CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

"Simetrías de norma en teorías de gravedad"

Tesis que presenta

Rodrigo Humberto Romero Aguilar

para obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: Dr. Merced Montesinos Velásquez

Ciudad de México Diciembre, 2020

Agradecimientos

Agradezco a mi familia y amigos por todo el apoyo brindado. En especial a mis padres, Rocío y Olegario, por sus enseñanzas, cariño y educación.

Agradezco a mi pareja Mariana, por acompañarme siempre en momentos difíciles y motivarme a seguir adelante.

Agradezco al Dr. Merced Montesinos por su guía y sus conocimientos aportados que me ayudaron a realizar este trabajo.

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y a Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico proporcionado, el cuál me permitió concluir tesis.

Para la elaboración de esta tesis, se contó con el apoyo de una Beca Conacyt.

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el Fondo SEP-Cinvestav y por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), México, Proyecto No. A1-S-7701.

Índice general

Resumen

En esta tesis se estudian las simetrías de norma de las teorías de gravedad de Lovelock n-dimensional en el formalismo de primer orden y gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión n-dimensional en el formalismo de Cartan, utilizando el recíproco del segundo teorema de Noether.

Como resultado, en el caso de la gravedad de Lovelock, se obtienen las conocidas invariancias bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos. Además, en dimensiones impares, se obtienen las llamadas "traslaciones locales" con constante $\Lambda \neq 0$, siempre y cuando cierta relación entre los coeficientes de los términos de la Lagrangiana de Lovelock se satisfaga. Aunque estos resultados ya eran conocidos, el presente enfoque es conceptualmente más simple y claro. Adicionalmente, se demuestra que existe una nueva simetría de norma cuando se cumple la relación entre los coeficientes mencionada previamente, y que en este caso, el conjunto fundamental de simetrías de norma de la acción de Lovelock se puede considerar compuesto por las transformaciones locales de Lorentz, las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ y la nueva simetría, convirtiéndose así los difeomorfismos en una simetría derivada. Se calcula el álgebra de los conmutadores de este conjunto de simetrías, obteniendo que es cerrado con funciones de estructura. Por otro lado, se obtiene la invariancia bajo traslaciones locales con $\Lambda = 0$ del término más alto de la acción de Lovelock de primer orden en dimensiones impares, así como otra simetría nueva, análoga a la que emerge en el caso de las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$, por lo tanto, el conjunto fundamental de simetrías de norma de la acción que consta de este único término está constituido por las transformaciones de Poincaré, junto con la nueva simetría, de manera que nuevamente los difeomorfismos se pueden considerar como una simetría derivada. También se muestra que el álgebra de los conmutadores de este conjunto se cierra con funciones de estructura.

Para gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión, se obtiene la invariancia bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos. Además, se obtiene una nueva simetría de esta teoría, que es una extensión para gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión de las traslaciones locales tridimensionales de la relatividad general. Se muestra que esta simetría interna de norma junto con las transformaciones locales de Lorentz describen por completo la libertad de norma de la gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión, y así los difeomorfismos se convierten en una simetría derivada también en este contexto. Finalmente, se obtiene una nueva simetría de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión, para $f(\mathcal{R}) = c\mathcal{R}^{n/2}$, la cual es un tipo de simetría conforme.

Abstract

In this thesis, using the converse of Noether's second theorem, the gauge symmetries of n-dimensional Lovelock gravity and of n-dimensional f(R) gravity with torsion in the first-order (Cartan) formalism are studied.

As a result, the well-known invariances of Lovelock action under local Lorentz transformations and diffeomorphisms are obtained. Furthermore, in odd dimensions, the invariance of the Lovelock action under the so-called "local translations" with a non-vanishing constant Λ is obtained too, as long as a certain relationship between the coefficients of the terms of the Lovelock Lagrangian is satisfied. Although these results were already known, the present approach is conceptually simpler and clearer than the previous ones. Additionally, it is shown that there is a new gauge symmetry of the Lovelock action when the aforementioned relationship between the coefficients is fulfilled, and that in this case, the fundamental set of gauge symmetries of the Lovelock action can be considered as composed by local $SO(n-1,1)$ or $SO(n)$ transformations, local translations with $\Lambda \neq 0$ and the new symmetry, and thus, diffeomorphisms become a derived symmetry. The commutator algebra of this set of gauge symmetries is computed, obtaining that it closes with structure functions. On the other hand, we obtain the invariance under local translations with $\Lambda = 0$ of the highest term of the Lovelock action in odd dimensions, as well as another new symmetry, analogous to the one that emerges in the case of the local translations with $\Lambda \neq 0$. Therefore, the fundamental set of symmetries of this single term of the Lovelock action is constituted by the Poincaré transformations, together with the new symmetry, so that, diffeomorphisms can be regarded as a derived symmetry again. It is also shown that the commutator algebra of this set of gauge symmetries is closed with structure functions. For $f(R)$ gravity with torsion, we obtain the invariance under local $SO(n-1,1)$ or $SO(n)$ transformations and diffeomorphisms of the $f(R)$ action. Furthermore, a new gauge symmetry of this theory is obtained, which is an extension for $f(R)$ gravity with torsion of the three-dimensional local translations of general relativity. It is shown that this internal gauge symmetry together with the local $SO(n-1,1)$ or $SO(n)$ transformations completely describe the gauge freedom of $f(R)$ gravity with torsion, and thus diffeomorphisms become a derived symmetry also in this context. Finally, a new symmetry for $f(R)$ gravity with torsion is obtained, with the particular choice $f(R) = cR^n/2$, which is a type of conformal symmetry.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se estudiarán las simetrías de norma de dos teorías que describen la gravedad, que son la teoría de Lovelock n-dimensional en el formalismo de primer orden y gravedad $f(\mathcal{R})$ en el formalismo de Cartan, a través del recíproco del segundo teorema de Noether. Con el objetivo de mantener este trabajo autocontenido, a continuación se presentan brevemente algunos conceptos fundamentales con los que el lector puede no estar familiarizado, tales como las simetrías de norma y el recíproco del segundo teorema de Noether.

En la actualidad, gran parte de las teorías fundamentales de la física son teorías de norma, siendo algunos ejemplos la electrodinámica clásica [1], el modelo estándar de partículas [2] y la relatividad general [3]. Una teoría de norma es aquella en la cual un sistema físico se describe utilizando más variables que sus grados de libertad físicos, llamados también observables [4, 5, 6].

Los observables de una teoría son las cantidades que uno puede medir en el laboratorio, por ello, ser capaces de obtener los observables de una teoría de norma es de vital importancia. Sin embargo, debido a la presencia de variables adicionales, los observables de una teoría de norma suelen ser difíciles de identificar por inspección. Para complicar aún mas la situación, en una teoría de norma ¡algunas de las variables permanecen completamente indeterminadas por las ecuaciones de movimiento!

La solución completa a estos problemas la presentó Noether en su trabajo de 1918 [7, 8]. En este trabajo, Noether demuestra que por cada variable que permanece indeterminada por las ecuaciones de movimiento de una teoría de norma, existe una relación entre las derivadas variacionales de la acción[1], a estas relaciones se les denomina “identidades de Noether” (ver [5, 6] para derivaciones más modernas de este resultado). El recíproco del segundo teorema de Noether establece que la existencia de m identidades de Noether en una teoría implica que esta posee una simetría de norma m-paramétrica, es decir, una transformación de las variables de la teoría, que depende de m funciones arbitrarias, también llamadas parámetros de norma, y que deja la acción cuasi-invariante, es decir, invariante salvo un término de frontera. La presencia de cada una de funciones arbitrarias

[1] En esta tesis, las teorías físicas en consideración se obtienen a través de un principio variacional aplicado a una acción.

equivale a la indeterminación de una de las variables de la teoría. Los observables físicos se identifican como las cantidades que permanecen invariantes bajo las transformaciones de norma de la teoría. Los observables definidos de esta forma se denominan locales, ya es están definidos en cada punto de una solución física[2]. En resumen, además de permitir la determinación de los observables de la teoría, el recíproco del segundo teorema de Noether brinda un método sistemático para obtener sus simetrías de norma, a través de la construcción de identidades de Noether.

A continuación se presentan dos ejemplos que ilustran la aplicación del recíproco del segundo teorema de Noether a sistemas mecánicos con simetrías de norma.

Partícula no-relativista en una dimensión.

Considere una partícula no-relativista moviéndose en una dimensión x, sujeta a un potencial $V(x)$. Este sistema puede ser descrito mediante la acción

$$S[x,t] = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2\dot{t}} - V(x)\dot{t} \right) d\tau, \tag{1.1}$$

con $m > 0$ una constante, $\dot{x} := dx/d\tau$, $\dot{t} := dt/d\tau$ y $V(x)$ una función diferenciable de x. Nótese que el tiempo Newtoniano t se ha incorporado en la acción como variable de configuración y τ es el parámetro con respecto al cual evolucionan x y t.

Calculando la variación de (1.1) se obtiene:

$$\delta S = \int \left(\mathcal{E}_x \delta x + \mathcal{E}_t \delta t + \frac{d\theta}{d\tau} \right) d\tau, \tag{1.2}$$

donde las derivadas variacionales $\mathcal{E}_x$ y $\mathcal{E}_t$ son:

$$\mathcal{E}_x = \frac{\delta S}{\delta x} = -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{x}}{\dot{t}} \right) - V'(x)\dot{t}, \tag{1.3a}$$

$$\mathcal{E}_t = \frac{\delta S}{\delta t} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2\dot{t}^2} \right) + V'(x)\dot{x}, \tag{1.3b}$$

con $V'(x) := dV/dx$, y el término de frontera está dado por $d\theta/d\tau$, con:

$$\theta := \frac{m\dot{x}}{\dot{t}}\delta x - \left(\frac{m\dot{x}^2}{2\dot{t}^2} + V(x) \right) \delta t. \tag{1.4}$$

Definiendo $f = m\dot{x}/\dot{t}$, las derivadas variacionales de la acción (1.1) se pueden reescribir como:

$$\mathcal{E}_x = -\dot{f} - V'(x)\dot{t}, \tag{1.5a}$$

$$\mathcal{E}_t = \frac{f}{m}\dot{f} + V'(x)\dot{x}. \tag{1.5b}$$

[2] La definición de observables en una teoría relativista requiere tomar en cuenta la naturaleza e interacciones gravitacionales de los cuerpos que definen un sistema de referencia [9].

Despejando $\dot{f}$ de (1.5a) y sustituyendo el resultado en (1.5b) se llega a la identidad de Noether:

$$\frac{f}{m}\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_t = 0. \tag{1.6}$$

Multiplicando esta expresión por el parámetro de norma ε, se obtiene la identidad off-shell:

$$\mathcal{E}_x \underbrace{\frac{f}{m}\varepsilon}_{\delta_\varepsilon x} + \mathcal{E}_t \underbrace{\varepsilon}_{\delta_\varepsilon t} = 0, \tag{1.7}$$

de la cual se leen las transformaciones infinitesimales:

$$\delta_\varepsilon x = \frac{f}{m}\varepsilon, \tag{1.8a}$$

$$\delta_\varepsilon t = \varepsilon. \tag{1.8b}$$

Esta simetría de norma se identifica como la *"invariancia bajo reparametrizaciones de τ"*.

Partícula libre en el espacio de Minkowski.

Considere la acción que describe tanto una partícula masiva ($m > 0$), como una sin masa ($m = 0$), moviéndose en el espacio de Minkowski:

$$S[x^\mu, \lambda] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{1}{4\lambda}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - m^2 c^2 \lambda \right) d\tau, \tag{1.9}$$

donde c es la velocidad de la luz y los índices $\mu, \nu, \ldots$, se suben y bajan con la métrica $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Calculando la variación de la acción (1.9) se obtiene:

$$\delta S = \int \left(\mathcal{E}_x \delta x + \mathcal{E}_\lambda \delta\lambda + \frac{d\theta}{d\tau} \right) d\tau, \tag{1.10}$$

donde las derivadas variacionales $\mathcal{E}_\mu$ y $\mathcal{E}_\lambda$ son:

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{\delta S}{\delta x^\mu} = -\frac{1}{2\lambda}\ddot{x}_\mu, \tag{1.11a}$$

$$\mathcal{E}_\lambda = \frac{\delta S}{\delta \lambda} = -\frac{1}{4\lambda}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - m^2 c^2, \tag{1.11b}$$

y el término de frontera está dado por $d\theta/d\tau$, con:

$$\theta = \frac{1}{2\lambda}\dot{x}_\mu \delta x^\mu. \tag{1.11c}$$

En este caso, no existe relación algebraica entre las derivadas variacionales (1.11a) y (1.11b). Sin embargo, derivado $\mathcal{E}_\lambda$ con respecto al parámetro τ se obtiene:

$$\dot{\mathcal{E}}_\lambda = -\frac{1}{2\lambda^2}\dot{x}^\mu \ddot{x}_\mu, \tag{1.12}$$

que se puede reescribir como la identidad de Noether:

$$\frac{\dot{x}}{\lambda}\mathcal{E}_\mu - \dot{\mathcal{E}}_\lambda = 0. \tag{1.13}$$

Multiplicando por el parámetro de norma α y manipulado el resultado se obtiene la expresión off-shell:

$$\mathcal{E}_\mu \underbrace{\lambda^{-1}\alpha\dot{x}^\mu}_{\delta_\alpha x^\mu} + \mathcal{E}_\lambda \underbrace{\dot{\alpha}}_{\delta_\alpha \lambda} - \frac{d}{d\tau}\left(\mathcal{E}_\lambda \alpha\right) = 0, \tag{1.14}$$

de la cual se lee la simetría de norma:

$$\delta_\alpha x^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{\lambda}\alpha, \tag{1.15a}$$

$$\delta_\alpha \lambda = \dot{\alpha}, \tag{1.15b}$$

que se identifica como la invariancia de la acción bajo reparametrizaciones, debido a la arbitrariedad del parámetro de norma α.

La diferencia fundamental entre los ejemplos recién presentados radica en la forma en la que están relacionadas las derivadas variacionales de cada acción. Para la acción (1.1), la identidad de Noether obtenida es algebraica, mientras que para la acción (1.9), la identidad de Noether obtenida involucra la diferenciación de una de las derivadas variacionales. Como se verá más adelante, esta estrategia suele rendir frutos también en teorías de campo.

Las simetrías de norma juegan un papel fundamental en diversas áreas de la física moderna. Por ejemplo, en la electrodinámica clásica, la simetría de norma $U(1)$ permite reescribir las ecuaciones de Maxwell [1] de maneras convenientes, conocidas como "la norma de Coulomb" y "la norma de Lorenz", que facilitan enormemente la obtención de soluciones exactas. Por otro lado, las teorías de norma juegan también un papel fundamental en la construcción del modelo estándar de la física de partículas. Este modelo se obtiene a través de la cuantización de una teoría de campo (de norma) cuyo grupo de simetría es $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Al cuantizar esta teoría, las variables adicionales (en este caso campos) permiten construir campos cuánticos que se interpretan como las partículas mediadoras de las interacciones fuerte (gluones) y electrodébil (fotones y bosones $W^\pm$ y Z). Por último, la teoría de norma por excelencia es posiblemente la relatividad general. Debido a que las teorías que se analizan en esta tesis son generalizaciones de esta teoría, a continuación se presentan sus aspectos más importantes y se muestra cómo aplicar el recíproco del segundo teorema de Noether para obtener sus simetrías de norma.

Es bien sabido que el marco teórico en el cual mejor se ha logrado encajar los fenómenos gravitacionales es el de la relatividad general. En esta teoría, las interacciones gravitacionales son descritas como manifestaciones físicas de la geometría del espacio-tiempo, que se modela como una variedad diferenciable pseudo-riemanniana 4-dimensional $\mathcal{M}^4$. En la relatividad general, escrita en el formalismo métrico, toda la información acerca de la geometría del espacio-tiempo está codificada en el tensor métrico $g = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$

(los índices $\mu, \nu, \ldots$ van de 0 a 3 y a lo largo de esta tesis se usa la convención de suma de Einstein), y las ecuaciones que determinan el comportamiento de este campo son las ecuaciones Einstein [10]

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.16}$$

donde $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ es el tensor de Ricci construido a partir del tensor de Riemann $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ de la conexión de Levi-Civita ∇ (ver [11]), $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci, Λ es la constante cosmológica, G es la constante de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento que depende de los campos de materia presentes. El tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ se define como $G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}$. Para este ejemplo, se consideran las ecuaciones de Einstein en ausencia de campos de materia, lo cual implica que $T_{\mu\nu} = 0$. Las ecuaciones de Einstein en el vacío se pueden obtener a través del principio variacional de mínima acción aplicado a la acción de Einstein-Hilbert (EH)

$$S_{EH} = \kappa \int_{\mathcal{M}^4} (\mathcal{R} - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x, \tag{1.17}$$

donde $\kappa = (16\pi G)^{-1}$ y g es el determinante de la matriz de componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Un cálculo explícito de la variación de la acción de EH, denotada por δS_{EH}, considerando el inverso de la métrica $g^{\mu\nu}(g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho})$ como campo dinámico, lleva al siguiente resultado:

$$\delta S_{EH} = \int_{\mathcal{M}^4} \mathcal{E}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int_{\mathcal{M}^4} \nabla_{\rho} v^{\rho} \sqrt{-g} d^4x, \tag{1.18}$$

donde

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \kappa \sqrt{-g} \left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right), \tag{1.19a}$$

$$v^{\rho} = \kappa \left[\nabla^{\rho} \left(\delta g^{\sigma\alpha} g_{\alpha\sigma} \right) - \nabla_{\sigma} \left(\delta g^{\rho\sigma} \right) \right]. \tag{1.19b}$$

Se observa de (1.18) que la variación de la acción de EH consiste en dos términos. El primero corresponde a las ecuaciones de campo de Einstein, como se puede ver en (1.19a), mientras que el segundo es un término de frontera que depende del vector (1.19b), lo cual se demuestra mediante el teorema de Stokes (ver por ejemplo en [10]), reescribiendo (1.19b) como

$$\int_{\mathcal{M}^4} \nabla_{\rho} v^{\rho} \eta = \int_{\partial\mathcal{M}^4} n_{\rho} v^{\rho} \left(n \lrcorner \eta \right) = 0, \tag{1.20}$$

con $\eta = 1/4! \sqrt{-g} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3$ la forma de volumen cuatro dimensional y n_{μ} un campo vectorial ortogonal a la frontera $\partial\mathcal{M}^4$ (ver [11] para la convención del producto interior "$\lrcorner$"). Ya que el término de frontera no es relevante para los resultados del presente trabajo, se considera que este es eliminado por algún método apropiado para la situación física que se desee estudiar.[3].

Calculando la derivada covariante ∇^ν de (1.19a) y utilizando la segunda identidad de Bianchi (ver [11]) contraída dos veces, la cual es:

$$g^{\tau\mu}g^{\sigma\nu}\nabla_{[\tau}\mathcal{R}_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0, \tag{1.21}$$

se obtiene

$$\nabla^\nu \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0. \tag{1.22}$$

La ecuación (1.22) es una relación diferencial entre las derivadas variacionales $\mathcal{E}_{\mu\nu}$, es decir, una identidad de Noether, y por lo tanto su existencia implica como lo establece el recíproco del segundo teorema de Noether, que la acción de EH (1.17) posee una simetría de norma asociada. Una manera de obtener esta simetría de norma es multiplicar la identidad de Noether (1.22) por parámetros de norma $X^\nu(x)$, que son funciones arbitrarias de las coordenadas (de cualquier carta) de la variedad x^μ, y con álgebra simple que involucra el uso de las propiedades de ∇, reescribir el resultado como:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu}\underbrace{\nabla^{(\mu}X^{\nu)}}_{\delta_X g^{\mu\nu}} + \nabla^\mu \underbrace{(-\mathcal{E}_{\mu\nu}X^\nu)}_{-j_\mu} = 0, \tag{1.23}$$

de la cual se puede leer la simetría de norma $\delta_X g^{\mu\nu}$ y la cantidad j_μ, a la cual se le denomina en este contexto *corriente de Noether*

$$\delta_X g^{\mu\nu} = \nabla^{(\mu}X^{\nu)}, \tag{1.24a}$$

$$j_\mu = \mathcal{E}_{\mu\nu}X^\nu. \tag{1.24b}$$

En este punto, vale la pena destacar una propiedad de las teorías de norma, la cual es que las corriente de Noether asociadas a sus simetrías de norma siempre son proporcionales a las derivadas variacionales de su acción, y por tanto, es cero *on-shell* (igualando a cero las derivadas variacionales).

Por otro lado, es ampliamente conocido que (1.24a) es un difeomorfismo infinitesimal generado por el campo vectorial $X := X^\mu\partial_\mu$, con $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$, ya que se puede reescribir como $\delta_X g^{\mu\nu} = (\mathcal{L}_X g^{-1})^{\mu\nu}$, donde $\mathcal{L}_X$ denota la derivada de Lie a lo largo del vector X (ver [11]) y $g^{-1} := g^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu$. Esto último implica que la acción (1.17) es invariante bajo la familia uniparamétrica de difeomorfismos $\phi_t = \exp(tX)$, *i.e.*,

$$S[g^{\mu\nu}] = S[\phi_t^* g^{\mu\nu}], \tag{1.25}$$

donde "ϕ_t^*" denota el *pullback* bajo el difeomorfismo ϕ_t (ver [11]). Por lo tanto, como resultado de aplicar el recíproco del segundo teorema de Noether a la acción de EH (1.17)

[3] Existen varias formas de deshacerse del término de frontera, por ejemplo, considerar únicamente variedades $\mathcal{M}^4$ sin frontera, o agregar a la acción (1.17) un término de frontera, conocido como el término de Gibbons-Hawking-York, el cual cancela (1.20) y no contribuye a las ecuaciones de campo de Einstein.

se obtiene la simetría bajo difeomorfismos de la misma. Este resultado ha llevado a algunos a conjeturar que la simetría por excelencia de toda teoría gravitacional son los difeomorfismos, sin embargo, esta creencia no es del todo precisa.

La invariancia bajo difeomorfismos de la relatividad general surge como consecuencia del principio de covariancia general, el cual establece que: *"Las leyes de la física se escriben de la misma forma en todos los marcos de referencia"*. Como consecuencia de este principio, se tiene que toda teoría física fundamental es invariante bajo difeomorfismos [3], por lo tanto, los difeomorfismos no son una simetría especial de las teorías gravitacionales. Más aún, los difeomorfismos (infinitesimales) actúan del mismo modo sobre cualquier campo (como una derivada de Lie), sin importar la naturaleza del campo. Esto se contrapone fuertemente con otras teorías de norma, en las cuales la forma de las transformaciones depende del campo sobre el cual actúan. Otro fuerte contraste entre los difeomorfismos y otras simetrías de norma, por ejemplo las relevantes para la física de partículas, es que estas últimas se pueden obtener a través de promover simetrías globales (con parámetros constantes)[7, 8] a simetrías de norma y analizando las propiedades de transformación de los campos necesarias para mantener la acción invariante, agregando nuevos campos (llamados campos de norma) en caso de ser necesario, esto no ocurre así con los difeomorfismos [12].

Adicionalmente, la simetría bajo difeomorfismos es uno de los principales obstáculos para construir una teoría cuántica de la gravedad. Los métodos de cuantización convencionales, usados por ejemplo para obtener el modelo estándar de partículas, hacen uso de la invariancia bajo el grupo de Poincaré (global) de la teoría. En particular, esta simetría es necesaria para definir la noción de energía y para la existencia de un operador Hamiltoniano, distinto de cero, que genere una evolución temporal unitaria del sistema. Por otro lado, en la relatividad general se reemplaza la simetría de Poincaré global por los difeomorfismos que, recordemos, son una simetría de norma, de modo que generalmente, no hay noción de energía ni operador Hamiltoniano, distinto de cero y unitario en un teoría relativista general [3]. En otras formulaciones, como la gravedad cuántica de Lazos (LQG), se ha logrado sobrepasar esta dificultad, sin embargo, esta teoría acarrea sus propios problemas [3, 13] (ver [14] para una discusión crítica de los logros y desafíos de LQG).

Un enfoque más conservador que LQG, que ha llevado a resultados positivos en la cuantización de la relatividad general en tres dimensiones (3D) [15, 16], posee dos ingredientes clave relacionados con la presente tesis: el primero de ellos consiste en el reemplazo de la métrica $g_{\mu\nu}$ como variable dinámica por un marco ortonormal de 1-formas, e^I, y una 1-forma de conexión, $\omega^I{}_J$, del grupo de Lorentz. Con este procedimiento, se reemplaza la acción de EH por la acción conocida como "acción de Palatini en 3D" o "acción de Einstein-Cartan (EC) en 3D". Una descripción detallada de este formalismo se encuentra en el apéndice A, sin embargo, por ahora se destacarán sus aspectos más relevantes. El marco ortonormal e^I es un conjunto de 1-formas, relacionado con el tensor métrico g a través de:

$$g = \eta_{IJ} e^I \otimes e^J, \tag{1.26}$$

donde los índices $I, J, \ldots$, en esta sección van de 0 a 2, se suben y bajan con la métrica de Lorentz $\eta_{IJ} := diag[-1,1,1,1]$ y su inversa (de aquí que estos se denominan "índices de Lorentz"). Por otro lado $\omega^I{}_J$ es un campo (1-forma) independiente, que define una derivada covariante ∇ a través de la relación:

$$\omega^I{}_J(X) = e^I\left(\nabla_X \partial_J\right), \tag{1.27}$$

donde X es un campo vectorial arbitrario y ∂_I es el campo vectorial dual a e^I, en el sentido $\partial_I \lrcorner e^J = \delta^J{}_I$. En estas variables, la acción de Palatini en 3D se escribe como:

$$S_{\mathrm{Pal}}[e,\omega] = \int_{\mathcal{M}^3} L_{\mathrm{Pal}} = \kappa \int_{\mathcal{M}^3} \left[\epsilon_{IJK} R^{IJ} \wedge e^K - 2\Lambda\eta\right], \tag{1.28}$$

donde κ es una constante relacionada con la constante de Newton, $\mathcal{M}^3$ es una variedad 3D, ϵ_{IJK} es un tensor completamente antisimétrico que cumple $\epsilon_{012} = 1$, $R^I{}_J := d\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J$ es la 2-forma de curvatura de la conexión $\omega^I{}_J$ (ver [11] para las convenciones de la derivada exterior "d" y el producto exterior "$\wedge$") y $\eta = (1/3!)\epsilon_{IJK} e^I \wedge e^J \wedge e^K$ es la forma de volumen 3-dimensional. A la 3-forma L_{Pal} se le denomina "Lagrangiana de Palatini en 3D".

Calculando la variación de (1.28) se obtiene:

$$\delta S_{\mathrm{Pal}}[e,\omega] = \kappa \int_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_I \wedge \delta e^J + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \delta\omega^{IJ} + d\left(\epsilon_{IJK}\delta\omega^{IJ} \wedge e^K\right), \tag{1.29}$$

con las derivadas variacionales[4]

$$\mathcal{E}_I = \kappa\epsilon_{IJK}\left(R^{JK} - \Lambda e^J \wedge e^K\right), \tag{1.30a}$$

$$\mathcal{E}_{IJ} = \kappa\epsilon_{IJK} De^K := \kappa\epsilon_{IJK}\left(de^K + \omega^K{}_L \wedge e^L\right), \tag{1.30b}$$

(ver [11] y el apéndice A para la definición general de la derivada exterior covariante "D" asociada a la 1-forma de conexión ω^{IJ}). Las ecuaciones de movimiento de la teoría se obtienen igualando (1.30) a cero y se puede demostrar que estas generan la misma dinámica que las ecuaciones de movimiento de la acción de EH en 3D, con la notable diferencia de que el sistema (1.30) es de primer orden, mientras que las ecuaciones de movimiento de la acción de EH en 3D son de segundo orden. Es por esta razón que a la elección de e^I y $\omega^I{}_J$ como variables de la teoría se le denomina también "formalismo de primer orden", sin embargo, cabe destacar que, como se verá en la sección 3, las ecuaciones de movimiento de otras teorías gravitacionales pueden ser de orden superior, aún utilizando como variables e^I y ω^{IJ}.

Por otro lado, la acción de Palatini (1.28) es por construcción cuasi-invariante bajo difeomorfismos infinitesimales

$$\delta_\zeta e^I = \mathcal{L}_\zeta e^I, \tag{1.31a}$$

$$\delta_\zeta \omega^{IJ} = \mathcal{L}_\zeta \omega^{IJ}, \tag{1.31b}$$

[4]La derivada variacional de una acción S con respecto a una k-forma ϕ, $\frac{\delta S}{\delta\phi}$, se puede identificar de la siguiente expresión $\int \frac{\delta S}{\delta\phi} \wedge \delta\phi := \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-1}(S[\phi + \epsilon\delta\phi] - S[\phi])$.

ya que estos generan una variación en la acción (1.28) dada por $\delta S_{\text{Pal}}[e,\omega] = \int_{\mathcal{M}} d(\zeta \lrcorner L_{\text{Palatini}})$, además es invariante bajo trasformaciones locales de Lorentz

$$\delta_\tau e^I = \tau^I{}_J e^I, \tag{1.32a}$$
$$\delta_\tau \omega^{IJ} = -D\tau^{IJ}, \tag{1.32b}$$

es decir $\delta_{\text{Pal}} S[e,\omega] = 0$.

El segundo elemento que permite cuantizar la relatividad general en 3D, a partir de la acción de Palatini, consiste precisamente en reformular el conjunto de simetrías de norma de la teoría, originalmente formado por difeomorfismos y transformaciones locales de Lorentz, reemplazando los difeomorfismos por otra simetría de norma conocida como las "traslaciones locales":

$$\delta_\rho e^I = D\rho^I, \tag{1.33a}$$
$$\delta_\rho \omega^{IJ} = 2\Lambda \rho^{[I} e^{J]}, \tag{1.33b}$$

notando que un difeomorfismo infinitesimal se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}_\rho e^I = D\rho^I - \left(\rho \lrcorner \omega^I{}_J\right) e^J - \frac{1}{2\kappa}\epsilon^{IJK} \rho \lrcorner \mathcal{E}_{JK}, \tag{1.34a}$$
$$\mathcal{L}_\rho \omega^{IJ} = 2\Lambda \rho^{[I} e^{J]} + D(\rho \lrcorner \omega^{IJ}) - \frac{1}{2\kappa}\epsilon^{IJK} \rho \lrcorner \mathcal{E}_K, \tag{1.34b}$$

es decir, un difeomorfismo infinitesimal se puede escribir como una combinación lineal de transformaciones locales de Lorentz, traslaciones locales y términos proporcionales a las derivadas variacionales, que forman un transformación trivial (ver [4] y el apéndice B para una discusión acerca de las simetrías triviales), obteniendo de este modo un conjunto fundamental de simetrías de norma conformado por transformaciones locales de Lorentz y traslaciones locales.

En resumen, el cambio de la acción de EH en 3D, que es de segundo orden, por la de Palatini en 3D, que es de primer orden, junto con la reformulación del conjunto de simetrías de norma de la acción de Palatini en 3D, dan como resultado una teoría susceptible a una cuantización por métodos convencionales.

Por supuesto este no es el panorama completo y hay muchos otros elementos involucrados en la cuantización de gravedad 3D, sin embargo, este último resultado demuestra que la reformulación del conjunto de simetrías de norma de una teoría puede conducir a progresos en la cuantización de la gravedad. Para dicha tarea, el recíproco del segundo teorema de Noether resulta una herramienta muy útil. Una prueba de este hecho es [17], en donde se aplica el recíproco del segundo teorema de Noether a la acción de Palatini n-dimensional y a la acción de Holst[5], tanto en vacío como acopladas a un campo escalar, obteniendo una nueva simetría que es una generalización de las traslaciones locales 3D

[5]La acción de Holst es una acción para gravedad 4-dimensional escrita en el formalismo de primer orden, que lleva a la misma dinámica que la acción de Palatini clásicamente. Sin embargo, sus versiones cuánticas difieren de manera no trivial.

(ver [15, 16]). Además de obtener la nueva simetría, en [17] se muestra que el conjunto fundamental de simetrías de las acciones de Palatini en n dimensiones ($n \geq 3$) y de la acción de Holst está formado por las transformaciones locales de Lorentz junto con la nueva simetría. Así, los difeomorfismos pasan a ser una simetría derivada, que se puede escribir como combinación lineal de elementos de este conjunto (módulo términos proporcionales a las derivadas variacionales de la acción). Posteriormente, en [18] se extendieron los resultados de [17] para considerar también el acoplamiento de las acciones estudiadas previamente con campos de Yang-Mills y fermiones.

La presente tesis extiende el análisis realizado en los trabajos [17, 18], a dos teorías de "gravedad modificada", que son las teorías de gravedad de Lovelock n-dimensional en el formalismo de primer orden y gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión n-dimensional en el formalismo de Cartan. Las teorías de gravedad modificada han tomado relevancia en las últimas décadas, ya que intentan explicar algunas observaciones cosmológicas y astrofísicas que aparentemente no encajan en el marco teórico de la relatividad general, con o sin campos de materia acoplados a ella, como pueden ser: la expansión acelerada del universo, la curvas de rotación de partículas que rodean las galaxias, la dinámica de grupos de galaxias, la estructura a gran escala del universo, etc. [19, 20, 21].

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se estudian las simetrías de norma de la teoría de gravedad de Lovelock n-dimensional en el formalismo de primer orden, por medio del recíproco del segundo teorema de Noether. Como resultados principales se pueden destacar los siguientes: se obtiene que el conjunto de simetrías que describe la libertad de norma de la gravedad de Lovelock n-dimensional en el formalismo de primer orden dependen de la dimensión de la variedad diferenciable sobre la cual se define la acción de Lovelock. Tanto en dimensiones pares como impares, se obtiene la conocida invariancia bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos. Sin embargo, solo en dimensiones impares, se obtiene que las llamadas traslaciones locales con constante $\Lambda \neq 0$ son simetría de la acción de Lovelock si y solo si se satisface una relación entre los coeficientes de los términos de la Lagrangiana de Lovelock. Cuando se cumple esta relación entre los coeficientes, es posible construir una identidad de Noether de la cual emerge una nueva simetría de norma. En este caso, el conjunto fundamental de simetrías de norma de la acción de Lovelock está compuesto por la nueva simetría, las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ y las transformaciones locales de Lorentz, pudiéndose considerar así los difeomorfismos como una simetría derivada. Se calcula el álgebra de los conmutadores de este conjunto de simetrías, obteniendo que es cerrado con funciones de estructura. También se obtiene la invariancia bajo traslaciones locales con $\Lambda = 0$ del término más alto de la acción de Lovelock de primer orden en dimensiones impares, así como otra nueva simetría, por lo tanto, el conjunto fundamental de simetrías de norma de la acción de Lovelock que consta únicamente del término más alto en dimensiones impares está constituido por las transformaciones de Poincaré junto con la nueva simetría, nuevamente considerándose los difeomorfismos como una simetría derivada. El álgebra de los conmutadores de este conjunto también se cierra con funciones de estructura. Los resultados de este análisis fueron reportados en [22].

Posteriormente, en el Capítulo 3, se estudian las simetrías de norma de gravedad $f(\mathcal{R})$

con torsión n-dimensional en el formalismo de Cartan. En este capítulo se obtiene la invariancia bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos de esta acción, a través del recíproco del segundo teorema de Noether. Además se obtiene una extensión de la simetría interna de norma reportada en [17]. Se muestra que los difeomorfismos infinitesimales se pueden escribir como una combinación lineal de dicha generalización, transformaciones locales de Lorentz y términos proporcionales a las derivadas variacionales de la acción $f(\mathcal{R})$. Esto significa que esta nueva simetría de norma, junto con las transformaciones locales de Lorentz describen por completo la libertad de norma de la gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión, y así los difeomorfismos se convierten en una simetría derivada en este contexto. Este capítulo cierra con la obtención de otra nueva simetría: la invariancia bajo reescalamientos del marco ortonormal, de la acción de gravedad $f(\mathcal{R})$ en donde $f(\mathcal{R}) = c\mathcal{R}^{n/2}$, mostrando así que el recíproco del segundo teorema de Noether aplicado a modelos particulares puede conducir a simetrías adicionales. Los resultados de este análisis fueron reportados en [23]

Finalmente, en el Capítulo 4 se dan los comentarios finales y las conclusiones obtenidas del análisis de estas dos teorías de gravedad más allá de relatividad general, así como las perspectivas de trabajo futuro en este tema.

Capítulo 2

Gravedad de Lovelock

2.1. Introducción

La primera teoría que se estudiará en este trabajo es la teoría de gravedad de Lovelock n-dimensional en el formalismo de primer orden. Esta teoría tiene sus orígenes en el trabajo de Lovelock [24], en el cual construye de manera explícita todos los tensores en n dimensiones que comparten las siguientes características con el tensor de Einstein:

- Son simétricos.
- Su divergencia es cero.
- Dependen únicamente del tensor métrico y sus primeras dos derivadas.

Estas características hacen que una combinación lineal de estos tensores sea un buen candidato para la ecuación de movimiento del campo gravitacional en n dimensiones, ya que, al no depender de derivadas de orden superior del tensor métrico, se evitan problemas de causalidad, además de que la versión cuántica de la teoría está libre de "fantasmas" [25, 26, 27].

Lovelock demuestra en [24] que es posible obtener estos tensores a través del principio de mínima acción, aplicado a una acción actualmente denominada como acción de Lovelock en la formulación métrica. Un enfoque más moderno para el estudio de la gravedad de Lovelock, basado en el uso de formas diferenciales, es el llamado "formalismo de primer orden", en donde las variables dinámicas son un marco ortonormal de 1-formas del grupo de Lorentz, e^I, y una 1-forma de conexión valuada en el álgebra del grupo de Lorentz, ${\omega^I}_J$[1]. A continuación se introducirán los aspectos de la teoría necesarios para estudiar sus simetrías desde el punto de vista del recíproco del segundo teorema de Noether. El lector interesado puede consultar [25], para una revisión de la gravedad de Lovelock en el formalismo de primer orden y su relación con las formas de Chern-Simons.

[1]Ver apéndice A para una descripción más precisa de las variables del formalismo de primer orden.

Escrita en el formalismo de primer orden, la acción de Lovelock es

$$S_n[e,\omega] = \int_{\mathcal{M}^n} \sum_{p=0}^{[n/2]} a_p L_n^p, \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{M}^n$ es una variedad diferenciable n-dimensional, con $n \geq 3$, a_p son constantes reales arbitrarias, $[c]$ denota la parte entera del número c y L_n^p es la n-forma

$$L_n^p = \kappa \epsilon_{I_1 I_2 \cdots I_{2p-1} I_{2p} I_{2p+1} \cdots I_n} R^{I_1 I_2} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p-1} I_{2p}} \wedge e^{I_{2p+1}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}, \tag{2.2}$$

con κ una constante cuyo valor y dimensiones dependen de n y que está relacionada con la constante de Newton G, e^I es un marco ortonormal de 1-formas del grupo interno de rotación $SO(\sigma)$ donde $SO(-1) := SO\,(1, n-1)$ para variedades Lorentzianas ($\sigma = -1$) y $SO(+1) := SO(n)$ para variedades euclidianas ($\sigma = +1$). En el resto de esta tesis, el término "grupo de Lorentz" se usa para referirse a ambos casos. $R^I{}_J$ es la 2-forma de curvatura de la 1-forma de conexión $\omega^I{}_J$ valuada en el álgebra de $SO(\sigma)$, ($\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$), definida como $R^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega^I{}_K \wedge \omega^{KJ}$. Los índices $I_1, \ldots, I_n$ van desde 0 a $(n-1)$ y se suben y bajan con la métrica $(\eta_{IJ}) = \operatorname{diag}(\sigma, 1, ..., 1)$. Se asume que la variedad $\mathcal{M}^n$ es orientable y que la forma de volumen viene dada por $\eta = (1/n!)\epsilon_{I_1 \cdots I_n} e^{I_1} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}$, donde el tensor con índices del grupo de rotación $\epsilon_{I_1 \cdots I_n}$ es totalmente antisimétrico y satisface $\epsilon_{1 \cdots n} = 1$.

Note que p cuenta el número de factores de curvatura de cada término de la Lagrangiana de Lovelock, por ejemplo, la acción de Lovelock en cinco dimensiones consta de los siguientes términos

$$\begin{aligned} S_5[e,\omega] =& \kappa \int_{\mathcal{M}^5} \Big(a_0 \epsilon_{I_1 \ldots I_5} e^{I_1} \wedge \cdots \wedge e^{I_5} + a_1 \epsilon_{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5} R^{I_1 I_2} \wedge e^{I_3} \wedge e^{I_4} \wedge e^{I_5} \\ & + a_2 \epsilon_{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5} R^{I_1 I_2} \wedge R^{I_3 I_4} \wedge e^{I_5} \Big). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Cabe precisar que para cada elección de constantes a_p se tiene una acción de Lovelock distinta, sin embargo, en la literatura, a la familia completa de acciones se le denomina como acción de Lovelock. También es importante notar que en dimensiones pares existe un término en la Lagrangiana de Lovelock llamado término de Euler, y está dado por

$$L_n^n = \kappa \epsilon_{I_1 I_2 \cdots I_{n-1} I_n} R^{I_1 I_2} \wedge \cdots \wedge R^{I_{n-1} I_n}. \tag{2.4}$$

Sin embargo, este término es "topológico", es decir, sus derivadas variacionales con respecto a los campos dinámicos e^I y $\omega^I{}_J$ son trivialmente cero, de modo que no propaga grados de libertad físicos y por lo tanto no juega ningún papel a nivel clásico. Además al ser trivialmente cero, sus derivadas variacionales cumplen cualquier identidad de Noether, por lo que desde el punto de vista del recíproco del segundo teorema de Noether, este término también es irrelevante, por lo que no se tomará en cuenta para la deducción de las simetrías de norma analizadas en esta tesis.

Calculando la variación de (2.1) con respecto a los campos e^I y ω^{IJ}, se obtiene

$$\delta S_n = \int \left[\mathcal{E}_I \wedge \delta e^I + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \delta\omega^{IJ} + d\left(\theta_{IJ} \wedge \delta\omega^{IJ}\right)\right], \tag{2.5}$$

donde

$$\mathcal{E}_I := \frac{\delta S}{\delta e^I} = \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} a_p \mathcal{E}_I^p, \tag{2.6a}$$

$$\mathcal{E}_{IJ} := \frac{\delta S}{\delta\omega^{IJ}} = \sum_{p=1}^{[(n-1)/2]} a_p \mathcal{E}_{IJ}^p, \tag{2.6b}$$

$$\theta_{IJ} := \sum_{p=1}^{[n/2]} a_p \theta_{IJ}^p, \tag{2.6c}$$

y a su vez

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_I^p = &(-1)^{n-1} \kappa\,(n-2p)\,\epsilon_{II_2I_3\cdots I_{2p}I_{2p+1}I_{2p+2}\cdots I_n} \\ &\times R^{I_2I_3} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p}I_{2p+1}} \wedge e^{I_{2p+2}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n},\end{aligned} \tag{2.7a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{IJ}^p = &(-1)^{n-1} \kappa p\,(n-2p)\,\epsilon_{IJI_3I_4\cdots I_{2p-1}I_{2p}I_{2p+1}I_{2p+2}\cdots I_n} \\ &\times R^{I_3I_4} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p-1}I_{2p}} \wedge De^{I_{2p+1}} \wedge e^{I_{2p+2}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n},\end{aligned} \tag{2.7b}$$

$$\begin{aligned}\theta_{IJ}^p = &(-1)^{n} \kappa p \epsilon_{IJI_3I_4\cdots I_{2p-1}I_{2p}I_{2p+1}\cdots I_n} \\ &\times R^{I_3I_4} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p-1}I_{2p}} \wedge e^{I_{2p+1}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n},\end{aligned} \tag{2.7c}$$

es decir, $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$ son las derivadas variacionales con respecto a e^I y ω^{IJ}, respectivamente, y la $(n-2)$-forma θ_{IJ} es el llamado *"potencial simpléctico"*.

Es importante destacar que la ecuación de movimiento $\mathcal{E}_{IJ} = 0$ no implica que la conexión $\omega^I{}_J$ sea libre de torsión como en el caso de relatividad general, sino una relación complicada que involucra potencias de la curvatura $R^I{}_J$ y la derivada exterior covariante del marco ortonormal De^I. A pesar de que es claro que una solución particular de esta ecuación es $De^I = 0$, y que este sector de la teoría es el más ampliamente estudiado [28, 29], existen también soluciones fuera de este sector (ver por ejemplo [30]). En esta tesis, debido a que el análisis de las simetrías de norma de una acción debe realizarse *off-shell* y sin usar ninguna identidad adicional, se asume que tanto las derivadas variacionales, $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$, como De^I son distintas de cero en general.

Claramente, cada término $\int L_n^p$ es invariante de Lorentz, ya que L_n^p es un producto exterior de tensores de Lorentz y todos sus índices están contraídos. Por otra parte, bajo un difeomorfismo $\Psi : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}^n$, L_n^p satisface $\Psi^* L_n^p(e,\omega) = L_n^p(\Psi^* e, \Psi^* \omega)$, como toda teoría escrita tensorialmente, es decir, cada término $\int L_n^p$ es invariante bajo transformaciones locales de Lorentz y bajo difeomorfismos. Estas simetrías se pueden obtener a través del recíproco del segundo teorema de Noether, como se hará a continuación.

2.2. Invariancia bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos de la gravedad de Lovelock

Dos simetrías de norma conocidas de la acción de Lovelock n-dimensional en el formalismo de primer orden son las transformaciones infinitesimales de Lorentz y los difeomorfismos infinitesimales, que actuando sobre el marco ortonormal e^I y la conexión $\omega^I{}_J$ son

$$\text{Lorentz}: \quad \delta_\tau e^I = \tau^I{}_J e^J, \quad \delta_\tau \omega^{IJ} = -D\tau^{IJ}, \tag{2.8a}$$

$$\text{Difeomorfismos}: \quad \delta_\xi e^I = \mathcal{L}_\xi e^I, \quad \delta_\xi \omega^{IJ} = \mathcal{L}_\xi \omega^{IJ}, \tag{2.8b}$$

donde $\mathcal{L}_\xi$ es la derivada de Lie a lo largo del campo vectorial $\xi = \xi^I \partial_I$ y tanto $\tau^{IJ}(= -\tau^{JI})$ como ξ^I son parámetros de norma. Para ver que (2.8) son simetrías de la acción de Lovelock (2.1) basta calcular la variación de esta bajo dichas transformaciones, obteniendo que es invariante bajo transformaciones locales de Lorentz y cuasi-invariante bajo difeomorfismos infinitesimales [2]:

$$\delta_\tau S_n = 0, \tag{2.9a}$$

$$\delta_\xi S_n = \int d\left(\xi \lrcorner \sum_{p=0}^{[n/2]} a_p L_n^p\right). \tag{2.9b}$$

El recíproco del segundo teorema de Noether establece que estas simetrías de norma se pueden obtener a partir de identidades diferenciales que relacionan las derivadas variacionales de la acción $\mathcal{E}_I$, $\mathcal{E}_{IJ}$, denominadas "identidades de Noether". Esto se realizará a continuación.

Como se vio del ejemplo del Capítulo 1, la construcción de las identidades de Noether de una teoría, suele requerir calcular la derivada covariante de las derivadas variacionales de la acción. Como la acción de Lovelock está escrita en formas diferenciales, valuadas en representaciones del grupo de Lorentz, la derivada natural a considerar es la derivada exterior covariante "D" asociada a la 1-forma de conexión $\omega^I{}_J$ (ver Apéndice A).

A partir de ahora, se realizará una derivación detallada de la identidad de Noether asociada a las transformaciones locales de Lorentz. Se inicia considerando el término

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^p_{IJ} = &(-1)^{n-1}\kappa p\,(n-2p)\,\epsilon_{IJI_3I_4\cdots I_{2p-1}I_{2p}I_{2p+1}I_{2p+2}\cdots I_n}\\ &\times R^{I_3I_4}\wedge\cdots\wedge R^{I_{2p-1}I_{2p}}\wedge De^{I_{2p+1}}\wedge e^{I_{2p+2}}\wedge\cdots\wedge e^{I_n},\end{aligned} \tag{2.10}$$

con $p \geq 1$. Calculando su derivada exterior covariante se obtiene

$$\begin{aligned}D\mathcal{E}^p_{IJ} = &(-1)^{n-1}\kappa p\,(n-2p)\,\epsilon_{IJI_3I_4\cdots I_{2p-1}I_{2p}I_{2p+1}I_{2p+2}\cdots I_n}\\ &\times \big(R^{I_3I_4}\wedge\cdots\wedge R^{I_{2p-1}I_{2p}}\wedge D^2 e^{I_{2p+1}}\wedge e^{I_{2p+2}}\wedge\cdots\wedge e^{I_n}\\ &+(n-2p-1)R^{I_3I_4}\wedge\cdots\wedge R^{I_{2p-1}I_{2p}}\wedge De^{I_{2p+1}}\wedge De^{I_{2p+2}}\wedge\cdots\wedge e^{I_n}\big),\end{aligned} \tag{2.11}$$

[2]Curiosamente, la acción de Lovelock (2.1), como toda acción escrita de manera tensorial, es invariante bajo difeomorfismos finitos.

donde se ha utilizado el hecho de que

$$D\epsilon_{I_1 \dots I_n} = 0, \tag{2.12}$$

y la segunda identidad de Bianchi (escrita en formas diferenciales)

$$DR^{IJ} = 0. \tag{2.13}$$

Se observa que el término en la tercera linea de (2.11) es cero, ya que contiene como factor

$$\epsilon_{IJI_3 \dots I_n} De^I \wedge De^J = 0, \tag{2.14}$$

que es cero debido a que los términos $De^I \wedge De^J$ y $\epsilon_{IJI_3 \cdots I_n}$ son simétrico y antisimétrico en I, J, respectivamente. Por otro lado, la primera identidad de Bianchi establece que

$$D^2 e^I = R^I{}_J \wedge e^J, \tag{2.15}$$

de modo que, insertando (2.14) y (2.15) en (2.11), esta se simplifica a

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}^p_{IJ} =& \kappa(-1)^{n-1} p(n-2p) \epsilon_{IJI_3 I_4 \cdots I_{2p-1} I_{2p} I_{2p+1} I_{2p+2} \dots I_n} \\ & \times R^{I_3 I_4} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p-1} I_{2p}} \wedge R^{I_{2p+1} K} \wedge e_K \wedge e^{I_{2p+2}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Se puede notar que (2.16) contiene p factores de curvatura R^{IJ}, por lo que resulta natural preguntarse si es posible reescribir dicha ecuación en términos de $\mathcal{E}^p_I$, que contiene el mismo número de factores de curvatura. La respuesta es positiva, lo cual es fácil de demostrar insertando la identidad

$$\begin{aligned} e_{[I} \wedge \mathcal{E}_{J]} =& \kappa(-1)^{n-1} p(n-2p) \epsilon_{IJI_3 \cdots I_{2p} I_{2p+1} \dots I_n} \\ & \times R^{I_3 I_4} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p-1} I_{2p}} \wedge R^{I_{2p+1} L} \wedge e_L \wedge e^{I_{2p+2}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

en la ecuación (2.16), con la convención de (anti-)simetrización:

$$(I_1 \cdots I_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in P_k} \pi(I_1) \cdots \pi(I_k), \tag{2.18a}$$

$$[I_1 \cdots I_k] = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in P_k} \operatorname{sign}(\pi) \pi(I_1) \cdots \pi(I_k), \tag{2.18b}$$

donde P_k es el grupo de permutaciones de k elementos, $\operatorname{sign}(\pi) = 1$ si $\pi \in P_k$, es una permutación par y $\operatorname{sign}(\pi) = -1$ en caso contrario, llegando a la siguiente relación

$$D\mathcal{E}^p_{IJ} = e_{[I} \wedge \mathcal{E}^p_{J]}. \tag{2.19}$$

Al multiplicar el lado izquierdo de (2.19) por a_p y sumando sobre el índice p, se reconstruye $D\mathcal{E}_{IJ}$, sin embargo al realizar lo mismo en el lado derecho de (2.19) hace falta el término

$\mathcal{E}_I^0$ para reconstruir $\mathcal{E}_I$, de modo que una identidad de Noether construida de esta forma no está completa en este punto. Por fortuna, es fácil ver que

$$\begin{aligned} e_{[I} \wedge \mathcal{E}^0_{J]} &= \kappa(-1)^{n-1} n \epsilon_{[J|I_2\cdots I_n} e_{|I]} \wedge e^{I_2} \wedge \cdots \wedge e^{I_n} \\ &= \kappa(-1)^{n-1} n \epsilon_{[J|I_2\cdots I_n} \eta_{M|I]} \sigma \epsilon^{MI_2\cdots I_n} \eta = \kappa(-1)^{n-1} n! \eta_{[IJ]} \eta = 0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

por lo que al multiplicar (2.19) por los coeficientes a_p y sumando sobre todos los términos con distinta p, el término (2.20) no contribuye y se obtiene la identidad de Noether

$$D\mathcal{E}_{IJ} = e_{[I} \wedge \mathcal{E}_{J]}. \tag{2.21}$$

En este caso, ya que (2.21) es antisimétrica en los índices de Lorentz I y J, para obtener una identidad *off-shell* de la cual se pueda leer la simetría asociada a esta, resulta natural multiplicar esta ecuación por parámetros locales antisimétricos[3] $\tau^{IJ}(x)(= -\tau^{JI}(x))$, obteniendo como resultado

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\tau^I{}_J e^J}_{\delta_\tau e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{-D\tau^{IJ}}_{\delta_\tau \omega^{IJ}} + (-1)^{n-1} d\left(\tau^{IJ}\mathcal{E}_{IJ}\right) = 0, \tag{2.22}$$

donde se ha utilizado la identidad

$$d\left(\mathcal{E}_{IJ}\tau^{IJ}\right) = D\mathcal{E}_{IJ}\tau^{IJ} + (-1)^{n-1}\mathcal{E}_{IJ} \wedge D\tau^{IJ}. \tag{2.23}$$

Como resultado del análisis previo, se ha obtenido la identidad *off-shell* (2.22), de la cual se recuperan las transformaciones infinitesimales locales de Lorentz (2.8a) a través del recíproco del segundo teorema de Noether, además, se ha conseguido ejemplificar el método para obtener las identidades de Noether en una teoría escrita en formas diferenciales.

Por otro lado, debido a que el análisis y manipulación de la derivada exterior covariante de $\mathcal{E}^p_{IJ}$ lleva a la identidad de Noether asociada a las transformaciones locales de Lorentz, uno podría esperar que repetir este procedimiento con $\mathcal{E}^p_I$ lleve directamente a la identidad de Noether asociada a los difeomorfismos, sin embargo esto resulta ser falso; manipulando $D\mathcal{E}^p_I$ de la manera que se presenta a continuación, lo que se obtiene es una simetría infinitesimal que es combinación lineal de un difeomorfismo y una transformación local de Lorentz dependiente de los campos, conocida en la literatura como "difeomorfismos mejorados" o "difeomorfismos modificados" [4, 31, 32].

Para obtener intuición acerca de cómo construir la identidad de Noether asociada a los difeomorfismos mejorados se considera la derivada exterior covariante de la derivada variacional del primer término de la acción de Lovelock (2.1), que es

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}^0_I =& \kappa(-1)^{n-1} n(n-1) \epsilon_{II_2I_3\cdots I_n} De^{I_2} \wedge e^{I_3} \wedge \cdots \wedge e^{I_n} \\ =& \frac{1}{2}\kappa(-1)^{n-1} n(n-1) \epsilon_{II_2I_3\cdots I_n} T^{I_2}{}_{J_1J_2} e^{J_1} \wedge e^{J_2} \wedge e^{I_3} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

[3] En caso de no partir de los parámetros locales antisimétricos τ^{IJ}, la parte simétrica desaparece debido a la antisimetría de la identidad de Noether (2.21) en los índices I, J.

donde en la segunda línea se ha separado en componentes $De^I = (1/2)T^I{}_{JK}e^J \wedge e^K$ (ver también apéndice A). Por otro lado, se tiene la siguiente relación

$$\epsilon^{IJ_2I_3\cdots I_n}\mathcal{E}_I^0 = \sigma\kappa(-1)^{n-1}n(n-1)!e^{J_2} \wedge e^{I_3} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}, \tag{2.25}$$

por lo que, insertando (2.25) en (2.24) se llega a la identidad

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I^0 &= \frac{\sigma}{2(n-2)!}\epsilon_{II_2I_3\cdots I_n}\epsilon^{KJ_2I_3\cdots I_n}T^{I_2}{}_{J_1J_2}e^{J_1} \wedge \mathcal{E}_K^0 \\ &= \left(\partial_I \lrcorner De^K\right) \wedge \mathcal{E}_K^0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Se procede ahora a obtener una expresión análoga a (2.26) para $p \geq 1$, para ello se realizan los siguientes cálculos.

Es fácil ver que $De^J \wedge \mathcal{E}_J^p = 0$, por ser una $(n+1)$-forma, por lo que, tomando el producto interior de esta forma con ∂_I se obtiene

$$\left(\partial_I \lrcorner De^J\right) \wedge \mathcal{E}_J^p + De^J \wedge (\partial_I \lrcorner \mathcal{E}_J^p) = 0. \tag{2.27}$$

El primer término de (2.27) es análogo al lado derecho de (2.26), de manera que solo falta reescribir el segundo término de (2.27) en función de $\mathcal{E}_I^p$ y $\mathcal{E}_{IJ}^p$, por lo que se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\partial_I \lrcorner \mathcal{E}_J^p) =& \kappa(-1)^{n-1}(n-2p)\epsilon_{JI_2I_3I_4I_5\cdots I_{2p}I_{2p+1}I_{2p+2}I_{2p+3}\cdots I_n} \\ &\times \Big[p\left(\partial_I \lrcorner R^{I_2I_3}\right) \wedge R^{I_4I_5} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p}I_{2p+1}} \wedge e^{I_{2p+2}} \wedge e^{I_{2p+3}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n} \\ &+ (n-2p+1)\, R^{I_2I_3} \wedge R^{I_4I_5} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p}I_{2p+1}} \wedge \delta_I^{I_{2p+2}}e^{I_{2p+3}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}\Big]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Multiplicando (2.28) por De^J, se obtiene

$$\begin{aligned} De^J \wedge (\partial_I \lrcorner \mathcal{E}_J^p) =& \kappa(-1)^{n-1}(n-2p)\epsilon_{JI_2I_3I_4I_5\cdots I_{2p}I_{2p+1}I_{2p+2}I_{2p+3}\cdots I_n} \\ &\Big[p\left(\partial_I \lrcorner R^{I_2I_3}\right) \wedge R^{I_4I_5} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p}I_{2p+1}} \wedge De^J \wedge e^{I_{2p+2}} \wedge e^{I_{2p+3}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n} \\ &- (n-2p+1)\, R^{I_2I_3} \wedge R^{I_4I_5} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p}I_{2p+1}} \wedge De^{I_{2p+2}} \wedge e^{I_{2p+3}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}\Big]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Por otro lado, es útil calcular el análogo para $p \geq 1$ del término $D\mathcal{E}_I^0$ que aparece en (2.26), que en este caso es:

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I^p =& (-1)^{n-1}\,\kappa\,(n-2p)\,(n-2p-1)\epsilon_{II_2I_3\cdots I_{2p}I_{2p+1}I_{2p+2}I_{2p+3}\cdots I_n} \\ &\times R^{I_2I_3} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p}I_{2p+1}} \wedge De^{I_{2p+2}} \wedge e^{I_{2p+3}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Insertando (2.7b) y (2.30) en (2.29), esta ecuación se puede reescribir como

$$De^J \wedge (\partial_I \lrcorner \mathcal{E}_J^p) = -D\mathcal{E}_I^p + \left(\partial_I \lrcorner R^{JK}\right) \wedge \mathcal{E}_{JK}^p. \tag{2.31}$$

Después, insertando (2.31) en (2.27) se obtiene la identidad

$$D\mathcal{E}_I^p = \left(\partial_I \lrcorner De^J\right) \wedge \mathcal{E}_J^p + \left(\partial_I \lrcorner R^{JK}\right) \wedge \mathcal{E}_{JK}^p, \tag{2.32}$$

la cual es la relación análoga a (2.26) que se estaba buscando. Sumando (2.26) y (2.32), multiplicadas por los coeficientes a_0 y a_p, respectivamente, se obtiene la identidad de Noether deseada

$$D\mathcal{E}_I = \left(\partial_I \lrcorner De^J\right) \wedge \mathcal{E}_J + \left(\partial_I \lrcorner R^{JK}\right) \wedge \mathcal{E}_{JK}. \tag{2.33}$$

Análogamente a como se hizo para la identidad de Noether de Lorentz, se multiplica (2.33) por un parámetro local $\chi^I(x)$, y con un poco de álgebra se obtiene la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\left(D\chi^I + \chi \lrcorner De^I\right)}_{\delta_\chi e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{\left(\chi \lrcorner R^{IJ}\right)}_{\delta_\chi \omega^{IJ}} + (-1)^n d\left(\chi^I \mathcal{E}_I\right) = 0, \tag{2.34}$$

donde $\chi := \chi^I \partial_I$. De acuerdo con el recíproco del segundo teorema de Noether, la simetría de norma de la acción de Lovelock (2.1) involucrada en (2.34) viene dada por los términos que acompañan a las derivadas variacionales $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$, y es:

$$\delta_\chi e^I = D\chi^I + \chi \lrcorner De^I, \tag{2.35a}$$

$$\delta_\chi \omega^{IJ} = \chi \lrcorner R^{IJ}. \tag{2.35b}$$

Esta simetría infinitesimal no posee una forma fácilmente reconocible, por lo que, para apreciar su significado, se debe reescribir antes como

$$\delta_\chi e^I = D\chi^I + T^I{}_{JK}\chi^{[J}e^{K]} = \mathcal{L}_\xi e^I + \tau^I{}_J e^J, \qquad (\xi^I := \chi^I, \tau^{IJ} := \chi \lrcorner \omega^{IJ}), \tag{2.36a}$$

$$\delta_\chi \omega^{IJ} = \mathcal{R}^{IJ}{}_{KL}\chi^{[K}e^{L]} = \mathcal{L}_\xi \omega^{IJ} - D\tau^{IJ}, \tag{2.36b}$$

donde $\mathcal{R}^{IJ}{}_{KL}$ son las componentes de la 2-forma de curvatura $R^{IJ} = (1/2)\mathcal{R}^{IJ}{}_{KL}e^K \wedge e^L$. Por lo tanto, se observa que la simetría (2.36) no es más que un difeomorfismo infinitesimal (2.8b) más una transformación local de Lorentz (2.8a) con parámetros de norma dependientes de los campos, es decir un "difeomorfismo mejorado", como se afirmó previamente.

Para obtener la simetría bajo difeomorfismos de la acción de Lovelock (2.1) en el formalismo de primer orden, hay que combinar las identidades *off-shell* (2.22) y (2.34), tomando como parámetro de la transformación de Lorentz $\tau^{IJ} = \chi \lrcorner \omega^{IJ}$, de este modo se obtiene la identidad *off-shell*:

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\mathcal{L}_\xi e^I}_{\delta_\xi e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{\mathcal{L}_\xi \omega^{IJ}}_{\delta_\xi \omega^{IJ}} + (-1)^n d\left[(\xi \lrcorner e^I)\mathcal{E}_I + (\xi \lrcorner \omega^{IJ})\mathcal{E}_{IJ}\right] = 0, \quad \xi := \chi^I \partial_I, \tag{2.37}$$

de donde, una vez aplicado el recíproco del segundo teorema de Noether, se puede identificar claramente la transformación de los campos bajo un difeomorfismo infinitesimal (2.8b). Cabe destacar que en el enfoque de este trabajo, la obtención de la simetría de difeomorfismos infinitesimales se logra combinando identidades de Noether con parámetros de norma dependientes de los campos, y no a través de una identidad de Noether propia, lo que sugiere una vez más que los difeomorfismos en este marco son una simetría derivada.

Antes de concluir esta sección, es importante hacer una observación acerca de la construcción de la identidad de Noether (2.33), ya que en dimensiones impares para el término más alto de la acción de Lovelock (2.1), es decir $\mathcal{E}_I^{(n-1)/2}$, se cumple

$$D\mathcal{E}_I^{(n-1)/2} = D\left(\kappa(-1)^{n-1}\epsilon_{II_2I_3\cdots I_{n-1}I_n}R^{I_2I_3}\wedge\cdots\wedge R^{I_{n-1}I_n}\right) = 0. \tag{2.38}$$

Parecería que este hecho arruina la deducción de la simetría bajo difeomorfismos mejorados de la acción de Lovelock (2.1), sin embargo, lo que en realidad ocurre en este caso es que tanto el lado derecho como es izquierdo de (2.32) son idénticamente cero, *i.e.*,

$$\left(\partial_I \lrcorner De^J\right)\wedge\mathcal{E}_J^{(n-1)/2} + \left(\partial_I \lrcorner R^{JK}\right)\wedge\mathcal{E}_{JK}^{(n-1)/2} = 0, \tag{2.39}$$

por lo que la identidad de Noether (2.33) queda intacta. Más aún, como se verá en la sección 2.4, las relaciones (2.38) y (2.39) son identidades de Noether por sí mismas cuando se considera la acción de Lovelock que contiene un solo término

$$S_n[e,\omega] = \kappa\int_{\mathcal{M}^n} L_n^{(n-1)/2}, \tag{2.40}$$

lo cual permite reformular el conjunto fundamental de simetrías de esta acción. La demostración de la identidad de Noether (2.39) y el análisis de las simetrías de norma de la acción (2.40) son interesantes por sí mismas y se proporcionan en la sección 2.4.2.

2.3. Traslaciones locales

2.3.1. Traslaciones locales 3D

La acción de la teoría de Lovelock (2.1) coincide con la acción Palatini en 3D. Como se menciona en el Capítulo 1, es bien sabido que la libertad de norma de la acción Palatini en 3D puede describirse mediante transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos, o de manera equivalente por transformaciones locales de Lorentz y una simetría denominada "traslaciones locales" [15, 16, 33]. Con el fin de generalizar las traslaciones locales de la relatividad general 3D a la acción de Lovelock n-dimensional (2.1), mediante el uso del recíproco del segundo teorema de Noether, es conveniente primero revisar cómo emerge esta simetría en el caso 3D [17, 18], por lo que a continuación se procede a realizar dicha revisión[4].

En tres dimensiones, la acción de Lovelock (2.1) adquiere la siguiente forma:

$$S_3[e,\omega] = \kappa\int\left(a_0\epsilon_{I_1I_2I_3}e^{I_1}\wedge e^{I_2}\wedge e^{I_3} + a_1\epsilon_{I_1I_2I_3}R^{I_1I_2}\wedge e^{I_3}\right), \tag{2.41}$$

[4]Las traslaciones locales también son una simetría de la acción conocida como "acción exótica de Witten" para la gravedad 3D con constante cosmológica. En [34] se puede encontrar una derivación de la identidad de Noether asociada a las traslaciones locales para esta acción.

y sus derivadas variacionales son

$$\mathcal{E}_I = a_0 \mathcal{E}_I^0 + a_1 \mathcal{E}_I^1 = 3 a_0 \kappa \epsilon_{I I_2 I_3} e^{I_2} \wedge e^{I_3} + a_1 \kappa \epsilon_{I I_2 I_3} R^{I_2 I_3}, \tag{2.42a}$$

$$\mathcal{E}_{IJ} = a_1 \mathcal{E}_{IJ}^1 = a_1 \kappa \epsilon_{IJI_3} D e^{I_3}. \tag{2.42b}$$

Calculando la derivada exterior covariante de (2.42a), se obtiene

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I &= a_0 D\mathcal{E}_I^0 + a_1 D\mathcal{E}_I^1 \\ &= -3! a_0 \kappa \epsilon_{IJI_3} e^J \wedge D e^{I_3} + a_1 \kappa \epsilon_{I I_2 I_3} D R^{I_2 I_3}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

De la identidad de Bianchi (2.13) se ve que el segundo término de (2.43) desaparece, por lo tanto, se pueden presentar dos situaciones dependiendo del valor del coeficiente a_0 de la acción de Lovelock:

I) Si $a_0 \neq 0$, insertando (2.42b) en (2.43) se llega a la identidad de Noether

$$D\mathcal{E}_I = 3!(a_0/a_1) e^J \wedge \mathcal{E}_{JI}. \tag{2.44}$$

En el tratamiento estándar de las traslaciones locales 3D, generalmente se establece la convención $3!(a_0/a_1) = -2\Lambda$, donde Λ es la constante cosmológica [33]. Por lo tanto, la identidad de Noether (2.44) se lee [17]

$$D\mathcal{E}_I - 2\Lambda e^J \wedge \mathcal{E}_{IJ} = 0, \quad \Lambda \neq 0. \tag{2.45}$$

Multiplicando (2.45) por el parámetro local arbitrario $\rho^I(x)$ y manipulando la expresión resultante, se obtiene la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{D\rho^I}_{\delta_\rho e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{2\Lambda \rho^{[I} e^{J]}}_{\delta_\rho \omega^{IJ}} + d\left(-\rho^I \mathcal{E}_I\right) = 0. \tag{2.46}$$

Recurriendo al recíproco del segundo teorema de Noether, las cantidades que aparecen en esta última expresión multiplicando las derivadas variacionales, $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$, son las transformaciones asociadas a una simetría de norma; en este caso, las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$.

II) Si $a_0 = 0$, entonces (2.43) es por sí misma la siguiente identidad de Noether:

$$D\mathcal{E}_I = 0. \tag{2.47}$$

Multiplicando (2.47) por el parámetro local arbitrario $\rho^I(x)$ y manipulando la expresión resultante, se obtiene la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{D\rho^I}_{\delta_\rho e^I} + d\left(-\rho^I \mathcal{E}_I\right) = 0. \tag{2.48}$$

De nuevo, recurriendo al recíproco del segundo teorema de Noether, la cantidad que aparece en esta última expresión multiplicando a $\mathcal{E}_I$ son las transformaciones asociadas a una simetría de norma; en este caso, las traslaciones locales con $\Lambda = 0$.

En resumen, dependiendo de la elección del coeficiente a_0, la acción de Lovelock 3D (2.41) es invariante bajo traslaciones locales

$$\delta_\rho e^I = D\rho^I, \tag{2.49a}$$
$$\delta_\rho \omega^{IJ} = 2\Lambda \rho^{[I} e^{J]}, \tag{2.49b}$$

con $\Lambda \neq 0$ o $\Lambda = 0$. Es sabido que la simetría (2.49), junto con las transformaciones locales de Lorentz, forman el grupo de De Sitter $SO(1, n)$(si $\Lambda > 0$), el grupo anti-De Sitter $SO(2, n-1)$ (si $\Lambda < 0$) o el grupo de Poincaré (si $\Lambda = 0$), considerando una conexión de norma de un grupo mayor a $SO(\sigma)$ creada a partir de conexión $\omega^I{}_J$ y el marco ortonormal e^I (ver [25, 33, 35, 36])[5].

Por otro lado, de los resultados anteriores se observa que la identidad de Noether asociada a las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ relaciona las derivadas variacionales de términos consecutivos de la acción de Lovelock 3D (2.41), mientras que la identidad de Noether asociada a las traslaciones locales con $\Lambda = 0$ involucra un único término de la acción de Lovelock 3D (2.41). Estas observaciones resultan fundamentales para generalizar la simetría bajo las traslaciones locales de la acción de Lovelock (2.41) a n dimensiones, sin embargo, aún falta analizar en qué casos es posible realizar dicha generalización. En la próxima sección se procede a realizar dicho análisis, obteniendo que esto solo es posible en dimensiones impares.

2.3.2. Traslaciones locales n-dimensionales

En esta sección se muestra, por medio del recíproco del segundo teorema de Noether, que las traslaciones locales 3D se pueden generalizar a la acción de Lovelock n-dimensional (2.1), siempre y cuando se cumpla cierta relación entre los coeficientes a_p, y únicamente en dimensiones impares. A pesar de que esta simetría ya era conocida antes de ser estudiada en [22] (ver por ejemplo [25, 37]), vale la pena revisar su obtención por medio del recíproco del segundo teorema de Noether, ya que, el presente enfoque es conceptualmente más simple que los enfoques previos y fácilmente aplicable a otras teorías.

Para obtener esta simetría, se comienza considerando un término genérico, $\int L_n^p$, de la acción de Lovelock (2.1), cuyas derivadas variacionales son $\mathcal{E}_I^p$ y $\mathcal{E}_{IJ}^p$ y se dan en (2.7a) y (2.7b). Antes de continuar, vale la pena escribir $\mathcal{E}_I^p$ de manera detallada, haciendo distinción entre dimensiones pares e impares, ya que ahí radica la posibilidad de construir la identidad de Noether asociada a las traslaciones locales. Para $0 \leq p \leq [(n-3)/2]$, tanto en dimensiones pares como impares, $\mathcal{E}_I^p$ toma la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_I^p =& (-1)^{n-1} \kappa (n-2p) \epsilon_{I I_2 I_3 \cdots I_{2p} I_{2p+1} I_{2p+2} \cdots I_n} \\ &\times R^{I_2 I_3} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p} I_{2p+1}} \wedge e^{I_{2p+2}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n},\end{aligned} \tag{2.50}$$

[5] En el caso en el que la signatura de la métrica η es $\sigma = +1$, los grupos que se forman son $SO(n)$, $SO(1, n)$ y el grupo n-dimensional de Galileo, respectivamente. En el resto de esta tesis, el "grupo (anti)-De Sitter"se usa para referirse al grupo $SO(p, q)$ relacionado con ambas signaturas σ de la métrica del grupo interno de rotación.

mientras que para $p=[(n-1)/2]$, la derivada variacional $\mathcal{E}_I^{[(n-1)/2]}$ posee una estructura diferente dependiendo de la paridad de la dimensión de la variedad $\mathcal{M}^n$:

$$\mathcal{E}_I^{(n-1)/2} = (-1)^{n-1}\,\kappa\epsilon_{II_2I_3\cdots I_{n-1}I_n}R^{I_2I_3}\wedge\cdots\wedge R^{I_{n-1}I_n}, \qquad \text{si } n \text{ impar}, \tag{2.51a}$$

$$\mathcal{E}_I^{(n-2)/2} = 2\,(-1)^{n-1}\,\kappa\epsilon_{II_2I_3\cdots I_{n-2}I_{n-1}I_n}R^{I_2I_3}\wedge\cdots\wedge R^{I_{n-2}I_{n-1}}\wedge e^{I_n}, \quad \text{si } n \text{ par}, \tag{2.51b}$$

es decir, $\mathcal{E}_I^{[(n-1)/2]}$ contiene el factor e^I en dimensiones pares pero no en impares.

De manera análoga a como se realizó en la sección anterior, se calcula la derivada exterior de (2.50), lo que lleva a

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I^p = \; & (-1)^{n-1}\,\kappa\,(n-2p)\,(n-2p-1)\,\epsilon_{II_2I_3\cdots I_{2p}I_{2p+1}I_{2p+2}I_{2p+3}\cdots I_n} \\ & \times R^{I_2I_3}\wedge\cdots\wedge R^{I_{2p}I_{2p+1}}\wedge De^{I_{2p+2}}\wedge e^{I_{2p+3}}\wedge\cdots\wedge e^{I_n}, \end{aligned} \tag{2.52}$$

para $0\leq p\leq [(n-3)/2]$, mientras que el último término $D\mathcal{E}_I^{[(n-1)/2]}$ cumple:

$$D\mathcal{E}_I^{(n-1)/2} = 0, \qquad \text{para } n \text{ impar}, \tag{2.53a}$$

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I^{(n-2)/2} = \; & 2\,(-1)^{n-1}\,\kappa\epsilon_{II_2I_3\cdots I_{n-2}I_{n-1}I_n} \\ & \times R^{I_2I_3}\wedge\cdots\wedge R^{I_{n-2}I_{n-1}}\wedge De^{I_n}, \qquad \text{para } n \text{ par}, \end{aligned} \tag{2.53b}$$

donde en (2.53a) se ha utilizado la identidad de Bianchi (2.13). Para continuar con el análisis se observa que para $0\leq p\leq [(n-3)/2]$, la ecuación (2.52) puede reescribirse en términos de $\mathcal{E}_{IJ}^{p+1}$ como

$$D\mathcal{E}_I^p = -\frac{(n-2p)\,(n-2p-1)}{(p+1)\,(n-2p-2)}e^J\wedge\mathcal{E}_{IJ}^{p+1}. \tag{2.54}$$

Esta relación se obtiene por inspección, únicamente a través del conteo de factores de curvatura R^{IJ} que aparecen en (2.52) y (2.7b).

A partir de este punto, es necesario analizar por separado la construcción de una identidad de Noether relacionada con (2.54) en dimensiones pares e impares, esto debido a la presencia del término $D\mathcal{E}_I^{(n-2)/2}\neq 0$ en dimensiones pares.

Dimensiones impares: Si n es impar, la derivada covariante $D\mathcal{E}_I$ viene dada por

$$D\mathcal{E}_I = \sum_{p=0}^{\frac{n-3}{2}} a_p D\mathcal{E}_I^p + a_{(n-1)/2}D\mathcal{E}_I^{(n-1)/2}. \tag{2.55}$$

Sustituyendo (2.53a) y (2.54) en (2.55) se obtiene

$$D\mathcal{E}_I = -\sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} a_{p-1}\frac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{p(n-2p)}e^J\wedge\mathcal{E}_{IJ}^p. \tag{2.56}$$

Para relacionar el lado derecho de (2.56) con $e^J\wedge\mathcal{E}_{IJ}$, se requiere que los coeficientes a_p satisfagan la relación

$$2a_p\Lambda = -a_{p-1}\frac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{p(n-2p)}, \tag{2.57}$$

la cual una vez sustituida en (2.56) permite obtener la identidad de Noether

$$D\mathcal{E}_I - 2\Lambda e^J \wedge \mathcal{E}_{IJ} = 0, \quad \Lambda \neq 0, \tag{2.58}$$

la cual es igual a la del caso 3D. Multiplicando (2.58) por parámetros locales arbitrarios ρ^I y manipulando la expresión resultante se llega a la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{D\rho^I}_{\delta_\rho e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{2\Lambda\rho^{[I}e^{J]}}_{\delta_\rho \omega^{IJ}} + d\left(-\rho^I \mathcal{E}_I\right) = 0, \tag{2.59}$$

de la cual, de acuerdo con el recíproco del segundo teorema de Noether, se pueden leer las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$

$$\delta_\rho e^I = D\rho^I \tag{2.60a}$$
$$\delta_\rho \omega^{IJ} = 2\Lambda\rho^{[I}e^{J]}. \tag{2.60b}$$

Por lo tanto hay que demostrar que (2.57) tiene (al menos) una solución. Despejando a_p/a_{p-1} de (2.57) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{a_p}{a_{p-1}} &= -\frac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{2\Lambda p(n-2p)} \\ &= \frac{(-1)^{p-1}\Lambda^{p-1}(p-1)!(n-2(p-1))}{(-1)^p\Lambda^p p!(n-2p)}\left(\frac{n-1}{2}-(p-1)\right) \\ &= \frac{\alpha(-1)^{p-1}\Lambda^{p-1}(p-1)!(n-2(p-1))\left(\frac{n-1}{2}-(p-1)\right)!}{\alpha(-1)^p\Lambda^p p!(n-2p)\left(\frac{n-1}{2}-p\right)!},\end{aligned} \tag{2.61}$$

donde en la segunda línea se han reescrito la mayoría de los factores de manera que dependan de p o $p-1$ y en la tercera linea se ha introducido una constante no nula α, para considerar a_p de la manera más general posible. De (2.61) se puede leer la forma de a_p y a_{p-1} asociando las cantidades donde p aparece a a_p y las cantidades donde $p-1$ aparece a a_{p-1}. Para determinar el valor de α, esta se despeja de a_0 (asumiendo que este es distinto de cero), obtieniendo $\alpha = n\left(\frac{n-1}{2}\right)!a_0$, lo cual conduce a la expresión final para los coeficientes

$$a_p = \frac{n\,(-1)^p\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Lambda^p\,(n-2p)\,p!\left(\frac{n-1}{2}-p\right)!}a_0. \tag{2.62}$$

De (2.62) se puede observar que para que las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ sean una simetría de norma de la acción de Lovelock (2.1) en dimensiones impares, todos los coeficientes a_p deben ser distintos de cero. Vale la pena destacar que aunque los coeficientes a_p que satisfacen la condición (2.57) dependen de la dimensión n de la variedad, la identidad de Noether (2.58) es igual para toda dimensión n impar. También de (2.62), se ve que la deducción de la identidad de Noether (2.58) no es válida para $\Lambda = 0$, ya que los coeficientes, que satisfacen la relación de recurrencia (2.57), contienen como factor $1/\Lambda^p$ (hasta donde se sabe, esta solución es única). Este último hecho hace pensar que las traslaciones locales con $\Lambda = 0$ no poseen una generalización a dimensiones $n > 3$ de la acción de Lovelock (2.1). Sin embargo, así como ocurre en el caso 3D, el término más alto de la acción de Lovelock (2.1), $L_n^{(n-1)/2}$, cumple la identidad (2.53a), por lo tanto, una acción de Lovelock que conste del único término $\int L_n^{(n-1)/2}$ tiene una simetría que emerge de la identidad de Noether

$$D\mathcal{E}_I = 0. \tag{2.63}$$

Multiplicando (2.63) por parámetros locales arbitrarios ρ^I y manipulando la expresión resultante se llega a la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I^{(n-1)/2} \wedge \underbrace{D\rho^I}_{\delta_\rho e^I} + d\left(-\rho^I \mathcal{E}_I^{(n-1)/2}\right) = 0, \tag{2.64}$$

de la cual, usando el recíproco del segundo teorema de Noether, se pueden leer las traslaciones locales con $\Lambda = 0$

$$\delta_\rho e^I = D\rho^I \tag{2.65a}$$
$$\delta_\rho \omega^{IJ} = 0. \tag{2.65b}$$

Dimensiones pares: Si n es par, la derivada covariante $D\mathcal{E}_I$ viene dada por

$$D\mathcal{E}_I = \sum_{p=0}^{\frac{n-4}{2}} a_p D\mathcal{E}_I^p + a_{(n-2)/2} D\mathcal{E}_I^{(n-2)/2}. \tag{2.66}$$

Se puede usar un procedimiento completamente análogo al usado en el caso de dimensiones impares para obtener la relación

$$D\mathcal{E}_I = 2\Lambda e^J \wedge \mathcal{E}_{IJ} + a_{(n-2)/2} D\mathcal{E}_I^{(n-2)/2}, \tag{2.67}$$

donde los coeficientes a_p cumplen

$$a_p = \frac{(-1)^p n! \left(\frac{n-2}{2} - p\right)!}{4^p (n-2p)! \Lambda^p p! \left(\frac{n-2}{2}\right)!} a_0. \tag{2.68}$$

Sin embargo, se observa que (2.67) no es una identidad de Noether, porque tiene el término adicional $a_{(n-2)/2} D\mathcal{E}_I^{(n-2)/2}$. Este término adicional no es un diferencial total, ni se puede reescribir (genéricamente) en términos de $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$, por lo que se concluye que las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ no son una simetría de la acción de Lovelock (2.1) en dimensiones pares. Uno podría pensar que basta tomar $a_{(n-2)/2} = 0$ para llegar a una identidad de Noether análoga a (2.58), sin embargo, dicho coeficiente no se puede tomar de manera arbitraria, ya que para que (2.67) se cumpla, todos los coeficientes de la Lagrangiana de Lovelock, incluyendo $a_{(n-2)/2}$, deben satisfacer (2.68), es decir

$$a_{(n-2)/2} = -\frac{(-1)^{n/2} n!}{2^{n-1} \Lambda^{(n-2)/2} \left[\left(\frac{n-2}{2}\right)!\right]^2} a_0. \tag{2.69}$$

Además, si se toma $a_0 = 0$ para eliminar este término, entonces todos los coeficientes a_p también se hacen también cero debido a (2.68).

Por otro lado, de (2.53b) se ve que a diferencia del caso impar, $D\mathcal{E}_I^{(n-2)/2} \neq 0$, por lo que tampoco existe una identidad de Noether de donde se puedan obtener las traslaciones locales con $\Lambda = 0$. En conclusión las traslaciones locales (2.49) no son, en general, una simetría de la acción de Lovelock (2.1) en dimensiones pares.

Cabe aclarar que, como se reportó en [17], identidades de Noether diferentes de (2.58) se pueden obtener para casos particulares de la acción de Lovelock (por ejemplo, para la acción n-dimensional de Palatini y la acción de Holst estudiadas en [17]), lo que lleva a diferentes generalizaciones de traslaciones locales que son válidas en dimensiones pares.

Finalmente, vale la pena destacar que a pesar de que el número de grados de libertad en casos particulares de la acción de Lovelock de primer orden se han calculado de manera explícita [38, 39], para una teoría de Lovelock genérica este número sigue siendo una pregunta abierta. El conteo de grados de libertad de una teoría genérica de Lovelock podría ser explorado utilizando métodos Lagrangianos [40, 41], en los cuales las identidades de Noether obtenidas en esta tesis juegan un papel fundamental.

2.4. Nueva simetrías para casos particulares de la Acción de Lovelock

2.4.1. Acción de Lovelock invariante bajo traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$

Como se ha visto en la sección anterior, la acción de Lovelock (2.1) para el caso de dimensiones impares es cuasi-invariante bajo las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ (2.49) si los coeficientes a_p satisfacen la relación (2.57). La identidad de Noether de la que provienen las traslaciones locales viene dada por (2.58). Esta identidad se puede restar de la identidad de Noether asociada a los "difeomorfismos mejorados" (2.33), lo que lleva a la siguiente identidad de Noether

$$\left(\partial_I \lrcorner De^J\right) \wedge \mathcal{E}_J + \left[\left(\partial_I \lrcorner R^{KL}\right) - 2\Lambda \delta_I^{[K} \delta_J^{L]} e^J\right] \wedge \mathcal{E}_{KL} = 0. \tag{2.70}$$

Si se multiplica (2.70) por parámetros locales arbitrarios ε^I, con algo álgebra se obtiene la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\left(\varepsilon \lrcorner De^I\right)}_{\delta_\varepsilon e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{\left[\left(\varepsilon \lrcorner R^{IJ}\right) - 2\Lambda \varepsilon^{[I} e^{J]}\right]}_{\delta_\varepsilon \omega^{IJ}} = 0, \tag{2.71}$$

con $\varepsilon = \varepsilon^I \partial_I$, de la cual se puede, después de aplicar el recíproco del segundo teorema de Noether, leer la simetría de norma

$$\delta_\varepsilon e^I = \varepsilon \lrcorner De^I, \tag{2.72a}$$

$$\delta_\varepsilon \omega^{IJ} = \varepsilon \lrcorner R^{IJ} - 2\Lambda \varepsilon^{[I} e^{J]}. \tag{2.72b}$$

Esta simetría de norma fue reportada en [22]. Se observa que la acción de Lovelock (2.1), cuyos coeficientes a_p satisfacen (2.62), es cuasi-invariante bajo la transformación de norma (2.72) porque

$$\begin{aligned}\delta S_n = &- \kappa \int d\left(\sum_{p=1}^{(n-1)/2} a_p p \epsilon_{IJI_3I_4\cdots I_{2p-1}I_{2p}I_{2p+1}\cdots I_n} \right.\\ &\left. \times R^{I_3I_4} \wedge \cdots \wedge R^{I_{2p-1}I_{2p}} \wedge e^{I_{2p+1}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n} \wedge \left(\varepsilon \lrcorner R^{IJ} - 2\Lambda \varepsilon^{[I} e^{J]} \right) \right). \end{aligned} \tag{2.73}$$

Un aspecto interesante de la nueva simetría (2.72) es que en tres dimensiones ($n = 3$) es trivial [5, 4], ya que se escribe en términos de las derivadas variacionales (2.42a) y (2.42b) como

$$\delta_\varepsilon e^I = - \frac{\sigma\Lambda}{3!\kappa a_0} \epsilon^{IJK} \left(\varepsilon \lrcorner \mathcal{E}_{JK} \right), \tag{2.74a}$$

$$\delta_\varepsilon \omega^{IJ} = - \frac{\sigma\Lambda}{3!\kappa a_0} \epsilon^{IJK} \left(\varepsilon \lrcorner \mathcal{E}_{K} \right). \tag{2.74b}$$

Sin embargo, si $n > 3$ se observa, a través de una comparación directa entre (2.6) y (2.72), que esta nueva simetría *no* es trivial, por ejemplo, notando que la transformación (2.72) contienen un único factor de curvatura R^{IJ}, mientras que (2.6) contienen $[(n-1)/2]$ factores de curvatura.

Por lo tanto, si $\mathcal{M}^n$ es de dimensión impar con $n > 3$ y los coeficientes de la acción de Lovelock satisfacen (2.62), entonces su conjunto completo de simetrías está compuesto por transformaciones locales de Lorentz (δ_τ), traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ (2.49) (δ_ρ), y también la nueva simetría de norma (2.72) (δ_ε). El álgebra de los conmutadores de este conjunto, actuando tanto en el marco ortonormal e^I como en la conexión $\omega^I{}_J$, se lee [6]

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] = \delta_{\tau_3}, \qquad \left({\tau_3}^{IJ} := 2{\tau_1}^{[I|K} {\tau_2}^{|J]}{}_K \right), \tag{2.75a}$$

$$[\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}] = \delta_{\tau}, \qquad \left(\tau^{IJ} := 2\Lambda {\rho_1}^{[I} {\rho_2}^{J]} \right), \tag{2.75b}$$

$$[\delta_{\tau}, \delta_{\rho}] = \delta_{\rho_1}, \qquad \left({\rho_1}^{I} := -\tau^I{}_J \rho^J \right), \tag{2.75c}$$

$$\begin{aligned}[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = \delta_\tau + \delta_\rho + \delta_{\varepsilon_3}, \qquad & \Big(\tau^{IJ} := \varepsilon_2 \lrcorner \left(\varepsilon_1 \lrcorner R^{IJ} \right) - 2\Lambda {\varepsilon_1}^{[I} {\varepsilon_2}^{J]}, \\ & \rho^I := \varepsilon_1 \lrcorner \left(\varepsilon_2 \lrcorner De^I \right), \\ & {\varepsilon_3}^I := \varepsilon_1 \lrcorner \left(\varepsilon_2 \lrcorner De^I \right) + \varepsilon_2 \lrcorner D{\varepsilon_1}^I - \varepsilon_1 \lrcorner D{\varepsilon_2}^I \Big), \end{aligned} \tag{2.75d}$$

$$[\delta_{\tau}, \delta_{\varepsilon}] = \delta_{\varepsilon_1}, \qquad \left({\varepsilon_1}^{I} := -\tau^I{}_J \varepsilon^J \right), \tag{2.75e}$$

$$[\delta_{\rho}, \delta_{\varepsilon}] = \delta_{\varepsilon_1}, \qquad \left({\varepsilon_1}^{I} := -\varepsilon \lrcorner D\rho^I \right). \tag{2.75f}$$

[6]En esta sección, a lo largo del cálculo del álgebra de los conmutadores de la simetrías de norma de la acción de Lovelock (2.1), se asume que los parámetros de norma son independientes de los campos. Por el contrario, en el Apéndice C se calculan las álgebras de los conmutadores de varios conjuntos equivalentes de simetrías de norma de la acción de Lovelock permitiendo que los parámetros de norma dependan de los campos.

Se observa que el álgebra de los conmutadores de las simetrías de norma es cerrada. Las ecuaciones (2.75a) - (2.75c) reflejan el hecho de que los conmutadores de las transformaciones locales de Lorentz y las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ forman juntos el álgebra del grupo de De Sitter ($\Lambda > 0$) o anti-De Sitter ($\Lambda < 0$). Por otro lado, (2.75d) establece que el conmutador de dos nuevas simetrías (2.72) es una combinación lineal de una transformación local de Lorentz, una traslación local y una transformación del tipo (2.72), con parámetros de norma dependientes de los campos. Finalmente, las relaciones (2.75e) y (2.75f), revelan que el conmutador de una transformación de Lorentz local o una traslación local con la nueva simetría de norma es nuevamente una transformación del tipo de (2.72), con un parámetro de norma rotado o afectado por una traslación local, respectivamente.

Por otro lado, se ha visto en la sección 2.2 que la acción de Lovelock (2.1) también es cuasi-invariante bajo difeomorfismos infinitesimales. Sin embargo, las transformaciones locales de Lorentz junto con las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ y la simetría (2.72) forman un conjunto completo, de modo que los difeomorfismos deben ser un combinación lineal de estas transformaciones. Un cálculo directo muestra que, de hecho, un difeomorfismo infinitesimal puede reescribirse como

$$\delta_\xi e^I = \mathcal{L}_\xi e^I = \left(\delta_\tau + \delta_\rho + \delta_\varepsilon\right) e^I, \tag{2.76a}$$

$$\delta_\xi \omega^{IJ} = \mathcal{L}_\xi \omega^{IJ} = \left(\delta_\tau + \delta_\rho + \delta_\varepsilon\right) \omega^{IJ}, \tag{2.76b}$$

donde $\xi := \xi^I \partial_I$ es el generador infinitesimal del difeomorfismo y los parámetros de norma (dependientes de los campos) son $\tau^{IJ} := -\xi \lrcorner \omega^{IJ}$, $\rho^I := \xi \lrcorner e^I$ y $\varepsilon^I := \xi \lrcorner e^I$. Es importante tener en cuenta que en tres dimensiones los difeomorfismos se convierten en una combinación lineal de transformaciones locales de Lorentz, traslaciones locales y la nueva simetría (2.72), a pesar de que esta última se vuelve trivial.

Cabe destacar que uno puede construir diferentes conjuntos completos de simetrías de norma que consideran otras simetrías de norma como las fundamentales. Un aspecto particularmente importante de estos conjuntos es su álgebra. De modo que, por completitud, se reporta a continuación el álgebra de los conmutadores de otros dos conjuntos completos, equivalentes a (2.75), que están formados por las simetrías de norma obtenidos hasta ahora en este trabajo.

Primer conjunto. Este conjunto completo de simetrías de norma se compone de transformaciones locales de Lorentz (δ_τ), traslaciones locales (δ_ρ) y difeomorfismos mejorados (δ_χ). El álgebra de los conmutadores es

$$
\begin{aligned}
[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] &= \delta_{\tau_3}, && \left(\tau_3{}^{IJ} := 2\tau_1{}^{[I|K}\tau_2{}^{|J]}{}_K\right), && (2.77a)\\
[\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}] &= \delta_{\tau}, && \left(\tau^{IJ} := 2\Lambda\rho_1{}^{[I}\rho_2{}^{J]}\right), && (2.77b)\\
[\delta_{\tau}, \delta_{\rho}] &= \delta_{\rho_1}, && \left(\rho_1{}^I := -\tau^I{}_J\rho^J\right), && (2.77c)\\
[\delta_{\chi_1}, \delta_{\chi_2}] &= \delta_{\tau} + \delta_{\chi_3}, && \left(\tau^{IJ} := \chi_2\rfloor\left(\chi_1\rfloor R^{IJ}\right), \quad \chi_3^I := \chi_1\rfloor\left(\chi_2\rfloor De^I\right)\right), && (2.77d)\\
[\delta_{\tau}, \delta_{\chi}] &= \delta_{\chi_1}, && \left(\chi_1{}^I := -\tau^I{}_J\chi^J\right), && (2.77e)\\
[\delta_{\rho}, \delta_{\chi}] &= \delta_{\tau} + \delta_{\rho_1} + \delta_{\chi_1}, && \left(\tau^{IJ} := 2\Lambda\rho^{[I}\chi^{J]},\right. && \\
& && \left.\rho_1{}^I := \chi\rfloor D\rho^I, \quad \chi_1{}^I := -\chi\rfloor D\rho^I\right). && (2.77f)
\end{aligned}
$$

Segundo conjunto. Este conjunto completo de simetrías de norma se compone de transformaciones locales de Lorentz (δ_τ), traslaciones locales (δ_ρ) y difeomorfismos (δ_ξ). El álgebra de los conmutadores es

$$
\begin{aligned}
[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] &= \delta_{\tau_3}, && \left(\tau_3{}^{IJ} := 2\tau_1{}^{[I|K}\tau_2{}^{|J]}{}_K\right), && (2.78a)\\
[\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}] &= \delta_{\tau}, && \left(\tau^{IJ} := 2\Lambda\rho_1{}^{[I}\rho_2{}^{J]}\right), && (2.78b)\\
[\delta_{\tau}, \delta_{\rho}] &= \delta_{\rho_1}, && \left(\rho_1{}^I := -\tau^I{}_J\rho^J\right), && (2.78c)\\
[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] &= \delta_{\xi_3}, && \left(\xi_3{}^I := \xi_1\rfloor\left(\xi_2\rfloor de^I\right)\right), && (2.78d)\\
[\delta_{\tau}, \delta_{\xi}] &= \delta_{\tau} + \delta_{\xi_1}, && \left(\tau^{IJ} := \mathcal{L}_\xi\tau^{IJ}, \quad \xi_1{}^I := -\tau^I{}_J\xi^J\right), && (2.78e)\\
[\delta_{\rho}, \delta_{\xi}] &= \delta_{\rho_1} + \delta_{\xi_1}, && \left(\rho_1{}^I := \mathcal{L}_\xi\rho^I, \quad \xi_1{}^I := -\xi\rfloor D\rho^I\right). && (2.78f)
\end{aligned}
$$

2.4.2. Acción de Lovelock invariante bajo traslaciones locales con $\Lambda = 0$

En esta sección, se realiza la derivación de una nueva simetría, que surge de la aplicación del recíproco del segundo teorema de Noether al término más alto (o último) de la acción de Lovelock (2.1) para n impar, que fue reportada en [22]. Esta simetría es:

$$\int L_n^{(n-1)/2} = \kappa \int \epsilon_{I_1 I_2 \cdots I_{n-2} I_{n-1} I_n} R^{I_1 I_2} \wedge \cdots \wedge R^{I_{n-2} I_{n-1}} \wedge e^{I_n}, \tag{2.79}$$

con derivadas variacionales

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_I^{(n-1)/2} &= \kappa \epsilon_{I I_2 I_3 \cdots I_{n-1} I_n} R^{I_2 I_3} \wedge \cdots \wedge R^{I_{n-1} I_n}, && (2.80a)\\
\mathcal{E}_{IJ}^{(n-1)/2} &= \kappa \frac{(n-1)}{2} \epsilon_{IJ I_3 I_4 \cdots I_{n-2} I_{n-1} I_n} R^{I_3 I_4} \wedge \cdots \wedge R^{I_{n-2} I_{n-1}} \wedge De^{I_n}. && (2.80b)
\end{aligned}
$$

Como se menciona en la sección 2.2, las derivadas variacionales (2.80) están relacionadas por la identidad de Noether (2.39). Esta identidad aparece como parte de la identidad de Noether asociada a los difeomorfismos mejorados. Sin embargo, su derivación se pospuso hasta este punto, debido a que la identidad de Noether (2.39) es relevante por sí misma, ya que permite obtener una nueva simetría del término más alto de la acción de Lovelock (2.1) para dimensiones impares. A continuación se realiza dicha derivación.

Realizando el producto exterior $R^{IJ} \wedge \mathcal{E}_{IJ}^{(n-1)/2}$ se obtiene una $(n+1)$-forma, por lo que este producto es idénticamente cero. Calculando el producto interior de esta expresión con ∂_I se obtiene

$$\partial_I \rfloor \left(R^{JK} \wedge \mathcal{E}_{JK}^{(n-1)/2} \right) = \left(\partial_I \rfloor R^{JK} \right) \wedge \mathcal{E}_{JK}^{(n-1)/2} + R^{JK} \wedge \left(\partial_I \rfloor \mathcal{E}_{JK}^{(n-1)/2} \right) = 0, \tag{2.81}$$

de modo que basta reescribir el segundo término de (2.81) como

$$\begin{aligned} R^{JK} \wedge \left(\partial_I \rfloor \mathcal{E}_{JK}^{(n-1)/2} \right) = & \, \kappa \frac{(n-1)}{2} \epsilon_{JKI_3I_4\cdots I_{n-2}I_{n-1}I_n} R^{JK} \\ & \wedge \left[\left(\frac{n-3}{2} \right) \left(\partial_I \rfloor R^{I_3I_4} \right) \wedge R^{I_5I_6} \wedge \cdots \wedge R^{I_{n-2}I_{n-1}} \wedge De^{I_n} \right. \\ & \left. + \partial_I \rfloor R^{I_3I_4} \wedge \cdots \wedge R^{I_{n-2}I_{n-1}} \wedge \left(\partial_I \rfloor De^{I_n} \right) \right] \\ = & \left(\frac{n-3}{2} \right) \left(\partial_I \rfloor R^{IJ} \right) \wedge \mathcal{E}_{IJ}^{(n-1)/2} + \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\partial_I \rfloor De^{I} \right) \wedge \mathcal{E}_{I}^{(n-1)/2}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Sustituyendo (2.82) en (2.81), se obtiene la identidad de Noether (2.39), la cual es

$$\mathcal{E}_{JK}^{(n-1)/2} \wedge \left(\partial_I \rfloor R^{JK} \right) + \mathcal{E}_{J}^{(n-1)/2} \wedge \left(\partial_I \rfloor De^{J} \right) = 0. \tag{2.83}$$

Multiplicando (2.83) por el parámetro local arbitrario ε^I y denotando por $\varepsilon = \varepsilon^I \partial_I$, se obtiene la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_{I}^{(n-1)/2} \wedge \underbrace{\left(\varepsilon \rfloor De^{I} \right)}_{\delta_\varepsilon e^I} + \mathcal{E}_{IJ}^{(n-1)/2} \wedge \underbrace{\left(\varepsilon \rfloor R^{IJ} \right)}_{\delta_\varepsilon \omega^{IJ}} = 0. \tag{2.84}$$

De acuerdo con el recíproco del segundo teorema de Noether, la simetría de norma involucrada en (2.84) viene dada por los términos que acompañan a las derivadas variacionales $\mathcal{E}_{I}^{(n-1)/2}$ y $\mathcal{E}_{IJ}^{(n-1)/2}$, los cuales son

$$\delta_\varepsilon e^I = \varepsilon \rfloor De^I, \tag{2.85a}$$

$$\delta_\varepsilon \omega^{IJ} = \varepsilon \rfloor R^{IJ}. \tag{2.85b}$$

De hecho, la acción (2.79) es cuasi-invariante bajo la nueva simetría de norma (2.85) porque

$$\begin{aligned} \delta S_n = & - \kappa \int d \left(\frac{1}{2}(n-1) a_{(n-1)/2} \epsilon_{IJI_3I_4\cdots I_{n-2}I_{n-1}I_n} \right. \\ & \left. \times R^{I_3I_4} \wedge \cdots \wedge R^{I_{n-2}I_{n-1}} \wedge e^{I_n} \wedge \left(\varepsilon \rfloor R^{IJ} \right) \right). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Tenga en cuenta que en tres dimensiones esta simetría se vuelve trivial porque la transformación (2.85) puede reescribirse en términos de las derivadas variacionales (2.80), haciendo $n=3$, de la siguiente manera

$$\delta_\varepsilon e^I = \frac{\sigma}{2\kappa a_1}\epsilon^{IJK}\left(\varepsilon\rfloor\mathcal{E}^1_{JK}\right), \tag{2.87a}$$
$$\delta_\varepsilon \omega^{IJ} = \frac{\sigma}{2\kappa a_1}\epsilon^{IJK}\left(\varepsilon\rfloor\mathcal{E}^1_{K}\right). \tag{2.87b}$$

Sin embargo, se observa de (2.80) que en dimensiones superiores a tres la nueva simetría (2.85) *no* es trivial. Por lo tanto, el conjunto completo de simetrías de norma de la acción (2.79) se compone de transformaciones locales de Lorentz, traslaciones locales con $\Lambda=0$ y la nueva simetría de norma (2.85). Ahora se obtiene el álgebra de los conmutadores de las simetrías de norma de la acción (2.79), actuando tanto en el marco ortonormal e^I como en la conexión ω^{IJ}. Denotando una transformación local de Lorentz por δ_τ, una traslación local con $\Lambda=0$ por δ_ρ y la simetría (2.85) por δ_ε, el álgebra se lee

$$[\delta_{\tau_1},\delta_{\tau_2}] = \delta_{\tau_3}, \qquad \left({\tau_3}^{IJ} := 2{\tau_1}^{[I|K}{\tau_2}^{|J]}{}_K\right), \tag{2.88a}$$
$$[\delta_{\rho_1},\delta_{\rho_2}] = 0, \tag{2.88b}$$
$$[\delta_{\tau},\delta_{\rho}] = \delta_{\rho_1}, \qquad \left({\rho_1}^{I} := -\tau^I{}_J\rho^J\right), \tag{2.88c}$$
$$\begin{aligned}[\delta_{\varepsilon_1},\delta_{\varepsilon_2}] = \delta_\tau+\delta_\rho+\delta_{\varepsilon_3}, \qquad &\left(\tau^{IJ} := \varepsilon_2\rfloor\left(\varepsilon_1\rfloor R^{IJ}\right),\quad \rho^I := \varepsilon_1\rfloor\left(\varepsilon_2\rfloor De^I\right),\right.\\ &\left.{\varepsilon_3}^I := \varepsilon_1\rfloor\left(\varepsilon_2\rfloor De^I\right) + \varepsilon_2\rfloor D{\varepsilon_1}^I - \varepsilon_1\rfloor D{\varepsilon_2}^I\right),\end{aligned} \tag{2.88d}$$
$$[\delta_{\tau},\delta_{\varepsilon}] = \delta_{\varepsilon_1}, \qquad \left({\varepsilon_1}^{I} := -\tau^I{}_J\varepsilon^J\right), \tag{2.88e}$$
$$[\delta_{\rho},\delta_{\varepsilon}] = \delta_{\varepsilon_1}, \qquad \left({\varepsilon_1}^{I} := -\varepsilon\rfloor D\rho^I\right). \tag{2.88f}$$

Como se ha visto en la sección 2.2, la acción (2.79) también es invariante bajo difeomorfismos. Sin embargo, se ha demostrado que el conjunto de simetrías de norma de (2.79) es completo, por lo tanto, los difeomorfismos se convierten en una simetría derivada. De hecho, si ξ es un campo vectorial arbitrario, entonces se puede expresar un difeomorfismo infinitesimal en términos de las simetrías de norma que forman el conjunto completo (2.88) como

$$\delta_\xi e^I = \mathcal{L}_\xi e^I = \left(\delta_\tau+\delta_\rho+\delta_\varepsilon\right)e^I, \tag{2.89}$$
$$\delta_\xi \omega^{IJ} = \mathcal{L}_\xi \omega^{IJ} = \left(\delta_\tau+\delta_\rho+\delta_\varepsilon\right)\omega^{IJ}, \tag{2.90}$$

con parámetros de norma dependientes de los campos $\tau^{IJ} := -\xi\rfloor\omega^{IJ}$, $\rho^I := \xi\rfloor e^I$ y $\varepsilon^I := \xi\rfloor e^I$.

Capítulo 3

Gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión n-dimensional en el formalismo de Cartan

3.1. Introducción

Algunas de las generalizaciones más directas a la relatividad general son las teorías conocidas en su conjunto como gravedad $f(\mathcal{R})$. En tales teorías, la Lagrangiana es proporcional a una función arbitraria $f(\mathcal{R})$ del escalar de Ricci $\mathcal{R}$, en lugar de ser lineal en $\mathcal{R}$ como en la relatividad general. Principalmente, se pueden encontrar tres versiones de gravedad $f(\mathcal{R})$:

I) gravedad $f(\mathcal{R})$ métrica,

II) gravedad $f(\mathcal{R})$ de Palatini

III) gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión.

En el primer caso, la Lagrangiana depende únicamente del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y se considera que la conexión de espacio-tiempo es la conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ construida a partir de la métrica. En el segundo caso, se supone que las variables fundamentales de la teoría son el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y una conexión libre de torsión $\hat{\nabla}$ (ver [19, 20, 21] para revisiones de gravedad $f(\mathcal{R})$ métrica y de Palatini). En el tercer caso, las variables fundamentales de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión se pueden considerar de dos formas: el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y una conexión compatible con la métrica $\tilde{\nabla}$, en el formalismo métrico-afín [42, 43, 44]; o un marco ortonormal de 1-formas del grupo de Lorentz e^I y una 1-forma de conexión ${\omega^I}_J$ compatible con la métrica η_{IJ}, en el formalismo Cartan [45].

El principal objetivo de este capítulo es extender el análogo de las traslaciones locales en 3D reportado en [17, 18] al caso de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión. Este resultado fue reportado en [23], mostrando que existe dicha extensión natural.

En el formalismo de Cartan, la acción que describe gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión en n dimensiones ($n \geq 3$) es

$$S_{f(\mathcal{R})}[e,\omega] = \int_{\mathcal{M}^n} L_{f(\mathcal{R})}, \tag{3.1}$$

donde la n-forma Lagrangiana es (ver [45])

$$L_{f(\mathcal{R})} = \kappa f(\mathcal{R})\eta. \tag{3.2}$$

Aquí, $f(\mathcal{R})$ es una función arbitraria (real) del escalar de Ricci $\mathcal{R}$ de la conexión $\omega^I{}_J$, definido como $\mathcal{R} = \mathcal{R}^I{}_{JIL}\eta^{JL}$, κ es una constante relacionada con la constante de Newton, cuyo valor numérico depende de n y η es la forma de volumen n-dimensional, $\eta = (1/n!)\epsilon_{I_1\cdots I_n} e^{I_1} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}$. Los índices de nuevo toman valores de 0 a $n-1$ y se suben y bajan con la métrica de Lorentz η_{IJ} y su inversa.

Las derivadas variacionales de la acción definida por la n-forma Lagrangiana (3.2) con respecto al marco ortonormal e^I y a la conexión ω^{IJ} son, respectivamente:

$$\mathcal{E}_I := \frac{\delta S}{\delta e^I} = \kappa(-1)^{n-1}\left[f'(\mathcal{R}) \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{JK} + (f(\mathcal{R}) - \mathcal{R}f'(\mathcal{R})) \star e_I\right], \tag{3.3a}$$

$$\mathcal{E}_{IJ} := \frac{\delta S}{\delta \omega^{IJ}} = \kappa(-1)^{n-1} D\left[f'(\mathcal{R}) \star (e_I \wedge e_J)\right], \tag{3.3b}$$

donde $f'(\mathcal{R}) := \frac{\mathrm{d}f(\mathcal{R})}{\mathrm{d}\mathcal{R}}$ y '$\star$' es el dual de Hodge:

$$\star\left(e_{I_1} \wedge \cdots \wedge e_{I_k}\right) = \frac{1}{(n-k)!}\epsilon_{I_1 \ldots I_k I_{k+1} \ldots I_n} e^{I_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}. \tag{3.4}$$

Las ecuaciones de movimiento de la teoría corresponden a $\mathcal{E}_I = 0$ y $\mathcal{E}_{IJ} = 0$, y que escritas en componentes dan lugar a

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}^I{}_J - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})\delta^I{}_J = 0, \tag{3.5a}$$

$$T^I{}_{JK} - \frac{2}{(n-2)\, f'(\mathcal{R})}\delta^I{}_{[J}\partial_{K]} f'(\mathcal{R}) = 0, \tag{3.5b}$$

donde $\mathcal{R}^I{}_J$ es el tensor de Ricci, $\mathcal{R}^I{}_J := \mathcal{R}^I{}_{KJL}\eta^{KL}$, ∂_I es el campo vectorial dual al marco ortonormal e^I, *i.e.*, $\partial_J \lrcorner e^I = \delta^I{}_J$ y $T^I{}_{JK}$ son los componentes de la 2-forma $De^I = (1/2)T^I{}_{JK} e^J \wedge e^K$. Observe que con la elección particular $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - 2\Lambda$, la ecuación (3.5a) conduce a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, mientras que (3.5b) implica que $T^I{}_{JK} = 0$ y, por lo tanto, la conexión $\omega^I{}_J$ es libre de torsión. Esto es de esperarse, ya que en este caso la Lagrangiana (3.2) se reduce a la Lagrangiana n-dimensional de Einstein-Cartan con término de constante cosmológica,

$$L_{\mathrm{GR}} = \kappa\left(\mathcal{R} - 2\Lambda\right)\eta = \kappa\left[\star(e_I \wedge e_J) \wedge R^{IJ} - 2\Lambda\eta\right]. \tag{3.6}$$

Sin embargo, en el caso general, de la ecuación (3.5b) se ve que una función no lineal $f(\mathcal{R})$ es una fuente de torsión y por lo tanto la conexión $\omega^I{}_J$ ya no es libre torsión *on-shell*, incluso en el vacío. Además, en contraste con la relatividad general, para una $f(\mathcal{R})$ no lineal, la ecuación (3.5b) contiene segundas derivadas de la conexión, de manera que el uso del término *"formalismo de primer orden"* sería impreciso para describir esta teoría.

Por otro lado, debe señalarse que la ecuación de movimiento (3.5b) es diferente de su contraparte en gravedad $f(\mathcal{R})$ en el formalismo de Palatini, donde los supuestos son torsión cero y no-metricidad arbitraria. De hecho, en este último caso, la ecuación de movimiento que reemplaza a (3.5b) implica que la no-metricidad es cero solo para una función lineal $f(\mathcal{R})$ (ver [19, 20, 21, 46] y el Apéndice D para una descripción de otras formulaciones de gravedad $f(\mathcal{R})$).

3.2. Invariancia bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos de la gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión en el formalismo de Cartan

A continuación se muestra detalladamente cómo obtener las identidades de Noether asociadas a la invariancia bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos de la acción (3.1) de gravedad $f(\mathcal{R})$.

Para obtener la identidad de Noether asociada a las transformaciones locales de Lorentz se comienza tomando la derivada covariante de $\mathcal{E}_{IJ}$ dada en (3.3b), obteniendo

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_{IJ} &= (-1)^{n-1}\kappa D^2\left[f'(\mathcal{R})\star(e_I\wedge e_J)\right] \\ &= (-1)^{n-1}\kappa f'(\mathcal{R})\left[-R^K{}_I\wedge\star(e_K\wedge e_J) - R^K{}_J\wedge\star(e_I\wedge e_K)\right] \\ &= (-1)^{n-1}\kappa f'(\mathcal{R})\left(-2\mathcal{R}^K{}_{[J}e_{I]}\wedge\star e_K\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde se ha usado en la segunda línea la propiedad

$$\begin{aligned} D^2\star(e_{I_1}\wedge e_{I_2}\wedge\cdots\wedge e_{I_{n-1}}\wedge e_{I_k}) = &- R^J{}_{I_1}\wedge\star(e_J\wedge e_{I_2}\wedge\cdots\wedge e_{I_{k-1}}\wedge e_{I_k}) \\ &- \cdots - R^J{}_{I_k}\wedge\star(e_{I_1}\wedge e_{I_2}\wedge\cdots\wedge e_{I_{k-1}}\wedge e_J), \end{aligned} \tag{3.8}$$

y en la tercera línea la identidad

$$R^{KI}\wedge\star(e_J\wedge e_K) = \frac{1}{n!}\epsilon_{KI_2\ldots I_n}\mathcal{R}^K{}_Je^I\wedge e^{I_2}\wedge\cdots\wedge e^{I_n} = -\mathcal{R}^K{}_Je^I\wedge\star e_K. \tag{3.9}$$

Por otro lado, de la ecuación (3.3a) se tiene

$$e_I\wedge\mathcal{E}_J = \kappa(-1)^{n-1}\left(f(\mathcal{R})e_I\wedge\star e_J - 2f'(\mathcal{R})\mathcal{R}^K{}_Je_I\wedge\star e_K\right). \tag{3.10}$$

Antisimetrizando esta expresión en los índices I, J e insertando el resultado en (3.7), se llega a la identidad de Noether

$$D\mathcal{E}_{IJ} - e_{[I}\wedge\mathcal{E}_{J]} = 0, \tag{3.11}$$

que, después de ser multiplicada por el parámetro de norma local $\tau^{IJ}(x)(= -\tau^{JI}(x))$ y algo de álgebra, conduce a la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\tau^I{}_J e^J}_{\delta_\tau e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{(-D\tau^{IJ})}_{\delta_\tau \omega^{IJ}} + d\left[(-1)^{n-1}\tau^{IJ}\mathcal{E}_{IJ}\right] = 0. \tag{3.12}$$

Apelando al recíproco del segundo teorema de Noether, las transformaciones locales de Lorentz (2.8a) emergen de las cantidades que multiplican cada derivada variacional en (3.12).

Hasta este punto, para obtener las identidades de Noether en este trabajo se han manipulado únicamente formas diferenciales, evitando en la medida de lo posible separarlas en sus componentes. Sin embargo, existe un segundo enfoque para construir identidades de Noether, que consiste en los siguientes pasos:

1. Se construyen n-formas a partir de las derivadas variacionales $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$, ya sea por medio de la derivada exterior covariante o el producto exterior con 1-formas.

2. Como toda n-forma es proporcional a la forma de volumen η se identifica las funciones de proporcionalidad.

3. Se construyen las identidades de Noether relacionando las funciones de proporcionalidad antes identificadas.

4. Se devuelve la expresión resultante a su forma tensorial.

A continuación, este método se ilustra obteniendo la identidad de Noether para el caso de difeomorfismos mejorados.

Se parte escribiendo la derivada exterior covariante $D\mathcal{E}_I$ como

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I =& \kappa(-1)^{n-1}\big(f'(\mathcal{R})(\partial_I\mathcal{R}) + f(\mathcal{R})T^J{}_{IJ} - 2f''(\mathcal{R})(\partial_J\mathcal{R})\mathcal{R}^J{}_I \\ & -2f'(\mathcal{R})D_J\mathcal{R}^J{}_I - 2f'(\mathcal{R})\mathcal{R}^J{}_I T^K{}_{JK}\big)\,\eta. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por otro lado, se tienen las siguientes expresiones para las n-formas construidas a partir de las derivadas variacionales $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$:

$$e^J \wedge \mathcal{E}_K = \kappa(-1)^{n-1}\big(f(\mathcal{R})\delta^J{}_K - 2f'(\mathcal{R})\mathcal{R}^J{}_K\big)\,\eta, \tag{3.14a}$$

$$e^J \wedge \mathcal{E}_{KL} = \kappa(-1)^{n-1}\left[\delta^J{}_{[K}(\partial_{L]}\mathcal{R})f''(\mathcal{R}) + f'(\mathcal{R})\left(2\delta^J{}_{[K}T^M{}_{L]M} + T^J{}_{KL}\right)\right]\eta. \tag{3.14b}$$

Observando que (3.13) contiene términos de la forma $f(\mathcal{R})T^J{}_{IJ}$ y $2f''(\mathcal{R})(\partial_J\mathcal{R})$, se intuye que multiplicando (3.14a) por $T^K{}_{IJ}$ y (3.14b) por $\mathcal{R}^{KL}{}_{IJ}$ se obtienen términos comunes que permiten combinar (3.13) con (3.14) en una identidad de Noether. Al realizar esta multiplicación se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} T^K{}_{IJ}e^J \wedge \mathcal{E}_K =& \kappa(-1)^{n-1}\left[f(\mathcal{R})T^J{}_{IJ} - 2f'(\mathcal{R})\mathcal{R}^J{}_K T^K{}_{IJ}\right] \\ =& \left(\partial_I \lrcorner\, De^K\right) \wedge \mathcal{E}_K, \end{aligned} \tag{3.15a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{KL}{}_{IJ}e^J \wedge \mathcal{E}_{KL} =& \kappa(-1)^{n-1}\left[-2\mathcal{R}^J{}_I(D_J\mathcal{R})f''(\mathcal{R})\right. \\ & \left. -2f'(\mathcal{R})\mathcal{R}^J{}_K T^K{}_{JI} - f'(\mathcal{R})\mathcal{R}^{KL}{}_{IJ}T^J{}_{KL}\right] \\ =& \left(\partial_I \lrcorner\, R^{KL}\right) \wedge \mathcal{E}_{KL}. \end{aligned} \tag{3.15b}$$

Restando (3.15) a (3.13) se obtiene

$$D\mathcal{E}_I - \left(\partial_I \lrcorner De^K\right) \wedge \mathcal{E}_K - \left(\partial_I \lrcorner R^{KL}\right) \wedge \mathcal{E}_{KL} = \\ \kappa(-1)^{n-1} f'(\mathcal{R}) \left[2D_J \mathcal{R}^J{}_I + 2\mathcal{R}^J{}_K T^K{}_{JI} + \mathcal{R}^{KL}{}_{IJ} T^J{}_{KL} - \partial_I \mathcal{R}\right] \eta. \tag{3.16}$$

Usando la identidad de Bianchi $DR^{IJ} = 0$ escrita en componentes (A.16) (ver Apéndice A), el lado derecho de (3.16) desaparece, llevando a la identidad de Noether:

$$D\mathcal{E}_I = \left(\partial_I \lrcorner De^K\right) \wedge \mathcal{E}_K + \left(\partial_I \lrcorner R^{KL}\right) \wedge \mathcal{E}_{KL}, \tag{3.17}$$

la cual está asociada a los difeomorfismos mejorados, como se vio en la sección 3.2. Análogamente a como se hizo ahí, se multiplica (3.17) por un parámetro local $\chi^I(x)$, y con un poco de álgebra se obtiene la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\left(D\chi^I + \chi \lrcorner De^I\right)}_{\delta_\chi e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{\left(\chi \lrcorner R^{IJ}\right)}_{\delta_\chi \omega^{IJ}} + (-1)^n d\left(\chi^I \mathcal{E}_I\right) = 0. \tag{3.18}$$

De acuerdo con el recíproco del segundo teorema de Noether, la simetría de norma de la acción (3.1) de gravedad $f(\mathcal{R})$ involucrada en (3.18) viene dada por los términos que acompañan a las derivadas variacionales $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$, que son de nuevo los mismos que aparecen en la sección 3.2

$$\delta_\chi e^I = D\chi^I + T^I{}_{JK}\chi^{[J}e^{K]} = \mathcal{L}_\xi e^I + \tau^I{}_J e^J, \qquad (\xi^I := \chi^I, \tau^{IJ} := \chi \lrcorner \omega^{IJ}), \tag{3.19a}$$

$$\delta_\chi \omega^{IJ} = \mathcal{R}^{IJ}{}_{KL}\chi^{[K}e^{L]} = \mathcal{L}_\xi \omega^{IJ} - D\tau^{IJ}. \tag{3.19b}$$

Por lo tanto, se observa que la simetría (3.19) no es más que un difeomorfismo infinitesimal (2.8b) más una transformación local de Lorentz (2.8a) con parámetros de norma dependientes de los campos, es decir un "difeomorfismo mejorado". Para obtener la simetría bajo difeomorfismos de la acción (3.1) de gravedad $f(\mathcal{R})$, hay que combinar (3.12) con (3.18), tomando como parámetro de la transformación de Lorentz $\tau^{IJ} = \xi \lrcorner \omega^{IJ}$, de este modo se obtiene la identidad *off-shell*:

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\mathcal{L}_\xi e^I}_{\delta_\xi e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{\mathcal{L}_\xi \omega^{IJ}}_{\delta_\xi \omega^{IJ}} + (-1)^n d\left[(\xi \lrcorner e^I)\mathcal{E}_I + (\xi \lrcorner \omega^{IJ})\mathcal{E}_{IJ}\right] = 0, \quad \xi := \chi^I \partial_I, \tag{3.20}$$

de donde se puede identificar claramente la transformación de los campos bajo un difeomorfismo infinitesimal (2.8b) de los términos que acompañan a las derivadas variacionales $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$ en (3.20). Cabe destacar nuevamente que en el enfoque de este trabajo, la simetría de difeomorfismos infinitesimales se construye combinando identidades de Noether con parámetros de norma dependientes de los campos, y no a través de una identidad de Noether propia de los difeomorfismos, lo que comprueba, al igual que occurre en la teoría de gravedad de Lovelock en el formalismo de primer orden expuesta en el Capítulo 2, que los difeomorfismos en este marco son una simetría derivada.

3.3. Nueva simetría de norma de la gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión n-dimensional

Además de las transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos, se mostrará en esta sección cómo obtener la simetría de norma de la teoría que define la n-forma Lagrangiana (3.2), reportada en [23], la cual es la generalización a la encontrada en [17] para relatividad general n-dimensional. Esta simetría está dada por:

$$\delta_\rho e^I = D\rho^I + {Y_n}^I{}_{JK}\rho^J e^K, \tag{3.21a}$$
$$\delta_\rho \omega^{IJ} = {Z_n}^{IJ}{}_{KL}\rho^K e^L, \tag{3.21b}$$

con

$$\begin{aligned}
{Y_n}^I{}_{JK} :=& \frac{1}{(n-2)f'(\mathcal{R})}\delta^I_{[J}\partial_{K]}f'(\mathcal{R}), &(3.22a)\\
{Z_n}^{IJ}{}_{KL} :=& \frac{\sigma(n-3)}{(n-2)!}\left(\epsilon^{IJMI_1\dots I_{n-3}} * \mathcal{R}_{KI_1\dots I_{n-3}ML} + *\mathcal{R} *_{I_1\dots I_{n-4}KL}{}^{I_1\dots I_{n-4}IJ}\right) \\
&+ \frac{1}{(n-2)}\left(\mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{f'(\mathcal{R})}\right)\delta^{[I}_K\delta^{J]}_L, &(3.22b)
\end{aligned}$$

donde los duales internos izquierdos y derechos n-dimensionales son, respectivamente,

$$*\mathcal{R}_{I_1\dots I_{n-2}MN} := \frac{1}{2}\epsilon_{I_1\dots I_{n-2}KL}\mathcal{R}^{KL}{}_{MN}, \tag{3.23a}$$
$$\mathcal{R}*^{MNI_1\dots I_{n-2}} := \frac{1}{2}\epsilon^{I_1\dots I_{n-2}KL}\mathcal{R}^{MN}{}_{KL}. \tag{3.23b}$$

Para revelar la simetría interna de norma (3.21) se construye una identidad de Noether que relaciona la derivada covariante de $\mathcal{E}_I$ con $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$, la cual es distinta de (3.17).

Se comienza calculando la derivada covariante de la ecuación (3.3a), llegando a

$$\begin{aligned}
D\mathcal{E}_I =& \kappa(-1)^{n-1}\left\{f'(\mathcal{R})[D\star(e_I\wedge e_J\wedge e_K)]\wedge R^{JK}\right.\\
&+ Df'(\mathcal{R})\wedge\star(e_I\wedge e_J\wedge e_K)\wedge R^{JK} + D\left(f(\mathcal{R}) - \mathcal{R}f'(\mathcal{R})\right)\wedge\star e_I\\
&\left.+ \left(f(\mathcal{R}) - \mathcal{R}f'(\mathcal{R})\right)\wedge D\star e_I\right\}\\
=& \kappa(-1)^{n-1}\left\{f'(\mathcal{R})\frac{(n-3)}{(n-2)!}\epsilon_{IJKI_1I_2\dots I_{n-3}}\mathcal{R}^{JK}{}_{MN}\right.\\
&\times\left[D\left(e^{I_1}\wedge e^{I_2}\wedge\cdots\wedge e^{I_{n-3}}\wedge e^M\right)\wedge e^N\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}e^{I_1}\wedge D\left(e^{I_2}\wedge\cdots\wedge e^{I_{n-3}}\wedge e^M\wedge e^N\right)\right]\\
&+ Df'(\mathcal{R})\wedge\star(e_I\wedge e_J\wedge e_K)\wedge R^{JK} + D\left(f(\mathcal{R}) - \mathcal{R}f'(\mathcal{R})\right)\wedge\star e_I\\
&\left.+ \left(f(\mathcal{R}) - \mathcal{R}f'(\mathcal{R})\right)\wedge D\star e_I\right\}, \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se ha distribuido la derivada exterior covariante "D" y utilizado la identidad de Bianchi $DR^{IJ} = 0$, mientras que en la segunda se ha usado la siguiente relación:

$$D \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{JK} = \frac{(n-3)}{(n-2)!}\epsilon_{IJKI_1I_2\cdots I_{n-3}}\mathcal{R}^{JK}{}_{MN}$$
$$\times \left[D\left(e^{I_1} \wedge e^{I_2} \wedge \cdots \wedge e^{I_{n-3}} \wedge e^M\right) \wedge e^N + \frac{1}{2}e^{I_1} \wedge D\left(e^{I_2} \cdots \wedge e^{I_{n-3}} \wedge e^M \wedge e^N\right)\right], \quad (3.25)$$

que puede verificarse mediante un cálculo directo. Lo siguiente es escribir el lado derecho de la ecuación (3.24) en términos de $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$. Para ello, se calcula el producto de (3.3b) con $\epsilon^{IJI_3\ldots I_n}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} f'(\mathcal{R})D\left(e^{I_1} \wedge \cdots \wedge e^{I_{n-2}}\right) =& \frac{\sigma(-1)^{n-1}}{2\kappa}\epsilon^{IJI_1\ldots I_{n-2}}\mathcal{E}_{IJ} \\ &- Df'(\mathcal{R}) \wedge \left(e^{I_1} \wedge \cdots \wedge e^{I_{n-2}}\right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

que sustituido en (3.25) produce

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I =& \frac{\sigma(n-2)}{(n-3)!}\mathcal{R}^{JK}{}_{MN}\epsilon_{IJKI_1I_2\ldots I_{n-3}} \\ &\times \left(\epsilon^{I_1I_2\ldots I_{n-3}PQM}\mathcal{E}_{PQ} \wedge e^N + \frac{1}{2}e^{I_1} \wedge \epsilon^{I_2\ldots I_{n-3}PQMN}\mathcal{E}_{PQ}\right) \\ &+ \kappa(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(n-2)}Df'(\mathcal{R}) \wedge \star(e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{JK}\right. \\ &\left. + D\left(f(\mathcal{R}) - \mathcal{R}f'(\mathcal{R})\right) \wedge \star e_I + \left(f(\mathcal{R}) - \mathcal{R}f'(\mathcal{R})\right) \wedge D \star e_I\right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ahora, despejando los términos $\star(e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{JK}$ y $D \star e_I$ de (3.3a) y (3.3b), respectivamente, se obtienen las relaciones:

$$\star(e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{JK} = \frac{(-1)^{n-1}}{\kappa f'(\mathcal{R})}\mathcal{E}_I - \left(\frac{f(\mathcal{R})}{f'(\mathcal{R})} - \mathcal{R}\right) \star e_I, \quad (3.28a)$$

$$D \star e_I = \frac{(-1)^{n-1}}{\kappa f'(\mathcal{R})(n-2)}e^J \wedge \mathcal{E}_{IJ} - \frac{(n-1)}{(n-2)f'(\mathcal{R})}Df'(\mathcal{R}) \wedge \star e_I, \quad (3.28b)$$

de modo que, insertando estas dos expresiones en (3.27), se obtiene

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I =& \frac{\sigma(n-2)}{(n-3)!}\mathcal{R}^{JK}{}_{MN}\epsilon_{IJKI_1I_2\ldots I_{n-3}} \\ &\times \left(\epsilon^{I_1I_2\ldots I_{n-3}PQM}\mathcal{E}_{PQ} \wedge e^N + \frac{1}{2}e^{I_1} \wedge \epsilon^{I_2\ldots I_{n-3}PQMN}\mathcal{E}_{PQ}\right) \\ &+ \frac{1}{(n-2)f'(\mathcal{R})}Df'(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{E}_I + \frac{1}{(n-2)}\left(\mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{f'(\mathcal{R})}\right)e^J \wedge \mathcal{E}_{IJ} \\ &- \frac{\kappa(-1)^{n-1}}{(n-2)f'(\mathcal{R})}\partial_I f'(\mathcal{R})\left(nf(\mathcal{R}) - 2\mathcal{R}f'(\mathcal{R})\right)\eta. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En este punto, solo hace falta reescribir el último término en la ecuación (3.29) en términos de las derivadas variacionales $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$. Esto se logra notando que

$$e^J \wedge \mathcal{E}_J = \kappa(-1)^{n-1} \left(nf(\mathcal{R}) - 2\mathcal{R}f'(\mathcal{R})\right)\eta, \tag{3.30}$$

y usando este resultado en (3.29), de manera que $D\mathcal{E}_I$ toma la forma final

$$\begin{aligned} D\mathcal{E}_I = &- \frac{1}{(n-2)f'(\mathcal{R})}\partial_I f'(\mathcal{R}) e^J \wedge \mathcal{E}_J + \frac{\sigma(n-2)}{(n-3)!}\mathcal{R}^{JK}{}_{MN}\epsilon_{IJKI_1I_2\ldots I_{n-3}} \\ &\times \left(\epsilon^{I_1I_2\ldots I_{n-3}PQM}\mathcal{E}_{PQ} \wedge e^N + \frac{1}{2}e^{I_1} \wedge \epsilon^{I_2\ldots I_{n-3}PQMN}\mathcal{E}_{PQ}\right) \\ &+ \frac{1}{(n-2)f'(\mathcal{R})}Df'(\mathcal{R}) \wedge \mathcal{E}_I + \frac{1}{(n-2)}\left(\mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{f'(\mathcal{R})}\right) e^J \wedge \mathcal{E}_{IJ}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

de donde se pueden identificar los tensores $Y_n{}^K{}_{IJ}$ y $Z_n{}^{KL}{}_{IJ}$, dados en (3.22), a partir de las cantidades que aparecen multiplicando a $\mathcal{E}_K$ y $\mathcal{E}_{KL}$, respectivamente. De esta manera se ha llegado a la siguiente identidad de Noether

$$D\mathcal{E}_I - Z_n{}^{KL}{}_{IJ}e^J \wedge \mathcal{E}_{KL} - Y^K{}_{IJ}e^J \wedge \mathcal{E}_K = 0. \tag{3.32}$$

Multiplicando (3.32) por el parámetro de norma ρ^I y después de un poco de álgebra, se obtiene la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\left(D\rho^I + Y_n{}^I{}_{JK}\rho^J e^K\right)}_{\delta_\rho e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{Z_n{}^{IJ}{}_{KL}\rho^K e^L}_{\delta_\rho \omega^{IJ}} + d\left((-1)^n \rho^I \mathcal{E}_I\right) = 0. \tag{3.33}$$

Apelando al recíproco del segundo teorema de Noether, de las cantidades que multiplican $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$ en (3.33) se puede leer una nueva simetría de norma de la acción $f(\mathcal{R})$, que es precisamente la que se dio en (3.21).

Existen varias observaciones acerca de la nueva simetría (3.21) que vale la pena realizar. La primera de ellas es que el cambio de la n-forma Lagrangiana (3.2) bajo la transformación (3.21) es:

$$\begin{aligned} \delta_\rho L_{f(\mathcal{R})} = &d\left\{\frac{\kappa}{(n-2)}\rho^I \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge \left[R^{JK}\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\left(\mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{f'(\mathcal{R})}\right) e^J \wedge e^K\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Esto significa que la n-forma Lagrangiana (3.2) es cuasi-invariante, y por lo tanto, esta es una segunda forma de mostrar que la transformación (3.21) es una simetría de la acción construida a partir de (3.2).

La segunda observación pertinente es que los difeomorfismos y la simetría (3.21) no son simetrías de norma independientes, ya que los difeomorfismos infinitesimales (δ_ξ), actuando sobre el marco ortonormal e^I y la conexión ω^{IJ}, pueden ser escritos en términos de la simetría (3.21) (δ_ρ) y las transformaciones locales de Lorentz (δ_τ), módulo términos proporcionales a $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$, como:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi e^I =& \left(\delta_\rho - \delta_\tau\right) e^I + \frac{\sigma(-1)^{n-1}}{\kappa f'(\mathcal{R})}\left[\frac{2}{(n-2)} \star \left(e^K \wedge \mathcal{E}_{JK}\right) \rho^{[I} e^{J]} \right.\\
&\left. + \star \left(e^I \wedge \mathcal{E}_{JK}\right) \rho^{[J} e^{K]}\right],\\
\delta_\xi \omega^{IJ} =& \left(\delta_\rho - \delta_\tau\right) \omega^{IJ}\\
&+ \frac{\sigma(-1)^{n-1}}{\kappa f'(\mathcal{R})}\left[\frac{(n-3)}{(n-2)} \star \left(e^{[I} \wedge \mathcal{E}_K\right) \rho^{J]} e^K + \frac{3}{(n-2)} \star \left(e^{[I} \wedge \mathcal{E}_K\right) \rho^J e^{K]}\right], \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

donde $\tau^{IJ} := \xi \lrcorner \omega^{IJ}$ y $\rho^I := \xi \lrcorner e^I$ son parámetros de norma dependientes de los campos. Esto a su vez implica que las transformaciones locales de Lorentz y la nueva simetría de norma pueden tomarse como un conjunto fundamental para describir la libertad de norma completa de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión.

La tercera observación es que, en el caso particular de la relatividad general n-dimensional, *i.e.*, $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - 2\Lambda$, la transformación (3.21) se reduce a

$$\begin{aligned}
\delta_\rho e^I =& D\rho^I, \qquad (3.36a)\\
\delta_\rho \omega^{IJ} =& \frac{\sigma(n-3)}{(n-2)!}\Big(\epsilon^{IJLI_1\ldots I_{n-3}} * \mathcal{R}_{MI_1\ldots I_{n-3}LN}\\
&+ *\mathcal{R} *_{I_1\ldots I_{n-4}MN}{}^{I_1\ldots I_{n-4}IJ}\Big)\rho^M e^N + \frac{2\Lambda}{(n-2)}\rho^{[I} e^{J]}, \qquad (3.36b)
\end{aligned}$$

que es exactamente la simetría de norma interna reportada en [17]. Además, para obtener las traslaciones locales 3D,

$$\begin{aligned}
\delta_\rho e^I =& D\rho^I, \qquad (3.37a)\\
\delta_\rho \omega^{IJ} =& 2\Lambda \rho^{[I} e^{J]}, \qquad (3.37b)
\end{aligned}$$

basta hacer $n = 3$ en (3.36), lo cual prueba que la nueva simetría (3.21) es una generalización tanto de las traslaciones locales 3D (3.37) como de la simetría reportada en [17]. Tenga en cuenta que el término $Y_n{}^I{}_{JK}$ en la transformación de norma del marco e^I dado en (3.21a) desaparece para el caso de la relatividad general, mientras que si $f(\mathcal{R}) \neq \mathcal{R} - 2\Lambda$ dicho término siempre estará presente.

Es importante señalar que, en contraste con las transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos, la estructura de la simetría interna de norma (3.21) depende explícitamente de la dimensión del espacio-tiempo n y la función $f(\mathcal{R})$ bajo consideración. Por ejemplo, en cuatro dimensiones ($n = 4$) la nueva simetría (3.21) toma la forma

$$\begin{aligned}
\delta_\rho e^I =& D\rho^I + \frac{1}{2f'(\mathcal{R})}\left(\partial_J f'(\mathcal{R})\right)\rho^{[I} e^{J]}, \qquad (3.38a)\\
\delta_\rho \omega^{IJ} =& \frac{\sigma}{2}\left(-\epsilon^{IJKL} * \mathcal{R}_{MKLN} + *\mathcal{R} *{}_{MN}{}^{IJ}\right)\rho^M e^N + \frac{1}{2}\left(\mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{f'(\mathcal{R})}\right)\rho^{[I} e^{J]}, \qquad (3.38b)
\end{aligned}$$

mientras que en tres dimensiones ($n = 3$) la simetría (3.21) se convierte en

$$\delta_\rho e^I = D\rho^I + \frac{2}{f'(\mathcal{R})}\left(\partial_J f'(\mathcal{R})\right)\rho^{[I}e^{J]}, \tag{3.39a}$$

$$\delta_\rho \omega^{IJ} = \left(\mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{f'(\mathcal{R})}\right)\rho^{[I}e^{J]}. \tag{3.39b}$$

La cuarta y última observación antes de concluir esta sección es que el recíproco del segundo teorema de Noether aplicado a algunas acciones particulares de gravedad $f(\mathcal{R})$ puede conducir a simetrías adicionales. Por ejemplo, observe que el lado izquierdo de la ecuación (3.30) desaparece para $f(\mathcal{R}) = c\mathcal{R}^{n/2}$, con c una constante real, es decir,

$$e^J \wedge \mathcal{E}_J = \kappa c(-1)^{n-1}\left(n\mathcal{R}^{n/2} - 2\mathcal{R}\frac{n}{2}\mathcal{R}^{(n/2-1)}\right)\eta = 0. \tag{3.40a}$$

$$\tag{3.40b}$$

Por lo tanto, en este caso, se tiene la identidad de Noether

$$\mathcal{E}_I \wedge e^I = 0. \tag{3.41}$$

Análogamente a como se realizó para identidades de Noether anteriores, se multiplica (3.41) por el parámetro de norma $\mu(x)$, obteniendo así la identidad *off-shell*

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\mu e^I}_{\delta_\mu e^I} = 0. \tag{3.42}$$

Una vez más, apelando al recíproco del segundo teorema de Noether, se identifica la simetría de norma asociada a la identidad de Noether (3.41) de los términos que acompañan a las derivadas variacionales en (3.42), la cual es

$$\delta_\mu e^I = \mu e^I, \tag{3.43a}$$

$$\delta_\mu \omega^{IJ} = 0. \tag{3.43b}$$

Por lo tanto, se puede concluir que la acción $S[e,\omega] = \kappa \int_{\mathcal{M}^n} \mathcal{R}^{n/2}\eta$ es invariante bajo cambios en la escala del marco ortonormal e^I. Si bien es ampliamente conocido que la acción análoga, en el formalismo de Palatini, $S[g,\Gamma] = \kappa \int \mathcal{R}^{n/2}\eta$, es invariante bajo transformaciones conformes de la métrica [47], la simetría (3.43b) fue reportada apenas recientemente en [23]. De esta manera, se demuestra que aplicando el presente enfoque a casos particulares de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión nuevas simetrías pueden emerger; esto a su vez implica que el número de grados de libertad de las teorías de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión dependen de la función $f(\mathcal{R})$ particular empleada, de modo que sería interesante explorar el conteo de los grados de libertad físicos locales, por medio de métodos Lagrangianos, tales como los reportados en [40, 41], en los cuales las identidades de Noether obtenidas en este trabajo son un factor importante.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis se han estudiado las simetrías de norma de la teoría de gravedad de Lovelock n-dimensional en el formalismo de primer orden y de la teoría de gravedad $f(\mathcal{R})$ en el formalismo de Cartan, por medio del recíproco del segundo teorema de Noether. Se obtuvo para ambas teorías y tanto en dimensiones pares como impares, las transformaciones locales de Lorentz y los difeomorfismos (2.8), aunque para obtener la invariancia bajo difeomorfismos hizo falta combinar la simetría de Lorentz con una simetría conocida como "difeomorfismos mejorados", lo cual refuerza aún más la idea de que los difeomorfismos no deberían ser considerados más fundamentales que otras simetrías en las teorías de gravedad.

Por otro lado, se obtuvo que las traslaciones locales con constante $\Lambda \neq 0$ (2.60) solamente son simetría de la acción de Lovelock (2.1) en dimensiones impares, cuando se satisface la relación entre los coeficientes de los términos de la Lagrangiana de Lovelock (2.62). En este caso, todos los coeficientes a_p de la Lagrangiana de Lovelock (2.1) son distintos de cero y proporcionales a $1/\Lambda^p$. Esta simetría es ampliamente conocida (ver por ejemplo [25]), sin embargo el enfoque de esta tesis es conceptualmente más simple y a la vez más general. Además, cuando se cumple la relación (2.62), es posible construir la identidad de Noether adicional (2.58), de la cual emerge la nueva simetría de norma (2.72) (que fue reportada en [22]). En este caso, se demostró que el conjunto fundamental de simetrías de norma de la acción de Lovelock está compuesto por las transformaciones locales de Lorentz (2.8a), las traslaciones locales con $\Lambda \neq 0$ (2.60) y la simetría (2.72), pudiéndose considerar así los difeomorfismos infinitesimales como una simetría derivada. Posteriormente, se calculó el álgebra de los conmutadores de este conjunto de simetrías (2.75), así como la de otros dos conjuntos fundamentales equivalentes, (2.77) y (2.78), obteniendo que son cerradas con funciones de estructura. También se obtiene la invariancia bajo traslaciones locales con $\Lambda = 0$ (2.65) del término más alto de la acción de Lovelock de primer orden en dimensiones impares (2.79), así como la simetría adicional (2.85) (que igualmente fue reportada en [22]), por lo tanto, se probó que el conjunto fundamental de simetrías de norma de la acción de Lovelock que consta únicamente del término más alto en dimensiones impares está constituido por las transformaciones de Poincaré junto con la nueva simetría, nuevamente considerándose los difeomorfismos como una simetría derivada. El álgebra de los conmutadores de este conjunto se calculó en (2.88), obteniendo que cierra con funciones de estructura. En dimensiones pares, se demostró que no es posible construir una identidad de Noether asociada a las traslaciones locales debido a la presencia de un término de la Lagrangiana de Lovelock, que no puede ser expresado en términos de derivadas variacionales de la acción de Lovelock (2.1), sin embargo, no se descarta la posibilidad de que para algunas acciones concretas, dicho término sí sea expresable de esta forma, tal y como pasa en relatividad general n-dimensional (ver [17]), lo cual permitiría en esos casos hallar generalizaciones de las traslaciones locales.

Al estudiar las simetrías de norma de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión n-dimensional en el formalismo de Cartan, adicionalmente a la invariancia bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos (2.8), se obtuvo la nueva simetría (3.21), la cual es una extensión de la simetría interna de norma reportada en [17], que a su vez es una generalización a n dimensiones de las traslaciones locales 3D de la relatividad general (2.49). Se mostró que los difeomorfismos infinitesimales se pueden escribir como una combinación lineal de las transformaciones locales de Lorentz (2.8a), la simetría (3.21) y términos proporcionales a las derivadas variacionales de la acción $f(\mathcal{R})$. Esto significa que la simetría interna de norma (3.21) junto con las transformaciones locales de Lorentz (2.8a) describen por completo la libertad de norma de la gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión, y así los difeomorfismos se convierten en una simetría derivada en este contexto. Como resultado final, se obtuvo la invariancia bajo reescalamientos del marco ortonormal (3.43) de la acción de gravedad $f(\mathcal{R})$ en donde $f(\mathcal{R}) = c\mathcal{R}^{n/2}$, mostrando así que el recíproco del segundo teorema de Noether aplicado a modelos particulares puede conducir a simetrías adicionales.

Vale la pena señalar que sería interesante obtener la forma finita de las transformaciones infinitesimales encontradas en este trabajo, ya que estas podrían tener aplicaciones tanto en la búsqueda de soluciones exactas en las teorías aquí estudiadas como en la solución numérica de las ecuaciones de movimiento correspondientes. Otro aspecto que resultaría interesante estudiar, es la obtención del álgebra compuesta por las transformaciones locales de Lorentz y la simetría (3.21) de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión en el formalismo de Cartan, debido al impacto que podría tener en la cuantización de la teoría. Igualmente, sería interesante explorar el conteo de los grados de libertad físicos locales de las teorías estudiadas en esta tesis, por ejemplo, por medio de métodos Lagrangianos [40, 41], en los cuales las identidades de Noether obtenidas en este trabajo son un ingrediente fundamental.

Por otro lado, un tema que ha tomado gran relevancia en los últimos tiempos es la definición de corrientes conservadas y sus potenciales en teorías de gravedad. Por ejemplo, en [48] se utilizan las identidades de Noether asociadas a las simetrías de norma de la acción n-dimensional de Palatini y de la acción de Holst para construir corrientes de Noether que se conservan off-shell y sus respectivos potenciales de Noether. Por lo tanto, una aplicación directa de los resultados obtenidos en esta tesis que valdría la pena explorar consiste en la construcción de las corrientes y los potenciales de Noether, análogos a los reportados en [48], para gravedad de Lovelock en el formalismo de primer orden y gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión.

Así mismo, la búsqueda del análogo de las traslaciones locales en otras teorías más allá de la relatividad general podría ser importante, ya que como se dijo al principio de esta tesis, dicha simetría es de vital importancia en la cuantización de gravedad 3D y esta importancia podría extenderse a otras teorías de gravedad, acercándonos a la solución de este elusivo problema.

Finalmente, sería interesante estudiar otros modelos de gravedad, así como casos particulares de la acción de Lovelock y de gravedad $f(\mathcal{R})$, desde la perspectiva de este trabajo, ya que la aplicación del recíproco del segundo teorema de Noether puede servir para descubrir nuevas simetrías de norma de tales modelos, o en su defecto, conducir a una reformulación de las simetrías existentes para encontrar nuevos conjuntos completos de simetrías de norma.

Apéndice A

Introducción a las variables del formalismo de Cartan

El formalismo de Cartan, descrito a grandes rasgos, consiste en tomar como variables dinámicas de una teoría gravitacional un marco ortonormal de 1-formas e^I del grupo de Lorentz[1], y una 1-forma de conexión $\omega^I{}_J$ valuada en el álgebra de Lorentz.

Definir con precisión estos conceptos requeriría adentrarse profundamente en el estudio de haces fibrados, que son variedades diferenciables con propiedades que conectan la geometría diferencial con la teoría de grupos, de vital importancia para el estudio de las teorías de norma en la física. Algunos textos que abordan este tema amplia y claramente son [49, 50, 51]. Sin embargo, para mantener este trabajo de tesis autocontenido, en este apéndice se revisan las propiedades básicas de estos objetos.

Sea $\mathcal{M}^n$ una variedad diferenciable n-dimensional, con $n \geq 3$. El hecho de que e^I sea un marco ortonormal de 1-formas del grupo de Lorentz significa que, además de tomar campos vectoriales definidos sobre $\mathcal{M}^n$ y llevarlos a los reales, una transformación Λ del grupo de Lorentz actúa sobre e^I de la siguiente manera:

$$\Lambda : e^I \mapsto \Lambda^I{}_J e^J. \tag{A.1}$$

Una vez definido el marco ortonormal e^I, este se puede utilizar para dotar a la variedad $\mathcal{M}^n$ de una orientación que viene dada por la n-forma de volumen

$$\eta = \frac{1}{n!}\epsilon_{I_1\cdots I_n} e^{I_1} \wedge \cdots \wedge e^{I_n}. \tag{A.2}$$

La forma de volumen η es necesaria para definir la integral de una función $\mathcal{F} : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$ como:

$$\int_{\mathcal{M}^n} \mathcal{F} := \int_{\mathcal{M}^n} \mathcal{F}\eta. \tag{A.3}$$

[1]Para ser precisos e^I es una sección de un haz vectorial, cuyo grupo interno de rotaciones es el de Lorentz

Observe que esta propiedad se usa por ejemplo para definir la acción (3.1) de gravedad $f(\mathcal{R})$.

El marco ortonormal de 1-formas e^I se puede usar también para definir un tensor métrico en $\mathcal{M}^n$, dado por:

$$g := \eta_{IJ} e^I \otimes e^J. \tag{A.4}$$

Escrito en sus componentes coordenadas, el marco ortonormal de 1-formas es $e^I := e^I{}_\mu dx^\mu$, de donde se observa que las componentes coordenadas del tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, están relacionadas con $e^I{}_\mu$ mediante:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} e^I{}_\mu e^J{}_\nu. \tag{A.5}$$

La relación (A.5) resulta útil cuando se desea pasar de las variables del formalismo métrico al de Cartan o viceversa.

Por otro lado, a $\omega^I{}_J$ se le denomina 1-forma de conexión porque con ella se puede definir un operador de derivada covariante (es decir, una conexión) ∇ a través de la siguiente ecuación (ver [11]):

$$\omega^I{}_J(X) := e^I(\nabla_X \partial_J), \tag{A.6}$$

donde X es un campo vectorial cualquiera.

Se puede demostrar que el grupo de Lorentz actúa sobre la 1-forma de conexión $\omega^I{}_J = \omega^I{}_{J\mu} dx^\mu$ como:

$$\Lambda : \omega^I{}_J \mapsto \Lambda^I{}_K \omega^K{}_L \Lambda^L{}_J + \Lambda^I{}_K d\Lambda^K{}_J, \tag{A.7}$$

de modo que los índices de $\omega^I{}_J$ no son índices de Lorentz, debido a la presencia del segundo término de (A.7).

La 1-forma de conexión $\omega^I{}_J$ cumple $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$ y sirve para definir un operador diferencial llamado derivada exterior covariante, el cual actúa sobre formas diferenciales valuadas en una representación vectorial del grupo de Lorentz, por ejemplo e^I o $\star e_I$, de la siguiente manera:

$$De^I := de^I + \omega^I{}_J \wedge e^J, \tag{A.8a}$$

$$D \star e_I := d \star e_I - \omega^J{}_I \wedge \star e_J, \tag{A.8b}$$

con la generalización obvia a tensores con más índices de Lorentz. Adicionalmente, $\omega^I{}_J$ es compatible con la métrica en el sentido:

$$D\eta_{IJ} = d\eta_{IJ} - \omega^K{}_I \eta_{KJ} - \omega^K{}_I \eta_{KJ} = 0, \tag{A.9}$$

lo cual implica que si $g = \eta_{IJ} e^I \otimes e^J$:

$$\nabla g = 0, \tag{A.10}$$

que se demuestra usando (A.6).

Por otro lado, a pesar de que $\omega^I{}_J$ no es un tensor de Lorentz (como se ve de sus propiedades de transformación (A.7)), se puede construir un 2-tensor de Lorentz a partir $\omega^I{}_J$, llamado 2-forma de curvatura $R^I{}_J$, que se define como $R^I{}_J := d\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J$. Esta última contiene toda la información del tensor de Riemann en sus componentes, pues se escribe en la base ortonormal como

$$R^I{}_J = \frac{1}{2}\mathcal{R}^I{}_{JKL} e^K \wedge e^L, \tag{A.11}$$

donde $\mathcal{R}^I{}_{JKL} = e^I(R(\partial_K, \partial_L)(\partial_J))$ son las componentes del tensor de Riemann, siendo R el tensor de Riemann [11]. Con las componentes del tensor de Riemann se construye el tensor de Ricci $\mathcal{R}_{IJ} := \mathcal{R}^K{}_{IKJ}$ y el escalar de Ricci $\mathcal{R} := \mathcal{R}_{IJ}\eta^{IJ}$, ambos escritos en la base ortonormal e^I.

Para completar las definiciones, De^I se descompone en la base ortonormal como

$$De^I = \frac{1}{2}T^I{}_{JK} e^J \wedge e^K, \tag{A.12}$$

con $T^I{}_{JK} := e^I(T(\partial_J, \partial_K))$, donde T es el tensor de torsión [11]. Es por la descomposición (A.12) que en la literatura se suele denominar como la torsión a De^I, sin embargo, esta práctica resulta imprecisa.

Existen identidades que relacionan las derivadas exteriores de De^I y $R^I{}_J$ que se usan frecuentemente en este trabajo. A veces suele ser útil expresar estas identidades en sus componentes ortogonales, así como contracciones de las mismas. La identidad más utilizada a lo largo de esta tesis es la segunda identidad de Bianchi, $DR^{IJ} = 0$, que escrita en componentes es:

$$\begin{aligned} DR^{IJ} =& \frac{1}{2}D\mathcal{R}^{IJ}{}_{KL} e^K \wedge e^L + \mathcal{R}^{IJ}{}_{KL} De^N \wedge e^L \\ =& \frac{1}{2}D\mathcal{R}^{IJ}{}_{KL} e^K \wedge e^L + \frac{1}{2}\mathcal{R}^{IJ}{}_{KL} T^N{}_{MK} e^M \wedge e^K \wedge e^L \\ =& \frac{1}{2}\left(D_M \mathcal{R}^{IJ}{}_{KL} + \frac{1}{2}\mathcal{R}^{IJ}{}_{NL} T^N{}_{MK}\right) e^M \wedge e^K \wedge e^L \\ =& 0, \end{aligned} \tag{A.13}$$

donde en la primera línea se ha utilizado la antisimetría de la derivada exterior covariante "D", en la segunda se ha descompuesto De^I usando (A.12) y en la tercera se ha reescrito $D\mathcal{R}^{IJ}{}_{KL} = D_M \mathcal{R}^{IJ}{}_{KL} e^M = \left(\partial_M \lrcorner D\mathcal{R}^{IJ}{}_{KL}\right) e^M$. El hecho de que una k-forma sea cero no implica que todas sus componentes sean cero, sino únicamente la antisimetrización de las mismas [11], de modo que la segunda identidad de Bianchi en componentes es:

$$D_{[M}\mathcal{R}^{IJ}{}_{KL]} + \mathcal{R}^{IJ}{}_{N[M} T^N{}_{KL]} = 0. \tag{A.14}$$

Observe que cuando se considera que la 1-forma de conexión $\omega^I{}_J$ es libre de torsión, el segundo término de (A.14) desaparece.

Por otro lado, contrayendo (A.14) en los índices I, K se obtiene la primera identidad de Bianchi contraída:

$$2D_{[M}\mathcal{R}^{J}{}_{L]} - 2\mathcal{R}^{IJ}{}_{N[M}T^{N}{}_{L]I} + D_{I}\mathcal{R}^{IJ}{}_{LM} + \mathcal{R}^{IJ}{}_{NI}T^{N}{}_{LM} = 0, \tag{A.15}$$

y contrayendo una vez más (A.15) en los índices J, M, se obtiene la primera identidad de Bianchi contraída dos veces:

$$2D_{J}\mathcal{R}^{J}{}_{L} + 2\mathcal{R}^{I}{}_{N}T^{N}{}_{IL} - D_{L}\mathcal{R} - \mathcal{R}^{IJ}{}_{NL}T^{N}{}_{IJ} = 0. \tag{A.16}$$

Por completitud, siguiendo un procedimiento análogo al recién descrito, se puede reescribir la primera identidad de Bianchi $D^2e^I = R^I{}_J \wedge e^J$ en componentes como:

$$\mathcal{R}^{I}{}_{[JKL]} = D_{[J}T^{I}{}_{KL]} + T^{I}{}_{M[J}T^{M}{}_{KL]}, \tag{A.17}$$

y de ser necesario sus contracciones se pueden hallar fácilmente.

Apéndice B

El papel de las simetrías triviales en las teorías de norma

Un aspecto relevante de los conjuntos de simetrías de norma de una teoría es el álgebra de sus conmutadores. Si el conmutador de cualesquiera dos simetrías de un conjunto pertenece nuevamente al conjunto, se dice que el álgebra es cerrada[1]. Por otro lado, si los conmutadores que forman el álgebra contienen términos proporcionales a las derivadas variacionales de la acción, el álgebra es abierta [5, 4]. Los términos proporcionales a las derivadas variacionales de la acción que aparecen en las álgebras abiertas se identifican como simetrías triviales, *i.e.*, simetrías que se vuelven cero *on-shell* [5].

Como se vio en el Capítulo 2, las álgebras de todos los conjuntos fundamentales de simetrías de norma de la gravedad de Lovelock, en el formalismo de primer orden, consideradas en este trabajo son cerradas. Por otro lado, el cálculo del álgebra de las simetrías de norma de gravedad $f(\mathcal{R})$ en el formalismo de Cartan (ver Capítulo 3) formada por las transformaciones locales de Lorentz y la simetría (3.21) se dejó como trabajo futuro debido a la complejidad de los cálculos involucrados. Sin embargo, se cuenta con información acerca de esta álgebra, ya que en [17] se menciona que el álgebra que forma la simetría ahí reportada, la cual es un caso particular de (3.21), con las transformaciones locales de Lorentz es abierta. Esto sugiere que el álgebra que forman las transformaciones locales de Lorentz y la simetría (3.21) de gravedad $f(\mathcal{R})$ es en general abierta[2].

Las álgebras abiertas son difíciles de manejar a nivel cuántico y, aunque se han desarrollado métodos para ello [52, 53], en ciertos casos puede ser preferible cerrar primero el álgebra [54] y después proceder a la cuantización, por ejemplo, a través del enfoque BRST [5]. Es por ello que en este apéndice se analiza el efecto que tiene añadir la simetría

[1]La cerradura es parte de la definición de un álgebra, sin embargo, se necesita hacer esta precisión debido a que en la literatura se pueden encontrar conceptos tales como "algebra abierta"[4].

[2]No se descarta todavía la posibilidad de que el álgebra de los conmutadores de las simetrías de norma de alguna acción $f(\mathcal{R})$ en particular sea cerrada.

trivial

$$\delta_\zeta e^I = \zeta \lrcorner De^I \tag{B.1a}$$
$$\delta_\zeta \omega^{IJ} = \zeta \lrcorner R^{IJ} - 2\Lambda \zeta^{[I} e^{J]}, \tag{B.1b}$$

al conjunto fundamental de las simetrías de norma de la relatividad general 3D en el formalismo de Cartan, con la esperanza de que esto nos brinde alguna pista acerca de como cerrar el álgebra del caso general de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión en el formalismo de Cartan. Como la herramienta central en esta tesis es el recíproco del segundo teorema de Noether, vale la pena revisar como emerge la simetría trivial (B.1) a través de él. Se inicia recordando que una acción que describe la relatividad general en tres dimensiones es la acción de Palatini

$$S[e,\omega] = \kappa \int_{\mathcal{M}^3} \star (e_I \wedge e_J) \wedge \left(R^{IJ} - \frac{\Lambda}{3} e^I \wedge e^J \right). \tag{B.2}$$

Calculando la variación de la acción con respecto a los campos dinámicos e^I y ω^{IJ} se obtiene:

$$\delta S = \kappa \int_{\mathcal{M}^3} \left\{ \mathcal{E}_I \wedge \delta e^I + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \delta\omega^{IJ} + d \left[\delta\omega^{IJ} \wedge \star (e_I \wedge e_J) \right] \right\}, \tag{B.3}$$

donde

$$\mathcal{E}_I = \kappa \left[\star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{JK} - 2\Lambda \star e_I \right], \tag{B.4a}$$
$$\mathcal{E}_{IJ} = \kappa D \star (e_I \wedge e_J). \tag{B.4b}$$

Expandiendo los duales de Hodge que aparecen en (B.4), las derivadas variacionales $\mathcal{E}_I$ y $\mathcal{E}_{IJ}$ toman la forma simple:

$$\mathcal{E}_I = \kappa \epsilon_{IJK} \left(R^{JK} - \Lambda e^J \wedge e^K \right), \tag{B.5a}$$
$$\mathcal{E}_{IJ} = \kappa \epsilon_{IJK} De^K. \tag{B.5b}$$

Cabe recalcar que (B.1) es una simetría trivial de la relatividad general 3D debido a que se puede escribir en términos de las derivadas variacionales de la acción (B.2) como

$$\delta_\zeta e^I = \rho \lrcorner De^I = \frac{\sigma}{2\kappa} \epsilon^{IJK} \left(\rho \lrcorner \mathcal{E}_{JK} \right), \tag{B.6a}$$
$$\delta_\zeta \omega^{IJ} = \rho \lrcorner R^{IJ} - 2\Lambda \rho^{[I} e^{J]} = \frac{\sigma}{2\kappa} \epsilon^{IJK} \left(\rho \lrcorner \mathcal{E}_K \right). \tag{B.6b}$$

Una manera directa de obtener la identidad de Noether de la cual emerge (B.1) comienza notando que $\mathcal{E}_{IJ} \wedge \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_I \wedge \mathcal{E}_{JK} = 0$, por ser una 4-forma definida sobre la variedad 3-dimensional $\mathcal{M}^3$. Calculando el producto interior de esta 4-forma con ∂_L se obtiene:

$$\partial_L \lrcorner \mathcal{E}_{IJ} \wedge \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \partial_L \lrcorner \mathcal{E}_K + \partial_L \lrcorner \mathcal{E}_I \wedge \mathcal{E}_{JK} + \mathcal{E}_I \wedge \partial_L \lrcorner \mathcal{E}_{JK} = 0. \tag{B.7}$$

Multiplicando el resultado anterior por ϵ^{IJK} se llega a

$$\mathcal{E}_I \wedge \epsilon^{IJK} \partial_L \lrcorner \mathcal{E}_{JK} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \epsilon^{IJK} \partial_L \lrcorner \mathcal{E}_K = 0, \tag{B.8}$$

la cual se puede identificar como una identidad de Noether. Nuevamente, se multiplica la identidad (B.8) por los parámetros de norma $(\sigma/2\kappa)\zeta^L$, llegando así a la identidad *off-shell*[3]

$$\mathcal{E}_I \wedge \underbrace{\frac{\sigma}{2\kappa} \epsilon^{IJK} \zeta \lrcorner \mathcal{E}_{JK}}_{\delta_\zeta e^I} + \mathcal{E}_{IJ} \wedge \underbrace{\frac{\sigma}{2\kappa} \epsilon^{IJK} \zeta \lrcorner \mathcal{E}_K}_{\delta_\zeta \omega^{IJ}} = 0, \tag{B.9}$$

de la cual, apelando al recíproco del segundo teorema de Noether, se lee precisamente la simetría (B.1). Una forma de verificar, aunque no de obtener, que (B.1) es una simetría de norma de la acción de Palatini en tres dimensiones, es introducirla directamente en la variación (B.3), obteniendo:

$$\delta_\zeta S = \int_{\mathcal{M}^n} d \left[\epsilon_{IJK} \zeta \lrcorner \left(R^{IJ} - \Lambda e^I \wedge e^J \right) \wedge e^K \right], \tag{B.10}$$

es decir, la acción de Palatini en tres dimensiones es cuasi-invariante bajo las transformaciones triviales (B.1).

Un conjunto completo de las simetrías de norma de la acción de Palatini en tres dimensiones se compone de transformaciones locales de Lorentz (δ_τ) y traslaciones locales (δ_ρ), que actuando sobre e^I y ω^{IJ} están dadas por:

$$\delta_\tau e^I = \tau^I{}_J e^J, \qquad \delta_\rho \omega^{IJ} = - D\tau^{IJ}, \qquad \text{transformaciones de Lorentz,} \tag{B.11a}$$

$$\delta_\rho e^I = D\rho^I, \qquad \delta_\rho \omega^{IJ} = 2\Lambda \rho^{[I} e^{J]}, \qquad \text{traslaciones locales.} \tag{B.11b}$$

Si a este conjunto de simetrías se le añade la simetría de norma (B.1) (δ_ζ), tomando parámetros de norma τ^{IJ}, ρ^I y ζ^I independientes de los campos, el álgebra de los conmutadores que se obtiene es la siguiente:

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] = \delta_{\tau_3}, \qquad \left(\tau_3{}^{IJ} := 2\tau_1{}^{[I|K} \tau_2{}^{|J]}{}_K \right), \tag{B.12a}$$

$$[\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}] = \delta_\tau, \qquad \left(\tau^{IJ} := 2\Lambda \rho_1{}^{[I} \rho_2{}^{J]} \right), \tag{B.12b}$$

$$[\delta_\tau, \delta_\rho] = \delta_{\tau_1} + \delta_{\rho_1}, \qquad \left(\rho_1{}^I := -\tau^I{}_J \rho^J \right), \tag{B.12c}$$

$$[\delta_\tau, \delta_\zeta] = \delta_{\zeta_1}, \qquad \left(\zeta_1{}^I := \tau^I{}_J \zeta^J \right), \tag{B.12d}$$

$$[\delta_\rho, \delta_\zeta] = \delta_{\zeta_1}, \qquad \left(\zeta_1{}^I := \zeta \lrcorner D\rho^I \right), \tag{B.12e}$$

$$\begin{aligned} [\delta_{\zeta_1}, \delta_{\zeta_2}] = \delta_\tau + \delta_\rho + \delta_{\zeta_3}, \qquad & \Big(\tau^{IJ} := \zeta_1 \lrcorner \left(\zeta_2 \lrcorner R^{IJ} \right) + 2\Lambda \zeta_1{}^{[I} \zeta_2{}^{J]}, \\ & \rho^I := \zeta_1 \lrcorner \left(\zeta_2 \lrcorner De^I \right), \\ & \zeta_3{}^I := - [\zeta_1, \zeta_2] \lrcorner e^I \Big), \end{aligned} \tag{B.12f}$$

[3] El factor $(\sigma/2\kappa)$ se agrega de tal modo que la simetría (B.1) no tenga factores dimensionales ni dependa de la signatura σ de la métrica interna η_{IJ}.

donde $\zeta = \zeta^I \partial_I$, $\zeta_1 = {\zeta_1}^I \partial_I$ y $\zeta_2 = {\zeta_2}^I \partial_I$ son campos vectoriales.

Analizando (B.12) ecuación por ecuación, se ve de (B.12a)-(B.12c) que el álgebra que forman las transformaciones locales de Lorentz con las traslaciones locales, es cerrada, y en particular, es el álgebra del grupo de De Sitter si Λ es positiva, de anti-De Sitter si Λ es negativa o el grupo de Poincaré si $\Lambda = 0$. Por otro lado, (B.12d)-(B.12e) muestran que el conmutador de una simetría trivial (δ_ζ), ya sea con una trasformación local de Lorentz (δ_τ) o con una traslación local (δ_ρ) da como resultado de nuevo una transformación trivial del tipo (B.1). En la literatura [5] se encuentra que el conmutador de una simetría trivial con cualquier simetría de norma es de nuevo trivial. Sin embargo, hay que interpretar con cuidado esta afirmación, ya que de (B.12e) se ve que el conmutador de dos transformaciones triviales (δ_ζ) da como resultado una combinación lineal de transformaciones locales de Lorentz, translaciones locales y de nuevo una transformación trivial del tipo (B.1). Es importante destacar que los parámetros de norma de la transformación local de Lorentz y la traslación local resultantes se pueden reescribir como:

$$\tau^{IJ} := \zeta_1 \lrcorner \left(\zeta_2 \lrcorner R^{IJ}\right) + 2\Lambda {\zeta_1}^{[I} {\zeta_2}^{J]} = \frac{\sigma}{2\kappa} \epsilon^{IJK} \zeta_1 \lrcorner \zeta_2 \lrcorner \mathcal{E}_K, \tag{B.13}$$

$$\rho^I := \zeta_1 \lrcorner \left(\zeta_2 \lrcorner De^I\right) = \frac{\sigma}{2\kappa} \epsilon^{IJK} \zeta_1 \lrcorner \zeta_2 \lrcorner \mathcal{E}_{JK}, \tag{B.14}$$

es decir, son proporcionales a las derivadas variacionales y por lo tanto son cero *on-shell*. Esto significa que el conmutador de dos transformaciones triviales (B.1) de nuevo es una simetría trivial pero no del mismo tipo, sino la suma de una transformación local de Lorentz con parámetro proporcional a $\mathcal{E}_I$, una traslación local con parámetro proporcional a $\mathcal{E}_{IJ}$ y una simetría trivial del tipo (B.1). Este resultado podría tener implicaciones a nivel cuántico, ya que las verdaderas simetrías de norma siempre se deben de considerar *off-shell*. Se observa que en su conjunto, el álgebra (B.12) es cerrada, de modo que como resultado del análisis realizado en este apéndice se concluye que para cerrar el álgebra que forman las transformaciones locales de Lorentz y la simetría de gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión en el formalismo de Cartan (3.21), vale la pena explorar el camino de añadir a ese conjunto de simetrías fundamentales una simetría trivial análoga a (B.1). Como comentario final, sería interesante explorar si existe alguna relación entre este camino y otros métodos para cerrar un conjunto de simetrías de norma, por ejemplo con el método de Batalin-Vilkovinsky [54].

Apéndice C

Conjuntos equivalentes de simetrías de norma de la acción de Lovelock en dimensiones impares con parámetros de norma genéricos

En la sección 2.4 se presenta el álgebra de los conmutadores de tres conjuntos completos equivalentes de simetrías de norma de la acción de Lovelock (2.1), con coeficientes que satisfacen (2.62), considerando parámetros de norma independientes de los campos. Sin embargo, los parámetros de norma que multiplican a las identidades de Noether consideradas en el recíproco del segundo teorema de Noether también pueden depender de los campos (y sus derivadas). Por lo tanto, en este apéndice, se presenta el método usado a lo largo de esta tesis para calcular los conmutadores de las simetrías de la acción de Lovelock en el formalismo de primer orden, considerando parámetros de norma de la forma más general posible, usando como ejemplo el álgebra formada por las transformaciones locales de Lorentz y los difeomorfismos infinitesimales. Posteriormente, se presenta el álgebra de los conmutadores de los tres conjuntos completos equivalentes de simetrías de norma dados en la sección 2.4, calculados con parámetros de norma generales.

Para este ejemplo, se comienza calculando el conmutador de dos transformaciones locales de Lorentz, (δ_{τ_1}) y (δ_{τ_2}), actuando sobre el marco ortonormal e^I:

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}]e^I = \delta_{\tau_1}\left({\tau_2}^I{}_J e^J\right) - \delta_{\tau_2}\left({\tau_1}^I{}_J e^J\right). \tag{C.1}$$

Debido a que ${\tau_1}^I{}_J$ y ${\tau_2}^I{}_J$ pueden depender de manera arbitraria de los campos e^I y $\omega^I{}_J$, los términos

$$\delta_{\tau_1}\left({\tau_2}^I{}_J e^J\right) = \left(\delta_{\tau_1}{\tau_2}^I{}_J\right) e^J + {\tau_2}^I{}_J {\tau_1}^J{}_K e^K, \tag{C.2a}$$

$$\delta_{\tau_2}\left({\tau_1}^I{}_J e^J\right) = \left(\delta_{\tau_2}{\tau_1}^I{}_J\right) e^J + {\tau_1}^I{}_J {\tau_2}^J{}_K e^K, \tag{C.2b}$$

no se pueden simplificar más, ya que se desconoce la forma precisa de $\delta_{\tau_1}{\tau_2}^I{}_J$ y $\delta_{\tau_2}{\tau_1}^I{}_J$. Por lo tanto, insertando (C.2) en (C.1), se obtiene

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}]e^I = {\tau_3}^I{}_J e^J, \tag{C.3}$$

donde ${\tau_3}^I{}_J := \delta_{\tau_1}{\tau_2}^I{}_J - \delta_{\tau_2}{\tau_1}^I{}_J + 2\tau_1^{[I|K}{\tau_2}^{|J]}{}_K$, es decir, el conmutador de dos transformaciones locales de Lorentz, (δ_{τ_1}) y (δ_{τ_2}), actuando sobre e^I, da como resultado de nuevo una transformación de Lorentz, (δ_{τ_3}).

Como segundo paso, se calcula el conmutador de una transformación local de Lorentz (δ_τ) con un difeomorfismo infinitesimal (δ_ξ), actuando sobre el marco ortonormal e^I, que es:

$$[\delta_\tau, \delta_\xi]e^I = \delta_\tau \left(\mathcal{L}_\xi e^I\right) - \delta_\xi \left(\tau^I{}_J e^J\right), \tag{C.4}$$

donde $\xi := \xi^I \partial_I$, con ξ^I siendo el parámetro de norma del difeomorfismo infinitesimal. Debido a que τ^{IJ} y ξ^I (y por lo tanto ξ) pueden depender de manera arbitraria de los campos e^I y $\omega^I{}_J$, la simplificación más general que se puede realizar sobre sus variaciones es expresarlas como:

$$\delta_\tau \left(\mathcal{L}_\xi e^J\right) = \mathcal{L}_{\delta_\tau \xi} e^I + \mathcal{L}_\xi \left(\tau^I{}_J e^J\right) \tag{C.5a}$$

$$\delta_\xi \left(\tau^I{}_J e^J\right) = \left(\delta_\xi \tau^I{}_J\right) e^J + \tau^I{}_J \mathcal{L}_\xi e^J, \tag{C.5b}$$

donde se ha usado para llegar a (C.5a) la identidad

$$\begin{aligned}\delta\left(\mathcal{L}_X \alpha\right) =& \delta\left(X \lrcorner da + d\left(\xi \lrcorner \alpha\right)\right) = \delta X \lrcorner d\alpha + X \lrcorner d\left(\delta \alpha\right) + d\left(\delta X \lrcorner \alpha + X \lrcorner \delta \alpha\right) \\ =& \mathcal{L}_{\delta X} \alpha + \mathcal{L}_X \delta \alpha,\end{aligned} \tag{C.6}$$

con δ una variación arbitraria, X un campo vectorial y α una k-forma $(k \leq n)$.

Insertando (C.5) en (C.4), se obtiene

$$[\delta_\tau, \delta_\xi]e^I = {\tau_1}^I{}_J e^J + \mathcal{L}_{\xi_1} e^I, \tag{C.7}$$

donde ${\tau_1}^I{}_J := \mathcal{L}_\xi \tau^I{}_J - \delta_\xi \tau^I{}_J$ y $\xi_1 := \delta_\tau \xi = \left(\delta_\tau \xi \lrcorner e^I\right) \partial_I$, es decir, el conmutador de una transformación local de Lorentz (δ_τ) con un difeomorfismo infinitesimal (δ_ξ), actuando sobre e^I, da como resultado de nuevo una transformación local de Lorentz (δ_{τ_1}) más un difeomorfismo infinitesimal (δ_{ξ_1}).

Para concluir este ejemplo, se calcula el conmutador de dos difeomorfismos infinitesimales, (δ_{ξ_1}) y (δ_{ξ_2}), actuando sobre el marco ortonormal e^I. Se inicia con la expresión:

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]e^I = \delta_{\xi_1} \left(\mathcal{L}_{\xi_2} e^I\right) - \delta_{\xi_2} \left(\mathcal{L}_{\xi_1} e^J\right), \tag{C.8}$$

donde $\xi_i := {\xi_i}^I \partial_I$, con ${\xi_i}^I$ el parámetro de norma del difeomorfismo infinitesimal $(i = 1, 2)$. Debido a que ${\xi_1}^I$ y ${\xi_2}^I$ pueden depender de manera arbitraria de los campos e^I y $\omega^I{}_J$, la simplificación mas general que se puede hacer sobre sus variaciones es dejarlas expresadas como:

$$\delta_{\xi_1} \left(\mathcal{L}_{\xi_2} e^J\right) = \mathcal{L}_{\delta_{\xi_1} \xi_2} e^I + \mathcal{L}_{\xi_1} \left(\mathcal{L}_{\xi_2} e^I\right), \tag{C.9a}$$

$$\delta_{\xi_2} \left(\mathcal{L}_{\xi_1} e^J\right) = \mathcal{L}_{\delta_{\xi_2} \xi_1} e^I + \mathcal{L}_{\xi_2} \left(\mathcal{L}_{\xi_1} e^I\right), \tag{C.9b}$$

donde se ha usado de nuevo la identidad (C.6) para llegara (C.9).

Insertando (C.9) en (C.8), se obtiene el resultado deseado:

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]e^I = \mathcal{L}_{\xi_3} e^I \tag{C.10}$$

donde $\xi_3 := \delta_{\xi_1}\xi_2 - \delta_{\xi_2}\xi_1 - [\xi_1, \xi_2] = \left((\delta_{\xi_1}\xi_2 - \delta_{\xi_2}\xi_1 - [\xi_1, \xi_2]) \rfloor e^I\right) \partial_I$, con $[\xi_1, \xi_2]$ el paréntesis de Lie de los campos vectoriales ξ_1 y ξ_2 (ver [11]). Por lo tanto, el conmutador de dos difeomorfismos infinitesimales, (δ_{ξ_1}) y (δ_{ξ_2}), actuando sobre e^I, da como resultado de nuevo un difeomorfismos infinitesimal (δ_{ξ_3}).

Este proceso debe repetirse de nuevo, esta vez aplicando los conmutadores asociados a las transformaciones locales de Lorentz y a los difeomorfismos a la 1-forma de conexión $\omega^I{}_J$, para finalmente concluir que el álgebra que forman estas simetrías es:

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] = \delta_{\tau_3}, \qquad \left(\tau_3{}^{IJ} := \delta_{\tau_1}\tau_2{}^{IJ} - \delta_{\tau_2}\tau_1{}^{IJ} + 2\tau_1{}^{[I|K}\tau_2{}^{|J]}{}_K\right), \tag{C.11a}$$

$$[\delta_\tau, \delta_\xi] = \delta_{\tau_1} + \delta_{\xi_1}, \qquad \left(\tau_1{}^{IJ} := \mathcal{L}_\xi \tau^{IJ} - \delta_\xi \tau^{IJ}, \quad \xi_1{}^I := (\delta_\tau \xi) \rfloor e^I\right), \tag{C.11b}$$

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] = \delta_{\xi_3}, \qquad \left(\xi_3{}^I := (\delta_{\xi_1}\xi_2 - \delta_{\xi_2}\xi_1 - [\xi_1, \xi_2]) \rfloor e^I\right). \tag{C.11c}$$

El álgebra (C.11) es la más general que se puede obtener al considerar parámetros de norma dependientes de los campos. Sin embargo, algunos casos particulares de (C.11) se pueden hallar con frecuencia en la literatura, en donde algunos parámetros de norma se dejan dependientes de los campos mientras que otros no.

Por ejemplo en [32] se dice que el álgebra que forman los conmutadores de las transformaciones locales de Lorentz (δ_τ) y los difeomorfismos infinitesimales (δ_ξ) es:

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] = \delta_{\tau_3}, \qquad \left(\tau_3{}^{IJ} := 2\tau_1{}^{[I|K}\tau_2{}^{|J]}{}_K\right), \tag{C.12a}$$

$$[\delta_\tau, \delta_\xi] = \delta_{\tau_1}, \qquad \left(\tau_1{}^{IJ} := \mathcal{L}_\xi \tau^{IJ}\right), \tag{C.12b}$$

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] = \delta_{\xi_3}, \qquad \left(\xi_3{}^I := [\xi_2, \xi_1] \rfloor e^I\right). \tag{C.12c}$$

Esta álgebra se puede recuperar de (C.11), a través del procedimiento descrito a continuación: comparando (C.11a) con (C.12a), se observa que para hacerlas coincidir basta tomar los parámetros de las transformaciones $\tau_1{}^{IJ}$ y $\tau_2{}^{IJ}$ como independientes de los campos. Como segundo paso, se compara (C.11b) con (C.12b), lo que conduce a las siguientes condiciones:

$$\delta_\xi \tau^{IJ} = 0, \tag{C.13a}$$

$$\delta_\tau \xi \rfloor e^I = 0. \tag{C.13b}$$

La condición (C.13a) no aporta información adicional, ya que nuevamente implica que los parámetros τ^{IJ} son independientes de los campos, sin embargo (C.13b) requiere que ξ^I sea dependiente de los campos, ya que:

$$\delta_\tau \xi = \left(\delta_\tau \xi^I\right) \partial_I + \xi^I \left(\delta_\tau \partial_I\right) = \left(\delta_\tau \xi^I\right) \partial_I - \left(\xi \rfloor \delta_\tau e^I\right) \partial_I. \tag{C.14}$$

De este modo, calculando el producto interior de (C.14) con e^I y comparando el resultado con (C.13b), se obtiene la ley de transformación de ξ^I bajo transformaciones locales de Lorentz:

$$\delta_\tau \xi^I = \tau^I{}_J \xi^J. \tag{C.15}$$

Por último, comparando (C.11c) con (C.12c) se observa que para que estas coincidan, se debe cumplir:

$$\delta_{\xi_1}\xi_2 = 0, \tag{C.16a}$$
$$\delta_{\xi_2}\xi_2 = 0. \tag{C.16b}$$

Calculando la variación de los campos vectoriales ξ_1, ξ_2 bajo los difeomorfismos infinitesimales $\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_1}$, respectivamente, se obtiene:

$$\delta_{\xi_1}\xi_2 = \left(\delta_{\xi_1}{\xi_2}^I\right)\partial_I + {\xi_2}^I\left(\delta_{\xi_1}\partial_I\right) = \left(\delta_{\xi_1}{\xi_2}^I\right)\partial_I - \left(\xi_2\lrcorner\,\delta_{\xi_1}e^I\right)\partial_I, \tag{C.17a}$$
$$\delta_{\xi_2}\xi_1 = \left(\delta_{\xi_2}{\xi_1}^I\right)\partial_I + {\xi_1}^I\left(\delta_{\xi_2}\partial_I\right) = \left(\delta_{\xi_2}{\xi_1}^I\right)\partial_I - \left(\xi_1\lrcorner\,\delta_{\xi_2}e^I\right)\partial_I. \tag{C.17b}$$

Sustituyendo (C.16) en (C.17) se obtiene que las propiedades de transformación de los parámetros de norma ${\xi_i}^I$ (con $i = 1, 2$), bajo un difeomorfismo infinitesimal son:

$$\delta_{\xi_2}{\xi_1}^I = \xi_1\lrcorner\left(\mathcal{L}_{\xi_2}e^I\right), \tag{C.18a}$$
$$\delta_{\xi_1}{\xi_2}^I = \xi_2\lrcorner\left(\mathcal{L}_{\xi_2}e^I\right), \tag{C.18b}$$

que muestra nuevamente que los parámetros de norma ξ^I dependen de los campos. En resumen, para recuperar el álgebra de los conmutadores (C.12) se requiere que los parámetros de norma τ^{IJ} y el campo vectorial $\xi = \xi^I\partial_I$ sean independientes de los campos, lo que equivale a considerar que los parámetros ξ^I dependen de los campos. Las propiedades de transformación de dichos parámetros bajo transformaciones locales de Lorentz y difeomorfismos son, respectivamente, (C.15) y (C.18).

A continuación se presentan las álgebras de conmutadores en el caso más general posible, calculadas a partir del método recién descrito, permitiendo parámetros de norma dependientes de los campos. Cabe aclarar que, sin importar la elección de los parámetros de norma, la ley de transformación de los campos es siempre la misma.

Primer conjunto. Este conjunto completo de simetrías de norma se compone de transformaciones locales de Lorentz (δ_τ), traslaciones locales (δ_ρ) y difeomorfismos (δ_ξ) con generador infinitesimal $\xi := \xi^I\partial_I$. El álgebra de los conmutadores es

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] = \delta_{\tau_3}, \qquad \left({\tau_3}^{IJ} := \delta_{\tau_1}{\tau_2}^{IJ} - \delta_{\tau_2}{\tau_1}^{IJ} + 2{\tau_1}^{[I|K}{\tau_2}^{|J]}{}_K\right), \tag{C.19a}$$
$$[\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}] = \delta_\tau + \delta_{\rho_3}, \qquad \left(\tau^{IJ} := 2\Lambda{\rho_1}^{[I}{\rho_2}^{J]}, \quad {\rho_3}^I := \delta_{\rho_1}{\rho_2}^I - \delta_{\rho_2}{\rho_1}^I\right), \tag{C.19b}$$
$$[\delta_\tau, \delta_\rho] = \delta_{\tau_1} + \delta_{\rho_1}, \qquad \left({\tau_1}^{IJ} := -\delta_\rho\tau^{IJ}, \quad {\rho_1}^I := \delta_\tau\rho^I - \tau^I{}_J\rho^J\right), \tag{C.19c}$$
$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] = \delta_{\xi_3}, \qquad \left({\xi_3}^I := \left(\delta_{\xi_1}\xi_2 - \delta_{\xi_2}\xi_1 - [\xi_1, \xi_2]\right)\lrcorner\, e^I\right), \tag{C.19d}$$
$$[\delta_\tau, \delta_\xi] = \delta_{\tau_1} + \delta_{\xi_1}, \qquad \left({\tau_1}^{IJ} := \mathcal{L}_\xi\tau^{IJ} - \delta_\xi\tau^{IJ}, \quad {\xi_1}^I := \left(\delta_\tau\xi\right)\lrcorner\, e^I\right), \tag{C.19e}$$
$$[\delta_\rho, \delta_\xi] = \delta_{\rho_1} + \delta_{\xi_1}, \qquad \left({\rho_1}^I := \mathcal{L}_\xi\rho^I - \delta_\xi\rho^I, \quad {\xi_1}^I := \left(\delta_\rho\xi\right)\lrcorner\, e^I\right). \tag{C.19f}$$

Segundo conjunto. Este conjunto completo de simetrías de norma se compone de transformaciones locales de Lorentz (δ_τ), traslaciones locales (δ_ρ) y difeomorfismos mejorados (δ_χ) con generador infinitesimal $\chi := \chi^I\partial_I$. El álgebra de los conmutadores es

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] = \delta_{\tau_3}, \qquad \left({\tau_3}^{IJ} := \delta_{\tau_1}{\tau_2}^{IJ} - \delta_{\tau_2}{\tau_1}^{IJ} + 2{\tau_1}^{[I|K}{\tau_2}^{|J]}{}_K\right), \tag{C.20a}$$

$$[\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}] = \delta_\tau + \delta_{\rho_3}, \qquad \left(\tau^{IJ} := 2\Lambda{\rho_1}^{[I}{\rho_2}^{J]}, {\rho_3}^I := \delta_{\rho_1}{\rho_2}^I - \delta_{\rho_2}{\rho_1}^I\right), \tag{C.20b}$$

$$[\delta_\tau, \delta_\rho] = \delta_{\tau_1} + \delta_{\rho_1}, \qquad \left({\tau_1}^{IJ} := -\delta_\rho\tau^{IJ}, \quad {\rho_1}^I := \delta_\tau\rho^I - \tau^I{}_J\rho^J\right), \tag{C.20c}$$

$$[\delta_{\chi_1}, \delta_{\chi_2}] = \delta_\tau + \delta_{\chi_3}, \qquad \left(\tau^{IJ} := \chi_2\lrcorner\left(\chi_1\lrcorner R^{IJ}\right), \right.$$
$$\left. {\chi_3}^I := \left(\delta_{\chi_1}\chi_2 - \delta_{\chi_2}\chi_1 - [\chi_1, \chi_2]\right)\lrcorner e^I\right), \tag{C.20d}$$

$$[\delta_\tau, \delta_\chi] = \delta_{\tau_1} + \delta_{\chi_1}, \qquad \left({\tau_1}^{IJ} := -\delta_\chi\tau^{IJ}, \quad {\chi_1}^I := (\delta_\tau\chi)\lrcorner e^I\right), \tag{C.20e}$$

$$[\delta_\rho, \delta_\chi] = \delta_{\rho_1} + \delta_{\chi_1}, \qquad \left({\rho_1}^I := \mathcal{L}_\chi\rho^I + \left(\chi\lrcorner\omega^I{}_J\right)\rho^J - \delta_\chi\rho^J, \right.$$
$$\left. {\chi_1}^I := (\delta_\rho\chi)\lrcorner e^I\right). \tag{C.20f}$$

Hay que tener en cuenta que para un vector $\chi_2 := {\chi_2}^I\partial_I$ cuyas componentes χ^I dependen de los campos se cumple $\delta_{\chi_1}\chi_2 = \left(\delta_{\chi_1}{\chi_2}^I\right)\partial_I + {\chi_2}^I\left(\delta_{\chi_1}\partial_I\right)$.

Tercer conjunto. Este conjunto completo de simetrías de norma se compone de transformaciones locales de Lorentz (δ_τ), traslaciones locales (δ_ρ) y la simetría de norma (2.85) (δ_ε) con $\varepsilon := \varepsilon^I\partial_I$. El álgebra de los conmutadores es

$$[\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}] = \delta_{\tau_3}, \qquad \left({\tau_3}^{IJ} := \delta_{\tau_1}{\tau_2}^{IJ} - \delta_{\tau_2}{\tau_1}^{IJ} + 2{\tau_1}^{[I|K}{\tau_2}^{|J]}{}_K\right), \tag{C.21a}$$

$$[\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}] = \delta_\tau + \delta_{\rho_3}, \qquad \left(\tau^{IJ} := 2\Lambda{\rho_1}^{[I}{\rho_2}^{J]}, \quad \rho_3^I := \delta_{\rho_1}{\rho_2}^I - \delta_{\rho_2}{\rho_1}^I\right), \tag{C.21b}$$

$$[\delta_\tau, \delta_\rho] = \delta_{\tau_1} + \delta_{\rho_1}, \qquad \left({\tau_1}^{IJ} := -\delta_\rho\tau^{IJ}, \quad {\rho_1}^I := \delta_\tau\rho^I - \tau^I{}_J\rho^J\right), \tag{C.21c}$$

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = \delta_\tau + \delta_\rho + \delta_{\varepsilon_3}, \qquad \left(\tau^{IJ} := \varepsilon_1\lrcorner\left(\varepsilon_2\lrcorner R^{IJ}\right) + 2\Lambda{\varepsilon_1}^{[I}{\varepsilon_2}^{J]}, \right.$$
$$\rho^I := \varepsilon_1\lrcorner\left(\varepsilon_2\lrcorner De^I\right),$$
$$\left. {\varepsilon_3}^I := \left(\delta_{\varepsilon_1}\varepsilon_2 - \delta_{\varepsilon_2}\varepsilon_1 - [\varepsilon_1, \varepsilon_2]\right)\lrcorner e^I\right), \tag{C.21d}$$

$$[\delta_\tau, \delta_\varepsilon] = \delta_{\tau_1} + \delta_{\varepsilon_1}, \qquad \left({\tau_1}^{IJ} := -\delta_\varepsilon\tau^{IJ}, \quad {\varepsilon_1}^I := (\delta_\tau\varepsilon)\lrcorner e^I\right), \tag{C.21e}$$

$$[\delta_\rho, \delta_\varepsilon] = \delta_{\rho_1} + \delta_{\varepsilon_1}, \qquad \left({\rho_1}^I := -\delta_\varepsilon\rho^I, \quad {\varepsilon_1}^I := (\delta_\rho\varepsilon)\lrcorner e^I\right). \tag{C.21f}$$

Observe que, si se toman los parámetros de norma τ^{IJ}, ρ^I, χ^I, ξ^I y ε^I independientes de los campos, entonces estas álgebras de conmutadores se convierten en las reportadas en la sección 2.4 de esta tesis.

Apéndice D

Comparación entre gravedad $f(\mathcal{R})$ en el formalismo de Cartan y en los formalismos métrico y de Palatini

En este apéndice, se revisan algunos aspectos fundamentales de las teorías de gravedad $f(\mathcal{R})$ n-dimensional, tanto en el formalismo métrico como en el de Palatini, y se realiza una comparación entre estas teorías y la gravedad $f(\mathcal{R})$ con torsión en el formalismo de Cartan.

La acción que define la gravedad $f(\mathcal{R})$ n-dimensional en el formalismo métrico es [19, 20, 21]

$$S_{\text{métrica}}[g^{\mu\nu}] = \kappa \int_{\mathcal{M}^n} f(\bar{\mathcal{R}})\sqrt{-g}d^n x, \tag{D.1}$$

donde $f(\bar{\mathcal{R}})$ es una función real del escalar de Ricci $\bar{\mathcal{R}}$ asociado a la conexión de Levi-Civita, denotada en esta sección por ∇, y $g := \det[g_{\mu\nu}]$ es el determinante del tensor métrico. La variación de la acción (D.1) con respecto al inverso de la métrica $g^{\mu\nu}(g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^{\rho}{}_{\mu})$ es

$$\delta S_{\text{métrica}} = \int_{\mathcal{M}^n} d^n x \left(\mathcal{E}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu B^\mu\right), \tag{D.2}$$

donde

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \kappa\sqrt{-g}\left[f'(\bar{\mathcal{R}})\bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\bar{\mathcal{R}})g_{\mu\nu} + \left(g_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\rho - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)f'(\bar{\mathcal{R}})\right], \tag{D.3a}$$

$$B^\mu = \kappa\sqrt{-g}\left[f'(\bar{\mathcal{R}})\left(g_{\nu\rho}\nabla^\mu g^{\nu\rho} - \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu f'(\bar{\mathcal{R}})\left(g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma} - \delta g^{\mu\nu}\right)\right]. \tag{D.3b}$$

Como se puede ver de (D.3a), las ecuaciones de campo de gravedad $f(\mathcal{R})$ en el formalismo métrico son de cuarto orden, mientras que en el formalismo de Cartan las ecuaciones de campo (3.3) son de segundo orden. Más aún, los sistemas de ecuaciones (D.3a) y (3.3) no son equivalentes, ya que la conexión involucrada en (D.3a) es la de Levi-Civita, y por tanto es libre de torsión, mientras que (3.3b) implica que la conexión del espacio-tiempo no es libre de torsión.

Por otro lado, en gravedad $f(\mathcal{R})$ n-dimensional en el formalismo de Palatini, los campos dinámicos son el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y una conexión independiente $\hat{\nabla}$ cuyos coeficientes $\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}$ se asumen libres de torsión, lo cual equivale a $\hat{\Gamma}^{\rho}{}_{[\mu\nu]} = 0$ [46]. El principio de acción correspondiente a esta teoría es

$$S_{\text{Palatini}}[g^{\mu\nu}, \hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}] = \kappa \int_{\mathcal{M}^n} f(\hat{\mathcal{R}}) \sqrt{-g} d^n x, \tag{D.4}$$

con $\hat{\mathcal{R}}$ el escalar de Ricci de la conexión independiente $\hat{\nabla}$. La variación de la acción (D.4) es

$$S_{\text{Palatini}}[g^{\mu\nu}, \hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}] = \kappa \int_{\mathcal{M}^n} d^n x \left(\mathcal{E}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \mathcal{E}_{\rho}{}^{\mu\nu} \delta \hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \nabla_{\mu} B^{\mu} \right), \tag{D.5}$$

donde

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \kappa \sqrt{-g} \left[\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} f'(\hat{\mathcal{R}}) - \frac{1}{2} f(\hat{\mathcal{R}}) g_{\mu\nu} \right], \tag{D.6a}$$

$$\mathcal{E}_{\rho}{}^{\mu\nu} = \kappa \left[\hat{\nabla}_{\sigma} \left(\sqrt{-g} f'(\hat{\mathcal{R}}) g^{\sigma(\mu} \delta^{\nu)}{}_{\rho} \right) - \hat{\nabla}_{\rho} \left(\sqrt{-g} f'(\hat{\mathcal{R}}) g^{\mu\nu} \right) \right], \tag{D.6b}$$

$$B^{\mu} = \kappa \sqrt{-g} f'(\hat{\mathcal{R}}) \left(\delta \hat{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} \delta \hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\rho} \right). \tag{D.6c}$$

La ecuación (D.6b) se puede reescribir con algo de álgebra como:

$$\hat{\nabla} g_{\mu\nu} = -\hat{\nabla}_{\rho} \left(\log f'(\hat{\mathcal{R}}) \right) g_{\mu\nu}, \tag{D.7}$$

(ver [46]), lo cual implica que la derivada covariante $\hat{\nabla}$ no es compatible con la métrica, y que la no-metricidad está dada por (D.7). Esta es una diferencia fundamental entre la gravedad $f(\mathcal{R})$ en el formalismo de Palatini y en el de Cartan, pues en el de Palatini, la conexión asociada a $\omega^{I}{}_{J}$ es compatible con la métrica y con torsión no necesariamente nula.

Lista de publicaciones

- Montesinos M, Romero R and Díaz B 2018 *Class. Quantum Grav.* **35** 235015
- Montesinos M, Romero R and Gonzalez D 2020 *Class. Quantum Grav.* **37** 045008
- Montesinos M, Gonzalez D, Romero R and Celada M 2020 ArXiv:2011.02496

Bibliografía

[1] Jackson J D 2007 *Classical electrodynamics* (New York: John Wiley & Sons)

[2] Nachtmann O 2012 *Elementary particle physics: concepts and phenomena* (Berlin: Springer-Verlag)

[3] Rovelli C 2008 *Quantum Gravity* 1st ed Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge: Cambridge University Press)

[4] Henneaux M 1990 *Nucl. Phys. B* **18** 47

[5] Henneaux M and Bunster C 1992 *Quantization of Gauge Systems* Physics (Princeton, New Jersey: Princeton University Press)

[6] Deriglazov A 2017 *Classical mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism* (New York: Springer International Publishing)

[7] Noether E 1918 *Nachr. Kön. Ges. Wiss. Gött.* **1918** 235

[8] Noether E 1971 *Transp. Theory Stat. Phys.* **1** 186

[9] Rovelli C 1999 *Class. Quantum Grav.* **8** 297

[10] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago: University of Chicago Press)

[11] Torres del Castilllo G 2012 *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach* (New York: Birkhäuser)

[12] Utiyama R 1956 *Phys. Rev.* **101** 1597

[13] Thiemann T 2008 *Modern canonical quantum general relativity* (Cambridge: Cambridge University Press)

[14] Nicolai H, Peeters K and Zamaklar M 2005 *Class. and Quant. Grav.* **22** R193

[15] Achúcarro A and Townsend P K 1986 *Phys. Lett. B* **180** 89

[16] Witten E 1988 *Nucl. Phys. B* **311** 46

[17] Montesinos M, González D, Celada M and Díaz B 2017 *Class. Quantum Grav.* **34** 205002

[18] Montesinos M, Gonzalez D and Celada M 2018 *Class. Quantum Grav.* **35** 205005

[19] Sotiriou T P 2006 *Gen. Relativ. Gravit.* **38** 1407

[20] Sotiriou T P and Faraoni V 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 451

[21] De Felice A and Tsujikawa S 2010 *Living Rev. Relativ.* **13** 3

[22] Montesinos M, Romero R and Díaz B 2018 *Class. Quantum Grav.* **35** 235015

[23] Montesinos M, Romero R and Gonzalez D 2020 *Class. Quantum Grav.* **37** 045008

[24] Lovelock D 1971 *J. Math. Phys.* **12** 498

[25] Zanelli J 2012 *Class. Quantum Grav.* **29** 133001

[26] Zwiebach B 1985 *Phys. Lett. B* **156** 315

[27] Zumino B 1986 *Phys. Rep.* **137** 109

[28] Teitelboim C and Zanelli J 1987 *Class. Quantum Grav.* **4** L125

[29] Garraffo C and Giribet G 2008 *Mod. Phys. Lett. A* **23** 1801–1818

[30] Cvetković B and Simić D 2018 *Class. Quantum Grav.* **35** 055005

[31] Hehl F W, von der Heyde P, Kerlick G D and Nester J M 1976 *Rev. Mod. Phys.* **48** 393

[32] Sundermeyer K 2016 *Symmetries in Fundamental Physics* (New York: Springer)

[33] Carlip S 1998 *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions* Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge: Cambridge University Press)

[34] Díaz B and Montesinos M 2018 *J. Math. Phys.* **59** 052901

[35] MacDowell S W and Mansouri F 1977 *Phys. Rev. Lett.* **38** 739

[36] Celada M, González D and Montesinos M 2016 *Class. Quantum Grav.* **33** 213001

[37] Troncoso R and Zanelli J 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 4451

[38] Bañados M, Garay L J and Henneaux M 1996 *Phys. Rev. D* **53** R593

[39] Dadhich N, Durka R, Merino N and Miskovic O 2016 *Phys. Rev. D* **93** 064009

[40] Díaz B, Higuita D and Montesinos M 2014 *J. Math. Phys.* **55** 122901

[41] Díaz B and Montesinos M 2018 *J. Math. Phys.* **59** 052901

[42] Capozziello S, Cianci R, Stornaiolo C and Vignolo S 2007 *Class. Quantum Grav.* **24** 6417

[43] Capozziello S, Cianci R, Stornaiolo C and Vignolo S 2008 *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **05** 765

[44] Capozziello S and Vignolo S 2010 *Ann. Phys.* **19** 238

[45] Rubilar G F 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 239

[46] Hamity V H and Barraco D E 1993 *Gen. Relat. Gravit.* **25** 461

[47] Ferraris M, Francaviglia M and Volovich I 1994 *Class. Quantum Grav.* **11** 1505

[48] Montesinos M, Gonzalez D, Romero R and Celada M 2020 ArXiv:2011.02496

[49] DeWitt-Morette C, Dillard-Bleick M and Choquet-Bruhat Y 1978 *Analysis, manifolds and physics* (New York: North-Holland)

[50] Abraham R, Marsden J E and Ratiu T 2012 *Manifolds, tensor analysis, and applications* vol 75 (Springer Science & Business Media)

[51] Eschrig H 2011 *Topology and geometry for physics* vol 822 (New York: Springer)

[52] Batalin I and GA V 1981 *Phys. Lett. B* **102** 27

[53] Fuster A, Henneaux M and Maas A 2005 *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **2** 939

[54] Batalin I and Vilkovisky G 1984 *Nucl. Phys. B* **234** 106