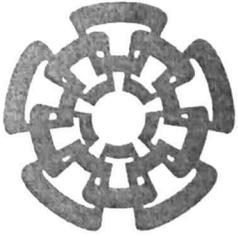


CT-751-SS1

Don.-2013



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Técnicas Geométricas de Control y Modelado de Robots Bípedos.

Tesis que presenta:

José Luis Oviedo Barriga
para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias
en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica
Directores de Tesis

CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
LIBROS

Dr. Bernardino Castillo Toledo
Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

CLASIF..	CT00655
ADQUIS..	CT-751-551
FECHA:	14-10-2013
PROCESO:	DON.-2013
	\$

210432.1

Técnicas Geométricas de Control y Modelado de Robots Bípedos.

**Tesis de Doctorado en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

José Luis Oviedo Barriga

Maestro en Ciencias de la Electrónica

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla 2005-2007

Becario de CONACYT, expediente no. 28824

Directores de Tesis

Dr. Bernardino Castillo Toledo

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Mayo de 2013.

Resumen

El tema de los robots bípedos humanoides ha sido de gran interés en la comunidad científica. Aspectos que tiene mayor relevancia son el modelado y el control de los distintos movimientos que puede desarrollar un humanoide, siendo el caminado uno de los problemas más complejos a resolver.

En esta tesis se aborda en primer lugar, el control de caminado en 2D de un robot bípedo siguiendo referencias pre-establecidas para cada articulación, que garantizan el caminado sagital. Se propone una modificación al control proporcional derivativo clásico (PD) añadiendo una función exponencial que depende del error.

Con el uso de álgebra geométrica conformal se propone el modelo en 3D para las piernas de un robot bípedo humanoide, a diferencia del álgebra de matrices el modelo propuesto permite tener una perspectiva geométrica del robot. Aplicando a este modelo cinemática diferencial se controla el seguimiento de trayectoria del centro de masas, considerando la ubicación del mismo, al centro de la cadera del robot bípedo humanoide. También se obtuvo el modelo dinámico en 3D de un humanoide y se diseñaron controladores con las técnicas de modos deslizantes de primer y segundo orden para el seguimiento de trayectorias bio-inspiradas para cada una de las articulaciones de las piernas, con el seguimiento de estas referencias garantiza el caminado del robot bípedo humanoide. Cada uno de los controladores diseñados fueron simulados y comparados entre sí para resaltar las ventajas y desventajas de cada uno.



Summary

The topic of biped humanoid robots has been of great interest in the scientific community in the last years. Key aspects in this area include modelling and control of different motion, walking being one of the most complex problems to be considered.

In this thesis, starting with for the walking control problem, a 2D approach is formulated to track predefined paths which guarantee the sagittal walking. A modification of a classic proportional derivative control is proposed involving an error dependent exponential function.

Using conformal geometric algebra, a 3D model is proposed for the legs of a humanoid biped robot. In contrast to the algebra of matrices, the proposed model allow us to have a geometric perspective of the robot. The trajectory tracking control of the center of mass was performed applying differential kinematic to the conformal geometric biped model, where the center of mass location is considered to be at the center of the humanoid hip. First and second order sliding mode control techniques were applied to the conformal geometric biped model for tracking bio-inspired trajectories for each leg joint. Tracking these references guarantee that the biped humanoid robot walking. Each controller designed was simulated and compared to each other in order to asses their performance.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por la vida, por haber puesto en mi camino a las personas indicadas para mi crecimiento y formación.

Dedico esta tesis a:

Mi amada Angélica por su amor, por ser la principal motivación para superarme y crecer en todos los aspectos.

Mis padres José Luis y Ma. Orlanda por su amor, apoyo brindado desde mi concepción, por sus oraciones y confianza.

Mi hermana Nancy, mi cuñado Jorge y sobrina-ahijada Karol por su amor, oración, cariño y consejo.

Mi hermana Maricruz, a Jorge, mi sobrina Magaly, a Doña Gude a quienes quiero como parte de mi familia por su amor, oración, por abrirme las puertas de su casa y por todo su apoyo brindado.

La familia Aviña Romero por hacerme sentir parte de ellos, por todo su cariño, apoyo, oraciones y por cada momento compartido.

Todos mis amigos de Koinonía por su amistad entrañable y oración.

Quiero agradecer a:

Prof. Bernardino Castillo Toledo y al Prof. Eduardo Baryo Corrochano, por su guía, enseñanzas, conocimiento, correcciones y apoyo para realizar de esta tesis.

Dr. A. Loukianov, Dr. C. López, Dr. D. Zaldivar, Dr. L. Gonzalez y Dr. J. Ruiz por su valioso tiempo brindado y apoyo.

Luis Enrique, Oscar, Riemman, Marcos, Juan Diego, Marco, Santiago, Rosita, Graciela, Luque, Carlos, Laura, Carmen, Miguel, Pizano, Adrián, Machucho y a todos mis compañeros del CINVESTAV-GDL, por su todo su apoyo, risas y buenos momentos compartidos.

La Unidad CINVESTAV-GDL y a todos sus trabajadores, por su valiosa labor.

Lupita por su apoyo en todos los trámites realizados y por su amistad.

Don Peter y Don Robert por su saludo diario y trabajo.

CONACyT por el apoyo económico brindado, durante todo este tiempo.

Índice

Glosario de símbolos	XIII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Antecedentes	3
1.2.1. Modelado de bípedos .	5
1.2.2. Control de caminado de robots bípedos	6
1.3. Objetivos	8
1.4. Organización del documento .	8
2. Introducción a álgebra geométrica	11
2.1. Producto Clifford de vectores en \mathbb{R}^2	12
2.2. Producto exterior	13
2.3. Álgebra geométrica	14
2.3.1. Propiedades de los multivectores	16
2.4. Álgebra geométrica conformal	19
2.4.1. Proyección estereográfica	20
2.4.2. Espacio de Minkowski	22

2.4.3. Definición del álgebra geométrica conformal	22
2.4.4. Puntos	25
2.4.5. Par de Puntos	26
2.4.6. Esferas	26
2.4.7. Plano	28
2.4.8. Línea	28
2.4.9. Círculo	28
2.5. Transformaciones conformales	29
2.5.1. Inversiones	30
2.5.2. Reflexiones	31
2.5.3. Traslaciones	32
2.5.4. Rotaciones	33
2.5.5. Movimientos rígidos: transformaciones de giro .	33
2.6. Diferenciación geométrica	35
2.6.1. Diferenciación escalar	36
3. Cinemática y dinámica usando álgebra geométrica	39
3.1. Cinemática	39
3.1.1. Cinemática inversa	39
3.1.2. Cinemática directa	40
3.1.3. Cinemática diferencial	49
3.2. Dinámica	55
3.2.1. Energía cinética	55
3.2.2. Energía potencial	63
3.2.3. Ecuaciones de Lagrange	63

4. Modelado matemático de un robot bípedo	71
4.1. Modelo cinemático en 3D de un bípedo usando álgebra geométrica conformal	71
4.2. Modelo dinámico de un bípedo en 2D	74
4.3. Modelo dinámico de un bípedo en 3D usando álgebra geométrica conformal	76
5. Estrategias de control de caminado	79
5.1. Control de seguimiento del centro de masas en 3D con cinemática diferencial	79
5.1.1. Problema de seguimiento de posición	80
5.1.2. Problema de seguimiento de orientación	83
5.2. Control dinámico de caminado en 2D (plano sagital)	85
5.2.1. Control PD Exponencial (EF-PD)	85
5.2.2. Algoritmo de control PD difuso	91
5.3. Control dinámico de caminado en 3D	92
5.3.1. Señales bio-inspiradas	92
5.3.2. Diferenciador robusto exacto	92
5.3.3. Control por modos deslizantes de primer orden	94
5.3.4. Control de caminado por modos deslizantes de segundo orden	97
6. Resultados experimentales	103
6.1. Seguimiento de trayectoria en 3D del centro de masas con cinemática diferencial	103
6.2. Caminado en 2D de un robot bípedo. .	106
6.2.1. Experimentos en simulación añadiendo perturbaciones en la señal del control.	106
6.2.2. Experimentos añadiendo perturbaciones en los estados.	111
6.2.3. Experimentos añadiendo perturbaciones en la señal de control y en los estados.	112

6.3. Caminado en 3D para un robot bípedo con modos deslizantes de primer orden	113
6.4. Caminado en 3D para un robot bípedo con modos deslizantes de segundo orden	115
7. Conclusiones	119
7.1. Trabajo futuro	120
7.2. Publicaciones	120
A. Ecuaciones del modelo dinámico de un bípedo en 2D	123
B. Parámetros del robot bípedo humanoide Mexone	129

Glosario de símbolos

q	Posición angular
\tilde{q}	Error de posición angular
\dot{q}	Velocidad angular
\ddot{q}	Derivada del error de posición angular
\mathcal{E}	Suma de energía cinética y potencial
\mathcal{K}	Energía cinética
\mathcal{U}	Energía potencial
$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Lagrangiano
$M(\mathbf{q})$	Matriz de inercia
$\boldsymbol{\tau}$	Vector de pares aplicados
$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$	Matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	Vector de pares gravitacionales
\mathbf{q}	Vector de variables
(x_0, y_0)	Centro de masas del torso
(\dot{x}_0, \dot{y}_0)	Velocidad del centro de masas del torso
α	Posición angular del torso
$\dot{\alpha}$	Velocidad angular del torso
α_{ref}	Referencia para el torso
β_L	Posición angular del muslo izquierdo
$\dot{\beta}_L$	Velocidad angular del muslo izquierdo
β_R	Posición angular del muslo derecho
$\dot{\beta}_R$	Velocidad angular del muslo derecho

$\Delta\beta$	Diferencia de posición de los muslos ($\beta_L - \beta_R$)
$\Delta\beta_{ref}$	Referencia para la diferencia de posición de los muslos
γ_L	Posición angular de la rodilla izquierda
$\dot{\gamma}_L$	Velocidad angular de la rodilla izquierda
γ_{Lref}	Referencia para la rodilla izquierda
γ_R	Posición angular de la rodilla derecha
$\dot{\gamma}_R$	Velocidad angular de la rodilla derecha
γ_{Rref}	Referencia para la rodilla derecha
l_0	Longitud del torso
l_1	Longitud de los muslos
l_2	Longitud de las pantorrillas
m_0	Centro de masas del torso
m_1	Centro de masas del muslo
m_2	Centro de masas de la pantorrilla
r_0	Localización del centro de masas del torso
r_1	Localización del centro de masas del muslo
r_2	Localización del centro de masas del pantorrilla
$A(q)$	Matriz de inercia para modelo bípedo
$b(q, \dot{q}, M, F)$	Vector que contiene fricción, momentos, fuerzas de inercia y coriolis
y	Vector de entradas
y_{ref}	Vector de referencias
M	Vector de momentos
M_{L1}	Momento en el muslo izquierdo
M_{R1}	Momento en el muslo derecho
M_{L2}	Momento en la rodilla izquierda
M_{R2}	Momento en la rodilla derecha
F	Vector de fuerzas externas
F_{Lx}	Fuerza externa en el pie izquierdo respecto al eje x
F_{Ly}	Fuerza externa en el pie izquierdo respecto al eje y
F_{Rx}	Fuerza externa en el pie derecho respecto al eje x
F_{Ry}	Fuerza externa en el pie derecho respecto al eje y

CAPÍTULO 0. GLOSARIO DE SÍMBOLOS

\mathcal{F}	Vector de pares de fricción presentes en las articulaciones
u	Salida de control
K_u	Ganancia de la salida
K_p	Ganancia proporcional
K_d	Ganancia derivativa
e	Error
\dot{e}	Derivada del error
Δt	Periodo de muestreo
ϵ	Constante pequeña positiva
G	Máximo valor de salida
x	Punto conformal
\mathbf{x}	Punto euclidiano
e_i	Base e_i
I	Pseudo-escalar unitario conformal
E	Plano de Minkowski
P_P	Par de puntos en AGC
s	Esfera en AGC
z	Círculo en AGC
π	Plano en AGC
L	Línea en AGC
R_θ	Rotor con ángulo θ en AGC
A^*	Representación dual del multivector A
\tilde{A}	Reversión del multivector A
\hat{A}	Involución principal del multivector A



Capítulo 1

Introducción

En los últimos años la robótica ha tenido importantes avances en el desarrollo de materiales y dispositivos para la construcción de robots coadyuvando al desempeño de los sistemas de control; sin embargo, existen diversos problemas por resolver para lograr que los robots desempeñen tareas de forma más satisfactoria. Recientemente, el interés en el diseño, modelado y control de robots humanoides ha tomado mucho auge en la comunidad científica. En un futuro se pretende que los robots humanoides puedan desempeñar tareas humanas, en especial aquellas que sean de alto riesgo. Actualmente, muchos mecanismos y teorías aplicadas para los robots humanoides están siendo utilizadas para el desarrollo de prótesis para los seres humanos.

Para incorporar robots humanoides a la sociedad, es necesario que tengan habilidades y movimientos similares a los del ser humano; la correcta ejecución de dichos movimientos depende del diseño mecánico, modelado matemático y control diseñado para efectuar las actividades requeridas, siendo el caminado una de las tareas más complejas e importantes de los robots humanoides.

Diferentes herramientas matemáticas se han empleado para obtener modelos y controladores para sistemas robóticos. En el caso de robots bípedos puede ser complicado obtener su modelo cinemático y dinámico debido a que su estructura mecánica es bastante compleja.

Una forma de abordar el estudio de un robot humanoide es verlo como una estructura geométrica formada por puntos, líneas, planos y esferas. Una herramienta matemática que

permite relacionar y manejar dichas entidades geométricas es el *Algebra Geométrica Conformal (AGC)* [22, 23]. Esta herramienta matemática es de gran utilidad para resolver los problemas relacionados con el cálculo de la cinemática y dinámica de mecanismos robóticos.

Técnicas de control

Unos de los retos mas complejos es que el robot tenga movimientos similares a los de un ser humano, por tal motivo es necesario mejorar y desarrollar nuevas técnicas de control que ayuden a mejorar el desempeño de los robots humanoides al realizar distintas tareas. En el área de control del desplazamiento de humanoides existe mucho trabajo por hacer, ya que además de caminar; el robot humanoide debe ser capaz de correr, subir escaleras, caminar en terrenos accidentados e inclinados, agacharse, esquivar obstáculos, tan sólo por mencionar algunas aplicaciones en las que el control es de suma importancia. Los controladores que se desarrollan deben tener ciertas características, como el bajo costo computacional, rechazo a perturbaciones y poder ser implementados en tiempo real. Diversas técnicas de control se han desarrollado para dar solución a distintos problemas, entre ellas la linealización por retroalimentación de estados [1], PD, PI, PID [2, 33], control inteligente [12, 48, 51], control adaptable [4, 5], funciones de Lyapunov [37], pasividad [6, 7] y control de estructura variable [54].

Aprovechando las ventajas que ofrece el diseño de controladores por modos deslizantes, en esta tesis se diseñaron controladores de primer y segundo orden, estos últimos utilizados para reducir las altas frecuencias en la señal de control. También se utilizó un diferenciador robusto [56] diseñado con modos deslizantes para calcular la velocidad y aceleración de las señales bio-inspiradas. Estas señales son adquiridas a través de un estudio experimental de captura de fuerzas y movimientos del caminado de un ser humano.

1.1. Planteamiento del problema

Recientemente han surgido importantes investigaciones para robots humanoides, logrando en ellos un mejor desempeño al realizar las tareas asignadas. Estas mejoras se deben en gran medida a los modelos y controladores de estos dispositivos que aumentan sus habilidades para

interactuar con los seres humanos y con su medio.

El primer problema a tratar es, ¿cómo lograr el caminado sagital de un bípedo en 2D? Teniendo el conocimiento de referencias pre-establecidas que garantizan el caminado, se realiza el seguimiento de dichas trayectorias empleando un controlador difuso, el clásico control Proporcional Derivativo (PD) y una modificación de este último utilizando una función exponencial.

El segundo problema a resolver se plantea de la siguiente forma; dado el sistema robótico de un humanoide en 3D, ¿cuál será el marco matemático que permita modelar la cinemática del robot para obtener una ley de control para seguimiento de trayectorias de forma intuitiva y compacta? Partiendo del método de obtención de la cinemática de mecanismos robóticos empleando *AGC*, se pretende obtener el modelo para las piernas de un robot humanoide empleando esta misma álgebra, la cual es un sistema matemático diferente al álgebra de matrices para evitar la inversión de éstas y obtener un método con perspectiva geométrica; así también determinar una ley de control que permita seguir las trayectorias del centro de masas.

Por último se plantea el siguiente cuestionamiento; ¿cuál será el modelo dinámico bajo el esquema matemático de *AGC*? Aprovechando las ventajas del *AGC* se propone la solución del modelo dinámico para las piernas del robot humanoide llamado Mexone y se emplean técnicas de control por modos deslizantes para realizar el seguimiento de trayectorias bio-inspiradas para cada una de las articulaciones, las mismas que garantizan el caminado.

1.2. Antecedentes

En las últimas décadas ha crecido el interés en el estudio de robots bípedos. En distintos laboratorios se han diseñado y desarrollado robots humanoides como plataformas de investigación. El costo de los humanoides comerciales es muy elevado debido al tiempo de desarrollo, investigación, diseño y todo lo que involucra la construcción de un robot humanoide; por tal motivo, el construir un robot bípedo humanoide de bajo costo es atractivo para grupos de investigación que cuentan con un presupuesto limitado [10, 11]. Durante el desarrollo de esta tesis se planeó, diseñó y construyó junto con la firma Energid [39] el robot Mexone utilizando

motores Dynamixel [42]. En un inicio se le colocaron poleas para obtener un mayor torque en los eslabones como se muestra en la Figura 1.1, actualmente se están adaptando poleas con bandas dentadas. El robot tiene una altura de 1.05m. Cuenta con 36 grados de libertad distribuidos de la siguiente forma: 6 en cada pierna, 5 por brazo, 2 en la cadera, 4 en cada mano y 4 en la cabeza, dos de ellos son para el movimiento de los ojos.

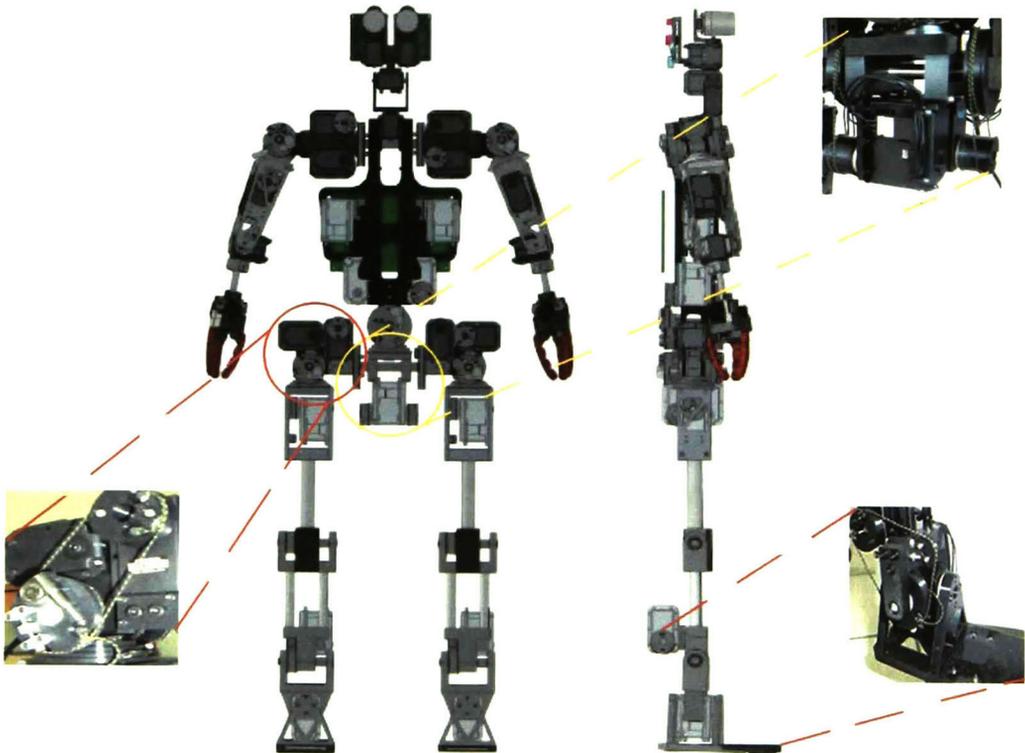


Figura 1.1: Robot Mexone (Laboratorio de control automático del CINVESTAV Unidad Guadalajara.)

A diferencia de otros robots (robots manipuladores, vehículos móviles, entre otros), un robot humanoide, no tiene un punto de apoyo fijo, éste cambia según la fase de caminado en la que se encuentre, cuando tiene un sólo pie en el suelo (soporte único) y cuando tiene los dos pies apoyados (soporte doble). También es necesario considerar la configuración y estructura del robot, el tamaño, actuadores, sensores y materiales livianos de construcción.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

De esta forma, el diseño mecánico del robot es una etapa importante para obtener buena dinámica en el caminado del robot. Parte fundamental del desarrollo de robots humanoides son las técnicas de modelado y control.

1.2.1. Modelado de bípedos

Existen dos tipos de balance de robots bípedos: uno es el *balance estático* que consiste en mantener al robot en equilibrio sin desplazarse conservando la proyección del centro de masas dentro del área del polígono de soporte formado entre los dos pies como se muestra en la Figura 1.2. El otro tipo de balance se presenta cuando una de las dos piernas se desplaza y la otra permanece en el suelo, provocando que la proyección el centro de masas salga del su área de soporte, provocando inestabilidad en breves periodos de tiempo, generando el caminado o *balance dinámico*.

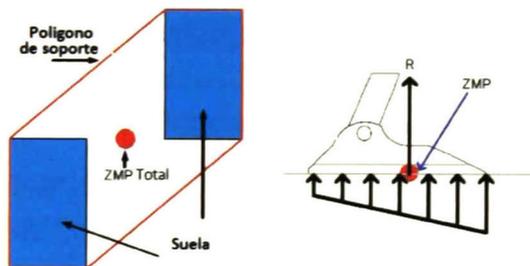


Figura 1.2: Polígono de soporte y representación del ZMP [19].

Muchos investigadores han desarrollado modelos matemáticos para diseñar controladores adecuados para el caminado de robots bípedos controlando el movimiento de las piernas y el balance del robot [15, 47]. La principal propuesta de estos modelos es el mantener el centro de gravedad ¹ en una región estable.

Otro modelo para el caminado de robots bípedos es mantener el punto de momento cero ² en la región estable. El concepto de ZMP se utiliza por vez primera en [19], el cual se define como el punto donde se logra el equilibrio, donde la suma de los momentos de inercia y fuerzas

¹Se utilizará la abreviación *COG*, (Center of Gravity) para referirse a centro de gravedad.

²Se utilizará la abreviación *ZMP*, (Zero Moment Point) para referirse a punto de momento cero.

externas es igual a cero.

En [15] se propone el modelo de un bípido donde el COG del robot tiene un movimiento horizontal en 2D. En [47] los autores utilizan el modelo lineal del péndulo invertido para lograr el caminado de un robot bípido en terrenos rugosos manteniendo el COG en una región estable. En [20] se presenta el diseño mecánico y el análisis cinemático de un robot humanoide. Los autores realizan el análisis de cinemática inversa empleando el método de Denavit-Hartenberg (D-H) y teoría de tornillos (*Screw Theory*). En [8] se presenta un método para resolver el modelado de cinemática inversa para la pierna de un robot humanoide utilizando álgebra geométrica conformal, con este mismo marco matemático en [9] se propone un método para obtención del modelo dinámico utilizando las ecuaciones de Lagrange obteniendo los resultados con bajo costo computacional.

Aprovechando las ventajas que el álgebra geométrica conformal ofrece en esta tesis se utilizará este marco matemático para el modelado cinemático y dinámico de un robot bípido.

1.2.2. Control de caminado de robots bípedos

El control de caminado de un robot bípido es una tarea muy compleja, debido a que cuenta con una dinámica altamente no lineal y varios grados de libertad (*g.d.l*).

En [18] se introduce un método de generación de patrones utilizando control previo del ZMP separando el problema de caminado de bípedos en dos: diseño de un generador de patrón de movimiento y un controlador de seguimiento de referencias. En esta publicación aparece por primera vez el término *tracking control methods*. En [19] se afirma que es posible planear una referencia sin tener en cuenta el entorno, teniendo un adecuado balance entre las fuerzas externa del sistema y el momento de inercia generado por el mismo. Los métodos para generar las referencias del caminado se basan en el seguimiento del ZMP, COG o incluso en señales bio-inspiradas.

En [17] se utiliza el modelo lineal del péndulo invertido para generar las trayectorias del COG sin conocer plenamente la dinámica del robot. Mientras que en [14] utilizando el ZMP y con el uso de algoritmos genéticos generan movimientos de caminado en varios ambientes para un robot bípido, buscando minimizar la energía total de todos los actuadores como lo hace el ser humano y con una programación evolutiva optimiza la configuración del bípido.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En [41] se presenta el diseño de un control de impedancias adaptable, aplicado para la locomoción de un robot bípedo, en donde la modulación de impedancia no depende sólo de la fase del caminado, sino también de las condiciones reales del caminado bio-inspirado y reacciones dinámicas variantes en el tiempo, logrando un caminado similar al de los seres humanos.

La HRSP (*Humanoid Robots Simulation Platform*) [40] es una plataforma de simulación que trabaja en MatLab/Simulink® basada en adquisición de datos del cuerpo humano a través de un estudio experimental de captura de fuerzas y movimientos. Estos datos se procesan fuera de línea para sintonizar un sistema de inferencia difuso para modulación de impedancia de la pierna de un robot bípedo humanoide [41].

En [35] se presenta un método de generación de trayectoria que conserva el torso a una altura constante para un caminado 3D en tiempo real.

Considerando que la trayectoria del centro de gravedad se puede expresar con una ecuación diferencial lineal al moverse horizontalmente, en [15] se desarrolló una ley de control para el inicio, continuidad y fin del proceso de caminado.

En [34] se presenta un análisis geométrico para identificar los movimientos y posiciones del COG de un humanoide que se balancea en soporte único. El resultado basado en la técnica de análisis geométrico es aplicado en el humanoide BIOLOID [43].

En [12] se utiliza el criterio de ZMP y control difuso incremental realiza el balance lateral de un robot bípedo.

En [36] se propone un algoritmo de control de caminado que asegura un caminado asintóticamente estable para un robot bípedo planar, sub-actuado con el método de control oscilante en lazo abierto, considerando únicamente el movimiento sagital. La rodilla se detiene con un tope mecánico sin afectar la posición de la articulación pasiva.

En los trabajos antes mencionados se desarrollan diversas técnicas y métodos para el caminado de robots humanoides, así como distintas propuestas para la búsqueda de trayectorias, técnicas de control y el uso de diferentes esquemas matemáticos como matrices rotacionales (D-H), teoría de tornillos y álgebra geométrica conformal. La consideración de estas herramientas permiten proponer un esquema de trabajo para cumplir los objetivos establecidos en esta tesis.

1.3. Objetivos

Los objetivos de estas tesis son los siguientes:

- Definir el modelo dinámico de un robot bípedo en 2D.
- Modelar la cinemática del robot bípedo Mexone utilizando álgebra geométrica conformal.
- Obtener el modelo dinámico para las piernas del robot humanoide Mexone utilizando álgebra geométrica conformal y las ecuaciones de Lagrange.

Diseñar un controlador PD exponencial y compararlo con otros controladores.

Controlar el seguimiento del centro de masas de un robot bípedo en 3D con cinemática diferencial.

Controlar el caminado de un robot bípedo utilizando señales bio-inspiradas, empleando técnicas de control por modos deslizantes de primer y segundo orden.

Realizar las simulaciones correspondientes.

1.4. Organización del documento

El presente trabajo de tesis tiene la siguiente estructura.

En el capítulo dos se introducen los conceptos del *álgebra geométrica*, definiendo sus entidades, propiedades y su representación en el espacio.

En el capítulo tres se describen los métodos de obtención de la cinemática y dinámica de un sistema robótico empleando álgebra geométrica conformal.

En el capítulo cuatro se define la estructura y modelo de un robot bípedo en 2D, así como la obtención de la cinemática directa, cinemática diferencial y dinámica en 3D de un robot bípedo con el uso de las ecuaciones de Lagrange y álgebra geométrica conformal.

En el capítulo quinto se implementan estrategias de control para el seguimiento de trayectorias del centro de masas con el uso de cinemática diferencial y álgebra geométrica conformal

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

para un robot bípedo modelado en 3D. Posteriormente se desarrolla el problema de control de caminado para un robot bípedo humanoide bajo el esquema de seguimiento de trayectorias predefinidas para cada articulación, realizando el caminado en 2D en el plano sagital, proponiendo una modificación al control clásico PD con una función exponencial (EF-PD)³. Utilizando el modelo dinámico obtenido con *AGC* para las piernas del robot humanoide, se realiza el seguimiento de trayectorias bio-inspiradas para cada articulación y con esto lograr un caminado en 3D utilizando técnicas de modos deslizantes de primer y segundo orden.

En el capítulo seis se muestran los resultados obtenidos en simulación de las técnicas expuestas.

Finalmente el capítulo siete presenta las conclusiones y el trabajo futuro.

³Exponential Function - PD.

1.4. ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

Capítulo 2

Introducción a álgebra geométrica

En el trabajo titulado *Lineale Ausdehnungslehre*, publicado por el matemático alemán Hermann Gunther Grassmann en 1844, se presenta una propuesta de cálculo geométrico como una forma original de describir operaciones geométricas. El autor presenta una extensión del álgebra Euclidiana, donde el *producto exterior* es el principal producto de esta teoría; con esta operación, el producto de vectores genera áreas, volúmenes y objetos de altas dimensiones.

El álgebra geométrica es conocida también como *álgebra de Clifford*, formulada por William K. Clifford, es un sistema matemático que cuenta con una serie de operaciones y propiedades, el cual extiende el sistema de números reales hacia el cálculo hipercomplejo. Luego de la década de los 60's David Hestenes plantea el álgebra geométrica como una herramienta que une los conceptos de álgebra, trigonometría y geometría para su uso en ingeniería y física [23].

Una de las principales características del álgebra de Clifford, es que permite representar entidades de orden mayor con una simbología compacta, además permite operarlas de forma lineal. Las líneas, planos o esferas son ejemplos de entidades de orden mayor y son representadas como únicos elementos del álgebra de Clifford. Para profundizar en los temas tratados en este capítulo se puede consultar [9, 22, 23, 25, 26, 30].

2.1. Producto Clifford de vectores en \mathbb{R}^2

El *producto Clifford* es una multiplicación de vectores que satisface los mismos axiomas de multiplicación de los números reales - *distributivo, asociativo y conmutativo* - además de preservar la norma de dichos vectores esto es: $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores. Debido a que la conmutatividad en dimensiones de $n \geq 3$ no puede ser mantenida, nos centraremos en la distribución y asociación[22, 23].

Considerando dos vectores ortonormales $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ en \mathbb{R}^2 se forma el vector $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$. La magnitud del vector \mathbf{r} es $|\mathbf{r}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Al multiplicar mediante el *producto Clifford* al vector \mathbf{r} por sí mismo se obtiene $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^2$, lo cual es el cuadrado de la magnitud del vector:

$$\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2. \quad (2.1)$$

Tomando \mathbf{r} expresado en las bases \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 y tomando la magnitud de \mathbf{r} se tiene:

$$(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (2.2)$$

Usando la regla distributiva y sin asumir conmutatividad se tiene:

$$\alpha^2\mathbf{e}_1^2 + \beta^2\mathbf{e}_2^2 + \alpha\beta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = \alpha^2 + \beta^2 \quad (2.3)$$

De lo anterior se observa que para vectores ortonormales se satisface:

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \end{matrix}} \quad \text{que corresponde con} \quad \boxed{\begin{matrix} |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1 \\ \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \end{matrix}} \quad (2.4)$$

con lo anterior se puede definir el producto de vectores (producto Clifford) al tener bases ortonormales.

Definición 2.1. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, dos vectores con una base ortonormal $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$. la multiplicación utilizando el producto Clifford de estos vectores $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$

y $\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2$ queda de la forma siguiente:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_{12}. \quad (2.5)$$

Ahora usando la propiedad asociativa para calcular el cuadrado de $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 = -1$. Como el cuadrado del producto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ es negativo, se sigue que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ no es escalar ni vector. El producto es una nueva clase de unidad llamado **bivector**, que representa un plano orientado (Figura 2.1) del cuadrado con los lados \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 . Por simplicidad se escribe $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

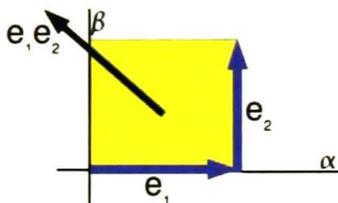


Figura 2.1: Bivector: el plano orientado.

2.2. Producto exterior

Tomando los elementos escalares (*producto escalar* o también conocido como **producto punto** o **producto interior**) y la parte bivectorial de 2.5, se obtiene del producto de los vectores $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2. \quad \text{El producto escalar 'a punto b',} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_{12}. \quad \text{El producto exterior 'a wedge b'.} \quad (2.7)$$

La parte bivectorial $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ puede ser vista como el segmento del plano orientado formado por los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} . El área del paralelogramo formado (Figura 2.2) viene dada por el valor del determinante $|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|$, este será tomado como la magnitud del bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Este paralelogramo puede ser visto como el resultado del producto geométrico de sus lados. La orientación del bivector dependerá del orden de la operación es decir $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ó $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$, la

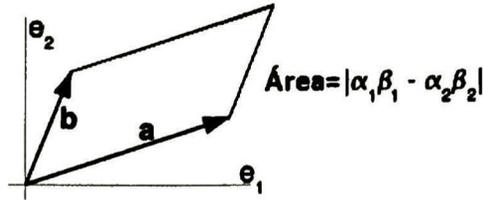


Figura 2.2: Área de un paralelogramo.

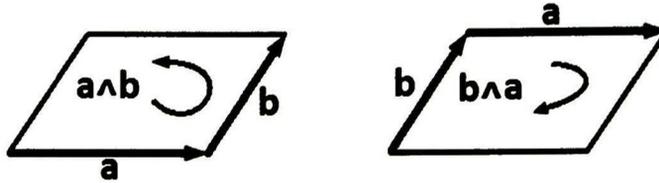


Figura 2.3: Sentido del bivector.

magnitud se conserva, el producto $a \wedge b$ se puede ver como un subespacio orientado (Figura 2.3). Lo anterior puede ser expresado como:

$$a \wedge b = -b \wedge a. \quad (2.8)$$

Se observa que el producto Clifford está formado por la suma de sus partes escalar ($\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$) y bivectorial ($\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$):

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_{12}. \quad (2.9)$$

2.3. Álgebra geométrica

El álgebra geométrica \mathcal{G}_n es un espacio vectorial n -dimensional que puede ser expandido usando las bases ortonormales de sus vectores $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$ de tal forma que $e_i e_j = e_{ij}$:

$$1, \{e_i\}, \{e_i \wedge e_j\}, \{e_i \wedge e_j \wedge e_k\}, \dots, I \equiv e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n. \quad (2.10)$$

Los componentes básicos de álgebra geométrica son los k -blades, donde k es un entero

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

positivo que determina el grado del *blade* dado. Cuando son distintos de cero, los *1-blades* representan una línea. Del mismo modo, cada *2-blade* representa un plano y cada *k-blade* representa un espacio *k-dimensional*. El producto geométrico relaciona *blades* de diferente grado y así describe las relaciones entre los espacios que representan. De hecho, todas las relaciones entre los espacios direccionales lineales pueden ser representados por este producto. Por ejemplo, si el producto de dos *1-blades* es conmutativo, entonces ambos vectores representan la misma línea, pero si el producto es anticonmutativo, los vectores representan líneas perpendiculares [23].

El álgebra geométrica $\mathcal{G}_{p,q,r}$ ($p, q, r \in \mathbb{N}$) es un espacio lineal de dimensión 2^n , $n = p + q + r$, con subespacios expandidos por *k-blades*, donde p , q y r corresponden al número de vectores de la base cuyo cuadrado es igual $+1$, -1 y 0 respectivamente, la notación $\mathcal{G}_{p,q,r}(\mathbb{R}^{p,q,r})$ determina el espacio vectorial del cual provienen los elementos del álgebra.

Teniendo e_i y e_j ($e_i, e_j \in \mathbb{R}^{p,q,r}$) dos vectores ortonormales de un espacio vectorial $\mathcal{G}_{p,q,r}$, se puede establecer lo anterior como:

$$e_i e_j := \begin{cases} 1 \in \mathbb{R} & \text{para } i = j \in \{1, \dots, p\}, \\ -1 \in \mathbb{R} & \text{para } i = j \in \{p+1, \dots, p+q\}, \\ 0 \in \mathbb{R} & \text{para } i = j \in \{p+q+1, \dots, n\}, \\ e_j = e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i & \text{para } i \neq j. \end{cases} \quad (2.11)$$

Partiendo de (2.6) y (2.7) el producto geométrico se puede expresar como:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b, \quad (2.12)$$

$$ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba). \quad (2.13)$$

Es posible escribir (2.13) gracias a la conmutatividad del producto punto $a \cdot b = b \cdot a$ y la anticonmutatividad del producto exterior $a \wedge b = -b \wedge a$, debido a esto se tiene la relación entre ab y ba como:

$$ba = a \cdot b - a \wedge b. \quad (2.14)$$

La parte antisimétrica del producto geométrico está definida por el producto exterior de un vector \mathbf{r} . Este resultado es llamado r -blade o *blade de grado r* . Un r -vector es obtenido con la combinación lineal de r -blades. Para r^2 se tiene que $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} \wedge \mathbf{r} = 0$, entonces $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2$

El espacio \mathcal{G}_n esta dado por la suma de subespacios $\binom{n}{r}$ -dimensionales de r -vectors; esto es:

$$\mathcal{G}_n = \sum_{i=0}^n \mathcal{G}_n^i. \quad (2.15)$$

Un elemento de \mathcal{G}_n es llamado *multivector*. Considerando (2.15), cada multivector M puede ser expandido como:

$$M = \sum_{i=0}^n \langle M \rangle_i, \quad (2.16)$$

donde $\langle M \rangle_i$ denota la parte i -vector.

2.3.1. Propiedades de los multivectores

Una característica muy útil del álgebra geométrica es su propiedad de poder realizar la división de multivectores lo cual facilita el cálculo. Formalmente, teniendo un elemento M de \mathcal{G}_n se dirá que es *invertible*, si existe otro elemento único, N de \mathcal{G}_n de tal forma que se cumpla $MN = NM = 1$. A éste elemento se le llama el *inverso* de M y se denota como M^{-1} , y en el caso de vectores se tiene que su inverso es:

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}. \quad (2.17)$$

Otra característica es que utilizando la asociatividad y multi-linealidad, el producto exterior puede ser aplicado a cualquier número finito de multivectores y a escalares de la siguiente forma

$$\lambda \wedge M = M \wedge \lambda = \lambda M, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{G}_n. \quad (2.18)$$

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

En el caso del producto interior, teniendo un r -blade $\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_r$ y un s -blade $\mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s$, se define

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_r) \cdot (\mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &= \begin{cases} ((\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_r) \cdot \mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{b}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) & \text{si } r \geq s, \\ (\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{r-1}) \cdot (\mathbf{a}_r \cdot (\mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s)) & \text{si } r < s, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

y

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_r) \cdot \mathbf{b}_1 \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} \mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{i-1} \wedge (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_1) \wedge \mathbf{a}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_r, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_r \cdot (\mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &= \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} \mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_{i-1} \wedge (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{b}_i) \wedge \mathbf{b}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s. \end{aligned} \quad (2.21)$$

El uso de (2.19) con (2.21) proporciona propiedades útiles, por ejemplo: el producto de un vector y un bivector resulta en un vector, lo cual puede ser generalizado al producto de un vector y un $\langle \mathbf{B} \rangle_s$ blade para $s \geq 1$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_s &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{b}_3 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_3 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_3)(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad - \dots \\ &= \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i) [\langle \mathbf{B} \rangle_s - \{\mathbf{b}_i\}], \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $[\langle \mathbf{B} \rangle_s - \{\mathbf{b}_i\}]$ denota el blade $\langle \mathbf{B} \rangle_s$ sin el vector \mathbf{b}_i . Así el producto interior de un vector con un s -blade da como resultado un $(s-1)$ -blade.

Otro resultado obtenido por esta regla viene dado al tener \mathbf{A} un 2-blade, ($r=2$), y $\langle \mathbf{B} \rangle_s$ blade con $s \geq 2$, el producto punto de estos viene dado por

$$\mathbf{A} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_s = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_s = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_s). \quad (2.23)$$

Al aumentar el valor de r de manera que se cumpla $r < s < n$, se tiene:

$$\mathbf{a}_1 \left(\mathbf{a}_2 \cdot \left(\dots \cdot (\mathbf{a}_r \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_s) \right) \right). \quad (2.24)$$

Al igual que el producto exterior, el producto interior puede ser extendido para cualquier par de multivectores, si se cumple:

$$\lambda \cdot M = M \quad \lambda = 0, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{G}_n. \quad (2.25)$$

En general, y de lo anterior, para cualquier blade A y B con grados r y s diferentes de cero, se tiene:

$$A \cdot B = \langle AB \rangle_{|r-s|}, \quad (2.26)$$

$$A \wedge B = \langle AB \rangle_{|r+s|}, \quad (2.27)$$

$$A \underline{\times} B = \langle AB \rangle_{|r+s+2|} = -B \cdot A = \frac{1}{2} (AB - BA). \quad (2.28)$$

Mediante el producto geométrico se pueden obtener blades de diferentes grados, el blade de más alto grado es el n -blade y llamado *pseudoscalar* y se obtiene como $I = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n$. Si el cuadrado del pseudo-escalar es diferente de cero, el álgebra geométrica que contiene a este se llama *no degenerada*. Los pseudo-escalares son nombrados de acuerdo al álgebra a la que pertenecen, por ejemplo $I_E \in \mathcal{G}_3$, $I_C \in \mathcal{G}_{4,1}$ (Para abreviar la notación $\mathcal{G}_{3,0,0} \simeq \mathcal{G}_3$ y $\mathcal{G}_{4,1,0} \simeq \mathcal{G}_{4,1}$).

Algo muy importante del álgebra geométrica es que un multivector tiene dos representaciones, debido a la existencia del *dual*. El *dual* de un multivector M en \mathcal{G}_n es obtenido por:

$$M^* = M I_n^{-1}, \quad (2.29)$$

donde I_n^{-1} difiere de I_n solamente por un signo, el cual varía según el álgebra. El *dual* de un r -blade es un $(n-r)$ -blade.

Una operación importante en el álgebra geométrica es la *reversión*. Teniendo un s -blade

$A = a_1 \wedge \cdots \wedge a_s$ se obtiene la reversión de esta entidad como:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{s-1} \wedge a_s)^\sim, \\ &= a_s \wedge a_{s-1} \wedge \cdots \wedge a_2 \wedge a_1.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Al generalizar para un multivector, la *reversión* es obtenida como:

$$\langle \tilde{M} \rangle_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \langle M \rangle_i, \text{ para } M \in \mathcal{G}_n, 0 \leq i \leq n.\tag{2.31}$$

La reversión también se puede aplicar al producto geométrico de varios multivectores, esto es $D = ABC$, donde $A, B, C, D \in \mathcal{G}_n$, de la siguiente manera:

$$\tilde{D} = \widetilde{ABC} = \tilde{C}\tilde{B}\tilde{A}.\tag{2.32}$$

La *involución principal* de \mathcal{G}_n , también llamada *involución de grado* es representada por $\hat{}$, y se define como:

$$\langle \hat{M} \rangle_i = (-1)^i \langle M \rangle_i, \text{ para } M \in \mathcal{G}_n, 0 \leq i \leq n.\tag{2.33}$$

Finalmente, se puede expresar la función exponencial de un multivector M como la expansión de la serie

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}.\tag{2.34}$$

Para adentrarse en más detalles y propiedades del álgebra geométrica puede consultar [22, 23], donde puede encontrarse una serie de propiedades de los elementos conformales que resultan útiles en la solución de una gran variedad de problemas.

2.4. Álgebra geométrica conformal

En muchos problemas de diferentes áreas es necesario trabajar con entidades geométricas. Por esta razón se requiere tener un álgebra que permita manejar estas entidades (puntos,

líneas, planos, esferas, círculos, etc.). La geometría conformal surge de las proyecciones estereográficas, por lo que es correcto introducir este concepto antes de establecer una definición formal del álgebra geométrica conformal.

2.4.1. Proyección estereográfica

La proyección estereográfica permite embeber el espacio Euclidiano E^n (\mathbb{R}^n), en un espacio conformal G^n (\mathbb{R}^{n+1}). La dimensión adicional de este espacio será llamado $e_+ \equiv e_{n+1}$. La proyección estereográfica 1D tiene una descripción geométrica que es ilustrada en la Figura 2.4.

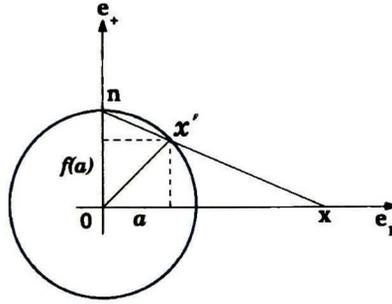


Figura 2.4: Proyección estereográfica para 1D.

Para explicar la proyección estereográfica se tomará el caso de 1D (G_1). Al tomar 1D se trabajará en (G_2), teniendo como base los vectores $\{e_1, e_+\}$, (Se llama e_+ ya que su cuadrado es igual a $+1$). Siguiendo la Figura 2.4, la proyección se realizará sobre un círculo de radio $\rho = 1$.

Entonces se define la proyección estereográfica, teniendo x un punto sobre el eje e_1 , representado en G_2 como:

$$x = xe_1 + 0e_+, \tag{2.35}$$

y con n , un punto sobre el eje e_+ , que esta sobre el polo norte del círculo unitario. Al tener la ecuación de la recta que une estos dos puntos como:

$$f(a) = -\frac{1}{x}a + 1, \tag{2.36}$$

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

y al formular la ecuación del círculo unitario como:

$$a^2 + f(a)^2 = 1, \quad (2.37)$$

se puede encontrar la solución a este sistema de ecuaciones para saber el punto de intersección entre estas dos funciones.

Realizando las operaciones necesarias (véase [22]) se tiene que el valor de a viene dado por:

$$a = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad (2.38)$$

al sustituir este valor en (2.36), se tiene que $f(a)$ es:

$$f(a) = -\frac{1}{x} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) + 1, \quad (2.39)$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad (2.40)$$

de estos dos resultados se obtiene el punto $\mathbf{x}' = ae_1 + f(a)e_+$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= ae_1 + be_+, \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1}e_1 + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Al agregar una tercera base $\{e_-\}$ (e_- debido a que su cuadrado es -1), se obtienen puntos representados en coordenadas homogéneas y nuestro espacio cambia de \mathcal{G}_2 a $\mathcal{G}_{2,1}$ y la ecuación (2.41) cambia a:

$$\mathbf{x}'' = \frac{2x}{x^2 + 1}e_1 + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+ + e_-, \quad (2.42)$$

al multiplicar por $\frac{x^2+1}{2}$ y factorizando x^2 se obtiene la representación homogénea del punto sobre el círculo como:

$$\mathbf{x}''' = xe_1 + \frac{1}{2}(x^2)(e_- + e_+) + \frac{1}{2}(e_- - e_+). \quad (2.43)$$

En la Figura 2.5 se observa el sentido geométrico de este punto conformal en este espacio.

2.4.2. Espacio de Minkowski

El plano de *Minkowski* $\mathbb{R}^{1,1}$ se define con una base ortonormal $\{e_+, e_-\}$ que cumplen las propiedades siguientes:

$$e_+^2 = 1, \quad e_-^2 = -1, \quad e_+ \cdot e_- = 0. \quad (2.44)$$

Con estas dos bases anteriores se puede formar una base nula (el cuadrado de sus vectores es igual a cero), esta base es *nula* $\{e_0, e_\infty\}$ y se define como:

$$e_0 = \frac{1}{2}(e_- - e_+) \quad \text{y} \quad e_\infty = e_- + e_+. \quad (2.45)$$

Estos vectores pueden interpretarse geoméricamente como el origen e_0 del sistema de coordenadas y el punto al infinito e_∞ . Esta base, tiene las siguientes propiedades:

$$e_0^2 = e_\infty^2 = 0, \quad e_\infty \cdot e_0 = -1. \quad (2.46)$$

El producto exterior de los dos vectores de la base nula, genera un pseudo-escalar unitario E para $\mathbb{R}^{1,1}$, de la forma siguiente:

$$E = e_0 \wedge e_\infty = e_+ \wedge e_- = e_+ e_-, \quad (2.47)$$

este elemento cumple con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} E^2 = 1, \quad \tilde{E} = -E, \quad E e_\infty = -e_\infty, \quad E e_0 = e_0, \\ e_+ E = e_-, \quad e_- E = e_+, \quad e_+ e_\infty = 1 + E, \\ e_- e_\infty = -(1 + E), \quad e_\infty \wedge e_- = E, \quad e_+ \cdot e_\infty = 1. \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.4.3. Definición del álgebra geométrica conformal

El álgebra geométrica de un espacio 3D Euclidiano \mathcal{G}_3 tiene una base en puntos, es decir trabaja con vectores que representan puntos en el espacio, el álgebra de motores $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$ trabaja con una base de líneas. Utilizando el plano de Minkowski para generar *vectores nulos*, se expande el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n a $\mathbb{R}^{n+1,1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{1,1}$. Esta expansión del espacio Eucli-

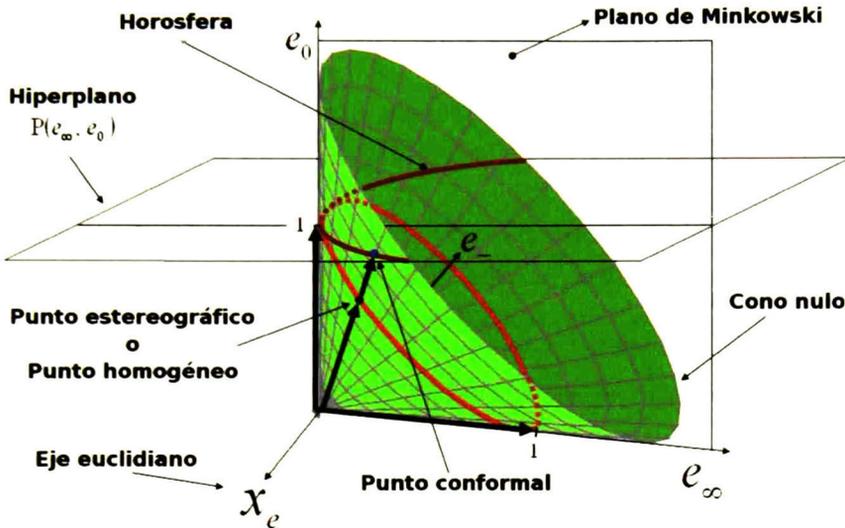


Figura 2.5: Visualización del modelo homogéneo para proyección estereográfica en el caso 1D [22].

diano resulta en el álgebra geométrica conformal $\mathcal{G}_{n+1,1}$. Se llama *cono nulo* al conjunto \mathbb{N}^{n+1} de todos los vectores nulos en \mathbb{R}^n , en la Figura 2.5 se muestra este modelo homogéneo para la proyección estereográfica para 1D (para mayor detalle consultar [22, 24, 27]).

Esta álgebra llamada *Álgebra Geométrica Conformal*, tiene la característica de tomar a la esfera como su unidad de cálculo, lo cual permite trabajar con otras primitivas geométricas (líneas, puntos, planos, círculos, etc.) En general un punto Euclidiano x (\mathbb{R}^n), puede ser representado en \mathbb{R}^{n+1} como:

$$x_c = x + \alpha e_0 + \beta e_\infty, \quad (2.49)$$

donde α y β son escalares. Note que los puntos conformales están representados con letras itálicas y los vectores Euclidianos con negrillas.

Este punto conformal puede ser dividido en dos partes mediante la operación llamada *conformal split* [23]: $\mathbb{R}^{n+1,1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{1,1}$. Esta separación es efectuada por los operadores

de proyección P_E y reyección P_E^\perp de la forma siguiente:

$$P_E(x_c) = (x_c \cdot E)E = \alpha e_0 + \beta e_\infty \in \mathbb{R}^{1,1}, \quad (2.50)$$

$$P_E^\perp(x_c) = (x_c \cdot E^*)\tilde{E}^* = (x_c \wedge E)E = x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.51)$$

El espacio vectorial conformal derivado de \mathbb{R}^3 es denotado como $\mathbb{R}^{4,1}$. Esta álgebra correspondiente $\mathcal{G}_{4,1}$ contiene una base vectorial dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_0, e_\infty\}$. Contiene $2^5 = 32$ elementos. El pseudo-escalar unitario esta dado por:

$$I_c = e_\infty 0123 = EI_E, \quad (2.52)$$

donde I_E es el pseudo-escalar unitario de \mathcal{G}_3 representado por $I_E = e_{123}$.

En las secciones siguiente se presentan las entidades o primitivas geométricas del álgebra geométrica conformal, las cuales se encuentran resumidas en la Tabla 2.1.

Entidad	Representación	Grado	Representación Dual	Grado
Esfera	$s = \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - \rho^2)e_\infty + e_0$	1	$s^* = a \wedge b \wedge c \wedge d$	4
Punto	$x = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	1	$x^* = (-E\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0)I_E$	4
Plano	$\pi = \mathbf{N}I_E - de_\infty$ $\mathbf{N} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ $d = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})I_E$	1	$\pi^* = e_\infty \wedge a \wedge b \wedge c$	4
Línea	$L = P_1 \wedge P_2$ $= \mathbf{r}I_E + e_\infty \mathbf{M}I_E$ $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ $\mathbf{M} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	2	$L^* = e_\infty \wedge a \wedge b$	3
Círculo	$z = s_1 \wedge s_1$ $s_z = (e_\infty \cdot z)z$ $\rho_z = \frac{z^2}{(e_\infty \wedge z)^2}$	2	$z^* = a \wedge b \wedge c$	3
Par de Puntos	$P_P = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$	3	$P_P^* = a \wedge b, X^* = e_\infty \wedge x$	2

Tabla 2.1: Representación de las entidades y sus duales en Conformal.

2.4.4. Puntos

Los *puntos* del álgebra geométrica conformal (AGC) se consideran elementos del cono nulo y tienen las siguientes propiedades:

$$\{x_c \in \mathcal{G}_{n+1,1} | x_c^2 = 0, x_c \cdot e_\infty = -1\}. \quad (2.53)$$

La ecuación 2.49 relaciona los puntos Euclidianos de \mathbb{R}^n con puntos conformales. Formalmente, el mapeo entre puntos Euclidianos y puntos conformales viene dado por [22, 24]:

$$x_c = x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0, \quad (2.54)$$

donde $x_c \in \mathcal{G}_{4,1}$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

El uso de los vectores e_0 y e_∞ es evidente. Al hacer $x = 0$ en (2.54) se obtiene $x_c = e_0$ que es el punto homogéneo correspondiente al origen en \mathbb{R}^n . Considerando:

$$\frac{x_c}{-x_c \cdot e_0} = e_\infty + 2 \left(\frac{x + e_0}{x^2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e_\infty, \quad (2.55)$$

al llevar x al infinito, se obtiene como resultado e_∞ . Con esto se puede decir que e_∞ representa el punto en el infinito.

Usando (2.54) se expande el producto geométrico de dos puntos a y b como:

$$ab = ab + (a - b)e_0 - \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) + (ba^2 - ab^2)e_\infty + (b^2 - a^2)E]. \quad (2.56)$$

La parte escalar de (2.56) es igual a:

$$a \cdot b = -\frac{1}{2}(a - b)^2 = ab - \frac{1}{2}(a^2 + b^2). \quad (2.57)$$

Esta ecuación indica que el cuadrado de la distancia Euclidiana entre dos puntos conformales [22, 24], viene dada por el producto interno de los mismos, esto es:

$$(a - b)^2 = -2a \cdot b = (a - b)^2. \quad (2.58)$$

2.4.5. Par de Puntos

El producto exterior de dos puntos, o la parte bivectorial de (2.56) hace explícita la entidad llamada *par de puntos* en su forma dual se define como [22, 24]:

$$\begin{aligned}
 P_P^* &= a \wedge b, \\
 &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}[(\mathbf{b}\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}\mathbf{b}^2) \wedge \mathbf{e}_\infty + (\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{E}].
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

El par de puntos también pueden ser obtenidos en su forma estándar por la intersección de 3 esferas, la intersección de una esfera y una línea o la intersección de un plano y un círculo. En la Figura 2.6 se observa la obtención del par de puntos por las tres formas mencionadas.

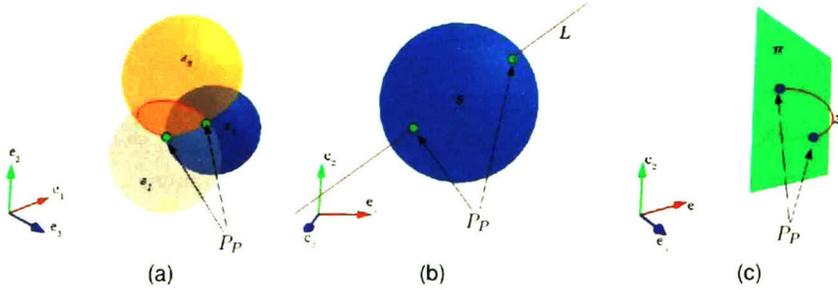


Figura 2.6: (a) Par de puntos P_P obtenidos por la intersección de las esferas s_1, s_2, s_3 . (b) P_P obtenidos por la intersección de la esfera s y la línea L . (c) P_P obtenidos por la intersección de el plano π y el círculo z .

2.4.6. Esferas

La ecuación de la *esfera* de radio ρ con centro en el punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ viene dada por:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 = \rho^2.
 \tag{2.60}$$

Usando (2.57), se puede expresar (2.60) como una ecuación equivalente en términos de puntos conformales:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 = -\frac{1}{2}\rho^2.
 \tag{2.61}$$

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Usando $x \cdot e_\infty = -1$ de (2.53), se puede simplificar (2.61) obteniendo

$$\begin{aligned}
 x \cdot p &= (x \cdot e_\infty) \frac{1}{2} \rho^2, \\
 x \cdot p - (x \cdot e_\infty) \frac{1}{2} \rho^2 &= 0, \\
 x \cdot (p - \frac{1}{2} \rho^2 e_\infty) &= 0, \\
 x \cdot s &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

donde

$$\begin{aligned}
 s &= p - \frac{1}{2} \rho^2 e_\infty, \\
 &= (p + \frac{1}{2} p^2 e_\infty + e_0) - \frac{1}{2} \rho^2 e_\infty, \\
 &= p + \frac{1}{2} (p^2 - \rho^2) e_\infty + e_0,
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

representa a la esfera en el *AGC* [22, 24]. La entidad s tiene las siguiente propiedades:

$$s^2 = \rho^2 > 0, \tag{2.64}$$

$$e_\infty \cdot s = -1, \tag{2.65}$$

estas propiedades permiten recuperar la forma de (2.63) y el centro p .

La representación dual de la esfera puede obtenerse de $s^\star = s I_c^{-1}$. Esta representación dual permite calcular la esfera como el producto exterior de cuatro puntos conformales sobre su superficie de la forma

$$s^\star = a \wedge b \wedge c \wedge d. \tag{2.66}$$

Para un punto conformal x que se encuentre sobre la superficie de la esfera se cumple:

$$x \wedge s^\star = 0. \tag{2.67}$$

2.4.7. Plano

Para definir el *plano* en *AGC* se puede imaginar que uno de los puntos de (2.66) se sustituye por el punto en el infinito, lo que resulta en una esfera con radio infinito, la cuál derivaría en un plano. El plano en esta álgebra es definido por

$$\begin{aligned}
 \pi^* &= e_\infty \wedge a \wedge b \wedge c, \\
 &= e_\infty \wedge a \wedge b \wedge c + E(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a}), \\
 &= e_\infty I_E d + NE,
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

donde se identifican aspectos importantes del plano; $dI_E = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ representa el momento del plano con una tangente representada por $\mathbf{N} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a})$ que es la representación de Hesse del plano con normal \mathbf{N} y distancia d [22, 24].

2.4.8. Línea

Haciendo una analogía al caso de los planos, las *líneas* se pueden definir como un círculo de radio infinito, es decir, uno de los puntos que lo definen en 2.73 es e_∞ . La forma dual de una línea viene dado por

$$\begin{aligned}
 L^* &= e_\infty \wedge a \wedge b, \\
 &= e_\infty \wedge a \wedge b + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge E, \\
 &= e_\infty \mathbf{M} + \mathbf{r}E,
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

donde $\mathbf{M} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es un bivector representando el momento (que es el plano donde yace la línea) y $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ representa la dirección de la línea [22, 24]. Notar que la línea definida en esta ecuación, pasa por los puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

2.4.9. Círculo

La representación estándar de un *círculo* puede ser obtenida mediante la intersección de un plano y una esfera, sin embargo la definición formal indica que un círculo es obtenido

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

mediante la intersección de dos esferas s_1 y s_2 esto indica que para cada punto del círculo, esto es $x \in z$, se cumple:

$$x \in z \iff x \in s_1 \text{ y } x \in s_2. \quad (2.70)$$

Si s_1 y s_2 son linealmente independientes, se puede desarrollar lo siguiente:

$$\begin{aligned} x \in z &\iff (x \cdot s_1)s_2 - (x \cdot s_2)s_1 = 0, \\ &\iff x \cdot (s_1 \wedge s_2) = 0, \\ &\iff x \cdot z = 0, \end{aligned} \quad (2.71)$$

donde $z = s_1 \wedge s_2$ es la intersección de las esferas. Estas ecuaciones confirman que, al igual que el caso de la esfera, si el punto conformal x pertenece al círculo z entonces se cumple:

$$x \cdot z = 0. \quad (2.72)$$

Para obtener un círculo en su forma dual, basta con hacer el producto exterior de tres puntos conformales que yacen sobre el, es decir

$$z^* = a \wedge b \wedge c, \quad (2.73)$$

donde $a, b, c \in z^*$ [22, 24].

2.5. Transformaciones conformales

Se llama transformación *conformal* de figuras geométricas, a aquella que preserva su forma; es decir, la transformación no afecta los ángulos de la figura y por ende preserva líneas rectas y círculos. Cualquier transformación conformal en \mathbb{R}^n puede ser expresada como una composición de *inversiones* en esferas y *reflexiones* en hiperplanos [22]. En general una transformación conformal se define como:

$$g(x) = Gx\widehat{G}^{-1} = \sigma x', \quad (2.74)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{n+1,1}$, G es un versor y σ es un escalar. El factor escalar es aplicado para preservar y asegurar la restricción $x' \cdot e_\infty = x \cdot e_\infty = -1$.

Para realizar transformaciones se necesita definir los *versores*. Un versor es un multivector cualquiera que puede ser expresado como el producto geométrico de vectores invertibles. Se pueden dividir en dos grupos.

Los *versores impares* son aquellos que $V = \widehat{V}$, es decir son iguales a su involución principal (2.33) y son llamados *spinor* (de giro) ó *rotor* si se cumple:

$$V\widetilde{V} = |V|^2, \quad (2.75)$$

y un *versor impar* es aquel que $V = -\widehat{V}$.

A continuación se definen algunos de los versores que serán utilizados en la solución de la problemática planteada.

2.5.1. Inversiones

Partiendo de la forma general de una reflexión sobre un vector $s = -\widehat{s}$ [23] definida como:

$$s(x) = -sxs^{-1} = x - 2(s \cdot x)s^{-1} = \sigma x', \quad (2.76)$$

donde $sx + xs = 2(s \cdot x)$.

Ahora esta operación se realizará tomando a s como una esfera con radio ρ y centro en \mathbf{p} (2.63). Si s es una esfera unitaria centrada en el origen ($\rho = 1$ y $\mathbf{p} = 0$), entonces s y s^{-1} se reducen a $e_0 - \frac{1}{2}e_\infty$. Al sustituir $-2(s \cdot x) = x^2 - 1$ en (2.76) se obtiene:

$$\sigma x' = (x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0) + (x^2 - 1)(e_0 - \frac{1}{2}e_\infty) = x^2(x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}e_\infty + e_0), \quad (2.77)$$

el cual define el mapeo conformal de x^{-1} , tomando como $\sigma = x^2$

Ahora tomando una esfera arbitraria se puede invertir un punto, tomando (2.63) se tiene:

$$s \cdot x = p \cdot x - \frac{1}{2}\rho^2e_\infty \cdot x = -\frac{1}{2}[(x - \mathbf{p})^2 - \rho^2], \quad (2.78)$$

al sustituir en (2.76) y realizando un par de operaciones algebraicas se tiene:

$$\sigma x' = \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\rho} \right)^2 [g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}g^2(\mathbf{x})\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0], \quad (2.79)$$

donde

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\rho^2}{\mathbf{x} - \mathbf{p}} + \mathbf{p} = \frac{\rho^2(\mathbf{x} - \mathbf{p})}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} + \mathbf{p}, \quad (2.80)$$

define una inversión en \mathbb{R}^n .

2.5.2. Reflexiones

Algunas transformaciones de entidades geométricas conformales pueden ser realizadas mediante la *reflexión*. La reflexión de un punto x con respecto a un plano π se define como x menos dos veces la distancia directa entre el plano y el punto, esto es $x' = x - 2(x \cdot \pi)\pi^{-1}$. Para extender este concepto se toma un hiperplano con normal unitaria \mathbf{n} y una distancia d (con signo) del origen (ver Figura 2.7) en \mathbb{R}^n representado por:

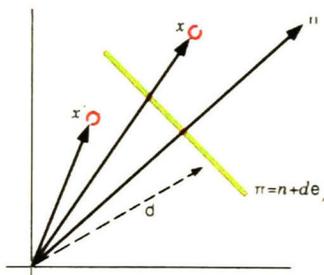


Figura 2.7: Reflexión de un punto x con respecto al plano π .

$$\pi = s = \mathbf{n} + d\mathbf{e}_\infty. \quad (2.81)$$

Considerando que $s \cdot x = \mathbf{n} \cdot x$ en (2.76), se encuentra que:

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{n}x\hat{\mathbf{n}} + 2d\mathbf{n} = \mathbf{n}(x - d\mathbf{n})\hat{\mathbf{n}} + d\mathbf{n}. \quad (2.82)$$

La expresión (2.82) equivale a la reflexión $\mathbf{n}x\hat{\mathbf{n}}$ en el origen trasladada por d a lo largo de la dirección de \mathbf{n} [22, 24]. Para observar esto último, se retomará el caso del punto x con respecto a π , y recordando que el producto Clifford de vectores es $2(b \cdot a) = ab + ba$, la reflexión puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} x' &= x - (\pi x - x\pi)\pi^{-1}, \\ x' &= x - \pi x\pi^{-1} - x\pi\pi^{-1}, \\ x' &= -\pi x\pi^{-1} \end{aligned} \tag{2.83}$$

2.5.3. Traslaciones

Una traslación puede ser modelada como dos reflexiones sobre dos hiperplanos paralelos (ver Figura 2.8) [22, 24]. Si los planos están normalizados y uno de ellos pasa por el origen (el valor de la distancia $d = 0$). Entonces de (2.81) el operador llamado *traslador* se obtiene por:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \pi_1\pi_2 = (\mathbf{n} + de_\infty)(\mathbf{n} + 0e_\infty), \\ &= e^{(\frac{t}{2}e_\infty)} = 1 + \frac{1}{2}e_\infty t, \end{aligned} \tag{2.84}$$

donde $t = 2d\mathbf{n}$ y $\|\mathbf{n}\| = 1$.

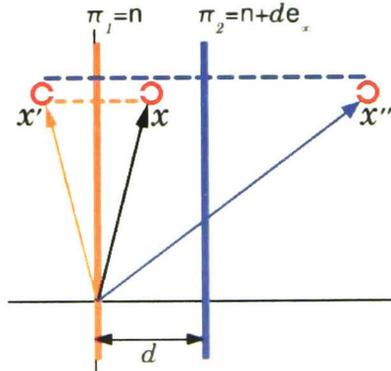


Figura 2.8: La traslación vista como la reflexión con respecto a dos planos paralelos.

2.5.4. Rotaciones

Se puede definir una rotación como el producto de dos reflexiones con respecto a dos planos no paralelos (ver Figura 2.9) [22, 24]. Entonces para rotar una entidad conformal Q con respecto a los planos π_1 y π_2 se tiene:

$$Q' = \underbrace{(\pi_1 \pi_2)}_{R_\theta} Q \underbrace{(\pi_1^{-1} \pi_2^{-1})}_{\widetilde{R}_\theta}, \quad (2.85)$$

donde R_θ se obtiene calculando el producto geométrico de las normales de los planos, esto es:

$$R_\theta = n_1 n_2 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)l = e^{(-\frac{\theta}{2}l)}, \quad (2.86)$$

donde un vector unitario $l = n_1 \wedge n_2 / |n_1 \wedge n_2|$ es el eje de rotación y θ es ángulo de rotación igual a dos veces el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

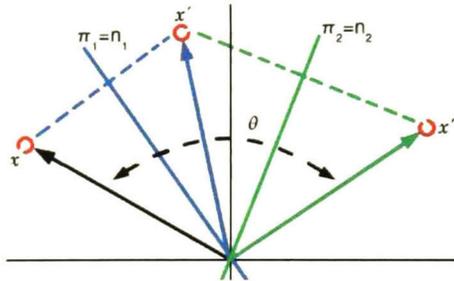


Figura 2.9: La rotación mediante la reflexión sobre dos planos que se intersecan y cruzan por el origen.

2.5.5. Movimientos rígidos: transformaciones de giro

En general un movimiento rígido puede ser representado por un giro o tornillo o también llamada *rotación general*. Este movimiento es obtenido por una rotación sobre una línea en el espacio (en general, que no pase por el origen) y una traslación simultánea a lo largo de esta misma línea.

La idea de la rotación general, parte de rotar una entidad Q alrededor de una línea L

Tipo	$g(\mathbf{x})$ en \mathbb{R}^n	Versor en $\mathcal{G}_{n+1,1}$	$\sigma(x)$
Inversión	$\frac{\rho^2}{\mathbf{x}-\mathbf{p}} + \mathbf{p}$	$s = \mathbf{p} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty$	$\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\rho}\right)^2$
Reflexión	$-\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n} + 2\mathbf{x}d$	$P = \mathbf{n} + d\mathbf{e}_\infty$	1
Traslación	$\mathbf{x} - \mathbf{t}$	$\mathbf{T} = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty$	1
Rotación	$R_\theta x \widetilde{R}_\theta$	$R_\theta = e^{(-\frac{\theta}{2}l)}$	1

Tabla 2.2: Transformaciones conformales y sus versores representados.

arbitraria en el espacio, entonces se puede trasladar la entidad Q la distancia existente entre la línea L y el origen, una vez en el origen se realiza la rotación y finalmente se traslada de regreso la entidad transformada. Entonces se puede definir el motor $M \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ [22, 24] como una rotación general con la forma:

$$M = TR\widetilde{T} = R_L, \quad (2.87)$$

esta ecuación puede interpretarse como una rotación sobre la línea L . Al igual que las rotaciones y traslaciones, la rotación general $M = \mathbf{R}_L$ puede ser aplicada a una entidad Q como:

$$Q' = R_L Q \widetilde{R}_L = TR\widetilde{T} Q T \widetilde{R}_L, \quad (2.88)$$

donde $\mathbf{TR}\widetilde{T} = \widetilde{\mathbf{R}}_L$.

Utilizando la propiedad $\mathbf{g}e^{(\xi)}\widetilde{\mathbf{g}} = e^{(\mathbf{g}\xi\widetilde{\mathbf{g}})}$ para $\mathbf{g}\widetilde{\mathbf{g}} = 1$ y la forma exponencial del trasladador y el rotor, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_L &= \mathbf{TR}\widetilde{T}, \\ &= e^{(\frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{t}}{2})} e^{(-\frac{\theta}{2}l)} e^{(-\frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{t}}{2})}, \\ &= \left(1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{t}}{2}\right) e^{(-\frac{\theta}{2}l)} \left(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{t}}{2}\right) \\ &= e^{((1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{t}}{2})(-\frac{\theta}{2}l)(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{t}}{2}))}, \\ &= e^{(-\frac{\theta}{2}(l + \mathbf{e}_\infty(\mathbf{t}l))}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Esta fórmula está dada en [22]. La representación exponencial de los motores, rotores y trasladadores es útil en el manejo de ellos y al momento de calcular las derivadas de los mismos.

En la forma exponencial de R_L se obtienen directamente los componentes de la línea con respecto a la cual se rotará la entidad en cuestión. Entonces el eje de rotación de R_L es expresado en su forma estándar como:

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{e}_\infty(\mathbf{t} \wedge \mathbf{r})\mathbf{I}_E + \mathbf{r}\mathbf{I}_E, \\ &= \mathbf{e}_\infty(\mathbf{t} \cdot l) + l. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Entonces la forma estándar de una línea L de magnitud unitaria, puede ser utilizada para girar cualquier entidad alrededor de ésta línea como eje de rotación. Esto se puede expresar como:

$$\mathbf{R}_L = e^{(-\frac{\theta}{2}L)}. \tag{2.91}$$

2.6. Diferenciación geométrica

Se puede definir la *diferenciación* como el proceso para determinar la rapidez de cambio de una función. Al formular con álgebra geométrica, es posible diferenciar no sólo con respecto a escalares (como en el cálculo real) o a vectores (como en el cálculo vectorial) si no también con respecto a multivectores generales o k -blades [22].

Debido a los diferentes tipos de elementos geométricos construidos, estos también cambiarán en maneras diferentes en un contexto geométrico.

Los cambios realizados por *transformaciones ortogonales*, ocurren cuando una entidad sufre un cambio debido a una transformación como lo son las rotaciones o las traslaciones. De estas transformaciones las rotaciones son de especial interés debido a que producen cambios continuos y suaves que son típicos de los movimientos. Al usar la forma exponencial de los rotores, la diferenciación de éstos se reduce a calcular los productos conmutadores (ver [22]) con los bivectores de la transformación.

En general un elemento geométrico está *parametrizado* en términos de otros elementos. Por ejemplo una dependencia en la localización de un elemento, que puede ser definida como

una parametrización por el vector de posición x , o una dependencia en el tiempo debido a un parámetro escalar de tiempo τ . También existen dependencias debido a relaciones geométricas, por ejemplo si un elemento Q es reflejado con respecto a un plano π , $\pi Q \pi^{-1}$, entonces si el elemento sufre un cambio (si el plano sufre una rotación) el elemento parametrizado cambiará también.

Es de especial interés la diferenciación escalar, por lo que se enfocará esta sección a ella, para mas detalles de diferenciación geométrica puede consultar [22, 28].

2.6.1. Diferenciación escalar

La *diferenciación escalar* de un función multivectorial-valuada $F(\tau)$ con respecto al parámetro τ se realiza mediante la definición usual de derivada, esto es:

$$\frac{d}{d\tau} F(\tau) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\tau + \epsilon) - F(\tau)}{\epsilon}. \quad (2.92)$$

Como se observa en álgebra geométrica no se incorpora esta conocida definición de diferenciación. Entonces, las reglas de diferenciación de productos, pueden ser usadas libremente al producto de funciones multivectoriales-valuadas, esto es, la regla del producto de funciones se conserva es decir

$$\frac{d}{d\tau} [F(\tau) G(\tau)] = \frac{d}{d\tau} [F(\tau)] G(\tau) + F(\tau) \frac{d}{d\tau} [G(\tau)]. \quad (2.93)$$

Para ver el uso de (2.93), se toma un vector x parametrizado con respecto al tiempo τ , es decir $x(\tau)$. Ahora para diferenciar x^2 (el producto geométrico de x consigo mismo) se realiza

$$\begin{aligned} \partial_\tau x(\tau)^2 &= \partial_\tau [x(\tau) x(\tau)], \\ &= \partial_\tau [x(\tau)] x(\tau) + x(\tau) \partial_\tau [x(\tau)] \quad (\text{regla del producto}), \\ &= 2\partial_\tau [x(\tau)] \cdot x(\tau) \quad (\text{definición del producto interno}), \\ &= 2\dot{x}(\tau) \cdot x(\tau) \quad (\text{punto por derivada en el tiempo}). \end{aligned}$$

Para finalizar esta sección, se aplicará la diferenciación escalar a la ecuación de un rotor

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

dependiente del tiempo. Sea un rotor definido por $R = e^{-\frac{B\theta}{2}}$ donde el bivector y el ángulo pueden ser variantes ambas funciones dependiente del tiempo. Con este rotor se puede generar una entidad Q variante en el tiempo de la forma $Q'(\tau) = R(\tau)Q\tilde{R}(\tau)$. Al diferenciar con respecto al tiempo, y usando la forma exponencial del rotor, se obtiene:

$$\begin{aligned}\partial_\tau Q'(\tau) &= \partial_\tau [e^{-\frac{B\theta}{2}} Q e^{\frac{B\theta}{2}}], \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\tau [B\theta] (e^{-\frac{B\theta}{2}} Q e^{\frac{B\theta}{2}}) + \frac{1}{2} (e^{-\frac{B\theta}{2}} Q e^{\frac{B\theta}{2}}) \partial_\tau [B\theta], \\ &= \frac{1}{2} (Q' \partial_\tau [B\theta] - \partial_\tau [B\theta] Q'), \\ &= \frac{1}{2} Q' \underline{\times} \partial_\tau [B\theta],\end{aligned}\tag{2.94}$$

donde $\underline{\times}$ es el operador conmutador (2.28).

Esta ecuación será muy importante al momento de calcular el *Jacobiano* de un robot mediante la diferenciación de la cadena cinemática del mismo.

Capítulo 3

Cinemática y dinámica usando álgebra geométrica

Este capítulo presenta la teoría necesaria para el modelado cinemático y dinámico de sistemas mecánicos basado en los resultados previos de E. Bayro y J. Zamora [22, 30], resaltando las diferencias entre el álgebra de matrices y el álgebra geométrica conformal.

3.1. Cinemática

La cinemática es el estudio del movimiento sin tomar en cuenta la fuerza o fuerzas que lo producen. La cinemática incluye el estudio de posición y velocidad, describe la relación entre la posición de las articulaciones con la posición y orientación del extremo final del robot.

3.1.1. Cinemática inversa

La *cinemática inversa* determina la configuración que debe tener cada articulación del robot para una posición y orientación conocida del extremo final. A nivel de coordenadas, el problema cinemático inverso es la conversión de coordenadas cartesianas a coordenadas articulares.

3.1.2. Cinemática directa

La *cinemática directa* se define como el cálculo de la posición y orientación del extremo final de un robot en función de la posición de sus articulaciones y de los parámetros geométricos de los elementos del robot. Esto se realiza en álgebra geométrica mediante el producto de rotaciones generales. Otra forma de realizarlo es con álgebra de matrices homogéneas obteniendo el mismo resultado; por lo tanto es conveniente realizar una comparación entre estos dos métodos para acentuar las ventajas de cálculo que ofrece el álgebra geométrica respecto al álgebra de matrices.

Con el uso de matrices homogéneas [46] se pueden representar las rotaciones en los ejes x , y y z de la siguiente forma:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Al representar rotaciones sobre un eje arbitrario que no cruza por el origen, las matrices se complican. Por ejemplo, la rotación respecto al vector $\mathbf{t} = [t_x, t_y, t_z]^T$ está dada por:

$$R(\theta, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} t_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & t_x t_y(1 - c_\theta) - t_z s_\theta & t_x t_z(1 - c_\theta) + t_y s_\theta \\ t_x t_y(1 - c_\theta) + t_z s_\theta & t_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & t_y t_z(1 - c_\theta) - t_x s_\theta \\ t_x t_z(1 - c_\theta) - t_y s_\theta & t_y t_z(1 - c_\theta) + t_x s_\theta & t_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Esta matriz representa la rotación respecto a un sólo eje, es decir, el giro en una unión, al aumentar el número de *g.d.l.*, la complejidad de las matrices aumenta y por ende aumenta la demanda computacional requerida para resolver la cinemática directa.

En el caso del álgebra geométrica conformal, estas rotaciones son realizadas con un término exponencial cuyos argumentos son: un bivector representando el plano normal al eje de rotación y el valor del ángulo de rotación. De esta forma, las tres rotaciones básicas viene dadas por:

$$R_x = e^{(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_{23}\theta_x)}, \quad (3.5)$$

$$R_y = e^{(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_{31}\theta_y)}, \quad (3.6)$$

$$R_z = e^{(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_{12}\theta_z)}, \quad (3.7)$$

donde \mathbf{e}_{23} , \mathbf{e}_{31} , \mathbf{e}_{12} representan el dual de las normales de los planos de rotación yz , zx , xy respectivamente.

Para tener una metodología estándar al realizar el análisis cinemático, se tienen en cuenta las mismas consideraciones tanto para el algebra de matrices como para el algebra geométrica conformal. Dichas consideraciones son:

- Un manipulador con n uniones tendrá $n+1$ eslabones.
- Las uniones se etiquetan de $1, \dots, n$ y los eslabones de $0, \dots, n$.
- La **unión** i conecta el eslabón $i-1$ con el eslabón i .
- Se considera la **unión** i fija eslabón $i-1$. Es decir si la **unión** i cambia, el eslabón i se mueve.

- A cada unión se le asigna una variable, la cuál será un ángulo si la unión es revolutiva o una traslación si la unión es prismática¹ (ver [46]).

El robot humanoide a modelar cuenta únicamente con uniones revolutivas, por lo tanto se etiquetan como θ_i .

Una vez hechas estas consideraciones, el análisis inicia asignando un sistema de coordenadas a cada eslabón, de tal manera que el sistema de coordenadas i sea asignado al eslabón i . Al hacer esto, el sistema de coordenadas i se mueve al ser accionada la unión i .

Dado lo anterior, considere que existe una transformación homogénea A_i que expresa la posición y orientación del sistema de coordenadas i con respecto al sistema $i-1$ ² y esta matriz varía conforme a las variables de unión. Al depender sólo de una variable de unión, esta matriz se define como:

$$A_i = A_i(\theta_i). \quad (3.8)$$

Se denomina **matriz de transformación** a la transformación homogénea que relaciona el sistema de coordenadas i con el sistema j .

Al representar la posición y orientación del sistema i con respecto al sistema $i-1$, se tiene que la matriz A_3 relaciona las posiciones y orientaciones del sistema tres con respecto al sistema dos; las matriz A_2 relaciona el sistema dos con respecto al sistema uno y así sucesivamente.

Si se desean expresar las posiciones del sistema tres con respecto al sistema uno, primero se expresa con respecto al sistema dos y después respecto al sistema uno. Entonces la transformación es obtenida mediante la multiplicación de cada una de las matrices y obteniendo así una matriz A_3^1 que relaciona las coordenadas del sistema 3 con respecto al sistema uno, es decir:

$$\begin{aligned} A_3^1 &= A_2^1 A_3^2, \\ &= A_2 A_3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹ θ_i si la unión es revolutiva, d_i si la unión es prismática.

²Se utilizará la notación A_i para abreviar la notación A_i^{i-1}

CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA Y DINÁMICA USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Entonces al tener en el robot n grados de libertad, se tendrán n matrices de transformación que relacionen los sistemas n con el sistema $n-1$, $n-1$ con $n-2$, etc., hasta el sistema uno con el sistema cero que se tomaran como coordenadas del mundo o *sistema inercial* [46].

Siguiendo el método de (3.9) para representar posiciones y orientaciones del sistema de coordenadas n con respecto al sistema inercial, se requiere la transformación T_n^0 expresada por:

$$\begin{aligned} T_n^0 &= A_1^0(\theta_1) A_2^1(\theta_2) \cdots A_n^{n-1}(\theta_n), \\ &= A_1(\theta_1) A_2(\theta_2) \cdots A_n(\theta_n). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por tanto, teniendo los valores de las n uniones, mediante la matriz T_n^0 se puede obtener la posición y orientación del sistema de coordenadas final con respecto al sistema inercial. Por conveniencia y siguiendo el procedimiento de obtención de parámetros *Denavit-Hartenberg* [46], el sistema de coordenadas n se fija en el extremo del último eslabón, es decir el efector final, y por tanto, al depender de las variables de unión, la matriz T_n^0 define la cinemática directa del robot.

Ahora, con el álgebra geométrica conformal la cadena cinemática para un robot manipulador serial, se obtiene por la aplicación sucesiva de motores. De acuerdo con la ecuación (2.87), se pueden modelar giros con respecto a una línea L . La sucesión de motores es válida para puntos, líneas, planos, esferas y círculos. Al representar la posición inicial del efector final como x_p y el motor correspondiente a la variable de unión i como $M(\theta_i) = M_i$, para un manipulador con n grados de libertad la posición del efector final es:

$$x'_p = M_1 M_2 M_3 \cdots M_n(x_p) \widetilde{M}_n \widetilde{M}_{n-1} \cdots \widetilde{M}_1, \quad (3.11)$$

o en forma compacta como:

$$x'_p = \left(\prod_{i=1}^n M_i \right) (x_p) \left(\prod_{i=1}^n \widetilde{M}_{n-i+1} \right) \quad (3.12)$$

Para realizar una comparación entre el álgebra de matrices y el álgebra geométrica conformal, se presentarán los cálculos realizados para un brazo industrial de 6 *g.d.l.*. [32]

Cinemática directa del manipulador AdeptSix 600[®]

Con el fin de resaltar las ventajas del álgebra conformal, a continuación se muestra la obtención de la cinemática de un robot manipulador con el método Denavit-Hartenberg y con álgebra geométrica.

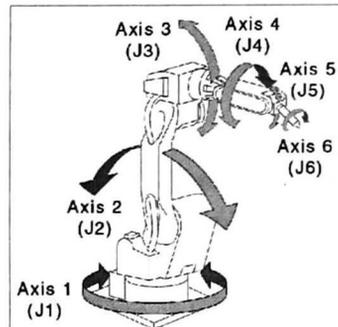


Figura 3.1: Ejes de rotación del brazo manipulador.

El brazo manipulador industrial AdeptSix 600 cuenta con seis grados de libertad, los cuales se muestran en la Figura 3.1, las características técnicas, rangos de operación y medidas pueden ser consultados en [29].

Primero se calculan las matrices de transformación de los sistemas de coordenadas fijados a cada unión revolutiva del brazo manipulador, estas matrices son encontradas siguiendo el método de Denavit-Hartenberg³. Este método requiere de varios parámetros geométricos del robot para poder generar las matrices de transformación. La Figura 3.2 muestra los valores que se requiere para encontrar estas matrices.

En la Figura 3.3 se muestran puntos nombrados como x_i para $i = 0, \dots, 5$, estos puntos son los orígenes de cada sistema de coordenadas y el punto x_5 serán el punto del efector final.

³El desarrollo del método esta fuera de los objetivos de este trabajo, por esto sólo se mostrarán los resultados obtenidos.

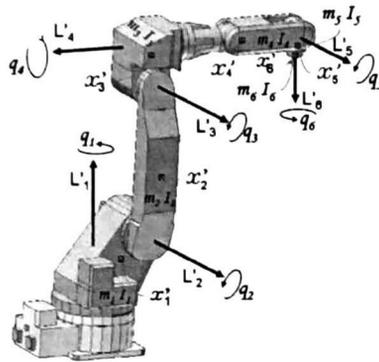


Figura 3.2: Características geométricas del brazo AdeptSix 600®.

Siguiendo los pasos establecidos en el método de Denavit-Hartenberg⁴ se asignan los sistemas de coordenadas y una vez hecho esto se obtiene la Tabla 3.1 de parámetros que permite calcular las matrices de transformación, donde θ_i^* denota que este parámetro es variable.

Eslabón	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	$-a_1$	$\frac{\pi}{2}$	d_1	θ_1^*
2	a_2	π	0	θ_2^*
3	a_3	$\frac{\pi}{2}$	0	θ_3^*
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_4	θ_4^*
5	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_5^*
6	0	0	d_6	θ_6^*

Tabla 3.1: Parámetros Denavit-Hartenberg AdeptSix 600®

Cada fila de parámetros define una matriz de transformación, es decir, los parámetros del eslabón uno generan la matriz A_1 y así sucesivamente. Mediante el método $D-H$ la matriz de transformación se obtiene por el producto de cuatro transformaciones básicas (consultar [46]). El producto de estas cuatro transformaciones resulta en la matriz A_i definida por:

⁴Se usará la abreviación $D-H$ para referirse a Denavit-Hartenberg.

$$A_i = \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Tomando cada uno de los parámetros de la Tabla 3.1 y sustituyendo para cada eslabón i en (3.13) se obtienen las seis transformaciones que relacionan el sistema del efector final con el sistema inercial dependiendo de los valores de los ángulos θ_i , $i = 1 \dots 6$ es decir la cinemática directa, queda expresada por la transformación:

$$\begin{aligned} T_6^0 &= A_1^0(\theta_1) A_2^1(\theta_2) \dots A_6^5(\theta_6), \\ &= A_1(\theta_1) A_2(\theta_2) \dots A_6(\theta_6). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Cinemática directa definida en términos del AGC

Para obtener la cadena cinemática en álgebra geométrica conformal se asignarán puntos conformales a cada unión en lugar de matrices de transformación. Estos puntos estarán referenciados a un sistema que por conveniencia será asignado a la base de el eslabón uno, es decir el punto al origen e_0 estará en x_0 , la Figura 3.3 muestra la asignación de puntos conformales y el sistema de coordenadas utilizado para referenciarlos.

Con los parámetros de la Tabla 3.1, se construyen los siguientes puntos Euclidianos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= 0, \\ \mathbf{x}_1 &= (a_1) \mathbf{e}_1 + (d_1) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_2 &= (a_1) \mathbf{e}_1 + (d_1 + a_2) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_3 &= (a_1) \mathbf{e}_1 + (d_1 + a_2 + a_3) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_4 &= (a_1 + d_4) \mathbf{e}_1 + (d_1 + a_2 + a_3) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_5 &= (a_1 + d_4) \mathbf{e}_1 + (d_1 + a_2 + a_3 + d_6) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

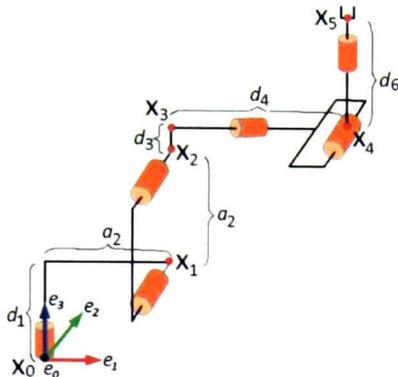


Figura 3.3: Sistema de coordenadas y puntos conformales de cada unión del brazo manipulador.

Ahora se utiliza el mapeo conformal (2.54) para pasar estos puntos \mathbf{x}_i , $i = 0, \dots, 5$, Euclidianos a puntos conformales x_i , $i = 0, \dots, 5$, es decir:

$$x_i = \mathbf{x}_i + \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0. \quad (3.16)$$

Usando (2.89) para definir los motores (*rotaciones generales*), definiendo el sistema de coordenadas en la base del manipulador y asignados los puntos conformales, se obtiene:

$$\begin{aligned} R_{L_i} &= T_i R_i \tilde{T}_i, \\ &= e^{\left(\frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{x}_i}{2}\right)} e^{\left(-\frac{\theta_i}{2} l_i\right)} e^{\left(-\frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{x}_j}{2}\right)}, \\ &= \left(1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{x}_j}{2}\right) e^{\left(-\frac{\theta_i}{2} l_i\right)} \left(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{x}_j}{2}\right), \\ &= e^{\left(\left(1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{x}_j}{2}\right) \left(-\frac{\theta_i}{2} l_i\right) \left(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{x}_j}{2}\right)\right)}, \\ &= e^{\left(-\frac{\theta_i}{2} (l_i + \mathbf{e}_\infty (\mathbf{x}_j \cdot l_i))\right)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde θ_i representan la variable de unión i , los vectores \mathbf{x}_j son tomados de (3.15) para $j = 0, \dots, 5$ y l_i para $i = 1, \dots, 6$ están dados por:

$$\begin{aligned}
 l_1 = l_6 &= e_{12}, \\
 l_2 = l_3 = l_5 &= e_{31}, \\
 l_4 &= e_{23}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Quedando cada motor R_{L_i} expresado por:

$$\begin{aligned}
 R_{L_1} &= e\left(-\frac{\theta_1}{2} e_{12}\right), \\
 R_{L_2} &= e\left(-\frac{\theta_2}{2} (e_{31} + e_{\infty} (x_1 \cdot e_{31}))\right), \\
 R_{L_3} &= e\left(-\frac{\theta_3}{2} (e_{31} + e_{\infty} (x_2 \cdot e_{31}))\right), \\
 R_{L_4} &= e\left(-\frac{\theta_4}{2} (e_{23} + e_{\infty} (x_3 \cdot e_{23}))\right), \\
 R_{L_5} &= e\left(-\frac{\theta_5}{2} (e_{31} + e_{\infty} (x_4 \cdot e_{31}))\right), \\
 R_{L_6} &= e\left(-\frac{\theta_6}{2} (e_{12} + e_{\infty} (x_5 \cdot e_{12}))\right),
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

siendo R_{L_1} una rotación en el origen, ya que su eje de actuación está fijado al sistema de coordenadas, es decir e_0 , por lo tanto no existe traslación, además $e_0 \cdot e_{12} = 0$.

Una vez definidas estas transformaciones, los puntos conformales x'_i afectados por cada motor se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= R_{L_1} R_{L_2} (x_1) \tilde{R}_{L_2} \tilde{R}_{L_1}, \\
 x'_2 &= R_{L_1} R_{L_2} R_{L_3} (x_2) \tilde{R}_{L_3} \tilde{R}_{L_2} \tilde{R}_{L_1}, \\
 x'_3 &= R_{L_1} R_{L_2} R_{L_3} R_{L_4} (x_3) \tilde{R}_{L_4} \tilde{R}_{L_3} \tilde{R}_{L_2} \tilde{R}_{L_1}, \\
 x'_4 &= R_{L_1} R_{L_2} R_{L_3} R_{L_4} R_{L_5} (x_4) \tilde{R}_{L_5} \tilde{R}_{L_4} \tilde{R}_{L_3} \tilde{R}_{L_2} \tilde{R}_{L_1}, \\
 x'_5 &= R_{L_1} R_{L_2} R_{L_3} R_{L_4} R_{L_5} R_{L_6} (x_5) \tilde{R}_{L_6} \tilde{R}_{L_5} \tilde{R}_{L_4} \tilde{R}_{L_3} \tilde{R}_{L_2} \tilde{R}_{L_1}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Considerando $x_p = x_5$, la cinemática directa usando (3.12) con $M_i = R_{L_i}$ queda expresada

como:

$$x'_p = x'_5 = \left(\prod_{i=1}^n R_{L_i} \right) (x_p) \left(\prod_{i=1}^n \tilde{R}_{L_{n-i+1}} \right) \quad (3.21)$$

Al comparar, se observa que el método realizado con el álgebra geométrica conformal, permite una representación más compacta (3.21) que la representación matricial (3.14), reduciendo el número de sumas y multiplicaciones requeridas en el álgebra de matrices, disminuyendo el tiempo de cálculo para el sistema de cómputo [32].

3.1.3. Cinemática diferencial

Utilizando cinemática directa, a partir de la configuración de las posiciones articulares, la posición del punto que representa el efector final se puede expresar como:

$$x'_p = \prod_{i=1}^n M_i x_p \prod_{i=1}^n \tilde{M}_{n-i+1}. \quad (3.22)$$

El conjunto de valores de las variables de unión representa el espacio de configuración del sistema y serán llamadas θ_i . Entonces para los n grados de libertad del manipulador se tendrá un vector de variables de unión de dimensión $n \times 1$ de la forma:

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T \quad (3.23)$$

Al moverse el robot manipulador, tanto las variables de unión como la posición y orientación del efector final se vuelven funciones del tiempo. Entonces el punto x'_p será variante en el tiempo ($x'_p(t) \in \mathbb{R}^{4,1}$) y al calcular su derivada con (2.92), se obtiene la velocidad del efector final, definida como:

$$\frac{dx'_p(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (x'_p(t + \epsilon) - x'_p(t)). \quad (3.24)$$

Al calcular la velocidad del efector final, será necesaria una expresión que relacione las velocidades angulares de las uniones con la velocidad lineal del efector final. Esta relación

es representada matemáticamente por el *Jacobiano* de la función de cinemática directa. Por tanto, para un manipulador con n eslabones, el Jacobiano representa la transformación instantánea entre las velocidades de unión $\dot{\theta}$, y la velocidad lineal del efector final $\dot{x}'_p \in \mathbb{R}^3$. Esto puede ser representado por:

$$\dot{x}'_p = J\dot{\theta}. \quad (3.25)$$

Esta ecuación representa la cinemática diferencial del efector final, donde $J \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ representa el *Jacobiano* del sistema, el cual es definido mas adelante.

Al derivar la ecuación (3.22) se obtiene una expresión que representa la *cinemática diferencial* del efector final del robot manipulador.

$$dx'_p = \sum_{j=1}^n \partial_{\theta_j} \left(\prod_{i=1}^n M_i x_p \prod_{i=1}^n \widetilde{M}_{n-i+1} \right) d\theta_j. \quad (3.26)$$

Se puede apreciar que los términos de la sumatoria equivalen al producto de funciones dependientes de θ_j ; entonces, usando la regla de la derivada de funciones se obtiene:

$$dx'_p = \sum_{j=1}^n \left[\partial_{\theta_j} \left(\prod_{i=1}^j M_i \right) \prod_{i=j+1}^n M_i x_p \prod_{i=1}^n \widetilde{M}_{n-i+1} + \prod_{i=1}^n M_i x_p \prod_{i=1}^{n-j} \widetilde{M}_{n-i+1} \partial_{\theta_j} \left(\prod_{i=n-j+1}^n \widetilde{M}_{n-i+1} \right) \right] d\theta_j. \quad (3.27)$$

Al utilizar rotaciones generales el motor M_i está definido por $M_i = e^{(-\frac{1}{2}\theta_i L_i)}$, la derivada está dada por la expresión:

$$d(M_i) = -\frac{1}{2} M_i L_i d\theta, \quad (3.28)$$

donde L_i es definida en (2.90).

La derivada parcial del producto de motores puede ser expresada como:

$$\partial_{\theta_j} \left(\prod_{i=1}^j M_i \right) = -\frac{1}{2} \prod_{i=1}^j M_i L_i = -\frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{j-1} M_i \right) L_j M_j. \quad (3.29)$$

CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA Y DINÁMICA USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

De igual forma la derivada de $\widetilde{M}_i = e^{\left(\frac{1}{2}\theta_i L_i\right)}$ esta dada por:

$$d\left(\widetilde{M}_i\right) = \frac{1}{2} M_i L_i d\theta, \quad (3.30)$$

con esto la derivada parcial del producto de motores se expresa como:

$$\partial_{\theta_j} \left(\prod_{i=n-j+1}^j \widetilde{M}_{n-i+1} \right) = \frac{1}{2} \widetilde{M}_j L_j \prod_{i=n-j+2}^n \widetilde{M}_{n-i+1}. \quad (3.31)$$

Al sustituir (3.29) y (3.31) en (3.27) se obtiene:

$$dx'_p = \sum_{j=1}^n \left[-\frac{1}{2} \prod_{i=1}^{j-1} M_i L_j M_j \prod_{i=j+1}^n M_i x_p \prod_{i=1}^n \widetilde{M}_{n-i+1} + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^n M_i x_p \prod_{i=1}^{n-j} \widetilde{M}_{n-i+1} \widetilde{M}_j L_j \prod_{i=1}^{j-1} \widetilde{M}_{j-i} \right] d\theta_j. \quad (3.32)$$

Factorizando algunos productos de motores y simplificando la ecuación anterior se obtiene:

$$dx'_p = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^{j-1} M_i \left(L_j \left(\prod_{i=j}^n M_i x_p \prod_{i=1}^{n-j+1} \widetilde{M}_{n-i+1} \right) - \left(\prod_{i=j}^n M_i x_p \prod_{i=1}^{n-j+1} \widetilde{M}_{n-i+1} \right) L_j \right) \prod_{i=1}^{j-1} \widetilde{M}_{j-i} \right] d\theta_j. \quad (3.33)$$

Más detalles de esta derivación puede ser encontrada en [22].

La expresión (3.33) se simplifica utilizando la definición del producto de un vector a con un bivector B expresada por:

$$a \cdot B = \frac{1}{2} (aB - Ba), \quad (3.34)$$

donde aB y Ba representan el producto geométrico de a por B y viceversa, respectivamente.

Debido a que L es un bivector y que $\prod_{i=j}^n M_i x_p \prod_{i=1}^{n-j+1} \widetilde{M}_{n-i+1}$ es un vector, la ecuación

(3.33) se puede simplificar simplifica usando (3.34) dando como resultado:

$$dx'_p = \sum_{j=1}^n \left[\left(\prod_{i=1}^{j-1} M_i \right) \left(\left(\prod_{i=j}^n M_i x_p \prod_{i=1}^{n-j+1} \widetilde{M}_{n-i+1} \right) \cdot L_j \right) \left(\prod_{i=1}^{j-1} M_{j-i} \right) \right] d\theta_j. \quad (3.35)$$

Aplicando la transformación conformal representada por el producto de motores a cada elemento del producto punto de (3.35) se obtiene:

$$dx'_p = \sum_{j=1}^n \left[\left(\prod_{i=1}^{j-1} M_i \prod_{i=j}^n M_i x_p \prod_{i=1}^{n-j+1} \widetilde{M}_{n-i+1} \prod_{i=1}^{j-1} \widetilde{M}_{j-i} \right) \left(\prod_{i=1}^{j-1} M_i L_j \prod_{i=1}^{j-1} \widetilde{M}_{j-i} \right) \right] d\theta_j, \quad (3.36)$$

esto es posible gracias a que el álgebra geométrica conformal permite trabajar con cualquier entidad definida, en este caso puntos y líneas.

Examinando los productos de (3.36) se puede notar que:

$$\prod_{i=1}^{j-1} M_i \prod_j^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i, \quad (3.37)$$

y también se tiene que:

$$\prod_{i=1}^{n-j+1} \widetilde{M}_{n-i+1} \prod_{i=1}^{j-1} \widetilde{M}_{j-i} = \prod_{i=1}^{n-j+1} \widetilde{M}_{n-i+1} \prod_{i=n-j+2}^n \widetilde{M}_{n-i+1} = \prod_{i=1}^n \widetilde{M}_{n-i+1}. \quad (3.38)$$

Sustituyendo (3.37) y (3.38) en (3.36), ésta última se reduce a:

$$dx'_p = \sum_{j=1}^n \left[\left(\prod_{i=1}^n M_i x_p \prod_{i=1}^n \widetilde{M}_{n-i+1} \right) \left(\prod_{i=1}^{j-1} M_i L_j \prod_{i=1}^{j-1} \widetilde{M}_{j-i} \right) \right] d\theta_j, \quad (3.39)$$

donde se puede identificar el producto $\prod_{i=1}^n M_i x_p \prod_{i=1}^n \widetilde{M}_{n-i+1}$ definido en (3.22) como x'_p .

Ahora, teniendo que la transformación de L_j es:

$$L'_j = \prod_{i=1}^{j-1} M_i L_j \prod_{i=1}^{j-1} \widetilde{M}_{j-i}, \quad (3.40)$$

CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA Y DINÁMICA USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

se puede representar la expresión (3.39) en la siguiente forma compacta:

$$dx'_p = \sum_{j=1}^n [x'_p \ L'_j] d\theta_j, \quad (3.41)$$

que al ser expresada en forma matricial, se obtiene:

$$\dot{x}'_p = \begin{pmatrix} x'_p & L'_1 & \cdots & x'_p & L'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Para el caso de las líneas se sigue un proceso similar obteniendo:

$$\begin{pmatrix} \dot{L}'_1 \\ \dot{L}'_2 \\ \vdots \\ \dot{L}'_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} L'_1 L'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_2 L'_1 & L'_2 L'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_n L'_1 & L'_n L'_2 & \cdots & L'_n L'_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L'_1 L'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_1 L'_2 & L'_2 L'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1 L'_n & L'_2 L'_n & \cdots & L'_n L'_n \end{pmatrix} \right] \dot{q}, \quad (3.43)$$

que al expresarse en términos del conmutador se tiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{L}'_1 \\ \dot{L}'_2 \\ \vdots \\ \dot{L}'_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_2 \times L'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_3 \times L'_1 & L'_3 \times L'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_n \times L'_1 & L'_n \times L'_2 & L'_n \times L'_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right] \dot{q}. \quad (3.44)$$

Al examinar la ecuación (3.42) y compararla con (3.25) se puede apreciar que el Jacobiano está dado por:

$$J = \begin{pmatrix} x'_p & L'_1 & \cdots & x'_p \cdot L'_n \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Esta representación da una interpretación geométrica del Jacobiano, ya que cada columna

de éste es el producto punto de la transformación del efector final, con la transformación de los ejes de rotación, esto es, la contribución de cada eje de rotación en el movimiento del efector final. Además la forma de calcular las columnas de esta matriz será siempre la misma sin importar el número de grados de libertad que posea el robot, algo que en el álgebra de matrices no resulta así, teniendo que realizar numerosas multiplicaciones y sumas de entidades trigonométricas aumentando el gasto computacional.

Un análisis detallado de la obtención de (3.45) puede ser consultado en [22, 30].

3.2. Dinámica

A continuación se describen las ecuaciones de energía cinética y potencial en términos de álgebra geométrica, para así escribir el modelo dinámico de un manipulador de n grados de libertad utilizando las ecuaciones de Lagrange.

3.2.1. Energía cinética

Se inicia introduciendo el centro de masas en el análisis para desarrollar expresiones útiles para la energía cinética de un sistema.

Energía cinética de un sistema de partículas

Considerando un sistema de n partículas, mostrado en la Figura 3.4. La energía cinética total relativa del sistema de partículas es expresada por:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i V_i^2. \quad (3.46)$$

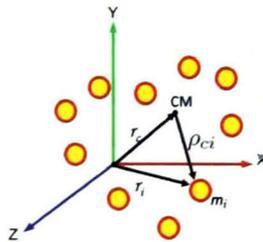


Figura 3.4: Sistema de partículas con su centro de masas.

Note que r_c es la distancia del origen del sistema de referencia al centro de masas, r_i representa la distancia del origen del sistema de referencia a la partícula cuya masa es m_i , la distancia de esta misma partícula al centro de masas del sistema se representa por ρ_{ci} . La distancia r_i esta dada por:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \rho_{ci}. \quad (3.47)$$

La derivada respecto al tiempo de (3.47) es:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\rho}_{ci}. \quad (3.48)$$

Por lo tanto, la ecuación de la velocidad de la i -ésima partícula ($\dot{\rho}_{ci}$) respecto al centro de masas viene dada por:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_c + \dot{\rho}_{ci}. \quad (3.49)$$

Sustituyendo (3.49) en la expresión de energía cinética (3.46) se obtiene:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (V_c + \dot{\rho}_{ci})^2, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (V_c)^2 + \sum_{i=1}^n m_i V_c \dot{\rho}_{ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\rho}_{ci})^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Como V_c no depende del índice de la sumatoria se puede extraer y escribir:

$$K = \frac{1}{2} V_c^2 \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) + V_c \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \rho_{ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\rho}_{ci}^2. \quad (3.51)$$

Considerando por definición que $\sum_{i=1}^n m_i \rho_{ci} = 0$ y siendo $m = \sum_{i=1}^n m_i$ la masa total del sistema se tiene:

$$K = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i \rho_{ci}^2. \quad (3.52)$$

De esta forma, la *energía cinética* respecto a un sistema de referencia se puede considerar como la suma de dos partes: (1) la *energía cinética de la masa total moviéndose respecto a ese sistema de referencia con la misma velocidad que el centro de masas*, mas (2) la *energía cinética del movimiento de las partículas respecto al centro de masas (momento de inercia)*.

Energía cinética de un brazo manipulador

A continuación se representará la posición inicial del centro de masas i con x_i , el centro de masas en función de las variables de las uniones (rotaciones o traslaciones) con x'_i , la posición inicial del eje de la unión i con L_i y a dicho eje en función de las articulaciones con L'_i (ver Figura 3.2).

Las ecuaciones de cinemática directa relacionan x_i con x'_i y a L_i con L'_i . Expresando dicha relación utilizando álgebra geométrica conformal se tiene:

$$x'_i = M_1 M_2 \cdots M_i x_i \tilde{M}_i \cdots \tilde{M}_2 \tilde{M}_1, \quad (3.53)$$

$$L'_i = M_1 M_2 \cdots M_{i-1} L_i \tilde{M}_{i-1} \cdots \tilde{M}_2 \tilde{M}_1. \quad (3.54)$$

La energía cinética de un eslabón puede expresarse como la suma de la energía debida a la velocidad del centro de masas y a la energía producida por el momento de inercia del eslabón. Además la energía cinética de un brazo manipulador es equivalente a la suma de las energías de cada eslabón teniendo:

$$K_i = \frac{1}{2}m_i \dot{x}'_i{}^2 + \frac{1}{2}I_i \left(\sum_{j=1}^i \dot{q}_j \right)^2 \quad (3.55)$$

donde I_i es la inercia del i -ésimo eslabón y \dot{x}'_i representa la velocidad del centro de masas

expresada como:

$$\dot{x}'_i = x'_i \cdot \left(\sum_{j=1}^i L'_j \dot{q}_j \right) \quad (3.56)$$

obtenida en la sección 3.1.3 de este capítulo.

Sustituyendo la ecuación (3.56) en (3.55) se puede expresar la energía cinética con algebra geométrica conformal de la siguiente manera:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \left[x'_i \cdot \left(\sum_{j=1}^i L'_j \dot{q}_j \right) \right]^2 + \frac{1}{2} I_i \left(\sum_{j=1}^i \dot{q}_j \right)^2 \quad (3.57)$$

La energía cinética total del brazo manipulador esta dada por $\sum_{i=1}^n K_i$ donde n es el número de grados de libertad del brazo. Sabiendo que la energía cinética es $K = K_v + K_I$, con el fin de simplificar la explicación se tratarán sus componentes K_v y K_I por separado, teniendo que:

$$K_v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[x'_i \cdot \left(\sum_{j=1}^i L'_j \dot{q}_j \right) \right]^2 \quad (3.58)$$

$$K_I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \left(\sum_{j=1}^i \dot{q}_j \right)^2 \quad (3.59)$$

Primero se desarrollará K_v y posteriormente K_I , a fin de construir una expresión más simple para el cálculo de la energía cinética. Entonces se tiene que:

$$K_v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[x'_i \cdot \left(\sum_{j=1}^i L'_j \dot{q}_j \right) \right]^2 \quad (3.60)$$

La magnitud de la velocidad al cuadrado equivale al producto punto del vector consigo mismo esto es:

$$K_v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[x'_i \cdot \left(\sum_{j=1}^i L'_j \dot{q}_j \right) \right] \left[x'_i \cdot \left(\sum_{j=1}^i L'_j \dot{q}_j \right) \right] \quad (3.61)$$

zados en forma matricial para una comprensión mas clara como:

$$K_v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \cdots & \dot{q}_n \end{pmatrix} \mathcal{M}_v \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

donde \mathcal{M}_v es igual a:

$$\mathcal{M}_v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n m_j(x'_j \cdot L'_1) \cdot (x'_j \cdot L'_1) & \cdots & \sum_{j=n}^n m_j(x'_j \cdot L'_1) \cdot (x'_j \cdot L'_n) \\ \sum_{j=2}^n m_j(x'_j \cdot L'_2) \cdot (x'_j \cdot L'_1) & \cdots & \sum_{j=n}^n m_j(x'_j \cdot L'_2) \cdot (x'_j \cdot L'_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=n}^n m_j(x'_j \cdot L'_n) \cdot (x'_j \cdot L'_1) & \cdots & \sum_{j=n}^n m_j(x'_j \cdot L'_n) \cdot (x'_j \cdot L'_n) \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

El elemento $M_{v_{ij}}$ se calcula haciendo:

$$\mathcal{M}_{v_{ij}} = \sum_{k=\text{Max}(i,j)}^n m_k(x'_k \cdot L'_i) \cdot (x'_k \cdot L'_j). \quad (3.68)$$

Note que M_v es una matriz simétrica que se puede descomponer como el producto de dos matrices triangulares y una matriz diagonal:

$$\mathcal{M}_v = \begin{pmatrix} x'_1 \cdot L'_1 & x'_2 \cdot L'_1 & \cdots & x'_n \cdot L'_1 \\ 0 & x'_2 \cdot L'_2 & \cdots & x'_n \cdot L'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x'_n \cdot L'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \cdot L'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x'_2 \cdot L'_1 & x'_2 \cdot L'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_n \cdot L'_1 & x'_n \cdot L'_2 & \cdots & x'_n \cdot L'_n \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

A continuación se define m como la matriz diagonal de masas y V como la matriz triangular

inferior de velocidades, teniendo:

$$m := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

$$V := \begin{pmatrix} x'_1 \cdot L'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x'_2 \cdot L'_1 & x'_2 \cdot L'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_n \cdot L'_1 & x'_n \cdot L'_2 & \cdots & x'_n \cdot L'_n \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Por lo tanto se puede escribir (3.69) como:

$$\mathcal{M}_v = V^T m V. \quad (3.72)$$

Lo cual significa que la contribución de energía cinética debida al desplazamiento de las masas con respecto al sistema de coordenadas se puede calcular fácilmente empleando:

$$K_v = \frac{1}{2} \dot{q}^T V^T m V \dot{q}. \quad (3.73)$$

Ahora, para la componente de energía cinética K_I , se tiene que:

$$K_I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \left(\sum_{j=1}^i \dot{q}_j \right)^2 \quad (3.74)$$

Realizando las sumatorias para i y j de 1 a n se tiene:

$$K_I = \frac{1}{2} [I_1(\dot{q}_1)^2 + I_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \cdots + I_n(\dot{q}_1 + \cdots + \dot{q}_n)^2]. \quad (3.75)$$

Desarrollando el cuadrado de los polinomios y factorizando para \dot{q} se tiene en forma matricial

se obtiene:

$$K_I = \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \quad \cdots \quad \dot{q}_n) \mathcal{M}_I \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

donde

$$\mathcal{M}_I = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n I_i & \sum_{i=2}^n I_i & \cdots & \sum_{i=n}^n I_i \\ \sum_{i=2}^n I_i & \sum_{i=2}^n I_i & \cdots & \sum_{i=n}^n I_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=n}^n I_i & \sum_{i=n}^n I_i & \cdots & \sum_{i=n}^n I_i \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

Esta matriz M_I se puede descomponer como el producto de dos matrices

$$M_I = \delta I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & \cdots & 0 \\ I_2 & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_n & I_n & \cdots & I_n \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

De esta forma la componente de energía cinética debida al movimiento de los eslabones con respecto a su propio centro de masas quedara determinada por:

$$K_I = \frac{1}{2} \dot{q}^T \delta I \dot{q}. \quad (3.79)$$

Finalmente, la energía cinética total del sistema puede expresarse como:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T (V^T m V + \delta I) \dot{q}. \quad (3.80)$$

Esta expresión simple y compacta permite calcular la energía cinética del sistema sin tener que derivar. Este resultado es obtenido gracias al álgebra geométrica.

3.2.2. Energía potencial

A diferencia de la energía cinética, la energía potencial no depende de la velocidad con que se desplazan los eslabones si no de la posición que estos tengan. Con las ecuaciones de cinemática directa vistas en la sección 3.1.2 de este capítulo, se puede calcular la posición x'_i de cada eslabón. Para conocer la energía potencial U_i basta con hacer el producto punto con la fuerza aplicada en el eslabón de la siguiente manera:

$$U_i = x'_i \cdot F_i. \quad (3.81)$$

Se considera que la energía potencial U se debe a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad, por lo que $F_i = m_i g e_2$. Además la energía potencial total del sistema puede calcularse sumando todas las U_i obteniendo:

$$U = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot F_i. \quad (3.82)$$

3.2.3. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones dinámicas de un robot pueden ser obtenidas mediante las ecuaciones de movimiento de Newton. Sin embargo, cuando el número de grados de libertad aumenta, se complican los cálculos y manejo de ecuaciones, por tal motivo se emplean las ecuaciones de Lagrange.

El Lagrangiano \mathcal{L} se define como la diferencia entre la energía cinética total del sistema y la energía potencial total del mismo

$$\mathcal{L} = K - U. \quad (3.83)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau. \quad (3.84)$$

Primero se obtiene la derivada parcial de \mathcal{L} respecto a \dot{q} como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}}. \quad (3.85)$$

Note que la derivada parcial de U respecto a \dot{q} es siempre cero ya que U no depende de velocidades angulares si no de sus posiciones. Sustituyendo K en la ecuación (3.85) por la expresión (3.80) se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T (V^T m V + \delta I) \dot{q} \right) = (V^T m V + \delta I) \dot{q}. \quad (3.86)$$

Con el fin de simplificar la notación se hace $M = M_v + M_I = V^T m V + \delta I$. Así la ecuación (3.86) queda simplemente escrita como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \mathcal{M} \dot{q}. \quad (3.87)$$

Por otro lado, desarrollando la derivada parcial de \mathcal{L} respecto a q se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q} \right) \dot{q} - \frac{\partial U}{\partial q}. \quad (3.88)$$

Reemplazando (3.87) y (3.88) en la ecuación de Lagrange (3.84) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{M} \dot{q}] - \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q} \right) \dot{q} - \frac{\partial U}{\partial q} \right] = \tau. \quad (3.89)$$

La derivada de (3.89) respecto al tiempo viene dada por:

$$\mathcal{M} \ddot{q} + \dot{\mathcal{M}} \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau. \quad (3.90)$$

CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA Y DINÁMICA USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

A manera de simplificar la notación, se manejan las siguiente definiciones:

$$C = \dot{\mathcal{M}} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q} \right), \quad (3.91)$$

$$G = \frac{\partial U}{\partial q}. \quad (3.92)$$

Donde C es la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis mientras que G es el vector de componentes gravitacionales. Así se puede escribir la ecuación de dinámica para un robot de n grados de libertad como:

$$\mathcal{M}\ddot{q} + C\dot{q} + G = \tau. \quad (3.93)$$

Se analizará el vector G y buscará una ecuación que permita obtenerlo sin necesidad de hacer la derivada parcial, en función de los ejes de rotación del brazo:

$$G = \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{i=1}^n F_i \cdot x'_i \right) \quad (3.94)$$

Como las fuerzas $F_i = m_i g e_2$ se deben a la gravedad, no dependen de las posiciones articulares q . Por lo tanto, la derivada parcial afecta únicamente a x'_i teniendo:

$$G = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q} x'_i \right) \quad (3.95)$$

Por cinemática diferencial se conoce que:

$$\frac{\partial}{\partial q} x'_i = \begin{pmatrix} x'_i \cdot L'_1 \\ x'_i \cdot L'_2 \\ \vdots \\ x'_i \cdot L'_i \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

Desarrollando la sumatoria de la ecuación (3.95) introduciendo en cada termino la evalua-

ción de la ecuación (3.96) se obtiene:

$$G = \begin{pmatrix} x'_1 \cdot L'_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} F_1 + \begin{pmatrix} x'_2 \cdot L'_1 \\ x'_2 \cdot L'_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} F_2 + \dots + \begin{pmatrix} x'_n \cdot L'_1 \\ x'_n \cdot L'_2 \\ \vdots \\ x'_n \cdot L'_n \end{pmatrix} F_n. \quad (3.97)$$

Al representar la ecuación (3.97) en forma matricial se tiene:

$$G = \begin{pmatrix} x'_1 & L'_1 & x'_2 \cdot L'_1 & \dots & x'_n \cdot L'_1 \\ 0 & x'_2 \cdot L'_2 & \dots & x'_n \cdot L'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x'_n \cdot L'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

Notar que la matriz obtenida es la transpuesta de la matriz V . Denotando F como el vector de fuerzas con componentes F_i , se puede escribir la ecuación siguiente:

$$G = V^T F. \quad (3.99)$$

Por otro lado F puede ser escrito como:

$$F = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ge_2 \\ ge_2 \\ \vdots \\ ge_2 \end{pmatrix} = ma, \quad (3.100)$$

donde evidentemente a es la columna de aceleraciones constantes con dimensión n . Ahora, (3.99) se puede expresar como:

$$G = V^T ma. \quad (3.101)$$

Teniendo de esta forma se tiene una formula compacta y útil para el calculo del vector G .

Analizando ahora la matriz de coriolis C y aun contando con una expresión(3.91) para C ,

CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA Y DINÁMICA USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

se buscará una ecuación mas simple.

Partiendo de las propiedades que tienen las matrices \mathcal{M} y C (ver [33]) se sabe que:

$$\dot{\mathcal{M}} = C + C^T \quad (3.102)$$

Por otro lado se ha calculado que:

$$\mathcal{M} = V^T m V + \delta I. \quad (3.103)$$

donde $V^T m V$ y δI se define en la ecuaciones (3.69) y (3.78) respectivamente.

Calculando la derivada de \mathcal{M} respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\mathcal{M}} = \frac{d}{dt} \mathcal{M} = \frac{d}{dt} (V^T m V + \delta I), \quad (3.104)$$

$$\dot{\mathcal{M}} = \frac{d}{dt} V^T m V, \quad (3.105)$$

$$\dot{\mathcal{M}} = V^T m \dot{V} + \dot{V}^T m V, \quad (3.106)$$

$$\dot{\mathcal{M}} = V^T m \dot{V} + (V^T m \dot{V})^T \quad (3.107)$$

De las ecuaciones (3.102) y (3.107) se puede concluir para C la siguiente ecuación:

$$C = V^T m \dot{V}. \quad (3.108)$$

Sólo falta mostrar la forma de calcular \dot{V} a partir de los ejes de rotación. Para obtener cada elemento de \dot{V}_{ij} basta con derivar con respecto al tiempo el producto $x'_i \cdot L'_j$, esto es:

$$\dot{V}_{ij} = \frac{d}{dt} (x'_i L'_j) = \dot{x}'_i \cdot L'_j + x'_i \cdot \dot{L}'_j, \quad (3.109)$$

considerando (3.42) y (3.43), y empleando la regla de la cadena se obtiene:

$$\dot{V}_{ij} = \sum_{k=1}^i (x'_i \cdot L'_k) \cdot L'_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} x'_i \cdot (L'_j L'_k - L'_k L'_j) \dot{q}_k, \quad (3.110)$$

$$= \sum_{k=1}^i (x'_i \cdot L'_k) \cdot L'_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} x'_i \cdot (L'_j \times L'_k) \dot{q}_k. \quad (3.111)$$

Notar que $V_{ij} = 0$ siempre que $j > i$, por lo que $\dot{V}_{ij} = 0$ para $j > i$. Una forma más clara y estructurada de explicar el calculo de \dot{V} se da a continuación.

Dada la forma de la matriz V es posible descomponerla en el producto de dos matrices, tal que:

$$V = \begin{pmatrix} x'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_1 & L'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L'_1 & L'_2 & \cdots & L'_n \end{pmatrix} = XL, \quad (3.112)$$

entonces la derivada de (3.112) se puede escribir como:

$$\dot{V} = \dot{X}L + X\dot{L}, \quad (3.113)$$

donde

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{x}'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dot{x}'_n \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

El cálculo de \dot{x}'_i utilizando la ecuación de cinemática diferencial vista en la sección 3.1.3 es muy simple, teniendo que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'_1 \\ \vdots \\ \dot{x}'_n \end{pmatrix} = XL\dot{q} = V\dot{q}. \quad (3.115)$$

Por otro lado se tiene que:

$$\dot{L}' = \begin{pmatrix} \dot{L}'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dot{L}'_1 & \dot{L}'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{L}'_1 & \dot{L}'_2 & \cdots & \dot{L}'_n \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

Se puede calcular cada \dot{L}'_i que representa la velocidad del eje i producida por la rotación en los ejes que le anteceden haciendo:

$$\begin{pmatrix} \dot{L}'_1 \\ \dot{L}'_2 \\ \vdots \\ \dot{L}'_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_2 \times L'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L'_3 \times L'_1 & L'_3 \times L'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L'_n \times L'_1 & L'_n \times L'_2 & L'_n \times L'_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right] \dot{q}. \quad (3.117)$$

En conclusión usando (3.86), (3.101) y (3.108) se ha definido la ecuación de dinámica de un sistema de n grados de libertad en función de los ejes de rotación obteniendo:

$$(V^T m V + \delta I) \ddot{q} + V^T m \dot{V} \dot{q} + V^T F = \tau, \quad (3.118)$$

$$\delta I \ddot{q} + V^T (m V \ddot{q} + m \dot{V} \dot{q} + F) = \tau. \quad (3.119)$$

Esta descomposición permite ver de forma clara el momento de inercia, la fuerza centrífuga y las fuerzas de gravedad. Reemplazando F por ma en (3.119) y factorizando m se tiene:

$$\delta I \ddot{q} + V^T m (V \ddot{q} + \dot{V} \dot{q} + a) = \tau. \quad (3.120)$$

Finalmente (3.120) es la ecuación dinámica para un robot serial de n grados de libertad donde los elementos de las matrices son multivectores del álgebra geométrica $G_{4,1,0}$, donde δ and a son matrices constantes y conocidas, mientras que m e I dependen de los parámetros del sistema pero son de igual forma constantes. Únicamente la matriz V (ecuación 3.112) y \dot{V} (ecuación 3.113) cambian con el tiempo.

Capítulo 4

Modelado matemático de un robot bípedo

En la búsqueda de un modelo dinámico para un robot bípedo, inicialmente se trabajó con el modelo dinámico en 2D propuesto en [13]. Trabajar con un modelo simplificado permite en un inicio familiarizarse gradualmente con los conceptos básicos del caminado de un robot bípedo. Posteriormente, se obtuvo el modelo cinemático y dinámico en 3D de las piernas de un robot bípedo utilizando las herramientas de álgebra geométrica conformal expuestas en el capítulo anterior. Primero se expondrá el modelo cinemático en 3D y posteriormente los modelos dinámicos en 2D y 3D.

4.1. Modelo cinemático en 3D de un bípedo usando álgebra geométrica conformal

La obtención del modelo de un robot bípedo requiere el conocimiento de las características físicas y geométricas del mismo. En el caso del robot humanoide, las piernas se consideran como sistemas articulados formados por eslabones conectados entre sí a través de uniones rotativas, siendo los rotores una buena herramienta para su modelado, justificando así el uso de *AGC*. Cada pierna cuenta con seis grados de libertad: tres en la cadera, uno en la rodilla y dos en el tobillo, como se puede observar en la Figura 4.1. Cada unión se define respecto al

4.1. MODELO CINEMÁTICO EN 3D DE UN BÍPEDO USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA CONFORMAL

eje de actuación del motor que genera el movimiento, al representar este eje como una línea en *AGC*, se pueden obtener rotaciones generales que modelen cada unión.

Para calcular la cinemática directa de la pierna de un robot humanoide, primero se asigna el sistema de coordenadas en el punto conformal x_0 , es decir $x_0 = e_0$ y considerando las longitudes de los eslabones, en la Figura 4.1 se definen los puntos conformales de cada unión.

Al separar la parte Euclidiana de los puntos conformales se obtiene el vector de posición para generar el trasladador que lleva a la entidad al origen, donde se rota y luego la traslada de regreso (rotación general). El operador de *reyección* (2.51) se emplea para obtener los vectores x_i :

$$P_E^\perp(x_i) = (x_i \cdot E^*)\tilde{E}^* = (x_i \wedge E)E = x_i \in \mathbb{R}^3, \quad (4.1)$$

para $i = 1, \dots, 6$, COM, donde E representa el plano de Minkowski dado por $E = e_\infty \wedge e_0$.

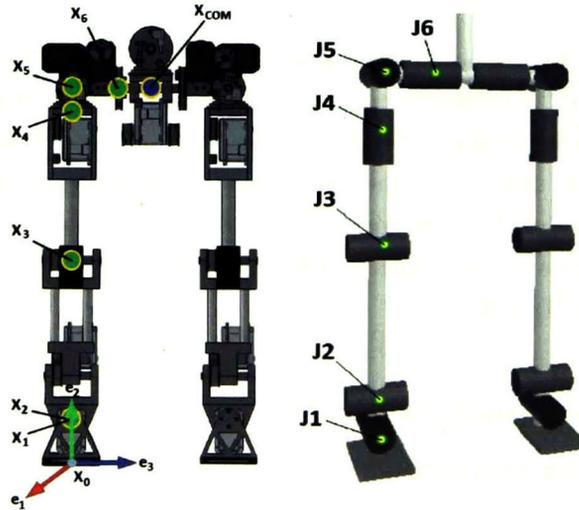


Figura 4.1: Configuración de las piernas para modelo cinemático: *Ejes de rotación* (derecha) y *Puntos conformales* x_0, \dots, x_6 para las rotaciones generales de cada unión y x_{COM} la ubicación del centro de masa (izquierda).

Los orígenes de los marcos de referencia para cada eslabón del robot bípedo son:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.6e_2 = x_2, & x_5 &= 4.61e_2, \\
 x_3 &= 2.23e_2, & x_6 &= 4.61e_2 + 0.7e_3, \\
 x_4 &= 4.51e_2, & x_{COM} &= 4.61e_2 + 1.1e_3.
 \end{aligned}$$

Usando la configuración de la Figura 4.1, como la posición inicial del robot, se tiene que los ejes de rotación para las uniones J_1, \dots, J_6 son:

$$\begin{aligned}
 l_{J_1} &= e_{32}, & l_{J_4} &= e_{13}, \\
 l_{J_2} &= e_{12}, & l_{J_5} &= e_{32}, \\
 l_{J_3} &= e_{21}, & l_{J_6} &= e_{12}.
 \end{aligned}$$

Dado que las uniones son revolativas, en cada una se utilizan rotores para modelar la transformación que se ejerce en cada unión. Entonces las rotaciones generales quedan definidas por:

$$\begin{aligned}
 R_{LJ_1} &= e\left(-\frac{\theta_1}{2}(e_{32} + e_{\infty}(x_1 \cdot e_{32}))\right), \\
 R_{LJ_2} &= e\left(-\frac{\theta_2}{2}(e_{12} + e_{\infty}(x_2 \cdot e_{12}))\right), \\
 R_{LJ_3} &= e\left(-\frac{\theta_3}{2}(e_{21} + e_{\infty}(x_3 \cdot e_{21}))\right), \\
 R_{LJ_4} &= e\left(-\frac{\theta_4}{2}(e_{13} + e_{\infty}(x_4 \cdot e_{13}))\right), \\
 R_{LJ_5} &= e\left(-\frac{\theta_5}{2}(e_{32} + e_{\infty}(x_5 \cdot e_{32}))\right), \\
 R_{LJ_6} &= e\left(-\frac{\theta_6}{2}(e_{12} + e_{\infty}(x_6 \cdot e_{12}))\right)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Finalmente, el efector final representado por $x_p = x_{COM}$ se expresa como:

$$x'_p = R_{LJ_1} R_{LJ_2} R_{LJ_3} R_{LJ_4} R_{LJ_5} R_{LJ_6} (x_p) \tilde{R}_{LJ_6} \tilde{R}_{LJ_5} \tilde{R}_{LJ_4} \tilde{R}_{LJ_3} \tilde{R}_{LJ_2} \tilde{R}_{LJ_1}. \tag{4.3}$$

Con estas transformaciones se puede calcular la posición del efector final con respecto a los valores de los ángulos de cada articulación.

También es importante definir la orientación del efector final. Con *AGC* esto se hace de la misma manera con la cual se encuentra el efector final transformado. Suponiendo que la

4.2. MODELO DINÁMICO DE UN BÍPEDO EN 2D

orientación inicial del efector final esta expresada por la línea L_p , esta línea puede ser tomada como el eje de rotación del último motor de la cadena de uniones. Entonces la transformación de la orientación a causa de los movimientos en las articulaciones puede expresarse como:

$$L'_p = M_1 M_2 \cdots M_{n-1} (L_p) \widetilde{M}_{n-1} \cdots \widetilde{M}_2 \widetilde{M}_1, \quad (4.4)$$

donde M_i representa el motor para la articulación $i = 1, \dots, n$. En este caso $M_i = R_{L_i}$ es una rotación general.

Debido a la rotación de las articulaciones anteriores, la transformación del eje de orientación L_j está dada en forma compacta por:

$$L'_j = \prod_{i=1}^{j-1} M_i L_j \prod_{i=1}^{j-1} \widetilde{M}_{j-i}. \quad (4.5)$$

Se observa que el motor M_j no afecta al eje de rotación L_j esto se hace evidente ya que aplicar este motor significaría rotar el eje con respecto así mismo, lo que no provoca ningún cambio en la orientación de éste.

4.2. Modelo dinámico de un bípedo en 2D

El modelo dinámico en 2D utilizado en este trabajo se ilustra en la Figura 4.2. Este robot consiste en cinco eslabones: uno en el torso, dos para los muslos y otros dos para las pantorri-llas. Se consideran actuadores rotacionales para cada unión, las cuales se mueven únicamente en el plano sagital. El modelo de este sistema cuenta con siete grados de libertad definidos por el siguiente vector de variables:

$$\mathbf{q} \triangleq [x_0, y_0, \alpha, \beta_L, \beta_R, \gamma_L, \gamma_R]^T \quad (4.6)$$

Refiriéndose a la Figura 4.2(a), el centro de masas es representado por el punto (x_0, y_0) , y los ángulos de las uniones son $\alpha, \beta_L, \beta_R, \gamma_L$ y γ_R . El punto (x_0, y_0) es medido desde un sistema de coordenadas inercial (x, y) ubicado fuera del bípedo, α es medido en sentido horario con respecto a la vertical, β_L y β_R se miden en sentido anti horario con respecto al torso, γ_L y γ_R

CAPÍTULO 4. MODELADO MATEMÁTICO DE UN ROBOT BÍPEDO

se miden en sentido horario con respecto al muslo izquierdo y derecho respectivamente. Las variables l_0 , l_1 y l_2 definen las longitudes de las uniones, las masas son representadas por m_0 , m_1 y m_2 .

La localización del centro de masas de cada eslabón es representado por las variables r_0 , r_1 y r_2 , las cuales se miden desde la posición del actuador.

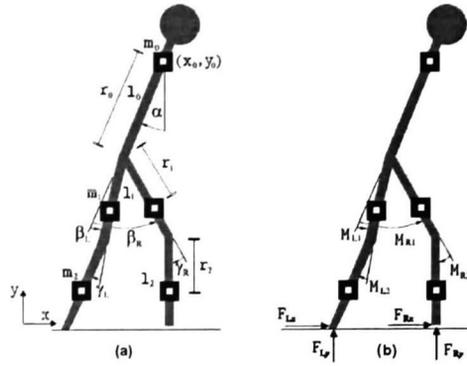


Figura 4.2: Modelo bípedo: (a) Coordenadas y constantes. (b) Momentos y fuerzas externas.

Las ecuaciones dinámicas que representan al sistema bípedo, obtenidas con las ecuaciones de Lagrange, son definidas como:

$$A(q)\ddot{q} = b(q, \dot{q}, M, F), \quad (4.7)$$

donde $A(q) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ es la matriz de inercia y $b(q, \dot{q}, M, F) \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ es el vector que contiene los términos de fricción, momentos, fuerzas de inercia y coriolis. La matriz A y el vector b [13] se definen en el anexo A.1 de esta tesis.

El vector de salida se define como:

$$y \triangleq [\alpha \ (\beta_L - \beta_R) \ \gamma_L \ \gamma_R]^T \quad (4.8)$$

y el vector de referencia para la salida viene dado por:

$$y_{\text{ref}} \triangleq [\alpha_{\text{ref}} \ (\beta_L - \beta_R)_{\text{ref}} \ \gamma_{L_{\text{ref}}} \ \gamma_{R_{\text{ref}}}]^T \quad (4.9)$$

4.3. MODELO DINÁMICO DE UN BÍPEDO EN 3D USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA CONFORMAL

Como se muestra en la Figura 4.2(b), el vector que representa el conjunto de pares generados por los actuadores del sistema que actúan en la cadera y en las rodillas viene dado por:

$$\mathbf{M} \triangleq [M_{L1}, M_{R1}, M_{L2}, M_{R2}]^T, \quad (4.10)$$

El vector de fuerzas externas que afectan a ambas piernas cuando hacen contacto con la superficie está dado por:

$$\mathbf{F} \triangleq [F_{Lx}, F_{Ly}, F_{Rx}, F_{Ry}]^T \quad (4.11)$$

estas fuerzas se muestran en la Figura 4.2(b).

4.3. Modelo dinámico de un bípido en 3D usando álgebra geométrica conformal

Los datos a considerar para el modelo dinámico del robot Mexone se muestran a continuación.

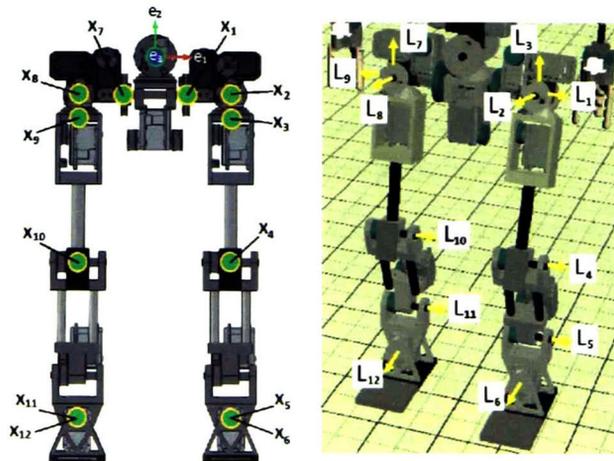


Figura 4.3: Puntos conformales (izquierda) y Ejes de rotación (derecha).

CAPÍTULO 4. MODELADO MATEMÁTICO DE UN ROBOT BÍPEDO

Los orígenes de los marcos de referencia para cada eslabón del robot bípedo son los puntos euclidianos siguientes:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.049e_1 - 0.0625e_2, & x_7 &= -0.049e_1 - 0.0625e_2, \\
 x_2 &= 0.11e_1 - 0.0625e_2, & x_8 &= -0.11e_1 - 0.0625e_2, \\
 x_3 &= 0.11e_1 - 0.0741e_2, & x_9 &= -0.11e_1 - 0.0741e_2, \\
 x_4 &= 0.11e_1 - 0.3025e_2, & x_{10} &= -0.11e_1 - 0.3025e_2, \\
 x_5 &= 0.11e_1 - 0.533e_2 = x_6, & x_{11} &= -0.11e_1 - 0.533e_2 = x_{12}.
 \end{aligned}$$

El mapeo de estos puntos euclidianos a conformales esta dado por:

$$x_{ci} = x_i + \frac{1}{2}x_i^2 e_\infty + e_0, \quad (4.12)$$

donde x_{ci} es el punto i en conformal y x_i el punto en euclidiano.

El centro de masas para cada eslabón medido desde el marco de coordenadas correspondiente es:

$$\begin{aligned}
 x_{1cm} &= 0.0245e_1 - 0.0625e_2, & x_{7cm} &= 0.0245e_1 - 0.0625e_2, \\
 x_{2cm} &= 0.0795e_1 - 0.0625e_2, & x_{8cm} &= 0.0795e_1 - 0.0625e_2, \\
 x_{3cm} &= 0.11e_1 - 0.0683e_2, & x_{9cm} &= 0.11e_1 - 0.0683e_2, \\
 x_{4cm} &= 0.11e_1 - 0.1883e_2, & x_{10cm} &= 0.11e_1 - 0.1883e_2, \\
 x_{5cm} &= 0.11e_1 - 0.41775e_2, & x_{11cm} &= 0.11e_1 - 0.41775e_2, \\
 x_{6cm} &= 0.11e_1 - 0.533e_2, & x_{12cm} &= 0.11e_1 - 0.533e_2.
 \end{aligned}$$

Cada centro de masas se transforma a punto conformal utilizando la ecuación (4.12).

Los ejes de rotación del robot bípedo son definidos como:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= e_{23} + e_\infty (x_1 \cdot e_{23}), & L_7 &= e_{23} + e_\infty (x_7 \cdot e_{23}), \\
 L_2 &= e_{12} + e_\infty (x_2 \cdot e_{12}), & L_8 &= e_{12} + e_\infty (x_8 \cdot e_{12}), \\
 L_3 &= e_{31} + e_\infty (x_3 \cdot e_{31}), & L_9 &= e_{31} + e_\infty (x_9 \cdot e_{31}), \\
 L_4 &= e_{23} + e_\infty (x_4 \cdot e_{23}), & L_{10} &= e_{23} + e_\infty (x_{10} \cdot e_{23}), \\
 L_5 &= e_{23} + e_\infty (x_5 \cdot e_{23}), & L_{11} &= e_{23} + e_\infty (x_{11} \cdot e_{23}), \\
 L_6 &= e_{12} + e_\infty (x_6 \cdot e_{12}), & L_{12} &= e_{12} + e_\infty (x_{12} \cdot e_{12}).
 \end{aligned}$$

4.3. MODELO DINÁMICO DE UN BÍPEDO EN 3D USANDO ÁLGEBRA GEOMÉTRICA CONFORMAL

Tomando en cuenta los datos anteriores y siguiendo el procedimiento expuesto en la sección 3.2 del capítulo anterior, el modelo dinámico del robot bípedo corresponde a la expresión:

$$\delta I \ddot{q} + V^T m (V \ddot{q} + \dot{V} \dot{q} + a) = \tau, \quad (4.13)$$

donde V (3.71) y \dot{V} (3.113) son calculadas mediante el *AGC*.

Considerando el momento de inercia $\mathcal{M} = V^T m V + \delta I$, la matriz de coriolis $C = V^T m \dot{V}$ y fuerzas gravitacionales $G = V^T m a$, se obtiene:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau. \quad (4.14)$$

obtenida desde el marco matemático de *AGC*, a diferencia del modelo (4.7) obtenido con algebra de matrices.

Capítulo 5

Estrategias de control de caminado

Con el uso de cinemática directa y diferencial, en este capítulo se desarrolla un controlador para el seguimiento de trayectorias del centro de masas del robot bípedo Mexone modelado con *AGC* en 3D. Posteriormente, se propone una modificación al controlador clásico PD utilizando una función exponencial, para el caminado de un robot bípedo en 2D (plano sagital), bajo el esquema de seguimiento de trayectorias predefinidas para cada articulación. Por último, con el modelo dinámico en 3D de las piernas del humanoide, se realiza el seguimiento de trayectorias bio-inspiradas para cada articulación, utilizando técnicas de modos deslizantes de primer y segundo orden.

5.1. Control de seguimiento del centro de masas en 3D con cinemática diferencial

El problema de seguimiento de trayectoria de la posición del centro de masas x'_p (4.3) y orientación L'_p del efector final (4.4) será resuelto utilizando *AGC*. La ubicación del centro de masas se considera en la cintura del robot bípedo [57].

El objetivo de control es hacer que el centro de masas del robot bípedo siga una trayectoria conservando la orientación de la cadera por medio de la reconfiguración de la estructura cinemática del robot a través de los actuadores de las articulaciones.

5.1. CONTROL DE SEGUIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS EN 3D CON CINEMÁTICA DIFERENCIAL

El vector de posiciones angulares es $q \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$, la entrada del sistema $u = \dot{q} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ es el vector de velocidades angulares, la salida del seguimiento de la posición es $y_1 = x'_p \in \mathcal{G}_{4,1}$ y la salida para la orientación está dado por la dirección $r \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ de $y_2 = L'_p \in \mathcal{G}_{4,1}$.

5.1.1. Problema de seguimiento de posición

Utilizando (3.25), el modelo en espacio de estados para la posición del efector final es:

$$\begin{aligned} \dot{x}'_p &= J_x u, \\ y_1 &= x'_p, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $J_x \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ es el Jacobiano definido en (3.45).

Ahora se define la señal de referencia deseada $x_{ref}(t)$, para la posición del centro de masas expresado como un punto en *AGC* variante en el tiempo.

A continuación, se fija la señal de error entre la salida x'_p y la referencia deseada¹ x_{ref} para diseñar un controlador por retroalimentación del error. Dicho error se define como:

$$\epsilon_p = (x_{ref} \wedge x'_p) \cdot e_\infty = x'_p - x_{ref}, \tag{5.2}$$

usando la representación conformal para los puntos (2.54) se demuestra que (5.2) se cumple, es decir, se obtiene la diferencia de los puntos conformales x'_p y x_{ref} . La razón de esta igualdad es la formulación del error entre un punto conformal y su referencia. Esto se cumple para puntos, la idea es realizar una formulación similar para otras entidades geométricas, como lo son líneas, planos, esferas o par de puntos.

Derivando (5.2) y aplicando la regla de la derivada del producto para el producto exterior, se obtiene:

$$\dot{\epsilon}_p = (\dot{x}_{ref} \wedge x'_p) \cdot e_\infty + (x_{ref} \wedge \dot{x}'_p) \cdot e_\infty. \tag{5.3}$$

¹Se omitirá el paréntesis (t) para la referencia.

Factorizando \mathbf{e}_∞ y sustituyendo (5.1) en (5.3) se obtiene:

$$\dot{\epsilon}_p = (\mathbf{x}_{ref} \wedge (J\mathbf{u}) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge \mathbf{x}'_p) \cdot \mathbf{e}_\infty, \quad (5.4)$$

Sustituyendo $\mathbf{x}'_p = J\mathbf{u}$ en (5.4) se tiene:

$$\dot{\epsilon}_p = (\mathbf{x}_{ref} \wedge \dot{\mathbf{x}}'_p + \dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge \mathbf{x}'_p) \cdot \mathbf{e}_\infty. \quad (5.5)$$

Considerando que se conoce la derivada $\dot{\mathbf{x}}_{ref}$, la ley de control para estabilizar el sistema se define como:

$$\mathbf{u} = -J^+ ([\dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge (k_1\epsilon_p)] \cdot \mathbf{e}_\infty), \quad (5.6)$$

donde k_1 es un valor constante y J^+ es la pseudo-inversa por la derecha de J que será definida posteriormente.

Al sustituir (5.6) en (5.4) el sistema en lazo cerrado se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= (\mathbf{x}_{ref} \wedge [-JJ^+ ([\dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge (k_1\epsilon_p)] \cdot \mathbf{e}_\infty)] + \dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge \mathbf{x}'_p) \cdot \mathbf{e}_\infty, \\ &= (\mathbf{x}_{ref} \wedge (-[\dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge (k_1\epsilon_p)] \cdot \mathbf{e}_\infty) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge \mathbf{x}'_p) \cdot \mathbf{e}_\infty. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Como $[\dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge (k_1\epsilon_p)] \cdot \mathbf{e}_\infty = k_1\epsilon_p - \dot{\mathbf{x}}_{ref}$, entonces (5.7) se puede expresar de la forma siguiente:

$$\dot{\epsilon}_p = [-\mathbf{x}_{ref} \wedge (k_1\epsilon_p - \dot{\mathbf{x}}_{ref}) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge \mathbf{x}'_p] \cdot \mathbf{e}_\infty. \quad (5.8)$$

Sustituyendo (5.2) en (5.8), usando la distributividad, y $\mathbf{x}_{ref} \wedge \mathbf{x}_{ref} = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= (-\mathbf{x}_{ref} \wedge (k_1\mathbf{x}'_p - k_1\mathbf{x}_{ref} - \dot{\mathbf{x}}_{ref}) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge \mathbf{x}'_p) \cdot \mathbf{e}_\infty, \\ &= (-k_1\mathbf{x}_{ref} \wedge \mathbf{x}'_p + \mathbf{x}_{ref} \wedge \dot{\mathbf{x}}_{ref} + \dot{\mathbf{x}}_{ref} \wedge \mathbf{x}'_p) \cdot \mathbf{e}_\infty. \end{aligned} \quad (5.9)$$

**5.1. CONTROL DE SEGUIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS EN 3D CON
CINEMÁTICA DIFERENCIAL**

En (5.2) se definió una señal de error para dos puntos conformales, formalmente, sean dos puntos euclidianos x_e y y_e y sus respectivas transformaciones conformales x_c y y_c , se cumple

$$(y_c \wedge x_c) \cdot e_\infty = x_e - y_e, \quad (5.10)$$

donde se aprecia que la diferencia entre dos puntos euclidianos puede representarse en conformal con la expresión anterior, de la cual se desprende la siguiente igualdad para tres puntos conformales x_c , y_c y z_c :

$$(x_c \wedge y_c + y_c \wedge z_c) \cdot e_\infty = (x_c \wedge z_c) \cdot e_\infty. \quad (5.11)$$

Usando (5.11) en (5.9) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= (-k_1 x_{ref} \wedge x'_p + x_{ref} \wedge \dot{x}_{ref} + \dot{x}_{ref} \wedge x'_p) \cdot e_\infty, \\ &= (-k_1 x_{ref} \wedge x'_p) \cdot e_\infty + (x_{ref} \wedge \dot{x}_{ref} + \dot{x}_{ref} \wedge x'_p) \cdot e_\infty, \\ &= (-k_1 x_{ref} \wedge x'_p) \cdot e_\infty + (x_{ref} \wedge x'_p) \cdot e_\infty, \\ &= -(k_1 - 1) (x_{ref} \wedge x'_p) \cdot e_\infty, \\ &= -(k_1 - 1) \epsilon_p, \end{aligned} \quad (5.12)$$

la cual es una función definida negativa para $k_1 > 1$. Por lo tanto el origen del sistema (5.8) es un punto de equilibrio global y exponencialmente estable, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x'_p = x_{ref} \quad (5.13)$$

y con esto la ley de control cumple con el objetivo.

En [57] se plantea una función de Lyapunov, con la que se realiza el análisis de estabilidad de (5.8) utilizando AGC. La función candidata de Lyapunov propuesta se expresa como

$$V_{\epsilon_p} = \frac{1}{2} [(\epsilon_p \wedge E) E]^2 \quad (5.14)$$

donde E representa el plano de Minkowski.

Derivando (5.14) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{\epsilon_p} &= [(\epsilon_p \wedge E) E] [(\dot{\epsilon}_p \wedge E) E] = [(\epsilon_p \wedge E) E] [-(k_1 - 1) \epsilon_p \wedge E] E, \\
 &= -(k_1 - 1) [(\epsilon_p \wedge E) E] [(\epsilon_p \wedge E) E], \\
 &= -2(k_1 - 1) V_{\epsilon_p}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

5.1.2. Problema de seguimiento de orientación

De forma similar al problema de seguimiento de posición, un modelo en espacio de estados para la orientación del efector final formulado en términos de una línea de referencia puede ser obtenido como:

$$\begin{aligned}
 \dot{L}'_p &= J_L u, \\
 y_2 &= L'_p,
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde $J_L \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ es el Jacobiano definido en (3.45).

Ahora, sea $L_{ref}(t)$ la línea de referencia para la orientación del efector final expresado en álgebra conformal. El seguimiento del error es definido como:

$$\epsilon_L = L'_p - L_{ref}, \tag{5.17}$$

que representa la diferencia entre la línea del efector final L'_p y la referencia L_{ref} .

Derivando (5.17) y usando (5.16), se tiene:

$$\dot{\epsilon}_L = \dot{L}'_p - \dot{L}_{ref} = J_L u - \dot{L}_{ref}. \tag{5.18}$$

Asumiendo que se conoce la derivada de \dot{L}_{ref} , la ley de control

$$u = -J_L^+ [k_2 \epsilon_L - \dot{L}_{ref}], \tag{5.19}$$

es propuesta para estabilizar el sistema (5.18), donde k_2 es una constante.

5.1. CONTROL DE SEGUIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS EN 3D CON
CINEMÁTICA DIFERENCIAL

El sistema en lazo cerrado es obtenido utilizando (5.18)-(5.19) como:

$$\dot{\epsilon}_L = -k_2 \epsilon_L, \quad (5.20)$$

la cual es una función definida negativa para $k_2 > 0$. Por lo tanto, el origen de sistema (5.18) es un punto de equilibrio global y exponencialmente estable, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_L = 0$, logrando el objetivo de control.

Para evitar singularidades al calcular J_x^+ y J_L^+ , se emplea la técnica de mínimos cuadrados robustos amortiguados propuesta en [38], donde la pseudo-inversa de una matriz J está definida por:

$$J^+ = J^T (JJ^T + \alpha)^{-1} \quad (5.21)$$

donde J^+ , $J^T \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ y α es un factor de amortiguamiento dado por:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 (1 - (h/h^s)), & \text{si } h < h^s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde h^s denota el valor umbral, α_0 es el valor del factor de amortiguamiento en los puntos singulares, y h es definida como:

$$h(\theta) = \sqrt{\det(JJ^T)}.$$

Con esta α adaptable, es posible evitar singularidades, sin afectar el resultado $\dot{\theta}$, por que α es efectiva únicamente cuando la configuración está cerca de una singularidad.

5.2. Control dinámico de caminado en 2D (plano sagital)

A continuación se presenta la aplicación de tres técnicas de control para un robot bípedo en 2D. Se considera $\mathbf{y} \triangleq [\alpha (\beta_L - \beta_R) \gamma_L \gamma_R]^T$ como el vector de salida y $\mathbf{y}_{ref} \triangleq [\alpha_{ref} (\beta_L - \beta_R)_{ref} \gamma_{Lref} \gamma_{Rref}]^T$ como el vector de referencia para la salida, el error se define como el vector $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{ref}$ y la entrada $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \triangleq [M_{L1}, M_{R1}, M_{L2}, M_{R2}]$. El objetivo de control es que \mathbf{y} siga a \mathbf{y}_{ref} al menos, asintóticamente. Para lograr este objetivo, se propone el controlador PD Exponencial (EF-PD) que regula las ganancias proporcional y derivativa con respecto a las variaciones del error de seguimiento. También se consideran las técnicas de control clásico PD y PD difuso [11, 48] para efectos de comparación.

El problema de control se basa en cuatro controladores independientes una entrada una salida en función de señales de referencias predefinidas que garantizan el caminado.

5.2.1. Control PD Exponencial (EF-PD)

El controlador proporcional-derivativo es ampliamente utilizado en robots rígidos, cuya prueba de estabilidad se encuentra en [33]. El controlador clásico PD, tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = K_p \mathbf{e} + K_d \dot{\mathbf{e}}, \quad (5.22)$$

donde $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}$, \mathbf{e} es el error, $\dot{\mathbf{e}}$ su derivada, K_p la ganancia proporcional y K_d la derivativa. El comportamiento del controlador PD depende de la correcta selección de ganancias, que en muchas ocasiones son obtenidas por prueba y error. Estas ganancias son generalmente constantes, es decir, no se adaptan en línea.

En este trabajo se propone una modificación al controlador PD clásico que consiste en ajustar los valores de las ganancias proporcional y derivativa de acuerdo al valor del error de seguimiento. Dicho error se define como $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{e} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ y su derivada $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. La estructura básica propuesta está dada por:

$$\mathbf{u} = E_p(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}} + E_d(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{v}, \quad (5.23)$$

donde

5.2. CONTROL DINÁMICO DE CAMINADO EN 2D (PLANO SAGITAL)

$$E_p(\tilde{q}) = \text{diag} \left\{ K p_i e^{-\varepsilon|\tilde{q}_i|} \right\} = \begin{bmatrix} K p_1 e^{-\varepsilon|\tilde{q}_1|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K p_2 e^{-\varepsilon|\tilde{q}_2|} & & \vdots \\ \vdots & & K p_3 e^{-\varepsilon|\tilde{q}_3|} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K p_4 e^{-\varepsilon|\tilde{q}_4|} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

siendo $i = 1, \dots, 4$ y ε una constante positiva,

$$E_d(\tilde{q}) = \text{diag} \left\{ K d_i e^{-\varepsilon|\dot{\tilde{q}}_i|} \right\} = \begin{bmatrix} K d_1 e^{-\varepsilon|\dot{\tilde{q}}_1|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K d_2 e^{-\varepsilon|\dot{\tilde{q}}_2|} & & \vdots \\ \vdots & & K d_3 e^{-\varepsilon|\dot{\tilde{q}}_3|} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K d_4 e^{-\varepsilon|\dot{\tilde{q}}_4|} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$v = SL\tilde{q},$$

$$S = \text{diag} \left\{ \text{sign}(\tilde{q}_i)\tilde{q}_i \right\} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\tilde{q}_1)\tilde{q}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{sign}(\tilde{q}_2)\tilde{q}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \text{sign}(\tilde{q}_3)\tilde{q}_3 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \text{sign}(\tilde{q}_4)\tilde{q}_4 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$L = -\beta \text{diag} \left\{ \text{sign}(\tilde{q}_i)\dot{\tilde{q}}_i \right\} = -\beta \begin{bmatrix} \text{sign}(\tilde{q}_1)\dot{\tilde{q}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{sign}(\tilde{q}_2)\dot{\tilde{q}}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \text{sign}(\tilde{q}_3)\dot{\tilde{q}}_3 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \text{sign}(\tilde{q}_4)\dot{\tilde{q}}_4 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

donde β es constante.

Incluyendo el control EF-PD (5.23) en la ecuación del sistema en lazo cerrado, se obtiene:

$$\ddot{\bar{q}} = -M^{-1}(q) [C(q, \dot{q})\dot{\bar{q}} + G(q) + E_p(\bar{q})\dot{\bar{q}} + E_d(\dot{\bar{q}})\dot{\bar{q}} + v], \quad (5.28)$$

donde $M(q) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz de coriolis y $G(q) \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ el vector de gravedad.

Finalmente se despeja $M(q)\ddot{\bar{q}}$ de (5.28) obteniendo:

$$M(q)\ddot{\bar{q}} = -C(q, \dot{q})\dot{\bar{q}} - G(q) - E_p(\bar{q})\dot{\bar{q}} - E_d(\dot{\bar{q}})\dot{\bar{q}} - v. \quad (5.29)$$

Prueba de estabilidad del controlador EF-PD

A continuación se presenta el análisis de estabilidad para el controlador EF-PD, partiendo de la siguiente la función candidata de Lyapunov:

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T M(q)\dot{\bar{q}} + \frac{1}{2}\bar{q}^T E_p(\bar{q})\bar{q}, \quad (5.30)$$

donde $V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) > 0$.

Derivando (5.30) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \dot{M}(q)\dot{\bar{q}} + \dot{\bar{q}}^T M(q)\ddot{\bar{q}} + \dot{\bar{q}}^T E_p(\bar{q})\dot{\bar{q}} - \frac{\varepsilon}{2}\dot{\bar{q}}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q}, \quad (5.31)$$

donde

$$W = \text{diag} \{ \text{sign}(\bar{q}_i)\dot{\bar{q}}_i \} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\bar{q}_1)\dot{\bar{q}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{sign}(\bar{q}_2)\dot{\bar{q}}_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \text{sign}(\bar{q}_3)\dot{\bar{q}}_3 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \text{sign}(\bar{q}_4)\dot{\bar{q}}_4 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Sustituyendo (5.29) en (5.31) se llega a:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \dot{M}(q)\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q})\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T G(q) - \dot{\bar{q}}^T E_p(\bar{q})\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T E_d(\dot{\bar{q}})\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T v + \dot{\bar{q}}^T E_p(\bar{q})\dot{\bar{q}} - \frac{\varepsilon}{2}\dot{\bar{q}}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q}, \quad (5.33)$$

5.2. CONTROL DINÁMICO DE CAMINADO EN 2D (PLANO SAGITAL)

donde se aplica la propiedad $\ddot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0$ descrita en [33] y al eliminar el tercer término con el sexto se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= -\ddot{q}^T E_d(\dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} - \frac{\varepsilon}{2} \ddot{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q} - \ddot{q}^T v, \\ &= -\ddot{q}^T E_d(\dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} - \frac{\varepsilon}{2} \ddot{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q} - v^T \dot{\bar{q}}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde

$$\begin{aligned} v^T &= \ddot{q}^T L S, \\ &= -\ddot{q}^T \beta \text{sign}(W) \text{diag} \{ \text{sign}(\bar{q}_i) \dot{\bar{q}}_i \}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

considerando

$$\text{sign}\{W\} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\text{sign}(\bar{q}_1) \dot{\bar{q}}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{sign}(\text{sign}(\bar{q}_2) \dot{\bar{q}}_2) & & \vdots \\ \vdots & & \text{sign}(\text{sign}(\bar{q}_3) \dot{\bar{q}}_3) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \text{sign}(\text{sign}(\bar{q}_4) \dot{\bar{q}}_4) \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Sustituyendo (5.35) en (5.34) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= -\ddot{q}^T E_d(\dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} - \ddot{q}^T G(q) - \frac{\varepsilon}{2} \ddot{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q} + \ddot{q}^T \beta \text{sign}(W) \text{diag} \{ \text{sign}(\bar{q}_i) \dot{\bar{q}}_i \} \dot{\bar{q}}, \\ &= -\ddot{q}^T E_d(\dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} - \ddot{q}^T G(q) - \frac{\varepsilon}{2} \ddot{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q} + \ddot{q}^T \beta \text{sign}(W) \text{diag} \{ \text{sign}(\bar{q}_i) \dot{\bar{q}}_i \} \bar{q}, \\ &= -\ddot{q}^T E_d(\dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} - \ddot{q}^T G(q) - \frac{\varepsilon}{2} \ddot{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q} + \ddot{q}^T [\beta \text{sign}(W) W] \bar{q}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde $E_d > 0$, $E_p > 0$, $\text{sign}(W)W > 0$ y considerando $\beta = -\bar{\beta}$ y con $\bar{\beta} > 0$ se tiene:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -\dot{\bar{q}}^T E_d(\dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T G(q) - \bar{q}^T \left[\tilde{\beta} \text{sign}(W) W \right] \bar{q} - \frac{\varepsilon}{2} \bar{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q}, \quad (5.38)$$

donde los términos $-\dot{\bar{q}}^T G(q)$ y $-\frac{\varepsilon}{2} \bar{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q}$ se consideran como perturbaciones debido a que no están definidos, por tal motivo, para demostrar que $\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq 0$ se considerarán como $+\dot{\bar{q}}^T G(q)$ y $+\frac{\varepsilon}{2} \bar{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q}$, quedando (5.38) expresada como:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -\dot{\bar{q}}^T E_d(\dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} + \dot{\bar{q}}^T G(q) - \bar{q}^T \left[\tilde{\beta} \text{sign}(W) W \right] \bar{q} + \frac{\varepsilon}{2} \bar{q}^T [E_p(\bar{q})W] \bar{q}. \quad (5.39)$$

Teniendo en cuenta que para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales [33], existe una constante γ tal que $\|G(q)\| \leq \gamma$ y considerando:

$$\begin{aligned} \bar{q}^T \bar{q} &= \|\bar{q}\|^2, & \|G(q)\| &\leq \gamma, \\ \dot{\bar{q}}^T \dot{\bar{q}} &= \|\dot{\bar{q}}\|^2, & \text{sign}(W) W &= \|W\|, \\ -E_d(\dot{\bar{q}}) &\leq -\lambda_{\min}\{E_d\}, & \|W\| &\leq \lambda_{\max}\{W\}, \\ E_p(\bar{q}) &\leq \lambda_{\max}\{E_p\}, & -\|W\| &\leq -\lambda_{\min}\{W\}, \end{aligned}$$

donde $\|W\| = \text{diag}\{\|W_i\|\}$ con $i = 1, \dots, 4$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) &\leq -\lambda_{\min}\{E_d\} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \gamma \|\dot{\bar{q}}\| - \|\bar{q}\|^2 \left[\tilde{\beta} \|W\| \right] + \|\bar{q}\|^2 \left[\frac{\varepsilon}{2} \lambda_{\max}\{E_p\} \|W\| \right], \\ &\leq -\lambda_{\min}\{E_d\} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \gamma \|\dot{\bar{q}}\| - \|\bar{q}\|^2 \left[\tilde{\beta} \lambda_{\min}\{W\} \right] + \|\bar{q}\|^2 \left[\frac{\varepsilon}{2} \lambda_{\max}\{E_p\} \lambda_{\max}\{W\} \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Sumando y restando el término $\theta \lambda_{\min}\{E_d\} \|\dot{\bar{q}}\|^2$, donde $0 < \theta < 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) &\leq -\lambda_{\min}\{E_d\} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \gamma \|\dot{\bar{q}}\| + \theta \lambda_{\min}\{E_d\} \|\dot{\bar{q}}\|^2 - \theta \lambda_{\min}\{E_d\} \|\dot{\bar{q}}\|^2 \\ &\quad - \|\bar{q}\|^2 \left[\tilde{\beta} \lambda_{\min}\{W\} \right] + \|\bar{q}\|^2 \left[\frac{\varepsilon}{2} \lambda_{\max}\{E_p\} \lambda_{\max}\{W\} \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.2. CONTROL DINÁMICO DE CAMINADO EN 2D (PLANO SAGITAL)

Si se factoriza el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq & -\lambda_{\min}\{E_d\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2 [1 - \theta] - \|\dot{\tilde{q}}\| [\theta \lambda_{\min}\{E_d\} \|\dot{\tilde{q}}\| - \gamma] \\ & - \|\tilde{q}\|^2 [\tilde{\beta} \lambda_{\min}\{W\}] + \|\tilde{q}\|^2 \left[\frac{\epsilon}{2} \lambda_{\max}\{E_p\} \lambda_{\max}\{W\} \right], \end{aligned} \quad (5.42)$$

que es definida negativa considerando que:

$$\|\dot{\tilde{q}}\| > \frac{\gamma}{\theta \lambda_{\min}\{E_d\}} = \delta \quad \text{y} \quad \tilde{\beta} > \frac{\epsilon \lambda_{\max}\{E_p\} \lambda_{\max}\{W\}}{2 \lambda_{\min}\{W\}}. \quad (5.43)$$

De aquí, se concluye que la solución del sistema es global, uniforme y últimamente acotada, donde \tilde{q} tiende a una vecindad cercana a cero de radio δ , cumpliendo el objetivo de control.

5.2.2. Algoritmo de control PD difuso

Para evaluar en comportamiento del controlador propuesto, se comparará con el controlador PD difuso, desarrollado en [48] y utilizado en [49, 50, 52]. La ley de control para el PD difuso está dada para cada región descrita en la Figura 5.1

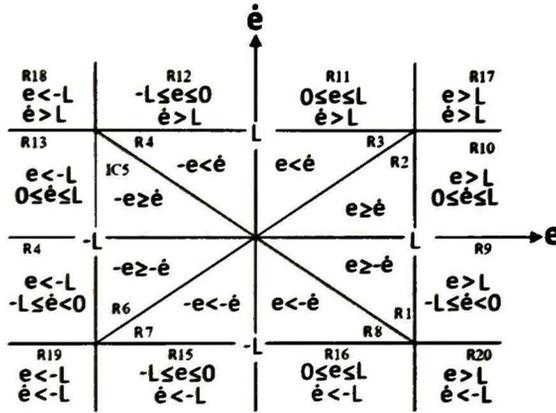


Figura 5.1: Regiones R1 a R20 para las entradas e y \dot{e} .

$$u = \begin{cases} \frac{G(K_p e + K_d \dot{e})}{2(2L - K_p |e|)} & \text{en R1, R2, R5, R6} \\ \frac{G(K_p e + K_d \dot{e})}{2(2L - K_d |\dot{e}|)} & \text{en R3, R4, R7, R8} \\ \frac{G(L + K_d \dot{e})}{2L} & \text{en R9, R10} \\ \frac{G(L + K_p e)}{2L} & \text{en R11, R12} \\ \frac{-G(L - K_d \dot{e})}{2L} & \text{en R13, R14} \\ \frac{-G(L - K_p e)}{2L} & \text{en R15, R16} \\ G & \text{en R17} \\ -G & \text{en R19} \\ 0 & \text{en R18, R20} \end{cases} \quad (5.44)$$

donde K_p y K_d son las ganancias proporcional y derivativa, G es el máximo valor de salida y L es un valor constante que debe cumplir con $K_p |e| < L$ y $K_d |\dot{e}| < L$.

5.3. Control dinámico de caminado en 3D

En esta sección, se resuelve el seguimiento de trayectorias de caminado bio-inspiradas para cada grado de libertad de las piernas de un robot bípedo, utilizando el modelo dinámico obtenido con *AGC*.

5.3.1. Señales bio-inspiradas

Las señales de referencia bio-inspiradas para cada articulación fueron generadas con la plataforma de simulación *HRSP* [40], teniendo en cuenta las características física del robot *Mexone*.

Para el desarrollo de *HRSP* se contó con un procedimiento de identificación de parámetros del cuerpo humano en base a un estudio experimental de captura de movimiento utilizando el sistema *VICON-460* con seis cámaras infrarrojas. Las fuerzas de reacción del suelo se midieron con dos sensores de tensión tipo plantilla.

Con este sistema se adquirieron las formas de onda de movimiento por medio de puntos colocados en diferentes partes de un ser humano (cabeza, hombros, brazos, muslos, rodillas, tobillos, pies, etc). Aplicando redes neuronales a estas ondas, se adaptan las funciones de membresía de un módulo de inferencia difuso para escalar las ondas adquiridas a las dimensiones propias del humanoide *Mexone*. Las ondas resultantes llamadas bio-inspiradas, son utilizadas como señales de referencia para el control del movimiento del humanoide [41].

5.3.2. Diferenciador robusto exacto

Las trayectorias de referencia (y_{ref}) para cada articulación del robot humanoide *Mexone* se obtienen con el simulador *HRSP* [40]. Para poder implementar la ley de control definida en (5.52), es necesario conocer la primera (\dot{y}_{ref}) y segunda derivada (\ddot{y}_{ref}) de la referencia dada.

Utilizando el diferenciador robusto basado en modos deslizantes de alto orden propuesto en [56], es fácil obtener las cinco derivadas de alguna función o señal. En este caso sólo interesa conocer las dos primeras derivadas. La ventaja de utilizar el diferenciador de 5^{to} orden es que su salida es mas suave en comparación de la obtenida con el diferenciador de 3^{er} orden.

La estructura del diferenciador de 5^{to} orden se define a continuación.

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= v_0, & v_0 &= -12|z_0 - y_{ref}(t)|^{5/6} \text{sign}(z_0 - y_{ref}(t)) + z_1, \\ \dot{z}_1 &= v_1, & v_1 &= -8|z_1 - v_0|^{4/5} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2, \\ \dot{z}_2 &= v_2, & v_2 &= -5|z_2 - v_1|^{3/4} \text{sign}(z_2 - v_1) + z_3, \\ \dot{z}_3 &= v_3, & v_3 &= -3|z_3 - v_2|^{2/3} \text{sign}(z_3 - v_2) + z_4, \\ \dot{z}_4 &= v_4, & v_4 &= -1.5|z_4 - v_3|^{1/2} \text{sign}(z_4 - v_3) + z_5, \\ \dot{z}_5 &= -1.1 \text{sign}(z_5 - v_4), \end{aligned}$$

donde $i = 1, \dots, 5$ y z_i es la estimación i ^{ésima} derivada de y_{ref} . La Figura 5.2 muestra las señales de referencia bio-inspiradas para los seis grados de libertad de la pierna izquierda y las salidas del diferenciador robusto exacto para la primera y segunda derivada.

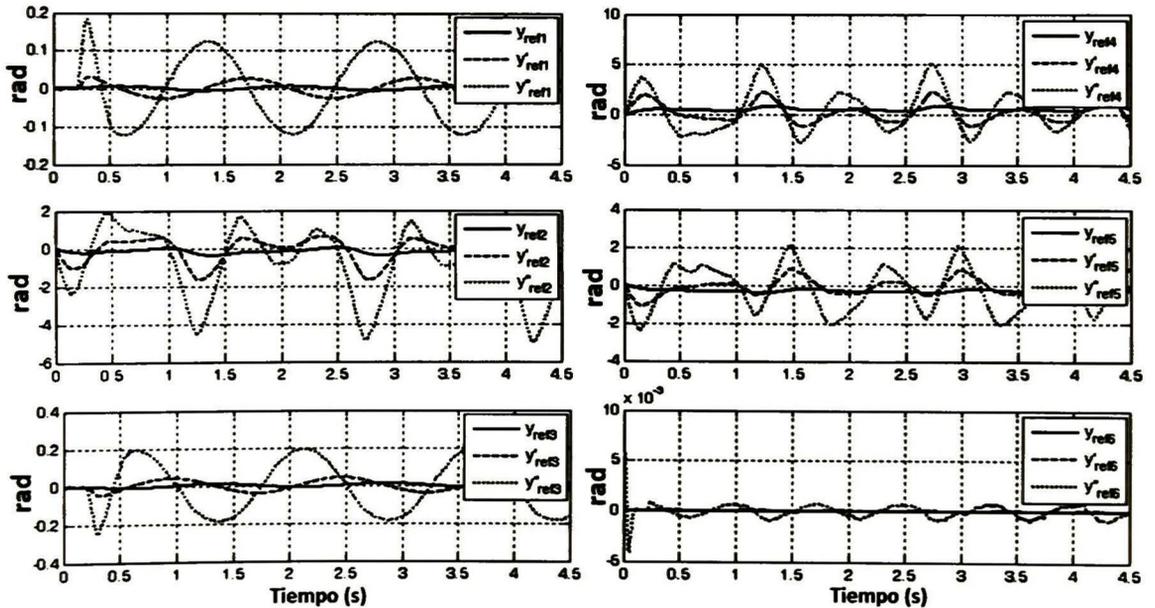


Figura 5.2: Referencias bio-inspiradas (y_{ref}), con su primera (\dot{y}_{ref}) y segunda derivada (\ddot{y}_{ref}).

5.3.3. Control por modos deslizantes de primer orden

Empleando el modelo dinámico $\delta I\ddot{q} + V^T m(V\ddot{q} + \dot{V}\dot{q} + a) = \tau$ calculado con AGC (4.13) se calcula la matriz de inercia, de coriolis y fuerzas gravitacionales. Obteniendo así la común ecuación dinámica (4.14):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau.$$

Definiendo las variables de estado como $x_1 = q \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$, $x_2 = \dot{q} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$, $y = x_1$ y la señal de control como $\tau \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$; se tiene que el modelo en espacio de estados está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}(Cx_2 + G) + M^{-1}\tau + \lambda, \end{aligned} \tag{5.45}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ es un vector de perturbaciones externas.

Se define el error de seguimiento como:

$$e_1 = x_1 - y_{ref}(t). \tag{5.46}$$

donde y_{ref} son las referencias bio-inspiradas para el robots bípedo. Entonces, la dinámica para e_1 está dada por:

$$\dot{e}_1 = x_2 - \dot{y}_{ref}(t). \tag{5.47}$$

Usando x_2 como pseudo-control, se obtiene la referencia x_{2ref} como:

$$x_{2ref} = -k_1 \tanh(\varepsilon_1, e_1) + \dot{y}_{ref}(t), \tag{5.48}$$

donde la derivada de \dot{x}_{2ref} es:

$$\dot{x}_{2ref} = -k_1 \varepsilon_1 \operatorname{sech}^2(\varepsilon_1, e_1) \dot{e}_1 + \ddot{y}_{ref}(t). \tag{5.49}$$

CAPÍTULO 5. ESTRATEGIAS DE CONTROL DE CAMINADO

Ahora, se define el error para el segundo bloque como:

$$e_2 = x_2 - x_{2ref}, \quad (5.50)$$

esta dinámica puede ser obtenida como:

$$\dot{e}_2 = -M^{-1}(Cx_2 + G) + M^{-1}\tau - \dot{x}_{2ref} + \lambda. \quad (5.51)$$

Para que \dot{e}_2 converja a cero, se diseña la ley de control τ siguiente:

$$\tau = Cx_2 + G - k_2M \tanh(\varepsilon_2, e_2) + M\dot{x}_{2ref}. \quad (5.52)$$

Al sustituir (5.52) en (5.51), la dinámica en lazo cerrado se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 \tanh(\varepsilon_1, e_1) + e_2, \\ \dot{e}_2 &= -k_2 \tanh(\varepsilon_2, e_2) + \lambda. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Prueba de estabilidad

Se propone la función de Lyapunov para e_2 como:

$$V_2 = \frac{1}{2}e_2^T e_2, \quad (5.54)$$

que es definida positiva y su derivada es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= e_2^T \dot{e}_2 = e_2^T [-k_2 \tanh(\varepsilon_2, e_2) + \lambda], \\ &= -k_2 e_2^T \tanh(\varepsilon_2, e_2) + e_2^T \lambda. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Considerando las siguientes igualdades:

$$\tanh(\varepsilon, e_2) = \text{sign}(\varepsilon, e_2) = \text{sign}(e_2) - \Delta(\varepsilon, e_2), \quad (5.56)$$

donde $\Delta(\varepsilon, e_2)$ es la diferencia entre la función signo y la función sigmoïdal, y sustituyendo en la derivada (5.55) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_2 e_2^T [\text{sign}(e_2) - \Delta(\varepsilon_2, e_2)] + e_2^T \lambda, \\ &= -k_2 e_2^T \text{sign}(e_2) + k_2 e_2^T \Delta(\varepsilon_2, e_2) + e_2^T \lambda. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \|x \text{sign}(x)\| &= \|x\|, \\ \|a b\| &\leq \|a\| \|b\|, \\ \|\lambda\| &\leq \beta, \\ \|\Delta(\varepsilon_1, e_1)\| &\leq \delta_1, \\ \|\Delta(\varepsilon_2, e_2)\| &\leq \delta_2, \end{aligned} \quad (5.58)$$

donde $0 < \delta_1 < 1$ y $0 < \delta_2 < 1$. Aplicando estas desigualdades en (5.57), al factorizar se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -k_2 \|e_2\| + k_2 \|e_2\| \|\Delta(\varepsilon_2, e_2)\| + \|e_2\| \|\lambda\|, \\ &\leq -k_2 \|e_2\| + k_2 \|e_2\| \delta_2 + \|e_2\| \beta, \\ &\leq -k_2 (1 - \delta_2) \|e_2\| + \beta \|e_2\|, \end{aligned} \quad (5.59)$$

Para que (5.59) sea definida negativa se debe cumplir la siguiente restricción:

$$k_2 > \frac{\beta}{1 - \delta_2}. \quad (5.60)$$

Siguiendo ahora el mismo procedimiento de e_2 para e_1 se tiene:

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^T e_1, \quad (5.61)$$

que es también es definida positiva y su derivada es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T [-k_1 \tanh(\epsilon_1, e_1)] = -k_1 e_1^T \tanh(\epsilon_1 e_1), \\ &\leq -k_1 \|e_1\| + k_1 \|e_1\| \|\Delta(\epsilon_1, e_1)\|, \\ &\leq -k_1 \|e_1\| + k_1 \|e_1\| \delta_1, \\ &\leq -k_1 (1 - \delta_1) \|e_1\|. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Por lo tanto, para que (5.62) sea definida negativa se debe cumplir la siguiente restricción:

$$k_1 (1 - \delta_1) > 0. \quad (5.63)$$

Si la condiciones (5.60) y (5.63) se cumplen, el sistema (5.53) es global y asintóticamente estable.

5.3.4. Control de caminado por modos deslizantes de segundo orden

Una de las ventajas de usar modos deslizantes de primer orden es el rechazo a perturbaciones, pero en ocasiones resulta difícil de implementarlo en tiempo real por que generan alta frecuencia en la salida de control. Para dar solución a esto se puede emplear la técnica de modos deslizantes de segundo orden, llamado *Super Twisting* [54, 55].

Partiendo de la representación en variables de estados (5.45) para e_1 se tiene:

$$e_1 = x_1 - y_{ref}. \quad (5.64)$$

Derivando (5.64) se obtiene:

$$\dot{e}_1 = x_2 - \dot{y}_{ref} = -k_1 e_1. \quad (5.65)$$

Usando x_2 como pseudo-control para este bloque, se obtiene la referencia x_{2ref} como:

$$x_{2ref} = \dot{y}_{ref} - k_1 e_1. \quad (5.66)$$

Ahora, para el segundo bloque se define el error como

$$e_2 = x_2 - x_{2ref}, \quad (5.67)$$

y al derivar se tiene:

$$\dot{e}_2 = -M^{-1}(Cx_2 + G) + M^{-1}\tau + \lambda - \dot{x}_{2ref}, \quad (5.68)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ es un vector de perturbaciones externas y

$$\tau = \tau_0 + \tau_1, \quad (5.69)$$

donde τ_0 es el control que elimina los términos conocidos del sistema y τ_1 se diseña para absorber las perturbaciones. Pudiendo expresar (5.68) de la siguiente forma:

$$\dot{e}_2 = -M^{-1}(Cx_2 + G) + M^{-1}\tau_0 + M^{-1}\tau_1 + \lambda - \dot{x}_{2ref}, \quad (5.70)$$

donde

$$\tau_0 = (Cx_2 + G) + M\dot{x}_{2ref}, \quad (5.71)$$

eliminando así de (5.70) la parte conocida del sistema, entonces \dot{e}_2 queda expresada como:

$$\dot{e}_2 = M^{-1}\tau_1 + \lambda. \quad (5.72)$$

Proponiendo τ_1 con modos deslizantes de segundo orden [55] para (5.72) se tiene:

$$\tau_1 = M \left(-k_2 |e_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_2) + \mu \right), \quad (5.73)$$

donde μ una variable auxiliar de la técnica *Super Twisting*.

Sustituyendo (5.73) en (5.72) resulta:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= -k_2 |e_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_2) + \mu + \lambda, \\ \dot{\mu} &= -k_3 \text{sign}(e_2). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Prueba de estabilidad

Según Moreno, J. A. [55], la prueba de estabilidad supone que las perturbaciones del sistema (5.74) son globalmente acotadas por:

$$|\lambda| \leq \delta_1 |e_2|^{1/2}, \quad (5.75)$$

donde $\delta_1 \geq 0$. Entonces el origen es un punto de equilibrio fuerte, global y asintóticamente estable si las ganancias propuestas en [55] satisfacen:

$$\begin{aligned} k_2 &> 2\delta_1, \\ k_3 &> k_2 \frac{5\delta_1 k_2 + 4\delta_1^2}{2(k_2 - 2\delta_1)}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Además, todas las trayectorias convergen en tiempo finito al origen, acotadas por $\bar{T} = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\tilde{\gamma}}$, donde x_0 es el estado inicial y $\tilde{\gamma}$ es una constante que depende de las ganancias k_2 , k_3 y del coeficiente de perturbación δ_1 .

Para el sistema (5.74), se propone en [55] la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = 2k_3 |e_2| + \frac{1}{2} \left(k_2 |e_2|^{1/2} \text{sing}(e_2) - \mu \right)^2 \quad (5.77)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov (5.77) se tiene:

$$\dot{V} = -\frac{1}{|e_2|^{1/2}} \zeta^T Q \zeta + \frac{\lambda}{|e_2|^{1/2}} \eta_1^T \zeta, \quad (5.78)$$

donde $\eta_1^T = \left[\left(2k_3 + \frac{k_2^2}{2} \right) \quad -\frac{k_2}{2} \right]$, $\zeta^T = \left[\left(|e_2|^{1/2} \text{sing}(e_2) \right) \quad \mu \right]$ y $Q = \frac{k_2}{2} \begin{bmatrix} 2k_3 + k_2^2 & -k_2 \\ -k_2 & 1 \end{bmatrix}$.

Utilizando la cota de la perturbación (5.75) se puede decir que:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|x_1|^{1/2}} \zeta^T \tilde{Q} \zeta, \quad (5.79)$$

donde

$$\tilde{Q} = \frac{k_2}{2} \begin{bmatrix} 2k_3 + k_2^2 - \left(\frac{4k_3}{k_2} + k_2 \right) \delta_1 & -(k_2 + 2\delta_1) \\ -(k_2 + 2\delta_1) & 1 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Teniendo que (5.79) es definida negativa si $\tilde{Q} > 0$. Esta condición se cumple bajo las condiciones indicadas en (5.76). De esta forma los estados convergen a cero en un tiempo finito antes de $T = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\tilde{\gamma}}$ unidades de tiempo, donde $\tilde{\gamma} = \frac{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\} \lambda_{\min}\{\tilde{Q}\}}{\lambda_{\max}\{P\}}$. Con esto se logra que $x_2 = x_{2ref}$ y $e_2 = 0$ en la ecuación (5.67).

Al sustituir (5.66) en (5.65) se comprueba que:

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1. \quad (5.81)$$

Se propone la función de Lyapunov para (5.81) como:

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^T e_1, \quad (5.82)$$

que es definida positiva y su derivada es:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T [-k_1 e_1] = -e_1^T k_1 e_1, \\ &\leq -k_1 \|e_1\|^2\end{aligned}\tag{5.83}$$

por lo que (5.83) es definida negativa y cuyo origen es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable para:

$$k_1 > 0.\tag{5.84}$$

Por lo tanto los estados convergen a cero en un tiempo finito cumpliendo las cotas indicadas en (5.76) y (5.84), alcanzando el objetivo de control.

5.3. CONTROL DINÁMICO DE CAMINADO EN 3D

Capítulo 6

Resultados experimentales

6.1. Seguimiento de trayectoria en 3D del centro de masas con cinemática diferencial

Con el uso de cinemática diferencial, algebra geométrica conformal, MatLab, CLUCalc [45] y el modelo cinemático en 3D de las piernas de un humanoide, se realizó el seguimiento de trayectoria vertical, horizontal y circular del centro de masas, controlando la posición y orientación de la cadera.

El control de pose para una las piernas del robot está definido como:

$$u_1 = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6]^T$$

es obtenida con $u = -J^+([\dot{x}_{ref} \wedge (k\epsilon_p)] \cdot e_\infty)$ descrita en (5.6).

Partiendo de la condición vista en la subsección 5.1.1, donde $k_1 > 1$, las ganancias fueron ajustadas obteniendo:

$$k_1 = [1.9, 1.9, 1.9, 3.2, 3.2, 3.2]^T$$

Para mover la posición del centro de masas se define los siguientes vectores de referencias:

$$x_{ref1} = [0.3238, 4.2 - 0.3 \sin(0.5\pi t), 1.1]^T \quad (6.1)$$

**6.1. SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA EN 3D DEL CENTRO DE MASAS CON
CINEMÁTICA DIFERENCIAL**

$$x_{ref2} = [0.32, 4, 1.1 - 0.4 \sin(2t)]^T \quad (6.2)$$

$$x_{ref3} = [0.32, 4 - 0.2 \cos(2t), 1.1 - 0.2 \sin(2t)]^T. \quad (6.3)$$

donde x_{ref1} es el vector de referencias de posición para una trayectoria vertical, x_{ref2} para una trayectoria horizontal y x_{ref3} para una trayectoria circular.

El vector de referencia de orientación está dado por:

$$L_{ref} = [0, 0, 1]^T \quad (6.4)$$

$$\dot{L}_{ref} = [0, 0, 0]^T$$

En la Figura 6.1 muestra la respuesta del seguimiento de posición del centro de masas en cada componente Euclidiano del espacio de estados.

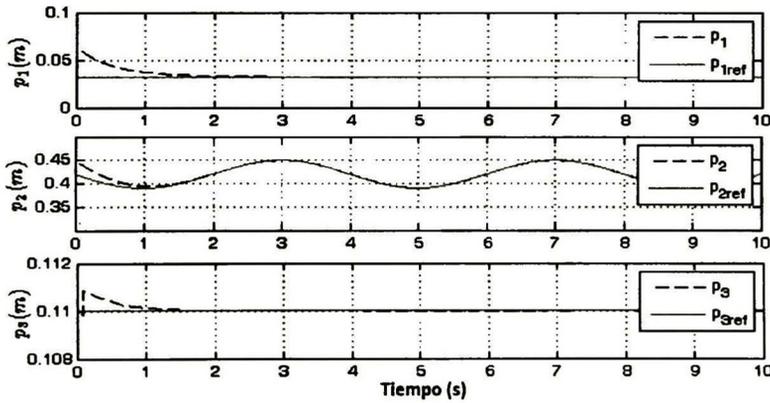


Figura 6.1: Respuesta del seguimiento de posición del centro de masas y sus referencias.

De igual forma en la Figura 6.2, se puede observar el desempeño del control de orientación para cada una de las componentes que definen la orientación de la cadera. El eje O_3 se refiere al eje z que es paralelo a la cadera. En la Figura 6.3 se grafican los valores de la señal de control.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Finalmente, una secuencia de imágenes de la simulación realizada en CLUCalc se muestra en la Figura 6.4. Se puede apreciar que el seguimiento de la referencia vertical es alcanzado. También se puede observar los resultados de simulación para una referencia horizontal en la Figura 6.5 y el seguimiento de una referencia circular en la Figura 6.6.

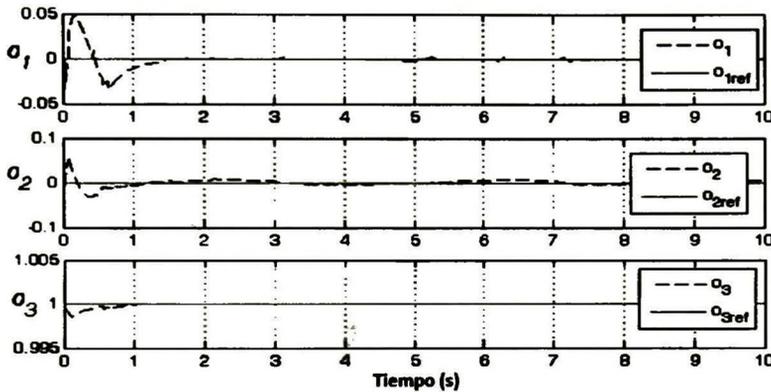


Figura 6.2: Orientación del robot bípedo y sus referencias.

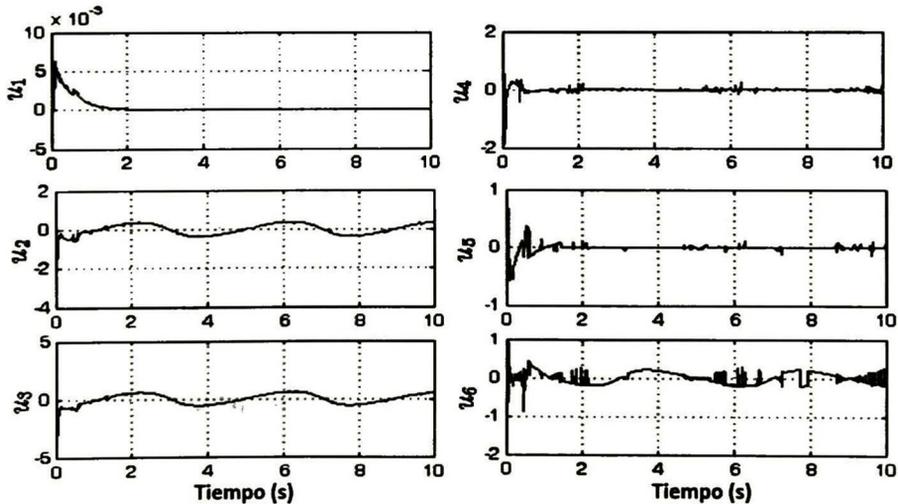


Figura 6.3: Valores de control para la posición y orientación del robot bípedo.

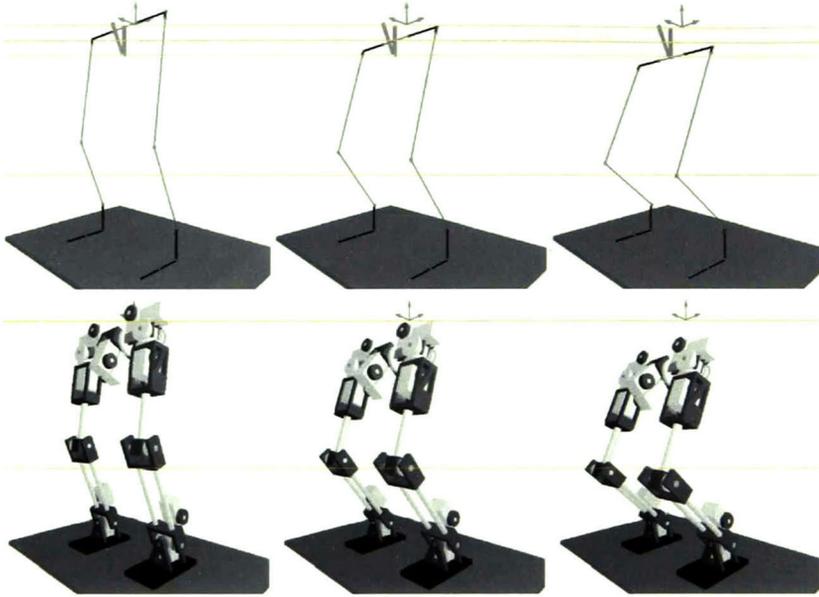


Figura 6.4: Secuencia de imágenes de la simulación para el movimiento vertical (6.1) del centro de masas del robot bípedo utilizando CLUCalc.

6.2. Caminado en 2D de un robot bípedo.

En esta sección se comparará el desempeño del controlador propuesto EF-PD con el controlador clásico PD y con el PD Difuso. Primero se añadirá perturbación a la señal de control, después a los estados, finalmente a los estados y señal de control. El simulador utilizado fue desarrollado por Olli Haavisto y Heikki Hyötyniemi [13], el cual detiene la simulación cuando el bípedo cae o cuando termina el tiempo de simulación.

6.2.1. Experimentos en simulación añadiendo perturbaciones en la señal del control.

Estos experimentos consisten en el seguimiento de una trayectoria predefinida para cada articulación, añadiendo ruido en la señal de control, como se muestra en la Figura 6.7. La

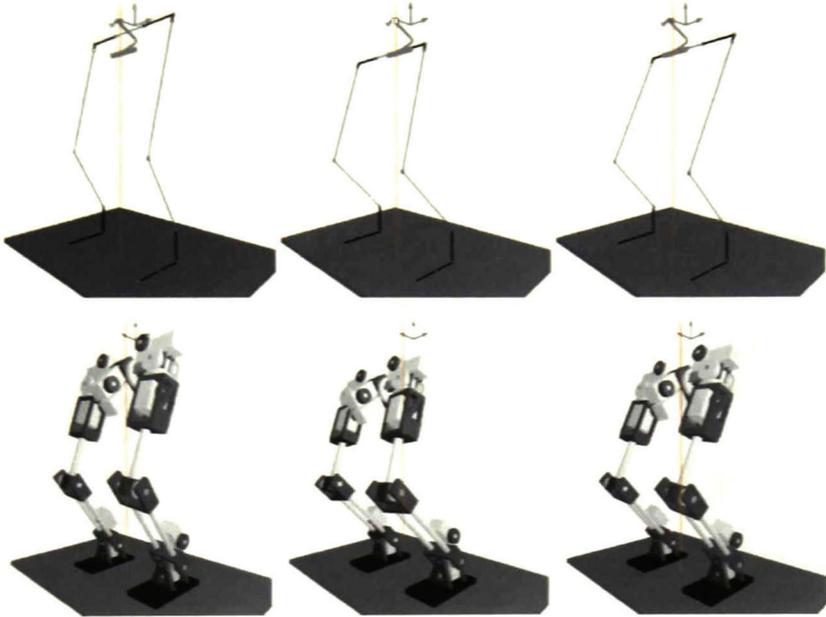


Figura 6.5: Secuencia de imágenes de la simulación para el movimiento horizontal (6.2) del centro de masas del robot bípedo utilizando CLUCalc.

misma perturbación se aplica a cada controlador con el fin de comparar su desempeño.

La Tabla 6.1 muestra las medidas utilizadas en simulación para el bípedo (Figura 4.2).

Parámetros del robot	Longitud (m)	Masa (kg)	Distancia al centro de masas (m)	Inercia ($kg\ m^2$)
Torso	$l_0 = 0.8$	$m_0 = 5$	$r_0 = l_0/2$	$J_0 = (m_0 * (l_0)^2)/12$
Muslo	$l_1 = 0.5$	$m_1 = 2$	$r_1 = l_1/2$	$J_1 = (m_1 * (l_1)^2)/12$
Pantorrilla	$l_2 = 0.5$	$m_2 = 1$	$r_2 = l_2/2$	$J_2 = (m_2 * (l_2)^2)/12$

Tabla 6.1: Parámetros del bípedo.

El caminar consiste en cuatro fases: cuando sólo la pierna izquierda toca el suelo, cuando ambas piernas tocan el suelo, cuando únicamente la pierna derecha toca el suelo y cuando ninguna pierna toca el suelo. Esta última fase sucede cuando el robot corre o brinca. En este trabajo sólo se considera el caminar.

6.2. CAMINADO EN 2D DE UN ROBOT BÍPEDO.

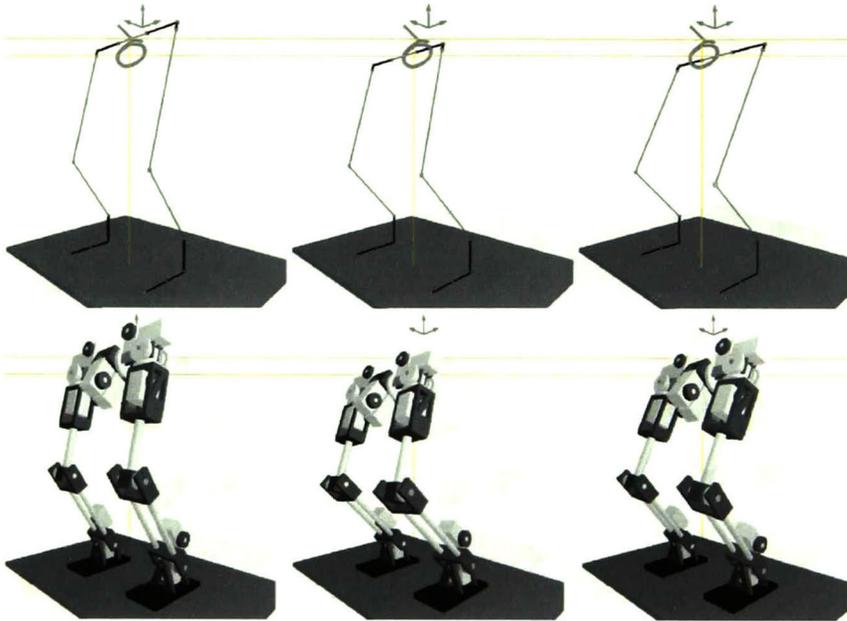


Figura 6.6: Secuencia de imágenes de la simulación para el movimiento elíptico (6.3) del centro de masas del robot bípido utilizando CLUCalc.

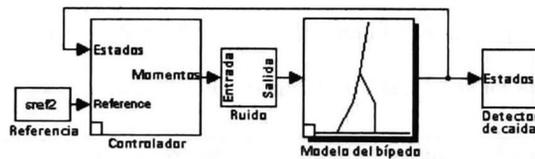


Figura 6.7: Esquema de simulación [13].

Las ganancias para el controlador clásico PD, se asignaron en [13]. Estas mismas ganancias fueron utilizadas para los controladores EF-PD y PD Difuso, con la finalidad de darle cierta ventaja al control clásico PD. Las ganancias (Tablas 6.2, 6.3 y 6.4) son asignadas según la fase de caminado en la que se encuentre el bípido.

El tiempo de simulación es 300 segundos, con perturbación constante aleatoria. Con el controlador PD, el bípido cae ante una perturbación ocurrida a los 12.16 segundos, como

CAPÍTULO 6. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Ganancias proporcionales (K_p)	Muslos $\beta_L - \beta_R$	Rodilla izquierda γ_L	Rodilla derecha γ_R	Torso α
Ambas piernas en el suelo	80	60	60	80
Pierna izquierda en el suelo	90	60	60	80
Pierna derecha en el suelo	90	60	60	80
Ninguna pierna en el suelo	2.5	2.55	2.55	2.5

Tabla 6.2: Ganancias proporcionales (K_p) Para los controladores PD, EF-PD y PD Difuso.

Ganancias derivativas (K_d)	Muslos $\beta_L - \beta_R$	Rodilla izquierda γ_L	Rodilla derecha γ_R	Torso α
Ambas piernas en el suelo	3	3	3	8
Pierna izquierda en el suelo	9	3	1	8.1
Pierna derecha en el suelo	9	1	3	8.1
Ninguna pierna en el suelo	0.25	0.05	0.05	0.4

Tabla 6.3: Ganancias derivativas (K_d) para los controladores PD, EF-PD y PD Difuso.

Ganancia de control (K_u)	Muslos $\beta_L - \beta_R$	Rodilla izquierda γ_L	Rodilla derecha γ_R	Torso α
Ambas piernas en el suelo	2.298	1.888	1.888	2.0395
Pierna izquierda en el suelo	2.298	1.888	1.888	2.0395
Pierna derecha en el suelo	2.298	1.888	1.888	2.0395
Ninguna pierna en el suelo	2.298	1.888	1.888	2.0395

Tabla 6.4: Ganancias de control (K_u) para el controlador PD Difuso.

se muestra en la Figura 6.8. Por el contrario, los controladores EF-PD y PD Difuso no son afectados por dicha perturbación y mantiene el caminado.

Como se puede ver en la Figura 6.8, el controlador EF-PD y el controlador PD Difuso mantienen al bípido caminando hasta que el controlador EF-PD falla a los 176.29 segundos, mientras que el controlador PD Difuso no es afectado por la misma perturbación.

Las Figuras 6.9 y 6.10 muestran la señal de referencia y la respuesta del controlador EF-PD para cada unión. Se grafican los primeros cinco segundos del experimento para tener una mejor apreciación.

Las Figuras 6.11 y 6.12 muestran la señal de referencia y la respuesta del controlador PD Difuso en cada unión. Cabe resaltar que la respuesta de controlador EF-PD y la respuesta del controlador PD Difuso son similares en los primeros cinco segundos.

6.2. CAMINADO EN 2D DE UN ROBOT BÍPEDO.

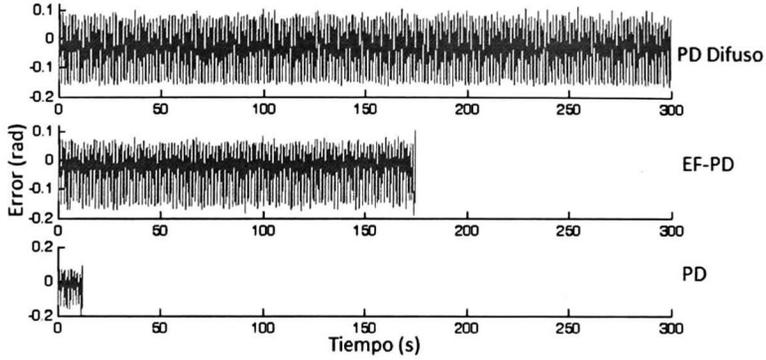


Figura 6.8: Error en la rodilla derecha con ruido añadido a la señal de control.

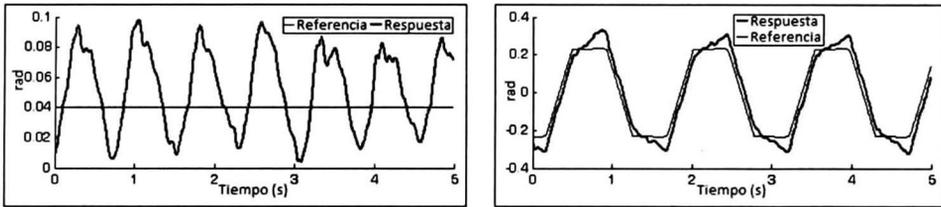


Figura 6.9: α (izquierda) y $\beta_L - \beta_R$ (derecha) para el controlador EF-PD.

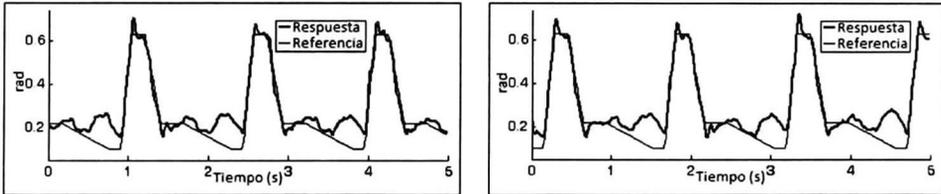


Figura 6.10: γ_L (izquierda) y γ_R (derecha) para el controlador EF-PD.

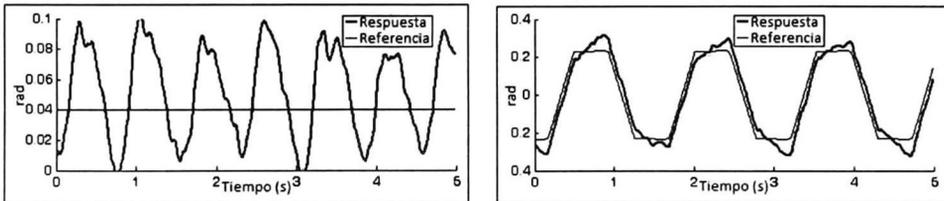


Figura 6.11: α (izquierda) y $\beta_L - \beta_R$ (derecha) para el controlador PD Difuso.

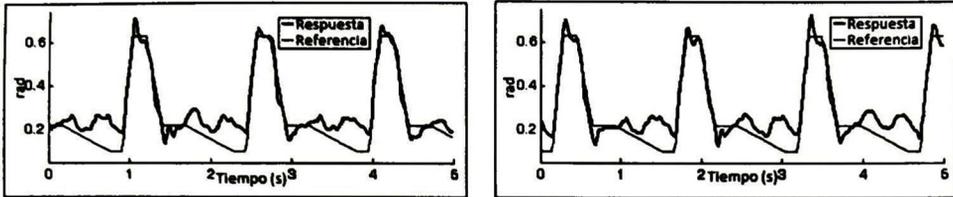


Figura 6.12: γ_L (izquierda) y γ_R (derecha) para el controlador PD Difuso.

Las Figuras 6.13 y 6.14 muestran que el controlador PD tiene bajo desempeño siguiendo la trayectoria deseada.

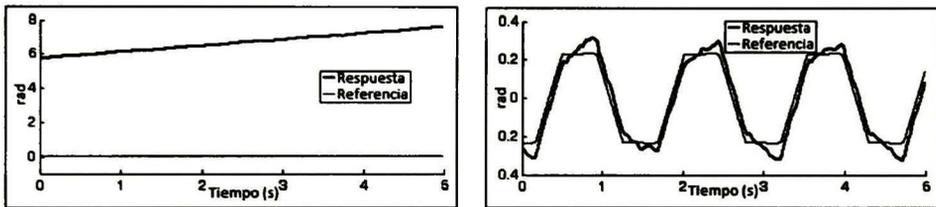


Figura 6.13: α (izquierda) y $\beta_L - \beta_R$ (derecha) para el controlador PD.

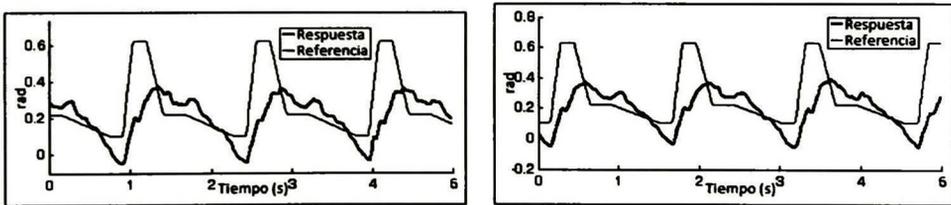


Figura 6.14: γ_L (izquierda) y γ_R (derecha) para el controlador PD.

6.2.2. Experimentos añadiendo perturbaciones en los estados.

En este experimento, se agrega una perturbación que afecta a los estados con el propósito de simular errores en el sensado. Como se muestra en la Figura 6.15 los tres controladores evaluados no son afectados por las perturbaciones aplicadas en los estados, manteniendo al bípodo caminando.

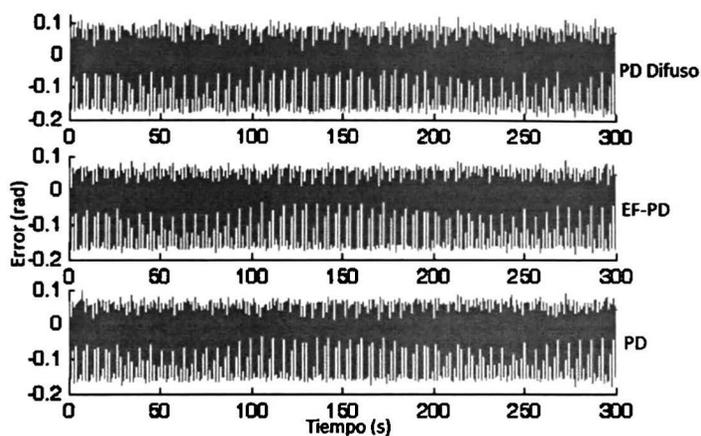


Figura 6.15: Error en la rodilla derecha con ruido en los estados.

6.2.3. Experimentos añadiendo perturbaciones en la señal de control y en los estados.

Para realizar esta simulación se introdujeron perturbaciones tanto en la señal de control y en los estados. En la Figura 6.16 se muestra que el controlador PD no puede mantener al robot caminando después de 10.45 segundos, el control PD Difuso puede conservar el caminado durante 116.88 segundos y el controlador EF-PD tiene un mejor desempeño al mantener el caminado del bípodo 223.85 segundos.

Entre los diferentes enfoques para enfrentar el problema del seguimiento de una señal de referencia para los sistemas dinámicos, en particular para el problema de caminado en 2D de robots bípedos, se exploró el uso del control propuesto PD exponencial (EF-PD), el clásico PD y el controlador difuso PD con el fin de establecer el funcionamiento de este tipo de controladores y para efectos de comparación.

Después de realizar las simulaciones correspondientes para cada controlador, se verifica que el controlador difuso es menos afectado por las perturbaciones, cuando estas son aplicadas en la señal de control o en los estados. Si se perturba al mismo tiempo la señal de control y los estados, el controlador difuso presenta un buen desempeño pero no es el mejor, mientras que el controlador EF-PD tiene un buen desempeño cuando el sistema es perturbado tanto en la

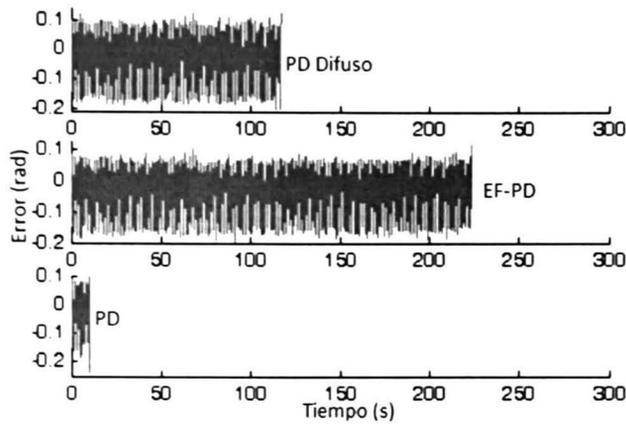


Figura 6.16: Error en la rodilla derecha con ruido en la señal de control y en los estados.

señal de control como en los estados.

Las diferencias que se pueden destacar entre el controlador PD y el EF-PD son que el controlador EF-PD tiene mejor rendimiento, siendo mas robusto ante perturbaciones que el controlador PD. Esto puede explicarse por el hecho de que las ganancias K_p y K_d en el controlador PD son constantes y en el caso del controlador EF-PD, estas se ajustan en base a una función exponencial que depende del error. Por último, en vista de los resultados, se puede concluir que los controladores PD difuso y EF-PD ofrecen un buen rendimiento para robots caminantes.

6.3. Caminado en 3D para un robot bípedo con modos deslizantes de primer orden

La ley de control $\tau = Cx_2 + G - k_2 M \text{sign}(\varepsilon_2, e_2) + M \dot{x}_{2ref}$ fue aplicada al bípedo cuyos puntos conformales y ejes de rotación son definidos en la Figura 4.3, sus longitudes y masas se especifican en el apéndice B de esta tesis.

6.3. CAMINADO EN 3D PARA UN ROBOT BÍPEDO CON MODOS DESLIZANTES DE PRIMER ORDEN

Las condiciones iniciales del vector q para ambas piernas son:

$$q = [0.05 \quad 0.21 \quad 0.08 \quad 0.62 \quad 0.15 \quad 0.00003]^T \quad (6.5)$$

Partiendo de las condiciones $k_1(1 - \delta_1) > 0$ y $k_2 > \frac{\beta}{1 - \delta_2}$ las ganancias obtenidas son:

$$k_1 = [10 \quad 60 \quad 10 \quad 70 \quad 96 \quad 20]^T \quad \text{y} \quad k_2 = [10 \quad 480 \quad 13 \quad 490 \quad 243 \quad 40]^T$$

A continuación se muestran los resultados para la pierna izquierda. Las señales utilizadas como perturbaciones se pueden apreciar en la Figura 6.17 a).

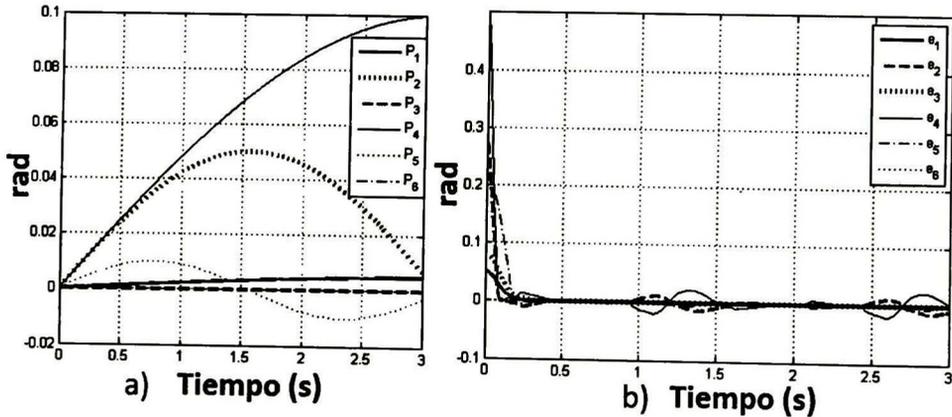


Figura 6.17: a) Perturbaciones y b) Error de seguimiento (Modos deslizantes primer orden).

La respuesta de seguimiento para las seis articulaciones de la pierna izquierda se representan en la Figura 6.18. Se puede observar que el objetivo de control se cumple corto tiempo.

En la Figura 6.17 b) se muestra que las seis variables correspondientes al error convergen a una pequeña vecindad cercana a cero. Finalmente en la Figura 6.19 se muestran los torques aplicados en los motores. Debido a la naturaleza del control por modos deslizantes de primer orden, se puede notar que tienen alta frecuencia, también conocida como *chattering*.

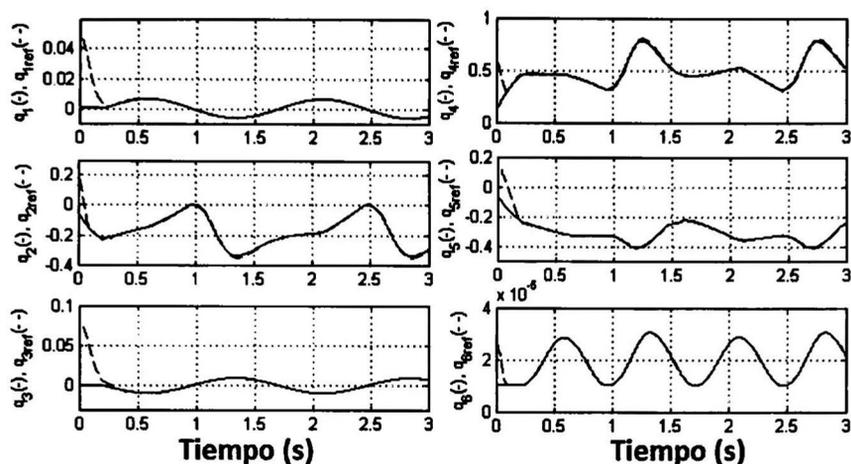


Figura 6.18: Seguimiento de referencias bio-inspiradas (Modos deslizantes primer orden).

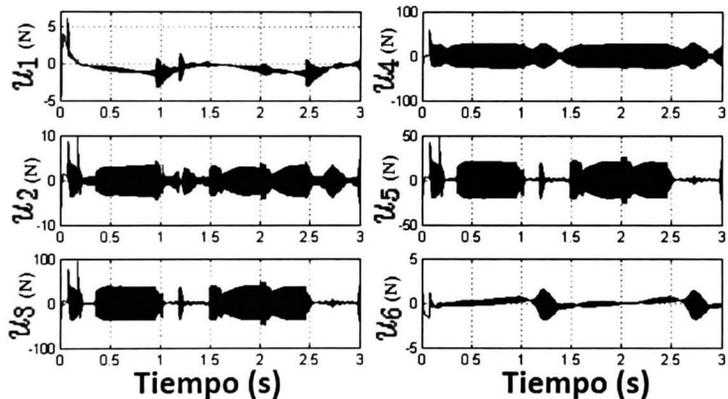


Figura 6.19: Torques aplicados en los motores (Modos deslizantes primer orden).

6.4. Caminado en 3D para un robot bípedo con modos deslizantes de segundo orden

Una de las ventajas del control por modos deslizantes de segundo orden con la técnica *Super Twisting* es que reduce las altas frecuencias en la señal de control. Utilizando la ley de

6.4. CAMINADO EN 3D PARA UN ROBOT BÍPEDO CON MODOS DESLIZANTES DE SEGUNDO ORDEN

control propuesta en (5.69) aplicada al bípido cuyos puntos conformales y ejes de rotación se muestran en la Figura 4.3, considerando las condiciones iniciales indicadas en (6.5).

Partiendo de las condiciones $k_1 > 0$, $k_2 > 2\delta_1$ donde $\delta_1 \geq 0$ y $k_3 > k_2 \frac{5\delta_1 k_2 + 4\delta_1^2}{2(k_2 - 2\delta_1)}$ las ganancias son ajustadas obteniendo:

$$\begin{aligned} k_1 &= [25 \ 140 \ 25 \ 200 \ 50 \ 50]^T \\ k_2 &= [10 \ 200 \ 15 \ 350 \ 200 \ 10]^T \quad y \\ k_3 &= [6 \ 27 \ 6 \ 27 \ 27 \ 6]^T \end{aligned}$$

Los orígenes de los marcos de referencia, el centro de masas para cada eslabón del robot bípido y los valores iniciales de los ejes de rotación son los mismos que se definieron en la sección (6.3). Las perturbaciones aplicadas son las mostradas en la Figura 6.17 a).

Las respuestas de seguimiento para las seis articulaciones de la pierna izquierda se muestran en la Figura 6.20. Notar que el objetivo de control es alcanzado antes de los 0.5 segundos con un error de seguimiento menor a 0.05 radianes en todas las señales de referencia bio-inspiradas.

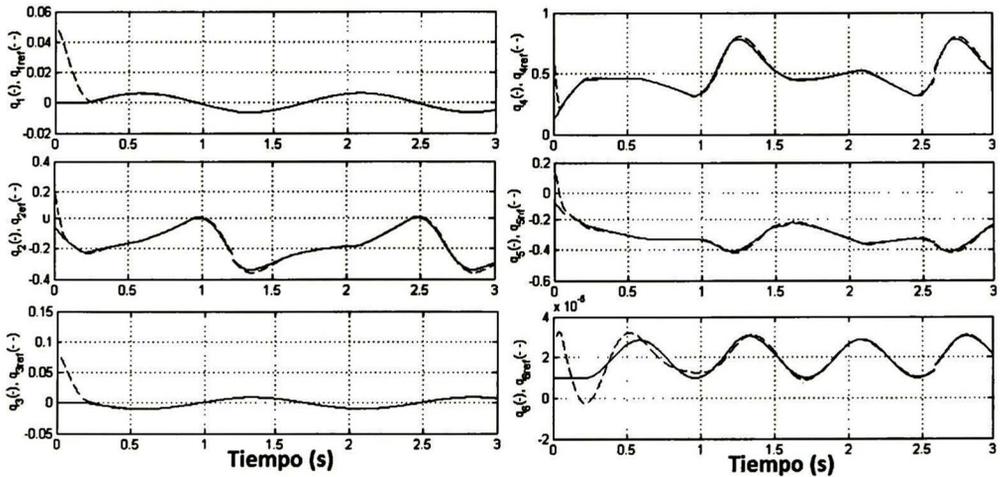


Figura 6.20: Seguimiento de referencias bio-inspiradas (*Super Twisting*).

CAPÍTULO 6. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En la Figura 6.21 se observa que cada una de las variables de error convergen a un a pequeña vecindad cercana a cero.

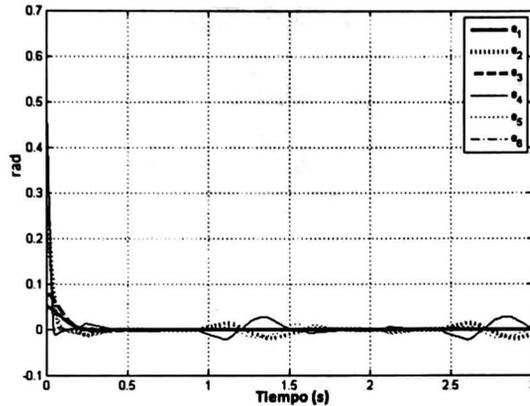


Figura 6.21: Error de seguimiento de referencias bio-inspiradas (*Super Twisting*).

Comparando la Figura 6.22, con la Figura 6.19, se aprecia una reducción considerable de alta frecuencia en los torques aplicados a los motores.

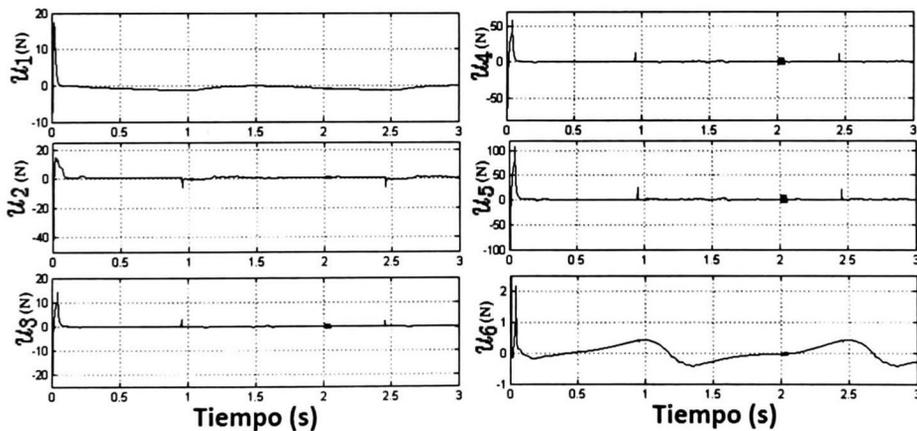


Figura 6.22: Torque aplicado en los motores (*Super Twisting*).

En la Figura 6.23 se muestra cada una de las señales bio-inspiradas que se utilizaron por

6.4. CAMINADO EN 3D PARA UN ROBOT BÍPEDO CON MODOS DESLIZANTES DE SEGUNDO ORDEN

articulación.

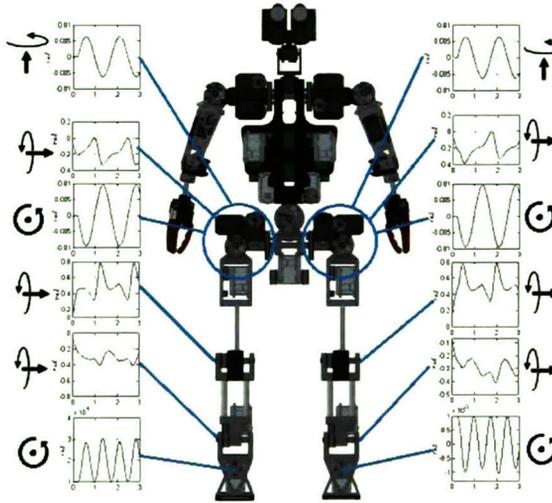


Figura 6.23: Señales bio-inspiradas aplicadas en las articulaciones de las piernas del robot Mexone.

En la Figura 6.24 se muestra la secuencia del caminado siguiendo las señales bio-inspiradas.

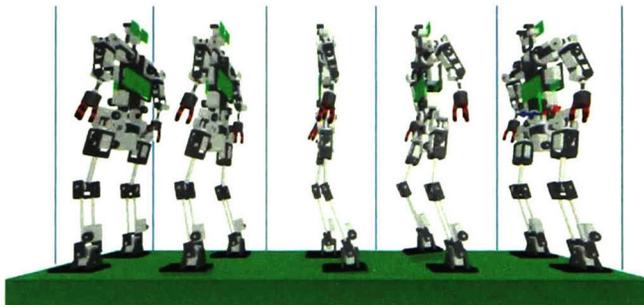


Figura 6.24: Secuencia del caminado siguiendo las señales bio-inspiradas.

Capítulo 7

Conclusiones

El álgebra geométrica conformal es una herramienta matemática útil debido a que permite modelar al robot bípedo con entidades geométricas, como lo son puntos y líneas. Al realizar el modelado del robot bípedo en 3D con álgebra geométrica conformal se facilita el cálculo de la cinemática y dinámica del robot, así como la implementación de distintas técnica de control.

El *AGC* provee un lenguaje descriptivo para representar primitivas geométrica y sus transformaciones rígidas, facilitando el procedimiento del cálculo de la cadena cinemática que forma cada una de las piernas del robot bípedo. El seguimiento de orientación y posición del centro de masas del bípedo es resuelto desde el *AGC*. El uso de este esquema matemático para definir el seguimiento del error abre una nueva área en control ya que se puede definir el error entre primitivas geométricas.

Con el esquema de control de caminado en 2D para robots bípedos se propuso el controlador EF-PD, el cual tiene buen desempeño cuando se perturban de forma simultanea los estados y la señal de control. Se realizó una comparación entre el controlador propuesto con el controlador clásico PD y el controlador PD difuso, para establecer el funcionamiento de este tipo de controladores. Es clara le ventaja del controlador EF-PD sobre el controlador clásico PD ya que el controlador EF-PD ajusta las ganancias Kp y Kd con el uso de una función exponencial dependiente del error.

Se logró obtener el modelo dinámico en 3D de las piernas del robot bípedo humanoide Mex-one con *AGC* y se aplicaron leyes de control para el seguimiento de trayectorias bio-inspiradas

para cada articulación. El seguimiento de estas trayectorias se logró satisfactoriamente aplicando estrategias de control de *modos deslizantes*. Utilizando control por modos deslizantes de primer orden, la señal de control presenta componentes de alta frecuencia. Por esta razón se recurre al uso de *modos deslizantes de segundo orden* conocido como control *super twisting*, logrando así suavizar la señal de control. Por los resultados obtenidos se recomienda el uso de modos deslizantes de segundo orden para realizar la implementación en tiempo real.

7.1. Trabajo futuro

Implementar técnicas de regulación para el seguimiento de trayectorias obteniendo el exosistema con el diferenciador robusto.

Una vez realizados los cambios mecánicos en el robot bípedo Mexone realizar experimentos en tiempo real.

7.2. Publicaciones

Capítulo de libro

José Luis Oviedo-Barriga, Bernardino Castillo-Toledo and Eduardo José Bayro-Corrochano, Fuzzy and Exponential PD Controllers for a Class Of Walking Rotos. *Autonomous Robots Control, Sensing and Perception*. Cuvellier Verlag Göttingen, 2011.

Artículos en Congreso

José Luis Oviedo-Barriga, Bernardino Castillo-Toledo, Eduardo José Bayro-Corrochano, Control Techniques for Walking Robots, in *World Automation Congress*, Puerto Vallarta, México, 2012

J. Oviedo-Barriga, O. Carbajal-Espinosa, L. González-Jiménez, Bernardino Castillo-Toledo, Eduardo Jose Bayro-Corrochano. Robust Tracking of Bio-Inspired References for a Biped Robot Using Geometric Algebra and Sliding Mode, in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Karlsruhe, Germany, 2013

Artículo sometido a revista

O. Carbajal-Espinosa, L. González-Jiménez, J. Oviedo-Barriga, A. Loukianov and E. Bayro-Corrochano, Modelling and Pose Control of Robotic Manipulators and Legs Using Conformal Geometric Algebra. (*paper submitted in Advances in Applied Clifford Algebras*), 2012.

Preparando artículo para revista que incluirá el control de caminado siguiendo referencias bio-inspiradas utilizando modos deslizantes de primer y segundo orden.

Apéndice A

Ecuaciones del modelo dinámico de un bípedo en 2D

Las ecuaciones dinámicas que representan al sistema bípedo, obtenidas con las ecuaciones de Lagrange, son definidas como:

$$A(q)\ddot{q} = b(q, \dot{q}, M, F), \quad (\text{A.1})$$

donde $A(q)$:

$$A_{11} = m_0 + 2m_1 + 2m_2$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{13} = (-2m_1r_0 - 2m_2r_0)\cos(\alpha) + (-l_1m_2 - m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_L) - l_1m_2\cos(\alpha - \beta_R) \\ - m_1r_1\cos(\alpha - \beta_R) - m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$A_{14} = (l_1m_2 + m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_L) + m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$A_{15} = (l_1m_2 + m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_R) + m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$A_{16} = -m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$A_{17} = -m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$A_{21} = 0$$

$$A_{22} = m_0 + 2m_1 + 2m_2$$

$$A_{23} = (2m_1r_0 + 2m_2r_0)\sin(\alpha) + (l_1m_2 + m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_L) + l_1m_2\sin(\alpha - \beta_R)$$

$$\begin{aligned}
& +m_1r_1\sin(\alpha - \beta_R) + m_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
A_{24} = & (-l_1m_2 - m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_L) - m_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
A_{25} = & (-l_1m_2 - m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_R) - m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
A_{26} = & m_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
A_{27} = & m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
A_{31} = & (-2m_1r_0 - 2m_2r_0)\cos(\alpha) - (l_1m_2 + m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_L) - l_1m_2\cos(\alpha - \beta_R) \\
& - m_1r_1\cos(\alpha - \beta_R) - m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
A_{32} = & (2m_1r_0 + 2m_2r_0)\sin(\alpha) + (l_1m_2 + m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_L) + l_1m_2\sin(\alpha - \beta_R) \\
& + m_1r_1\sin(\alpha - \beta_R) + m_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
A_{33} = & 2l_1^2m_2 + 2m_1r_0^2 + 2m_2r_0^2 + 2m_1r_1^2 + 2m_2r_2^2 + (2l_1m_2r_0 \\
& + 2m_1r_0r_1)\cos(\beta_L) + (2l_1m_2r_0 + 2m_1r_0r_1)\cos(\beta_R) \\
& + 2m_2r_0r_2\cos(\beta_L - \gamma_L) + 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_L) + 2m_2r_0r_2\cos(\beta_R \\
& - \gamma_R) + 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_R) \\
A_{34} = & -l_1^2m_2 - m_1r_1^2 - m_2r_2^2 + (-l_1m_2r_0 - m_1r_0r_1)\cos(\beta_L) \\
& - m_2r_0r_2\cos(\beta_L - \gamma_L) - 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_L) \\
A_{35} = & -l_1^2m_2 - m_1r_1^2 - m_2r_2^2 + (-l_1m_2r_0 - m_1r_0r_1)\cos(\beta_R) \\
& - m_2r_0r_2\cos(\beta_R - \gamma_R) - 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_R) \\
A_{36} = & m_2r_2(r_2 + r_0\cos(\beta_L - \gamma_L) + l_1\cos(\gamma_L)) \\
A_{37} = & m_2r_2(r_2 + r_0\cos(\beta_R - \gamma_R) + l_1\cos(\gamma_R)) \\
A_{41} = & (l_1m_2 + m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_L) + m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
A_{42} = & (-l_1m_2 - m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_L) - m_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
A_{43} = & -l_1^2m_2 - m_1r_1^2 - m_2r_2^2 + r_0(-l_1m_2 - m_1r_1)\cos(\beta_L) \\
& - m_2r_0r_2\cos(\beta_L - \gamma_L) - 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_L) \\
A_{44} = & l_1^2m_2 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_L) \\
A_{45} = & 0 \\
A_{46} = & m_2r_2(-r_2 - l_1\cos(\gamma_L)) \\
A_{47} = & 0 \\
A_{51} = & (l_1m_2 + m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_R) + m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
A_{52} = & (-l_1m_2 - m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_R) - m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
A_{53} = & -l_1^2m_2 - m_1r_1^2 - m_2r_2^2 + r_0(-l_1m_2 - m_1r_1)\cos(\beta_R) \\
& - m_2r_0r_2\cos(\beta_R - \gamma_R) - 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_R)
\end{aligned}$$

APÉNDICE A. ECUACIONES DEL MODELO DINÁMICO DE UN BÍPEDO EN 2D

$$\begin{aligned}
 A_{54} &= 0 \\
 A_{55} &= l_1^2 m_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2l_1 m_2 r_2 \cos(\gamma_R) \\
 A_{56} &= 0 \\
 A_{57} &= m_2 r_2 (-r_2 - l_1 \cos(\gamma_R)) \\
 A_{61} &= -m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
 A_{62} &= m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
 A_{63} &= m_2 r_2 (r_2 + r_0 \cos(\beta_L - \gamma_L) + l_1 \cos(\gamma_L)) \\
 A_{64} &= m_2 r_2 (-r_2 - l_1 \cos(\gamma_L)) \\
 A_{65} &= 0 \\
 A_{66} &= m_2 r_2^2 \\
 A_{67} &= 0 \\
 A_{71} &= -m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
 A_{72} &= m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
 A_{73} &= m_2 r_2 (r_2 + r_0 \cos(\beta_R - \gamma_R) + l_1 \cos(\gamma_R)) \\
 A_{74} &= 0 \\
 A_{75} &= m_2 r_2 (-r_2 - l_1 \cos(\gamma_R)) \\
 A_{76} &= 0 \\
 A_{77} &= m_2 r_2^2
 \end{aligned}$$

Los términos del el vector $b(q, \dot{q}, F, M)$ se definen a continuación:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -2\dot{\alpha}^2 m_1 r_0 \sin(\alpha) + F_{R_x} - \dot{\beta}_R^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \sin(\alpha \\
 &\quad - \beta_L) + F_{L_x} - \dot{\gamma}_L^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \dot{\alpha}^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) \\
 &\quad - \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\gamma}_R^2 m_2 r_2 \sin(\alpha \\
 &\quad - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\beta}_L^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \dot{\beta}_L^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\
 &\quad - \dot{\beta}_R^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\alpha}^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\
 &\quad - \dot{\beta}_L^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
 &\quad - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) \\
 &\quad + 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
 &\quad + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\
 &\quad + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) \\
 &\quad - 2\dot{\alpha}^2 m_2 r_0 \sin(\alpha) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) \\
 &\quad + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 = & -\dot{\beta}_L^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + F_{Ry} - 2gm_2 - \dot{\gamma}_L^2 R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& -\dot{\beta}_R^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& -\dot{\gamma}_L^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \dot{\alpha}^2 m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) \\
& -\dot{\beta}_R^2 m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}^2 (2m_1 + 2m_2) r_0 \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \cos(\alpha \\
& -\beta_R) - \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) + F_{Ly} - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - 2gm_1 \\
& + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_R l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) + 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& - 2\dot{\alpha} \dot{\gamma}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& - 2\dot{\alpha} \dot{\gamma}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_R m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) \\
& - (\dot{\alpha} \dot{\beta}_L (-2l_1 m_2 - 2m_1 r_1) + \dot{\alpha}^2 (l_1 m_2 + m_1 r_1) + \dot{\beta}_L^2 (l_1 m_2 \\
& + m_1 r_1)) \cos(\alpha - \beta_L) - gm_0 \\
b_3 = & \dot{\gamma}_R^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + F_{Ry} l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - F_{Lx} l_1 \cos(\alpha - \beta_L) \\
& - F_{Rx} l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - F_{Lx} l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + F_{Ly} r_0 \sin(\alpha) + F_{Ry} r_0 \sin(\alpha) \\
& + F_{Ly} l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + F_{Ly} l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - gm_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& - \dot{\gamma}_R^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) - \dot{\beta}_R^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) \\
& - gm_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\gamma}_L^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) \\
& - \dot{\gamma}_L^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) - \dot{\beta}_R^2 m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_R) \\
& - \dot{\beta}_L^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) - \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_R) \\
& - \dot{\beta}_L^2 m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_L) - gl_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) + F_{Ry} l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - gm_1 r_1 \sin(\alpha \\
& - \beta_R) - gl_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) - gm_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_L^2 l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_L) \\
& - (F_{Lx} r_0 + F_{Rx} r_0) \cos(\alpha) - 2\dot{\alpha} \dot{\gamma}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) \\
& + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L \\
& - \gamma_L) + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_R m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_R) - 2gm_2 r_0 \sin(\alpha) \\
& + 2\dot{\alpha} \dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) \\
& - 2\dot{\alpha} \dot{\gamma}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) + 2\dot{\alpha} \dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) \\
& - 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) - 2gm_1 r_0 \sin(\alpha) \\
& + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_R l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_R) + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_L l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_L) \\
& + 2\dot{\alpha} \dot{\beta}_L m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_L) - 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) \\
& + 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) - F_{Rx} l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)
\end{aligned}$$

APÉNDICE A. ECUACIONES DEL MODELO DINÁMICO DE UN BÍPEDO EN 2D

$$\begin{aligned}
 b_4 = & M_{L1} + F_{Lx}l_1\cos(\alpha - \beta_L) + F_{Lx}l_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - F_{Ly}l_1\sin(\alpha - \beta_L) \\
 & + gl_1m_2\sin(\alpha - \beta_L) + gm_1r_1\sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\alpha}^2l_1m_2r_0\sin(\beta_L) \\
 & - \dot{\alpha}^2m_1r_0r_1\sin(\beta_L) - \dot{\alpha}^2m_2r_0r_2\sin(\beta_L - \gamma_L) \\
 & - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_Ll_1m_2r_2\sin(\gamma_L) + 2\dot{\beta}_L\dot{\gamma}_Ll_1m_2r_2\sin(\gamma_L) \\
 & - \dot{\gamma}_L^2l_1m_2r_2\sin(\gamma_L) - F_{Ly}l_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + gm_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
 b_5 = & M_{R1} + F_{Rx}l_1\cos(\alpha - \beta_R) + F_{Rx}l_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - F_{Ry}l_1\sin(\alpha - \beta_R) \\
 & + gl_1m_2\sin(\alpha - \beta_R) + gm_1r_1\sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}^2l_1m_2r_0\sin(\beta_R) \\
 & - \dot{\alpha}^2m_1r_0r_1\sin(\beta_R) - \dot{\alpha}^2m_2r_0r_2\sin(\beta_R - \gamma_R) \\
 & - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_Rl_1m_2r_2\sin(\gamma_R) + 2\dot{\beta}_R\dot{\gamma}_Rl_1m_2r_2\sin(\gamma_R) \\
 & - \dot{\gamma}_R^2l_1m_2r_2\sin(\gamma_R) - F_{Ry}l_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + gm_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
 b_6 = & M_{L2} - F_{Lx}l_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\alpha}^2m_2r_0r_2\sin(\beta_L - \gamma_L) \\
 & - \dot{\alpha}^2l_1m_2r_2\sin(\gamma_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_Ll_1m_2r_2\sin(\gamma_L) \\
 & - \dot{\beta}_L^2l_1m_2r_2\sin(\gamma_L) + F_{Ly}l_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - gm_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
 b_7 = & M_{R2} - F_{Rx}l_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\alpha}^2m_2r_0r_2\sin(\beta_R - \gamma_R) \\
 & - \dot{\alpha}^2l_1m_2r_2\sin(\gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_Rl_1m_2r_2\sin(\gamma_R) \\
 & - \dot{\beta}_R^2l_1m_2r_2\sin(\gamma_R) + F_{Ry}l_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - gm_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)
 \end{aligned}$$



Apéndice B

Parámetros del robot bípedo humanoide Mexone

A continuación se muestran las masas y longitudes el robot humanoide que se encuentra en el Laboratorio de Control del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Guadalajara.

Masas

Las masas del robot bípedo Mexone expresadas en kilogramos se muestran en la Figura B.1.

Longitudes

Todas las longitudes (Figura B.2) de las partes del robot Mexone son en milímetros.



Figura B.1: Masas del robot bípedo humanoide Mexone.

APÉNDICE B. PARÁMETROS DEL ROBOT BÍPEDO HUMANOIDE MEXONE

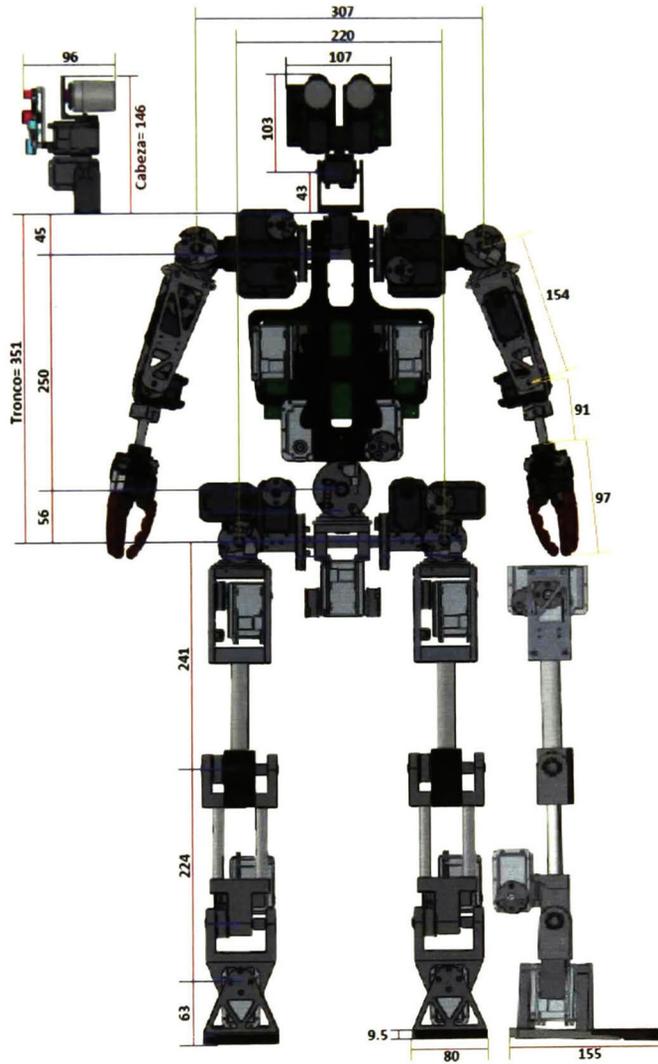


Figura B.2: Longitudes del robot bípedo humanoide Mexone.



Bibliografía

- [1] Canudas de Wit, C., Siciliano, B. and Bastin, G. *Theory of Robot Control*, Springer Verlag, UK, 1996.
- [2] Xiafu, H., and Peng, C. Output-Feedback PID Controllers for Robot Manipulators with Jacobian Uncertainty . In *Proc. of the Int. Conf. on Intelligent Systems Design and Applications, ISDA '08* . Kaohsiung, Taiwan, Vol 2, pages 329-334, November 26-28, 2008.
- [3] Choi, S. B., and Kim, J. S. A Fuzzy Sliding Mode Controller for Robust Tracking of Robotic Manipulators, *Mechatronics*, Vol. 7, pages. 199-216, March 1997.
- [4] Cheng, C., Hashimoto, Y., and Min-Sen, C. Adaptive Controller Design Using Just-in-Time Learning Algorithm. In *Proc. of the Int. Conf. on Control Applications*, Taipei, Taiwan, pages 1106-1111, September 2-4, 2004.
- [5] Chowdhary, G., and Johnson, E. . Recursively Updated Least Squares Based Modification Term for Adaptive Control. In *Proc. of the American Control Conference*, USA, pages 892-897, June 30 - July 2, 2010.
- [6] Ortega, R., and Spong, M. W. Adaptive Motion Control of Rigid Robots: a Tutorial *Automatica*, Great Britain, Vol. 25, No. 6, pages. 877-888, November 1989.
- [7] Ortega, R., Schaft A., Maschke, B., and Escobar, G. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems *Automatica* Vol. 38 pages. 585-596, April 2002.
- [8] Seltzer M., Pitt J., Hildenbrand, D., and Koch A. Inverse kinematics of a humanoid robot based on conformal geometric algebra using optimized code generation. In *Proc. of*

-
- the 8th Int. Conf. on Humanoid Robots*, Daejeon, Korea, pages 681-686, December 1-3, 2008.
- [9] Zamora, J., and Bayro-Corrochano, E. Parallel Forward Dynamics: a geometric approach. In *Proc. of the Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, Taiwan, pages 2377-2382, October 18-22, 2010.
- [10] Nicholls, E. . Bipedal dynamic walking in robotics. *Master Thesis*, University of Western Australia, Department of Electrical and Electronics Engineering, October 26, 1988.
- [11] Zaldivar, D., Cuevas, E., and Rojas, R. *Design Humanoid Robotics*. Cuvillier Verlag Göttingen, 2007.
- [12] Cuevas, E. V., Zaldivar, D. and Rojas, R. Incremental fuzzy control for a biped robot balance. In *Proc. of the Int. Conf. on Robotics and Applications, RA2005*, Cambridge, Massachusetts, USA, pages 99-104, October 31 - November 2, 2005
- [13] Haavisto, O. and Hyötyniemi, H. . Simulation tool of biped walking robot model, *Helsinki University of Technology*, Finland, Espoo Report 138, March 2004.
- [14] Arakawa, T., Fukuda, T. Natural motion generation of biped locomotion robot using hierarchical trajectory generation method consisting of ga, ep layers. In *Proc. of the Int. Conf. on Robotics and Automation*, USA, Vol. 1, pages 211-216, April 20-25, 1997.
- [15] Kajita, S., Yamaura T., and Kobayashi, A. . Dynamic Walking Control of a Biped Robot Along a Potential Energy Conserving Orbit. In *Transactions on Robotics and Automation*, Vol 8, pages 431-438, August 1992.
- [16] Kajita, S., and Tani, K. Study of dynamic biped locomotion on rugged terrain-theory and basic experiment. In *Proc. of the Int. Conf. on Advanced Robotics, Robots in Unstructured Environments, ICAR'91*, pages 741-746, June 19-22, 1991.
- [17] Kajita, S., and Tani, K. Study of dynamic biped locomotion on rugged terrain-derivation and application of the linear inverted pendulum mode. In *Proc. of the Int. Conf. on Robotics and Automation*, California, USA, pages 1405-1411, April 9-11, 1991.

BIBLIOGRAFÍA

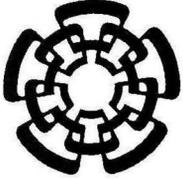
- [18] Kajita, S., Kanehiro, F., Kaneko, K., Fujiwara, K., Harada, K., Yokoi, K., and Hirukawa, H. . Biped Walking Pattern Generation by using Preview Control of Zero-Moment Point. In *Proc. of the Int. Conf. on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan, pages 1620-1626, September 14-19, 2003.
- [19] Vukobratovic, M., and Stepanenko, J. On the stability of antropomorfhic systems. In *Mathematical Biosciences*, Vol 15, pages 1-37, October 1972.
- [20] Sánchez, M.E.H., Leyva, F.J.K.L., Limón, R.C., Zannatha, J.M.I. Mechanical design and kinematic analysis of the AH1N1 humanoid robot. In *Proc. of the Int. Conf. on Electrical Communications and Computers*, pages 177-183, February 28 - March 2, 2011.
- [21] Bernal M. M. Mapas Tridimensionales para Navegación Robótica. Tesis de Maestría, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, Guadalajara, Jalisco, México, 2007.
- [22] Bayro-Corrochano E. *Geometric Computing: for Wavelet Transforms, Robot Vision, Learning, Control and Action*, Springer Verlag, London, 2010.
- [23] Li H., Hestenes D. and Rockwood A. . Generalized Homogeneous coordinates for computational geometry. *Geometric Computing with Clifford Algebras*, G. sommer (ed.), pages 27-59, Springer, 2001.
- [24] Hestenes D. Old wine in new bottles: A new algebraic framework for computational geometry. In *Advances in geometric algebra with applications in science and engineering*, Eduardo Bayro-Corrochano and Garret Sobczyk (ed.), pages 3-17, Boston: Birkhauser, 2001.
- [25] Vince J. *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer Verlag, 2008.
- [26] Dorst L., Fontijne D. and Mann S. *Geometric Algebra for computer Science: An Object-oriented Approach to Geometry*. Elsevier, 2007.
- [27] Perwass, C., and Hildenbrand, D. *Aspects of Geometric Algebra in Euclidean, Projective and Conformal Space*. In <http://www.gris.informatik.tu-darmstadt.de/~dhilden/CLUScripts/gat.pdf>, 2004.

- [28] Doran, C., Lasenby, A. *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, 2003.
- [29] Adept Technology, Inc. . *AdeptSix 600 Robot Instruction Handbook, Rev. A*, 2002
- [30] Zamora-Esquivel, J. and Bayro-Corrochano, E. Kinematics and Diferential Kinematics of Binocular Robot Head. In *Proc. of the Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA '06*, pages 4130-4135, May 15-19, 2006.
- [31] Luis Enrique Gonzáles Jiménez, Control Robusto de Mecanismos Robóticos Guiados por Visión. Tesis de Doctorado, Centro de Investigacióm y Estudios Avanzados del IPN, Guadalajara, Jalisco, México, Diciembre 2011.
- [32] Oscar Eleno Carbajal Espinosa, Manipulación Robótica Usando Álgebra Geométrica Conformal. Tesis de Maestría, Centro de Investigacióm y Estudios Avanzados del IPN, Guadalajara, Jalisco, México, Julio 2012.
- [33] Kelly, R., Santibáñes, V. *Control de Moviemiento de Robots Manipuladores*. Prentice Hall, 2003.
- [34] Akhtaruzzaman, Md., and Shafie, A. Geometrical Analysis on BIOLOID Humanoid System Standing on Single Leg. In *Proc. of the Int. Conf. on Mechatronics, ICOM'11*. Kuala Lumpur, Malaysia, Pages 1-5, May 17-19, 2011.
- [35] Sato, T., Sakaino, S. and Ohnishi, K. . Real-Time Walking Trajectory Generation Method With Three-Mass Models at Constant Body Height for Three-Dimensional Biped Robots. In *Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 58, No. 2, Pages 376-383, February 2011.
- [36] Zhihuan, Z. . Free Model Control for Semi-passive Biped Robot. In *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Measuring Technology and Mechatronics Automation*. Pages 260-263, January 6-7, 2011.
- [37] Khalil, H. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Ch. 3-5, USA, 1996.
- [38] Nakamura, Y., and Hanafusa, H. . Inverse Kinematics Solution with Singularity Robustness for Robot Manipulator Control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 108, pp. 163-171. April 6, 1986.

BIBLIOGRAFÍA

- [39] <http://www.energid.com/company-overview.htm>
- [40] <http://www.pupin.rs/RnDProfile/hrsp.html>
- [41] <http://www.pupin.rs/RnDProfile/rodic-pub.html>.
- [42] http://www.robotis.com/xr/dynamixel_en
- [43] http://www.robotis.com/xr/bioloid_en
- [44] Webots. <http://www.cyberbotics.com>. Commercial Mobile Robot Simulation Software, Cyberbotics Ltd.
- [45] CLUCalc. <http://www.clucalc.info/>
- [46] Spong, M., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005.
- [47] Kajita, S., and Tani, K. Experimental study of biped dynamic walking. *Journal of Control Systems*, Vol. 16, pages 13-19, February 1996.
- [48] Sanchez, E., Nuno, L., Hsu, Y., and Chen, G. Fuzzy PD Scheme for Underactuated Robots Swing-up Control In *Proc. of the World Congress on Computational Intelligence*. Alaska, USA, Vol. 1, pages 302-306, May 4-9, 1998.
- [49] Zaldívar, D., Cuevas, E. *Desarrollo de controladores difusos enfocado a microcontroladores PIC*, Cuvillier Verlag Göttingen, 2006.
- [50] Zaldivar, D., Tapia, E., Cuevas, E., and Rojas, R. . An Incremental Fuzzy Algorithm for the Balance of Humanoid Robots. In book *Humanoid Robots-New Developments*, Chapter 10, Vienna, Austria, pages 171-184, June 1, 2007.
- [51] Ross, T. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, McGraw-Hill, Electrical Engineering Series, 1997.
- [52] Flores, V. Control PD+PI aplicado a un rotot manipulador subactuado, Master Thesis. Tesis de Maestría, Centro de Investigaciónn y Estudios Avanzados del IPN, Guadalajara, Jalisco,México, 2002.

- [53] González-Jiménez, L., Loukianov, A., and Bayro-Corrochano, E. . Integral Nested Sliding Mode Control for Robotic Manipulators, In *Proc. of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control*. Vol. 17, Seoul, Korea, pages 9899-9904, July 6-11, 2008.
- [54] Levant, A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control* Vol. 58, 1247 - 1263, 1993.
- [55] Moreno, J. A., Osorio, M. . A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers, In *Proc. of the 47th Conf. on Decision and Control*. Cancún, México, pages 2856-2861, December 9-11, 2008.
- [56] Levant, A. . Higher Order Sliding Modes, Differentiation and Output Feedback Control. *International Journal of Control*, Vol. 76, pages 924-941, November 8, 2003.
- [57] Carbajal-Espinosa, O., González-Jiménez, L., Oviedo-Barriga, J., Loukianov, A., and Bayro-Corrochano, E. Modeling and Pose Control of Robotic Manipulators and Legs Using Conformal Geometric Algebra. (*paper submitted in Advances in Applied Clifford Algebras*), 2012.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Técnicas Geométricas de Control y Modelado de Robots Bipedos.

del (la) C.

José Luis OVIEDO BARRIGA

el día 24 de Mayo de 2013.

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano
Investigador CINVESTAV 3D
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Bernardino Castillo Toledo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Carlos Alberto López Franco
Profesor Investigador
Universidad de Guadalajara

Dr. Daniel Zaldivar Navarro
Profesor Investigador
Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías, U. de G.



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0011667