



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

“Agujeros negros con electrodinámica no lineal:  
Termodinámica de Euler-Heisenberg-AdS y  
generalización de BTZ rotante”

**Tesis que presenta**

**Daniela Magos Cortes**

para obtener el Grado de

Doctora en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Directora de tesis: Dra. Nora Eva Bretón Báez

Ciudad de México

Febrero, 2021

*A la niña con el corazón mas bello,  
que llena de colores la vida de quien la conoce,  
Lu.*



# Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi asesora, por aceptarme como su estudiante en circunstancias poco usuales, por confiar en mi, por su infinita paciencia, apoyo constante y sus valiosísimos e incalculables consejos. No me queda duda de la impecable calidad de persona e investigadora que es la doctora Bretón y por ello estaré eternamente agradecida.

Mi sincero agradecimiento también para los profesores Dr. Alfredo Macías, Dr. Riccardo Capovilla, Dr. Hugo G. Compeán y Dr. Abdel P. Lorenzana, por haber aceptado fungir como sinodales y revisar mi trabajo de tesis.

El CINVESTAV ha tenido una gran influencia en mi vida, llegué aquí para hacer la maestría en el 2012 y regresé en el 2016 para continuar con mi sueño de ser científica ingresando al doctorado. El camino no ha sido para nada fácil, es por ello que llegar a la etapa final del doctorado significa mucho para mi, éste momento se veía tan lejano que parecía inalcanzable. Agradezco de antemano al CINVESTAV, por brindarme un espacio propicio para la generación de conocimiento, al igual que a mis profesores por sus cátedras magistrales y a todo el personal administrativo y de la biblioteca Jerzy Plebanski por su ayuda puntual todo momento.

También doy las gracias a mis amigos, que me han acompañado en las buenas y en las malas y han hecho que mi paso por el CINVESTAV sea mucho mas agradable. Luis, Héctor, Jorge R., Gabriel, Jorge V., Quique, Mich, Jorge S. y Pam, gracias por tener siempre un momento para escucharme y alentarme a seguir adelante, sepan que cada uno de ustedes es un ejemplo para mi. Lalo, gracias por tu compañía y muestras de cariño constantes, eres mi mayor ejemplo de disciplina, haces que cada uno de mis días sea mas feliz.

Por supuesto que también agradezco de corazón a mi mamá por su comprensión de mi ausencia en diversos eventos familiares y por su enseñanza de tenacidad y perseverancia. También gracias a mi querida tía Oli, por siempre estar al pendiente de mi y de mis preocupaciones, ocupas un lugar muy especial en mi corazón pequeña Oli.

Finalmente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo económico mediante la beca con número 434578 que hizo posible la realización de mi posgrado.



## Resumen

En este trabajo de tesis se estudiaron dos soluciones de agujero negro (BH) en el marco de electrodinámica no lineal (NLED) acoplada con relatividad general. La primera solución corresponde al BH estático de Euler-Heisenberg con constante cosmológica  $\Lambda$ , caracterizado además por su masa, carga eléctrica y el parámetro de la no-linealidad  $a$ . Se estudiaron las ecuaciones geodésicas de partículas de prueba, así como el potencial efectivo de la solución. Posteriormente se hizo el estudio de sus propiedades termodinámicas en un espacio-tiempo donde el parámetro anti-de Sitter  $\Lambda$  es interpretado como la presión termodinámica; mostramos que la fórmula de Smarr es consistente con la primera ley de la termodinámica, donde el parámetro de la teoría puede interpretarse como una especie de polarización del vacío. Se determinó la ecuación de estado así como los puntos críticos, encontrando que la razón crítica está en concordancia con el correspondiente valor para el fluido de Van der Waals. También se hizo el análisis de la energía libre de Gibbs indicando la existencia de dos transiciones de fase; se construyó también la curva de coexistencia  $P - T$ , donde se observan las transiciones de fase mencionadas.

La segunda solución que se estudió fue un BH rotante cargado en un espacio-tiempo anti-de Sitter de  $(2 + 1)$  dimensiones y es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein acopladas a NLED; los parámetros de la solución son la masa, momento angular, carga eléctrica y constante cosmológica. Se obtienen las ecuaciones geodésicas para una partícula de prueba así como el potencial efectivo. Esta solución presenta un comportamiento interesante, ya que dependiendo del valor que tomen los parámetros, la solución admite una interpretación de agujero negro rotante cargado (con uno o dos horizontes de eventos) o bien, un agujero de gusano atravesable rotante y cargado, ambos asintóticamente AdS. Se encontró que si el campo eléctrico tiende a cero, se recupera el agujero negro estacionario de Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ). Además, la métrica que derivamos tiene una singularidad de anillo para cierto radio diferente de cero, en contraste con la solución de BTZ.

**Palabras clave:** Agujeros negros, electrodinámica no lineal, termodinámica de agujeros negros, agujero negro rotante BTZ.



## Abstract

In this work we study two black hole (BH) solutions in the frame of non-linear electrodynamics (NLED) coupled to general relativity. The first solution corresponds to the Euler-Heisenberg (EH) theory coupled to gravity that represents a nonlinearly charged static BH with cosmological constant  $\Lambda$ , further characterized by: mass, electric charge, and the Euler-Heisenberg theory parameter  $a$ . We study the geodesic equations of test particles and the effective potential of the solution. Later we focus on its thermodynamic properties in the space-time where the anti-de Sitter parameter is interpreted as the pressure; we show the consistency between the Smarr formula and the first law of BH thermodynamics, interpreting the parameter of the EH theory as the vacuum polarization. We determine the equation of state and the critical points; finding that the critical ratio is in agreement that corresponding to the Van der Waals fluid. Moreover, the analysis of the Gibbs free energy indicates that two phase transitions can occur; we also construct the  $P$ - $T$  coexistence curve where the different phases of the BH can be observed.

The second solution that we obtain is an exact solution of Einstein gravity coupled to NLED in  $(2 + 1)$ -dimensional Anti-de Sitter (AdS) spacetime. The solution is characterized by mass, angular momentum, electric charge and cosmological constant. We obtain the geodesic equations and the effective potential. Depending on the range of the parameters, the solution admits a charged rotating BH interpretation or a charged rotating traversable wormhole, both asymptotically AdS. If the electromagnetic field is turned off, the stationary Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) BH is recovered. Moreover, in contrast to the BTZ metric, the derived AdS solution is singular at certain radius different from zero, resembling the ring singularity of the Kerr-Newman spacetime.

**Keywords:** Black holes, nonlinear electrodynamics, thermodynamics of black holes, rotating BTZ black hole.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Termodinámica de agujeros negros</b>	<b>6</b>
2.1. Prop. termodinámicas de sol. AdS	8
2.2. Agujero negro de Reissner-Nordstrom-AdS	9
2.3. Termodinámica del BH de RN-AdS	10
2.3.1. Estabilidad termodinámica	11
2.3.2. Comportamiento crítico	12
2.3.3. Energía libre de Gibbs y cambios de fases	14
2.3.4. Exponentes críticos	16
<b>3. Electrodinámica no lineal</b>	<b>19</b>
3.1. Formalismo general	20
3.2. Agujero negro de Born-Infeld	22
3.3. Agujero negro de de Euler - Heisenberg	25
<b>4. Geodésicas y termodinámica del BH de Euler-Heisenberg</b>	<b>30</b>
4.1. Ecuaciones geodésicas y potencial efectivo	30
4.2. Termodinámica del agujero negro de EH-AdS	32
4.2.1. Primera ley de la termodinámica	33
4.2.2. Estabilidad termodinámica	35
4.2.3. Comportamiento crítico	36
4.2.4. Energía libre de Gibbs y cambios de fase	39
4.2.5. Ley de estados correspondientes y exponentes críticos	42
<b>5. Agujeros negros AdS en (2+1) dimensiones</b>	<b>47</b>
5.1. Agujero negro BTZ	47
5.1.1. Ecuaciones geodésicas y potencial efectivo	48
5.1.2. Agujero negro MTZ	50
5.2. Termodinámica de BTZ	52
5.2.1. Ecuación de estado	52
<b>6. Gen. NLED del BH BTZ rotante</b>	<b>54</b>
6.1. Gen. NLED de BH BTZ rot.	57
6.2. Límites BTZ	58
6.3. Comportamiento de la solución	61
6.4. Ecuaciones Geodésicas	66
6.5. Interpretación de wormhole	69

---

<b>6.6. Termodinámica</b> . . . . .	72
<b>7. Conclusiones y perspectivas</b>	74
<b>Referencias</b>	78
<b>A. Estructura causal y aspectos geométricos</b>	84
<b>A.1. Estructura causal</b> . . . . .	84
<b>A.2. Aspectos geométricos</b> . . . . .	85

# Índice de figuras

1. Capacidad calorífica para el BH de RN-AdS. . . . .	12
2. Diagramas $P - v$ para el BH de RN-AdS. . . . .	13
3. Energía libre de Gibbs para el BH de RN-AdS. . . . .	15
4. Curva de coexistencia para el BH de RN-AdS. . . . .	16
5. Campo eléctrico del BH de BI. . . . .	24
6. Función métrica de la solución de BI-AdS. . . . .	25
7. Función métrica AdS para el agujero negro EH- $\Lambda$ . . . . .	27
8. Función métrica dS para el agujero negro EH- $\Lambda$ . . . . .	27
9. Campo eléctrico para el BH de EH-AdS. . . . .	28
10. Potencial efectivo para el BH de EH-AdS. . . . .	32
11. Capacidad calorífica a carga constante $C_Q$ para el BH de EH-AdS. . . . .	36
12. Volumen crítico para el BH de EH-AdS. . . . .	37
13. Temperatura crítica para el BH de EH-AdS. . . . .	38
14. Diagramas $P - v$ para el BH de EH-AdS. . . . .	39
15. G vs. T y T vs. S para el BH de EH-AdS. . . . .	40
17. Capacidad calorífica $C_Q$ para el BH de EH-AdS cerca del punto crítico. . . . .	41
16. Diagramas $T-S$ y energía libre de Gibbs vs. temperatura para el BH de EH-AdS. . . . .	42
18. Curva de coexistencia $P - T$ para el BH de EH-AdS. . . . .	43
19. Potencial efectivo del BH de BTZ. . . . .	50
20. Capacidad calorífica para el BH de BTZ-AdS. . . . .	53
21. Diagramas $P - v$ para el BH cargado de BTZ-AdS. . . . .	53
22. Función lapso $N^2(r)$ . . . . .	58
23. BH con un horizonte de eventos. . . . .	63
24. BH con dos horizontes de eventos. . . . .	64
25. BH extremo. . . . .	65
26. Energía vs. r. . . . .	67
27. Potencial efectivo. . . . .	68
28. Diagramas de wormhole. . . . .	71
29. Espacio de parámetros. . . . .	72

# 1 | Introducción

Los agujeros negros sin duda son de los objetos astrofísicos mas extraordinarios que existen en la naturaleza; de características tan extrañas que el mismo Albert Einstein, llegó a afirmar que no tenían realidad física.

En 1783, un científico británico (en ese entonces conocidos como *filósofos naturales*) llamado John Michell se encontraba estudiando los efectos gravitatorios en la luz que emite una estrella, en aquel entonces entendida meramente de forma corpuscular. Usando las leyes de Newton, él encontró que la velocidad de escape de una partícula depende de la masa y radio de la estrella desde donde la partícula es lanzada, pudiendo deducir una *circunferencia crítica* para la cual la velocidad de escape es justo la velocidad de la luz. Su razonamiento le llevó a concluir que para una estrella con una circunferencia menor a la circunferencia crítica la luz no podría escapar, a dichas estrellas las llamó *estrellas negras*, que serían la versión del siglo XVIII de los agujeros negros.

Michell presentó su predicción ante la *Royal Society of London* en noviembre de ese mismo año, posteriormente sus resultados fueron popularizados por el francés Pierre Simon Laplace en las dos primeras ediciones de su libro *Le Systeme du Monde*, (1796-99), pero sin hacer referencia a los resultados previos de Michell, para la tercera y subsecuentes ediciones de su libro ya no aparecía el concepto de estrella negra, se piensa que la razón es que para entonces ya se había estudiado la interferencia de la luz, lo que llevó a los científicos de la época a abandonar la idea corpuscular de la luz, y no se tenía claro como la descripción ondulatoria de la misma podía verse afectada por las leyes de Newton.

Fue hasta noviembre 1915 que Einstein presentó su teoría de la relatividad general, en la cual establecía una nueva forma de entender a la gravedad y como ésta

afecta a la materia circundante y viceversa, mediante una serie de ecuaciones de campo que relacionan el contenido de materia con la forma que toma el espacio-tiempo, y cómo dicha deformación dicta el movimiento de la materia en ese espacio-tiempo.

Karl Schwarzschild, un distinguido astrofísico que en esas épocas se encontraba sirviendo al ejército alemán en el frente Ruso de la primera guerra mundial, leyó el trabajo de Einstein de la relatividad general y unos pocos meses después, en enero de 1916 encontró una solución a las ecuaciones de campo de Einstein que describía la curvatura causada por cualquier estrella esférica no rotante y sin carga. Lamentablemente Schwarzschild falleció por una enfermedad contraída en el frente Ruso unos seis meses después de encontrar la solución que lleva su nombre y que ha tenido un gran impacto en el entendimiento que se tiene actualmente de la gravedad y el universo.

Otra importante solución a las ecuaciones de Einstein se obtuvo en 1916 por Hans Reissner y en 1918 por Gunnar Nordstrom, quienes incorporaron carga eléctrica a la materia bajo estudio, sin embargo fue hasta 1960 que John Grave y Dieter Bill, estudiantes de John Wheeler se dieron cuenta que la solución de Reissner-Nordstrom correspondía a un agujero negro cargado eléctricamente con simetría esférica.

En 1963 Kerr encontró una nueva solución a las ecuaciones de Einstein, aunque su interpretación llegó dos años más tarde por Boyer y Lindquist, Carter y Penrose, quienes notaron que la solución de Kerr describe un agujero negro rotante sin carga eléctrica y con simetría esférica. Por su parte, Ezra T. Newman [1], junto con varios de sus estudiantes añadieron carga eléctrica a la solución de Kerr, encontrando así la solución de Kerr-Newman, que corresponde a un agujero negro rotante y con carga eléctrica.

Ese mismo año, 1965, Roger Penrose prueba rigurosamente que la formación de agujeros negros es una consecuencia inevitable de la relatividad general, [2] con sus famosos teoremas de singularidades, motivo por el cual es galardonado con el premio Nobel de física el 05 de octubre del presente año.

En 1967 Wheeler acuña el nombre de **agujero negro**, BH por sus siglas inglés (black hole), para referirse a lo que hasta ese entonces se conocía como estrellas negras o singularidades de Schwarzschild.

En 1969, Penrose continúa con sus estudios sobre la naturaleza del espacio-tiempo

y descubre que puede extraerse energía de un agujero negro rotante. Por otro lado propone la conjetura de censura cósmica, que dice que una singularidad en el espacio-tiempo siempre está cubierta por un horizonte de eventos. En el mismo año Christodoulou comienza a darse cuenta de las similitudes entre la evolución de un agujero y las leyes de la termodinámica; el siguiente año Hawking prueba que el área de una sección transversal del horizonte de sucesos nunca decrece con el tiempo. En 1972 Carter, Hawking e Israel prueban la conjetura de no pelo para BH rotantes sin carga y Bekenstein conjetura que dicha área es proporcional a su entropía, sin embargo, esta propuesta no era consistente, ya que de ser así, habría un flujo de calor desde la radiación térmica baja del exterior hacia el BH, lo que violaría la segunda ley de la termodinámica, por que la pérdida de entropía de la radiación sería mayor a la ganancia de entropía del BH; ésta inconsistencia se resolvió en 1974 cuando Hawking descubrió que los agujeros negros rotantes y no rotantes emiten radiación térmica, de modo que los BH tienen realmente entropía gravitacional intrínseca.

Desde entonces muchas de las mentes mas brillantes de la historia han contribuido a descifrar los misterios detrás de los agujeros negros, como prueba tenemos la reciente imagen de un agujero negro, mas precisamente, de la sombra de la fotosfera del agujero negro, ubicado al centro de la galaxia M87, a unos 55 millones de años luz de la tierra, obtenida por la colaboración internacional *Event Horizon Telescope (EHT)* en abril del 2019.

Una lectura muy recomendable que brinda un panorama bastante completo sobre los agujeros negros, los agujeros de gusano y algunas otras cuestiones muy interesantes del universo es "Black holes and time warps" de Kip S. Thorne [\[3\]](#), de donde me ha basado para hacer la anterior línea del tiempo.

Las singularidades de las que hemos hablado pueden aparecer en la métrica que describe el espacio tiempo o bien en los campos de la teoría, como es el caso de la singularidad del campo eléctrico en el origen. Hay varias propuestas para atacar los problemas de las singularidades, entre ellas las teorías no locales o derivadas de orden superior, aunque traen consigo otras dificultades como violación al principio de causalidad o energía electromagnética negativa; otra alternativa es considerar que las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica son en realidad una aproximación de ecuaciones no-lineales para los campos electromagnéticos, es decir, considerar una

electrodinámica no lineal, NLED por sus siglas en inglés (non-linear electrodynamics). El primero en apuntar hacia esta dirección fue el físico alemán Gustav Mie [4] quien en 1912 propone sumar al Lagrangiano electromagnético lineal un término que solo tendría relevancia a escalas sub atómicas; el mayor problema de su formulación es que no es invariante ante transformaciones de norma.

En 1934 surgió otra propuesta por Max Born y Leopold Infeld (BI) [5], quienes en un intento por abordar el problema de la infinitud de la auto-energía del electrón consideraron un Lagrangiano electromagnético que contenía implícitamente un límite superior en el tensor de campo electromagnético, ésta solución es interesante por que a pesar de violar el principio de superposición de los campos electromagnéticos, para campos suficientemente débiles se recupera la teoría lineal de Maxwell. Posteriormente, en 1987 Humberto Salazar, Alberto García, y Jerzy Plebański [6] hallaron la solución de agujero negro para la electrodinámica propuesta por Born e Infeld.

A finales de los 60's Jerzy Plebański [7] generalizó el estudio de las teorías electromagnéticas no lineales, que contenía a la teoría de Born-Infeld como caso particular, además, algunas de las funciones Lagrangianas que él propuso conducen a una teoría estable, ya que el campo eléctrico en el origen es cero.

Otra teoría interesante que surge en el contexto de la NLED es la propuesta por Euler y Heisenberg (EH) en 1936 [8], proveniente de la aproximación a un lazo de la electrodinámica cuántica, en esta teoría el campo eléctrico es diferente de cero en el origen. Recientemente Brodin et. al. propusieron un método para detectar efectos de la no linealidad del campo electromagnético utilizando guías de onda en la dispersión fotón-fotón, ya que ésta da lugar a términos de auto interacción que son similares a los originados en las teorías de NLED.

El trabajo aquí presentado tiene la siguiente estructura. En el capítulo [2] se introduce la termodinámica de agujeros negros, y algunos conceptos que serán relevantes a lo largo de la tesis, tales como la entropía, la temperatura y la presión termodinámica. Se presenta también el BH de Reissner-Nordstrom-AdS, así como sus propiedades termodinámicas. El capítulo [3] es dedicado a introducir el formalismo general de la NLED, y a modo de ejemplo se presentan las dos soluciones mas relevantes en este contexto, el BH de BI-AdS y el BH de EH-AdS. En el capítulo [4] se presenta la primera parte del trabajo original, comenzando por el cálculo de las ecuaciones geodésicas

y el potencial efectivo, para posteriormente en ese mismo capítulo entrar de lleno a uno de los temas centrales de la tesis, la termodinámica del BH de EH-AdS, se hace un extenso análisis de las propiedades termodinámicas de la solución y se encuentra que existen transiciones de fase de primer orden. En el capítulo 5 pasamos a hacer una revisión de la solución encontrada por Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ), que corresponde a un BH en un espacio-tiempo estacionario con simetría cíclica en  $(2+1)$  dimensiones, presentamos también algunos aspectos de su termodinámica. Este capítulo sirve de preámbulo para el capítulo 6 que corresponde a la segunda parte de presentación de resultados obtenidos, en donde presentamos una solución exacta de las ecuaciones de Einstein acopladas a NLED en  $(2+1)$  dimensiones, hacemos un análisis del rango de valores que pueden tomar sus parámetros y encontramos que la interpretación de la solución presentada depende fuertemente de esta elección, admitiendo interpretación de BH o de agujero de gusano, WH por sus siglas en inglés (wormhole). Las conclusiones del presente trabajo se encuentran reportadas en el capítulo 7, así como algunas perspectivas. Finalmente, anexamos un apéndice en donde concentramos algunas definiciones geométricas y nociones de la estructura causal del espacio-tiempo.

Como resultado de este trabajo se publicaron los artículos<sup>1</sup> [9, 10], el primero de ellos constituye el capítulo 4, mientras que los resultados del segundo están reportados en el capítulo 6.

---

1

- D. Magos y N. Bretón, *Thermodynamics of the Euler-Heisenberg-AdS black hole*, Phys. Rev. D **102**, 084011 (2020).
- P. Cañate, D. Magos y N. Bretón, *Nonlinear electrodynamics generalization of the rotating BTZ black hole*, Phys. Rev. D **101**, 064011 (2020).

## 2 | Termodinámica de agujeros negros

La termodinámica de agujeros negros es una rama de la física que comenzó a desarrollarse en 1970 con los trabajos de Hawking y Bekenstein sobre la mecánica de los agujeros negros y la enorme similitud con las leyes de la termodinámica. A continuación haremos una revisión de los trabajos en relatividad general clásica que han conducido y sostienen estas ideas, para una revisión mas extensa puede consultarse por ejemplo [11]. Comencemos por dar una definición mas precisa de un agujero negro; sea  $(M, g_{ab})$  un espacio asintóticamente plano, definimos entonces a la región de agujero negro  $\mathcal{B}$  de ese espacio como

$$\mathcal{B} = M - I^-(\mathcal{I}^+), \quad (2.1)$$

donde  $\mathcal{I}^+$  denota el futuro nulo infinito e  $I^-$  el pasado cronológico<sup>1</sup>. La frontera del pasado de  $\mathcal{I}^+$  resulta ser el horizonte de sucesos  $\mathcal{H}$  del BH, es decir, el horizonte está generado por segmentos geodésicos nulos que no tienen ningún punto final futuro. Entonces, si la condición de energía débil se satisface<sup>2</sup>, los generadores del horizonte no pueden estar convergiendo, ya que si lo hicieran, se interceptarían en una distancia finita. Esto implica que el área de la sección transversal de  $\mathcal{H}$  nunca puede decrecer con el tiempo, por el contrario, siempre aumentará, como descubrió Hawking [12]. Lo cual recuerda al comportamiento de la entropía, que de acuerdo a la segunda ley de la termodinámica, nunca puede decrecer. Estas similitudes llevaron a Bekenstein a proponer, [13, 14] que un cierto múltiplo del área del horizonte de sucesos de un BH debería ser interpretada como su entropía, y formuló lo que se conoce como segunda ley generalizada, GSL por sus siglas en inglés, (Generalized Second Law): La suma

---

<sup>1</sup>Ver apéndice A.1

<sup>2</sup> $T_{ab}\nu^a\nu^b \geq 0$ , para cualquier vector  $\nu^a$  de género tiempo y  $T_{ab}$  el tensor de energía momento.

de la entropía del BH y la entropía de la materia ordinaria afuera del BH nunca disminuye.

Por su parte, Bardeen, Carter y Hawking trabajaron en la formulación de las leyes de la mecánica de los agujeros negros [15], dando una prueba general de que dichas leyes resultan ser un análogo matemático de las leyes cero y primera de la termodinámica, válidas para BH estacionarios. Para entender estas analogías es necesario hacer uso de algunos conceptos geométricos tales como campos de Killing estacionarios, estáticos, axial-simétricos, etcétera, para tales definiciones hemos dedicado el apéndice A.

Sea  $\mathcal{K}$  un horizonte de Killing con vector de Killing  $\xi^a$  dado por

$$\xi^a = t^a + \Omega\phi^a, \quad (2.2)$$

donde  $t^a$  es un campo de Killing estático,  $\Omega$  es la velocidad angular del BH evaluada en el horizonte y  $\phi^a$  es un campo de Killing asociado a la simetría axial. Se tiene que como  $\nabla^a(\xi^a\xi_b)$  es normal a  $\mathcal{K}$ , entonces debe existir una función  $\kappa$ , conocida como *gravedad superficial* en  $\mathcal{K}$ , tal que

$$\nabla^a(\xi^b\xi_b) = -2\kappa\xi^a. \quad (2.3)$$

Entonces la función  $\kappa$  debe ser constante a lo largo de cada geodésica nula que genera a  $\mathcal{K}$ , además, la gravedad superficial del BH se define solo en el equilibrio, es decir, para un BH estacionario y por lo tanto su horizonte de eventos es un horizonte de Killing. La relación de esto con la ley cero de la termodinámica fue formulada en dos versiones independientes, la primera la realizó Carter (“Black hole equilibrium states” en el libro [16]) y decía que la gravedad superficial  $\kappa$  debe ser constante sobre el horizonte de eventos  $\mathcal{H}$  de cualquier BH estático o estacionario-axialsimétrico. La segunda versión la dieron Bardeen, Carter y Hawking [15], y decían que si las ecuaciones de campo de Einstein se cumplen y además se impone la condición de energía dominante<sup>3</sup>, entonces  $\kappa$  es constante sobre cualquier horizonte de Killing.

---

<sup>3</sup>Además de cumplirse la condición de energía débil, para cada campo vectorial de tipo causal dirigido hacia el futuro  $u^a$ , el campo vectorial  $-T^a{}_b u^b$  debe ser un vector causal apuntando al futuro. Es decir, la masa-energía no puede ser observada moviéndose a una velocidad superior a la de la luz.

La analogía se completa con la primera ley de la mecánica de los agujeros negros. Esta relaciona el cambio de masa  $M$  de un BH con el cambio en el área del horizonte de eventos  $A$ , momento angular  $J$  y carga eléctrica  $Q$ .

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q. \quad (2.4)$$

Estos cambios son comparables con la primera ley de la termodinámica, que da el cambio en la energía de un sistema en términos del cambio en su entropía y trabajo externo realizado sobre el sistema.

En 1974 Hawking descubrió que por efectos cuánticos se crean partículas en las inmediaciones de un BH [17] y dichas partículas son radiadas por el BH al infinito con un espectro de radiación de cuerpo negro a temperatura

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2.5)$$

es decir,  $\kappa/2\pi$  es la temperatura física real de un BH, y no solo un análogo matemático. Su cálculo de la temperatura hizo posible encontrar la constante de proporcionalidad entre la entropía y el área de la sección transversal de un BH.

$$S = \frac{A}{4}, \quad (2.6)$$

Tenemos entonces que el rol de la energía  $E$  está dado por la masa  $M$  del BH, la entropía  $S$  por un cuarto del área del horizonte de eventos  $A$  del BH y la temperatura  $T$  por un múltiplo de la gravedad superficial  $\kappa$ . Donde hemos usado unidades naturales,  $G = c = \hbar = 1$ .

## 2.1 | Propiedades termodinámicas de soluciones AdS

La termodinámica de agujeros negros descrita hasta ahora fue formulada para fondos asintóticamente planos, sin embargo, las soluciones de agujero negro de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica  $\Lambda$  negativa presentan características interesantes. La investigación en torno a las propiedades termodinámicas de un espacio-tiempo anti-de Sitter (AdS) comenzó con el trabajo de Hawking y Page

[18], quienes encontraron transiciones de fase entre el BH de Schwarzschild-AdS y un espacio térmico AdS. Posteriormente se encontró que los BH cargados en un fondo AdS, también presentan transiciones de fase de primer orden, simulando las transiciones de fase de un fluido de Van der Waals [19-21]. Además de las transiciones de fase, existe también una correspondencia con el comportamiento crítico, que puede verse en los diagramas  $Q - \Phi$  (carga - potencial eléctrico) de los BH cargados en un fondo AdS y los diagramas  $P - V$  (presión - volumen) de un gas de Van der Waals.

El interés en la termodinámica de BH asintóticamente AdS aumentó con el surgimiento de la correspondencia AdS/CFT [22], en donde sistemas gravitacionales se pueden estudiar con una teoría de campos conforme, obteniendo resultados muy interesantes, como transiciones de fase reentrantes y puntos críticos, además que los BH pueden volverse térmicamente estables en un fondo AdS, como ha sido ampliamente estudiado en [23-27].

Considerar variaciones en la constante cosmológica permite entre otras cosas, tener una formulación correcta de la primera ley de la termodinámica de BH [28], consistente con la fórmula de Smarr [29], y se suele asociar con la presión termodinámica

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (2.7)$$

y su variable conjugada es entonces el volumen termodinámico  $V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{S,Q,\dots}$ , tal que el término  $VdP$  que se agrega a la primera ley tiene unidades de *entalpía*.

Veamos como se ven los conceptos que hemos mencionado y algunos otros en la solución de Reissner-Nordstrom-AdS.

## 2.2 | Agujero negro de Reissner-Nordstrom-AdS

La métrica que describe un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico de (3+1) dimensiones está dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.8)$$

La función métrica de la solución de Reissner-Nordstrom con constante cosmológica negativa (RN-AdS) está dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (2.9)$$

a  $l$  se le conoce como radio de AdS y está dado por  $\Lambda = -3/l^2$ . La ecuación (2.9) describe un BH de masa  $M$  y carga  $Q$  en un fondo con constante cosmológica  $\Lambda < 0$ . El potencial eléctrico  $\Phi$  está dado por

$$\Phi(r) = \frac{Q}{r_+}, \quad (2.10)$$

donde  $r_+$  es el horizonte de eventos exterior, es decir, es la raíz mas grande de la ecuación  $f(r_+) = 0$ . Existe además, el llamado BH extremo, tal que para una carga fija, la masa y radio extremos,  $M_e(Q)$ ,  $r_e(Q)$  del BH de RN-AdS están determinados por  $f(r_e(Q); M, Q) = \frac{df(r; M, Q)}{dr}|_{r_e} = 0$ , lo que nos da

$$M_e(Q) = \frac{\sqrt{6}l}{18} \left( 2 + \sqrt{1 + \frac{12Q^2}{l^2}} \right) \sqrt{\sqrt{1 + \frac{12Q^2}{l^2}} - 1}, \quad (2.11)$$

$$r_e(Q) = \frac{l}{\sqrt{6}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{12Q^2}{l^2}} - 1}. \quad (2.12)$$

Para valores de  $M$  mayores que la masa extrema (ecuación (2.11)), el BH de RN-AdS tiene un horizonte de eventos externo en  $r = r_+(M, Q)$  que se obtiene resolviendo  $f(r_+) = 0$ , de otra forma el horizonte de eventos desaparecería, dejando una singularidad desnuda, lo que violaría la conjetura de censura cósmica.

## 2.3 | Termodinámica del BH de RN-AdS

Si el horizonte de eventos existe, la temperatura  $T$  y la entropía  $S$  del BH están definidas como

$$\begin{aligned} T &= \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi r_+} \left( 1 + \frac{3r_+^2}{l^2} - \frac{Q^2}{r_+^2} \right) \\ S &= \pi r_+^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por su parte, la constante cosmológica es interpretada como la presión  $P$ , y su correspondiente variable conjugada es el volumen termodinámico  $V$ ,

$$P = \frac{3}{8\pi l^2}, \quad V = \frac{4}{3}\pi r_+^3. \quad (2.14)$$

Estas cantidades satisfacen la fórmula de Smarr [24, 29], en la que se da la masa (energía) del BH en términos de sus parámetros,

$$M = 2(TS - VP) + \Phi Q, \quad (2.15)$$

donde  $\Phi$  es el potencial eléctrico dado en la ecuación (2.10), de dicha fórmula se puede derivar la termodinámica del sistema. Por su parte, la primera ley de la termodinámica de BH tienen la forma

$$dM = TdS + \Phi dQ + VdP. \quad (2.16)$$

Tanto la fórmula de Smarr como la primera ley pueden obtenerse usando argumentos dimensionales que pueden consultarse en [28].

Para continuar con el estudio termodinámico, podemos elegir un ensamble tal que la carga  $Q$  del BH es constante al infinito, lo que implica trabajar en el **ensamble canónico**.

### 2.3.1 | Estabilidad termodinámica

Una vez que se tiene la temperatura del BH, se puede estudiar la estabilidad termodinámica de la solución, mediante el cálculo de la capacidad calorífica a carga constante  $C_Q = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_Q$ , que para la solución de RN-AdS es,

$$C_Q = -2\pi r_+^2 \frac{r_+^2 - Q^2 + \frac{3}{l^2} r_+^4}{r_+^2 - 3Q^2 - \frac{3}{l^2} r_+^4}. \quad (2.17)$$

Se sabe que si  $C_Q < 0$  el BH es inestable, mientras que  $C_Q > 0$  es señal de estabilidad termodinámica [18], por lo tanto el número de divergencias en la capacidad calorífica  $C_Q$  en función del radio del horizonte  $r_+$  indica el número de transiciones

de fase del BH [21, 30], lo que permite clasificarlos en *inversos*, *lentos* y *rápidos* [31], para el BH de RN-AdS, la clasificación anterior queda como sigue

- *Rápido*: Ninguna transición de fase y ocurre para  $Q^2 > \frac{l^2}{36}$ .
- *Inverso*: Una única transición de fase,  $Q^2 < 0$ .
- *Lento*: Dos transiciones de fase,  $0 < Q^2 < \frac{l^2}{36}$ .

El comportamiento de  $C_Q$  de RN-AdS (2.17) se ilustra en la figura 1, donde puede verse la clasificación recién mencionada.

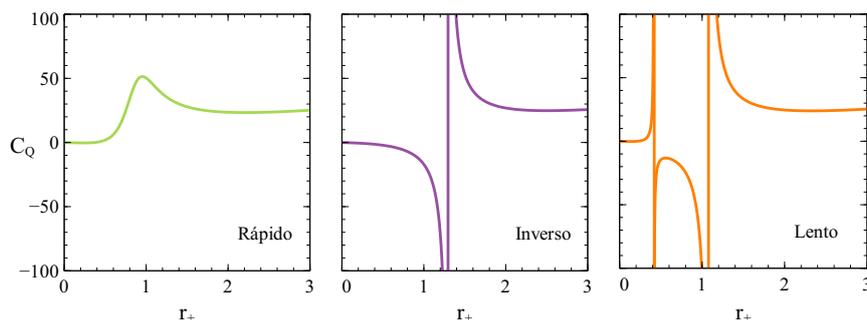


Figura 1: Capacidad calorífica para el BH de RN-AdS para  $l = 2$ . A la izquierda:  $Q^2 = 0.15$  no hay transiciones de fase; al centro: el BH se vuelve estable sí  $Q^2 < 0$  ( $Q^2 = -0.15$ ), por lo que no es físicamente posible; a la derecha:  $Q^2 = 0.05$  hay dos transiciones de fase.

Es importante mencionar que la condición de estabilidad depende del ensemble en el que se esté trabajando [32], por ejemplo, para el ensemble microcanónico se pide que la segunda derivada de la entropía respecto a la masa sea negativo, ( $\partial^2 S / \partial M^2 < 0$ ), mientras que para el ensemble gran canónico la condición viene con la energía libre de Gibbs  $G$ , se pide que las componentes de su matriz Hessiana respecto a la entropía y a la carga sea positivo definido.

Por ejemplo, un BH aislado en el ensemble microcanónico, puede ser estable, mientras que el mismo BH en el ensemble canónico, donde se permite el intercambio de energía, ya que está en un baño térmico, puede evaporarse y por lo tanto resulta ser inestable.

### 2.3.2 | Comportamiento crítico

La *ecuación de estado* se obtiene re-escribiendo la ecuación de la temperatura

$$(2.13) \quad P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4}, \quad (2.18)$$

donde hemos usado la ecuación de la presión (2.14) y hemos definido el *volumen específico* como  $v \equiv 2l_P^2 r_+$ , ( $l_P = \frac{\hbar G_N}{c^3}$  es la longitud de Planck, y en unidades naturales vale 1) con lo que el volumen termodinámico en términos de  $v$  queda  $V = \pi v^3/6$ . Los puntos críticos corresponden a los puntos de inflexión de  $P(v)$ , es decir, se obtienen resolviendo

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right) = 0, \quad (2.19)$$

con lo que el volumen, temperatura y la presión críticos quedan

$$v_c = 2\sqrt{6}Q, \quad T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}. \quad (2.20)$$

Con estas cantidades se puede calcular la razón crítica o proporción universal  $\rho_c$

$$\rho_c = \frac{P_c v_c}{T_c} = \frac{3}{8}, \quad (2.21)$$

que coincide con la del gas de Van der Waals y es independiente de la carga. En la figura (2) se muestran los diagramas  $P - v$  para diferentes valores de la temperatura. Se observa un cambio de fase (pequeño-grande) para  $T < T_c$ , mientras que el BH presenta una sola fase para  $T > T_c$ .

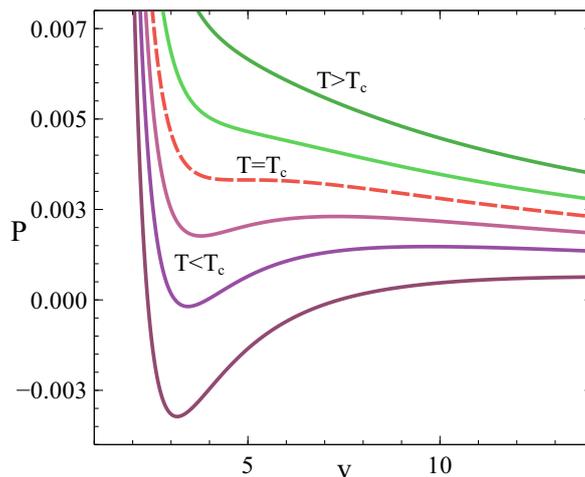


Figura 2: Diagramas  $P - v$  para el BH de RN-AdS para una carga fija de  $Q = 1$ . La temperatura en las isotermas incrementa de abajo hacia arriba. Las dos curvas superiores ( $T > T_c$ ) son análogas a las curvas de un gas ideal en una sola fase, la línea punteada representa la isoterma crítica  $T = T_c$ , y las curvas por debajo de esa con  $T < T_c$  indican una transición de fase.

Definamos ahora las llamadas *variables reducidas* como sigue

$$p = \frac{P}{P_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad \nu = \frac{v}{v_c}, \quad (2.22)$$

con lo cual la ecuación de estado (2.18) se convierte en la *ecuación de estados correspondientes* del fluido de Van del Waals

$$8\tau = 3\nu \left( p + \frac{2}{\nu^2} \right) - \frac{1}{\nu^3}. \quad (2.23)$$

A continuación, desglosaremos el estudio de las transiciones de fase del BH de RN-AdS.

### 2.3.3 | Energía libre de Gibbs y cambios de fases

El potencial termodinámico asociado con la acción Euclidea, para valores fijos de la carga, temperatura y presión es la *energía libre de Gibbs*. La acción  $I$  del sistema, está compuesta por los siguientes términos

$$I = I_{EM} + I_s + I_c, \quad (2.24)$$

El primer término corresponde a la acción de Einstein-Maxwell,  $I_s$  es la acción de Gibbons-Hawking más un término necesario para imponer la condición de frontera de carga fija, finalmente  $I_c$  es necesario para contra restar las divergencias de la teoría [33]. Esta acción fue calculada por primera vez en [19], dando como resultado la energía libre de Gibbs

$$G(T, P) = \frac{v}{8} + \frac{3Q^2}{2v} - \frac{\pi v^3 P}{12}, \quad (2.25)$$

donde  $v$  debe entenderse como una función de la presión y la temperatura,  $v = v(P, T)$ . Notemos que la ecuación anterior satisface la ecuación termodinámica conocida para la energía libre de Gibbs  $G = M - TS$ .

En la figura (3) se muestra el comportamiento de la energía libre de Gibbs, tomando como referencia la presión crítica  $P_c$ , se observa la característica cola de golondrina para  $P < P_c$ , lo que indica una transición de fase de primer orden en la

que el BH cambia de tamaño, pasando de ser un BH pequeño a uno grande, a la fase que une estas dos etapas se le llama BH intermedio. La notación de BH pequeño (grande) se refiere al signo negativo (positivo) de la capacidad calorífica, es decir, es una relación ente el radio del horizonte con la carga y el valor del radio de AdS.

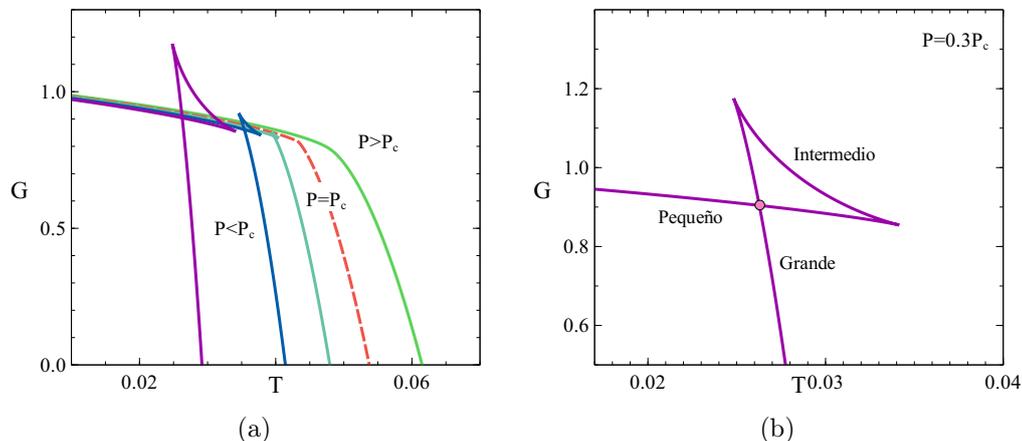


Figura 3: Energía libre de Gibbs para el BH de RN-AdS como función de la temperatura  $T$  y para una carga fija  $Q = 1$ . (a) La línea punteada es la isóbara correspondiente a  $P = P_c$ . Se observa una transición de fase de primer orden para  $P < P_c$ . Los valores de la presión son, de izquierda a derecha,  $P = 0.3P_c, 0.6P_c, 0.8P_c, P_c, 1.2P_c$ . (b) Se muestra la transición de fase de pequeño a grande conforme incrementa la temperatura, el punto rosa representa la coexistencia de ambas fases que comparten el mismo valor de la energía libre de Gibbs.

La transición de fase, cuando el BH va de un estado  $A$  a un estado  $B$  ocurre para el mismo valor de la energía libre de Gibbs y la temperatura, es decir  $G_A = G_B$  y  $T_A = T_B$ , lo que nos permite obtener la curva de coexistencia  $P - T$  mostrada en la figura 4, donde cada punto de la curva corresponde a dos fases diferentes [34]. Para obtenerla trabajaremos con las variables reducidas dadas en (2.22), que se obtienen dividiendo la variable a considerar entre su correspondiente valor en el punto crítico, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{G}{G_c} = \frac{3 + 6\nu^2 - p\nu^4}{8\nu^2} \\
 \tau &= \frac{T}{T_c} = \frac{3p\nu^4 + 6\nu^2 - 1}{8\nu^3}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Pensemos ahora en dos fases arbitrarias en la curva de coexistencia, caracterizadas

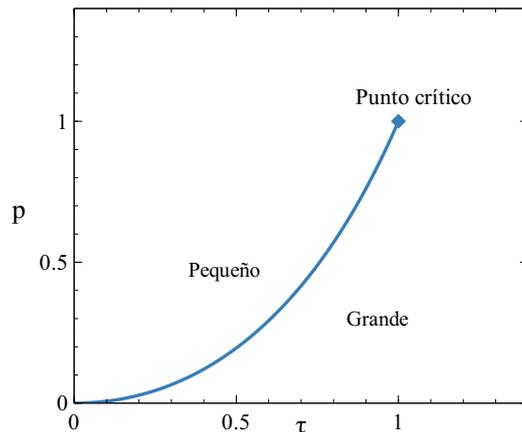


Figura 4: Curva de coexistencia entre BH pequeño y BH grande para el BH de RN-AdS en las variables reducidas

por  $(\nu_1, p, \tau, g_1)$  y  $(\nu_2, p, \tau, g_2)$ , de acuerdo a las ecuaciones anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{3 + 6\nu_1^2 - p\nu_1^4}{8\nu_1^2} = \frac{3 + 6\nu_2^2 - p\nu_2^4}{8\nu_2^2} = g_2 \\ \tau &= \frac{3p\nu_1^4 + 6\nu_1^2 - 1}{8\nu_1^3} = \frac{3p\nu_2^4 + 6\nu_2^2 - 1}{8\nu_2^3}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones se obtiene la ecuación de coexistencia, (ver [34] [35])

$$p = \frac{2^{4/3}(-\tau + \sqrt{-2 + \tau^2})^{2/3}}{[2^{1/3} + (-\tau + \sqrt{-2 + \tau^2})^{2/3}]^2}. \quad (2.28)$$

La curva de coexistencia también puede obtenerse mediante la ley de áreas iguales de Maxwell, o bien, utilizando las ecuaciones de Clausius– Clapeyron [35].

### 2.3.4 | Exponentes críticos

Para calcular los exponentes críticos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  vamos a estudiar el comportamiento de las cantidades físicas cerca del punto crítico haciendo una expansión en Taylor de la ley de estados correspondientes (2.23) alrededor de  $\tau = 1$  y  $\nu = 1$

$$p(t, w) = 1 + \frac{8}{3}t - \frac{8}{9}wt - \frac{4}{81}w^3 + \mathcal{O}(tw^2, w^4), \quad (2.29)$$

donde hemos definido las variables

$$t \equiv \tau - 1, \quad w \equiv \nu - 1. \quad (2.30)$$

Diferenciando la ecuación (2.29) para  $t$  fijo se tiene  $dp = \frac{dP}{P_c}$ , entonces

$$dP = -\frac{4}{27}P_c(6t + w^2)dw. \quad (2.31)$$

Es bien sabido que cuando dos fases coexisten, la *ley de áreas iguales de Maxwell* se satisface, es decir, para una temperatura constante, las áreas por debajo y por arriba de esa temperatura fija son iguales; lo cual puede observarse en los diagramas  $P - v$  (o en los diagramas  $T-S$ ). Con lo cual  $\oint v dP = 0$ , es decir

$$\begin{aligned} 0 &= v_c P_c \int_{w_p}^{w_g} w \left( \frac{8}{3}t + 4w^2 \right) dw \\ \Rightarrow w_p &= -w_g = \sqrt{-2t}, \end{aligned}$$

siendo  $w_p$  y  $w_g$  el 'volumen' del BH pequeño y grande respectivamente.

Solo resta leer los valores de los exponentes críticos  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  de las expresiones previas.

- $\alpha \rightarrow$  Está relacionada con el calor específico a volumen constante  $C_v$ .

$$C_v = T \left( \frac{dS}{dT} \right)_v \propto |t|^{-\alpha}. \quad (2.32)$$

Como la entropía  $S$  no depende de  $T$ , se sigue que

$$C_v = 0 \rightarrow \alpha = 0.$$

- $\beta \rightarrow$  Relacionado con el parámetro de orden  $\eta$ , en concreto con el cambio de volumen en la transición de fase para una isoterma dada,

$$\begin{aligned}\eta = v_p - v_g = v_c(w_p - w_g) &\propto |t|^\beta. \\ w_p &\propto |t|^{1/2} \rightarrow \beta = 1/2.\end{aligned}\quad (2.33)$$

- $\gamma \rightarrow$  Regula el comportamiento de la compresibilidad isotérmica  $\kappa_T$

$$\begin{aligned}\kappa_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T &= \frac{1}{P_c(w+1)} \left( \frac{\partial p}{\partial w} \right)^{-1} \propto |t|^{-\gamma} \\ \kappa_T &\approx \frac{9}{8P_c t} \propto |t|^{-1} \rightarrow \gamma = 1.\end{aligned}\quad (2.34)$$

- $\delta \rightarrow$  En una isoterma crítica,  $T = T_c$  o equivalentemente  $t = 0$ .

$$\begin{aligned}|P - P_c| &\propto |v - v_c|^\delta \\ |p - 1| &\propto |w|^\delta \\ p - 1 &= -\frac{4}{81}w^3 \rightarrow \delta = 3.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Entonces, los exponentes críticos que se obtienen son  $\alpha = 0, \beta = 1/2, \gamma = 1, \delta = 3$  [23], que son los correspondientes para el gas de Van der Waals.

## 3 | Electrodinámica no lineal

La electrodinámica no lineal (NLED) surge con la intención de remover la singularidad del campo eléctrico que produce una partícula puntual en el origen. Además que algunos efectos producidos por campos electromagnéticos muy intensos, como la dispersión de luz no pueden ser explicados con la electrodinámica de Maxwell.

Uno de los trabajos pioneros en NLED fue desarrollado por Gustav Mie en 1912 [4], quien construyó una electrodinámica libre de singularidades, a costa de perder invariancia respecto a transformaciones de norma.

La NLED se deriva de una función Lagrangiana que depende de los invariantes electromagnéticos. La elección del Lagrangiano puede hacerse de muchas formas, pero por su relevancia podemos destacar principalmente dos.

- La teoría de *Born-Infeld* (BI) [5]: Propuesta entre 1932-35 con el propósito de atacar el problema de la singularidad del campo eléctrico en el origen.
- La teoría de *Euler-Heisenberg* (EH) [8]: Formulada en 1936, cuya motivación proviene principalmente de la teoría cuántica electromagnética.

Cabe mencionar que ambas formulaciones admiten una solución de BH cuando se acoplan con relatividad general.

En los 70's, Plebanski [7] hizo una generalización de las teorías electromagnéticas no lineales, utilizando funciones Lagrangianas mas generales, que contiene a la teoría de BI y en el límite adecuado se recupera la electrodinámica lineal de Maxwell.

Recientemente la investigación de la NLED ha cobrado un nuevo impulso, en gran parte por los descubrimientos obtenidos en la teoría de cuerdas, pues resulta que las teorías tipo BI surgen naturalmente en el límite de bajas energías de la teoría heterótica de cuerdas [36-38].

Por su parte, los efectos de la NLED de la solución de EH que surgen en los campos críticos o de Schwinger, se están probando actualmente de manera experimental [39], dichos campos críticos son del orden de  $10^{18}$  V/m para el campo eléctrico y de  $10^9$  Tesla para el campo magnético.

En este capítulo presentaremos el formalismo general de la NLED acoplada con gravedad, posteriormente a manera de ejemplo haremos una revisión del BH de BI y de EH.

### 3.1 | Formalismo general

La acción de relatividad general con constante cosmológica  $\Lambda$  acoplada con NLED, [6, 7] está dada por

$$S[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \frac{1}{4\pi} \int_{M^4} d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4}(R - 2\Lambda) - \mathcal{L}(F, G) \right], \quad (3.1)$$

donde  $g$  es el determinante del tensor métrico,  $R$  es el escalar de Ricci, y  $\mathcal{L}(F, G)$  es la función Lagrangiana que depende de los invariantes electromagnéticos  $F$  y  $G$

$$F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad G = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \check{F}^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor de campo electromagnético y  $\check{F}^{\mu\nu}$  su dual, dado por  $\check{F}^{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\sigma\rho} / (2\sqrt{-g})$ . El tensor completamente antisimétrico  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ , satisface  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = -4!$ . La función  $\mathcal{L}$  debe cumplir la siguiente condición de paridad

$$\mathcal{L}(F, G) = \mathcal{L}(F, -G). \quad (3.3)$$

Variando la acción (3.1) obtenemos las ecuaciones del campo electromagnético y las ecuaciones de Einstein

$$\nabla_\mu (\mathcal{L}_F F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_G \check{F}^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.4)$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi E_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

$$4\pi E_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L} - \mathcal{L}_F F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \mathcal{L}_G \check{F}_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma, \quad (3.6)$$

donde  $E_{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético de energía-momento.

Con el fin de expresar las ecuaciones de movimiento en forma canónica es conveniente definir un tensor antisimétrico  $P^{\mu\nu}$  independiente de la métrica

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu} &= -F^{\mu\nu} \mathcal{L}_F - \check{F}^{\mu\nu} \mathcal{L}_G, \\ \mathcal{L}_F &= \frac{d\mathcal{L}}{dF}, \quad \mathcal{L}_G = \frac{d\mathcal{L}}{dG}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Estas ecuaciones son las relaciones constitutivas entre la inducción eléctrica y campo magnético con las intensidades de campo eléctrico y magnético en la NLED.

La función Hamiltoniana, en este contexto llamada *función de estructura* puede obtenerse mediante una transformación de Legendre,

$$\mathcal{H}(P, \check{Q}) = -\frac{1}{2} P^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \mathcal{L}, \quad (3.8)$$

donde  $P$  y  $\check{Q}$  son los invariantes del tensor  $P^{\mu\nu}$ , definidos como sigue

$$P = -\frac{1}{4} P^{\mu\nu} P_{\mu\nu}, \quad \check{Q} = -\frac{1}{4} \check{P}^{\mu\nu} P_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

con  $\check{P}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^{\sigma\rho}$ . De modo que la acción (3.1) en su forma Hamiltoniana queda como

$$S[g_{\mu\nu}, A_\mu, P^{\mu\nu}] = \frac{1}{4\pi} \int_{M^4} d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} (R - 2\Lambda) - \left( \frac{1}{2} P^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \mathcal{H}(P, \check{Q}) \right) \right]. \quad (3.10)$$

Variando esta nueva acción, obtenemos las ecuaciones de movimiento, respecto a  $P^{\mu\nu}$  se obtiene

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= 2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P^{\mu\nu}} = P_{\mu\nu} \mathcal{H}_P + \check{P}_{\mu\nu} \mathcal{H}_{\check{Q}}, \\ \mathcal{H}_P &= \frac{d\mathcal{H}}{dP}, \quad \mathcal{H}_{\check{Q}} = \frac{d\mathcal{H}}{d\check{Q}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando (3.7) y (3.11) respectivamente en la ecuación (3.8) se obtienen las ecuaciones que permiten pasar del formalismo Hamiltoniano  $\mathcal{H}(P, \check{Q})$  al Lagrangiano

$\mathcal{L}(F, G)$ , es decir

$$\mathcal{H} = 2F\mathcal{L}_F + 2G\mathcal{L}_G - \mathcal{L}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{L} = 2P\mathcal{H}_P + 2\check{Q}\mathcal{H}_{\check{Q}} - \mathcal{H}. \quad (3.13)$$

De la variación de (3.10) respecto al potencial vector  $A_\mu$  y al tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  se obtienen las ecuaciones del campo electromagnético y las ecuaciones de Einstein

$$\nabla_\mu P^{\mu\nu} = 0, \quad (3.14)$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi E_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

$$4\pi E_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(2P\mathcal{H}_P + 2\check{Q}\mathcal{H}_{\check{Q}} - \mathcal{H}) - \mathcal{H}_P P_{\mu\alpha} P_\nu^\alpha - \mathcal{H}_{\check{Q}} P_{\mu\alpha} \check{P}_\nu^\alpha. \quad (3.16)$$

La electrodinámica lineal de Maxwell se recupera cuando

$$P^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{H}(P, \check{Q}) = P. \quad (3.17)$$

La función de estructura puede desarrollarse en serie de potencias para  $P$  y  $\check{Q}$  pequeños

$$\mathcal{H}(P, \check{Q}) \approx P + \mathcal{O}(P^2, \check{Q}^2), \quad (3.18)$$

de tal forma que para campos electromagnéticos débiles se recupera la teoría de Maxwell.

En las siguientes secciones se presentan las soluciones de BH de Born-Infeld y de Euler-Heisenberg.

## 3.2 | Agujero negro de Born-Infeld

Entre 1932 y 1935, Born e Infeld construyeron su teoría no lineal sin singularidades del campo electromagnético en cuyo límite se recupera la electrodinámica lineal de Maxwell. El Lagrangiano de la teoría [5] está dado por

$$\mathcal{L}_{BI} = b^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2F}{b^2} + \frac{G^2}{b^4}} \right), \quad (3.19)$$

con los invariantes electromagnéticos

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2), \\ G &= \frac{1}{4}\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{B}}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $b$  es el parámetro característico de la teoría y está ligado al valor máximo del campo eléctrico  $\mathcal{E}$ , ( $b \approx 10^{18}$  Volt/m).

Mientras que la función de estructura tiene la forma [40]

$$\mathcal{H}_{BI} = -b^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2P}{b^2} + \frac{\check{Q}^2}{b^4}} \right), \quad (3.21)$$

Para un espacio-tiempo estático y con simetría esférica, la métrica que es solución a las ecuaciones de movimiento (3.14) y (3.15) está dada por

$$ds^2 = \psi(r)dt^2 - \psi^{-1}(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.22)$$

$$\psi(r) = 1 + \frac{2}{3}b^2r^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2r^4}} \right) - \frac{r^2\Lambda}{3} - \frac{2}{r} \left( M - \frac{2Q^2}{3}I(r) \right), \quad (3.23)$$

$$I(r) = \int_r^\infty \frac{dz}{\sqrt{z^4 + Q^2/b^2}}. \quad (3.24)$$

Siendo  $M$  el parámetro de masa y  $Q$  la carga electromagnética  $Q^2 = Q_e^2 + Q_m^2$ , el subíndice  $Q_{e(m)}$  indica carga eléctrica (magnética).

Por simplicidad, vamos a considerar el caso puramente eléctrico, es decir  $\check{Q} = G = 0$ , por lo tanto, las ecuaciones de movimiento se satisfacen si las únicas componentes diferentes de cero de  $F_{\mu\nu}$  y  $P_{\mu\nu}$  son

$$F_{rt} = \mathcal{E}(r) = \frac{Q}{\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}}, \quad P_{rt} = \frac{Q}{r^2}. \quad (3.25)$$

La relación entre  $F_{\mu\nu}$  y  $P_{\mu\nu}$  se obtiene a través de las ecuaciones constitutivas (3.7) y (3.11). Notemos que  $F_{rt}$  correspondiente con la magnitud del campo eléctrico  $\mathcal{E}$ , es finito en el origen y corresponde a la magnitud de  $b$ , mientras que  $P_{rt}$  es singular en  $r = 0$ . En la figura (5) se muestra como la magnitud del campo eléctrico tiende

al campo eléctrico de RN-AdS conforme  $b$  crece.

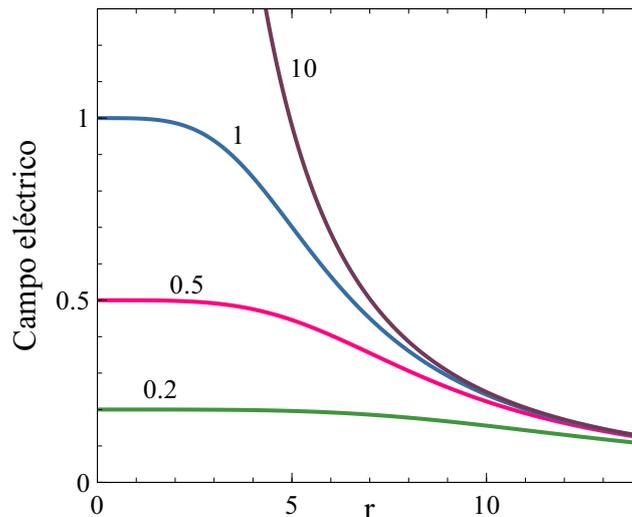


Figura 5: Campo eléctrico de BI para  $Q = 1$ . Se han tomado diferentes valores de  $b$ , los cuales se indican sobre las curvas.

El potencial eléctrico está dado por

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= \int_r^\infty P_{rt} \mathcal{H}_P(P, 0) dr' = QI(r) \\ &= \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{b}{Q}} \mathcal{F} \left[ \arccos \left( \frac{r^2 - Q/b}{r^2 + Q/b} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right].\end{aligned}\quad (3.26)$$

donde  $\mathcal{F}$  es una función elíptica de segundo tipo. La métrica de BI descrita en (3.22) tiende asintóticamente a la solución de Reissner-Nordstrom con constante cosmológica. Así mismo, si el parámetro de BI tiende a infinito  $b \rightarrow \infty$ , se recupera la electrodinámica lineal de Maxwell, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow \infty} I(r) &= \int_r^\infty \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{r} \\ \Rightarrow \psi &= \psi^{RN} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Claramente, si además  $Q = 0$  se recupera la solución de Schwarzschild con constante cosmológica.

Los valores en los que la función métrica  $\psi$  de la ecuación (3.23) se hace cero pueden determinarse numéricamente. En la figura (6) se muestra el comportamiento de la función para diferentes valores del parámetro de la teoría  $b$ .

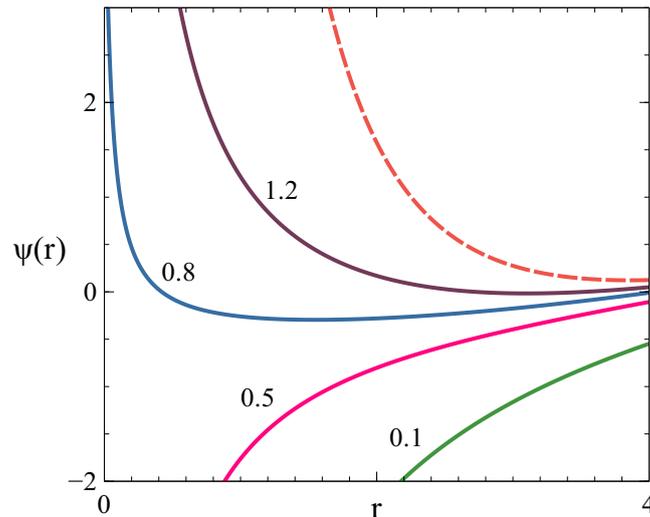


Figura 6: Función métrica de la solución de BI-AdS para los diferentes valores de  $b$  que se muestran en las curvas, notemos que conforme  $b$  crece, las curvas tienden a la solución de RN representada en líneas punteadas. Se han tomado valores fijos de  $M = 1$ ,  $Q = 0.9$  y  $\Lambda = -1$ .

En la siguiente sección presentaremos una revisión de la teoría de Euler-Heisenberg (EH) acoplada con gravedad.

### 3.3 | Agujero negro de de Euler - Heisenberg

Este Lagrangiano fue calculado por Euler y Heisenberg en 1936 [8] y se deriva directamente de la aproximación a un lazo en electrodinámica cuántica.

La acción está dada por (3.1), y la densidad Lagrangiana de Euler-Heisenberg [8] es

$$\mathcal{L}_{EH}(F, G) = -F + \frac{a}{2}F^2 + \frac{b}{2}G^2, \quad (3.28)$$

donde  $a = \frac{8\alpha^2}{45m^4}$  es uno de los parámetros de Euler-Heisenberg,  $\alpha$  es la constante de estructura fina y  $m$  es la masa del electrón, el otro parámetro de la teoría es  $b$ , dado en términos de  $a$  como  $b = 7a/4$ . La electrodinámica de Maxwell  $\mathcal{L}(F) = -F$ , se recupera cuando  $a = 0$ .

El tensor  $P_{\mu\nu}$  definido en (3.7) para la teoría de Euler-Heisenberg toma la forma

$$P_{\mu\nu} = (1 - aF)F_{\mu\nu} - \check{F}_{\mu\nu} \frac{7a}{4}G. \quad (3.29)$$

La función de estructura  $\mathcal{H}$  se obtiene de la ecuación (3.8) despreciando términos

de segundo orden en  $a$  [41], obteniendo

$$\mathcal{H}_{EH}(P, \check{Q}) = P - \frac{a}{2}P^2 - \frac{7a}{8}\check{Q}^2. \quad (3.30)$$

Las ecuaciones de campo se resuelven detalladamente en [6], donde se encuentra que el tensor de energía-momento electromagnético (3.16) está dado por

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[ (1 - aP)P_{\mu}^{\beta}P_{\nu\beta} + g_{\mu\nu} \left( P - \frac{3}{2}aP^2 - \frac{7a}{8}\check{Q}^2 \right) \right]. \quad (3.31)$$

La solución de las ecuaciones de movimiento para el caso estático con simetría esférica y con constante cosmológica, puede escribirse de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.32)$$

donde  $f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}$ .

Restringiendo la solución al caso cargado eléctricamente, con carga  $Q$ , la simetría del espacio tiempo admite las componentes

$$P_{\mu\nu} = \frac{Q}{r^2} (\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^1 - \delta_{\mu}^1\delta_{\nu}^0); \quad (3.33)$$

y los invariantes electromagnéticos adquieren la forma

$$P = \frac{Q^2}{2r^4}, \quad \check{Q} = 0. \quad (3.34)$$

Usándolos en la componente (0,0) de las ecuaciones de movimiento (3.14) y (3.15), encontramos

$$\frac{dm}{dr} = \frac{Q^2}{2r^2} - \frac{aQ^4}{8r^6} + \frac{\Lambda r^2}{2}. \quad (3.35)$$

Entonces, la función métrica para el caso eléctrico es

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{aQ^4}{20r^6}, \quad (3.36)$$

donde  $M$  es la masa del BH,  $Q$  su carga eléctrica,  $a$  es el parámetro de EH y  $\Lambda$  es la constante cosmológica.

El caso de Reissner-Nordstrom con constante cosmológica se recupera cuando  $a = 0$ . Para el caso  $\Lambda = 0$  se recupera el agujero negro de EH eléctricamente cargado, caracterizado por los parámetros  $(M, Q, a)$ , [42].

En la figura [7] se muestra el comportamiento de  $f(r)$  anti-de Sitter para diferentes valores de  $a$  y  $\Lambda < 0$ ;  $f(r)$  de Sitter se ilustra en la figura [8], en ambos casos se observa un comportamiento tipo Schwarzschild, contrario al BH de BI, cuyo comportamiento es de tipo Reissner-Nordstrom con la carga apantallada.

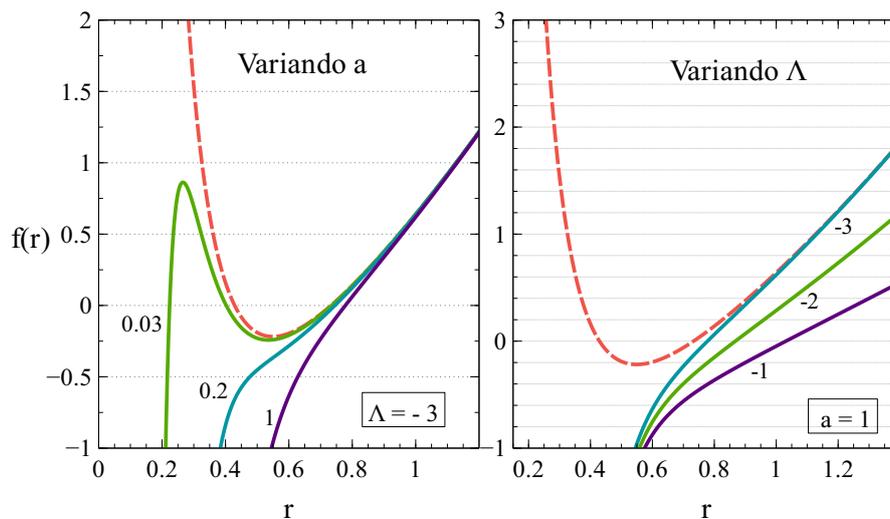


Figura 7: Función métrica  $f(r)$  AdS para el agujero negro EH- $\Lambda$ , para valores fijos de la masa  $M = 1$  y la carga  $Q = 0.8$ . A la derecha se toman diferentes valores de  $\Lambda$ , mientras que a la izquierda se grafican para diferentes valores de  $a$ , mostrados sobre las curvas. La línea punteada representa la solución de RN-AdS.

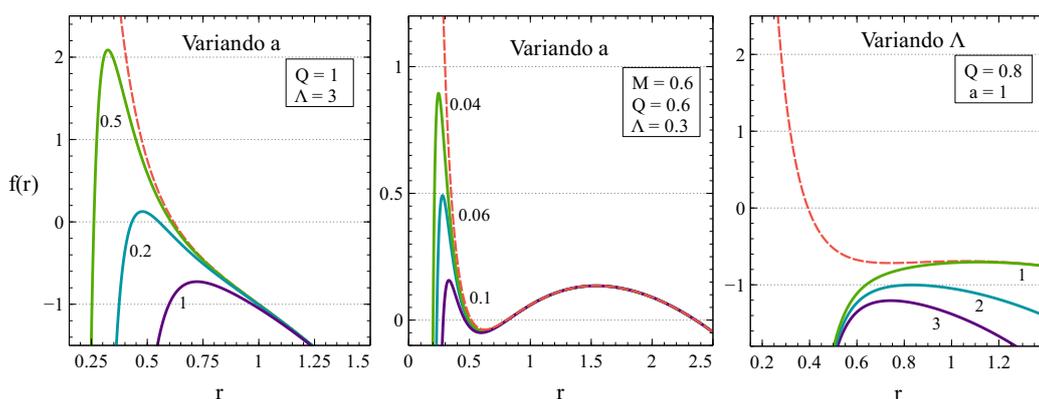


Figura 8: Función métrica  $f(r)$  dS para el agujero negro EH- $\Lambda$ , variando los parámetros  $a$  y  $\Lambda$  como se indica en las gráficas; la masa para las gráficas de los extremos se fijó a 1.

La ecuación para encontrar los horizontes de eventos  $f(r_+) = 0$  es un polinomio de grado ocho

$$\frac{\Lambda}{3}r^8 - r^6 - Q^2r^4 + 2Mr^5 + \frac{Q^4a}{20} = 0, \quad (3.37)$$

por lo que es conveniente obtener la solución numéricamente.

El potencial eléctrico correspondiente al agujero negro de EH-AdS, se calcula haciendo uso de las ecuaciones (3.30) y (3.33)

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \int_r^\infty dr \frac{Q}{r^2} \left(1 - \frac{aQ^2}{2r^4}\right) \\ \Phi(r) &= \frac{Q}{r} \left(1 - \frac{aQ^2}{10r^4}\right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

y en consecuencia, el campo eléctrico tiene la forma

$$\mathcal{E}(r) = \frac{Q}{r^2} \left(1 - \frac{aQ^2}{2r^4}\right), \quad (3.39)$$

donde puede verse una especie de apantallamiento de carga, sin embargo la divergencia en  $r = 0$  es mucho mas fuerte y de signo opuesto al correspondiente para la solución de RN- $\Lambda$ ; dicho comportamiento del campo eléctrico puede verse en la figura (9) para diferentes valores del parámetro  $a$ . La electrodinámica de Maxwell se recupera si  $a = 0$ .

El campo electromagnético del BH de EH diverge a  $-\infty$ , y notemos que hay algunos valores de  $r$  en los que el campo se anula.

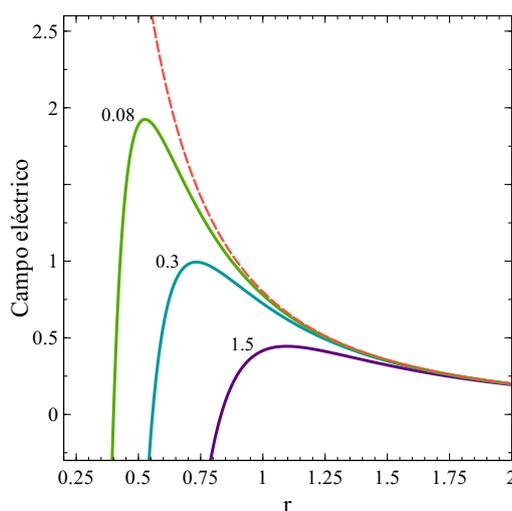


Figura 9: Campo eléctrico para el agujero negro de EH-AdS para una carga fija de  $Q = 0.8$ , y para diferentes valores de  $a$  mostrados sobre las curvas. La línea punteada representa el campo eléctrico para el BH de RN.

En el siguiente capítulo estudiaremos las ecuaciones geodésicas y el potencial efectivo del BH de EH, así como sus propiedades termodinámicas.

# 4 | Geodésicas y termodinámica del BH de Euler-Heisenberg

En el capítulo anterior describimos que para un espacio tiempo estático con simetría esférica, la métrica puede escribirse de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

donde la función métrica que es solución de las ecuaciones de campo de la electrodinámica de EH acoplada con gravedad  $f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}$  para el caso eléctrico es

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{aQ^4}{20r^6}, \quad (4.2)$$

donde  $M$  es la masa del BH,  $Q$  su carga eléctrica,  $a$  es el parámetro de EH y  $\Lambda$  es la constante cosmológica.

A continuación presentamos un análisis del potencial efectivo y su influencia en partículas de prueba, para hacer una comparación con el caso  $\Lambda = 0$ .

Cabe mencionar que al BH de EH se le incorporó la constante cosmológica con lo cual se procedió al estudio de la termodinámica en el espacio fase donde la constante cosmológica está relacionada con la presión. Los resultados presentados en este capítulo se encuentran publicados en [\[10\]](#).

## 4.1 | Ecuaciones geodésicas y potencial efectivo

En un espacio tiempo estático y con simetría esférica como lo es la métrica [\(3.32\)](#), la energía  $E$  y el momento angular  $L_z$  de una partícula de prueba de masa  $m$  y

momento  $P^i = m \frac{dx^i}{d\lambda}$ , siendo  $x^i = t, r, \phi$  las coordenadas del espacio y  $\lambda$  el parámetro afín, son cantidades conservadas que podemos calcular como sigue

$$\begin{aligned} E &= -P_t = f(r)m\dot{t}, \\ L_z &= P_\phi = r^2 \sin^2 \theta m \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

el punto representa derivada respecto al parámetro afín  $\lambda$  y la función  $f(r)$  está definida en la ecuación (4.2).

Las ecuaciones geodésicas son entonces

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{E}{f(r)}, \\ \dot{\phi} &= \frac{P_\phi}{r^2 \sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde de ahora en adelante,  $E$  y  $P_\phi$  son la energía y el momento angular por unidad de masa de la partícula de prueba.

Si nos restringimos a estudiar el movimiento en el plano ecuatorial,  $\theta = \pi/2$  y usando las ecuaciones (4.4) obtenemos la ecuación radial

$$\dot{r}^2 = E^2 - f(r) \left( \frac{P_\phi^2}{r^2} - \omega \right). \quad (4.5)$$

La constante  $\omega$  es determinada por el producto escalar  $g^{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = \omega$ , y puede valer  $\{-1, 0, 1\}$ , correspondiendo a geodésicas temporales, nulas o tipo espacio respectivamente. De la ecuación anterior podemos leer el potencial efectivo, ya que  $\dot{r}^2 = E^2 - V_{\text{ef}}^2$ , con lo cual

$$V_{\text{ef}}^2 = f(r) \left( \frac{P_\phi^2}{r^2} - \omega \right). \quad (4.6)$$

El comportamiento de  $V_{\text{ef}}$  se muestra en la figura 10, las líneas sólidas son para partículas con masa, ( $\omega = -1$ ) y las líneas punteadas son para fotones. Se observa que conforme  $r$  disminuye,  $V_{\text{ef}} \rightarrow -\infty$ , contrario al caso de RN-AdS, que es la línea en guiones de la figura 10.

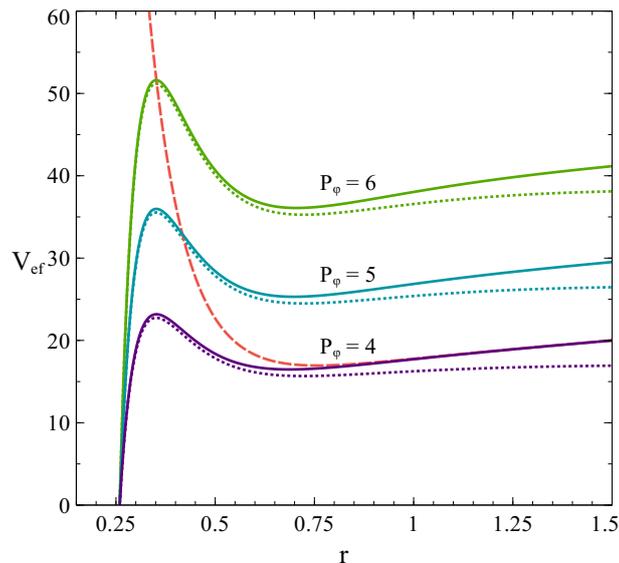


Figura 10: Potencial efectivo para valores fijos  $M = 1$ ,  $Q = 1$ ,  $a = 0.3$  y  $\Lambda = -3$  y variando los valores de  $P_\phi$  para el BH de EH-AdS. Las líneas punteadas corresponden a partículas sin masa ( $\omega = 0$ ) y las sólidas a partículas masivas ( $\omega = -1$ ). La línea en guiones es el potencial efectivo para el BH de RN-AdS.

Notemos además que tanto para partículas sin masa y con masa, se tienen órbitas circulares estables en el mínimo de  $V_{\text{ef}}$  y órbitas circulares inestables en el máximo del potencial  $V_{\text{ef}}$ . En ausencia de constante cosmológica no hay órbitas estables [42, 43].

## 4.2 | Termodinámica del agujero negro de EH-AdS

En esta sección estudiaremos las propiedades termodinámicas vistas en el capítulo 2 para el BH de EH en un espacio-tiempo AdS, es decir, de ahora en adelante  $\Lambda < 0$ , contrastando los resultados con su análogo lineal, el agujero negro de Reissner-Nordstrom AdS, descrito en la sección 2.3. Comenzamos por corroborar que la primera ley de la termodinámica de agujeros negros y la fórmula de Smarr son consistentes entre sí. También estudiaremos el comportamiento crítico de la solución así como los cambios de fase, que como veremos, se asemejan a los del fluido de Van der Waals.

Las cantidades termodinámicas que caracterizan al agujero negro de EH son la temperatura  $T$ , la presión  $P$ , el volumen  $V$  y la entropía  $S$  dados por

$$T = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi r_+} \left( 1 - \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{aQ^4}{4r_+^6} - \Lambda r_+^2 \right). \quad (4.7)$$

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad V = \frac{4}{3}\pi r_+^3, \quad S = \pi r_+^2. \quad (4.8)$$

donde  $r_+(M, Q, a, \Lambda)$  es el horizonte exterior, es decir  $f(r_+) = 0$  y la constante cosmológica  $\Lambda$  está directamente relacionada con la presión termodinámica.

### 4.2.1 | Primera ley de la termodinámica

Con el fin de obtener la forma que toma la fórmula de Smarr para el agujero negro de EH vamos a hacer un análisis de unidades utilizando el teorema de Euler, que nos dice que si una función  $f(x, y)$  cumple que  $f(\alpha^p x, \alpha^q y) = \alpha^r f(x, y)$ , entonces,

$$r f(x, y) = px \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + qy \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

El teorema de Euler es válido para  $n$  dimensiones, aunque por simplicidad aquí presentamos la versión del teorema para dos variables.

La masa  $M$  del BH es función de la entropía, la presión, la carga eléctrica, y el parámetro de la no linealidad, cuyas unidades son  $[M] = L$ ,  $[S] = L^2$ ,  $[P] = L^{-2}$ ,  $[Q] = L$ ,  $[a] = \frac{1}{[\mathcal{E}]} = L^2$ , donde  $L$  representa unidades de longitud. De acuerdo al teorema de Euler, la masa satisface

$$M(S, P, Q, a) = 2S \left( \frac{\partial M}{\partial S} \right) - 2P \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) + Q \left( \frac{\partial M}{\partial Q} \right) + 2a \left( \frac{\partial M}{\partial a} \right). \quad (4.9)$$

Por otro lado, de la primera ley de la termodinámica de agujeros negros AdS vista en la ecuación (2.16), sabemos que [28]

$$dM = TdS + VdP + \Phi dQ, \quad (4.10)$$

además,  $dM$  es un diferencial exacto, lo que nos permite obtener

$$\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right) = T, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right) = V, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right) = \Phi.$$

Por lo tanto, la fórmula de Smarr para el BH de EH adquiere la forma

$$M = 2(TS - VP + \mathcal{A}a) + \Phi Q, \quad (4.11)$$

donde  $\mathcal{A} \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial a}\right)$  es la cantidad conjugada del parámetro  $a$ , que puede obtenerse mediante sustitución directa de las ecuaciones (3.38), (4.7) y (4.8) en la fórmula de Smarr, obteniendo

$$\mathcal{A} = -\frac{Q^4}{40r_+^5}. \quad (4.12)$$

Analicemos ahora la consistencia entre la primera ley y la fórmula de Smarr que acabamos de deducir (4.11). Similarmente a como lo hace Smarr en [29], vamos a escribir la energía del agujero negro en sus componentes: Energía superficial,  $E_s$  y energía electromagnética  $E_{em}$

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^r T(r', Q = 0) 2\pi r' dr', \\ &= \frac{r}{2} - \frac{\Lambda r^3}{6} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} E_{em} &= \int_0^Q \Phi(r, Q', a) dQ', \quad r, a \text{ fijos.} \\ &= \frac{Q^2}{2r} - \frac{a Q^4}{40r^5}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por lo tanto, la masa del agujero negro  $M = E_s + E_{em}$  es

$$M = \frac{r}{2} + \frac{Q^2}{2r} - \frac{a Q^4}{40r^5} - \frac{\Lambda r^3}{6}, \quad (4.15)$$

la cual es consistente con la fórmula de Smarr propuesta (4.11). El caso RN-AdS se recupera haciendo  $a = 0$ .

Notemos que un cambio  $da$  provocaría un cambio en la energía electrostática dado por  $\mathcal{A}da$ , lo que sugiere una interpretación del término  $a\mathcal{A}$  en la fórmula de Smarr como la energía electrostática que surge de la polarización del vacío y es almacenada en el horizonte de eventos del BH. Esto sería una analogía de un medio polarizado, en el cual la energía está determinada por el producto de la polarización con el campo eléctrico.

### 4.2.2 | Estabilidad termodinámica

Como mencionamos en la sección 2.3.1, la estabilidad termodinámica de los agujeros negros está determinada por el comportamiento de la capacidad calorífica a carga constante  $C_Q$ .

En 44 se mostró que para cualquier función Lagrangiana que describa NLED, una divergencia con cambio de signo en  $C_Q$  corresponde a un cambio de BH estable a BH inestable (o viceversa), lo que indica una transición de fase.

La capacidad calorífica a carga constante para el BH de EH está dada por

$$C_Q = -2\pi r_+^2 \frac{4r_+^6 - 4Q^2 r_+^4 + aQ^4 - 4\Lambda r_+^8}{4r_+^6 - 12Q^2 r_+^4 + 7aQ^4 + 4\Lambda r_+^8}, \quad (4.16)$$

y su comportamiento se ilustra en la figura 11, comparada con la correspondiente  $C_Q$  de RN-AdS (ver sección 2.3.1).

Si la capacidad calorífica es negativa  $C_Q < 0$  corresponde a configuraciones inestables, mientras que  $C_Q > 0$  es interpretada como una configuración estable. Por lo tanto el parámetro de EH induce estabilidad en el BH mediante una transición de fase que estudiaremos en la sección 4.2.4. En el caso de RN-AdS se observa un comportamiento similar solo para cargas imaginarias (ver figura 1), mientras que para valores de la carga en los que el BH de EH tiene un comportamiento *inverso*<sup>1</sup>, el BH de RN tiene un comportamiento *lento*<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Una transición de fase.

<sup>2</sup>No presenta transiciones de fase

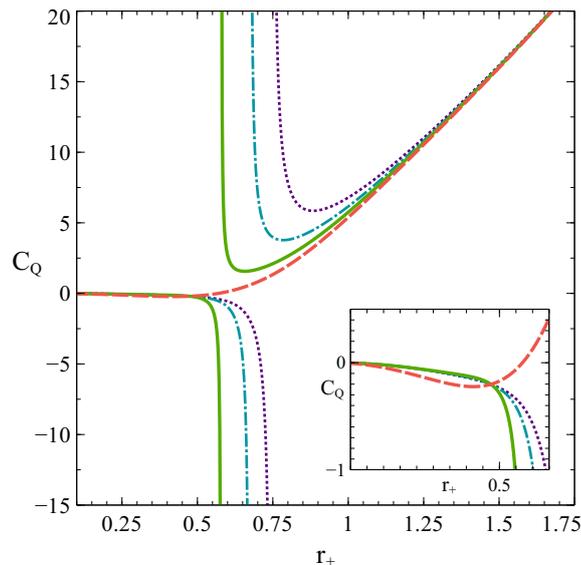


Figura 11: Capacidad calorífica a carga constante  $C_Q$  para el BH de EH-AdS como función del radio del horizonte de eventos  $r_+$ . El parámetro de la teoría de EH  $a$  toma los valores de:  $a = 0.3$  para la curva sólida verde,  $a = 0.6$  para la curva guión-punto azul y  $a = 1$  para la línea punteada morada. La línea en guiones es para RN-AdS ( $a = 0$ ). Conforme  $a$  incrementa, las transiciones de fase inestable-estable ocurren para valores mas grandes del radio del horizonte  $r_+$ . Los parámetros fijos son  $Q = 0.8$ ,  $\Lambda = -3$ . En el recuadro pequeño se muestra una ampliación cerca de  $r_+ = 0$ .

### 4.2.3 | Comportamiento crítico

Continuando con el estudio termodinámico del BH de EH-AdS, vamos a partir de la *ecuación de estado* dada en (4.7)

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4} - \frac{aQ^4}{32\pi r_+^8}. \quad (4.17)$$

Esta ecuación puede reescribirse en términos del volumen específico, definido como  $v = 2L^2 r_+$ , tomando  $L = 1$  se tiene

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} - \frac{8aQ^4}{\pi v^8}. \quad (4.18)$$

Como es de esperarse, la ecuación de estado para el BH de RN-AdS dada en la ecuación (2.18) se recupera al hacer  $a = 0$ . Un estudio geométrico de la termodinámica de agujeros negros AdS puede consultarse en [45].

Con ayuda de la ecuación de estado (4.18) se pueden calcular los puntos críticos, que son aquellos valores del volumen que satisfacen  $\partial P/\partial v = 0$  y  $\partial^2 P/\partial v^2 = 0$ , lo que nos lleva a una ecuación cúbica para  $x$ , definida como  $x \equiv v_c^2$

$$x^3 - 24Q^2x^2 + 448aQ^4 = 0. \quad (4.19)$$

La solución de (4.19) debe ser real y además positiva, puesto que está relacionada con el volumen, por lo tanto las soluciones permitidas son

$$x_k = 8Q^2 \left( 2 \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{7a}{16Q^2} \right) - \frac{2\pi k}{3} \right] + 1 \right), \quad k = 0, 1. \quad (4.20)$$

donde debe cumplirse que

$$0 \leq a \leq \frac{32}{7}Q^2. \quad (4.21)$$

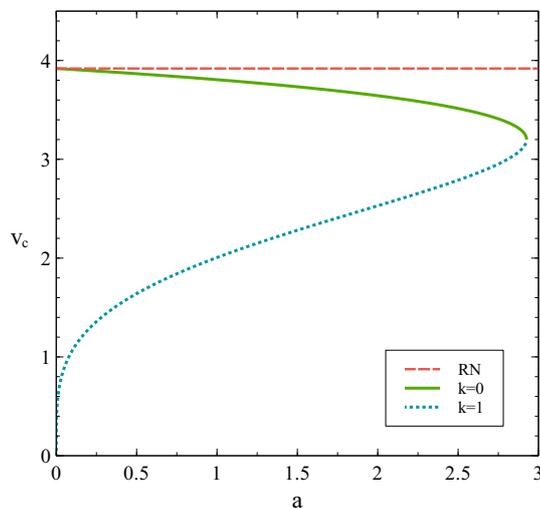


Figura 12: Volumen crítico como función de  $a$ , para una carga fija  $Q = 0.8$ . Vemos que la línea sólida ( $k = 0$ ) se asemeja más al comportamiento lineal de RN (línea horizontal), mientras que la línea punteada ( $k = 1$ ) refleja la influencia de la no linealidad. El punto donde las dos curvas se unen corresponde al valor máximo que puede tomar  $a$ ,  $a = \frac{32}{7}Q^2$ .

La temperatura crítica  $T_c$  y la presión están dados por

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{\pi v_c} \left[ 1 - \frac{8Q^2}{x} + \frac{64aQ^4}{x^3} \right], \\ P_c &= \frac{1}{\pi x} \left[ \frac{1}{2} - \frac{6Q^2}{x} + \frac{56aQ^4}{x^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dado que hay dos valores posibles de  $v_c$  ocurre lo mismo para la temperatura y presión críticas; en la figura (13) se muestran las dos funciones de la temperatura crítica. La presión crítica tiene un comportamiento muy similar a  $T_c$ .

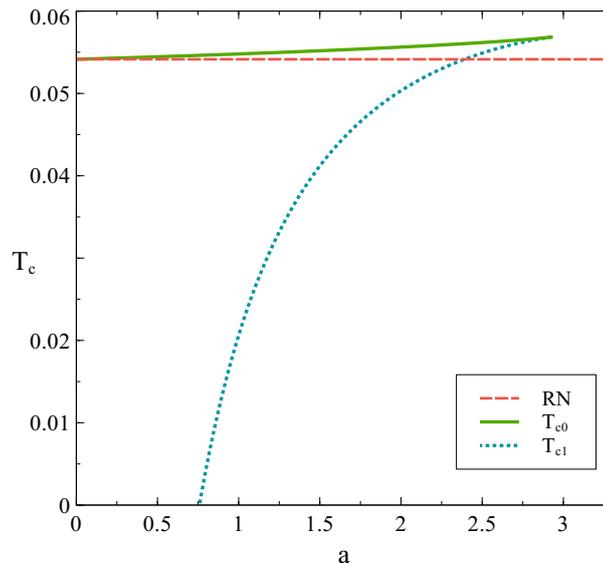


Figura 13: Temperatura crítica como función del parámetro de EH  $a$ , para  $Q = 0.8$ ; la línea sólida ( $k = 0$ ) se aproxima más al comportamiento lineal de RN (línea horizontal), mientras que la línea punteada ( $k = 1$ ) es mayormente de contribución no lineal. El punto de unión de ambas ramas de la temperatura corresponde al máximo valor permitido de  $a$ , es decir  $a = \frac{32}{7}Q^2$ .

Los diagramas  $p - v$  se muestran en la figura (14), como referencia al comportamiento crítico se destacan los isothermas correspondientes a  $T_{c0}$  y  $T_{c1}$ .

Es interesante estudiar el límite de valores pequeños de  $a$ , y ver como afecta a los puntos críticos (4.22). En dicho límite el volumen asociado a  $x_1$ , ( $v_{c1} = \sqrt{x_1}$ ) es igual a cero, por tanto lo descartamos y solo analizamos la rama  $k = 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_0 = 16 Q^2 \lim_{a \rightarrow 0} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{7a}{16Q^2} \right) \right] + 8Q^2 = 24Q^2, \quad (4.23)$$

y entonces el volumen la temperatura y la presión crítica quedan

$$\begin{aligned} v_c &\approx 2\sqrt{6}Q \\ T_c &\approx \frac{1}{3\sqrt{6}\pi Q} + \frac{a}{432\pi Q^3}, \\ P_c &\approx \frac{1}{4 * 24\pi Q^2} + \frac{7a}{41472\pi Q^4}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

es decir, se aproximan a los valores críticos para RN-AdS dados en la ecuación (2.20).

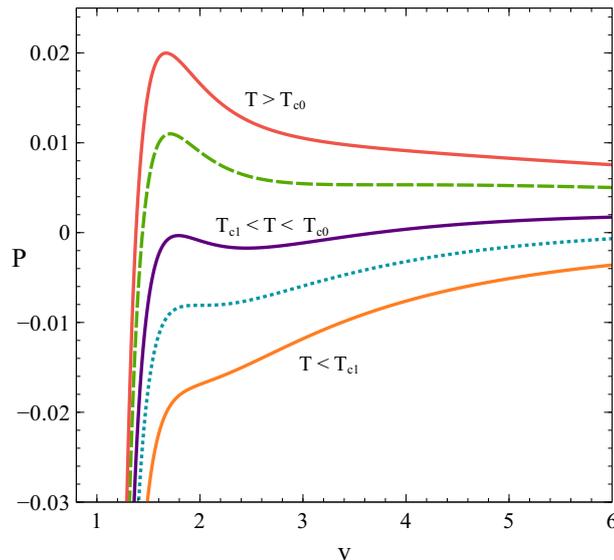


Figura 14: Diagramas  $P - v$  para valores fijos de  $Q = 0.8$  y  $a = 1$ , variando  $T$ . La línea en guiones corresponde a  $T = T_{c0}$  (rama  $k = 0$ ) y la línea punteada a  $T = T_{c1}$  (rama  $k = 1$ ).

La razón crítica  $\rho_c = \frac{P_c v_c}{T_c}$  tiende a

$$\rho_c \approx \frac{3}{8} - 3.02 \times 10^{-4} \frac{a}{Q^2} + 2.22 \times 10^{-4} \frac{a^2}{Q^4}. \quad (4.25)$$

Que son los correspondientes valores críticos del fluido de Van der Waals en el orden cero de  $a$ .

#### 4.2.4 | Energía libre de Gibbs y cambios de fase

La información termodinámica de un sistema está completamente codificada en su función de partición. En la aproximación semi-clásica la función de partición se obtiene de la parte finita de la acción Euclídea  $S_E$ , las divergencias que aparecen en la región asintóticamente AdS son canceladas por el método de contra-términos [33].

En el marco del ensamble canónico, la energía libre de Gibbs  $G = M - TS$ , para el BH de EH-AdS se escribe como

$$G(T, P) = \frac{1}{4} \left[ r_+ + \frac{3Q^2}{r_+} - \frac{7aQ^4}{20r_+^5} - \frac{8\pi r_+^3 P}{3} \right], \quad (4.26)$$

en términos del volumen específico queda como

$$G(T, P, v) = \frac{v}{8} + \frac{3Q^2}{2v} - \frac{14aQ^4}{5v^5} - \frac{\pi v^3 P}{12}. \quad (4.27)$$

En la figura [15](#) graficamos a la izquierda la energía libre de Gibbs en función de la temperatura y a la derecha los diagramas  $T$ - $S$  para diferentes valores de la presión, la línea punteada es para  $P = P_c$ . En ambas gráficas las funciones mostradas están divididas entre su correspondiente valor en el punto crítico, es decir,  $G/G_c$ ,  $T/T_c$  y  $S/S_c$ . Es claro que  $G_c = G(T_c, P_c, v_c)$  y  $S_c = S(v_c)$ ; a este marco de trabajo se le conoce como *espacio de parámetros reducido*. En la gráfica  $G-T$  se observa que para  $P < P_c$  se tiene la característica forma de cola de golondrina, señal de la existencia de un cambio de fase. Los cambios de fase se etiquetan como BH pequeño, grande o intermedio, dependiendo de la relación entre el radio del horizonte  $r_+$  con el resto de los parámetros del BH tal que la capacidad calorífica cambia de signo.

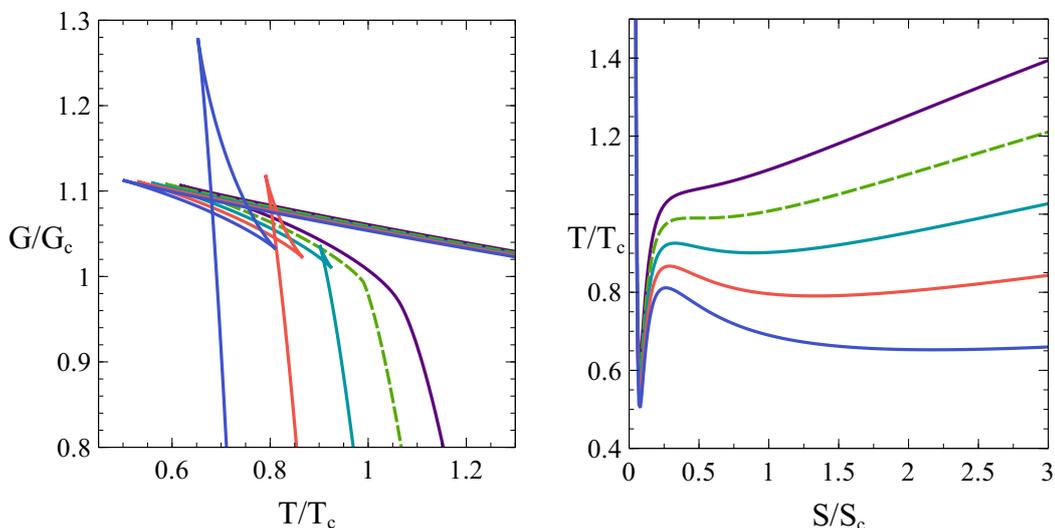


Figura 15: Curvas isobáricas en el espacio de parámetros reducido para valores fijos de  $P/P_c = 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2$ . La línea en guiones corresponde a  $P/P_c = 1$ . Izquierda: Energía libre de Gibbs; se observa una transición de fase de primer orden para presiones menores a la presión crítica. Derecha: Diagramas  $T$ - $S$ , la presión aumenta de abajo hacia arriba. Los parámetros fijos son  $Q = 1$  y  $a = 1$ .

De la gráfica [16](#) vemos que hay dos tipos de comportamiento característicos de la función de Gibbs, a modo de ejemplo estudiaremos las isóbaras correspondientes a  $P = 0.4 P_c$  y a  $P = 0.8 P_c$ . Notemos como la curva isobárica en el diagrama  $T$ - $S$  se puede dividir en tres ramas: *pequeño*, correspondiente a la línea color coral y púrpura, *intermedio* para la línea punteada verde y *grande* para la azul, (el crecimiento va en dirección del aumento de la entropía). Al dividir la curva isobárica de esta manera, podemos identificar más fácilmente las transiciones de fase.

Recordemos que cuando dos fases coexisten, la *ley de áreas iguales de Maxwell* se

satisface, es decir, para una temperatura constante, las áreas por debajo y por arriba de esa temperatura fija son iguales; lo cual se observa en los diagramas  $T$ - $S$  de la figura 16, para las líneas  $AC$ ,  $BD$  y  $AB$ .

Así mismo, la transición de fase en la cual un BH cambia de un cierto volumen  $v_1$  a un volumen mas grande  $v_2$ , ocurre para el mismo valor de la energía libre de Gibbs y a la misma temperatura, es decir, en la transición de fase debe cumplirse que

$$G(v_1) = G(v_2), \quad T(v_1) = T(v_2). \quad (4.28)$$

Para  $P = 0.4P_c$ , (figura 16, arriba) ocurren dos cambios de fases para dos temperaturas diferentes  $T \approx 0.7547 T_c$  correspondiente a la línea  $AC$ , y para  $T \approx 0.6823 T_c$  para la línea  $BD$ . Para el caso  $P = 0.8P_c$ , (figura 16, abajo) el comportamiento es un poco mas simple, ya que solo hay un cambio de fase para  $T \approx 0.9091 T_c$ , correspondiente a la línea  $AB$ .

Las transiciones de fase del BH pueden ser entre estados estables con capacidad calorífica positiva, como en el caso de las transiciones  $BD$  ó  $AB$ , o bien, pueden ser entre estados meta estables (con capacidad calorífica negativa) en el caso de la transición indicada por la línea  $AC$ . La capacidad calorífica se muestra en la figura 17 para los valores de la presión que estamos estudiando, es decir  $P = 0.4P_c$  y  $P = 0.8P_c$ . Para el caso  $P \geq P_c$  solo se observa que el BH pasa de un estado inestable que podríamos interpretar como un estado de radiación, a un estado estable.

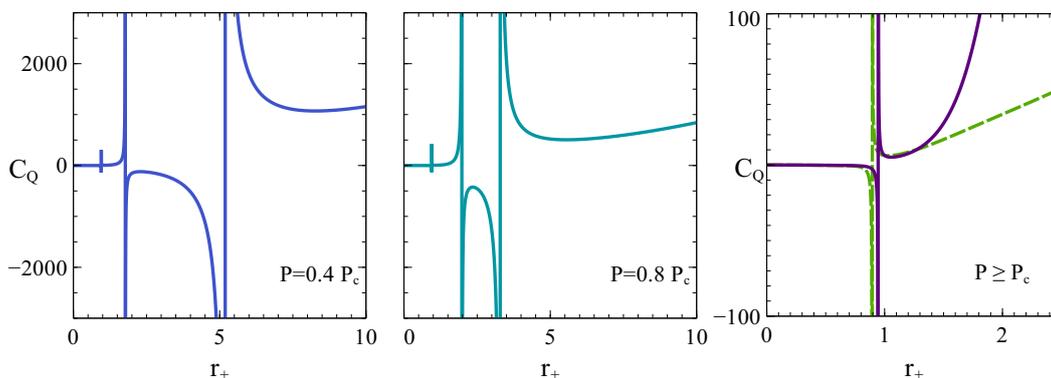


Figura 17: Capacidad calorífica a carga constante  $C_Q$  para el BH de EH-AdS como función del radio del horizonte de eventos  $r_+$  cerca del punto crítico. En la gráfica de la izquierda, la línea punteada es para  $P = P_c$ . Los parámetros fijos son la carga y el parámetro d EH,  $Q = 1$ ,  $a = 1$ .

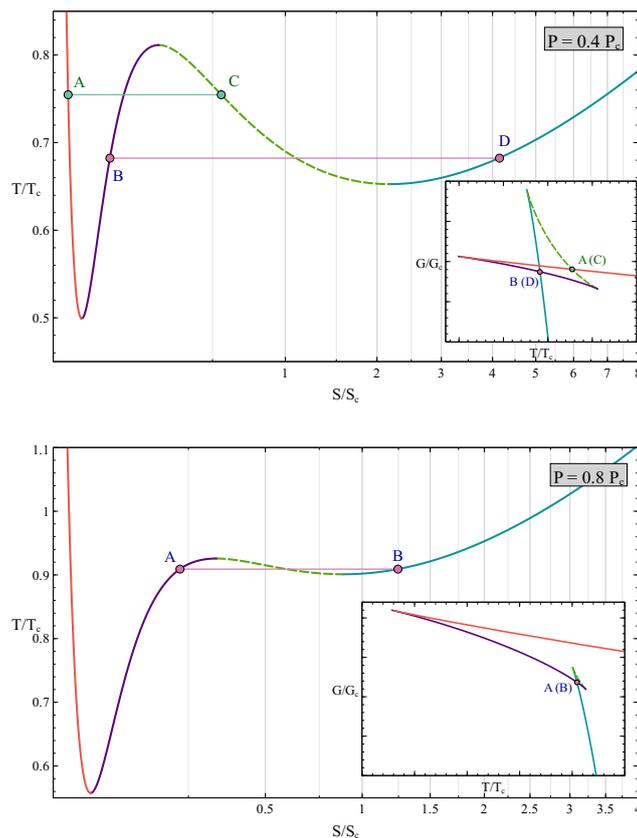


Figura 16: Diagramas  $T$ - $S$  y energía libre de Gibbs vs. temperatura; *arriba*:  $P = 0.4 P_c$ , la ley de áreas iguales de Maxwell se satisface para las secciones  $AC$  y  $BD$ , que es donde ocurre la transición de fase. *Abajo*:  $P = 0.8 P_c$  el cambio de fase ocurre del punto  $A$  al punto  $B$ , satisfaciendo también la ley de áreas iguales de Maxwell. En las gráficas pequeñas de cada diagrama se muestra la energía libre de Gibbs; los puntos resaltados indican la transición de fase. Hemos fijado los parámetros  $Q = 1$  y  $a = 1$ .

Para el agujero negro de Euler-Heisenberg no es posible obtener una expresión analítica para la curva de coexistencia, sin embargo podemos graficar los valores numéricos que satisfagan las ecuaciones (4.28) como se muestra en la figura 18.

Notemos que desde  $P = 0.2 P_c$  a  $\approx 0.7 P_c$  la curva de coexistencia se divide en dos, indicando que el cambio de fase puede ocurrir para dos temperaturas diferentes. La región entre las dos líneas corresponde a la fase de agujero negro de tamaño intermedio. Los puntos resaltados  $A(C)$ ,  $B(D)$  y  $A(B)$  corresponden a la transición de fase mostrada en la figura 16.

#### 4.2.5 | Ley de estados correspondientes y exponentes críticos

A continuación calcularemos los exponentes críticos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  que gobiernan el comportamiento de las propiedades físicas cerca del punto crítico.

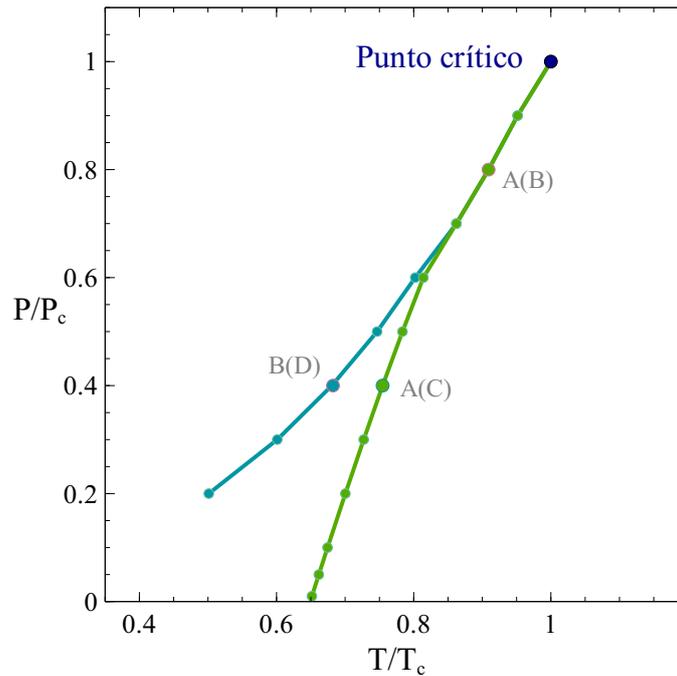


Figura 18: Curva de coexistencia  $P - T$  determinada numéricamente con los valores que satisfacen las condiciones  $G(v_1) = G(v_2), T(v_1) = T(v_2)$ ; de  $P = 0.2 P_c$  a  $\approx 0.7 P_c$  hay dos diferentes temperaturas en las que la transición de fase puede ocurrir. Los parámetros fijos son  $Q = 1$  y  $a = 1$ .

Para calcularlos, se hará un análisis similar al presentado en la sección [2.3.4](#). Vamos a deducir la ley de estados correspondientes usando el marco de las variables reducidas que mencionamos anteriormente, definiendo

$$p \equiv \frac{P}{P_c}, \quad \tau \equiv \frac{T}{T_c}, \quad \nu \equiv \frac{v}{v_c}. \quad (4.29)$$

Tal que la ecuación de estado ([4.18](#)), toma la forma

$$p = \frac{1}{\rho_c \nu} + \frac{1}{\pi P_c v_c^2} \left( -\frac{1}{2\nu^2} + \frac{2Q^2}{v_c \nu^4} - \frac{8aQ^4}{v_c^6 \nu^8} \right). \quad (4.30)$$

Asumamos ahora que la ecuación anterior se puede expresar como

$$p(\tau, \nu) = \frac{1}{\rho_c \nu} + h(\nu), \quad (4.31)$$

donde  $\rho_c$  es la razón crítica y hagamos ahora una expansión en Taylor en la vecindad

del punto crítico, es decir  $\tau = 1$ ,  $\nu = 1$

$$\begin{aligned}
 p(\tau, \nu) \approx & p + p^{01}(\nu - 1) + \frac{1}{2}p^{02}(\nu - 1)^2 + \frac{1}{6}p^{03}(\nu - 1)^3 \\
 & + \left( p^{10} + p^{11}(\nu - 1) + \frac{1}{2}p^{12}(\nu - 1)^2 + \frac{1}{6}p^{13}(\nu - 1)^3 \right) (\tau - 1) \\
 & + \left( \frac{1}{2}p^{20} + \frac{1}{2}p^{21}(\nu - 1) + \frac{1}{4}p^{22}(\nu - 1)^2 + \frac{1}{12}p^{23}(\nu - 1)^3 \right) (\tau - 1)^2 \\
 & + \left( \frac{1}{6}p^{30} + \frac{1}{6}p^{31}(\nu - 1) + \frac{1}{12}p^{32}(\nu - 1)^2 + \frac{1}{36}p^{33}(\nu - 1)^3 \right) (\tau - 1)^3 \\
 & + \mathcal{O}((\tau - 1)^4, (\nu - 1)^4),
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

donde estamos usando la notación  $p^{ij} = \frac{\partial^{i+j} p}{\partial \tau^i \partial \nu^j}$ , tanto  $p$  como sus derivadas están evaluadas en  $\tau = 1$ ,  $\nu = 1$ . Usando la definición de punto crítico encontramos que  $p^{01}(1, 1) = p^{02}(1, 1) = 0$ , por lo tanto los únicos términos diferentes de cero son

$$\begin{aligned}
 p^{03}(1, 1) &= -\frac{6}{\rho_c} + h^{(3)}(1), & p^{10}(1, 1) &= \frac{1}{\rho_c}, \\
 p^{12}(1, 1) &= \frac{2}{\rho_c}, & p^{13}(1, 1) &= -\frac{6}{\rho_c}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Por lo tanto la expansión (4.32) queda

$$\begin{aligned}
 p \approx & 1 + \frac{1}{6} \left( -\frac{6}{\rho_c} + h^{(3)}(1) \right) (\nu - 1)^3 + \frac{1}{\rho_c} (\tau - 1) \\
 & - \frac{1}{\rho_c} (\nu - 1) (\tau - 1) + \frac{1}{\rho_c} (\nu - 1)^2 (\tau - 1),
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Definamos ahora

$$t \equiv \tau - 1, \quad w \equiv \nu - 1, \tag{4.35}$$

por lo tanto la ley de estados correspondientes toma la forma

$$p(t, w) = 1 + \frac{1}{\rho_c} t - \frac{1}{\rho_c} w t - C w^3 + \mathcal{O}(t w^2, w^4), \tag{4.36}$$

donde hemos definido  $C = \left( \frac{1}{\rho_c} - \frac{h^{(3)}(1)}{6} \right)$ , usando las ecuaciones (4.24) y (4.25) po-

demos aproximar  $C$ , obteniendo

$$C \approx \frac{4}{3} - 0.002 \frac{(129.019 - 10.034Q^2 + Q^6)a}{Q^4}. \quad (4.37)$$

Ahora vamos a determinar la relación entre los volúmenes del agujero negro durante la transición de fase, es decir  $w_a$  y  $w_b$ . De la ley de áreas iguales de Maxwell sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b v dP = v_c P_c \int_{w_a}^{w_b} w \left( \frac{1}{\rho_c} t + 3Cw^2 \right) dw \\ \Rightarrow w_a^2 \left( \frac{t}{2\rho_c} + \frac{3C}{4} w_a^2 \right) &= w_b^2 \left( \frac{t}{2\rho_c} + \frac{3C}{4} w_b^2 \right), \end{aligned}$$

entonces  $w_a = -w_b$ , ya que para una isoterma dada  $dp = \frac{\partial p}{\partial w} dw = - \left( \frac{1}{\rho_c} t + 3Cw^2 \right) dw$ , además en la coexistencia se cumple que  $p_a = p_b$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_c} w_a t + Cw_a^3 &= \frac{1}{\rho_c} w_b t + Cw_b^3 \\ \Rightarrow w_a &= \sqrt{-\frac{1}{\rho_c} \frac{t}{C}} = \frac{v_a}{v_{ac}} - 1. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ya solo resta leer los valores de los exponentes críticos  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  de las expresiones previas.

- $\alpha = 0$  ya que

$$C_v = T \left( \frac{dS}{dT} \right)_v \propto |t|^{-\alpha}. \quad (4.39)$$

- $\beta = \frac{1}{2}$  debido a que

$$\begin{aligned} \eta = v_1 - v_2 = v_c(w_a - w_b) &\propto |t|^\beta. \\ w_s &\propto |t|^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde  $\eta$  es el parámetro de orden.

- $\gamma = 1$ . Se obtiene de la compresibilidad isotérmica  $\kappa_T$

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P_c(w+1)} \left( \frac{\partial p}{\partial w} \right)^{-1} \propto |t|^{-\gamma} \quad (4.41)$$

- $\delta = 3$ . En una isoterma crítica,  $T = T_c$  o equivalentemente  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} |P - P_c| &\propto |v - v_c|^\delta \\ |p - 1| &\propto |w|^\delta \\ p - 1 &= Cw^3 . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Los exponentes críticos que se obtienen son los mismos que los obtenidos en las teorías estándar de agujeros negros AdS, [23], lo que exhibe la universalidad de ese tipo de transiciones de fase.

# 5 | Agujeros negros AdS en (2+1) dimensiones

La relatividad general en (2+1) dimensiones nos ayuda a estudiar algunos conceptos tanto clásicos como cuánticos de la gravedad, pese a ser físicamente poco realista. Sin embargo la relatividad general en tres dimensiones, cobró relevancia con el descubrimiento del BH estacionario con simetría cíclica de Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ) en 1992.

El BH de BTZ [46], tiene la característica de ser asintóticamente AdS, además de que no tiene singularidad de curvatura en el origen y tiene horizonte de eventos y (en el caso rotante) tiene un horizonte interior. A continuación mencionaremos algunas características generales de la solución, para un estudio más detallado puede consultarse por ejemplo [47, 48].

## 5.1 | Agujero negro BTZ

La métrica que describe el BH de BTZ está dado por

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + f^{-2} dr^2 + r^2 (d\phi + N^\phi dt)^2, \quad (5.1)$$

donde la función lapso  $N$ , la función radial  $f$  y la función de cambio  $N^\phi$  están dadas por

$$N^2 = f^2 = \left( -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right), \quad (5.2)$$

$$N^\phi = -\frac{J}{2r^2}, \quad (5.3)$$

siendo  $M$  la masa de ADM y  $J$  el momento angular. La métrica anterior describe un espacio-tiempo estacionario con simetría cíclica y es solución a las ecuaciones de campo de Einstein en vacío con constante cosmológica  $\Lambda = -1/l^2$ .

Los horizontes de eventos interior ( $r_-$ ) y exterior ( $r_+$ ) están dados por la componente radial de la métrica  $g_{rr} \rightarrow \infty$ , es decir,

$$r^4 - Ml^2r^2 + \frac{l^2J^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\pm} = \frac{lM^{1/2}}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{J^2}{M^2l^2}} \right)^{1/2}, \quad (5.4)$$

imponiendo las restricciones  $M > 0$  y  $|J| \leq Ml$ , dándose el caso extremo en  $J = Ml$  ó  $J = 0$ .

El radio de la ergosfera  $r_{erg}$  está determinado por la componente temporal de la métrica,  $g_{tt}(r_{erg}) = 0$ ,

$$-N^2 + r^2(N^\phi)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{erg} = M^{1/2}l. \quad (5.5)$$

Las cantidades anteriores obedecen la desigualdad  $r_- \leq r_+ \leq r_{erg}$ .

### 5.1.1 | Ecuaciones geodésicas y potencial efectivo

La métrica (5.1) tiene un campo de Killing estático  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$  y otro rotacional  $\psi^a = (\partial/\partial \phi)^a$ , por lo tanto las cantidades conservadas a lo largo de las geodésicas de una partícula de prueba neutra de masa  $\mu$  y momento lineal  $P^a = \mu \frac{dx^a}{d\tau}$  son la energía  $E$  y el momento angular  $L_z$

$$E = -P_t = \mu \left( -M + \frac{r^2}{l^2} \right) \dot{t} + \mu \frac{J}{2} \dot{\phi} \quad (5.6)$$

$$L_z = P_\phi = \mu r^2 \dot{\phi} - \mu \frac{J}{2} \dot{t}, \quad (5.7)$$

donde el punto indica derivada respecto a  $\tau$ , el parámetro afín a lo largo de las geodésicas. Siguiendo el camino tomado en [48] vamos a hacer las siguientes definiciones

$$\hat{t} = \frac{t\sqrt{M}}{l}, \quad \hat{r} = \frac{r}{l\sqrt{M}}, \quad \hat{\phi} = \sqrt{M}\phi,$$

$$\hat{J} = \frac{J}{lM}, \quad \hat{\tau} = \frac{\tau}{l}, \quad \hat{E} = \frac{E}{\mu\sqrt{M}}, \quad \hat{L}_z = \frac{L_z}{\mu l\sqrt{M}}, \quad (5.8)$$

de modo que las ecuaciones geodésicas quedan descritas únicamente en términos de las cantidades conservadas y del momento angular  $J$ ,

$$r^2\dot{r}^2 = -\alpha \left( r^4 - r^2 + \frac{J^2}{4} \right) + (E^2 - L_z^2)r^2 + L_z^2 - JEL_z, \quad (5.9)$$

$$\dot{\phi} = \frac{(r^2 - 1)L_z + \frac{1}{2}JE}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}, \quad (5.10)$$

$$\dot{t} = \frac{Er^2 - \frac{1}{2}JL_z}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}, \quad (5.11)$$

donde hemos omitido los gorros para una lectura mas clara y  $\alpha = g^{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau}$  puede tomar valores de  $\{-1, 0, 1\}$  para geodésicas tipo tiempo, nulas o tipo espacio respectivamente.

De la ecuación radial (5.9), podemos obtener el potencial efectivo  $V_{ef}$ , ya que

$$\dot{r}^2 = (E - V_{ef}^+)(E - V_{ef}^-), \quad (5.12)$$

y resolviendo en los puntos de retorno, obtenemos

$$V_{ef}^\pm = \frac{JL}{2r^2} \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)(L^2 + \alpha r^2)}. \quad (5.13)$$

En la figura 19 se muestra el comportamiento del potencial efectivo para partículas sin masa y con masa, en ambos casos la región entre  $V_{ef}^+$  y  $V_{ef}^-$  es una región prohibida.

El siguiente paso lógico en el estudio de gravedad en (2+1) dimensiones sería estudiar la solución rotante y cargada eléctricamente.

En esta dirección, Clement derivó en 1996 una solución de BH cargado con rotación en (2+1) dimensiones [49]. Un posible inconveniente de esta solución es que para cierto límite, se tienen divergencias en algunos términos del tensor de energía-momento y por lo tanto la métrica no es asintóticamente BTZ. Ese detalle fue solucionado por el autor agregando un término topológico de Chern-Simons a la acción. Con esta modificación se obtiene una solución regular, auto-dual sin horizontes que tiende asintóticamente al BH extremo BTZ.

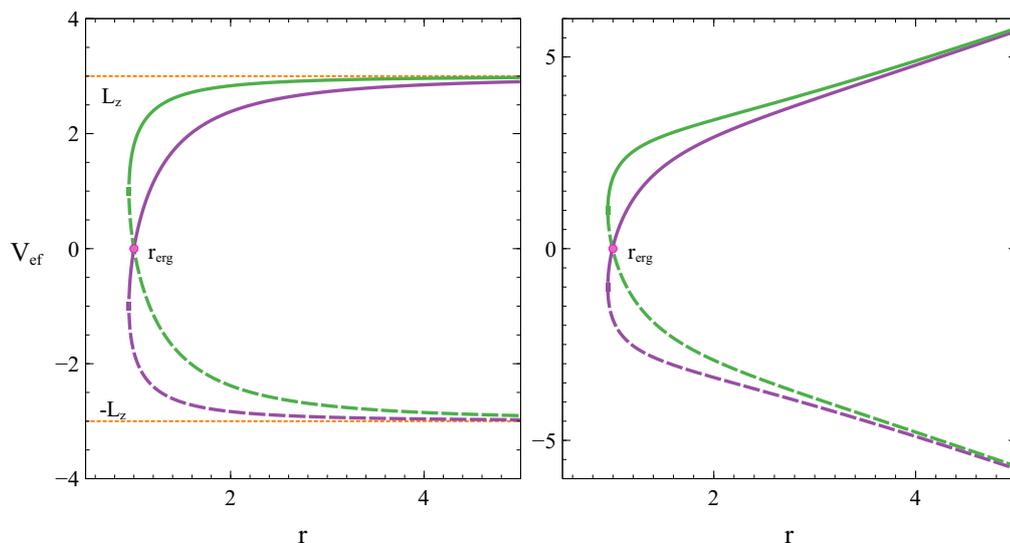


Figura 19: Potencial efectivo del BH de BTZ para los valores fijos de  $L_z = 3$  y  $J = \pm 0.6$ , las curvas verdes (superiores) son para  $JL_z > 0$  y las moradas (inferiores) para  $JL_z < 0$ . Las líneas punteadas son  $V_{ef}^-$  mientras que las líneas continuas son  $V_{ef}^+$ , el punto de cruce de ambas curvas corresponde al valor del radio de la ergosfera. *Izquierda*: partículas sin masa. *Derecha*: partículas masivas.

### 5.1.2 | Agujero negro MTZ

Esta solución fue encontrada en el 2000 por Martínez-Teitelboim-Zanelli (MTZ) [50], quienes obtuvieron una solución de BH con carga eléctrica en rotación en (2+1) dimensiones.

Veamos primero el caso con carga eléctrica  $Q \neq 0$  y momento angular  $J = 0$ , en este caso la métrica está dada por

$$ds^2 = - \left( -M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{Q^2}{4} \ln r^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{-M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{Q^2}{4} \ln r^2} + r^2 d\phi^2. \quad (5.14)$$

La función métrica  $g_{tt}(r)$  tiene un mínimo en  $r_{min} = |Q|/2$ ,

$$g_{tt}(r_{min}) = -M + \frac{Q^2}{4}(1 - \ln r^2), \quad (5.15)$$

el caso de BH extremo se da cuando  $M = \frac{Q^2}{4}(1 - \ln r^2)$ , es decir  $r_{erg} = \frac{Ql}{2}$ .

El potencial eléctrico de esta solución es

$$\Phi = -\frac{Q}{2} \ln \left( \frac{r}{l} \right) dt. \quad (5.16)$$

Si se aplica un ‘boost’ de rotación a la métrica (5.14) dado por

$$\tilde{t} \rightarrow \frac{t - \omega\phi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{l^2}}}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi - \frac{\omega}{l^2}t}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{l^2}}}, \quad (5.17)$$

siendo  $\omega$  la velocidad angular del boost, se obtiene la solución rotante cargada de MTZ

$$ds^2 = - \left[ \frac{r^2}{l^2} - \frac{l^2}{l^2 - \omega^2} Z(r) \right] dt^2 + \left[ r^2 + \frac{l^2 \omega^2}{l^2 - \omega^2} Z(r) \right] d\phi^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{l^2} - Z(r)} - \frac{2l^2 \omega}{l^2 - \omega^2} Z(r) dt d\phi, \quad (5.18)$$

$$Z(r) = \left( M + \frac{Q^2}{4} \ln r^2 \right), \quad (5.19)$$

y el potencial eléctrico toma la forma

$$\Phi = - \frac{Q \ln r}{2\sqrt{1 - \omega^2/l^2}} (dt - l^2 \omega d\phi). \quad (5.20)$$

La métrica (5.18) corresponde a un BH con carga eléctrica y momento angular  $\omega$ , aunque es importante hacer varias acotaciones al respecto.

- Los parámetros  $Q$  y  $M$  de la métrica (5.18) corresponden a la carga y masa en reposo, y están relacionados con la carga y masa del BH mediante una transformación de Lorentz.
- La transformación de coordenadas (5.17) se considera ilegítima ya que cambia los parámetros físicos de la solución.
- La rotación viene dada por consecuencia de la transformación de coordenadas.

Tanto (5.14) como (5.18) presentan términos logarítmicos en la función métrica, lo que lleva a divergencias en el tensor de energía-momento y no es posible recuperar asintóticamente la solución BTZ (5.2). En el capítulo 6 mostramos una derivación de un BH cargado y en rotación que asintóticamente tiende al BH de BTZ. Consideramos electrodinámica no lineal acoplada con gravedad en (2+1) dimensiones

y determinamos soluciones estacionarias resolviendo directamente las ecuaciones de campo de Einstein, [9].

## 5.2 | Termodinámica de BTZ

En esta sección vamos a describir la termodinámica del BH de BTZ, cargado eléctricamente en un fondo AdS (BTZ-AdS). Como mencionamos en la sección 5.1.2 la métrica es estática y cíclicamente simétrica y está dada por [50]

$$ds^2 = -f^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f^2} + r^2 d\phi^2, \quad (5.21)$$

con

$$f^2(r) = -M - \frac{Q^2}{4} \ln(r^2) + \frac{r^2}{l^2}, \quad (5.22)$$

donde la constante cosmológica  $\Lambda = -1/l^2 = -8\pi P$ .

La temperatura, entropía y volumen termodinámicos están dados por

$$T = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{r_+}{2\pi l^2} - \frac{Q^2}{8\pi r_+}, \quad (5.23)$$

$$S = 2\pi r_+, \quad V = \pi r_+^2. \quad (5.24)$$

### Estabilidad termodinámica

La capacidad calorífica a carga constante  $C_Q$  resulta ser una función continua

$$C_Q = \frac{r_+}{2\pi l^4} - \frac{Q^4}{32\pi r_+^3}, \quad (5.25)$$

cuyo comportamiento se muestra en la figura (20), donde se observa que la capacidad calorífica es positiva a partir de cierto valor de  $r_+$ , en concreto para  $r_+ > |Ql/2|$ .

#### 5.2.1 | Ecuación de estado

La ecuación de estado se escribe como

$$P = \frac{T}{v} + \frac{Q^2}{2\pi v^2}, \quad v = 4r_+. \quad (5.26)$$

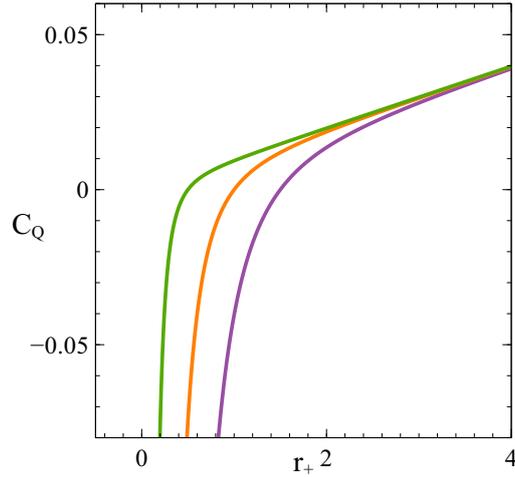


Figura 20: Capacidad calorífica para el BH cargado de BTZ-AdS, para  $l = 2$  fijo, los valores de la carga son  $Q = 0.5, 1, 1.5$  de izquierda a derecha. El BH se vuelve estable para  $r_+ > Ql/2$ .

Notemos que dicha ecuación no presenta puntos de inflexión, como puede verse

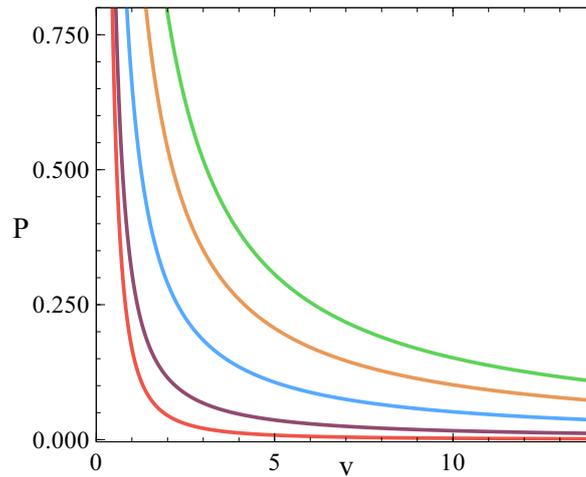


Figura 21: Diagramas  $P - v$  para el BH cargado de BTZ-AdS. Para una carga fija  $Q = 1$ , y variando la temperatura de  $T = 0.01, 0.15, 0.5, 1, 1.5$  de izquierda a derecha.

en los diagramas  $P - v$  de la figura [21](#), es decir no exhibe comportamiento crítico, similarmente para el caso rotante BTZ [24](#), [51](#).

Para ahondar en la función de partición y potencial termodinámico del BH de BTZ-AdS puede consultarse [52](#), donde se calcula el potencial termodinámico tomando en cuenta correcciones cuánticas.

## 6 | Generalización con electrodinámica no lineal del agujero negro BTZ rotante

En este capítulo presentamos una solución de BH cargado en rotación en un espacio-tiempo estacionario con simetría cíclica, en el marco de la NLED.

Antes de presentar la solución, es útil resaltar que la forma del invariante  $P^{\alpha\beta}$  definido en la ecuación (3.7) del capítulo 3, no es arbitraria para un espacio-tiempo estacionario con simetría cíclica. Existe un teorema que clasifica los campos electromagnéticos no lineales para este tipo de espacios [53]. El teorema nos dice que para un espacio-tiempo con las simetrías mencionadas en  $(2 + 1)$  dimensiones dado por

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + 2g_{t\phi}(r)dtd\phi + g_{\phi\phi}(r)d\phi^2 + g_{rr}(r)dr^2, \quad (6.1)$$

la forma general de los campos electromagnéticos que surgen de relatividad general acoplada con NLED es

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta} &= \mathcal{L}_F f^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{bmatrix} 0 & b & -\frac{3g_{rr}c}{\sqrt{-g}} \mathcal{L}_F \\ -b & 0 & a \\ \frac{3g_{rr}c}{\sqrt{-g}} L_F & -a & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{bmatrix} 0 & b & -\frac{3g_{rr}}{\sqrt{-g}} \frac{c}{\mathcal{H}_P} \\ -b & 0 & a \\ \frac{3g_{rr}}{\sqrt{-g}} \frac{c}{\mathcal{H}_P} & -a & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

O bien, en términos de su tensor dual  $\check{P}$  definido en el capítulo 3,

$$\check{P} = \frac{g_{rr}}{\sqrt{-g}} \frac{c}{\mathcal{H}_P} dr + \frac{a}{3} dt + \frac{b}{3} d\phi, \quad (6.3)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes, que en virtud de las condiciones de circularidad de Ricci están sujetas a los siguientes casos

$$ac = 0 = bc, \quad (6.4)$$

que pueden clasificarse en dos clases. La clase 1 corresponde a

$$c \neq 0, \quad a = 0 = b \quad \Rightarrow \quad P = \frac{g_{rr}}{\sqrt{-g}} \frac{c}{\mathcal{H}_P} dr, \quad (6.5)$$

mientras que para la clase 2 se tiene

$$c = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{a}{3} dr + \frac{b}{3} d\phi. \quad (6.6)$$

Veamos ahora la forma que adquieren los invariantes electromagnéticos, ya que si las métricas con estas simetrías (ecuación [6.1](#)) tienen interpretación de agujeros negros, entonces los invariantes electromagnéticos pueden ser divergentes en el horizonte.

Consideremos la forma general para un espacio-tiempo estacionario con simetría cíclica en coordenadas  $\{ t, r, \phi \}$ ,

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{H^2(r)} + r^2(d\phi + \omega(r)dt)^2, \quad (6.7)$$

donde  $N(r)$ ,  $H(r)$  y  $\omega(r)$  son funciones que dependen únicamente de la coordenada radial.

En este caso, las únicas componentes diferentes de cero del tensor electromagnético  $P_{ab}$  calculadas con la matriz [\(6.2\)](#), son,

$$P_{tr} = \frac{-N^2b + (b\omega - a)r^2\omega}{rHN}, \quad P_{t\phi} = \frac{3c}{\mathcal{H}_P}, \quad P_{r\phi} = \frac{(a - b\omega)r}{HN}. \quad (6.8)$$

Para los invariantes electromagnéticos, se tienen las siguientes consideraciones.

1. En la clase 1  $c \neq 0$ , los invariantes  $F$  y  $P$  están dados por,

$$F = -\frac{9c^2}{r^2 N^2} \Rightarrow P = -\frac{9c^2}{r^2 N^2 \mathcal{H}_P^2} \quad (6.9)$$

Si la métrica (6.1) admite interpretación de BH, el horizonte de eventos  $r_h$  está dado por los ceros de la función  $N(r)$ , i.e.,  $N(r_h) = 0$ . Esto es, en NLED para la rama  $c \neq 0$ , la construcción de BH con invariante  $P$  regular en el horizonte solo es posible si  $\mathcal{H}_P(r_h)N(r_h)$  es diferente de cero en  $r_h$ ; Necesariamente el invariante  $F$  no estará bien definido en  $r = r_h$ . Específicamente, para la electrodinámica de Maxwell  $F = P$  y de acuerdo a la ecuación (6.9), en esta rama no existe un BH cargado en rotación en tres dimensiones con invariantes electromagnéticos bien comportados en  $r_h$ .

2. En la clase 2  $a \neq 0 \neq b$ , los invariantes  $F$  y  $P$  están dados por

$$P = -\frac{b^2}{r^2} + \frac{(a - b\omega)^2}{N^2} \Rightarrow F = -\frac{b^2 \mathcal{H}_P^2}{r^2} + \frac{(a - b\omega)^2 \mathcal{H}_P^2}{N^2}. \quad (6.10)$$

Se tiene ahora que cuando  $(a - b\omega(r_h))/N(r_h)$  y  $\mathcal{H}_P^2(r_h)$  son finitos, la construcción de BH con  $F$  y  $P$  bien definidos en  $r = r_h$  es posible.

En [9] se presentan dos soluciones, la primera de ellas es la que estudiamos en la siguiente sección, y corresponde a la clase 1, caracterizada por los invariantes de la ecuación (6.9) y tal que  $P(r_h)$  es finito, mientras que  $F$  diverge.

La segunda solución pertenece a la clase 2, con  $a \neq 0 = b$ ,  $c = 0$  y es tal que cuando admite interpretación de BH,  $F(r_h)$  es finito en el horizonte, mientras que  $P(r_h)$  diverge.

Cabe señalar que los resultados presentados en este capítulo fueron publicados en [9].

## 6.1 | Generalización electromagnética no lineal del BH de BTZ rotante

La métrica que describe la solución está dada por

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \frac{(2Mr^2 - J^2)^2}{S^2(r)N^2(r)}dr^2 + r^2 \left[ d\phi + \left( \frac{S(r)}{2Jr^2} - \frac{\sqrt{M^2 - c^\lambda}}{J} \right) dt \right]^2, \quad (6.11)$$

con

$$\begin{aligned} N^2(r) &= -M - \Lambda r^2 + \frac{J^2}{4r^2}, \\ S^2(r) &= J^4 - 4J^2Mr^2 + 4(M^2 - c^\lambda)r^4, \\ \omega(r) &= \frac{S(r)}{2Jr^2} - \frac{\sqrt{M^2 - c^\lambda}}{J}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

La solución está descrita por la masa  $M$ , el momento angular  $J$ , la constante cosmológica  $\Lambda$  que puede ser positiva para el caso de Sitter o negativa para el caso anti-de Sitter, y el parámetro electromagnético  $c^\lambda$ . Notemos que la función lapso  $N(r)$  es la misma que para el BH estacionario BTZ, pero el resto de las funciones métricas corresponde a polinomios de orden mayor. En la figura (22) se muestra la función lapso  $N^2(r)$  para diferentes valores de  $J$ . La función de estructura  $\mathcal{H}$  es la que determina la fuente de la electrodinámica no lineal, y está dada por

$$\mathcal{H} = \frac{c^\lambda \left( 4\Lambda Mr^6 - 6J^2\Lambda r^4 - 3J^2Mr^2 + \frac{J^4}{2} \right)}{(-2Mr^2 + J^2)^3} \quad \text{con } 1 < \lambda < 2, \quad (6.13)$$

El invariante electromagnético  $P(r)$  y  $\mathcal{H}_P = \partial\mathcal{H}/\partial P$  están dados respectivamente por

$$P(r) = -\frac{1}{2} \left( \frac{3c}{rN\mathcal{H}_P} \right)^2 = -\frac{J^4 c^{2\lambda-2} (-4\Lambda r^4 - 4Mr^2 + J^2)^3}{72 (-2Mr^2 + J^2)^6}, \quad (6.14)$$

$$\mathcal{H}_P = -\frac{36c^{2-\lambda}(-2Mr^2 + J^2)^3}{J^2(-4\Lambda r^4 - 4Mr^2 + J^2)^2}. \quad (6.15)$$

Mientras que el invariante  $F$  es  $F = P\mathcal{H}_P^2 = -9c^2/(2r^2N^2(r))$ . En el infinito espacial, la única componente del campo electromagnético diferente de cero tiende a una constante,  $P_{(0)(2)}(r \mapsto \infty) = J^2c^{\lambda-1}/(6M^3l^3)$ .

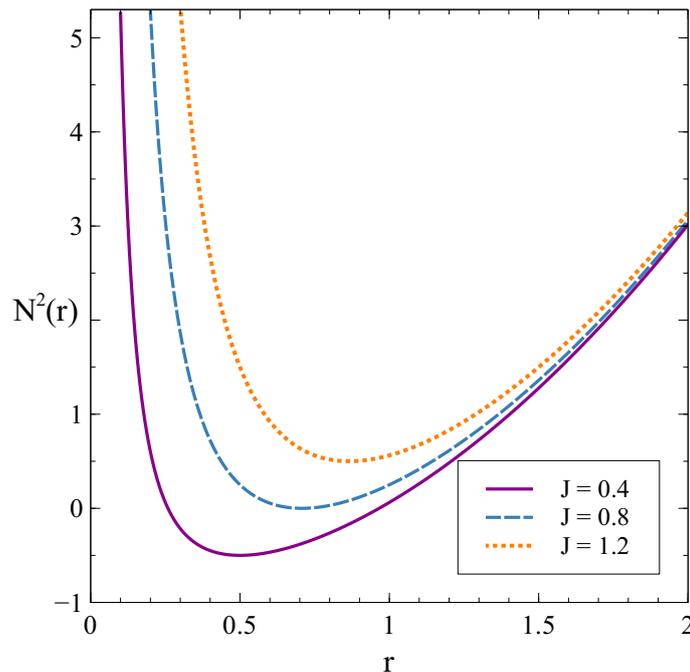


Figura 22: Mostramos la función Lapso  $N^2(r)$  para diferentes valores de  $J$  y para valores fijos de la masa  $M = 1$  y la constante cosmológica  $\Lambda = 1.5$ . Observe que si  $J > 1$  la función no tiene ceros reales.

Por su parte, los invariantes de curvatura están dados por

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{A}_1(r)}{(-2Mr^2 + J^2)^3}, \quad (6.16)$$

$$R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{A}_2(r)}{(-2Mr^2 + J^2)^6}, \quad (6.17)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\mathcal{A}_3(r)}{(-2Mr^2 + J^2)^6}, \quad (6.18)$$

donde  $\mathcal{A}_n(r)$ , con  $n = 1, 2, 3$ , funciones polinomiales en  $r$ , que no cancelan los términos del denominador  $(-2Mr^2 + J^2)$ . La región determinada por  $r = r_s = J/\sqrt{2M}$  corresponde a la singularidad de curvatura, mientras que los invariantes (6.16), (6.17), (6.18), divergen en  $r = r_s$ .

## 6.2 | Límites BTZ

La solución de BH de BTZ se recupera en tres límites: (i) haciendo cero el campo electromagnético, obteniendo así el BH BTZ estacionario; (ii) cuando  $J \mapsto 0$ , que corresponde al BH estático BTZ; y por último (iii) al infinito  $r \mapsto \infty$ , se recupera

el BH estático BTZ. Analicemos dichos límites.

- (i) **Límite  $c \rightarrow 0$ , con  $J \neq 0$ .** Para  $c = 0$ , el campo electromagnético es cero,  $P_{ab} = 0$ . En este caso, la función  $S^2(r)$  toma la forma  $S^2(r) = J^4 - 4J^2Mr^2 + 4M^2r^4 = (2Mr^2 - J^2)^2$ , y por lo tanto la métrica (6.12) queda,

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left( -M - \Lambda r^2 + \frac{J^2}{4r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( -M - \Lambda r^2 + \frac{J^2}{4r^2} \right)} \\ &\quad + r^2 \left[ d\phi + \left( \frac{2Mr^2 - J^2}{2Jr^2} - \frac{M}{J} \right) dt \right]^2 \\ &= - \left( -M - \Lambda r^2 + \frac{J^2}{4r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left( -M - \Lambda r^2 + \frac{J^2}{4r^2} \right)} \\ &\quad + r^2 \left( d\phi - \frac{J}{2r^2} dt \right)^2, \end{aligned} \quad (6.19)$$

la cual (para  $M > 0$ , y  $\Lambda = -1/l^2$ , i.e.  $\Lambda < 0$ ) corresponde con el BH rotante BTZ.

- (ii) **Límite  $J \rightarrow 0$ , con  $c \neq 0$ .** En este caso se tiene que,

$$\begin{aligned} \lim_{J \rightarrow 0} S^2(r) &= 4(M^2 - c^\lambda)r^4, \\ \lim_{J \rightarrow 0} \left( \frac{S(r)}{2Jr^2} - \frac{\sqrt{M^2 - c^\lambda}}{J} \right) &= 0, \\ \lim_{J \rightarrow 0} N^2(r) &= -M - \Lambda r^2, \end{aligned} \quad (6.20)$$

entonces, el elemento de línea (6.11), toma la forma,

$$ds^2 = - \left( -M - \Lambda r^2 \right) dt^2 + \frac{M^2}{(M^2 - c^\lambda) \left( -M - \Lambda r^2 \right)} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (6.21)$$

Renombrando

$$\tilde{M} = \frac{(M^2 - c^\lambda)}{M}, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{(M^2 - c^\lambda)\Lambda}{M^2}, \quad (6.22)$$

puede ser escrita como

$$ds^2 = -\left(-\tilde{M} - \tilde{\Lambda}r^2\right) d\tilde{t}^2 + \frac{1}{\left(-\tilde{M} - \tilde{\Lambda}r^2\right)} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (6.23)$$

con

$$\tilde{t} = \frac{M^2}{(M^2 - c^\lambda)} t.$$

Por otro lado, para este caso las cantidades  $\mathcal{H}$  de (6.13), y  $P$  y  $\mathcal{H}_P$  de (6.14) y (6.15), quedan como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(P(r)) = -\frac{c^\lambda \Lambda}{2M^2}, \quad P\mathcal{H}_P = 0, \quad (6.24)$$

Por lo tanto la acción vista en la sección (3.1), con  $\mathcal{L} = 2P\mathcal{H}_P - \mathcal{H}$ , está dada por,

$$\begin{aligned} S[g_{ab}, A_a] &= \int d^3x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{4\pi} \frac{c^\lambda \Lambda}{2M^2} \right) \\ &= \int d^3x \sqrt{-g} \left( \frac{R - 2\tilde{\Lambda}}{16\pi} \right), \end{aligned} \quad (6.25)$$

y la métrica (6.23) para  $\tilde{M} > 0$ , y  $\tilde{\Lambda} = -1/\tilde{l}^2$ , (i.e.  $\tilde{\Lambda} < 0$ ) corresponde al BH estático de BTZ.

- (iii) **Comportamiento asintótico BTZ**,  $r \mapsto \infty$ . Con el propósito de mostrar que al infinito la solución corresponde al BH de BTZ estático, determinamos el comportamiento asintótico de la métrica en  $r \mapsto \infty$ , en este límite, se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(2Mr^2 - J^2)^2}{S^2(r)} &= \frac{M^2}{(M^2 - c^\lambda)}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{S(r)}{2Jr^2} - \frac{\sqrt{M^2 - c^\lambda}}{J} \right) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} N^2(r) &= -M - \Lambda r^2, \end{aligned} \quad (6.26)$$

entonces, el elemento de línea (6.11), toma la misma forma que la ecuación (6.21),

y por lo tanto, renombrando  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{\Lambda}$  y  $\tilde{t}$  la métrica adquiere la forma del BH de BTZ estático de la ecuación (6.21).

### 6.3 | Comportamiento de la solución

En esta sección abordamos los diferentes casos que surgen de la naturaleza de las raíces de la función métrica  $N(r)$  y  $S(r)$ , veremos como la interpretación de la solución depende fuertemente de si las raíces son reales o complejas. Lo cual está definido por los dos parámetros que juegan el rol más importante en esta solución, el parámetro de rotación  $J$  y el parámetro de campo NLED,  $Q$ .

Vamos a considerar que  $\Lambda = -1/l^2$  y  $(M^2 - c^\lambda) > 0$  con el fin de que la solución (6.11)–(6.12) sea asintóticamente AdS.

Para hacer mas claro el estudio de las raíces, vamos a usar un re-escalamiento en las variables indicada por un gorro como sigue,

$$\hat{t} = \frac{t\sqrt{M}}{l}, \quad \hat{r} = \frac{r}{l\sqrt{M}}, \quad \hat{\phi} = \sqrt{M}\phi, \quad \hat{J} = \frac{J}{lM}, \quad \hat{Q} = \frac{M^2 - c^\lambda}{M^2}. \quad (6.27)$$

Notemos que al apagar el campo electromagnético, lo que equivale a hacer  $c = 0$ , se tiene que  $\hat{Q} = 1$ .

De tal forma que el elemento de línea queda

$$ds^2 = - \left( \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} + \hat{r}^2 - 1 \right) d\hat{t}^2 + \frac{(\hat{J}^2 - 2\hat{r}^2)^2}{(\hat{J}^2/4\hat{r}^2 + \hat{r}^2 - 1)(\hat{J}^4 - 4\hat{J}^2\hat{r}^2 + 4\hat{Q}\hat{r}^4)} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 \left[ d\hat{\phi} + \left( \frac{\sqrt{\hat{J}^4 - 4\hat{J}^2\hat{r}^2 + 4\hat{Q}\hat{r}^4}}{2\hat{J}\hat{r}^2} - \frac{\sqrt{\hat{Q}}}{\hat{J}} \right) d\hat{t} \right]^2. \quad (6.28)$$

Entonces, los ceros de las funciones  $N^2(r)$  y  $S^2(x)$  definidas en la ecuación (6.12) están dados, respectivamente en términos de  $\hat{Q}$  y  $\hat{J}$ , por,

$$\hat{r}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \hat{J}^2} \right); \quad \hat{x}_\pm^2 = \frac{\hat{J}^2}{2\hat{Q}} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \hat{Q}} \right), \quad (6.29)$$

donde  $\hat{r}_\pm$  son las raíces de  $N^2(\hat{r}_\pm) = 0$  y  $\hat{x}_\pm$  son las raíces de  $S^2(\hat{x}_\pm) = 0$ .

Es claro que para todo valor de  $\hat{J}$  y  $\hat{Q} \in \mathbb{R}$  tal que  $\hat{r}_\pm$  y  $\hat{x}_\pm$  sean números reales

se cumple que,

$$\hat{r}_-^2 \leq \hat{r}_s^2 \leq \hat{r}_+^2 \quad \text{y} \quad \hat{x}_-^2 \leq \hat{r}_s^2 \leq \hat{x}_+^2, \quad (6.30)$$

donde el radio  $r_s$  es  $\hat{r}_s = \frac{\hat{J}}{\sqrt{2}}$ . Las raíces  $(\hat{r}_-)^2$  y  $(\hat{r}_+)^2$ , de  $N(r)$ , coinciden solo si  $\hat{J} = 1$ . En ese caso, se tiene que  $(\hat{r}_-)^2 = (\hat{r}_+)^2 = \hat{r}_s^2 = 1/2$ . Similarmente, las raíces  $(\hat{x}_-)^2$  y  $(\hat{x}_+)^2$ , son iguales si  $\hat{Q} = 1$ , lo que implica que  $(\hat{x}_-)^2 = (\hat{x}_+)^2 = \hat{r}_s^2 = \hat{J}^2/2$ .

La solución presenta diferentes características dependiendo del rango de valores que tomen los parámetros  $\hat{Q}$  y  $\hat{J}$ , que hemos clasificado en los siguientes casos. (Ver figura 29).

1. *BH con un horizonte de eventos en  $\hat{r}_h = \hat{r}_+$ : Caso  $\hat{r}_+ \in \mathbb{R}^+$  y  $\hat{x}_+ \in \mathbb{C}$ .*

Imponiendo que  $\hat{Q} > 1$ , de la ecuación (6.29), se obtiene que  $S(r)$  no tiene raíces reales, es decir,  $S^2(r) \in \{\mathbb{R}^+ - \{0\}\}$ , para todo  $r$  y  $\hat{x}_\pm \in \mathbb{C}$ . Si, adicionalmente, restringimos a  $\hat{J} \leq 1$ , entonces, las dos raíces de  $N(r)$ ,  $N^2(\hat{r}_\pm) = 0$ , son reales. De acuerdo a la ecuación (6.30), en  $(2+1)$ -dimensiones, la región  $\hat{r} = \hat{r}_-$  es completamente encerrada por la singularidad en  $\hat{r} = \hat{r}_s$ ; entonces, la región  $\hat{r} = \hat{r}_-$  no puede ser alcanzada por un observador.

Además resulta que este caso tiene un límite estacionario, la componente  $g_{tt}$  de la métrica (6.28), se hace cero en  $\hat{r} = \hat{r}_{\text{erg}}$ , dado por

$$\hat{r}_{\text{erg}}^2 = \frac{2\hat{Q} + \sqrt{\hat{Q}(\hat{J}^4 + 4\hat{Q} - 4\hat{J}^2\hat{Q})}}{4\hat{Q} - \hat{J}^2} > \hat{r}_+. \quad (6.31)$$

la región delimitada por  $r = \hat{r}_{\text{erg}}$  es la ergoregión o ergosfera, y se encuentra afuera del horizonte de eventos.

Si el campo electromagnético se apaga,  $c = 0 \Rightarrow \hat{Q} = 1$ , se apaga la parte NLED pero el BH sigue cargado, como puede verse en la definición de  $\hat{Q}$  de la ecuación (6.27); entonces, el radio de la ergosfera se reduce a  $\hat{r}_{\text{erg}}^2 = 1$  o  $r_{\text{erg}} = l^2 M$ , el cual es consistente con la ergosfera para el BH de BTZ, ya que cuando  $\hat{Q} = 1$  se recupera la solución de BTZ.

En la figura (23) se observa que la región  $\hat{r} = \hat{r}_s$  está completamente encerrada

por la región  $\hat{r} = \hat{r}_+$ , y se satisface la siguiente desigualdad,

$$\hat{r}_s < \hat{r}_h = \hat{r}_+ < \hat{r}_{\text{erg}}.$$

Por lo tanto, para la configuración de parámetros  $\{ \Lambda = -1/l^2, \hat{Q} > 1, \hat{J} \leq 1 \}$ , la métrica (6.28) tiene la estructura de un BH-AdS cargado de  $(2+1)$ -dimensiones, con horizonte de eventos en  $\hat{r} = \hat{r}_h = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \hat{J}^2})}$ , y singularidad de curvatura en  $\hat{r} = \hat{r}_s = \frac{\hat{J}^2}{2}$ , con lo cual, hemos obtenido una generalización rotante del BH de BTZ. La posición de las regiones mencionadas se muestra en la figura 23.

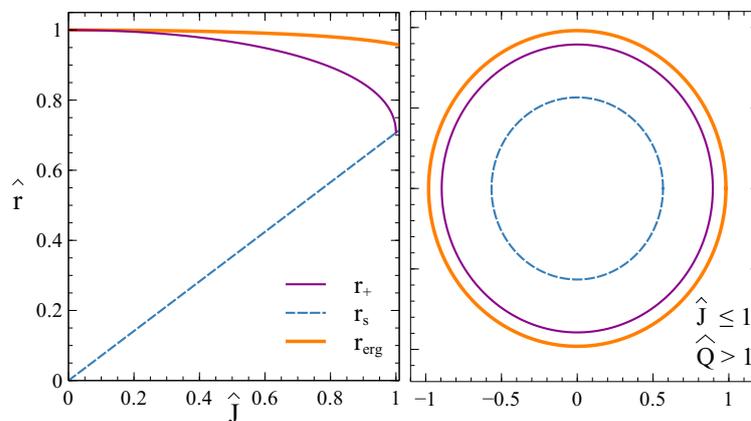


Figura 23: En esta figura ilustramos el caso de agujero negro con un horizonte. A la izquierda  $\hat{Q}=1.2$ . La línea en guiones representa la singularidad de curvatura  $\hat{r}_s$ , la línea púrpura es el horizonte de eventos  $\hat{r}_+$  y la naranja (curva exterior) es el radio de la ergoregión  $\hat{r}_{\text{erg}}$ . La raíz  $\hat{r}_-$  (no se muestra en la gráfica) estaría dentro de  $\hat{r}_s$ .

2a. *BH con dos horizontes: Caso  $\hat{r}_+ \in \mathbb{R}^+$  y  $\hat{x}_+ \in \mathbb{R}^+$ .*

De acuerdo a las ecuaciones (6.29), asumiendo que  $\hat{J} \leq 1$  y  $\hat{Q} \leq 1$  las raíces son entonces reales, y en este caso hay dos horizontes y una ergosfera como se muestra en la figura (24).

Notemos que hay dos regiones de interés, la primera región delimitada por  $\hat{r}_s < \hat{x}_+ < \hat{r}_+ < \hat{r}_{\text{erg}}$ , donde el horizonte interior  $\hat{r}_h^{\text{in}}$  es  $\hat{r}_h^{\text{in}} = \hat{x}_+$  mientras que el horizonte exterior  $\hat{r}_h^{\text{ext}}$  es  $\hat{r}_h^{\text{ext}} = \hat{r}_+$ . En la segunda región los horizontes se intercambian de modo que  $\hat{r}_s < \hat{r}_+ < \hat{x}_+ < \hat{r}_{\text{erg}}$ .

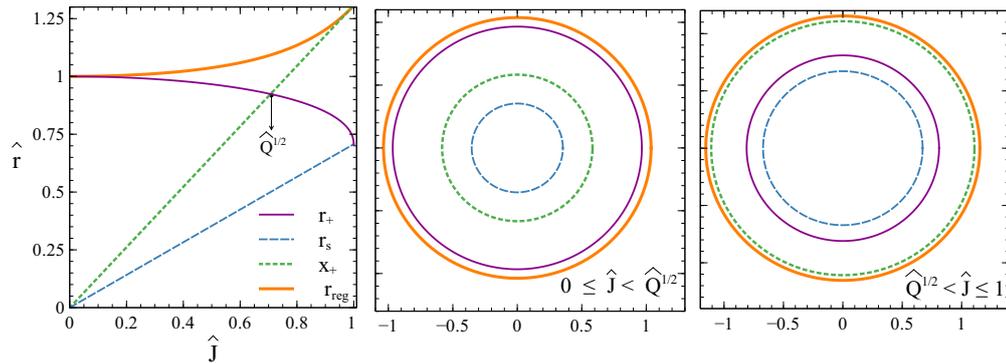


Figura 24: Mostramos el caso de BH con dos horizontes. Los parámetros  $\hat{Q}$  y  $\hat{J}$  son ambos menores que 1; a la izquierda  $\hat{Q} = 0.5$ . Las líneas azules (guiones) representa la singularidad de curvatura  $\hat{r}_s$ , la verde (punteada) es para  $\hat{x}_+$ , la curva púrpura es la raíz  $\hat{r}_+$  y la curva naranja (exterior) representa la ergoregión  $\hat{r}_{\text{erg}}$ . En la gráfica central se muestra el horizonte interior  $\hat{x}_+$  y el horizonte exterior  $\hat{r}_+$ . En la gráfica de la derecha los horizontes están intercambiadas. Tanto en la figura central como en la figura de la derecha se está graficando  $\hat{r}$  paramétrico.

2b. *BH por extensión compleja. Caso  $\hat{r}_+ = \hat{x}_+$ .*

En este caso se tiene un BH con un solo horizonte de eventos, con las raíces de  $N(r)$  y  $S(r)$  reales y tal que  $\hat{r}_+ = \hat{x}_+$ . Este caso ocurre si  $\hat{J} = \sqrt{\hat{Q}}$ . Substituyendo en la ecuación (6.31) se obtiene el radio de la ergoregión  $\hat{r}_{\text{erg}}$ ,

$$\hat{r}_{\text{erg}}^2 = \frac{2}{3} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4}\hat{J}^2} \right), \quad (6.32)$$

tal región existe solo si  $\hat{J}^2 \leq 4/3$ , lo cual se cumple siempre, ya que  $\hat{J}^2 \leq 1$ . Además se satisface que  $\hat{r}_+ = \hat{x}_+ < \hat{r}_{\text{erg}}$  como se observa en la figura (25).

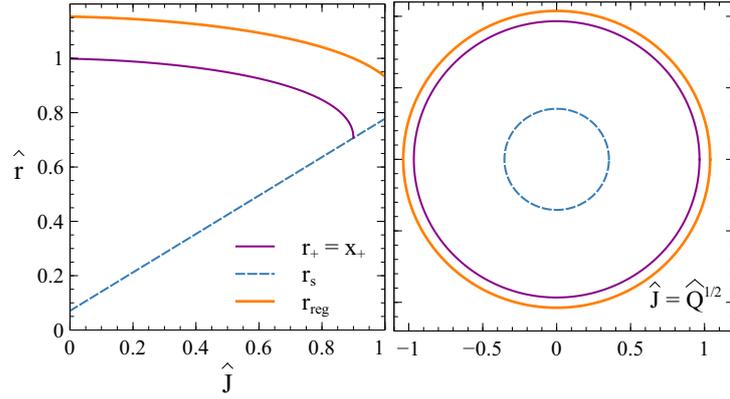


Figura 25: Aquí se muestra el caso en el que las raíces de  $S(r)$  y de  $N(r)$  coinciden,  $\hat{r}_+ = \hat{x}_+$ , indicado en las líneas sólidas color púrpura, para  $\hat{J} = \sqrt{\hat{Q}}$ . La curva en guiones (círculo central de la derecha) representa la singularidad, y la línea sólida naranja, (el círculo exterior de la derecha) indica la posición de la ergosfera.

En este caso el elemento de línea (6.28) toma la forma

$$ds^2 = - \left( \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} + \hat{r}^2 - 1 \right) d\hat{t}^2 + \frac{(\hat{J}^2 - 2\hat{r}^2)^2}{4\hat{J}^2\hat{r}^2 \left( \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} + \hat{r}^2 - 1 \right)^2} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 \left[ d\hat{\phi} + \left( \frac{1}{\hat{r}} \left( \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} + \hat{r}^2 - 1 \right)^{1/2} - 1 \right) d\hat{t} \right]^2. \quad (6.33)$$

el cual es válido para el dominio  $\hat{r} \geq \hat{r}_h = \hat{r}_+ = \hat{x}_+$ .

Sin embargo, en la región,  $\hat{r}_s \leq \hat{r} < \hat{r}_+$ , resulta que  $N^2(r) \leq 0$ ; lo que implica un cambio de signatura en el elemento de línea y que ésta sea una métrica compleja. Podemos hacer una transformación de la forma,  $\tilde{t} = i\hat{t}$ ,  $\tilde{\phi} = \hat{\phi} - \hat{t}$ , tal que la métrica se vuelve real, es decir

$$ds^2 = - \left( 1 - \hat{r}^2 - \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} \right) d\tilde{t}^2 + \frac{(\hat{J}^2 - 2\hat{r}^2)^2}{4\hat{J}^2\hat{r}^2 \left( 1 - \hat{r}^2 - \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} \right)^2} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 \left[ d\tilde{\phi} + \left( \frac{1}{\hat{r}} \sqrt{\left( 1 - \hat{r}^2 - \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} \right)} \right) d\tilde{t} \right]^2. \quad (6.34)$$

se puede ver que la signatura de la métrica es la misma en ambas regiones, en la región interna ( $\hat{r}_s \leq \hat{r} \leq \hat{r}_+$ ) y en la región exterior ( $\hat{r}_+ \leq \hat{r} \leq \infty$ ), siendo

$\hat{r}_+ = \hat{x}_+$  el horizonte de eventos del BH extremo.

## 6.4 | Ecuaciones Geodésicas

En esta sección vamos a describir las características de las geodésicas de partículas masivas y de partículas sin masa que viajan en la vecindad del BH. Como hemos mencionado en capítulos previos, para un espacio-tiempo con simetría axial, en (2+1) llamada simetría cíclica, la energía  $E$  y el momento angular  $L_z$  de una partícula de prueba de masa  $m$  y momento  $P^i = m \frac{dx^i}{d\tau}$ , con  $x^i = t, r, \phi$  y  $\tau$  el parámetro afín a lo largo de geodésicas, son cantidades conservadas,

$$\begin{aligned} E &= -P_t = (N^2(r) - r^2\omega^2) m \dot{t} - r^2\omega m \dot{\phi}, \\ L_z &= P_\phi = r^2\omega m \dot{t} + r^2 m \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

donde las funciones  $N^2(r)$  y  $\omega(r)$  están definidas en la ecuación (6.12) y el punto representa derivada respecto al parámetro  $\tau$ .

Las ecuaciones geodésicas son entonces

$$\dot{t} = \frac{1}{N^2(r)} (E + \omega L_z), \quad (6.36)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{N^2(r)} \left( \frac{N^2(r)}{r^2} L_z - \omega (E + \omega L_z) \right), \quad (6.37)$$

$$\frac{N^2(r)}{H^2(r)} \dot{r}^2 = (E + \omega L_z)^2 + N^2(r) \left( \frac{L_z}{r^2} - \alpha \right), \quad (6.38)$$

donde, de ahora en adelante  $E$  y  $L_z$  son la energía y momento angular por unidad de masa. La constante  $\alpha$  está determinada por el producto escalar  $g^{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = \alpha$ , y puede tomar los valores  $\{-1, 0, 1\}$ , correspondiente a geodésicas tipo tiempo, nulas o tipo espacio relativamente.

Resolviendo la ecuación radial (6.38) para  $E$  en los puntos de retorno  $\dot{r} = 0$ , se obtiene

$$\hat{E}_\pm = -\hat{\omega} \hat{L}_z \pm \frac{1}{\hat{r}} \sqrt{\hat{N}^2(\hat{r}) (\hat{L}_z^2 - \alpha \hat{r}^2)}, \quad (6.39)$$

donde hemos escrito la solución en términos de las variables gorro definidas en (6.27) y además, hemos definido las siguientes cantidades

$$\hat{E} = \frac{E}{\sqrt{M}}, \quad \hat{L}_z = \frac{L_z}{l\sqrt{M}}, \quad \hat{\omega} = l\omega, \quad \hat{N}^2(\hat{r}) = \frac{N^2(r)}{M}. \quad (6.40)$$

En la figura (26) se muestra la solución (6.39) para el caso  $\hat{r}_+ \in \mathbb{R}^+$ ,  $\hat{x}_+ \in \mathbb{C}$ , los otros casos tienen un comportamiento muy similar: las partículas masivas quedan siempre atrapadas en el BH, cosa que no necesariamente ocurre para fotones. Observemos que existen estados de energía negativa en la ergosfera, lo cual sugiere que el proceso de extracción de energía propuesto por Penrose podría aplicarse.

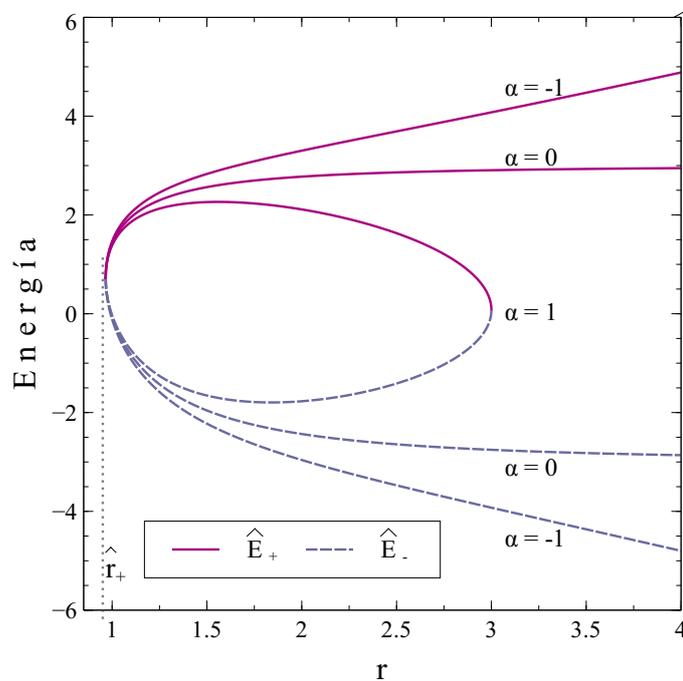


Figura 26: La energía de partículas de prueba en los puntos de retorno en el potencial del BH. Notemos que hay regiones con energía negativa, por lo que el mecanismo de extracción de energía de Penrose podría ser posible. En ésta gráfica  $\hat{J} = 0.5$ ,  $\hat{L}_z = 3$ ,  $\hat{Q} = 1.2$ ;  $\alpha = -1, 0, 1$ , para geodésicas tipo tiempo, nulas y espaciales respectivamente.

Reescribiendo la ecuación radial (6.38), se tiene

$$\hat{r}^2 = -\hat{E}^2 \left( \hat{N}^2(\hat{r}) \frac{\hat{L}_z^2}{\hat{r}^2 \hat{E}^2} - \left( 1 + \hat{\omega} \frac{\hat{L}_z}{\hat{E}} \right)^2 - \alpha \frac{\hat{N}^2(\hat{r})}{\hat{E}^2} \right) \frac{4\hat{J}^2 \hat{r}^4 \hat{\omega}^2}{(\hat{J}^2 - 2\hat{r}^2)^2}, \quad (6.41)$$

y usando  $\hat{r}^2 = \hat{E}^2 - V_{\text{eff}}^2$ , se puede identificar el término correspondiente al potencial

efectivo,

$$V_{\text{eff}}^2 = \hat{E}^2 \left[ 1 + \left( \hat{N}^2(\hat{r}) \frac{\hat{L}_z^2}{\hat{r}^2 \hat{E}^2} - \left( 1 + \hat{\omega} \frac{\hat{L}_z}{\hat{E}} \right)^2 - \alpha \frac{\hat{N}^2(\hat{r})}{\hat{E}^2} \right) \frac{4\hat{J}^2 \hat{r}^4 \hat{\omega}^2}{(\hat{J}^2 - 2\hat{r}^2)^2} \right], \quad (6.42)$$

El cual es ilustrado en la figura 27 junto con el correspondiente para el BH de BTZ, (ver sección 6.19).

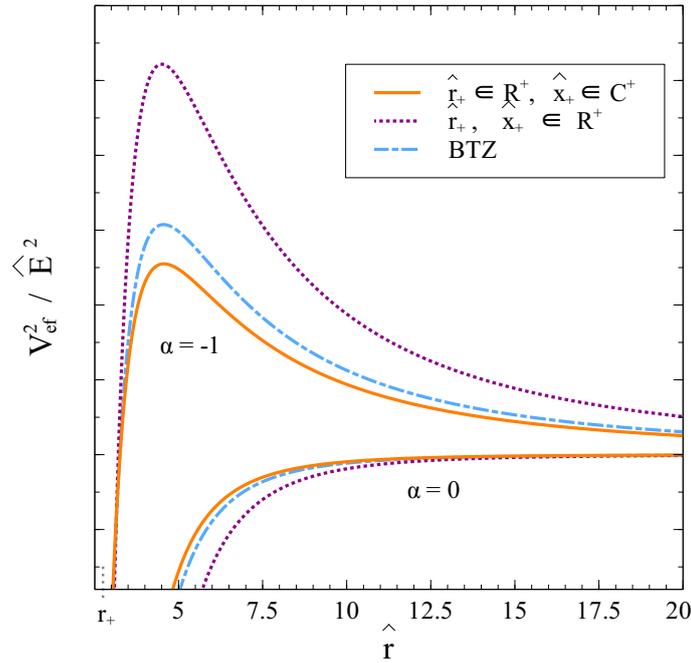


Figura 27: Potencial efectivo para una partícula de prueba en el espacio-tiempo de un BH, comparado con el potencial efectivo del BH BTZ; el potencial efectivo asintóticamente tiende al de BTZ.  $\alpha = 0$  es para partículas sin masa mientras que  $\alpha = -1$  corresponde a partículas masivas. Los parámetros fijos son  $\hat{J} = 0.5$ ,  $\hat{E} = 5$ ,  $\hat{L}_z = 3$  y la carga vale  $\hat{Q} = 1.2$  para la curva sólida,  $\hat{Q} = 0.6$  para la curva punteada, y  $\hat{Q} = 1$  para la curva en guiones (BTZ).

De la gráfica del potencial efectivo de la figura 27 se puede ver que para geodésicas tipo tiempo (partículas de prueba con masa) hay una barrera que induce órbitas circulares inestables en su máximo; mientras que si  $r$  aumenta, el potencial decrece monótonamente, exhibiendo la ausencia de órbitas circulares estables, de forma similar a como ocurre para el BH de BTZ. Para geodésicas nulas (partículas sin masa) el potencial efectivo es monótono decreciente conforme la partícula se prueba se acerca al BH, es decir, se tienen un comportamiento tipo Schwarzschild.

## 6.5 | Interpretación de wormhole

El estudio de las soluciones de agujero de gusano, WH por sus siglas en inglés, ha cobrado interés recientemente debido a su extraordinaria conexión con el entrelazamiento, sugerido recientemente por Maldacena y Susskind [54].

En esta sección veremos que la solución dada en la ecuación (6.28) admite una interpretación de WH atravesable para un determinado rango de los parámetros.

La forma general de la métrica que describe un WH en un espacio-tiempo estacionario con simetría cíclica en  $(2 + 1)$  dimensiones, está dada por

$$ds_{wh}^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 [d\phi + \omega(r) dt]^2, \quad (6.43)$$

donde, de acuerdo a [55, 56],  $\Phi(r)$  y  $b(r)$  son funciones de la coordenada radial  $r$ . A  $\Phi(r)$  se le conoce como función de corrimiento al rojo (red-shift function), ya que está relacionada con el corrimiento al rojo gravitacional; mientras que  $b(r)$  es llamada función de forma. La coordenada radial va aumentando desde su valor mínimo  $r_0$  (garganta del WH  $b(r_0) = r_0$ ) hasta  $r \rightarrow \infty$ .

Por otro lado, para un WH atravesable, se exige que no existan horizontes de eventos, lo cual puede identificarse como las regiones donde  $e^{2\Phi(r)} = 0$ ; si  $e^{2\Phi(r)}$  es una función continua, diferente de cero y finita en todo el rango de  $r$ ,  $r \in [r_0, \infty)$ , entonces, no hay horizontes.

Además, para un WH atravesable se requiere que se satisfaga la condición de *flaring out*, es decir que la garganta se mantenga abierta, dada por

$$\frac{b(r) - rb(r),r}{b^2(r)} > 0. \quad (6.44)$$

Notemos que en la garganta  $b(r_0) = r_0$ , y la condición de flaring out se reduce a  $b_{,r}(r_0) < 1$ . Relacionando con el tensor de energía momento  $E_{(\alpha)(\beta)}$  a través de las ecuaciones de Einstein, la condición de flaring out resulta ser equivalente a la violación de la condición de energía nula [1]. Para mantener la signatura de la métrica, se impone además la condición  $(1 - b/r) \geq 0$ .

<sup>1</sup>Establece que  $E_{(\alpha)(\beta)} n^{(\alpha)} n^{(\beta)} \geq 0$  para un vector nulo  $n^{(\alpha)}$ .

Ahora que hemos establecido las generalidades de un WH [55, 56], mostraremos que para cierto ajuste de los parámetros, la solución (6.28) representa un WH atravesable en  $(2 + 1)$  dimensiones cargado y en rotación.

Tenemos entonces que el elemento de línea para un espacio-tiempo estacionario con simetría cíclica en  $(2 + 1)$  dimensiones está dado por

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{H^2(r)} + r^2(d\phi + \omega(r)dt)^2, \quad (6.45)$$

comparando (6.45) y (6.43), se obtiene que

$$e^{2\Phi(r)} = N^2(r), \quad 1 - \frac{b(r)}{r} = H^2(r) = \frac{N^2(r)S^2(r)}{(2Mr^2 - J^2)^2}, \quad \omega(r) = \frac{S(r)}{2Jr^2} - \frac{\sqrt{M^2 - c^\lambda}}{J}, \quad (6.46)$$

con las funciones métricas dadas por (6.12). Recordemos que las raíces de  $N^2(r)$  están dadas en las ecuaciones (6.29),  $\hat{r}_\pm^2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \hat{J}^2} \right)$ , si exigimos que  $\hat{J} > 1$ , resulta que las raíces son complejas, es decir  $N(r) = 0$  no tiene raíces reales; entonces  $e^{2\Phi(r)} = N^2(r) \in \{\mathbb{R}^+ - \{0\}\}$ , para todo  $r$ .

Si adicionalmente se impone que  $\hat{Q} < 1$ , se puede definir un dominio  $r \in [\hat{r}_0, \infty)$  con  $\hat{r}_0$  dado por  $H^2(\hat{r}_0) = 0$ , i.e.  $\hat{r}_0$  es la garganta del WH,

$$\hat{r}_0^2 = \hat{x}_+^2 = \frac{\hat{J}^2}{2\hat{Q}} \left( 1 + \sqrt{1 - \hat{Q}} \right), \quad (6.47)$$

tal que para todo  $r \in (\hat{r}_0, \infty)$  se cumple que  $\omega(r) > 0$ ,  $1 - b(r)/r > 0$  y  $b(r_0) = r_0$ .

Mas aún, el WH es atravesable pues la condición de flaring out se cumple, i.e.  $b'(r_0) < 1$ . Usando  $b(r)$  en (6.44), se encuentra que

$$-\frac{2(\hat{J}^2 - \hat{Q})}{\sqrt{1 - \hat{Q}}} < 0, \quad \Rightarrow \quad \hat{J}^2 > \hat{Q}, \quad (6.48)$$

lo cual se cumple siempre por que hemos asumido  $\hat{J} > 1$  y  $Q \leq 1$ , con lo que podemos afirmar que la métrica admite interpretación de WH atravesable.

Resumiendo, para la configuración de parámetros  $\{\hat{J} > 1, \hat{Q} < 1\}$ , la métrica (6.28) tiene una estructura de un WH-AdS en un espacio-tiempo estacionario con

simetría axial de  $(2 + 1)$  dimensiones con dominio  $r \in [r_0, \infty)$ . La garganta del WH está localizada en  $r = r_0$ , y está caracterizada por la función de corrimiento al rojo red-shift  $\Phi(r)$ , la función de forma  $b(r)$ , y  $\omega(r)$  dados, respectivamente, por (6.46). Mas aún, existe el límite estacionario si  $1 < \hat{J} < 2\sqrt{\hat{Q}}$  i.e. una región donde  $g_{tt} = -N^2(r) - \omega^2(r) = 0$ . Los radios  $\hat{r}_0$  y  $\hat{r}_{\text{erg}}$  están representados en la figura (28); la singularidad  $\hat{r}_s$  no pertenece al espacio-tiempo del WH.

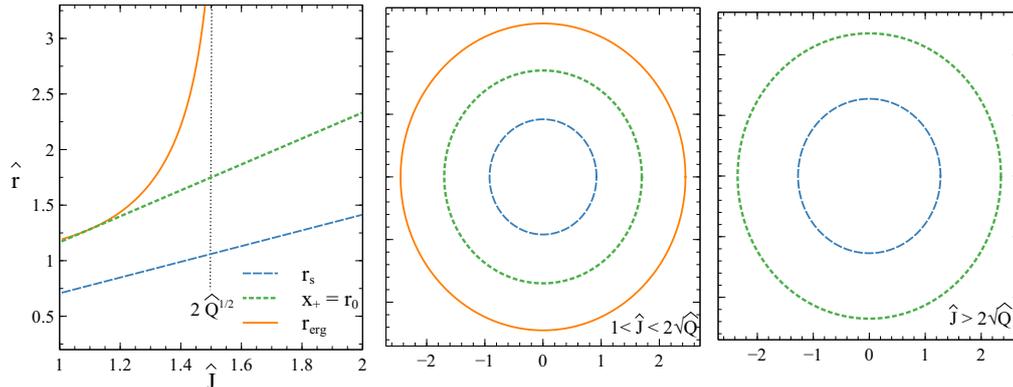


Figura 28: Caso de agujero de gusano: en la gráfica se ilustra la garganta y la ergoregión. La línea en guiones es la singularidad de curvatura,  $\hat{r}_s$ , pero no está incluida en el espacio del WH; la línea punteada corresponde a la garganta  $r_0 = \hat{x}_+$ , y a curva sólida representa el límite estacionario, presente solo si  $1 < \hat{J} < 2\sqrt{\hat{Q}}$ .  $\hat{J} > 1$  y  $\hat{Q} \leq 1$ , a la izquierda  $\hat{Q} = 0.6$ .

Por auto consistencia, veamos que la violación de la condición de energía nula se puede corroborar, determinando que la contribución de materia exótica es necesaria y es la responsable de mantener abierta la garganta del WH. Calculando  $E_{(\alpha)(\beta)}n^{(\alpha)}n^{(\beta)}$  para el vector nulo  $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$ , se obtiene que,

$$8\pi E_{(\alpha)(\beta)}n^{(\alpha)}n^{(\beta)} = 8\pi (E_{(0)(0)} + E_{(1)(1)}) = 2\mathcal{H} + 2(2P\mathcal{H}_P - \mathcal{H}) = 4P\mathcal{H}_P, \quad (6.49)$$

por lo tanto, para todo  $r$  en el dominio de WH se satisface que,

$$2\pi E_{(\alpha)(\beta)}n^{(\alpha)}n^{(\beta)} = P\mathcal{H}_P = \frac{2\hat{J}^2\hat{r}^2 \left( \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} + \hat{r}^2 - 1 \right) (1 - \hat{Q})}{(\hat{J}^2 - 2\hat{r}^2)^3} < 0, \quad (6.50)$$

ya que,  $\hat{Q} < 1$ ,  $\hat{N}^2(\hat{r}) = \left( \frac{\hat{J}^2}{4\hat{r}^2} + \hat{r}^2 - 1 \right) > 0$  y  $(\hat{J}^2 - 2\hat{r}^2)^3 < 0$ , para todo  $r$  en el dominio del WH.

En la figura (29) puede verse que partiendo de la región de BH con dos horizontes, es

posible pasar a la región de WH si se incrementa el momento angular, y a la región de BH con un solo horizonte si se aumenta la carga eléctrica manteniendo el momento angular menor que uno.

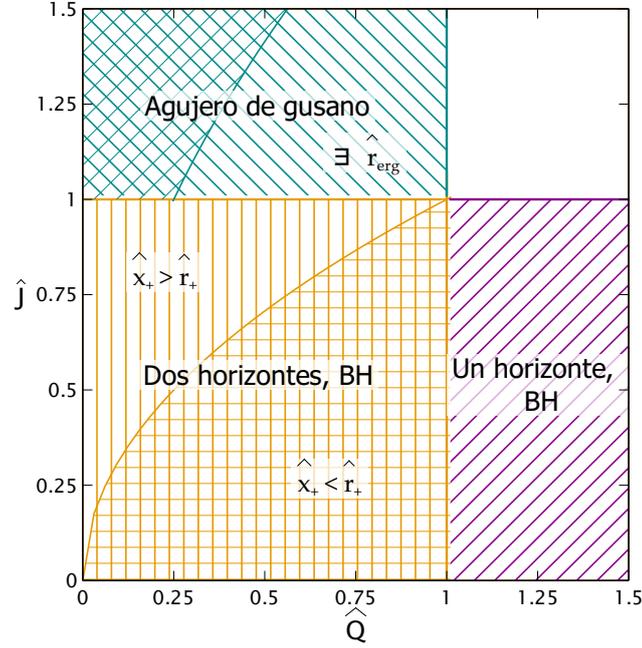


Figura 29: En la región de dos horizontes la curva está dada por la función  $\hat{J} = \sqrt{\hat{Q}}$  y es donde ocurre el intercambio de horizontes  $\hat{x}_+$  y  $\hat{r}_+$ . Observemos que para  $\hat{J} \leq 1$  e incrementando la carga eléctrica  $\hat{Q} > 1$ , se tiene la región de BH de un solo horizonte. En la región de agujero de gusano, tenemos que si  $\hat{J} < 2\sqrt{\hat{Q}}$  el análisis admite una ergosfera

Resaltamos que la solución que encontramos (ecuaciones (6.11) y (6.12)) tiene un horizonte de eventos si  $\{J/(lM) \leq 1, (M^2 - c^\lambda)/M^2 > 1\}$ ; y dos horizontes para el caso  $\{J/(lM) \leq 1, (M^2 - c^\lambda)/M^2 \leq 1\}$  ambos con una ergosfera que recubre el horizonte. Además, en los límites adecuados se recupera el BH de BTZ, y si los parámetros satisfacen que  $\{J/(lM) > 1, (M^2 - c^\lambda)/M^2 < 1\}$  la solución admite una interpretación de WH atravesable, lo cual se ilustra en el espacio de parámetros  $(\hat{Q}, \hat{J})$  de la figura (29).

## 6.6 | Termodinámica

Por completez presentamos la forma que adquieren la temperatura y la ecuación de estado para la solución dada presentada dada en las ecuaciones (6.11) y (6.12).

La temperatura está dada por

$$T = \frac{g'_{tt}(r_+)}{4\pi} = -\frac{rQ^2}{2\pi J^2} - \frac{r_+\Lambda}{2\pi}, \quad (6.51)$$

donde nuevamente, la constante cosmológica  $\Lambda$  puede interpretarse como una presión termodinámica  $P = -\Lambda/8\pi$ , con lo que la ecuación anterior se transforma en la ecuación de estado

$$P = \frac{T}{v} - \frac{Q^2}{8\pi J^2}, \quad v = 4r_+ \quad (6.52)$$

Como podemos ver, la ecuación no tiene puntos de inflexión, es decir, no exhibe comportamiento crítico ni cambios de fase, similarmente a como ocurre para el BH de BTZ que estudiamos en la sección [5.2](#).

## 7 | Conclusiones y perspectivas

En este trabajo de tesis hicimos una revisión de la termodinámica de agujeros negros y algunas de las propiedades termodinámicas que se pueden estudiar, como la energía libre de Gibbs y la capacidad calorífica, tomando como ejemplo el BH cargado de Reissner-Nordstrom.

Posteriormente introdujimos el formalismo de la NLED, definimos la función de estructura  $\mathcal{H}$  en términos del invariante  $P$ .

Reportamos las dos soluciones mas relevantes de la NLED acopladas con gravedad, que son el BH de Born-Infeld y el BH de Euler-Heisenberg. Posteriormente hicimos la generalización de la solución electrodinámica de Euler-Heisenberg acoplada con gravedad de Einstein para un espacio-tiempo estático y con simetría esférica con constante cosmológica  $\Lambda$ . Mediante el cálculo del potencial efectivo se observa que las partículas de prueba en las inmediaciones del BH pueden tener órbitas circulares estables e inestables, dependiendo de si la partícula tiene masa o no.

Al introducir  $\Lambda$  fue posible realizar el estudio termodinámico del BH de EH-AdS, mediante la interpretación de  $\Lambda$  como la presión termodinámica. Derivamos la forma que adquiere la fórmula de Smarr en términos de la carga  $Q$ , la presión  $P(\Lambda)$ , y el parámetro de la teoría  $a$ , y comprobamos que es consistente con la primera ley de la termodinámica de BH. El parámetro  $a$  juega también el rol de variable termodinámica, que mediante un análisis dimensional puede interpretarse como un tipo de polarización del vacío, siendo  $\mathcal{A} = \partial M / \partial a$  su variable conjugada. Presentamos la ecuación de estado así como los diagramas  $P-v$  en donde se observan los cambios de fase. Derivamos los valores críticos de la presión  $P_c$ , temperatura  $T_c$  y volumen  $v_c$ , encontrando dos tipos de comportamiento: uno tipo Maxwell (electrodinámica lineal) y otro que hace manifiesta la influencia de la NLED. Con los valores críticos

encontrados fue posible calcular la razón crítica  $\rho_c = \frac{P_c v_c}{T_c}$  que en la aproximación de valores pequeños de  $a$  reproduce la razón crítica de un fluido de Van der Waals.

Otro aspecto interesante de la solución de EH-AdS es la característica forma de cola de golondrina en la energía libre de Gibbs, ya que indica la existencia de un cambio de fase de primer orden para  $P < P_c$ . Dichas transiciones de fase también pueden verse en los diagramas  $T$ - $S$ , donde la ley de áreas iguales de Maxwell se satisface. Una característica relevante que aparece en la gráfica de la energía libre de Gibbs es una separación en la región de BH pequeño, lo que puede interpretarse como una segunda transición de fase para algunos valores de la presión. También mostramos la curva de coexistencia  $P$ - $T$ , donde se observa las transiciones de fase del BH, *pequeño/intermedio/grande*. El calor específico a  $Q$  constante nos permite entender que el parámetro de EH tiene un efecto en la estabilidad del BH y que la transición inestable-estable es diferente al de electrodinámica lineal.

Además, construimos la ley de estados correspondientes en el espacio de parámetros reducido alrededor de los puntos críticos, para así determinar el valor de los exponentes críticos que coinciden exactamente con los reportados para el fluido de Van der Waals.

Posteriormente presentamos una revisión de la solución del BH de BTZ, que corresponde a un BH cargado y/o en rotación en  $(2 + 1)$  dimensiones en un espacio-tiempo estático con simetría axial.

Finalmente, se hizo el estudio de una solución exacta de las ecuaciones de Einstein acopladas con NLED en  $(2 + 1)$  dimensiones en un espacio tiempo Anti-de Sitter. La solución está caracterizada por la masa  $M$ , el momento angular  $J$ , la constante cosmológica  $\Lambda$  y el parámetro electromagnético  $Q$ . Mostramos que dependiendo del rango de valores que tomen los parámetros, la solución puede representar un BH o un WH.

Mostramos que en el límite sin carga, la solución tiende al BH de BTZ rotante, mientras el límite de  $r \rightarrow \infty$  corresponde al BH estático BTZ, en contraste con las derivaciones previas de BH cargado estacionario en  $(2 + 1)$  con electrodinámica lineal, en las cuales la energía diverge. Además, en el límite sin rotación se recupera el BH estático cargado de BTZ. Cabe mencionar que la solución encontrada tiene una singularidad de anillo en  $r_s \neq 0$ , parecido al espacio-tiempo de Kerr-Newman.

La solución que encontramos tiene un horizonte de eventos si

$$\{J/(lM) \leq 1, \quad (M^2 - c^\lambda)/M^2 > 1\},$$

y dos horizontes para el caso

$$\{J/(lM) \leq 1, \quad (M^2 - c^\lambda)/M^2 \leq 1\},$$

ambos con una ergosfera que recubre el horizonte.

El invariante electromagnético  $P$  de la solución reportada en el capítulo 6 es regular en el horizonte de eventos, mientras que  $F$  diverge.

Estudiamos el movimiento geodésico de partículas de prueba, resolvimos la ecuación radial en los puntos de retorno y observamos que existen regiones con energía negativa, mientras que la barrera del potencial efectivo para partículas masivas es mas alta que en BTZ para el caso con dos horizontes, y mas baja para el caso de un horizonte, pero conforme la coordenada radial crece, ambos casos tienden al potencial de BTZ.

Además, la solución admite una interpretación de WH si los parámetros cumplen

$$\{J/(lM) > 1, \quad (M^2 - c^\lambda)/M^2 < 1\},$$

y presenta una especie de ergosfera si se satisface la siguiente desigualdad

$$\left\{1 < J/(lM) < 2\sqrt{(M^2 - c^\lambda)}/M\right\}. \quad (7.1)$$

La figura (29) sugiere que si partimos del BH con dos horizontes de eventos, es decir,  $\hat{J} = 1$  y  $\hat{Q} \leq 1$ , e incrementamos poco a poco el momento angular (arrojando partículas con cierto momento angular dentro del BH), tal que  $\hat{J} > 1$  el BH se transformará en un WH. De manera similar se podrían cambiar los parámetros  $\hat{J}$  y  $\hat{Q}$  tal que se pueda pasar de la configuración de WH a BH y viceversa.

En el futuro nos gustaría explorar a fondo ese tipo de transiciones entre WH y BH.

A modo de perspectivas podemos mencionar los siguientes trabajos futuros

- Sería interesante analizar la termodinámica del BH de Euler-Heisenberg en otros ensambles para obtener mayor información sobre las transiciones de fase y la estabilidad de la solución.
- Complementar el estudio termodinámico mediante el calculo de las ecuaciones de Clausius-Clapeyron, para tener una caracterización mas extensa de las transiciones de fase de primer orden, ya que dichas ecuaciones están relacionadas con la pendiente de la ecuación de coexistencia.
- Analizar el caso del BH de Euler-Heisenberg-de Sitter, ( $\Lambda > 0$ ), clasificar los horizontes de eventos y dar una posible interpretación del cuarto horizonte que aparece en ese caso. (Ver figura [8](#)).
- Respecto a la segunda solución presentada en el capítulo [6](#) se puede explorar si el método de extracción de energía de Penrose se puede aplicar, ya que en la gráfica de la figura [\(26\)](#) se observan estados con energía negativa.
- Otro importante aspecto a estudiar es la estabilidad geométrica de la solución presentada en el capítulo [6](#).
- También queda pendiente profundizar en ambos casos en las órbitas que seguirían partículas de prueba que pasen por las inmediaciones del BH o WH en su caso.

Sin lugar a dudas hay un mundo de posibilidades que se pueden investigar en torno a los agujeros negros y este trabajo de tesis es solo una ventana a ese mundo que está por explorarse.

# Bibliografía

- [1] E. T. Newman y col. «Metric of a Rotating, Charged Mass». En: *Journal of Mathematical Physics* 6.6 (1965), págs. 918-919. DOI: [10.1063/1.1704351](https://doi.org/10.1063/1.1704351).
- [2] R. Penrose. «*Gravitational Collapse and Space-Time Singularities*». En: *Phys. Rev. Lett.* **14** (3 1965), págs. 57-59. DOI: [10.1103/PhysRevLett.14.57](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.14.57).
- [3] K. S. Thorne. *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*. Norton, 2014.
- [4] G. Mie. «*Grundlagen einer Theorie der Materie*». En: *Annalen der Physik* **344.11** (1912), págs. 1-40. DOI: [10.1002/andp.19123441102](https://doi.org/10.1002/andp.19123441102).
- [5] M. Born y L. Infeld. «*Foundations of the new field theory*». En: *Proc. Roy. Soc.* **144** (1934), págs. 425-451. DOI: [10.1098/rspa.1934.0059](https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0059).
- [6] I. H. Salazar, D. A. García y J. Plebański. «*Duality rotations and type D solutions to Einstein equations with nonlinear electromagnetic sources*». En: *J. Math. Phys.* **28.9** (1987), págs. 2171-2181. DOI: [10.1063/1.527430](https://doi.org/10.1063/1.527430).
- [7] J.F. Plebanski. *Lectures on non-linear electrodynamics*. Nordita, Copenhagen, 1970.
- [8] W. Heisenberg y H. Euler. «*Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons*». En: *Zeitschrift Für Physik* **98** (1936), págs. 714-732.
- [9] P. Cañate, D. Magos y N. Breton. «*Nonlinear electrodynamics generalization of the rotating BTZ black hole*». En: *Phys. Rev. D* **101** (6 2020), pág. 064010. DOI: [10.1103/PhysRevD.101.064010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.064010).
- [10] D. Magos y N. Breton. «*Thermodynamics of the Euler-Heisenberg-AdS black hole*». En: *Phys. Rev. D* **102** (8 2020), pág. 084011. DOI: [10.1103/PhysRevD.102.084011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.084011).

- [11] R. M. Wald. «*The Thermodynamics of Black Holes*». En: *Living Reviews in Relativity* **4** (1 2001). DOI: [10.12942/lrr-2001-6](https://doi.org/10.12942/lrr-2001-6).
- [12] S. W. Hawking. «*Gravitational Radiation from Colliding Black Holes*». En: *Phys. Rev. Lett.* **26** (21 1971), págs. 1344-1346. DOI: [10.1103/PhysRevLett.26.1344](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.1344).
- [13] J.D. Bekenstein. «*Black Holes and Entropy*». En: *Phys. Rev. D* **7** (8 1973), págs. 2333-2346. DOI: [10.1103/PhysRevD.7.2333](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333).
- [14] J.D. Bekenstein. «*Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics*». En: *Phys. Rev. D* **9** (12 1974), págs. 3292-3300. DOI: [10.1103/PhysRevD.9.3292](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3292).
- [15] J. M. Bardeen, B. Carter y S.W. Hawking. «*The four laws of black hole mechanics*». En: *Comm. Math. Phys.* **31.2** (1973), págs. 161-170.
- [16] C. De Witt. *Black Holes*. F First Edition. Vol. Les Houches. Gordon y Breach, 1973.
- [17] S. W. Hawking. «*Particle creation by black holes*». En: *Commun. Math. Phys.* **43** (3 1975), págs. 199-220. DOI: [10.1007/BF02345020](https://doi.org/10.1007/BF02345020).
- [18] S. W. Hawking y D. N. Page. «*Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space*». En: *Commun. Math. Phys.* **87** (1983), págs. 577-588. DOI: [10.1007/BF01208266](https://doi.org/10.1007/BF01208266).
- [19] A. Chamblin y col. «*Charged AdS black holes and catastrophic holography*». En: *Phys. Rev. D* **60** (6 1999), pág. 064018. DOI: [10.1103/PhysRevD.60.064018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.064018).
- [20] A. Chamblin y col. «*Holography, thermodynamics, and fluctuations of charged AdS black holes*». En: *Phys. Rev. D* **60** (10 1999), pág. 104026. DOI: [10.1103/PhysRevD.60.104026](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.104026).
- [21] R. Banerjee, S. K. Modak y D. Roychowdhury. «*A unified picture of phase transition: from liquid-vapour systems to AdS black holes*». En: *J. High Energ. Phys.* **2012** (125 2012). DOI: [10.1007/JHEP10\(2012\)125](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2012)125).
- [22] E. Witten. «*Anti De Sitter Space and Holography*». En: *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), págs. 253-291. DOI: [10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2](https://doi.org/10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2).

- [23] D. Kubizňák y R. B. Mann. «*P - V criticality of charged AdS black holes*». En: *J. High Energ. Phys.* **2012** (7 2012), págs. 1-13. DOI: [10.1007/JHEP07\(2012\)033](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)033).
- [24] R. B. Mann S. Gunasekaran y D. Kubizňák. «*Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization*». En: *J. High Energ. Phys.* **2012** (1211 2012). DOI: [10.1007/JHEP11\(2012\)110](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2012)110).
- [25] S.W. Wei e Y.X. Liu. «*Critical phenomena and thermodynamic geometry of charged Gauss-Bonnet AdS black holes*». En: *Phys. Rev. D* **87** (4 2013), pág. 044014. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.044014](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.044014).
- [26] W. Xu y L. Zhao. «*Critical phenomena of static charged AdS black holes in conformal gravity*». En: *Phys. Lett. B* **736** (2014), págs. 214-220. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.07.019>.
- [27] A. M. Frassino y col. «*Multiple reentrant phase transitions and triple points in Lovelock thermodynamics*». En: *J. High Energ. Phys.* **2014** (2014). DOI: [10.1007/JHEP09\(2014\)080](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2014)080).
- [28] D. Kastor, S. Ray y J. Traschen. «*Enthalpy and the mechanics of AdS black holes*». En: *Class. Quantum Grav.* **26**.19 (2009), pág. 195011. DOI: [10.1088/0264-9381/26/19/195011](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/19/195011).
- [29] L. Smarr. «*Mass Formula for Kerr Black Holes*». En: *Phys. Rev. Lett.* **30** (2 1973), págs. 71-73. DOI: [10.1103/PhysRevLett.30.71](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.71).
- [30] Ch.Niu, Y. Tian y X.N. Wu. «*Critical phenomena and thermodynamic geometry of Reissner-Nordstrom-anti-de Sitter black holes*». En: *Phys. Rev. D* **85** (2 2012), pág. 024017. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.024017](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.024017).
- [31] J.A.R. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz y J. Jarillo. «*Reissner-Nordström black holes in the inverse electrodynamics model*». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2015**.02 (2015), págs. 042-042. DOI: [10.1088/1475-7516/2015/02/042](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/02/042).
- [32] H. S. Reall. «*Classical and thermodynamic stability of black branes*». En: *Phys. Rev. D* **64** (4 2001), pág. 044005. DOI: [10.1103/PhysRevD.64.044005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.044005).

- [33] R. Emparan, C. V. Johnson y R. C. Myers. «*Surface terms as counterterms in the AdS / CFT correspondence*». En: *Phys. Rev. D* **60** (1999), pág. 104001. DOI: [10.1103/PhysRevD.60.104001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.104001).
- [34] J. X. Mo y G.Q. Li. «*Coexistence curves and molecule number densities of AdS black holes in the reduced parameter space*». En: *Phys. Rev. D* **92** (2 2015), págs. 1-7. DOI: [10.1103/PhysRevD.92.024055](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.024055).
- [35] S. W. Wei e Y. X. Liu. «*Clapeyron equations and fitting formula of the coexistence curve in the extended phase space of charged AdS black holes*». En: *Phys. Rev. D* **91** (4 2015), págs. 1-10. DOI: [10.1103/PhysRevD.91.044018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.044018).
- [36] E.S. Fradkin y A.A. Tseytlin. «*Non-linear electrodynamics from quantized strings*». En: *Phys. Lett. B* **163.1** (1985), págs. 123-130. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(85\)90205-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90205-9).
- [37] R.R. Metsaev, M.A. Rahmanov y A.A. Tseytlin. «*The born-infeld action as the effective action in the open superstring theory*». En: *Phys. Lett. B* **193.2** (1987), págs. 207-212. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)91223-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)91223-8).
- [38] R.G. Leigh. «*Dirac-Born-Infeld action fom Dirichlet  $\sigma$ -model*». En: *Modern Phys. Lett. A* **04.28** (1989), págs. 2767-2772. DOI: [10.1142/S0217732389003099](https://doi.org/10.1142/S0217732389003099).
- [39] G. Brodin, M. Marklund y L. Stenflo. «*Proposal for Detection of QED Vacuum Nonlinearities in Maxwell's Equations by the Use of Waveguides*». En: *Phys. Rev. Lett.* **87** (17 2001), pág. 171801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.87.171801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.171801).
- [40] A. García, H. Salazar y J. Plebanski. «*Type-D Solutions of the Einstein and Born-Infeld Nonlinear- Electrodynamics Equations*». En: *Nuovo Cimento* **84** (1984), págs. 65-90. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)91223-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)91223-8).
- [41] R. Ruffini, Y.-B. Wu y S.-S. Xue. «*Einstein-Euler-Heisenberg theory and charged black holes*». En: *Phys. Rev. D* **88** (8 2013), pág. 085004. DOI: [10.1103/PhysRevD.88.085004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.085004).

- [42] D. Amaro-Sanchez. *Geodésicas equatoriales en agujeros negros estáticos en la teoría de Einstein-Euler-Heisenberg*. M. Sc. thesis, UAM-I (Mexico), 2019.
- [43] D. Amaro y A. Macias. «*Geodesic structure of the Euler-Heisenberg static black hole*». En: *Phys. Rev. D* **102** (10 2020), pág. 104054. DOI: [10.1103/PhysRevD.102.104054](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.104054).
- [44] N. Bretón y S. E. Bergliaffa. «*On the thermodynamical stability of black holes in nonlinear electrodynamics*». En: *Ann. Phys.* **354** (2015), págs. 440-453. DOI: [10.1016/j.aop.2015.01.012](https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.01.012).
- [45] J. D. Bairagya ans K. Pal y T. Sarkar. «*Geometry of AdS black hole thermodynamics in extended phase space*». En: *arXiv:2004.06498* (2004).
- [46] M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli. «*Black hole in three-dimensional spacetime*». En: *Phys. Rev. Lett.* **69** (13 1992), págs. 1849-1851. DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.1849](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1849).
- [47] S. Carlip. «*The (2 + 1)-dimensional black hole*». En: *Class. Quantum Grav.* **12.12** (1995), págs. 2853-2879. DOI: [10.1088/0264-9381/12/12/005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/12/005).
- [48] N. Cruz, C. Martinez y L. Peña. «*Geodesic structure of the (2 + 1)-dimensional BTZ black hole*». En: *Class. Quantum Grav.* **11.11** (1994), págs. 2731-2739. DOI: [10.1088/0264-9381/11/11/014](https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/11/014).
- [49] G. Clément. «*Spinning charged BTZ black holes and self-dual particle-like solutions*». En: *Phys. Lett. B* **367.1** (1996), págs. 70-74. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)01464-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)01464-0).
- [50] C. Martinez, C. Teitelboim y J. Zanelli. «*Charged rotating black hole in three spacetime dimensions*». En: *Phys. Rev. D* **61** (10 2000), pág. 104013. DOI: [10.1103/PhysRevD.61.104013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.104013).
- [51] B. P. Dolan. «*The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials*». En: *Class. Quantum Grav.* **28.12** (2011), pág. 125020. DOI: [10.1088/0264-9381/28/12/125020](https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/12/125020).
- [52] A. Maloney y E. Witten. «*Quantum gravity partition functions in three dimensions*». En: *J. High Energ. Phys.* **2010.29** (2010). DOI: [10.1007/JHEP02\(2010\)029](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2010)029).

- [53] P. Cañate y N. Bretón. «*Black hole-wormhole transition in (2+1)-dimensional Einstein-anti-de Sitter gravity coupled to nonlinear electrodynamics*». En: *Phys. Rev. D* **98** (10 2018), pág. 104012. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.104012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.104012).
- [54] J. Maldacena y L. Susskind. «*Cool horizons for entangled black holes*». En: *Fortschritte der Physik* **61.9** (2013), págs. 781-811. DOI: <https://doi.org/10.1002/prop.201300020>.
- [55] M. S. Morris y K. S. Thorne. «*Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*». En: *American Journal of Physics* **56.5** (1988), págs. 395-412. DOI: [10.1119/1.15620](https://doi.org/10.1119/1.15620).
- [56] M. S. Morris, K. S. Thorne y U. Yurtsever. «*Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition*». En: *Phys. Rev. Lett.* **61** (13 1988), págs. 1446-1449. DOI: [10.1103/PhysRevLett.61.1446](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1446).

# A | Estructura causal y aspectos geométricos

## A.1 | Estructura causal

Sea  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  un espacio-tiempo, donde  $\mathcal{M}$  es una variedad suave  $n$ -dimensional sin frontera, y  $g_{ab}$  es el tensor métrico con signatura  $(-, +, \dots, +)$ . Cada punto  $p$  en  $\mathcal{M}$  tiene asociado un espacio tangente  $\mathcal{M}_p$ . La métrica  $g_{ab}$  asigna una longitud a cada vector en  $\mathcal{M}_p$ , decimos entonces de un vector  $\xi^a \in \mathcal{M}_p$  que

- $\xi^a$  es *tipo tiempo*, si  $g_{ab}\xi^a\xi^b < 0$ .
- $\xi^a$  es *nulo*, si  $g_{ab}\xi^a\xi^b = 0$ .
- $\xi^a$  es *tipo espacio*, si  $g_{ab}\xi^a\xi^b > 0$ .

Los vectores nulos crean una estructura de doble cono llamada *cono de luz*, tal que los vectores tipo tiempo están dentro del cono, y los vectores tipo espacio están fuera.

Decimos que un espacio tiempo es *temporalmente orientable* si existe un campo vectorial continuo en  $\mathcal{M}$ .

Una curva diferenciable  $\lambda(t)$  se dirá *temporalmente dirigida al futuro* si su tangente en cada punto es temporal y dirigida al futuro.

Una curva diferenciable  $\lambda(t)$  se dirá *causalmente dirigida al futuro* si su tangente en cada punto es temporal o nula y dirigida al futuro.

Para cada  $p \in \mathcal{M}$  definimos el *futuro cronológico*  $I^+$  de  $p$  como

$$I^+(p) = \{q \in \mathcal{M} \mid \exists \lambda(t); \lambda(0) = p, \lambda(t) = q\}, \quad (\text{A.1})$$

siendo  $\lambda(t)$  una curva temporalmente dirigida al futuro.

Para cada  $p \in \mathcal{M}$  definimos el *futuro causal*  $J^+$  de  $p$  como

$$J^+(p) = \{q \in \mathcal{M} \mid \exists \lambda(t); \lambda(0) = p, \lambda(t) = q\}, \quad (\text{A.2})$$

siendo  $\lambda(t)$  una curva causalmente dirigida al futuro.

De manera análoga se definen el pasado cronológico  $I^-(p)$  y el pasado causal  $J^-(p)$ , reemplazando la palabra futuro por pasado.

## A.2 | Aspectos geométricos

- Un *grupo uniparamétrico de difeomorfismos*,  $\phi_t$ , es un mapeo  $C^\infty$ ,  $\mathfrak{R} \times \mathcal{M}$  tal que para un  $t \in \mathfrak{R}$  fijo,  $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es un difeomorfismo, y  $\forall t, s \in \mathfrak{R}$ ,  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ .
- A  $\phi_t$  se le puede asociar un campo vectorial como sigue, para un  $p \in \mathcal{M}$  fijo,  $\phi_t(p) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{M}$  es una curva llamada *órbita* de  $\phi_t$ .
- Sea  $\mathbb{X}$  un campo vectorial en  $\mathcal{M}$ . Una curva  $\lambda : I \rightarrow \mathcal{M}$  es una *curva integral* de  $\mathbb{X}$  si  $\lambda'_t = \mathbb{X}_{\lambda(t)}$  para  $t \in I$ .
- El *generador infinitesimal* de  $\phi$  es un campo vectorial tangente a las curvas generadas por el grupo uniparamétrico de transformaciones.
- Sea  $\phi_t : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  un grupo uniparamétrico de isometrías  $\phi^*g_2 = g_1$ , entonces, si  $\mathbb{X}$  es el generador infinitesimal de  $\phi$ , se tiene

$$\mathcal{L}_{\mathbb{X}} = 0 \quad (\text{A.3})$$

El campo vectorial que satisfaga (A.3) es llamado *campo vectorial de Killing*.

- La condición necesaria y suficiente para que  $\mathbb{X}$  sea un campo de Killing es que

$$\nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 0 \quad (\text{A.4})$$

- Las componentes de un campo de Killing deben satisfacer que:

$$X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ki} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + g_{jk} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} = 0. \quad (\text{A.5})$$

- Si  $g_{ij}$  no depende de  $x^m$ , para algún  $m$ , entonces  $\mathbb{X} = \frac{\partial}{\partial x^m}$ .

Un espacio-tiempo se dice:

- **Estático:** Si la métrica tiene un vector de Killing tipo tiempo que es ortogonal a la familia de hipersuperficies:

$$ds^2 = g_{00}(\vec{x})dt^2 + g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j. \quad (\text{A.6})$$

- **Aximétrico:** Sí existe un grupo uniparamétrico de isometrías  $\chi_\phi$  cuyas órbitas son curvas cerradas tipo espacio, entonces existe un campo de Killing tipo espacio  $\psi^a$  que genera  $\chi_\phi$  cuyas curvas integrales son cerradas.

# Producción científica

- P. Cañate, D. Magos y N. Bretón, *Nonlinear electrodynamics generalization of the rotating BTZ black hole*, Phys. Rev. D **101**, 064011 (2020).
- D. Magos y N. Bretón, *Thermodynamics of the Euler-Heisenberg-AdS black hole*, Phys. Rev. D **102**, 084011 (2020).