



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Observadores robustos para un proceso continuo de
biorremediación de metales pesados**

TESIS

Que presenta

VÍCTOR ALEJANDRO REZA LÓPEZ

Para Obtener el Grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En la Especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Directores de la Tesis

Dr. Jorge Antonio Torres Muñoz

Dr. Jesús Norberto Guerrero Tavares

Ciudad de México

Agosto 2021

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi tía Mónica y a mi hermana Adriana por su constante apoyo durante mi desarrollo personal y académico. También quiero agradecer a mi novia Helena por estar conmigo en buenos y malos momentos, así como su ayuda en las correcciones de este trabajo.

Adicionalmente, quiero agradecer al Instituto Politécnico Nacional y a la Universidad Nacional Autónoma de México por mi formación como ingeniero y biólogo, respectivamente. Asimismo, agradezco al CONACYT por proporcionarme una beca para realizar mis estudios de posgrado.

Además, quiero agradecer al personal administrativo y docente del Departamento de Control Automático, así como a mis compañeros de posgrado, por mi desarrollo académico en la especialidad de Control Automático. Por último, agradezco a mis asesores por ayudarme constantemente en el desarrollo de este trabajo y en mi formación académica.

Resumen

La contaminación del agua por metales pesados es un grave problema en México. La biorremediación es un proceso de remoción de metales pesados donde se cultivan microorganismos, como microalgas y cianobacterias, en biorreactores que requieren de acciones de monitoreo y/o control para su correcta operación. Sin embargo, debido a la falta de sensores adecuados, es necesario implementar observadores que estimen los estados del bioproceso. Más aún, debido a las dificultades para modelar la tasa de crecimiento, se deben diseñar observadores que estimen numéricamente dicha reacción compleja y no lineal para rechazar sus incertidumbres en el sistema. Además, dada las imperfecciones de los actuadores que regulan la dilución, pueden adicionarse perturbaciones externas que alteren notablemente la dinámica del proceso. En este trabajo se propone el diseño de observadores robustos al desconocimiento de la tasa de crecimiento para la estimación de metal libre y de perturbaciones externas asociadas al factor de dilución, en un proceso continuo de biorremediación de metales pesados. Para ello, se desarrolló un modelo matemático que describe la biorremediación de un solo metal pesado en un monocultivo de microorganismos fotosintéticos. Posteriormente, se diseñaron dos observadores para estimar la perturbación y numéricamente la tasa de crecimiento. Primero, se diseñó un Pseudo-Algoritmo de Supertorsión Extendido cuyas trayectorias solución son uniformemente últimamente acotadas. Segundo, se diseñó un algoritmo de supertorsión acoplado a leyes de adaptación que garantiza convergencia exponencial, suponiendo que la función regresor asociada cumpla la condición de excitación persistente. Además, a partir de los estimados de la perturbación, se diseñó un observador asintótico para la estimación del metal libre. Finalmente, los observadores obtenidos fueron evaluados mediante simulaciones, cuyos resultados indican un buen desempeño para la estimación del metal y la perturbación externa, robustos a la tasa de crecimiento, incluso en el caso de una perturbación externa de variación lenta en el tiempo y, para los observadores con leyes de adaptación, robustos a mediciones discretas.

Abstract

Water pollution by heavy metals is a serious problem in Mexico. Bioremediation is a heavy metal removal process where microorganisms, such as microalgae and cyanobacteria, are cultivated in bioreactors that require monitoring or controlling actions for their correct operation. However, due to the absence of adequate sensors, it is necessary to design observers that estimate the unknown states of the bioprocess. Furthermore, due to the lack of suitable models for specific growth rate, it must be designed observers that can estimate numerically this complex and non-linear reaction in order to reject its uncertainties on the system. In addition, because actuators that regulate dilution have imperfections, they can add external perturbations that significantly modify the dynamics of the process. In this work, it is design robust observers to unknown specific growth rate in order to estimate free metal concentration and external perturbations associated with the dilution factor, in a continuous process of bioremediation of heavy metals. For this, a mathematical model was developed for bioremediation of a single heavy metal in a monoculture of photosynthetic microorganisms. Subsequently, two observers were designed to estimate the disturbance and numerically, specific growth rate. Firstly, an Extended Pseudo Super Twisting Algorithm was designed whose trajectories are ultimately uniformly bounded. Secondly, a super twisting algorithm coupled with an adaptation law was designed and assure exponential convergence, assuming that the associated regressor function fulfills persistent excitation condition. Moreover, using previous estimates of perturbation, it was designed an asymptotic observer for free metal concentration. Finally, the designed observers were evaluated through simulations, which results show robustness of unknown specific growth rate and a good performance for the estimation of free metal concentration and external perturbation, even in the case of a slow external perturbation and, in the case of observers coupled with adaptation laws, robustness to discrete measurements.

Índice general

Introducción	1
Estado del arte	2
Motivación	3
Objetivo	4
Estructura de la tesis	4
1. Preliminares	7
1.1. Estabilidad	7
1.1.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	8
1.1.2. Estabilidad uniforme últimamente acotada	10
1.1.3. Estabilidad cuadrática	10
1.2. Técnicas por modos deslizantes	11
1.2.1. Conceptos básicos	12
1.2.2. Observadores por modos deslizantes	12
1.2.3. Algoritmo de supertorsión	13
1.3. Observadores adaptables	14
2. Modelado del proceso de biorremediación	17
2.1. Conceptos preliminares	18
2.1.1. Fotobiorreactores	18
2.1.2. Microorganismos fotosintéticos	18
2.1.3. Metales pesados	20
2.2. Modelo del bioproceso	21
3. Diseño de observadores robustos para el bioproceso	25
3.1. Suposiciones de diseño	26
3.2. Caso preliminar	28
3.3. Estimación simultánea de θ , M y μ	29
3.3.1. Pseudo-STA Extendido	30
3.3.2. STA más adaptación	34
3.3.3. Observador Asintótico para M	39
3.4. Comentarios adicionales	40
4. Simulación de los observadores robustos	41
4.1. Modelo para simulación	41
4.2. Desempeño de los observadores diseñados	43

4.2.1. Caso I	43
4.2.2. Caso II	44
4.2.3. Caso III	47
4.2.4. Caso IV	47
4.2.5. Observaciones adicionales	47
Conclusión	53
Bibliografía	55
A. Demostraciones del Capítulo 1	61
A.1. Lema 1.1	61
A.2. Teorema 1.4	61
A.3. Lema 1.3	64
B. Tabla de parámetros y condiciones iniciales	67

Introducción

La contaminación del agua es un grave problema de salud pública y de daño ecosistémico. Particularmente, la presencia de metales pesados en el agua tiene efectos perjudiciales e irreversibles en los seres vivos. En México se han identificado altas concentraciones de metales pesados como aluminio, arsénico, cadmio, cromo, cobre, hierro, mercurio, níquel, plomo y zinc en diversos cuerpos de agua [8],[35],[44].

Existe una amplia cantidad de métodos para la remoción de metales pesados y otras sustancias dañinas en aguas contaminadas [2], sin embargo, una estrategia altamente específica para la remoción de metales pesados en bajas concentraciones es la biorremediación. Dicho método consiste en emplear microorganismos para eliminar partículas contaminantes de un medio. Específicamente, el cultivo de microorganismos fotosintéticos requiere poca cantidad de nutrientes para el crecimiento celular, tiene una alta capacidad de absorción de metales, además de una gran resistencia a su toxicidad [1],[39].

Para realizar la biorremediación con microorganismos fotosintéticos, es necesario cultivarlos en fotobiorreactores cerrados para optimizar el crecimiento celular a partir de ambientes controlados. No obstante, existen ciertos inconvenientes en la implementación de estos equipos [38],[46],[65]:

- Se tiene poca comprensión sobre los fenómenos involucrados en el crecimiento microbiano, en la absorción de nutrientes y en la remoción de metales pesados.
- Los resultados en la literatura sobre el modelado del fenómeno, los parámetros estimados y la eficiencia de remediación suelen ser contradictorios.
- Existen dificultades para el escalamiento del bioproceso.
- Los reactores requieren altos costos de inversión, operación y mantenimiento.
- Los sensores utilizados para el monitoreo del proceso son de aplicación limitada, costosos e invasivos, además requieren constante mantenimiento y son poco robustos.

Cabe destacar que la mayoría de los problemas mencionados están asociados al modelado de las tasas de reacción. En especial, la tasa de crecimiento del microorganismo es una dinámica ampliamente estudiada que resulta fundamental para modelar la dinámica del bioproceso y diseñar observadores y/o controladores para el biorreactor. En [21] se hace un resumen sobre los diferentes modelos desarrollados para la tasa de crecimiento en función del pH, temperatura, luz, oxígeno disuelto y sustrato. Sin embargo, se menciona que los modelos desarrollados distan de ser útiles en sistemas bajo condiciones reales de operación. Además, la asociación de múltiples variables en la tasa de crecimiento resultan en un modelo complejo y no lineal. Por ende, es necesario diseñar observadores y/o controladores cuya dinámica sea robusta a las incertidumbres de la tasa de crecimiento.

Otro problema importante en biorreactores es la presencia de perturbaciones externas en las entradas. Debido a que los estados de un biorreactor tipo continuo o Fed-Batch están asociados a un factor de dilución, la presencia de un error de ajuste producido por las imperfecciones de los actuadores que regulan la dilución pueden producir una perturbación tal que se altere notablemente la dinámica del sistema.

Así, previo al control del proceso de biorremediación de metales pesados, es necesario conocer los estados del bioproceso a partir de las pocas mediciones disponibles, las incertidumbres en la tasa de crecimiento y la perturbación externa asociada a la entrada. Por lo tanto, es necesario diseñar un observador de estados que estime las variables importantes del bioproceso, reduzca los costos de implementación del equipo y además, sea robusto a las perturbaciones e incertidumbres del sistema.

Estado del arte

Dado que los fotobiorreactores son un caso particular de un biorreactor, se estudiarán los observadores diseñados para este segundo equipo. Para iniciar, en [3], [4], [22] y [26] se mencionan diferentes tipos de observadores que pueden ser aplicados en un reactor químico y/o biológico. Sin embargo, en [26] se menciona que la aplicación de un observador en particular depende en gran parte del conocimiento del modelo de la tasa de crecimiento. Así, existen dos posibles vertientes para el diseño de observadores.

El primer caso consiste en **conocer el modelo de la tasa de crecimiento**. Los primeros observadores aplicados en un biorreactor fueron el observador con filtro de Kalman extendido (EKF) y el observador extendido de Luenberger (ELO) [11]. Posteriormente, versiones adaptables de estos observadores fueron aplicados en biorreactores con incertidumbres paramétricas en el coeficiente de rendimiento biomasa-sustrato [11]. Si bien estos observadores son sencillos de diseñar y pueden estimar estados y parámetros, una desventaja importante es que su error de estimación solo converge localmente [3],[26]. Más aún, dada la no linealidad de la tasa de crecimiento, dichos observadores no son adecuados para incertidumbres en otros parámetros del biorreactor.

Así, en Gauthier et.al [31] diseñaron un observador de alta ganancia (HGO) para un caso particular de sistemas no lineales aplicado al modelo de un biorreactor. Su observador garantiza que el error de estimación converja asintóticamente al origen, siempre que el sistema sea localmente observable. Aunque una desventaja de estos observadores es la sensibilidad al ruido de medición [3], se han realizado varias mejoras y aplicaciones.

En [49], se estimaron los estados y parámetros del modelo de un biorreactor usando la forma canónica observable generalizada para múltiples entradas. Luego, en [27] se diseñó un observador adaptable para un caso particular de sistemas no lineales con parametrización no lineal, robusto ante incertidumbres paramétricas y cuya ganancia puede ser igual a la de un HGO, aplicado al modelo de un biorreactor. Por otro lado, en [14] se diseñó un observador continuo-discreto robusto al ruido y a mediciones discretas, aplicado a un modelo de fermentación con *Saccharomyces cerevisiae*. Mientras que en [15] se diseñó un HGO adaptable para sistemas estrictamente triangulares, robusto a perturbaciones en la entrada y cuya convergencia no depende de la condición de excitación persistente, aplicado al modelo de un biorreactor con *Athrospira maxima*. Además, en [28] se diseñó un HGO con filtración robusto al ruido en la medición, aplicado al modelo de un fotobiorreactor.

Además de los HGO, se han implementado observadores por modos deslizantes (SMO) para la estimación de estados en un biorreactor por su robustez a perturbaciones desconocidas y al tiempo de convergencia en tiempo finito. En [63], se diseñó un SMO para una clase de sistemas no lineales, robusto a incertidumbres en los parámetros y aplicado al modelo de un biorreactor. Posteriormente, en [66] se diseñó un SMO para sistemas no lineales con retardos en el sistema aplicado al modelo de un biorreactor. Adicionalmente, en [50] se diseñó un SMO de alto orden para la estimación de estados, aplicado de forma numérica y experimental a un biorreactor aerobio.

Mientras que el segundo caso para el diseño de observadores consiste en **desconocer el modelo de la tasa de crecimiento**. Con anterioridad, en [10] se diseñó un observador de Luenberger con adaptación integral para la estimación de la tasa de crecimiento específica. Luego, en [4] y [22] se describe el uso de redes neuronales artificiales cuando se desconoce el modelo del biorreactor. Sin embargo, dichos métodos requieren de un profundo conocimiento del fenómeno y una gran cantidad de datos para el entrenamiento de la red neuronal [3][22]. Más aún, estas técnicas no son tan efectivas en comparación con el conocimiento parcial del modelo. Por ejemplo, en [6] se diseñó un observador híbrido que estima aproximadamente las tasas de reacción de un biorreactor mediante lógica difusa.

Por otro lado, se han empleado observadores asintóticos y por intervalos para la estimación de estados en biorreactores sin conocer la tasa de crecimiento. Como ejemplo, en [3] se usaron estos observadores en el modelo de un proceso de tratamiento de aguas residuales con perturbaciones desconocidas en la entrada. Cabe destacar que la desventaja de dichos observadores es que no se puede modificar su tiempo de convergencia [3].

Otro enfoque para el diseño de observadores consiste en aplicar un SMO para estimar numéricamente la tasa de crecimiento y posteriormente, emplear otro observador para la estimación de los estados deseados usando la tasa estimada. Si bien esto fue previamente desarrollado en [10] y [32], donde este último la tasa de crecimiento es considerada como un estado, en [58] fue descrito como una perturbación del modelo cuyo observador diseñado fue aplicado en forma numérica y experimental a un biorreactor tipo Fed-Batch.

A partir de este último trabajo se ha desarrollado un amplio campo de investigación. Para comenzar, en [23] se diseñó un SMO de segundo orden para la estimación de la tasa de crecimiento aplicado en forma numérica y experimental a un biorreactor tipo Fed-Batch. Más tarde, en [24] se diseñó un algoritmo de supertorsión (STA¹) para biorreactores de tipo Batch, Fed-Batch y continuos. Acto seguido, en [54] se extendieron los resultados de [23] para la estimación de múltiples tasas de reacción, suponiendo que existiera la misma cantidad de mediciones disponibles. Cabe destacar que varios de estos resultados han sido aplicados en fotobiorreactores [19],[55].

Motivación

Para el monitoreo y/o diseño de una ley de control para estos bioprocesos, es necesario conocer los estados del sistema. Sin embargo, muchas de las variables del proceso no son medibles y por ende, se requiere diseñar un observador de estados para el proceso. Más aún, este observador debe ser robusto a las incertidumbres causadas por el desconocimiento del modelo de la tasa de crecimiento.

¹De sus siglas en inglés *Super Twisting Algorithm*.

Sumado a lo anterior, la presencia de una perturbación en el factor de dilución puede alterar notablemente la dinámica del bioproceso. Por ende, también es necesario que el observador de estados pueda estimar una perturbación externa en la entrada. Luego, debido a los enfoques desarrollados en [23] y [58], se puede considerar la tasa de crecimiento como una perturbación con estructura desconocida factible de ser estimada numéricamente. Adicionalmente, los resultados de [24] y [58] implican que se puede diseñar un observador híbrido tal que estime los estados y la perturbación externa de un fotobiorreactor continuo que sea robusto a la tasa de crecimiento.

Objetivo

General: Diseñar un observador robusto ante la dinámica no modelada de la tasa de crecimiento, para la estimación de estados y de una perturbación externa en el factor de dilución, aplicado a un proceso continuo de biorremediación de metales pesados.

Particulares:

- Modelar un proceso continuo de biorremediación para un solo metal pesado en un monocultivo de microorganismos fotosintéticos.
- Diseñar un observador similar a un STA para la estimación simultánea de la perturbación externa y de la tasa de crecimiento.
- Diseñar un observador híbrido basado en un STA más una ley adaptable, tal que estime la perturbación externa asociada al factor de dilución y la tasa de crecimiento.
- Diseñar un observador asintótico para la estimación de la concentración de metal libre en el medio, a partir de la estimación de la perturbación en la entrada.
- Evaluar el desempeño y robustez de los observadores propuestos en simulación numérica.

Estructura de la tesis

Previamente, en el Capítulo 1 se describirán las preliminares matemáticas necesarias para el diseño de los observadores robustos. Para ello, se dará una breve descripción sobre estabilidad de puntos de equilibrio evaluadas en el sentido de Lyapunov, así como una introducción a técnicas por modos deslizantes. Lo anterior tiene el fin de probar algunas de las propiedades de los STA. Adicionalmente, se proporcionará una breve introducción a los observadores adaptables, así como un resumen sobre el algoritmo gradiente y una modificación al algoritmo de mínimos cuadrados.

Más tarde, en el Capítulo 2 se desarrollará un modelo matemático que describa un proceso continuo y simple para la biorremediación de un único metal pesado. En este caso, se explicarán brevemente algunos conceptos básicos asociados al proceso de biorremediación y posteriormente, a partir de algunas suposiciones y un modelo general, se derivará el modelo deseado.

Luego, en el Capítulo 3 se establecerán ciertas condiciones adicionales en el modelo previamente obtenido, para diseñar los observadores deseados que estimen la perturbación externa y la concentración del metal pesado libre en el medio. Dado que la mejor forma de incrementar la robustez del observador es estimar numéricamente la tasa de crecimiento, primero se diseñarán dos tipos de observadores para dicha variable junto con la perturbación externa. En un primer caso, se probarán las propiedades de un algoritmo similar a un STA extendido con el fin de estimar simultáneamente la perturbación y la tasa de crecimiento. Mientras que en el segundo caso, se empleará un STA más un observador adaptable para estimar las variables deseadas. Posteriormente, se diseñará un observador asintótico para estimar la concentración de metal pesado a partir del estimado de la perturbación previamente obtenido.

Por último, en el Capítulo 4 se analizará el desempeño de los observadores diseñados a partir de simulaciones empleando MATLAB/Simulink para diferentes casos. El objetivo principal es mostrar la robustez de los observadores ante la tasa de crecimiento, así como la calidad de los estimados de la perturbación externa, la concentración de metal libre en el medio y la tasa de crecimiento.

Capítulo 1

Preliminares

Un observador de estados es un algoritmo que estima las variables desconocidas de un sistema a partir de las mediciones disponibles. Particularmente, los observadores por modos deslizantes ofrecen robustez ante perturbaciones externas, reducen el orden del sistema y el error de estimación converge en tiempo finito. En el caso de bioprocesos, estos observadores pueden ser robustos ante dinámicas no modeladas, como es el caso de la tasa de crecimiento.

En este capítulo se dará una breve descripción de estabilidad en el sentido de Lyapunov¹. Posteriormente, se describirán algunas definiciones sobre las técnicas de modos deslizantes. Todos estos puntos tienen el fin de probar las propiedades del STA a partir de una función de Lyapunov cuadrática, así como describir las herramientas principales que se usarán para el diseño de los observadores robustos deseados.

Por último, dado que no basta emplear un STA para la estimación de variables de un bioproceso, se describirán algunos aspectos básicos sobre el diseño de observadores adaptables, incluyendo una breve descripción de las dos leyes de adaptación más conocidas.

1.1. Estabilidad

Sea el siguiente sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{1.1}$$

donde² $x(t) = x \in \mathbb{R}^n$ y $f(x, t) : D \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 1.1. El sistema (1.1) tiene un punto de equilibrio x^* si $f(x^*, t) = 0$.

Nota 1.1. Observe que cualquier x^* puede ser el origen a partir de un cambio de variable, es decir, si $y = x - x^*$, entonces $\dot{y} = f(y)$. Para este trabajo, a menos de que se diga lo contrario, $x^* = 0_{n \times 1}$.

Nota 1.2. Un sistema no lineal puede presentar más de un punto de equilibrio.

Observe que a partir del punto de equilibrio definido, se puede estudiar la estabilidad de (1.1), como se describe a continuación.

¹Para más detalles sobre estabilidad de Lyapunov, se recomienda consultar [5], [36], [42] y [57].

²Por definición $\mathbb{R}_{>0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Definición 1.2. El punto de equilibrio $x^* = 0_{n \times 1}$ de (1.1) es³

- Estable en $t = t_0$ con $t_0 > 0$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta(\epsilon, t_0) \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \leq t_0$$

- Uniformemente estable si es estable para cualquier $\delta(\epsilon) > 0$ independiente de t_0 .
- Asintóticamente estable si es estable y $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ es elegido de tal forma que

$$\|x(0)\| < \delta(\epsilon, t_0) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- Uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable y el conjunto $\Omega = \{x(t) \in C \mid \|x(t)\| < \delta(\epsilon)\}$ con $C \subset \mathbb{R}^n$ es independiente de t_0 , tal que

$$x(t_0) \in \Omega \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- Globalmente uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente asintóticamente estable $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.
- Exponencialmente estable si existen constantes $\alpha, \delta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que si $\|x(t_0)\| < \delta$, entonces

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\| e^{-\beta t}$$

- Globalmente exponencialmente estable si es exponencialmente estable $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

En las siguientes subsecciones, se describirán las condiciones de estabilidad del sistema (1.1) a partir del punto de equilibrio x^* , empleando el método de Lyapunov. Además, se estudiarán dos criterios particulares de estabilidad que serán útiles en posteriores secciones.

1.1.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio x^* de (1.1), se emplean funciones candidatas de Lyapunov asociadas a la energía de un sistema. A continuación, se describen algunas de las propiedades asociadas a estas funciones.

Definición 1.3. Una función $\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es de clase K si es estrictamente creciente y $\omega(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase K_∞ si $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega(x) = \infty$.

Definición 1.4. Una función $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida positiva local si $V(0_{n \times 1}, t) = 0$ y existe una función de clase K, $\omega_1(\|x\|)$ con $r \in \mathbb{R}^n$, tal que $\omega_1(\|x\|) \leq V(x, t)$. Se dice que $V(x, t)$ es definida positiva global si $\omega(\|x\|)$ es una función de clase K_∞ .

Definición 1.5. Una función $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente si existe una función de clase K, $\omega_2(\|x\|)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $V(x, t) \leq \omega_2(\|x\|)$.

El siguiente teorema, conocido como el método directo de Lyapunov, permite estudiar la estabilidad del punto de equilibrio de (1.1), a partir de funciones similares a las descritas en las definiciones anteriores.

³Denotamos $\|x(t)\|$ como cualquier norma p de $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1. *Sea $x^* = 0_{n \times 1}$ un punto de equilibrio de (1.1), $D \subset \mathbb{R}^n$ el dominio que contiene el punto de equilibrio, $\omega_1(\cdot)$, $\omega_2(\cdot)$, $\omega_3(\cdot)$ funciones de clase K y $V : D \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Entonces se dice que x^* es*

1. *Estable si $\omega_1(\|x\|) \leq V(x, t)$ y $\dot{V}(x, t) \leq 0$.*
2. *Uniformemente estable si es estable y $V(x, t) \leq \omega_2(\|x\|)$.*
3. *Asintóticamente estable si es estable y $\dot{V}(x, t) \leq \omega_3(\|x\|)$.*
4. *Uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable y $\dot{V}(x, t) \leq \omega_3(\|x\|)$.*
5. *Globalmente uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente asintóticamente estable, $D = \mathbb{R}^n$ y $\omega_1(\|x\|)$ es una función de clase K_∞ .*
6. *Exponencialmente estable si existen constantes $a, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}_{>0}$, tal que se cumple $\kappa_1 \|x\|^a \leq V(x, t) \leq \kappa_2 \|x\|^a$ y $\dot{V}(x, t) \leq -\kappa_3 \|x\|^a$.*
7. *Globalmente exponencialmente estable si es exponencialmente estable con $D = \mathbb{R}^n$.*

Nota 1.3. Por definición $\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} f_i(t, x)$.

Observe que las condiciones del Teorema 1.1 son solo suficientes, lo que implica que si no existe una función de Lyapunov que cumpla las condiciones, no se puede concluir nada sobre la estabilidad del punto de equilibrio de (1.1). Una forma de proporcionar condiciones necesarias de estabilidad es mediante el teorema de Zubov, la cual dice que si la función $f(x, t)$ es localmente estable, entonces existe una función de Lyapunov asociada al sistema. A continuación, se describe el teorema para un punto de equilibrio asintóticamente estable, cuya demostración puede ser consultada en [57].

Teorema 1.2. *El punto de equilibrio $x^* = 0_{n \times 1}$ de (1.1) es asintóticamente estable si y solo si existe una función de Lyapunov $V(x, t)$, tal que cumple las siguientes condiciones*

1. *$V(x, t)$ esta definida para $\|x\| < h$ y $t \leq 0$.*
2. *$V(0_{n \times 1}, t)$ es continua en $x \forall t \leq t_0$ en x^* .*
3. *$V(x, t)$ es definida positiva local.*
4. *$\dot{V}(x, t)$ decrece monóticamente a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.*

Nota 1.4. Si la condición 4 del teorema implica que $\dot{V}(x, t)$ no es creciente en $t \geq t_0 \forall \|x_0\| \leq h$, entonces x^* es estable.

Nota 1.5. Si $V(x, t)$ es positiva global y decreciente, entonces x^* es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Observe que por la condición 4 del Teorema 1.2, es necesario probar que $\dot{V}(x, t)$ es una función monóticamente decreciente. Así, antes de concluir esta sección se mencionará el siguiente lema que proporciona condiciones necesarias y suficientes para que una función sea monóticamente decreciente, la cual será útil en la Sección 1.2.3. Para más detalles de este lema, se recomienda consultar [9] y [60].

Lema 1.1. *Sea $f(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en cada subintervalo cerrado de I . Entonces $f(t)$ es monóticamente decreciente en I si y solo si $\dot{f}(t) \leq 0$ para casi todo $t \in I$.*

Demostración. Revisar Apéndice A. □

1.1.2. Estabilidad uniforme últimamente acotada

Suponga que (1.1) es un sistema con perturbaciones desconocidas pero acotadas. Entonces el punto de equilibrio ya no será el origen y las trayectorias solución del sistema pueden estar acotadas por un número real. La siguiente definición describe de qué forma pueden estar acotadas las soluciones de (1.1).

Definición 1.6. Se dice que las trayectorias solución de (1.1) son

1. Uniformemente últimamente acotadas con cota última b si existen constantes $b, c \in \mathbb{R}_{>0}$, independientes de $t_0 \geq 0$ y para cualquier $a \in (0, c)$, existe una $T = T(a, b)$, independiente de t_0 , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \rightarrow \|x(t)\| \leq b \quad \forall t \geq t_0 + T$$

2. Globalmente uniformemente últimamente acotadas si es uniformemente últimamente acotada para una a arbitrariamente grande.

El método directo de Lyapunov puede emplearse para estudiar la estabilidad de las trayectorias solución del sistema cuando están últimamente acotadas. El siguiente teorema describe condiciones suficientes para que las trayectorias solución de (1.1) estén acotadas como en la Definición 1.6, cuya demostración puede consultarse en [36].

Teorema 1.3. *Sea el sistema no lineal variante en el tiempo (1.1). Asuma que existe una función continuamente diferenciable $V : D \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ con $D \subset \mathbb{R}^n$, tal que para las funciones de clase K , $\omega_1(\cdot)$, $\omega_2(\cdot)$ y $\omega_3(\cdot)$ se cumple:*

$$\omega_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \omega_2(\|x\|)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\omega_3(x), \quad \|x\| \geq \mu$$

donde $\mu > 0$. Si para un $r > 0$ se cumple que $r \in B = \{r \in B \subset D \mid r > \omega_2(\mu)\}$, entonces las trayectorias solución de (1.1) son uniformemente últimamente acotadas con cota última $b = \omega_1^{-1}(\omega_2(\mu))$. Más aún, si $D = \mathbb{R}^n$ y $\omega_1(\cdot)$ es una función de clase K_∞ , entonces las trayectorias solución de (1.1) son globalmente uniformemente últimamente acotadas con cota última b .

1.1.3. Estabilidad cuadrática

Sea el sistema lineal con incertidumbres paramétricas

$$\dot{x} = A(v)x \tag{1.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A(v)$ es una matriz continua y v es un vector paramétrico definido en el conjunto $\mathcal{R} = \{[v_{1_{\min}}, v_{1_{\max}}], \times \cdots \times [v_{q_{\min}}, v_{q_{\max}}]\} \subset \mathbb{R}^q$. Una forma de estudiar la estabilidad de (1.2) es empleando una función de Lyapunov cuadrática $V = x^T P x$, tal que P garantiza que V sea una función definida positiva y estrictamente decreciente.

Sin embargo, si v es un vector con elementos dependientes del tiempo, entonces se requiere un enfoque adicional para concluir la estabilidad de (1.2). Previo a describir un método para el análisis de este tipo de sistemas, se menciona la siguiente definición.

Definición 1.7. Un sistema de la forma (1.2) se dice cuadrado estable con $v \in \mathcal{R}$ si y solo si existe una matriz definida positiva P tal que

$$A^T(v)P + PA(v) < 0$$

Ahora, suponga que la matriz $A(v)$ esta definida como

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \frac{1}{2} \\ -(\alpha_2 + v) & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ son constantes y v solo puede tomar valores entre -1 y 1 . Así, el siguiente lema describe las condiciones necesarias para que (1.2) sea cuadrado estable, cuya demostración puede consultarse en [23].

Lema 1.2. Sea el sistema (1.2) donde $A(v)$ pertenece a $\mathcal{A} = \text{conv}(A_1, A_2)$, es decir

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \frac{1}{2} \\ -(\alpha_2 - 1) & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \frac{1}{2} \\ -(\alpha_2 + 1) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Entonces, para cada $\alpha_2 > 1$ existe un conjunto de valores adecuados de α_1 tal que (1.2) es cuadrado estable $\forall A(v) \in \mathcal{A}$.

Nota 1.6. La idea de la prueba es determinar la existencia de una matriz P que satisfaga

$$\mathcal{F} = \begin{cases} P = P^T > 0 \\ Q_1 = -(A_1^T P + P A_1) > 0 \\ Q_2 = -(A_2^T P + P A_2) > 0 \end{cases}$$

Observe que \mathcal{F} es un problema de optimización, cuya solución implica probar las condiciones necesarias y suficientes para que (1.2) sea cuadrado estable, siempre que $P = P^T > 0$ y $A(v)^T P + P A(v) + \alpha_v I < 0 \forall A(v) \in \mathcal{A}$, donde $\alpha_v = \min(\lambda_{\min}(Q_1), \lambda_{\min}(Q_2))$ es el eigenvalor más pequeño del conjunto \mathcal{A} .

1.2. Técnicas por modos deslizantes

Los algoritmos de control basados en modos deslizantes son un caso particular de sistemas de control con estructura variable. Dichos algoritmos constan de una ley de control que se modifica durante la dinámica del sistema en lazo cerrado con base en un hiperplano asociado a los estados de la planta [29]. Este hiperplano se denomina superficie de deslizamiento y tiene la estructura siguiente

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sigma(x) = 0\} \quad (1.4)$$

donde $\sigma(x)$ es conocida como variable de deslizamiento. Cabe destacar que la superficie de deslizamiento esta asociada a varias de las características de los algoritmos basados en modos deslizantes, como es la robustez a perturbaciones externas, reducción del orden del sistema o convergencia en tiempo finito [61]. En las siguientes subsecciones se dará una breve introducción a las técnicas por modos deslizantes y para más detalles, puede consultarse [29], [61] y [62].

1.2.1. Conceptos básicos

Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, u, d) \quad (1.5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es una señal de control y $d \in \mathbb{R}^q$ es una perturbación externa o una incertidumbre del sistema. Además, $f(\cdot)$ es diferenciable con respecto a x y es absolutamente continua.

Definición 1.8. Se dice que $\sigma(x)$ es un modo deslizante ideal si en un tiempo finito t_s , la trayectoria solución de (1.5) pertenece a $\mathcal{S} \forall t \geq t_s$.

Definición 1.9. Se dice que las trayectorias solución de (1.5) son dirigidas hacia la superficie de deslizamiento (1.4) si para $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, se cumple la siguiente desigualdad

$$\sigma \dot{\sigma} \leq -\frac{\alpha}{2} |\sigma| \quad (1.6)$$

Nota 1.7. La desigualdad (1.6) se conoce como condición de alcanzabilidad.

Ahora, si la política de control $u = u(x)$ es discontinua, entonces la dinámica de (1.5) en lazo cerrado es

$$\dot{x} = f^c(x) \quad (1.7)$$

donde $f^c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función discontinua con respecto a x . Por ende, no existe una solución única de (1.7) dado que f^c no es Lipschitz continua. Sin embargo, definiendo la solución de (1.7) en el sentido de Filippov, se obtiene una solución a partir de los promedios de las soluciones obtenidas mediante el acercamiento de las trayectorias hacia el punto de discontinuidad en diferentes direcciones, como se describe en la siguiente definición.

Definición 1.10. La inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ es llamada inclusión diferencial de Filippov si el espacio vectorial $F(x)$ es no vacío, cerrado, convexo localmente acotado y semicontinuo hacia arriba. Las soluciones son funciones absolutamente continuas que satisfacen la inclusión casi en cualquier parte.

Nota 1.8. Las soluciones del sistema descrito en el Lema 1.2 están definidas en el sentido de Filippov porque v solo puede tomar valores entre -1 y 1 . Por lo tanto, la ecuación (1.2) es una inclusión diferencial lineal politópica.

1.2.2. Observadores por modos deslizantes

Para la observación de estados o dinámicas no modeladas a partir de algún algoritmo por modos deslizantes, se debe tener en consideración dos aspectos importantes⁴:

1. Generalmente la variable de deslizamiento del proceso es el error de estimación $e(t)$, definido como la diferencia entre un estado medible y su estimado. No obstante, dado que la mayoría de los estados de una planta no están disponibles, es necesario dividir el modelo en dos subsistemas que refleje los estados disponibles por medición.

⁴Las condiciones descritas están enunciadas formalmente en [61] (Lema 3.1 Pp.121, Suposiciones 1-2 Pp.128) para sistemas lineales y un caso particular de sistemas no lineales.

2. Previamente se mencionó que las técnicas por modos deslizantes son robustas a perturbaciones externas acotadas $d(t)$. Sin embargo, es importante mencionar que la dinámica de las perturbaciones deben estar presentes en los estados medibles o de lo contrario no es posible rechazar su efecto en el sistema. Más aún, la robustez del observador se debe a su inyección de salida ν , que está descrita a continuación⁵

$$\nu = \rho \text{sign}(e) \tag{1.8}$$

donde $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ es una ganancia de ν .

Cabe destacar que, para valores relativamente grandes de ρ , es posible incrementar el efecto de 'chattering' o castaño del sistema por la función discontinua de (1.8). Si bien la función signo puede ser sustituida por una función continua, tiene como desventaja que $e(t)$ solo converge asintóticamente a 0.

Una forma de atenuar los efectos del castaño es emplear técnicas por modos deslizantes de alto orden. Para concluir esta sección, se menciona la siguiente definición que describe a un modo deslizante de segundo orden.

Definición 1.11. Sea la ecuación diferencial discontinua $\dot{x} = f(x)$ asociada a una función de salida suave $\sigma(x)$, definida en el sentido de Filippov. Si

1. σ y $\dot{\sigma}$ son funciones continuas de x .
2. El conjunto integral $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = \dot{\sigma}(x) = 0\}$ no es vacío.
3. El conjunto de Filippov admisible de \mathcal{N} contiene más de un vector.

Entonces se dice que existe un modo deslizante de segundo orden en \mathcal{N} .

1.2.3. Algoritmo de supertorsión

El STA es un algoritmo por modos deslizantes de segundo orden que posee la siguiente estructura general

$$\dot{x}_1 = x_2 - K_1 \sqrt{|x_1|} \text{sign}(x_1) + \varrho_1(x, t) \tag{1.9a}$$

$$\dot{x}_2 = -K_2 \text{sign}(x_1) + \varrho_2(x, t) \tag{1.9b}$$

donde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son respectivamente la variable de deslizamiento y la dinámica desconocida, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son las ganancias del STA y $\varrho_1(\cdot), \varrho_2(\cdot)$ son perturbaciones acotadas. Adicionalmente, dado que los términos derechos de (1.9) son discontinuos, entonces sus soluciones están definidas en el sentido de Filippov. Este algoritmo ofrece convergencia en tiempo finito, así como robustez cuando $\varrho_1(x, t)$ es nulo y los elementos de $\varrho_2(x, t)$ son acotados. No obstante, la demostración de sus propiedades pueden ser complicadas dado que emplean técnicas geométricas o de homogeneidad.

En [52] se prueba las propiedades del STA a partir una función de Lyapunov estrictamente decreciente y cuadrática. Así, con este enfoque se puede estudiar la robustez del STA cuando $\varrho_1(\cdot) \neq 0$. A continuación, basado en los resultados de [23] y [52], se prueba las propiedades de (1.9) con las perturbaciones $\varrho_1(\cdot)$ y $\varrho_2(\cdot)$.

⁵La estructura de ν puede depender del tipo de técnica por modo deslizante a usar.

Teorema 1.4. *Sea el STA (1.9) con $K_1 > 0$ y $K_2 > 1$ y la función de Lyapunov*

$$V(x) = \zeta^T P \zeta \quad (1.10)$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{|x_1|} \text{sign}(x_1) \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

donde $P = P^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_d \\ p_d & p_2 \end{bmatrix} > 0$ y ζ un cambio de variable. Entonces

1. Para $\varrho_1(x, t) = 0$ y $|\varrho_2(x, t)| \leq 1$, el punto de equilibrio x^* del STA es robusto y globalmente estable en tiempo finito. Además, cualquier trayectoria del STA que inicie en $x(0) = x_0$ converge en un tiempo finito τ menor a $T(x_0)$, es decir

$$T(x_0) = \frac{2}{\varsigma} \sqrt{V(x_0)} \quad \varsigma = \frac{\alpha_v \sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)} \quad (1.12)$$

2. Si $|\varrho_1(x, t)| \leq \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ y $|\varrho_2(x, t)| \leq 1$, pero para $\varrho_1 = 0$ el STA es globalmente estable en tiempo finito, entonces x^* es globalmente uniformemente últimamente acotada con cota última

$$b = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \frac{\delta \eta}{\alpha_v (1 - \kappa)}} \quad (1.13)$$

donde $\eta = \lambda_{\max}(P)$ y $0 < \kappa < 1$.

Demostración. Revisar Apéndice A. □

Nota 1.9. Es fácil garantizar que la cota de la perturbación ϱ_2 siempre sea 1. Si $|\varrho_2| \leq L \in \mathbb{R}_{>0}$ con L una constante conocida, entonces existe una ganancia β tal que $|\beta \varrho_2| \leq 1$, así $\beta = L^{-1}$ y en (1.9b) se multiplica el término β en la perturbación ϱ_2 .

Nota 1.10. Aunque existen pocas diferencias entre la demostración del teorema descrito en el Apéndice A y la mostrada en [52], la importancia de desarrollar la prueba es dar una idea al lector de la demostración de uno de los observadores planteados en el Capítulo 3.

1.3. Observadores adaptables

Los parámetros que describen al modelo de una planta real pueden alterar el desempeño de un observador asociado debido a las incertidumbres inherentes del sistema. Por ende, es necesario desarrollar métodos de identificación de parámetros que mejoren la robustez del observador ante incertidumbres paramétricas. Específicamente, adicionar una ley de adaptación paramétrica puede mejorar notablemente el desempeño del observador cuando el rango de incertidumbre es amplio [7].

Ahora, suponga que la perturbación d descrita en (1.5) corresponde a un vector de parámetros desconocidos $\theta \in \mathbb{R}^p$, es decir

$$\dot{x} = f(x, u, \theta) \quad (1.14)$$

Entonces se dice que (1.14) esta parametrizado linealmente si puede expresarse como

$$\dot{x} = g(x, u) + B\theta\phi(t) \quad (1.15)$$

donde $B, g(x, u) \in \mathbb{R}^n$ son respectivamente un vector constante y una función conocida, mientras que $\phi(t) = \phi \in \mathbb{R}^p$ se denomina como vector regresor, el cual es una función conocida y acotada⁶. Luego, para la estimación de los parámetros deseados se emplea una ley adaptable, es decir, una ecuación diferencial que describe la dinámica del estimado de θ ($\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}$) diseñada a partir de diversos criterios de optimización.

Diversas leyes de adaptación han sido propuestas [45] y en este caso se enfocará en dos leyes ampliamente descritas. Por un lado, el algoritmo gradiente esta basado en la minimización del error de estimación ($e(t) \in \mathbb{R}$) cuadrático, cuya estructura es la siguiente

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma\phi e \quad (1.16)$$

donde $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es una matriz simétrica positiva definida. Este algoritmo presenta propiedades de convergencia global bajo condiciones ideales [40]. Sin embargo, ante la presencia de perturbaciones externas o ruido, puede ocasionar que $\hat{\theta}$ diverja del origen porque este algoritmo actúa como un integrador que desvía los parámetros estimados [45].

Ahora, el algoritmo por mínimos cuadrados es una ley adaptable que minimiza el promedio del error cuadrático. La estructura de esta ley es la siguiente

$$\dot{\hat{\theta}} = P(t)\phi e \quad (1.17a)$$

$$\dot{P}(t) = -P(t)\phi\phi^T P(t), \quad P(0) = P(0)^T > 0 \quad (1.17b)$$

donde $P(t) = P$ se denomina matriz de covarianza. Si bien el método de mínimos cuadrados reduce el efecto del ruido en la medición [40], la estructura mostrada en (1.17) presenta una desventaja en particular. Dado que $\frac{d}{dt}(P^{-1}) = \phi\phi^T \geq 0$, entonces P^{-1} no es acotada superiormente y por ende P puede tomar valores arbitrariamente pequeños tal que disminuye la velocidad de estimación [40].

La desventaja principal de este algoritmo puede solucionarse modificando la dinámica de la matriz de covarianza de la forma siguiente

$$\dot{\hat{\theta}} = P\phi e \quad (1.18a)$$

$$\dot{P} = \begin{cases} bP - P\phi\phi^T P & \text{Si } \|P\| \leq r_0 \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}, \quad P(0) = P(0)^T > 0 \quad (1.18b)$$

donde $b, r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ son el factor de olvido y la cota superior de P . Así, la función de b es descartar exponencialmente la información previa de $e(t)$ en un tiempo dado $t > \tau$ y evitar que P adquiera valores relativamente pequeños, mientras que r_0 garantiza que P sea una matriz acotada [40]. Esta nueva estructura se denomina *modificación del algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido*.

⁶Como se describe en [40], cuando ϕ no es acotada se puede emplear una señal de normalización m tal que $\frac{\phi}{m}$ es acotada.

Luego, independiente de la estructura del observador de estados, suponga que la dinámica de e y $\hat{\theta}$ poseen la siguiente estructura

$$\dot{e} = -Ae + B\phi\tilde{\theta} \quad (1.19a)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = M\phi C^T e \quad (1.19b)$$

$$y = C^T e \quad (1.19c)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^n$ son tal que la función de transferencia $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ es estrictamente real positiva, $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ es el error paramétrico y $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es una matriz simétrica positiva definida. Observe que se puede probar que e converge al origen de forma asintótica, pero no necesariamente $\hat{\theta}$ converge a su valor nominal θ . Para ello, es necesario que ϕ cumpla la condición de excitación persistente, que se describe a continuación.

Definición 1.12. Sea $\phi \in \mathbb{R}^p$ una función integrable y acotada. Se dice que ϕ cumple la condición de excitación persistente si existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, T_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\alpha_2 I \geq \int_t^{t+T_0} \phi(\tau)^T \phi(\tau) d\tau \geq \alpha_1 I$$

donde $I \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es la matriz identidad.

Ahora, el siguiente teorema describe las condiciones para que $\hat{\theta}$ converja exponencialmente a θ , cuya demostración se puede consultar en [12].

Teorema 1.5. *Sea la ecuación diferencial (1.19b). Si ϕ cumple la condición de excitación persistente y la función de transferencia $H(s)$ es estrictamente real positiva, propia y se cumple $H(\infty) = 0$, entonces $\hat{\theta}$ converge exponencialmente a θ .*

Para concluir este capítulo, se enuncian algunas de las propiedades de la matriz de covarianza P independientes del error e , cuyos detalles pueden consultarse en [40].

Lema 1.3. *La matriz de covarianza P cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es acotada.*
2. *La derivada de la inversa de P es*

$$\frac{d}{dt} (P^{-1}) = \begin{cases} -bP^{-1} + \phi\phi^T & \text{Si } \|P\| \leq r_0 \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases} \quad (1.20)$$

3. *Si ϕ es acotada y cumple la condición de excitación persistente, entonces P, P^{-1} son matrices simétricas definidas positivas y acotadas. Más aún, para una b suficientemente grande, $\frac{d}{dt} (P^{-1})$ es una matriz simétrica semidefinida negativa.*

Demostración. Revisar Apéndice A. □

Capítulo 2

Modelado del proceso de biorremediación

Un proceso biotecnológico o bioproceso es un conjunto de etapas donde se transforman ciertos reactivos a partir de seres vivos o sus componentes biológicos para obtener un producto deseado [25]. En general, todo bioproceso consiste de diferentes etapas, descritas a continuación [51]:

1. Los reactivos son previamente tratados para convertirlos en formas susceptibles para el proceso.
2. Los reactivos tratados son transformados en algún producto intermedio a partir de reacciones biológicas mediadas por biocatalizadores, conformados por células o enzimas.
3. Los productos intermedios son tratados mediante diferentes métodos físicos y/o químicos con el fin de recuperar y purificar el producto deseado.

De este modo, la biorremediación de metales pesados es un bioproceso que remueve dichas sustancias tóxicas de algún medio contaminado [33][39]. Para ello, se emplean microorganismos que presenten diversas estrategias de adaptación y remoción de contaminantes. Observe que en este trabajo, los reactivos del proceso son la concentración de metales pesados y una fuente de nutrientes para el cultivo del microorganismos fotosintéticos, mientras que el objetivo deseado del bioproceso es la remoción de metales pesados presentes en agua contaminada.

Dado que el objetivo del trabajo es diseñar un observador robusto para este bioproceso, primero se debe describir el fenómeno mediante un modelo matemático. Sin embargo, antes de modelar el bioproceso se describirán algunos conceptos previos involucrados en la biorremediación de metales pesados.

2.1. Conceptos preliminares

2.1.1. Fotobiorreactores

Para que ocurra la segunda etapa de un bioproceso, es necesario emplear un biorreactor, definido como un sistema o dispositivo donde ocurren reacciones biológicas y químicas en un ambiente controlado [26].

El sistema de un biorreactor consta de diferentes fases [38], es decir, poseen una fase líquida conformada por el medio de cultivo junto una fase sólida formada por los reactivos y biocatalizadores como microorganismos o enzimas. Además, presenta una fase gaseosa conformada por reactivos y/o productos como CO_2 , O_2 , N_2 o S_2 .

Así, un fotobiorreactor se define como un biorreactor que presenta una fuente de luz para el cultivo de microorganismos fotosintéticos. Dichos equipos pueden clasificarse de acuerdo a los siguientes criterios:

- Con base en su estructura [34], [38]: Tubulares, de tipo columna, de superficie plana o flatplate, de tanque agitado, híbridos, entre otros.
- Con base en el tipo de cultivo [16]: Son fotoautotróficos si la producción de biomasa solo depende de la luz y CO_2 ; son heterotróficos si la producción de biomasa depende de una fuente de carbono; son mixotróficos si los cultivos son fotoautotróficos y heterotróficos.
- Con base en las condiciones de operación [26]: Es de tipo batch si el flujo de entrada y salida es igual a cero; es de tipo Fed-Batch si el flujo de salida es igual a cero; es de tipo continuo si el flujo de entrada es igual al de salida, así el volumen del reactor es constante.

Por ejemplo, en la Fig.2.1 se muestra la estructura de un fotobiorreactor continuo de tanque agitado (CTSR¹). Aunque estos reactores no son escalables por los altos costos de operación, la presencia del agitador mecánico mejora la transferencia de masa y energía en el cultivo, produciendo un mezclado homogéneo de los reactivos y de las variables del proceso, además el reactor posee una buena dispersión de la luz [33].

2.1.2. Microorganismos fotosintéticos

En sentido amplio, este grupo está conformado por microalgas del dominio Eukarya [56] y por ciertos Phyla del dominio Bacteria [48]. Se denomina como microorganismo fotosintético aquel ser vivo microscópico capaz de producir energía a partir de la fotosíntesis, es decir, mediante una reacción bioquímica de dos fases [20].

La primera, denominada **fase luminosa**, consiste en la síntesis de moléculas que almacenan la energía obtenida a partir de la absorción selectiva de la luz mediante pigmentos fotosintéticos [20]. Si durante esta fase se utiliza H_2O en la reacción, se denomina fotosíntesis oxigénica, en caso contrario se denomina anoxigénica, como es el caso de las bacterias verdes o rojas del azufre, heliobacterias y acidobacterias, donde se emplea H_2 o ácido sulfídrico (H_2S) [20].

¹De sus siglas en inglés Continuous Stirred Tank Reactor.

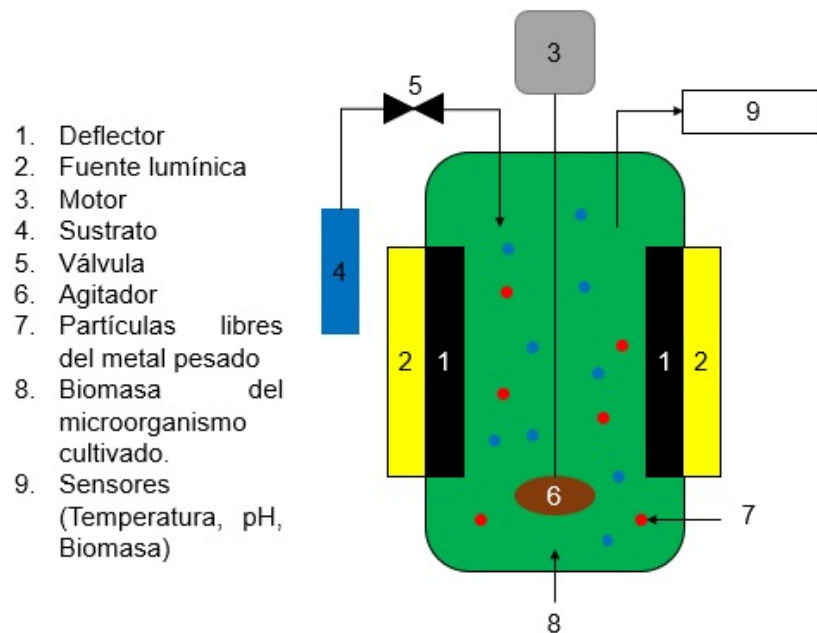


Fig 2.1: Estructura de un fotobiorreactor tipo CSTR.

Mientras que en la segunda, denominada **fase oscura**, se sintetiza una biomolécula intermedia para la formación de azúcares llamada GLP² [20]. Para ello, se fija el CO₂ atmosférico en una compleja secuencia de reacciones químicas que utilizan la energía previamente producida hasta sintetizar el GLP [20].

Cabe destacar que un grupo interesante de microorganismos para la remoción de metales pesados son las cianobacterias, es decir, un phylum del dominio Bacteria que posee las siguientes características [48],[64]:

- Son microorganismos fotosintéticos oxigénicos, donde la fotosíntesis y respiración celular ocurren en estructuras llamadas tilacoides.
- El pigmento principal para la absorción de luz es la clorofila *a*, además tiene como pigmentos accesorios dos ficobilinas (ficocianinas y ficoeritrina).
- Algunas especies pueden asimilar compuestos de carbono sencillos como glucosa, siendo fotoheterótrofos. Más aún, la fuente de carbono formada y/o absorbida es acumulada en carboxisomas.
- Su pared celular presenta una gran concentración de peptidoglucanos.
- Se reproducen generalmente por fisión binaria.
- Ciertos grupos son capaces de fijar nitrógeno atmosférico (N₂) a partir de estructuras denominadas heterocistos. Sin embargo, algunas especies son capaces de fijar N₂ sin la presencia de heterocistos [13].
- Suelen vivir en ambientes terrestres y de agua dulce, sin embargo, están ampliamente distribuidos en el océano.

²Notación para gliceraldehído 3-fosfato.

2.1.3. Metales pesados

Un metal pesado es un conjunto de elementos que presentan un peso atómico entre 63.5 y 200.6, una gravedad específica superior a 5 y son tóxicos en concentraciones relativamente altas en seres vivos [33]. Su toxicidad se debe a que alteran múltiples funciones metabólicas y celulares, generalmente por la formación de especies reactivas del oxígeno que modifican el potencial de membrana y causan daños irreversibles del ADN y las proteínas [39].

Los metales pesados pueden catalogarse en función de su rol biológico o con base en su toxicidad. En el primer caso, están aquellos metales pesados sin rol biológico así que son tóxicos para seres vivos incluso en bajas concentraciones como plata (Ag), aluminio (Al), cadmio (Cd), mercurio (Hg) y plomo (Pb) [33], [39]. Por otro lado, están los metales que tienen una función metabólica y son necesarios en pequeñas concentraciones como calcio (Ca), cobre (Cu), cromo (Cr), sodio (Na), níquel (Ni) y zinc (Zn) [39]. Mientras que en el segundo caso, los metales pesados pueden presentar diferentes efectos tóxicos a nivel molecular y celular, como es la inhibición de la toma de O_2 (Cr), inhibición enzimática (Cd, Cu, Hg, Ni, Pb, Zn), inhibición de la transcripción o daño del ADN (Ag, Cd, Hg, Pb), inhibición del crecimiento (Ag, Cd, Cr, Hg, Ni, Pb, Zn), elongación de la fase estacionaria (Cr), daño de la membrana plasmática (Cd, Cu, Hg, Ni, Pb, Zn), destrucción o desplegamiento proteico (Cd, Hg, Pb), destrucción de ácidos nucleicos (Cd, Pb) o lisis celular (Ag, Zn) [33], [39]. Todavía más, los efectos a largo plazo de estos metales en seres humanos puede producir dolores de cabeza, diarrea, anemia, daño renal, hepático o cerebral, entre otros problemas de salud [33].

Los microorganismos han desarrollado diversas estrategias para sobrevivir a la toxicidad de estos metales, tales como secuestro intracelular y extracelular, metilación y/o reducción de metales e incluso, la presencia de barreras extracelulares [39]. Sin embargo, el proceso de bioabsorción es el mecanismo más importante dado que es un proceso activo de células vivas cuya afinidad a los metales es alta en condiciones favorables, es generalmente rápido y relativamente selectivo [1],[33]. Esta estrategia consiste de un conjunto de mecanismos, generalmente independientes del metabolismo, que absorben los metales del medio externo [39].

Luego, los microorganismos fotosintéticos presentan diversas estrategias de bioabsorción. Por un lado, la presencia de diversas moléculas aniónicas ubicadas sobre la superficie extracelular (membrana, pared o cápsula) como fosfatos, carboxilos, hidroxilos, amidas, expolisacáridos, lipopolisacáridos o peptidoglucanos, actúan como sitios de unión para los metales en forma catiónica [39],[43]. También puede ocurrir la precipitación de los metales en forma de sulfatos o fosfatos [43]. Adicionalmente, algunos metales pueden ingresar a la célula por intercambio iónico o mediante la unión con moléculas de la superficie extracelular para ser eventualmente transformados en sustancias menos tóxicas que puedan ser volatilizados o acumulados en estructuras intracelulares [39],[43].

Cabe destacar que el mecanismo de bioabsorción depende de múltiples factores, cuyos efectos se describen a continuación [1],[39],[43]:

- El pH puede reducir la cantidad de sitios de absorción celular o modificar su selectividad. Incluso, en medios ácidos los grupos funcionales de la superficie externa se vuelven disponibles y se unen con los metales pesados del medio, disminuyendo la posibilidad de absorción.

- Un incremento en la temperatura puede incrementar la tasa de absorción de la superficie externa, además de incrementar la solubilidad de los metales pesados haciendo que estén más disponibles en el medio.
- Los metales con alta densidad de carga son más propensos a unirse a la superficie celular debido a la interacciones electrostáticas entre ellos.
- La concentración de biomasa, porque al haber una cantidad limitada de sitios de unión, la absorción de metales pesados puede llegar a saturarse.
- La interacción entre múltiples metales puede tener efectos diferentes. Puede incrementarse la absorción de un metal específico, pueden competir por un sitio de unión o no tener ningún efecto.
- Condición previa del microorganismo, este puede encontrarse vivo, inmovilizado o muerto. Sin embargo, en este último caso existen contradicciones en la literatura sobre qué método es el más efectivo para la bioabsorción [1],[16],[65].

2.2. Modelo del bioproceso

Suponga que el proceso de biorremediación ocurre en un fotobiorreactor continuo que cumple las siguientes condiciones:

1. Solo existe un único microorganismo y un solo metal a biorremediar en el medio de cultivo.
2. La temperatura y pH del medio están bien regulados por sistemas de control independientes.
3. Es cultivado en un fotobiorreactor similar a un CSTR, es decir, el proceso está perfectamente mezclado. Así, la presencia de los reactivos y el valor de las variables del proceso son homogéneas.

Entonces la representación general de estados de un biorreactor es la siguiente [26]:

$$\dot{\xi}(t) = A\varphi(\xi(t), t) - D(t)\xi(t) - G(\xi(t), f_g(t)) + F(D(t), R_i(t)) \quad (2.1a)$$

$$\dot{V}(t) = f_i(t) - f_o(t) \quad (2.1b)$$

donde $\xi(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es la concentración de los reactivos y/o productos del reactor, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de coeficientes de rendimiento, $\varphi(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es el vector de tasas de reacción, $D(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el factor de dilución, $G(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es la tasa de transferencia gas-líquido, $f_g(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el flujo de entrada de un gas, $F(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es la tasa de transferencia de masa en el líquido, $R_i(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es la concentración de alimentación de reactivo, $V(t) \in \mathbb{R}_{> 0}$ es el volumen del reactor, además $f_i(t), f_o(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el flujo de entrada y salida del reactor. Luego, dado que el reactor es continuo, entonces $f_i = f_o$, $\dot{V}(t) = 0$ y por ende

$$D(t) = \frac{f_i(t)}{V(t)} \quad (2.2)$$

Ahora, como se mencionó al inicio del capítulo, los reactivos del biorreactor son la concentración del único microorganismo o biomasa $X(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, el sustrato $S(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-2}$ y la concentración de metal libre del medio $M(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Definiendo

$$\begin{aligned}\xi(t) &= [X(t) \ S(t) \ M(t)]^T \\ A &= \text{diag}(1, -Y_1, \dots, -Y_{n-2}, -1) \\ \varphi(\xi(t), t) &= [\mu(\xi(t))X(t) \ \dots \ \mu(\xi(t))X(t) \ q_m(X(t), t)M(t)]^T \\ G(\xi(t)) &= [0 \ g_1(\xi(t), f_g(t)) \ \dots \ g_{n-2}(\xi(t), f_g(t)) \ 0]^T \\ F(D(t), R(t)) &= D(t) [0 \ s_1(t) \ \dots, s_{n-2}(t) \ m(t)]^T\end{aligned}$$

donde $Y_i \in \mathbb{R}_{>0}$ son coeficientes de rendimiento biomasa-sustrato, $\mu(\xi(t)) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la tasa de crecimiento, $q_m(X(t), t) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la tasa de remoción del metal, $s_i(t) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la concentración de alimentación de sustrato, $m(t) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la concentración de alimentación de metal libre y $i = \{1, \dots, n-2\}$. Así, sustituyendo los nuevos términos en (2.1a)³

$$\dot{X} = \mu X - D(t)X \quad (2.3a)$$

$$\dot{S}_i = -Y_i \mu X - D(t)(S_i - s_i(t)) - g_i \quad (2.3b)$$

$$\dot{M} = -q_m(X, t)M - D(t)(M - m(t)) \quad (2.3c)$$

Varios aspectos importantes deben mencionarse de (2.3). Para empezar, como se menciona en la Sección 2.1.3, la tasa de remoción del metal debe depender de la concentración de biomasa en el medio. Así, la tasa de remoción se expresa de la siguiente manera

$$q_m(X, t) = q(t)r_x(X) \quad (2.4)$$

donde $q(t) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la tasa de absorción y $r_x(X) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función asociada a la biomasa. Luego, como se mencionó en la sección anterior, el mecanismo principal de remoción de metales es la bioabsorción. En [16] se describe una modificación del modelo de Largergren de primer orden⁴ que considera la dinámica de absorción y desabsorción de metales, es decir

$$\dot{q}(t) = \kappa_{ad}(q_{\max} - q(t)) - \kappa_{de}q(t) \quad (2.5)$$

donde $\kappa_{ad}, \kappa_{de}, q_{\max} \in \mathbb{R}_{>0}$ son la capacidad de absorción, capacidad de desabsorción y capacidad máxima de absorción del metal, respectivamente.

Ahora, existen dos efectos importantes de M en el bioproceso. Por un lado, la toxicidad de M puede alterar la mortalidad del cultivo. Así, la dinámica de \dot{X} debe contener un término adicional $r_m(M, t)X$ que exprese la tasa de mortalidad total del microorganismo. Además, se puede suponer que M no está involucrado en la tasa de crecimiento μ . Para observar esto, recuerde que M fue clasificado con base en su rol biológico. Si M no posee dicho rol, entonces no hay forma posible en que M beneficie el crecimiento del microorganismo. De lo contrario puede alterar la tasa de crecimiento, pero como los metales son considerados como micronutrientes [48], estos se requieren en bajas concentraciones. Por consecuencia, el efecto que tiene cualquier metal M en μ es despreciable.

³Sin pérdida de generalidad $X(t) = X$, $S_i(t) = S$, $M(t) = M$, $\mu(\xi(t)) = \mu$, $g_i(\xi(t), f_g(t)) = g_i$.

⁴Para más detalles sobre otros modelos de absorción consulte [56].

Por último, note que los estados de (2.3) dependen del factor de dilución $D(t)$. Si por un error práctico no se ajusta bien el factor de dilución, puede presentarse una perturbación en la entrada tal que puede alterar notablemente la dinámica del bioproceso. Por ende, suponiendo que esta perturbación sea aditiva, entonces el factor de dilución se expresa de la siguiente forma

$$D(t) = d(t) + \delta(t) \quad (2.6)$$

donde $d(t), \delta(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el factor de dilución nominal y una perturbación asociada a $d(t)$, respectivamente.

Por lo tanto, definiendo $a_1 = \kappa_{ad} + \kappa_{ed}$, $a_2 = \kappa_{ad}q_{\max}$ y de (2.3)-(2.6), se tiene el modelo del proceso de bioremediación de metales pesados⁵:

$$\dot{X} = \mu X - (d + \delta(t))X - r_m(M, t)X \quad (2.7a)$$

$$\dot{S}_i = -Y_i \mu X - (d + \delta(t))(S_i - s_i(t)) - g_i \quad (2.7b)$$

$$\dot{M} = -qr_x M - (d + \delta(t))(M - m(t)) \quad (2.7c)$$

$$\dot{q} = -a_1 q + a_2 \quad (2.7d)$$

Para concluir este capítulo, se debe resaltar ciertas características del modelo (2.7):

- El modelo desarrollado es válido para cualquier tipo de microorganismo (bacteria, protista, hongo, alga), siempre que se cumplan las condiciones mencionadas al principio de esta sección.
- Tal como se describió en la Sección 2.1.3, la descripción de la remoción de metales pesados incluye el efecto de la biomasa mediante r_x , así como la absorción y desabsorción de metales involucradas en la bioabsorción.
- Retomando lo descrito en la Sección 2.1.3, la razón de describir la dinámica de un solo metal pesado es para excluir el efecto sinérgico y/o antagónico de otros metales en la absorción. Sin embargo, suponiendo que la interacción entre metales es neutra, entonces de igual manera que en [59], este modelo puede generalizarse para mas de un metal a remover en el medio de cultivo.
- Se adicionó el efecto tóxico de estos contaminantes en el crecimiento microbiano mediante $r_m(M, t)$.
- Observe que no se ha mencionado explícitamente la estructura de r_x y $r_m(M, t)$. Así, la estructura de estas funciones será propuesta en los siguientes capítulos.
- Previamente se mencionó que una variable fundamental en los fotobiorreactores es la presencia de una fuente luminosa $I_i(t)$. Este término, así como la dinámica del sustrato, están involucrados en la tasa de crecimiento μ . Sin embargo, dado que existen múltiples factores que alteran la tasa de crecimiento [21], no se conoce la estructura de μ .

⁵Sin pérdida de generalidad $q(t) = q$, $d(t) = d$ y $r_x(X) = r_x$.

Capítulo 3

Diseño de observadores robustos para el bioproceso

El diseño de observadores para cualquier bioproceso tiene un enfoque teórico-práctico. Por un lado, debido a la complejidad, no linealidad e incertidumbres en el modelado de la tasa de crecimiento, es necesario desarrollar observadores teóricamente robustos al desconocimiento parcial o total de esta reacción. Así, como se menciona en [23], la tasa de crecimiento puede considerarse como una perturbación en el bioproceso que puede estimarse numéricamente sin conocer su estructura.

Luego, visto desde un enfoque práctico, monitorear y/o controlar la dinámica de un biorreactor implica conocer sus estados. Sin embargo, aunque existen sensores para la medición de algunos sustratos y metales, la mayoría son costosos, invasivos o discontinuos. Por lo anterior, es importante diseñar un observador de estados que estime los reactivos y/o productos del bioproceso a partir de las pocas mediciones disponibles. Aun más, debido a las imperfecciones de los actuadores que regulan el factor de dilución, pueden introducir perturbaciones adicionales tal que la dinámica del proceso cambie drásticamente. Así, es necesario estimar esta perturbación junto con los estados del bioproceso.

Por lo tanto, el objetivo particular para el bioproceso estudiado en este trabajo es **diseñar un observador robusto a la tasa de crecimiento μ , tal que estime la perturbación en la entrada $\delta(t)$ y la concentración de metal libre en el medio M , a partir de la pocas mediciones disponibles del biorreactor**¹. Luego, la mejor forma de incrementar la robustez del observador es estimando numéricamente μ a partir de un algoritmo por modos deslizantes de alto orden como el STA dada su robustez, convergencia en tiempo finito y atenuación del castaño.

En este capítulo, se estudiarán ciertas suposiciones necesarias en el modelo desarrollado del Capítulo 2 para diseñar los observadores robustos adecuados para el bioproceso. Más tarde, se describirá un caso preliminar de observación cuyo fin es mostrar las limitaciones del algoritmo STA desarrollado en [24] para biorreactores continuos bajo perturbaciones externas en el factor de dilución. Por último, usando los conceptos descritos en el Capítulo 1, se probará teóricamente las propiedades de convergencia del error de los observadores diseñados, cuyo desempeño será mostrado con simulaciones en el siguiente capítulo.

¹También se pueden monitorear los sustratos que existan en el medio de cultivo a partir de la estimación de μ y $\delta(t)$. Sin embargo, dado que el interés principal es estimar $\delta(t)$ y M , en el presente trabajo no se considerará el problema de observación de otros sustratos.

3.1. Suposiciones de diseño

Sea el modelo del proceso de biorremediación de metales pesados (2.7), es decir

$$\dot{X} = \mu X - (d + \delta(t))X - r_m(M, t)X \quad (3.1a)$$

$$\dot{S}_i = -Y_i \mu X - (d + \delta(t))(S_i - s_i(t)) - g_i \quad (3.1b)$$

$$\dot{M} = -qr_x M - (d + \delta(t))(M - m(t)) \quad (3.1c)$$

$$\dot{q} = -a_1 q + a_2 \quad (3.1d)$$

donde $i = \{1, \dots, n - 2\}$. Previo al diseño de un observador que permita estimar simultáneamente $\delta(t)$, μ y M , varios aspectos deben considerarse de (3.1). Para empezar, X debe ser estrictamente positiva con condición inicial $X(0) > 0$. Aunque parezca una condición restrictiva, a nivel práctico es una suposición esperada porque para cualquier bioproceso, el microorganismo cultivado es clave para la formación de productos o el consumo de ciertos reactivos deseados, como es el caso de la remoción de metales pesados. Así, no puede ocurrir ninguna reacción en el biorreactor si X es nulo en algún momento.

Por otra parte, X es una función continua y acotada porque la cantidad de recursos disponibles para el crecimiento es limitada. Por ende, los reactivos del cultivo S_i y M son positivos, continuos y acotados con condiciones iniciales $S_i(0), M(0) \geq 0$. Dichas implicaciones solo son posibles si $\mu, d, \delta(t), r_m(M, t)$ y g_i son funciones positivas, continuas y acotadas, mientras que por simplicidad $s_i(t)$ y $m(t)$ son funciones constantes y positivas. Aun más, observe que r_x es una función dependiente de X , así debe ser estrictamente positiva, continua y acotada. Además, dado que \dot{q} es un sistema lineal invariante en el tiempo, es fácil ver que es una función positiva, continua y acotada si $q(0) > 0$.

Cabe destacar no es suficiente que μ, d y $\delta(t)$ sean positivas, continuas y acotadas. Si μ es relativamente pequeña o d hace que el reactor se comporte como un reactor Batch, la producción de biomasa será menor a la tasa de mortalidad y X puede llegar a ser nulo en algún momento. Mientras que si d o $\delta(t)$ son relativamente grandes, la producción de biomasa será menor en comparación a la cantidad de biomasa diluida, por lo que X también puede ser nulo en algún momento. Aun más, el hecho de que X pueda ser nulo implica que S_i y M crecerán indefinidamente en el reactor hasta saturarse. Así, es necesario que μ, d y θ estén definidos en un conjunto de valores tal que X sea estrictamente positiva y acotada, mientras que S_i y M sean positivas y acotadas.

Luego, observe que \dot{X} puede depender de M por $r_m(M, t)$. Sin embargo, suponga que la concentración de M es relativamente baja en el reactor tal que sus efectos tóxicos en los microorganismos es constante. Así, como se describe en [59]:

$$r_m(M, t) = \beta_D + \beta_M = \beta \quad (3.2)$$

donde $\beta_D, \beta_M, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ es la tasa de mortalidad natural, la tasa de mortalidad causada por el metal y la tasa de mortalidad total, respectivamente.

Adicionalmente, la presencia de una perturbación en el factor de dilución se debe a un error de ajuste relativamente constante causado por los actuadores asociados. Así, puede considerarse la dinámica de $\delta(t)$ como un parámetro constante positivo o de variación lenta acotada en el tiempo. Aunado a lo anterior, los demás parámetros del sistema (β, Y_i, a_1, a_2) se consideran conocidos o factibles de ser previamente estimados por algún método de identificación paramétrica o deducidos a partir de leyes biológicas o químicas.

A continuación, se resume las condiciones necesarias previamente mencionadas para diseño de observadores para el modelo (3.1).

Suposición 1. La biomasa X es estrictamente positiva, continua y acotada, es decir, existen constantes $x_{\min}, x_{\max} \in \mathbb{R}_{>0}$, tal que $0 < x_{\min} \leq X < x_{\max} < \infty$. Además la condición inicial $X(0) > 0$.

Suposición 2. Los sustrato S_i y la concentración de metal M son positivas, continuas y acotadas, es decir, existen $s_{a_i}, m_a \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $0 \leq S_i \leq s_{a_i} < \infty$ y $0 \leq M \leq m_a < \infty$ con $i = \{1, \dots, n-2\}$. Además las condiciones iniciales $S_i(0), M(0) \geq 0$.

Suposición 3. El factor de dilución nominal es una entrada conocida, positiva y acotada, es decir, existe un $d_a \in \mathbb{R}_{>0}$, tal que $0 \leq d < d_a < \infty$. Mientras que las demás entradas del sistema son constantes positivas, es decir, $s_i(t) = \bar{s}_i$ y $m(t) = \bar{m}$ con $\bar{s}_i, \bar{m} \in \mathbb{R}_{>0}$ y $i = \{1, \dots, n-2\}$.

Suposición 4. La perturbación asociada a la entrada $\delta(t) = \theta \in \mathbb{R}_{>0}$ es un parámetro constante o con dinámica lenta y acotada desconocida.

Suposición 5. La tasa de crecimiento μ es una función positiva continua y acotada con derivada continua acotada², es decir, existe $\rho, \rho_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 \leq \mu \leq \rho_0$ y $|\dot{\mu}| \leq \rho$.

Suposición 6. La transferencia de gas-líquido g_i es una función positiva, conocida y acotada, es decir, existe un $g_a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $0 \leq g \leq g_a$.

Suposición 7. La función $r_x \in \mathbb{R}_+$ es conocida, continua, dependiente de X y acotada, es decir, existen constantes $q_{\min}, q_{\max} \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 < q_{\min} \leq r_x \leq q_{\max} \leq \infty$.

Suposición 8. El factor de dilución nominal d , la perturbación θ y la tasa de crecimiento μ están definidas en un conjunto \mathcal{U} , tal que se cumple la Suposición 1-2.

Suposición 9. Los parámetros $\beta, Y_i, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son conocidos.

Por lo tanto, el modelo que describe al proceso de biorremediación de metales pesados que cumple la Suposición 1-9 es el siguiente

$$\dot{X} = \mu X - (d + \theta)X - \beta X \quad (3.3a)$$

$$\dot{S}_i = -Y_i \mu X - (d + \theta)(S_i - \bar{s}_i) - g_i \quad (3.3b)$$

$$\dot{M} = -q r_x M - (d + \theta)(M - \bar{m}) \quad (3.3c)$$

$$\dot{q} = -a_1 q + a_2 \quad (3.3d)$$

donde $i = \{1, \dots, n-2\}$.

²Como se menciona en [24], la derivada de μ debe ser acotada para el diseño del observador propuesto.

3.2. Caso preliminar

Para cumplir con el objetivo de observación es necesaria una medición disponible en el reactor. En este caso, la biomasa X es una variable factible de medición que ha sido usada en diferentes trabajos como [11]. Luego, dado que no se conoce la dinámica μ , no es posible aplicar observadores adaptables que identifiquen θ . Más aún, note que la estimación de M implica conocer previamente θ .

El problema de robustez a la incertidumbre de μ en biorreactores continuos ha sido descrita en [24], donde fue diseñado un STA particular para estimar numéricamente μ a partir de la medición de X . Una ligera modificación al STA propuesto es la siguiente:

$$\dot{\hat{X}} = \left(-(d + \hat{\theta}(t) + \beta) + \rho \left(\xi + K_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) \right) \right) \hat{X} \quad (3.4a)$$

$$\dot{\xi} = K_2 \text{sign}(\sigma) \quad (3.4b)$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{X}{\hat{X}} \right) \quad (3.4c)$$

$$\hat{\mu} = \rho \xi \quad (3.4d)$$

donde $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta} \in \mathbb{R}$ es un estimado de θ , las constantes $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son ganancias del STA y $\sigma \in \mathbb{R}$ es la variable de deslizamiento. Por ende, el objetivo de esta sección es estudiar el algoritmo (3.4) y evaluar la veracidad de las siguiente afirmaciones:

1. La estimación de μ sin la previa estimación de θ no es robusta.
2. Se requiere solo la medición de X para estimar simultáneamente μ y θ .

Para estudiar las afirmaciones considere la dinámica de la biomasa descrita en (3.3a) y del observador correspondiente (3.4). Entonces, derivando σ con respecto al tiempo

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{\hat{X}}}{\hat{X}} \right) = \frac{\mu}{\rho} - \xi - K_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) - \frac{(\theta - \hat{\theta})}{\rho}$$

Definiendo $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ como un error paramétrico y $v = \frac{\mu}{\rho} - \xi$, se tiene

$$\dot{\sigma} = v - K_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) + \varrho_1 \quad (3.5a)$$

$$\dot{v} = -K_2 \text{sign}(\sigma) + \varrho_2 \quad (3.5b)$$

donde $\varrho_1 = -\frac{\tilde{\theta}}{\rho}$ y $\varrho_2 = \frac{\dot{\mu}}{\rho}$ con $|\varrho_2| \leq 1$. Suponga que $\hat{\theta} = \bar{\theta} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ donde $\bar{\theta}$ es un valor nominal previamente estimado. Si $\tilde{\theta} \neq 0$, entonces por el Teorema 1.4 las trayectorias solución de (3.5) son uniformemente últimamente acotadas, así $\hat{\mu} \neq \mu$ en tiempo finito.

Por lo tanto, este caso particular muestra que es necesario emplear alguna estrategia para identificar θ en línea, tal que disminuya el error paramétrico $\tilde{\theta}$ y por ende, la estimación de μ sea robusto. No obstante, obtener un estimado de θ a partir de una sola medición disponible en (3.3) no es algo trivial.

Para observar este hecho, aplicando el cambio de variable $\zeta_1 = K_1\sqrt{|\sigma|}\text{sign}(\sigma)$ y $\zeta_2 = \nu$ en (3.5), se obtiene la misma función que la descrita en (A.3), es decir

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{|\zeta_1|} \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}K_1 & \frac{1}{2} \\ -K_2 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{bmatrix} \right)$$

con $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2]^T$. Luego, se propone la función candidata de Lyapunov

$$V = \zeta^T P \zeta + \frac{1}{2} \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2 \quad (3.6)$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ y $P = P^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_d \\ p_d & p_2 \end{bmatrix} > 0$. Así, siguiendo los mismos pasos descritos en el Apéndice A

$$\dot{V} \leq -\frac{\alpha_v}{|\zeta_1|} \zeta^T \zeta + \tilde{\theta} \left(\frac{1}{\rho} (p_1 \zeta_1 + p_d \zeta_2) + \gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \right)$$

donde α_v está definido como en la Nota 1.6. Así, una ley adaptable para θ es

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\theta} = -\frac{\gamma}{\rho} (p_1 \zeta_1 + p_d \zeta_2) \rightarrow \dot{\theta} = \frac{\gamma}{\rho} (p_1 \zeta_1 + p_d \zeta_2) \quad (3.7)$$

No obstante, esto es una contradicción porque $\zeta_2 = \frac{\mu}{\rho} - \xi$ depende de la variable desconocida μ . Sumado a lo anterior, en [54] se menciona que es necesario tener la misma cantidad de mediciones y tasas de reacción desconocidas para aplicar el STA propuesto en el artículo. De forma similar, si se tuviera una segunda medición del bioproceso, entonces puede estimarse la tasa de crecimiento μ y la perturbación θ . Así, es necesario que se cumpla la siguiente condición.

Suposición 10. La biomasa X y al menos un sustrato S son funciones medibles sin ruido.

3.3. Estimación simultánea de θ , M y μ

Sea la dinámica del proceso de biorremediación de metales pesados

$$\dot{X} = \mu X - (d + \theta)X - \beta X \quad (3.8a)$$

$$\dot{S} = -Y\mu X - (d + \theta)(S - \bar{s}) - g \quad (3.8b)$$

$$\dot{M} = -qr_x M - (d + \theta)(M - \bar{m}) \quad (3.8c)$$

$$\dot{q} = -a_1 q + a_2 \quad (3.8d)$$

donde S describe la dinámica del único sustrato medible del reactor. Para obtener un estimado adecuado de M es necesario estimar θ a partir de X y S . Sin embargo, θ y μ están presentes simultáneamente en (3.8a) y (3.8b). A continuación, las siguientes secciones muestran los **resultados principales** del presente trabajo, tal que se estima θ y μ a partir de dos algoritmos diferentes, mientras que M se estima a partir de un observador asintótico.

3.3.1. Pseudo-STA Extendido

Previo al diseño de un observador que pueda estimar simultáneamente μ y θ a partir de la medición de X y S , primero se tratara un caso general de un sistema no lineal con la siguiente estructura

$$\dot{\chi} = \Phi(\chi)\eta(t) + F(\chi) \quad (3.9)$$

donde $\chi \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\Phi(\chi) = \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz dependiente de χ , $\eta(t) = \eta \in \mathbb{R}^n$ es un vector de dinámicas desconocidas y $F(\chi) = F \in \mathbb{R}^n$ es un vector conocido. Note que se puede diseñar un observador para este sistema bajo ciertas condiciones de Φ . Ahora, similar a lo descrito en [54], el siguiente teorema describe un observador general para sistemas con estructura igual a (3.9).

Teorema 3.1. *Suponga que $\chi \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea el observador para el modelo (3.9):*

$$\dot{\hat{\chi}} = \Phi\Psi (\xi + L_1\text{ABS}(\sigma)^{1/2}\text{SIGN}(\sigma)) + F \quad (3.10a)$$

$$\dot{\xi} = L_2\text{SIGN}(\sigma) \quad (3.10b)$$

$$\hat{\eta} = \Psi\xi \quad (3.10c)$$

$$\sigma = \Psi^{-1}\Phi^{-1}(\chi - \hat{\chi}) \quad (3.10d)$$

donde $\hat{\chi}, \hat{\eta}, \xi, \sigma \in \mathbb{R}^n$ son el estimado de χ , el estimado de η , un vector asociado a $\hat{\eta}$ y el vector de deslizamiento, respectivamente, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son ganancias del algoritmo, $\Psi = \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ es una matriz constante simétrica positiva definida tal que $|\psi_i^{-1}\dot{\eta}_i| \leq 1$ con $i = \{1, \dots, n\}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada invertible y conocida, $\text{ABS}(\sigma)^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{|\sigma_1|}, \dots, \sqrt{|\sigma_n|})$, $\text{SIGN} = [\text{sign}(\sigma_1) \ \dots \ \text{sign}(\sigma_n)]^T$, además $F \in \mathbb{R}^n$ es un vector conocido. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Si Φ es una matriz con elementos constantes, entonces el punto de equilibrio de (3.10) es estable en tiempo finito.
2. Si $\Phi, \frac{d}{dt}(\Phi^{-1})$ son matrices cuyos elementos son continuos y acotados, entonces las trayectorias solución de (3.10) son uniformemente últimamente acotadas.

Demostración. Derivando σ con respecto al tiempo se tiene que

$$\dot{\sigma} = \Psi^{-1}\eta - \xi - L_1\text{ABS}(\sigma)^{1/2}\text{SIGN}(\sigma) + \Psi^{-1}\frac{d}{dt}(\Phi^{-1})(\chi - \hat{\chi})$$

Definiendo $\nu = \Psi^{-1}\eta - \xi$, $(\chi - \hat{\chi}) = \Phi\Psi\sigma$ y $H = \Psi^{-1}\frac{d}{dt}(\Phi^{-1})\Phi\Psi$, entonces

$$\dot{\sigma} = \nu - L_1\text{ABS}(\sigma)^{1/2}\text{SIGN}(\sigma) + H\sigma \quad (3.11a)$$

$$\dot{\nu} = -L_2\text{SIGN}(\sigma) + \Psi^{-1}\dot{\eta} \quad (3.11b)$$

Ahora, dado que las soluciones de (3.11) están definidas en el sentido de Filippov, $[\sigma^* \ \nu^*]^T = [0_{1 \times n} \ 0_{1 \times n}]^T$ es el punto de equilibrio de (3.11) cuando $\dot{\eta}$ es nulo.

Luego, sea el cambio de variable

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ABS}(\sigma)^{1/2}\text{SIGN}(\sigma) \\ \nu \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Derivando ζ con respecto al tiempo³:

$$\dot{\zeta}_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1) \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{d}{dt} \left(\sqrt{|\sigma_n|} \text{sign}(\sigma_n) \right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\sigma_1|}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_n \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\dot{\zeta}_1 = \text{ABS}(\sigma)^{-1/2} \left(\frac{1}{2} \zeta_2 - \frac{1}{2} L_1 \zeta_1 + \frac{1}{2} H \text{ABS}(\sigma)^{1/2} \zeta_1 \right) \quad (3.13)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \text{ABS}(\sigma)^{-1/2} \left(-L_2 \zeta_1 + \text{ABS}(\sigma)^{1/2} \Psi^{-1} \dot{\eta} \right) \quad (3.14)$$

Por lo tanto, de (3.13) y (3.14) se tiene que

$$\frac{d\zeta}{dt} = \begin{bmatrix} \text{ABS}(\sigma)^{-1/2} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \text{ABS}(\sigma)^{-1/2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} L_1 I & \frac{1}{2} I \\ -L_2 I & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} H \text{ABS}(\sigma)^{1/2} \zeta_1 \\ \text{ABS}(\sigma)^{1/2} \Psi^{-1} \dot{\eta} \end{bmatrix} \right) \quad (3.15)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Luego, note que el i -ésimo elemento de ζ_1 esta asociado al i -ésimo elemento de ζ_2 por la variable σ_i con $i = \{1, \dots, n\}$. Por ende, definiendo $Z_i = [\zeta_{1i} \quad \zeta_{2i}]$ se puede reescribir (3.15) de la siguiente forma:

$$\frac{dZ_i}{dt} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_i|}} (AZ_i + Y_i) \quad (3.16)$$

donde $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} L_1 & \frac{1}{2} \\ -L_2 & 0 \end{bmatrix}$ y $Y_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (h_{ij} \sqrt{|\sigma_j|} \zeta_{1j}) \\ \sqrt{|\sigma_i|} \psi_i^{-1} \dot{\eta}_i \end{bmatrix}$.

Luego, sea la función candidata de Lyapunov

$$V(Z) = \sum_{i=1}^n Z_i^T P Z_i = Z^T \underbrace{\text{diag}(P, \dots, P)}_{M_P} Z \quad (3.17)$$

donde $P = P^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_d \\ p_d & p_2 \end{bmatrix} > 0$. Por las mismas condiciones descritas en la demostración del Teorema (1.4) se puede concluir que $V(Z)$ es una función absolutamente continua y por ende, válida para (3.16). Luego, aplicando la desigualdad de Rayleigh Ritz en (3.17):

$$\lambda_{\min}(M_P) \|Z\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{\min}(P) \|Z_i\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(M_P) \|Z\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{\max}(P) \|Z_i\|^2 \quad (3.18)$$

Se concluye que V es una función definida positiva global y decreciente con⁴ $\lambda_{\min}(M_P) = \lambda_{\min}(P)$ y $\lambda_{\max}(M_P) = \lambda_{\max}(P)$. Ahora, derivando V con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \left(Z_i^T \left((A + R_i)^T P + P(A + R_i) \right) Z_i + 2 [Y_{1i} \quad 0] P Z_i \right) \quad (3.19)$$

³Recordar que para cualquier variable $x \neq 0$ se cumple $\frac{d}{dt}(\sqrt{|x|} \text{sign}(x)) = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{|x|}}$. Además, observe que el vector de deslizamiento $\sigma = \text{ABS}(\sigma)^{1/2} \zeta_1$.

⁴Dado que M_P es una matriz por bloques diagonal, entonces su polinomio característico esta definido como $\det(\lambda I - M_P) = \prod_{i=1}^n \det(\lambda I - P)$. Por ende, los eigenvalores de M_P corresponden a los eigenvalores de P con multiplicidad n .

donde $R_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \psi_i^{-1}\dot{\eta}_i \text{sign}(\sigma_i) & 0 \end{bmatrix}$ con $i = \{1, \dots, n\}$. Dado que $|\psi^{-1}\dot{\eta}_i| \leq 1$, entonces

$$A + R_i \leq \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}L_1 & \frac{1}{2} \\ -(L_2 + v) & 0 \end{bmatrix} = A_R \quad (3.20)$$

donde $v = [-1 \ 1]$. Observe que (3.20) esta asociada a la inclusión diferencial $\dot{Z}_i = A_R Z_i$. Así, por el Lema 1.2 se concluye que (3.20) es cuadrado estable y por la Nota 1.6, $A_R^T P + P A_R < -\alpha_v I$ donde $\alpha_v \in \mathbb{R}_{>0}$. Luego, note que la estabilidad de $[\sigma^* \ \nu^*]^T$ depende de los elementos de la matriz H .

1. Si Φ es una matriz constante, entonces $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = 0_{n \times n}$ e implica que H es una matriz nula. Por ende, dado que $\sqrt{|\sigma_i|} \leq \|\zeta_{1i}\| \leq \|Z_i\|$ y considerando (3.18) y (3.20), se tiene que:

$$\dot{V} \leq -\alpha_v \sum_{i=1}^n \frac{\|Z_i\|^2}{\sqrt{|\sigma_i|}} \leq -\alpha_v \sum_{i=1}^n \|Z_i\| \leq -\frac{\alpha_v}{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}} \sqrt{V} = -\varsigma \sqrt{V} \quad (3.21)$$

donde $\varsigma = \frac{\alpha_v}{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}$. Observe que esta estructura es igual a la ecuación (A.9), por lo que siguiendo los mismo pasos descritos en la prueba del Teorema 1.4, se concluye que $[\sigma^* \ \nu^*]^T$ es estable en tiempo finito.

2. Dado que $\Phi, \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}), \Psi$ son matrices con elementos acotados, entonces H es una matriz cuyos elementos también son acotados ($\exists \beta_{ij} \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|h_{ij}| \leq \beta_{ij}$ con $i, j = \{1, \dots, n\}$). Ahora, analizando el término derecho de (3.19) se tiene

$$\| [2Y_{1i} \ 0] P Z_i \| \leq \| [2Y_{1i} \ 0] \| \lambda_{\max}(P) \| Z_i \| \quad (3.22)$$

Del primer término de (3.22)

$$\| [2Y_{1i} \ 0] \| = |2Y_{1i}| = \left| \sum_{j=1}^n h_{ij} \sqrt{|\sigma_j|} \zeta_{1j} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \sqrt{|\sigma_j|} \zeta_{1j} \right| \quad (3.23)$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz⁵ en (3.22)

$$\left| \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \sqrt{|\sigma_j|} \zeta_{1j} \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n \left(\beta_{ij} \sqrt{|\sigma_j|} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (\beta_{ij} \zeta_{1j})^2 \right)^{1/2} \quad (3.24)$$

Note que los dos términos están asociados a la norma $\|\cdot\|_2$. Así, definiendo $M_{\beta_i} = \text{diag}(\beta_{i1}, \dots, \beta_{in})$ y $V_\sigma = [\sqrt{|\sigma_1|} \ \dots \ \sqrt{|\sigma_n|}]^T$, además dado que $\|V_\sigma\| \leq \|\zeta_1\| \leq \|Z\|$, se tiene:

$$\left| \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \sqrt{|\sigma_j|} \zeta_{1j} \right| \leq \|M_{\beta_i} V_\sigma\|_2 \cdot \|M_{\beta_i} \zeta_1\|_2 \leq \lambda_{\max}(M_{\beta_i})^2 \|Z\|^2 \quad (3.25)$$

⁵Existen varias formas para enunciar esta desigualdad. Particularmente considere los números $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ y $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ con $i = \{1, \dots, n\}$ tal que $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n c_i a_i b_i$, entonces se cumple

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n (c_i a_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (c_i b_i)^2 \right)^{1/2}$$

Para más detalles consulte el Capítulo 3.7 de [18].

Por consecuencia, de (3.18), (3.19), (3.22) y (3.25)

$$\dot{V} \leq -\alpha_v \sum_{i=1}^n \frac{\|Z_i\|^2}{\|Z_i\|} + \underbrace{\lambda_{\max}(P) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{\max}(M_{\beta_i})^2 \right)}_{\delta} \|Z\|^2 \leq -\|Z\|(\alpha_v - \delta\|Z\|) \quad (3.26)$$

Por ende $\dot{V} < 0$ siempre que $\|Z\| > \frac{\alpha_v}{\delta}$. Así, por el Teorema 1.3 se concluye que las trayectorias solución de (3.10) son uniformemente últimamente acotadas con funciones de clase K, $\omega_1 = \lambda_{\min}(P)\|Z\|^2$, $\omega_2 = \lambda_{\max}(P)\|Z\|^2$ y $\omega_3 = -\|Z\|(\alpha_v - \delta\|Z\|)$. \square

Nota 3.1. La estructura del algoritmo (3.11) es similar a (1.9), pero presenta adicionalmente $H\sigma$ por la variable de deslizamiento utilizada. Por esta razón (3.10) se denomina *Pseudo Algoritmo de Supertorsión Extendido*.

Nota 3.2. El conjunto Ω describe el espacio de invertibilidad local de la matriz Φ .

Retomando el modelo del bioproceso descrito, note que (3.8a)-(3.8b) pueden expresarse de la misma manera que (3.9) con $\chi = [X \ S]^T$, $\eta = [\mu \ \theta]^T$, además

$$\Phi = \begin{bmatrix} X & -X \\ -YX & -(S - \bar{s}) \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -(d + \beta)X \\ -d(S - \bar{s}) - g \end{bmatrix}$$

Antes de concluir que el algoritmo (3.10) permite la estimación simultánea de μ y θ , la matriz Φ obtenida posee ciertas propiedades importantes que se describen a continuación.

Lema 3.1. *Suponga que $\chi \in \Omega = \{X, S \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid X > 0 \ \& \ YX + S - \bar{s} \neq 0\}$. Entonces se cumple que:*

1. Φ esta bien definida y es invertible.
2. $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1})$ esta bien definida.
3. Todos lo elementos de Φ y $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1})$ son acotados.

Demostración.

1. Por la Suposición 1-2 observe que X y S son continuas, por lo que Φ esta bien definida. Luego, dado que $\chi \in \Omega$, el determinante de esta matriz es

$$\det(\Phi) = -X(YX + S - \bar{s}) \neq 0 \quad (3.27)$$

Por lo que Φ es no singular en Ω y tiene inversa igual a

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\phi_\chi} M_\Phi \quad (3.28)$$

donde $\phi_\chi = XY + S - \bar{s}$ y $M_\Phi = \begin{bmatrix} \frac{S-\bar{s}}{X} & -1 \\ -Y & -1 \end{bmatrix}$.

2. Derivando Φ^{-1} con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\phi_\chi} \right) M_\Phi + \frac{1}{\phi_\chi} \frac{d}{dt}(M_\Phi) = \frac{1}{\phi_\chi} \left(\rho_\chi M_1 - \frac{\dot{\phi}_\chi}{\phi_\chi} M_\Phi \right) \quad (3.29)$$

donde $\rho_\chi = \frac{\dot{S}}{X} - \frac{\dot{X}}{X^2}(S - \bar{s})$, $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\dot{\phi}_\chi = Y\dot{X} + \dot{S}$. Dado que $\chi \in \Omega$, entonces $\frac{1}{\phi_\chi}$ es continua y $\dot{X}, \dot{S}, \dot{\phi}_\chi$ son derivables y continuas, por lo que se concluye el resultado.

3. Por la Suposición 1-6 observe que $X, S, \mu, d, g \in \mathcal{L}_\infty^6$ y $Y, \bar{s}, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ son constantes, por consecuencia $\dot{X}, \dot{S} \in \mathcal{L}_\infty$ y $\phi_\chi, \dot{\phi}_\chi, \rho_\chi \in \mathcal{L}_\infty$. Así, es fácil ver que todos los elementos de las matrices Φ y $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1})$ dependen de funciones acotadas o constantes en el tiempo. \square

Para concluir esta sección, el siguiente corolario muestra que el observador desarrollado en el teorema anterior es válido para estimar μ y θ en el bioproceso modelado.

Corolario 3.1. *El Pseudo Algoritmo de Supertorsión Extendido (3.10) es un observador de $\eta = [\mu \ \theta]^T$ para el proceso de biorremediación de metales pesados (3.8), cuyas trayectorias solución son uniformemente últimamente acotadas siempre que $\chi \in \Omega = \{X, S \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid X > 0 \ \& \ YX + S - \bar{s} \neq 0\}$.*

Demostración. Para que (3.10) sea válido para el bioproceso (3.8), se debe verificar que $\Phi, \frac{d}{dt}(\Phi^{-1})$ están bien definidas y cada uno de sus elementos son acotados en Ω . Así, por el Lema 3.1 se concluye el resultado. \square

Nota 3.3. Observe que en este caso el algoritmo (3.10) puede estimar directamente la perturbación $\delta(t)$ siempre que sea una función positiva, continuamente diferenciable, acotada y con derivada acotada, es decir, existe $d_1, d_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 \leq \delta(t) \leq d_1$ y $|\dot{\delta}(t)| \leq d_2$.

3.3.2. STA más adaptación

Dado que el Teorema 3.1 depende de que Φ sea una matriz invertible, continuamente diferenciable y acotada, resulta conveniente diseñar otro observador con condiciones menos restrictivas. Definiendo $\omega = \mu - \theta$, entonces (3.8a) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\dot{X} = \omega X - (d + \beta)X \quad (3.30)$$

Así ω es una dinámica que puede estimarse como se describe a continuación.

Teorema 3.2. *Sea el algoritmo STA:*

$$\dot{\hat{X}} = \rho(\xi + K_1\sqrt{|\sigma|\text{sign}(\sigma)})\hat{X} - (d + \beta)\hat{X} \quad (3.31a)$$

$$\dot{\hat{\xi}} = K_2\text{sign}(\sigma) \quad (3.31b)$$

$$\hat{\omega} = \rho\xi \quad (3.31c)$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{X}{\hat{X}} \right) \quad (3.31d)$$

donde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son ganancias del STA. Entonces el punto de equilibrio del STA (3.31) es estable en tiempo finito, tal que $\omega = \hat{\omega}$ en un tiempo $t \geq \tau > 0$.

⁶Se dice que la función continua $u(t) \in \mathbb{R}^n$ pertenece al espacio \mathcal{L}^p si $\|u\|_p = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty$. Más aún, $u(t)$ pertenece al espacio \mathcal{L}_∞ si $\|u\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty$. Particularmente, \mathcal{L}_∞ está asociado al espacio de funciones continuas y acotadas, mientras que \mathcal{L}_2 está asociado al espacio de funciones continuas cuadrado integrables.

Demostración. Derivando σ con respecto al tiempo

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{\hat{X}}}{\hat{X}} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\omega - d - \beta - \rho \left(\xi + K_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) \right) + d + \beta \right) \therefore$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\omega}{\rho} - \xi - K_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma)$$

Definiendo $v = \frac{\omega}{\rho} - \xi$, entonces

$$\dot{\sigma} = v - K_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) \tag{3.32a}$$

$$\dot{v} = -K_2 \text{sign}(\sigma) + \frac{\dot{\omega}}{\rho} \tag{3.32b}$$

Note que por la Suposición 5, $|\dot{\omega}| = |\dot{\mu}| \leq \rho$. Así, por el Teorema 1.4 se concluye que el punto de equilibrio de (3.32) es estable en tiempo finito, es decir, existe un $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\omega = \hat{\omega}$ cuando $t \geq \tau$. \square

Ahora, la medición de S es útil para desacoplar θ y μ de ω bajo la ausencia de perturbaciones externas. Para mostrar esto, vea que la dinámica de \dot{S} puede expresarse en términos de ω , es decir

$$\dot{S} = -Y\mu X - (d + \theta)(S - \bar{s}) - g \pm Y\theta X = -Y(\mu - \theta)X - \theta(YX + S - \bar{s}) - d(S - \bar{s}) - g \therefore$$

$$\dot{S} = -Y\omega X + \theta\phi + f_s \tag{3.33}$$

donde $\phi = -(YX + S - \bar{s})$ es una función regresor y $f_s = -d(S - \bar{s}) - g$. Dado que θ cumple la Suposición 4, entonces se puede aplicar alguna de las leyes adaptables descritas en la Sección 1.3 tal que estimen μ y θ a partir de la medición de X y S , como se describe en los dos siguientes teoremas.

Teorema 3.3. *Sea el observador adaptable con algoritmo de adaptación gradiente:*

$$\dot{\hat{S}} = -Y\hat{\omega}X + \hat{\theta}\phi + f_s + \alpha\tilde{S} \tag{3.34a}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\phi\tilde{S} \tag{3.34b}$$

donde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ son ganancias del observador y $\tilde{S} = S - \hat{S}$ es el error de estimación del sustrato. Entonces se cumple:

1. $\tilde{\theta}$ y el estimado de μ ($\hat{\mu}$) son acotados. Así $\hat{\mu}$ se define como

$$\hat{\mu} = \hat{\omega} + \hat{\theta} \tag{3.35}$$

2. \tilde{S} converge asintóticamente a 0.

3. Si ϕ cumple la condición de excitación persistente, entonces $\hat{\theta}$ y $\hat{\mu}$ convergen exponencialmente a θ y μ , respectivamente.

Demostración.

1. Derivando \tilde{S} con respecto al tiempo

$$\dot{\tilde{S}} = \dot{S} - \hat{S} = -Y\omega X + \theta\phi + f_s + Y\hat{\omega}X - \hat{\theta}\phi - f_s - \alpha\tilde{S} = -Y(\omega - \hat{\omega})X - \alpha\tilde{S} + (\theta - \hat{\theta})\phi$$

Dado que $\omega = \hat{\omega}$ en tiempo finito, entonces

$$\dot{\tilde{S}} = -\alpha\tilde{S} + \tilde{\theta}\phi \quad (3.36)$$

Luego, sea la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\tilde{S}^2 + \frac{\gamma^{-1}}{2}\tilde{\theta}^2 = \frac{1}{2}Z(t)^T EZ(t) \quad (3.37)$$

donde $Z(t) = Z = \begin{bmatrix} \tilde{S} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}$ y $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix}$. Aplicando la desigualdad de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_{\min}(E)\|Z\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(E)\|Z\|^2 \quad (3.38)$$

Se concluye que V es una función positiva definida global y decreciente. Luego, derivando V con respecto al tiempo

$$\dot{V} = \tilde{S}\dot{\tilde{S}} + \gamma^{-1}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\alpha\tilde{S}^2 + \tilde{\theta}(\phi\tilde{S} + \gamma^{-1}\dot{\tilde{\theta}}) \quad (3.39)$$

Dado que $\dot{\tilde{\theta}} = -\hat{\dot{\theta}}$, sustituyendo la ley adaptable (3.34b) en (3.39)

$$\dot{V} = -\alpha\tilde{S}^2 \quad (3.40)$$

Así, se concluye que V es estrictamente decreciente, por lo que $V \leq V(Z(0))$. Por ende

$$\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\theta}^2 \leq V \leq V(Z(0)) \longrightarrow \tilde{\theta} \leq \sqrt{2\gamma V(Z(0))} \therefore \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_{\infty} \quad (3.41)$$

Dado que $\tilde{\theta}$ es acotado y a partir de la definición de ω , se obtiene (3.35). Además, como $\omega = \hat{\omega}$ en tiempo finito y $\hat{\theta}$ es acotado, entonces $\hat{\mu}$ es también acotado.

2. Dado que V es estrictamente decreciente, se tiene para \tilde{S} :

$$\frac{1}{2}\tilde{S}^2 \leq V \leq V(Z(0)) \longrightarrow \tilde{S} \leq \sqrt{2V(Z(0))} \therefore \tilde{S} \in \mathcal{L}_{\infty} \quad (3.42)$$

Luego, por la Suposición 1-2 entonces $X, S \in \mathcal{L}_{\infty}$ y ϕ es acotada de la forma

$$\underbrace{-Yx_{max} - S_a + \bar{s}}_{\sigma_1} \leq \phi \leq \underbrace{-Yx_{min} + \bar{s}}_{\sigma_2} \quad (3.43)$$

Por último, de (3.40)

$$\int_0^t \dot{V}(Z(\tau))d\tau = -\alpha \int_0^t \tilde{S}(\tau)^2 d\tau$$

$$2V(Z(0)) \geq V(Z(0)) - V(Z(t)) = \alpha \int_0^t \tilde{S}(\tau)^2 d\tau \therefore$$

$$\int_0^t \tilde{S}(\tau)^2 d\tau \leq \frac{2V(Z(0))}{\alpha} \longrightarrow \tilde{S} \in \mathcal{L}_2 \quad (3.44)$$

Así, por el lema de Barbalat (Lema 2.1 de [53]) se concluye que $\tilde{S} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

3. Observe que \tilde{S} y $\hat{\theta}$ tiene la misma estructura que (1.19) con $A = -\alpha$, $B = 1$ y $C = 1$. Por lo tanto, la función de transferencia

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s + \alpha} \quad (3.45)$$

es estrictamente real positiva dado que $\alpha > 0$, además $H(\infty) = 0$. Luego, como ϕ es acotada y cumple con la condición de excitación persistente, por el Teorema 1.5 se concluye que $\tilde{\theta}$ converge exponencialmente a 0. Por último, como $\hat{\omega} \rightarrow \omega$ en tiempo finito, entonces $\hat{\mu}$ converge exponencialmente a μ . \square

Teorema 3.4. *Sea el observador adaptable con modificación del algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido:*

$$\dot{\hat{S}} = -Y\hat{\omega}X + \hat{\theta}\phi + f_s + \alpha\tilde{S} \quad (3.46a)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = p\phi\tilde{S} \quad (3.46b)$$

$$\dot{p} = \begin{cases} bp - p^2\phi^2 & \text{Si } |p| \leq r_0 \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}, \quad p(0) > 0 \quad (3.46c)$$

donde $\alpha, b, r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ son ganancias del observador. Si b es suficientemente grande y ϕ cumple la condición de excitación persistente, entonces \tilde{S} converge asintóticamente a 0, mientras que $\tilde{\theta}$ y $\hat{\mu}$ convergen exponencialmente a 0 y μ , respectivamente.

Demostración. De igual forma que en el teorema anterior, se tiene la ecuación (3.36). Luego, sea la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\tilde{S}^2 + \frac{p^{-1}}{2}\tilde{\theta}^2 = \frac{1}{2}Z^T EZ \quad (3.47)$$

donde $Z = \begin{bmatrix} \tilde{S} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}$ y $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{bmatrix}$.

Dado que b es una ganancia suficientemente grande y ϕ es una función acotada y cumple la condición de excitación persistente, entonces por el Lema 1.3 se concluye que p, p^{-1} son funciones estrictamente positivas y acotadas, mientras que $\frac{d}{dt}(p^{-1})$ es una función negativa. Por ende, aplicando la desigualdad de Rayleigh-Ritz y derivando V con respecto al tiempo se tienen la siguientes relaciones:

$$\frac{1}{2}\lambda_{\min}(E)\|Z\|^2 \leq V \leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}(E)\|Z\|^2 \quad (3.48)$$

$$\dot{V} = \begin{cases} -\alpha\tilde{S}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p^{-1})\tilde{\theta}^2 & \text{Si } |p| \leq r_0 \\ -\alpha\tilde{S}^2 & \text{Caso contrario} \end{cases} \quad (3.49)$$

Por lo tanto, V es una función definida positiva y estrictamente decreciente.

Luego, no se puede concluir la convergencia asintótica de Z al origen mediante el Teorema 1.1 por el caso $|p| > r_0$. Sin embargo, de forma similar a la prueba del teorema anterior, con el lema de Barbalat se puede concluir que \tilde{S} converge asintóticamente a 0 porque $\tilde{S}, \dot{\tilde{S}} \in \mathcal{L}_\infty$ y $\tilde{S} \in \mathcal{L}_2$.

Por último, este sistema genera la misma función de transferencia (3.45) con $H(\infty) = 0$. Así, más el hecho que ϕ es acotada y cumple la condición de excitación persistente, del Teorema 1.5 se concluye que $\tilde{\theta}$ y $\hat{\mu}$ convergen exponencialmente a 0 y μ , respectivamente. \square

Nota 3.4. La idea de aplicar un STA es estimar indirectamente μ y θ en tiempo finito a partir de la medición de X . Mientras que los observadores adaptables propuestos son usados para estimar directamente θ y μ .

Nota 3.5. Dado que no se conoce la dinámica de μ , no se puede conocer cuantos puntos de equilibrio tiene (3.8). Así, los resultados del Corolario 3.1 y del Teorema 3.2-3.4 son solo locales.

Cabe destacar que si se conociera con exactitud μ , entonces para la estimación de θ se puede emplear una estructura similar al algoritmo STA desarrollado en el Teorema 3.2 o los dos observadores adaptables previamente descritos. Previo a concluir esta sección, los siguientes dos corolarios describen la estimación de θ cuando μ es conocida, a partir de un STA y los observadores adaptables desarrollados en los teoremas previos.

Corolario 3.2. *Suponga que μ es una función completamente conocida. Además, sea el algoritmo STA:*

$$\dot{\hat{X}} = \mu\hat{X} - (d + \beta)\hat{X} - \alpha \left(\xi + K_1\sqrt{|\sigma|}\text{sign}(\sigma) \right) \hat{X} \quad (3.50a)$$

$$\dot{\hat{\xi}} = K_2\text{sign}(\sigma) \quad (3.50b)$$

$$\hat{\theta} = \alpha\xi \quad (3.50c)$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\hat{X}}{\hat{X}} \right) \quad (3.50d)$$

donde $K_1, K_2, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ son ganancias del observador. Entonces el punto de equilibrio del STA (3.2) es estable en tiempo finito, tal que $\theta = \hat{\theta}$ en un tiempo $t \geq \tau > 0$.

Demostración. Derivando σ con respecto al tiempo y definiendo $\nu = \xi - \frac{\theta}{\alpha}$, se tiene

$$\dot{\sigma} = \nu - K_1\sqrt{|\sigma|}\text{sign}(\sigma) \quad (3.51a)$$

$$\dot{\nu} = -K_2\text{sign}(\sigma) \quad (3.51b)$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.4 se concluye el resultado. \square

Corolario 3.3. *Suponga que μ es una función completamente conocida. Entonces los observadores adaptables (3.34) y (3.46) garantizan que $\tilde{\theta}$ converja exponencialmente a 0 si $w = \mu$ y $\phi = -(S - \bar{s})$ cumple la condición de excitación persistente.*

Demostración. La derivada de \tilde{S} con respecto al tiempo tiene la misma estructura que (3.36). Por consecuencia, se pueden usar los mismos criterios descritos en el Teorema 3.3-3.4 para concluir el resultado. \square

3.3.3. Observador Asintótico para M

Aunque los observadores propuestos alteran indirectamente la observación de M por la estimación de θ , M no interviene en la dinámica de los observadores diseñados. Esto se debe a que M no está involucrado en la dinámica de \dot{X} ni \dot{S} . Para ver esto, observe que $r_m(M, t)$ es constante e independiente de M . Más aún, se menciona en el Capítulo 2 que μ es independiente de la dinámica de M . Así, los resultados obtenidos son independientes de la observación de M .

Por lo tanto, dado que los algoritmos propuestos en las secciones pasadas permiten obtener un estimado acotado de θ , el siguiente resultado propone un observador para M .

Teorema 3.5. *Sea el observador asintótico:*

$$\dot{\hat{M}} = -\hat{q}r_x\hat{M} - (d + \hat{\theta})(\hat{M} - \bar{m}) \quad (3.52a)$$

$$\dot{\hat{q}} = -a_1\hat{q} + a_2 \quad (3.52b)$$

Entonces el error de estimación $\tilde{q} = q - \hat{q}$ converge exponencialmente a 0, mientras que las trayectorias solución de $\tilde{M} = M - \hat{M}$ son uniformemente últimamente acotadas.

Demostración. Observe que (3.52b) es un sistema lineal e invariante en el tiempo no dependiente de otro estado del bioproceso. Por lo tanto, se puede proponer una función de Lyapunov ($V = \frac{1}{2}\tilde{q}^2$) definida positiva y estrictamente negativa tal que se cumplen las condiciones del Teorema (1.1) y se concluya el resultado.

Luego, derivando \tilde{M} con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{M}} &= -qr_xM - (d + \theta)(M - \bar{m}) + \hat{q}r_x\hat{M} + (d + \hat{\theta})(\hat{M} - \bar{m}) \\ &= -qr_xM - (d + \theta)(M - \bar{m}) + (q - \tilde{q})r_x(M - \tilde{M}) + (d + \theta - \tilde{\theta})(M - \tilde{M} - \bar{m}) \\ &= -qr_xM - dM + d\bar{m} - \theta M + \theta\bar{m} + qr_xM - qr_x\tilde{M} - \tilde{q}r_xM + \tilde{q}r_x\tilde{M} + dM - d\tilde{M} \\ &\quad - d\bar{m} + \theta M - \theta\tilde{M} - \theta\bar{m} - \tilde{\theta}M + \tilde{\theta}\tilde{M} + \tilde{\theta}\bar{m} \therefore \\ \dot{\tilde{M}} &= -(qr_x + d + \theta)\tilde{M} + (\tilde{q}r_x + \tilde{\theta})\tilde{M} - \tilde{q}r_xM - \tilde{\theta}(M - \bar{m}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ahora, sea la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\tilde{M}^2 \quad (3.54)$$

Es fácil ver que V es una función positiva definida global y decreciente. Entonces la derivada de V con respecto al tiempo es

$$\dot{V} = -(qr_x + d + \theta)\tilde{M}^2 + (\tilde{q}r_x + \tilde{\theta})\tilde{M}^2 - \tilde{q}r_xM\tilde{M} - \tilde{\theta}\tilde{M}(M - \bar{m}) \quad (3.55)$$

Ahora, considere que \tilde{q} es un error acotado de la forma $|\tilde{q}| < \epsilon_q$ con $\epsilon_q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Más aún, para cualquiera de los observadores diseñados en las secciones anteriores se cumple que $|\tilde{\theta}| < \epsilon_\theta$ con $\epsilon_\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Además por la Suposición 2 y 7 se tiene que $M \leq M_a$ y $r_x \leq r_{\max}$. Así, analizando cada término de (3.55):

1.

$$-(qr_x + d + \theta)\tilde{M}^2 = -\underbrace{(qr_x + d + \theta)}_z \left| \tilde{M} \right|^2 = -z \left| \tilde{M} \right|^2 \quad (3.56)$$

$$2. \quad \left| (\tilde{q}r_x + \tilde{\theta})\tilde{M}^2 \right| \leq \left| \tilde{q}r_x + \tilde{\theta} \right| \left| \tilde{M} \right|^2 \leq \underbrace{(\epsilon_q r_{\max} + \epsilon_\theta)}_{\kappa_1} \left| \tilde{M} \right|^2 = \kappa_1 \left| \tilde{M} \right|^2 \quad (3.57)$$

$$3. \quad \left| -\tilde{q}r_x M \tilde{M} \right| \leq \left| \tilde{q}r_x M \right| \left| \tilde{M} \right| \leq \underbrace{(\epsilon_q r_{\max} M_a)}_{\kappa_2} \left| \tilde{M} \right| = \kappa_2 \left| \tilde{M} \right| \quad (3.58)$$

$$4. \quad \left| -\tilde{\theta} \tilde{M} (M - \bar{m}) \right| \leq \left| \tilde{\theta} \tilde{M} \right| \left| M - \bar{m} \right| \leq \underbrace{(\epsilon_q |M_a - \bar{m}|)}_{\kappa_3} \left| \tilde{M} \right| = \kappa_3 \left| \tilde{M} \right| \quad (3.59)$$

Considerando (3.55)-(3.59)

$$\dot{V} \leq -(z - \kappa_1) \left| \tilde{M} \right| \left(\left| \tilde{M} \right| - \frac{\kappa_2 + \kappa_3}{z - \kappa_1} \right) \quad (3.60)$$

Por lo que $\dot{V} < 0$ siempre que $z > \kappa_1$ y $\left| \tilde{M} \right| > \frac{\kappa_2 + \kappa_3}{z - \kappa_1}$. Así, por el Teorema 1.3 se concluye que las trayectorias solución de (3.52) son uniformemente últimamente acotadas con las funciones de clase K, $\omega_1 = \omega_2 = V$ y ω_3 igual al término derecho de (3.60). \square

3.4. Comentarios adicionales

Para concluir este capítulo, cabe mencionar que el algoritmo desarrollado en la Sección 3.3.1 puede ser usado para un caso más general de perturbaciones externas del modelo estudiado en el Capítulo 2. Suponga que $\delta(t) = \delta$ es una perturbación adicional y desconocida del sistema tal que esta presente en el modelo de la siguiente forma:

$$\dot{X} = \mu X - (d + \beta)X + \delta \quad (3.61a)$$

$$\dot{S} = -Y\mu X - d(S - \bar{s}) - g + \delta \quad (3.61b)$$

Entonces (3.61) puede reescribirse de la misma manera que la forma general (3.9) con

$$\begin{aligned} \chi &= \begin{bmatrix} X \\ S \end{bmatrix} & \Phi(\chi) &= \begin{bmatrix} X & 1 \\ -YX & 1 \end{bmatrix} \\ \omega &= \begin{bmatrix} \mu \\ \delta \end{bmatrix} & F(\chi, d) &= \begin{bmatrix} -(d + \beta)X \\ -d(S - \bar{s}) - g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que la matriz Φ es siempre no singular porque $\det(\Phi) = X(Y + 1) > 0$. Aun más, todos los elementos de Φ y $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1})$ son continuos y acotados. Así, por el Teorema 3.1 se concluye que las trayectorias solución del algoritmo (3.10) son uniformemente últimamente acotadas siempre que δ cumpla las condiciones descritas en la Nota 3.3.

Capítulo 4

Simulación de los observadores robustos

En el capítulo anterior se demostró teóricamente las propiedades de los observadores propuestos, mientras que en este capítulo, se mostrará el desempeño de los observadores diseñados en simulación empleando MATLAB/Simulink (Versión 2018).

Para ello, primero se mencionarán ciertas suposiciones adicionales con el fin de describir la tasa de crecimiento y la dinámica de los sustratos antes de simular el modelo (3.3). Posteriormente, las simulaciones consistirán en analizar la robustez de los observadores diseñados ante la tasa de crecimiento, así como su desempeño en la estimación de θ y M . Por último, dado que los observadores están asociados a los modos deslizantes de segundo orden, se hará otra simulación que muestre la eficacia y robustez de los observadores cuando las mediciones de X y S son discretas. También, se hará una simulación adicional donde θ es una dinámica lenta en el tiempo que cumple la Nota 3.3.

4.1. Modelo para simulación

Considere el modelo (3.3) previamente descrito. Para propósitos de simulación se debe describir la estructura de la tasa de crecimiento μ . Aunado a lo anterior, como μ puede depender de diferentes sustratos y de la intensidad lumínica suministrada externamente en el reactor ($I_i(t)$), también se debe considerar la dinámica de los i -ésimos sustratos S_i y de la luz dispersada en el reactor.

Ahora, suponga que el proceso de biorremediación cumple lo siguiente:

1. El microorganismo a usar en el bioproceso es *Arthrospira platensis* (Gomont, 1892), una cianobacteria del orden *Oscillatoriales* incapaz de fijar nitrógeno atmosférico.
2. El cultivo es fotoautotrófico, donde no se considerara el efecto del CO_2 en el crecimiento.
3. El nitrato (NO_3) es una fuente de nitrógeno que actúa como único sustrato limitante, medible e importante en el crecimiento.
4. El metal a remover en el biorreactor es el cadmio (Cd).

Entonces, para este caso en particular, la tasa de crecimiento del bioproceso está descrita de la forma siguiente¹:

$$\mu = \mu_{\max} u_{\text{NO}_3}(S_{\text{NO}_3}) u_I(I(X)) \quad (4.1a)$$

$$u_{\text{NO}_3}(S_{\text{NO}_3}) = \frac{S_{\text{NO}_3}}{K_{S_{\text{NO}_3}} + S_{\text{NO}_3}} \quad (4.1b)$$

$$u_I(I(X)) = \frac{I(X)}{K_{s_I} + I(X)} \quad (4.1c)$$

donde $\mu_{\max}, K_{S_{\text{NO}_3}}, K_{s_I} \in \mathbb{R}_{>0}$ es la tasa de crecimiento máxima, la constante de saturación media asociada a la concentración de nitrato (S_{NO_3}) y a la intensidad lumínica irradiada al reactor ($I(X)$). Observe que las tasas (4.1b)-(4.1c) tienen una estructura igual a una ecuación de Monod, por lo que describen el efecto de la saturación del crecimiento debido a la concentración de nitrato en el reactor ($u_{\text{NO}_3}(S_{\text{NO}_3})$) y a la presencia de la luz ($u_I(I(X))$).

Cabe destacar que $I(X)$ es una función que describe la atenuación del haz de luz procedente de una fuente lumínica en el reactor en función de su distribución espacial y la concentración de biomasa en el medio. Así, puede describirse matemáticamente a partir de la ley de Lambert-Beer [37]:

$$I_o(t) = I_i(t)e^{-\alpha L X} \quad (4.2)$$

donde $I_o(t) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la atenuación de la luz, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ es el coeficiente de absorción de la luz y $L \in \mathbb{R}_{>0}$ es la longitud del biorreactor. Para estudiar con simplicidad el efecto de la luz, se procede a determinar la intensidad lumínica promedio en el reactor como se describe en [37]. Así definiendo $A = \alpha L$ se tiene que

$$I_o(X) = I(X) = I_{ave} = \frac{\int_0^L I_i(t)e^{-\alpha L X} dx}{\int_0^L dx} = \frac{1}{AX} I_i(t)(1 - e^{-AX}) \quad (4.3)$$

Luego, dado que S_{NO_3} no es suministrado en forma gaseosa, entonces $g = 0$. Así, la dinámica del único sustrato limitante es la siguiente

$$\dot{S}_{\text{NO}_3} = -Y_{\text{NO}_3} \mu X - (d + \theta)(S_{\text{NO}_3} - \bar{s}_{\text{NO}_3}) \quad (4.4)$$

Nota 4.1. Ciertos nutrientes como O_2 o CO_2 conforman el sustrato mediante una transferencia de masa entre gas y líquido. Así, como se describe en [67]

$$g_i = -f_{gI_i} + k_{LG_i}(S_{g_i} - S_{g_i}^*)$$

donde $f_{gI_i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el flujo de entrada del gas, $k_{LG_i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es un coeficiente de transferencia de masa, $S_{g_i}^*$ es la concentración de gas saturado y S_{g_i} es la concentración del gas disuelto en el reactor. Cabe destacar que dichos parámetros pueden cambiar considerablemente de valor debido a los puntos de operación del reactor. Así, en [11] se menciona que en aplicaciones industriales la estimación de g_i depende de las mediciones de flujo de gas entrante y saliente (f_{gO_i}) del reactor, es decir

$$g_i = -f_{gI_i} + f_{gO_i}$$

¹El efecto de diferentes variables en la tasa de crecimiento pueden asociarse de diferentes formas, como se describe en [21]. Para este ejemplo, se asociarán las diferentes variables que conforman μ de forma multiplicativa.

Por último, dos aspectos importantes se deben mencionar. Primero, la tasa de mortalidad β_M no es un parámetro reportado en la literatura. Sin embargo, se ha hecho previamente la identificación paramétrica de la tasa de mortalidad β_D del microorganismo. Por ende, en este trabajo se supondrá que la tasa de mortalidad B_M es al menos 10 veces mayor a β_D . Segundo, aunque se mencionó en el Capítulo 2 que la biomasa está involucrada en la tasa de absorción de metal, no existen descripciones matemáticas en la literatura sobre este hecho. Así, se propone el siguiente modelo que cumple las condiciones descritas en la Suposición 7:

$$r_x = \frac{X}{K_{s_x} + X} \quad (4.5)$$

donde $K_{s_x} \in \mathbb{R}_{>0}$ es un parámetro cinético asociado a la biomasa.

4.2. Desempeño de los observadores diseñados

Las simulaciones del modelo (3.3) con la tasa de crecimiento previamente descrita se harán en Simulink donde los parámetros, entradas y condiciones iniciales del sistema son descritos en el Apéndice B. Particularmente, se estudiarán cuatro casos diferentes de la dinámica del modelo descrito, es decir:

- I. La tasa de crecimiento depende solo de una fuente de nitrógeno ($\mu = \mu_{\max} u_{\text{NO}_3}$), mientras que la perturbación θ es igual a 0.
- II. La tasa de crecimiento depende de una fuente de nitrógeno y de la luz (μ es igual a (4.1a)), mientras que $\theta = 0$.
- III. La tasa de crecimiento μ es igual a (4.1a), mientras que la perturbación $\theta = 0.1$.
- IV. La tasa de crecimiento es igual a (4.1a) y la perturbación θ es igual a una onda cuadrada con amplitud $A = 0.1$ y periodo $T = 36$ hr. Además, la concentración de alimentación $s_{\text{NO}_3}(t)$ varía ligeramente en el tiempo, dependiendo de una función senoidal ($s_{\text{NO}_3}(t) = \bar{s}_{\text{NO}_3}(1 + 0.1 \sin(2t))$).

Los observadores a simular con el modelo de biorremediación de metales pesados se muestran en la Tabla 4.1, cuyos parámetros son iguales al del modelo, mientras que las condiciones iniciales de cada observador están descritas en el Apéndice B. Cabe destacar que la estimación de M en los observadores mostrados de la Tabla 4.1 depende del observador (3.52).

4.2.1. Caso I

Como se observa en la Fig.4.1a, aunque los observadores diseñados estiman adecuadamente θ , omitiendo MSTA-DB se concluye que GA+ μ_e tienen el mejor desempeño para estimar dicha perturbación porque posee un conocimiento exacto de μ y así, se reduce el error $\tilde{\theta}$. Por otro lado, los demás observadores tienen un buen desempeño para la estimación numérica de μ pero con castaño por la función signo, como se observa en la Fig.4.1c. No obstante, observe que los estimados de θ y μ del STA+GA tiene la mayor elongación en su respuesta transitoria. Cabe destacar que de acuerdo a la Fig.4.1b, se concluye que GA+ μ_e y MSTA-DB generan el mejor estimado de M .

Observador	Ecuación	Ganancias	Notación	Gráfica
STA Modificado de [24]	(3.4) $\hat{\theta} = 0$	$K_1 = 2.0$ $K_2 = 1.5$ $\rho = 0.5$	MSTA-DB	Morado
Pseudo-STA extendido	(3.10)	$L_1 = 2.0$ $L_2 = 1.5$ $\psi_1 = 0.5$ $\psi_2 = 0.1$	PESTA	Verde
STA+Algoritmo Gradiente (A)	(3.31) (3.34)	$\alpha = 2.5$ $\gamma = 5.0$	STA+GA	Rojo
STA+Mínimos Cuadrados (A)	(3.31) (3.46)	$\alpha = 2.0$ $b = 1.5$ $r_0 = 50.0$	STA+LSA	Azul
Algoritmo Gradiente del Corolario 3.3 con μ supuestamente conocida	(3.34) $w = \mu_{\max} u_{\text{NO}_3}$ $\phi = -(S - \bar{s})$	$\alpha = 1.5$ $\gamma = 0.5$	GA+ μ_e	Rosa

Tabla 4.1: Observadores usados para la estimación de θ y μ . Las condiciones iniciales de los observadores son iguales y están descritos en el Apéndice B. A: Las ganancias del STA (K_1 , K_2 , ρ) para este caso son iguales al MSTA-DB.

Adicionalmente, las demás gráficas de la Fig.4.1 muestran que los observadores diseñados cumplen las condiciones del Capítulo 3. Específicamente, note que la biomasa X es estrictamente positiva. Además, la ganancia p del STA+LSA es continua, mientras que Φ es una matriz no singular en todo momento durante la simulación.

4.2.2. Caso II

De acuerdo a los resultados de la Fig.4.2, es fácil ver que GA+ μ_e es el único observador que no es robusto a la dinámica de μ , por lo que la estimación de θ y M presentan un elevado error en estado estacionario. Con respecto a los demás observadores se muestra un buen desempeño para la estimación de θ , M y μ . Sin embargo, PESTA tiene un mayor castaño para la estimación de θ y STA+GA presenta una mayor elongación de la respuesta transitoria de θ y μ .

Aún más, aunque X sigue siendo estrictamente positiva, en este caso la ganancia p del STA+LSA es discontinua. Cabe agregar que el determinante de la matriz Φ tiene un comportamiento exponencial decreciente con respecto al tiempo porque $YX + S_{\text{NO}_3} - \bar{s}_{\text{NO}_3}$ está decreciendo exponencialmente a 0, lo que implica que Φ será no singular cuando $t \rightarrow \infty$.

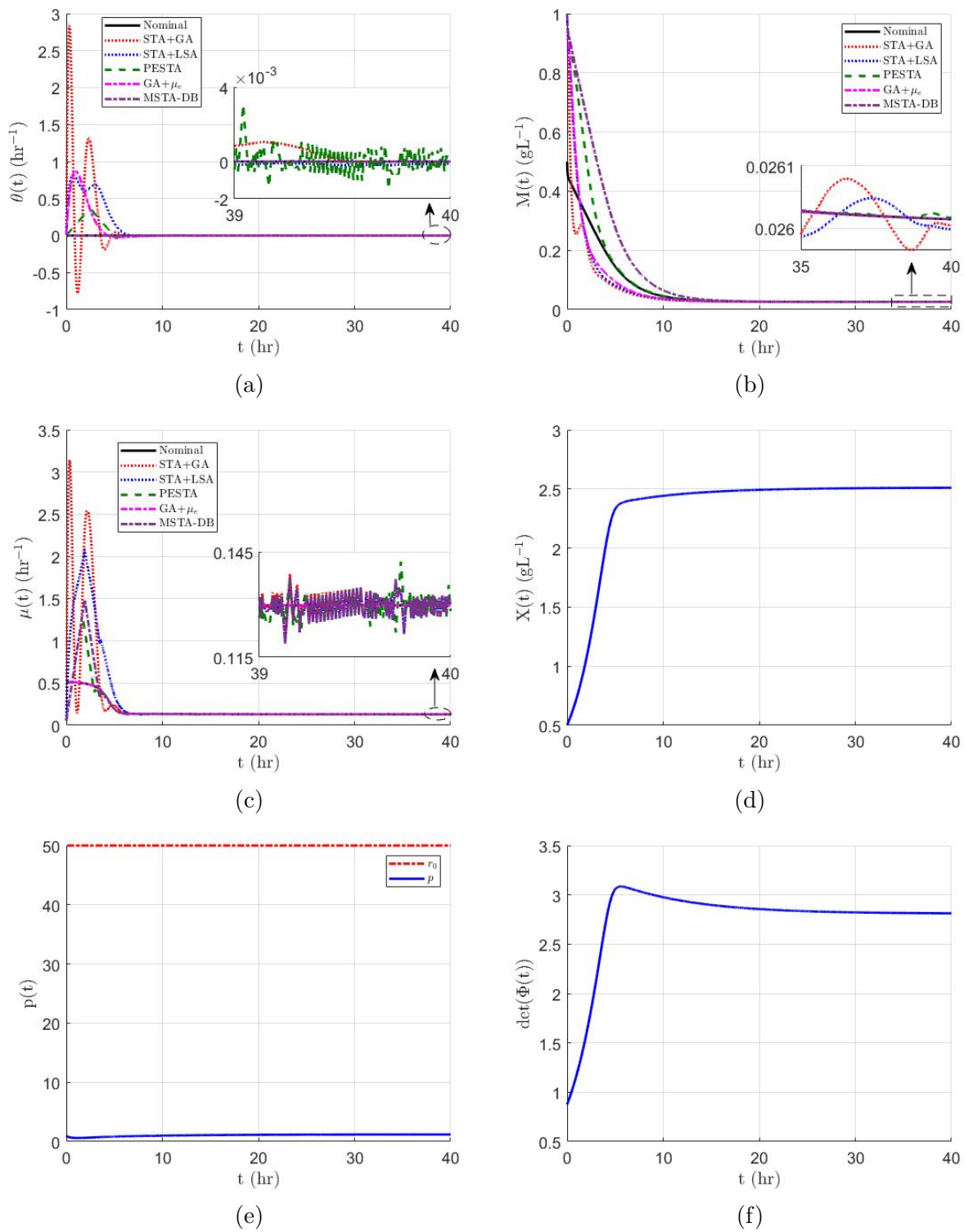


Fig 4.1: Resultados de la simulación del Caso I para la estimación de θ , M y μ ((Fig 4.1a)-c)) durante 40 hr, a partir de los observadores descritos en la Tabla 4.1 más (3.52). Además, se muestra la dinámica de X , p y $\det(\Phi(t))$ ((Fig 4.1d)-f)).

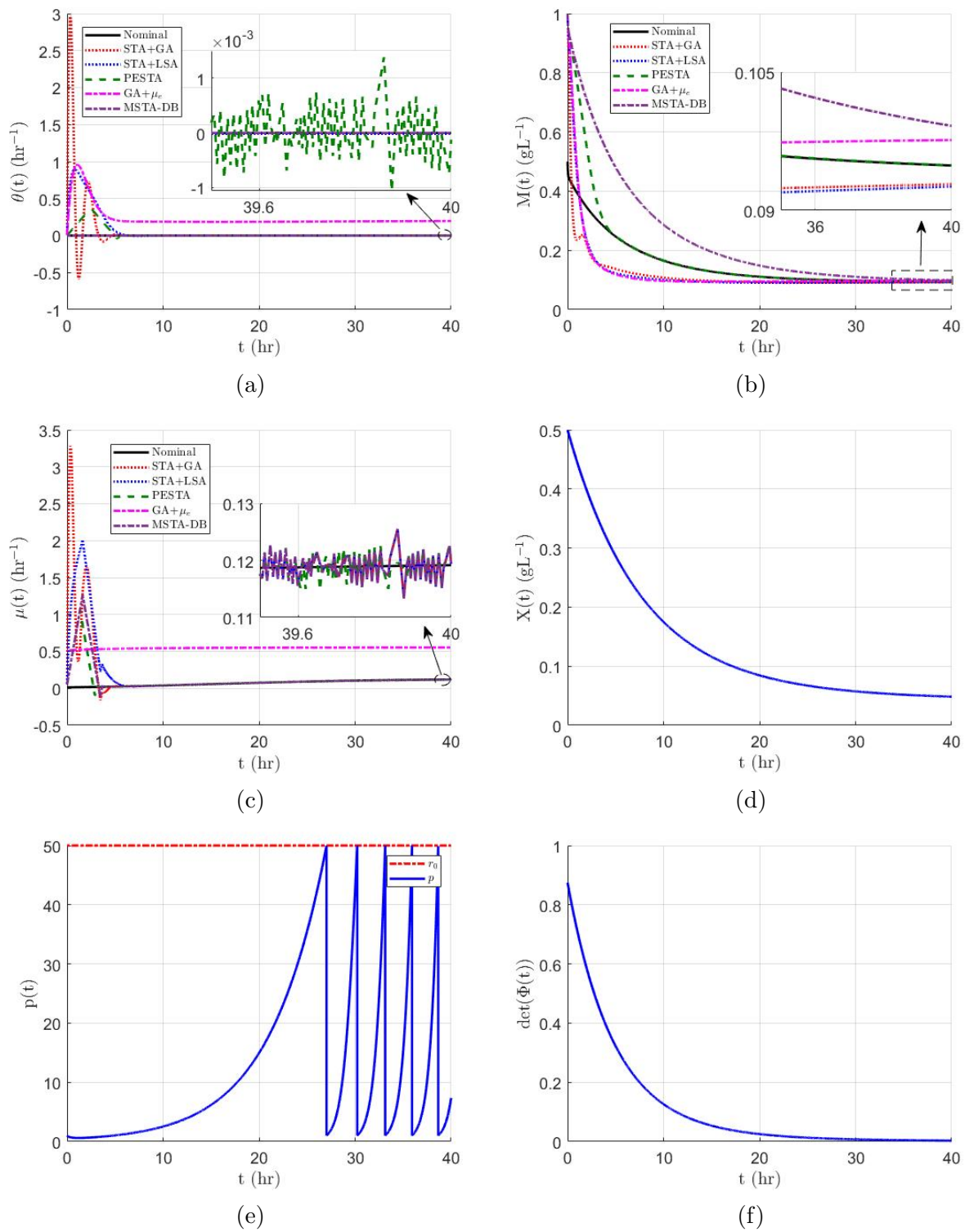


Fig 4.2: Resultados de la simulación del Caso II para la estimación de θ , M y μ ((Fig 4.2a)-c)) durante 40 hr, a partir de los observadores descritos en la Tabla 4.1 más (3.52). Además, se muestra la dinámica de X , p y $\det(\Phi(t))$ ((Fig 4.2d)-f)).

4.2.3. Caso III

Descartando la dinámica de $GA+\mu_e$, los resultados de la Fig.4.3 indican que MSTA-DB posee la peor estimación de M y μ . Esto se debe a lo descrito en la Sección 3.2, es decir, el observador MSTA-DB no es selectivo para la estimación de μ independientemente de θ .

Sin embargo, los otros observadores diseñados tienen un buen desempeño para la estimación de θ , M y μ . Particularmente, PESTA tiene el mejor comportamiento para la estimación de M , mientras que STA+LSA tiene el mejor comportamiento para la estimación de θ y μ . No obstante, STA+GA presenta la mayor elongación en estado transitorio y PESTA el mayor castaño durante la estimación de θ y μ . Cabe mencionar que la dinámica de X , p y $\det(\Phi(t))$ son similares al caso anterior.

4.2.4. Caso IV

Ahora, descartando la dinámica de MSTA-DB y de acuerdo a las gráficas de la Fig.4.4, los observadores propuestos estiman adecuadamente θ , M y μ . La razón por la que los observadores con ley de adaptación tienen un buen comportamiento es porque ϕ es una señal rica en frecuencia por la entrada $s_{NO_3}(t)$, por ende se cumple la condición de excitación persistente.

Cabe resaltar que PESTA tiene el menor tiempo de asentamiento de sus estimados, pero presenta el mayor castaño para θ y μ . Aun más, existen múltiples puntos en el tiempo donde Φ es singular, sin embargo no está reflejado en la dinámica del algoritmo, posiblemente por las limitaciones numéricas de MATLAB. Por otro lado, los observadores con ley de adaptación no presentan el efecto del castaño en θ . Note que el STA+LSA presenta un mejor comportamiento con respecto al STA+GA porque su tiempo de asentamiento, la sobre-elongación de la respuesta transitoria, así como su error en estado estacionario son menores. Más aún, para este caso particular la ganancia p es continua en el tiempo.

4.2.5. Observaciones adicionales

Ahora, dado que θ puede ser una perturbación lenta y acotada como se mencionó en la Suposición 4, suponga que la perturbación $\theta(t) = 0.1(1 + \sin(0.05t))$. Los resultados para este caso se muestran en la Fig.4.5 y se observa que los observadores diseñados tienen un buen comportamiento para la estimación de θ , M y μ . Particularmente, PESTA tiene el mejor tiempo de asentamiento y el mejor seguimiento de la trayectoria $\theta(t)$, aun teniendo varios puntos donde Φ es singular en el tiempo.

Por último, suponga que X y S son variables discretas. Además, que las ganancias del STA+GA son $\alpha = 5.0$ y $\gamma = 10.0$, mientras que para el STA+LSA son $\alpha = 10.0$ y $b = 5.0$. Si el tiempo de muestreo es $\tau = 0.2$ hr (equivalente a 12 min), entonces los resultados de la simulación² se muestran en la Fig.4.6. Las gráficas indican un incremento en el efecto de castaño en la estimación de μ , en especial para PESTA y en su estimado de θ . Además, se observa un mayor error en estado estacionario en los observadores con ley de adaptación, siendo el STA+LSA el observador más robusto para este caso.

²En este caso particular se simuló el bioproceso con un solucionador de paso fijo (ode1 Euler) con tiempo de muestreo igual a 0.001 seg. Para los demás casos se empleó un solucionador de paso variable.

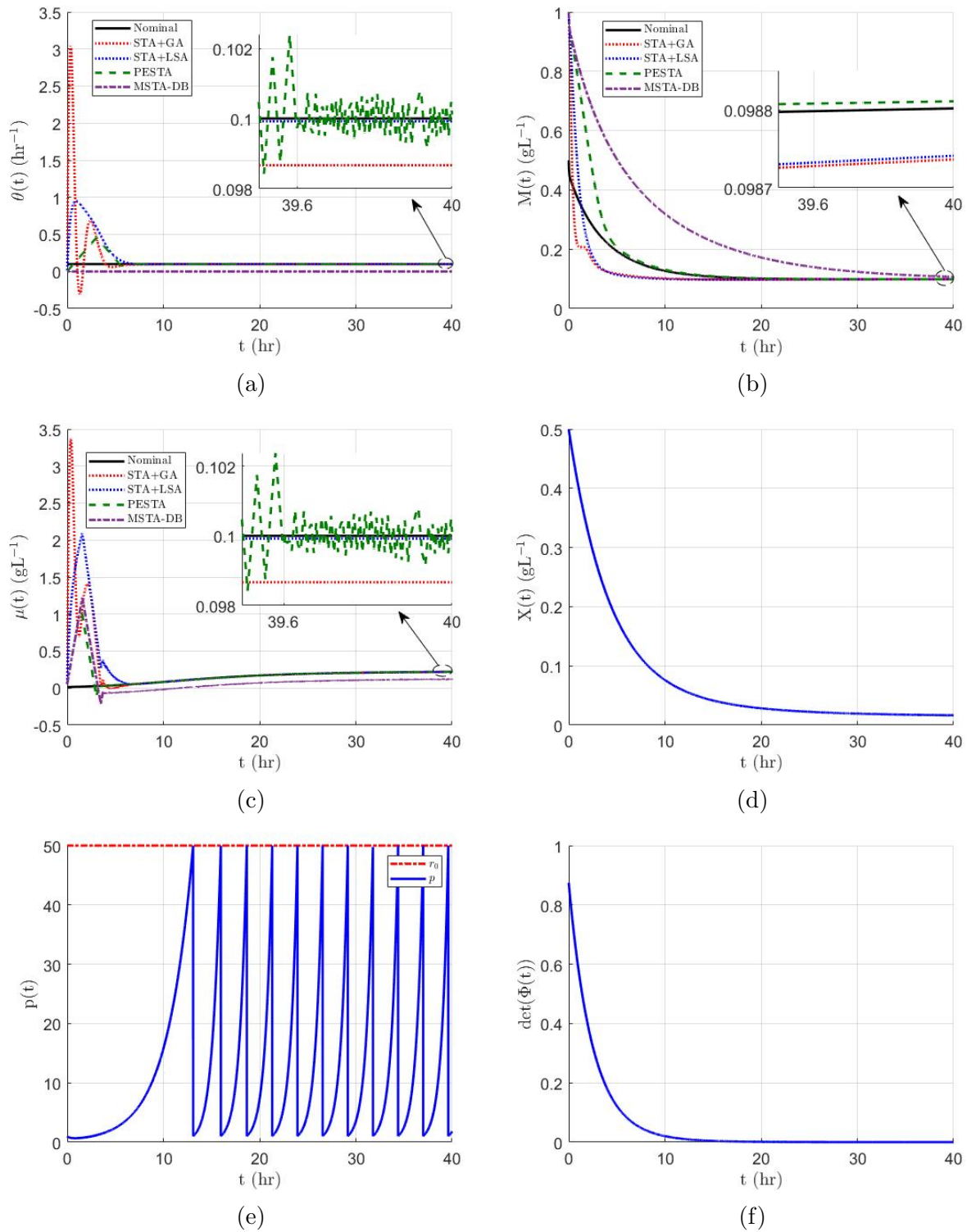


Fig 4.3: Resultados de la simulación del Caso III para la estimación de θ , M y μ ((Fig 4.3a)-c)) durante 40 hr, a partir de los observadores descritos en la Tabla 4.1 más (3.52). Además, se muestra la dinámica de X , p y $\det(\Phi(t))$ ((Fig 4.3d)-f)).

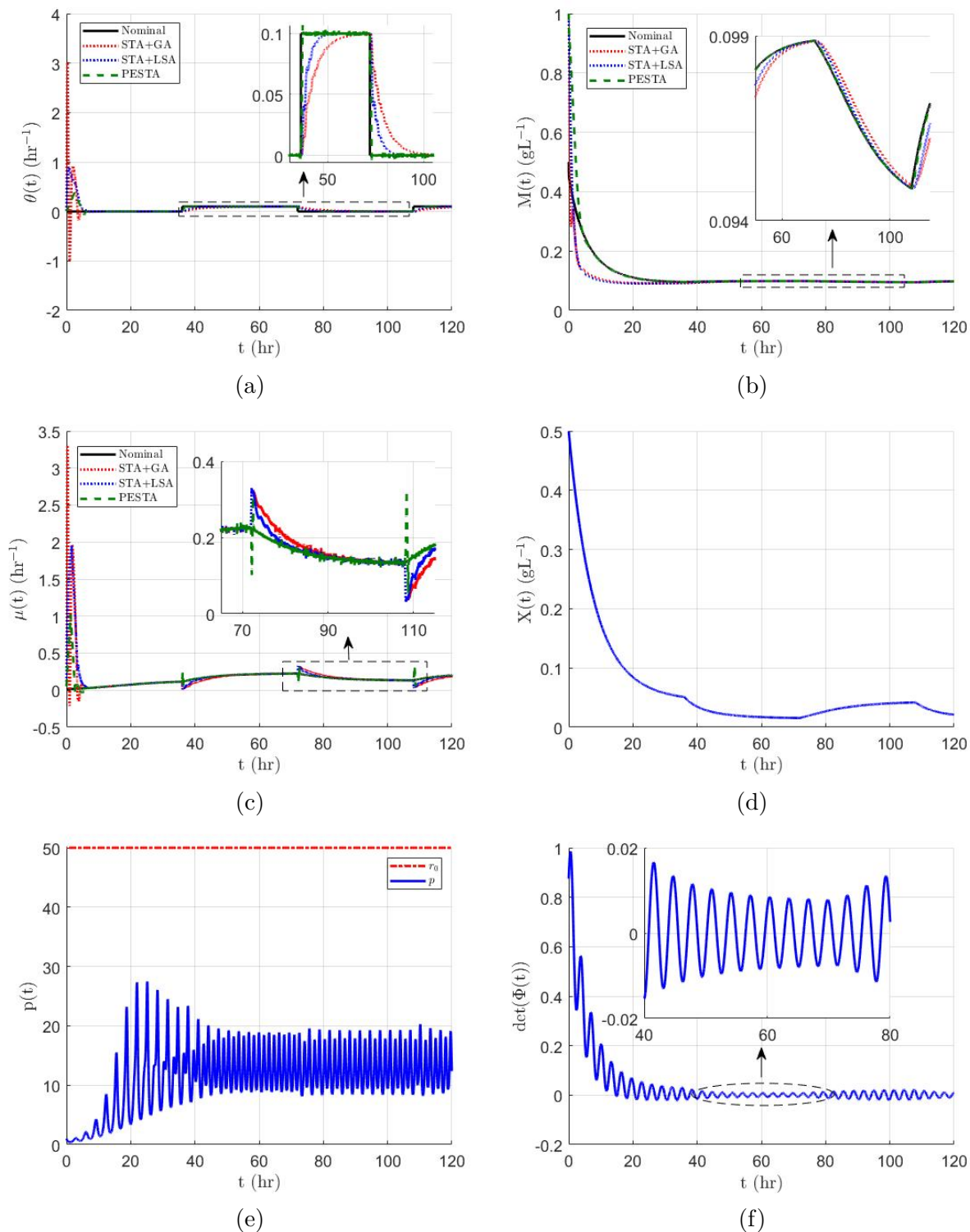


Fig 4.4: Resultados de la simulación del Caso IV para la estimación de θ , M y μ ((Fig 4.4a)-c)) durante 120 hr, a partir de los observadores descritos en la Tabla 4.1 más (3.52). Además, se muestra la dinámica de X , p y $\det(\Phi(t))$ ((Fig 4.4d)-f)).

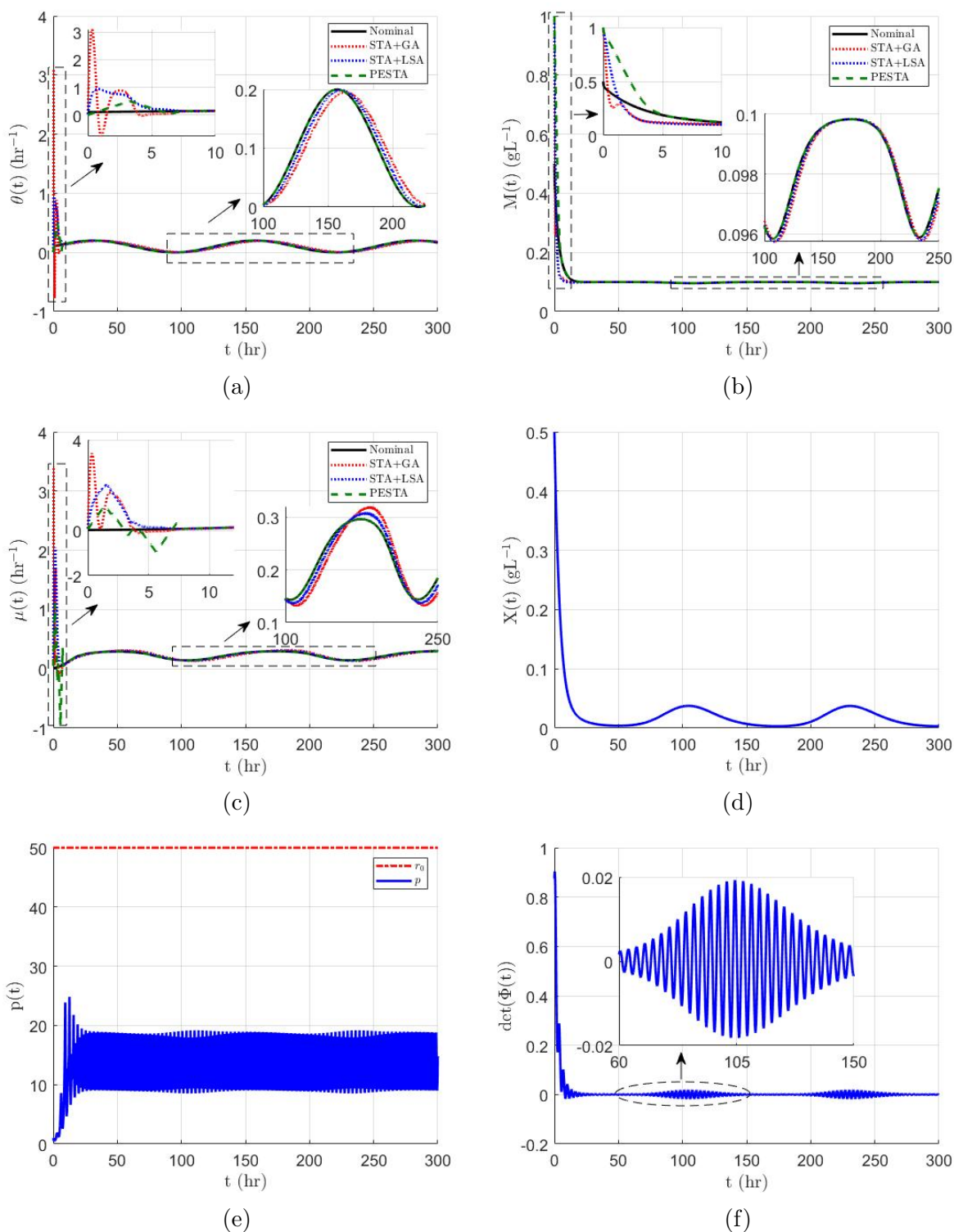


Fig 4.5: Resultados de la simulación del modelo (3.3) cuando $\theta(t) = 0.1(1 + \sin(0.05t))$, para la estimación de θ , M y μ ((Fig 4.5a-c)) durante 300 hr, a partir de los observadores descritos en la Tabla 4.1 más (3.52). Además, se muestra la dinámica de X , p y $\det(\Phi(t))$ ((Fig 4.5d-f)). Cabe destacar que X es una función estrictamente positiva y acotada con cota mínima $x_{\min} = 0.04$ gL⁻¹.

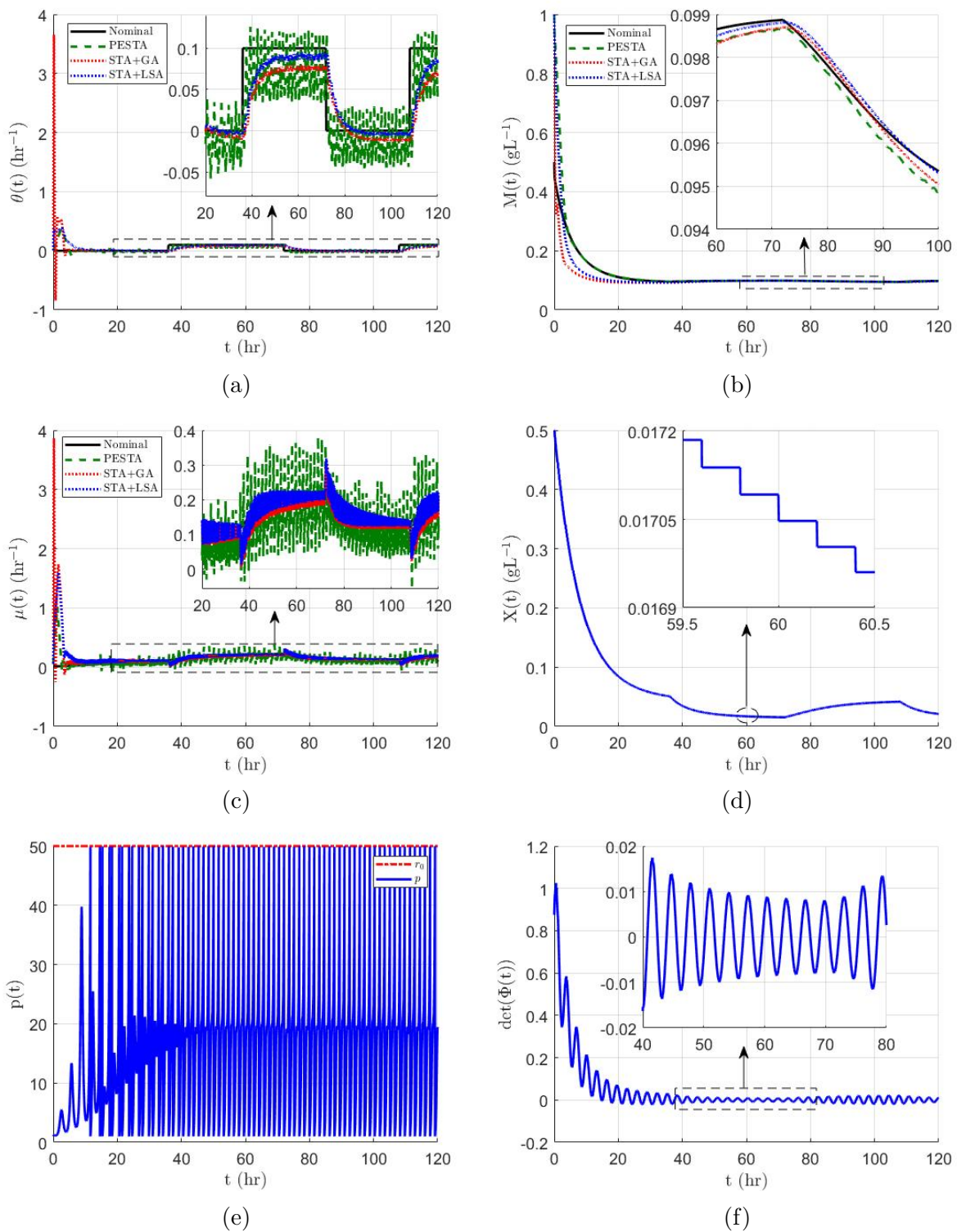


Fig 4.6: Resultados de la simulación del modelo (3.3) cuando X y S son mediciones discretas, para la estimación de θ , M y μ ((Fig 4.6a)-c)) durante 120 hr, a partir de los observadores descritos en la Tabla 4.1 más (3.52) con diferentes ganancias de los observadores con leyes de adaptación. Además, se muestra la dinámica de X , p y $\det(\Phi(t))$ ((Fig 4.6d)-f)).

Conclusión

Los observadores híbridos diseñados en este trabajo estiman la concentración de metal libre en el reactor M y la perturbación externa asociada al factor de dilución θ , para un proceso continuo de biorremediación de metales pesados. Aun más, estos observadores estiman numéricamente la tasa de crecimiento del microorganismo μ , por lo que son robustos a las incertidumbres parciales o totales de dicha reacción.

Aunado a lo anterior, se obtuvo un modelo matemático para la biorremediación de un solo metal pesado en un monocultivo de microorganismos fotosintéticos. Este modelo incluye el fenómeno de bioabsorción más el efecto de la biomasa en la absorción de metales pesados, además de la toxicidad de dichos contaminantes y sus consecuencias en la dinámica del crecimiento microbiano.

Con respecto a los observadores formulados, primero se desarrolló un Pseudo-STA Extendido para un caso general de sistemas no lineales, usado posteriormente en la estimación de θ y μ en el bioproceso estudiado. Para este caso, las trayectorias solución del algoritmo son uniformemente últimamente acotadas. Por otro lado, se desarrolló un STA acoplado a una ley de adaptación de tipo gradiente y de forma adicional, a una modificación del algoritmo por mínimos cuadrados. En general, estos observadores garantizan convergencia exponencial de los estimados de θ y μ a sus valores nominales, siempre que la función regresor asociada cumpla la condición de excitación persistente. Además, a partir del estimado de θ de los observadores mencionados, se diseñó un observador asintótico para la estimación de M , tal que las trayectorias solución de este algoritmo son uniformemente últimamente acotadas.

Por último, los resultados de los observadores en simulación, muestran un buen desempeño para la estimación de θ , M y μ , aun cuando la perturbación θ es de variación lenta en el tiempo y, para los observadores con leyes de adaptación, un buen comportamiento cuando las mediciones disponibles en el reactor son discretas.

Bibliografía

- [1] Ahemad, M., & Kibret, M. (2013). Recent trends in microbial biosorption of heavy metals: a review. *Biochemistry and Molecular Biology*, 1(1), 19-26.
- [2] Akpor, O. B., Otohinoyi, D. A., Olaolu, D. T., & Aderiye, B. I. (2014). Pollutants in wastewater effluents: impacts and remediation processes. *International Journal of Environmental Research and Earth Science*, 3(3), 050-059.
- [3] Alcaraz-Gonzalez, V., & Gonzalez-Alvarez, V. (2007). Robust nonlinear observers for bioprocesses: Application to wastewater treatment. In *Selected topics in dynamics and control of chemical and biological processes* (pp. 119-164). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [4] Ali, J. M., Hoang, N. H., Hussain, M. A., & Dochain, D. (2015). Review and classification of recent observers applied in chemical process systems. *Computers & Chemical Engineering*, 76, 27-41.
- [5] Amato, F. (2006). *Robust control of linear systems subject to uncertain time-varying parameters* (Vol. 325). Berlin: Springer.
- [6] Ascencio, P., Sbarbaro, D., & de Azevedo, S. F. (2004). An adaptive fuzzy hybrid state observer for bioprocesses. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(5), 641-651.
- [7] Åström, K. J., & Wittenmark, B. (2013). *Adaptive control*. Courier Corporation.
- [8] Atondo, A. I. V., del Castillo Alarcón, J. M., Álvarez, A. G., Villalba, A. M. P., Ortiz, G. N., & Esquer, A. S. (2013). Contaminación del agua y suelo en el ecosistema Río Agua Prieta, Sonora, México. *Biotecnia*, 15(1), 3-11.
- [9] Bacciotti, A., & Rosier, L. (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media.
- [10] Bastin, G., & Dochain, D. (1986). On-line estimation of microbial specific growth rates. *Automatica*, 22(6), 705-709.
- [11] Bastin, G., & Dochain, D. (1990). *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*.
- [12] Baumeister, J. (1988). Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis (BDO Anderson, RR Bitmead, CR Johnson, Jr., PY Kokotovic, RL Kosut, IMV Mareels, L. Praly and BD Riedle). *SIAM Review*, 30(2), 323.

- [13] Bergman, B., Gallon, J. R., Rai, A. N., & Stal, L. J. (1997). N₂ fixation by non-heterocystous cyanobacteria. *FEMS Microbiology reviews*, 19(3), 139-185.
- [14] Bouraoui, I., Farza, M., Ménard, T., Abdenmour, R. B., M'Saad, M., & Mosrati, H. (2015). Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs—Application to the estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 55, 78-87.
- [15] Čelikovský, S., Torres-Munoz, J. A., & Dominguez-Bocanegra, A. R. (2018). Adaptive high gain observer extension and its application to bioprocess monitoring. *Kybernetika*, 54(1), 155-174.
- [16] Chojnacka, K., Chojnacki, A., & Gorecka, H. (2005). Biosorption of Cr³⁺, Cd²⁺ and Cu²⁺ ions by blue-green algae *Spirulina* sp.: kinetics, equilibrium and the mechanism of the process. *Chemosphere*, 59(1), 75-84.
- [17] Chojnacka, K., & Zielińska, A. (2012). Evaluation of growth yield of *Spirulina* (*Arthrospira*) sp. in photoautotrophic, heterotrophic and mixotrophic cultures. *World Journal of Microbiology and Biotechnology*, 28(2), 437-445.
- [18] Cloud, M. J., Drachman, B. C., & Lebedev, L. P. (2014). *Inequalities: With Applications to Engineering*. Springer.
- [19] Coutinho, D., Vargas, A., Feudjio, C., Benavides, M., & Wouwer, A. V. (2019). A robust approach to the design of super-twisting observers—application to monitoring microalgae cultures in photo-bioreactors. *Computers & Chemical Engineering*, 121, 46-56.
- [20] Cox, M. M., & Nelson, D. L. (2008). *Lehninger principles of biochemistry* (Vol. 5). New York: Wh Freeman.
- [21] Darvehei, P., Bahri, P. A., & Moheimani, N. R. (2018). Model development for the growth of microalgae: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 97, 233-258.
- [22] De Assis, A. J., & Maciel Filho, R. (2000). Soft sensors development for on-line bioreactor state estimation. *Computers & Chemical Engineering*, 24(2-7), 1099-1103.
- [23] De Battista, H., Picó, J., Garelli, F., & Vignoni, A. (2011). Specific growth rate estimation in (fed-) batch bioreactors using second-order sliding observers. *Journal of Process Control*, 21(7), 1049-1055.
- [24] De Battista, H., Picó, J., Garelli, F., & Navarro, J. L. (2012). Reaction rate reconstruction from biomass concentration measurement in bioreactors using modified second-order sliding mode algorithms. *Bioprocess and biosystems engineering*, 35(9), 1615-1625.
- [25] Doran, P. M. (1995). *Bioprocess engineering principles*. Elsevier.

-
- [26] Dochain, D. (2003). State and parameter estimation in chemical and biochemical processes: a tutorial. *Journal of process control*, 13(8), 801-818.
- [27] Farza, M., M'Saad, M., Maatoug, T., & Kamoun, M. (2009). Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45(10), 2292-2299.
- [28] Farza, M., Rodriguez-Mata, A. E., Robles-Magdaleno, J., & M'saad, M. (2019). A new filtered high gain observer design for the estimation of the components concentrations in a photobioreactor in microalgae culture. *IFAC-PapersOnLine*, 52(1), 904-909.
- [29] Edwards, C., & Spurgeon, S. (1998). *Sliding mode control: theory and applications*. Crc Press.
- [30] Escalante, F. M., Reyna-Angeles, K. A., Villafaña-Rojas, J., & Aguilar-Garnica, E. (2017). Kinetic model selection to describe the growth curve of *Arthrospira (Spirulina) maxima* in autotrophic cultures. *Journal of Chemical Technology & Biotechnology*, 92(6), 1406-1414.
- [31] Gauthier, J. P., Hammouri, H., & Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(6), 875-880.
- [32] Gonzalez, J., Fernandez, G., Aguilar, R., Barron, M., & Alvarez-Ramirez, J. (2001). Sliding mode observer-based control for a class of bioreactors. *Chemical Engineering Journal*, 83(1), 25-32.
- [33] Gupta, A., Joia, J., Sood, A., Sood, R., Sidhu, C., & Kaur, G. (2016). Microbes as potential tool for remediation of heavy metals: a review. *J Microb Biochem Technol*, 8(4), 364-372.
- [34] Gupta, P. L., Lee, S. M., & Choi, H. J. (2015). A mini review: photobioreactors for large scale algal cultivation. *World Journal of Microbiology and Biotechnology*, 31(9), 1409-1417.
- [35] Guzmán-Colis, G., Ramírez-López, E. M., Thalasso, F., Rodríguez-Narciso, S., Guerrero-Barrera, A. L., & Avelar-González, F. J. (2011). Evaluación de contaminantes en agua y sedimentos del río San Pedro en el Estado de Aguascalientes. *Universidad y ciencia*, 27(1), 17-32.
- [36] Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2011). *Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*. Princeton university press.
- [37] Hermanto, M. B. (2009). Identification of algae growth kinetics. *Thesis Syst Control*.
- [38] Huang, Q., Jiang, F., Wang, L., & Yang, C. (2017). Design of photobioreactors for mass cultivation of photosynthetic organisms. *Engineering*, 3(3), 318-329.
- [39] Igiri, B. E., Okoduwa, S. I., Idoko, G. O., Akabuogu, E. P., Adeyi, A. O., & Ejiogu, I. K. (2018). Toxicity and bioremediation of heavy metals contaminated ecosystem from tannery wastewater: a review. *Journal of toxicology*, 2018.

- [40] Ioannou, P. A., & Sun, J. (2012). Robust adaptive control. Courier Corporation.
- [41] Kaewdam, S., Jaturonglumlert, S., Varith, J., Nitatwichit, C., & Narkprasom, K. (2019). Kinetic models for phycocyanin production by fed-batch cultivation of the *Spirulina platensis*. *International Journal of GEOMATE*, 17(61), 187-194.
- [42] Khalil, Hassan K., & Jessy W. Grizzle. *Nonlinear systems*. Vol. 3. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall. 2002.
- [43] Kumar, D., Pandey, L. K., & Gaur, J. P. (2016). Metal sorption by algal biomass: From batch to continuous system. *Algal Research*, 18, 95-109.
- [44] Laino-Guanes, R. M., Bello-Mendoza, R., González-Espinosa, M., Ramírez-Marcial, N., Jiménez-Otárola, F., & Musálem-Castillejos, K. (2015). Concentración de metales en agua y sedimentos de la cuenca alta del río Grijalva, frontera México-Guatemala. *Tecnología y ciencias del agua*, 6(4), 61-74.
- [45] Landau, I. D., Lozano, R., M'Saad, M., & Karimi, A. (2011). *Adaptive control: algorithms, analysis and applications*. Springer Science & Business Media.
- [46] Lourenço, N. D., Lopes, J. A., Almeida, C. F., Sarraguça, M. C., & Pinheiro, H. M. (2012). Bioreactor monitoring with spectroscopy and chemometrics: a review. *Analytical and bioanalytical chemistry*, 404(4), 1211-1237.
- [47] M.D. Guiry in Guiry, M.D. & Guiry, G.M. 2021. *AlgaeBase*. World-wide electronic publication, National University of Ireland, Galway. <http://www.algaebase.org>; searched on 24 May 2021.
- [48] Madigan, M. T., Martinko, J. M., Bender, K. S., Buckley, D. H., & Stahl, D. A. (2015). *Brock: biología de los microorganismos*.
- [49] Martinez-Guerra, R., Garrido, R., & Osorio-Mirón, A. (2001, June). Parametric and state estimation by means of high-gain nonlinear observers: application to a bioreactor. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*.(Cat. No. 01CH37148) (Vol. 5, pp. 3807-3808). IEEE.
- [50] Martínez-Fonseca, N., Chairez, I., & Poznyak, A. (2014). Uniform step-by-step observer for aerobic bioreactor based on super-twisting algorithm. *Bioprocess and biosystems engineering*, 37(12), 2493-2503.
- [51] Moo-Young, M., & Chisti, Y. (1994). *Biochemical engineering in biotechnology* (Technical Report). *Pure and applied chemistry*, 66(1), 117-136.
- [52] Moreno, J. A., & Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE transactions on automatic control*, 57(4), 1035-1040.
- [53] Narendra, K. S., & Annaswamy, A. M. (2012). *Stable adaptive systems*. Courier Corporation.

-
- [54] Nuñez, S., De Battista, H., Garelli, F., Vignoni, A., & Picó, J. (2013). Second-order sliding mode observer for multiple kinetic rates estimation in bioprocesses. *Control Engineering Practice*, 21(9), 1259-1265.
- [55] Nuñez, S., Garelli, F., & De Battista, H. (2014). Second-order sliding mode observer for biomass concentration and growth rate estimation in batch photo-bioreactors. *International journal of hydrogen energy*, 39(16), 8772-8779.
- [56] Pavel, K., Martina, M., & Tomas, M. (2011). Microbial biosorption of metals.
- [57] Poznyak, A. (2010). *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems (Vol. 1)*. Elsevier.
- [58] Picó, J., De Battista, H., & Garelli, F. (2009). Smooth sliding-mode observers for specific growth rate and substrate from biomass measurement. *Journal of Process Control*, 19(8), 1314-1323.
- [59] Richards, R. G., & Mullins, B. J. (2013). Using microalgae for combined lipid production and heavy metal removal from leachate. *Ecological modelling*, 249, 59-67.
- [60] Rouche, N., Habets, P., & Laloy, M. (1977). *Stability theory by Liapunov's direct method (Vol. 4)*. New York: Springer-Verlag.
- [61] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., & Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation (Vol. 10)*. New York: Springer New York.
- [62] Utkin, V., Poznyak, A., Orlov, Y. V., & Polyakov, A. (2020). *Road map for sliding mode control design*. Springer Nature.
- [63] Veluvolu, K. C., Soh, Y. C., & Cao, W. (2007). Robust observer with sliding mode estimation for nonlinear uncertain systems. *IET Control Theory & Applications*, 1(5), 1533-1540.
- [64] Vermaas, W. F. (2001). *Photosynthesis and respiration in cyanobacteria. e LS*.
- [65] Vo, H. N. P., Ngo, H. H., Guo, W., Nguyen, T. M. H., Liu, Y., Liu, Y., ... & Chang, S. W. (2019). A critical review on designs and applications of microalgae-based photo-bioreactors for pollutants treatment. *Science of the Total Environment*, 651, 1549-1568.
- [66] Yan, X. G., Spurgeon, S. K., & Edwards, C. (2012). State and parameter estimation for nonlinear delay systems using sliding mode techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(4), 1023-1029.
- [67] Yang, A. (2011). Modeling and evaluation of CO₂ supply and utilization in algal ponds. *Industrial & engineering chemistry research*, 50(19), 11181-11192.

Apéndice A

Demostraciones del Capítulo 1

A.1. Lema 1.1

Demostración. Si $f(t)$ es monóticamente decreciente, dado que $f(t)$ es absolutamente continua en I , entonces la condición necesaria se cumple forzosamente.

Para probar la condición suficiente, suponga primero que $\dot{f}(t) < 0$ en I . Si existen dos puntos $a, b \in I$ tales que $f(a) < f(b)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) < c < f(b)$. Sea el conjunto $A = \{t \in I \mid f(t) < c\}$ y $d = \sup_t A$, donde $d \in I$ tal que por continuidad $f(d) = c$. Entonces para cada $t \in [d, b]$

$$\frac{f(t) - f(d)}{t - d} > 0$$

Así $\dot{f}(d) \geq 0$, lo que es una contradicción. Luego, asuma que $\dot{f}(t) \leq 0$ en I . Para cualquier $\epsilon < 0$, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f(t) + \epsilon t) = \dot{f}(t) + \epsilon \leq \epsilon < 0$$

Entonces $f(t) + \epsilon t$ es monóticamente decreciente en I . Además, dado que es válido para cualquier ϵ , $f(t)$ es monóticamente decreciente en I . \square

A.2. Teorema 1.4

Demostración. Para empezar, dado que las soluciones del algoritmo STA están definidas en el sentido de Filippov, $x^* = [0 \ 0]^T$ es el punto de equilibrio del sistema cuando $\varrho_1(\cdot) = \varrho_2(\cdot) = 0$. Luego, la derivada de ζ con respecto al tiempo es¹

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{1}{|\zeta_1|} \left(\frac{1}{2}\zeta_2 - \frac{K_1}{2}\zeta_1 + \frac{1}{2}\varrho_1 \right) \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{\zeta}_2 = \frac{1}{|\zeta_1|} (-K_2\zeta_1 + |\zeta_1|\varrho_2) \quad (\text{A.2})$$

¹Note que $|\zeta_1| = \sqrt{x_1}$, $\frac{d}{dt}(\sqrt{|x|}\text{sign}(x)) = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{|x|}}$ y $x = |x|\text{sign}(x)$.

Por lo tanto, de (A.1) y (A.2) se tiene

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{|\zeta_1|} (A\zeta + V_\varrho) \quad (\text{A.3})$$

donde² $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}K_1 & \frac{1}{2} \\ -K_2 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz Hurwitz dado que $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $V_\varrho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\varrho_1 \\ |\zeta_1|\varrho_2 \end{bmatrix}$.

Luego, aplicando la desigualdad de Rayleigh Ritz en la función $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$:

$$\lambda_{\min}(P) \|\zeta\|^2 \leq V(\zeta) \leq \lambda_{\max}(P) \|\zeta\|^2 \quad (\text{A.4})$$

Se concluye que $V(\zeta)$ es una función definida positiva global y decreciente. Luego, observe que $V(\zeta)$ no puede cumplir las condiciones del Teorema 1.1 porque no es una función Lipschitz continua ni continuamente diferenciable en el conjunto $S = \{\zeta \in \mathbb{R}^2 \mid \zeta = 0_{2 \times 1}\}$ por la función signo. Sin embargo, si $V(\varphi(x_0, t))$ es una función absolutamente continua en el tiempo cuando $\varphi(x_0, t) = [\varphi_1(x_0, t) \quad \varphi_2(x_0, t)]^T$, entonces se puede concluir la estabilidad del STA por el Teorema 1.2.

Ahora, V puede expresarse en función de $\varphi(x_0, t)$ y los elementos de P , es decir³:

$$V(\varphi(x_0, t)) = p_1|\varphi_1| + 2p_d\varphi_2\sqrt{|\varphi_1|}\text{sign}(\varphi_1) + p_2\varphi_2^2$$

Para ver que $V(\varphi(x_0, y_0, t)) = V \circ \varphi(x_0, y_0, t)$ es absolutamente continua, basta ver que V es una función Lipschitz o que $\varphi(x_0, t)$ es monótona. No obstante, ya se había visto que V no es Lipschitz porque $\varphi(x_0, t) \notin S$. Sin embargo, para probar que $\varphi(\cdot)$ es monótona basta ver que φ_1 sea monótona. Así, analizando los elementos de $\varphi(\cdot)$ en la inclusión diferencial de Filippov $\dot{\varphi}_1(x_0, t) \in -K_1\sqrt{|\varphi_1|}\text{sign}(\varphi_1) + \varphi_2$ se tiene:

- Si en $t = \tau$, φ_1 cruza el cero y $\varphi_2 \neq 0$, entonces φ_1 es monóticamente creciente o decreciente durante un intervalo que contenga a τ .
- Si $\varphi_2 = 0$ cuando φ_1 cruza el cero, entonces φ_1 se mantendrá en cero.

Por lo que se concluye que $\varphi(x_0, t)$ es una función monótona y así, $V(x)$ es absolutamente continua. Luego, la derivada de $V(x)$ con respecto al tiempo es

$$\dot{V}(x) = \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} = \frac{1}{|\zeta_1|} (\zeta^T (A^T P + P A) \zeta + 2V_\varrho^T P \zeta)$$

Definiendo $\zeta R = [0 \quad \zeta_1(\varrho_2 \text{sign}(x_1))]$ con $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varrho_2 \text{sign}(x_1) & 0 \end{bmatrix}$, se tiene

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{|\zeta_1|} (\zeta^T ((A + R)^T P + P(A + R)) \zeta + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\varrho_1 & 0 \end{bmatrix} P \zeta) \quad (\text{A.5})$$

Ahora, considerando que $|\varrho_2| \leq 1$ entonces

$$A + R \leq \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{2} & \frac{1}{2} \\ -(K_2 + \text{sign}(x)) & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{2} & \frac{1}{2} \\ -(K_2 + v) & 0 \end{bmatrix} = A_R \quad (\text{A.6})$$

donde $v = [1 \quad -1]$.

²Sin pérdida de generalidad $\varrho_1(\zeta, t) = \varrho_1$, $\varrho_2(\zeta, t) = \varrho_2$.

³Sin pérdida de generalidad $\varphi_1(x_0, t) = \varphi_1$ y $\varphi_2(x_0, t) = \varphi_2$.

Observe que (A.6) esta asociada a la inclusión diferencial $\dot{\zeta} = A_R \zeta$. Así, por el Lema 1.2 se concluye que (A.6) es cuadrado estable y por la Nota 1.6 $A_R^T P + P A_R < -\alpha_v I$ donde $\alpha_v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por lo tanto

$$\dot{V}(x) \leq \frac{1}{|\zeta_1|} \left(-\alpha_v \zeta^T \zeta + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \varrho_1 & 0 \end{bmatrix} P \zeta \right) \quad (\text{A.7})$$

Así, por el Lema 1.1 se concluye que $V(x)$ es una función monóticamente decreciente y el análisis de estabilidad de x^* solo depende de ϱ_1 .

1. Para $\varrho_1 = 0$, por el Teorema 1.2 se concluye que x^* es globalmente uniformemente asintóticamente estable y robusto a la perturbación $|\varrho_2|$. Más aún, de (A.4) observe que

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P) \|\zeta\|^2 \leq V(x) &\rightarrow \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{|x_1| + x_2^2} \leq \sqrt{\lambda_{\min}(P) (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)} \leq \sqrt{V(x)} \therefore \\ |\zeta_1| = \sqrt{|x_1|} &\leq \|\zeta\| \leq \frac{\sqrt{V(x)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Por lo tanto, de (A.4), (A.7) y (A.8)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq \frac{1}{|\zeta_1|} \left(-\alpha_v \|\zeta\|^2 \right) \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\sqrt{V(x)}} \left(-\frac{\alpha_v}{\lambda_{\max}(P)} V(x) \right) \therefore \\ \dot{V}(x) &\leq -\frac{\alpha_v \sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)} \sqrt{V(x)} = -\varsigma \sqrt{V(x)} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Por último, integrando (A.9) en el intervalo $[0, t]$

$$V(x(t)) \leq V(x_0) - \varsigma \int_0^t \sqrt{V(x(s))} ds$$

Si $\Psi(V(x(t))) = \int_{V(x_0)}^{V(x(t))} \frac{dt}{\sqrt{y}} = 2(\sqrt{V(x(t))} - \sqrt{V(x_0)})$ con función inversa $\Psi(z)^{-1} = \left(\frac{z}{2} + \sqrt{V(x_0)} \right)^2$, entonces por la desigualdad de Bihari (Lema 19.1 Pp. 507 [57]):

$$V(x(t)) \leq \Psi \left(\int_0^t -\varsigma dt \right)^{-1} = \left(\sqrt{V(x_0)} - \frac{\varsigma}{2} t \right)^2 \quad (\text{A.10})$$

Por ende, x^* es globalmente estable en tiempo finito τ , donde $\tau \leq T(x_0) = \frac{2\sqrt{V(x_0)}}{\varsigma}$.

2. Para $|\varrho_1(x, t)| < \delta$ y de (A.7):

$$\dot{V} \leq \frac{1}{|\zeta_1|} \left(-\alpha_v \|\zeta\|^2 + \delta \lambda_{\max}(P) \|\zeta\| \right) = \frac{\|\zeta\|}{|\zeta_1|} \left(-\alpha_v \|\zeta\| + \delta \eta \right)$$

donde $\eta = \lambda_{\max}(P)$. Luego, de (A.4) y (A.8) se tiene que

$$\dot{V} \leq -\alpha_v (\kappa \|\zeta\| + (1 - \kappa) \|\zeta\|) + \delta \lambda_{\max}(P) \leq -\kappa \varsigma \sqrt{V(x)} \quad (\text{A.11})$$

donde $0 < \kappa < 1$ y $\|\zeta\| \geq \mu$ con $\mu = \frac{\delta \eta}{\alpha_v (1 - \kappa)}$. Luego, de (A.4) y (A.11), se define las funciones de clase K_∞ $\omega_1(r) = \lambda_{\min}(P) r^2$, $\omega_2(r) = \lambda_{\max}(P) r^2$ y $\omega_3(r) = -\kappa \varsigma \sqrt{V(r)}$. Por lo tanto, por el Teorema 1.3, se concluye que las trayectorias solución de (1.9) son globalmente uniformemente últimamente acotadas con cota última $b = \omega_1^{-1}(\omega_2(\mu))$, lo que lleva a la expresión (1.13). \square

A.3. Lema 1.3

Demostración.

1. Por definición.

2. Observe que P cumple la propiedad $PP^{-1} = P^{-1}P = I$, donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Luego, derivando este término con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(PP^{-1}) &= P \frac{d}{dt}(P^{-1}) + \left(\frac{d}{dt}P\right)P^{-1} = 0_{n \times n} \therefore \\ \frac{d}{dt}(P^{-1}) &= -P^{-1}\dot{P}P^{-1} = \begin{cases} -P^{-1}(bP - P\phi\phi^T P)P^{-1} & \text{Si } \|P\| \leq r_0 \\ -P^{-1}(0_{n \times n})P^{-1} & \text{Caso contrario} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Por lo que se concluye el resultado.

3. Definiendo $M = P^{-1}$, la solución en el tiempo de (1.17b) es

$$M(t) = e^{-bt}M(0) + \int_0^t e^{-b(t-\tau)}\phi(\tau)\phi(\tau)^T d\tau \quad (\text{A.13})$$

Ahora, para $t \geq T_0$ tal que el primer término de (A.13) es cercano a $0_{n \times n}$, se tiene que

$$\begin{aligned} M(t) &\geq \int_0^t e^{-b(t-\tau)}\phi(\tau)\phi(\tau)^T d\tau \\ &\geq \int_{t-T_0}^t e^{-b(t-\tau)}\phi(\tau)\phi(\tau)^T d\tau + \int_0^{t-T_0} e^{-b(t-\tau)}\phi(\tau)\phi(\tau)^T d\tau \\ &\geq \int_{t-T_0}^t e^{-b(t-\tau)}\phi(\tau)\phi(\tau)^T d\tau \end{aligned}$$

Dado que ϕ cumple la condición de excitación persistente, aplicando el teorema del valor medio se tiene

$$M(t) \geq e^{-bT_0}\alpha_1 I \quad (\text{A.14})$$

Mientras que en el caso $t < T_0$ se tiene

$$M(t) \geq e^{-\beta t}M(0) \geq \lambda_{\min}(M(0))e^{-bT_0} I \quad (\text{A.15})$$

Por lo tanto, de (A.14) y (A.15)

$$M(t) \geq \underbrace{\min(\alpha_1, \lambda_{\min}(M(0)))}_{m_1} e^{-bT_0} I = m_1 I \quad (\text{A.16})$$

donde $m_1 \in \mathbb{R}_{>0}$. Luego, dado que ϕ es acotada, entonces existe $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\phi < \sigma I$. Por ende

$$\begin{aligned} M(t) &\leq M(0) + \sigma^2 \int_0^t e^{-b(t-\tau)} d\tau I = M(0) + \frac{\sigma^2}{b} (1 - e^{-bt}) I \therefore \\ M(t) &\leq \underbrace{\left(\lambda_{\max}(M(0)) + \frac{\sigma^2}{b}\right)}_{m_2} I = m_2 I \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde $m_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Así, de (A.16) y (A.17) se tiene

$$m_1 I \leq M(t) \leq m_2 I \longrightarrow m_2^{-1} \leq P(t) \leq m_1^{-1} \quad (\text{A.18})$$

Lo que implica que P y P^{-1} son matrices simétricas positivas definidas. Por último, para $\|P\| \leq r_0$ y de (1.20)

$$\dot{M} \leq (-bm_1 + \sigma^2)I \quad (\text{A.19})$$

Así, $\dot{M} < 0$ si $b > \frac{\sigma^2}{m_1}$ y como b es suficientemente grande por definición, entonces la condición se cumple. Además, dado que $\dot{M} = 0$ para $\|P\| > r_0$, entonces se concluye que \dot{M} es semidefinida negativa. \square

Apéndice B

Tabla de parámetros y condiciones iniciales

Parámetro	Valor	Referencia
μ_{\max}	0.600 hr ⁻¹	[41]
K_{sNO_3}	0.414 gL ⁻¹	[41]
K_{sI}	22.391 Wm ⁻²	[30]
A	100.000 Lg ⁻¹	[30]
Y_{NO_3}	1.500 g/g – cianobacteria	[17]
β_D	0.0027 hr ⁻¹	[30]
K_{sX}	10.000 gL ⁻¹	Propuesto
a_1	28.020 hr ⁻¹	Calculado de [16]
a_2	39.727 hr ⁻¹	Modificado de [16]

Tabla B.1: Valores de los parámetros del modelo de biorremediación de metales pesados (3.3) y (4.1).

Entrada	Valor
d	0.1 hr ⁻¹
\bar{s}_{NO_3}	5.0 gL ⁻¹
\bar{m}	0.1 gL ⁻¹
$I(t)$	30.0 Wm ⁻²

Tabla B.2: Valores de las entradas del modelo de biorremediación de metales pesados (3.3).

Condición inicial	Valor
$X(0)$	0.5 gL^{-1}
$S_{\text{NO}_3}(0)$	2.5 gL^{-1}
$M(0)$	0.5 gL^{-1}
$q(0)$	60.0 hr^{-1}
$\hat{X}(0)$	0.01 gL^{-1}
$\hat{S}_{\text{NO}_3}(0)$	0.5 gL^{-1}
$\hat{M}(0)$	1.0 gL^{-1}
$\hat{q}(0)$	30.0 hr^{-1}
$\hat{\theta}(0)$	0.01 hr^{-1}
$\xi(0)$ (A)	0.1
$\xi(0)$ (B)	$[0.1 \ 0.01]^T$
$p(0)$ (C)	1.0

Tabla B.3: Valores de las condiciones iniciales del modelo de biorremediación de metales pesados (3.3) y de los observadores de la Tabla 4.1. A: Válido para STA+GA, STA+LSA & MSTA-DB; B: Válido para PESTA; C: Asociado a STA+LSA.

Nota importante. Aunque los resultados descritos en [30] son válidos para *Limnospira (Arthrospira) maxima* ((Setchell & N.L.Gardner) Nowicka-Krawczyk, Mühlsteinová & Hauer 2019), de acuerdo a la base de datos [47] ambas especies pertenecen a la familia *Microcoleaceae*, por lo que son grupos cercanos y puede (al menos en simulación) extrapolarse los parámetros descritos de *L. maxima* a *A. platensis*.