



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Compensación de retardos de tiempo a la entrada
de una clase de sistemas no lineales.**

Tesis que presenta:

Iván Estrada Sánchez.

Para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias.

En la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica.

Directores de Tesis:

Dr. Martín Velasco Villa.

Dr. Hugo Rodríguez Cortés.

[This page is intentionally left blank]

A mi familia.

[This page is intentionally left blank]

Agradecimientos:

Agradezco a Dios por darme la vida y por ponerme en este camino.

A mis padres, a mis hermanas y a mi hermano, gracias por todo el apoyo, por ser los formadores principales de mi persona, por todos los consejos que me han dado y por ayudarme en todo momento.

A toda mi familia por todo el apoyo que siempre me han dado.

A mis asesores el Dr. Martín Velasco y el Dr. Hugo Rodríguez por aceptar dirigir este trabajo de tesis, por todas las enseñanzas que me transmitieron, por todo el apoyo incondicional que me han brindado para hacer realidad este trabajo, muchísimas gracias.

Al Dr. Daniel Melchor, al Dr. Jaime Álvarez, al Dr. Rafael Castro y al Dr. Gerardo Silva por aceptar ser mis sinodales y revisores de este trabajo.

Agradezco a mis compañeros de doctorado y de laboratorio por todos esos momentos de convivencia y en especial para aquellos que me proporcionaron su ayuda durante mi estancia en el CINVESTAV.

A todos los doctores, auxiliares de investigación, a las secretarías y a todos los integrantes de la sección de Mecatrónica por toda su ayuda proporcionada.

Al CINVESTAV-IPN por darme la oportunidad de estudiar y hacer realidad uno de mis sueños.

Al CONACYT por la beca otorgada y por los apoyos para asistencias a congresos.

Y a todos aquellos que de alguna manera han contribuido para la realización de este trabajo, muchas gracias.

I.E.S.

[This page is intentionally left blank]

Resumen

En el presente trabajo se aborda el problema de predicción y control de una clase de sistemas no lineales con retardo en la entrada. Se introduce un predictor lineal para calcular valores futuros de estados algunas unidades de tiempo en el futuro. El predictor propuesto es equivalente a un observador retardado para un sistema en adelanto, obtenido a partir de un cambio adecuado de coordenadas. Para mostrar que el predictor propuesto converge a los valores de los estados futuros, se hace uso de la condición de Lipschitz. Adicionalmente los estados futuros predichos son utilizados para resolver el problema de seguimiento de trayectoria bajo suposiciones similares a las del problema de predicción. La convergencia de los errores de predicción y de seguimiento de trayectorias es analizada considerando una funcional completa de Lyapunov-Krasovskii.

Para observar el comportamiento del esquema de predicción-control, primero se analiza un sistema inestable en lazo abierto. Se realizan simulaciones numéricas. Posteriormente se analiza un sistema péndulo-barra actuado por un motor y una hélice. Se realizan una simulación numérica y un experimento para probar el funcionamiento del esquema de predicción-control. Finalmente, se analiza el comportamiento del esquema de predicción-control en un robot móvil omnidireccional.

Abstract

In the present work the problem of prediction and control of a class of nonlinear systems with delay at the input is approached. A linear predictor is introduced to calculate future values of states, some units of time in the future. The proposed predictor is equivalent to a delayed observer for a forward system, obtained from an appropriate change of coordinates. To show that the proposed predictor converges to the future values of the states, the Lipschitz's condition is used. Additionally, the predicted future states are used to solve the trajectory tracking problem under assumptions similar to those of the prediction problem. The convergence of prediction and trajectory tracking errors is analyzed considering a complete Lyapunov–Krasovskii functional.

To observe the behavior of the prediction–control scheme, an open loop unstable system is first analyzed. Numerical simulations are carried out. Later on a pendulum–bar system driven by a motor and a propeller is considered. A numerical simulation and a real time experiment are performed to test the operation of the prediction–control scheme. Finally, the behavior of the prediction–control scheme in an omnidirectional mobile robot is analyzed.

Contenido

Resumen	VII
Abstract	IX
Contenido	XI
Lista de figuras	XIV
Lista de tablas	XV
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Problema de sistemas con retardos de tiempo	1
1.3. Antecedentes	2
1.4. Planteamiento del problema y Justificación	2
1.5. Hipótesis	3
1.6. Objetivo de la tesis	3
1.7. Alcances del trabajo	4
1.8. Contribuciones	4
1.9. Organización de la tesis	5
2. Marco Teórico	7
2.1. Observación en sistemas lineales	7
2.2. Predicción en sistemas lineales (Predictor de Smith)	8
2.3. Observación en sistemas no lineales	9
2.3.1. Linealización	9
2.3.2. Alta ganancia	10
2.3.3. Tipo Lipschitz	11
2.4. Predicción en sistemas no lineales	12
2.5. Otros casos	15

3. Esquema de Observación	17
3.1. Introducción	17
3.1.1. Razón de la necesidad de la predicción	17
3.1.2. Relación entre un predictor y un observador	17
3.1.3. Importancia de la clase de sistemas a estudiar	18
3.1.4. Resultados obtenidos: a) observación b) control	18
3.2. Clase de sistemas no lineales con retardo en la entrada	18
3.3. Problema de Predicción-Observación	19
3.3.1. Diseño del predictor propuesto	20
3.3.2. Convergencia de los errores de predicción	20
3.4. Conclusiones	30
4. Esquema de Control	31
4.1. Introducción	31
4.2. Control basado en retroalimentación de estados predichos	31
4.3. Caso: Sistemas completamente linealizables	33
4.3.1. Control para sistemas completamente linealizables	35
4.4. Conclusiones	37
5. Resultados en Simulación y Experimentación	39
5.1. Introducción	39
5.2. Caso de estudio: Sistema inestable	39
5.2.1. Seguimiento de trayectoria basado en estados predichos	40
5.3. Caso de estudio: Actuador aerodinámico	45
5.3.1. Consideración de tiempos de retardo	46
5.3.2. Predictor propuesto	47
5.3.3. Problema de seguimiento de trayectorias	48
5.3.4. Estabilidad en lazo cerrado	50
5.3.5. Evaluación numérica	52
5.3.6. Resultados experimentales	54
5.4. Robot móvil tipo (3,0)	60
5.4.1. Modelo dinámico	60
5.4.2. Estrategia de predicción	62
5.4.3. Dinámica del error de predicción	63
5.4.4. Sistema controlado por valores futuros	65
5.4.5. Evaluación numérica	68
5.5. Conclusiones	72
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	75
6.1. Conclusiones	75
6.2. Trabajo futuro	76
Bibliografía	82

Lista de figuras

2.1. Predictor de Smith.	9
5.1. Evolución de la matriz $U(t)$	41
5.2. Errores de predicción $e_w(t)$	41
5.3. Evolución de la matriz $U_r(t)$	42
5.4. Evolución del estado $x(t)$	42
5.5. Errores de predicción $e_w(t)$	43
5.6. Error de seguimiento $e_d(t)$	43
5.7. Señal de control $u(t)$	44
5.8. Señal $\Phi(\hat{w}(t))$	44
5.9. Actuador aerodinámico.	45
5.10. Sistema con retardo en el canal de comunicación.	47
5.11. Errores de observación: $e_{w1}(t - \tau)$, $e_{w2}(t - \tau)$	53
5.12. Errores de seguimiento: $e_{d1}(t)$, $e_{d2}(t)$	53
5.13. Señal de control: $u(t)$	54
5.14. Sistema actuador aerodinámico.	55
5.15. Diagrama del funcionamiento del sistema.	56
5.16. Error de observación: $e_{w1}(t)$	57
5.17. Error de seguimiento: $e_{d1}(t)$	58
5.18. Señal de control: $u(t)$	58
5.19. Trayectoria de referencia $x_{1d}(t)$ y real $x_1(t)$	59
5.20. Trayectoria de referencia $x_{1d}(t)$ y real $x_1(t)$ con una perturbación $\delta =$ -0.05.	59

5.21. Vista superior de la configuración del robot móvil omnidireccional. . .	60
5.22. Red de comunicación.	62
5.23. Evolución en el plano $X - Y$	69
5.24. Error de predicción en posición e_{w1}	70
5.25. Error de predicción en velocidad e_{w2}	70
5.26. Error de seguimiento en posición e_{w1d}	71
5.27. Error de seguimiento en velocidad e_{w2d}	71
5.28. Señales de control $u(t)$	72

Lista de tablas

5.1. Parámetros para la simulación.	52
5.2. Parámetros para el experimento.	56
5.3. Parámetros del robot móvil omnidireccional.	68

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

En el presente documento se realiza investigación de una clase de sistemas no lineales con retardos, éstos, se clasifican en sistemas con retardos en la entrada, con retardo en los estados y con retardo en las derivadas.

Lo que define un sistema con retardo es la característica que la evolución del sistema en el futuro, no sólo depende del estado actual, sino de un período de su historia. Ésta particular relación causa-efecto se puede capturar de forma sucinta, y se ha modelado mediante *ecuaciones diferenciales con retardo* o más generalmente, por *ecuaciones diferenciales funcionales*.

Mientras que en la práctica muchos sistemas dinámicos pueden ser satisfactoriamente descritos sólo por ecuaciones diferenciales ordinarias donde la evolución futura del sistema depende únicamente del estado actual, también hay ocasiones cuando el efecto del retardo no puede ser despreciado y debe tomarse en cuenta para asegurar un buen desempeño del sistema.

1.2. Problema de sistemas con retardos de tiempo

El fenómeno de los retardos es frecuentemente encontrado en sistemas prácticos, tales como sistemas de redes, estabilización de aeronaves, reactores nucleares, sistemas químicos, etc. La presencia de retardos puede tener efecto en la estabilidad y funcionamiento del sistema, así que ignorarlos, puede llevar a defectos en el diseño y análisis incorrectos. De ahí, que la estabilidad de sistemas con retardos haya recibido considerable atención en los últimos años.

Se reconoce comúnmente que los tiempos afectados por retardo de tiempo son

componentes naturales de los procesos dinámicos (químicos o eléctricos) o los sistemas biológicos que implican fenómenos o la herencia de propagación y de transporte, Niculescu [2001b].

También es relativamente conocido que la existencia de un retardo en el modelo del sistema puede inducir inestabilidad, oscilaciones o malos funcionamientos, Hale [1977], Kolmanovskii y Myshkis [1992].

De acuerdo con la dependencia del retardo, los criterios de estabilidad para los sistemas con retardo pueden ser clasificados entre independientes y dependientes del retardo. Es bien sabido que los criterios de retardo independiente tienden a ser conservadores especialmente para retardos muy pequeños, Gu et al. [2003], Niculescu [2001b].

1.3. Antecedentes

Los retardos se encuentran frecuentemente en el comportamiento de muchos procesos físicos y muy a menudo son la causa principal del bajo rendimiento y la inestabilidad de los sistemas de control. En vista de esto, la robustez de los sistemas con retardo es un tema de gran importancia práctica que ha despertado un gran interés durante varias décadas.

1.4. Planteamiento del problema y Justificación

En el área de sistemas con retardos, el problema de estabilizar o controlar sistemas que presentan retardos ha sido la preocupación de investigadores durante los últimos años. Para ello es necesario conocer las variables de estado del sistema. Dichas variables pueden ser medibles o no medibles, lo que lleva a diseñar observadores de estado para estimarlas.

La reconstrucción aproximada de las variables de estado de sistemas dinámicos con retardo ha llevado a proponer esquemas de predicción. Éstos esquemas proporcionan valores futuros de estados que pueden ser utilizados para obtener el controlador.

En el presente trabajo se pretende implementar un esquema de predicción-control para una clase de sistemas no lineales sujetos a retardos en la señal de entrada. El problema fundamental a afrontar es la falta de información debido a la consideración de esquemas de control a distancia que podrían inducir la existencia de retardos de tiempo en la aplicación de las leyes de control.

El diseño de controles de robots, ya sea manipuladores o robots móviles, lleva a la necesidad de utilizar sensores para medir posición o velocidad. El uso de sensores en los que la frecuencia de actualización de las señales que proporcionan pueden también considerarse como señales con retardos de tiempo, lo cual repercute en el diseño de una ley de control basada en estas señales, ya sean de posición y posiblemente de velocidad.

La consideración de un esquema de control a distancia y la estimación de posiciones y velocidades por medio de sensores con frecuencia de actualización baja, conduce en este trabajo a proponer un modelo de un sistema descrito por ecuaciones diferenciales no lineales sujetas a retardos de tiempo en las señales de entrada.

1.5. Hipótesis

Se considerará una clase de sistemas no lineales tipo Lipschitz que pueden encontrarse comúnmente en el área del control de sistemas electromecánicos.

1.6. Objetivo de la tesis

Este trabajo tiene dos objetivos primarios. Primero, presentar una estrategia de predicción para una clase de sistemas no lineales tipo Lipschitz sujetos a retardos en la señal de entrada. Como resultado de un cambio de coordenadas adecuado, el predictor de estados proporciona asintóticamente el valor de los estados τ unidades adelantadas. Segundo, proponer una solución para los problemas de estabilización y seguimiento de trayectorias para la clase de sistemas considerados usando los estados predichos anteriormente.

A partir de dichos objetivos se proponen las siguientes actividades:

- ★ Diseñar una estrategia de predicción para una clase de sistemas no lineales tipo Lipschitz sujetos a retardos en la entrada.
- ★ Realizar experimentos en simulación del comportamiento de la estrategia de predicción.
- ★ Proponer una solución para los problemas de estabilización y seguimiento de trayectorias.
- ★ Realizar simulaciones numéricas del comportamiento de la propuesta de estabilización y también para el seguimiento de trayectorias.
- ★ Implementar el esquema de predicción-control en una plataforma experimental y verificar con los resultados obtenidos en simulación.

- ★ Analizar los resultados obtenidos y proponer mejoras para el esquema de predicción-control desarrollado.

1.7. Alcances del trabajo

En este trabajo se pretende desarrollar una estrategia de predicción para una clase particular de sistemas tipo Lipschitz que se encuentran sujetos a retardos en la señal de entrada. Con dicho esquema de predicción se obtendrán estados futuros que serán utilizados para resolver tanto el problema de regulación y así como también el seguimiento de trayectorias. Una vez que se obtenga la estrategia de predicción y se haya probado en simulaciones numéricas, se procederá a implementarse en una plataforma experimental.

1.8. Contribuciones

Las contribuciones que se obtienen con la realización de esta investigación, son en el área de control de sistemas con retardos. Se aborda el problema de predicción y control, evitando soluciones integrales de dimensión infinita, para una clase de sistemas no lineales con retardo en la entrada. Considerando el predictor lineal propuesto en Michiels y Roose [2001], este trabajo introduce un predictor no lineal, para una clase de sistemas no lineales, para calcular valores futuros de estados, τ unidades de tiempo en el futuro. Bajo la suposición de la condición de Lipschitz, es posible mostrar que el predictor propuesto converge a los valores de los estados futuros. La suposición de Lipschitz es común en la literatura para sistemas no lineales sin retardo Thau [1973], Rajamani [1998], y para una clase de sistemas no lineales con retardo Shi et al. [2016a], Shi et al. [2016b]. Adicionalmente, los estados futuros predichos son utilizados para resolver el problema de seguimiento de trayectoria bajo suposiciones similares a las del problema de predicción.

El predictor propuesto es equivalente a un observador retardado para un sistema en adelante, obtenido a partir de un cambio de coordenadas. La convergencia de los errores de predicción y seguimiento de trayectoria son mostrados considerando una funcional completa de Lyapunov-Krasovskii, Kharitonov [2013]. La solución propuesta en este documento está relacionada con el trabajo de Lei y Khalil [2016]. Siguiendo una aproximación diferente, la solución en Lei y Khalil [2016] depende del tamaño de la cota superior del retardo variante en tiempo, mientras que la solución desarrollada en este trabajo provee una cota superior para un retardo constante.

También se analiza el problema de seguimiento de trayectorias para un sistema no lineal con retardo de tiempo constante a la entrada. Específicamente, se considera

un actuador aerodinámico formado por una dupla barra-hélice. Para resolver el problema se diseña un predictor de los valores futuros de los estados, el cual es utilizado para diseñar una retroalimentación causal que resuelve el problema mencionado. La convergencia de los errores de predicción y seguimiento se muestra utilizando una funcional completa de Lyapunov-Krasovskii (Kharitonov [2013]).

1.9. Organización de la tesis

La presente tesis se estructura de la siguiente forma.

En el Capítulo 2, se presenta el marco teórico en donde se describe el origen del problema presentado del caso lineal y el estado del arte de los sistemas no lineales con retardo. En el Capítulo 3, se desarrolla un predictor para una clase de sistemas no lineales sujetos a retardos en la entrada. Se analiza la convergencia del predictor utilizando una funcional completa de Lyapunov-Krasovskii. En el Capítulo 4, se abordan los problemas de regulación y seguimiento de trayectorias para sistemas con retardos. Aquí se analizan los sistemas completamente linealizables. En el Capítulo 5, se muestran los resultados en simulación y experimentales. Primero, se presentan las simulaciones numéricas para un sistema inestable en lazo abierto. Se obtienen las condiciones para satisfacer el resultado principal del trabajo. Además se muestran los resultados obtenidos para los casos de regulación y seguimiento de trayectorias. Después, se presentan los resultados para el sistema barra-péndulo. Se analiza el comportamiento en simulaciones numéricas y posteriormente se obtienen los resultados experimentales. Para finalizar este capítulo, se incluye también el caso de un robot móvil omnidireccional, el cual, presenta retardo en las señales de entrada. En el Capítulo 6, se presentan las conclusiones obtenidas del trabajo, así como también se puntualizan algunas tareas como trabajo futuro.

Capítulo 2

Marco Teórico

Los sistemas con retardos han sido ampliamente estudiados en los últimos años, debido a que pueden ser encontrados en varios sistemas prácticos tales como sistemas químicos, mecánicos, biológicos o sistemas en redes, etc. Estos sistemas se encuentran presentes en la mayoría de los dispositivos que utilizamos en la vida diaria (Kolmanovskii y Myshkis [1992], Niculescu [2001a]). Por ejemplo en aplicaciones de teleoperación, en donde la presencia de retardos en la señal de control y en las mediciones pueden ser un factor importante en la estabilidad del sistema en lazo cerrado (Hale y Lunel [1993]). Ya sea que aparezcan en el estado, en la entrada de control o en las mediciones, éstos retardos pueden clasificarse como de transporte, de comunicación o de medición, Fridman [2014]. La existencia de retardos en la señal de control o estados del sistema es crucial para la estabilidad en lazo cerrado. Ver por ejemplo, Kolmanovskii y Myshkis [1992], Hale [1977] y Niculescu [2001a].

2.1. Observación en sistemas lineales

El diseño de observadores lineales ha sido una área de constante investigación en las últimas décadas y a pesar de los importantes progresos, muchos problemas importantes se mantienen sin ser resueltos. El problema de reconstruir aproximadamente variables de estado de sistemas dinámicos cuando sólo la salida (en algunos casos incompleta) está disponible ha sido la preocupación de los investigadores en los últimos años. Para sistemas lineales el problema de la reconstrucción de estados lleva a una relación cercana con los conceptos de controlabilidad, observabilidad y el diseño de reguladores lineales, Thau [1973].

El problema del diseño de observadores surge naturalmente en un enfoque de sistema, tan pronto como se necesita información interna a partir de mediciones externas (directamente disponibles). En general, está claro que no se pueden usar tantos sensores como señales de interés que caracterizan el comportamiento del sistema (por razones de costo, restricciones tecnológicas, etc.), especialmente porque tales señales

pueden venir en un número bastante grande, y pueden ser de varios tipos: generalmente incluyen señales que varían en el tiempo que caracterizan el sistema (variables de estado), constantes (parámetros) y externas no medidas (perturbaciones).

Esta necesidad de información interna puede estar motivada por varios propósitos: modelado (identificación), monitoreo (detección de fallas) o conducción (control) del sistema. Todos esos propósitos se requieren conjuntamente cuando se pretende mantener un sistema bajo control. Esto hace que la reconstrucción, o el problema del observador, sea el corazón de un problema de control general.

En resumen, un observador se basa en un modelo, con adaptación en línea basada en las mediciones disponibles, y con el objetivo de reconstruir la información, es decir, puede caracterizarse como un reconstructor de información basado en un modelo, en mediciones, en lazo cerrado.

Por lo general, el modelo es una representación del espacio de estado, y se supondrá aquí que todas las piezas de información que se reconstruirán surgen de variables de estado. Frente a esto, uno puede tratar de diseñar un sistema dinámico explícito cuyo estado debería dar una estimación del estado real del modelo considerado, o simplemente resolver el problema como uno de optimización.

2.2. Predicción en sistemas lineales (Predictor de Smith)

Un enfoque ampliamente investigado son las técnicas de predicción de valores futuros de los estados del sistema para diseñar leyes de retroalimentación causales. En el caso lineal, el denominado Predictor de Smith (Smith [1959]) fue un parteaguas en este sentido.

El predictor de Smith (SP), es la primera estructura conocida como compensador de tiempo muerto (DTC por sus siglas en inglés). Se presentó para mejorar el rendimiento de los controladores clásicos (controladores PI o PID) para plantas con tiempo muerto. Es uno de los métodos de compensación de tiempo muerto más populares y el algoritmo más utilizado para la compensación de tiempo muerto en la industria, Normey-Rico y Camacho [2008].

La estructura del SP (ver Figura 2.1), se puede dividir en dos partes: el controlador primario $C(s)$ y la estructura del predictor. El controlador $C(s)$ es típicamente un PID pero también puede ser otro controlador. El predictor se compone de un modelo de la planta sin tiempo muerto ($G_n(s)$), también conocido en la literatura como

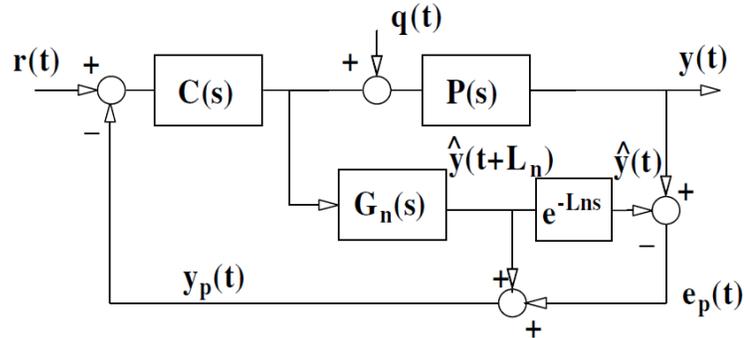


Figura 2.1: Predictor de Smith.

el modelo rápido, y un modelo del tiempo muerto $e^{-L_n s}$. Así, el modelo del proceso completo es $P_n(s) = G_n(s)e^{-L_n s}$. El modelo rápido $G_n(s)$ se utiliza para predecir en lazo abierto. Para considerar los errores de modelado ($e_p(t)$), la diferencia entre la salida del proceso ($y(t)$) y la salida del modelo ($\hat{y}(t)$), incluido el tiempo muerto, se agregan a la predicción de lazo abierto, como se ve en el esquema de la Figura 2.1. Si no hay errores de modelado o perturbaciones, el error entre la salida del proceso actual y la salida del modelo será cero y la señal de salida del predictor $y_p(t)$ será la salida libre de tiempo muerto de la planta. En estas condiciones, $C(s)$ se puede ajustar, al menos en el caso nominal, como si la planta no presentara tiempo muerto, Normey-Rico y Camacho [2007].

El predictor de Smith resuelve el problema de control para sistemas lineales estables en lazo abierto sujetos a retardo en la señal de entrada. En Palmor [1996] presenta varias mejoras al enfoque del predictor de Smith. Por lo que, al desarrollar predictores de estado, es posible sintetizar retroalimentaciones de estado causales para sistemas lineales Smith [1957], Palmor [1996].

2.3. Observación en sistemas no lineales

El diseño de observadores no lineales ha sido estudiado por un largo tiempo. Gran parte del esfuerzo ha resultado en extensiones del observador lineal de Luenberger: ejemplos de este son los filtros extendidos de Kalman, técnicas de pseudo linealización, etc. Estas técnicas son válidas en un rango pequeño alrededor del punto de operación. Y frecuentemente requieren de cálculos importantes en tiempo real.

2.3.1. Linealización

Un enfoque sistemático para el desarrollo de observadores para sistemas no lineales se dio en Krener y Isidori [1983]; se utilizó una transformación de coordenadas no lineales para modificar el sistema no lineal original en un sistema lineal con la adición de un término de inyección de la salida. Las transformaciones de estados no lineales también se emplearon en Bestle y Zeitz [1983], Krener y Respondek [1985], Ciccarella et al. [1993] para obtener formas canónicas lineales que se pueden usar para el diseño de observadores. Un estudio comparativo de cuatro técnicas que aparecieron en la década de 1980 para observar los estados de sistemas no lineales se dio en Walcott et al. [1987].

2.3.2. Alta ganancia

El uso de observadores de alta ganancia ha evolucionado como una técnica importante para el diseño de control retroalimentado para sistemas no lineales. Los ingredientes básicos para ésta técnica son:

- ★ Un observador de alta ganancia que robustamente estima las derivadas de la salida.
- ★ Un control retroalimentado globalmente acotado, usualmente obtenido por saturación de una función de retroalimentación continua, fuera de una región compacta de interés, que cumple con los objetivos de diseño. La cota global del control, protege los estados de la planta del fenómeno *peaking* cuando los estados estimados del observador de alta ganancia son utilizados en lugar de los estados reales.

Los observadores de alta ganancia han evolucionado durante las últimas dos décadas como una herramienta importante para el diseño del control de retroalimentación de la salida de sistemas no lineales.

El trabajo inicial sobre observadores de alta ganancia en sistemas no lineales apareció a finales de los años 80, Esfandiari y Khalil [1989], Saberi y Sannuti [1990]. Poco después, la técnica fue desarrollada de manera independiente por dos escuelas de investigadores: la escuela francesa dirigida por Gauthier, Hammouri y otros; Besançon [2003], Busawon et al. [1998], Deza et al. [1992], Gauthier et al. [1992], Gauthier y Kupka [1994], Hammouri et al. [2002], Viel et al. [1995] y la escuela de los EE. UU. liderada por Khalil en la Universidad Estatal de Michigan.

El trabajo de Gauthier y otros en la escuela francesa se centró en obtener resultados globales bajo las condiciones globales de Lipschitz. El trabajo de Khalil y sus colaboradores dio un giro diferente después de que Esfandiari y Khalil [1992] demostraran que, ante la falta de condiciones globales de Lipschitz, los observadores de

alta ganancia podrían desestabilizar el sistema en lazo cerrado ya que la ganancia del observador es lo suficientemente alta. La desestabilización se explicó utilizando el fenómeno de *peaking*, que es un término utilizado en el diseño asintótico de alta ganancia para describir el hecho de que llevar la ganancia lo suficientemente grande produce un comportamiento impulsivo.

El efecto desestabilizador de la interacción del *peaking* con la no linealidad ya había sido expuesto por Sussmann y Kokotovic [1989], en la retroalimentación de estados de alta ganancia. La presencia del *peaking* en observadores lineales de alta ganancia se observó anteriormente, pero su efecto desestabilizador en el control por retroalimentación no lineal se observó por primera vez en Esfandiari y Khalil [1992]. Más importante aún, propuso una solución aparentemente simple para el problema.

Se sugirió que el control debería diseñarse como una función acotada globalmente de los estados estimados para que se sature durante el *peaking*. Debido a que el observador de alta ganancia está diseñado para ser mucho más rápido que la dinámica de lazo cerrado en la retroalimentación del estado, el *peaking* es muy corto en relación con la escala de tiempo de las variables de la planta, que se mantienen muy cerca de sus valores iniciales. Esta separación de escalas de tiempo se usó en Esfandiari y Khalil [1992] para probar que el controlador de retroalimentación de salida estabiliza el sistema en lazo cerrado para una ganancia de observador suficientemente alta.

Posteriormente, Atassi y Khalil [1999] demostraron otra propiedad fundamental del control saturado. Mostraron que las trayectorias de las variables de estado bajo la retroalimentación de la salida convergen arbitrariamente a las de la retroalimentación del estado, a medida que la ganancia del observador se vuelve lo suficientemente alta. Esta propiedad muestra que el controlador de retroalimentación de la salida recupera el rendimiento del controlador de retroalimentación de estado, y no solo sus propiedades de estabilidad.

2.3.3. Tipo Lipschitz

El diseño de observadores para sistemas tipo Lipschitz fue primero considerado por Thau en su artículo, Thau [1973], donde obtiene una condición de suficiencia para asegurar estabilidad asintótica del observador. La condición de Thau es una herramienta de análisis muy útil pero no direcciona el problema fundamental de diseño.

Alentados por el resultado de Thau, varios autores estudiaron el diseño de observadores para sistemas tipo Lipschitz. En Raghavan y Hedrick [1994], se formula un procedimiento para atacar el problema de diseño. El diseño se basa en resolver una ecuación algebraica de Riccati para obtener la ganancia estática del observador. La técnica de Raghavan fue extendida después por Garg y Hedrick [1995], para estudiar

la detección de fallas y la identificación de sistemas Lipschitz.

Desafortunadamente, el algoritmo de Raghavan a menudo no tiene éxito incluso cuando las matrices (A, C) satisfacen las suposiciones de observabilidad habituales.

Raghavan demostró que el diseño del observador aún podría ser manejable utilizando transformaciones de estado. Otro defecto de su algoritmo es que no proporciona información sobre qué condiciones debe cumplir la ganancia del observador para garantizar la estabilidad. Una solución bastante completa de estos problemas fue presentada más tarde por Rajamani [1998].

Rajamani obtuvo la condición necesaria y suficiente de la matriz de observabilidad que garantiza la estabilidad asintótica del observador y formuló un procedimiento de diseño, usando un gradiente basado en un método de optimización. También discutió la equivalencia entre la condición de estabilidad y la minimización de la norma H_∞ de un sistema en la forma estándar. Sin embargo, señaló que el problema de diseño no puede resolverse como un problema de optimización H_∞ estándar, ya que no se cumplen las suposiciones de regularidad requeridas en el marco H_∞ .

En Pagilla y Yongliang Zhu [2004], se consideran tres problemas relacionados para la estabilización de una clase de sistemas no lineales tipo Lipschitz: (1) diseño de controlador con retroalimentación de estado completo, (2) diseño de observador y (3) diseño de controlador con retroalimentación de la salida. Se desarrollan condiciones suficientes para el diseño de un controlador retroalimentado de estado completo y un observador no lineal. Dado que se satisfacen las condiciones de suficiencia del controlador y observador, se muestra que el controlador con retroalimentación de estados estimados del observador propuesto logrará una estabilización exponencial. Resultados en simulación verifican numéricamente los diseños propuestos.

En Pertew et al. [2005], se propone un nuevo diseño de observador H_∞ para sistemas no lineales tipo Lipschitz. Se muestra por primera vez que los observadores clásicos de *estilo Luenberger* son casos especiales de un marco dinámico más general, uno que parece prometedor dados los grados adicionales de libertad. Se muestra la equivalencia entre el problema de diseño del observador y un problema de control H_∞ estándar que satisface todas las suposiciones de regularidad. También se presenta un procedimiento de diseño sistemático que puede llevarse a cabo utilizando software disponible comercialmente.

2.4. Predicción en sistemas no lineales

El problema de control de sistemas con retardo de tiempo en la entrada ha sido tratado a partir de diferentes enfoques. Empezando por ignorar su efecto, cuando el

retardo es muy pequeño o mediante retroalimentaciones causales aproximadas (Munz et al. [2009]) en el caso lineal o aproximaciones de orden reducido en el caso no lineal (Maza-Casas et al. [2000], Kolmanovskii y Myshkis [1992]).

Primero, es obligatorio analizar el problema de predicción de estados para resolver (usando retroalimentaciones de estado causales) problemas de control de sistemas no lineales con retardo en la entrada Germani et al. [2002]. En Germani et al. [2002] se presenta un enfoque para la construcción de un observador de estado para sistemas no lineales cuando las mediciones de la salida están disponibles para cálculos después de un retardo de tiempo no despreciable. El observador propuesto consiste en una cadena de algoritmos de observación que reconstruyen el estado del sistema en diferentes instantes de tiempo retardado (observador de cadena). Se dan condiciones que aseguran la convergencia exponencial global del error de observación para cualquier retardo dado en las mediciones. La implementación del observador es simple y las simulaciones numéricas demuestran su efectividad.

En la mayoría de los casos, el problema de predicción está relacionado al trabajo pionero de observación de estados Thau [1973] o su generalización presentada en Rajamani [1998] para sistemas no lineales sin retardo. La necesidad de retroalimentaciones de estados causales para resolver problemas de control no lineales con retardo en la entrada ha llevado a desarrollar predictores de estados aproximados, por ejemplo, Mazenc y Bliman [2006], en donde el enfoque de *backstepping* es adaptado al problema de estabilizar asintóticamente de manera global los sistemas no lineales con un retardo en la entrada arbitrariamente grande. La estrategia de diseño se basa en la construcción de una funcional de Lyapunov-Krasovskii.

En Kim y Son [2010] se diseña un controlador robusto para compensar perturbaciones variantes en tiempo a través de un estimador de perturbaciones.

El problema de estabilización para una clase de sistemas con múltiples retardos en la entrada, es tratado en Li et al. [2014]. La solución propuesta usa una retroalimentación infinita dimensional basada en estados predichos. Se estudia la estabilidad exponencial de los sistemas lineales con múltiples retardos en la entrada mediante la construcción de funcionales de Lyapunov-Krasovskii adecuadas. Con este fin, primero se transforma el sistema con retardo de tiempo en lazo cerrado con retroalimentación del predictor en un sistema equivalente sin retardo. Luego, basado en el sistema lineal sin retardo, se propone una funcional de Lyapunov-Krasovskii que garantiza la estabilidad exponencial del sistema con retardo en tiempo original en términos de la solución de un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI). Está comprobado que el conjunto de LMI es solucionable siempre que el sistema lineal sin retardo sea asintóticamente estable. Al mismo tiempo, se muestra que la funcional de Lyapunov-Krasovskii obtenida es también una funcional entrada-estado estable (ISS) de Lyapunov-Krasovskii para el sistema de control con retroalimentación del

predictor. Se desarrolla un ejemplo numérico para mostrar la efectividad del enfoque propuesto. La virtud del enfoque propuesto es que la construcción de la funcional de Lyapunov-Krasovskii no necesita el método de *backstepping* para la ecuación diferencial parcial y se basa simplemente en algunas LMI que se pueden resolver de manera eficiente con el software existente.

Un controlador por modos deslizantes se presenta en Young-Hoon y Jun-Ho [1999] para la estabilización de sistemas con retardo en la entrada. Diseñan un predictor de estados y una superficie deslizante para minimizar los efectos del retardo.

Una estrategia robusta para estabilizar sistemas con retardo en la entrada bajo incertidumbres paramétricas se presenta en Bohyung Lee y Jang Gyu Lee [2000], la solución se basa en las desigualdades matriciales lineales; el mismo problema se aborda en Chiang y Tung [2003] a través de una funcional de Lyapunov-Krasovskii.

En Bohyung Lee y Jang Gyu Lee [2000], se investiga un método de control robusto para el problema de control no lineal con un retardo en la entrada. Se transforma el problema de control con la no linealidad de entrada en un problema de control robusto de tipo sistema lineal con incertidumbre estructurada. Se obtienen las condiciones para las desigualdades matriciales lineales (LMI) para la estabilización robusta dependiente del retardo de sistemas inciertos estructurados con retardo en la entrada y la no linealidad del sector de entrada.

En Chiang y Tung [2003], se propone un análisis sistemático y un método de diseño simple para una clase de sistemas no lineales con errores de modelado y retardo en la entrada. La incertidumbre del sistema se considera como no desvaneciente en el punto de operación deseado. Usando una transformación de coordenadas, el sistema no lineal original se puede transformar en un problema clásico de perturbación singular. Cuando la condición local de Lipschitz es la no linealidad (incluida la incertidumbre y el retardo de entrada), su efecto en la trayectoria de salida se puede suprimir de manera efectiva utilizando la técnica propuesta.

El caso de sistemas retroalimentados linealizables con retardo en la entrada acotado es analizado en Lei y Khalil [2016] donde el problema de estabilización es resuelto para un retardo suficientemente pequeño; el mismo problema, para sistemas lineales es considerado en Krstic [2010].

El diseño del controlador de seguimiento de trayectorias de un robot móvil con ruedas sujeto a mediciones retardadas es tratado en Guechi et al. [2012]. Usando las propiedades de planitud del robot móvil tipo monociclo, se propone un enfoque de retroalimentación de salida basado en un predictor no lineal para estimar las variables de estado. Éste, permite garantizar la estabilidad exponencial de los errores de seguimiento. También se aplica un observador de tiempo finito basado en la teoría

de modos deslizantes para la estimación del retardo cuyo valor se supone constante pero desconocido. La estabilidad del sistema en lazo cerrado con salidas retardadas se estudia utilizando la teoría de Lyapunov. Se realizan simulaciones numéricas en un entorno realista para mostrar la eficiencia del enfoque propuesto.

Otra opción para abordar el problema de control de sistemas con retardo, es utilizar como estrategia de predicción una integral infinita conocida como *Asignación del Espectro Infinito* propuesta en Manitius y Olbrot [1979] y sus generalizaciones presentadas en Krstic [2009]. Las estrategias de predicción por integrales infinitas son soluciones analíticas que adolecen de problemas prácticos de implementación, ver por ejemplo, Michiels et al. [2002] para una comparación entre la solución de la integral infinita y una simple retroalimentación estática de estados. Los trabajos en Michiels et al. [2003], Mirkin [2004], y Mondie y Michiels [2003] detallan las limitaciones de la asignación del espectro finito. Autores de Zhou et al. [2012] y Zuo et al. [2016] proponen controladores retroalimentados de salida truncada para sistemas lineales y una clase de sistemas no lineales tipo Lipschitz, respectivamente, para evitar los problemas de implementación. Los controladores retroalimentados de salida truncada ignoran el término dimensional infinito.

2.5. Otros casos

En Niculescu et al. [1998], se centran en el problema de la estabilidad exponencial robusta de una clase de sistemas inciertos descritos por ecuaciones diferenciales funcionales con retardos variantes en el tiempo. Se asume que las incertidumbres son continuas, variantes en el tiempo, no lineales, y acotadas. Se dan las condiciones suficientes para la estabilidad exponencial robusta tanto para casos de retardo simple como múltiple. Se considera el tema de la estabilidad exponencial de una clase de sistemas inciertos con retardos variantes en el tiempo. Estos sistemas se describen mediante ecuaciones diferenciales funcionales con incertidumbres en los estados *actual* y *retrasado*. Se asume que las incertidumbres son continuas, variantes en el tiempo, no lineales y acotadas cónicamente. Se han considerado sistemas inciertos con retardos únicos y múltiples variantes en el tiempo. El punto focal de este trabajo es investigar las condiciones que garantizan la estabilidad exponencial para todas las incertidumbres admisibles.

Los sistemas con retardos grandes en la entrada, incluso aquellos en los que la planta es inestable, pueden controlarse con éxito utilizando la retroalimentación de un predictor y métodos basados en el control LQ. La mayoría de los resultados tratan problemas donde el retardo es constante. En el caso de sistemas con retardos variantes en el tiempo, existen varios resultados para problemas con el retardo en el estado y sin retardo en la entrada. Sin embargo, el caso de sistemas con retardo variante en la

entrada ha recibido muy poca atención, Krstic [2010].

Artstein [1982], introdujo una idea básica de cómo abordar los problemas con el retardo en la entrada variante en el tiempo, sin embargo, el diseño no se elabora en detalle ya que el caso del retardo variante en el tiempo se considera solo para las plantas variantes en el tiempo, en donde los desarrollos explícitos no son posibles. Nihtila [1991] presentó un diseño explícito de retroalimentación de estado para plantas lineales invariantes en el tiempo (LTI) con retardos en la entrada variantes en el tiempo. En Krstic [2010] se establece la estabilidad exponencial del sistema retroalimentado con el controlador de Nihtila [1991]. Se hace utilizando una construcción explícita de una funcional de Lyapunov (estricta), donde el enfoque empleado utiliza una transformación que relaciona el sistema de retroalimentación de dimensión infinita con otro sistema de dimensión finita. Una construcción de este tipo no utiliza una funcional de Lyapunov, sino un controlador que compensa el retardo variante en el tiempo.

El desafío en el estudio de la estabilidad bajo el retardo en la entrada variante en el tiempo, en comparación con el resultado de Krstic [2010] para los retardos en la entrada constantes, es que uno tiene que construir una funcional de Lyapunov usando una transformación *backstepping* y transformar el estado del actuador en una ecuación diferencial parcial de transporte (PDE).

En Hou et al. [2002], se presenta un diseño de observador simple para sistemas lineales con retardo. La clave en el diseño es encontrar un cambio de coordenadas generalizado tal que en las nuevas coordenadas todos los términos con retardo en la descripción del sistema estén asociados sólo con la salida. Este método corresponde al enfoque de inyección de salida en los diseños de observadores no lineales. El enfoque de inyección de salida puede tratar con una clase muy restrictiva de sistemas no lineales, mientras que este método puede cubrir todos los sistemas lineales con retardo que satisfacen la condición de rango de la matriz de observabilidad.

Capítulo 3

Esquema de Observación

3.1. Introducción

3.1.1. Razón de la necesidad de la predicción

Los retardos de tiempo se pueden encontrar en varios sistemas de ingeniería, tales como procesos químicos, sistemas neumáticos, hidráulicos, sistemas económicos, etc., Young-Hoon y Jun-Ho [1999]. En comparación con los sistemas sin retardo, la presencia de retardos hace que sea más difícil lograr el rendimiento y la estabilidad satisfactorios de los sistemas. El retardo limita el ancho de banda alcanzable y el uso de retroalimentaciones de alta ganancia. Muchos autores se ocupan del problema de control de los sistemas con retardo a través de controladores basados en predictores (Smith [1959]; Artstein [1982]; Fiagbedzi y Pearson [1986]; Kojima et al. [1994]). Éstos incluyen un predictor para compensar el retardo, por lo que son bien conocidos como un recurso para superar el efecto del retardo. Por lo tanto, un sistema con retardo, bajo un controlador basado en predictor, puede transformarse en un sistema sin retardo en el que el retardo se elimina del sistema en lazo cerrado. Este enfoque nos permite caracterizar el procedimiento de diseño para el sistema sin retardo.

3.1.2. Relación entre un predictor y un observador

La relación existente entre un predictor y un observador es que ambas entidades son en cierta forma similares, es decir, ambos son utilizados para realizar la estimación de variables de estado. La diferencia entre ellos radica en la temporalidad en la que son utilizados. Un observador es diseñado para estimar variables de estado en sistemas dinámicos libres de retardo mientras que un predictor es utilizado para estimar variables futuras de los estados en sistemas dinámicos *adelantados* en tiempo, es decir, el predictor es un observador para un sistema en adelanto.

3.1.3. Importancia de la clase de sistemas a estudiar

Este trabajo aborda el problema de predicción y control, evitando soluciones integrales de dimensión infinita, para una clase de sistemas no lineales con retardo en la entrada. Considerando el predictor lineal propuesto en Michiels y Roose [2001], este trabajo introduce un predictor no lineal, para una clase de sistemas no lineales, para calcular valores futuros de estados, τ unidades de tiempo en el futuro. Bajo la suposición de que los sistemas cumplen con la condición de Lipschitz, es posible mostrar que el predictor propuesto converge a los valores de los estados futuros. La suposición de Lipschitz es común en la literatura para sistemas no lineales sin retardo Thau [1973], Rajamani [1998], y para una clase de sistemas no lineales con retardo Shi et al. [2016a], Shi et al. [2016b].

3.1.4. Resultados obtenidos: a) observación b) control

Dentro de los resultados se obtiene un predictor no lineal para una clase de sistemas no lineales, ésto para estimar valores futuros de los estados τ unidades de tiempo en el futuro. La convergencia del predictor propuesto a los valores de los estados futuros, se hace bajo la suposición de la condición de Lipschitz. Con los estados futuros predichos se resuelve el problema de regulación y de seguimiento de trayectorias. La estabilidad en lazo cerrado es analizada a partir de una funcional completa de Lyapunov.

3.2. Clase de sistemas no lineales con retardo en la entrada

Este trabajo, considera una clase de sistemas no lineales. La siguiente ecuación diferencial describe esta clase de sistemas no lineales,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + \Phi(x(t), u(t - \tau)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ es el estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada, $u(t - \tau) \in \mathbb{R}^m$ es la señal de entrada, $\Phi \in \mathbb{R}^n$ es una función dependiente de $x(t)$ y de $u(t - \tau)$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ es la señal de salida, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz y $\tau \in \mathbb{R}^+$ es constante. Se supone que la señal de salida $y(t)$ está disponible para medirse. Además, el sistema no lineal (3.1) satisface las siguientes suposiciones.

Suposición 1 $\Phi(x, u)$ es una función Lipschitz localmente con respecto a x , es decir,

$$\|\Phi(x, u) - \Phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_L \|x - \hat{x}\|\tag{3.2}$$

para todo x, \hat{x} en una cierta región conteniendo el origen con $\gamma_L \in \mathbb{R}^+$. En el caso de que (3.2) se satisface para todo x, \hat{x} , se dice que la función $\Phi(x, u)$ es globalmente Lipschitz.

Suposición 2 *El par (A, C) es observable.*

Observación 3 *Note que cualquier sistema no lineal de la forma $\dot{x} = f(x, u(t - \tau))$ puede ser expresado en la forma (3.1) siempre que $f(x, u(t - \tau))$ sea diferenciable con respecto a x . Una justificación detallada de la generalidad de esta clase de sistemas no lineales (3.1) es encontrada por ejemplo en Thau [1973], Raghavan y Hedrick [1994], Kou et al. [1975].*

Las señales de entrada retardadas surgen de la existencia de tiempos muertos encontrados en varios procesos industriales Kolmanovskii y Myshkis [1992], Niculescu [2001a] o de sistemas teleoperados donde la plataforma de control se coloca en una ubicación remota como podría ser el caso de robots móviles Velasco-Villa et al. [2015], Velasco-Villa et al. [2013], Ordaz et al. [2013].

3.3. Problema de Predicción-Observación

El problema de predicción se establece de la siguiente forma. Basado en el conocimiento de la señal de salida $y(t)$ y la señal de entrada $u(t)$, diseñe un sistema dinámico cuyos estados $\hat{x}(t + \tau)$ converjan asintóticamente a los valores futuros de los estados $x(t + \tau)$, esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t + \tau) - \hat{x}(t + \tau)) = 0. \quad (3.3)$$

Para motivar la importancia del problema de predicción, suponga que existe un controlador,

$$u(t) = \alpha(x(t), t) \quad (3.4)$$

que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias para el sistema (3.1) con $\tau = 0$. Debido al retardo involucrado, la dinámica en lazo cerrado (3.1)–(3.4) toma la siguiente forma,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \Phi(x(t), \alpha(x(t - \tau), t - \tau))$$

así, en general, el controlador (3.4) ya no resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para (3.1). Suponga que es posible diseñar una retroalimentación ideal basada en los valores futuros del estado, esta retroalimentación en términos de estados futuros, tomará la forma,

$$u(t) = \alpha(x(t + \tau), t + \tau). \quad (3.5)$$

Note que el uso de una retroalimentación ideal (3.5) producirá una dinámica en lazo cerrado libre de retardo (3.1)–(3.5). Este hecho motiva el diseño de un predictor capaz de generar el valor estimado $\hat{x}(t + \tau)$. Sin embargo, como se esperaba, la mejor solución posible sólo logra una convergencia asintótica a los estados futuros. Por lo tanto, debido al retardo, la dinámica en lazo cerrado se comportará como un lazo

abierto en $[0, \tau]$ produciendo un transitorio indeseable y no compensable.

El instrumento para abordar el problema de predicción para la clase de sistemas descritos en (3.1) es el siguiente cambio de coordenadas,

$$w(t) = x(t + \tau), \quad x(t) = w(t - \tau). \quad (3.6)$$

En términos de las nuevas coordenadas(3.6), la dinámica del sistema (3.1) es descrita por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= Aw(t) + \Phi(w(t), u(t)) \\ y(t) &= Cw(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.7)$$

La dinámica del sistema representa la evolución del sistema original (3.1), τ unidades de tiempo en el futuro.

3.3.1. Diseño del predictor propuesto

La dinámica del predictor ahora se puede diseñar en función del sistema en adelante (3.7). La dinámica para el predictor se propone como una copia de la dinámica en adelante (3.7) más un término que inyecta el error de observación retardado,

$$\dot{\hat{w}}(t) = A\hat{w}(t) + \Phi(\hat{w}(t), u(t)) + LC[x(t) - \hat{w}(t - \tau)] \quad (3.8)$$

donde L es la matriz de ganancias del predictor, $\hat{w}(t)$ representa la evolución del estado predicho $w(t)$ y en consecuencia, la predicción de $\hat{x}(t + \tau)$ que representa el estado original $x(t)$, τ unidades de tiempo adelantado. Téngase en cuenta que en (3.8), no es posible inyectar la señal $w(t)$ ya que de acuerdo a (3.6) no está disponible.

Para analizar la convergencia del estado $\hat{w}(t)$ al valor futuro $w(t) = x(t + \tau)$ observe que de la dinámica del sistema–predictor (3.1)–(3.8) es posible definir la señal de error,

$$e_w(t) = x(t) - \hat{w}(t - \tau). \quad (3.9)$$

La derivada con respecto al tiempo de (3.9) produce,

$$\dot{e}_w(t) = Ae_w(t) - LCe_w(t - \tau) + \tilde{\Phi}(x, \hat{x}, u) \quad (3.10)$$

con $\tilde{\Phi}(x, \hat{x}, u) = \Phi(x(t), u(t - \tau)) - \Phi(\hat{x}(t), u(t - \tau))$.

3.3.2. Convergencia de los errores de predicción

La convergencia al origen del error de predicción (3.9) se prueba en dos pasos. Primero, note que la estabilidad de la parte lineal del sistema (3.10), corresponde a la estabilidad de un sistema de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= A\psi(t) + A_1\psi(t - \tau) \\ \psi(\theta) &= \varphi(\theta) \end{aligned} \quad (3.11)$$

con una condición inicial dada por la función $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ donde $\varphi \in \mathcal{PC}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones continuas a trozos de \mathbb{R}^n definidas en $[-\tau, 0]$.

Note que la condición inicial del error de predicción depende de la planta (3.1) y el predictor (3.8). Como los parámetros de la matriz L son libres, a partir de la suposición de observabilidad del par (A, C) , siempre es posible ubicar los valores propios de la matriz $A - LC$ en el lado izquierdo del plano complejo. La propiedad Hurwitz de la matriz $A - LC$ asegura la estabilidad de la ecuación diferencial con retardo (3.11) para un retardo suficientemente pequeño τ , Michiels et al. [2002]. El máximo retardo τ^* para el cual el sistema (3.11) será asintóticamente estable, depende de la selección de la ganancia del observador L y su cálculo no es una tarea fácil, ya que la complejidad aumenta a medida que aumenta la dimensión del sistema (3.11). Así, dada una matriz de ganancias L , tal que $A - LC$ sea una matriz Hurwitz, siempre es posible estabilizar asintóticamente el error de predicción (3.11) para un retardo constante $\tau < \tau^*$. Este hecho puede verificarse, por ejemplo, considerando la Proposición 5.2.2, del Capítulo 5 en Gu et al. [2003] o revisando el procedimiento de asignación de polos dado en Michiels et al. [2002].

Con base en los argumentos anteriores, se supondrá, sin pérdida de generalidad, que existe una matriz L y un retardo τ^* tal que el sistema (3.11) es asintóticamente estable para $0 \leq \tau < \tau^*$. También debe notarse, que la estabilidad de (3.11) no sólo es asintótica, sino también exponencial Bellman y Cooke [1963].

Funcional de Lyapunov de tipo completo

Siguiendo los resultados presentados en Kharitonov [2013], para mostrar la estabilidad asintótica de (3.10), es posible considerar una funcional completa de Lyapunov de la forma,

$$V(e_{wt}) = V_0(e_{wt}) + \int_{-\tau}^0 e_w^\top(t + \theta) [(\tau + \theta) W_1] e_w(t + \theta) d\theta \quad (3.12)$$

donde $e_{wt} = e_w(t - \tau)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ con,

$$\begin{aligned} V_0(e_{wt}) &= e_w^\top(t) U(0) e_w(t) + 2e_w^\top(t) \int_{-\tau}^0 U(-\tau - \theta) A_1 e_w(t + \theta) d\theta \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 e_w^\top(t + \theta_1) A_1^\top \left[\int_{-\tau}^0 U(\theta_1 - \theta_2) A_1 e_w(t + \theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

y $A_1 = -LC$. La matriz de Lyapunov $U(\cdot)$ en (3.13) está dada por,

$$U(\gamma) = \int_0^\infty K^\top(t) W K(t + \gamma) dt \quad (3.14)$$

donde $K(t)$ es la matriz fundamental del sistema (3.11) sin perturbación, y

$$W = W_0 + \tau W_1 \quad (3.15)$$

con W_0 y W_1 matrices definidas positivas.

La matriz de Lyapunov $U(\gamma)$ satisface las siguientes propiedades, Kharitonov [2013].

$$P1. \frac{dU(\gamma)}{d\gamma} = U(\gamma)A + U(\gamma - \tau)A_1$$

$$P2. U(-\gamma) = U^\top(\gamma), \gamma > 0 \text{ y } U^\top(0) = U(0)$$

$$P3. U(0)A + U(-\tau)A_1 + A^\top U(0) + A_1^\top U(\tau) = -W$$

donde (P1) es conocida como la *propiedad dinámica*, (P2) es la *propiedad de simetría* y (P3) es la *propiedad algebraica*.

Ahora es posible establecer el resultado de la convergencia del error del predictor.

Teorema 4 *Suponga que la matriz de ganancias L es seleccionada tal que el sistema (3.10) con $\tilde{\Phi}(x, \hat{x}, u) = 0$ es exponencialmente estable. Considere que la Suposición 1 es satisfecha, el error de predicción $e_w(t)$ converge asintóticamente al origen si,*

$$i) \tau < \frac{\lambda_{\min}(W_0)}{\lambda_{\min}(W_1)} - \frac{2}{a_1},$$

$$ii) \lambda_{\min}(W_1) > \gamma_L v a_1$$

donde $v = \max_{\theta \in [0, \tau]} \|U(\theta)\|$, y $a_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(A_1^\top A_1)}$ con $\lambda_{\min}(M)$ ($\lambda_{\max}(M)$) el más pequeño (más grande) valor propio de la matriz M . Como una consecuencia,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{w}(t) - x(t + \tau)) = 0.$$

Además, si $\Phi(x, u)$ en la Suposición 1 es globalmente Lipschitz, la convergencia resultante es también global.

Demostración Reescribiendo (3.12) como,

$$\begin{aligned} v(e_t) &= \underbrace{e^T(t)U(0)e(t)}_{R_1(t)} + \underbrace{2e^T(t) \int_{-\tau}^0 U(-\tau - \theta) A_1 e(t + \theta) d\theta}_{R_2(t)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{-\tau}^0 e^T(t + \theta_1) A_1^T \left[\int_{-\tau}^0 U(\theta_1 - \theta_2) A_1 e(t + \theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1}_{R_3(t)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{-\tau}^0 e^T(t + \theta) [(\tau + \theta) W_1] e(t + \theta) d\theta}_{R_4(t)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

La derivada del primer término,

$$R_1(t) = e^T(t) U(0) e(t) \quad (3.17)$$

es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_1(t) &= e^T(t) U(0) \dot{e}(t) + \dot{e}^T(t) U(0) e(t) \\ &= e^T(t) U(0) \left[A_0 e(t) + A_1 e(t - \tau) + \bar{f}(e_w, e_d, w_d) \right] \\ &\quad + \left[A_0 e(t) + A_1 e(t - \tau) + \bar{f}(e_w, e_d, w_d) \right]^T U(0) e(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aplicando la propiedad de simetría (P2), se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_1(t) &= e^T(t) \left[U(0) A_0 + A_0^T U(0) \right] e(t) + 2e^T(t) U(0) A_1 e(t - \tau) \\ &\quad + 2e^T(t) U(0) \bar{f}(e_w, e_d, w_d). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Considerando el segundo término de (3.16),

$$R_2(t) = 2e^T(t) \int_{-\tau}^0 U(-\tau - \theta) A_1 e(t + \theta) d\theta \quad (3.20)$$

es posible proponer el siguiente cambio de variable,

$$\xi = \theta + t$$

de donde,

$$d\xi = d\theta.$$

Entonces (3.20), queda expresada como,

$$R_2(t) = 2e^T(t) \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi. \quad (3.21)$$

Derivando (3.21), con respecto al tiempo se tiene,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} R_2(t) = \\
& = 2e^T(t) \frac{d}{dt} \left[\int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi \right] + 2\dot{e}^T(t) \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi \\
& = 2e^T(t) \left\{ U(-\tau) A_1 e(t) - U(0) A_1 e(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} [U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi)] d\xi \right\} \\
& \quad + 2 \left\{ A_0 e(t) + A_1 e(t - \tau) + \bar{f}(e_w, e_d, w_d) \right\}^T \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi \\
& = 2e^T(t) U(-\tau) A_1 e(t) - 2e^T(t) U(0) A_1 e(t - \tau) \\
& \quad + 2e^T(t) \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} [U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi)] d\xi \\
& \quad + 2e^T(t) A_0^T \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi \\
& \quad + 2e^T(t - \tau) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi \\
& \quad + 2\bar{f}^T(e_w, e_d, w_d) \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Para $R_3(t)$ se tiene,

$$R_3(t) = \int_{-\tau}^0 e^T(t + \theta_1) A_1^T \left[\int_{-\tau}^0 U(\theta_1 - \theta_2) A_1 e(t + \theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1. \tag{3.23}$$

Considerando de nueva cuenta $\xi = \theta + t$ y $d\xi = d\theta$, se obtiene,

$$R_3(t) = \int_{t-\tau}^t e^T(\xi_1) A_1^T \left[\int_{t-\tau}^t U(\xi_1 - \xi_2) A_1 e(\xi_2) d\xi_2 \right] d\xi_1. \tag{3.24}$$

Derivando (3.24), con respecto al tiempo se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} R_3(t) & = e^T(t) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \xi) A_1 e(\xi) d\xi \\
& \quad - e^T(t - \tau) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \tau - \xi) A_1 e(\xi) d\xi \\
& \quad + \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^T(\xi_1) A_1^T \left[\int_{t-\tau}^t U(\xi_1 - \xi_2) A_1 e(\xi_2) d\xi_2 \right] \right\} d\xi_1. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Resolviendo para la doble integral de (3.25), se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^T(\xi_1) A_1^T \left[\int_{t-\tau}^t U(\xi_1 - \xi_2) A_1 e(\xi_2) d\xi_2 \right] \right\} d\xi_1 = \\
& = \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{t-\tau}^t e^T(\xi_1) A_1^T U(\xi_1 - \xi_2) A_1 e(\xi_2) d\xi_2 \right] d\xi_1 \\
& = \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) A_1^T U(\xi - t) A_1 e(t) d\xi - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) A_1^T U(\xi - t + \tau) A_1 e(t - \tau) d\xi \\
& = \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) A_1^T U(\xi - t) d\xi A_1 e(t) - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) A_1^T U(\xi - t + \tau) d\xi A_1 e(t - \tau).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Por lo que la derivada queda expresada como,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} R_3(t) & = e^T(t) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \xi) A_1 e(\xi) d\xi \\
& \quad - e^T(t - \tau) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \tau - \xi) A_1 e(\xi) d\xi \\
& \quad + \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) A_1^T U(\xi - t) d\xi A_1 e(t) \\
& \quad - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) A_1^T U(\xi - t + \tau) d\xi A_1 e(t - \tau).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Ahora bien, por la propiedad de simetría (P2),

$$\begin{aligned}
\int_{t-\tau}^t e^T(\xi) A_1^T U(\xi - t) d\xi A_1 e(t) & = e^T(t) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \xi) A_1 e(\xi) d\xi \\
\int_{t-\tau}^t e^T(\xi) A_1^T U(\xi - t + \tau) d\xi A_1 e(t - \tau) & = e^T(t - \tau) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \tau - \xi) A_1 e(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Entonces la derivada de (3.24) es,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} R_3(t) & = 2e^T(t) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \xi) A_1 e(\xi) d\xi \\
& \quad - 2e^T(t - \tau) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \tau - \xi) A_1 e(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Para $R_4(t)$ se tiene,

$$R_4(t) = \int_{-\tau}^0 e^T(t + \theta) [(\tau + \theta) W_1] e(t + \theta) d\theta. \tag{3.30}$$

La consideración de $\xi = \theta + t$ y $d\xi = d\theta$, produce,

$$R_4(t) = \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) [(\tau + \xi - t) W_1] e(\xi) d\xi. \quad (3.31)$$

Derivando (3.31), con respecto al tiempo se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_4(t) &= e^T(t) [\tau W_1] e(t) + \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} \{e^T(\xi) [(\tau + \xi - t) W_1] e(\xi)\} d\xi \\ &= e^T(t) [\tau W_1] e(t) - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) W_1 e(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Reuniendo todos los términos de las derivadas de $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ y $R_4(t)$, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(e_t) &= e^T(t) [U(0) A_0 + A_0^T U(0)] e(t) + 2e^T(t) U(0) A_1 e(t - \tau) \\ &\quad + 2e^T(t) U(0) \bar{f}(e_w, e_d, w_d) + 2e^T(t) U(-\tau) A_1 e(t) - 2e^T(t) U(0) A_1 e(t - \tau) \\ &\quad + 2e^T(t) \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} [U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi)] d\xi \\ &\quad + 2e^T(t) A_0^T \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi \\ &\quad + 2e^T(t - \tau) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi \\ &\quad + 2\bar{f}^T(e_w, e_d, w_d) \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi \\ &\quad + 2e^T(t) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \xi) A_1 e(\xi) d\xi \\ &\quad - 2e^T(t - \tau) A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t - \tau - \xi) A_1 e(\xi) d\xi \\ &\quad + e^T(t) [\tau W_1] e(t) - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) W_1 e(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.33)$$

que puede reescribirse en la forma,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(e_t) &= \underbrace{e^T(t) [U(0)A_0 + A_0^T U(0)] e(t)}_{r_1} + \underbrace{2e^T(t)U(0)A_1 e(t-\tau)}_{r_2} \\
&\quad + 2e^T(t)U(0)\bar{f}(e_w, e_d, w_d) + \underbrace{2e^T(t)U(-\tau)A_1 e(t)}_{r_3} \\
&\quad - \underbrace{2e^T(t)U(0)A_1 e(t-\tau)}_{r_4} + \underbrace{2e^T(t) \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} [U(-\tau-\xi+t)A_1 e(\xi)] d\xi}_{r_5} \\
&\quad + \underbrace{2e^T(t)A_0^T \int_{t-\tau}^t U(-\tau-\xi+t)A_1 e(\xi) d\xi}_{r_6} \\
&\quad + \underbrace{2e^T(t-\tau)A_1^T \int_{t-\tau}^t U(-\tau-\xi+t)A_1 e(\xi) d\xi}_{r_7} \\
&\quad + 2\bar{f}^T(e_w, e_d, w_d) \int_{t-\tau}^t U(-\tau-\xi+t)A_1 e(\xi) d\xi \\
&\quad + \underbrace{2e^T(t)A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t-\xi)A_1 e(\xi) d\xi}_{r_8} - \underbrace{2e^T(t-\tau)A_1^T \int_{t-\tau}^t U(t-\tau-\xi)A_1 e(\xi) d\xi}_{r_9} \\
&\quad + e^T(t) [\tau W_1] e(t) - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi)W_1 e(\xi) d\xi. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Nótese que los términos $r_2 - r_4$ y $r_7 - r_9$ se cancelan entre sí. Agrupando los términos r_5 , r_6 y r_8 que incluyen un factor integral, la suma de éstos resulta,

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= 2e^T(t) \int_{t-\tau}^t \frac{\partial}{\partial t} [U(-\tau-\xi+t)A_1 e(\xi)] d\xi + 2e^T(t)A_0^T \int_{t-\tau}^t U(-\tau-\xi+t)A_1 e(\xi) d\xi \\
&\quad + 2e^T(t)A_1^T \int_{t-\tau}^t U(-\xi+t)A_1 e(t+\xi) d\xi \\
&= 2e^T(t) \int_{t-\tau}^t \left[\frac{\partial}{\partial t} [U(-\tau-\xi+t)] + A_0^T U(-\tau-\xi+t) + A_1^T U(-\xi+t) \right] A_1 e(t+\xi) d\xi. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de simetría (P2), se tiene que,

$$\frac{\partial}{\partial t} U(-\tau-\xi+t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} U(\tau+\xi-t) \right]^T = - \left[\left(\frac{\partial}{\partial h} U(h) \right) \Big|_{h=\tau+\xi-t} \right]^T. \tag{3.36}$$

Como $\xi \in [t - \tau, t]$, la variable $h = \tau + \xi - t \geq 0$ y considerando la propiedad dinámica (P1) y de simetría (P2), implican que,

$$\frac{\partial}{\partial t} U(-\tau - \xi + t) = -A_0^T U(-\tau - \xi + t) - A_1^T U(-\xi + t). \quad (3.37)$$

Sustituyendo (3.37) en (3.35), se tiene que $s_1(t) = 0$. Por lo que la suma de los términos con un factor integral, (3.35), se anula.

Ahora colectando los términos algebraicos r_1 y r_3 de (3.34), se obtiene,

$$\begin{aligned} s_2(t) &= 2e^T(t) U(0) A_0 e(t) + 2e^T(t) U(-\tau) A_1 e(t) \\ &= e^T(t) \left[U(0) A_0 + A_0^T U(0) + U(-\tau) A_1 + A_1^T U(\tau) \right] e(t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por la propiedad algebraica (P3), implica que la forma cuadrática anterior coincide con $-w(e(t))$; entonces,

$$s_2(t) = -e^T(t) W e(t) \quad (3.39)$$

en donde $W = W_0 + \tau W_1$.

Finalmente, reescribiendo (3.34) se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(e_t) &= -e^T(t) [W_0 + \tau W_1] e(t) + \underbrace{2e^T(t) U(0) \bar{f}(e_w, e_d, w_d)}_{J_1(t)} \\ &\quad + \underbrace{2\bar{f}^T(e_w, e_d, w_d) \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi}_{J_2(t)} \\ &\quad + e^T(t) [\tau W_1] e(t) - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) W_1 e(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.40)$$

esto es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(e_t) &= -e^T(t) W_0 e(t) - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi) W_1 e(\xi) d\xi + \underbrace{2e^T(t) U(0) \bar{f}(e_w, e_d, w_d)}_{J_1(t)} \\ &\quad + \underbrace{2\bar{f}^T(e_w, e_d, w_d) \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e(\xi) d\xi}_{J_2(t)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Considerando las propiedades de la matriz de Lyapunov $U(\gamma)$, después de algunas manipulaciones algebraicas, la derivada con respecto al tiempo de la funcional (3.12), a lo largo de la solución del error de predicción (3.10), produce,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(e_{wt}) &= -e_w^\top(t) W_0 e_w(t) - \int_{t-\tau}^t e_w^\top(\xi) W_1 e_w(\xi) d\xi \\ &\quad + 2e_w^\top(t) U(0) \tilde{\Phi}(\cdot) + 2\tilde{\Phi}^\top(\cdot) \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e_w(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Entonces, es posible acotar superiormente los términos con signo indefinido en (3.42) como sigue,

$$2e_w^\top(t) U(0) \tilde{\Phi}(\cdot) \leq 2\gamma_L v \|e_w(t)\|^2$$

y

$$\begin{aligned} 2\tilde{\Phi}^\top(\cdot) \int_{t-\tau}^t U(-\tau - \xi + t) A_1 e_w(\xi) d\xi &\leq \gamma_L v a_1 \tau \|e_w(t)\|^2 \\ &\quad + \gamma_L v a_1 \int_{-\tau}^0 \|e_w(t + \theta)\|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (3.42) puede ser acotado superiormente en la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(e_{wt}) &\leq -e_w^\top(t) W_0 e_w(t) - \int_{-\tau}^0 e_w^\top(t + \theta) W_1 e_w(t + \theta) d\theta \\ &\quad + 2\gamma_L v \|e_w(t)\|^2 + \gamma_L v a_1 \tau \|e_w(t)\|^2 + \gamma_L v a_1 \int_{-\tau}^0 \|e_w(t + \theta)\|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Como resultado, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(e_{wt}) &\leq -[\lambda_{\min}(W_0) - (2 + a_1\tau)\gamma_L v] \|e_w(t)\|^2 \\ &\quad - [\lambda_{\min}(W_1) - \gamma_L v a_1] \int_{-\tau}^0 \|e_w(t + \theta)\|^2 d\theta. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Note que la condición *i*) puede ser reescrita como,

$$\lambda_{\min}(W_0) > (2 + a_1\tau)\gamma_L v \left(\frac{\lambda_{\min}(W_1)}{\gamma_L v a_1} \right).$$

Entonces, se obtiene,

$$\lambda_{\min}(W_0) > (2 + a_1\tau)\gamma_L v \quad (3.44)$$

ya que,

$$\frac{\lambda_{\min}(W_1)}{\gamma_L v a_1} > 1 \quad (3.45)$$

de la condición *ii*). Las condiciones (3.44)–(3.45) concluyen la prueba. Finalmente, note que dado que el sistema (3.10) con $\tilde{\Phi}(x, \hat{x}, u) = 0$ es globalmente estabilizable, si $\Phi(x, u)$ es globalmente Lipschitz con respecto a x , el resultado será también global. \square

Observación 5 Para sistemas sin retardo de la forma (3.1), ésto es,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + \Phi(\xi, u(t)) \\ y &= C\xi\end{aligned}\tag{3.46}$$

el predictor (3.8) (con $\tau = 0$), resulta en un observador clásico de Luenberger para el sistema (3.46). En este caso, de (3.6), $w(t) = \xi(t)$. Siguiendo a Thau [1973], si la matriz de ganancias L es seleccionada tal que,

$$\gamma_L < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}\tag{3.47}$$

donde P y Q son matrices simétricas definidas positivas, asociadas con,

$$(A - LC)^\top P + P(A - LC) = -Q\tag{3.48}$$

entonces, el observador (3.8) (con $\tau = 0$) converge asintóticamente a los estados reales, $w(t) = \xi(t)$. El valor óptimo de γ_L es obtenido cuando $Q = I$, Patel y Toda [1980]. Así, el problema de observación es reducido a seleccionar L tal que,

$$\gamma_L < \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}.\tag{3.49}$$

Un análisis adicional de este problema se ha llevado a cabo en Raghavan y Hedrick [1994], Kou et al. [1975].

Observación 6 Note también en el caso de $\tau = 0$, la Propiedad (P3) toma la forma,

$$(A + A_1)^\top U(0) + U(0)(A + A_1) = -W.$$

3.4. Conclusiones

En este capítulo, se desarrolló un predictor para una clase de sistemas no lineales con retardo en la entrada. Dicha clase de sistemas debe satisfacer la condición de Lipschitz, además de ser observable. El diseño del predictor se realizó para un sistema en adelante y está basado en el bien conocido observador de Luenberger. El sistema en adelante se obtuvo al realizar un cambio de coordenadas y representa la evolución del sistema original τ unidades de tiempo en adelante. La convergencia del predictor se analizó a partir de una funcional completa de Lyapunov. Aquí se presentaron las condiciones que deben de satisfacerse para lograr estabilidad del error de predicción.

Capítulo 4

Esquema de Control

4.1. Introducción

La linealización por retroalimentación es uno de los enfoques importantes para el control no lineal. En décadas pasadas, se puso mucho esfuerzo en la búsqueda de condiciones de linealización de sistemas con retardo, así como diseños de controladores para realizar dicha linealización. Sin embargo, debido a la dimensionalidad infinita, la situación de los sistemas con retardo es más complicada. Los esfuerzos en el diseño de control están dedicados a evitar los controladores no causales. Otra línea de investigación se ha centrado en el diseño del control predictivo para la linealización por retroalimentación en presencia de un retardo de entrada, sin embargo, ha sido tratado solo con predictores en lazo abierto bajo el supuesto de que el sistema es estable, Lei y Khalil [2016].

4.2. Control basado en retroalimentación de estados predichos

Los problemas de regulación y seguimiento de trayectorias para sistemas con retardos, basados en estados predichos, son más desafiantes que el problema de predicción. Primero, los errores de predicción se acoplan con los errores de regulación o de seguimiento de trayectoria. Segundo, si la condición de acoplamiento entre las perturbaciones y la entrada de control no es satisfecha, el diseño del control debe abordarse caso por caso. Para ilustrar el uso del predictor de estados propuesto para el diseño del control se considera una clase reducida de sistemas no lineales. Se supone que $\Phi(x, u(t - \tau))$ tiene la estructura,

$$\Phi(x, u(t - \tau)) = B(u(t - \tau) + \Phi_1(x)) \quad (4.1)$$

la cual satisface la Suposición 1. También se considera que la siguiente suposición se cumple.

Suposición 7 *El par (A, B) asociado al sistema (3.1) es controlable.*

Basados en el predictor de estados (3.8) es posible proponer la siguiente retroalimentación,

$$u(t) = k\hat{w}(t) - \Phi_1(\hat{w}). \quad (4.2)$$

De (3.9), el sistema en lazo cerrado (3.1)–(4.1)–(4.2) produce,

$$\dot{x}(t) = (A + Bk)x(t) - Bke_w(t) + B\tilde{\Phi}_1(x, \hat{x}) \quad (4.3)$$

$$\dot{e}_w(t) = Ae_w(t) - LCe_w(t - \tau) + B\tilde{\Phi}_1(x, \hat{x}) \quad (4.4)$$

para $\tilde{\Phi}_1(x, \hat{x}) = \Phi_1(x) - \Phi_1(\hat{x}(t))$. De las Suposiciones 2 y 7 se eligen las matrices $A + Bk$ y $A - LC$, tal que sean Hurwitz. Ésto se logra a través de la selección adecuada de L y k . El sistema (4.3)–(4.4) puede ser reescrito como,

$$\dot{\zeta}(t) = A_r\zeta(t) + A_{1r}\zeta(t - \tau) + \tilde{\Phi}_r(x, \hat{x}) \quad (4.5)$$

para $\zeta = [x, e_w]^\top$ y,

$$A_r = \begin{bmatrix} A + Bk & -Bk \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad A_{1r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -LC \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_r = \begin{bmatrix} B\tilde{\Phi}_1(x, \hat{x}) \\ B\tilde{\Phi}_1(x, \hat{x}) \end{bmatrix}.$$

Note que el sistema (4.5) tiene exactamente la estructura del sistema (3.10), este hecho permite adaptar el enunciado del Teorema 4 para dar solución al problema de estabilización basado en predictor de estados.

De la elección de las ganancias L y k , es claro que la matriz $A_r + A_{1r}$ también es Hurwitz. De la Suposición 1, la función $\tilde{\Phi}_r(x, \hat{x})$ es una función Lipschitz con respecto a $\zeta(t)$, esto es,

$$\|\tilde{\Phi}_r(x, e_w)\| \leq \gamma_r \|\zeta\|.$$

Por lo tanto, es posible expresar la solución al problema de estabilización basado en predicción de estados en el siguiente teorema.

Teorema 8 *Suponga que L en (3.8) y k en (4.2) son seleccionadas de tal forma que el sistema (4.5) con $\tilde{\Phi}_r(x, \hat{x}) = 0$ es exponencialmente estable. Entonces el problema de estabilización basado en predicción para el sistema (3.1)–(4.1) tiene solución si,*

$$i) \quad \tau < \frac{\lambda_{\min}(W_{0r})}{\lambda_{\min}(W_{1r})} - \frac{2}{a_{1r}},$$

$$ii) \quad \lambda_{\min}(W_{1r}) > \gamma_r v_r a_{1r}$$

para $v_r = \max_{\theta \in [0, \tau]} \|U_r(\theta)\|$, $a_{1r} = \sqrt{\lambda_{\max}(A_{1r}^\top A_{1r})}$ y las matrices definidas positivas W_{0r} y W_{1r} .

Demostración La prueba de este Teorema sigue las mismas líneas del Teorema 4. La funcional completa de Lyapunov está construida con A_r, A_{1r}, y ,

$$W_r = W_{0r} + \tau W_{1r}, \quad U_r(\gamma) = \int_0^\infty K_r^\top(t) W_r K_r(t + \gamma) dt$$

para construir la matriz fundamental $K_r(t)$ asociada al sistema (4.5) con $\tilde{\Phi}_r(x, \hat{x}) = 0$. La nueva matriz de Lyapunov $U_r(\gamma)$ también satisface las propiedades $P1, P2, P3$ cuidando los subíndices correspondientes asociados al sistema (4.5). \square

4.3. Caso: Sistemas completamente linealizables

Para reforzar la importancia de la clase de sistemas no lineales (3.1), observe que una amplia clase de sistemas no lineales de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) u_j(t - \tau) \\ y_1 &= h_1(x), \dots, y_m = h_m(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde el estado $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, la señal de entrada $u \in \mathbb{R}^m$, y la señal de salida $y \in \mathbb{R}^m$. $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, son campos vectoriales suaves, h_j , $j = 1, \dots, m$ de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} pueden ser transformadas a un sistema de la forma (3.1) siempre que el sistema (4.6) tenga un grado relativo bien definido $n = r_1 + \dots + r_m$ (ver, Isidori [1995]).

La transformación del sistema (4.6) a un conjunto de sistemas de la forma (3.1) se puede hacer a través del difeomorfismo, $\xi(t) = \phi(x(t))$, $\xi(0) = \phi(x(0))$ con,

$$\phi(x) = [\phi_1(x) \dots \phi_m(x)]^\top \text{ y } \phi_i(x) = [h_i(x), L_f h_i(x), \dots, L_f^{r_i-1} h_i(x)]^\top, \quad i = 1, \dots, m.$$

Como resultado, el sistema (4.6) puede reescribirse en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{i1} &= \xi_{i2} \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{ir_{i-1}} &= \xi_{ir_i} \\ \dot{\xi}_{ir_i} &= b_i(\xi) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi) u_j(t - \tau) \\ y_i &= \xi_{i1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

con

$$\begin{aligned} b_i(\xi) &= L_f^{r_i} h_i(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(\xi)} \\ a_{ij}(\xi) &= L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(\xi)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

para $i = 1, \dots, m$ y donde $a_{ij}(\xi)$ son las entradas de la matriz de desacoplamiento invertible $A_d(x)$, Isidori [1995]. Es claro que se puede suponer que el sistema (4.7)

tiene la estructura dada por (3.1).

Observe que en el caso del sistema (4.6), definiendo,

$$\omega(t) = \xi(t + \tau)$$

se obtiene la representación adelantada de (4.7),

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{i1} &= \omega_{i2} \\ &\vdots \\ \dot{\omega}_{ir_{i-1}} &= \omega_{ir_i} \\ \dot{\omega}_{ir_i} &= b_i(\omega) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\omega)u_j(t) \\ y_{\omega i} &= \omega_{i1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

para $i = 1, \dots, m$.

El predictor para el sistema (4.9) toma la forma,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_{i1} &= \hat{\omega}_{i2} + \lambda_{ir_{i-1}}(\xi_{i1}(t) - \hat{\omega}_{i1}(t - \tau)) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\omega}}_{ir_{i-1}} &= \hat{\omega}_{ir_i} + \lambda_{i1}(\xi_{i1}(t) - \hat{\omega}_{i1}(t - \tau)) \\ \dot{\hat{\omega}}_{ir_i} &= b_i(\hat{\omega}) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\hat{\omega})u_j(t) + \lambda_{i0}(\xi_{i1}(t) - \hat{\omega}_{i1}(t - \tau)) \\ y_{\omega i} &= \omega_{i1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Definiendo los errores de predicción como,

$$e_{\omega_{ij}}(t) = \xi_{ij}(t) - \hat{\omega}_{ij}(t - \tau) = \xi_{ij}(t) - \hat{\xi}_{ij}(t) \quad (4.11)$$

para $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, r_i$ permite escribir la dinámica del error de predicción en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\omega_{i1}} &= e_{\omega_{i2}} - \lambda_{ir_{i-1}}e_{\omega_{i1}}(t - \tau) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\omega_{ir_{i-1}}} &= e_{\omega_{ir_i}} - \lambda_{i1}e_{\omega_{i1}}(t - \tau) \\ \dot{e}_{\omega_{ir_i}} &= [b_i(\xi) - b_i(\hat{\xi})] + \sum_{j=1}^m [a_{ij}(\xi) - a_{ij}(\hat{\xi})]u_j(t - \tau) - \lambda_{i0}e_{\omega_{i1}}(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Observación 9 *Nótese que para el sistema linealizable entrada-estado (4.6), debido al cambio de coordenadas $w(t) = \xi(t + \tau)$ y el difeomorfismo, $\xi(t + \tau) = \phi(x(t + \tau))$, el valor futuro estimado es obtenido como*

$$\hat{x}(t + \tau) = \phi^{-1}(\hat{w}(t))$$

donde el operador $\phi^{-1}(\cdot)$ es una transformación inversa.

4.3.1. Control para sistemas completamente linealizables

Para el diseño del control en los problemas de estabilización y seguimiento de trayectorias, en el caso de sistemas completamente linealizables, se considera la dinámica descrita por el conjunto de ecuaciones diferenciales en (4.6), o equivalentemente, un sistema de la forma (4.7) que tiene la estructura de (3.1).

Una retroalimentación propuesta para la solución del caso sin retardo, Isidori [1995], se puede modificar en función de los estados futuros como,

$$u(t) = A_d^{-1}(\hat{\omega}) \{-b(\hat{\omega}) + v(t)\} \quad (4.13)$$

donde las entradas de la matriz $A_d(\hat{\omega})$ y el vector $b(\hat{\omega}) = [b_1 \cdots b_m]^\top$ están dados en (4.8) y la nueva señal de entrada $v = [v_1 \cdots v_m]^\top$ se define como,

$$v_i(t) = \dot{\omega}_{ir_i}^d - k_{r_i-1}(\hat{\omega}_{ir_i-1} - \omega_{ir_i-1}^d) - \cdots - k_0(\hat{\omega}_{i1} - \omega_{i1}^d) \quad (4.14)$$

con $i = 1, \dots, m$ y donde $\omega_{ij}^d(t) = \xi_{ij}^d(t + \tau)$ es la referencia deseada para $\omega_{ij}(t)$.

Observación 10 *En el caso del problema de estabilización para el sistema (4.6)–(4.7), la retroalimentación (4.13) se reescribe considerando $\omega_{ij}^d = 0$ para $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, r_i$.*

El sistema en lazo cerrado (4.7)–(4.13) produce,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{1r_1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{mr_m} \end{bmatrix} &= b(\xi) + A_d(\xi)A_d^{-1}(\hat{\omega}(t-\tau)) \{-b(\hat{\omega}(t-\tau)) + v(t-\tau)\} \\ &= v(t-\tau) + [b(\xi) - b(\hat{\omega}(t-\tau))] \\ &\quad + [A_d(\xi)A_d^{-1}(\hat{\omega}(t-\tau)) - I] \{-b(\hat{\omega}(t-\tau)) + v(t-\tau)\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde,

$$v_i(t-\tau) = \dot{\xi}_{ir_i}^d - k_{r_i-1}(\hat{\xi}_{ir_i-1} - \xi_{ir_i-1}^d) - \cdots - k_0(\hat{\xi}_{i1} - \xi_{i1}^d). \quad (4.16)$$

Definiendo un conjunto de errores de seguimiento como,

$$e_{d_{ij}}(t) = \xi_{ij}(t) - \xi_{ij}^d(t) \quad (4.17)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} v_i(t-\tau) &= \dot{\xi}_{ir_i}^d - k_{r_i-1}(e_{dir_{i-1}} - e_{\omega_{ir_{i-1}}}) - \cdots - k_0(e_{di1} - e_{\omega_{i1}}) \\ &= \dot{\xi}_{ir_i}^d - \sum_{j=1}^{r_i-1} k_j e_{d_{ij}} + \sum_{j=1}^{r_i-1} k_j e_{\omega_{ij}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

como resultado, se tiene,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{d_{1r_1}}(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_{d_{m r_m}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{r_1-1} k_j e_{d_{1j}} \\ \vdots \\ -\sum_{j=1}^{r_m-1} k_j e_{d_{mj}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{r_1-1} k_j e_{\omega_{1j}} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r_m-1} k_j e_{\omega_{mj}} \end{bmatrix} + \chi(t) \quad (4.19)$$

donde,

$$\chi(t) = [b(\xi) - b(\hat{\xi})] + [A_d(\xi)A_d^{-1}(\hat{\xi}) - I] \{-b(\hat{\xi}) + v(t - \tau)\}. \quad (4.20)$$

Por lo tanto, reemplazando la retroalimentación (4.13) en (4.12), la dinámica completa del lazo cerrado está dada por,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{d_{i1}} &= e_{d_{i2}} \\ &\vdots \\ \dot{e}_{d_{ir_{i-1}}} &= e_{d_{ir_i}} \\ \dot{e}_{d_{ir_i}} &= -\sum_{j=1}^{r_i-1} k_{ij} e_{d_{ij}} + \sum_{j=1}^{r_i-1} k_{ij} e_{\omega_{ij}} + \chi_i \end{aligned} \quad (4.21)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\omega_{i1}} &= e_{\omega_{i2}} - \lambda_{r_{i-1}} e_{\omega_{i1}}(t - \tau) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\omega_{ir_{i-1}}} &= e_{\omega_{ir_i}} - \lambda_1 e_{\omega_{i1}}(t - \tau) \\ \dot{e}_{\omega_{ir_i}} &= -\lambda_0 e_{\omega_{i1}}(t - \tau) + \chi_i \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde χ_i corresponde al i -ésimo renglón del vector χ .

El sistema (4.21)–(4.22) puede reescribirse en forma vectorial como sigue,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{d_i}(t) &= A_{e_{di}} e_{d_i}(t) + B_{e_{di}} e_{\omega_i}(t) + \gamma_i \\ \dot{e}_{\omega_i}(t) &= A_{e_{\omega_i}} e_{\omega_i}(t) + B_{e_{\omega_i}} e_{\omega_i}(t - \tau) + \gamma_i \end{aligned} \quad (4.23)$$

con

$$\begin{aligned} A_{e_{di}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -k_{i1} & -k_{i2} & \cdots & \cdots & -k_{ir_{i-1}} \end{bmatrix}, \quad B_{e_{di}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & \cdots & k_{ir_{i-1}} \end{bmatrix} \\ A_{e_{\omega_i}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{e_{\omega_i}} = \begin{bmatrix} -\lambda_{ir_{i-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{i1} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_{i0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y $\gamma_i = [0, \dots, 0, \chi_i]^\top$. Por lo tanto, se puede escribir,

$$e_i(t) = A_{e_i}e_i(t) + B_{e_i}e_i(t - \tau) + \Gamma_i \quad (4.24)$$

donde $i = 1, \dots, m$ y,

$$e_i = \begin{bmatrix} e_{d_i} \\ e_{w_i} \end{bmatrix}, A_{e_i} = \begin{bmatrix} A_{e_{di}} & B_{e_{di}} \\ 0 & A_{e_{wi}} \end{bmatrix}, B_{e_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{e_{wi}} \end{bmatrix}, \Gamma_i = \begin{bmatrix} \gamma_i(t) \\ \gamma_i(t) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Finalmente, se obtiene,

$$\dot{e} = A_e e(t) + B_e e(t - \tau) + \Gamma(t) \quad (4.26)$$

donde $e = [e_1 \dots e_m]^\top$, $A_e = \text{diag} \{A_{e_i}\}$, $B_e = \text{diag} \{B_{e_i}\}$ y $\Gamma(t) = [\Gamma_1 \dots \Gamma_m]^\top$.

Con base en los desarrollos anteriores, el problema de seguimiento de trayectorias para el sistema (4.6)–(4.7) basado en los valores futuros predichos se establece bajo las mismas líneas de los Teoremas 4 y 8.

4.4. Conclusiones

En este capítulo, se abordan los problemas de estabilización y seguimiento de trayectorias. En ambos casos, se utilizan las variables de estado futuras que se obtienen con el predictor desarrollado en el Capítulo 3. Además se dan las condiciones para resolver dichos problemas y asegurar estabilidad haciendo uso de una funcional completa de Lyapunov.

Capítulo 5

Resultados en Simulación y Experimentación

5.1. Introducción

Para mostrar el funcionamiento del esquema de predicción(3.8) y la estrategia de control basada en predicción (4.2) desarrollados en los capítulos anteriores, es necesario realizar simulaciones numéricas y una vez que se tienen éstas, llevar a cabo evaluaciones experimentales.

Primero se considera un sistema inestable en lazo abierto de la forma (3.1)–(4.1). Se analizan los casos de estabilización y seguimiento de trayectorias en simulaciones numéricas en Matlab[®] y se muestran los resultados obtenidos. Segundo, se analiza el caso de un sistema barra péndulo actuado por un motor y una hélice, Figura 5.9. Se realizan simulaciones numéricas para verificar el comportamiento del esquema de control–predicción. Además, con ayuda de una plataforma experimental, se realizan pruebas en las que se observa el comportamiento del sistema. Finalmente, se considera un robot móvil omnidireccional, éste es analizado en simulaciones numéricas para resolver el problema de seguimiento de trayectorias.

5.2. Caso de estudio: Sistema inestable

Considere el sistema inestable en lazo abierto de la forma (3.1)–(4.1) determinado por,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad \Phi_1(x) = 0.1 \sin(x_2) \quad (5.1)$$

con un retardo $\tau = 0.1$.

Para diseñar el predictor (3.8) se considera una ganancia $L = \begin{bmatrix} 4.75 & 5.625 \end{bmatrix}^\top$ que coloca los polos de la matriz $A - LC$ en el semiplano izquierdo complejo \mathbb{C} , $\{-2.25, -2.5\}$. También se consideran las matrices: $W_0 = \text{diag}\{0.79\}$, $W_1 = \text{diag}\{2.1\}$ donde los valores propios mínimos son $\lambda_{\min}(W_0) = 0.79$, $\lambda_{\min}(W_1) = 2.1$.

De los parámetros del sistema se calculan las siguientes cotas $\gamma_L = 0.1$ y $\|A_1\| = \|-LC\| = 7.3622$. La cota $v = \max_{\theta \in [0, \tau]} \|U(\theta)\|$ es obtenida de la evolución de la matriz $U(\theta)$, la cual puede ser calculada numéricamente con el procedimiento propuesto en Garcia-Lozano y Kharitonov [2006]. La evolución de $U(\theta)$ es mostrada en la Figura 5.1; así se obtiene $v = 1.2597$.

Finalmente, se obtiene: *i*) $\tau < 0.1045$, *ii*) $\lambda_{\min}(W_1) > 0.9274$, que satisfacen las condiciones del Teorema 4. Para todos los experimentos se consideró la condición inicial $x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}^\top$. La evolución del error de predicción $e_w(t) = x(t) - \hat{w}(t - \tau)$ se muestra en la Figura 5.2 donde su convergencia al origen es claramente alcanzada.

Para obtener la estabilización del sistema (5.1), se consideró el predictor descrito anteriormente y la ganancia $k = \begin{bmatrix} -3.5 & -3.75 \end{bmatrix}$ que coloca los polos de $A + Bk$ en $\{-1.75, -2\}$. Note que en este caso $W_{0r} = \text{diag}\{0.79\}$, $W_{1r} = \text{diag}\{2.1\}$ de donde $\lambda_{\min}(W_{0r}) = 0.79$, $\lambda_{\min}(W_{1r}) = 2.1$, $\gamma_{Lr} = 0.1414$, y $\|A_{1r}\| = 7.3622$. Las componentes de la matriz $U_r(\theta)$ se muestran en la Figura 5.3 de donde $v = 2.8232$. Note que las condiciones del Teorema 8 son satisfechas. La evolución del estado $x(t)$ se muestra en la Figura 5.4 donde se obtiene la convergencia apropiada al origen.

5.2.1. Seguimiento de trayectoria basado en estados predichos

Para evaluar la flexibilidad del esquema de control propuesto, considere una retroalimentación de la forma,

$$u(t) = -k_1(\hat{w}_1 - w_{1d}) - k_2(\hat{w}_2 - w_{2d}) + \dot{w}_{2d} - 0.1 \sin(\hat{w}_2) \quad (5.2)$$

para k_i definido como en el problema de estabilización. La retroalimentación (5.2) resuelve el problema de seguimiento de trayectoria asociado a (5.1), para una referencia deseada diferenciable,

$$w_d(t) = \begin{bmatrix} w_{1d}(t) & w_{2d}(t) \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x_{1d}(t + \tau) & x_{2d}(t + \tau) \end{bmatrix}^\top \quad (5.3)$$

dada como $x_{1d}(t) = A \sin(\omega t)$, $x_{2d}(t) = A\omega \cos(\omega t)$ para $A = 1$, $\omega = 2\pi f$, $f = 0.125$.

Los errores de predicción se muestran en la Figura 5.5, mientras que los errores de seguimiento son presentados en la Figura 5.6, ambos errores convergen al origen como se esperaba. La retroalimentación basada en el predictor se muestra en la Figura 5.7. Finalmente, la señal $\Phi(\hat{w}(t))$ se presenta en la Figura 5.8.

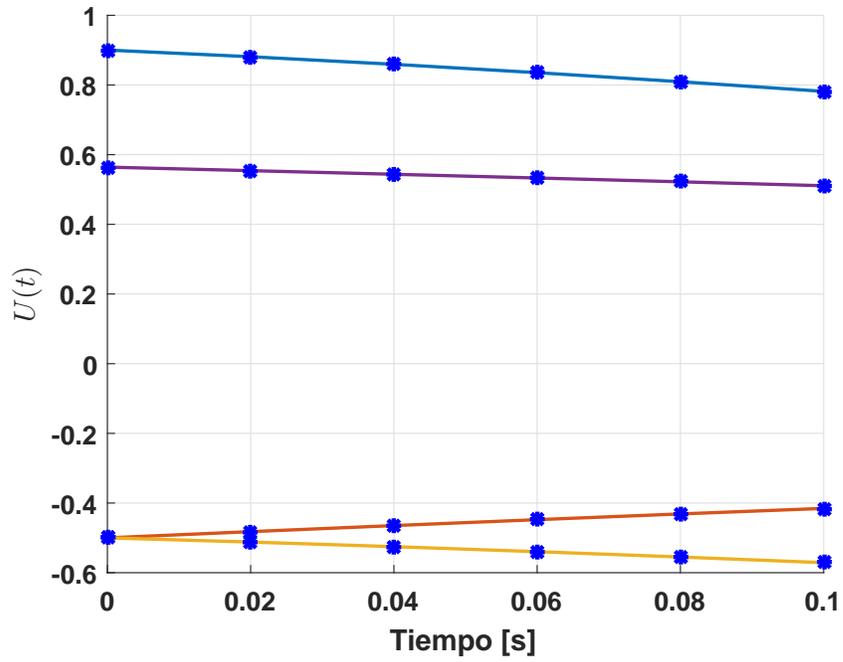


Figura 5.1: Evolución de la matriz $U(t)$.

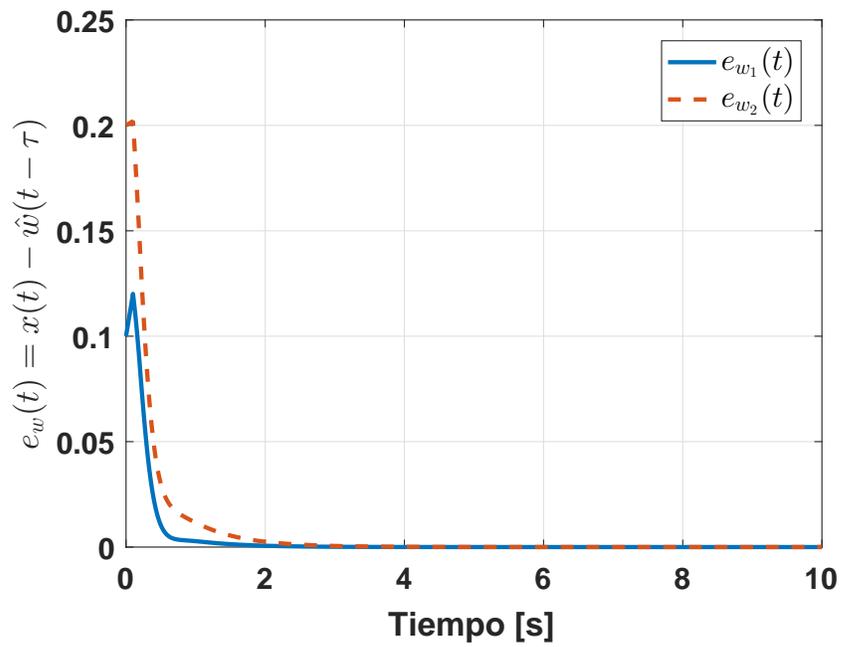
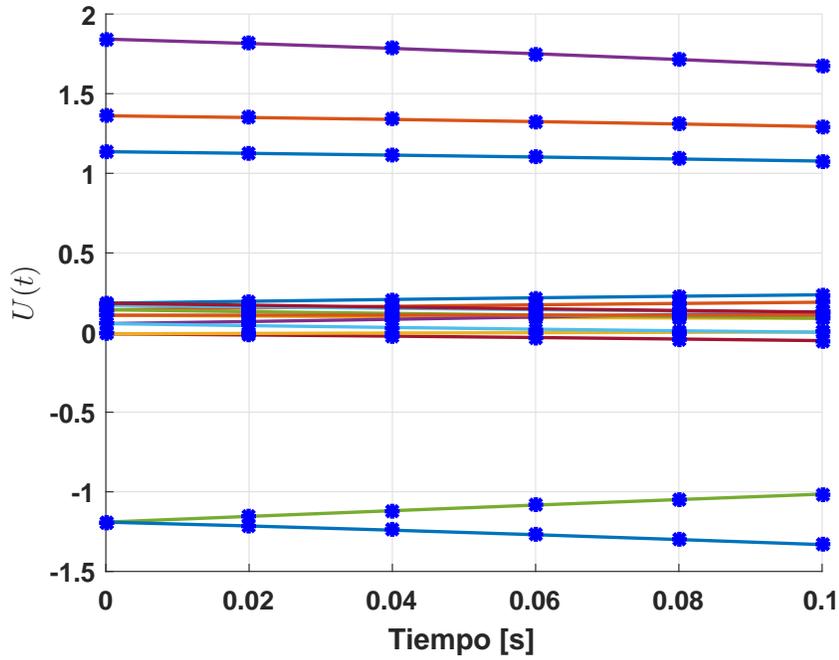
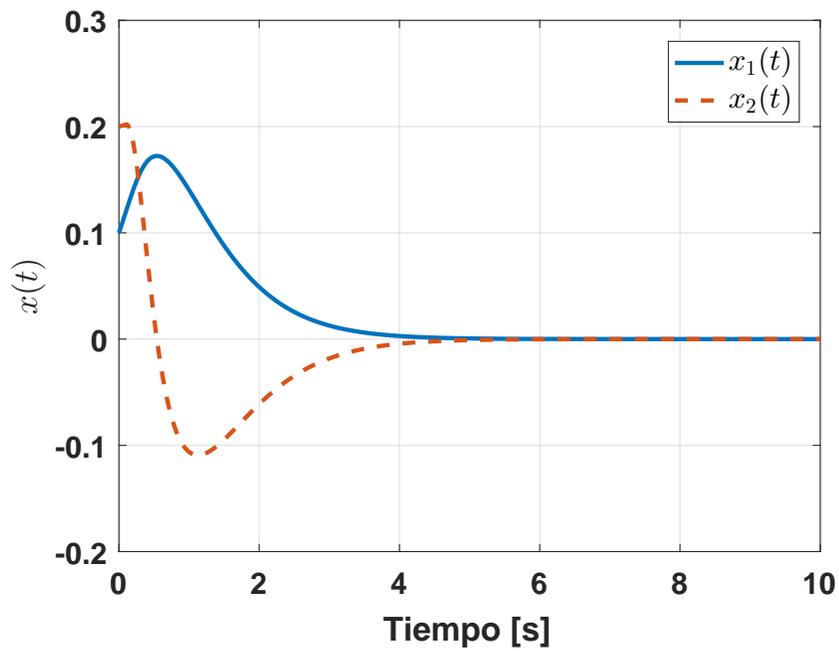
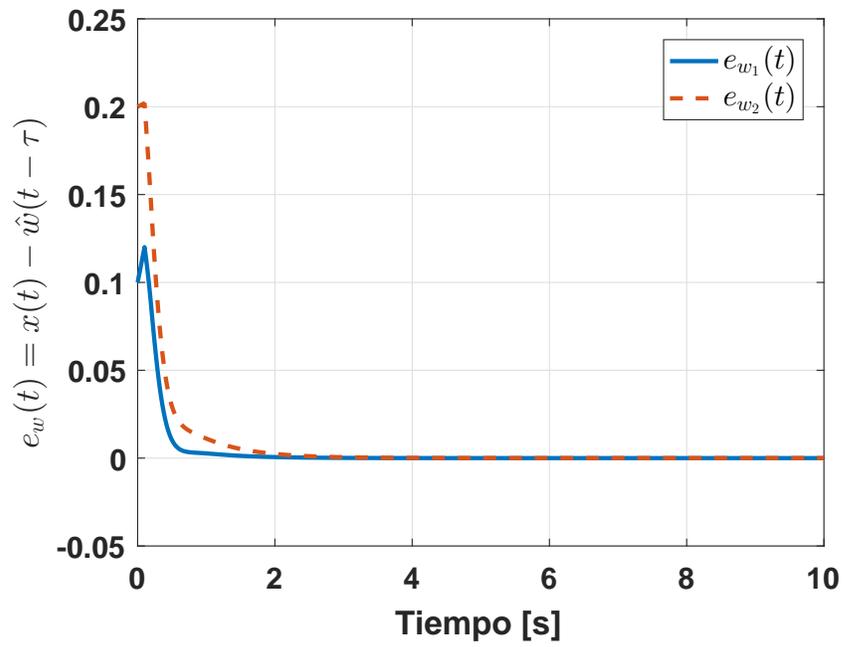
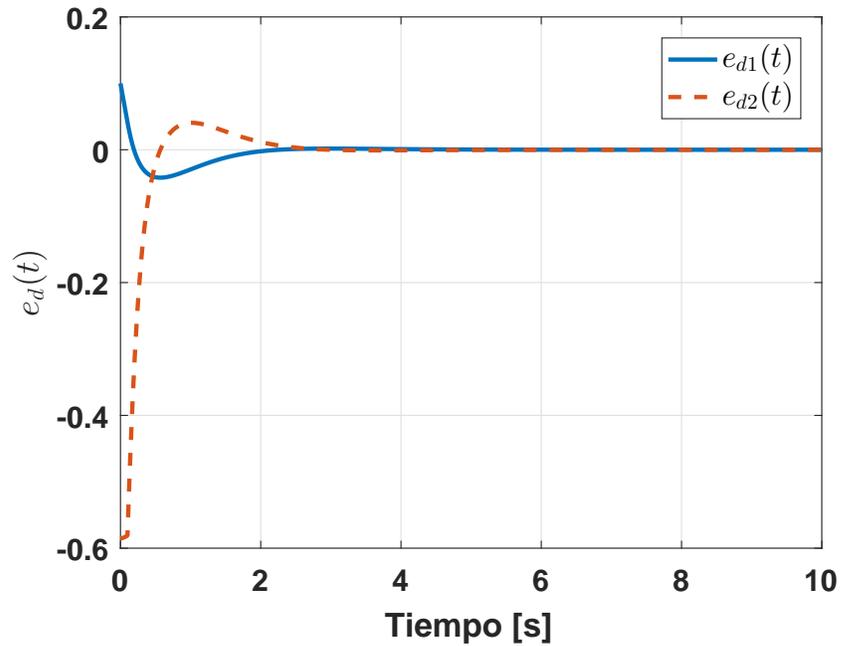
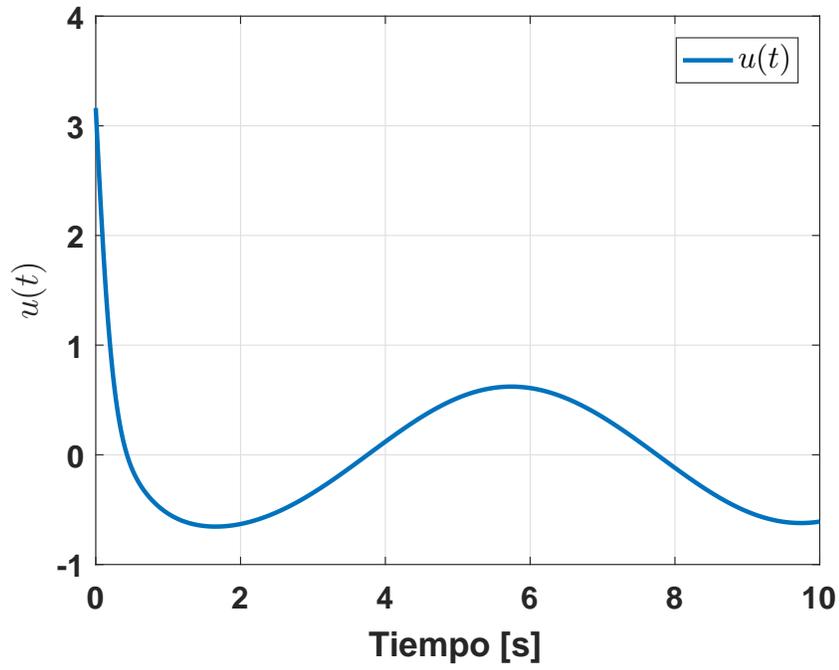
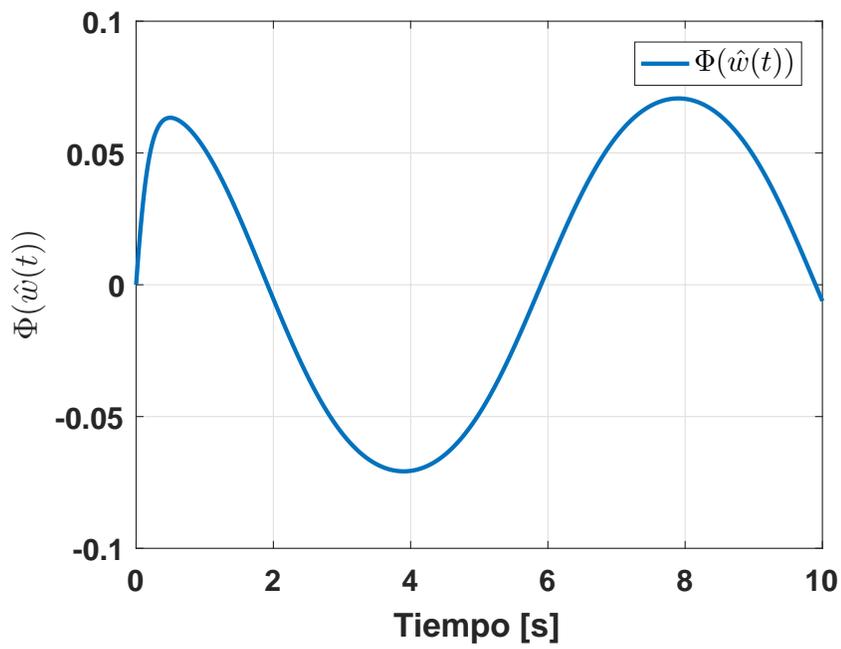


Figura 5.2: Errores de predicción $e_w(t)$.

Figura 5.3: Evolución de la matriz $U_r(t)$.Figura 5.4: Evolución del estado $x(t)$.

Figura 5.5: Errores de predicción $e_w(t)$.Figura 5.6: Error de seguimiento $e_d(t)$.

Figura 5.7: Señal de control $u(t)$.Figura 5.8: Señal $\Phi(\hat{w}(t))$.

5.3. Caso de estudio: Actuador aerodinámico

Considere el sistema barra-péndulo simple actuado por una hélice, como se muestra en la Figura 5.9. Donde θ es el ángulo con respecto a la línea vertical, ℓ es la distancia del punto de rotación hasta el actuador aerodinámico, F es la fuerza que se genera en el actuador aerodinámico, x_i y z_i son los ejes inerciales, y u es el momento externo alrededor del eje de rotación y_i .

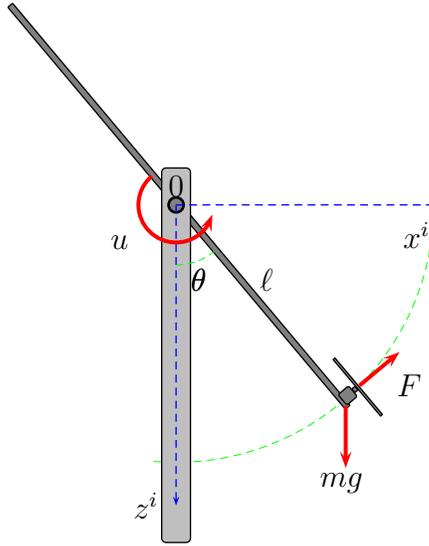


Figura 5.9: Actuador aerodinámico.

El modelo del actuador aerodinámico barra-hélice se obtendrá mediante la metodología de Euler-Lagrange. Para tal efecto, las energías cinética y potencial están dadas por,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J_b\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 (J_b + m\ell^2) \\ V &= mg\ell(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

donde $J_b = \frac{1}{12}m_b\ell_b^2$ es el momento de inercia de la barra con respecto a su centro de gravedad. El Lagrangiano del sistema resulta entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 (J_b + m\ell^2) - mg\ell(1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

El modelo se obtiene a partir de la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = u.$$

Nótese que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= (J_b + m\ell^2) \dot{\theta}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= (J_b + m\ell^2) \ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -mg\ell \sin \theta.\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación que describe el movimiento del sistema resulta,

$$(J_b + m\ell^2) \ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = u$$

o bien,

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J_b + m\ell^2} \sin \theta = \frac{u}{J_b + m\ell^2}.$$

Para obtener un modelo en el espacio de estados, tome en cuenta las variables $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$. Entonces se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mg\ell}{J_b + m\ell^2} \sin(x_1) + \frac{u}{J_b + m\ell^2}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

5.3.1. Consideración de tiempos de retardo

Asumiendo que el sistema de control se encuentra en una posición remota y que existe un canal de comunicación para el envío de la señal de control y la recepción de señales medidas como se muestra en la Figura 5.10. El sistema (5.4) puede modelarse como un sistema que incluye un retardo de tiempo τ en la señal de entrada (tiempos muertos) que puede incluir también los posibles tiempos de cómputo. Bajo estas condiciones, el sistema (5.4) se reescribe en la forma,

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{5.5a}$$

$$\dot{x}_2 = a \sin(x_1) + bu(t - \tau) \tag{5.5b}$$

donde,

$$a = -\frac{mg\ell}{J_b + m\ell^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{J_b + m\ell^2}.\tag{5.6}$$

Nótese que en general los retardos asociados con el canal de comunicación resultan variantes en el tiempo, una estrategia comúnmente utilizada es tomar el valor máximo del retardo en el canal de comunicación y asumir el retardo τ como constante.

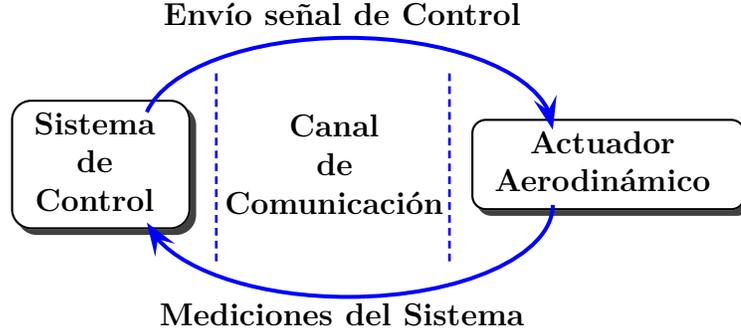


Figura 5.10: Sistema con retardo en el canal de comunicación.

5.3.2. Predictor propuesto

El sistema (5.5), puede reescribirse como un sistema libre de retardos al considerar las variables adelantadas,

$$\begin{aligned} w_1(t) &= x_1(t + \tau) \\ w_2(t) &= x_2(t + \tau). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Bajo estas nuevas coordenadas, se obtiene la nueva representación,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= a \sin(w_1) + bu \end{aligned} \quad (5.8)$$

en donde el retardo de tiempo ya no está presente.

Nótese que las señales w_1 y w_2 corresponden a señales futuras no medibles, por lo que es necesario diseñar un predictor para poder estimarlas. Considerando el sistema en adelante (5.8), es posible proponer el siguiente predictor,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}_1 &= \hat{w}_2 + \lambda_1 [w_1(t - \tau) - \hat{w}_1(t - \tau)] \\ \dot{\hat{w}}_2 &= a \sin(\hat{w}_1) + bu + \lambda_0 [w_1(t - \tau) - \hat{w}_1(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por lo que el predictor anterior puede reescribirse tomando la señal medible $x_1(t)$ en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}_1 &= \hat{w}_2 + \lambda_1 [x_1(t) - \hat{w}_1(t - \tau)] \\ \dot{\hat{w}}_2 &= a \sin(\hat{w}_1) + bu + \lambda_0 [x_1(t) - \hat{w}_1(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

La dinámica de los errores de predicción puede analizarse al definir las señales de error,

$$\begin{aligned} e_{w_1} &= w_1 - \hat{w}_1 \\ e_{w_2} &= w_2 - \hat{w}_2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

La dinámica del error de predicción resulta,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_1} &= e_{w_2} - \lambda_1 e_{w_1}(t - \tau) \\ \dot{e}_{w_2} &= -\lambda_0 e_{w_1}(t - \tau) + a [\sin(w_1) - \sin(\hat{w}_1)]. \end{aligned}$$

que puede reescribirse como,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{w_1} &= e_{w_2} - \lambda_1 e_{w_1} (t - \tau) \\ \dot{e}_{w_2} &= -\lambda_0 e_{w_1} (t - \tau) + 2a \sin\left(\frac{e_{w_1}}{2}\right) \cos\left(\frac{w_1 - \hat{w}_1}{2}\right).\end{aligned}\quad (5.12)$$

5.3.3. Problema de seguimiento de trayectorias

A continuación se presentará una solución al problema de seguimiento de trayectorias asociado con el sistema (5.5), mediante la síntesis de una retroalimentación basada en estados futuros estimados por el predictor (5.10). Supóngase que se desea seguir una trayectoria definida por $w_{1d}(t)$ y $w_{2d}(t)$. Defínase los errores de seguimiento,

$$\begin{aligned}e_{d1}(t) &= w_1(t) - w_{1d}(t) \\ e_{d2}(t) &= w_2(t) - w_{2d}(t).\end{aligned}\quad (5.13)$$

Considere entonces la siguiente retroalimentación basada en estados futuros predichos,

$$\begin{aligned}u(t) &= \frac{1}{b}[-a \sin(\hat{w}_1) - k_2(\hat{w}_2 - w_{2d}) \\ &\quad - k_1(\hat{w}_1 - w_{1d}) + \dot{w}_{2d}].\end{aligned}\quad (5.14)$$

Por otra parte, de los errores de observación, (5.11), se tiene que, $\hat{w}_1 = w_1 - e_{w_1}$, $\hat{w}_2 = w_2 - e_{w_2}$. Entonces, la dinámica de error de seguimiento resulta,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{d1} &= e_{d2} \\ \dot{e}_{d2} &= -k_1 e_{d1} - k_2 e_{d2} + k_1 e_{w_1} + k_2 e_{w_2} \\ &\quad + 2a \sin\left(\frac{e_{w_1}}{2}\right) \cos\left(\frac{w_1 + \hat{w}_1}{2}\right).\end{aligned}\quad (5.15)$$

Nótese también que,

$$\begin{aligned}\frac{w_1 + \hat{w}_1}{2} &= \frac{w_1 + w_1 - e_{w_1}}{2} = w_1 - \frac{e_{w_1}}{2} \\ &= e_{d1} + w_{1d} - \frac{e_{w_1}}{2}.\end{aligned}$$

Finalmente, la dinámica del error en lazo cerrado (error de predicción y error de seguimiento) queda representada en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{w_1} &= e_{w_2} - \lambda_1 e_{w_1} (t - \tau) \\ \dot{e}_{w_2} &= -\lambda_0 e_{w_1} (t - \tau) + f(e_w, e_d, w_d) \\ \dot{e}_{d1} &= e_{d2} \\ \dot{e}_{d2} &= -k_1 e_{d1} - k_2 e_{d2} + k_1 e_{w_1} + k_2 e_{w_2} \\ &\quad + f(e_w, e_d, w_d)\end{aligned}\quad (5.16)$$

donde,

$$f(e_w, e_d, w_d) = 2a \sin\left(\frac{e_{w_1}}{2}\right) \cos\left(e_{d1} - \frac{e_{w_1}}{2} + w_{1d}\right).\quad (5.17)$$

Observación 11 Definiendo los errores, $e_{d_{x_1}} = x_1 - x_{1d}$ y $e_{d_{x_2}} = x_2 - x_{2d}$, el error de seguimiento puede escribirse alternativamente en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{d_{x_1}}(t) &= e_{d_{x_2}}(t) \\ \dot{e}_{d_{x_2}}(t) &= -k_1 e_{d_{x_1}}(t) - k_2 e_{d_{x_2}}(t) \\ &\quad + k_1 e_{w_1}(t - \tau) + k_2 e_{w_2}(t - \tau) + f(\cdot)\end{aligned}$$

donde, $f(\cdot) = 2a \sin\left(\frac{e_{w_1}(t-\tau)}{2}\right) \cos\left(e_{d_{x_1}} - \frac{e_{w_1}(t-\tau)}{2} + x_{1d}\right)$.

La dinámica de lazo cerrado (5.16) en coordenadas de los errores de observación y seguimiento, se puede expresar en forma vectorial como,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{e}_{w_1} \\ \dot{e}_{w_2} \\ \dot{e}_{d_1} \\ \dot{e}_{d_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_1} \\ e_{w_2} \\ e_{d_1} \\ e_{d_2} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_1}(t - \tau) \\ e_{w_2}(t - \tau) \\ e_{d_1}(t - \tau) \\ e_{d_2}(t - \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(e_w, e_d, w_d) \\ 0 \\ f(e_w, e_d, w_d) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.18)$$

con $f(e_w, e_d, w_d)$ definida en (5.17).

Alternativamente, definiendo $e = [e_{w_1}, e_{w_2}, e_{d_1}, e_{d_2}]^\top$ y considerando la estructura de la ecuación anterior, el sistema (5.18) puede reescribirse en la forma,

$$\dot{e} = A_0 e + A_1 e(t - \tau) + \bar{f}(e, w_d)\quad (5.19)$$

con A_0 , A_1 , \bar{f} definidas apropiadamente.

Nótese ahora que $f(e, w_d)$, puede acotarse por arriba como sigue,

$$\begin{aligned}\|f(e, w_d)\| &= \left\| 2a \sin\left(\frac{e_{w_1}}{2}\right) \cos\left(e_{d_1} - \frac{e_{w_1}}{2} + w_{1d}\right) \right\| \\ &\leq \left\| 2a \sin\left(\frac{e_{w_1}}{2}\right) \right\| \left\| \cos\left(e_{d_1} - \frac{e_{w_1}}{2} + w_{1d}\right) \right\| \\ &\leq a|e_{w_1}|\end{aligned}$$

por lo tanto, es posible concluir que,

$$\|\bar{f}(e, w_d)\| \leq \rho \|e\|\quad (5.20)$$

para una constante ρ positiva.

5.3.4. Estabilidad en lazo cerrado

A continuación la estabilidad del sistema en el error (5.19) se establecerá en dos etapas. Nótese inicialmente que $\bar{f}(e, w_d)$ puede verse como una perturbación acotada (5.20) para el sistema (5.19). Considere entonces el sistema (5.19) libre de perturbaciones, esto es, el sistema,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_0 e + A_1 e(t - \tau) \\ e(\theta) &= \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (5.21)$$

con la condición inicial $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ y $\varphi \in \mathcal{PC}([-\tau, 0], \mathbb{R}^4)$ el espacio de las funciones continuas a pedazos en \mathbb{R}^4 definidas en $[-\tau, 0]$.

Dado que los parámetros de las matrices A_0 , A_1 se pueden elegir libremente (dependen del predictor (5.10) y la retroalimentación (5.14)), es siempre posible estabilizar asintóticamente el sistema (5.21), para un valor constante, acotado del retardo τ . Esto se puede hacer, por ejemplo, al considerar la Proposición 5.2.2, Capítulo 5 de Gu et al. [2003]. Basado en lo anterior, para demostrar la estabilidad del sistema perturbado (5.19) se considerará, sin pérdida de generalidad, que existen constantes positivas λ_0 , λ_1 , k_1 , k_2 que estabilizan el sistema (5.21) para un valor $\tau > 0$.

Suponga entonces que el sistema (5.21) es asintóticamente estable (es posible mostrar que para esta clase de sistemas la estabilidad resulta del tipo exponencial, Bellman y Cooke [1963]), entonces para establecer la estabilidad del sistema (5.19), es posible proponer una funcional de Lyapunov de tipo completo definida en la forma,

$$\begin{aligned} v(e_t) &= v_0(e_t) \\ &+ \int_{-\tau}^0 e^T(t + \theta) [W_1 + (\tau + \theta) W_2] e(t + \theta) d\theta \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde $e_t = e(t)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ con,

$$\begin{aligned} v_0(e_t) &= \\ &e^T(t) U(0) e(t) + 2e^T(t) \int_{-\tau}^0 U(-\tau - \theta) A_1 e(t + \theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 e^T(t + \theta_1) A_1^T \left[\int_{-\tau}^0 U(\theta_1 - \theta_2) A_1 e(t + \theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

La matriz de Lyapunov en (5.22) (Kharitonov [2013]),

$$U(\gamma) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t + \gamma) dt$$

es definida en términos de la matriz fundamental $K(t)$ del sistema libre de perturbación (5.21) y

$$W = W_0 + W_1 + \tau W_2$$

con matrices W_0 , W_1 , W_2 definidas positivas a partir de la estabilidad exponencial del sistema (5.21).

Como se mencionó anteriormente, la matriz de Lyapunov $U(\gamma)$ satisface las siguientes propiedades (Kharitonov [2013]).

1. $\frac{dU(\gamma)}{d\gamma} = U(\gamma)A_0 + A(\gamma - \tau)A_1$
2. $U(-\gamma) = U^T(\gamma)$, $\gamma > 0$ y $U^T(0) = U(0)$
3. $U(0)A_0 + U(-\tau)A_1 + A_0^T U(0) + A_1^T U(\tau) = -W$.

Es posible ahora mostrar el siguiente resultado.

Teorema 12 *Suponga que existen constantes $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ asociadas con el predictor (5.10) y constantes $k_1, k_2 > 0$ asociadas con la retroalimentación (5.14) tales que el sistema (5.21) es exponencialmente estable. Considerando que el sistema (5.19) satisface (5.20), la solución del problema de seguimiento de trayectorias basada en estados estimados futuros tiene solución si se satisfacen las siguientes condiciones,*

1. $\lambda_{\min}(W_0) \geq 2\rho v + a_1\tau\rho v$
2. $\lambda_{\min}(W_2) \geq a_1v$.

Demostración Considerando las propiedades de la matriz de Lyapunov $U(\gamma)$, después de algunos cálculos, la derivada de la funcional (5.22), a lo largo de la solución de (5.19) queda como,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(e_t) &= -e^T(t)W_0e(t) \\ &\quad -e^T(t-\tau)W_1e(t-\tau) - \int_{t-\tau}^t e^T(\xi)W_2e(\xi)d\xi \\ &\quad + 2e^T(t)U(0)\bar{f}(e, w_d) \\ &\quad + 2\bar{f}^T(e, w_d)\int_{t-\tau}^t U(-\tau-\xi+t)A_1e(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Sea $v = \max_{\theta \in [0, \tau]} \|U(\theta)\|$ y $a_1 = \|A_1\|$, entonces,

$$\begin{aligned} 2e^T(t)U(0)\bar{f}(e, w_d) &\leq 2\|e^T(t)U(0)\bar{f}(e, w_d)\| \\ &= 2\|e^T(t)\| \|U(0)\| \|\bar{f}(e, w_d)\| \leq 2\rho v \|e(t)\|^2 \\ 2\bar{f}^T(e, w_d)\int_{t-\tau}^t U(-\tau-\xi+t)A_1e(\xi)d\xi \\ &\leq \tau \|\bar{f}^T(e, w_d)\|^2 \|U(0)\| \|A_1\| \\ &\quad + \|U(-\tau)\| \|A_1\| \int_{t-\tau}^t \|e(\xi)\|^2 d\xi \\ &\leq a_1\tau\rho v \|e(t)\|^2 + a_1v \int_{t-\tau}^t \|e(\xi)\|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (5.24) puede describirse en la forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(e_t) &\leq -w(e_t) + 2\rho v \|e(t)\|^2 \\ &\quad + a_1\tau\rho v \|e(t)\|^2 + a_1v \int_{t-\tau}^t \|e(\xi)\|^2 d\xi \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} w(e_t) &= e^T(t)W_0e(t) \\ &\quad + e^T(t-\tau)W_1e(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t e^T(\xi)W_2e(\xi)d\xi \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado. \square

5.3.5. Evaluación numérica

Para probar el comportamiento del predictor propuesto, así como la efectividad de la solución al problema de seguimiento de trayectorias basada en estados estimados futuros, se realizaron evaluaciones numéricas. Se utilizó una trayectoria deseada descrita por las ecuaciones,

$$\begin{aligned} x_{1d} &= k_t t_b^5 (r_1 - r_2 t_b + r_3 t_b^2 - r_4 t_b^3 + r_5 t_b^4 - r_6 t_b^5) \\ x_{2d} &= \frac{k_t (5r_1 t_b^4 - 6r_2 t_b^5 + 7r_3 t_b^6 - 8r_4 t_b^7 + 9r_5 t_b^8 - 10r_6 t_b^9)}{t_f - t_i} \end{aligned}$$

donde,

$$t_b = \frac{t - t_i}{t_f - t_i}$$

$r_1 = 252$, $r_2 = 1050$, $r_3 = 1800$, $r_4 = 1575$, $r_5 = 700$, $r_6 = 126$, t_i es el tiempo inicial, t_f es el tiempo final.

Los parámetros utilizados en el predictor (5.10) y en la retroalimentación (5.14) para la simulación numérica, se muestran en la Tabla 5.1. La selección de las ganancias para el predictor y el control se hizo con la técnica de ubicación de polos en el plano complejo. Los parámetros físicos se obtuvieron directamente del sistema. El retardo se eligió de forma experimental.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
k_1	2	m	0.0816 kg
k_2	3	ℓ	0.33 m
λ_0	3	m_b	0.5367 kg
λ_1	3	J_b	0.0195 kgm ²
τ	0.15 s		

Tabla 5.1: Parámetros para la simulación.

En la Figura 5.11 se muestran los errores de observación $e_{w_1}(t - \tau)$ y $e_{w_2}(t - \tau)$ y en la Figura 5.12 se presentan los errores de seguimiento $e_{d_1}(t)$, $e_{d_2}(t)$. Puede verse como los errores mostrados convergen adecuadamente al origen.

En la Figura 5.13 se muestra la señal de control $u(t)$ necesaria para realizar el seguimiento de la trayectoria.

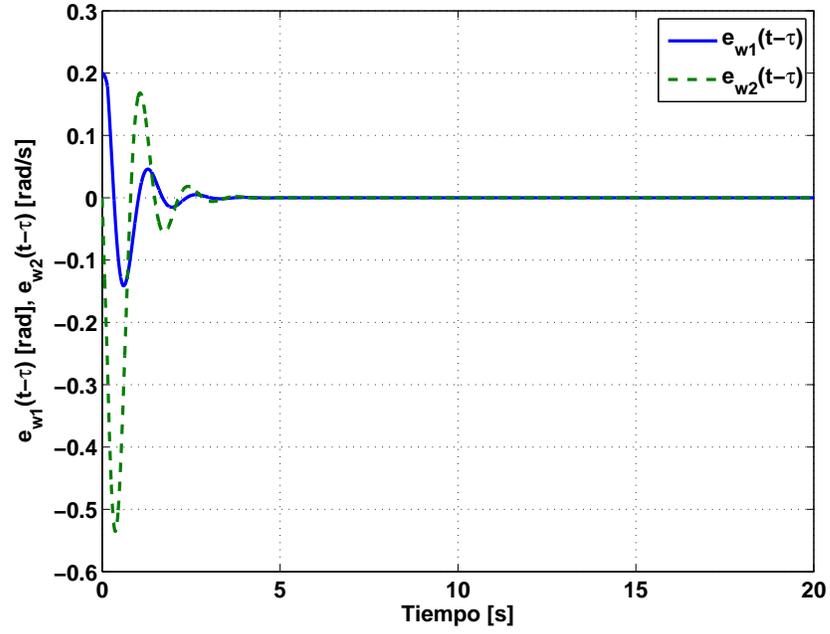


Figura 5.11: Errores de observación: $e_{w1}(t - \tau)$, $e_{w2}(t - \tau)$.

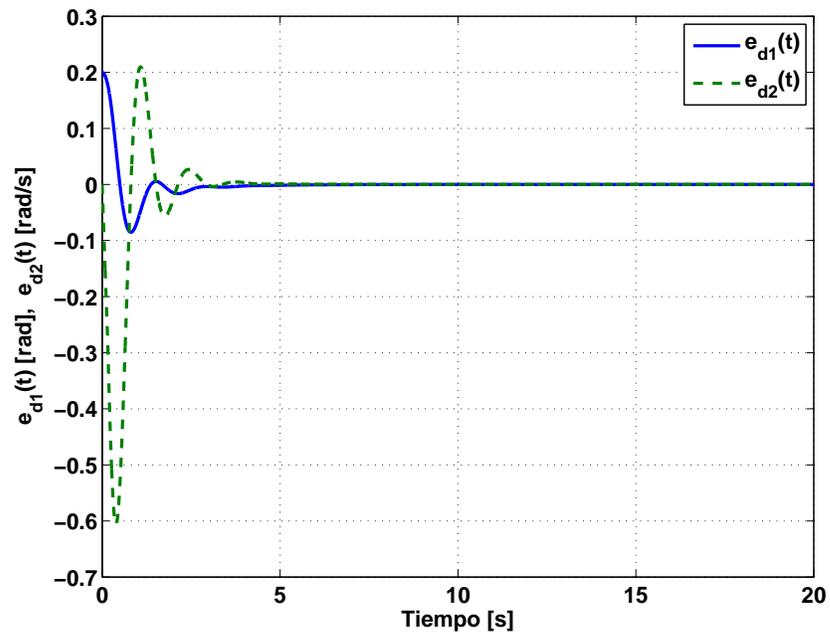


Figura 5.12: Errores de seguimiento: $e_{d1}(t)$, $e_{d2}(t)$.

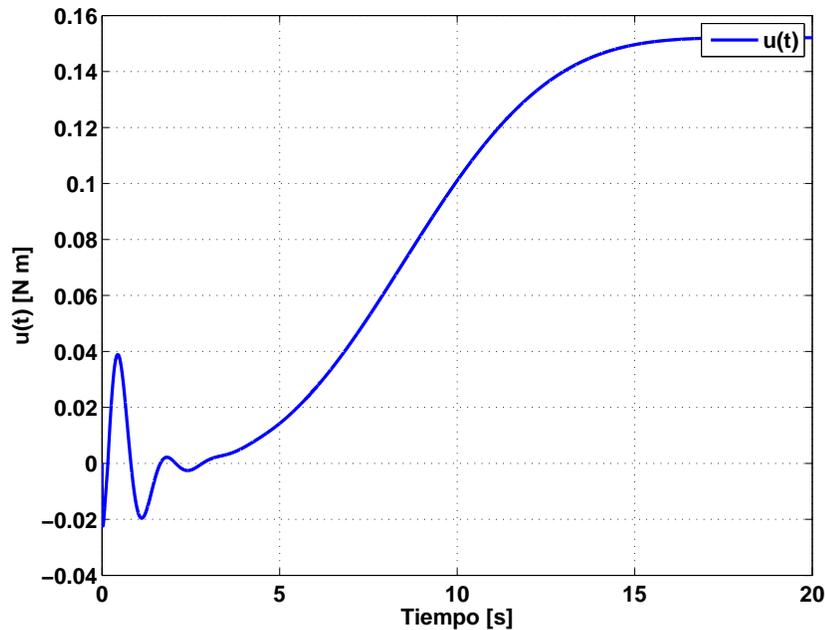


Figura 5.13: Señal de control: $u(t)$.

5.3.6. Resultados experimentales

El esquema del predictor (5.10) y la retroalimentación propuesta (5.14) se implementaron en la plataforma experimental mostrada en la Figura 5.14. La plataforma se compone de una estructura principal que soporta una barra que actúa como péndulo, un motor tipo brushless *U2216 KV900* con una hélice, necesarios para generar la fuerza para levantar la barra. Un inclinómetro *X3Q-T* de *US Digital* para determinar el desplazamiento angular que experimenta la barra, y una tarjeta de desarrollo *eZdsp TMS320F28335* de *Spectrum Digital Inc.* para implementar el esquema propuesto.

En la Figura 5.15 se muestra el esquema del funcionamiento del sistema.

El inclinómetro funciona como un encóder en cuadratura, es decir, envía pulsos a través de dos canales. Estos pulsos se registran cuando se presenta una rotación. La medición obtenida del inclinómetro es enviada a la tarjeta del microcontrolador, en donde es procesada para obtener el ángulo que ha rotado la barra.

En el microcontrolador se realizan los cálculos de las variables de estado futuras para construir la señal de control. Para esto, se implementan las ecuaciones desarrolladas en el Capítulo 3. Una vez que se obtiene la ley de control, ésta es procesada y enviada al controlador del motor brushless.

Todos los datos generados y obtenidos (la medición del ángulo, los estados estimados, la señal de control, los errores de observación y seguimiento, etc.) se envían

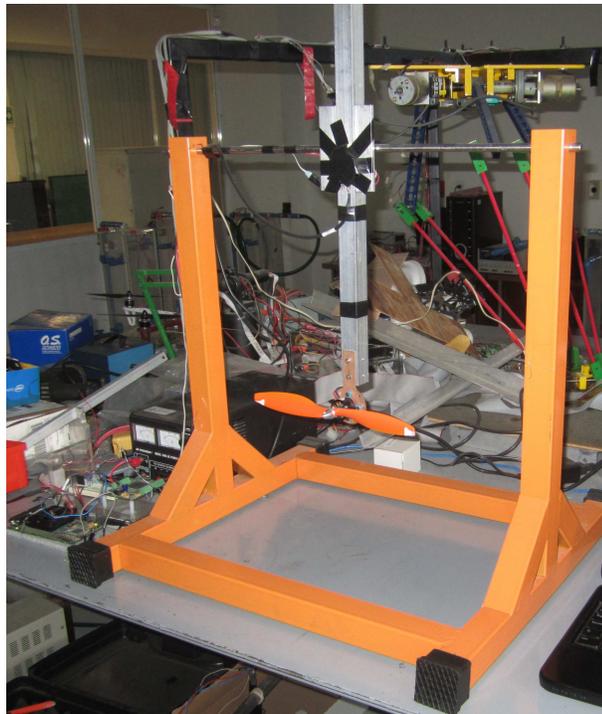


Figura 5.14: Sistema actuador aerodinámico.

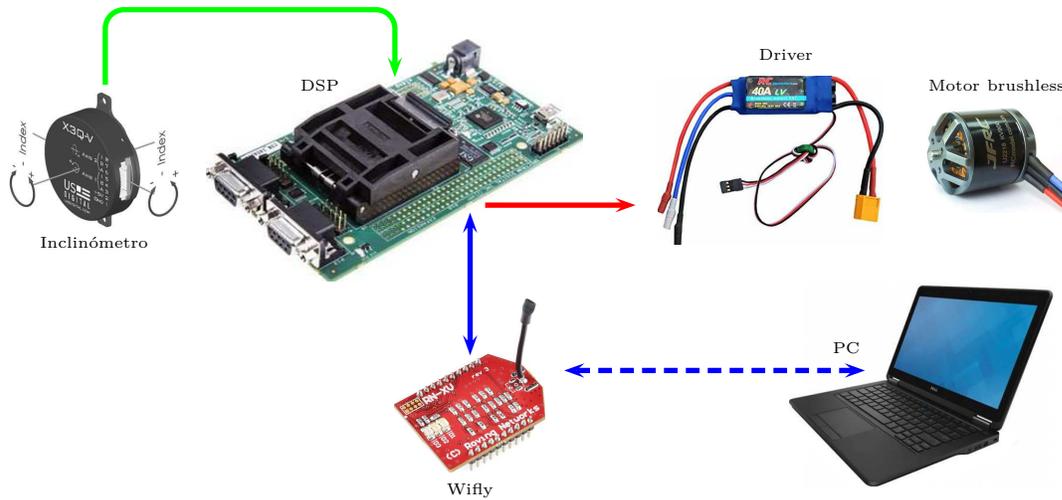


Figura 5.15: Diagrama del funcionamiento del sistema.

del microcontrolador a la computadora de forma inalámbrica utilizando dispositivos *Wifly-RN171* de *Microchip* los cuales traen un módulo *Wireless LAN*.

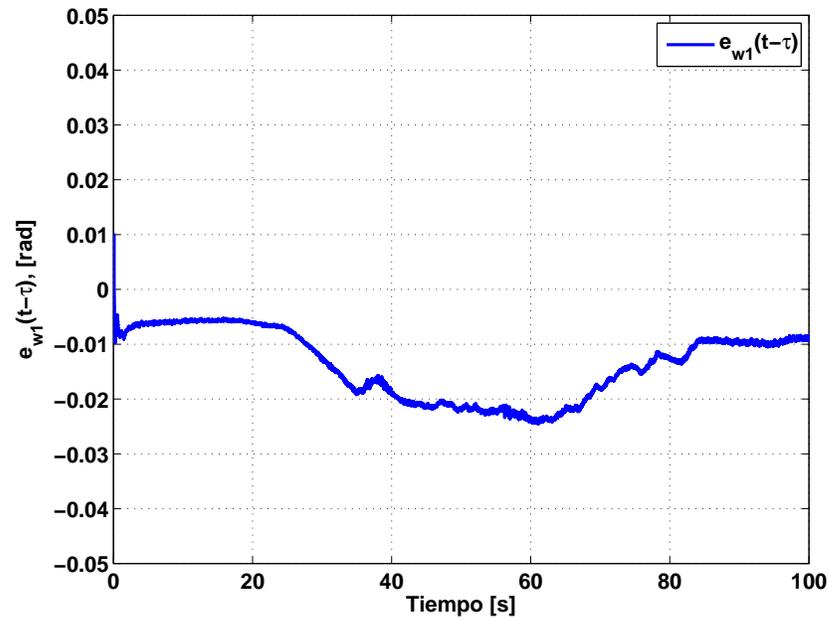
Los parámetros utilizados para realizar el experimento son los mismos que se muestran en la Tabla 5.1, excepto las ganancias para el predictor (5.10) y las ganancias para la retroalimentación (5.14), éstas se muestran en la Tabla 5.2. Es importante mencionar que dichos parámetros se obtuvieron a prueba y error. El retardo se obtuvo de forma experimental. Se realizaron experimentos para observar el comportamiento

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
k_1	0.15	λ_0	16
k_2	0.015	λ_1	10
τ	0.1 s		

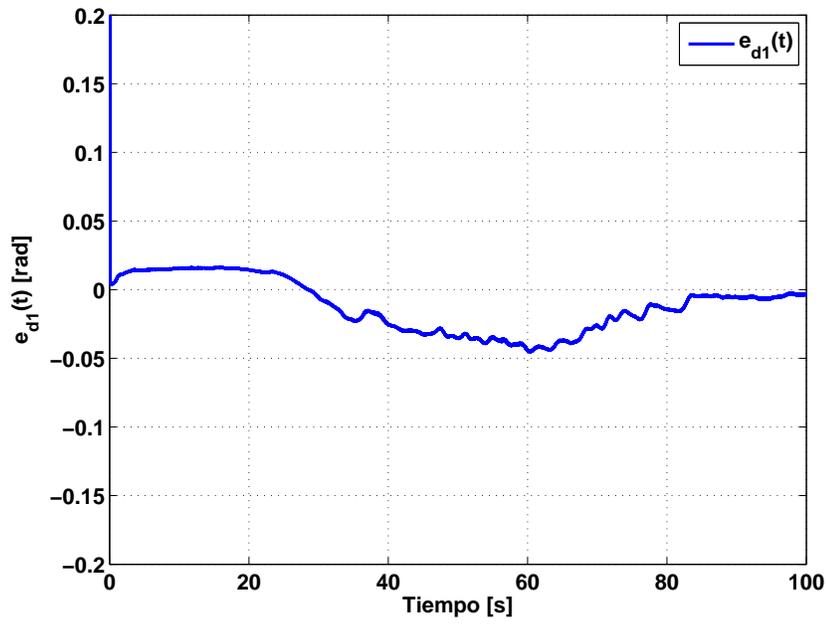
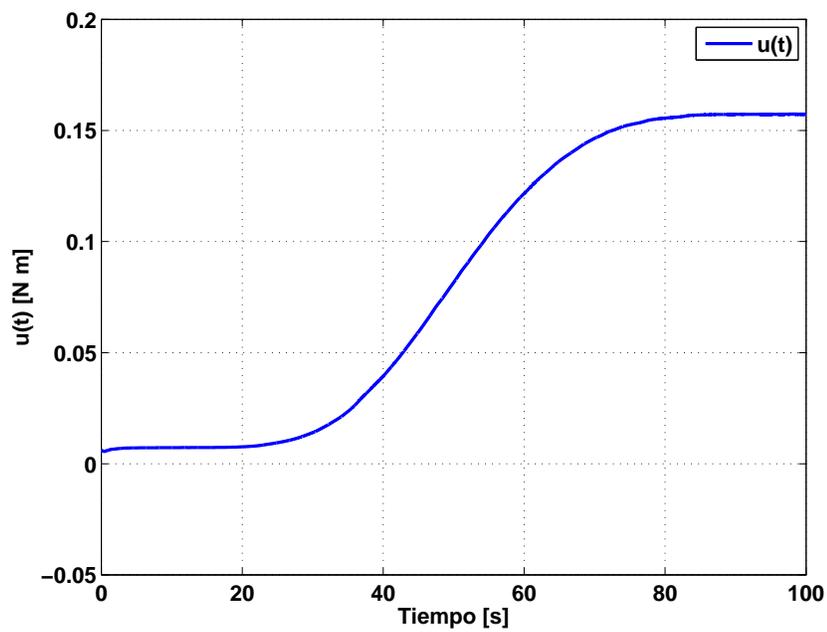
Tabla 5.2: Parámetros para el experimento.

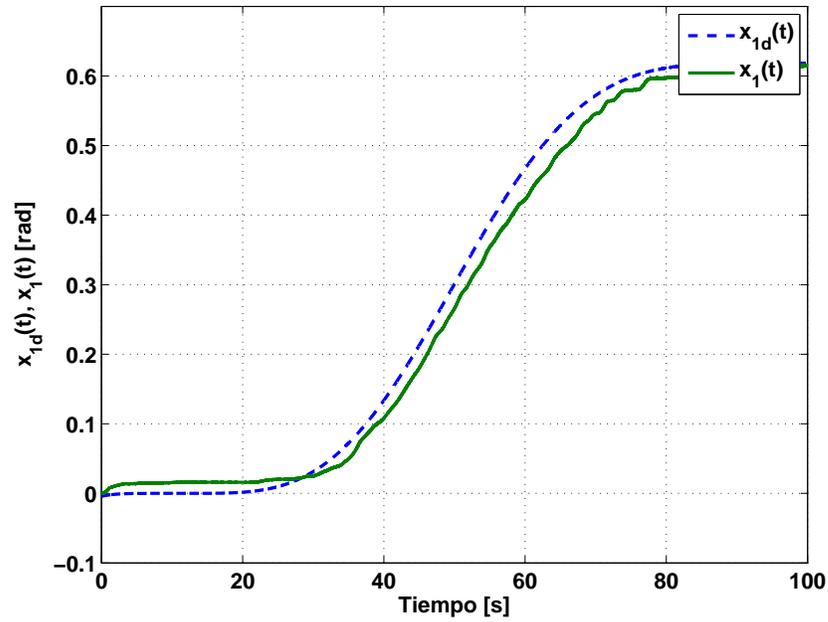
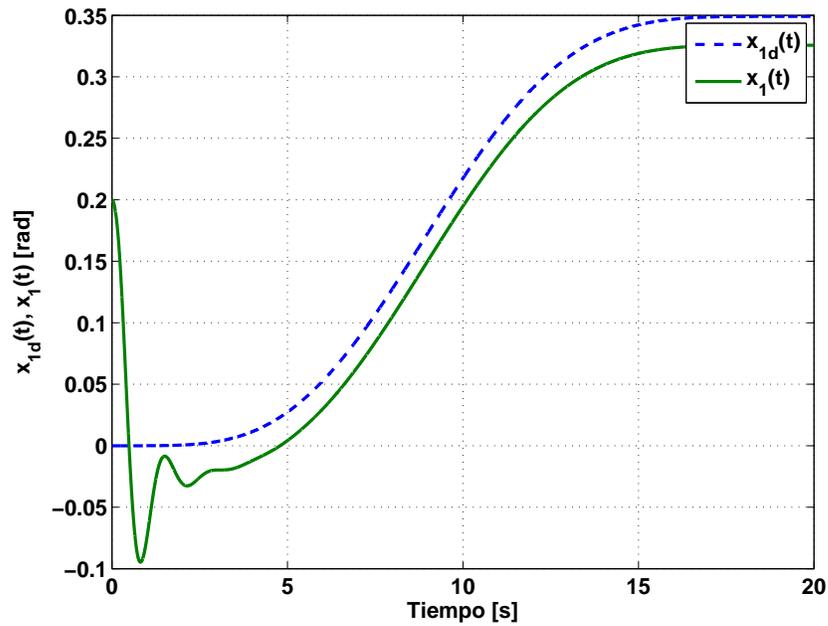
del esquema controlador-observador. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

En la Figura 5.16 se muestra el error de observación $e_{w_1}(t - \tau)$, y como se puede apreciar, el error se mantiene cercano a cero. En la Figura 5.17 se presenta el error de seguimiento $e_{d_1}(t)$. En las Figuras 5.18 y 5.19 se muestran la señal de control $u(t)$ aplicada al sistema y las trayectorias deseada y real. Es importante mencionar que el seguimiento de la trayectoria se ve afectado debido a perturbaciones externas no modeladas, lo que hace que el sistema presente un error en estado estacionario. Para

Figura 5.16: Error de observación: $e_{w_1}(t)$.

verificar esta hipótesis, se realiza una simulación sumando un término constante δ en la ecuación de la aceleración angular (5.5b). Este término constante representa perturbaciones externas no modeladas. En la Figura 5.20, se muestra la simulación numérica de la trayectoria que sigue el sistema en presencia de una perturbación externa $\delta = -0.05$.

Figura 5.17: Error de seguimiento: $e_{d1}(t)$.Figura 5.18: Señal de control: $u(t)$.

Figura 5.19: Trayectoria de referencia $x_{1d}(t)$ y real $x_1(t)$.Figura 5.20: Trayectoria de referencia $x_{1d}(t)$ y real $x_1(t)$ con una perturbación $\delta = -0.05$.

5.4. Robot móvil tipo (3,0)

En esta sección se presenta una estrategia de control para un robot móvil omnidireccional sujeto a retardos de tiempo en las entradas de control. Por medio de un cambio de variable adecuado, se desarrolla un predictor que provee una estimación de los estados del sistema, τ unidades de tiempo en el futuro, los cuales son utilizados para proponer una retroalimentación de estados que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias.

5.4.1. Modelo dinámico

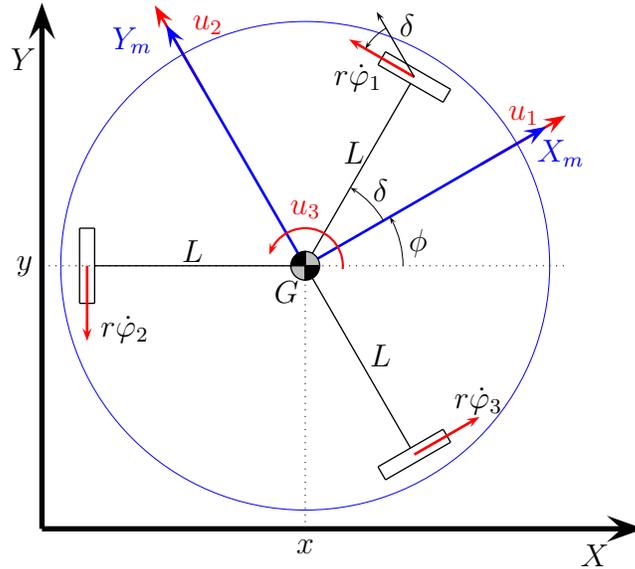


Figura 5.21: Vista superior de la configuración del robot móvil omnidireccional.

Un análisis simple de las restricciones de velocidad, ?, en la Figura 5.21 produce,

$$J_1 R(\phi) \dot{\xi} - J_2 \dot{\varphi} = 0 \quad (5.25)$$

con $\xi = [x \ y \ \phi]^\top$, y

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\sin \delta & \cos \delta & L \\ -\sin \delta & -\cos \delta & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

donde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ representan los desplazamientos angulares de las ruedas uno, dos y tres respectivamente; δ es la orientación de la i -ésima rueda con respecto a su eje longitudinal; L es la distancia entre el centro de cada rueda y el centro del vehículo y r es el radio de cada rueda.

Considerando los resultados presentados en ?-Canudas et al. [1996], la energía cinética del robot está dada por la energía rotacional de las ruedas más las energías rotacionales y traslacionales del cuerpo del robot. El Lagrangiano del sistema toma entonces la forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T R^T(\phi) M_p R(\phi) \dot{\xi} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\varphi}_i^T I_r \dot{\varphi}_i \quad (5.26)$$

con $M = \text{diag} \{M_p, M_p, I_p\}$ y $I_r = \text{diag} \{I_\varphi, I_\varphi, I_\varphi\}$. M_p es la masa del vehículo y I_p es el momento de inercia alrededor del eje Z del vehículo, I_φ es el momento de inercia de cada rueda con respecto a sus ejes de rotación.

Tomando en cuenta que las restricciones cinemáticas (5.25) se satisfacen para todo t , a partir de la formulación de Euler-Lagrange es posible obtener,

$$D\ddot{\xi}(t) + C(\dot{\xi}(t))\dot{\xi}(t) = B(\xi)u(t) \quad (5.27)$$

donde,

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}, \quad C(\dot{\xi}) = a \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} & 0 \\ -\dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(\xi) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\delta + \phi) & -\sin(\delta - \phi) & \cos \phi \\ \cos(\delta + \phi) & -\cos(\delta - \phi) & \sin \phi \\ L & L & L \end{bmatrix}$$

con $d_1 = M_p + \frac{3I_r}{2r^2}$, $d_3 = I_p + \frac{3I_r L^2}{r^2}$ y $a = \frac{3I_r}{2r^2}$.

La implantación práctica de una ley de control para cualquier robot móvil implica la necesidad de considerar los retardos de tiempo debidos a la red de comunicación que enlaza los sensores y actuadores del robot móvil y un controlador colocado en una posición remota. La representación esquemática de esta situación se describe en la Figura 5.22.

La existencia de retardos de tiempo como los mostrados en la Figura 5.22, producen la representación alternativa,

$$D\ddot{\xi}(t) + C(\dot{\xi}(t))\dot{\xi}(t) = B(\xi)u(t - \tau) \quad (5.28)$$

donde $\tau > 0$ es un retardo constante.

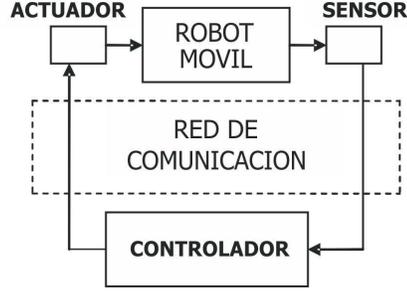


Figura 5.22: Red de comunicación.

5.4.2. Estrategia de predicción

La estrategia de predicción se llevará a cabo transformando el sistema (5.28), a una representación en adelanto. Para tal efecto asuma primero la representación en variables de estado obtenida a partir de,

$$z_1(t) = \xi(t), \quad z_2(t) = \dot{\xi}(t)$$

con lo cual se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -D^{-1}C(z_{23})z_2 + D^{-1}B(z_{13})u(t - \tau). \end{aligned} \quad (5.29)$$

El sistema en adelanto mencionado puede obtenerse al hacer el nuevo cambio de variable,

$$w_1(t) = z_1(t + \tau), \quad w_2(t) = z_2(t + \tau) \quad (5.30)$$

que produce directamente la nueva representación,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= \dot{z}_1(t + \tau) = z_2(t + \tau) = w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= \dot{z}_2(t + \tau) = -D^{-1}C(z_{23}(t + \tau))z_2(t + \tau) \\ &\quad + D^{-1}B(z_{13}(t + \tau))u(t) \\ &= -D^{-1}C(w_{23}(t))w_2(t) + D^{-1}B(w_{13}(t))u(t) \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= -D^{-1}C(w_{23}(t))w_2(t) + D^{-1}B(w_{13}(t))u(t). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Nótese que el modelo representado en (5.31), provee la dinámica del sistema (5.29) adelantada τ unidades de tiempo.

Para el sistema auxiliar (5.31) se propone ahora un observador descrito en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}_1(t) &= \hat{w}_2(t) + \lambda_1 e_{w_1}(t - \tau) \\ \dot{\hat{w}}_2(t) &= -D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2(t) + D^{-1}B(\hat{w}_{13}(t))u(t) + \lambda_0 e_{w_1}(t - \tau) \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde

$$\begin{aligned} e_w(t) &= \begin{bmatrix} e_{w_1}(t) & e_{w_2}(t) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} w_1(t) - \hat{w}_1(t) & w_2(t) - \hat{w}_2(t) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (5.33)$$

representa el error de observación para el sistema en adelante.

5.4.3. Dinámica del error de predicción

Considerando entonces el error de observación $e_w(t)$ dado en (5.33) se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_1}(t) &= e_{w_2}(t) - \lambda_1 e_{w_1}(t - \tau) \\ \dot{e}_{w_2}(t) &= -\lambda_0 e_{w_1}(t - \tau) - D^{-1} [C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2] \\ &\quad + D^{-1} [B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})] u. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Por otra parte, nótese que,

$$\begin{aligned} C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2 &= \begin{bmatrix} aw_{23}w_{22} \\ -aw_{23}w_{21} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a\hat{w}_{23}\hat{w}_{22} \\ -a\hat{w}_{23}\hat{w}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(w_{23}w_{22} - \hat{w}_{23}\hat{w}_{22} + w_{23}\hat{w}_{22} - w_{23}\hat{w}_{22}) \\ -a(w_{23}w_{21} - \hat{w}_{23}\hat{w}_{21} + w_{23}\hat{w}_{21} - w_{23}\hat{w}_{21}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aw_{23}e_{w_{22}} + a\hat{w}_{22}e_{w_{23}} \\ -aw_{23}e_{w_{21}} - a\hat{w}_{21}e_{w_{23}} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

esto es,

$$C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & aw_{23} & a\hat{w}_{22} \\ -aw_{23} & 0 & -a\hat{w}_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{21}} \\ e_{w_{22}} \\ e_{w_{23}} \end{bmatrix} = C_a(w_2, \hat{w}_2) e_{w_2} \quad (5.35)$$

además,

$$\begin{aligned} &B(w_{23}) - B(\hat{w}_{23}) \\ &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin \delta_{+13} & \sin \delta_{-13} & -\cos w_{13} + \cos \hat{w}_{13} \\ \cos \delta_{+13} & \cos \delta_{-13} & -\sin w_{13} + \sin \hat{w}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $\sin \delta_{\pm 13} = \sin \delta_{\pm 13} - \sin \delta_{\mp 13}$ y $\cos \delta_{\pm 13} = \cos \delta_{\pm 13} - \cos \delta_{\mp 13}$ con $\delta_{\pm 13} = \delta \pm w_{13}$. La consideración de algunas relaciones trigonométricas produce,

$$B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13}) = \frac{2}{r} \sin \left(\frac{w_{13} - \hat{w}_{13}}{2} \right) \bar{S}(\bar{w}_{13}) \quad (5.36)$$

donde

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\delta + \bar{w}_{13}}{2} & -\cos \frac{2\delta - \bar{w}_{13}}{2} & \sin \frac{\bar{w}_{13}}{2} \\ \sin \frac{2\delta + \bar{w}_{13}}{2} & \sin \frac{2\delta - \bar{w}_{13}}{2} & -\cos \frac{\bar{w}_{13}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\bar{w}_{13} = w_{13} + \hat{w}_{13}$. Es fácil ver que el sistema (5.34) puede escribirse alternativamente en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{e}_{w_{11}} &= -\lambda_1 \dot{e}_{w_{11}}(t - \tau) - \lambda_0 e_{w_{11}}(t - \tau) - \frac{a}{d_1} (w_{23} e_{w_{12}} + \hat{w}_{22} e_{w_{23}}) + \frac{2}{r} \sin\left(\frac{w_{13} - \hat{w}_{13}}{2}\right) \bar{S}_1 u \\ \ddot{e}_{w_{12}} &= -\lambda_1 \dot{e}_{w_{12}}(t - \tau) - \lambda_0 e_{w_{12}}(t - \tau) - \frac{a}{d_1} (-w_{23} e_{w_{21}} - \hat{w}_{21} e_{w_{23}}) + \frac{2}{r} \sin\left(\frac{w_{13} - \hat{w}_{13}}{2}\right) \bar{S}_2 u \\ \ddot{e}_{w_{13}} &= -\lambda_1 \dot{e}_{w_{13}}(t - \tau) - \lambda_0 e_{w_{13}}(t - \tau) \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde \bar{S}_1 y \bar{S}_2 representan la primera y segunda fila de la matriz \bar{S} .

A partir de la suposición de $u(t)$ acotado; se puede establecer que las velocidades del robot móvil permanecerán también acotadas y por lo tanto, tomando en cuenta (5.35) se tiene que,

$$C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2 \leq m_1 \|e_w\| \quad (5.38)$$

y a partir de (5.36), considerando que las funciones trigonométricas son acotadas, puede escribirse,

$$[B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})] u \leq m_2 \|e_{w_{13}}\| \leq m_3 \|e_w\|. \quad (5.39)$$

Para establecer la convergencia del observador propuesto, considere el sistema no lineal,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + f(x(t), t) \quad (5.40)$$

donde $x \in R^n$ es el estado, $A, A_d \in R^{n \times n}$ son matrices reales constantes, τ es un tiempo de retardo constante y $f : R^n \times R \rightarrow R^n$ es una función no lineal, tal que,

$$\|f(x, t)\| \leq \beta \|x\|. \quad (5.41)$$

El sistema (5.34) se reescribe en la forma

$$e_w(t) = Ae_w(t) + A_d e_w(t - \tau) + f(e_w(t), t)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -\lambda_1 I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -\lambda_0 I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \\ f &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ -D^{-1} [C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2] + D^{-1} [B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})] u \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.4.4. Sistema controlado por valores futuros

Es claro que no se puede establecer un principio de separación en el caso del control del robot móvil omnidireccional. A continuación se muestra el control del robot por medio de los estados estimados predichos con el fin de resolver el problema estándar de seguimiento de trayectorias.

Considérese la retroalimentación,

$$u(t) = [D^{-1}B(w_{13}(t))]^{-1} \{v(t) + D^{-1}C(w_{23}(t))w_2(t)\} \quad (5.42)$$

que en lazo cerrado con el sistema en adelante (5.31) produce

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= v(t). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Como la retroalimentación (5.42) no es implementable debido a que $w_1(t) = \xi(t + \tau)$ y $w_2(t) = \dot{\xi}(t + \tau)$, se propone la retroalimentación alternativa basada en estados predichos,

$$u(t) = [D^{-1}B(\hat{w}_{13}(t))]^{-1} \{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2(t)\} \quad (5.44)$$

la cual produce en lazo cerrado con (5.31) el sistema,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= -D^{-1}C(w_{23}(t))w_2(t) + D^{-1}BB^{-1}D \{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2(t)\}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Nótese que,

$$\begin{aligned} B(w_{13})B^{-1}(\hat{w}_{13}) &= D^{-1}B(w_{13})B^{-1}(\hat{w}_{13})D \\ &= I_{3 \times 3} + S(e_{w_{13}}) \end{aligned} \quad (5.46)$$

donde

$$S(e_{w_{13}}) = \begin{bmatrix} -\sin^2(e_{w_{13}}) & -\sin(e_{w_{13}}) & 0 \\ -\sin(e_{w_{13}}) & -\sin^2(e_{w_{13}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver, que la ecuación (5.45) toma entonces la forma,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2(t) \\ \dot{w}_2(t) &= v(t) - D^{-1}[C(w_{23})w_2 - C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2] + S(e_{w_{13}})\{v(t) + D^{-1}C(\hat{w}_{23})\hat{w}_2\}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Defínase ahora la nueva entrada de control $v(t)$ en la forma,

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{w}_{2d} - k_2(w_2 - w_{2d}) - k_1(w_1 - w_{1d}) \\ &= \dot{w}_{2d} - k_2e_{w_{2d}} - k_1e_{w_{1d}} \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde $w_d = \begin{bmatrix} w_{1d} & w_{2d} \end{bmatrix}^T$ corresponde a las trayectorias predefinidas deseadas que el robot móvil seguirá.

Considerando (5.48), el sistema (5.47) puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= \dot{w}_{2d} - k_2 e_{w_{2d}} - k_1 e_{w_{1d}} - D^{-1} [C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2] \\ &\quad + S(e_{w_{13}}) \{v(t) + D^{-1} C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Definiendo ahora, los errores de seguimiento en la forma,

$$e_{w_d} = \begin{bmatrix} e_{w_{1d}} & e_{w_{2d}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w_1 - w_{1d} & w_2 - w_{2d} \end{bmatrix}^T$$

el sistema (5.49) toma la forma,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_{1d}} &= e_{w_{2d}} \\ \dot{e}_{w_{2d}} &= -k_1 e_{w_{1d}} - k_2 e_{w_{2d}} - D^{-1} [C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2] \\ &\quad + S(e_{w_{13}}) \{v(t) + D^{-1} C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2\}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema en lazo cerrado controlada mediante estados predichos está formada por las dinámicas de los errores de predicción y seguimiento dadas por,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_1}(t) &= e_{w_2}(t) - \lambda e_{w_1}(t - \tau) \\ \dot{e}_{w_2}(t) &= -\lambda_0 e_{w_1}(t - \tau) - D^{-1} [C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2] \\ &\quad + D^{-1} [B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})] u \\ \dot{e}_{w_{1d}}(t) &= e_{w_2}(t) \\ \dot{e}_{w_{2d}}(t) &= -k_1 e_{w_{1d}}(t) - k_2 e_{w_{2d}}(t) - D^{-1} [C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2] \\ &\quad + S(e_{w_{13}}) \{v(t) + D^{-1} C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Considerando los errores previamente definidos,

$$e_w = w - \hat{w} \text{ y } e_{w_d} = w - w_d \quad (5.52)$$

se tiene entonces a partir de la ecuación (5.35) que,

$$\begin{aligned} f_{a_1} &= -D^{-1} [C(w_{23}) w_2 - C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2] \\ &= -D^{-1} C_a(w_2, \hat{w}_2) e_{w_2} \\ &= -D^{-1} C_a(e_{w_2}, e_{w_{2d}}, w_{2d}) e_{w_2} \end{aligned} \quad (5.53)$$

es una función de las señales de error y de los valores deseados, esto es, C_a toma la forma,

$$C_a = a \begin{bmatrix} 0 & e_{w_{23}} - w_{23d} & e_{w_{22d}} - e_{w_{22}} - w_{22d} \\ -e_{w_{23}} + w_{23d} & 0 & -e_{w_{21d}} + e_{w_{21}} + w_{21d} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando en cuenta que la señal de control esta dada por la ecuación (5.44) es fácil ver que,

$$\begin{aligned} f_{a_2} &= D^{-1} [B(w_{13}) - B(\hat{w}_{13})] u \\ &= S(e_{w_{13}}) \{v + D^{-1}C(\hat{w}_{23}) \hat{w}_2\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Considerando $v(t)$ dada en (5.48) y los errores (5.52), se obtiene equivalentemente,

$$\begin{aligned} f_{a_2} &= -S(e_{w_{13}}) \{\dot{w}_{2d} - k_2 e_{w_{2d}} - k_1 e_{w_{1d}} \\ &\quad + D^{-1}C(e_{w_{23d}} - e_{w_{23}} - w_{23d})(e_{w_{2d}} - e_{w_2} - w_{2d}) \hat{w}_2\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

la cual es otra función que depende de las señales de error y de los valores deseados.

Considérese ahora el vector de estados extendido,

$$e = [e_{w_1} \quad e_{w_2} \quad e_{w_{1d}} \quad e_{w_{2d}}]^T \quad (5.56)$$

y defínase la función

$$f_a = f_{a_1}(e_w, e_{w_d}, w_d) + f_{a_2}(e_w, e_{w_d}, w_d). \quad (5.57)$$

Es posible entonces escribir el sistema (5.51) en la forma,

$$\dot{e}(t) = A_1 e(t) + A_2 e(t - \tau) + f_e(e, w_d) \quad (5.58)$$

con

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & -k_1 I_{3 \times 3} & -k_2 I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad f_e = \begin{bmatrix} 0 \\ f_a \\ 0 \\ f_a \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -\lambda_1 I_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 I_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.59)$$

donde $A_1, A_2 \in R^{12 \times 12}$ y "0" representa bloques con entradas cero de dimensión adecuada.

Asumiendo que los valores deseados w_d están acotados por diseño y tomando en cuenta que f_{a_1}, f_{a_2} dadas respectivamente en (5.53) y (5.55) es posible entonces encontrar cotas de la forma,

$$\begin{aligned} \|f_{a_1}(e_w, e_{w_d}, w_d)\| &\leq m_4 \|e\| \\ \|f_{a_2}(e_w, e_{w_d}, w_d)\| &\leq m_5 \|e\| \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene,

$$\|f_e(e_w, e_{w_d}, w_d)\| \leq m_6 \|e\|. \quad (5.60)$$

Considérese ahora la representación del sistema en lazo cerrado dado en la ecuación (5.58)-(5.59). Nótese ahora que la matriz $A_1 + A_2$ toma la forma,

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} -\lambda_1 I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ -\lambda_2 I_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & -k_1 I_{3 \times 3} & -k_2 I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la elección adecuada de los parámetros de diseño k_1 , k_2 , λ_1 , λ_2 permite colocar los valores propios de $A_1 + A_2$ en el lado izquierdo del plano complejo.

5.4.5. Evaluación numérica

A continuación se muestran los resultados del esquema de control basado en predicción de estados considerando un robot móvil omnidireccional cuyos parámetros se presentan en la Tabla 5.3.

Parámetro	Valor	Descripción
M_p	9.85 kg	Masa total
I_r	0.52 kg · m ²	Inercia de las ruedas
I_p	0.17 kg · m ²	Inercia del robot
L	0.1877 m	Distancia del centro de masa a las ruedas
r	0.03965 m	Radio de las ruedas
τ	0.5 s	Tiempo de retardo

Tabla 5.3: Parámetros del robot móvil omnidireccional.

La trayectoria deseada $w_d(t)$, se define como,

$$\begin{aligned} x_d(t) &= A \cos(\omega t) \\ y_d(t) &= A \sin(\omega t) \\ \phi_d(t) &= B \end{aligned}$$

en donde $A = 2$ es el radio del círculo, $\omega = 2\pi f$, $f = 0.05$ y $B = 0.2$ es una constante.

Se consideran además las condiciones iniciales $\xi(0) = [1.5, -1, 0.5]^T$ y $\dot{\xi}(0) = [0, 0, 0]^T$ y las ganancias de diseño $\lambda_0 = 0.85$, $\lambda_1 = 1.5$, $k_{0i} = 0.25$ y $k_{1i} = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

En la Figura 5.23 se muestra la evolución del robot móvil sobre el plano de trabajo donde la convergencia a la trayectoria deseada es obtenida ante errores iniciales

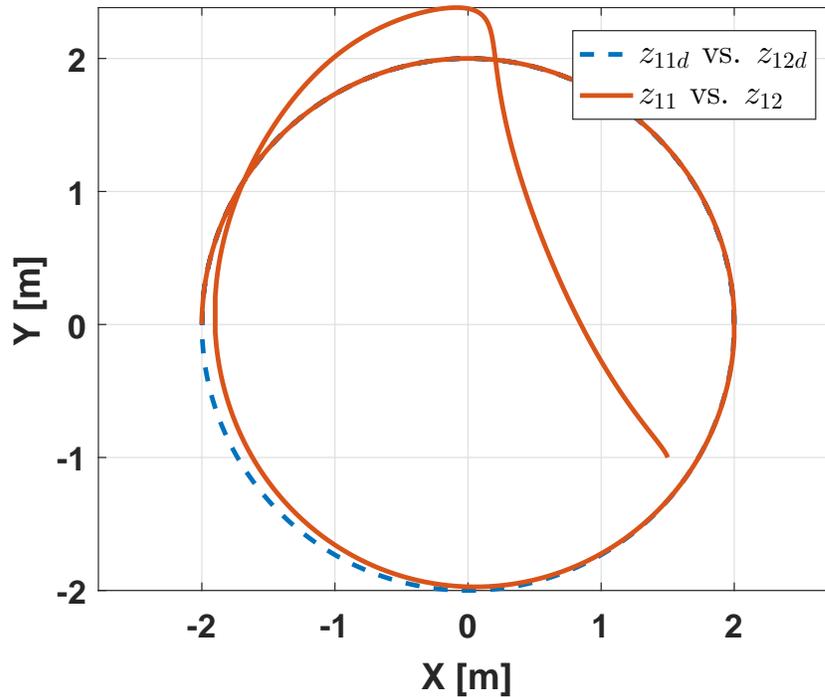


Figura 5.23: Evolución en el plano $X - Y$.

de seguimiento no nulos. Los errores de predicción en posición se muestran en la Figura 5.24 mientras que los errores de predicción de velocidad se presentan en la Figura 5.25. La convergencia de los errores de seguimiento es mucho más clara en las Figuras 5.26 y 5.27 donde se muestra la evolución de los errores de posición y velocidad respectivamente. Las señales de control resultantes se muestran en la Figura 5.28.

A partir de las figuras anteriores es importante resaltar que a pesar de las condiciones iniciales fuera de la trayectoria deseada, los errores de predicción y observación convergen a cero produciendo un sistema en lazo cerrado que resuelve adecuadamente el problema de seguimiento de trayectorias aun ante la presencia de tiempos de retardo en las señales de entrada.

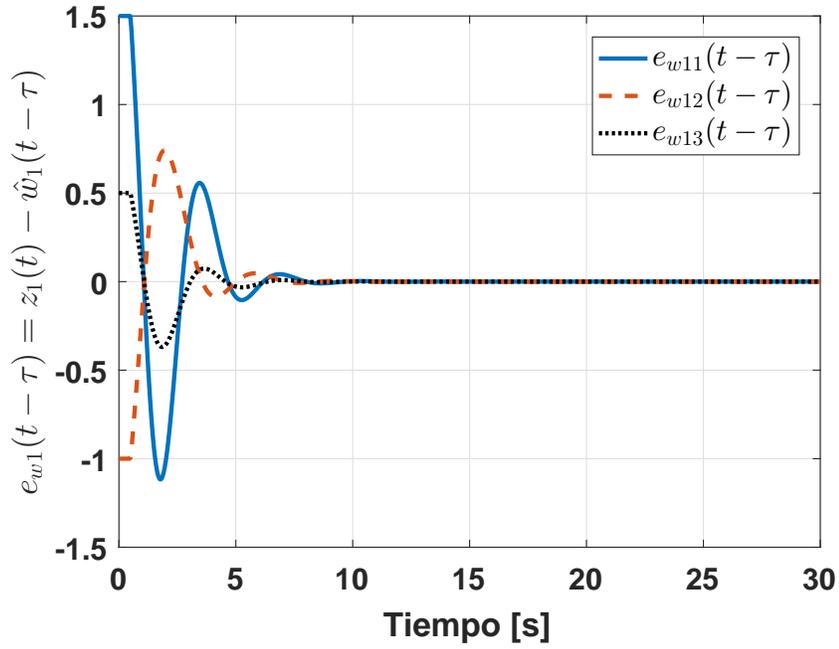


Figura 5.24: Error de predicción en posición e_{w1} .

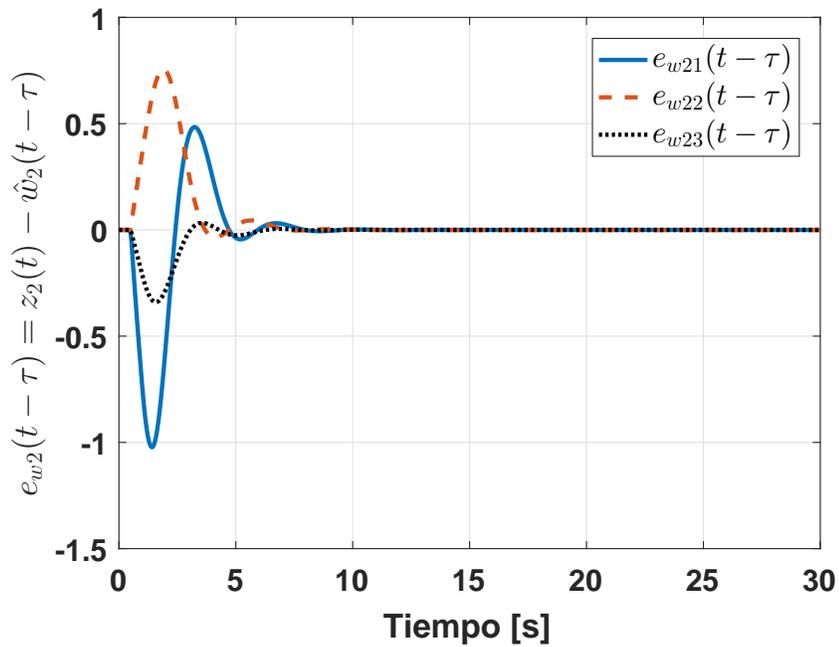


Figura 5.25: Error de predicción en velocidad e_{w2} .

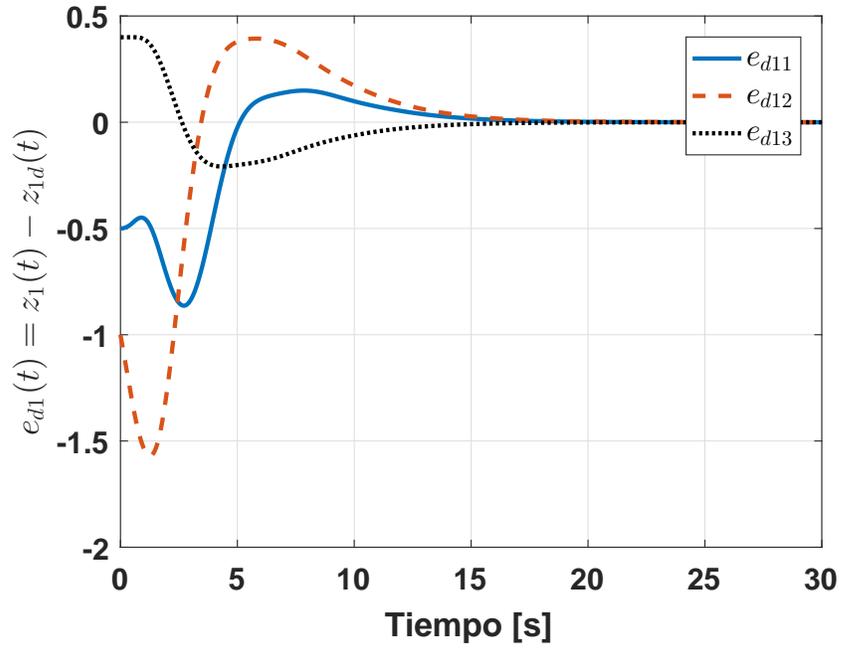


Figura 5.26: Error de seguimiento en posición e_{w1d} .

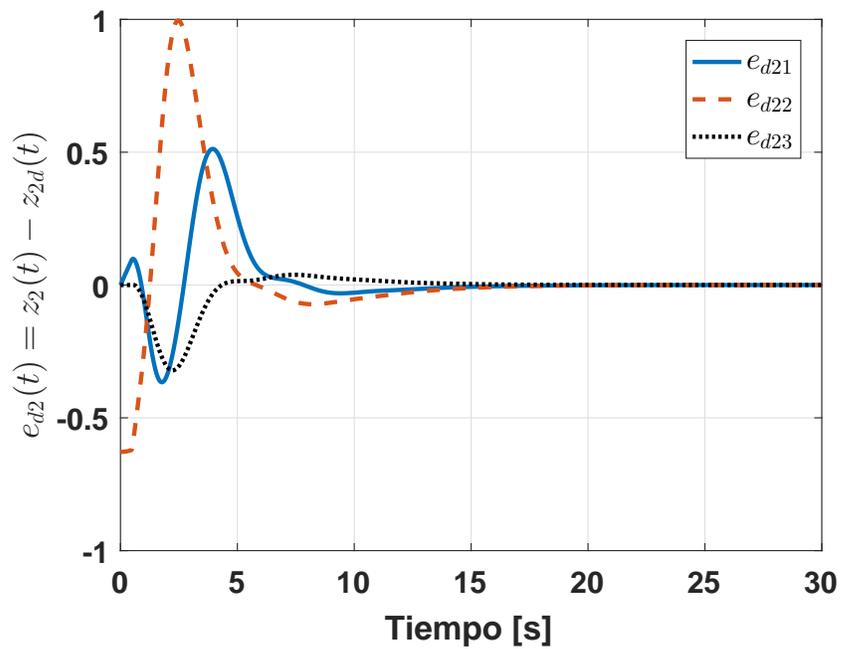


Figura 5.27: Error de seguimiento en velocidad e_{w2d} .

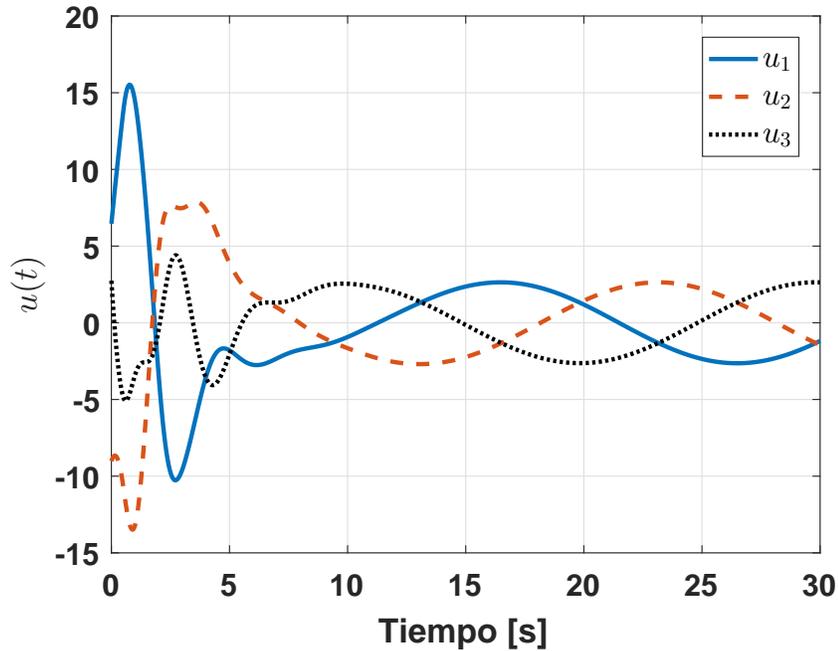


Figura 5.28: Señales de control $u(t)$.

5.5. Conclusiones

En este capítulo, se analizó el funcionamiento del esquema de predicción y la estrategia de control basada en predicción. Se analizó un sistema inestable en lazo abierto, para el cual, se obtuvieron las ganancias que cumplen con las condiciones del Teorema 4. También se realizó la estabilización y el seguimiento de trayectoria. En ambos casos se obtuvieron gráficas que muestran la convergencia de los errores de predicción y seguimiento de trayectoria.

Como segundo caso, se analizó un sistema barra péndulo actuado por un motor y una hélice. Se presentan simulaciones que muestran el comportamiento del esquema de control–predicción. También se realizaron experimentos para verificar el funcionamiento del esquema de control. El seguimiento de la trayectoria se ve afectado debido a dinámicas no modeladas (perturbaciones externas).

Finalmente, se analizó el problema de control de un robot móvil omnidireccional sujeto a retardos de tiempo en las señales de entrada. La solución del problema se obtiene mediante la utilización de un esquema predictor el cual se diseña para obtener una estimación de valores futuros de los estados τ unidades de tiempo en el futuro. El predictor de estados propuesto es equivalente a un observador para un sistema en adelante obtenido a partir de un cambio de coordenadas. Se resuelve el problema de seguimiento de trayectorias a través de una retroalimentación basada en estados

estimados futuros y se muestra la convergencia tanto de los errores de estimación como de los errores de seguimiento.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

6.1. Conclusiones

En este trabajo, se presenta una solución para el problema de control de una clase de sistemas no lineales con retardo constante conocido en la señal de entrada. Un cambio adecuado de las coordenadas de estado, permite estimar los valores futuros de los estados del sistema τ unidades de tiempo en el futuro. La convergencia del predictor de estados propuesto depende de la magnitud del retardo y la constante de Lipschitz asociada con la clase de sistemas considerados. Los estados estimados futuros son utilizados para resolver los problemas de regulación y seguimiento de trayectorias. Simulaciones numéricas evalúan la estrategia de predicción, así como la regulación y el controlador de seguimiento de trayectorias en función de estados predichos. Adicionalmente, también se muestra que la estrategia de predicción-control presentada se aplica a la clase de sistemas no lineales completamente linealizables por retroalimentación de estados.

Para mostrar el funcionamiento del esquema de predicción, se analizó primeramente un sistema inestable en lazo abierto. Se realizó la estabilización y el seguimiento de trayectorias. En ambos casos se graficaron los resultados obtenidos mostrando una rápida convergencia a cero de los errores de predicción y seguimiento de trayectoria.

También se presentó una solución al problema de seguimiento de trayectorias asociado a un actuador aerodinámico afectado por retardos de tiempo en la señal de control. La solución propuesta se basa en estados estimados futuros obtenidos con un predictor que es capaz de proveer los estados futuros necesarios. Se muestra formalmente la convergencia de los errores de predicción así como la convergencia de los errores de seguimiento. El esquema de control es evaluado mediante simulaciones numéricas y con experimentos en tiempo real en una plataforma de laboratorio.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos para el seguimiento de trayectoria de un robot móvil omnidireccional sujeto a retardos en las señales de entrada. Aquí, el esquema de predicción-control es puesto a prueba mediante simulaciones numéricas. Se presentaron los resultados obtenidos del seguimiento de trayectoria. Y nuevamente se muestra que los errores de predicción y seguimiento convergen asintóticamente a cero.

Es importante mencionar que en todos los casos se intentó controlar los sistemas con retardo en la entrada de control, (sin utilizar el esquema de predicción) sin tener éxito alguno, en todos los casos, los sistemas se inestabilizaron. De ahí la importancia de utilizar un esquema de predicción.

6.2. Trabajo futuro

Como una continuación de este trabajo, se propone considerar el incremento del retardo que el sistema en lazo cerrado pueda manejar.

También, abordar el caso del retardo variante en el tiempo y la implementación en tiempo real del algoritmo propuesto.

Para el caso del actuador aerodinámico, la compensación o cancelación de perturbaciones externas sería de gran ayuda para mejorar el comportamiento del esquema de predicción-control.

Además la implementación en otros sistemas no lineales, ya sea en robots móviles o en aeronaves no tripuladas que requieran de ser controladas a distancia, en donde el control se vea afectado por un retardo no despreciable.

Bibliografía

- Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4):869–879.
- Atassi, A. N. and Khalil, H. K. (1999). A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9):1672–1687.
- Bellman, R. E. and Cooke, K. L. (1963). *Differential-difference equations*. Rand Corporation.
- Besançon, G. (2003). High-gain observation with disturbance attenuation and application to robust fault detection. *Automatica*, 39(6):1095–1102.
- Bestle, D. and Zeitz, M. (1983). Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *International Journal of Control*, 38(2):419–431.
- Bohyung Lee and Jang Gyu Lee (2000). Robust control of uncertain systems with input delay and input sector nonlinearity. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, 5:4430–4435.
- Busawon, K., Farza, M., and Hammouri, H. (1998). Observer design for a special class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 71(3):405–418.
- Canudas, C., Siciliano, B., Bastin, G., Brogliato, B., Campion, G., D’Andrea-Novell, B., Luca, A. D., Khalil, W., Lozano, R., Ortega, R., Samson, C., and Tomei, P. (1996). *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, London.
- Chiang, C. C. and Tung, T. C. (2003). Robust tracking control of uncertain nonlinear systems with an input time delay. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 3:2394–2399.
- Ciccarella, G., Mora, M. D., and Germani, A. (1993). A Luenberger-like observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57(3):537–556.
- Deza, F., Busvelle, E., Gauthier, J., and Rakotopara, D. (1992). High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 18(4):295–299.

- Esfandiari, F. and Khalil, H. K. (1989). Observer-based control of uncertain linear systems: Recovering state feedback robustness under matching condition. *1989 American Control Conference*, pages 931–936.
- Esfandiari, F. and Khalil, H. K. (1992). Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *International Journal of Control*, 56(5):1007–1037.
- Fiagbedzi, Y. and Pearson, A. (1986). Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(9):847–855.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Birkhäuser Basel, Switzerland.
- Garcia-Lozano, H. and Kharitonov, V. L. (2006). Numerical computation of time delay Lyapunov matrices. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(10):60–65.
- Garg, V. and Hedrick, J. K. (1995). Fault detection filters for a class of nonlinear systems. *Proceedings of American Control Conference*, 3:1647–1651.
- Gauthier, J. P., Hammouri, H., and Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):875–880.
- Gauthier, J. P. and Kupka, I. A. K. (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 32(4):975–994.
- Germani, A., Manes, C., and Pepe, P. (2002). A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1):96–101.
- Gu, K., Kharitonov, V. L., and Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser, Boston.
- Guechi, E. H., Lauber, J., Dambrine, M., and Defoort, M. (2012). Output feedback controller design of a unicycle-type mobile robot with delayed measurements [brief paper]. *IET Control Theory Applications*, 6(5):726–733.
- Hale, J. K. (1977). *Theory of functional differential equations*, volume 3. Springer-Verlag, New York, 2nd edition.
- Hale, J. K. and Lunel, S. M. V. (1993). *Introduction to functional differential equations*, volume 99. Springer-Verlag, New York, 1st edition.
- Hammouri, H., Targui, B., and Armanet, F. (2002). High gain observer based on a triangular structure. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(6):497–518.

- Hou, M., Zítek, P., and Patton, R. J. (2002). An observer design for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1):121–125.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, 3rd edition.
- Kharitonov, V. L. (2013). *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser Basel, New York, 1st edition.
- Kim, I. H. and Son, Y. I. (2010). Robust control for input time-delay systems: A disturbance observer approach. *Proceedings of SICE Annual Conference 2010*, 1(1):179–183.
- Kojima, A., Uchida, K., Shimemura, E., and Ishijima, S. (1994). Robust stabilization of a system with delays in control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8):1694–1698.
- Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. (1992). *Applied theory of functional differential equations*, volume 85. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1st edition.
- Kou, S. R., Elliott, D. L., and Tarn, T. J. (1975). Exponential observers for nonlinear dynamic systems. *Information and Control*, 29(3):204–216.
- Krener, A. J. and Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3(1):47–52.
- Krener, A. J. and Respondek, W. (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2):197–216.
- Krstic, M. (2009). *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Birkhäuser Basel, Boston, 1st edition.
- Krstic, M. (2010). Lyapunov stability of linear predictor feedback for time-varying input delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2):554–559.
- Lei, J. and Khalil, H. K. (2016). Feedback linearization for nonlinear systems with time-varying input and output delays by using high-gain predictors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(8):2262–2268.
- Li, Z. Y., Zhou, B., and Lam, J. (2014). Lyapunov–Krasovskii functionals for predictor feedback control of linear systems with multiple input delays. *Applied Mathematics and Computation*, 244:303–311.
- Manitius, A. and Olbrot, A. (1979). Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4):541–552.

- Maza-Casas, L., Velasco-Villa, M., and Alvarez-Gallegos, J. (2000). Compensation of input time delay for a class of nonlinear systems. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, 5:4428–4429.
- Mazenc, F. and Bliman, P. (2006). Backstepping design for time-delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1):149–154.
- Michiels, W., Engelborghs, K., Vansevenant, P., and Roose, D. (2002). Continuous pole placement for delay equations. *Automatica*, 38(5):747–761.
- Michiels, W., Mondie, S., and Roose, D. (2003). Robust stabilization of time-delay systems with distributed delay control laws: necessary and sufficient conditions for a safe implementation. Technical Report TW363, Department of Computer Science, K. U. Leuven, Heverlee, Belgium.
- Michiels, W. and Roose, D. (2001). Time-delay compensation in unstable plants using delayed state feedback. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 2(1):1433–1437.
- Mirkin, L. (2004). On the approximation of distributed-delay control laws. *Systems & Control Letters*, 51(5):331–342.
- Mondie, S. and Michiels, W. (2003). Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(12):2207–2212.
- Munz, U., Ebenbauer, C., Haag, T., and Allgower, F. (2009). Stability analysis of time-delay systems with incommensurate delays using positive polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(5):1019–1024.
- Niculescu, S. I. (2001a). *Delay effects on stability: a robust control approach*, volume 269. Springer-Verlag, London, 1st edition.
- Niculescu, S. I. (2001b). On delay-dependent stability under model transformations of some neutral linear systems. *International Journal of Control*, 74(6):609–617.
- Niculescu, S. I., de Souza, C. E., Dugard, L., and Dion, J. M. (1998). Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5):743–748.
- Nihtila, M. T. (1991). Finite pole assignment for systems with time-varying input delays. *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1(1):927–928.
- Normey-Rico, J. E. and Camacho, E. F. (2007). *Control of Dead-time Processes*. Springer-Verlag, London, 1st edition.

- Normey-Rico, J. E. and Camacho, E. F. (2008). Dead-time compensators: A survey. *Control Engineering Practice*, 16(4):407–428.
- Ordaz, J., Salazar, S., Mondié, S., Romero, H., and Lozano, R. (2013). Predictor-based position control of a quad-rotor with delays in GPS and vision measurements. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 70(1):13–26.
- Pagilla, P. R. and Yongliang Zhu (2004). Controller and observer design for Lipschitz nonlinear systems. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 3(1):2379–2384.
- Palmor, Z. J. (1996). Time-delay compensation Smith predictor and its modifications. *The control handbook*, 1:224–229.
- Patel, R. V. and Toda, M. (1980). Quantitative measures of robustness for multivariable systems. *Joint Automatic Control Conference*, 17:35.
- Pertew, A., Marquez, H., and Zhao, Q. (2005). Dynamic observers for nonlinear Lipschitz systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 38(1):25–30.
- Raghavan, S. and Hedrick, J. K. (1994). Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2):515–528.
- Rajamani, R. (1998). Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):397–401.
- Saberi, A. and Sannuti, P. (1990). Observer design for loop transfer recovery and for uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(8):878–897.
- Shi, K., Liu, X., Tang, Y., Zhu, H., and Zhong, S. (2016a). Some novel approaches on state estimation of delayed neural networks. *Information Sciences*, 372:313–331.
- Shi, K., Liu, X., Zhu, H., Zhong, S., Zeng, Y., and Yin, C. (2016b). Novel delay-dependent master-slave synchronization criteria of chaotic Luré systems with time-varying-delay feedback control. *Applied Mathematics and Computation*, 282:137–154.
- Smith, O. J. M. (1957). Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng. Prog.*, 53(5):217–219.
- Smith, O. J. M. (1959). A controller to overcome dead time. *iSA journal*, 6(2):28–33.
- Sussmann, H. J. and Kokotovic, P. V. (1989). Peaking and stabilization. *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, 2(1):1379–1384.

- Thau, F. E. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3):471–479.
- Velasco-Villa, M., Castro-Linares, R., Rosales-Hernández, F., del Muro-Cuellar, B., and Hernández-Pérez, M. (2013). Discrete-time synchronization strategy for input time-delay mobile robots. *Journal of the Franklin Institute*, 350(10):2911–2935.
- Velasco-Villa, M., Heras-Godínez, J., Vázquez-Santacruz, J. A., and Fragoso-Rubio, V. (2015). Delayed consensus problem for single and double integrator systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015(1):1–15.
- Viel, F., Busvelle, E., and Gauthier, J. (1995). Stability of polymerization reactors using I/O linearization and a high-gain observer. *Automatica*, 31(7):971–984.
- Walcott, B. L., Corless, M. J., and Zak, S. H. (1987). Comparative study of non-linear state-observation techniques. *International Journal of Control*, 45(6):2109–2132.
- Young-Hoon, R. and Jun-Ho, O. (1999). Sliding mode control with delay compensation for uncertain input-delay systems. *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, 1(1):309–313.
- Zhou, B., Lin, Z., and Duan, G.-R. (2012). Truncated predictor feedback for linear systems with long time-varying input delays. *Automatica*, 48(10):2387–2399.
- Zuo, Z., Lin, Z., and Ding, Z. (2016). Truncated prediction output feedback control of a class of Lipschitz nonlinear systems with input delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 63(8):788–792.