

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Un proceso tipo Ornstein-Uhlenbeck para
partículas cargadas en la Magnetosfera e
Ionosfera**

Tesis que presenta

Víctor Augusto Samboni Beltrán

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Luis Fernando Rojas Ochoa**

Ciudad de México

Marzo, 2021

Índice general

Índice de figuras	III
Índice de Tablas	IV
1. Introducción	2
2. Magnetosfera e Ionosfera	6
2.1. Magnetosfera	6
2.1.1. Dinámica de la Magnetosfera	8
2.2. Ionosfera	14
3. Datos y Modelo	16
3.1. Datos	16
3.2. Modelo	18
4. Resultados y Discusión	26
4.1. Resultados	26
4.2. Discusión	29
A. Demostración Ecuaciones 2.5 y 2.6	31
B. Demostración $\tau_1 = \tau_2$	35
C. Semanas de Calma y Estaciones Geomagnéticas	39

D. ANOVA	42
E. Cálculos de I_∞ y H_∞^2	44
Bibliografía	46

Índice de figuras

2.1. Distribución de corrientes eléctricas en la Magnetosfera.	7
2.2. Representación del Centro de guía.	8
2.3. Esquema de los tipos de movimiento de partículas en presencia de un campo magnético.	10
2.4. Distribución de corrientes a nivel de la Ionosfera, responsables de las variaciones magnéticas denominadas Sq	15
3.1. a) Representación vectorial del campo magnético. b) Componentes del campo magnético terrestre.	17
3.2. Comparación entre el MMSD y el MSD de una partícula en una trampa armónica.	18
3.3. Circuito RCL equivalente a la dinámica de las corrientes de la Ionosfera y Magnetosfera.	19
4.1. MMSD promedio calculado para el conjunto de estaciones consideradas. . . .	27
4.2. Las líneas corresponden a ajustes con nuestro modelo a los datos MMSD de dos estaciones geomagnéticas.	28
D.1. a) Conjunto de semanas de calma reportadas del año 2006. b) Resultado del análisis de ANOVA de un factor.	42
E.1. Parámetros para diferentes tipos de plasmas de electrones	44

Índice de Tablas

4.1. Parámetros de los ajustes - Semillas para el proceso iterativo de la ec. 3.20.	29
4.2. Parámetros ajuste - modelo completo, ec. 3.20.	29
C.1. Semanas de calma	40
C.2. Estaciones Geomagnéticas Consideradas.	41
E.1. Valores Aproximados de H_∞	45

Abstract

The space plasmas' densities are high in the sectors known as magnetosphere and ionosphere, containing significant concentrations of charged particles as ions and electrons that produce strong electrical currents. The magnetosphere's chaotic interaction with the solar wind causes random changes in the spatial plasma density and fluctuations in the corresponding electrical currents. Considering the electric currents' random nature, we anticipate the opportunity to propose a model based on an Ornstein-Uhlenbeck process for an ensemble of serial RCL electric circuits fed by two voltage sources: one being constant and the other stochastic.

On the other hand, to minimize fluctuations that occur over long periods, we propose to analyze the magnetic mean square displacement (MMSD). Thus, we obtain an exact expression for the MMSD, which can be compared with data reported by magnetic observatories (MO) close to the Earth's geographical equator. One prediction of the model is that there are two types of behavior for the particles that make up electric currents. For short times $t < 200$ minutes, a ballistic regime is observed, while for long times $t > 200$ minutes, the MMSD saturate at a "plateau". The resulted from model shows the same behavior what the data reported by the MO.

Finally, we consider that the model proposed for the MMSD constitutes a viable scheme to understand the dynamics of the particles that make up the electric currents present in the

magnetosphere and ionosphere near the geographical Equator for periods of low geomagnetic activity. Likewise, we consider it feasible to extend our model to include instabilities for high geomagnetic activity events that can detonate a magnetic storm.

Resumen

Los plasmas espaciales terrestres se ubican en sectores conocidos como Magnetosfera e Ionosfera. En estos sectores, las densidades de los plasmas son altas; contienen grandes concentraciones de partículas cargadas (iones y electrones) que producen corrientes eléctricas intensas. La Magnetosfera interacciona con el viento solar de forma caótica, produciendo alteraciones aleatorias en las densidades de los plasmas espaciales que ocasionan fluctuaciones azarosas de las corrientes eléctricas. Dada la naturaleza aleatoria de las corrientes eléctricas, anticipamos la oportunidad de proponer un modelo basado en un proceso tipo Ornstein-Uhlenbeck para describir el fenómeno, considerando un ensamble de circuitos eléctricos *RCL* conectados en serie que están alimentados por dos fuentes de voltaje; una constante y otra estocástica.

Por otro lado, con el objetivo de minimizar las fluctuaciones que ocurren en periodos de tiempo largos, se propone analizar el desplazamiento cuadrático medio magnético (MMSD). Lo anterior permite obtener una expresión exacta para el MMSD, la cual puede compararse con datos reportados por observatorios geomagnéticos (OG) cercanos al Ecuador geográfico de la Tierra. Una predicción del modelo es que existen dos tipos de comportamiento para las partículas que constituyen las corrientes eléctricas. Para tiempos cortos $t < 200$ minutos se observa un régimen balístico, mientras que para tiempos largos $t > 200$ minutos el MMSD se satura a un "plateau". Lo anterior muestra el mismo comportamiento que los datos reportados por los OG.

Finalmente, consideramos que el modelo propuesto para el MMSD constituye un esquema viable para comprender la dinámica de las partículas que conforman las corrientes eléctricas presentes en la Magnetosfera e Ionosfera cerca al Ecuador geográfico, para periodos de baja actividad geomagnética. Así mismo, creemos que este modelo puede ser extendido con el objetivo de incluir inestabilidades para eventos de alta actividad geomagnética y que puedan detonar una tormenta magnética.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre por su ayuda y abnegación por mí. Así mismo, a Elizabeth Solano por la ayuda y compañía brindada durante lo largo de mi vida académica. También a Antonio Solano por su apoyo.

Finalmente, agradezco Dr. Luis Fernando Rojas como al CINVESTAV y CONACYT por su ayuda y apoyo.

Capítulo 1

Introducción

El primer acercamiento por intentar dar una explicación física de los plasmas espaciales fue propuesto por Birkeland en 1908 [1], quien trato de relacionar los plasmas físicos de laboratorio con los plasmas espaciales. Birkeland se propuso entender las auroras boreales y tormentas magnéticas, para lo cual utilizo una esfera magnetizada, la cual llamo "terrella", he introdujo en un plasma. Este experimento le permitió determinar la formación de anillos luminosos alrededor de los polos, los cuales asocio con las zonas donde se generan las auroras boreales en el planeta Tierra. Así mismo, construyo un modelo teórico donde las corrientes eléctricas causantes de las auroras boreales se orientaban en dirección de las líneas del campo magnético. Esto es parcialmente correcto, según la fenomenología que se conoce hoy en día. Lamentablemente, muchos de los avances que se dieron en años posteriores a los experimentos de Birkeland, en el área de los plasmas espaciales, se desarrollaron desconectados de los experimentos de plasmas en laboratorios. Por lo tanto, muchas teorías tuvieron que ser dejadas de lado, ya que no incluían importantes efectos que están presentes en los plasmas espaciales [2, 3].

Otro gran avance fue ofrecido por Balfour Stewart con la propuesta de una zona de alta conductividad eléctrica a una altura de 100 km sobre la superficie terrestre. Stewart concluyó que las corrientes eléctricas que producen ciertas variaciones en el campo magnético,

medido en la superficie de la Tierra, deberían estar localizadas en este sector. Hoy en día, al sector ubicado a $\approx 100km$ sobre la superficie terrestre se le conoce como Ionosfera. Además, propuso que la dinámica de estas corrientes deberían estar influenciadas por el calentamiento producido en el lado diurno debido al Sol. La confirmación de la Ionosfera se obtuvo en 1925 por E.V. Appleton y M. A.F. Barnett [4], para lo cual utilizaron el estudio de pulsos cortos de radio, determinando el retraso de la señal reflejada con respecto a la incidente.

Al mismo tiempo que el descubrimiento de la Ionosfera se gestaba, Sydney Chapman y V.C.A. Ferraro proponían que plasma proveniente del Sol comprimía el campo magnético terrestre, dado que este último actuaba como un obstáculo. Lo anterior implicaba que el plasma envolvía al campo magnético terrestre, produciendo así una cavidad magnética. Además, Chapman y Ferraro propusieron que una parte de este plasma podría ingresar al interior de la cavidad, originando corrientes eléctricas cercanas al Ecuador geográfico [5], esto debido a la configuración del campo magnético de la Tierra; en la actualidad se considera que estas corrientes son las causantes de las tormentas magnéticas. Las propuestas hechas por Chapman y Ferraro son similares al concepto de Magnetosfera y corriente de anillo que se conocen actualmente [3]. Actualmente se concibe que una tormenta magnética es un intervalo de tiempo, donde las corrientes eléctricas presentes en la Ionosfera y Magnetosfera aumenta su intensidad produciendo fuertes campos magnéticos que son opuestos al de la Tierra, generando que la intensidad de este último disminuya [6].

Finalmente, muchos de estos aportes han permitido avanzar en la comprensión de la dinámica de los plasmas espaciales y como ellos perturban el campo magnético de la Tierra. Sin embargo, muchas interrogantes siguen aun abiertas, algunas de las más importantes son: ¿Qué detona una tormenta magnética?, ¿Las tormentas magnéticas son periódicas? y ¿Se puede predecir una tormenta magnética?.

Los plasmas espaciales exhiben un dualismo similar al caso de la onda-partícula. Este dualismo permite describir los plasmas espaciales, bien sea, por medio del campo magnético o de las corrientes eléctricas

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i}', \quad (1.1)$$

con $\vec{i}' = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ [2]. Debido a que es más fácil de medir el campo magnético, además, el tratamiento matemático de una teoría en términos del campo magnético es más fácil si el término \vec{i}' es eliminado, muchas veces se ha dejado de lado la descripción por medio de las corrientes eléctricas. Sin embargo, al dejar de lado esta descripción, estamos despreciando la descripción de las partículas que conforman estas corrientes eléctricas. Por este motivo, consideramos que ofrecer una descripción de la dinámica de las corrientes eléctricas presentes en la Ionosfera y Magnetosfera a través de un tipo de proceso estocástico, ofrece una oportunidad de comprender fenómenos importantes en plasmas espaciales. En este trabajo se propone una buena manera de describir la dinámica del plasma presente en la Ionosfera y Magnetosfera por medio de un proceso aleatorio del tipo Ornstein–Uhlenbeck [7], el cual se representa por un ensamble de circuitos *RCL* en serie alimentados por dos fuentes de voltaje; una aleatoria y otra constante. En dicho modelo, la fuente de voltaje aleatoria representa a las perturbaciones debidas a la interacción del viento solar con la Magnetosfera. Adicionalmente, la fuente de voltaje constante representa a la energía adquirida en procesos de foto-ionización en la Ionosfera, como los flujos constantes de energía por parte del viento solar. Finalmente, se relacionan la dinámica de estas corrientes con los datos experimentales del campo magnético por medio de la ecuación 1.1.

Este manuscrito está organizado de la siguiente forma: En el capítulo 1 se hace una corta introducción del problema, así como de la metodología que se seguirá en este trabajo. En el capítulo 2 se presenta una breve introducción del movimiento de partículas cargadas en presencia de campos magnéticos. Además, se hace una reducida revisión del modelo magneto-hidrodinámico para la Magnetosfera e Ionosfera. En el capítulo 3 se propone un modelo basado en un proceso tipo Ornstein-Uhlenbeck para la descripción de las fluctuaciones del campo magnético terrestre cerca al Ecuador geográfico. Finalmente, en el capítulo 4

se presenta la comparación del modelo desarrollado con datos experimentales existentes, así como su discusión y posibles implicaciones físicas.

Capítulo 2

Magnetosfera e Ionosfera

2.1. Magnetosfera

La Magnetosfera es una cavidad que envuelve al planeta Tierra, esta cavidad es generada por el choque del viento solar con el campo magnético del planeta. La Magnetosfera tiene un radio de aproximadamente 10 radios terrestres (R_T) para estados de calma; contados a partir de la superficie terrestre, mientras que en estados de alta actividad solar esta cavidad es comprimida por el viento solar. La Magnetosfera inicia en una región conocida como magnetopausa, sitio donde choca el viento solar con el campo magnético terrestre. Así mismo, la magnetopausa es una frontera donde hay una alta densidad de partículas como iones, electrones y protones. Esta alta densidad de partículas produce una corriente eléctrica, la cual recibe el nombre de corriente de magnetopausa. Una cierta cantidad del plasma que se desliza por la frontera de la Magnetosfera ingresa al interior de ella, y genera depósitos de plasma, los cuales varían en densidad y temperatura según su ubicación, además, produce corrientes eléctricas. Donde, la orientación, así como la configuración de estas corrientes eléctricas, están determinadas por dos factores: i) el tipo de carga eléctrica y ii) la interacción de las cargas eléctricas que las conforman con las fuerzas eléctricas, magnéticas y gravitacionales [3, 8, 9].

Así las partículas como electrones giraran en el sentido de rotación de la Tierra, mientras, partículas como iones y protones lo harán en sentido contrario. Así corrientes ubicadas en plano ecuatorial como la corriente de anillo tendrá una orientación en el sentido contrario de la rotación de la Tierra (Figura 2.1 ¹), dado que está conformada mayoritariamente por iones y protones. Mientras, corrientes eléctricas paralelas a el campo magnético tendrán orientaciones tanto al polo Sur como al polo Norte de la Tierra. Este conjunto de corrientes eléctricas están ubicadas entre $2R_T$ a $10R_T$. Además, algunas de ellas están conectadas con otras corrientes provenientes de la Ionosfera como las corrientes paralelas al campo [10].

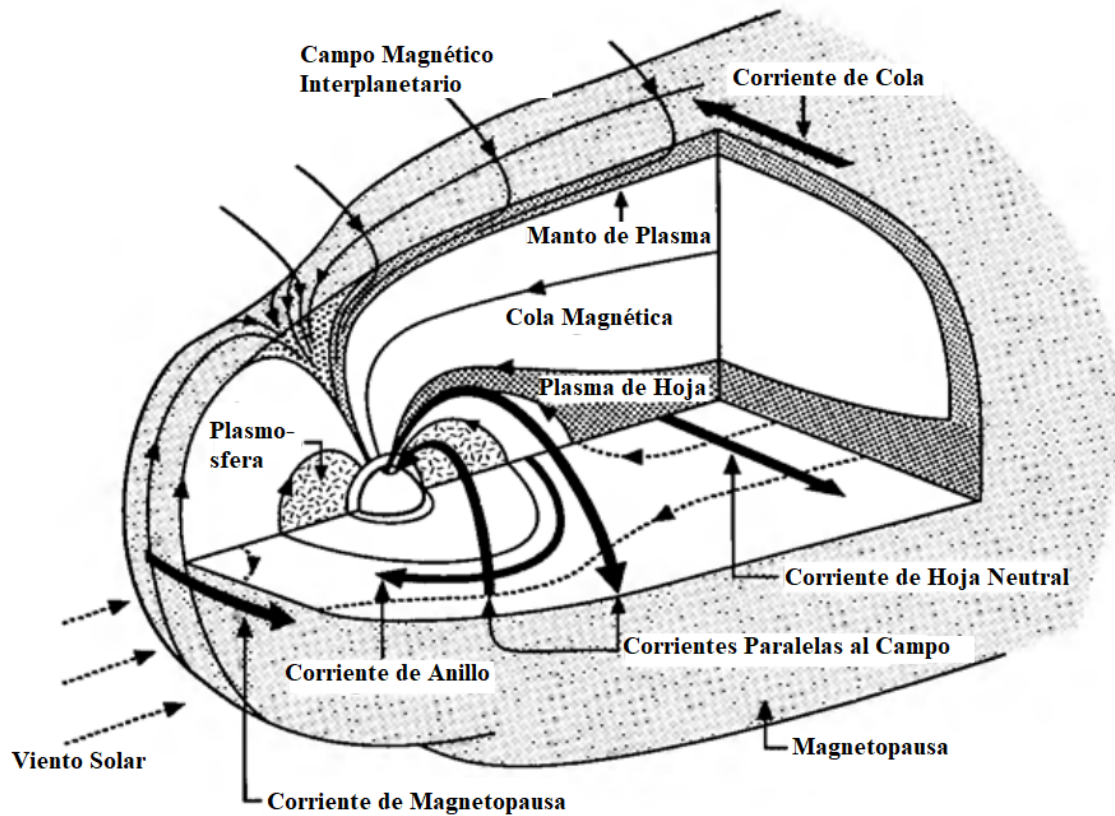


Figura 2.1: Distribución de corrientes eléctricas en la Magnetosfera.

¹Imagen tomada y modificada de [3]

2.1.1. Dinámica de la Magnetosfera

Tomando en consideración que la velocidad de las partículas no es relativista $v < c$, entonces las acciones de estas fuerzas sobre una partícula están dadas por la ecuación de cambio de momento

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{V} \times \vec{B} + \vec{F}_g, \quad (2.1)$$

donde m corresponde a la masa de la partícula, q a la carga eléctrica y \vec{F}_g a la fuerza generada por el campo gravitacional [3]. Primero, resolviendo casos particulares de 2.1, como $\vec{E} = \vec{0}$ y $\vec{F}_g = \vec{0}$, se encuentra que la partícula realiza un movimiento helicoidal alrededor de las líneas del campo magnético, con una frecuencia de $\Omega_c = \frac{qB}{m}$, denominada frecuencia de ciclotrón, además, con radio de giro $\rho = \frac{mv_\perp}{qB}$; siendo v_\perp la velocidad perpendicular las líneas del campo magnético. Ahora, si el campo eléctrico es diferente de cero, el movimiento de la partícula deja de ser helicoidal. Debido a esto, es preciso introducir un concepto denominado "Centro de guía" (Figura 2.2²),

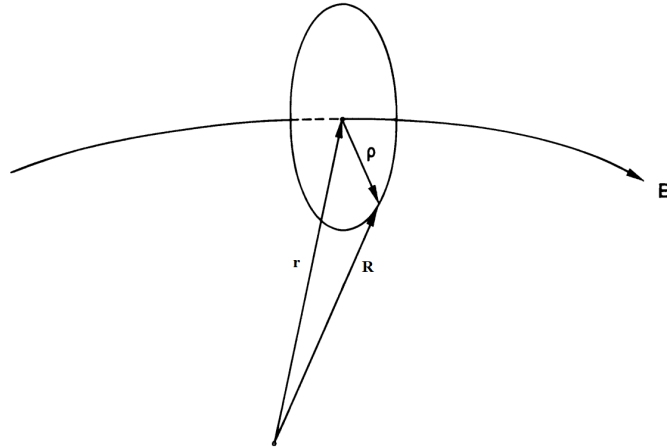


Figura 2.2: Representación del Centro de guía.

el cual parte de la premisa que al introducir un campo eléctrico simplemente se introduce una leve perturbación en el movimiento helicoidal [11, 12]. Con lo cual

²Imagen tomada y modificada de [11]

$$\vec{R} = \vec{\rho} + \vec{r}, \quad (2.2)$$

siendo

$$\vec{\rho} = \rho(e_2 \cos(t\Omega_c) + e_3 \sin(t\Omega_c)), \quad (2.3)$$

con \vec{e}_2 y \vec{e}_3 siendo vectores unitarios. Introduciendo estos resultados en la ecuación 2.1, expandiendo en series de Taylor alrededor de \vec{r} a ambos, el campo magnético y eléctrico, y promediando sobre un periodo $T_c = \frac{2\pi}{\Omega_c}$; ya que solo nos interesa la traslación que ejecuta la partícula, se obtiene

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\vec{E} + \frac{q}{m}\dot{\vec{r}} \times \vec{B} - \frac{q}{m}\frac{\rho^2\Omega_c}{2}\nabla B + \frac{\vec{F}_g}{m} + O(\epsilon). \quad (2.4)$$

A continuación se toma el resultado 2.4 y se calcula el producto cruz con \vec{B} , y se considera que en la Magnetosfera puede ser despreciada la contribución \vec{F}_g ; dado que es muy pequeña en comparación con las contribuciones eléctricas. Así mismo, descomponiendo $\dot{\vec{r}} = \dot{r}_{\parallel} + \dot{r}_{\perp}$, se deduce que la velocidad del centro de guía puede ser descompuesta en dos componentes, una perpendicular al campo y otra paralela (ver Apéndice A). La componente perpendicular es una contribución de tres velocidades de deriva. La primera es debida al campo eléctrico mientras la segunda corresponde al gradiente del campo magnético, la cual es consecuencia del paso de la partícula por sitios donde cambia la densidad de líneas del campo magnético. Finalmente, la última contribución pertenece a la componente de curvatura, generada por el movimiento semi helicoidal que ejecutan la partícula [11, 12]. Por consiguiente se obtiene que la velocidad perpendicular al campo magnético conocida como velocidad de deriva (v_d) es igual a:

$$\dot{r}_{\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{mM}{q} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{m}{q} v_{\parallel}^2 \frac{\vec{B}}{B^2} \times \frac{\partial(\frac{\vec{B}}{B})}{\partial s}, \quad (2.5)$$

mientras, la variación de la velocidad paralela (v_b) al campo es

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = q\vec{E}_{\parallel} - mM \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2.6)$$

donde M es el momento magnético de la partícula, siendo igual a $M = \frac{q\rho^2\Omega_c}{2m}$, mientras, $v_{\parallel} = \left(\frac{\vec{B}}{B}\right) \cdot \dot{\vec{r}}$. Siendo este resultado solo válido para el caso cuando la velocidad térmica es a $V_T > \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{B^2}$ [11]. Así este conjunto de velocidades determina completamente los posibles movimientos que puede ejecutar un conjunto de partículas, atrapadas en el campo magnético terrestre (Figura 2.3³).

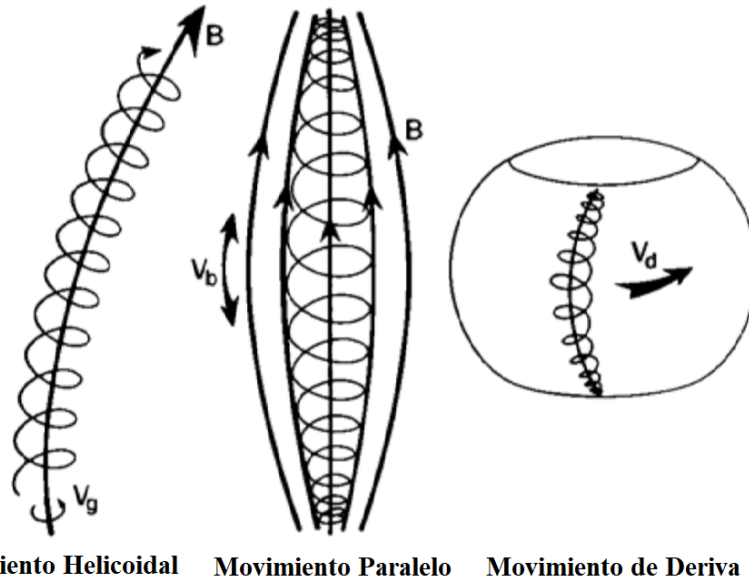


Figura 2.3: Esquema de los tipos de movimiento de partículas en presencia de un campo magnético.

Dado que existe una alta densidad de partículas en plasmas presentes en la Magnetosfera, las cuales son del orden de $\frac{10^7}{m^3}$ (temperatura promedio del plasma $10^3 eV$), es más conveniente hacer una descripción macroscópica del sistema. En consecuencia, es más intuitivo determinar valores promedio sobre el ensamble de las partículas [3, 13], como la densidad de partículas en el espacio de fase para la especie s (iones, electrones y protones)

³Imagen tomada y modificada de [3]

$$n_s(\vec{v}, t) = \int f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) dv, \quad (2.7)$$

siendo \vec{v} la velocidad individual de cada partícula, mientras $f_s(\vec{r}, \vec{v}, t)$ corresponde a la función de distribución en el espacio de fase. Así mismo, podemos definir la velocidad promedio del ensamble como

$$\vec{u}_s = \frac{\int \vec{v} f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{\int f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}. \quad (2.8)$$

Ahora, la contribución de la energía cinética del ensamble de partículas s es determinada como

$$\left\langle \frac{m_s(\vec{v} - \vec{u}_s)^2}{2} \right\rangle = \frac{\int m_s(\vec{v} - \vec{u}_s)^2 f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) dv}{\int f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) dv}, \quad (2.9)$$

y considerando que la presión parcial de un gas ideal es igual a la energía cinética por su densidad, se obtiene

$$\frac{p_s}{n_s} = \frac{2}{N} \left\langle \frac{m_s(\vec{v} - \vec{u}_s)^2}{2} \right\rangle, \quad (2.10)$$

con N siendo el número de componentes de la velocidad de la partícula. Dado que si las partículas están en equilibrio térmico, entonces es posible suponer que la distribución del plasma es Maxwelliana. Por consiguiente, la distribución del plasma puede ser expresada como

$$f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_s \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m_s(\vec{v} - \vec{u}_s)^2}{2kT_s} \right). \quad (2.11)$$

Sustituyendo 2.11 en 2.9, obtenemos como resultado que la energía cinética del ensamble de partículas únicamente depende de la temperatura y de los grados de libertad

$$\left\langle \frac{m_s(\vec{v} - \vec{u}_s)^2}{2} \right\rangle = \frac{NkT_s}{2}, \quad (2.12)$$

siendo k la constante de Boltzmann.

La descripción que se ha ofrecido hasta el momento resultaría incompleta para los plasmas espaciales, ya que solo se ha tomado en consideración las características cinéticas del ensamble de partículas y se dejaron de lado las corrientes eléctricas que están presente en estos plasmas. Por lo anterior, resulta necesario presentar una formulación más completa del problema, la cual mezcle el enfoque cinético y electromagnético en una misma descripción. Este enfoque más completo inicia principalmente considerando al plasma como un fluido, generando que las ecuaciones que incluyen esta descripción del problema reciban el nombre de ecuaciones magneto-hidrodinámicas. Está nueva visión une las ecuaciones de Maxwell con una variante de la segunda ley de Newton[3], la cual incorpora las fuerzas debido a la presión de fluido además de incluir la contribución de corrientes eléctricas existentes en el sistema:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}, \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}), \quad (2.16)$$

$$\rho_s \left(\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial t} + \vec{u}_s \cdot \nabla \vec{u}_s \right) + m_s \vec{u}_s (S_s - L_s) = -\nabla P + \rho_{qs} \vec{E} + \vec{J}_s \times \vec{B} + \rho_s \frac{\vec{F}_g}{m_s}, \quad (2.17)$$

con $\vec{J} = \sum_s \vec{J}_s$, ρ_q la densidad de carga, ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío, μ_0 la permeabilidad del vacío, S_s la fuente de la especie s , L_s las pérdidas de la especie s , ρ_{qs} la densidad

de carga de la especie s y $\vec{J}_s = q_s n_s \vec{u}_s$. Este conjunto de ecuaciones describen propiedades promedio del plasma, aplicadas a una región pequeña del sistema, pero lo suficientemente grande como para incluir un representativo número de partículas. Además, se considera que los cambios del sistema analizados son más lentos frente al inverso de la frecuencia de ciclotrón $\tau \gg \frac{1}{\Omega_c}$. Así mismo, se considera que la extensión del sistema es grande comparada con los parámetros distintivos del mismo, como la longitud de Debye λ_D (escala de longitud; la cual representa la máxima distancia donde un ion puede influir en su entorno) $L \gg \lambda_D$. Este conjunto de suposiciones permite descartar la contribución de la corriente de desplazamiento eléctrico, debido a que $|\nabla \times \vec{B}| \approx \frac{B}{L}$ y $\mu_0 \epsilon_0 \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \approx \mu_0 \epsilon_0 \frac{E}{\tau} = \frac{E}{c^2 \tau}$, con lo cual $\frac{\mu_0 \epsilon_0 \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|}{|\nabla \times \vec{B}|} \approx \frac{L^2}{\tau^2 c^2} \ll 1$ [3], con lo cual finalmente se obtiene

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (2.18)$$

sustituyendo este resultado en 2.17 y tomando en consideración que $\vec{J} = \sum_s \vec{J}_s$, se obtiene

$$\vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\frac{\nabla B^2}{2\mu_0} + \frac{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}}{\mu_0}, \quad (2.19)$$

donde el termino $\frac{\nabla B^2}{2\mu_0}$ es denominado gradiente de presión magnética, la cual ejerce una fuerza perpendicular a la orientación de la densidad de corriente \vec{J} . Por el otro lado, las componentes paralelas a \vec{J} se cancelan con componentes del termino $\frac{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}}{\mu_0}$. Esta presión magnética se establece como

$$P_B = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (2.20)$$

la cual se debe a un proceso de auto interacción entre la corriente eléctrica y su propio campo magnético. Esta presión magnética es de gran gran relevancia en circuitos delgados de corriente, plasmas solares y espaciales [14, 2].

2.2. Ionosfera

La Ionosfera es una región parcialmente ionizada de la atmósfera superior terrestre. Está comprendida entre los 75 y 1000 kilómetros de altitud, caracterizada por una abundante población de iones y electrones libres [15]. Las especies de iones que mayoritariamente se encuentran en esta región son: O^+ , O_2^+ y NO^+ , los cuales son producidos principalmente por procesos de foto ionización y rayos X, debido a radiación proveniente del Sol [8]. Así mismo, la densidad de este plasma levemente ionizado es controlada por procesos de producción de iones y recombinación; el proceso de recombinación ocasiona que los iones se combinen con electrones para producir moléculas neutras. Además, gran parte de la dinámica de esta región es controlada por el calentamiento producido por el Sol durante la etapa diurna y por colisiones entre iones y moléculas neutras.

La interacción de la Magnetosfera con el viento solar se manifiesta a niveles de la Ionosfera, dado que esta interacción genera dos distribuciones de plasma (Figura 2.4⁴), ubicadas en los dos hemisferios del planeta Tierra [16]. Estas distribuciones de plasma generan corrientes eléctricas en la Ionosfera, las cuales traen como consecuencia variaciones de pocas decenas de nanoteslas en el campo magnético terrestre [17]. Estas variaciones son conocidas como variaciones solares de calma (Sq). Además, este conjunto de corrientes eléctricas provoca la inducción de corrientes eléctricas en lo profundo del manto terrestre (600 -1000 Km) [16]. Por lo general, la intensidad de las corrientes eléctricas inducidas corresponde a un tercio de las corrientes eléctricas presentes en la Ionosfera. Ahora bien, fuera de las corrientes eléctricas mencionadas previamente, hay otra corriente eléctrica de gran importancia llamada corriente de chorro Ecuatorial (CCE) [18, 19]. La cual está ubicada entre $\pm 3^\circ$ alrededor del Ecuador magnético y fluye hacia el Este. El principal factor que causa que la CCE exista es la geometría del campo magnético terrestre, dado que las líneas de fuerza del campo magnético son horizontales a estas latitudes [16].

⁴Imagen tomada y modificada de [3]

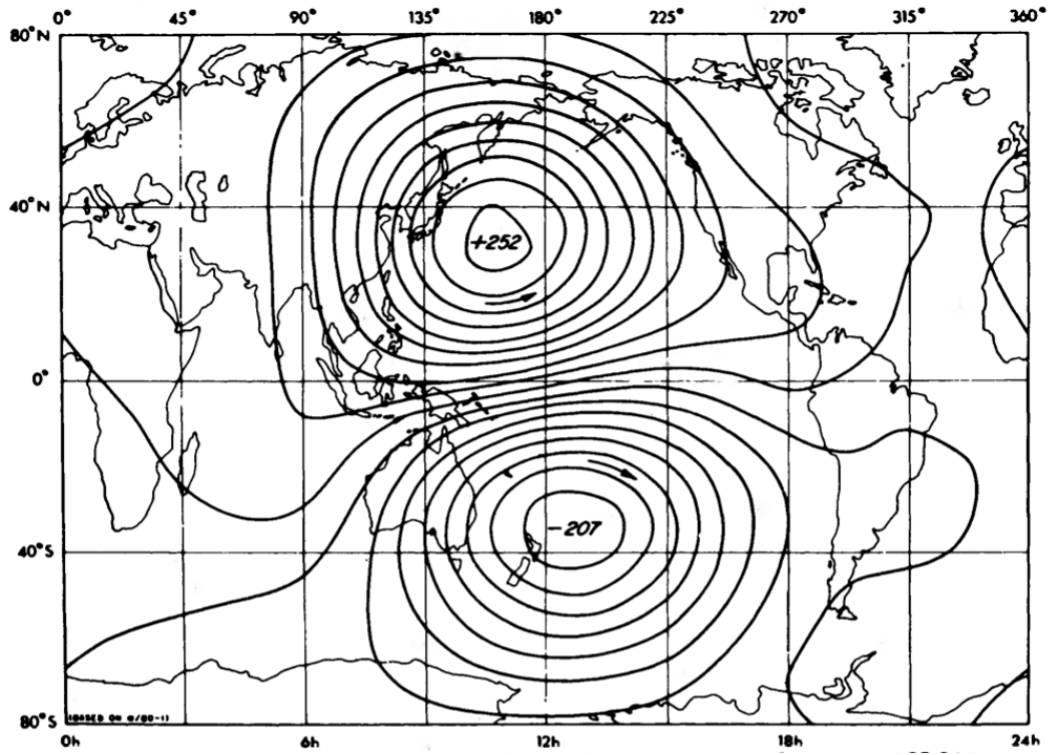


Figura 2.4: Distribución de corrientes a nivel de la Ionosfera, responsables de las variaciones magnéticas denominadas Sq .

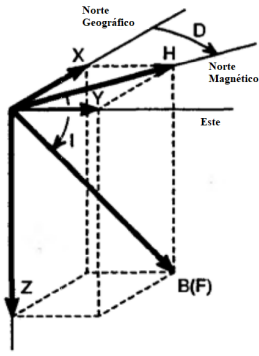
Capítulo 3

Datos y Modelo

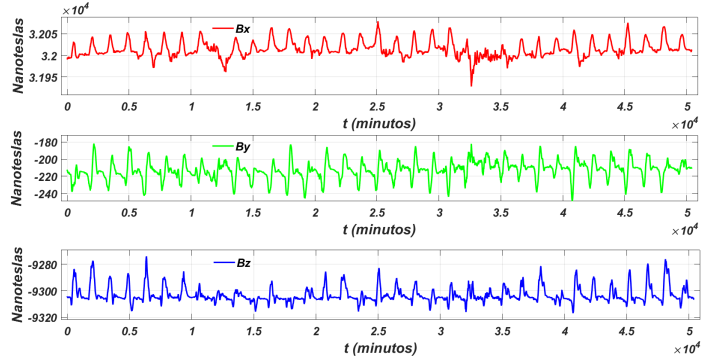
3.1. Datos

El campo magnético es medido por medio de magnetómetros, los cuales se ubican en una configuración ortogonal a la superficie terrestre . Los observatorios actualmente reportan la magnitud de las tres componentes del vector de campo magnético B_x , B_y , B_z , regularmente cada minuto (Figura 3.1a¹). A la magnitud de la campo magnético proyectada sobre el plano horizontal se le conoce como H , al ángulo que H describe respecto al norte geográfico se le denomina declinación D y al ángulo descrito entre el vector de campo magnético \vec{B} y \vec{H} se le conoce como inclinación [20][3].

¹Imagen tomada y modificada de [3]



(a)



(b)

Figura 3.1: a) Representación vectorial del campo magnético. b) Componentes del campo magnético terrestre.

El campo magnético reportado por los observatorios es una superposición de señales provenientes de diferentes tipos de corrientes eléctricas. Algunas de estas contribuciones son muy estables por semanas y hasta décadas, cómo las variaciones seculares (SV) y solares (SC). Las contribuciones SV son debidas a la dinámica interna del núcleo del planeta Tierra, mientras que las variaciones SC son debidas a la dinámica del Sol durante su ciclo solar, el cual tiene una duración de aproximadamente 11 años [21, 22, 23]. También, están presentes contribuciones de origen ionosferico (Sq), las cuales cambian en más corto tiempo (minutos). Así mismo, hay contribuciones provenientes del manto terrestre (B_I) [16], inducidas por corrientes eléctricas presentes en la Ionosfera, también hay contribuciones de corrientes presentes en la Magnetosfera (Dst), así como las del campo magnético de la Tierra (B_0); el cual es muy estable para distancias menores a $3R_T$. En consecuencia, el campo magnético total se define como

$$B = B_0 + SV + Sq + Dst + B_I + SC. \quad (3.1)$$

3.2. Modelo

Las características del campo magnético, señaladas anteriormente, ofrecen una importante oportunidad para analizar el sistema para tiempo cortos por medio de un desplazamiento cuadrático medio magnético (MMSD)[24].

$$\overline{\Delta B^2(\tau)} = \overline{(B(t + \tau) - B(t))^2}. \quad (3.2)$$

El análisis del MMSD permite minimizar las variaciones que cambian lentamente en el tiempo. Además, resulta conveniente realizar este análisis sobre H , dado que sea demostrado que las mayores contribuciones de corrientes inducidas en el manto terrestre están presentes en la componente B_z [16]; donde $H = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$. De lo anterior, resulta que el MMSD de H puede ser considerado con solo contribuciones de corrientes de la Ionosfera y la Magnetosfera $\overline{\Delta H^2} \approx \overline{\Delta H^2(Sq, Dst)}$, debido, a que los términos B_0 , SV y SC son prácticamente constante en el intervalo de análisis y no contribuyen en el MMSD.

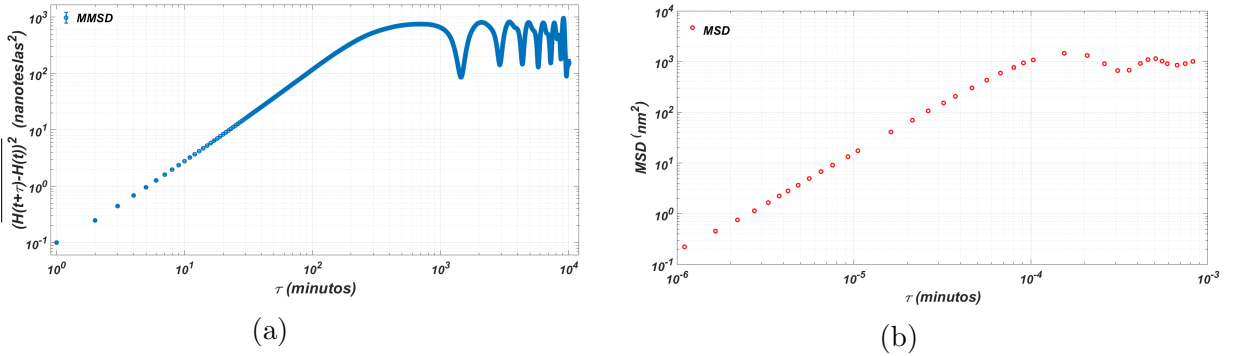


Figura 3.2: Comparación entre el MMSD y el MSD de una partícula en una trampa armónica.

Ahora, aplicando estos resultados sobre un periodo de tiempo de una semana, la cual incluye al menos 3 días de calma (ver Apéndice C), obtenemos la figura 3.2a para los datos de la estación Bangui (República Centroafrica) para el periodo de tiempo 29-01 a 04-02 del 2006. Para efectos de comparación, en la misma figura se muestran resultados correspondientes al desplazamiento cuadrático medio (MSD) de una partícula de sílica de 3μ de diámetro

atrapada en una trampa armónica subamortiguada [25]. En la figura se puede ver que el MMSD se asemeja al MSD de la Ref. [25]. El comportamiento del MMSD para $\tau < 200$ minutos se asemeja al de una partícula describiendo un movimiento Browniano libre. Mientras que, para tiempos mayores el MMSD se asemeja al de una partícula con movimiento Browniano atrapada en una trampa harmónica [25].

El MMSD describe las fluctuaciones del campo magnético, el cual es consecuencia de las corrientes eléctricas presentes en la Ionosfera y Magnetosfera; las cuales son producidas por el movimiento de iones y electrones. Al determinar la dinámica de las corrientes eléctricas se define el comportamiento del MMSD, por lo que consideramos que un primer acercamiento al problema podría ser usando un modelo basado en un proceso tipo Ornstein-Uhlenbeck para un ensamble de circuitos RCL en serie [26] [27, 7, 2] alimentados por dos fuentes de voltaje; una puramente aleatoria y otra constante. Los componentes del circuito corresponden a: i) la energía magnética del sistema es representada por un inductor L , ii) el capacitor C representa a la energía cinética del plasma en el sistema, iii) R a la resistividad en la Ionosfera como a procesos de recombinación iv) la fuente de voltaje V a las contribuciones provenientes de la energía del viento solar a un flujo constante [26] y a los procesos de foto ionización en la Ionosfera [8] y, finalmente, v) la fuente de voltaje puramente aleatoria E [27] representa a las contribuciones debidas a los disturbios provenientes del acople entre el viento solar y la Magnetosfera (figura 3.3²).

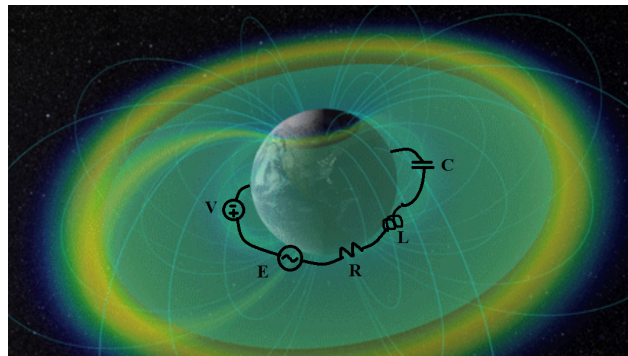


Figura 3.3: Circuito RCL equivalente a la dinámica de las corrientes de la Ionosfera y Magnetosfera.

²Imagen tomada y modificada de [28]

Ahora, para obtener la ecuación diferencial que modela el circuito eléctrico 3.3 se parte de la ley de voltaje de Kirchoff

$$V_R + V_L + V_C = V + E(t), \quad (3.3)$$

siendo la corriente fluyendo en el circuito igual a $I = C \frac{dV_C}{dt}$, es decir, que los voltajes cruzando R y L son $V_R = IR = RC \frac{dV_C}{dt}$ y $V_L = L \frac{dI}{dt} = LC \frac{d^2V_C}{dt^2}$, por consiguiente

$$LC \frac{d^2V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V + E(t), \quad (3.4)$$

donde, usando las definiciones de $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$ y $\beta = \frac{R}{L}$, se obtiene

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \beta \frac{dV_C}{dt} + \omega_0^2 V_C = \omega_0^2 V + \omega_0^2 E(t). \quad (3.5)$$

Para resolver 3.5 [7, 29], primero se obtiene la solución complementaria imponiendo que el ensamble de circuitos RCL parten de las mismas condiciones iniciales, esto es, $V_C(0) = V_0$ y $\frac{dV_C(0)}{dt} = \frac{I_0}{C}$, con $\omega_0^2 > \frac{\beta^2}{4}$ (caso subamortiguado). Segundo, el caso particular es determinado por el método de variación de parámetros, obteniéndose

$$V_C = \left(\frac{C\beta V_0 + 2I_0}{2C\omega_1} \right) \sin \omega_1 t + V_0 \cos \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}} + \frac{V}{4\omega_1} \left(-2\beta \sin \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}} + 4\omega_1 (1 - \cos \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}}) \right) + \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \int_0^t E(\xi) e^{-\frac{\beta(t-\xi)}{2}} \sin \omega_1(t-\xi) d\xi, \quad (3.6)$$

con $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}$. Es importante dejar claro que la ecuación 3.6 representa a un ensamble de soluciones de la ecuación diferencial estocástica 3.5, es decir, solo tiene sentido hablar de promedios sobre el ensamble de soluciones [30]. La corriente que fluye en el circuito es igual a

$$I = \left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right) e^{-\frac{\beta t}{2}} + \frac{C\omega_0^2}{\omega_1} \int_0^t E(\xi) e^{-\frac{\beta(t-\xi)}{2}} \left(\frac{-\beta}{2} \sin \omega_1(t - \xi) + \omega_1 \cos \omega_1(t - \xi) \right) d\xi. \quad (3.7)$$

Ahora, usando la aproximación magneto-hidrodinámica sobre la corriente de desplazamiento eléctrico (2.18), podemos determinar el campo magnético como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I. \quad (3.8)$$

Imaginando que la corriente eléctrica I (3.7) fluye por una espira y que esta espira está muy cerca del Ecuador geográfico, podemos suponer que el campo magnético de la espira proyectado en el plano horizontal es aproximadamente igual a

$$H \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (3.9)$$

siendo r la distancia de la espira al punto de observación. Es decir, la ecuación 3.9 determina el campo magnético de un ensamble de espiras de corriente ubicadas cerca al Ecuador geográfico. Por lo tanto, para determinar el MMSD de H por medio de la ecuación 3.9 debemos suponer el tipo de comportamiento que rige a la fuente de voltaje aleatoria E , de modo que se puedan calcular los promedios sobre el ensamble de soluciones. En cuanto a las consideraciones sobre E , no es de extrañar que los procesos puramente aleatorios en procesos continuos sean casos límites, por lo cual, es posible suponer que el voltaje $E(t_2)$ está correlacionado con el valor previo $E(t_1)$ para intervalos de tiempo suficientemente pequeños $t_1 - t_2$ [31, 27]. Lo cual significa que un proceso tipo Markoviano puede describir el comportamiento de E [27]. Esto permite suponer, primero, que debido a que en nuestro ensamble de circuitos RCL comienza con las mismas condiciones iniciales, entonces podemos asumir que el promedio sobre el ensamble de fuentes de voltaje E es cero. Igualmente, como las fluctuaciones

de E son prácticamente instantáneas, en consecuencia debe haber una decorrelación entre ellas, es decir, que pueden ser representadas por una función de densidad espectral [31].

$$\overline{E}^{V_0 I_0} = 0, \quad (3.10)$$

$$\overline{E(t_1)E(t_2)}^{V_0 I_0} = \phi(t_1 - t_2), \quad (3.11)$$

Por consiguiente, la cuadratura de 3.9 como su promedio es igual a

$$\begin{aligned} \overline{\Delta H^2}^{V_0 I_0} &= \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 r^2} \left(\left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} + \frac{C^2 \omega_0^4}{\omega_1^2} \right. \\ &\quad \int_0^t \int_0^t \phi(\xi - \eta) e^{-\frac{\beta(2t - \xi - \eta)}{2}} \left(\frac{-\beta}{2} \sin \omega_1(t - \xi) + \omega_1 \cos \omega_1(t - \xi) \right) \times \\ &\quad \left. \left(\frac{-\beta}{2} \sin \omega_1(t - \eta) + \omega_1 \cos \omega_1(t - \eta) \right) d\xi d\eta \right). \quad (3.12) \end{aligned}$$

Entiéndase que en 3.12 fueron usadas las propiedades descritas en 3.10 y 3.11. Ahora, tomando el cambio de variable $\xi + \eta = \nu$ y $\xi - \eta = \omega$ y considerando que $\phi(\omega)$ es una función que decae rápidamente [7], por lo cual, podemos integrar de $-\infty$ a $+\infty$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta H^2}^{V_0 I_0} &= \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 r^2} \left(\left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} + \frac{C^2 \omega_0^4}{2\omega_1^2} e^{-\beta t} \right. \\ &\quad \int_0^{2t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{\frac{\beta\nu}{2}} \left(\frac{\omega_0^2}{2} \cos \omega_1 \omega + \left(\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{\beta^2}{8} \right) \cos \omega_1(2t - \nu) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta\omega_1}{2} \sin \omega_1(2t - \nu) \right) \right) d\omega d\nu, \quad (3.13) \end{aligned}$$

tomando

$$\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) d\omega, \quad (3.14)$$

$$\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \cos(\omega_1 \omega) d\omega, \quad (3.15)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{\Delta H^2}^{V_0 I_0} = & \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 r^2} \left(\left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} + \frac{C^2 \omega_0^4}{2\omega_1^2} e^{-\beta t} \right. \\ & \left(\frac{\tau_2 \omega_0^2}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \left(\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{\beta^2}{8} \right) \left(\frac{\beta \tau_1}{2\omega_0^2} \right) (e^{\beta t} - \cos 2\omega_1 t + \frac{2\omega_1}{\beta} \sin 2\omega_1 t) + \right. \\ & \left. \left. \frac{\tau_1 \beta^2 \omega_1}{4\omega_0^2} (\sin 2\omega_1 t + \frac{2\omega_1}{\beta} (-e^{\beta t} + \cos 2\omega_1 t)) \right) \right), \quad (3.16) \end{aligned}$$

donde las constantes τ_1 y τ_2 pueden ser determinadas usando primero que: La corriente en un capacitor siempre adelanta el voltaje en noventa grados [32], de esto es posible concluir que $\overline{IV_C}^{V_0 I_0} = 0$ para tiempos largos. La segunda condición es fundada en que para tiempos largos $\overline{\Delta H^2}^{V_0 I_0}$ debe tender a un valor constante, generado por el equilibrio térmico que alcanza el sistema Ionosfera-Magnetosfera. Por lo anterior, tenemos que $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$ (ver Anexo B), por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\Delta H^2}^{V_0 I_0} = \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 r^2} \frac{\tau_0 C^2 \omega_0^4}{2\beta} = \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 r^2} I_\infty^2, \quad (3.17)$$

con $I_\infty = q_s n_s A \sqrt{\frac{kT_s}{2\pi m_s}}$ [8], la cual es una corriente aleatoria cruzando una área A con una distribución de velocidad Maxwelliana. Es decir, que $\tau_0 = \frac{I_\infty^2 2\beta}{C^2 \omega_0^4}$, sustituyendo esto en 3.16 y haciendo uso de las relaciones trigonométricas para ángulo doble, se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{\Delta H^2}^{V_0 I_0} = & \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 r^2} \left(\left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} + I_\infty^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} e^{-\beta t} \right) + \right. \\ & \left. I_\infty^2 \left(\frac{\beta}{2\omega_1} \cos \omega_1 t + \sin \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} - \frac{I_\infty^2 \omega_0^2}{4\omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) e^{-\beta t} \right), \quad (3.18) \end{aligned}$$

Además, considerando que $\overline{I_0} = 0$ debido a que las fluctuaciones de voltaje no están correlacionadas con la corriente, se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\Delta H^2}}^{V_0} = & \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 r^2} \left((I_0^2 \left(\frac{\beta}{2\omega_1} \sin \omega_1 t - \cos \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} + I_\infty^2 \left(\frac{\beta}{2\omega_1} \cos \omega_1 t + \sin \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} + \right. \\ & \left. I_\infty^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} e^{-\beta t} \right) + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \left(C^2 (V - V_0)^2 \omega_0^2 - \frac{I_\infty^2}{4} \right) \sin^2(\omega_1 t) e^{-\beta t} \right), \quad (3.19) \end{aligned}$$

Así mismo, considerando que el término $C^2(V - V_0)^2 \omega_0^2 - \frac{I_\infty^2}{4}$ es muy cercano a cero debido a que para el modelo se ha impuesto que $\omega_0^2 > \frac{\beta}{4}$, por lo cual, las pérdidas de energía no son tan extremas (la energía que puede almacenar un capacitor es igual $E = \frac{CV^2}{2}$). Es viable suponer que la energía $\Delta E = C(\Delta V)^2 = C(V - V_0)^2$ es aproximadamente la misma presente en la corriente I_∞^2 , en consecuencia, $C\Delta E \omega_0^2 - \frac{I_\infty^2}{4} \approx 0$. Por lo anterior, el resultado 3.19 puede ser expresado como

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\Delta H^2}}^{V_0} \approx & H_0^2 \left(\frac{\beta}{2\omega_1} \sin \omega_1 t - \cos \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} + H_\infty^2 \left(\frac{\beta}{2\omega_1} \cos \omega_1 t + \sin \omega_1 t \right)^2 e^{-\beta t} + \\ & H_\infty^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} e^{-\beta t} \right), \quad (3.20) \end{aligned}$$

con $H_\infty^2 = \frac{I_\infty^2 \mu_0^2}{4\pi^2 r^2}$ y $H_0^2 = \frac{I_0^2 \mu_0^2}{4\pi^2 r^2}$. Así mismo, si desarrollamos 3.20 en series para tiempos pequeños, con $\cos \omega_1 t \approx 1$, $\sin \omega_1 t \approx \omega_1 t$ y $e^{-\beta t} \approx 1 - \beta t$, y despreciando términos mayores a t^2 se obtiene

$$\overline{\overline{\Delta H^2}}^{V_0} \approx H_0^2 \left(\frac{5\beta^2}{4} t^2 - 2\beta t + 1 \right) + H_\infty^2 \left((\omega_1^2 - \beta^2) t^2 + 2\beta t \right) \quad (3.21)$$

donde la ecuación 3.21 describe dos tipos de comportamiento, uno balístico y uno difusivo para t pequeños.

Finalmente, cabe mencionar que el modelo teórico propuesto en 3.20 representa el MMSD

de un conjunto de corrientes eléctricas fluyendo en la Ionosfera y Magnetosfera terrestre, donde estas corrientes están conectadas a elementos pasivos como resistencias, inductores y capacitores. Las corrientes eléctricas son consecuencia del movimiento de iones y electrones alrededor del planeta Tierra, la cual tiene una velocidad angular de rotación Ω_T . Por esta razón, es plausible suponer que existe una transferencia de momento angular al plasma conformado por iones y electrones [3, 33, 34], generando así una onda planetaria (Onda de Rossby) [35]. En consecuencia, consideramos que es viable suponer que $\omega_1 \approx \frac{\Omega_T}{n}$, donde n puede tomar los valores 2, 5, 10 y 16 [16].

Capítulo 4

Resultados y Discusión

4.1. Resultados

Los resultados presentados en este capítulo corresponden al análisis del MMSD obtenido de semanas de calma o de baja actividad geomagnética. Para tal efecto, se escogieron semanas de calma del año 2006 dado que este año se reporta como de baja actividad para el ciclo solar 23, (~ 11 años). Los días de calma son reportados mensualmente en "Geomagnetic Indices Bulletin" por el "Geomagnetic Data Service ([http : //wdc.kugi.kyoto - u.ac.jp/qddays/index.html](http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/qddays/index.html))" por la "International Association of Geomagnetism and Aeronomy ([https : //ngdc.noaa.gov/IAGA/vdat/](https://ngdc.noaa.gov/IAGA/vdat/))". En el Apéndice C se presentan los detalles técnicos correspondientes a la selección del conjunto de datos utilizados en nuestro estudio. Con el fin de utilizar una muestra mas homogénea, hemos utilizado un análisis de ANOVA[36] (Ver Apéndice D) para seleccionar las semanas de calma a ser consideradas aquí. Lo anterior se debe a que algunas de las semanas reportadas difieren considerablemente en el valor medio del observable de interés, el MMSD. El valor de significancia considerado en el análisis es 0.005 para la prueba de Tamhane (prueba basada en que las varianzas son diferentes) [37] y hemos llevado a cabo el análisis para los resultados del MMSD por debajo de 200 minutos. Adicionalmente, con el objetivo de determinar la

validez de nuestra aproximación para el campo magnético terrestre B y su proyección sobre el plano horizontal, se tomaron los resultados del estudio de ANOVA y se analizaron diferentes estaciones geomagnéticas (ver Apéndice C). Las estaciones geomagnéticas consideradas varían en latitud respecto al Ecuador geográfico, esto es, se determino el MMSD promedio para cada estación usando los resultados de 8 semanas de calma (definidas por ANOVA).

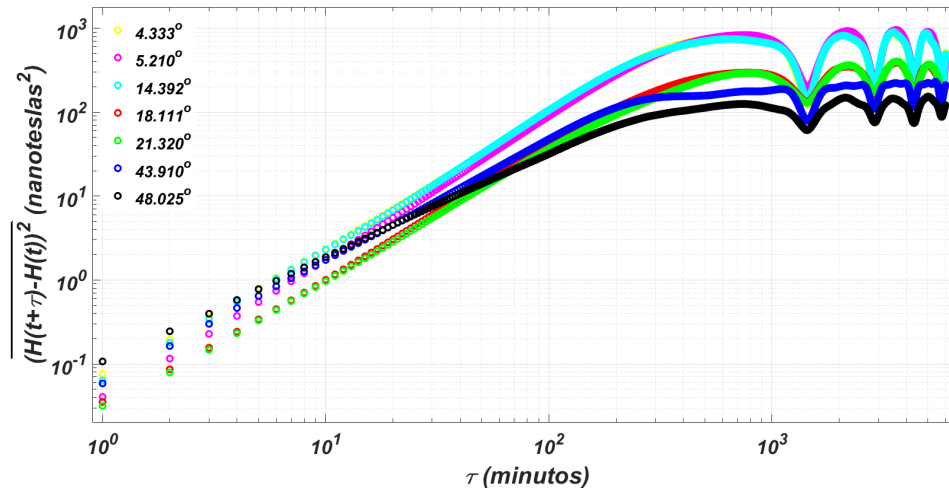


Figura 4.1: MMSD promedio calculado para el conjunto de estaciones consideradas.

La figura 4.1 muestra que el comportamiento del MMSD se ve afectado por la ubicación geográfica de la estación geomagnética, las oscilaciones parecen atenuarse a medida que la estación se aleja del Ecuador geográfico. Lo anterior puede ser racionalizado considerando que la intensidad del campo magnético producido por CCE y Sq disminuye conforme la estación se ubica mas lejos del Ecuador. Además, es factible que conforme la estación se aleja del Ecuador comienzan a ser importantes las contribuciones del campo magnético de otras corrientes eléctricas, tales como las corrientes eléctricas debidas a aurora boreales; las cuales comienzan a afectar la amplitud y comportamiento del MMSD para tiempos largos [3].

Dada la naturaleza de nuestro modelo magneto estadístico, el análisis cuantitativo lo llevamos a cabo para las dos estaciones mas cercanas al Ecuador geográfico. Llevamos a cabo un ajuste a los datos experimentales utilizando las ecuaciones 3.20 y 3.21, donde se considera

que $\omega_1 \approx \frac{\Omega_T}{2} \left(\frac{0.0021876}{\text{min}} \right)$. En primera instancia, para tiempos cortos, ajustamos el modelo mas simple de la ecuación 3.21 y los valores de los parámetros así obtenidos se utilizan como semilla para el ajuste iterativo sobre el modelo completo con la ecuación 3.20.

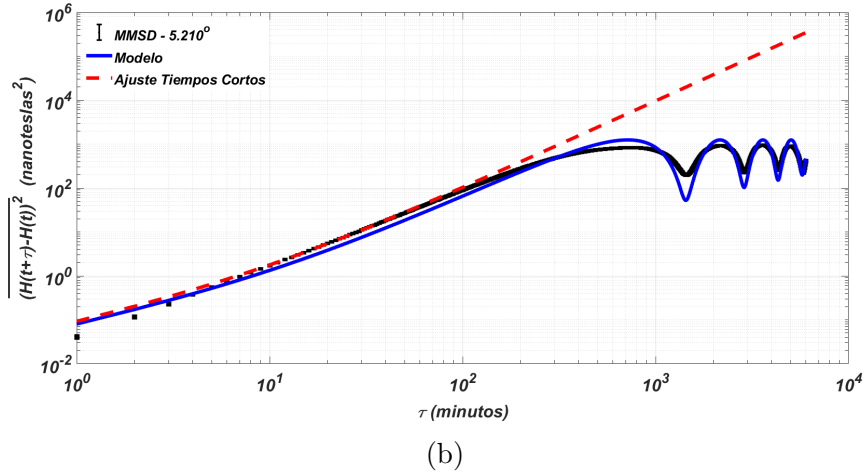
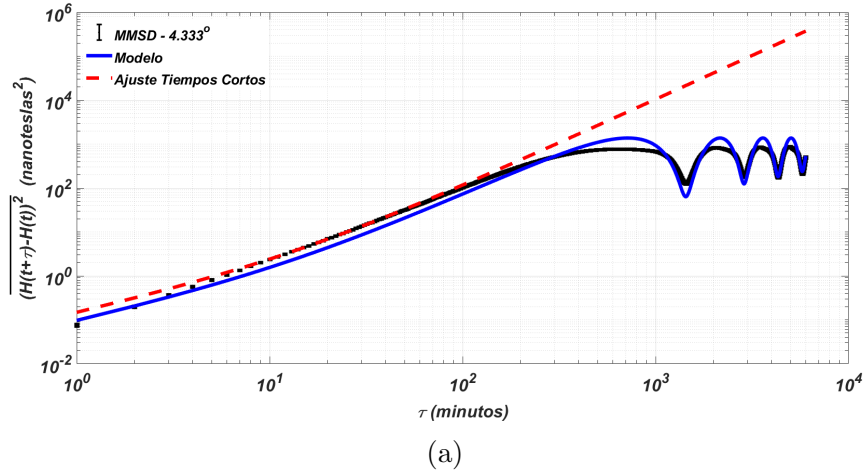


Figura 4.2: Las líneas corresponden a ajustes con nuestro modelo a los datos MMSD de dos estaciones geomagnéticas.

De nuestro análisis podemos establecer que el modelo teórico descrito por la ecuación 3.20, con las suposiciones impuestas, describe adecuadamente el comportamiento de los resultados experimentales del MMSD en casi todo el intervalo de tiempos, tal y como se muestra en la figura 4.2, donde las líneas corresponden a los ajustes y los símbolos a los datos. Cabe mencionar que hemos observado de manera consistente que las contribuciones del termino $H_0^2 \approx 0$.

Parámetros de los ajustes para tiempos cortos, ec. 3.21.			
Latitud	$H_0^2 (nT^2)$	$H_\infty^2 (nT^2)$	$\beta (\frac{1}{min})$
4.333°	≈ 0	2,163.2	0.0000321
5.210°	≈ 0	1,996.6	0.0000210

Cuadro 4.1: Parámetros de los ajustes - Semillas para el proceso iterativo de la ec. 3.20.

Parámetros de los ajustes - Modelo completo			
Latitud	$H_0^2 (nT^2)$	$H_\infty^2 (nT^2)$	$\beta (\frac{1}{min})$
4.333°	≈ 0	1,372.6	0.000033
5.210°	≈ 0	1,242.7	0.000030

Cuadro 4.2: Parámetros ajuste - modelo completo, ec. 3.20.

4.2. Discusión

La dinámica presentada por el MMSD (Figura 4.2) muestra que hay dos tipos de regímenes, para el conjunto de partículas que conforman las corrientes eléctricas presentes en la Ionosfera y Magnetosfera. Para tiempos $t < 200$ minutos encontramos un régimen balístico, dado que, la viscosidad es muy baja en los plasmas presentes en la Ionosfera y Magnetosfera. Se puede tomar como una buena aproximación que estos plasmas son gases ideales. Así mismo, los valores encontrados para β respaldan la suposición de gas ideal. Mientras, a largas escalas de tiempo ($t > 200$) comienza a verse una tendencia a un valor de saturación para el MMSD. Este valor de saturación del MMSD (H_∞^2) para tiempos largos es muy cercano al predicho por una corriente aleatoria con una distribución Maxwelliana (Ver Apéndice E), siendo esta de aproximadamente $989 nT^2$, para la estación más cercana al Ecuador geográfico. Esta corriente aleatoria fue calculada solo en la Ionosfera. Por lo tanto, al sumar las contribuciones de las corrientes en la Magnetosfera, es plausible creer que este valor se acerque aún más al obtenido por el ajuste del modelo completo 3.20. Así mismo, la

rotación de la Tierra produce una transferencia de momento angular al plasma de iones y electrones, lo cual se traduce en las oscilaciones que se manifiestan a tiempos largos, con un periodo de $T \approx 48$ horas.

Otro rasgo del modelo descrito por la ecuación 3.20, es que algunos de sus parámetros pueden ser estimados de forma independiente, como H_0^2 ; el cual para fines prácticos puede ser considerado igual a cero ($H_0^2 \approx 0$). Por otro lado, el término H_∞^2 puede ser estimado si contamos con datos más precisos de n_s , T_s y el área A , en las diferentes regiones en la Ionosfera y Magnetosfera (Ver Apéndice E). En consecuencia, el modelo descrito por la ecuación 3.20 está definido, prácticamente; por un solo parámetro libre, β .

Consideramos que el estudio presentado en este trabajo constituye un esquema estadístico viable para llegar a comprender la dinámica de las corrientes eléctricas presentes en la Ionosfera y Magnetosfera. Aquí se ha presentado una propuesta enfocada en establecer un modelo físico para describir las fluctuaciones del campo magnético terrestre, medido en estaciones cercanas al Ecuador geográfico, durante periodos de baja actividad geomagnética. El modelo describe adecuadamente las observaciones experimentales existentes, lo cual nos permite anticipar que el modelo puede ser extendido para estudiar fenómenos más complejos presentes en estas corrientes eléctricas, como, el acople Magnetosfera y viento solar en eventos de alta actividad solar.

Una de las propuestas que se plantea para desarrollar a futuro es la de abordar teóricamente la situación de las fluctuaciones del campo magnético terrestre durante periodos de alta actividad geomagnética. Para lograr lo anterior, se considera incluir en el modelo actual a otros tipos de corrientes eléctricas presentes en la Magnetosfera e Ionosfera, además de inestabilidades que puedan detonar una tormenta magnética.

Apéndice A

Demostración Ecuaciones 2.5 y 2.6

Este apéndice tiene como objetivo esclarecer la obtención del conjunto de ecuaciones 2.5 y 2.6. Las cuales fueron obtenidas por T. G. Northrop y son reportadas en [12, 11]. Por lo tanto, considerando como parámetro de expansión $\epsilon = \frac{m}{q}$, dado que, $\epsilon = \frac{\rho B}{v_{\perp}}$ es una relación la cual debe mantenerse constante, además, solo tomando términos de orden cero para ϵ y partiendo de la siguiente ecuación:

$$\epsilon \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} - \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \nabla B + \frac{\vec{F}_g}{q} + O(\epsilon^2), \quad (\text{A.1})$$

así mismo, tomando en cuenta que los vectores unitarios dependen del vector \vec{r} ($\vec{e}_{1(\vec{r})}, \vec{e}_{2(\vec{r})}$ y $\vec{e}_{3(\vec{r})}$) y despreciando la contribución de \vec{F}_g , también, que el vector unitario \vec{e}_1 es paralelo a el vector de campo magnético \vec{B} . Ahora, se toma el resultado A.1 y se calcula el producto cruz con \vec{B} , además, se considera que $\dot{\vec{r}} = \dot{r}_{\parallel} + \dot{r}_{\perp}$, donde $\dot{r}_{\parallel} = v_{\parallel} \vec{e}_1 = v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B}$, generando que el termino $\vec{B} \times \dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ sea igual a $\vec{B} \times \dot{\vec{r}} \times \vec{B} = B^2 \dot{r}_{\perp}$, obteniéndose que:

$$\dot{r}_{\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} + \epsilon \frac{\vec{B} \times \ddot{\vec{r}}}{B^2}. \quad (\text{A.2})$$

Ahora, determinado $\ddot{\vec{r}}$, el cual puede ser escrito como $\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d(\dot{r}_{\parallel} + \dot{r}_{\perp})}{dt} = \frac{d(\dot{r}_{\perp} + v_{\parallel} \vec{e}_1)}{dt}$, lo cual es igual :

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d\dot{r}_{\perp}}{dt} + \vec{e}_1 \frac{dv_{\parallel}}{dt} + v_{\parallel} \frac{d\vec{e}_1}{dt}, \quad (\text{A.3})$$

el termino $\frac{d\dot{r}_{\perp}}{dt}$ se determina por recurrencia, usando la ecuación A.2; obteniéndose que:

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d\vec{u}_E}{dt} + \frac{dO(\epsilon)}{dt}, \quad (\text{A.4})$$

donde se ha llamado $\vec{u}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ y $O(\epsilon) = \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} + \epsilon \frac{\vec{B} \times \ddot{\vec{r}}}{B^2}$, siendo este último termino despreciado, debido a que al llevarlo a A.2 contribuirá con términos ϵ^2 . Realizando la derivada total $\frac{d\vec{u}_E}{dt}$, se obtiene

$$\frac{d\vec{u}_E}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_E}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial \vec{u}_E}{\partial x_i}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d\vec{u}_E}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_E}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla \vec{u}_E, \quad (\text{A.6})$$

usando las relaciones $\dot{\vec{r}} = \dot{r}_{\parallel} + \dot{r}_{\perp}$, $\dot{r}_{\parallel} = v_{\parallel} \vec{e}_1$ y $\dot{r}_{\perp} = \vec{u}_E + O(\epsilon)$, tenemos que:

$$\frac{d\vec{u}_E}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_E}{\partial t} + \vec{u}_E \cdot \nabla \vec{u}_E + v_{\parallel} \vec{e}_1 \cdot \nabla \vec{u}_E, \quad (\text{A.7})$$

donde sea omitido el términos $O(\epsilon)$, así mismo, el termino $\vec{e}_1 \cdot \nabla \vec{u}_E = \frac{\partial \vec{u}_E}{\partial x}$; llamando esta variación igual a $\frac{\partial \vec{u}_E}{\partial s} = \frac{\partial \vec{u}_E}{\partial s}$, obteniéndose

$$\frac{d\vec{u}_E}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_E}{\partial t} + \vec{u}_E \cdot \nabla \vec{u}_E + v_{\parallel} \frac{\partial \vec{u}_E}{\partial s}, \quad (\text{A.8})$$

ahora, realizando la derivada total $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial x_i}, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla \vec{e}_1, \quad (\text{A.10})$$

usando las mismas relaciones que en A.8, se obtiene :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial t} + \vec{u}_E \cdot \nabla\vec{e}_1 + v_{\parallel} \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial s}, \quad (\text{A.11})$$

llevando estos resultados a A.3, se tiene que

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}_E}{\partial t} + \vec{u}_E \cdot \nabla\vec{u}_E + v_{\parallel} \frac{\partial\vec{u}_E}{\partial s} + \vec{e}_1 \frac{dv_{\parallel}}{dt} + v_{\parallel} \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial t} + v_{\parallel}\vec{u}_E \cdot \nabla\vec{e}_1 + v_{\parallel}^2 \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial s}, \quad (\text{A.12})$$

considerando que el campo eléctrico \vec{E} es muy pequeño, entonces, los términos que contienen \vec{u}_E pueden ser despreciados, dado que son muy pequeños, así mismo, asumiendo que la dirección del campo \vec{B} varía muy lentamente, entonces, podemos omitir el termino $\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial t}$.

Llevando estas consideraciones a A.12 y reemplazando en A.2, tenemos que:

$$\dot{r}_{\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} + \epsilon \frac{\vec{B}}{B^2} \times v_{\parallel}^2 \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial s}, \quad (\text{A.13})$$

usando $\vec{e}_1 = \frac{\vec{B}}{B}$, por lo tanto

$$\dot{r}_{\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2} + \epsilon v_{\parallel}^2 \frac{\vec{B}}{B^2} \times \frac{\partial(\frac{\vec{B}}{B})}{\partial s}. \quad (\text{A.14})$$

Ahora, tomando A.2 y realizando el producto punto con \vec{e}_1 , tenemos que:

$$\epsilon \vec{e}_1 \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{e}_1 \cdot \vec{E} + \vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{B} - \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \vec{e}_1 \cdot \nabla B, \quad (\text{A.15})$$

llamando $E_{\parallel} = \vec{e}_1 \cdot \vec{E}$, además, considerando que $\vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{B} = 0$ y $\vec{e}_1 \cdot \nabla B = \frac{\partial B}{\partial s}$, se tiene

$$\epsilon \vec{e}_1 \cdot \ddot{\vec{r}} = E_{\parallel} - \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \frac{\partial B}{\partial s}, \quad (\text{A.16})$$

ahora, considerando que $\frac{d(\vec{e}_1 \cdot \vec{r})}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$, por lo cual $\vec{e}_1 \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d(\vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{r}})}{dt} - \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt}$, reemplazando las relaciones encontradas previamente para $\dot{\vec{r}}$, se tiene

$$\vec{e}_1 \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{dv_{\parallel}}{dt} - r_{\perp} \dot{\cdot} \frac{d\vec{e}_1}{dt} - v_{\parallel} \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} \quad (\text{A.17})$$

donde $\frac{d(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1)}{dt} = 2\vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} = 0$, debido a que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$, por ultimo reemplazando $r_{\perp} \dot{\cdot}$, obtenemos

$$\epsilon \frac{dv_{\parallel}}{dt} - \epsilon \vec{u}_E \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt} = E_{\parallel} - \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \frac{\partial B}{\partial s}, \quad (\text{A.18})$$

$$\epsilon \frac{dv_{\parallel}}{dt} = E_{\parallel} - \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \frac{\partial B}{\partial s} + \epsilon \vec{u}_E \cdot \frac{d\vec{e}_1}{dt}, \quad (\text{A.19})$$

considerando que el termino \vec{u}_E es muy pequeño, tenemos finalmente

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel} - q \frac{\rho^2 \Omega_C}{2} \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (\text{A.20})$$

Apéndice B

Demostración $\tau_1 = \tau_2$

Este apéndice se presenta con el propósito de esclarecer algunos de los cálculos realizados en la obtención del resultado 3.20, enmarcado en dos propósitos: i) mostrar algunos pasos algebraicos, cómo la solución de algunas integrales y, ii) la demostración de la suposición $\tau_1 = \tau_2$, la cual permite simplificar nuestros resultados notablemente.

Partimos del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$V_C = \left(\frac{C\beta V_0 + 2I_0}{2C\omega_1} \right) \sin \omega_1 t + V_0 \cos \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}} + \frac{V}{4\omega_1} \left(-2\beta \sin \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}} + 4\omega_1 (1 - \cos \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}}) \right) + \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \int_0^t E(\xi) e^{-\frac{\beta(t-\xi)}{2}} \sin \omega_1(t - \xi) d\xi, \quad (\text{B.1})$$

$$I = \left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \right) \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}} + \frac{C\omega_0^2}{\omega_1} \int_0^t E(\xi) e^{-\frac{\beta(t-\xi)}{2}} \left(\frac{-\beta}{2} \sin \omega_1(t - \xi) + \omega_1 \cos \omega_1(t - \xi) \right) d\xi, \quad (\text{B.2})$$

además, las condiciones

$$\overline{E}^{V_0 I_0} = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\overline{E(t_1)E(t_2)}^{V_0 I_0} = \phi(t_1 - t_2), \quad (\text{B.4})$$

entonces

$$\begin{aligned} \overline{V_C I}^{V_0 I_0} &= \left(\left(\frac{C\beta V_0 + 2I_0}{2C\omega_1} \right) \sin \omega_1 t + V_0 \cos \omega_1 t \right) e^{-\frac{\beta t}{2}} + \\ &\frac{V}{4\omega_1} \left(-2\beta \sin \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}} + 4\omega_1 (1 - \cos \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}}) \right) \left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right) e^{-\frac{\beta t}{2}} \\ &+ \frac{C\omega_0^4}{\omega_1^2} \int_0^t \int_0^t \phi(\xi - \eta) e^{\frac{\beta(2t-\xi-\eta)}{2}} \left(\frac{-\beta}{2} \sin \omega_1(t - \xi) + \omega_1 \cos \omega_1(t - \xi) \right) \sin \omega_1(t - \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

y usando relaciones trigonométricas para reescribir B.5, se obtiene

$$\sin \alpha \sin \gamma = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)), \quad (\text{B.6})$$

$$\sin \alpha \cos \gamma = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \gamma) - \sin(\alpha - \gamma)), \quad (\text{B.7})$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} \overline{V_C I}^{V_0 I_0} &= \left(\left(\frac{C\beta V_0 + 2I_0}{2C\omega_1} \right) \sin \omega_1 t + V_0 \cos \omega_1 t \right) e^{-\frac{\beta t}{2}} 1 + \\ &\frac{V}{4\omega_1} \left(-2\beta \sin \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}} + 4\omega_1 (1 - \cos \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}}) \right) \left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right) e^{-\frac{\beta t}{2}} \\ &+ \frac{C\omega_0^4}{\omega_1^2} \int_0^t \int_0^t \phi(\xi - \eta) e^{\frac{-\beta(2t-\xi-\eta)}{2}} \left(\frac{-\beta}{4} (\cos \omega_1(\eta - \xi) - \cos \omega_1(2t - \eta - \xi)) + \right. \\ &\left. \frac{\omega_1}{2} (\sin \omega_1(2t - \eta - \xi) - \sin \omega_1(\eta - \xi)) \right) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Ahora, realizando los cambios de variables $\xi + \eta = \nu$ y $\xi - \eta = \omega$ y tomando en cuenta que $\phi(\omega)$ decae rápidamente, por lo cual, se puede integrar de $-\infty$ a $+\infty$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\overline{V_C I^{V_0 I_0}} &= \left(\left(\frac{C\beta V_0 + 2I_0}{2C\omega_1} \right) \sin \omega_1 t + V_0 \cos \omega_1 t \right) e^{-\frac{\beta t}{2}} + \\
\frac{V}{4\omega_1} & \left(-2\beta \sin \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}} + 4\omega_1 (1 - \cos \omega_1 t e^{-\frac{\beta t}{2}}) \right) \left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right) e^{-\frac{\beta t}{2}} \\
&+ \frac{C\omega_0^4}{2\omega_1^2} e^{-\beta t} \int_0^{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{\frac{\beta \nu}{2}} \left(\frac{-\beta}{4} (\cos(\omega_1 \omega) - \cos \omega_1 (2t - \nu)) + \right. \\
&\left. \frac{\omega_1}{2} (\sin \omega_1 (2t - \nu) - \sin(\omega_1 \omega)) \right) d\xi d\nu, \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

y utilizando las siguientes relaciones

$$\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) d\omega, \quad (\text{B.10})$$

$$\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \cos \omega_1 \omega d\omega, \quad (\text{B.11})$$

y tomando en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \sin \omega_1 \omega d\omega = 0, \quad (\text{B.12})$$

debido a que $\phi(\omega)$ puede ser considerada una función par. Por ultimo, determinando la solución del siguientes conjunto de integrales de recurrencia, las cuales están presentes en B.9

$$\int_0^{2t} e^{\frac{\beta \nu}{2}} \cos \omega_1 (2t - \nu) d\nu = \frac{\beta}{2\omega_0^2} (e^{\beta t} - \cos(2t\omega_1) + \frac{2\omega_1}{\beta} \sin(2t\omega_1)), \quad (\text{B.13})$$

$$\int_0^{2t} e^{\frac{\beta \nu}{2}} \sin \omega_1 (2t - \nu) d\nu = \frac{\beta}{2\omega_0^2} (-\sin(2t\omega_1) + \frac{2\omega_1}{\beta} (e^{\beta t} - \cos(2t\omega_1))), \quad (\text{B.14})$$

y sustituyendo los resultados de arriba en B.9, se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{V_C I}^{V_0 I_0} = & \left(\left(\frac{C\beta V_0 + 2I_0}{2C\omega_1} \right) \sin \omega_1 t + V_0 \cos \omega_1 t \right) \left(\frac{C(V - V_0)2\omega_0^2 - \beta I_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + I_0 \cos \omega_1 t \right) e^{-\beta t} \\ & + \frac{C\omega_0^4}{2\omega_1^2} e^{-\beta t} \left(\frac{-\tau_2}{2} (e^{\beta t} - 1) + \frac{\tau_1 \beta^2}{8\omega_0^2} (e^{\beta t} - \cos(2t\omega_1)) + \frac{2\omega_1}{\beta} \sin(2t\omega_1) \right) + \frac{\tau_1 \omega_1 \beta}{4\omega_0^2} (-\sin(2t\omega_1) + \\ & \frac{2\omega_1}{\beta} (e^{\beta t} - \cos(2t\omega_1))). \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

Ahora, considerando que $t \rightarrow \infty$, obtenemos como resultado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{V_C I}^{V_0 I_0} = \frac{C\omega_0^4}{2\omega_1^2} \left(\frac{-\tau_2}{2} + \frac{\tau_1 \beta^2}{8\omega_0^2} + \frac{\tau_1 \omega_1^2}{2\omega_0^2} \right), \quad (\text{B.16})$$

y considerando que $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}$, reescribimos B.16 como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{V_C I}^{V_0 I_0} = \frac{C\omega_0^4}{2\omega_1^2} \left(\frac{-\tau_2}{2} + \frac{-\tau_1}{2} \right), \quad (\text{B.17})$$

pero, debido a que la corriente en un capacitor siempre adelanta el voltaje en noventa grados, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{V_C I}^{V_0 I_0} = 0$, lo cual implica que

$$\tau_1 = \tau_2. \quad (\text{B.18})$$

Apéndice C

Semanas de Calma y Estaciones Geomagnéticas

Nuestro análisis se enfoca en los resultados correspondientes a condiciones ideales en la Magnetosfera e Ionosfera; entiéndase como condiciones ideales aquellas que corresponden a baja actividad geomagnética. Se construyó un conjunto de semanas de calma para el año 2006, siendo este un año de mínima actividad geomagnética para el ciclo solar 23, (~ 11 años). Nuestro primer criterio fue considerar que cada semana de calma tuviera al menos tres días de mínima actividad geomagnética. La condición anterior garantiza que solo consideramos en el estudio aquellos periodos con pocos disturbios geomagnéticos generados por la interacción del viento solar con la Magnetosfera. Los días de calma son reportados mensualmente por "Geomagnetic Indices Bulletin" por el "Geomagnetic Data Service ([http : //wdc.kugi.kyoto - u.ac.jp/qddays/index.html](http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/qddays/index.html)).^o por la "International Association of Geomagnetism and Aeronomy ([https : //ngdc.noaa.gov/IAGA/vdat/](https://ngdc.noaa.gov/IAGA/vdat/))". Estos reportes se caracterizan por indicar cuales fueron los 10 días de menor actividad geomagnética, así mismo, como los 10 días de mayor actividad geomagnética del mismo mes. De las consideraciones anteriores resulta el siguiente conjunto de semanas de calma

Semanas de Calma del Año 2006								
Semana	Mes	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6	Día 7
1	Enero	8	9_{Q_1}	10_{Q_2}	11_{Q_7}	$12_{Q_{10}}$	13_{Q_8}	14_{Q_9}
2	Enero-Febrero	29_{Q_6}	30_{Q_3}	31_{Q_5}	1_{Q_8}	$2_{Q_{10}}$	3	4
3	Febrero	8_{Q_9}	9_{Q_3}	10	11	12	13_{Q_5}	14_{Q_1}
4	Febrero-Marzo	24	25_{Q_2}	26	27_{Q_7}	28	1	29_{Q_3}
5	Marzo	3_{Q_4}	4_{Q_5}	5_{Q_1}	6	7	8	$9_{Q_{10}}$
6	Marzo	11	12	13_{Q_2}	14_{Q_7}	15	16	17_{Q_6}
7	Marzo-Abril	28	29	30_{Q_9}	31	1_{Q_3}	2_{Q_5}	3_{Q_4}
8	Abril	24	25	26_{Q_9}	$27_{Q_{10}}$	28	29_{Q_6}	30_{Q_1}
9	Mayo	23	24	$25_{Q_{10}}$	26_{Q_7}	27_{Q_3}	28	29_{Q_4}
10	Junio	20_{Q_9}	21_{Q_4}	22	23_{Q_3}	24_{Q_7}	25	26_{Q_1}
11	Julio	16_{Q_8}	17_{Q_9}	18_{Q_3}	19_{Q_4}	20_{Q_6}	21_{Q_1}	22
12	Agosto	11	12	13_{Q_1}	14_{Q_5}	15_{Q_8}	16_{Q_4}	17
13	Septiembre	10	11	12	13	$14_{Q_{10}}$	15_{Q_1}	16_{Q_5}
14	Octubre	5_{Q_8}	6_{Q_4}	7	8	9	10_{Q_1}	11_{Q_5}
15	Noviembre	2	3	4	5_{Q_9}	6_{Q_7}	7_{Q_1}	8_{Q_2}
16	Noviembre	15	16	17	18_{Q_5}	19_{Q_8}	20_{Q_3}	21_{Q_4}
17	Diciembre	25	$26_{Q_{10}}$	27_{Q_3}	28_{Q_7}	29_{Q_5}	30_{Q_6}	31_{Q_2}

Cuadro C.1: Semanas de calma

Donde los subíndices Q_1, Q_2, \dots, Q_{10} indican los 10 días de mayor calma de un mes.

Por otro lado, en nuestro estudio se eligió un conjunto representativo de las estaciones geomagnéticas terrestres, las cuales varían en latitud respecto al Ecuador geográfico. Uno de los objetivos es poder establecer la validez de nuestras aproximaciones sobre las variaciones del campo magnético terrestre B y su proyección sobre el plano horizontal. Por consiguiente,

las estaciones magnéticas elegidas por la viabilidad de datos son

Estaciones Geomagnéticas		
Nombre Estación	Latitud	Código Estación
Bangui	4.333°	BNG
Kourou	5.210°	KOU
M'Bour	14.392°	MBO
San Juan	18.111°	SJG
Honolulu	21.320°	HON
Memambetsu	43.910°	MMB
F Chambon-La-Foret	48.025°	CLF

Cuadro C.2: Estaciones Geomagnéticas Consideradas.

Apéndice D

ANOVA

El análisis descrito en este apéndice se llevo a cabo con el objetivo de contar con una muestra más homogénea sobre las semanas de calma para nuestro estudio. Dado que muchas de las semanas consideradas difieren en su media para el MMSD, como se muestra en la figura D.1a, se realizó un análisis de varianza de un factor (ANOVA)[36]. El valor de significancia considerado es 0.005 para la prueba de Tamhane (prueba basada en que las varianzas son diferentes) [37] y hemos llevado a cabo el análisis para los resultados del MMSD por debajo de 200 minutos.

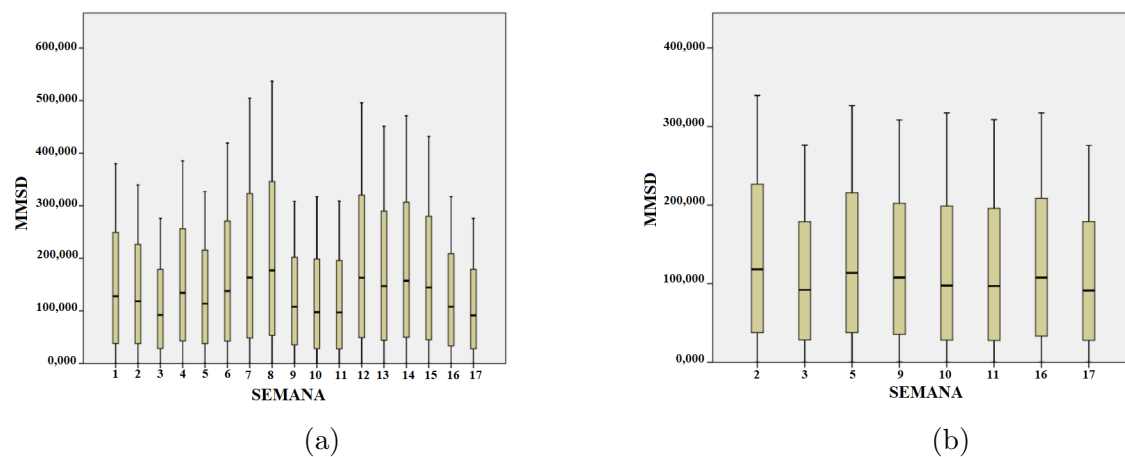


Figura D.1: a) Conjunto de semanas de calma reportadas del año 2006. b) Resultado del análisis de ANOVA de un factor.

Del conjunto de 17 semanas de calma reportadas en el año 2006, nuestro análisis arrojo

que solo 8 muestran un comportamiento similar, siendo estas las que finalmente se utilizaron en nuestro estudio.

Apéndice E

Cálculos de I_∞ y H_∞^2

Este apéndice tiene el propósito de mostrar como es que se establece una cota razonable para unos de los parámetros de ajuste de nuestro modelo H_∞^2 . Para lograr esto utilizaremos el resultado 3.17 además de los datos reportados en la figura E.1.

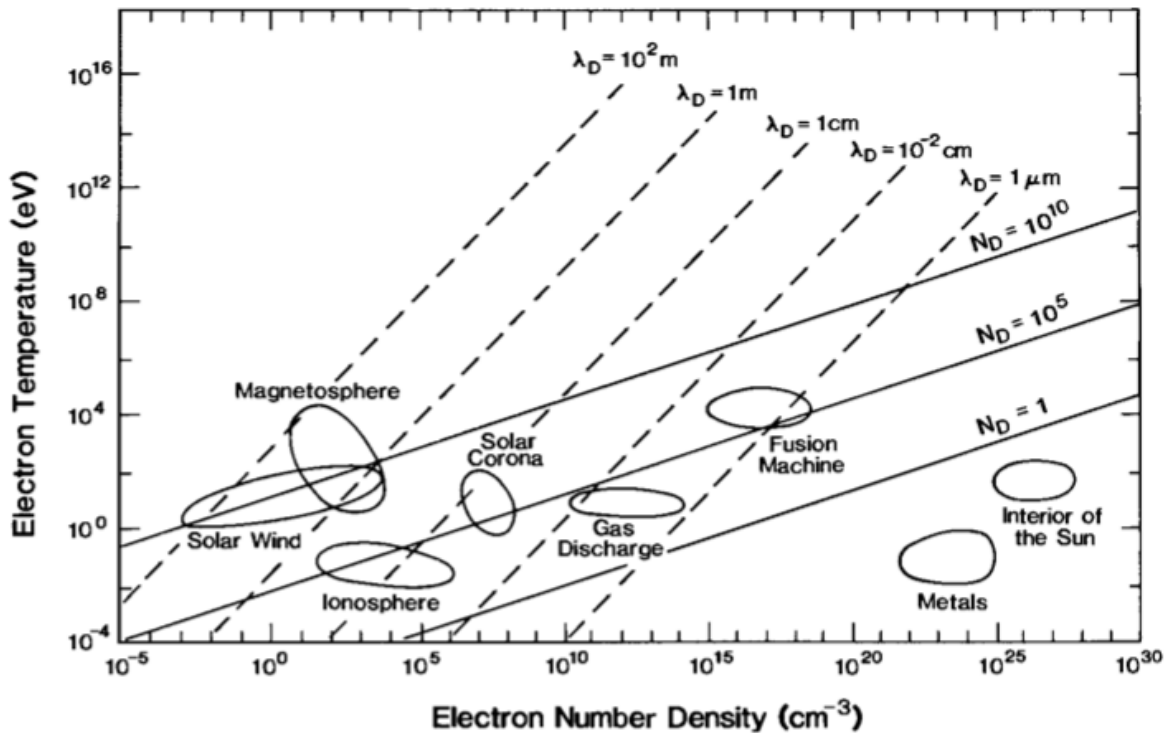


Figura E.1: Parámetros para diferentes tipos de plasmas de electrones

Tomando los valores de los parámetros $n_e \approx \frac{10^4}{cm^3}$, $T_e \approx 10^{-2}eV$ para electrones a nivel de la Ionosfera (Figura E.1 ¹)[3], además de $m_e = 9.1093 \times 10^{-31}kg$ y $|q_e| = 1.6021 \times 10^{-19}c$. A continuación, usamos estos valores de los parámetros en $I_\infty = q_s n_s A \sqrt{\frac{kT_s}{2\pi m_s}}$, obteniendo que $I_\infty \approx A \times 26.8033 \frac{\mu A}{m^2}$, donde se considera que la zona de la Ionosfera que más contribuye con corrientes eléctricas es conocida como región E (Región Dinamo); la cual se extiende desde los 90 a 150km de altitud. Posteriormente, en primera aproximación se considera que en el Ecuador geográfico tenemos un toroide de plasma conformado por electrones con una intensidad de corriente igual $I_\infty \approx A \times 26.8033 \frac{\mu A}{m^2}$, además que el diámetro del círculo del toroide es igual al diámetro de la región E . Por lo tanto, se obtiene

$$I_\infty \approx \pi \times 30^2 \times 10^6 m^2 \times 26.8033 \frac{\mu A}{m^2} = 75,784.545A. \quad (E.1)$$

Sustituyendo este resultado en 3.17 y considerando que la estación geomagnética esta a una distancia $r = \sqrt{R_T^2 \sin^2 \theta + h^2}$, donde θ es la latitud de la estación geomagnética, R_T el radio de la Tierra y h la altura a la cual está el centro de la región $E(120km)$. Aplicando estas consideraciones las estaciones geomagnéticas más cercanas al Ecuador geográfico, se obtiene

Valores de H_∞				
Latitud	R_T (km)	I_∞ (A)	r (km)	H_∞ (nT)
4.333°	6,378	75,784.545	481.8	31.45
5.210°	6,378	75,784.545	591.4	25.62

Cuadro E.1: Valores Aproximados de H_∞ .

¹Imagen tomada y modificada de [3]

Bibliografía

- [1] K. Birkeland, The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902–1903. Aschehoug, Oslo: H. Aschehoug and Co., Christiania, first ed., 1908.
- [2] H. Alfvén, Cosmic Plasma. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, volume 82 ed., 1981.
- [3] M. G. Kivelson and C. T. Russell, Introduction to Space Physics. 40 West 20th Street, New York, NY 10011-4211, USA: Press Syndicate of the University of Cambridge, first ed., 1995.
- [4] E. V. Appleton and M. A. F. Barnett, “On wireless interference phenomena between ground waves and waves deviated by the upper atmosphere,” The Royal Society, vol. 113, no. 764, pp. 450–458, 1926.
- [5] S. Chapman and V. Ferraro, “A new theory of magnetic storms*,” Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, vol. 38, no. 2, pp. 79–96, 1933.
- [6] W. D. Gonzalez and et al, “What is a geomagnetic storm?,” JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, vol. 99, no. A4, pp. 5771–5792, 1994.
- [7] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, “On the theory of the brownian motion,” Physical Review Letter, vol. 36, pp. 823–841, 1930.

- [8] R. W. Schunk and A. F. Nagy, Ionospheres Physics, Plasma Physics, and Chemistry. The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK: Cambridge University, second ed., 2009.
- [9] K. Yakime and W. Baumjohann, Magnetosphere-Ionosphere Coupling. London, UK: Springer-Verlag, second ed., 1993.
- [10] M. B. Kallenrode, Space Physics; An Introduction to Plasmas and Particles in the Heliosphere and Magnetospheres. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, second ed., 2001.
- [11] T. G. Northrop, “Adiabatic theory of charged particle motion,” Reviews of Geophysics, vol. 5, pp. 26–44, 1966.
- [12] T. G. Northrop, “Adiabatic charged-particle motion,” Reviews of Geophysics, vol. 1, no. 3, pp. 283–304, 1963.
- [13] G. W. Prölss, Physics of the Earth’s Space Environment. Berlin, Heidelberg: Springer, second ed., 2004.
- [14] D. A. Garrena and J. Chen, “Lorentz self-forces on curved current loops,” Physics of Plasmas, vol. 1, no. 10, pp. 3425—3436, 1994.
- [15] T. Pederson, “Haarp, the most powerful ionosphere heater on earth,” Physics Today, vol. 68, no. 12, pp. 72–73, 2015.
- [16] Y. Yamazaki and A. Maute, “Sq and eej—a review on the daily variation of the geomagnetic field caused by ionospheric dynamo currents,” Space Science Reviews, no. 206, p. 299–405, 2017.
- [17] Y. Yamada, “Horizontal structure of the geomagnetic 2 day variation,” Journal of Geophysical Research, vol. 114, no. A12312, 2009.
- [18] M. A. Abdu, “The international equatorial electrojet year,” Reviews of Geophysics, vol. 73, no. 5, pp. 49–54, 1992.

- [19] N. Hamid and et al, “Empirical model of equatorial electrojet based on ground-based magnetometer data during solar minimum in fall,” Earth, Planets and Space, vol. 67, no. 205, pp. 1–8, 2015.
- [20] World Data Center for Geomagnetism, Kyoto, “Data catalogue,” Feb. 2020.
- [21] D. W. Allan and E. C. Bullard, “The secular variation of the earth’s magnetic field,” Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 62, no. 4, pp. 783–809, 1966.
- [22] J. J. Love and J. L. Gannon, “Revised dst and the epicycles of magnetic disturbance: 1958–2007,” Annales Geophysicae, vol. 27, p. 3101–3131, 2009.
- [23] J. J. Love and E. J. Rigler, “The magnetic tides of honolulu,” Geophysical Journal International, vol. 197, p. 1335–1353, 2014.
- [24] C. Oliver and E. Pike, “Statistical accuracy in the photon counting structure function of fluctuating light fields,” Optica Acta: International Journal of Optics, vol. 28, no. 10, pp. 1345–1358, 1981.
- [25] S. K. Tongcang Li and et al, “Measurement of the instantaneous velocity of a brownian particle,” Science, vol. 328, no. 10, pp. 1673–1675, 2010.
- [26] R. Boström, “Ionosphere-magnetosphere coupling,” Astrophysics and Space Science Library, vol. 44, pp. 45–59, 1974.
- [27] M. C. Wang and G. E. Uhlenbeck, “On the theory of the brownian motion I I,” Reviews of Modern Physics, vol. 17, no. 2, pp. 323–342, 1945.
- [28] D. N. Baker and et al, “An impenetrable barrier to ultrarelativistic electrons in the van allen radiation belts,” Nature, vol. 515, p. 531–534, 2014.
- [29] L. S. Ornstein and W. R. V. Wijk, “On the derivation of distribution functions in problems of brownian motion,” Physica, vol. 1, pp. 235–254, 1934.

- [30] K. Jacobs, Stochastic Processes For Physicsts. The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK: Cambridge University Press, first ed., 2010.
- [31] W. T. Coffey and et al, The Langevin Equation. 5 Toh Tuck Link, Singapore 596224: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., second ed., 2004.
- [32] R. L. Boylestad, Introducción al análisis de circuitos. Atlacomulco No. 500-5° piso Col. Industrial Atoto,53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México: Pearson Educación de México, 10th ed., 2004.
- [33] H. Alfvén, “Partial corotation of a magnetized plasma,” Icarus, vol. 7, pp. 387–393, 1967.
- [34] G. T. Vickers, “The corotation of the plasmasphere,” Journal of Atmospheric and Terrestrial Physic, vol. 38, pp. 1061–1064, 1976.
- [35] R. E. Dickinson, “Rossby waves-long period oscillations of oceans and atmospheres,” Annual Review of Fluid Mechanicsc, vol. 10, pp. 159–195, 1978.
- [36] S. F. Sawyer, “Analysis of variance: The fundamental concepts,” Journal of Manual and Manipulative Therapy, vol. 17, no. 2, pp. 27E–38E, 2009.
- [37] A. C. Tamhane, “Multiple comparisons in model i one-way anova with unequal variances,” Communications in Statistics - Theory and Method, vol. 6, no. 1, pp. 15–32, 1977.