



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO  
LABORATORIO UMI-LAFMIA 3175 CNRS**

**Navegación de una flota de aeronaves de ala  
fija basada en consenso robusto**

**T E S I S**

Que presenta

**Ing. Pablo Hernández León**

Para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

En

**SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN AÉREA Y  
SUBMARINA**

Directores de Tesis:

Dr. Sergio Salazar Cruz

Dr. Jorge Dávila Montoya

**Ciudad de México.**

**Enero 2020**



# Agradecimientos

---

Quisiera expresar mi gratitud a mis asesores, Dr. Sergio Salazar y Dr. Jorge Dávila por su guía y consejo durante la maestría. Agradezco su invaluable ayuda, tiempo y paciencia a lo largo de esta investigación. Me honra y me siento afortunado de ser uno de sus estudiantes.

En especial, agradezco enormemente a mi familia. A mis padres Martín y Natalia y mi hermana Belem, por su constante apoyo, así como el gran esfuerzo y sacrificio que han hecho por mí. Agradezco también a mis amigos Ana y Carlos por su compañía, aliento, ayuda e incontables pláticas y debates.

También agradezco a los compañeros y conocidos que me prestaron su ayuda y retroalimentación en estos dos años. Finalmente, pero no menos importante, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, ya que sin su apoyo esta tesis no hubiera sido posible.



# Resumen

---

Los sistemas multiagentes han ganado significativa atención en los últimos años por sus múltiples aplicaciones en ingeniería, economía y biología. En ciencia y tecnología demuestran una serie de ventajas que no pueden pasar desapercibidas y presentan nuevas soluciones a desafíos actuales. Entre los problemas planteados en esta área, se encuentra el control de formación, específicamente la maniobra de formación, que consiste en la adquisición de una formación deseada y el seguimiento de una velocidad o trayectoria deseadas. En sistemas interconectados, también debe ser considerada la cantidad y el tipo de información que será comunicada entre los vehículos, estos factores determinan las características que debe cumplir la formación, y la topología de comunicación a emplear.

La aplicación de sistemas multiagentes a vehículos aéreos sirve como un multiplicador en sus prestaciones, permitiendo que tareas como transporte, monitoreo, adquisición de información, entre otros, sean fácilmente escalables, reconfigurables y que puedan ampliar sus capacidades, así como reducir su costo operativo.

En este trabajo se estudia el problema de control de maniobra de formación para un grupo de aeronaves de ala fija en una configuración líder-seguidor, el líder se mueve de forma independiente a los seguidores, es decir, puede tener un algoritmo de control o ser operado manualmente. Se presenta el modelo dinámico de las aeronaves, junto a la caracterización aerodinámica del vehículo a simular, Eclipson Model T, y se desarrolla un sistema de control de vuelo por modos deslizantes para esta aeronave. Para el análisis del sistema multiagentes, se asume que la formación deseada es mínima e infinitesimalmente rígida, y sólo un subconjunto de los seguidores tiene ac-

ceso a la posición relativa y velocidad del líder. Para lograr los objetivos de control, cada agente utiliza un estimador distribuido de velocidad y altitud del líder, es decir, la velocidad y altitud deseadas del grupo, en tiempo finito. Además, se presenta un algoritmo de maniobra de formación basado en rigidez, y se demuestra que dirige a los agentes hacia la formación deseada y sigue la velocidad del líder en tiempo finito. Mas aún, se demuestra que tanto el estimador de velocidad, como el controlador pueden ser implementados en el sistema coordinado local de cada agente, y que únicamente emplean información local. Se presentan simulaciones del sistema de control de vuelo, así como del estimador distribuido y el control de maniobra de formación para mostrar la efectividad de los algoritmos propuestos.

## Abstract

Multi-agent systems have acquired significant attention in recent years due to their multiple applications in engineering, economy and biology. In the realm of science and technology they show a series of advantages that can not go unnoticed and present new solutions to modern challenges. Among the problems studied in this area of knowledge is formation control, specifically, formation maneuvering, which consists of simultaneous formation acquisition and velocity or path tracking. In networked systems, it must also be considered the amount and type of information that is being communicated between vehicles, these factors determine the characteristics the formation and communication topology to be used have to fulfill. The use of aircraft in multi-agent systems act is a multiplier in its performance, allowing tasks like transport, monitoring, data acquisition, among others, to be easily scalable, reconfigured and their capacities to be extended, as well as reduce their operating costs.

In this work, the problem of formation maneuvering control for a group of fixed wing aircraft in a Leader-Follower configuration is studied, the leader moves independently from the followers, that is, it can be using a control algorithm or being manually operated. The dynamic model for fixed wing aircraft model is presented, along with the aerodynamic characterization of the vehicle to be simulated, Eclipson Model T, a sliding mode flight control system is developed for this aircraft. For the analysis of the multi-agent system, it is assumed that the desired formation is minimally and infinitesimally

rigid, and only a subset of the followers has access to the relative position and velocity of the leader. To achieve the control objectives, each agent employs distributed leader's velocity and altitude estimators, that is, the swarm velocity and altitude in finite-time. Also, a rigidity-based formation maneuvering algorithm is presented and it is proved that drives the agents to the desired formation and tracks the leader's velocity in finite-time. Moreover, it is demonstrated that both the velocity estimator and the controller can be implemented in the local coordinate frame of each agent, and that they only use local information. Simulations of the flight control system are provided, as well as those from the distributed estimator and the formation maneuvering control to illustrate the effectiveness of the proposed algorithms.

## Contribución

El objetivo de esta tesis es lograr la maniobra de formación de un sistema multiagentes compuesto por aeronaves de ala fija, usando leyes de control distribuidas, basadas en distancias y rigidez, para una arquitectura líder-seguidor. Además se realiza la caracterización aerodinámica y simulación en MATLAB de una aeronave no tripulada que puede ser fabricada usando tecnologías de manufactura aditiva, junto al desarrollo de software en MATLAB-Simulink para la simulación del sistema multiagentes. Se proporciona una revisión de la literatura referente a control de formación, vuelo en formación y el modelo dinámico de la aeronave, así como las bases teóricas necesarias para el desarrollo de este trabajo.

Las contribuciones de esta tesis fueron:

- Caracterización aerodinámica de la aeronave Eclipson Model T.
- Desarrollo de algoritmos de control de vuelo basados en modos deslizantes de segundo orden.
- Simulación del modelo dinámico de la aeronave en MATLAB-Simulink.
- Implementación en MATLAB-Simulink de los algoritmos de control de vuelo.
- Desarrollo de leyes de control con convergencia en tiempo finito descentralizadas y basadas en distancia y rigidez para un sistema multiagentes

con arquitectura líder-seguidor aplicado a aeronaves de ala fija (vehículos no holonómicos).

- Se propone una matriz de rigidez reducida  $\bar{R}$ , empleada en las leyes de control de formación. Ésta permite que se puedan preservar distancias relativas entre el líder y los seguidores adyacentes a él.







# Índice general

---

Agradecimientos	III
Resumen	V
Índice de figuras	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Estado del arte . . . . .	3
1.3. Planteamiento general del problema . . . . .	8
1.4. Objetivo general . . . . .	9
1.4.1. Objetivos específicos . . . . .	9
<b>2. Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1. Notación y preliminares matemáticos . . . . .	11
2.2. Grafos . . . . .	14
2.3. Teoría algebraica de grafos . . . . .	16
2.4. Rigidez en grafos . . . . .	18
2.5. Análisis de estabilidad por Lyapunov . . . . .	26
2.6. Control y diferenciador por modos deslizantes. . . . .	29
2.6.1. Algoritmo Super Twisting (STA) . . . . .	29
2.6.2. Algoritmo Super Twisting Modificado . . . . .	30
2.6.3. Algoritmo Super Twisting Saturado (SSTA) . . . . .	30
2.6.4. Diferenciador de primer orden por modos deslizantes .	31
2.6.5. Diferenciador de segundo orden por modos deslizantes .	32

<b>3. Modelo matemático de la aeronave</b>	<b>34</b>
3.1. Marcos de referencia . . . . .	35
3.1.1. Velocidad aerodinámica, Velocidad del viento y velocidad de tierra . . . . .	37
3.1.2. Triángulo de viento . . . . .	38
3.2. Fuerzas y Momentos . . . . .	39
3.2.1. Aerodinámica longitudinal . . . . .	41
3.2.2. Aerodinámica lateral . . . . .	42
3.2.3. Coeficientes aerodinámicos . . . . .	43
3.2.4. Fuerza de propulsión . . . . .	43
3.3. Dinámica del vehículo . . . . .	44
3.3.1. Giro coordinado . . . . .	46
3.4. Caracterización aerodinámica del Eclipson Model T . . . . .	46
<b>4. Estrategias de control</b>	<b>56</b>
4.1. Control de la aeronave . . . . .	56
4.1.1. Dinámica lateral . . . . .	57
4.1.1.1. Control de ángulo de deslizamiento $\beta$ . . . . .	57
4.1.1.2. Control de ángulo de banqueo $\phi$ . . . . .	58
4.1.2. Dinámica longitudinal . . . . .	60
4.1.2.1. Control de ángulo de cabeceo $\theta$ . . . . .	60
4.1.2.2. Control de altitud . . . . .	61
4.1.2.3. Control de velocidad aerodinámica . . . . .	61
4.2. Control de formación . . . . .	63
4.2.1. Estimador de velocidad distribuido . . . . .	66
4.2.2. Control de maniobra de formación líder-seguidor . . . . .	70
4.2.3. Resultados en marcos de referencia locales . . . . .	82
4.2.3.1. Estimador de velocidad . . . . .	82
4.2.3.2. Control de formación. . . . .	82
<b>5. Simulaciones</b>	<b>85</b>
5.1. Sistema multiagentes con robots diferenciales . . . . .	86
5.2. Control de vuelo para la aeronave Eclipson Model T . . . . .	89
5.3. Sistema Multiagentes con aeronaves de ala fija. . . . .	96
<b>6. Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>

# Índice de figuras

---

1.1. Desplazarse en conjunto, como se observa en (a), (b) y (c), dota al grupo de protección contra depredadores. (d) Al volar con una formación en V, las aves que se encuentran detrás del líder ocupan menos energía para mantener el vuelo. . . . .	2
1.2. El vuelo en formación encuentra múltiples aplicaciones en vehículos aeroespaciales, (a) la formación en V es básica en operaciones militares, (b) otras formaciones pueden ser usadas en exhibiciones de vuelo. (c) también es posible encontrar el vuelo en formación en satélites, como la misión Cluster de la ESA, que recolecta información de la tierra usando una formación tetraédrica. . . . .	4
2.1. Abstracción de un grupo de cuatro vehículos a un grafo de 4 vértices y cinco aristas. Cada vehículo tiene la capacidad de comunicarse y percibir su entorno en un rango limitado, indicado por un círculo, estas interacciones son representadas como aristas que conectan a los nodos del grafo. . . . .	15
2.2. Ejemplos de un grafo no dirigido (a), y un grafo dirigido (b). . . . .	15
2.3. Se muestran las regiones de Geršgorin $C_i$ y $C_j$ de una matriz $\mathcal{A}$ , el centro de cada círculo está dado por los elementos $\mathcal{A}_{ii}$ y $\mathcal{A}_{jj}$ , con radio $r_i$ y $r_j$ , respectivamente. Los eigenvalores se encuentran en la unión de estas regiones. . . . .	18
2.4. El grafo (a) puede tener múltiples realizaciones en $\mathbb{R}^2$ , (b), (c) y (d) muestran tres posibles realizaciones. . . . .	19

2.5.	Dado un conjunto distancia asociado a los grafos $G_a$ (a) y $G_b$ (b), puede o no existir un framework que sea una realización del conjunto distancia. En ocasiones puede no existir un framework en una cierta dimensión, pero sí existir en una dimensión superior. . . . .	20
2.6.	Frameworks flexible (a), mínimamente rígido (b) y rígido (c). Note que para dar rigidez al framework (a), se agregó una arista, llegando al framework (b). . . . .	22
2.7.	Cambio de la distancia $P_j - P_i$ entre dos vértices debido a la acción de vectores velocidad $V_i$ y $V_j$ . . . . .	23
2.8.	Las operaciones de Henneberg permiten añadir un vértice a un grafo rígido, manteniendo rigidez. . . . .	25
3.1.	Marco inercial $\Sigma$ . . . . .	35
3.2.	Marco vehículo $\Sigma^v$ relativo al marco inercial. . . . .	35
3.3.	Marco vehículo-1. . . . .	36
3.4.	Marco vehículo-2. . . . .	36
3.5.	Marco cuerpo. . . . .	36
3.6.	Marco estabilidad. . . . .	36
3.7.	Marco viento. . . . .	37
3.8.	Ángulo de trayectoria de vuelo $\gamma$ y ángulo de curso $\chi$ . $S_\gamma$ y $C_\gamma$ denotan a $\sin(\gamma)$ y $\cos(\gamma)$ respectivamente. . . . .	37
3.9.	Proyección del triángulo de viento en el plano horizontal y los ángulos correspondientes. . . . .	39
3.10.	Proyección del triángulo de viento en el plano vertical y los ángulos correspondientes. . . . .	39
3.11.	Definición de los ejes de movimiento en la aeronave, así como las velocidades $(u, v, w)$ y momentos $(p, q, r)$ en estos ejes. . . . .	40
3.12.	Superficies de control y sus respectivos movimientos $\delta$ , $\delta_e$ y $\delta_r$ , para una configuración estándar. . . . .	41
3.13.	Aeronave Eclipson Model T. . . . .	47
3.14.	Perfiles NACA 4415 (verde) y NACA 0010 (amarillo) definidos en XFLR5 con 150 paneles cada uno. Cada línea recta entre dos puntos es un panel. Los perfiles se encuentran normalizados, es decir, tienen una longitud de cuerda unitaria. . . . .	48
3.15.	Perfil NACA 4415 con flap a $0^\circ$ (verde) , $+7^\circ$ (rojo) y $-7^\circ$ (morado). . . . .	48

3.16. Perfil NACA 0010 con flap a $0^\circ$ (amarillo) , $+7^\circ$ (verde) y $-7^\circ$ (morado). . . . .	48
3.17. Gráficas $C_L - \alpha$ (a) y $C_L - C_D$ (b) para el perfil NACA 0010. . . . .	49
3.18. Gráficas $C_L - \alpha$ (a) y $C_L - C_D$ (b) para el perfil NACA 0010 con flap a $-7^\circ$ . . . . .	50
3.19. Gráficas $C_L - \alpha$ (a) y $C_L - C_D$ (b) para el perfil NACA 0010 con flap a $+7^\circ$ . . . . .	50
3.20. Gráficas $C_L - \alpha$ (a) y $C_L - C_D$ (b) para el perfil NACA 4415. . . . .	51
3.21. Gráficas $C_L - \alpha$ (a) y $C_L - C_D$ (b) para el perfil NACA 4415 con flap a $-7^\circ$ . . . . .	51
3.22. Gráficas $C_L - \alpha$ (a) y $C_L - C_D$ (b) para el perfil NACA 4415 con flap a $+7^\circ$ . . . . .	52
3.23. Distribución de paneles en el aja y empenaje. . . . .	53
3.24. Distribución de masas en la aeronave, se consideran las masas puntuales de todos los componentes que constituyen la aeronave. . . . .	53
3.25. Gráficas $C_L - \alpha$ (a) y $C_L - C_D$ (b) de la aeronave para el rango $\alpha = -4.5$ a $\alpha = 9.5$ . . . . .	54
4.1. Posición y orientación de dos agentes $i$ y $j$ en el marco inercial $\Sigma$ . Se indican además la posición relativa $q_{ji}$ , los marcos locales de cada agente $\{\bar{N}^i \bar{E}^i\}$ y $\{\bar{N}^j \bar{E}^j\}$ y la distancia entre agentes deseada $d_{ij}$ . . . . .	65
4.2. Marco de referencia fijo en el líder $\Sigma_L$ , note que tiene la misma orientación que $\Sigma$ ; y la posición relativa $\bar{P}_i$ en el marco líder de un seguidor $i$ . . . . .	73
4.3. Distancia relativa entre el líder y un seguidor $k$ en un movimiento infinitesimal. . . . .	74
4.4. Movimiento continuo que mantiene la restricción de perpendicularidad. . . . .	74
4.5. Distancia relativa entre dos seguidores $i$ y $j$ en un movimiento infinitesimal. . . . .	75
4.6. Diagrama de bloques del control de adquisición de formación. . . . .	83
5.1. Grafo de formación y comunicaciones. . . . .	87
5.2. Trayectorias de los robots móviles. . . . .	87
5.3. Error de distancias entre agentes. . . . .	88
5.4. Entrada de control $v_i$ . . . . .	88
5.5. Entrada de control $\omega_i$ . . . . .	88

5.6.	Seguimiento de la orientación del líder. . . . .	88
5.7.	Estimación de la velocidad de líder. . . . .	89
5.8.	Error de seguimiento virtual $\Lambda$ . . . . .	89
5.9.	Velocidad de los agentes. . . . .	89
5.10.	Trayectoria de la aeronave. . . . .	91
5.11.	Altitud de la aeronave. . . . .	92
5.12.	Ángulo de cabeceo. . . . .	92
5.13.	Ángulo de banqueo. . . . .	92
5.14.	Rumbo. . . . .	92
5.15.	Componente $u$ de la velocidad. . . . .	92
5.16.	Componente $v$ de la velocidad. . . . .	92
5.17.	Componente $w$ de la velocidad. . . . .	92
5.18.	Velocidad angular $p$ . . . . .	92
5.19.	Velocidad angular $q$ . . . . .	93
5.20.	Velocidad angular $r$ . . . . .	93
5.21.	Velocidad angular $\dot{\psi}$ . . . . .	93
5.22.	Velocidad aerodinámica. . . . .	93
5.23.	Ángulo de ataque. . . . .	93
5.24.	Ángulo de sideslip. . . . .	93
5.25.	Error de altitud. . . . .	94
5.26.	Error de ángulo de cabeceo. . . . .	94
5.27.	Error de ángulo de alabeo. . . . .	94
5.28.	Error de velocidad aerodinámica. . . . .	94
5.29.	Control virtual $\theta_d$ . . . . .	95
5.30.	Actuación del elevador $\delta_e$ . . . . .	95
5.31.	Revoluciones por minuto del motor $\delta_t$ . . . . .	95
5.32.	Control virtual $\phi_d$ . . . . .	95
5.33.	Actuación de los alerones $\delta_a$ . . . . .	95
5.34.	Actuación del timón $\delta_r$ . . . . .	95
5.35.	Grafo de formación y comunicaciones. . . . .	97
5.36.	Trayectoria de estadio seguida por el líder. . . . .	97
5.37.	Trayectorias de las aeronaves. . . . .	98
5.38.	Error de distancias entre agentes. . . . .	98
5.39.	Altitud de los agentes. . . . .	98
5.40.	Estimación de la velocidad de líder. . . . .	98
5.41.	Estimación de la altitud de líder. . . . .	99
5.42.	Entrada de control virtual $\xi_i$ . . . . .	99
5.43.	Entrada de control $v_i$ . . . . .	99



5.44. Entrada de control $\omega_i$ . . . . .	99
5.45. Error de seguimiento virtual $\Lambda$ . . . . .	99
5.46. Velocidad de los agentes. . . . .	99



---

# Introducción

---

Juntarse es un comienzo.  
Mantenerse juntos es progresar.  
Trabajar juntos es triunfar.

---

Henry Ford

## 1.1. Motivación

En la naturaleza es posible observar el comportamiento colectivo de grupos de animales para migrar, cazar, o defenderse de depredadores, Figura 1.1, esta pareciera ser una conducta planeada, pues el grupo se mueve en conjunto como un solo ente, sin embargo este movimiento es el producto de decisiones y respuestas instantáneas de cada individuo en el grupo. Estas acciones colectivas permiten al grupo lograr objetivos que un individuo sería incapaz de realizar, y proporciona ventajas como protección, obtención de alimento, socialización y movilidad, [1].

Un sistema multiagentes consiste en una red de nodos independientes capaces de intercambiar información y tomar decisiones para lograr un objetivo en común. El movimiento del grupo puede ser dirigido por uno o más individuos que poseen información pertinente para el objetivo a cumplir, la comunicación de esta información al resto del grupo tiene un impacto global pues mediante su propagación y las acciones que tomen el resto de los individuos a través de algoritmos comunes, se conduce al grupo hacia el objetivo.



(a) Parvada de estúrnidos, en la parte superior derecha se observa un depredador solitario (Mostafa Meraji, Wikimedia Commons, [Licencia CC BY-SA 4.0](#))



(c) Manada de berrendos (H. Hoops, U.S. Fish & Wildlife Service, imagen de dominio público).



(b) Banco de peces (Anna Varona, Wikimedia Commons, [Licencia CC BY 4.0](#)).



(d) Grupo de gansos volando en formación (Usuario: 4028mdk09, Wikimedia Commons, [Licencia CC BY-SA 3.0](#)).

Figura 1.1: Desplazarse en conjunto, como se observa en (a), (b) y (c), dota al grupo de protección contra depredadores. (d) Al volar con una formación en V, las aves que se encuentran detrás del líder ocupan menos energía para mantener el vuelo.

Uno de los problemas en control cooperativo es el control de formación, para el cual se han desarrollado estrategias de control basadas en diferentes parámetros a los que puede tener acceso un agente, una de estas estrategias es el control de formación basado en distancias. Abordar el problema de esta forma requiere de acceso a las distancias relativas entre agentes, que pueden ser obtenidas de forma local a través de sensores, con lo que cada agente determina las acciones de control en su marco de referencia local, esto permite mayor flexibilidad en la implementación, haciendo posible la operación en ambientes con ciertas restricciones.

Entre las aplicaciones en vehículos aeroespaciales se encuentra el vuelo en formación, Figura 1.2. La naturaleza distribuida de ésta tarea permite la reducción de costos y aumenta la adaptabilidad y escalabilidad del sistema, de tal forma que un conjunto de vehículos de bajo costo pueden realizar la tarea de un vehículo de mayor complejidad, que además requiere de una inversión mayor, más aún, es posible añadir agentes al sistema para incrementar sus prestaciones, esto beneficia a misiones como reconocimiento, escolta, cartografía, comunicaciones, topografía, transporte, vigilancia, monitoreo, cinematografía, agricultura, defensa, entre otros. Motivados por las ventajas que presenta el control basado en distancias y las potenciales aplicaciones del vuelo en formación, esta tesis aborda el desarrollo de algoritmos de control distribuidos para la maniobra de formación de un grupo de aeronaves de ala fija, así como algoritmos de control para las actuaciones de cada vehículo.

## 1.2. Estado del arte

El modelo *Boids* desarrollado por Craig Reynolds en 1986 ( [2]) muestra las ideas principales de algunos problemas en sistemas multiagentes, en este modelo, un grupo de agentes móviles buscan lograr un objetivo usando únicamente interacciones locales. El modelo busca capturar la forma en que animales sociales, en este caso aves, cooperan formando bandadas, rebaños, bancos o enjambres para moverse en conjunto siguiendo un protocolo descentralizado que consiste en tres reglas [2]:

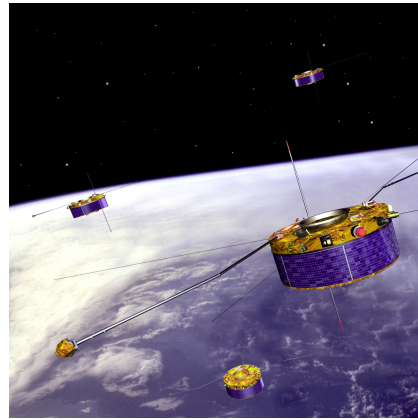
1. **Separación:** Evitar colisiones con agentes vecinos.
2. **Alineación:** Alinear el rumbo y velocidad del agente con sus vecinos.



(a) Cinco aviones F-15C en formación V (United States Air Force, imagen de dominio público - USGOV-PD).



(b) Aviones *Jaguar* formando el número 6 durante un sobrevuelo conmemorativo (Jerry Gunner, [flickr.com](https://www.flickr.com/photos/jerrygunner/), Licencia CC BY 2.0).



(c) Misión Cluster, cuatro satélites en formación que miden cambios en el viento solar y la magnetósfera de la tierra (Agencia Espacial Europea, [esa.int](https://esa.int), Licencia CC BY-SA 3.0 IGO).

Figura 1.2: El vuelo en formación encuentra múltiples aplicaciones en vehículos aeroespaciales, (a) la formación en V es básica en operaciones militares, (b) otras formaciones pueden ser usadas en exhibiciones de vuelo. (c) también es posible encontrar el vuelo en formación en satélites, como la misión Cluster de la ESA, que recolecta información de la tierra usando una formación tetraédrica.

3. **Cohesión:** Evitar que un agente quede aislado del resto, mantenerse cerca de los vecinos

Siguiendo estas reglas, es posible lograr un comportamiento colectivo.

El control de formación, uno de los temas más estudiados en sistemas multiagentes, tiene como objetivo llevar los estados de varios agentes a un conjunto de restricciones predeterminadas. Dependiendo de la capacidad de percepción de cada agente, es decir, las capacidades de sus sensores y de la topología de las interacciones entre agentes, el problema de control de formación puede ser caracterizado en términos de las variables percibidas y las variables controladas por el sistema. Las variables percibidas están limitadas a las capacidades de cada agente, mientras las variables controladas están relacionadas con la topología de interacciones, pues estas determinarán las condiciones que debe cumplir la topología. Basado en esto, se determinan las siguientes categorías [3]:

**Control basado en posición** Los agentes perciben su posición con respecto a un sistema coordinado global común. Controlan activamente su propia posición para lograr la formación deseada, la cual está dada por las posiciones deseadas para cada agente en el sistema coordinado global. La topología de interacción por lo general no es necesaria.

**Control basado en desplazamiento:** Los agentes controlan de forma activa su posición relativa (desplazamiento) con los agentes vecinos para lograr la formación deseada, que es especificada por las posiciones relativas deseadas con respecto a un sistema coordinado global, bajo la suposición que cada agente es capaz de medir la posición relativa de sus vecinos con respecto al sistema coordinado global. Cada agente debe conocer la orientación del sistema global y tener un sistema coordinado local. Sin embargo, los agentes no necesitan conocer el origen del sistema coordinado global o sus posiciones con respecto a este sistema.

**Control basado en distancia:** Las distancias entre agentes son controladas activamente para lograr la formación deseada, la cual está dada por las distancias deseadas entre agentes. Se asume que cada agente es capaz de medir las posiciones relativas de los agentes vecinos con respecto a su propio sistema coordinado local. No es necesario que los sistemas coordinados

locales estén alineados entre sí, mas aún, no es necesario que los agentes tengan una orientación en común.

Como se especifican las distancias entre agentes, la formación deseada puede ser tratada como un cuerpo rígido, por lo que es invariante a una combinación de rotación y traslación aplicado a una determinada posición de los agentes.

Las categorías mencionadas anteriormente pueden ser resumidas en la Tabla 1.1 [3]:

Tabla 1.1: Diferencias entre control de formación basado en posición, desplazamiento y distancia.

	<b>Basado en posición</b>	<b>Basado en desplazamiento</b>	<b>Basado en distancia</b>
<b>Variables medidas</b>	Posiciones de agentes	Posiciones relativas de vecinos	Posiciones relativas de vecinos
<b>Variables controladas</b>	Posiciones de agentes	Posiciones relativas de vecinos	Distancias entre agentes
<b>Sistemas coordenados</b>	Sistema coordinado inercial	Sistemas coordenados locales alineados	Sistemas coordenados locales
<b>Topología de interacción</b>	Usualmente no requerida	Conectividad o existencia de un <i>Spanning Tree</i>	Rigidez o Persistencia

Una introducción al control de formación de sistemas multiagentes se presenta en [3], donde se exploran y desarrollan las categorías mencionadas anteriormente. En [1] y [4] se estudia el control cooperativo de sistemas dinámicos multiagentes, el diseño de protocolos distribuidos que garanticen consenso o sincronización de los estados de un sistema multiagentes, así como el análisis y diseño de sistemas dinámicos interconectados. En [5] se estudia un control de formación descentralizado para buques subactuados usando control por modos deslizantes terminal (Terminal sliding mode control - TSMC), combinado con una ley adaptable, se considera un esquema líder-seguidor y se dan posiciones relativas deseadas para cada agente. En [6] se considera el problema de control de formación para múltiples robots móviles no holonómicos usando un método basado en consenso, donde a través de una transformación estado-entrada y leyes de control distribuidas se logra la convergencia exponencial de las posiciones de los agentes a una forma geométrica, cuyo centroide se mueve a lo largo de una trayectoria de



referencia dada por un líder virtual. De forma similar [7] a través de una transformación general entrada-estado convierte el problema anterior en un problema de consenso, además se logra la convergencia en tiempo finito de los robots a una formación deseada con su centroide moviéndose a lo largo de una trayectoria de referencia, en ambos casos se proporcionan las posiciones relativas de cada agente en la formación. [8] considera el problema de formación para un sistema líder-seguidor de buques subactuados, donde los seguidores buscan igualar el ángulo de guiñada y llegar a una posición relativa dada, se usan leyes de control adaptables, estimadores de velocidad de alta ganancia, y redes neuronales en una metodología de backstepping para lograr estabilidad asintótica del sistema. El problema de seguimiento en tiempo finito de una formación que varía en el tiempo para un sistema con agentes de orden superior con las entradas del líder desconocidas y una topología dirigida se estudia en [9], los seguidores alcanzan la formación y siguen la trayectoria deseada en tiempo finito a través de un protocolo de seguimiento distribuido, se proporcionan las posiciones relativas deseadas de los seguidores. En [10] se propone una ley de control gradiente descentralizada basada en una función potencial y un grafo infinitesimalmente rígido, se demuestra que la rigidez infinitesimal del framework es una condición suficiente para la estabilidad local asintótica; la ley de control se aplica a un grupo de vehículos puntuales con dinámica de integrador simple, se consideran topologías dirigida y no dirigida y se dan las distancias entre agentes deseadas. Un control adaptable de formación basado en distancia para un sistema líder-seguidor se propone en [11], el control también estima la velocidad del líder, se considera un sistema con un líder y dos seguidores; la convergencia del sistema a las distancias entre agentes deseadas, así como a la velocidad de líder es asintótica. En [12] se considera un esquema líder-seguidor y agentes con dinámica de integrador simple con un grafo mínima e infinitesimalmente rígido, se logra la maniobra de formación por medio de un estimador de velocidad y un control de formación basado en distancia y rigidez con convergencia en tiempo finito; sólo se proporcionan distancias deseadas entre agentes, en consecuencia las posiciones relativas entre agentes no son fijas pues se ajustan para satisfacer las restricciones entre agentes, además se demuestra que los controladores propuestos son distribuidos, es decir, únicamente usando información local la velocidad de los agentes converge a la velocidad del grupo dada por el líder en tiempo finito, tanto el estimador de velocidad como el control diseñado pueden ser implementados en el marco de referencia local de cada agente, esta última

condición no se encuentra en trabajos anteriores.

En [13], se aborda el problema de vuelo en formación usando campos vectoriales, la coordinación se logra indicando a las aeronaves seguir circunferencias concéntricas de diferente radio; el algoritmo asegura estabilidad exponencial, sin embargo unicamente realiza trayectorias circulares, donde cada agente busca controlar a través de un algoritmo de consenso, el ángulo en el que se encuentra dentro de la circunferencia. En [14] se desarrollan leyes de control para mantener la formación entre una aeronave designada como líder, y un seguidor que debe mantener una posición relativa determinada; estos controles se formularon para maniobras en el plano del líder, considerando cambios de orientación y velocidad, donde se busca conservar y minimizar la cantidad de energía utilizada permitiendo una variación en la altitud de ambas aeronaves. El análisis de estabilidad se realiza a través del criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz y las simulaciones que se proporcionan muestran que el seguidor mantiene correctamente su posición relativa al líder. El uso de leyes de control obtenidas por el método de campo potencial artificial para guiar a un grupo de aeronaves no tripuladas en el plano se estudia en [15], a través de un campo de velocidad, un campo de dirección y un campo para repulsión de vehículos cercanos, se guía a las aeronaves a una posición relativa deseada para lograr una trayectoria en línea recta, o una órbita, ambas especificadas por los parámetros de las funciones potenciales. Las leyes de control propuestas se validan a través de simulaciones para trayectorias recta y circular. En [16] se aborda el problema de planeación de trayectoria y coordinación de múltiples vehículos aéreos no tripulados, el problema se descompone en el diseño de un algoritmo para planeación de trayectoria que busca evadir ciertas posiciones en el plano, donde cada vehículo planea su propia trayectoria. Un agente coordinador estima el tiempo de llegada al objetivo de todos los vehículos y coordina la llegada simultanea de todos los vehículos.

### 1.3. Planteamiento general del problema

Considere un sistema multiagentes formado por un número cualquiera de aeronaves de ala fija, incluyendo un líder que opera independiente al resto de los agentes. Sea la formación deseada definida por un framework mínima e

infinitesimalmente rígido. Se considera que los seguidores son capaces medir sus posiciones relativas con sus vecinos, y estimar su posición, orientación y velocidades inerciales, así como compartir sus estimaciones de velocidad y altitud a través de una red de comunicación, la cual se asume es el grafo rígido de formación. Se desarrollan algoritmos que permitan a los agentes:

- Lograr la formación deseada en tiempo finito desde una condición inicial dada.
- Mantener las distancias relativas entre agentes dadas por la formación deseada.
- Igualar la velocidad de los seguidores a la del líder en tiempo finito.
- Mantener la formación y el seguimiento del líder aún cuando el líder realice una maniobra.

## 1.4. Objetivo general

Desarrollar algoritmos de control distribuidos de convergencia en tiempo finito basados en distancia y rigidez, con el fin de lograr la maniobra de formación de un grupo de vehículos aéreos de ala fija en una configuración líder-seguidor, y mostrar su capacidad de mantener la formación y las distancias entre agentes deseadas.

### 1.4.1. Objetivos específicos

- Seleccionar y caracterizar la aerodinámica de la aeronave a simular.
- Simplificar el modelo dinámico de la aeronave a través del diseño de un sistema de control de vuelo.
- Simular el modelo dinámico y el sistema de control de una aeronave en MATLAB-Simulink, mostrando la efectividad de los controles.
- Diseñar y demostrar la convergencia de algoritmos distribuidos de maniobra de formación para los seguidores, considerando el modelo simplificado del vehículo.
- Simular y mostrar la efectividad de los algoritmos propuestos en un sistema multiagentes de aeronaves de ala fija en MATLAB-Simulink.



---

# Preliminares

---

Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes.

---

Isaac Newton

Para el desarrollo de este trabajo es necesario definir la notación y herramientas matemáticas que serán utilizados. En la sección 2.1 se dan definiciones y resultados matemáticos relevantes. Definiciones sobre teoría de grafos y su utilidad para estudiar sistemas multiagentes se estudian en la sección 2.2. En la sección 2.3 se asocian matrices a un grafo y se dan resultados asociados a estas matrices. En la sección 2.4 se definen los conceptos de: framework, rigidez en grafos, rigidez mínima y rigidez infinitesimal. La estabilidad de Lyapunov y estabilidad entrada-estado se estudian en la sección 2.5, estas herramientas serán utilizadas para el análisis de estabilidad de las estrategias de control cooperativo. Finalmente la sección 2.6 presenta algoritmos de control por modos deslizantes.

## 2.1. Notación y preliminares matemáticos

La notación que será usada es estándar en la literatura [17]. Se denota con  $x \in \mathbb{R}^n$  o  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  al vector columna de  $n \times 1$ , como  $\mathbf{1}_n$  al vector  $n \times 1$  de unos, a  $I_n$  como la matriz identidad de  $n \times n$ ,  $\mathbf{0}_n$  hace referencia al vector  $n \times 1$  de ceros. Una función  $f(x)$  que satisface  $f(0) = 0$  y  $f(x) > 0$

es llamada *definida positiva*. Si satisface la condición  $f(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$ , se llama *semidefinida positiva*. Una función  $f(x)$  se dice *negativa definida* o *semidefinida negativa* si  $-f(x)$  es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente.

Los escalares  $\lambda_{\min}$  y  $\lambda_{\max}$  denotan los eigenvalores mínimo y máximo respectivamente de una matriz. Una matriz diagonal de  $n \times n$  está denotada por  $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  donde  $a_i \in \mathbb{R}$  son los elementos en su diagonal. Análogamente,  $\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$  con  $A_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  denota a la matriz diagonal a bloques de  $mn \times mn$ .

**Definición 2.1** ([17]). Para dos matrices  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  el producto de Kronecker, escrito  $A \otimes B$ , es definido por la matriz particionada

$$A \otimes B \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

**Teorema 2.1** ([18]). Sean las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y sean  $\lambda$  y  $\mu$  sus eigenvalores respectivamente con sus eigenvectores correspondientes  $x$  y  $y$ . Entonces  $\lambda\mu$  es un eigenvalor de  $A \otimes B$  con el correspondiente eigenvector  $x \otimes y$ . Cualquier eigenvalor de  $A \otimes B$  resulta del producto de los eigenvalores de  $A$  y  $B$ .

**Definición 2.2** ([17]). Una matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se dice semidefinida positiva o no negativa si  $x^T A x \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

Además, el siguiente lema es válido.

**Lema 2.2.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $A$  es semidefinida positiva, representado por:  $A \geq 0$ .
2.  $A$  puede ser representada como:  $A = HH^T$ , para alguna matriz  $H$ .
3. Los eigenvalores de  $A$  son no negativos, es decir,  $\lambda_i(A) \geq 0$ .
4. Existe una matriz simétrica  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que:  $A = R^2$

**Definición 2.3** ([17]). Si  $A$  es semidefinida positiva y es no singular, se dice que es definida positiva, esto es expresado como:  $A > 0$

A continuación se definen algunas funciones que serán utilizadas en capítulos subsecuentes.

**Definición 2.4.** La función  $\text{sign}(x)$  de un escalar real  $x$  es definida como:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{para } x < 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

**Definición 2.5.** La función  $\text{sig}(x)^\alpha$  de los escalares reales  $x$ ,  $\alpha$  es definida como:  $\text{sig}(x)^\alpha = |x|^\alpha \text{sign}(x)$

**Definición 2.6.** Las funciones  $\text{sign}(\mathbf{x})$  y  $\text{sig}(\mathbf{x})^\alpha$  de un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  son definidas como:

$$\text{sign} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}(x_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(x_p) \end{bmatrix}; \quad \text{sig} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \right)^\alpha = \begin{bmatrix} \text{sig}(x_1)^\alpha \\ \vdots \\ \text{sig}(x_p)^\alpha \end{bmatrix}, \in \mathbb{R}^p \quad (2.3)$$

Para un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{x}\|_2 = [\sum_{k=1}^n |x_k|^2]^{1/2}$  representa la *norma-2*, también conocida como norma Euclideana.  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$  denota la *norma-1*, y  $\|\mathbf{x}\|_p = [\sum_{k=1}^n |x_k|^p]^{1/p}$  denota la *norma-p*.

**Lema 2.3** ([19]). Un mapa continuamente diferenciable  $z = T(x)$  es un difeomorfismo local en  $x_0$  si la matriz Jacobiana  $[\partial T / \partial x]$  es no singular en  $x_0$ . Es un difeomorfismo global si y sólo si  $[\partial T / \partial x]$  es no singular para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $T$  es propio; es decir,  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|T(\mathbf{x})\| = \infty$ .

Finalmente se presentan los siguientes resultados matemáticos.

**Lema 2.4.** Dado un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , con elementos  $x_i \geq 0$ , entonces:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n x_i x_j \geq \sum_{i=1}^n x_i^2$$

**Lema 2.5.** Para una matriz definida positiva  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se cumple:

$$\lambda_{\min} \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \mathbf{x}^T \mathcal{B} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max} \|\mathbf{x}\|_2^2$$

**Lema 2.6.** Dado un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , con elementos  $x_i \leq 0$  y un escalar  $0 < \alpha < 1$ , entonces:

$$\sum_{i=1}^n (x_i^\alpha) > \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^\alpha$$

**Lema 2.7.** [Desigualdad de Hölder [20]] Para vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , escalares reales positivos  $p, q$  y la condición  $1/p + 1/q = 1$ , se cumple:

$$\|\mathbf{x}^T \mathbf{y}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$$

**Lema 2.8.** [Desigualdad de Young [20]] Para escalares reales  $x, y$  y escalares reales positivos  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$  bajo la condición  $\alpha + \beta = 1$ , se cumple:

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$$

## 2.2. Grafos

Las interacciones entre agentes a través de un enlace de comunicación o mediciones de sensores juegan un papel importante en el desempeño del sistema en conjunto, así que resulta útil modelar matemáticamente estas interacciones, lo presentado a continuación se ha obtenido de [4] y [1]. Un sistema multiagentes puede ser modelado a través de un grafo, que es una abstracción de los agentes y sus interacciones. Los agentes reciben el nombre de *vértices*, aunque también es posible referirse a ellos como *nodos*, y a las interacciones se les denomina *aristas*. La Figura 2.1 muestra un grupo de vehículos aéreos no tripulados (VANT) que son capaces de comunicarse y percibir sus alrededores en un rango limitado, ilustrado como un círculo, note que un vehículo no necesariamente puede comunicarse o percibir a todos los demás del grupo. Los vehículos y las interacciones que se dan entre ellos pueden ser modelados como un grafo, donde a cada vehículo se le asocia con un vértice y a cada interacción con una arista de un grafo.



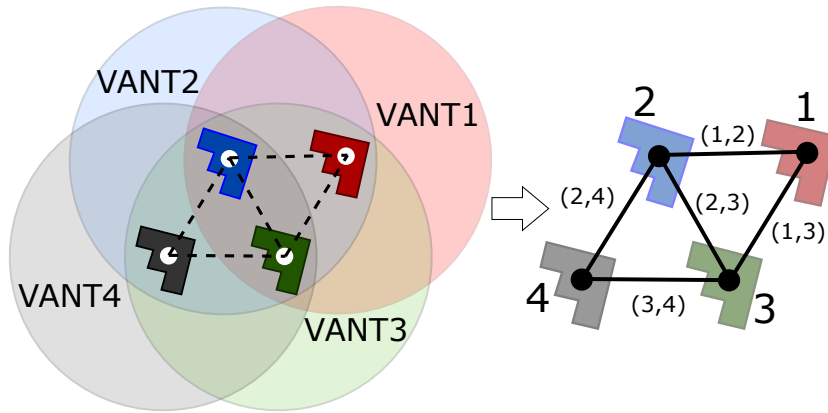
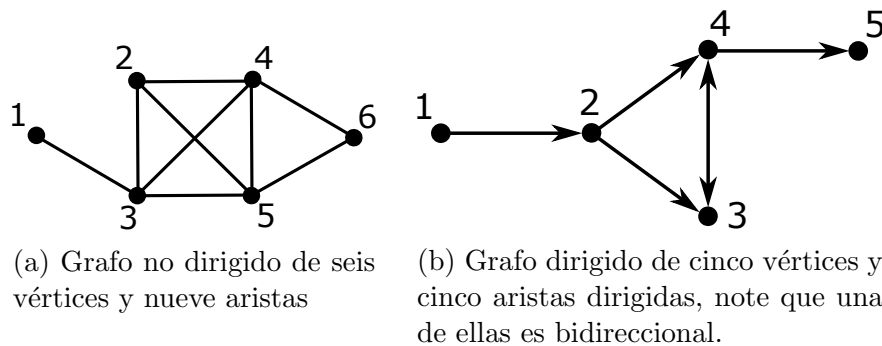


Figura 2.1: Abstracción de un grupo de cuatro vehículos a un grafo de 4 vértices y cinco aristas. Cada vehículo tiene la capacidad de comunicarse y percibir su entorno en un rango limitado, indicado por un círculo, estas interacciones son representadas como aristas que conectan a los nodos del grafo.

Las aristas pueden ser bidireccionales, es decir, dos agentes conectados pueden recibir y enviar información entre sí, ó pueden ser dirigidas, donde la información viaja en un sólo sentido. En el caso dirigido, un agente  $i$  puede percibir o recibir información de un agente  $j$ , mientras que el agente  $j$  no puede percibir o recibir información del agente  $i$ . Este tipo de interacción es ilustrada en un grafo con una flecha que inicia en el vértice  $j$  y está dirigida hacia el vértice  $i$ ; en el caso bidireccional, una línea uniendo ambos vértices es suficiente. La Figura 2.2 muestra un grafo no dirigido y un grafo dirigido.



(a) Grafo no dirigido de seis vértices y nueve aristas

(b) Grafo dirigido de cinco vértices y cinco aristas dirigidas, note que una de ellas es bidireccional.

Figura 2.2: Ejemplos de un grafo no dirigido (a), y un grafo dirigido (b).

Las aristas, así como el número de vértices en un grafo pueden variar, aumentar, reducirse o reorganizarse, esto tendrá efecto en la dinámica del sistema, sin embargo para esta tesis se considera una red estática, donde el número de agentes y sus interacciones se mantiene constante.

Un grafo finito, no dirigido y simple denotado por  $G \triangleq (V, E)$  se compone de un conjunto finito denominado *conjunto de vértices*, denotado por  $V$ ; cada elemento de  $V$  es entonces un vértice del grafo. El número de elementos en  $V$ , o la cardinalidad del conjunto, está denotado por  $|V| = n$ . El conjunto de vértices puede escribirse como:  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . El segundo conjunto que compone a un grafo es el *conjunto de aristas* denotado por  $E$ , el cual se compone de elementos de la forma  $(i, j)$  tal que  $i, j = 1, 2, \dots, n$  e  $i \neq j$ . La cardinalidad de  $E$  está denotada por  $|E| = m$ .

Si una arista existe entre los vértices  $i$  y  $j$ , estos se dicen *adyacentes*, en este caso, la arista  $(i, j)$  se llama *incidente* con vértices  $i$  y  $j$ . El *vecindario* de un vértice  $i$  es el conjunto de vértices adyacentes a  $i$ , esta denotado por  $\mathcal{N}_i = \{j \in V | (i, j) \in E\}$ . La adyacencia de dos vértices permite moverse a través del grafo siguiendo la dirección de las aristas, formando un *camino* en el grafo.

**Definición 2.7** ([4]). *Un grafo se dice conectado, si para cada par de vértices en  $V$  existe un camino que los tenga en su inicio y final, en caso contrario, se llama no conectado.*

Lo anterior se puede entender como la capacidad de llegar de un vértice a cualquier otro vértice en el grafo siguiendo las aristas.

Es posible considerar un subconjunto de los vértices de un grafo  $S \subseteq V$  y sus correspondientes aristas adyacentes entre ellos, denominado subconjunto  $E_S \subseteq E$ , entonces este subconjunto de vértices induce un subgrafo con respecto al grafo original, el cual está denotado por  $G_S = (S, E_S)$ .

Las nociones anteriores de adyacencia, vecindario, subgrafo y conectividad pueden extenderse a grafos dirigidos. Un *camino dirigido* se forma siguiendo la dirección de las aristas de un vértice a otro.

## 2.3. Teoría algebraica de grafos

Un grafo también puede ser representado en términos de matrices, lo presentado a continuación se ha obtenido de [4]. Para un grafo no dirigido,

el *grado* de un vértice  $i$ , denotado por  $d_i$ , es la cardinalidad de su vecindario  $\mathcal{N}_i$ , es decir, el número de vértices que son adyacentes al vértice  $i$ .

**Definición 2.8** ([4]). *La matriz de grado  $D$  es una matriz real diagonal que contiene el grado de los vértices del grafo en su diagonal.*

$$D(G) = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

**Definición 2.9** ([4]). *La matriz de adyacencia  $A$  es una matriz real simétrica de  $n \times n$  que codifica las relaciones de adyacencia en el grafo, dónde:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j) \in E \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Note que los elementos en la diagonal de la matriz de adyacencia son cero,  $a_{ii} = 0$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Además, los elementos en la diagonal de la matriz de grado  $D$  pueden ser expresados como  $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ .

**Definición 2.10** ([4]). *La matriz Laplaciana, denotada por  $\mathcal{L}$ , asociada a un grafo no dirigido es definida como:*

$$\mathcal{L} = D - A; \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} d_1 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{12} & d_2 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

*Note que para cualquier grafo la suma de los elementos de un renglón de la matriz Laplaciana es cero.*

La matriz Laplaciana  $\mathcal{L}$  es simétrica y semidefinida positiva, por lo que sus eigenvalores son no negativos y pueden ser ordenados como  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ , con  $\lambda_1 = 0$ .

**Lema 2.9** ([4]). *El grafo  $G$  es conectado si y sólo si  $\lambda_2 > 0$ .*

**Lema 2.10** (Teorema de Geršgorin [4]). *Sea una matriz compleja  $\mathcal{A}$  de  $n \times n$  y sea  $C_i$  un círculo cerrado en el plano complejo centrado en un elemento de la diagonal  $\mathcal{A}_{ii}$  con radio dado por la suma de elementos en el renglón  $r_i = \sum_{j \neq i} |\mathcal{A}_{ij}|$ :*

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathcal{A}_{ii}| \leq r_i\}$$

*Entonces todos los eigenvalores de la matriz  $\mathcal{A}$  se encuentran en la unión de los  $n$  círculos  $C_i$  para  $i = 1, \dots, n$*

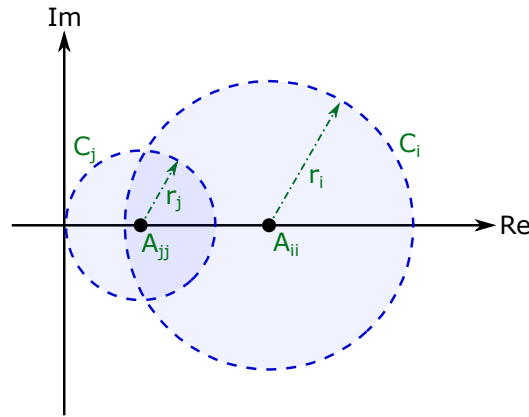


Figura 2.3: Se muestran las regiones de Geršgorin  $C_i$  y  $C_j$  de una matriz  $\mathcal{A}$ , el centro de cada círculo está dado por los elementos  $\mathcal{A}_{ii}$  y  $\mathcal{A}_{jj}$ , con radio  $r_i$  y  $r_j$ , respectivamente. Los eigenvalores se encuentran en la unión de estas regiones.

## 2.4. Rigidez en grafos

El concepto de rigidez en grafos es una abstracción de la rigidez en estructuras, que pueden ser vistas como un sistema de barras y uniones, donde las uniones son los agentes, y las barras son las restricciones de distancia entre agentes. Considerar un grafo rígido asegura que las restricciones en las distancias entre agentes dada una formación deseada se mantengan. Esto asegura implícitamente que se evitarán colisiones entre agentes durante la adquisición de la formación [21].

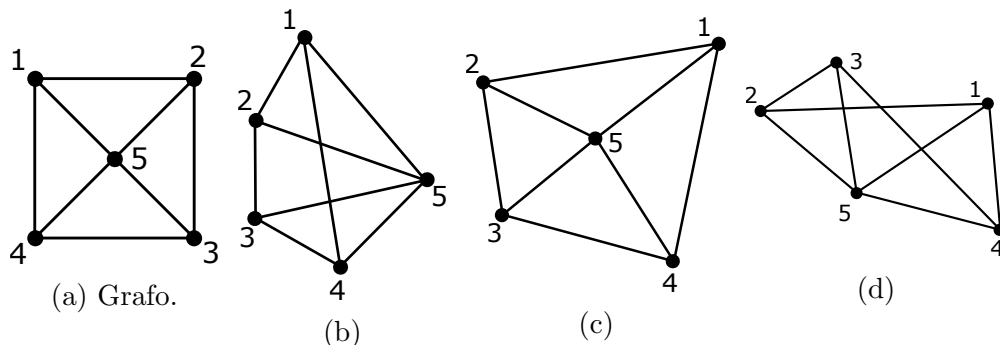


Figura 2.4: El grafo (a) puede tener múltiples realizaciones en  $\mathbb{R}^2$ , (b), (c) y (d) muestran tres posibles realizaciones.

La teoría y definiciones de grafos y frameworks rígidos presentada a continuación se puede encontrar en [21–28].

El sistema de barras y uniones puede ser representado como un grafo que modela a las uniones como vértices y a las barras como aristas. Cada vértice tiene asociada una posición en el espacio, es decir, tiene una realización en el espacio. Una realización de un grafo  $G = (V, E)$  en un espacio  $d$ -dimensional es un mapeo donde al conjunto de vértices se le asigna un conjunto de posiciones  $\mathcal{P} = [\mathcal{P}_1^T, \dots, \mathcal{P}_n^T]^T$ .

**Definición 2.11** ([24]). *Un framework es un mapeo uno a uno  $V \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Está denotado por  $\mathcal{F} = (G, \mathcal{P})$ , para cualquier  $\mathcal{P}$ .*

A este par también se le llama una *configuración* de  $G$ . Un grafo puede tener múltiples realizaciones, es decir, se le puede asociar cualquier conjunto de posiciones, dando origen a diferentes frameworks, esto se observa en la Figura 2.4, dado el grafo de la Figura 2.4a, y diferentes  $\mathcal{P}$ , se pueden obtener diferentes frameworks, como los mostrados en las Figuras 2.4b, 2.4c y 2.4d; estas son realizaciones en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.12** ([24]). *Sean  $(G, \mathcal{P})$  y  $(G, \mathcal{Q})$  dos realizaciones diferentes de un grafo  $G = (V, E)$ . Se dicen equivalentes si  $\|\mathcal{P}_j - \mathcal{P}_i\| = \|\mathcal{Q}_j - \mathcal{Q}_i\|$  para todas las aristas  $(i, j) \in E$ .*

**Definición 2.13** ([24]). *Si la condición  $\|\mathcal{P}_j - \mathcal{P}_i\| = \|\mathcal{Q}_j - \mathcal{Q}_i\|$  se mantiene para todos los pares de vértices del grafo, entonces  $(G, \mathcal{P})$  y  $(G, \mathcal{Q})$  son congruentes.*

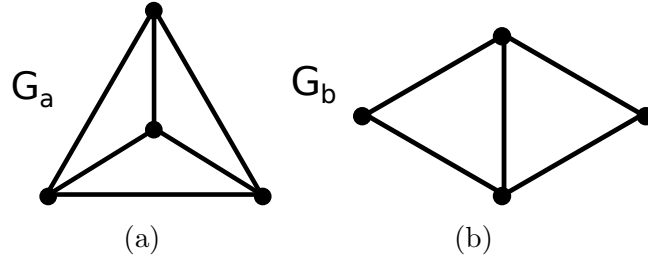


Figura 2.5: Dado un conjunto distancia asociado a los grafos  $G_a$  (a) y  $G_b$  (b), puede o no existir un framework que sea una realización del conjunto distancia. En ocasiones puede no existir un framework en una cierta dimensión, pero sí existir en una dimensión superior.

Note que congruencia implica equivalencia, pero lo contrario no necesariamente es verdad. A partir de un framework es posible definir un *conjunto distancia*, denotado por  $\Delta = [\dots, \delta_{ij}, \dots]$ , con  $\delta_{ij} > 0 \in \mathbb{R}$ , definido para todas las aristas  $(i, j) \in E$ , donde  $\delta_{ij} = \|\mathcal{P}_j - \mathcal{P}_i\|$ . Un conjunto distancia se dice *realizable* si existe un framework tal que  $\|\mathcal{P}_j - \mathcal{P}_i\| = \delta_{ij}$ , dicho framework  $\mathcal{F}$  se llama entonces una *realización* de  $\Delta$ . Por el contrario, se dice que un framework *induce* un conjunto distancia  $\Delta$  realizable. Además, dado un grafo  $G$  y un conjunto distancia realizable  $\Delta$ , ambos inducen un conjunto de posiciones en el espacio, es decir, una *geometría realizable*. Por ejemplo, dado el grafo  $G_a = (V_a, E_a)$ , mostrado en la Figura 2.5a, y un conjunto distancia  $\Delta_a = \{d_{ij}\} = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , no existe un framework  $\mathcal{F} = (G_a, \mathcal{P}_a)$  en  $\mathbb{R}^2$  que sea una realización de  $\Delta_a$  y  $G_a$ . Entonces  $\Delta_a$  es un conjunto distancia no realizable para  $G_a$  en  $\mathbb{R}^2$ , y el par  $(G_a, \Delta_a)$  no induce una geometría realizable en  $\mathbb{R}^2$ . Esto es claro pues no existe figura en el plano tal que todas las aristas del grafo  $G_a$  tengan la misma longitud, sin embargo esta figura si existe en un espacio  $\mathbb{R}^3$ , formando una pirámide. En el caso del grafo  $G_b = (V_b, E_b)$ , mostrado en la Figura 2.5b, con un conjunto distancia  $\Delta_b = \{\delta_{ij}\} = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sí existe un framework  $\mathcal{F} = (G_b, \mathcal{P}_b)$  en  $\mathbb{R}^2$  que es una realización de  $\Delta_b$ . Entonces  $\Delta_b$  es un conjunto distancia realizable para  $G_b$  en  $\mathbb{R}^2$ , además  $G_b$  y  $\Delta_b$  inducen una geometría realizable en  $\mathbb{R}^2$ .

Dado un framework cualquiera, es de interés saber si es rígido o no. En este contexto rigidez se refiere a la no deformación de la estructura dado el movimiento de alguno de sus nodos.

**Definición 2.14** ([21]). *Un cuerpo rígido se dice en traslación si todos los*

puntos que lo forman se mueven en trayectorias paralelas. Un cuerpo rígido se dice en rotación si todos los puntos se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados en un mismo eje que cruza con el cuerpo.

Cualquier movimiento puede ser descompuesto en una traslación superpuesta a una rotación, lo que permite desacoplar la traslación pura de la rotación pura [21].

**Definición 2.15** ([21]). *Un movimiento de un framework  $\mathcal{F} = (G, \mathcal{P})$  con  $G = (V, E)$  es una familia continua de frameworks equivalentes  $\mathcal{F}(t)$  para  $t \in [0, 1]$  donde  $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}$ . Es decir, cada punto  $\mathcal{P}_i$ ,  $i \in V$  se mueve a lo largo de una trayectoria continua  $\mathcal{P}_i(t)$  mientras preserva las distancias entre los nodos conectados por una arista.*

**Definición 2.16** ([21]). *Un framework  $\mathcal{F}_0 = (G, \mathcal{P}_0)$  es rígido si existe un  $\epsilon > 0$  tal que todo framework  $\mathcal{F}_1 = (G, \mathcal{P}_1)$  que es equivalente a  $\mathcal{F}_0 = (G, \mathcal{P}_0)$  y satisface  $\|\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1\| < \epsilon$  para todos los vértices, es congruente con  $\mathcal{F}_0 = (G, \mathcal{P}_0)$ .*

Es decir, un framework se dice rígido si todo movimiento continuo de los vértices del framework  $\mathcal{F}_0$  preserva las longitudes de todas las aristas y las distancias entre todos los pares de vértices. Un framework es flexible si no es rígido, y es posible aumentar el número de aristas en un framework flexible para darle rigidez.

Debido a que existen límites prácticos en la cantidad de enlaces de comunicación que puede manejar un agente es importante conocer la cantidad mínima de enlaces necesarios mientras se mantiene rigidez.

**Definición 2.17** ([3]). *Un framework mínimamente rígido es un framework rígido tal que ninguna arista de su grafo pueda ser removida sin perder rigidez.*

Por ejemplo, la Figura 2.6a muestra un framework flexible, pues un movimiento continuo del vértice 1 o 2 no preserva las distancias entre todos los vértices, es decir, no es congruente y la estructura se deforma. Si se toma este framework y se añade la arista (2, 3), se tiene la Figura 2.6b que es un framework rígido, y más aún, mínimamente rígido pues remover cualquiera de sus aristas lo haría flexible. Añadiendo la arista (1, 4) se obtiene la Figura 2.6c, también un grafo rígido al cual se le puede eliminar cualquier arista y no perderá rigidez. A continuación se define la *rigidez infinitesimal*, donde se requiere mantener distancias durante un movimiento infinitesimal.

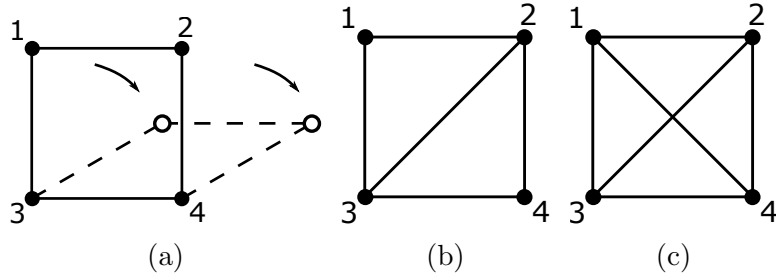


Figura 2.6: Frameworks flexible (a), mínimamente rígido (b) y rígido (c). Note que para dar rigidez al framework (a), se agregó una arista, llegando al framework (b).

**Definición 2.18** ([27]). *Un movimiento infinitesimal es la primera derivada válida con respecto al tiempo, de un movimiento, evaluada en  $t = 0$ .*

Un movimiento en  $\mathbb{R}^d$  describe una trayectoria en el espacio, sin embargo, en un movimiento infinitesimal sólo es de interés cómo inicia el movimiento, la dirección que toma en un sentido lineal, o la tangente de la trayectoria en ese instante, es decir, la primera derivada temporal. Al ser justo al inicio del movimiento, se evalúa en  $t = 0$ , [27].

**Definición 2.19** ([23,27]). *Un framework infinitesimalmente rígido requiere que, dado un vector velocidad asignado a cada vértice del framework, la razón de cambio inicial de la distancia entre cada par de vértices unidos por una arista, sea cero.*

Considere dos vértices  $i, j$  unidos por una arista, a cada uno se le aplica un vector velocidad y se evaluará el cambio de la distancia entre ellos. La posición de cada vértice está dada por  $P_i$  y  $P_j$  respectivamente (Figura 2.7), y los vectores velocidad asignados son  $V_i$  y  $V_j$  respectivamente. Para entender cómo los vectores de velocidad cambian la longitud de la arista, se proyecta el vector velocidad en la arista, así esta proyección es el cambio al primer orden de la distancia  $P_j - P_i$ , para el vértice  $i$  este cambio es  $V_i \cdot (P_j - P_i)$ , y para el vértice  $j$ ,  $V_j \cdot (P_j - P_i)$ . Como se busca que no haya un cambio en la distancia, ambas proyecciones se igualan, desarrollando la igualdad se obtiene la siguiente condición [23,27].

$$(V_i - V_j) \cdot (P_j - P_i) = 0 \quad (2.7)$$



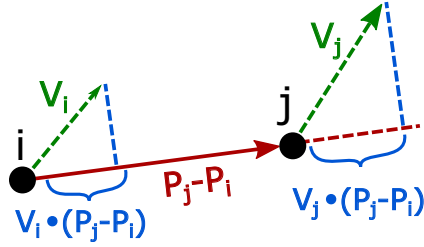


Figura 2.7: Cambio de la distancia  $P_j - P_i$  entre dos vértices debido a la acción de vectores velocidad  $V_i$  y  $V_j$ .

**Definición 2.20** ([23, 27]). *Un framework es infinitesimalmente rígido si las únicas soluciones de (2.7) se obtienen de movimientos de cuerpo rígido. En cualquier otro caso, es infinitesimalmente flexible.*

La condición (2.7) indica que dada una restricción en la distancia, pues ya se tiene un framework, se desea conocer si existe un conjunto de vectores velocidad para todos los vértices tal que las restricciones de distancia se mantengan, es decir, exista un movimiento de cuerpo rígido. La ecuación (2.7) puede escribirse para todos los vértices de forma matricial.

$$RV = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Donde  $R$  es la matriz de rigidez asociada a un framework  $\mathcal{F}$ , una matriz real de  $m$  renglones y  $dn$  columnas, que es el número de vértices multiplicado por la dimensión del conjunto de posiciones.  $P \in \mathbb{R}^{dn}$  es el vector de posiciones. Entonces cada renglón está asociado con una arista del grafo, y cada  $d$  columnas están asociados con un vértice del grafo, en  $\mathbb{R}^2$ , cada par de columnas; por lo tanto cada elemento de la matriz de rigidez es una componente de la distancia relativa entre dos nodos que comparten una arista; si no existe una arista entre ellos, el elemento es el cero, [27].

El renglón que corresponde a la arista  $(i, j) \in E$ , donde  $i < j$ , tiene la siguiente forma:

$$\left[ 0_d^T, \dots, (P_i - P_j)^T, \dots, 0_d^T, \dots, (P_j - P_i)^T, \dots, 0_d^T \right] \quad (2.9)$$

Los elementos con  $0_d^T$  se encuentran en columnas que corresponden a nodos diferentes de  $i, j$ , mientras que  $(P_i - P_j)^T$  se encuentra en la  $i$ -ésima columna y  $(P_j - P_i)^T$  se encuentra en la  $j$ -ésima columna. La matriz de rigidez es

conocida, pues se conoce el framework, resta encontrar el conjunto de movimientos infinitesimales que cumplan la condición (2.8), es decir el espacio nulo de la matriz de rigidez; los grados de libertad (GDL) del conjunto de velocidades es la dimensión del espacio nulo de  $R$ , es decir, la nulidad de  $R$ . Considerando el teorema rango nulidad para la matriz de rigidez:

$$\text{rank}(R) + \text{nullity}(R) = dn \quad (2.10)$$

El número de columnas de  $R$  se sabe que es  $dn$  y es fijo, el rango de  $R$  se entiende como el número de aristas útiles para la rigidez, y la nulidad de  $R$  se entiende como el número de GDL que el framework tiene, ó los movimientos infinitesimales válidos. Como se habla de un movimiento rígido, entonces el número de grados de libertad debe ser el espacio de movimientos rígidos, lo que da lugar a la siguiente condición, [27].

$$\text{nullity}(R) = \frac{d(d+1)}{2} \quad (2.11)$$

Entonces es posible encontrar el rango deseado de la matriz de rigidez.

**Teorema 2.11** ([22]). *Un framework genérico en  $\mathbb{R}^d$  es infinitesimalmente rígido si y sólo si*

$$\text{rank}(R) = dn - \frac{d(d+1)}{2} \quad (2.12)$$

Entonces,  $\text{rank}(R) = 2n - 3$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $\text{rank}(R) = 3n - 6$  en  $\mathbb{R}^3$ .

**Lema 2.12** ([22]). *Todo framework infinitesimalmente rígido, es rígido.*

En general, la rigidez no implica rigidez infinitesimal, pero la rigidez infinitesimal implica rigidez.

Se ha discutido que un framework puede existir en un espacio  $d$ -dimensional, sin embargo para el desarrollo de esta tesis serán de utilidad los resultados de Henneberg y Laman [22], los cuales se encuentran en el plano  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.21** ([22]). *Un grafo  $G$  es un grafo de Laman si  $m = 2n - 3$  y todo subconjunto de  $k$  vértices abarca a lo más  $2k - 3$  aristas.*

**Teorema 2.13** ([29]). *Un framework en el plano es mínimamente rígido si y sólo si su grafo asociado es un grafo de Laman.*

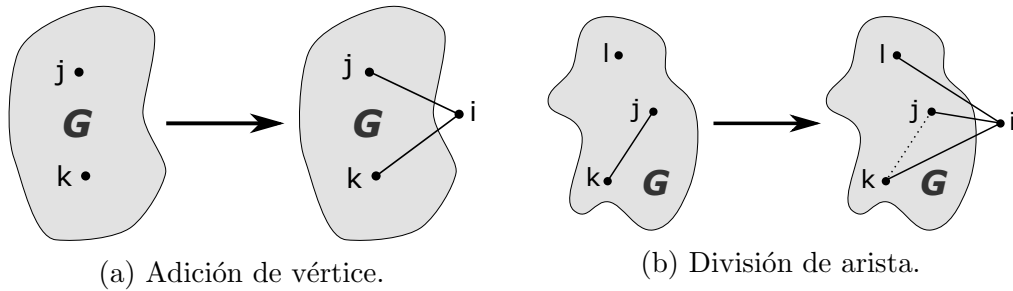


Figura 2.8: Las operaciones de Henneberg permiten añadir un vértice a un grafo rígido, manteniendo rigidez.

**Teorema 2.14** ([29]). *Un framework en el plano es mínimamente rígido sí y sólo si puede construir a partir de dos vértices unidos por una arista y realizando las siguientes dos operaciones:*

1. **Adición de vértice.** *Un nuevo vértice es conectado a través de dos nuevas aristas a dos vértices ya existentes en un grafo mínimamente rígido.*
2. **División de arista.** *Un nuevo vértice se añade en un arista existente, por lo tanto dividiendo la arista en dos, y luego conectándose a un tercer vértice ya existente. Esto también puede verse como eliminar una arista y agregar tres aristas nuevas, dos conectadas a los vértices de la arista eliminada y una tercera a un tercer vértice existente en un grafo mínimamente rígido.*

A estas operaciones se les conoce como: Operaciones de Henneberg.

La primera operación se ilustra en la Figura 2.8a, sean  $j, k$  dos vértices distintos de un grafo mínimamente rígido  $G$ , la operación de adición de vértice añade el vértice  $i$  y lo conecta con  $j$  y  $k$ . Esta operación preserva rigidez mínima y también puede realizarse de forma inversa, obteniendo un framework mínimamente rígido más pequeño.

La segunda operación se muestra en la Figura 2.8b, sean tres vértices  $i, k, l$  de un grafo mínimamente rígido  $G$ , tal que existe una arista entre  $j$  y  $k$ , la operación de división de arista elimina la arista  $(j, k)$  y añade el vértice  $i$ , conectándolo a  $j, k$  y  $l$ . La operación inversa no es tan intuitiva y debe realizarse cuidando preservar la rigidez mínima del grafo. De los teoremas anteriores se puede concluir que un grafo de Laman es mínimamente rígido y

es el resultado de una serie de operaciones de Henneberg, estas condiciones son equivalentes para grafos en el plano, [22, 26, 29].

## 2.5. Análisis de estabilidad por Lyapunov

En esta sección se considerarán definiciones y teoremas esenciales en el análisis de estabilidad de Lyapunov, que serán usados frecuentemente en el resto de la tesis. Estos provienen de [19] y [30].

**Definición 2.22** ([19]). *Considere el sistema invariante en el tiempo d-dimensional*

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.13)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^d$  es el vector de estados, y  $f$  es localmente Lipschitz en un dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ .  $\bar{x} \in \mathcal{D}$  es llamado un punto de equilibrio del sistema si  $f(\bar{x}) = 0$

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que  $f(x)$  satisface  $f(0) = 0$ , y estudiar la estabilidad del origen  $x = 0$ .

**Definición 2.23** ([19]). *Sea  $f(x)$  una función localmente Lipschitz definida en un dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ , que contiene al origen, y  $f(0) = 0$ . El punto de equilibrio  $x = 0$  de  $\dot{x} = f(x)$  es:*

- Estable si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  (dependiente en  $\epsilon$ ) tal que

$$\|x\|(0) < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.14)$$

- Inestable si no es estable.
- Asintóticamente estable si es estable y  $\delta$  puede ser elegida tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.15)$$

**Teorema 2.15** ([19]). *Sea  $\mathcal{V}(x)$  una función continua y diferenciable definida sobre  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ , que contiene al origen, y  $f(0) = 0$ . Sea  $\mathcal{V}(x)$  una función continua diferenciable definida sobre  $\mathcal{D}$  tal que*

$$\mathcal{V}(0) = 0 \text{ y } \mathcal{V}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \text{ con } x \neq 0 \quad (2.16)$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad (2.17)$$

Entonces, el origen es un punto de equilibrio estable de  $\dot{x} = f(x)$ . Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \forall x \in \mathcal{D} \text{ con } x \neq 0 \quad (2.18)$$

entonces el origen es asintóticamente estable. Además, si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^d$ , (2.16) y (2.18) se mantienen para todo  $x \neq 0$ , y

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow \mathcal{V}(x) \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

es decir, es radialmente no acotada, entonces el origen es globalmente asintóticamente estable.

Una forma más fuerte de estabilidad que la asintótica, es la estabilidad exponencial. Es decir, si el punto de equilibrio es exponencialmente estable, entonces es asintóticamente estable. Lo opuesto no es necesariamente cierto.

**Teorema 2.16** ([19]). *Sea  $f(x)$  una función localmente Lipschitz definida sobre un dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ , que contiene al origen, y  $f(0) = 0$ . Sea  $\mathcal{V}(x)$  una función continua diferenciable definida sobre  $\mathcal{D}$  tal que*

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq \mathcal{V}(x) \leq \alpha_2 \|x\|^a \quad (2.20)$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq -\alpha_3 \|x\|^a \quad (2.21)$$

para todo  $x \in \mathcal{D}$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $a$  son constantes escalares reales positivas. Entonces, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable de  $\dot{x} = f(x)$ . Si estas condiciones se mantienen globalmente, el origen será globalmente exponencialmente estable.

**Definición 2.24** ([19]). *Una función escalar continua  $\alpha(r)$ , definida por  $r \in [0, a)$  es una función clase  $\kappa$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Es una función  $\kappa_\infty$  si es definida para todo  $r \geq 0$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  conforme  $r \rightarrow \infty$ .*

A continuación se definirá estabilidad entrada-estado (Input-to-State Stability, ISS)

**Teorema 2.17** ([19, 30]). *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.22)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^d$  es el vector de estados del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  es una entrada acotada y  $f$  es localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ . Sea  $\mathcal{V}(x)$  una función con

primeras derivadas continuas tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $u \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\alpha_1(\|x\|) \leq \mathcal{V}(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(x, u) \leq -W_3(\|x\|), \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) \quad (2.24)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\kappa_\infty$ ,  $\rho$  es una función clase  $\kappa$  y  $W_3$  es una función continua positiva definida en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces el sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  es ISS.

**Corolario 2.17.1** ([30]). Para el sistema (2.22), sea  $\mathcal{V}(x)$  una función con primeras derivadas continuas tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq \mathcal{V}(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(x) \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma(\|u\|) \quad (2.26)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha$  son funciones clase  $\kappa_\infty$  y  $\sigma$  es una función clase  $\kappa$ . Entonces el sistema (2.22) es ISS.

A la función que satisface las condiciones (2.23) y (2.24) o (2.25) y (2.26) se le llama función *ISS-Lyapunov* [30].

**Teorema 2.18** ([30]). El sistema (2.22) es ISS si y sólo si admite una función *ISS-Lyapunov*.

**Lema 2.19** ([30]). Si los sistemas  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$  y  $\dot{x}_2 = f_2(x_2, u)$  son ISS, entonces la conexión en cascada

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, u) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Es ISS. En consecuencia, si  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$  es ISS y el origen de  $\dot{x}_2 = f_2(x_2)$  es globalmente asintóticamente estable, entonces el origen de la conexión en cascada

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

es globalmente asintóticamente estable.

**Teorema 2.20** ([31]). Un sistema es ISS si y sólo si es robustamente estable.

Finalmente se presenta el siguiente lema sobre convergencia en tiempo finito de un sistema.

**Lema 2.21** ([32]). . Considere el sistema  $\dot{x} = f(x)$  con  $f(0) = 0, x \in \mathbb{R}^n$ , donde  $f(x)$  es una función continua en el vecindario abierto  $U \in \mathbb{R}$  del origen. Suponga que existe una función continua positiva definida  $V(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , escalares reales  $c > 0$  y  $0 < \alpha < 1$  y un vecindario abierto  $U_0 \subset U$  del origen, tal que  $\dot{V}(x) \leq -cV(x)^\alpha, x \in U_0 - \{0\}$ , entonces  $V(x)$  se acerca a 0 en tiempo finito. Además, la función  $T$  que dicta el tiempo de estabilización satisface:  $T \leq (V(x(0))^{1-\alpha}/c(1-\alpha))$ .

## 2.6. Control y diferenciador por modos deslizantes.

El control por modos deslizantes es ampliamente usado por las ventajas que presenta de convergencia en tiempo finito y robustez a incertidumbres o variaciones en el sistema, así como a perturbaciones externas; además de varios modos de operación tales como regulación, control de trayectoria, seguimiento de modelo y observación. Ha sido ampliamente estudiado en la literatura desde puntos de vista prácticos y teóricos, [33–36].

### 2.6.1. Algoritmo Super Twisting (STA)

El uso de modos deslizantes de orden superior permite mantener las características de los modos deslizantes de primer orden, y de ser apropiadamente diseñados, pueden reducir o eliminar el chattering [37]. Un importante algoritmo para modos deslizantes de segundo orden es el algoritmo de Super Twisting, presentado a continuación.

**Teorema 2.22** ([37]). Considere el sistema

$$\dot{x}_1 = -k_1|x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + x_2 \quad (2.29)$$

$$\dot{x}_2 = -k_2 \text{sign}(x_1) \quad (2.30)$$

donde  $x_i$  son variables de estado escalares. Las soluciones son trayectorias en el sentido de Filippov. Con la función candidata de Lyapunov

$$\mathcal{V}(x) = 2k_2|x_1| + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2} \left( k_1|x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) - x_2 \right)^2 \quad (2.31)$$

Sean  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$ , entonces todas las trayectorias del sistema (2.29), (2.30) convergen en tiempo finito al origen  $x = 0$ , en tiempo  $t(x_0)$  menor a  $T = 2\nu^{\frac{1}{2}}(x_0)/\gamma$ , donde  $x_0$  es el estado inicial y  $\gamma$  es una constante que depende de las ganancias  $k_1$  y  $k_2$ . Mas aún,  $\mathcal{V}$  (2.31) es una función de Lyapunov fuerte que asegura estas propiedades.

### 2.6.2. Algoritmo Super Twisting Modificado

En [37] se propone un algoritmo Super Twisting que combina las ventajas de términos que corrección lineales y no lineales.

**Teorema 2.23.** *Considere el sistema*

$$\dot{x}_1 = -k_1|x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) - k_3x_1 + x_2 \quad (2.32)$$

$$\dot{x}_2 = -k_2 \text{sign}(x_1) - k_4x_1 \quad (2.33)$$

donde  $x_i$  son variables de estado escalares. El origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema (2.32), (2.33), que es globalmente asintóticamente estable si  $k_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$  y  $4k_2k_4 > (8k_2 + 9k_1^2)k_3^2$ . Bajo estas condiciones

$$\mathcal{V}(x) = 2k_2|x_1| + k_4x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2} \left( k_1|x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + k_3x_1 - x_2 \right)^2 \quad (2.34)$$

es una función continua de Lyapunov que asegura estas propiedades. Mas aún, las trayectorias convergen en tiempo finito al origen donde el tiempo de convergencia está acotado por  $T^* = 2\nu^{\frac{1}{2}}(x_0)/\gamma_1$ , donde  $x_0$  es el estado inicial y  $\gamma_1$  es una constante que depende de las ganancias  $k_i$ .

### 2.6.3. Algoritmo Super Twisting Saturado (SSTA)

Al aplicar una ley de control integral a una planta con saturación a la entrada, se puede generar un *overshoot* de gran amplitud y bajo decaimiento, a eso se le llama *integral windup*, [38]. Este overshoot no deseado resulta de una sobreacción de la parte integral del controlador, y al estar la realimentación interrumpida durante la saturación del actuador, la planta puede desarrollar un comportamiento en lazo abierto. Para evitar este comportamiento en el STA, es posible usar una ley de control conmutada STA Saturado (SSTA) que proporcionará estabilidad al sistema en lazo cerrado.

Considere el sistema

$$\dot{x} = u \quad (2.35)$$



donde  $x \in \mathbb{R}$  es el estado y  $u \in \mathbb{R}$  la entrada de control. La entrada de control del sistema es saturada, tal que  $|u| \leq \rho$ . En [38] se propone la siguiente ley de control conmutada que lleva al estado  $x$  al origen en tiempo finito.

$$\begin{bmatrix} u \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\rho \operatorname{sign}(x) \\ 0, z(0) = 0 \end{bmatrix} & \text{si } s = 0 \\ \begin{bmatrix} -k_1|x|^{1/2} \operatorname{sign}(x) + z \\ -k_2 \operatorname{sign}(x), z(0) = 0 \end{bmatrix} & \text{si } s = 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

Un detector de comportamiento define el valor binario de  $s$ , que es puesto a  $s = 0$  para toda condición inicial  $x(0) = x_{10}$  fuera de un vecindario del origen  $|x_{10}| > \delta$ , donde  $\delta$  es una constante positiva. La variable se ajusta a  $s = 1$  si la trayectoria del estado entra (o inicia) en un vecindario del origen  $|x|(t) \leq \delta$ , y mantiene este valor para todo tiempo futuro, incluso si el estado toma un valor  $|x|(t) > \delta$ .

Cuando la ley de control se encuentra en la condición  $s = 0$ , el sistema (2.35) con el control (2.36) tiene la forma:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = -\rho \operatorname{sign}(x) \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Note que en este estado, el integrador se mantiene en cero.

Para la condición  $s = 1$ , el sistema (2.35) con el control (2.36) tiene la forma:

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x} = -k_1|x|^{1/2} \operatorname{sign}(x) + z \\ \dot{z} = -k_2 \operatorname{sign}(x) \end{cases} \quad (2.38)$$

Con un diseño apropiado [38], el estado  $x$  converge a cero en tiempo finito.

#### 2.6.4. Diferenciador de primer orden por modos desli- zantes

Sea una señal  $f(t)$  una función medible y localmente acotada definida en  $[0, \infty)$ , que consiste de una señal base que tiene derivada con constante Lipschitz  $C > 0$  y una componente de ruido. Para diferenciar la señal base

desconocida, considere la ecuación auxiliar  $\dot{x} = u$ . Aplicando el algoritmo de Super Twisting para mantener  $x - f(t) = 0$ , se tiene [34, 39]

$$u = u_1 - k_1|x - f(t)|^{1/2} \text{sign}(x - f(t)) \quad (2.39)$$

$$\dot{u}_1 = -k_2 \text{sign}(x - f(t)) \quad (2.40)$$

donde  $k_1, k_2 > 0$ . Y  $u(t)$  es la salida del diferenciador, es decir, la derivada de la señal  $f(t)$ .

### 2.6.5. Diferenciador de segundo orden por modos deslizantes

Sea una señal  $f(t)$  definida en  $[0, \infty)$ , cuya segunda derivada tiene una constante de Lipschitz conocida  $L > 0$ . El problema de encontrar estimaciones en tiempo real de  $\dot{f}(t), \ddot{f}(t), \dots, f^{(k)}(t)$ , las cuales son exactas en ausencia de ruido, se puede resolver con el diferenciador [34, 40]

$$\dot{z}_0 = -k_1 L^{1/3} |z_0 - f(t)|^{2/3} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \quad (2.41)$$

$$\dot{z}_1 = -k_2 L^{1/2} |z_1 - \dot{z}_0|^{1/2} \text{sign}(z_1 - \dot{z}_0) + z_2 \quad (2.42)$$

$$\dot{z}_2 = -k_3 L \text{sign}(z_2 - \dot{z}_1) \quad (2.43)$$

donde  $k_1, k_2, k_3 > 0$ . Y  $z_2$  es la salida del diferenciador, es decir, la segunda derivada de la señal  $f(t)$ .



---

# Modelo matemático de la aeronave

---

Recuerda chico japonés, los aviones no son herramientas de guerra, tampoco son para ganar dinero... Los aviones son sueños hermosos, sueños malditos, esperando a que el cielo se los trague.

---

Hayao Miyazaki, *Se levanta el viento* (2013)

Una aeronave de ala fija es un vehículo no holonómico de 6 grados de libertad, sobre el cual actúan fuerzas gravitacionales, aerodinámicas y propulsivas que le permiten desplazarse de forma controlada en el espacio. En este capítulo se presentan elementos necesarios para desarrollar el modelo matemático de un vehículo aéreo de ala fija, y sus ecuaciones de movimiento, seguido de la caracterización aerodinámica de la aeronave simulada. Lo abordado en las siguientes secciones ha sido ampliamente estudiado en la literatura, las principales fuentes para este trabajo son [41–43], sin embargo también son de utilidad las siguientes referencias [44–51].

### 3.1. Marcos de referencia

Se asume que el marco de referencia fijo en tierra es plano y no rota, una suposición válida para vehículos aéreos pequeños.

**Marco inercial  $\Sigma$**  Sistema coordenado fijo en tierra, con su origen en el lugar de inicio del vuelo, o una posición conveniente (Figura 3.1), el vector unitario  $\mathbf{i}$  está orientado al norte,  $\mathbf{j}$  al este, y  $\mathbf{k}$  hacia el centro de la tierra, o hacia abajo. A este sistema se le conoce como *Norte-Este-Abajo* (North-East-Down, NED). Es común referirse al norte como dirección inercial  $x$ , al este como  $y$  y hacia abajo como  $z$ .

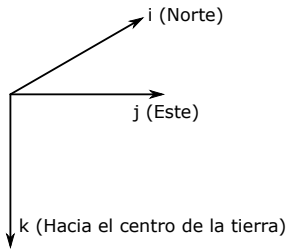


Figura 3.1: Marco inercial  $\Sigma$ .

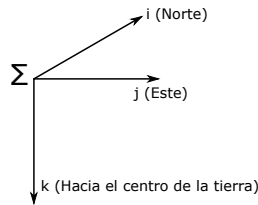
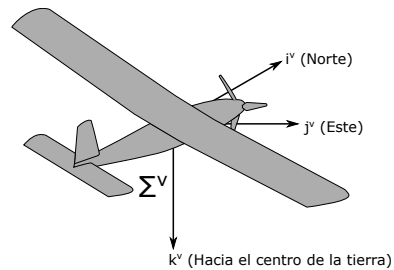


Figura 3.2: Marco vehículo  $\Sigma^v$  relativo al marco inercial.



**Marco vehículo  $\Sigma^v$**  Su origen se encuentra en el centro de gravedad (CG) del vehículo. Sin embargo, los ejes de  $\Sigma^v$  se encuentran alineados con el marco inercial  $\Sigma$ , como se ilustra en la Figura 3.2.

**Marco vehículo-1  $\Sigma^{v1}$**  Su origen se encuentra en el CG de la aeronave, consiste en una rotación en dirección *positiva* alrededor de  $\mathbf{k}^v$ , es decir, siguiendo la regla de la mano derecha alrededor de  $\mathbf{k}^v$ , un ángulo  $\psi$ , el *ángulo de guiñada*. Figura 3.3.

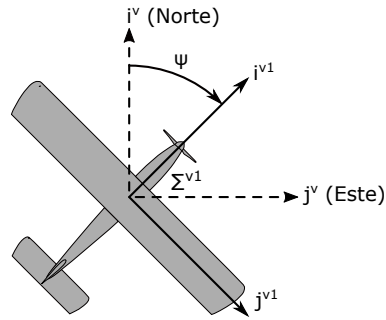


Figura 3.3: Marco vehículo-1.

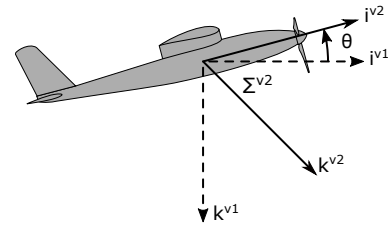


Figura 3.4: Marco vehículo-2.

**Marco vehículo-2**  $\Sigma^{v2}$  Su origen se encuentra en el CG del vehículo y se obtiene al rotar  $\Sigma^{v1}$  de forma derecha alrededor del eje  $j^{v1}$  un ángulo  $\theta$ , el *ángulo de cabeceo*.

**Marco cuerpo**  $\Sigma^b$  Se obtiene al realizar una rotación derecha de  $\Sigma^{v2}$  alrededor de  $i^{v2}$  un ángulo  $\phi$ , el *ángulo de alabeo*, también conocido como *ángulo de baqueo*; su origen se encuentra en el CG.

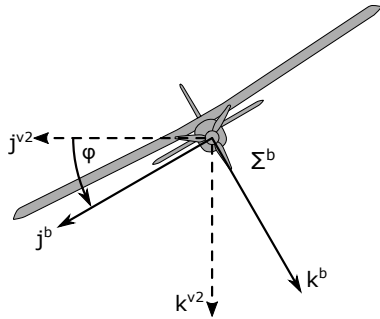


Figura 3.5: Marco cuerpo.

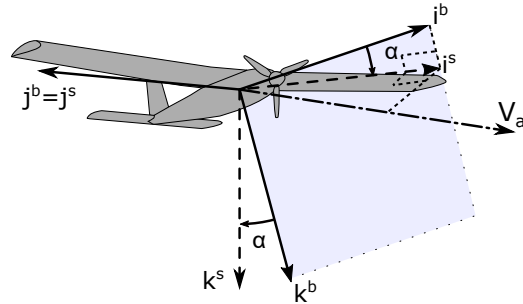


Figura 3.6: Marco estabilidad.

**Marco de estabilidad**  $\Sigma^s$  La velocidad de la aeronave relativa a la masa de aire en que se encuentra se denomina *vector de velocidad aerodinámica*, denotado por  $\mathbf{V}_a$ , con magnitud  $V_a$ . El ángulo entre el ala y  $\mathbf{V}_a$  se llama *ángulo de ataque*, denotado por  $\alpha$ . El ángulo de ataque está definido como una rotación izquierda alrededor de  $j^b$  (Figura 3.6). El ángulo de ataque es positivo para una rotación derecha de  $i^s$  a  $i^b$ .

**Marco viento**  $\Sigma^w$  El ángulo entre el vector de velocidad aerodinámica y el plano  $\mathbf{i}^b - \mathbf{k}^b$  es llamado *ángulo de deslizamiento*, también conocido como *ángulo de sideslip*, denotado por  $\beta$ . Como se muestra en la Figura 3.7, el marco viento se obtiene al realizar una rotación derecha alrededor de  $\mathbf{k}^s$  un ángulo  $\beta$ . El vector  $\mathbf{i}^w$  queda alineado con el vector  $\mathbf{V}_a$ .

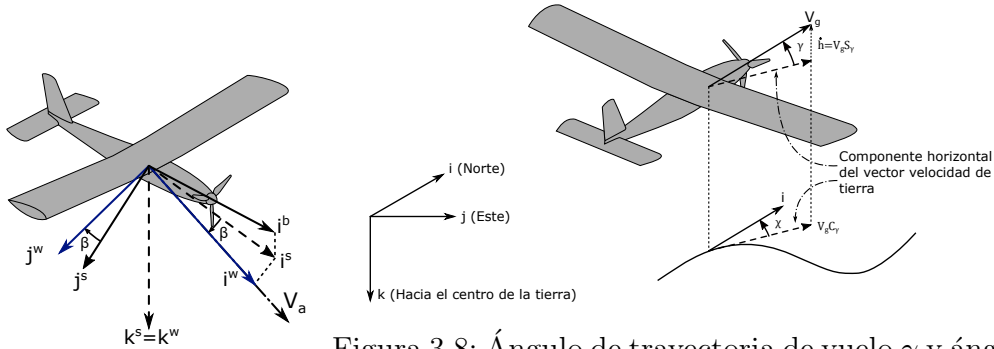


Figura 3.7: Marco viento. Figura 3.8: Ángulo de trayectoria de vuelo  $\gamma$  y ángulo de curso  $\chi$ .  $S_\gamma$  y  $C_\gamma$  denotan a  $\sin(\gamma)$  y  $\cos(\gamma)$  respectivamente.

### 3.1.1. Velocidad aerodinámica, Velocidad del viento y velocidad de tierra

La velocidad de la aeronave relativa al aire circundante  $\mathbf{V}_a$  y la velocidad de tierra, que es la velocidad respecto al marco fijo inercial, denotada por  $\mathbf{V}_g$ , están relacionadas por la expresión

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_g - \mathbf{V}_w \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{V}_w$  es la velocidad del viento relativa al marco inercial  $\Sigma$ .  $\mathbf{V}_g$  puede ser expresada en el marco cuerpo como  $\mathbf{V}_g^b = [u \ v \ w]^T$  donde  $\mathbf{V}_g^b$  es el *vector de velocidad de la aeronave con respecto al marco inercial expresado en el marco cuerpo*, indicado con el superíndice  $b$ . Análogamente, la velocidad del viento en el marco cuerpo está dada por  $\mathbf{V}_w^b = [u_w \ v_w \ w_w]^T$ . Denotando con  $u_r, v_r$  y  $w_r$  a las componentes de la velocidad aerodinámica en el marco cuerpo se obtiene la siguiente expresión para la velocidad aerodinámica en el

marco cuerpo, [41]

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - u_w \\ v - v_w \\ w - w_w \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Note que  $u_r$ ,  $v_r$  y  $w_r$  son las velocidades a usar cuando se calculan las fuerzas y momentos aerodinámicos actuando sobre la aeronave. Con estos resultados es posible expresar las componentes de la velocidad aerodinámica respecto al marco cuerpo en términos de la magnitud de la velocidad aerodinámica, ángulo de ataque y ángulo de deslizamiento

$$\mathbf{V}_a^b = \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{bmatrix} = V_a \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Invirtiendo estas relaciones se obtiene

$$V_a = \sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2} \quad (3.4)$$

$$\alpha = \text{atan} \left( \frac{w_r}{u_r} \right) \quad (3.5)$$

$$\beta = \text{asin} \left( \frac{v_r}{\sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}} \right) \quad (3.6)$$

### 3.1.2. Triángulo de viento

La dirección del vector velocidad de tierra relativo a un marco inercial es descrito usando dos ángulos, el *ángulo de curso*  $\chi$  y el *ángulo de trayectoria de vuelo*  $\gamma$ . La Figura 3.8 ilustra cómo se definen estos ángulos.  $\gamma$  se define como el ángulo entre el plano horizontal y el vector velocidad de tierra  $\mathbf{V}_g$ , mientras  $\chi$  es el ángulo entre la proyección de la velocidad de tierra en el plano horizontal y el eje  $\mathbf{i}$  norte.

La relación dada por la ecuación (3.1) se llama *triángulo de viento* (Figuras 3.9 y 3.10). El *ángulo de deriva*  $\chi_c$ , se define como la diferencia ente los ángulos de curso y de rumbo  $\chi_c \triangleq \chi - \psi$ . Cuando existe una componente hacia abajo del viento, el ángulo desde el plano inercial horizontal a  $\mathbf{V}_a$  es el *ángulo de trayectoria de vuelo referido a la masa de aire*, denotado por  $\gamma_a$ . La relación entre  $\gamma_a$ , el ángulo de ataque y el ángulo de cabeceo está dada por  $\gamma_a = \theta - \alpha$ . En la ausencia de viento,  $\gamma_a = \gamma$ .



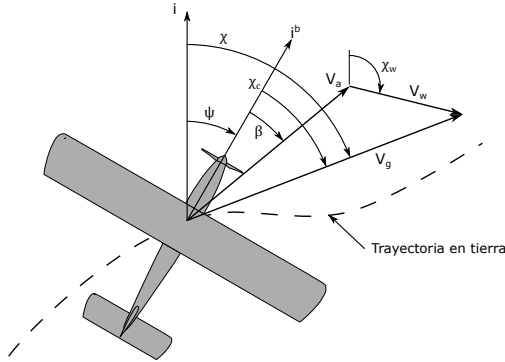


Figura 3.9: Proyección del triángulo de viento en el plano horizontal y los ángulos correspondientes.

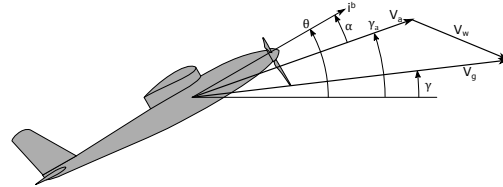


Figura 3.10: Proyección del triángulo de viento en el plano vertical y los ángulos correspondientes.

El triángulo de viento puede ser expresado en el marco inercial como, [41]

$$V_g \begin{bmatrix} C_\chi C_\gamma \\ S_\chi C_\gamma \\ -S_\gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{bmatrix} = V_a \begin{bmatrix} C_\psi C_{\gamma_a} \\ S_\psi C_{\gamma_a} \\ -S_{\gamma_a} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Si los efectos del viento son despreciables, es decir,  $\mathbf{V}_w = 0$ , se tiene que  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_g$ ,  $u = u_r$ ,  $v = v_r$ ,  $w = w_r$ ,  $\psi = \chi$  (asumiendo que  $\beta = 0$ ), y  $\gamma = \gamma_a$ .

## 3.2. Fuerzas y Momentos

Para poder obtener un modelo matemático representativo de la aeronave, esta se considera un cuerpo rígido, es decir, que no sufre de deformaciones. Se emplean doce variables de estado para definir la dinámica de la aeronave en el espacio mostradas en la Tabla 3.1 [41], e ilustradas en la Figura 3.11, se denota a la altitud como  $h = -p_d$ . La distribución de presión en el ala puede ser modelada como una combinación de fuerzas y un momento, una fuerza de levantamiento  $F_{lift}$ , una fuerza de arrastre  $F_{drag}$  y un momento  $\mathbf{m}$  que actúan en el *centro aerodinámico* del ala.

$$F_{lift} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_L; \quad F_{drag} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_D; \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c C_m \quad (3.8)$$

donde  $C_L$ ,  $C_D$  y  $C_m$  son coeficientes aerodinámicos adimensionales,  $S$  es la superficie del ala en vista en planta,  $c$  es la cuerda media del ala, y  $\rho$  es la

Tabla 3.1: Variables de estado para las ecuaciones de movimiento de una aeronave.

Variable	Descripción
$p_n$	Posición inercial norte del vehículo en el eje $\mathbf{i}$ en $\Sigma$ .
$p_e$	Posición inercial este del vehículo en el eje $\mathbf{j}$ en $\Sigma$ .
$p_d$	Posición inercial hacia abajo del vehículo (negativo de la altitud) en el eje $\mathbf{k}$ en $\Sigma$ .
$u$	Velocidad en el marco cuerpo medida en el eje $\mathbf{i}^b$ en $\Sigma^b$ .
$v$	Velocidad en el marco cuerpo medida en el eje $\mathbf{j}^b$ en $\Sigma^b$ .
$w$	Velocidad en el marco cuerpo medida en el eje $\mathbf{k}^b$ en $\Sigma^b$ .
$\phi$	Ángulo de alabeo (banqueo) con respecto a $\Sigma^{v2}$ .
$\theta$	Ángulo de cabeceo con respecto a $\Sigma^{v1}$ .
$\psi$	Ángulo de guiñada con respecto a $\Sigma^v$ .
$p$	Velocidad de alabeo (banqueo) medida en el eje $\mathbf{i}^b$ en $\Sigma^b$ .
$q$	Velocidad de cabeceo medida en el eje $\mathbf{j}^b$ en $\Sigma^b$ .
$r$	Velocidad de guiñada medida en el eje $\mathbf{k}^b$ en $\Sigma^b$ .

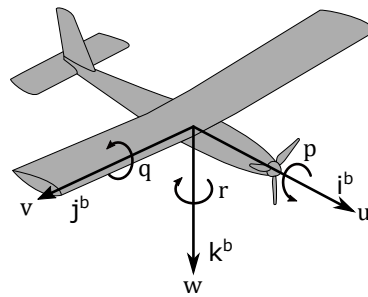


Figura 3.11: Definición de los ejes de movimiento en la aeronave, así como las velocidades  $(u, v, w)$  y momentos  $(p, q, r)$  en estos ejes.

densidad del aire. En general, las fuerzas y momentos aerodinámicos están influenciados por múltiples factores, entre ellos, el número de Reynolds y el número de Mach, que para vehículos pequeños, pueden considerarse aproximadamente constantes.

La aeronave es capaz de maniobrar gracias a las superficies de control que modifican las fuerzas y momentos aerodinámicos, la configuración estándar consiste en elevador, alerones y timón. La Figura 3.12 muestra la configuración estándar y la convención de signos para el giro de las superficies de control, estos están denotados por  $\delta_a$ ,  $\delta_e$  y  $\delta_r$  para los alerones, elevador y timón respectivamente. Es posible asumir que el acoplamiento existente entre las variables longitudinales y laterales es pequeño, por lo que el modelado de las fuerzas y momentos se separa en *longitudinal* y *lateral*, [41, 42, 46].

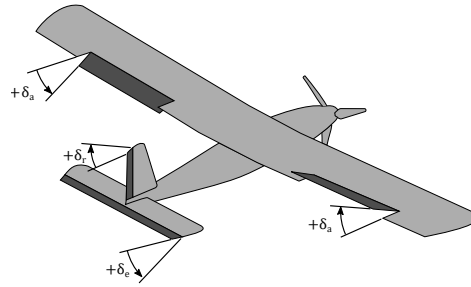


Figura 3.12: Superficies de control y sus respectivos movimientos  $\delta$ ,  $\delta_e$  y  $\delta_r$ , para una configuración estándar.

### 3.2.1. Aerodinámica longitudinal

Las fuerzas y momentos longitudinales provocan un movimiento del cuerpo en el plano  $\mathbf{i}^b - \mathbf{k}^b$ , conocido como plano de cabeceo. Estas son las fuerzas de arrastre y levantamiento, así como el momento de cabeceo, alineadas con el marco estabilidad. Estas fuerzas están principalmente influenciadas por el ángulo de ataque, velocidad de cabeceo y la acción del elevador  $\delta_e$ , en general son no lineales, pero para ángulos de ataque pequeños pueden ser modeladas con suficiente precisión usando aproximaciones lineales. Realizando una aproximación lineal por series de Taylor en las fuerzas y momento, y adimen-

sionalizando las derivadas parciales se obtienen las siguientes ecuaciones [41]

$$F_{lift} = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left( C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_q}\frac{c}{2V_a}q + C_{L_{\delta_e}}\delta_e \right) \quad (3.9)$$

$$F_{drag} = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left( C_{D_0} + C_{D_\alpha}\alpha + C_{D_q}\frac{c}{2V_a}q + C_{D_{\delta_e}}\delta_e \right) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S c \left( C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_q}\frac{c}{2V_a}q + C_{m_{\delta_e}}\delta_e \right) \quad (3.11)$$

donde  $C_{L_0}$  es el valor del  $C_L$  cuando  $\alpha = q = \delta_e = 0$ .  $C_{L_\alpha}$  y  $C_{L_q}$  se denominan comúnmente como *derivadas de estabilidad*, mientras que  $C_{L_{\delta_e}}$  es una *derivada de control*. Esta aproximación permite estimar el cambio de una variable debido al cambio en las variables de estado o las entradas de control [41, 46]. Las derivadas de estabilidad miden el cambio en fuerzas y momentos debido al cambio en las condiciones de vuelo, mientras las derivadas de control indican el cambio debido a la acción de una superficie de control. De forma similar a  $C_{L_0}$  se definen  $C_{D_0}$  y  $C_{m_0}$ .

### 3.2.2. Aerodinámica lateral

Las fuerzas y momentos aerodinámicos laterales provocan un movimiento traslacional a lo largo del eje  $\mathbf{j}^b$ , así como rotaciones en alabeo y guiñada que resultan en cambios direccionales en el vuelo de la aeronave. La dinámica lateral está principalmente influenciada por el ángulo de deslizamiento  $\beta$ , las velocidades de alabeo y guiñada, y las acciones de alerones y timón,  $\delta_a, \delta_r$  respectivamente. Denotando a la fuerza lateral como  $f_y$ , a los momentos de cabeceo y alabeo como  $l$  y  $n$  respectivamente, y realizando una aproximación lineal por series de Taylor junto a una adimensionalización de los coeficientes aerodinámicos se obtienen las siguientes expresiones para la fuerza lateral y momentos de alabeo y cabeceo [41]

$$f_y = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \left( C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_p}\frac{b}{2V_a}p + C_{Y_r}\frac{b}{2V_a}r + C_{Y_{\delta_a}}\delta_a + C_{Y_{\delta_r}}\delta_r \right) \quad (3.12)$$

$$l = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b \left( C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_p}\frac{b}{2V_a}p + C_{l_r}\frac{b}{2V_a}r + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r \right) \quad (3.13)$$

$$n = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b \left( C_{n_0} + C_{n_\beta}\beta + C_{n_p}\frac{b}{2V_a}p + C_{n_r}\frac{b}{2V_a}r + C_{n_{\delta_a}}\delta_a + C_{n_{\delta_r}}\delta_r \right) \quad (3.14)$$

donde  $b$  es la envergadura de la aeronave. El coeficiente  $C_{Y_0}$  es el valor del coeficiente lateral de fuerza  $C_Y$  cuando  $\beta = p = r = \delta_a = \delta_r = 0$ . Para aeronaves que son simétricas en el plano  $\mathbf{i}^b - \mathbf{k}^b$ ,  $C_{Y_0}$  comúnmente es cero; los coeficientes  $C_{l_0}$  y  $C_{n_0}$  se definen de forma similar y normalmente también son cero para aeronaves simétricas.

### 3.2.3. Coeficientes aerodinámicos

Los coeficientes  $C_{m_\alpha}, C_{l_\beta}, C_{n_\beta}, C_{m_q}, C_{l_p}$  y  $C_{n_r}$  son coeficientes de estabilidad, pues determinan la estabilidad dinámica y estática de la aeronave, si esta es perturbada de una condición de vuelo nominal y los momentos resultantes tienden a restaurar esta condición inicial, se dice que la aeronave es estáticamente estable, [41].

Los coeficientes aerodinámicos  $C_{m_{\delta_e}}, C_{l_{\delta_a}}$ , y  $C_{n_{\delta_r}}$  son las *derivadas de control primarias*, generando los momentos asociados con las superficies de control.  $C_{l_{\delta_r}}$  y  $C_{n_{\delta_a}}$  son *derivadas de control cruzado*, pues definen momentos que ocurren fuera del eje dada una acción de una superficie, [41].

### 3.2.4. Fuerza de propulsión

En la literatura se han propuesto varios modelos para el empuje que genera una hélice al girar y moverse a través del aire [41, 42, 49, 52–55], sin embargo, algunos de estos han sido obtenidos para aeronaves con motor alternativo o turboprop, donde es posible conocer la potencia que el motor imparte a la hélice y se asume que se conoce la eficiencia de la hélice; otros aplican la ecuación de Bernoulli al flujo de aire conociendo la velocidad de entrada y salida del aire en la hélice, un parámetro que no necesariamente se conoce en una aeronave pequeña; también es posible realizar un análisis de la fuerza de levantamiento que genera cada pala de la hélice de acuerdo a su perfil aerodinámico y geometría, así como el efecto que tiene el número de palas en la eficiencia de la hélice, además se utilizan gráficas y parámetros sobre la eficiencia de la hélice respecto a variaciones en velocidad del aire y altitud. La información que estos métodos requieren no siempre está disponible en aeronaves pequeñas con motores eléctricos, donde además se usan hélices para las cuales el fabricante proporciona poca o nula información. Entre las estimaciones encontradas en la literatura resaltan [55] para motores alternativos y turboprop, que propone una ecuación para empuje de la hélice, y una corrección para velocidades pequeñas; también es relevante [41] que

presenta un modelo simplificado para aeronaves pequeñas en función de las dimensiones de la hélice, velocidad aerodinámica, y un parámetro del motor a determinar experimentalmente.

Para este trabajo se considera una estimación empírica para motores eléctricos en aeronaves pequeñas a radio control [56], dada por:

$$f_p = 4.392399 \times 10^{-8} \cdot \text{RPM} \frac{\mathfrak{d}^{3.5}}{\sqrt{\mathfrak{p}}} [(4.23333 \times 10^{-4} \cdot \text{RPM} \cdot \mathfrak{p}) - V_a] \quad (3.15)$$

donde RPM, son las revoluciones por minuto del motor,  $V_a$  la velocidad aerodinámica,  $\mathfrak{d}$  es el diámetro de la hélice, y  $\mathfrak{p}$  el paso de la hélice. Esta ecuación fue obtenida mediante la evaluación de diversas hélices con diferentes diámetros y pasos a varias revoluciones por minuto (RPM), en conjunto con resultados de la literatura para llegar a una estimación que sólo requiere del diámetro y paso de la hélice, RPM a las que gira y la velocidad aerodinámica [56], valores fácilmente disponibles. Además, este modelo al ser una ecuación cuadrática, permite obtener un valor de RPM dados una fuerza de empuje deseada, los parámetros de la hélice y la velocidad aerodinámica, esto será de utilidad al diseñar el control de velocidad de la aeronave.

### 3.3. Dinámica del vehículo

El modelo dinámico desacoplado de una aeronave está dado por doce ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido dadas en un marco de referencia inercial y uno local en convención NED, [41]:

$$\begin{aligned} \dot{p}_n = & (C_\theta C_\psi)u + (S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi)v \\ & + (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi)w \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_e = & (C_\theta S_\psi)u + (S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi)v \\ & + (C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi)w \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\dot{h} = uS_\theta - vS_\phi C_\theta - wC_\phi C_\theta \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} = & rv - qw - gS_\theta + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \\ & \times \left[ C_X(\alpha) + C_{X_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{X_{\delta_e}} \delta_e \right] + f_p \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\dot{v} = pw - ru + gC_\theta S_\phi + \frac{\rho V_a^2 S}{2m}$$

$$\times \left[ C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{Y_r} \frac{br}{2V_a} + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (3.20)$$

$$\dot{w} = qu - pv + gC_\theta C_\phi + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \times \left[ C_Z(\alpha) + C_{Z_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{Z_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e \right] \quad (3.21)$$

$$\dot{\phi} = p + qS_\phi T_\theta + rC_\phi T_\theta \quad (3.22)$$

$$\dot{\theta} = qC_\phi - rS_\phi \quad (3.23)$$

$$\dot{\psi} = qS_\phi \sec \theta + rC_\phi \sec \theta \quad (3.24)$$

$$\dot{p} = \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \times \left[ C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_a}} \delta_a + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (3.25)$$

$$\dot{q} = \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{\rho V_a^2 S c}{2J_y} \times \left[ C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{cq}{2V_a} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \right] \quad (3.26)$$

$$\dot{r} = \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \times \left[ C_{r_0} + C_{r_\beta} \beta + C_{r_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{r_r} \frac{br}{2V_a} + C_{r_{\delta_a}} \delta_a + C_{r_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (3.27)$$

donde  $h = -p_d$  es la altitud. La matriz de inercia  $\mathbf{J}$  está dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & -0 & J_z \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Además, se tiene que [41]

$$\begin{aligned} \Gamma &\triangleq J_x J_z - J_{xz}^2 & \Gamma_3 &= \frac{J_z}{\Gamma} & \Gamma_6 &= \frac{J_{xz}}{J_y} \\ \Gamma_1 &= \frac{J_{xz}(J_x - J_y + J_z)}{\Gamma} & \Gamma_4 &= \frac{J_{xz}}{\Gamma} & \Gamma_7 &= \frac{(J_x - J_y)J_x + J_{xz}^2}{\Gamma} \\ \Gamma_2 &= \frac{J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma} & \Gamma_5 &= \frac{J_z - J_x}{J_y} & \Gamma_8 &= \frac{J_x}{\Gamma} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
C_{p_0} &= \Gamma_3 C_{l_0} + \Gamma_4 C_{n_0} & C_{p_r} &= \Gamma_3 C_{l_r} + \Gamma_4 C_{n_r} & C_{r_{\delta_a}} &= \Gamma_4 C_{l_{\delta_a}} + \Gamma_8 C_{n_{\delta_a}} \\
C_{p_p} &= \Gamma_3 C_{l_p} + \Gamma_4 C_{n_p} & C_{p_{\delta_r}} &= \Gamma_3 C_{l_{\delta_r}} + \Gamma_4 C_{n_{\delta_r}} & C_{r_\beta} &= \Gamma_4 C_{l_\beta} + \Gamma_8 C_{n_\beta} \\
C_{p_{\delta_a}} &= \Gamma_3 C_{l_{\delta_a}} + \Gamma_4 C_{n_{\delta_a}} & C_{r_0} &= \Gamma_4 C_{l_0} + \Gamma_8 C_{n_0} & C_{r_r} &= \Gamma_4 C_{l_r} + \Gamma_8 C_{n_r} \\
C_{p_\beta} &= \Gamma_3 C_{l_\beta} + \Gamma_4 C_{n_\beta} & C_{r_p} &= \Gamma_4 C_{l_p} + \Gamma_8 C_{n_p} & C_{r_{\delta_r}} &= \Gamma_4 C_{l_{\delta_r}} + \Gamma_8 C_{n_{\delta_r}}
\end{aligned}$$

La fuerza de propulsión  $f_p$  viene de (3.15). Los coeficientes aerodinámicos en las direcciones X y Z son funciones no lineales del ángulo de ataque, dadas por [41]

$$\begin{aligned}
C_X(\alpha) &\triangleq -C_D(\alpha)C_\alpha + C_L(\alpha)S_\alpha & C_{Z_q}(\alpha) &\triangleq -C_{D_q}S_\alpha - C_{L_q}C_\alpha \\
C_{X_q}(\alpha) &\triangleq -C_{D_q}C_\alpha + C_{L_q}S_\alpha & C_{Z_{\delta_e}}(\alpha) &\triangleq -C_{D_{\delta_e}}S_\alpha - C_{L_{\delta_e}}C_\alpha \\
C_{X_{\delta_e}}(\alpha) &\triangleq -C_{D_{\delta_e}}C_\alpha + C_{L_{\delta_e}}S_\alpha & C_L(\alpha) &= C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha \\
C_Z(\alpha) &\triangleq -C_D(\alpha)S_\alpha - C_L(\alpha)C_\alpha & C_D(\alpha) &= C_{D_0} + C_{D_\alpha}\alpha
\end{aligned}$$

### 3.3.1. Giro coordinado

El giro coordinado es una condición de vuelo donde la aeronave describe una trayectoria circular a velocidad constante sin generar una aceleración lateral en el cuerpo del vehículo, esta condición permite desarrollar una expresión que relaciona al rumbo y el ángulo de banqueo [41]

$$\dot{\chi} = \frac{g}{V_g} T_\phi \cos(\chi - \gamma) \quad (3.30)$$

En la ausencia de viento o deslizamiento, se tiene  $V_a = V_g$  y  $\psi = \chi$  que lleva a la expresión simplificada [41]

$$\dot{\chi} = \dot{\psi} = \frac{g}{V_g} T_\phi \quad (3.31)$$

Para realizar un giro coordinado se utilizan en conjunto todos los controles de la aeronave, [57]. Esta condición de vuelo y las acciones de control pertinentes serán de utilidad para definir los lazos de control.

## 3.4. Caracterización aerodinámica del Eclipsion Model T

La aeronave seleccionada para ser simulada es el Eclipsion Model T, Figura 3.13, un avión de ala alta y motor eléctrico a radio control. Los criterios



Tabla 3.2: Características generales y rendimientos del Eclipson Model T

Velocidad de desplome	24 km/h	Superficie alar	18.5 $dm^2$
Carga alar	43 $g/dm^2$	Alargamiento	6.5
Longitud	75.7 cm	Perfil alar	NACA4415
Envergadura	116 cm	Peso máximo de despegue	1000 g

de selección fueron los siguientes: Ser capaz de transportar una computadora de vuelo donde se puedan ejecutar los algoritmos de control; poder volar de forma segura en un área de  $180 \times 130m$ ; una envergadura de 1m, y tener acceso a los parámetros del modelo dinámico. Las aeronaves comerciales que cumplen las restricciones de tamaño no cuentan con información sobre el modelo dinámico, la cual es importante para la simulación y el desarrollo de las leyes de control. El Eclipson Model T es un diseño concebido para ser fabricado usando tecnología de manufactura aditiva, esto permite fabricar la cantidad de vehículos que sean necesarios, así como piezas de repuesto. El diseñador de la aeronave proporcionó información detallada de la aeronave, que permitió el modelado de la misma en un software de Dinámica de Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamics - CFD), con el objetivo de obtener los parámetros aerodinámicos necesarios. La Tabla 3.2 muestra la ficha técnica de la aeronave, [58]. La caracterización de los parámetros

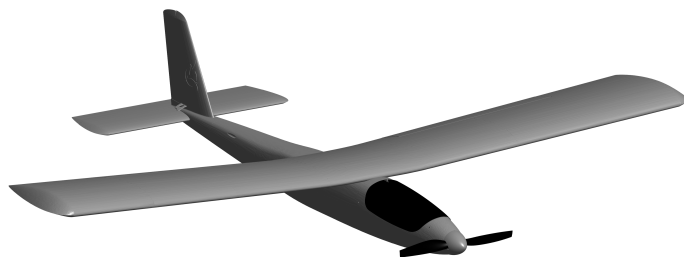


Figura 3.13: Aeronave Eclipson Model T.

aerodinámicos se realizó en el software XFLR5, una herramienta de análisis para perfiles alares, alas y aviones que operan a bajos números de Reynolds, utiliza la teoría de línea sustentadora, el método Vortex-Lattice y el método de paneles 3D [59]. Los resultados que entrega son válidos para aeronaves subsónicas pequeñas que operan en la región lineal de sustentación.

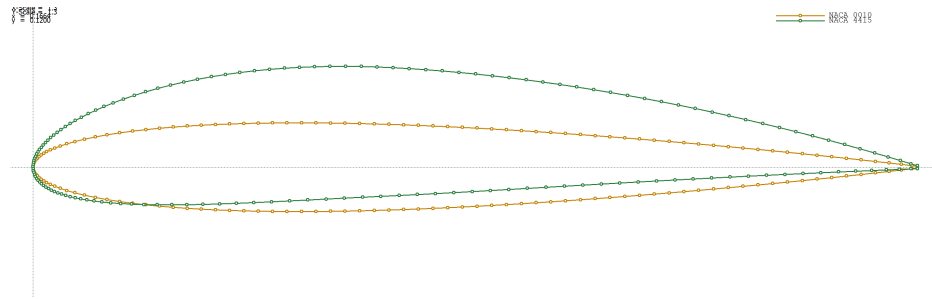


Figura 3.14: Perfiles NACA 4415 (verde) y NACA 0010 (amarillo) definidos en XFLR5 con 150 paneles cada uno. Cada línea recta entre dos puntos es un panel. Los perfiles se encuentran normalizados, es decir, tienen una longitud de cuerda unitaria.

### Caracterización de los perfiles

La aeronave utiliza 2 perfiles, el NACA 4415 para el ala y NACA 0010 en el estabilizador vertical y horizontal. Usando la herramienta *Direct Foil Design* se define la geometría del perfil, y se generaron 150 paneles para cada uno, esto permite un análisis confiable sin gran costo computacional, se muestran en la Figura 3.14.

A continuación se definen nuevamente estos perfiles considerando las superficies de control, especificando un *flap* al 73.4% de la cuerda y  $\pm 7^\circ$  de desplazamiento para el NACA 4415 (Figura 3.15), y un flap al 67% de la cuerda y  $\pm 7^\circ$  de desplazamiento para el NACA 0010 (Figura 3.16).

Una vez definida la geometría de los perfiles, usando la herramienta *XFOil*

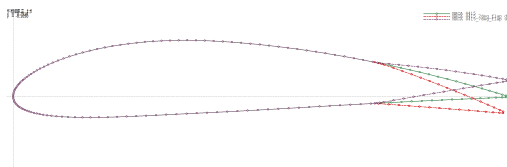


Figura 3.15: Perfil NACA 4415 con flap a  $0^\circ$  (verde) ,  $+7^\circ$  (rojo) y  $-7^\circ$  (morado).

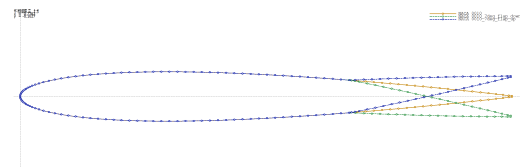


Figura 3.16: Perfil NACA 0010 con flap a  $0^\circ$  (amarillo) ,  $+7^\circ$  (verde) y  $-7^\circ$  (morado).

*Direct Analysis* se crea un análisis *Tipo 1*, el cual consiste en un análisis a velocidad constante para un rango de ángulos de ataque, éste es el método comúnmente usado para obtener las curvas polares de un perfil en un túnel

de viento [60]. El análisis se realiza para un rango de ángulos de ataque de  $\pm 10^\circ$  con los siguientes parámetros: Reynolds=30,000  $\rightarrow$  1,000,000, Mach = 0.0, Ncrit = 9.0 Los resultados se muestran en las Figuras 3.17, 3.18, y 3.19 para el perfil NACA 0010, y en las Figuras 3.20, 3.21, y 3.22 para el perfil NACA 4415.

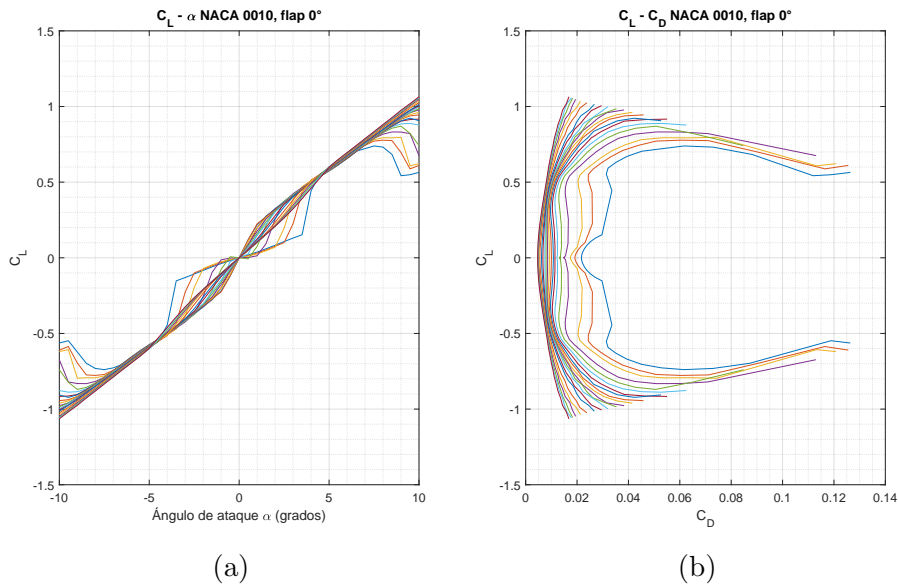


Figura 3.17: Gráficas  $C_L - \alpha$  (a) y  $C_L - C_D$  (b) para el perfil NACA 0010.

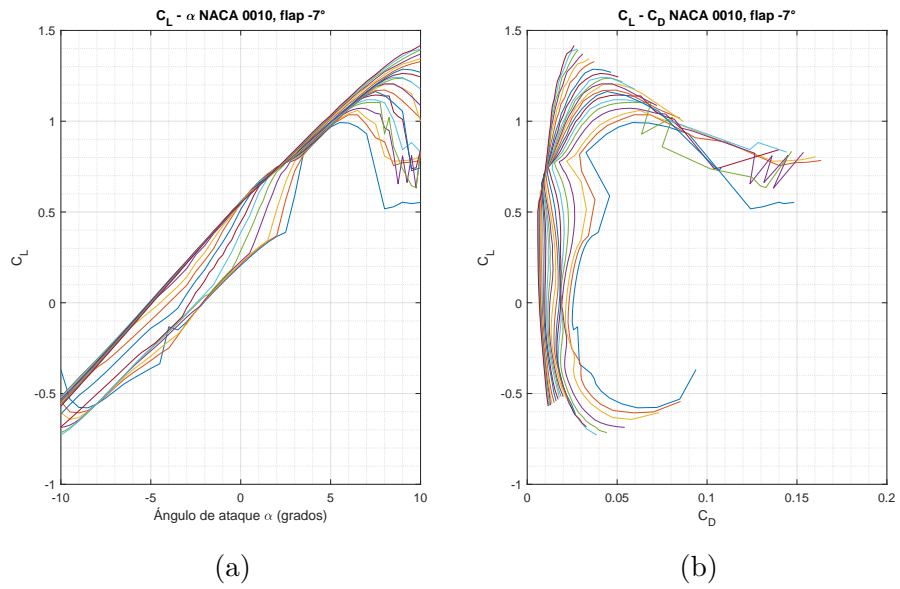


Figura 3.18: Gráficas  $C_L - \alpha$  (a) y  $C_L - C_D$  (b) para el perfil NACA 0010 con flap a  $-7^\circ$ .

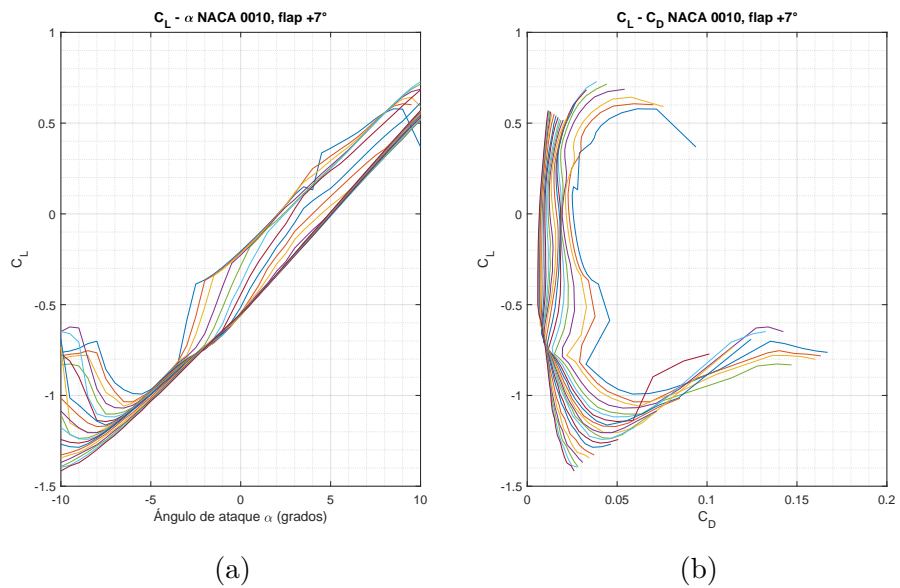


Figura 3.19: Gráficas  $C_L - \alpha$  (a) y  $C_L - C_D$  (b) para el perfil NACA 0010 con flap a  $+7^\circ$ .

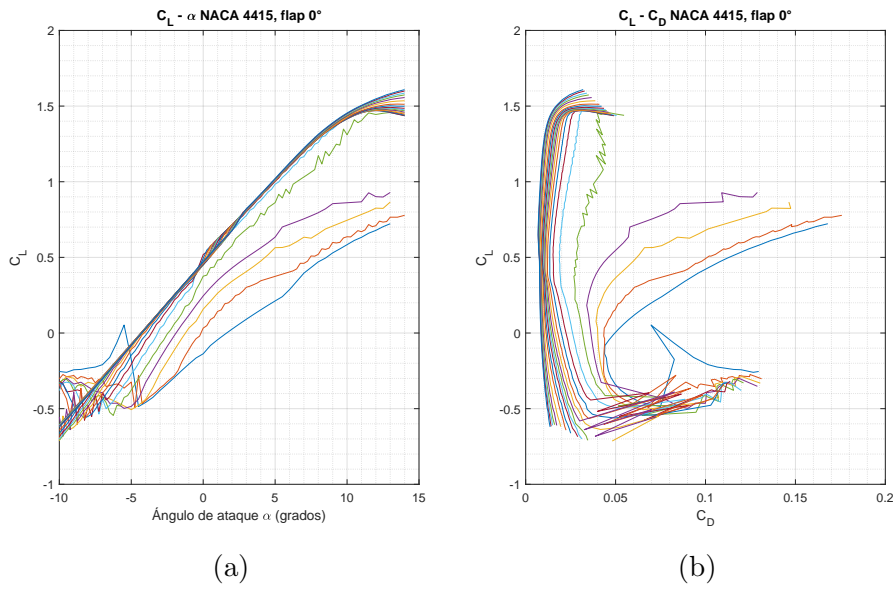


Figura 3.20: Gráficas  $C_L - \alpha$  (a) y  $C_L - C_D$  (b) para el perfil NACA 4415.

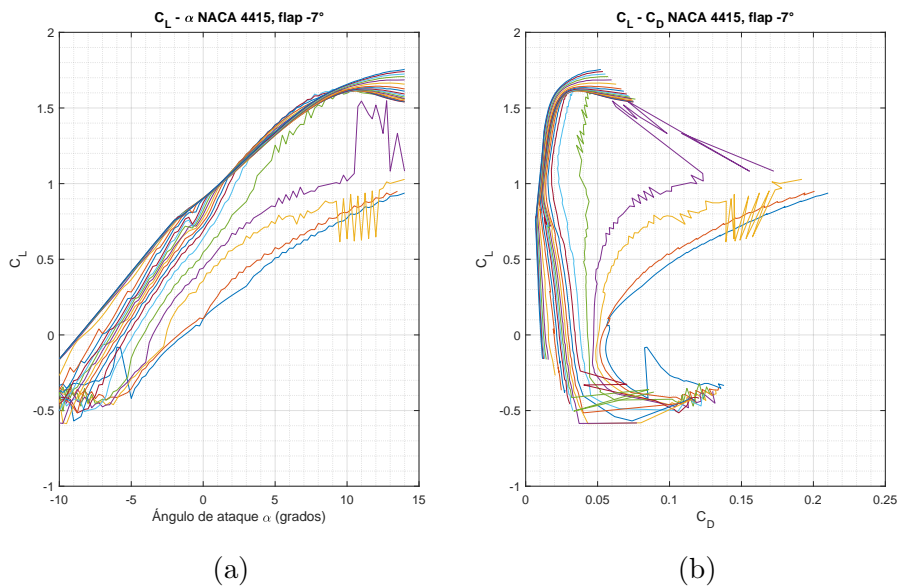


Figura 3.21: Gráficas  $C_L - \alpha$  (a) y  $C_L - C_D$  (b) para el perfil NACA 4415 con flap a  $-7^\circ$ .

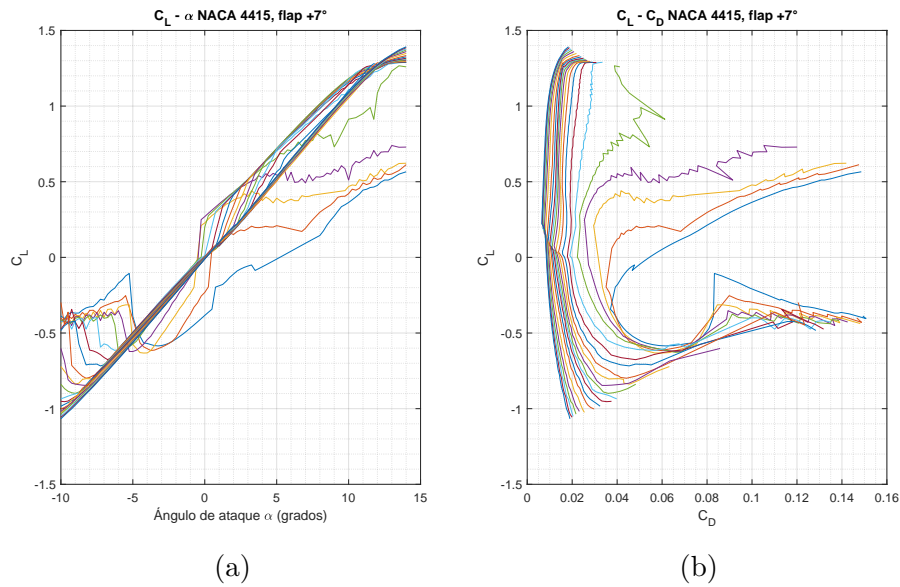


Figura 3.22: Gráficas  $C_L - \alpha$  (a) y  $C_L - C_D$  (b) para el perfil NACA 4415 con flap a  $+7^\circ$ .

Los resultados de las Figuras 3.17 y 3.20 son similares a los encontrados en la literatura [61, 62].

## Caracterización del ala y empenaje

A continuación, con la herramienta *Wing and Plane Design* se definen el ala y empenaje. El ala se modela en 6 secciones a partir del centro del ala, ubicadas a 0, 128, 406 y 550mm, donde las secciones 0 – 128 y 406 – 550 se definen con el perfil NACA4415 sin flap y la sección 128 – 406 con el perfil NACA4415 con o sin flap; el borde de ataque se coloca en la coordenada (0,0). Cada sección fue definida con 15 paneles a lo largo de la cuerda del ala y 8, 20 y 10 paneles a lo largo de la envergadura, para cada sección respectivamente, usando una distribución coseno. El ala tiene un *ángulo diedro* de  $3^\circ$  y un *torcimiento* uniforme de  $3^\circ$ .

El estabilizador horizontal se ubica 459.73mm por detrás y 32mm por debajo del borde de ataque del ala. Se define con dos secciones a 0 y 157mm de la raíz de la superficie, usando el perfil NACA 0010 y  $8 \times 10$  paneles con una distribución coseno.

El estabilizador vertical se ubica 417mm por detrás y 19mm por debajo del

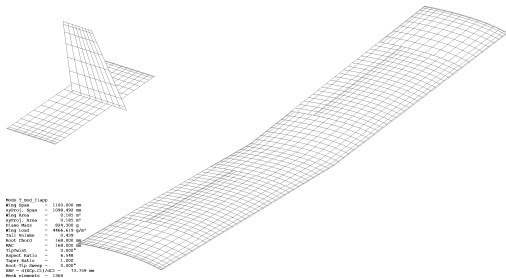


Figura 3.23: Distribución de paneles en el aja y empenaje.

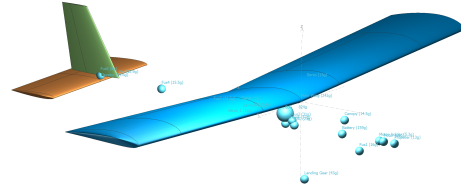


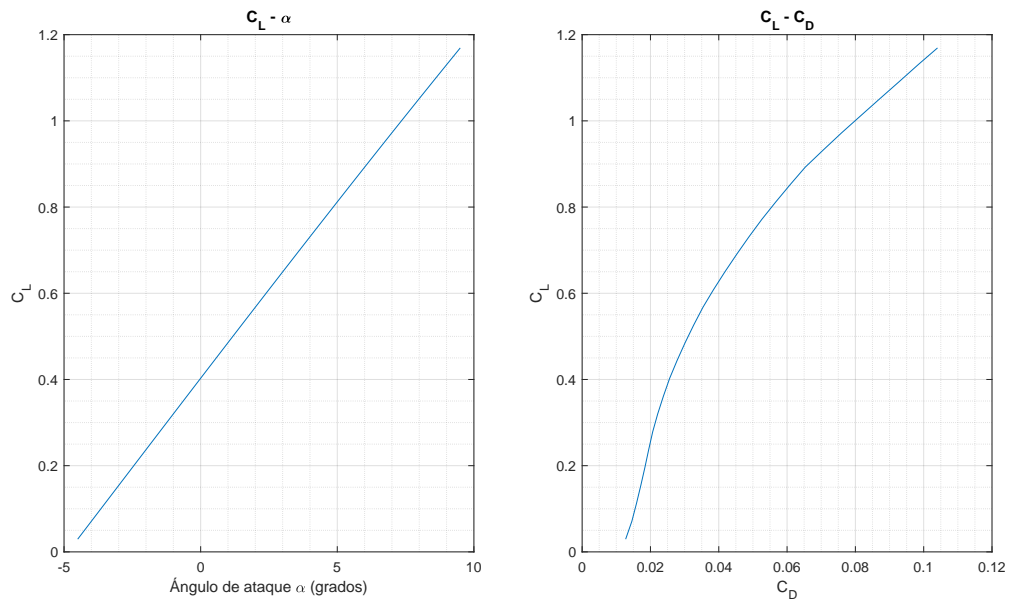
Figura 3.24: Distribución de masas en la aeronave, se consideran las masas puntuales de todos los componentes que constituyen la aeronave.

borde de ataque del ala. Usa el perfil NACA 0010, con una cuerda de raíz de 109mm, el perfil de punta se ubica a 128mm de la raíz con una cuerda de 57mm, con su origen desplazado 76mm hacia atrás. Se usan  $8 \times 8$  paneles con distribución coseno.

La Figura 3.23 muestra la distribución de paneles para las superficies, note el cambio de distribución en la sección de ala donde se encuentran los alerones. Finalmente se definen las masas y posiciones de todos los componentes de la aeronave, esto permitirá calcular el peso y la matriz de inercias de la aeronave, se muestra en la Figura 3.24.

A continuación se define un análisis *Tipo 2*, que empleando el método Vortex-Lattice evalúa la aeronave en una condición de levantamiento constante, es decir, determina una velocidad para cada ángulo de ataque tal que el levantamiento generado sea igual al peso. Al realizar este análisis se selecciona la opción *viscous*, que indica al software calcular el arrastre viscoso de la aeronave usando la información generada en el análisis de los perfiles. Se obtienen las gráficas de la Figura 3.25. Estos resultados se encuentran en el rango de  $\alpha = -4.5$  y  $\alpha = 9.5$ , el cual está dentro de la región lineal, además, la Figura 3.25a confirma que las condiciones consideradas se encuentran en la región de lineal de la curva de levantamiento.

El siguiente paso es definir una serie de *análisis de estabilidad Tipo 7* para las condiciones de vuelo: sin aplicar controles, y aplicando cada una de las superficies de control (alerones, elevador y timón), en total se definen cuatro análisis. El primero se define con ganancias cero, y mostrará el comportamiento de la aeronave ante perturbaciones sin aplicar las superficies de control, de este análisis se obtienen las derivadas de estabilidad. El segundo se define con ganancias  $+1^\circ/\text{ctrl}$  y  $-1^\circ/\text{ctrl}$  para cada alerón respectivamente.



(a) Note que esta gráfica indica una relación lineal entre  $\alpha$  y  $C_L$ , lo que indica que la aeronave opera en la región lineal. (b) Relación el levantamiento y arrastre generado por el ala. Es una de las principales gráficas para analizar el rendimiento de una aeronave.

Figura 3.25: Gráficas  $C_L - \alpha$  (a) y  $C_L - C_D$  (b) de la aeronave para el rango  $\alpha = -4.5$  a  $\alpha = 9.5$



Tabla 3.3: Parámetros, coeficientes aerodinámicos y derivadas de control y estabilidad del Eclipsion Model T.

Parám.	Valor	Coeficiente Longitudinal	Valor	Coeficiente Lateral	Valor
$m$	0.824 kg	$C_{L_0}$	0.4029	$C_{Y_0}$	0.0
$S$	0.185 m <sup>2</sup>	$C_{D_0}$	0.0256	$C_{l_0}$	0.0
$c$	0.168 m	$C_{m_0}$	-0.0408	$C_{n_0}$	0.0
$b$	1.1 m	$C_{L_\alpha}$	4.7602	$C_{Y_\beta}$	-0.16451
$J_x$	0.02628	$C_{D_\alpha}$	0.1749	$C_{l_\beta}$	-0.054443
$J_y$	0.02453	$C_{m_\alpha}$	-1.0454	$C_{n_\beta}$	0.058246
$J_z$	0.04811	$C_{L_q}$	7.4431	$C_{Y_p}$	-0.12525
$J_{xz}$	-0.0009316	$C_{D_q}$	0.0	$C_{l_p}$	-0.48364
$\delta$	8.5 in	$C_{m_q}$	-8.9585	$C_{n_p}$	-0.016292
$p$	6	$C_{L_{\delta_e}}$	-0.42108	$C_{Y_r}$	0.13822
		$C_{D_{\delta_e}}$	0.00528	$C_{l_r}$	0.069133
		$C_{m_{\delta_e}}$	-1.09407	$C_{n_r}$	-0.046933
				$C_{Y_{\delta_a}}$	0.04111
				$C_{l_{\delta_a}}$	0.28708
				$C_{n_{\delta_a}}$	0.00994
				$C_{Y_{\delta_r}}$	0.09977
				$C_{l_{\delta_r}}$	0.00732
				$C_{n_{\delta_r}}$	-0.04218

El tercer y cuarto análisis se definen con ganancias 1°/ctrl para el elevador y timón respectivamente. Del segundo análisis se obtienen las derivadas de control longitudinales; del tercer y cuarto análisis se obtienen las derivadas de control laterales. Los resultados se muestran en la Tabla 3.3.

Una guía para el análisis de perfiles y alas en xflr5 se puede encontrar en [63].

---

# Estrategias de control

---

El mayor desafío para cualquier pensador es plantear el problema de una manera tal que permita una solución.

---

Bertrand Russell

En este capítulo se tratan las estrategias y algoritmos de control de vuelo para un aeronave de ala fija y el control de formación para un sistema multiagentes. En la sección 4.1 se discuten los lazos de control necesarios para llevar y mantener a la aeronave en una condición de vuelo deseada, así como la simplificación del modelo dinámico derivado de la incorporación del sistema de control de vuelo. A continuación en la sección 4.2 se desarrolla un estimador de velocidad distribuido y un control de maniobra de formación que trabajan en conjunto para lograr la adquisición y preservación de una formación.

## 4.1. Control de la aeronave

El sistema de control de vuelo se diseña como un control en cascada, donde la consideración de una dinámica longitudinal y lateral desacopladas es apropiada [41]. El sistema de control se diseña para controlar y/o mantener uno o más de los siguientes parámetros [43].

## Funciones longitudinales

- Actitud de cabeceo.
- Altitud.
- Velocidad aerodinámica.

## Funciones laterales

- Ángulo de banqueo.
- Ángulo de deslizamiento (sideslip).

La estrategia de control consiste en estabilizar los movimientos de guiñada, alabeo y cabeceo usando las superficies de control, el lazo más anidado. Posteriormente se diseñan controles para altitud, velocidad aerodinámica y orientación, que determinarán un ángulo de cabeceo deseado, un valor de RPM deseado y un ángulo de baqueo deseado respectivamente, este esquema de control es comúnmente usado en la literatura [41, 43]. Se considera una condición de viento en calma, es decir,  $V_w = 0$ .

### 4.1.1. Dinámica lateral

#### 4.1.1.1. Control de ángulo de deslizamiento $\beta$

Este control hace uso del timón para mantener un ángulo de deslizamiento cero,  $\beta = 0$ , que corresponde a la condición de vuelo recto y nivelado, así como del giro coordinado. En ausencia de viento se tiene que  $V_a = V_g$ , y considerando una velocidad aerodinámica constante, de la Figura 3.9 se puede obtener la siguiente relación

$$S_\beta = \frac{v}{V_a} \rightarrow v = V_a S_\beta \quad (4.1)$$

Diferenciando con respecto al tiempo

$$\dot{v} = V_a C_\beta \dot{\beta} \quad (4.2)$$

Sustituyendo (3.20) en (4.2)

$$(V_a C_\beta) \dot{\beta} = pw - ru + gC_\theta S_\phi + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \times \left[ C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{Y_r} \frac{br}{2V_a} + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \right] \quad (4.3)$$

El ángulo de deslizamiento por lo general es pequeño, por lo que es posible usar la aproximación  $C_\beta \approx 1$ , entonces  $(V_a C_\beta) \dot{\beta} \approx V_a \dot{\beta}$ , con lo que (4.3) se

puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & \frac{\rho V_a S}{2m} C_{Y_\beta} \beta + \frac{pw - ru + gC_\theta S_\phi}{V_a} \\ & + \frac{\rho V_a S}{2m} \left[ C_{Y_0} + C_{Y_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{Y_r} \frac{br}{2V_a} + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a \right] + \frac{\rho V_a S}{2m} C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \end{aligned} \quad (4.4)$$

tomando

$$\begin{aligned} a_{\beta 1} = & \frac{\rho V_a S}{2m} C_{Y_\beta} \beta + \frac{pw - ru + gC_\theta S_\phi}{V_a} \\ & + \frac{\rho V_a S}{2m} \left[ C_{Y_0} + C_{Y_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{Y_r} \frac{br}{2V_a} + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

se tiene

$$\dot{\beta} = a_{\beta 1} + \frac{\rho V_a S}{2m} C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) describe la dinámica de  $\beta$ , estado que se desea llevar a cero, para ello se utilizará un control por modos deslizantes usando el algoritmo Super Twisting. Se define la siguiente superficie deslizante  $\mathcal{S}_\beta = \beta$ , obteniendo su derivada temporal.  $\dot{\mathcal{S}}_\beta = \dot{\beta} = a_{\beta 1} + \frac{\rho V_a S}{2m} C_{Y_{\delta_r}} \delta_r$ , en donde aparece el control  $\delta_r$ . Eligiendo esta entrada de control como:

$$\delta_r = \frac{2m}{\rho V_a S C_{Y_{\delta_r}}} \left( -a_{\beta 1} - K_1 |\mathcal{S}_\beta|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\mathcal{S}_\beta) - K_2 \int_0^t \text{sign}(\mathcal{S}_\beta) d\tau \right) \quad (4.7)$$

Entonces el sistema en lazo cerrado tiene la forma  $\dot{\beta} = -K_1 |\mathcal{S}_\beta|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\mathcal{S}_\beta) - K_2 \int_0^t \text{sign}(\mathcal{S}_\beta) d\tau$ , la cual corresponde al Teorema 2.22, por lo tanto  $\beta$  converge a cero en tiempo finito.

#### 4.1.1.2. Control de ángulo de banqueo $\phi$

Se usan los alerones para girar la aeronave alrededor del eje  $\mathbf{i}^b$  hasta lograr un ángulo de banqueo deseado  $\phi_d$ . Definiendo el error de ángulo de banqueo  $\phi_e = \phi - \phi_d$ , y obteniendo su derivada temporal

$$\dot{\phi}_e = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d \quad (4.8)$$

sustituyendo (3.22) en (4.8)

$$\dot{\phi}_e = p + qS_\phi T_\theta + rC_\phi T_\theta - \dot{\phi}_d \quad (4.9)$$

tomando  $a_{\phi_1} = qS_\phi T_\theta + rC_\phi T_\theta$ , se puede reescribir (4.9) como

$$\dot{\phi}_e = p + a_{\phi_1} - \dot{\phi}_d \rightarrow p = \dot{\phi}_e - a_{\phi_1} + \dot{\phi}_d \quad (4.10)$$

Diferenciando  $\dot{\phi}_e$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_e &= \dot{p} + a_{\dot{\phi}_1} - \ddot{\phi}_d \\ &= \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \frac{\rho V_a^2 Sb}{2} \\ &\quad \times \left[ C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_a}} \delta_a + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] + a_{\dot{\phi}_1} - \ddot{\phi}_d \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.11)

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_e &= \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \frac{\rho V_a^2 Sb}{2} \\ &\quad \times \left[ C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_p} \frac{b}{2V_a} (\dot{\phi}_e - a_{\phi_1} + \dot{\phi}_d) + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_a}} \delta_a + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] \\ &\quad + a_{\dot{\phi}_1} - \ddot{\phi}_d \\ &= \frac{\rho V_a Sb}{2} C_{p_p} \frac{b}{2} \dot{\phi}_e + \frac{\rho V_a^2 Sb}{2} C_{p_{\delta_a}} \delta_a + \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \frac{\rho V_a^2 Sb}{2} \\ &\quad \times \left[ C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta - C_{p_p} \frac{b}{2V_a} a_{\phi_1} + C_{p_p} \frac{b}{2V_a} \dot{\phi}_d + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] \\ &\quad + a_{\dot{\phi}_1} - \ddot{\phi}_d \end{aligned} \quad (4.12)$$

tomando  $a_{\phi_2} = \frac{\rho V_a Sb^2}{4} C_{p_p}$ ,  $a_{\phi_3} = \frac{\rho V_a^2 Sb}{2} C_{p_{\delta_a}}$ ,  $a_{\phi_4} = +\Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \frac{\rho V_a^2 Sb}{2} \times \left[ C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta - C_{p_p} \frac{b}{2V_a} a_{\phi_1} + C_{p_p} \frac{b}{2V_a} \dot{\phi}_d + C_{p_r} \frac{br}{2V_a} + C_{p_{\delta_r}} \delta_r \right] + a_{\dot{\phi}_1} - \ddot{\phi}_d$  es posible reescribir (4.12) como  $\ddot{\phi}_e = a_{\phi_2} \dot{\phi}_e + a_{\phi_4} + a_{\phi_3} \delta_a$ . La ecuación (4.12) describe la dinámica de segundo orden de  $\phi_e$ , note que aparece la entrada de control  $\delta_a$ . Se desea llevar a cero al error  $\phi_e$ , es decir  $\phi = \phi_d$ . Se emplea un control usando el algoritmo Super Twisting Modificado con la siguiente superficie deslizante  $\mathcal{S}_\phi = \dot{\phi}_e + \mu_1 \phi_e$ , con derivada temporal:  $\dot{\mathcal{S}}_\phi = \ddot{\phi}_e + \mu_1 \dot{\phi}_e$ . Eligiendo la entrada de control como

$$\delta_a = a_{\phi_3}^{-1} (-a_{\phi_4} - a_{\phi_2} \dot{\phi}_e - \mu_1 \dot{\phi}_e + u_1) \quad (4.13)$$

donde  $u_1$  es

$$u_1 = -K_3 |\mathcal{S}_\phi|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\mathcal{S}_\phi) - K_4 \mathcal{S}_\phi - \int_0^t (K_5 \text{sign}(\mathcal{S}_\phi) - K_6 \mathcal{S}_\phi) d\tau \quad (4.14)$$

Se tiene entonces el sistema en lazo cerrado  $\dot{\mathcal{S}}_\phi = \ddot{\phi}_e + \mu_1 \dot{\phi}_e = u_1$ , el cual lleva a  $\dot{\mathcal{S}}_\phi = \mathcal{S}_\phi = 0$  en tiempo finito de acuerdo al Teorema 2.23, entonces  $\phi_e \rightarrow 0$  y en consecuencia  $\phi \rightarrow \phi_d$ .

## 4.1.2. Dinámica longitudinal

### 4.1.2.1. Control de ángulo de cabeceo $\theta$

Se define el error en cabeceo  $\theta_e = \theta - \theta_d$  con derivada  $\dot{\theta}_e = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$ . Usando (3.23) se llega a  $\dot{\theta}_e = qC_\phi - rS_\phi - \dot{\theta}_d$ , que alternativamente puede ser escrita como  $q = \frac{\dot{\theta}_e + rS_\phi + \dot{\theta}_d}{C_\phi}$ . Derivando  $\dot{\theta}_e$  se tiene  $\ddot{\theta}_e = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d$

$$\ddot{\theta}_e = \dot{q}C_\phi - qS_\phi \dot{\phi} - \dot{r}S_\phi - rC_\phi \dot{\phi} - \ddot{\theta}_d \quad (4.15)$$

agrupando algunos términos y sustituyendo (3.26) en (4.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_e = & \left\{ \Gamma_5 pr - \Gamma_6(p^2 - r^2) + \frac{\rho V_a^2 Sc}{2J_y} \left[ C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{c}{2V_a} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \frac{\dot{\theta}_e + rS_\phi + \dot{\theta}_d}{C_\phi} \right) \right] \right\} C_\theta + \frac{\rho V_a^2 Sc}{2J_y} C_\phi C_{m_{\delta_e}} \delta_e - \dot{r}S_\phi - \dot{\theta} (qS_\phi + rC_\phi) - \ddot{\theta}_d \end{aligned} \quad (4.16)$$

considerando  $a_{\theta 1} = \frac{\rho V_a^2 Sc}{2J_y} C_\phi C_{m_{\delta_e}}$  y  $a_{\theta 2} = -\dot{r}S_\phi - \dot{\theta} (qS_\phi + rC_\phi) - \ddot{\theta}_d$ , es posible reescribir (4.16) como:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_e = & a_{\theta 1} \delta_e + a_{\theta 2} + \left\{ \Gamma_5 pr - \Gamma_6(p^2 - r^2) + \frac{\rho V_a^2 Sc}{2J_y} [C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha] \right\} C_\phi \\ & + \frac{\rho V_a Sc^2}{4J_y} C_{m_q} (rS_\phi + \dot{\theta}_d) + \frac{\rho V_a Sc^2}{4J_y} C_{m_q} \dot{\theta}_e \end{aligned} \quad (4.17)$$

tomando  $a_{\theta 3} = \left\{ \Gamma_5 pr - \Gamma_6(p^2 - r^2) + \frac{\rho V_a^2 Sc}{2J_y} [C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha] \right\} C_\phi + \frac{\rho V_a Sc^2}{4J_y} C_{m_q} (rS_\phi + \dot{\theta}_d)$  y  $a_{\theta 4} = \frac{\rho V_a Sc^2}{4J_y} C_{m_q}$ , la ecuación (4.17) puede expresarse como  $\ddot{\theta}_e = a_{\theta 1} \delta_e + a_{\theta 2} + a_{\theta 3} + a_{\theta 4} \dot{\theta}_e$ , que describe la dinámica del error de cabeceo, además, en ella aparece la entrada de control  $\delta_e$ . Un control usando el algoritmo Super Twisting Modificado se emplea para llevar  $\theta_e$  a cero. Se define la siguiente superficie deslizante  $\mathcal{S}_\theta = \dot{\theta}_e + \mu_2 \theta_e$ , con derivada

temporal  $\dot{\mathcal{S}}_\theta = \ddot{\theta}_e + \mu_2 \dot{\theta}_e$ . Se elige la entrada de control como

$$\boxed{\delta_e = a_{\theta_1}^{-1} \left( -a_{\theta_2} - a_{\theta_3} - a_{\theta_4} \dot{\theta}_e - \mu_2 \dot{\theta}_e + u_2 \right)} \quad (4.18)$$

donde  $u_2 = -K_7 |\mathcal{S}_\theta|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\mathcal{S}_\theta) - K_8 \mathcal{S}_\theta - \int_0^t (K_9 \text{sign}(\mathcal{S}_\theta) - K_{10} \mathcal{S}_\theta) d\tau$ . Así, el sistema en lazo cerrado tiene la forma  $\dot{\mathcal{S}}_\theta = \ddot{\theta}_e + \mu_2 \dot{\theta}_e = u_2$ , con lo que se consigue llevar a  $\dot{\mathcal{S}}_\theta = \mathcal{S}_\theta = 0$  en tiempo finito de acuerdo al Teorema 2.23, en consecuencia  $\theta_e \rightarrow 0$  y  $\theta = \theta_d$ .

#### 4.1.2.2. Control de altitud

Se desea encontrar un  $\theta_d$  tal que lleve a la aeronave a la altitud deseada, debido a que en (3.18),  $\theta$  se encuentra dentro de términos trigonométricos, se partirá de la siguiente relación simplificada para la dinámica de altitud  $\dot{h} = u S_\theta$  [43]. Considerando un ángulo de cabeceo pequeño se tiene  $S_\theta = \theta$ , con lo que se obtiene  $\dot{h} = u\theta$ . Se define el error de altitud  $h_e = h - h_d$ , con derivada  $\dot{h}_e = \dot{h} - \dot{h}_d$ . La superficie deslizante es  $\mathcal{S}_h = h_e$ , con derivada  $\dot{\mathcal{S}}_h = \dot{h}_e$ . Se elige el control  $\theta_d$  como

$$\boxed{\theta_d = \frac{\dot{h}_d + u_3}{u}} \quad (4.19)$$

donde  $u_3 = -K_{11} |\mathcal{S}_h|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\mathcal{S}_h) - K_{12} \mathcal{S}_h - \int_0^t (K_{13} \text{sign}(\mathcal{S}_h) - K_{14} \mathcal{S}_h) d\tau$ , obteniéndose el sistema en lazo cerrado  $\dot{\mathcal{S}}_h = \dot{h}_e = \dot{h} - \dot{h}_d = u_3$ , el cual lleva a  $\mathcal{S}_h = 0$  en tiempo finito de acuerdo al Teorema 2.23, lográndose que  $h \rightarrow h_d$ .

Como el STA incluye un integrador, y existe una saturación en el ángulo de cabeceo máximo permitido, se decide implementar un algoritmo SSTA.

#### 4.1.2.3. Control de velocidad aerodinámica

La velocidad aerodinámica controla al variar el empuje que genera la hélice a través de las RPM del motor. Se determina un empuje deseado, y usando el modelo de empuje para la hélice se calculan las RPM necesarias. Asumiendo condiciones de viento en calma, la velocidad aerodinámica se expresa como:  $V_a = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ , con derivada temporal:

$$\dot{V}_a = \frac{u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}}{V_a} \quad (4.20)$$

en condiciones de viendo en calma se cumple  $u = u_r$ ,  $v = v_r$ , y  $w = w_r$ , con lo que se sustituyendo (3.3) en (4.20):  $\dot{V}_a = \dot{u}C_\alpha C_\beta + \dot{v}S_\beta + \dot{w}S_\alpha C_\beta$ . Se define el error en velocidad  $V_{ae} = V_a - V_{ad}$  con derivada

$$\dot{V}_{ae} = \dot{V}_a - \dot{V}_{ad} \quad (4.21)$$

Sustituyendo (3.19) en (4.21)

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ae} = & \left\{ rv - qw - gS_\theta + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \left[ C_D(\alpha)C_\alpha + C_L(\alpha)S_\alpha \right. \right. \\ & + \frac{cq}{2V_a} \left( -C_{D_q}C_\alpha + C_{L_q}S_\alpha \right) + \left( C_{D_{\delta_e}}C_\alpha + C_{L_{\delta_e}}S_\alpha \right) \delta_e \left. \right] \\ & \left. + f_p \right\} C_\alpha C_\beta + \dot{v}S_\beta + \dot{w}S_\alpha C_\beta \end{aligned} \quad (4.22)$$

considerando  $a_{V_{a1}} = rv - qw - gS_\theta + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} \left[ C_D(\alpha)C_\alpha + C_L(\alpha)S_\alpha + \frac{cq}{2V_a} \left( -C_{D_q}C_\alpha + C_{L_q}S_\alpha \right) + \left( C_{D_{\delta_e}}C_\alpha + C_{L_{\delta_e}}S_\alpha \right) \delta_e \right]$  y  $a_{V_{a2}} = \dot{v}S_\beta + \dot{w}S_\alpha C_\beta$ , la ecuación (4.22) se puede expresar como  $\dot{V}_{ae} = a_{V_{a1}}C_\alpha C_\beta + f_p C_\alpha C_\beta + a_{V_{a2}}$ , donde aparece la entrada de control  $f_p$ . Se define entonces la superficie de deslizamiento  $\mathcal{S}_{V_a} = V_{ae}$ , con derivada  $\dot{\mathcal{S}}_{V_a} = \dot{V}_{ae}$ ; y se elige la entrada de control  $f_p$  como

$$f_p = \frac{1}{C_\alpha C_\beta} (-a_{V_{a2}} - a_{V_{a1}}C_\alpha C_\beta + u_4) \quad (4.23)$$

donde  $u_4 = -K_{15}|\mathcal{S}_{V_a}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\mathcal{S}_{V_a}) - K_{16}\mathcal{S}_{V_a} - \int_0^t (K_{17} \text{sign}(\mathcal{S}_{V_a}) - K_{18}\mathcal{S}_{V_a}) d\tau$ , con la que resulta el sistema en lazo cerrado  $\dot{\mathcal{S}}_{V_a} = \dot{V}_{ae} = u_4$ , en consecuencia  $\mathcal{S}_h$  converge a 0 en tiempo finito de acuerdo al Teorema 2.23.

Al ser (3.15) una ecuación cuadrática, se puede obtener una expresión para la variable RPM usando la fórmula general para ecuaciones de segundo orden. Considerando  $a_{\text{prop}A} = 4.392399 \times 10^{-8} \cdot \frac{\vartheta^{3.5}}{\sqrt{p}} (4.23333 \times 10^{-4} \cdot p)$  y  $a_{\text{prop}B} = -V_a \left( 4.392399 \times 10^{-8} \cdot \frac{\vartheta^{3.5}}{\sqrt{p}} \right)$ , el modelo de la hélice puede escribirse como:  $(a_{\text{prop}A}) \text{RPM}^2 + (a_{\text{prop}B}) \text{RPM} - f_p = 0$ . Tomando la solución positiva



de esta ecuación, se obtiene un valor de RPM dados: un empuje deseado, la velocidad aerodinámica y los parámetros de la hélice. Esta expresión tiene la forma

$$\delta_t = \text{RPM} = \frac{-a_{\text{prop}B} + \sqrt{a_{\text{prop}B}^2 - 4(a_{\text{prop}A})(-f_p)}}{2(a_{\text{prop}A})} \quad (4.24)$$

Las RPM resultantes serán la entrada de control al motor de la aeronave  $\delta_t$ .

Con la estrategia de control presentada, la aeronave debe mantener una altitud constante  $h_d$ , al manipular el ángulo de cabeceo  $\theta$ , mantiene una velocidad constante  $V_{ad}$  al variar las RPM del motor, haciendo uso de los alerones mantiene un ángulo de banqueo  $\phi_d$  y con la acción del timón lleva al ángulo de deslizamiento a cero. Cumpliendo estos objetivos, la aeronave podrá mantener un vuelo recto y nivelado a velocidad y altitud constante, o realizar un giro a velocidad y altitud constante.

Considerando que en una aeronave es común controlar la orientación y la velocidad aerodinámica [41, 43], una condición de viento en calma, altitud constante y la acción de los controles para mantener a la aeronave en estas condiciones, es posible expresar la cinemática de la aeronave como [41]

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{h} \end{bmatrix} = V_a \begin{bmatrix} C_\psi \\ S_\psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Un modelo comúnmente usado en la literatura [41].

El comportamiento al realizar un giro con viento en calma a altitud y velocidad constante se puede modelar usando la expresión para giro coordinado [41]

$$\dot{\psi} = \frac{g}{V_a} \tan \phi \quad (4.26)$$

## 4.2. Control de formación

Considerando el modelo simplificado (4.25) (4.26), la dinámica de la aeronave se simplifica a un modelo cinemático de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a C_\psi \\ V_a S_\psi \\ \frac{g}{V_a} \tan \phi \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Este sistema es similar a un robot diferencial, donde los estados a controlar son dos posiciones en el plano y un ángulo, además cuenta con dos entradas de control  $\nu$  y  $\omega$ , la velocidad lineal y angular respectivamente. Tomando  $\nu = V_a$  y  $\omega = (g/V_a) \tan \phi$ , entonces (4.27) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 \\ \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

dada una entrada de velocidad angular  $\omega$ , usando (4.26) se obtiene un ángulo de banqueo deseado con la siguiente relación

$$\phi_d = \text{atan}\left(\frac{\nu\omega}{g}\right) \quad (4.29)$$

Considere un sistema multiagentes (Multi-agent System - MAS) con  $n$  vehículos no holonómicos con el modelo dinámico (4.28), el  $i$ -ésimo vehículo se expresa como:

$$\dot{\zeta}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ni} \\ \dot{p}_{ei} \\ \dot{\psi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & 0 \\ \sin \psi_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

donde  $\zeta_i = [p_{ni} \ p_{ei} \ \psi_i]^T$  es la posición en el plano y la orientación del vehículo en un marco inercial  $\Sigma$ , como se muestra en la Figura 4.1. Además, denote  $P_i = [p_{ni} \ p_{ei}]^T \in \mathbb{R}^2$ .

Tomando la transformación no lineal  $\mathfrak{T}$ :

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_{i1} \\ \Gamma_{i2} \end{bmatrix} = \nu_i \begin{bmatrix} C_{\psi_i} \\ S_{\psi_i} \end{bmatrix} = \dot{P}_i \quad (4.31)$$

donde  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ . Una aeronave de ala fija debe tener una velocidad aerodinámica mayor a cero para mantener el vuelo, entonces se considera  $\nu_i > 0$ . Se puede verificar que la transformación es un difeomorfismo tomando el Jacobiano de la transformación

$$J(\mathfrak{T}) = \begin{bmatrix} C_{\psi_i} & -\nu_i S_{\psi_i} \\ S_{\psi_i} & \nu_i C_{\psi_i} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

El cual tiene determinante  $\det(J(\mathfrak{T})) = \nu_i C_{\psi_i}^2 + \nu_i S_{\psi_i}^2 = \nu_i$ . Como se considera  $\nu_i > 0$ , entonces  $\det(J(\mathfrak{T})) \neq 0$  y en consecuencia  $J(\mathfrak{T})$  es no singular. Con lo

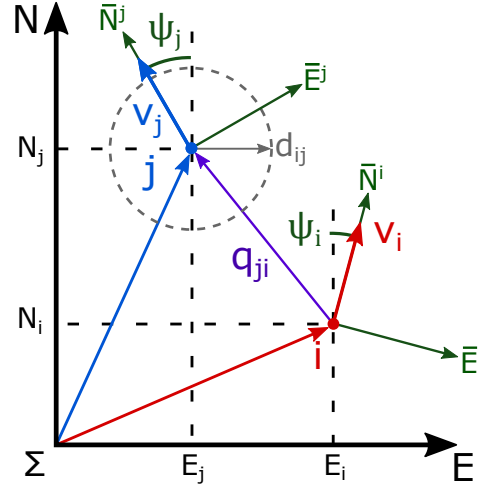


Figura 4.1: Posición y orientación de dos agentes  $i$  y  $j$  en el marco inercial  $\Sigma$ . Se indican además la posición relativa  $q_{ji}$ , los marcos locales de cada agente  $\{\bar{N}^i \bar{E}^i\}$  y  $\{\bar{N}^j \bar{E}^j\}$  y la distancia entre agentes deseada  $d_{ij}$

que  $\Gamma_i$  es un difeomorfismo local en el conjunto definido. Tomando la derivada temporal de  $\Gamma_i$ :

$$\dot{\Gamma}_i = \dot{\nu}_i \begin{bmatrix} C_{\psi_i} \\ S_{\psi_i} \end{bmatrix} + \nu_i \begin{bmatrix} -S_{\psi_i} \\ C_{\psi_i} \end{bmatrix} \omega_i = \begin{bmatrix} C_{\psi_i} & -\nu_i S_{\psi_i} \\ S_{\psi_i} & \nu_i C_{\psi_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\nu}_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \mathbb{A}_i U_i^* \quad (4.33)$$

Donde  $\mathbb{A}_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz invertible si  $\nu_i \neq 0$ . Entonces el sistema (4.30) puede ser reescrito como:

$$\dot{P}_i = \Gamma_i \quad (4.34)$$

$$\dot{\Gamma}_i = \mathbb{A}_i U_i^* \quad (4.35)$$

Este nuevo sistema se puede considerar una conexión en cascada, donde (4.34) tiene a  $\Gamma_i$  como entrada de control, y (4.35) tiene a  $U_i^*$  como entrada de control.

Se define la formación rígida deseada con un framework mínima e infinitesimalmente rígido  $\mathcal{F}^* \triangleq (G^*, \mathcal{P}^*)$ , donde  $G^* \triangleq (V^*, E^*)$  es el grafo del líder y seguidores. El movimiento del líder es independiente de los seguidores, y algunos de ellos tienen acceso a la velocidad del líder. El vector de velocidad lineal y velocidad angular del líder,  $v_L = [v_{LN} \ v_{LE}]^T$  y  $\omega_L$  respectivamente, están acotados, además las aceleraciones lineal y angular  $\dot{v}_L, \dot{\omega}_L$

respectivamente, también son acotadas, donde la magnitud de  $\dot{v}_L$  está acotada por  $\|\dot{v}_L\|_2 \leq \gamma$ . Para el grafo líder-seguidores  $G^*$  se tiene:  $|V| = n^*$ ,  $|E| = m^* = 2n^* - 3$ . Considerando únicamente a los seguidores, su grafo está dado por  $G \triangleq (V, E)$  el cual se asume conectado y con  $|V| = n = n^* - 1$ . Para el diseño del controlador de formación se asume que cada seguidor es capaz de medir su posición relativa respecto a sus vecinos  $q_{ij} = p_j - p_i$ ,  $\forall j \in \mathcal{N}_i$ , y a través de sensores abordo y odometría es capaz de estimar su posición y orientación inerciales  $\zeta_i$ , así como sus velocidades  $\dot{\zeta}_i$ . El objetivo es diseñar controles de maniobra de formación con convergencia en tiempo finito, distribuidos y basados en distancia para los seguidores, tal que, simultáneamente mantengan las distancias deseadas entre agentes y se muevan en cohesión con el líder. Los objetivos de control se pueden expresar como

$$e_{ij} = \|P_i - P_j\| - \delta_{ij} = 0 \quad (4.36)$$

$$v_i = v_L \quad (4.37)$$

donde  $(i, j) \in E^*$ . Estas ecuaciones representan la meta de mantener una distancia deseada  $\delta_{ij}$  entre agentes vecinos, y que todos los agentes se muevan a la misma velocidad que el líder. El vector de error de distancia entre agentes  $e$  se ordena de tal forma que  $i < j$ ,  $(i, j) \in V$ . Entonces:  $e = [\dots, e_{Lk}, \dots, e_{ij}, \dots]^T \in \mathbb{R}^{m^*}$  donde  $k \in \mathcal{N}_L$  y  $(i, j) \in V$ . Este ordenamiento será útil en la estructura de  $\eta$  y en consecuencia para las matrices de rigidez  $R$  y  $\bar{R}$ . Definiendo:

$$\eta_{ij} = \|P_i - P_j\|^2 - \delta_{ij}^2 = e_{ij} (e_{ij} + 2\delta_{ij}) \quad (4.38)$$

Es importante destacar que  $\eta_{ij}$  es cero si y sólo si  $e_{ij} = 0$ , es decir, cuando se logra el objetivo de control. Entonces, el objetivo de control (4.36) se alcanza al llevar a  $\eta$  hacia cero.

#### 4.2.1. Estimador de velocidad distribuido

Para cada agente, se utiliza el siguiente estimador, basado en [12] y [64], que estima el vector velocidad del líder  $v_L = [v_{LN} \ v_{LE}]^T$ :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_i = & -k_1 \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij} (\hat{v}_i - \hat{v}_j)] + b_i (\hat{v}_i - v_L) \right) \\ & - k_2 \text{sign} \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij} (\hat{v}_i - \hat{v}_j)] + b_i (\hat{v}_i - v_L) \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde  $\hat{v}_i = [\hat{v}_{iN} \ \hat{v}_{iE}]^T$ , siendo  $\hat{v}_{iN}$  y  $\hat{v}_{iE}$  las componentes norte y este de la estimación de  $v_L$  para el  $i$ -ésimo agente, además,  $j \in \mathcal{N}_i$ .  $a_{ij}$  son elementos de la matriz de adyacencia del grafo,  $b_i$  representa la conectividad entre un agente  $i$  y el líder, si el seguidor tiene acceso al líder, entonces  $b_i = 1$ , en caso contrario  $b_i = 0$ , se asume que al menos un agente tiene acceso al líder, y  $k_1, k_2$  son escalares positivos. Todas las ecuaciones se entienden en el sentido de Filippov con el fin de que sea posible usar la función discontinua signo (sign). [34].

**Teorema 4.1.** *Bajo las suposiciones de que el grafo de seguidores es conectado y al menos un seguidor tiene acceso a  $V_L$ , el estimador (4.39) lleva  $\hat{V}$  hacia  $V_L$  en tiempo finito  $T_0 = 2\mathcal{V}_{C1}(\tilde{V}(0))^{1/2}/K_{C1}$ , donde  $K_{C1} = (-\sqrt{2}(k_2 - \gamma)\lambda_{\min}(\mathcal{H}_2))/\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{H}_2)}$ , al seleccionar:  $k_2 > \gamma$ .*

*Demostración.* Sumando y restando  $v_L$  en (4.39), y reordenando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_i = & -k_1 \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}\hat{v}_i] - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}v_L] - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}(\hat{v}_j - v_L)] + b_i(\hat{v}_i - v_L) \right) \\ & - k_2 \text{sign} \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}\hat{v}_i] - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}v_L] - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}(\hat{v}_j - v_L)] + b_i(\hat{v}_i - v_L) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}] = d_i$ , entonces (4.40) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_i = & -k_1 \left( d_i(\hat{v}_i - v_L) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}(\hat{v}_j - v_L)] + b_i(\hat{v}_i - v_L) \right) \\ & - k_2 \text{sign} \left( d_i(\hat{v}_i - v_L) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [a_{ij}(\hat{v}_j - v_L)] + b_i(\hat{v}_i - v_L) \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Se definen las siguientes matrices relacionadas al grafo  $G$ :  $D_2 = D \otimes I_2$ ,  $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ ,  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \otimes I_2$ ,  $B_2 = B \otimes I_2$  y  $A_2 = A \otimes I_2$ . Resulta evidente que:  $\mathcal{L}_2 = D_2 - A_2$ . Tomando  $\mathcal{H} = \mathcal{L} + B$  y  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \otimes I_2$ , se llega a  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{L}_2 + B_2$ . Se define  $\hat{V} = [\hat{v}_1^T \dots \hat{v}_n^T]^T$  como el vector columna de las estimaciones de los seguidores y  $V_L = \mathbf{1}_n \otimes v_L = [v_L^T, \dots, v_L^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ . Con

lo anterior, la ecuación (4.41) puede ser escrita para todo el sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{V}} &= -k_1 \left( D_2 \hat{V} - A_2 \hat{V} - D_2 V_L + A_2 V_L + B_2 \hat{V} - B_2 V_L \right) \\
&\quad - k_2 \operatorname{sign} \left( D_2 \hat{V} - A_2 \hat{V} - D_2 V_L + A_2 V_L + B_2 \hat{V} - B_2 V_L \right) \\
&= -k_1 \left( \mathcal{L}_2 \hat{V} - \mathcal{L}_2 V_L + B_2 \hat{V} - B_2 V_L \right) - k_2 \operatorname{sign} \left( \mathcal{L}_2 \hat{V} - \mathcal{L}_2 V_L + B_2 \hat{V} - B_2 V_L \right) \\
&= -k_1 \left[ \mathcal{H}_2 \left( \hat{V} - V_L \right) \right] - k_2 \operatorname{sign} \left[ \mathcal{H}_2 \left( \hat{V} - V_L \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Sea  $\tilde{V} = \hat{V} - V_L \rightarrow \dot{\tilde{V}} = \dot{\hat{V}} - \dot{V}_L$ , entonces:

$$\dot{\tilde{V}} = -k_1 \left( \mathcal{H}_2 \tilde{V} \right) - k_2 \operatorname{sign} \left( \mathcal{H}_2 \tilde{V} \right) - \dot{V}_L \tag{4.43}$$

De acuerdo con el Lema 2.10, los eigenvalores de la matriz  $\mathcal{H}_2$  se encuentran en la unión de  $2n$  círculos centrados en  $h_{ii}$  de radio  $r_i = \sum_{j \neq i} |h_{ij}|$ . En general el  $j$ -ésimo círculo está centrado en  $h_{jj} = d_{jj}$  cuando  $b_j = 0$ ; pero al menos un círculo  $C_k$ , con  $b_k = 1$  está centrado en  $h_{kk} = d_{kk} + b_k$ , con radio  $r_k = \sum_{i \neq k} |h_{ki}| = \sum_{i \neq k} |a_{ki}| = d_{kk}$  con  $i \in V$ , en consecuencia no pasa por el origen y se encuentra en la parte derecha del plano complejo. Por lo tanto para un grafo conectado, todos los eigenvalores son positivos y  $\mathcal{H}$  es una matriz definida positiva [65]. La matriz  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \otimes I_2$  también es definida positiva, pues los eigenvalores no cambian, debido a las propiedades del producto de Kronecker.

Considere la función candidata de Lyapunov:  $\mathcal{V}_{C1} = \frac{1}{2} \tilde{V}^T \mathcal{H}_2 \tilde{V}$ , la cual es definida positiva y radialmente no acotada. Tomando su derivada temporal:  $\dot{\mathcal{V}}_{C1} = \tilde{V}^T \mathcal{H}_2 \dot{\tilde{V}}$

$$\dot{\mathcal{V}}_{C1} = -k_1 \tilde{V}^T \mathcal{H}_2^2 \tilde{V} - k_2 \tilde{V}^T \mathcal{H}_2 \operatorname{sign} \left( \mathcal{H}_2 \tilde{V} \right) - \tilde{V}^T \mathcal{H}_2 \dot{V}_L \tag{4.44}$$

donde  $\mathcal{H}_2^2 = \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_2$ . Note que  $[\mathcal{H}_2 \tilde{V}]$  es un vector de  $2n \times 1$ , el subíndice  $\ell$  se usa para indicar un elemento de este vector, entonces se denota al  $\ell$ -ésimo elemento de  $[\mathcal{H}_2 \tilde{V}]$  como:  $[\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_\ell$ . Tenga en cuenta que cuando  $\ell$  es impar, el elemento corresponde a la componente norte, y cuando es par corresponde a

la componente este. Con lo que (4.44) puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{V}}_{C1} &= -k_1 \tilde{V}^T \mathcal{H}_2^2 \tilde{V} - k_2 \left( \sum_{\ell=1}^{2n} \left( [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{\ell} \operatorname{sign} [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{\ell} \right) \right) \\
&\quad - \dot{v}_{LN} \sum_{l=1}^n [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{2l-1} - \dot{v}_{LE} \sum_{l=1}^n [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{2l} \\
&= -k_1 \tilde{V}^T \mathcal{H}_2^2 \tilde{V} - k_2 \sum_{\ell=1}^{2n} \left| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{\ell} \right| - \dot{v}_{LN} \sum_{l=1}^n [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{2l-1} - \dot{v}_{LE} \sum_{l=1}^n [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{2l}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Como la magnitud de  $\dot{V}_L$  se encuentra acotada, lo anterior puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{V}}_{C1} &< -k_1 \tilde{V}^T \mathcal{H}_2^2 \tilde{V} - k_2 \sum_{\ell=1}^{2n} \left| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{\ell} \right| + \gamma \sum_{l=1}^n \left| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{2l-1} \right| + \gamma \sum_{l=1}^n \left| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{2l} \right| \\
&= -k_1 \tilde{V}^T \mathcal{H}_2^2 \tilde{V} - k_2 \sum_{\ell=1}^{2n} \left| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{\ell} \right| + \gamma \sum_{\ell=1}^{2n} \left| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{\ell} \right| \\
&= -k_1 \tilde{V}^T \mathcal{H}_2^2 \tilde{V} - (k_2 - \gamma) \sum_{\ell=1}^{2n} \left| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{\ell} \right|
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Si  $k_2 > \gamma$  entonces  $\dot{\mathcal{V}}_{C1}$  es definido negativo  $\forall \tilde{v} \neq 0$ , además como  $\mathcal{V}_{C1}$  es radialmente no acotado, el origen de  $\tilde{V}$  es globalmente asintóticamente estable. En consecuencia  $\tilde{V} \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Así, a medida que  $\tilde{V} \rightarrow 0$ , entonces  $\hat{V} \rightarrow V_L$ .

De (4.46), note que:

$$\dot{\mathcal{V}}_{C1} < -(k_2 - \gamma) \sum_{\ell=1}^{2n} \left| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}]_{\ell} \right| = -(k_2 - \gamma) \left\| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}] \right\|_1 \tag{4.47}$$

De la definición de la norma-2 y el Lema 2.4 se obtiene

$$\dot{\mathcal{V}}_{C1} \leq -(k_2 - \gamma) \left\| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}] \right\|_1 \leq -(k_2 - \gamma) \left\| [\mathcal{H}_2 \tilde{V}] \right\|_2 \tag{4.48}$$

De (4.48) y el Lema 2.5, se concluye que el origen de  $\tilde{V}$  es globalmente exponencialmente estable, mas aún, (4.43) es ISS, [19].

Aplicando el Lema 2.5 en (4.48) se obtiene:

$$\dot{\mathcal{V}}_{C_1} \leq \frac{-(k_2 - \gamma) \lambda_{\min}(\mathcal{H}_2) \left( \lambda_{\max}(\mathcal{H}_2) \|\tilde{V}\|_2^2 \right)^{1/2}}{(\lambda_{\max}(\mathcal{H}_2))^{1/2}} \quad (4.49)$$

además, considerando que:  $(2\mathcal{V}_{C_1})^{1/2} = \sqrt{\tilde{V}^T \mathcal{H}_2 \tilde{V}} \leq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{H}_2) \|\tilde{V}\|_2^2}$ . La ecuación, (4.49) se escribe como:  $\dot{\mathcal{V}}_{C_1} \leq \frac{-(k_2 - \gamma) \lambda_{\min}(\mathcal{H}_2)}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{H}_2)}} \sqrt{2\mathcal{V}_{C_1}}$ , de la cual se puede obtener:

$$2\mathcal{V}_{C_1}(\tilde{V}(t))^{1/2} \leq 2\mathcal{V}_{C_1}(\tilde{V}(0))^{1/2} - \frac{-\sqrt{2} (k_2 - \gamma) \lambda_{\min}(\mathcal{H}_2)}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{H}_2)}} t \quad (4.50)$$

Cuando  $\tilde{V} = 0$  se tiene  $\mathcal{V}_{C_1}(\tilde{V}) = 0$ , entonces

$$t \leq T_0 = \frac{2\mathcal{V}_{C_1}(\tilde{V}(0))^{1/2}}{K_{C_1}} \quad (4.51)$$

donde  $K_{C_1} = (-\sqrt{2} (k_2 - \gamma) \lambda_{\min}(\mathcal{H}_2)) / \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{H}_2)}$ . Esto implica que el estimador (4.39) lleva a  $\tilde{V} \rightarrow V_L$  en tiempo finito  $T_0$ . ■

## 4.2.2. Control de maniobra de formación líder-seguidor

De (4.36), la dinámica del error está dada por:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{[P_i - P_j]^T (\dot{P}_i - \dot{P}_j)}{e_{ij} + \delta_{ij}} \quad (4.52)$$

Y de (4.38) la dinámica de  $\eta_{ij}$  es

$$\dot{\eta}_{ij} = 2 [P_i - P_j]^T (\dot{P}_i - \dot{P}_j); \quad (i, j) \in E^* \quad (4.53)$$

La matriz de rigidez  $R(P)$  del framework  $\mathcal{F}^*$  es una matriz real con  $m^*$  filas, el número de aristas, con el ordenamiento correspondiente, y  $2n^*$  columnas, que es el número de vértices  $n^*$  multiplicado por la dimensión del conjunto



de posición  $\mathcal{P}^*$ , en este caso: 2, con el ordenamiento apropiado. Entonces cada fila está asociada con un vértice del grafo, en consecuencia, cada elemento de la matriz de rigidez es una componente de la distancia relativa entre dos nodos que comparten una arista, si no existe una arista entre ellos el elemento es cero.

La fila que corresponde a la artista  $(i, j) \in E^*$  donde  $i < j$ , tiene la forma, [22]:

$$\left[ 0_2^T, \dots, (P_i - P_j)^T, \dots, 0_2^T, \dots, (P_j - P_i)^T, \dots, 0_2^T \right] \quad (4.54)$$

Los elementos  $0_2^T$  se encuentran en columnas que corresponden a nodos diferentes de  $i, j$ , mientras  $(P_i - P_j)^T$  se encuentra en la  $i$ -ésima columna y  $(P_j - P_i)^T$  en la  $j$ -ésima columna. El vector  $\eta$  posee el mismo ordenamiento que  $e$ , es decir  $\eta = [\dots, \eta_{Lk}, \dots, \eta_{ij}, \dots]^T$ , con dinámica:

$$\dot{\eta} = 2R \begin{bmatrix} \dot{P}_L \\ \dot{P} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Donde  $\dot{P} = [\dot{P}_1^T \dots \dot{P}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ , y  $\dot{P}_L = [\dot{N}_L \ \dot{E}_L]^T \in \mathbb{R}^2$  denota a las componentes de la velocidad del líder. Tenga en cuenta que el orden de las filas de  $R$  está asociado con el ordenamiento de  $\eta$ , y orden de las columnas de  $R$  está asociado con el ordenamiento de  $[\dot{P}_L^T \ \dot{P}^T]^T$ .

Al sustituir (4.34) en (4.55) se obtiene el nuevo sistema:

$$\dot{\eta} = 2R \begin{bmatrix} \dot{P}_L \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\dot{\Gamma} = \mathbb{A}U^* \quad (4.57)$$

Donde  $\Gamma = [\Gamma_1^T, \dots, \Gamma_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\mathbb{A}$  es una matriz diagonal a bloques no singular  $\mathbb{A} = \text{diag} \{ \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n \} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , y  $U^* = [U_1^{*T}, \dots, U_n^{*T}] \in \mathbb{R}^{2n}$ . Este sistema puede, una vez más, considerarse una conexión en cascada. Se usa el método de backstepping para diseñar un control virtual  $\Gamma = \xi$  que lleve a  $\eta$  hacia 0.

**Teorema 4.2.** *El sistema (4.56)(4.57) es llevado a su origen en tiempo finito  $T_f = T_0 + T_1$ , donde  $T_1$  está acotada superiormente por  $T_1 \leq \frac{(1-\alpha)\mathcal{V}_{C2}(\bar{\eta}(T_0))^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{\kappa_3(1-\alpha)}$  con la ley de control:*

$$U^* = -\mathbb{A}^{-1} \left( \bar{R} [\text{sig}(\eta)^\alpha] - \dot{\xi} + k_4 \text{sig}(\Lambda)^{\left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}\right)} \right) \quad (4.58)$$

donde  $\dot{\xi}$  es la primera derivada temporal de

$$\xi = -k_3 \bar{R}^T \text{sig}(\eta)^\alpha + \hat{V} \quad (4.59)$$

Al seleccionar  $k_3, k_4$  como escalares positivos reales y siendo  $\bar{R}$  la matriz de rigidez reducida tal como se muestra en (4.65), con  $\Lambda = \Gamma - \xi$  y  $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ .

*Demostración.* Es importante destacar que (4.59) utiliza la velocidad estimada  $\hat{V}$ . Expresando la posición de cada agente relativa a un marco de referencia fijo en el líder, denotado por  $\Sigma^L$ , con la misma orientación que el marco inercial fijo en tierra, como se muestra en la Figura 4.2, la posición y velocidad relativas del líder en este marco son:

$$\bar{P}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\bar{P}}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Y para los seguidores, la posición y velocidad relativas al líder son

$$\bar{P}_i = P_i - P_L \rightarrow \dot{\bar{P}}_i = \dot{P}_i - \dot{P}_L \quad (4.61)$$

Definiendo  $\bar{e}_{ij} = \|\bar{P}_i - \bar{P}_j\| - \delta_{ij} = \|\bar{q}_{ij}\| - \delta_{ij}$ , donde  $\bar{q}_{ij} = \bar{P}_i - \bar{P}_j$ , y  $(i, j) \in E^*$ . Entonces la dinámica del error es

$$\dot{\bar{e}}_{ij} = \frac{\bar{q}_{ij}^T \dot{\bar{q}}_{ij}}{\bar{e}_{ij} + \delta_{ij}} \quad (4.62)$$

Se define en el sistema coordenado fijo en el líder a  $\bar{\eta}_{ij}$

$$\bar{\eta}_{ij} = \|\bar{P}_i - \bar{P}_j\|^2 - \delta_{ij}^2 = \bar{e}_{ij} (\bar{e}_{ij} + 2\delta_{ij}) \quad (4.63)$$

con dinámica  $\dot{\bar{\eta}}_{ij} = 2\bar{q}_{ij}^T \dot{\bar{q}}_{ij} = 2(\bar{P}_i - \bar{P}_j)^T (\dot{\bar{P}}_i - \dot{\bar{P}}_j)$ . Teniendo en cuenta que  $\bar{e}_{Lk} = \|\bar{P}_L - \bar{P}_k\| - \delta_{kL} = \|P_L - P_k\| - \delta_{Lk} = e_{Lk}$ , donde  $k \in \mathcal{N}_L$ . Y que para

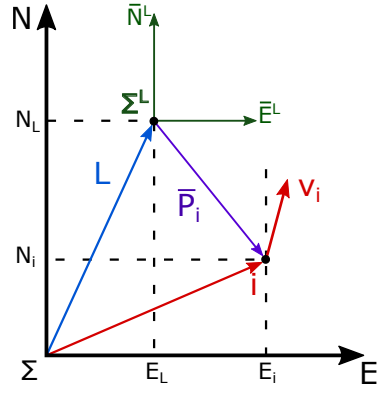


Figura 4.2: Marco de referencia fijo en el líder  $\Sigma_L$ , note que tiene la misma orientación que  $\Sigma$ ; y la posición relativa  $\bar{P}_i$  en el marco líder de un seguidor  $i$ .

$\bar{e}_{ij} = \|\bar{P}_i - \bar{P}_j\| - \delta_{ij} = \|P_i - P_j\| - \delta_{ij} = e_{ij}$ , donde  $(i, j) \in E$ . Entonces se tiene:

$$\bar{e} = e \quad \dot{\bar{e}} = \dot{e} \quad \bar{q} = q \quad (4.64)$$

$\dot{\bar{\eta}}$  tiene un ordenamiento igual a  $\dot{\eta}$ , así que  $\dot{\bar{\eta}} = [\dots, \dot{\bar{\eta}}_{Lk}, \dots, \dot{\bar{\eta}}_{ij}, \dots]^T$  donde  $\dot{\bar{\eta}}_{Lk}$  corresponde a las aristas conectando al líder con algunos (quizá todos) los seguidores, siendo dos el número mínimo de seguidores a quienes debe estar conectado, por otro lado,  $\dot{\bar{\eta}}_{ij}$  corresponde a las aristas entre seguidores. Así  $\dot{\bar{\eta}}$  puede ser reescrito en forma matricial como:

$$\dot{\bar{\eta}} = 2 \begin{bmatrix} \vdots \\ \bar{P}_k^T \dot{\bar{P}}_k \\ \vdots \\ (\bar{P}_i - \bar{P}_j)^T (\dot{\bar{P}}_i - \dot{\bar{P}}_j) \\ \vdots \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0_2^T \dots & \dots & \dots & \bar{P}_k^T \dots & \dots & \dots & 0_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ 0_2^T \dots & [\bar{P}_i - \bar{P}_j]^T \dots & 0_2^T \dots & [\bar{P}_j - \bar{P}_i]^T \dots & 0_2^T \dots & \dots & 0_2^T \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{P}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{P}}_n \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$\dot{\bar{\eta}} = 2\bar{R}\dot{\bar{P}}$$

Donde  $\bar{R} \in \mathbb{R}^{m^* \times 2n}$  y  $\dot{\bar{P}} \in \mathbb{R}^{2n}$ . Note que los renglones de la matriz  $\bar{R}$  tienen el mismo orden que  $\bar{\eta}$ , similar a la matriz de rigidez convencional  $R$ .

Partiendo de la consideración de rigidez infinitesimal únicamente para los seguidores conectados al líder, no es deseable que  $\bar{P}_k$  cambie con un movimiento infinitesimal, como se muestra en la Figura 4.3. Por lo que las proyecciones

$(\bar{V}_L \cdot \bar{P}_k)$  y  $(\bar{V}_k \cdot \bar{P}_k)$  deben ser iguales

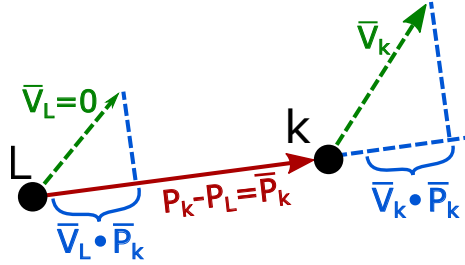


Figura 4.3: Distancia relativa entre el líder y un seguidor  $k$  en un movimiento infinitesimal.



Figura 4.4: Movimiento continuo que mantiene la restricción de perpendicularidad.

$$\bar{V}_L \cdot \bar{P}_k = \bar{V}_k \cdot \bar{P}_k = 0 \rightarrow \bar{V}_k \cdot \bar{P}_k = 0 \quad (4.66)$$

El conjunto de velocidades  $\bar{V}_k$  que satisface a la ecuación es cuando  $\bar{V}_k = 0$  o  $\bar{V}_k \perp \bar{P}_k$ , es decir,  $\bar{V}_k$  y  $\bar{P}_k$  son perpendiculares. Para que un movimiento continuo mantenga la condición de perpendicularidad, como se muestra en la Figura 4.4, este debe ser un movimiento circular [4].

La condición de rigidez infinitesimal para los seguidores, ilustrada en la Figura 4.5, está dada por:

$$\bar{V}_j \cdot (\bar{P}_i - \bar{P}_j) = \bar{V}_i \cdot (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \rightarrow (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \cdot (\bar{V}_i - \bar{V}_j) = 0 \quad (4.67)$$

Al escribir las condiciones (4.66) y (4.67) en forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0_2^T & \cdots & \cdots & \cdots & \bar{P}_k^T & \cdots & \cdots & \cdots & 0_2^T \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0_2^T & \cdots & [\bar{P}_i - \bar{P}_j]^T & \cdots & 0_2^T & \cdots & [\bar{P}_j - \bar{P}_i]^T & \cdots & 0_2^T \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \vdots \\ \bar{V}_n \end{bmatrix} = 0 \quad (4.68)$$

$\bar{R}\bar{V} = 0$

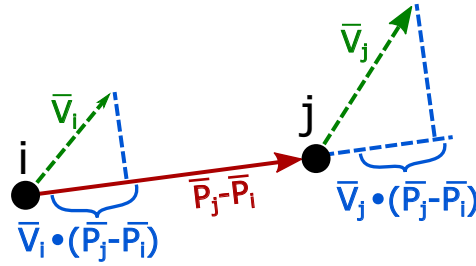


Figura 4.5: Distancia relativa entre dos seguidores  $i$  y  $j$  en un movimiento infinitesimal.

El conjunto de velocidades  $\bar{V}$  que satisface a (4.68) es el espacio nulo (kernel) de  $\bar{R}$ , y los grados de libertad (GDL) en el conjunto  $\bar{V}$ , es decir, el conjunto de movimientos infinitesimales, es la nulidad de  $\bar{R}$ . Para un líder fijo en una posición, como es el caso para el marco de referencia fijo en el líder  $\Sigma_L$ , es evidente que el número de GDL del framework es 1, una rotación alrededor del líder, por lo que:  $\text{nullity}(\bar{R}) = 1$ .

Por el teorema rango nulidad se tiene:

$$\text{Rank}(\bar{R}) = (2n^* - 2) - 1 = 2n^* - 3 = m^*$$

Entonces  $\bar{R}$  es de rango completo en renglones y en consecuencia, de rango completo. Usando (4.64), es posible expresar a  $\dot{\bar{\eta}}$  como:

$$\dot{\bar{\eta}} = 2 \begin{bmatrix} 0_2^T & \cdots & \cdots & \cdots & [P_k - P_L]^T & \cdots & \cdots & \cdots & 0_2^T \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_2^T & \cdots & [P_i - P_j]^T & \cdots & 0_2^T & \cdots & [P_j - P_i]^T & \cdots & 0_2^T \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{P}_1 - \dot{P}_L \\ \vdots \\ \dot{P}_n - \dot{P}_L \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\dot{\bar{\eta}} = 2\bar{R}\bar{U}$$

Es conveniente señalar que la línea horizontal discontinua presente en la expresión matricial de  $\bar{R}$  indica la separación entre las distancias líder-seguidor y las distancias seguidor-seguidor, esto es resultado de la forma en que fueron ordenados los vectores  $\eta, \bar{\eta}, e$  y  $\bar{e}$ .

Considere la función potencial [12]  $\mathcal{V}_{ij} = \frac{1}{2(\alpha+1)} |\bar{\eta}_{ij}|^{\alpha+1}$ , con  $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ ,

$(i, j) \in E^*$ .  $\mathcal{V}_{ij}$  es definido positivo y como  $\bar{e}_{ij}$  está definido en  $[-\delta_{ij}, \infty]$  y  $\bar{\eta}$  es una función de  $\bar{e}_{ij}$ , entonces  $\mathcal{V}_{ij}$  es también radialmente no acotada. Definiendo la función candidata de Lyapunov:

$$\mathcal{V}_{C2} = \sum_{(i,j) \in E^*} \mathcal{V}_{ij} \quad (4.70)$$

y tomando su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_{C2} &= \frac{1}{2(\alpha + 1)} \sum_{(i,j) \in E^*} [(\alpha + 1)|\bar{\eta}_{ij}|^\alpha \text{sign}(\bar{\eta}_{ij})\dot{\bar{\eta}}_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E^*} [\text{sig}(\bar{\eta}_{ij})^\alpha \dot{\bar{\eta}}_{ij}] \\ &= [\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha]^T \bar{R}\bar{U} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Se elige el control virtual

$$\bar{U} = -k_3 \bar{R}^T \text{sig}(\bar{\eta})^\alpha \quad (4.72)$$

donde  $1/3 < \alpha < 1$  y  $k_3 > 0$ . Entonces (4.71) con el control (4.72) es:

$$\dot{\mathcal{V}}_{C2} = -k_3 [\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha]^T \bar{R}\bar{R}^T \text{sig}(\bar{\eta})^\alpha \quad (4.73)$$

Al ser el framework infinitesimalmente rígido y haber demostrado que  $\bar{R}$  es una matriz de rango completo, se determina que  $\bar{R}\bar{R}^T \geq 0$ , tomando en cuenta que  $\text{Rank}(\bar{R}\bar{R}^T) = \text{Rank}(\bar{R})$  [17], resulta que  $\bar{R}\bar{R}^T$  es de rango completo, lo cual significa que es no singular, por lo que se puede concluir que  $\bar{R}\bar{R}^T > 0$ .

Entonces:

$$\dot{\mathcal{V}}_{C2} = -k_3 [\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha]^T \bar{R}\bar{R}^T \text{sig}(\bar{\eta})^\alpha < 0 \quad (4.74)$$

Al ser  $\mathcal{V}_{C2}$  radialmente no acotada, se tiene que el origen es globalmente exponencialmente estable, [19].

Aplicando el Lema 2.5, (4.74) puede ser escrita como:

$$\dot{\mathcal{V}}_{C2} \leq -k_3 \lambda_{\min}(\bar{R}\bar{R}^T) [\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha]^T [\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha] \quad (4.75)$$

Note que  $0 < (2\alpha/1+\alpha) < 1$ , y usando el Lema 2.6

$$\begin{aligned}
[\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha]^T [\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha] &= \sum_{(i,j) \in E^*} |\bar{\eta}_{ij}|^{2\alpha} \\
&= \sum_{(i,j) \in E^*} |\bar{\eta}_{ij}|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}(1+\alpha)} \\
&\geq \left( \sum_{(i,j) \in E^*} |\bar{\eta}_{ij}|^{1+\alpha} \right)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Además, de (4.70) y (4.76) se tiene  $[\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha]^T [\text{sig}(\bar{\eta})^\alpha] \leq [2(\alpha+1)]^{\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)} \mathcal{V}_{C_2}^{\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)}$ . Entonces (4.75) puede ser reescrita como

$$\dot{\mathcal{V}}_{C_2} \leq -k_3 [2(\alpha+1)]^{\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)} \lambda_{\min}(\bar{R}\bar{R}^T) \mathcal{V}_{C_2}^{\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)} = -\mathcal{K}_3 \mathcal{V}_{C_2}^{\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)} \tag{4.77}$$

Donde  $\mathcal{K}_3 = k_3 [2(\alpha+1)]^{\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)} \lambda_{\min}(\bar{R}\bar{R}^T) > 0$ . Usando el Lema 2.21 y (4.77), se concluye que  $\bar{\eta} \rightarrow 0$  en tiempo finito  $T_1$ , donde

$$T_1 \leq \frac{(1-\alpha) \mathcal{V}_{C_2}(\bar{\eta}(T_0))^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{\mathcal{K}_3(1-\alpha)} \tag{4.78}$$

Tomando (4.63) y considerando únicamente las conexiones entre seguidores, se tiene que

$$\bar{\eta}_{ij} = \|P_i - P_j\|^2 - \delta_{ij}^2 = \eta_{ij} \tag{4.79}$$

De forma similar, para las conexiones líder-seguidor:

$$\bar{\eta}_{Lk} = \|P_L - P_k\|^2 - \delta_{ij}^2 = \eta_{Lk} \tag{4.80}$$

Por lo que  $\bar{\eta} = \eta$ , como fue demostrado que  $\bar{\eta} \rightarrow 0$  en tiempo finito, en consecuencia  $\eta \rightarrow 0$  en tiempo finito y  $\eta$  tiene un origen globalmente exponencialmente estable.

Considerando  $\bar{U}$  como una entrada virtual y que en el tiempo  $t > T_0$  se tiene  $\hat{V} = V_L$ , entonces

$$\bar{U} = \xi - \dot{P}_L \Rightarrow \xi = \bar{U} + V_L = \bar{U} + \hat{V} \tag{4.81}$$

Que para cada seguidor tiene la forma:

$$\xi_i = -k_3 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [(P_i - P_j) \text{sig}(\eta_{ij})^\alpha] + \hat{v} \tag{4.82}$$

Ahora que se ha desarrollado un control  $\xi = [\xi_1^T, \dots, \xi_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  que estabiliza a  $\eta$ , y se conoce una función candidata de Lyapunov  $\mathcal{V}_{C2}$  con  $\dot{\mathcal{V}}_{C2} \leq -W_2$ , donde  $W_2$  es una función definida positiva, se procede a diseñar el control  $U^*$  que llevará a  $\Gamma$  hacia  $\xi$ .

Para todo  $t \geq T_0$ , se tiene  $\hat{V} = V_L$ , con lo que se reescribe  $\dot{\eta}$  usando (4.59):

$$\dot{\eta} = 2R \begin{bmatrix} v_L \\ \xi \end{bmatrix} = 2R \left( \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_L \\ V_L \end{bmatrix} \right) = 2R \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{U} \end{bmatrix} + 2R \begin{bmatrix} v_L \\ V_L \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta que  $R\bar{a} = 0$  si  $\bar{a} = [a, \dots, a]^T \in \mathbb{R}^{2n^*}$ , se concluye lo siguiente

$$\dot{\eta} = 2R \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{U} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Escribiendo la matriz de rigidez  $R$ , e indicando los bloques líder-seguidor y seguidor-seguidor:

$$R = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [P_L - P_k]^T 0_2^T & \cdots & \cdots & [P_k - P_L]^T \cdots & \cdots & \cdots & \cdots 0_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_2^T & \cdots & [P_i - P_j]^T \cdots & 0_2^T & \cdots & [P_j - P_i]^T \cdots & 0_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Note que dado un vector  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  y la matriz de rigidez  $R$ , se obtiene el siguiente resultado

$$R \begin{bmatrix} 0_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ (P_L - P_k)^T 0_2 + (P_k - P_L)^T x_k \\ \vdots \\ (P_i - P_j)^T x_i + (P_j - P_i)^T x_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ (P_k - P_L)^T x_k \\ \vdots \\ (P_i - P_j)^T (x_i - x_j) \\ \vdots \end{bmatrix} = \bar{R}x$$

En consecuencia se puede reescribir  $\dot{\eta}$  como

$$\dot{\eta} = 2\bar{R}\bar{U} \quad (4.84)$$



Este resultado es el mismo que se encontró en (4.69). Tomando (4.56), sumando y restando  $\xi$  en  $\Gamma$  se obtiene:

$$\dot{\eta} = 2R \begin{bmatrix} v_L \\ \Gamma + \xi - \xi \end{bmatrix} = 2R \left( \begin{bmatrix} v_L \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ \Gamma - \xi \end{bmatrix} \right) = 2\bar{R}\bar{U} + 2\bar{R}(\Gamma - \xi)$$

Usando el cambio de variables  $\Lambda = \Gamma - \xi$ , resulta el sistema:

$$\dot{\eta} = 2\bar{R}\bar{U} + 2\bar{R}\Lambda; \quad \dot{\Lambda} = \mathbb{A}U^* - \dot{\xi} \quad (4.85)$$

Eligiendo la función candidata de Lyapunov:

$$\mathcal{V}_{C3} = \mathcal{V}_{C2} + \frac{1}{2}\Lambda^T\Lambda \quad (4.86)$$

La cual es radialmente no acotada, y tomando su derivada temporal

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_{C3} &= \frac{\partial \mathcal{V}_{C2}}{\partial \eta} (2\bar{R}\bar{U}) + \frac{\partial \mathcal{V}_{C2}}{\partial \eta} (2\bar{R}\Lambda) + \Lambda^T (\mathbb{A}U^* - \dot{\xi}) \\ &\leq -W_2 + [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\Lambda + \Lambda^T \mathbb{A}U^* - \Lambda^T \dot{\xi} \\ &= -W_2 + \Lambda^T \left( \bar{R}^T [\text{sig}(\eta)^\alpha] + \mathbb{A}U^* - \dot{\xi} \right) \end{aligned} \quad (4.87)$$

Eligiendo  $U^* = -\mathbb{A}^{-1} \left( \bar{R} [\text{sig}(\eta)^\alpha] - \dot{\xi} + k_4 \text{sig}(\Lambda)^{\left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}\right)} \right)$  con  $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ :

$$\dot{\mathcal{V}}_{C3} \leq -W_2 - k_4 \Lambda^T \text{sig}(\Lambda)^{\left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}\right)} \quad (4.88)$$

Se denota al  $\ell$ -ésimo elemento escalar de  $\Lambda$  como  $\Lambda_\ell$  con el fin de evitar que se confunda con el vector  $\Lambda_i$  de  $2n \times 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_{C3} &\leq -W_2 - k_4 \sum_{\ell=1}^{2n} \left( \Lambda_\ell \text{sign}(\Lambda_\ell) |\Lambda_\ell|^{\left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}\right)} \right) \\ \dot{\mathcal{V}}_{C3} &\leq -W_2 - k_4 \sum_{\ell=1}^{2n} \left( [|\Lambda_\ell|^2]^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} \right) \end{aligned} \quad (4.89)$$

Del Lema 2.6 se tiene:  $\sum_{\ell=1}^{2n} \left[ (|\Lambda_\ell|^2)^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} \right] > \left[ \sum_{\ell=1}^{2n} (|\Lambda_\ell|^2) \right]^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)}$ . Tomando  $W_2 = \mathcal{K}_3 \mathcal{V}_{C2}^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)}$  y  $\mathcal{V}_C = 1/2 \Lambda^T \Lambda = 1/2 \sum_{\ell=1}^{2n} (\Lambda_\ell^2)$ , (4.89) puede ser reescrita

como:  $\dot{\mathcal{V}}_{C3} \leq -\mathcal{K}_3 \mathcal{V}_{C2}^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} - k_4 [2\mathcal{V}_C]^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} \Rightarrow \dot{\mathcal{V}}_{C3} \leq -\mathcal{K}_3 \mathcal{V}_{C2}^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} - \mathcal{K}_4 \mathcal{V}_C^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)}$ , donde  $\mathcal{K}_4 = 2^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} k_4$ . Se define al escalar real positivo  $\mathcal{K}_5 \leq \min(\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4)$ , con el cual se obtiene:

$$\dot{\mathcal{V}}_{C3} \leq -\mathcal{K}_5 \left( \mathcal{V}_{C2}^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} + \mathcal{V}_C^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} \right) \quad (4.90)$$

Como  $\mathcal{V}_{C3} = \mathcal{V}_{C2} + \mathcal{V}_C$ , entonces  $\mathcal{C}\mathcal{V}_{C3}^\beta = \mathcal{C}(\mathcal{V}_{C2} + \mathcal{V}_C)^\beta$  donde  $\mathcal{C}$  es un escalar real positivo, y  $0 < \beta < 1$ . Del Lema 2.6 se tiene:  $(\mathcal{V}_{C2} + \mathcal{V}_C)^\beta < \left(\mathcal{V}_{C2}^\beta + \mathcal{V}_C^\beta\right)$  con lo que se llega a  $\mathcal{C}\mathcal{V}_{C3}^\beta < \mathcal{C}(\mathcal{V}_{C2}^\beta + \mathcal{V}_C^\beta)$ , entonces:

$$\dot{\mathcal{V}}_{C3} \leq -\mathcal{K}_5 \mathcal{V}_{C3}^{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)} \quad (4.91)$$

Es evidente que  $\dot{\mathcal{V}}_{C3}$  es definida negativa, por lo tanto  $\eta \rightarrow 0$  y  $\Lambda \rightarrow 0$ , con lo que se concluye que el origen de (4.85) es globalmente asintóticamente estable, mas aún, con base en el Lema 2.21, se llega al origen en tiempo finito  $T_2$ . Como  $\Lambda \rightarrow 0$  esto implica que  $\Gamma \rightarrow \xi$ .

La ley de control (4.58) depende de  $\dot{\xi}$ , esta derivada se calcula con un diferenciador por modos deslizantes de primer orden, [39]

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_i &= -k_5 \left| \tilde{\xi}_i - \xi_i \right|^{1/2} \text{sign}(\tilde{\xi}_i - \xi_i) + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -k_6 \text{sign}(\tilde{\xi}_i - \xi_i) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Donde  $\dot{\tilde{\xi}}$  es la derivada calculada, y  $k_6, k_7$  son escalares reales positivos.

Hasta ahora se ha demostrado la estabilidad del sistema (4.56),(4.57) para el tiempo  $t > T_0$ , cuando  $\hat{V}$  ha convergido a  $V_L$ . A continuación se considera el intervalo de tiempo  $0 \leq t < T_0$ .

Reescribiendo  $\dot{\eta}$  usando la entrada (4.59):

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= 2R \begin{bmatrix} v_L \\ \xi \end{bmatrix} = 2R \left( \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_L \\ \hat{V} \end{bmatrix} \right) = 2R \left( \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_L + 0_2 \\ V_L + \tilde{V} \end{bmatrix} \right) \\ &= 2R \begin{bmatrix} 0_2 \\ \bar{U} \end{bmatrix} + 2R \begin{bmatrix} 0_2 \\ \tilde{V} \end{bmatrix} = 2\bar{R}(\bar{U} + \tilde{V}) \end{aligned}$$

Se sigue un procedimiento similar a (4.2.2), se llega entonces al sistema

$$\dot{\eta} = 2\bar{R}\bar{U} + 2\bar{R}\Lambda + 2\bar{R}\tilde{V}; \quad \dot{\Lambda} = AU^* - \dot{\xi} \quad (4.93)$$

Que es un sistema en cascada. Usando la función candidata de Lyapunov (4.86):

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_{C3} &= \frac{\partial \mathcal{V}_{C2}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \Lambda^T (AU^* + \dot{\xi}) \\ &= \frac{1}{2} [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \left( 2\bar{R}\bar{U} + 2\bar{R}\Lambda + 2\bar{R}\tilde{V} \right) + \Lambda^T (AU^* - \dot{\xi}) \end{aligned} \quad (4.94)$$

por otro lado, definiendo el vector  $Z^T = [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R} \in \mathbb{R}^{2n}$ , con lo que se puede obtener  $k_3 [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\tilde{V} = k_3 Z^T \tilde{V}$  y aplicando el Lema 2.7 con  $p = q = 2$ :

$$\begin{aligned} k_3 Z^T \tilde{V} &\leq k_3 \left\| Z^T \tilde{V} \right\|_1 \leq k_3 \|Z\|_2 \|\tilde{V}\|_2 \\ k_3 Z^T \tilde{V} &\leq \left( k_3^2 [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\bar{R}^T \text{sig}(\eta)^\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left( \tilde{V}^T \tilde{V} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Aplicando ahora el Lema 2.8 se obtiene:

$$\begin{aligned} k_3 [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\tilde{V} &\leq \left( k_3^2 [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\bar{R}^T \text{sig}(\eta)^\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left( \tilde{V}^T \tilde{V} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\quad \frac{k_3^2}{2} \left( [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\bar{R}^T \text{sig}(\eta)^\alpha \right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{V}^T \tilde{V} \right) \end{aligned}$$

Multiplicando por  $k_3$  en ambos lados de (4.94) y sustituyendo los resultados obtenidos anteriormente en:  $k_3 [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\tilde{V}$ , se llega a

$$\begin{aligned} k_3 \dot{\mathcal{V}}_{C3} &\leq -k_3^2 [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\bar{R}^T \text{sig}(\eta)^\alpha - k_4 k_3 \Lambda^T \text{sig}(\Lambda)^{\left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}\right)} \\ &\quad + \frac{k_3^2}{2} \left( [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T \bar{R}\bar{R}^T \text{sig}(\eta)^\alpha \right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{V}^T \tilde{V} \right) \end{aligned} \quad (4.95)$$

Dividiendo entre  $k_3$ , aplicando el Lema 2.5 y usando la notación de norma se obtiene:  $\dot{\mathcal{V}}_{C3} \leq -\frac{k_3}{2} \lambda_{\min} [\bar{R}\bar{R}^T] [\text{sig}(\eta)^\alpha]^T [\text{sig}(\eta)^\alpha] - k_4 \|\Lambda\|_{\frac{4\alpha}{\alpha+1}} + \frac{1}{2k_3} \|\tilde{V}\|_2^2$

Teniendo en cuenta que  $[\text{sig}(\eta)^\alpha]^T [\text{sig}(\eta)^\alpha] = \|\eta\|_{2\alpha}^{2\alpha}$ , se concluye

$$\dot{\mathcal{V}}_{C3} \leq -\frac{k_3}{2} \lambda_{\min} [\bar{R}\bar{R}^T] \|\eta\|_{2\alpha}^{2\alpha} - k_4 \|\Lambda\|_{\frac{4\alpha}{\alpha+1}} + \frac{1}{2k_3} \|\tilde{V}\|_2^2 \quad (4.96)$$

Con base en el Corolario 5.10 de [30], el sistema (4.93) es ISS con respecto a la entrada  $\tilde{V}$ . Como (4.93) y (4.43) son ISS, entonces la conexión en cascada ente (4.93) y (4.43) es ISS, [19]. En consecuencia, el sistema (4.56)(4.57) es estable cuando  $\hat{V} \rightarrow V_L$  en el intervalo de tiempo  $t \leq T_0$ , posteriormente, para  $t > T_0$ ,  $\hat{V}$  sigue a  $V_L$  y  $\eta \rightarrow 0$  en tiempo finito, logrando el objetivo de control. ■

### 4.2.3. Resultados en marcos de referencia locales

Los resultados anteriores están dados en el marco inercial fijo en tierra, similar a [12] se mostrará que los algoritmos propuestos pueden ser expresados en el marco de referencia local de cada agente, y además, que tanto el estimador de velocidad como el control de formación son distribuidos.

#### 4.2.3.1. Estimador de velocidad

El estado  $\hat{v}_i$  se calcula al integrar (4.39), debido a que cada agente es capaz de estimar su orientación inercial, las estimaciones de velocidad de cada agente pueden ser comunicadas en coordenadas inerciales, que posteriormente se pueden expresar en  $\Sigma^i$  a través de la matriz de rotación de  $\Sigma$  a  $\Sigma^i$ , denotada por  $\mathcal{R}_i$ . Usando el superíndice  $i$  para indicar que una variable está expresada en  $\Sigma^i$ , entonces la estimación local de velocidad para el agente  $i$  es:

$$\hat{v}_i^i = \mathcal{R}_i \hat{v}_i \quad (4.97)$$

#### 4.2.3.2. Control de formación.

Ya que se tiene la velocidad estimada en el marco local  $\hat{v}_i^i$ , la ley de control virtual (4.82) puede ser expresada en coordenadas locales:

$$\xi_i^i = \mathcal{R}_i \xi_i = -k_3 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathcal{R}_i [q_{ij} \text{sig}(\eta_{ij})^\alpha] + \hat{v}_i^i = -k_3 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [q_{ij}^i \text{sig}(\eta_{ij}^i)^\alpha] + \hat{v}_i^i \quad (4.98)$$

Como  $\eta_{ij}$  depende solo de las distancias relativas, que son independientes del marco, entonces  $\eta_{ij} = \eta_{ij}^i$ . Además  $q_{ij}^i$  es la posición relativa medida localmente, entonces la ley de control virtual puede ser implementada localmente. La ley de control (4.58) puede se escribe para cada agente como:

$$U_i^* = -\mathbb{A}_i^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [q_{ij} \text{sig}(\eta_{ij})^\alpha] - \dot{\xi}_i + k_4 \text{sig}(\Lambda_i)^{\left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}\right)} \right) \quad (4.99)$$

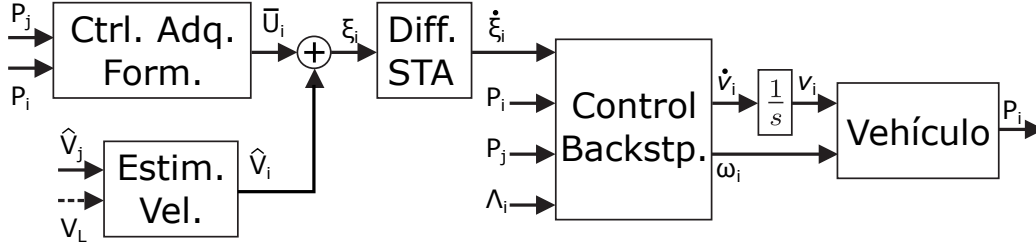


Figura 4.6: Diagrama de bloques del control de adquisición de formación.

La cual en coordenadas locales toma la forma:

$$U_i^{i*} = -\mathcal{R}_i \mathbb{A}_i^{-1} \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [q_{ij}^i \text{sig}(\eta_{ij}^i)^\alpha] - \dot{\xi}_i^i + k_4 \text{sig}(\Lambda_i^i)^{\left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}\right)} \right) \quad (4.100)$$

Donde  $\Lambda_i^i = \mathcal{R}_i \Gamma_i - \xi_i^i = [\nu_i^i] - \xi_i^i$ . Como  $\theta_i$  se puede estimar a bordo,  $\mathbb{A}_i^{-1}$  se puede calcular, y  $\dot{\xi}_i^i$  se puede obtener de forma similar  $\dot{\xi}_i$ . Por lo tanto, la ley de control se puede implementar localmente.

Los controles de formación y estimador propuestos se pueden representar con el diagrama de bloques mostrado en la Figura 4.6. El algoritmo de maniobra de formación  $\xi$ , únicamente necesita las posiciones relativas de los agentes vecinos y la estimación de velocidad  $\hat{V}$ , a continuación, por medio de un diferenciador por modos deslizantes, se obtiene la derivada  $\dot{\xi}$ , que es usada junto a las posiciones relativas de los agentes vecinos y  $\Lambda$  para determinar los controles  $U^* = [\dot{\nu} \ \omega]^T$ , donde integrando  $\dot{\nu}$  se obtiene  $\nu$ , que junto a  $\omega$  serán las entradas del vehículo, velocidad lineal y velocidad angular, respectivamente.



---

# Simulaciones

---

Un pensador ve sus propias acciones como experimentos y preguntas, como intentos de descubrir algo. El éxito y el fracaso son para él, por sobre todo, respuestas.

---

Friedrich Nietzsche

En este capítulo se presentan las simulaciones de los algoritmos desarrollados. Un sistema de cinco agentes, un líder y cuatro seguidores, con el modelo de robot diferencial se simulan usando MATLAB-Simulink para mostrar la efectividad de los algoritmos de control de formación y el estimador de velocidad. A continuación se aplican los algoritmos de control de vuelo al modelo de la aeronave simulado en MATLAB-Simulink, mostrando su capacidad de llevar y mantener a la aeronave en una condición de vuelo deseada. Finalmente, las leyes de control de formación y el estimador se aplican al sistema de control de vuelo en un grupo de tres aeronaves, un líder y dos seguidores.

## 5.1. Sistema multiagentes con robots diferenciales

Considere un sistema multiagentes compuesto de cuatro seguidores y un líder, el grafo de formación y comunicación se muestra en la Figura 5.1. Cada robot únicamente puede obtener información de sus vecinos, y los agentes 1 y 2 tienen acceso a  $v_L$ . Las distancias deseadas entre agentes son:  $d_{ij} = 1$ . La velocidad inicial de los agentes es cero. Las posiciones iniciales para cada agente son:  $P_L = (0, 0)$ ,  $P_1 = (3, -3)$ ,  $P_2 = (-4, -3)$ ,  $P_3 = (3, -6)$ ,  $P_4 = (-4, -7)$ . A partir del grafo, los conjuntos  $V$ ,  $V^*$ ,  $E$  y  $E^*$  están dados por:

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4\} & V^* &= \{L, 1, 2, 3, 4\} \\ E &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\} \\ E^* &= \{(L, 1), (L, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\} \end{aligned}$$

Obteniendo las matrices de adyacencias, de grado, la matriz B, la matriz Laplaciana y de rigidez:

$$\begin{aligned} A(G) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & D(G) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{L}(G) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \bar{R} &= \begin{bmatrix} N_1 - N_L & E_1 - E_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 - N_L & E_2 - E_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1 - N_2 & E_1 - E_2 & N_2 - N_1 & E_2 - E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1 - N_3 & E_1 - E_3 & 0 & 0 & N_3 - N_1 & E_3 - E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 - N_3 & E_2 - E_3 & N_3 - N_2 & E_3 - E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 - N_4 & E_2 - E_4 & 0 & 0 & N_4 - N_2 & E_4 - E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 - N_4 & E_3 - E_4 & N_4 - N_3 & E_4 - E_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las ganancias para el estimador (4.39) y las leyes de control (4.58) y (4.59) son:  $k_1 = 30$ ,  $k_2 = 4$ ,  $k_3 = 0.2$ ,  $k_4 = 30$ ,  $\alpha = 0.5$ . Los diferenciadores de primer orden usados para calcular  $\dot{\xi}$  tienen ganancias  $k_1 = 2$  y  $k_2 = 1$ . EL líder sigue la trayectoria  $P_{LN} = \sin(0.5t)$ ,  $P_{LE} = 1.5t$ .



Las trayectorias seguidas por los agentes se muestran en la Figura 5.2, la línea discontinua muestra las conexiones entre agentes en los tiempos  $t = 2.5s$ ,  $t = 7.5s$ ,  $t = 15s$  y  $t = 25s$ , cuando se adquiere la formación y se iguala la velocidad de los seguidores con el líder. En la Figura 5.3 se ilustra la convergencia de los errores de distancia entre agentes a cero, es decir, cuando se alcanza la distancia entre agentes deseada. Las Figuras 5.4 y 5.5 muestran los valores que adquieren las entradas de control  $\nu_i$  y  $\omega_i$ . En la Figura 5.6 se encuentra la orientación del líder y los seguidores, note que los seguidores igualan la orientación del líder. La convergencia de la velocidad estimada del líder se muestra en la Figura 5.7. La Figura 5.8 muestra el seguimiento de  $\Gamma$  hacia  $\xi$ , llevando a la variable  $\Lambda$  a cero. Por último, la Figura 5.9 ilustra que los seguidores igualan la velocidad del líder. Esta simulación muestra la

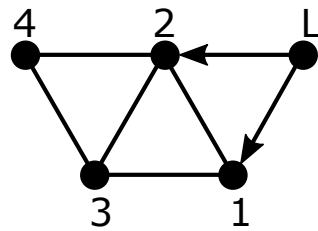


Figura 5.1: Grafo de formación y comunicaciones.

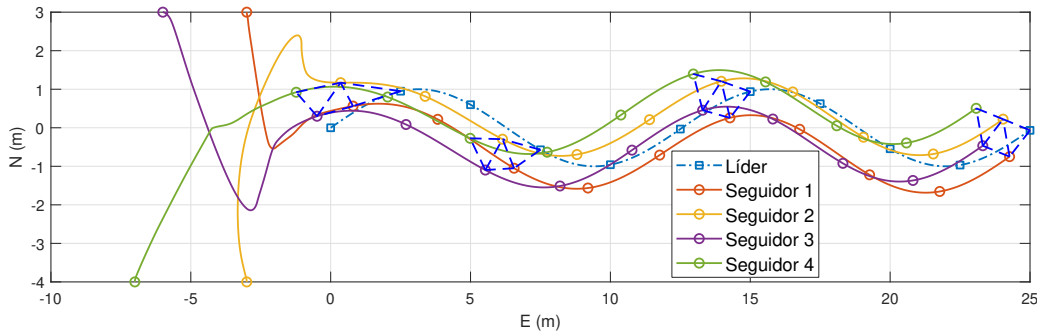


Figura 5.2: Trayectorias de los robots móviles.

capacidad de los algoritmos propuestos para lograr la maniobra de formación dado un framework realizable en  $\mathbb{R}^2$  mínima e infinitesimalmente rígido.

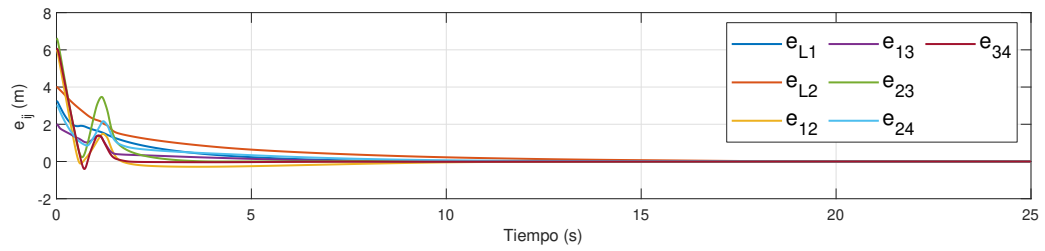


Figura 5.3: Error de distancias entre agentes.

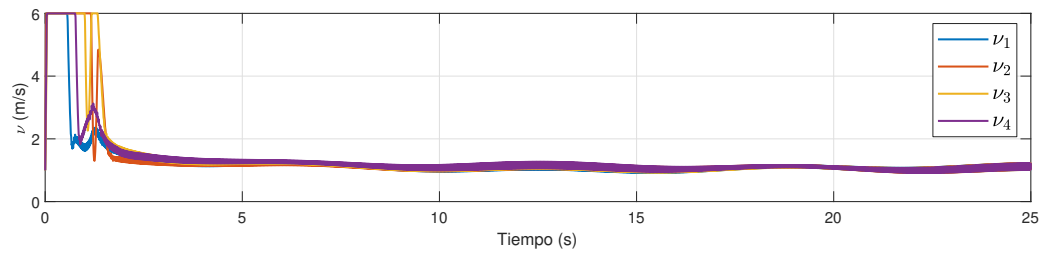


Figura 5.4: Entrada de control  $v_i$ .

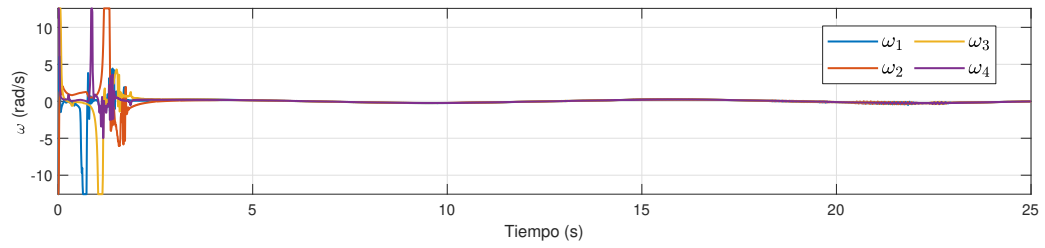


Figura 5.5: Entrada de control  $\omega_i$ .

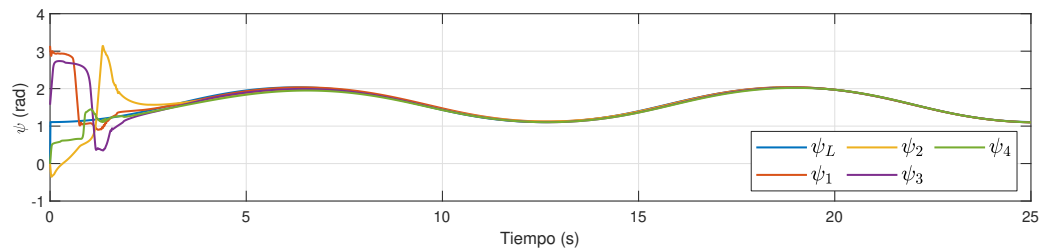


Figura 5.6: Seguimiento de la orientación del líder.

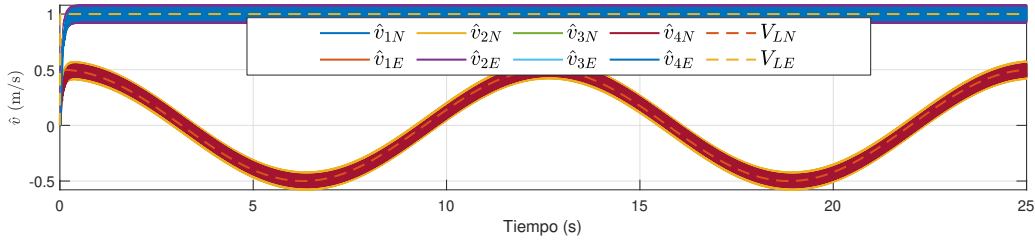


Figura 5.7: Estimación de la velocidad de líder.

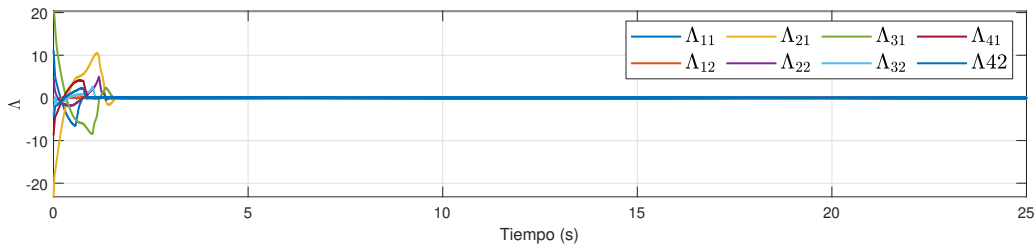


Figura 5.8: Error de seguimiento virtual  $\Lambda$ .

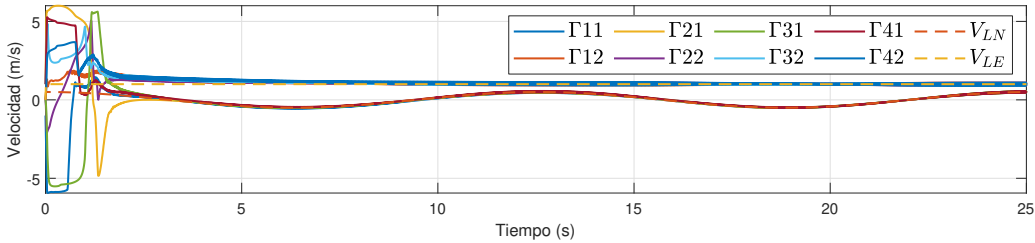


Figura 5.9: Velocidad de los agentes.

## 5.2. Control de vuelo para la aeronave Eclipsion Model T

Los algoritmos de control de vuelo desarrollados en el capítulo anterior se aplican al Eclipsion Model T. Para esto, primero se simula la dinámica de la aeronave usando las ecuaciones (3.16)-(3.27) y los coeficientes de la Tabla 3.3, este sistema tiene como entradas a  $\delta_a$ ,  $\delta_e$ ,  $\delta_r$  y  $\delta_t$ , las cuales son calculadas con (4.7), (4.13), (4.18) y (4.24). Estos controles de vuelo permiten a la aeronave

mantener una altitud, velocidad aerodinámica y velocidad de giro constantes. Las condiciones iniciales de la aeronave son las siguientes:

$$\begin{array}{llll}
 p_n = 0 \text{ m} & u = 9.7 \text{ m/s} & \theta = 0.06 \text{ rad} & p = 0 \text{ rad/s} \\
 p_e = 0 \text{ m} & v = 0 \text{ m/s} & \phi = 0 \text{ rad} & q = 0 \text{ rad/s} \\
 h = 0 \text{ m} & w = 0.58 \text{ m/s} & \psi = 0 \text{ rad} & r = 0 \text{ rad/s}
 \end{array}$$

Las ganancias de cada lazo de control son:

$$\begin{array}{llllll}
 K_1 = 0.8 & K_2 = 0.001 & & & & \\
 K_3 = 1.0 & K_4 = 40 & K_5 = 0.01 & K_6 = 0.2 & \mu_1 = 10 & \\
 K_7 = 1.0 & K_8 = 2.0 & K_9 = 0.4 & K_{10} = 0.5 & \mu_2 = 10 & \\
 K_{11} = 0.1 & K_{12} = 1.2 & K_{13} = 0.003 & K_{14} = 0.4 & \rho = -0.18 & \delta = 2 \\
 K_{15} = 1.0 & K_{16} = 3.0 & K_{17} = 0.01 & K_{18} = 0.01 & & 
 \end{array}$$

Los algoritmos propuestos requieren de primeras y segundas derivadas temporales de ciertas variables, estas son obtenidas con diferenciadores por modos deslizantes de primer y segundo orden. Las ganancias de estos diferenciadores son:

$$\begin{array}{llll}
 \dot{a}_{\phi_1} & k_1 = 0.3 & k_2 = 0.01 & \\
 \dot{\phi}_e & k_1 = 0.3 & k_2 = 0.01 & \\
 \dot{\phi}_d & k_1 = 0.3 & k_2 = 0.01 & \\
 \ddot{\phi}_d & k_1 = 1 & k_2 = 0.5 & k_3 = 0.05 \\
 \dot{\theta}_e & k_1 = 0.3 & k_2 = 0.01 & \\
 \dot{\theta}_d & k_1 = 0.3 & k_2 = 0.01 & \\
 \ddot{\theta}_d & k_1 = 1 & k_2 = 0.5 & k_3 = 0.05 \\
 \dot{h}_d & k_1 = 0.3 & k_2 = 0.01 & \\
 \dot{V}_{ad} & k_1 = 3 & k_2 = 0.1 & 
 \end{array}$$

El comando que se entrega a la aeronave es el siguiente:

$$h = 10 \text{ m} \qquad V_a = 10 \text{ m/s} \qquad \dot{\psi} = 1 \text{ rad/s}$$

Con estos comandos, la aeronave debe ascender a una altitud de 10 m, mantener una velocidad aerodinámica de 10 m/s y realizar una trayectoria circular

a una velocidad angular de 1 rad/s. La trayectoria trazada por la aeronave durante 25 segundos desde su condición inicial se muestra en la Figura 5.10. La aeronave inicialmente realiza un banqueo para lograr la velocidad angular deseada mientras aumenta su altitud. La altitud  $h$  (Figura 5.11) aumenta de

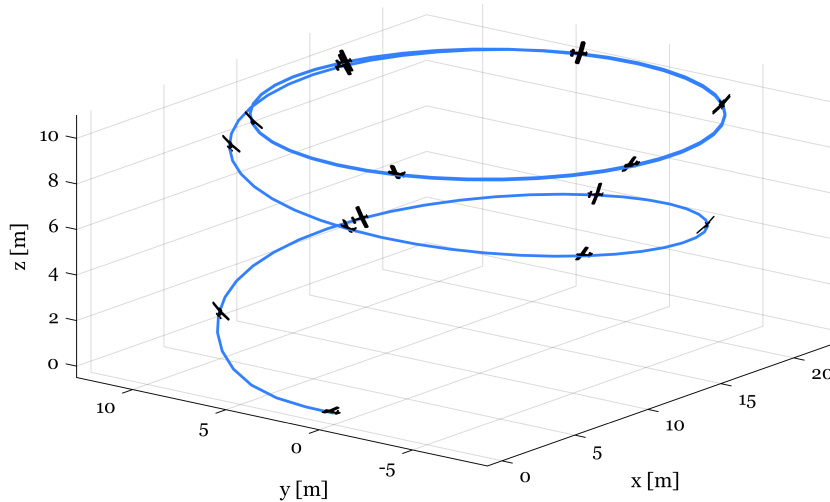


Figura 5.10: Trayectoria de la aeronave.

los 0 m iniciales hasta los 10 m deseados y me mantiene en ella; las actitudes  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ , (Figuras 5.12, 5.13, y 5.14) indican el cambio inicial en cabeceo para ascender, llegando a 0.1745 rad ( $10^\circ$ ) durante los primeros 8 segundos, la fase de ascenso, para luego descender a aproximadamente  $3.83^\circ$ , el ángulo de banqueo llega a  $45.56^\circ$  para realizar la trayectoria circular, esto se observa en el comportamiento de  $\psi$ . Las velocidades lineales ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) y angulares ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) se muestran en las Figuras 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, y 5.20; las variaciones en estas gráficas indican los cambios de actitud en la aeronave, es importante destacar que una vez la aeronave se encuentra girando, la velocidad lateral  $v$  es cero. La velocidad angular en el marco inercial  $\dot{\psi}$  se muestra en la Figura 5.21, la cual después de las actuaciones de la aeronave durante la fase de ascenso, llega a 1 rad/s. En la Figura 5.22 se observa que la velocidad aerodinámica llega a los 10 m/s deseados y se mantiene en ellos durante el vuelo. Los ángulos de ataque ( $\alpha$ ) y sideslip ( $\beta$ ) se muestran en las Figuras 5.23 y 5.24, note que el ángulo de ataque máximo que se alcanza es de  $7.6^\circ$ , es decir, la aeronave opera en la región lineal de levantamiento, mientras el ángulo de sideslip es mantenido en cero.

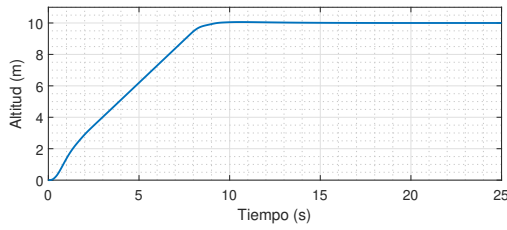


Figura 5.11: Altitud de la aeronave.

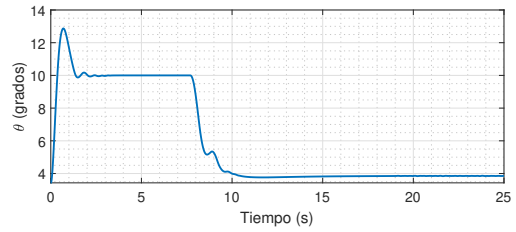


Figura 5.12: Ángulo de cabeceo.

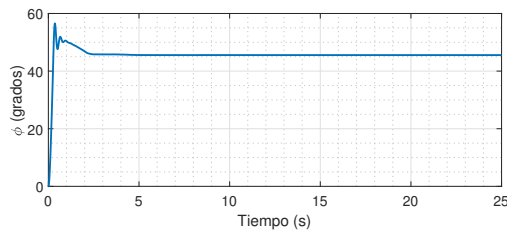


Figura 5.13: Ángulo de banqueo.

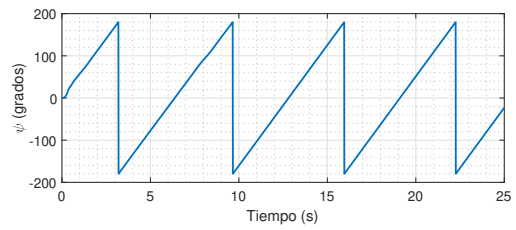


Figura 5.14: Rumbo.

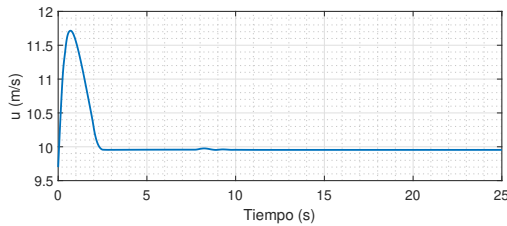


Figura 5.15: Componente  $u$  de la velocidad.

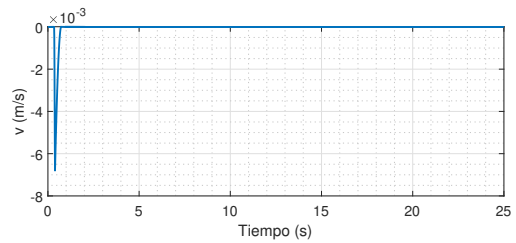


Figura 5.16: Componente  $v$  de la velocidad.

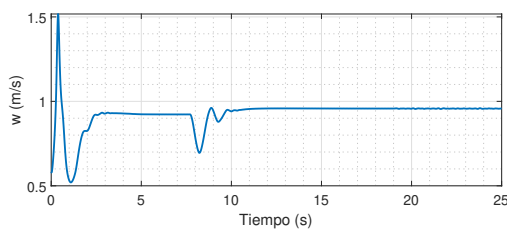


Figura 5.17: Componente  $w$  de la velocidad.

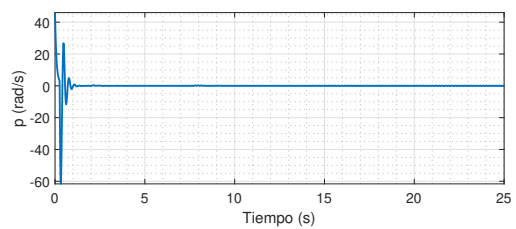


Figura 5.18: Velocidad angular  $p$ .

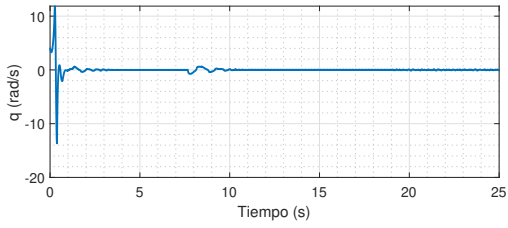


Figura 5.19: Velocidad angular  $q$ .

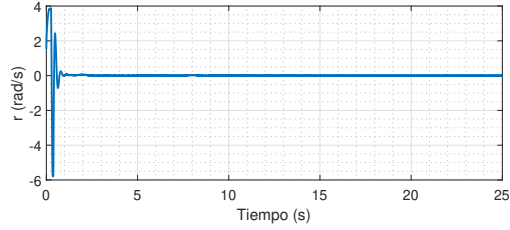


Figura 5.20: Velocidad angular  $r$ .

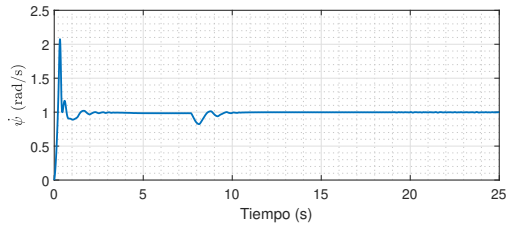


Figura 5.21: Velocidad angular  $\psi$ .

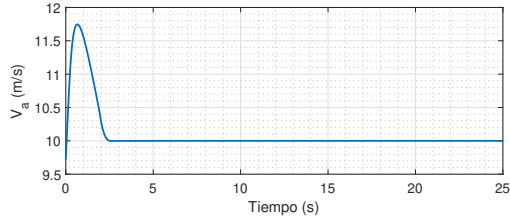


Figura 5.22: Velocidad aerodinámica.

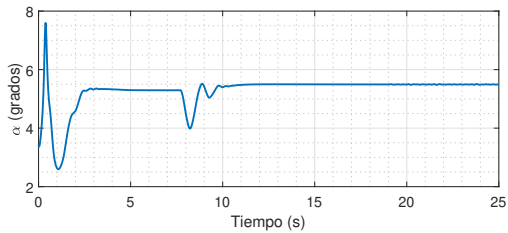


Figura 5.23: Ángulo de ataque.

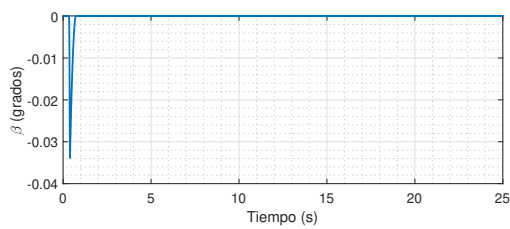


Figura 5.24: Ángulo de sideslip.

A continuación se presentan los errores de altitud ( $h_e$ ), cabeceo ( $\theta_e$ ), banco ( $\phi_e$ ) y velocidad aerodinámica ( $V_{ae}$ ) en las Figuras 5.25, 5.26, 5.27, y 5.28; estas tienen una forma similar a las gráficas presentadas anteriormente, e indican que estos errores son llevados a cero.

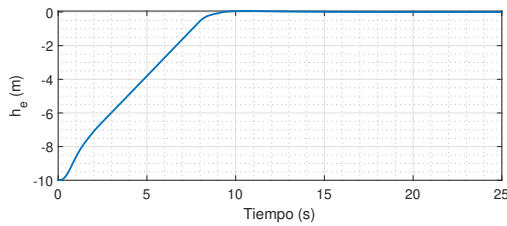


Figura 5.25: Error de altitud.

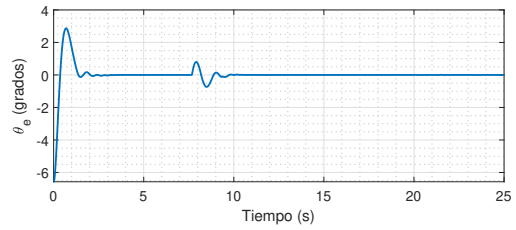


Figura 5.26: Error de ángulo de cabeceo.

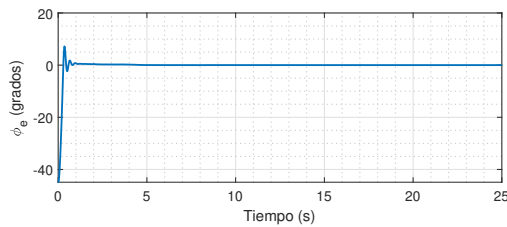


Figura 5.27: Error de ángulo de alabeo.

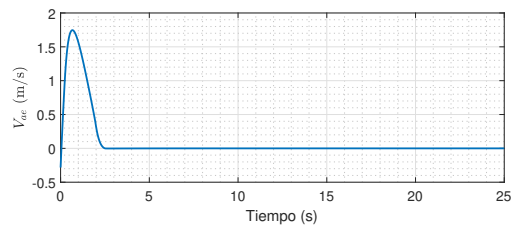


Figura 5.28: Error de velocidad aerodinámica.

Finalmente se presentan las señales de control longitudinales. El ángulo de cabeceo deseado  $\theta_d$  se muestra en la Figura 5.29, se puede observar la fase saturada durante el ascenso, hasta que el error de altitud llega a  $|h_e| = 2$ , donde empieza a actuar el control por modos deslizantes modificado. En la Figura 5.30 se observa la actuación del elevador  $\delta_e$  para llevar a la aeronave al ángulo de cabeceo deseado. Las RPM del motor ( $\delta_t$ ) se ilustran en 5.31, siendo las responsables de mantener la velocidad aerodinámica, note que durante la fase de ascenso aumentan a 6891 RPM, disminuyendo a 5295 RPM en vuelo nivelado. La señal de control lateral  $\phi_d$  se muestra en la Figura 5.32, el ángulo de baqueo deseado dada una velocidad angular. La acción de los alerones  $\delta_a$  se ilustra en la Figura 5.33, inicialmente los alerones actúan completamente para llevar a la aeronave al ángulo de banqueo deseado, y posteriormente se ajustan para mantener este ángulo durante el ascenso y el vuelo nivelado. La Figura 5.34 indica la actuación del timón  $\delta_r$ , la cual inicialmente es agresiva con el fin de mantener el ángulo de sideslip en cero, y luego de un segundo se ajusta en aproximadamente  $-2.5^\circ$  para mantener a  $\beta$  en cero durante el giro.



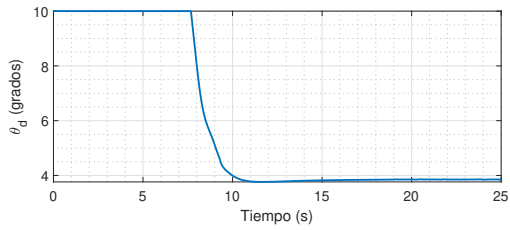


Figura 5.29: Control virtual  $\theta_d$ .

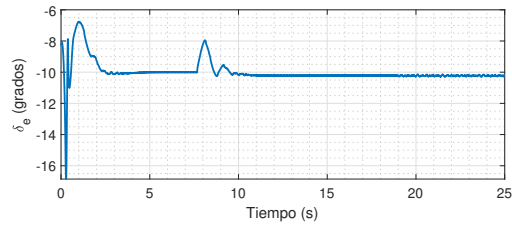


Figura 5.30: Actuación del elevador  $\delta_e$ .

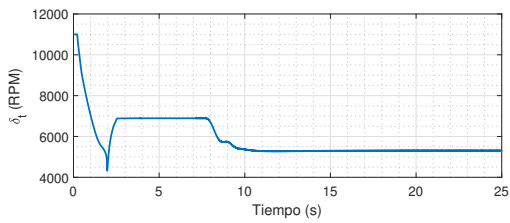


Figura 5.31: Revoluciones por minuto del motor  $\delta_t$ .

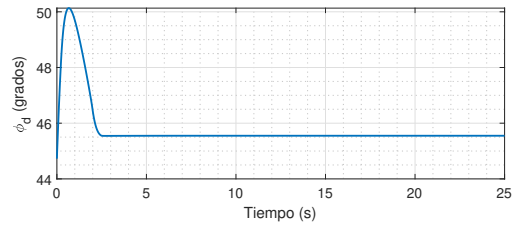


Figura 5.32: Control virtual  $\phi_d$ .

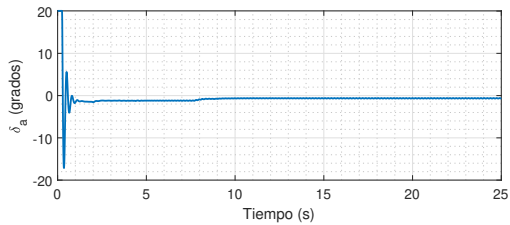


Figura 5.33: Actuación de los alerones  $\delta_a$ .

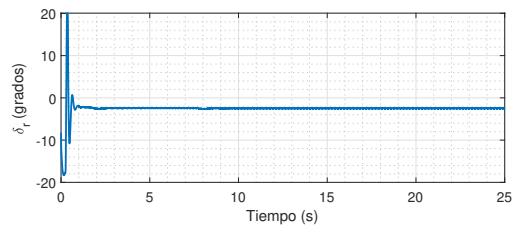


Figura 5.34: Actuación del timón  $\delta_r$ .

Con estas simulaciones se concluye que los algoritmos de control de vuelo son capaces de llevar y mantener a la aeronave en una condición de vuelo deseada.

### 5.3. Sistema Multiagentes con aeronaves de ala fija.

Las secciones anteriores mostraron la efectividad de los algoritmos de formación y control de vuelo, para lograr la maniobra de formación con vehículos de ala fija se usarán estas leyes de control en conjunto.

Considere un sistema multiagentes con 2 seguidores y un líder, el grafo de formación y comunicación se muestra en la Figura 5.35. Las distancias deseadas entre agentes son:  $d_{ij} = 5$  m. La velocidad inicial de los agentes es de 9.7 m/s. Las posiciones iniciales para cada agente son:  $P_L = (0, 0)$ ,  $h_L = 10$ ,  $P_1 = (-10, 30)$ ,  $h_1 = 2$ ,  $P_2 = (-10, 70)$ ,  $h_2 = 0$ . Del grafo, los conjuntos  $V$ ,  $V^*$ ,  $E$  y  $E^*$  están dados por:

$$V = \{1, 2\} \quad V^* = \{L, 1, 2\} \quad E = \{(1, 2)\} \quad E^* = \{(L, 1), (L, 2), (1, 2)\}$$

Obteniendo las matrices de adyacencias, de grado, la matriz B, la matriz Laplaciana y de rigidez:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{L}(G) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} N_1 - N_L & E_1 - E_L & 0 \\ 0 & 0 & N_2 - N_L \\ N_1 - N_2 & E_1 - E_2 & N_2 - N_1 \\ & & E_2 - E_1 \end{bmatrix}$$

Se utiliza el mismo algoritmo del estimador de velocidad para estimar la altitud el líder. Las ganancias para el estimador de velocidad son:  $k_1 = 30$ ,  $k_2 = 4$ ; para el estimador de altitud:  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 1$ ; para las leyes de control de formación las ganancias son:  $k_3 = 20$ ,  $k_4 = 1$ ,  $\alpha = 0.65$ ; el diferenciador de  $\xi$  tiene ganancias  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 4$ . El líder traza una trayectoria de estadio con sección recta de 60m y semicírculos de 50m de radio, y una altitud de  $h_L = 10$ m durante los primeros 40.5s, posteriormente ascendiendo a una altitud de 16m en 6s, Figura 5.36. Los dos seguidores son simulados de la misma forma que en la sección 5.2, es decir, se utilizan las ecuaciones de movimiento de la aeronave con entradas dadas por los algoritmos de control de vuelo, los cuales a su vez tienen como entradas a la altitud estimada, la velocidad lineal y velocidad angular deseadas, calculadas con los algoritmos de control de formación.

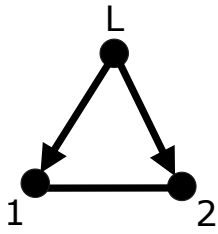


Figura 5.35: Grafo de formación y comunicaciones.

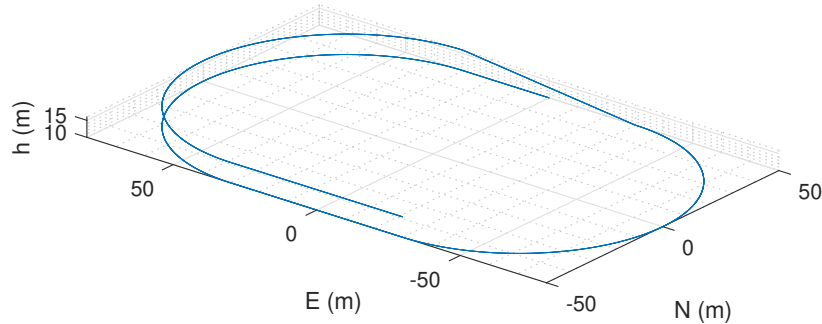


Figura 5.36: Trayectoria de estadio seguida por el líder.

Las trayectorias seguidas por los agentes se muestran en la Figura 5.37, los marcadores indican la posición cada 6.8s de  $t = 0s$  a  $t = 68s$ , con una línea discontinua ilustrando las conexiones entre agentes; la Figura 5.38 ilustra la convergencia de los errores de distancia entre agentes a cero en aproximadamente  $t = 40s$ . La altitud de los agentes se muestra en la Figura 5.39, note que en  $t = 8s$  los seguidores alcanzan y siguen la altitud del líder. La convergencia de la velocidad y la altitud estimadas del líder se muestran en las Figuras 5.40 y 5.41, la estimación resultante sigue a la velocidad y altitud del líder.

La entrada de control virtual  $\xi_i$  se muestra en la Figura 5.42, note que en un principio esta señal de control dirige a los seguidores para alcanzar la formación, y conforme este objetivo se logra,  $\xi_i$  adquiere los valores del estimador de velocidad. En las Figuras 5.43 y 5.44 se encuentran los valores que adquieren las entradas de control  $\nu_i$  y  $\omega_i$ , se observa el aumento de velocidad lineal y angular apropiados para reducir la distancia entre agentes, y posteriormente las correcciones necesarias para mantener la formación. La Figura 5.45 muestra la convergencia de  $\Lambda_i$  hacia cero, conforme el vector velocidad  $\Gamma_i$  de los seguidores iguala al control virtual  $\xi_i$ . Por último, en la Figura 5.46 se observan las velocidades de los agentes, note que conforme la formación se alcanza, la velocidad de los seguidores iguala a la velocidad del líder. Note además, que las posiciones relativas de los seguidores varían, esto se debe a que la única restricción que se ha dado a la formación son las distancias entre agentes, y los seguidores se moverán con el fin de mantener estas distancias.

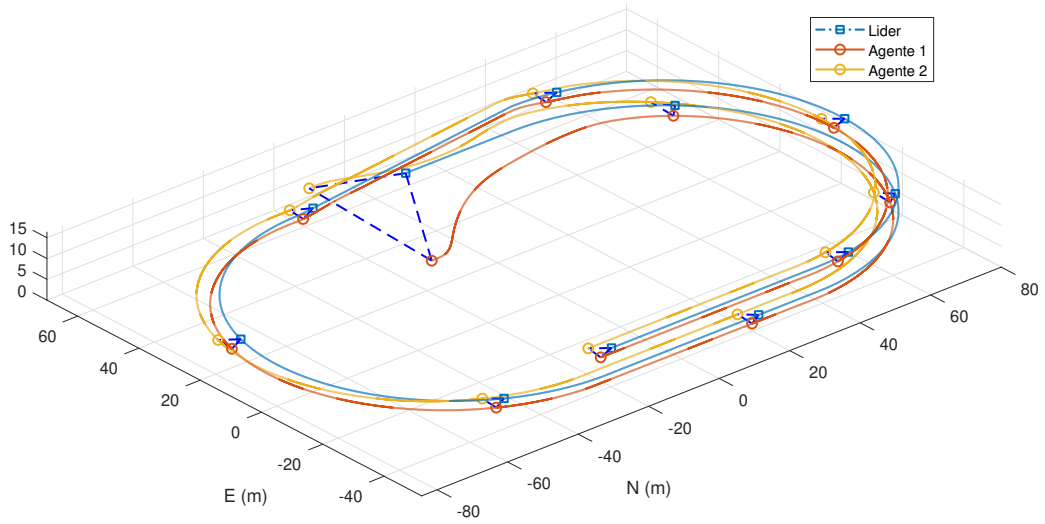


Figura 5.37: Trayectorias de las aeronaves.

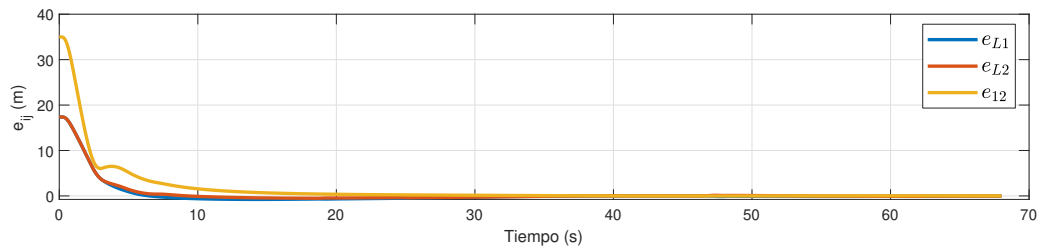


Figura 5.38: Error de distancias entre agentes.

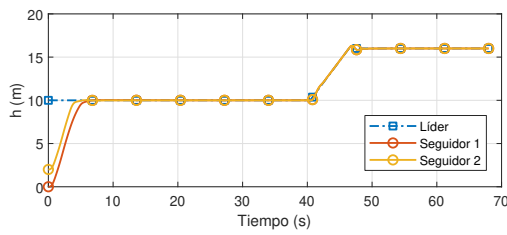


Figura 5.39: Altitud de los agentes.

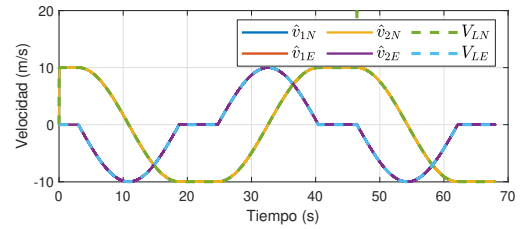


Figura 5.40: Estimación de la velocidad de líder.

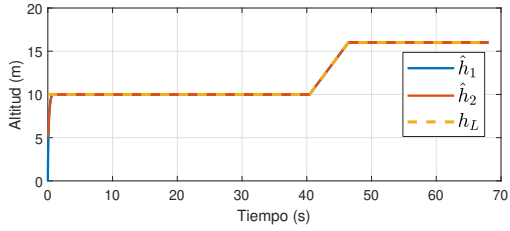


Figura 5.41: Estimación de la altitud de líder.

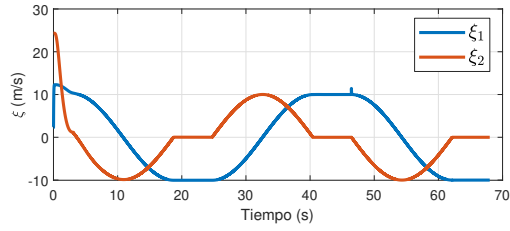


Figura 5.42: Entrada de control virtual  $\xi_i$ .

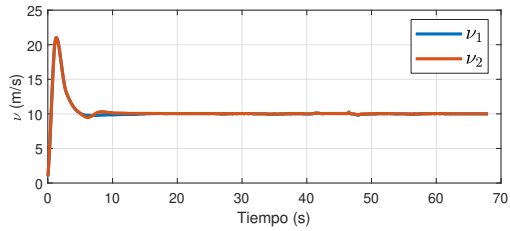


Figura 5.43: Entrada de control  $v_i$ .

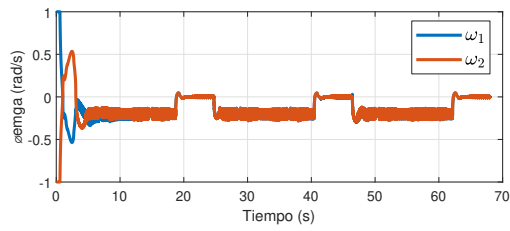


Figura 5.44: Entrada de control  $\omega_i$ .

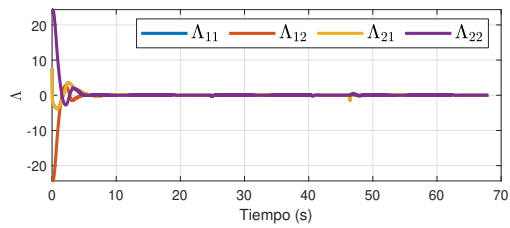


Figura 5.45: Error de seguimiento virtual  $\Lambda$ .

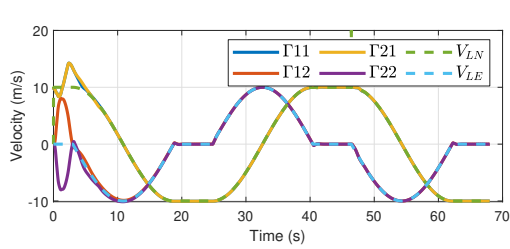


Figura 5.46: Velocidad de los agentes.



---

## Conclusiones

---

Si supiéramos qué es lo que  
estábamos haciendo, no se  
llamaría investigación, ¿O sí?

---

Las leyes de control de vuelo y algoritmos de control distribuidos propuestos, permiten a un sistema multiagentes de aeronaves de ala fija lograr la maniobra de formación siguiendo a un líder, dado un framework mínima e infinitesimalmente rígido; lo cual se verifica con pruebas matemáticas demostrando la estabilidad del sistema en el sentido de Lyapunov, así como simulaciones que muestran su efectividad. Esto se logra primeramente controlando la aeronave usando lazos de control sucesivos que permiten simplificar su modelo dinámico, al cual se aplica un control de maniobra de formación; abordar el problema siguiendo este esquema facilita la resolución del problema, ya que una aeronave es un vehículo con una dinámica compleja.

La caracterización aerodinámica de la aeronave permite simular apropiadamente el vehículo, y contribuye al diseño del sistema de control de vuelo. El uso de la matriz de rigidez simplificada  $\bar{R}$ , propuesta en este trabajo, para el desarrollo de los algoritmos de control de formación, permite incluir en el sistema a un líder no controlado con el cual también se deben preservar distancias deseadas, a diferencia de la matriz de rigidez convencional  $R$  encontrada en la literatura, los algoritmos resultantes de ésta última deben ser aplicados a todos los agentes del sistema y solo admite un líder virtual.

El problema de vuelo en formación se considera en el plano Norte-Este a la altitud del líder, con el fin de explotar los resultados de la teoría de grafos de Laman y frameworks en dos dimensiones, esta consideración es válida debido a que se emplea un estimador de altitud distribuido que permite igualar la altitud de los seguidores a la del líder, colocando a todos los agentes en un mismo plano y reduciendo el problema de formación a dos dimensiones.

Déjenlo todo, nuevamente  
láncense a los caminos

---

Roberto Bolaño



# Bibliografía

---

- [1] Frank L. Lewis, Hongwei Zhang, Kristian Hengster-Movric, and Abhijit Das. *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches*. Springer, London, 2014.
- [2] Craig W. Reynolds. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21(4):25–34, August 1987.
- [3] Kwang Kyo Oh, Myoung Chul Park, and Hyo Sung Ahn. A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 53:424–440, 2015.
- [4] Mehran Mesbahi and Magnus Egerstedt. Graph theoretic methods in multiagent networks. *Princeton Univ Pr*, page 403, 2010.
- [5] Yuqi Wang, Tieshan Li, and C. L. Philip Chen. Adaptive terminal sliding mode control for formations of underactuated vessels. In Fuchun Sun, Huaping Liu, and Dewen Hu, editors, *Cognitive Systems and Signal Processing*, pages 27–35, Singapore, 2017. Springer Singapore.
- [6] Zhaoxia Peng, Guoguang Wen, Ahmed Rahmani, and Yongguang Yu. Distributed consensus-based formation control for multiple nonholonomic mobile robots with a specified reference trajectory. *International Journal of Systems Science*, 46(8):1447–1457, 2015.
- [7] Xing Chu, Zhaoxia Peng, Guoguang Wen, and Ahmed Rahmani. Decentralised consensus-based formation tracking of multiple differential drive robots. *International Journal of Control*, 90(11):2461–2470, 2017.

- [8] Yu Lu, Guoqing Zhang, Lei Qiao, and Weidong Zhang. Adaptive output-feedback formation control for underactuated surface vessels. *International Journal of Control*, 7179(May):1–10, 2018.
- [9] Yongzhao Hua, Xiwang Dong, Liang Han, Qingdong Li, and Zhang Ren. Finite-Time Time-Varying Formation Tracking for High-Order Multi-agent Systems With Mismatched Disturbances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, PP:1–9, 2018.
- [10] Laura Krick, Mireille E. Broucke, and Bruce A. Francis. Stabilisation of infinitesimally rigid formations of multi-robot networks. *International Journal of Control*, 82(3):423–439, mar 2009.
- [11] S.-M. Kang, M.-C. Park, B.-H. Lee, H.-S. Ahn, and A Graph. Distance-based Formation Control with a Single Moving Leader(preprint). *2014 American Control Conference (ACC)*, 2014.
- [12] Farhad Mehdifar, Farzad Hashemzadeh, Mahdi Baradarannia, and Marcio de Queiroz. Finite-Time Rigidity-Based Formation Maneuvering of Multiagent Systems Using Distributed Finite-Time Velocity Estimators, 2018.
- [13] Hector Garcia de Marina and Gautier Hattenberger. Distributed circular formation flight of fixed-wing aircraft with paparazzi autopilot, 2017.
- [14] V. Reyna, M. Pachter, and J. D’Azzo. Formation flight control automation. In *Guidance, Navigation, and Control Conference*, pages 1379–1404, Reston, Virginia, aug 1994. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [15] Yoshitsugu Nagao and Kenji Uchiyama. Formation Flight of Fixed-Wing UAVs Using Artificial Potential Field. pages 1–8, 2014.
- [16] P. Chandler, S. Rasmussen, and M. Pachter. UAV cooperative path planning. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, number August, Reston, Virginia, August 2000. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [17] A. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*. Advanced mathematical tools for automatic control engineers. Elsevier Science, 2010.

- [18] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1994.
- [19] H.K. Khalil. *Nonlinear Control*. Always Learning. Pearson Education Limited, 2014.
- [20] G.H. Hardy, Karreman Mathematics Research Collection, J.E. Littlewood, G. Pólya, D.E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1952.
- [21] Marcio de Queiroz, Xiaoyu Cai, and Matthew Feemster. *Formation Control of Multi-Agent Systems*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 2019.
- [22] B. Jackson. Notes on the rigidity of graphs. *Proc. Levico Conf. Notes*, 2007.
- [23] Ivan Izmestiev. Infinitesimal Rigidity of Frameworks and Surfaces. *Lectures on Infinitesimal Rigidity (Kyushu University, Japan, Spring 09)*, pages 1–79, 2009.
- [24] Ananya Saha, Srabani Mukhopadhyaya, and Buddhadeb Sau. A Taxonomy on Rigidity of Graphs. *Indian Journal of Science and Technology*, 10(32):1–16, 2017.
- [25] Hyo-sung Ahn, Minh Hoang, Zhiyong Sun, Brian D O Anderson, and Viet Hoang Pham. A physical interpretation of the rigidity matrix. *2017 IFAC WC Workshop Rigidity Theory for Multi-agent Systems Meets Parallel Robots Towards the Discovery of Common Models and Methods*, 1, 2017.
- [26] Erik Demaine. Lecture 11: Rigidity theory. In *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra – Curso MIT Num. 6.849*. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, Otoño de 2012. <https://ocw.mit.edu>.
- [27] Erik Demaine. Lecture 12: Tensegrities & carpenter’s rules. In *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra – Curso MIT Num. 6.849*. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, Otoño de 2012. <https://ocw.mit.edu>.

- [28] L. Asimow and B. Roth. The rigidity of graphs, II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1979.
- [29] Ileana Streinu. Pseudo-triangulations, rigidity and motion planning. *Discrete and Computational Geometry*, 2005.
- [30] Zhengtao Ding. *Nonlinear and Adaptive Control Systems*. Control, Robotics & Sensors. Institution of Engineering and Technology, 2013.
- [31] Eduardo D. Sontag and Yuan Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5):351–359, apr 1995.
- [32] Sanjay P. Bhat and Dennis S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000.
- [33] Andrei A. Agrachev, A. Stephen Morse, Eduardo D. Sontag, Héctor J. Sussmann, and Vadim I. Utkin. *Nonlinear and Optimal Control Theory*, volume 1932 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [34] Yuri Shtessel, Christopher Edwards, Leonid Fridman, and Arie Levant. *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014.
- [35] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [36] Wilfrid Perruquetti. *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, Inc., New York, NY, USA, 2002.
- [37] Jaime A. Moreno and Marisol Osorio. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2856–2861. IEEE, 2008.
- [38] Ismael Castillo, Martin Steinberger, Leonid Fridman, Jaime A. Moreno, and Martin Horn. Saturated Super-Twisting Algorithm: Lyapunov based approach. In *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, volume 2016-July, pages 269–273. IEEE, jun 2016.
- [39] Arie Levant. Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique. *Automatica*, 1998.

- [40] Arie Levant, Miki Livne, and Xinghuo Yu. Sliding-mode-based differentiation and its application. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):1699–1704, July 2017.
- [41] Randal W. Beard and Timothy W. McLain. *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2012.
- [42] J. Roskam. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. Number pt. 1 in Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls. Roskam Aviation and Engineering Corporation, 1998.
- [43] J. Roskam. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. Number pt. 2 in Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls. Roskam Aviation and Engineering Corporation, 1998.
- [44] W. Durham. *Aircraft Flight Dynamics and Control*. Aerospace Series. Wiley, 2013.
- [45] Andrea LÁfflitto. *A Mathematical Perspective on Flight Dynamics and Control*. Number 9783319474663 in SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [46] Louis V. Schmidt. *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston ,VA, jan 1998.
- [47] M.V. Cook. *Flight Dynamics Principles: A Linear Systems Approach to Aircraft Stability and Control*. Aerospace Engineering. Elsevier Science, 2012.
- [48] John Blakelock. *Automatic control of aircraft and missiles*. Wiley, New York, 1991.
- [49] Brian Stevens. *Aircraft control and simulation : dynamics, controls design, and autonomous systems*. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2015.
- [50] Ashish Tewari. *Automatic control of atmospheric and space flight vehicles : design and analysis with MATLAB® and Simulink*. Birkhäuser, New York, 2011.
- [51] Robert Nelson. *Flight stability and automatic control*. WCB/McGraw Hill, Boston, Mass, 1998.

- [52] Egbert Torenbeek. *Synthesis of subsonic airplane design : an introduction to the preliminary design, of subsonic general aviation and transport aircraft, with emphasis on layout, aerodynamic design, propulsion, and performance*. Delft University Press Nijhoff Sold and distributed in the U.S. and Canada by Kluwer Boston, Delft The Hague Hingham, MA, 1982.
- [53] L.M. Nicolai and G. Carichner. *Fundamentals of Aircraft and Airship Design*. Number v. 1 in AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010.
- [54] J. Roskam and C.T.E. Lan. *Airplane Aerodynamics and Performance*. Airplane design and analysis. DARcorporation, 1997.
- [55] S. Gudmundsson. *General Aviation Aircraft Design: Applied Methods and Procedures*. Elsevier Science, 2013.
- [56] Gabriel Staples. Propeller static & dynamic thrust calculation - part 1 of 2. <https://www.electricrcaircraftguy.com/2013/09/propeller-static-dynamic-thrust-equation.html>.
- [57] L.J. Clancy. *Aerodynamics*. Pitman Aeronautical Engineering Series. Wiley, 1975.
- [58] Model t. <https://www.eclipsion-airplanes.com/modelt>.
- [59] André Deperrois. xflr5. <http://www.xflr5.tech/xflr5.htm>.
- [60] Mark Drela and Harold Youngren. Xfoil 6.9 user primer. [http://web.mit.edu/aeroutil\\_v1.0/xfoil\\_doc.txt](http://web.mit.edu/aeroutil_v1.0/xfoil_doc.txt).
- [61] Ira H Abbott, Albert E Von Doenhoff, and Jr Stivers, Louis. *Summary of Airfoil Data*. National Advisory Committee for Aeronautics - Langley Aeronautical Lab, Langley, US, 1945.
- [62] Gregory A. Williamson, Bryan D. McGranahan, Benjamin A. Broughton, Robert W. Deters, John B. Brandt, and Michael S. Selig. *Summary of Low-Speed Airfoil Data*. Department of Aerospace Engineering - University of Illinois at Urbana-Champaign, 2012.

- [63] André Deperrois. Xflr5 analysis of foils and wings operating at low reynolds numbers. <https://engineering.purdue.edu/~aerodyn/AAE333>, 2009.
- [64] Yongcan Cao, Wei Ren, and Ziyang Meng. Decentralized finite-time sliding mode estimators and their applications in decentralized finite-time formation tracking. *Systems and Control Letters*, 2010.
- [65] Jiangping Hu and Yiguang Hong. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007.