedad  $Q = \mathbf{R} \times \mathbf{S}^1$ , es decir la cordenada de cualquier punto  $q = (x, \theta)$  esta en  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^1$ . El vector  $(\dot{x}, \dot{\theta})$  es un elemento del espacio tangencial  $T_q M$  (figura 6.12).

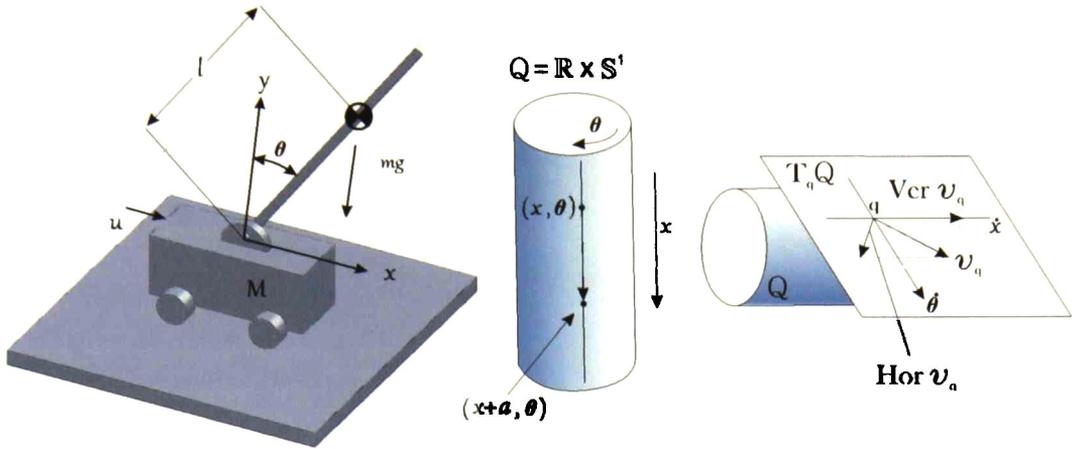


Figura 6.12: Sistema carro péndulo invertido, espacio de configuración  $Q$  y espacio tangencial  $T_q Q$

El Lagrangiano del sistema esta dado por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q) \\ \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{q}_1^2 + m \dot{q}_1 \dot{\theta} l \cos(q_2) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}_2^2 - m g l \cos(q_2) \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M + m & m l \cos(q_2) \\ m l \cos(q_2) & m l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange (4.9) a la ecuación (6.24) obtenemos las ecuaciones de movimiento del sistema en la forma (4.14), es decir:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_2 \\ G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

donde los elementos de la matriz de inercia, de Coriolis y gravitacionales estan dados por:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= M + m \\
 M_{12} &= ml \cos(q_2) \\
 M_{21} &= ml \cos(q_2) \\
 M_{22} &= ml^2 \\
 C'_{11} &= 0 \\
 C_{12} &= -ml \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\
 C_{21} &= 0 \\
 C_{22} &= 0 \\
 G_1 &= 0 \\
 G_2 &= -mg \operatorname{sen}(q_2)
 \end{aligned}$$

El espacio tangencial  $T_q M$  para este sistema mecánico puede descomponerse de manera única [11] de la forma:

$$v_q = \operatorname{Hor}v_q + \operatorname{Ver}v_q, \quad \forall v_q \in T_q Q \quad (6.26)$$

De esta manera las componentes verticales y horizontales de  $v_q = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)$  estan dadas por:

$$\operatorname{Ver}v_q = \left( \dot{q}_1 + \frac{ml \cos(q_2) \dot{q}_2}{M + m}, 0 \right) \quad (6.27)$$

$$\operatorname{Hor}v_q = v_q - \operatorname{Ver}v_q = \left( -\frac{ml \cos(q_2) \dot{q}_2}{M + m}, \dot{q}_2 \right) \quad (6.28)$$

La descomposición del espacio tangencial, permite caracterizar la energía cinética del sistema como:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \mathbf{G}(\operatorname{Ver}v_q, \operatorname{Ver}v_q) + \frac{1}{2} \mathbf{G}(\operatorname{Hor}v_q, \operatorname{Hor}v_q) \\
 K &= \frac{1}{2} \left( (M + m) \left( \frac{ml \cos(q_2) \dot{q}_2}{M + m} \right)^2 - 2ml \cos(q_2) \left( \frac{ml \cos(q_2) \dot{q}_2}{M + m} \right) \dot{q}_2 + ml \dot{q}_2^2 \right) \\
 K &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{q}_1^2 + m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \operatorname{sen}(q_2) + \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}_2^2
 \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para este sistema son aquellos que satisfacen la condición:  $\mathbf{q}_e = \{(q_1, q_2) \in Q | f(q_e) = 0\}$ , es decir  $\mathbf{q}_e = \{(0, 0, 0, 0), (0, \pi, 0, 0)\}$ . Aplicando el proceso de linealización (3.3) a las ecuaciones (6.25) en el punto de operación  $q^* = 0, u^* = 0$  y realizando la asignación de variables de estado:  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$  obtendremos el modelo lineal del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{ml} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{Ml} \end{pmatrix} u \quad (6.29)$$

El sistema linealizado es controlable, ya que como puede verificarse:

$$\det(B \ \Lambda B \ \Lambda^2 B \ \Lambda^3 B) = \frac{g^2}{M^4 l^4}$$

Sean  $k_1 = -\frac{mg}{M}$ ,  $k_2 = \frac{1}{M}$ ,  $k_3 = \frac{(M+m)g}{Ml}$ ,  $k_4 = -\frac{1}{Ml}$ . La matriz de transformación:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k_2}{k_4} \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

permite llevar el sistema (6.29) a la siguiente forma regular:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 + a_1 y_4 \\ a_2 y_4 \\ a_3 y_2 \\ a_4 y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_5 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

donde:  $a_1 = \frac{k_2}{k_4^2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{k_4}$ ,  $a_3 = k_1 - \frac{k_2 k_3}{k_4}$ ,  $a_4 = k_3 k_4$ ,  $a_5 = k^2$ .

## Diseño del Control

Por medio de control de alta variación  $u_h^{sm}$  llevaremos los estados del sistema transformado (6.31) al punto de equilibrio:  $\mathbf{y}_e = \mathbf{0}$ . Sean  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  funciones definidas sobre la variedad  $M = \mathbb{R}^4$  Considere el control de variación: Para  $k = 0$ ,  $t \in [0, h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{y}_0, t) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{y}_0) + \alpha_1(\mathbf{y}_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{y}_0) - \alpha_1(\mathbf{y}_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

Para  $k = n$   $t \in [nh, (n+1)h]$ :

$$u_h^{sm}(\mathbf{y}(nh), t - nh) = \begin{cases} \alpha_0(\mathbf{y}(nh)) + \alpha_1(\mathbf{y}(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ \alpha_0(\mathbf{y}(nh)) - \alpha_1(\mathbf{y}(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

El brackets de Lie obtenido a partir de los campos vectores asociados al sistema (6.31) es:

$$ad_g f = [g, f] = \begin{pmatrix} a_1 a_5 \\ a_2 a_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde claramente  $ad_g^k f = 0 \forall k \geq 2$ . Aplicando la formula de Campbell Baker Hausdorff proporciona una expresión para el estado resultante  $\mathbf{y}(h)$  con  $\mathbf{y}(0) = 0$  de la forma  $\mathbf{y}(h) = q_h^{\mathbf{y}_0}(\mathbf{y}_0)$  para el sistema (6.31) con la ley de control  $u_h^{sm}$  con condiciones iniciales  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  de la forma  $\mathbf{y}(h) = q_h^{\mathbf{y}_0}(\mathbf{y}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{\mathbf{y}_0}(p)$  denota la curva integral a través de  $p$  para el campo vector suave sobre  $\mathbb{R}^4 \setminus S$  definido como:

$$q^{\mathbf{y}_0}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) + \alpha_0(\mathbf{y}_0)g(\mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{y}_0)ad_g f(\mathbf{y})$$

El sistema infinitesimal correspondiente a la inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{y}} \in F^{\mu}(\mathbf{y})$  esta dado por la expresión:

$$\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{y})ad_g f(\mathbf{y}) + \alpha_0 g(\mathbf{y}) \quad (6.32)$$

En coordenadas locales el sistema (6.32) lo podemos expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3 + a_1 y_4 + a_1 a_5 \alpha_1 \\ \dot{y}_2 &= a_2 y_4 + a_1 a_5 \alpha_1 \\ \dot{y}_3 &= a_3 y_2 \\ \dot{y}_4 &= a_4 y_2 + a_5 \alpha_0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Por medio de la técnica de control por bloques, se puede diseñar las superficies deslizantes apropiadas para estabilizar el sistema (6.33). Considere las superficies deslizantes:  $s_1 = y_4 + \frac{\eta_1}{a_1} y_1 + \frac{1}{a_1} y_3 + a_5 \alpha_1$  y  $s_2 = y_2 + \frac{k_3}{a_3} y_3$  donde  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^+$ , de esta manera, la elección del control  $\alpha_0 = -K \|y\| |s_1| \text{sign}(s_1)$  y  $\alpha_1 = -Q s_2$  permitira estabilizar el sistema infinitesimal (6.33). El resultado de la simulación se muestra en la figura (6.13) con las condiciones iniciales  $\mathbf{y}(0) = (0.1, 0.3, 0.1, 0.1)$ . En la figura (6.14) se muestra el resultado de la simulación al aplicar el control de alta variación al sistema (6.31) y en la figura (6.15) la respuesta sistema carro péndulo invertido (6.29) con las condiciones iniciales  $\mathbf{x} = (0.1, 0.3, 0.1, 0.1)$  y los siguientes valores de los parametros  $h = 0.03$ ,  $K = 3$ ,  $Q = 20$  usando el método de integración de Runge Kutta con un tamaño de paso de 0.001.

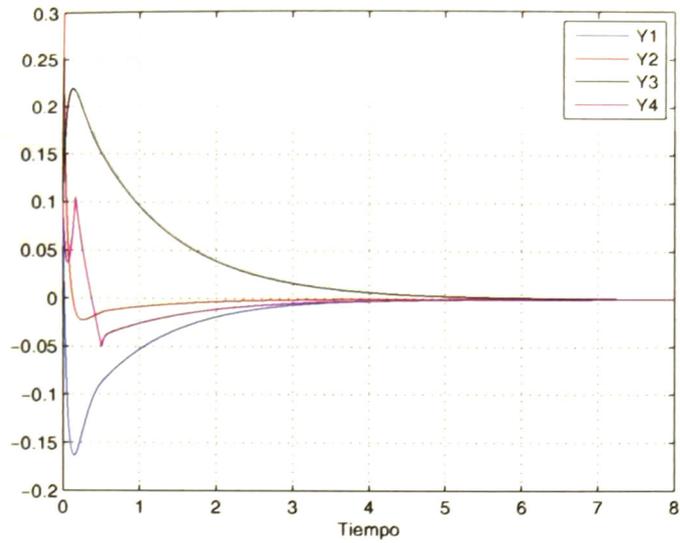


Figura 6.13: Respuesta del Sistema Infinitesimal del Sistema Carro Pendulo Invertido

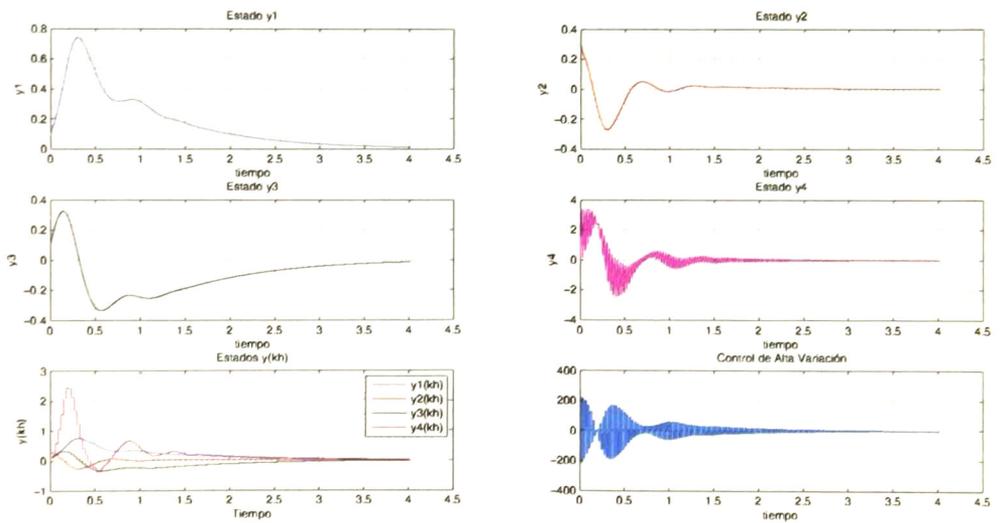


Figura 6.14: Respuesta del sistema en forma regular

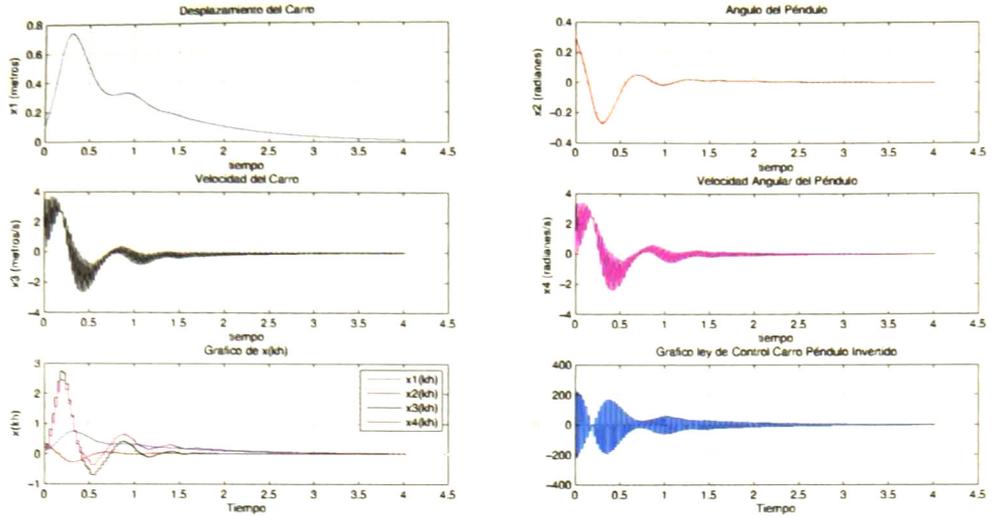


Figura 6.15: Respuesta del sistema carro péndulo invertido con Control de alta variación

Para el caso no lineal estamos sumamente interesados en el comportamiento del ángulo del péndulo, así como de su velocidad angular en cualquier instante de tiempo. Entonces bajo este orden de ideas, adoptaremos para este fin el siguiente modelo no lineal del sistema carro péndulo invertido cuyas variables de estado están sobre la variedad restringida  $M = \mathbf{S}^1$  (ver [17]):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1)}{\frac{4}{3} - 2 a m l \cos^2(x_1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2 a \cos(x_1)}{\frac{4}{3} - 2 a m l \cos^2(x_1)} \end{pmatrix} u \quad (6.34)$$

donde  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $a = \frac{1}{2(m+M)}$  y  $u$  es la fuerza horizontal aplicada al carro. Si elegimos como control para  $u$  la expresión:

$$u = -\frac{\frac{4}{3} - 2 a m l \cos^2(x_1)}{2 a \cos(x_1)} v - \frac{\frac{4}{3} - 2 a m l \cos^2(x_1)}{2 a \cos(x_1)} \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1)}{\frac{4}{3} - 2 a m l \cos^2(x_1)} \quad (6.35)$$

transforma al sistema a la forma (5.4), con lo cual podemos aplicar todas las técnicas descritas para este ejemplo. Los resultados de la simulación se muestran en la figura (6.16) con los mismos valores para los parámetros físicos utilizados para el caso lineal con condiciones iniciales  $x(0) = (0.5, 0.1)$  y  $h = 0.05$

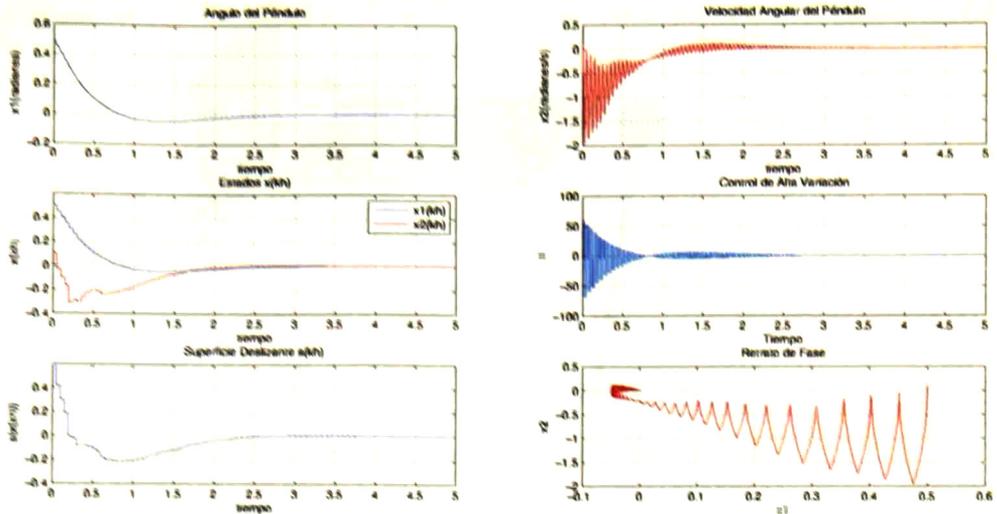


Figura 6.16: Respuesta del sistema carro péndulo invertido con control de alta variación (Caso no lineal)

## 6.6. Sistema Masa Resorte Péndulo Invertido

### Descripción del Sistema

En esta sección se diseñará un control para un sistema mecánico inestable muy representativo de la clase de los sistemas subactuados debilmente acoplados que son difíciles de estabilizar. Considere el sistema mecánico subactuado, conformado una masa y un péndulo invertido unidos por un resorte lineal, y otro no lineal tal como se muestra en la figura (6.17). Se aplica una fuerza de control  $u$  a la masa  $m_1$  y la única influencia que recibe el péndulo es a través del resorte no lineal acoplado a él. Obsérvese que esta configuración física provoca que el péndulo sea inestable. El modelo que a continuación se presentará tiene la característica de tener un punto de equilibrio en el origen correspondiente a la posición del péndulo invertido el cual no es linealmente controlable [18].

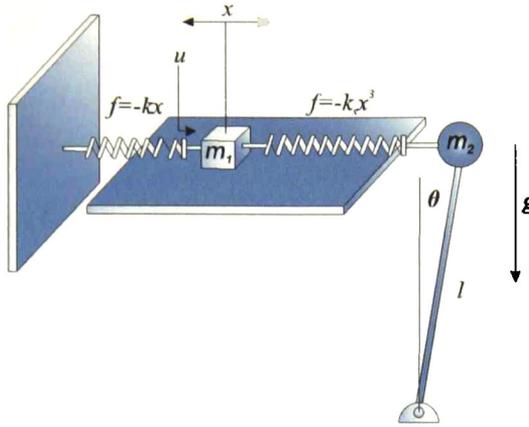


Figura 6.17: Sistema masa resorte péndulo invertido

## Modelo Dinámico

El resorte lineal obedece perfectamente la ley de Hooke  $f = -k_1 dx$  y el resorte no lineal es caracterizado por la siguiente fuerza de deformación cúbica  $f = -k_2 (dx)^3$ , donde  $f$  es la fuerza del resorte  $k_1, k_2 > 0$  son las constantes de Hooke y  $dx$  es la deformación de los resortes. Sea  $x$  el desplazamiento de la masa  $m_1$  y sea  $\theta$  el ángulo del péndulo con respecto a la vertical, de tal manera que cuando  $x = 0$  y  $\theta = 0$  los resortes están relajados. La ecuación de movimiento del sistema es:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{g}{l} \text{sen}(\theta) + \frac{k_2}{m_2 l} (x - l \text{sen}(\theta))^3 \cos(\theta) \\ \ddot{x} &= -\frac{k_1}{m_1} x - \frac{k_2}{m_1} (x - l \text{sen}(\theta))^3 + \frac{u}{m_1}\end{aligned}\quad (6.36)$$

Asumiendo que  $\theta$  es pequeño la ecuación (6.36) se convierte en:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{g}{l} \theta + \frac{k_2}{m_2 l} (x - l \theta)^3 \cos(\theta) \\ \ddot{x} &= -\frac{k_1}{m_1} x - \frac{k_2}{m_1} (x - l \theta)^3 + \frac{u}{m_1}\end{aligned}\quad (6.37)$$

Cuando  $u = 0$  el punto de equilibrio del sistema 6.37 satisface:

$$\begin{aligned}m_2 g \theta + k_2 (x - l \theta)^3 &= 0 \\ k_1 x + k_2 (x - l \theta)^3 &= 0\end{aligned}\quad (6.38)$$

Si  $l > \frac{m_2 g}{k_1}$  existen tres puntos de equilibrio:

i)  $x = 0, \theta = 0$

ii)  $x = -\frac{((m_2g)^3)^{1/2}}{k_1 \left(k_2 \left(l - \frac{m_2g}{k_1}\right)^3\right)^{1/2}}, \theta = -\frac{(m_2g)^{1/2}}{\left(k_2 \left(l - \frac{m_2g}{k_1}\right)^3\right)^{1/2}}$

iii)  $x = \frac{((m_2g)^3)^{1/2}}{k_1 \left(k_2 \left(l - \frac{m_2g}{k_1}\right)^3\right)^{1/2}}, \theta = \frac{(m_2g)^{1/2}}{\left(k_2 \left(l - \frac{m_2g}{k_1}\right)^3\right)^{1/2}}$

Si  $l < \frac{m_2g}{k_1}$  el único punto de equilibrio es i). Si  $l > \frac{m_2g}{k_1}$  los puntos de equilibrio ii) y iii) son estables y i) es inestable. Por medio del siguiente cambio de variable:

$$z = \left(\frac{k_2}{m_2l}\right)^{1/3} (x - l\theta) \quad (6.39)$$

y transformación de ley de control:

$$v = \left(\frac{k_2}{m_2l}\right)^{1/3} \left(-\frac{k_1}{m_1} \left(\left(\frac{m_2l}{k_2}\right)^{1/3} z + l\theta\right) - \frac{l(m_1 + m_2)}{m_1} z^3 - g\theta + \frac{u}{m_1}\right) \quad (6.40)$$

tendremos:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{g}{l}\theta + z^3 \\ \ddot{z} &= v \end{aligned} \quad (6.41)$$

Definiendo las variables de estado:  $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = z, x_4 = \dot{z}$  obtenemos la representación en espacio de estado del sistema (6.37):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l}x_1 + x_3^3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= v \end{aligned} \quad (6.42)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$ . Obsérvese que el sistema (6.42) esta conformado por una conexión en cascada de un subsistema lineal controlable ( $\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = v$ ) y un sistema inestable ( $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = (g/l)x_1 + x_3^3$ ). La linealización del sistema (6.42) cerca del punto  $\mathbf{x} = 0$  tiene eigenvalores no controlables y por tanto no es exponencialmente estabilizable usando unicamente un control suave [18]. Esto implica que el análisis del sistema en su forma no lineal es necesario y para ello se diseñara un control de alta variación  $u_h^{sm}$  para llevar los estados al punto  $\mathbf{x} = 0$ .

## Estrategia de Control

Sean las funciones de variable real  $\alpha_{i,j}^p$  definidas como  $\alpha_{i,j}^p : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $p \in \{1, 0\}$  expresadas explícitamente por  $\alpha_{0,1}^0 = m_{00}\alpha_0$ ,  $\alpha_{1,1}^0 = m_{00}\alpha_0$ ,  $\alpha_{0,1}^1 = -m_{10}\alpha_1$ ,  $\alpha_{0,1}^1 = m_{10}\alpha_1$  y considere el control de alta variación de memoria 2 definido por la ley de conmutación:  
Para  $k = 0$ ,  $t \in [0, h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} m_{00}\alpha_0(\mathbf{x}_0) + m_{10}\alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ m_{00}\alpha_0(\mathbf{x}_0) - m_{10}\alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

Para  $k = n$   $t \in [nh, (n+1)h]$ :

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}(nh), t - nh) = \begin{cases} m_{00}\alpha_0(\mathbf{x}(nh)) + m_{10}\alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ m_{00}\alpha_0(\mathbf{x}(nh)) - m_{10}\alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

El bracket de Lie correspondiente a los campos vectores  $f, g$  para el sistema (6.42) esta dado por:

$$ad_g f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l} & 0 & 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l}x_1 + x_3^3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y para  $k \geq 2$  tendremos  $ad_g^k f = 0$ . Aplicando la formula de Campbell Baker Hausdorff obtenemos una expresión para el estado resultante  $\mathbf{x}(h)$  para el sistema (6.42) con la ley de control  $u_h^{sm}$  con condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  de la forma  $\mathbf{x}(h) = q_h^{x_0}(\mathbf{x}_0)$  donde  $l \rightarrow q_t^{x_0}(p)$  denota la curva integral a través de  $p$  para el campo vector suave sobre  $\mathbb{R}^4 \setminus S$  definido como:

$$q^{x_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \alpha_0(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}) + \alpha_1(\mathbf{x}_0)ad_g f(\mathbf{x})$$

El sistema infinitesimal correspondiente a la inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x})$  en coordenadas locales esta dado por la expresión:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l}x_1 + x_3^3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 + \alpha_1 \\ \dot{x}_4 &= \alpha_0 \end{aligned} \tag{6.43}$$

La elección del control  $\alpha_0 = -Qx_4$ ,  $Q \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha_1 = \sum_{i=1}^3 \eta_i x_i$ ,  $\eta_i \in \mathbb{R}^+$  permite llevar los estados del sistema (6.43) al punto de equilibrio  $\mathbf{x}=0$ . Los resultados de la simulación del sistema infinitesimal (6.43) se muestran en la figura (6.18). En las figuras (6.19) y (6.20) se exhiben los resultados de la simulación del sistema (6.42) así como el comportamiento de las variables físicas del sistema (6.37) con la aplicación del control de variación con los siguientes valores  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $m_1 = 0.1 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 500 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 1000 \text{ N/m}$ , condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (0.1, 0, 0, 0)$ ,  $h = 0.03$  usando el método de integración de Runge-Kutta con un tamaño de paso de 0.001.

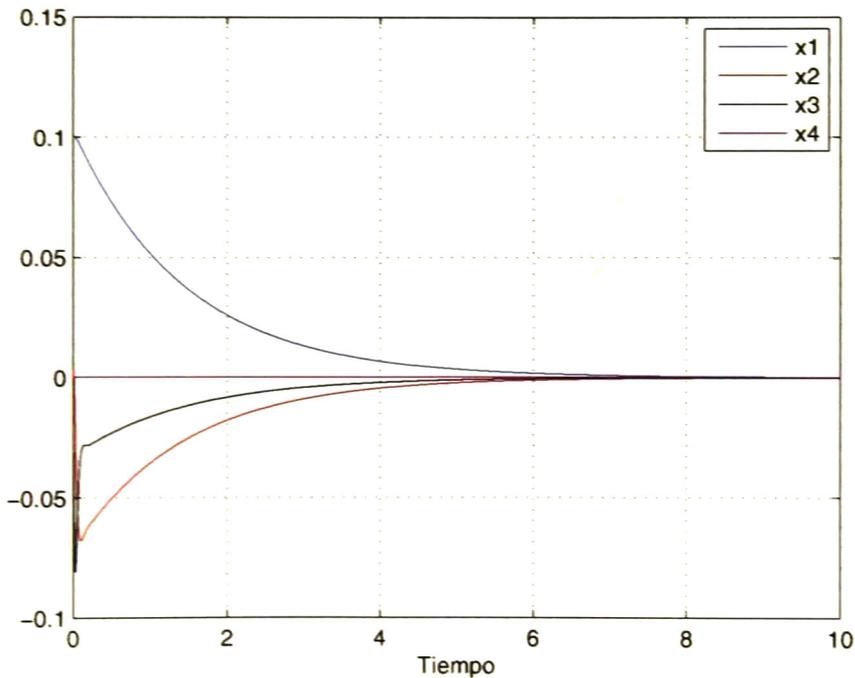


Figura 6.18: Respuesta del sistema infinitesimal masa resorte péndulo invertido

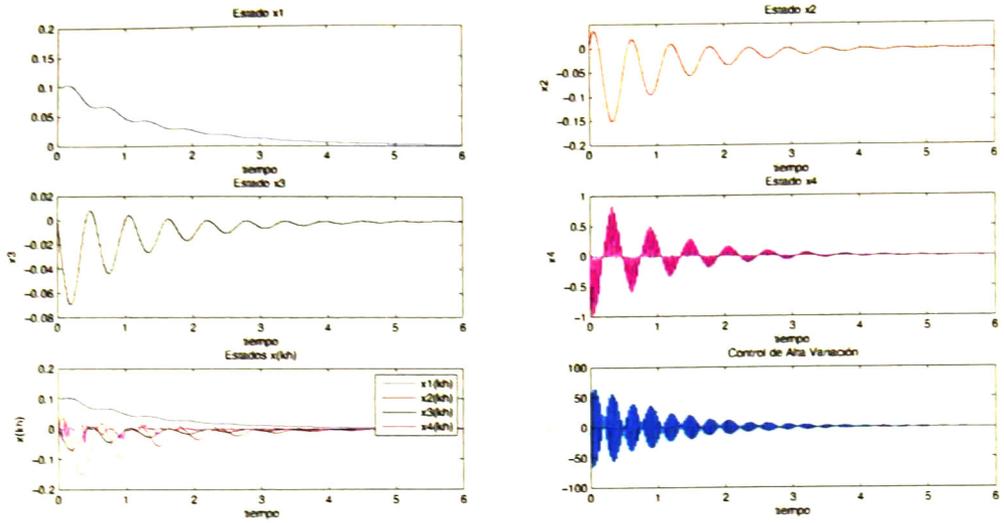


Figura 6.19: Control de alta variación

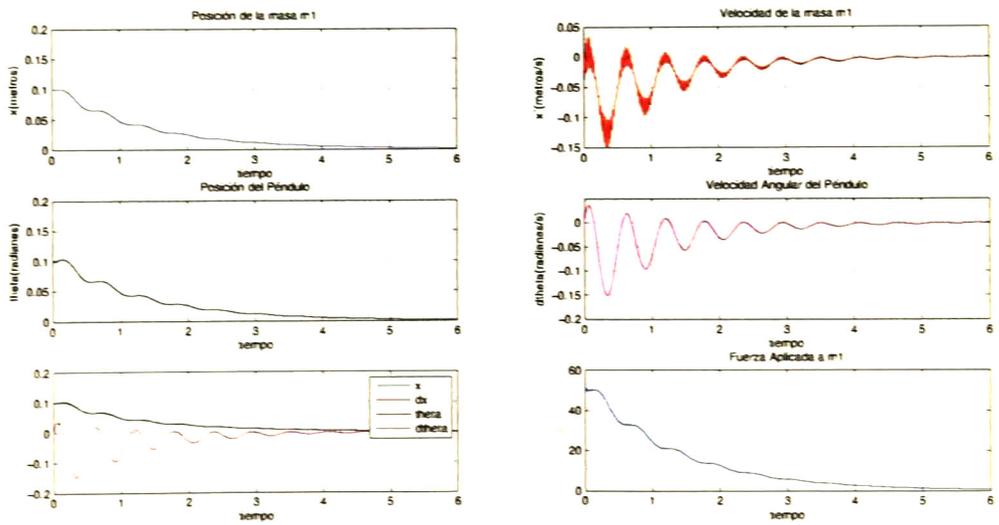


Figura 6.20: Control de alta variación aplicado al sistema masa resorte péndulo invertido

## 6.7 Sistema Balancín Pelota

### Descripción del Sistema

El sistema balancín pelota es uno de los sistemas subactuados mas famosos para poner a prueba la eficacia de diversas leyes de control moderno. El sistema consiste en una barra rotatoria sujeta en su centro con el eje de un motor y una pequeña pelota que rueda libremente sobre la superficie de la barra. Por medio de la acción del torque se busca posicionar a la pelota en un punto particular de la viga. Como se describirá mas adelante, el sistema balancín pelota es un sistema no lineal triangular en cascada. El espacio de configuración esta determinado por el sector circular y su reflexión, donde el eje de las ordenadas proporciona el radio de simetria. En la figura 6.21 se muestra la estructura de el sistema junto con su espacio de configuración definido a través de la linea temporal  $t$ . El tamaño del sector circular va a depender de los parametros físicos del sistema y de la condición crítica de que la bola no pierda el contacto con la viga. Denotemos con  $\mathcal{S}$  al sector circular  $OPR$  quitando sus puntos frontera, es decir  $\mathcal{S} = OPR - \partial(OPR)$ . Considere el abierto  $U = \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \cap \mathcal{S}$  y el homeomorfismo  $\phi$  definido como:

$$\phi(x_1, x_2) = (r, \tan^{-1}(x_1, x_2))$$

donde:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{x_1}{x_2} \end{aligned}$$

Entonces tendremos que el mapeo inverso  $\phi^{-1}$  esta dado de manera natural por:

$$\phi^{-1}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Sea  $z = (r, \theta)$ . La matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

es no singular para  $r \neq 0$

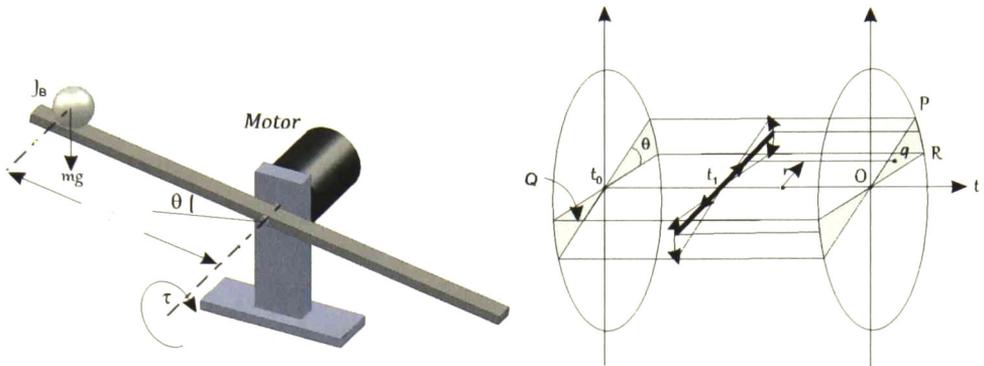


Figura 6.21: Sistema balancín pelota y espacio de configuración

## Modelo Dinámico

En la deducción del modelo asumiremos las siguientes hipótesis:

1. La pelota no se desliza sobre la viga.
  - 2.- Se desprecia la fuerza de fricción en el sistema.
  - 3.- La pelota se asume homogénea y perfectamente esférica.
1. Las dinámicas son tales que la pelota nunca pierde contacto con la viga

Sea  $J$  el momento de inercia de la barra alrededor de su centro (pivote),  $J_B$  el momento de inercia de la pelota con respecto a su centro geométrico,  $R$  es el radio de la bola y  $m$  es su masa. El Lagrangiano del sistema está dado por la expresión:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( (J + J_B + mr^2) \dot{\theta}^2 + \left( m + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 \right) - mgr \sin \theta \quad (6.44)$$

Aplicamos las ecuaciones de Euler Lagrange (4.9) en (6.44) con lo que obtenemos las ecuaciones dinámicas del sistema:

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{J_B}{R^2}\right) \ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\text{sen}\theta &= 0 \\ (mr^2 + J + J_B) \ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mg\text{rcos}\theta &= \tau \end{aligned} \quad (6.45)$$

o en forma (4.11) donde:

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{pmatrix} m + \frac{J_B}{R^2} & 0 \\ 0 & mr^2 + J + J_B \end{pmatrix} \\ C(q\dot{q}) &= \begin{pmatrix} 0 & -mr\dot{\theta} \\ mr\dot{\theta} & mr\dot{r} \end{pmatrix} \\ G(q) &= \begin{pmatrix} mg\text{sen}\theta \\ mg\text{rcos}\theta \end{pmatrix} \\ \tau &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definiendo las variables de estado:  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \dot{r}$ ,  $x_3 = \theta$ ,  $x_4 = \dot{\theta}$ , la constante paramétrica  $B = \frac{mR^2}{J_B + mR^2}$ , y la transformación de la ley de control:

$$\tau = (mr^2 + J + J_B) u + 2mx_1x_2x_4 + mgx_1\text{cos}x_3$$

obtendremos la siguiente realización de el sistema en el espacio de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= Bx_1x_4^2 - Bg\text{sen}x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (6.46)$$

Donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$ . Observese que para este sistema, la no linealidad crítica esta representada por la fuerza centrífuga  $Bx_1x_4^2$  y la fuerza gravitacional  $Bg\text{sen}(x_3)$  las cuales determinan la velocidad y posición de la pelota sobre la viga. La siguiente secuencia de derivadas de la salida  $y = h(\mathbf{x}) = x_1$  del sistema nos dará el valor del grado relativo del sistema:

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= L_f h(x) = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = L_f^2 h(x) = Bx_1x_4^2 - Bg\text{sen}(x_3) \\ \dddot{y} &= L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) = Bx_2x_4^2 - Bgx_4\text{cos}(x_3) + 2Bx_2x_4u \end{aligned}$$

La señal de control  $u$  aparece en la tercer derivada de la salida  $y = h(\mathbf{x})$  entonces el grado relativo del sistema es  $r = 3$  excepto en la singularidad donde  $x_1 x_4 = 0$ . Es claro entonces que este sistema no tiene grado relativo bien definido en el punto singular del espacio de fase anteriormente descrito y por tanto técnica de linealización por retroalimentación no aplica para este sistema, además este sistema no satisface la condición de integrabilidad, la cual requiere la involutividad de la distribución  $\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{g, ad_f g, ad_f^2 g, ad_f^3 g\}$ , ya que:

$$[g, ad_f^2 g] = \begin{pmatrix} 2Bx_1 \\ -2Bx_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No pertenece a la distribución. Si aplicamos el proceso de linealización por medio de la matriz Jacobiana alrededor del punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = 0$ ,  $u^* = 0$ , el modelo lineal resultante del sistema (6.46) esta dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Bgx_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{6.47}$$

## Estrategia de Control

El caso lineal puede resolverse llevando la representación del sistema a la forma normal de Brunovski y aplicar el control de variación tal como se hizo anteriormente; por lo tanto, solo nos enfocaremos para el caso mas interesante, que es el no lineal. Considere las funciones  $\alpha_{i,j}^p$  definidas como  $\alpha_{i,j}^p : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $p \in \{1, 0\}$  expresadas explícitamente por  $\alpha_{0,1}^0 = m_{00}\alpha_0$ ,  $\alpha_{1,1}^0 = m_{00}\alpha_0$ ,  $\alpha_{0,1}^1 = -m_{10}\alpha_1$ ,  $\alpha_{1,1}^1 = m_{10}\alpha_1$  donde  $\alpha_{i,j}^0$  son funciones acotadas sobre una vecindad compacta de  $\mathbf{x}_e$  y las funciones  $\alpha_{i,j}^1$  tienden a cero conforme las trayectorias o estados se acercan al punto  $\mathbf{x}_e$ . Para estabilizar el sistema aplicaremos un control de alta variación deslizante de memoria 2 definido por la ley de conmutación:

Para  $k = 0$ ,  $t \in [0, h]$

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}_0, t) = \begin{cases} m_{00}\alpha_0(\mathbf{x}_0) + m_{10}\alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ m_{00}\alpha_0(\mathbf{x}_0) - m_{10}\alpha_1(\mathbf{x}_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

Para  $k = n$   $t \in [nh, (n+1)h]$ :

$$u_h^{sm}(\mathbf{x}(nh), t - nh) = \begin{cases} m_{00}\alpha_0(\mathbf{x}(nh)) + m_{10}\alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ m_{00}\alpha_0(\mathbf{x}(nh)) - m_{10}\alpha_1(\mathbf{x}(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

Los brackets de Lie construidos a partir de los campos vectores  $f, g$  del sistema (6.46) se exhiben a continuación:

$$\begin{aligned} ad_g f &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ Bx_4^2 & 0 & -Bg\cos x_3 & 2Bx_1x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ Bx_1x_4^2 - Bg\sin x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2Bx_1x_4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad_g^2 f &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2Bx_4 & 0 & 0 & 2Bx_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2Bx_1x_4 - Bg\sin x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2Bx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El último bracket de Lie es constante y en consecuencia  $ad_g^k = 0 \quad \forall k \geq 3$ . Aplicando la formula de Campbell Baker Hausdorff obtenemos una expresión para el estado resultante  $\mathbf{x}(h)$  para el sistema (6.46) con la ley de control  $u_h^{sm}$  con condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , de la forma  $\mathbf{x}(h) = q_h^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{\mathbf{x}_0}(p)$  denota la curva integral a través de  $p$  para el campo vector suave sobre  $\mathbb{R}^4 \setminus S$  definido como:

$$q^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \alpha_1(\mathbf{x}_0) ad_g f(\mathbf{x}) + \frac{\alpha_1^2}{2} \alpha_0(\mathbf{x}_0) g(\mathbf{x}) + r^{h, \mathbf{x}_0}(0)$$

El sistema infinitesimal correspondiente a la inclusión diferencial  $\dot{\mathbf{x}} \in F^\alpha(\mathbf{x})$  esta dado por la expresión:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \alpha_1(\mathbf{x}_0) ad_g f(\mathbf{x}) + \frac{\alpha_1^2}{2} ad_g f^2 + \alpha_0(\mathbf{x}_0) g(\mathbf{x})$$

La expresión del sistema infinitesimal en coordenadas locales es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ Bx_1x_4^2 - Bgsenx_3 \\ \dot{x}_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2Bx_1x_4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1^2 \begin{pmatrix} 0 \\ Bx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

Para fines prácticos considere  $B = g = 1$ . Si elegimos  $\alpha_0 = -K\|\mathbf{x}\|\text{sign}(x_4)$  la dinámica del sistema (6.48) se reduce a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ senx_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1^2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

Observese que la aparición del control  $\alpha^2$  representa una dificultad para el diseño y elección de  $\alpha_1$ . Tratando a  $x_4$  como un control virtual es posible estabilizar asintóticamente el sistema reducido:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -sen(x_3) + x_1\alpha_1^2 \\ \dot{x}_3 &= \alpha_1 \end{aligned}$$

y derivar la ley de control para el sistema completo usando backstepping. En [19] se propone una ley de control anidada de saturación:

$$\alpha_1(\mathbf{x}) = -\sigma_3(y_3 + \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1))) \quad (6.50)$$

donde:

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 &= -x_2 + x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\sigma_i(s) = \begin{cases} M_i & s < -M_i \\ s & |s| \leq M_i \\ M_i & s > M_i \end{cases} \quad (6.51)$$

para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Con  $M_3$ , la magnitud de la expresión  $x_1\alpha_1^2$  en la dinámica reducida (6.49) puede ser disminuida sobre cualquier conjunto compacto. En [20], por medio de la reducción del nivel de saturación  $M_3$  puede ampliarse la región de atracción. El siguiente resultado [21] proporciona las condiciones para que el punto de equilibrio de (6.49) sea global asintóticamente estable y local exponencialmente estable:

**Teorema 18** El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema (6.49) es global asintóticamente estable y local exponencialmente estable por la ley de control:

$$\alpha_1 = -\sigma_3(x_3) - \mu(x) \sigma_2 \left[ \frac{x_3 - x_2}{\mu(x)} + \sigma_1 \left( \frac{x_3 - x_1 - 2x_2}{\mu(x)} \right) \right] \quad (6.52)$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}$$

Si reemplazamos la función de saturación (6.52) por la función  $\tan^{-1}$  obtenemos la siguiente versión suave:

$$\alpha_1(x) = -2y_3 - \frac{18}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\pi}{18} \xi \right) \quad (6.53)$$

donde:

$$\xi = \frac{y_2}{\mu(x)} + \frac{20}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\pi}{20} \left( \frac{5y_1}{\mu(x)} \right) \right)$$

En la grafica 6.22 se muestra la simulación de la respuesta del sistema infinitesimal con la elección de control  $\alpha_0 = -K\|x\|\text{sign}(x_4)$  y  $\alpha_1$  como en (6.53) con las condiciones iniciales  $x = (0.2, 0, 0, 1.745, 0)$ . La grafica 6.23 muestra la señal de control  $\alpha_1$  aplicada al sistema infinitesimal (6.48) y finalmente en la grafica 6.24 exhibe los resultados de la simulación del sistema balancin pelota (6.46) con  $h = 0.01$ , usando el método de integración de Runge Kutta con un tamaño de paso de 0.001

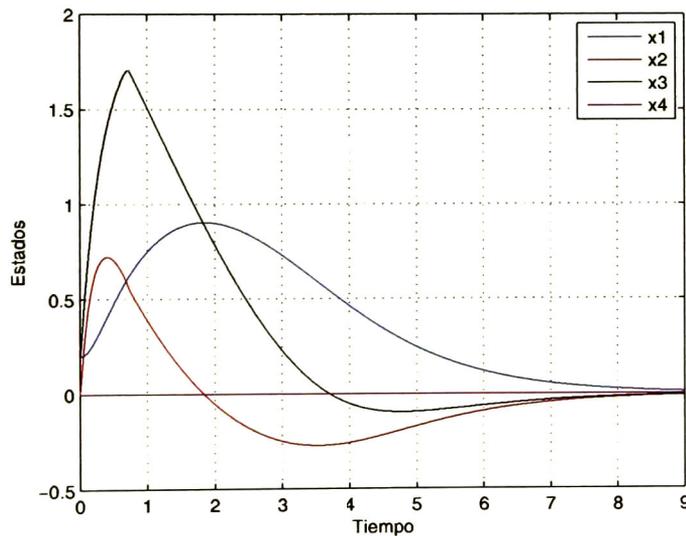


Figura 6.22: Respuesta del sistema infinitesimal balancin pelota

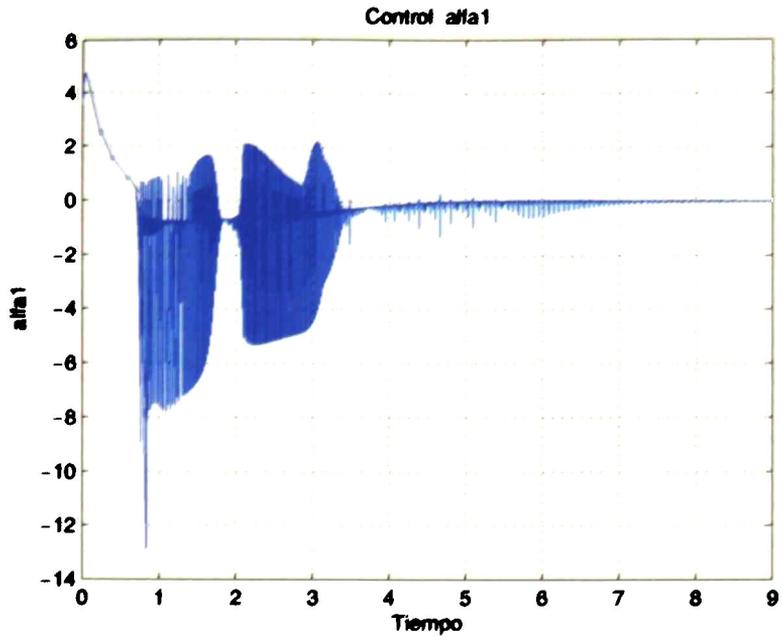


Figura 6.23: Control  $\alpha_1$

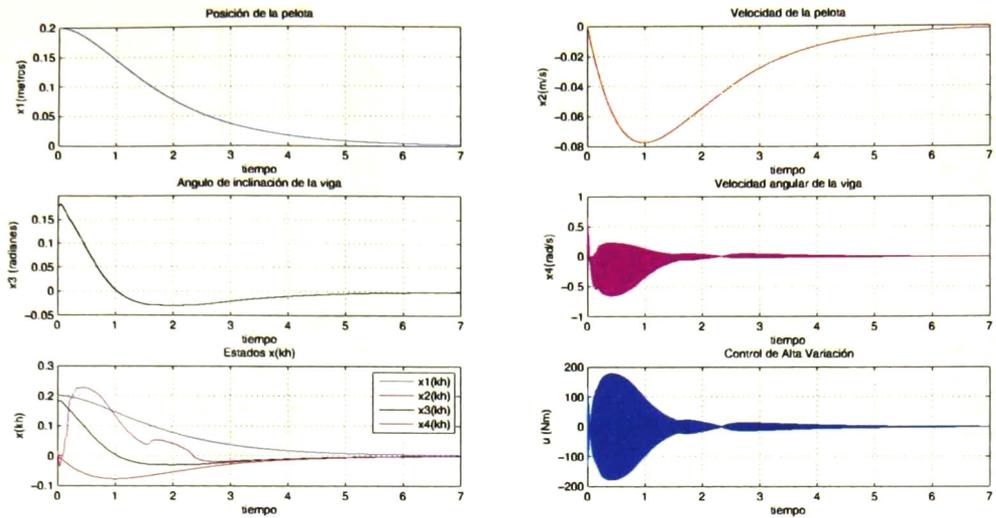


Figura 6.24: Control de alta variación aplicado al sistema balancín pelota

## 6.8. Pendubot

### Descripción del Sistema

El pendubot, es un sistema subactuado conformado por dos eslabones rígidos unidos por una articulación planar, en el cual uno de ellos es controlado por torque y el segundo eslabón esta libre. Las coordenadas generalizadas necesarias para describir el movimiento del sistema son el desplazamiento angular del primer y segundo eslabón  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente. El espacio de configuración del pendubot puede generarse cocientando el cuadrado  $I^2 = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  por medio de la identificación  $(x, 0) \sim (x, 1)$  para  $0 \leq x \leq 2\pi$  y  $(0, y) \sim (1, y)$  para  $0 \leq y \leq 2\pi$ . El espacio cociente resultante  $I^2 / \sim$  resulta homeomorfo  $S^1 \times S^1$  (ver figura 6.25). Para los intervalos  $0 \leq q_1 \leq 2\pi$ ,  $0 \leq q_2 \leq 2\pi$ ,  $0 < b < a$ , la siguiente función:

$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$$

$$\phi(q_1, q_2) = ((a + b \cos q_1) \cos q_2, (a + b \cos q_1) \sin q_2, b \sin q_1)$$

proporciona el homeomorfismo correspondiente entre la variedad  $S^1 \times S^1$  y el Toro  $T$ .

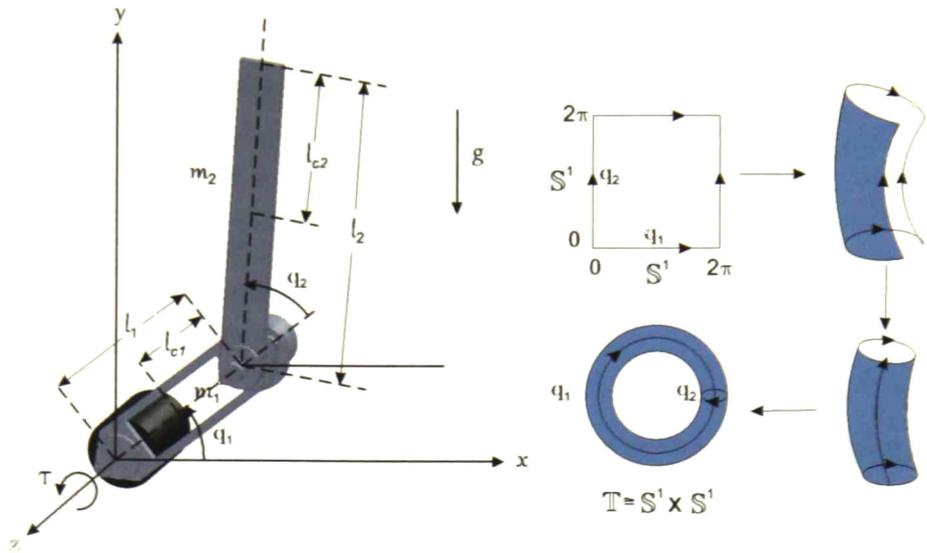


Figura 6.25: Sistema pendubot y espacio de configuración  $Q$

## Modelo Dinámico

Para la obtención del modelo dinámico se desprecian las fuerzas de fricción. El Lagrangiano del sistema pendubot está dado por:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^2 m_i g h_i \quad (6.54)$$

donde:

$$\begin{aligned} D_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 \\ D_{12} &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ D_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ h_1 &= l_{c1} \sin q_1 \\ h_2 &= l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin (q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange a la expresión (6.54) obtenemos las ecuaciones dinámicas del sistema en la forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Con las matrices de inercia, de Coriolis y de gravedad dadas por:

$$M(q) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{pmatrix}$$

$$C'(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -2m_2l_1l_{c2}\dot{q}_2\text{sen}q_2 & -m_2l_1l_{c2}\dot{q}_2\text{sen}q_2 \\ m_2l_1l_{c2}\dot{q}_1\text{sen}q_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(q) = \begin{pmatrix} m_1gl_{c1}\cos q_1 + m_2gl_1\cos q_1 + m_2gl_{c2}\cos(q_1 + q_2) \\ m_2gl_{c2}\cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sean  $x_1 = q_1$ ,  $x_2 = q_2$ ,  $x_3 = \dot{q}_1$ ,  $x_4 = \dot{q}_2$ ,  $\tau = u$ . La representación en el espacio de estado del sistema pendubot esta dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u(t)$$

con los campos vectores:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ b_1 \left( \frac{D_{12}C_2}{D_{22}} + \frac{D_{12}G_2}{D_{22}} - C_1 - G_1 \right) \\ b_2 \left( \frac{D_{12}C_2}{D_{22}} + \frac{D_{12}G_2}{D_{22}} - C_1 - G_1 \right) - \frac{C_2}{D_{22}} - \frac{G_2}{D_{22}} \end{pmatrix} \quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Las funciones  $C_i$ ,  $G_i$  y  $b_i$  estan determinadas por las expresiones:

$$C_1 = -2m_2l_1l_{c2}x_3x_4\text{sen}x_2 - m_2l_1l_{c2}x_4^2\text{sen}x_2$$

$$C_2 = m_2l_1l_{c2}x_3^2\text{sen}x_2$$

$$b_1 = \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}$$

$$b_2 = -\frac{D_{12}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}$$

(6.55)

Sean  $a_i$  los parametros:

$$a_1 = m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + I_1$$

$$a_2 = m_2l_{c2}^2 + I_2$$

$$a_3 = m_2l_1l_{c2}$$

$$a_4 = m_1l_{c1} + m_2l_1$$

$$a_5 = m_2l_{c2}$$

La linealización del sistema alrededor de los puntos de equilibrio:  $\mathbf{x}^* = (\pi/2, 0, 0, 0), \mathbf{u}^* = 0$  esta dada por:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(a_2 a_4 - a_3 a_5)g}{a_1 a_2 - a_3^2} & -\frac{a_3 a_5 g}{a_1 a_2 - a_3^2} & 0 & 0 \\ \frac{g(a_5(a_1 + a_3) - a_4(a_2 + a_3))}{a_1 a_2 - a_3^2} & \frac{g(a_5(a_1 + a_3))}{a_1 a_2 - a_3^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

$$\mathbf{B} = g(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_2}{a_1 a_2 - a_3^2} \\ \frac{-a_2 - a_3}{a_1 a_2 - a_3^2} \end{pmatrix} \quad (6.57)$$

Obteniendo así el modelo linealizado del pendubot:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(a_2 a_4 - a_3 a_5)g}{a_1 a_2 - a_3^2} & -\frac{a_3 a_5 g}{a_1 a_2 - a_3^2} & 0 & 0 \\ \frac{g(a_5(a_1 + a_3) - a_4(a_2 + a_3))}{a_1 a_2 - a_3^2} & \frac{g(a_5(a_1 + a_3))}{a_1 a_2 - a_3^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_2}{a_1 a_2 - a_3^2} \\ \frac{-a_2 - a_3}{a_1 a_2 - a_3^2} \end{pmatrix} u \quad (6.58)$$

El modelo obtenido es un sistema controlable ya que:

$$|(\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \mathbf{A}^3\mathbf{B})| = \frac{g^2 a_5^2 a_3^2}{(a_1 a_2 - a_3^2)^4}$$

Sean:

$$\begin{aligned} \zeta_{31} &= \frac{(a_2 a_4 - a_3 a_5)g}{a_1 a_2 - a_3^2} \\ \zeta_{32} &= -\frac{a_3 a_5 g}{a_1 a_2 - a_3^2} \\ \zeta_{41} &= \frac{g(a_5(a_1 + a_3) - a_4(a_2 + a_3))}{a_1 a_2 - a_3^2} \\ \zeta_{42} &= \frac{g(a_5(a_1 + a_3))}{a_1 a_2 - a_3^2} \\ \eta_1 &= \frac{a_2}{a_1 a_2 - a_3^2} \\ \eta_2 &= \frac{-a_2 - a_3}{a_1 a_2 - a_3^2} \end{aligned}$$

La siguiente matriz de transformación  $\mathbf{T}_1$  aplicada al sistema (6.58):

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\eta_1 \eta_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

Lo lleva a la siguiente forma regular  $\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}u$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \eta_1 \eta_2^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2^{-1} \\ \zeta_{31} - \zeta_{41} \eta_1 \eta_2^{-1} & \zeta_{32} - \zeta_{42} \eta_1 \eta_2^{-1} & 0 & 0 \\ \zeta_{41} \eta_2 & \zeta_{42} \eta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta_2^2 \end{pmatrix} u \quad (6.60)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \mathbf{TAT}^{-1} \\ \bar{B} &= \mathbf{TB} \end{aligned}$$

La matriz de controlabilidad del sistema transformado es ahora:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 & c_{14} \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ c_{41} & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.61)$$

donde:

$$\begin{aligned} c_{12} &= \eta_1 \eta_2 \\ c_{14} &= \eta_1 \eta_2 (\zeta_{31} - \zeta_{41} \eta_1 \eta_2^{-1}) - \eta_2 (\zeta_{32} - \zeta_{42} \eta_1 \eta_2^{-1}) + \eta_1 \eta_2 (\zeta_{41} \eta_1 - \zeta_{42}) \\ c_{22} &= -\eta_2 \\ c_{24} &= -\eta_2 (\zeta_{41} \eta_1 - \zeta_{42}) \\ c_{33} &= \eta_1 \eta_2 (\zeta_{31} - \zeta_{41} \eta_1 \eta_2^{-1}) - \eta_2 (\zeta_{32} - \zeta_{42} \eta_1 \eta_2^{-1}) \\ c_{41} &= b_2^2 \\ c_{42} &= \eta_2^2 \\ c_{43} &= \eta_2^2 (\zeta_{41} \eta_1 - \zeta_{42}) \end{aligned}$$

Al sistema (6.60) le aplicamos la transformación  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{CW}$  donde  $\mathbf{C}$  es la matriz de controlabilidad del sistema (6.60) y  $\mathbf{W}$  es la matriz:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \kappa_1(\zeta, \eta) & \kappa_2(\zeta, \eta) & \kappa_3(\zeta, \eta) & 1 \\ \kappa_2(\zeta, \eta) & \kappa_3(\zeta, \eta) & 1 & 0 \\ \kappa_3(\zeta, \eta) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.62)$$

donde  $\kappa_i$  son los coeficientes del polinomio característico  $p(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}|$ , obteniendo finalmente el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (6.63)$$

## Diseño del Controlador

Para este sistema aplicaremos el control variacional  $u_h^{sm}$  de memoria 2 dado por:

$$u_h^{sm}(z_0, t) = \begin{cases} m_{00}\alpha_0(z_0) + m_{10}\alpha_1(z_0)/h, & \text{si } 0 \leq t < h/2 \\ m_{00}\alpha_0(z_0) - m_{10}\alpha_1(z_0)/h, & \text{si } h/2 \leq t < h \end{cases}$$

Para  $k = n$ ,  $t \in [nh, (n+1)h]$ :

$$u_h^{sm}(z(nh), t - nh) = \begin{cases} m_{00}\alpha_0(z(nh)) + m_{10}\alpha_1(z(nh))/h, & \text{si } nh \leq t < (2n+1)h/2 \\ m_{00}\alpha_0(z(nh)) - m_{10}\alpha_1(z(nh))/h, & \text{si } \frac{(2n+1)h}{2} \leq t < (n+1)h \end{cases}$$

Aplicando la formula de Campbell Baker Hausdorff obtenemos una expresión para el estado resultante  $z(h)$  para el sistema (6.63) cuya representación esta en la forma canónica de Brunovsky con la ley de control  $u_h^{sm}$  con condiciones iniciales  $z(0) = z_0$  de la forma  $z(h) = q_t^{z_0}(z_0)$  donde  $t \rightarrow q_t^{z_0}(p)$  denota la curva integral a través de  $p$  para el campo vector suave sobre  $\mathbb{R}^4 \setminus S$  definido como:

$$q^{z_0}(z) = f(z) + \alpha_1(z_0) ad_g f(z) + \alpha_0(z) g(z) + r^{h, z_0}(0)$$

El bracket de Lie asociado al sistema (6.63) es simplemente:

$$ad_g f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La expresión del sistema infinitesimal en coordenadas locales esta dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \alpha_1(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_0(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.64)$$

La elección del control  $\alpha_0(z) = -K \text{sign}(z_4)$ ,  $\alpha_1(z) = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3$  permitirá estabilizar el sistema infinitesimal (6.64) en el punto  $z^* = 0$ . Los resultados de la simulación del sistema pendubot en lazo cerrado se exhiben en la grafica 6.26 con los siguientes parámetros  $l_1 = 0.27m$ ,  $l_2 = 0.38m$ ,  $l_{c1} = 0.135m$ ,  $l_{c2} = 0.2m$ ,  $m_1 = 0.270kg$ ,  $m_2 = 0.340kg$ , bajo las condiciones iniciales  $x = (-1.2, 0.175, 0, -0.4)$  con un valor de  $h = 0.062$ , usando el método de integración de Runge-Kutta con un tamaño de paso de 0.001

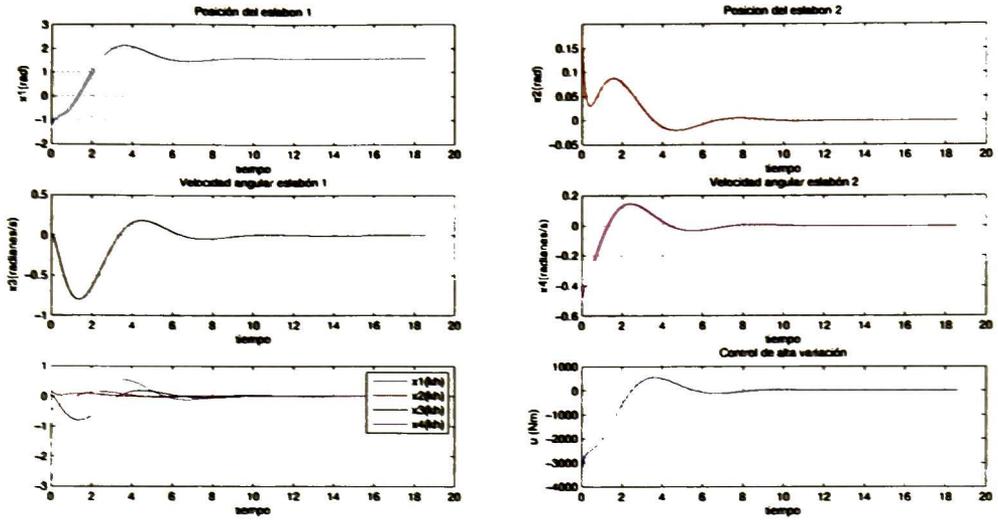


Figura 6.26: Control de alta variación aplicado al pendubot

# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1. Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo, se logró diseñar el control de alta variación para un espectro amplio de sistemas mecánicos y electromecánicos, los cuales presentaron las siguientes características frente al control:

1. El control de alta variación requiere que el campo vector controlado  $g$  sea constante. Si no es el caso, se requiere aplicar una transformación del sistema para cumplir este requerimiento. Un campo vector  $g$  no constante provoca que la ley de conmutación cambie y con este efecto producir la no convergencia de los estados al punto de equilibrio. En el caso no lineal, la obtención del sistema infinitesimal, así como el proceso de estabilizarlo puede ser una tarea sumamente compleja por la aparición de controles en forma polinomial. Por ejemplo para el sistema pendubot es posible que la forma normal descrita en [22] nos permita resolver el caso no lineal. La manera de abordar el ámbito no lineal es única para cada planta y requiere consideraciones muy especiales para el control tal como se mostró en el caso del sistema balancín pelota.
2. Existe un compromiso entre la convergencia de los estados y el tamaño de paso  $h$  seleccionado. Entre más pequeño es el intervalo  $h$  más parecida es la respuesta en el régimen estable de la planta con su correspondiente sistema infinitesimal, sin embargo, la magnitud del control puede incrementarse por mucho ya que como pudo verse la cantidad  $h$  es un denominador.
3. Este tipo de control permite estabilizar sistemas usando variedades en las que los modos deslizantes estándar fallan. En virtud de esta propiedad, la selección de la variedad deslizante es mucho más amplia.

## **7.2. Trabajo Futuro**

Como trabajo futuro se presentan los siguientes puntos:

1. Implementación en tiempo real del control en los sistemas electromecánicos estudiados.
2. Proponer modificaciones de la técnica para realizar seguimiento de trayectorias.
3. Investigar la capacidad del control para rechazar perturbaciones

# Bibliografía

- [1] R. Hirschorn. Sliding mode control variations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(3). March 2007.
- [2] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag., New York, 1995.
- [3] R. W. Brockett. System theory on group manifolds and coset spaces. *Siam J. Control*, 10:265–284, 1971.
- [4] R. W. Brockett. Nonlinear systems and differential geometry. *Proceedings of the IEEE*, 64(1):61–72. 1976.
- [5] H. J. Sussmann. Controllability of nonlinear systems. *Journal of Differential Equations*, 12:95–116, 1972.
- [6] P. E. Crouch. Geometric structures in system theory. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 128:242–252, 1981.
- [7] F. Bullo and A. D. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems*. Springer, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 2005.
- [8] J. W. Milnor. Analytic proof of the hairy ball theorem and the brouwer fixed point theorem. *The American Mathematical Monthly*, 85(7):521 – 524, 1978.
- [9] A. G. Lukyanov and V. I. Utkin. Ways of reducing equation of dynamic systems to regular form. *Automatitacion and Remote Control*, 42:5–13, 1981.
- [10] V. S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- [11] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010. USA. 2003.
- [12] R. Hirschorn and A. D. Lewis. High order variations for families of vector fields. *SIAM J. Control Optimization*, 43(1), June 2004.

- [13] R. W. Brockett. Pattern generation and the control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 48:1699–1711, 2003.
- [14] V. Cerny and J. Hrusak. Synthesis of control law for nonlinear systems based on metric equivalence. *Proceedings of the IASTED International Conference Control and Applications CA*, 2002.
- [15] S. H. Zak and C. A. Maccarley. State feedback control of nonlinear systems. *Intern. J. Control*, 5(43):1497–1541, 1986.
- [16] S. Ozgoli and H. D. Taghirad. A survey on the control of flexible joint robots. *Asian Journal of Control*, 8(4):1–15, 2006.
- [17] H. J. Marquez. *Nonlinear Control Systems*. Wiley Interscience, New Jersey, 2003.
- [18] C. Rui, M. Reyhanoglu, I. Kolmanovsky, S. Cho, and N. H. McClamroch. Nonsmooth stabilization of an underactuated unstable two degrees of freedom mechanical systems. *Conference on Decision and Control*, pages 3998–4003, 1997.
- [19] A. R. Teel. *Feedback Stabilization Nonlinear Solutions to Inherently Nonlinear Problems*. PhD Dissertation, University of California, Berkeley, 1992.
- [20] A. R. Teel. Semi-global stabilization of the ball beam using output feedback. *Proc. of the ACC*, 1993.
- [21] C. Barbu, R. Sepulchre, W. Lin, and P. V. Kokotović. Global asymptotic stabilization of the ball beam systems. *Decision and Control*, 52(3):2351 – 2355, December 1997.
- [22] R. Olfati Saber. Fixed point controllers and stabilization of the car pole system and rotating pendulum. *Decision and Control*, pages 1174–1181, 1999.
- [23] R. Hirschorn and A. D. Lewis. Geometric sliding mode control: The linear and linearised theory. *Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control USA*, December 2003.
- [24] R. Hirschorn. Generalized sliding mode control for multi input nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(9), September 2006.
- [25] F. Bullo. Averaging and vibrational control of mechanical systems. *SIAM J. Control Optimization*, 41(2):542–562, June 2002.
- [26] H. Sira Ramirez. Differential geometric methods in variable structure systems. *Int. J. Control*, 48(4):1359–1391, 1988.

- [27] H. J. Sussman. A general theorem on local controllability. *SIAM J. Control Optimization*, 25:158–194, 1987.
- [28] H. J. Sussman and V. Jurdjevic. Controllability of nonlinear systems. *J. Diff. Equat.*, 12:95–166, 1972.
- [29] K. Furuta, H. Nishida, and S. Mori. Control of unstable mechanical systems: Control of pendulum. *International Journal of Control*, 23:673–692, 1976.
- [30] W. Yu and F. Ortiz. Stability analysis of pd regulation for ball an beam system. *Proceeding of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 517–522, 2005.
- [31] A. M. Bloch and P. E. Crouch. Nonholonomic control systems on riemannian manifolds. *SIAM J. Control Optimization*, pages 126–148, 1995.
- [32] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuos Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [33] V. I. Utkin. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1992.
- [34] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer Verlag., New York, 1988.
- [35] R. W. Brockett. *Finite Dimensional Linear Systems*. Wiley, New York, 1970.
- [36] J. E. Slotine. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall., Upper Saddle River, NJ, 1991.
- [37] C. Edwards and S. K. Spurgeon. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor and Francis., London, New York, Philadelphia, Singapore, 1988.
- [38] S. S. Chern, W. H. Chen, and K. S. Lam. *Lectures on Differential Geometry*. World Scientific, Farrer Road. Singapore, 2000.
- [39] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds an Riemannian Geometry*. Academic Press, 1250 Sixth Avenue, San Diego California, 1986.
- [40] A. Bonfiglioli and R. Fulci. *Topics in Noncommutative Algebra the Theorem of Campbell Baker Hausdorff and Dynkin*. Springer, San Diego, 2012.
- [41] A. W. Knap. *Lie Groups Beyond and Introduction*. Springer, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 2002.
- [42] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1989.

- [43] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2002.
- [44] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1995.
- [45] C. F. Lin. *Advanced Control Systems Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1994.
- [46] S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1999.
- [47] R. E. Skelton. *Dynamic Systems Control*. Wiley and Sons, New Jersey, 1988.
- [48] E. R. Westervelt, J. W. Grizzle, C. Chevallereau, J. Choi, and B. Morris. *Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion*. CRC Press, 270 Madison Avenue New York 10016, 2007.
- [49] M. W Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley and Sons, New Jersey, 1989.
- [50] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotović. Nonlinear control via approximate input output linearization: The ball beam example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3):392 – 398, March 1992.
- [51] R. S. Strichartz. The campbell baker hausdorff dynkin formula and solutions of differential equations. *Journal of Functional Analysis*, 72(2):320 – 345, June 1987.
- [52] H. Michalska and M. Torres Torritty. Feedback stabilization of strongly nonlinear systems using the campbell baker hausdorff formula. *Internatinal Journal Control*, 77(6):562 – 571, April 2004.
- [53] I. Duleba. On use of campbell baker hausdorff dynkin formulas in nonholonomic motion planning. *Robot Motion and Control IEEE*, pages 177 – 182, June 1999.
- [54] A. W. Knap. *Lie Groups Beyond and Introduction*. Springer, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 2002.
- [55] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, 270 Madison Avenue New York 10016, 1994.
- [56] W. Kuhnel. *Differential Geometry*. Editorial Board, Wiesbaden, Germany, 2006.
- [57] L. W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 2010.

- [58] I. Fantoni and R. Lozano. *Nonlinear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 2002.
- [59] J. P. Barbot. Discretization schemes for nonlinear singularly perturbed systems. *Decision and Control*, 1:443–448, 1991.
- [60] S. Monaco and D. Normand Cyrot. A combinatorial approach of the nonlinear sampling problem. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 144:788–797, 1990.
- [61] I. Duleba and W. Kheffi. A lie algebraic method of motion planning for driftless non-holonomic systems. *Fifth International Workshop on Robot Motion and Control*, pages 79–84, 2005.
- [62] I. Duleba. Impact of control representations on efficiency of local nonholonomic motion planning. *Bulletin of the Polish Academic of Sciences*, 19:213–218, 2011.
- [63] I. Duleba and W. Kheffi. Pre-control form of the generalized campbell baker hausdorff dynkin formula for affine nonholonomic system. *Systems and Control Letters*, 55:146–157, 2006.
- [64] F. Ghorbel, J. Y. Hung, and M. W. Spong. Adaptive control of flexible joint manipulators. *Robotics and Automation*, 2:1188–1193, 1989.



# CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

**Estabilización de Sistemas Electromecánicos por medio de Control  
Variacional y Modos Deslizantes**

del (la) C.

Humberto VALADEZ RANGEL

el día 15 de Agosto de 2012.

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano  
Investigador CINESTAV 3D  
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Bernardino Castillo Toledo  
Investigador CINESTAV 3C  
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov  
Investigador CINESTAV 3C  
CINESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño  
Investigador CINESTAV 3A  
CINESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV - IPN  
Biblioteca Central



SSIT0011091