



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Propiedades de mesones pseudoescalares a
densidad finita en el modelo Nambu—Jona-
Lasinio extendido mediante el determinante de
't Hooft**

Tesis que presenta

Bilgai Almeida Zamora

para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Jesús Javier Cobos Martínez**

Ciudad de México

Octubre, 2020

Índice general

Índice de figuras	V
Índice de tablas	VII
Agradecimientos	IX
Resumen	X
Abstract	XI
1. Aspectos de Cromodinámica Cuántica	5
1.1. Cromodinámica Cuántica	5
1.2. Simetría SU(3)	6
1.2.1. Teorema de Noether	7
1.2.2. SU(3) de color	8
1.2.3. SU(N_f) de sabor	11
1.3. Libertad Asintótica y Confinamiento de Color	15
1.4. QCD Perturbativa y No-Perturbativa	18
2. Modelo de Nambu–Jona-Lasinio	20
2.1. Densidad Lagrangiana del Modelo NJL	21
2.1.1. Masa Dinámica y Ecuación de Gap	22
2.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	28
2.2.1. Diagrama de Burbuja del Pión	31
2.2.2. Diagrama de Burbuja del Kaón	32
2.3. Propiedades de Mesones Pseudoescalares	34
2.3.1. Masas y Bosones de Nambu-Goldstone	34
2.3.2. Constante de Acoplamiento	34
2.3.3. Constante de Decaimiento	36
2.4. Ajuste de Parámetros	38

3. Modelo NJL y Determinante de 't Hooft	43
3.1. Nonete de Mesones Pseudoescalares	44
3.2. Lagrangiana de NJL y Determinante de 't Hooft	45
3.3. Ecuación de Gap	46
3.4. Ecuación de Bethe-Salpeter	48
3.5. Masas de Mesones Pseudoescalares	50
3.6. Constantes de Acoplamiento	52
3.7. Resultados Numéricos	55
3.7.1. Ajuste de Parámetros	57
4. Propiedades de Mesones a Densidad Finita	61
4.1. Materia Nuclear	62
4.2. Ecuación de Gap en Materia Nuclear	64
4.3. Mesones Pseudoescalares en el Medio y Restauración Parcial de la Simetría Quiral	66
4.4. Ecuación de Bethe-Salpeter en Materia Nuclear	68
4.5. Resultados Numéricos	74
5. Termodinámica en el modelo NJL	83
5.1. Condensado Quiral a Temperatura y Potencial Químico Finitos	84
5.2. Masa Dinámica y Transición de Fase Quiral	88
5.3. Resultados Numéricos	89
6. Resumen y Conclusiones	93
A. Estructura Matemática	96
A.1. Matrices de Dirac	96
A.1.1. Identidades	97
A.2. Trazas de Dirac	97
A.2.1. Traza del Propagador de Quark	98
A.3. Matrices de Gell-Mann	99
B. Métodos de Integración y Regularización	100
B.1. Ecuación de Dirac y Propagador de Feynman	100
B.2. Parametrización de Feynman	100
B.3. Rotación de Wick	102
B.4. Regularización de Tiempo Propio	103
B.5. Función Integral Exponencial $Ei(x)$	103

C. Desarrollo Matemático	105
C.1. Cálculo para el Diagrama de Burbuja	105
C.2. Evaluación de la integral $I_{ij}(k^2)$ mediante $Ei(x)$	109
C.3. Masas de Mesones Pseudoescalares	116
C.3.1. Bosones de Nambu-Goldstone	116
C.3.2. Masas η y η'	118
C.4. Cálculo Constante de Acoplamiento	122
C.4.1. Constante de Acoplamiento $g_{\pi qq}$ y $g_{K qq}$	122
C.4.2. Constante de Acoplamiento con $Ei(x)$	122
C.5. Constantes de Decaimiento	124
C.5.1. Constante de Decaimiento f_π	124
C.5.2. Constante de Decaimiento del f_K	126
C.6. Diagrama de Burbuja en el Medio Nuclear	128
C.7. Masa del Pión en el Medio Nuclear	130
 Bibliografía	 130

Índice de figuras

1.1.	Vértices de interacción de la Lagrangiana de QCD	10
1.2.	Vértice qq-gluón en QCD no-perturbativa.	10
1.3.	Constante de acoplamiento fuerte α_s como función de la escala de energía Q [3].	17
1.4.	Interacción efectiva de 4-fermiones en la teoría de Fermi.	19
2.1.	Interacción efectiva de 4-fermiones en el modelo NJL.	22
2.2.	Generación dinámica de masa en la aproximación de campo medio.	23
2.3.	Ecuación de Gap en el modelo NJL	25
2.4.	Representación de las masas dinámicas en función de la constante de acoplamiento [11].	27
2.5.	Amplitud de dispersión quark-antiquark	28
2.6.	Ecuación de Bethe-Salpeter que determina la matriz T.	29
2.7.	Condensado quiral del quark u como función de la masa constituyente M_u	41
3.1.	Aproximación de Hartree para el vértice de 6-fermiones.	45
3.2.	Ecuación de Gap en el modelo NJL	46
3.3.	Kernel de la BSE generado por $\mathcal{L}_{4\text{-fermiones}}$ y $\mathcal{L}_{6\text{-fermiones}}$	48
4.1.	Ejemplo de distribuciones de densidad para núcleos de Au y Cu [20].	63
4.2.	Masa corriente del quark u en función de la densidad, calculada mediante el modelo QMC [23].	74
4.3.	Masa constituyente M_u^* como función de ρ_B/ρ_0	76
4.4.	Masa constituyente del quark s en función de ρ_B/ρ_0	78
4.5.	Masa del kaón como función de ρ_B/ρ_0	79
4.6.	Masa del mesón η' como función de ρ_B/ρ_0	81
4.7.	Masa del mesón η como función de ρ_B/ρ_0	81
5.1.	Masa constituyente del quark u como función de la temperatura (izquierda) y como función del potencial químico (derecha) [9]. La línea punteada corresponde al límite quiral.	88

5.2. Masa constituyente M_u como función del potencial químico a $T = 0.030$ GeV.	90
5.3. Masa constituyente M_s como función del potencial químico a $T = 0.030$ GeV.	91
5.4. Masa constituyente M_s como función del potencial químico a $T = 0.030$ GeV.	92
B.1. Rotación de Wick	102

Índice de tablas

1.1.	Valores de hipercarga Y^c y carga de isospín I_3^c de color.	7
1.2.	Masas de quarks [3]	14
1.3.	Masas de mesones pseudoescalares [3]	14
2.1.	Parámetros del Modelo NJL. Las unidades están en GeV, excepto las constantes de acoplamiento g_{mqq} (adimensional).	40
2.2.	Parámetros en el esquema PTR con respecto a M_u . Unidades en GeV, excepto $G_\pi \Lambda_{UV}^2$ (adimensional).	41
3.1.	Resultados numéricos obtenidos en el modelo NJL con determinante de 't Hooft. Unidades en GeV.	57
3.2.	Parámetros y masa constituyente M_s respecto a M_u usando $\Lambda_{IR} = 0$	58
3.3.	Parámetros y masa constituyente M_s respecto a M_u usando $\Lambda_{IR} = 0.240$ GeV.	58
3.4.	Constantes de acoplamiento meson-quark g_{mqq} (adimensional).	59
4.1.	Parámetros y masas corriente y constituyente de los quarks u y s , con $M_u = 0.4$ GeV.	74
4.2.	Masa corriente m_u^* en unidades MeV para (a) $\Lambda_{IR} = 240$ MeV (b) $\Lambda_{IR} = 0$	75
4.3.	Masa constituyente y condensado quiral del quark u en el medio nuclear. Unidades en GeV.	75
4.4.	Masa constituyente del quark s en el medio nuclear.	77
4.5.	Masa del kaón a densidad nuclear finita.	80
4.6.	Masa de η y η' a densidad nuclear finita.	80
5.1.	Condensado quiral y masa dinámica del quark u a potencial químico finito para $T = 0.03$ GeV en el modelo NJL. Las unidades son GeV.	90
5.2.	Condensado quiral y masa dinámica de los quarks u y s a potencial químico finito para $T = 0.03$ GeV en el modelo NJL+'t Hooft. Unidades en GeV.	91

*En memoria de PXNDX.
“Nunca nadie nos podrá parar”.*

Agradecimientos

A mi familia:

Dios les pague por apoyarme, amarme y creerme en mí. Por darme la fortaleza de seguir adelante aún cuando sentía que no podía más. Gracias.

A mis mejores amigos:

Ustedes, quienes me apoyaron y alentaron incondicionalmente en todo momento. Ustedes, quienes estuvieron a mi lado a pesar de la distancia. Ustedes, mis únicos y verdaderos amigos. Gracias, Sandino, Fer, Beto, Isaac y Luis.

A mi asesor:

Gracias por tu paciencia, tu apoyo y por todo lo que me haz enseñado durante este año. Gracias por encaminarme hacia el ser una buena física e investigadora.

A Pepe, Ricky, Arturo y Kros:

Sin su música no hubiese tenido momentos de paz y tranquilidad en los momentos más difíciles, gracias.

A todos ellos, mis más sinceros agradecimientos.

Resumen

En esta tesis estudiamos las propiedades en el vacío y a densidad finita de los quarks ligeros y del nonete de mesones pseudoescalares mediante el modelo extendido de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) con determinante 't Hooft usando regularización de tiempo propio. Este modelo describe la generación dinámica de masa de quarks, ruptura espontánea de la simetría quiral e incluye los efectos de la anomalía axial $U_A(1)$. Los mesones se describen como estados ligados de par quark-antiquark obtenidos por la ecuación de Bethe-Salpeter. Sus espectros de masas y propiedades (constantes de desintegración débiles y constantes de acoplamiento mesón-quark) en el vacío se discuten primero en el modelo estándar de NJL y posteriormente se incluye la interacción 't Hooft.

Las propiedades en el medio de la masa corriente de los quarks ligeros, que se utilizan para estudiar las propiedades de los mesones en el medio en el modelo NJL, se calculan dentro del modelo Quark-Meson Coupling (QMC). Se encontró que la masa de los quarks ligeros disminuyen al aumentar la densidad. En este modelo, la masa de piones es insensible a la densidad, pero la masa de kaones también disminuye al aumentar la densidad. En este esquema, la masa η disminuye rápidamente hasta desaparecer alrededor de 0.75 veces la densidad nuclear normal. En cambio, la masa del mesón η' aumenta un poco con la densidad, pero comienza a disminuir cuando la densidad es mayor a 0.75 veces la densidad nuclear normal. Con esto, se puede deducir información sobre los mesones pseudoescalares a densidad finita, en particular sobre las propiedades de los mesones η y η' . Estos resultados son útiles para comprender la restauración quiral (parcial) en materia nuclear.

Finalmente, se revisa la extensión del modelo NJL a temperatura y potencial químico finito. Solo estudiamos las masas de los quarks ligeros a $T = 30$ MeV. Sin embargo, los resultados muestran que la simetría quiral se restaura completamente a temperatura y potencial químico finitos.

Abstract

In this thesis we study the light quarks and nonet pseudoscalar mesons properties in the vacuum and at finite density in the framework of the extended Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model with 't Hooft determinant using proper time regularization. The model describes dynamical quark mass generation, spontaneous chiral symmetry breaking and includes effects of the axial $U_A(1)$ anomaly. The mesons are described as a bound state of dressed quark-antiquark pair obtained by the Bethe-Salpeter equation. Their mass spectra and properties (weak decay constants as well as the meson-quark coupling constants) in vacuum are discussed first in the standard NJL model and subsequently including the 't Hooft interaction.

The in-medium properties of the current mass of light quarks, which are used as inputs for studying the in-medium mesons properties in the NJL model, are calculated within the Quark-Meson Coupling (QMC). We found that the light quarks masses decrease with increasing density. In this scheme, the pion mass is found to be insensitive to density, but the kaon mass also decreases with increasing density. The η mass rapidly decreases up to vanishes around 0.75 times normal nuclear density. Instead the η' mass increase a little with increasing density but decreases when the density is greater than 0.75 times normal nuclear density. We conclude that we can deduce information on the pseudoscalar mesons at finite density, in particular on η and η' properties. These results are useful in the understanding the (partial) chiral restoration in nuclear matter.

Finally, the extension of the NJL model at temperature and finite chemical potential are reviewed. We only study the light quarks masses at $T = 30$ MeV. However, the results shows that the chiral symmetry is completely restored at finite temperature and finite chemical potential.

Introducción

No solo hay belleza en la escala de centímetros, también hay belleza en dimensiones más pequeñas.

Richard P. Feynman

La física de partículas es la encargada de estudiar los componentes elementales de la materia y las interacciones entre ellos, siendo el Modelo Estándar nuestra mejor teoría hasta ahora. En la naturaleza se conocen cuatro diferentes tipos de interacciones fundamentales: Gravitacional, Electromagnética, Nuclear Fuerte y Nuclear Débil, pero el Modelo Estándar de partículas elementales describe solamente a las tres últimas. Este modelo clasifica a las partículas elementales en tres: bosones de gauge, fermiones y el bosón de Higgs. Los bosones de gauge son las partículas encargadas de mediar la interacción y poseen espín igual a 1. Los fotones (γ) son las partículas mediadoras de la fuerza electromagnética, los bosones W^\pm y Z^0 median la interacción nuclear débil y los gluones (g) a la interacción nuclear fuerte. En la década de los años 60, cuando el Modelo Estándar seguía desarrollándose, se observó que los bosones W^\pm y Z^0 son partículas masivas, en contradicción a lo que se creía hasta el momento (partículas sin masa). Este problema se solucionó gracias al mecanismo de Higgs, que explica que la masa es resultado de la interacción de las partículas con el campo de Higgs. Este mecanismo implica que debe existir una partícula asociada al campo, el bosón de Higgs. Así, el Modelo estándar quedó finalmente construido. Finalmente, los fermiones son partículas de espín semi-entero y se dividen en dos grupos: leptones ($e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) y quarks (u, d, s, c, b, t). Los primeros interactúan solamente vía interacción electromagnética y débil, mientras que los quarks pueden interactuar mediante interacción electromagnética, débil y fuerte. A diferencia de los leptones, los quarks no se observan en forma aislada en la naturaleza sino que estos están confinados en hadrones: mesones, bariones, estados exóticos de quarks (tetraquarks, pentaquarks, etc.) y moléculas hadrónicas.

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría cuántica de campos que describe las interacciones fuertes y estructura de los hadrones. En particular, QCD posee dos propiedades fundamentales: *libertad asintótica* y *confinamiento*. La libertad asintótica implica que en la escala de altas energías ($\gg 1$ GeV), la interacción entre quarks resulta ser débil y por tanto esto se comportan como libres. En este régimen la constante de acoplamiento fuerte, α_s , es pequeña y por tanto QCD se puede tratar con teoría de perturbaciones. Por el contrario, a bajas energías ($\lesssim 1$ GeV), QCD adopta un carácter no-lineal y da lugar al confinamiento de quarks en hadrones. En este régimen, la constante de acoplamiento es grande. En tal caso, no es posible implementar un enfoque perturbativo a QCD. Por lo tanto, si bien conocemos la teoría fundamental, para procesos físicos de bajas energías resulta ser difícil obtener información de primeros principios de QCD, por lo que es necesario implementar otros métodos.

Para estudiar las propiedades de los hadrones, como lo son las masas, constantes de acoplamiento y decaimiento, factores de forma, etc. es necesario trabajar en la escala de bajas energías, es decir, QCD no-perturbativa. Uno de los métodos más populares es Lattice QCD, que se encarga de resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discretizado. Entre otras opciones tenemos a los modelos efectivos en los cuales se busca construir una densidad lagrangiana que contenga las mismas simetrías de QCD a bajas energías. Algunos modelos utilizados para describir la interacción entre quarks serían las ecuaciones de Schwinger-Dyson¹, QCD sum rule o el modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL). Este último es el modelo presentado en esta tesis.

Una de las características importantes de la interacción fuerte es que, cuando se trabaja en el límite de quarks sin masa, QCD posee una simetría llamada simetría quiral. Según se discutirá a lo largo de esta tesis, la simetría quiral está rota (dinámica y explícitamente) en la naturaleza. El rompimiento dinámico de la simetría quiral es responsable de la generación de la masa constituyente de los quarks y además responsable de la aparición de bosones de Nambu-Goldstone (partículas sin masa). Esta última ayuda a explicar la pequeña masa que distingue al pión de los demás hadrones. De hecho, Nambu había sugerido la existencia de un límite en el cual el pión es un bosón de Nambu-Goldstone. Fue entonces que en 1961, Nambu y Jona-Lasinio [36, 37] construyeron una lagrangiana que respeta la simetría quiral. Inicialmente el modelo NJL se construyó con una interacción de 4-fermiones

¹Las ecuaciones de Schwinger-Dyson son una formulación no-perturbativa de QCD. Sin embargo, se requiere usar algún esquema de truncamiento de la torre infinita de ecuaciones integrales no-lineales.

entre nucleones, pero a mediados de los años 80 se reinterpretó como un modelo para un sistema de quarks interactuantes. A pesar de que el modelo NJL permite entender el mecanismo de ruptura de la simetría quiral, este presenta el problema de que no es un modelo renormalizable y no confina. Además, en el modelo aparecen divergencias que debemos regular mediante algún tipo de regularización (que en nuestro caso utilizamos la regularización de tiempo propio). Como el modelo NJL es no-renormalizable, el esquema de regularización se vuelve parte del modelo, es decir, hay dependencia en la regularización empleada.

El modelo NJL ha sido utilizado para estudiar las propiedades de los hadrones tanto en el grupo de simetría SU(2) como en SU(3) de sabor. Como se dijo anteriormente, el modelo nos permite estudiar el rompimiento de la simetría quiral que está asociada con la existencia de partículas sin masa (bosones de Nambu-Goldstone). Para 2 sabores de quark, los candidatos a ser bosones de Nambu-Goldstone son los piones (π^\pm, π^0) y para 3 sabores, los bosones de Nambu-Goldstone se identifican con el octete de mesones pseudoescalares (piones, kaones y η). En realidad, en la naturaleza podemos observar que estas partículas sí tienen masa, resultado del rompimiento explícito de la simetría quiral. No obstante, aún hay una simetría que aparentemente no se realiza en la naturaleza, ni explícitamente en el espectro de masas ni con un bosón de Nambu-Goldstone: la simetría axial $U_A(1)$. No podemos asociar al singlete de SU(3), η' , con esta simetría ya que la masa del η' es considerablemente más grande que las masas del octete de SU(3). A esto se le conoce como *problema* $U_A(1)$. En realidad, esta simetría no es una simetría de QCD a nivel cuántico. Si consideramos que la lagrangiana clásica de QCD tiene una cierta simetría, entonces, según el teorema de Noether, la simetría corresponde a una ley de conservación. No obstante, cuando la teoría se cuantiza pueden aparecer anomalías que viola dicha simetría, como es el caso de la simetría axial $U_A(1)$.

Durante el período de la década de 1970 se propusieron diferentes enfoques para resolver el problema $U_A(1)$ en el modelo NJL. Fue hasta 1976 cuando G. 't Hooft demostró que con ayuda de una interacción de 6-fermiones es posible remover la simetría axial $U_A(1)$. Así, la interacción de 6-fermiones ha sido usada en el modelo NJL para estudiar la física hadrónica, principalmente para explicar la masa del mesón η' , lo cual se piensa que está relacionado con la anomalía axial de QCD.

A lo largo de los años se han hecho investigaciones con el modelo NJL centrándose en el comportamiento de la materia de quarks a bajas temperaturas y densidades, régimen que no es accesible por QCD perturbativa. El fenómeno de las modificaciones de las propiedades de mesones en el medio es uno de los temas más interesantes de la física nuclear y de hadrones.

Por ello, el principal propósito de esta tesis es estudiar las propiedades de quarks y mesones pseudoescalares en materia nuclear simétrica en el marco del modelo NJL extendido con el determinante de 't Hooft. Bajo estas condiciones se ha encontrado fenomenológicamente que la simetría quiral se restaura parcialmente en materia nuclear. De hecho, uno de los principales propósitos de los experimentos de colisiones relativistas de iones pesados es la observación de la restauración de la simetría quiral a temperatura y densidad finita. Esto conlleva a estudiar la materia fuertemente interactuante bajo estas condiciones.

En el primer capítulo de esta tesis se presentará una revisión de los aspectos básicos de la Cromodinámica Cuántica tales como sus simetrías, libertad asintótica y confinamiento y su estudio mediante física perturbativa y en modelos no-perturbativos. En los capítulos 2 y 3, se presentará el modelo NJL estándar y su extensión mediante el determinante de 't Hooft donde se estudiarán propiedades de la materia fuertemente interactuante tales como las masas constituyentes de quarks, masas de mesones, constantes de acoplamiento y constantes de decaimiento del nonete mesones pseudoescalares en el vacío. Una vez hecho esto, en el capítulo 4 procedemos a describir las mismas a densidad finita. Para ello se hará uso del modelo Quark Coupling Constant (QMC) con el cual se obtienen los efectos del medio nuclear en la masa corriente de los quarks ligeros. En el capítulo 5 se hace una breve revisión acerca de la aplicación del modelo NJL en el estudio de las transiciones de fase quiral, relacionada con la restauración de la simetría quiral. Para ello se implementa el formalismo de Matsubara (o de tiempo imaginario) para extender el modelo a temperatura finita. De todo esto se hará una comparación de los resultados obtenidos con los valores empíricos conocidos hasta el momento y con los obtenidos de otros modelos fenomenológicos. Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones obtenidas a partir de los resultados expuestos en los capítulos previos.

Capítulo 1

Aspectos de Cromodinámica Cuántica

En este capítulo se hará una revisión general a cerca de los aspectos más sobresalientes de la Cromodinámica Cuántica (QCD). Hoy en día, QCD es la teoría que mejor describe la interacción fuerte y que se basa en una simetría de gauge no-abeliana¹ $SU(3)$, cuyo grado de libertad es la carga color. Los quarks son los fermiones y los gluones son los bosones de gauge (mediadores de la interacción) de esta teoría. A diferencia de la Electrodinámica Cuántica (QED), en donde los fotones no tienen carga eléctrica, los gluones sí poseen carga de color. Esto es resultado de que la teoría es no-abeliana y por tanto los gluones pueden auto-interactuar.

En las siguientes secciones estudiaremos las simetrías de QCD mediante el Teorema de Noether y sus consecuencias a nivel de la lagrangiana de QCD. Además, se hará una breve discusión sobre las regiones de energías en las que se aplica la QCD perturbativa y no-perturbativa.

1.1. Cromodinámica Cuántica

La física de partículas se encarga de estudiar las partículas elementales y sus interacciones. La mejor descripción de estas es el Modelo Estándar, siendo este una teoría cuántica de campos relativista basada en simetrías y en la unificación de tres de las cuatro interacciones conocidas: Electromagnética, Nuclear Fuerte y Nuclear Débil (la interacción Gravitacional es la que no está incluida). El Modelo Estándar se basa en el grupo de simetría $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$. Hoy en día se conocen dos teorías encargadas de explicar

¹Un grupo no-Abeliano (G, \cdot) , también llamado no-conmutativo, contiene al menos un par de elementos A, B tal que $[A, B] \neq 0$.

dichas interacciones. La teoría Electrodébil (EW) es la unificación entre el electromagnetismo y la fuerza nuclear débil. Cabe mencionar que estas se unifican después del rompimiento de la simetría Electrodébil, inducida por los campos de Higgs (spontaneous symmetry breaking). En cambio, la QCD es la encargada de describir la nuclear fuerte. Esta última es de nuestro principal interés por lo que haremos una revisión más detallada de esta

QCD describe la interacción entre quarks mediante el intercambio de gluones, los cuales son las partículas mediadoras de la interacción de color. Los gluones son los bosones de gauge y son los portadores de un número cuántico, análoga a la carga eléctrica, que es la carga de color. Esta carga de color puede tomar tres valores (red, green, blue)². Los gluones no tienen masa, al igual que los fotones en la teoría electromagnética. Los quarks son partículas elementales que poseen carga eléctrica, de color, masa y espín $\frac{1}{2}$. Hay seis tipos de sabores: $\{u, d, s, c, b, t\}$, siendo los dos primeros los más ligeros y por tanto los más estables. En cambio, s, c, b y t son lo suficientemente masivos para decaer a otras partículas mediante la interacción débil. Hasta el momento se sabe que los quarks no han sido observados libres debido al confinamiento de color, solo se encuentran ligados para formar hadrones. Estos últimos se clasifican en dos: *mesones*, que son sistemas compuestos de quark-antiquark, $q\bar{q}$, y *bariones*, sistemas compuestos de tres quarks, qqq . También hay hadrones exóticos: tetraquarks, pentaquarks, etc. Sin embargo, aún están en controversia.

1.2. Simetría SU(3)

Existen dos tipos de simetría SU(3), la de color y la de sabor. La simetría SU(3) de color es una simetría de gauge exacta y es en la que se basa la teoría de QCD. El supuesto básico de la teoría es que cada quark puede existir en tres estados de color diferentes (red, green, blue). La hipercarga de color (Y^c) y la carga de isoespín de color (I_3^c) se usan para definir los estados en los que los quarks pueden estar (tabla 1.1).

²Uno de los experimentos que apoya el modelo de quarks es la aniquilación e^-e^+ a altas energías. En ella se producen pares muón-antimuón o pares $q-\bar{q}$ que a su vez producen hadrones. La relación entre el número de eventos de hadrones y el número de eventos de muones da una medida del número de colores de los quark. Estos experimentos sustentan a la existencia de seis quarks con tres colores.

	Y^c	I_3^c		Y^c	I_3^c
\mathbf{r}	1/3	1/2	$\bar{\mathbf{r}}$	-1/3	-1/2
\mathbf{g}	1/3	-1/2	$\bar{\mathbf{g}}$	-1/3	1/2
\mathbf{b}	-2/3	0	$\bar{\mathbf{b}}$	2/3	0

Tabla 1.1: Valores de hipercarga Y^c y carga de isoespín I_3^c de color.

No obstante, todos los hadrones (mesones y bariones) libres observados en la naturaleza deben ser “colourless” ya que no se han visto hadrones con color. Esto significa que sus números cuánticos correspondientes son $I_3^c = 0$ y $Y^c = 0$, es decir, deben ser singletes de color. A esto se le llama confinamiento de color. Por otra parte, la simetría $SU(3)$ de sabor es una simetría aproximada de QCD ya que solo permite describir a las partículas que involucran a los tres quarks más ligeros, u, d y s . El trabajar con una simetría de sabor comenzó a ser poco apropiado después del descubrimiento de los otros 3 sabores de quarks (c, b, t) ya que estos tienen masas mucho más grandes que los primeros.

En las siguientes secciones se presenta con mayor detalle estos dos tipos de simetría, sus propiedades e implicaciones. Empezaremos con la simetría $SU(3)$ de color para construir la lagrangiana de QCD y con ella describir algunas de las características más importantes de la teoría. Posteriormente discutiremos sobre la simetría de sabor, que denotaremos como $SU_F(3)$, desde el marco del modelo de quarks para poder representar aproximadamente las simetrías que se observan en la naturaleza.

1.2.1. Teorema de Noether

El teorema de Noether establece que a cada simetría (continua) de la acción \mathcal{S}

$$\mathcal{S}[\psi] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, x^\mu) \quad (1.1)$$

le corresponde una ley de conservación. \mathcal{L} denota la densidad Lagrangiana. El teorema permite determinar cantidades conservadas (carga de Noether) a partir de las simetrías que se observan en la naturaleza, imponiendo condiciones de invariancia al sistema físico en cuestión. Esto se logra siempre y cuando \mathcal{S} quede invariante, o equivalentemente, que la densidad lagrangiana sea invariante.

Consideremos que \mathcal{L} es invariante bajo una transformación de simetría global

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\Gamma^a \Theta_a} \psi(x) \quad (1.2)$$

donde Γ^a denota los generadores del grupo de simetría (ya sea $U(N)$ o $SU(N)$), Θ_a es independiente del espacio-tiempo y ψ representa a los campos de los fermiones. Definiendo la corriente de Noether como

$$j_\mu^a(x) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \frac{\partial \psi'}{\partial \Theta_a} \quad (1.3)$$

Si la lagrangiana \mathcal{L} es invariante bajo transformaciones globales, entonces la corriente j_μ^a se conserva, es decir

$$\partial_\mu j_\mu^a(x) = 0 \quad (1.4)$$

Esta corriente tendrá una carga de Noether asociada

$$Q_a = \int d^3x j_a^0(x) \quad (1.5)$$

tal que $\dot{Q}_a = 0$, por tanto Q_a es una cantidad conservada.

1.2.2. SU(3) de color

QCD está construida en base al grupo de simetría gauge no-abeliano $SU_C(3)$ en el espacio de color, donde $N_c = 3$. Este grupo de simetría se refiere al grupo unitario especial de matrices unitarias 3×3 . El número de generadores del grupo es $N_c^2 - 1 = 8$. Para definir la representación del grupo de simetría escribimos la matriz de transformación unitaria

$$U(\epsilon_1, \dots, \epsilon_8) = e^{-i\epsilon_a \frac{\lambda_a}{2}} \quad (1.6)$$

donde ϵ_a es una función arbitraria que depende del espacio-tiempo y λ_a denota las matrices hermitianas 3×3 conocidas como matrices de Gell-Mann (ver Apéndice A.3). Estas matrices son de traza nula y satisfacen el algebra de Lie

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c$$

siendo f_{abc} las constantes antisimétricas de estructura del grupo y es resultado de la característica no-conmutativa del grupo $SU(3)_C$. Se tiene un total de ocho matrices unitarias que corresponden a los ocho generadores del grupo.

Lagrangiana de QCD

La lagrangiana de QCD se puede construir bajo transformaciones gauge de la simetría $SU(3)_C$. Esto se logra imponiendo la invariancia de gauge a la lagrangiana de los quarks libres

$$\mathcal{L}_{libre} = \sum_{q=u,d,\dots} \bar{\psi}_q (i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}_q) \psi_q \quad (1.7)$$

donde ψ representa el campo del quark, q denota los seis sabores de quarks, \hat{m}_q es la matriz de masas en el espacio de sabor, $\hat{m}_q = \text{diag}(m_u, m_d, \dots, m_{N_f})$ y γ^μ son las matrices de Dirac (ver Apéndice A.1). Por simplicidad asumiremos la suma sobre índices repetidos.

Nos interesa que la lagrangiana sea invariante ante una transformación de gauge, que para los campos de quarks es de la forma

$$\psi_q \longrightarrow \psi'_q = e^{ig_s \epsilon_a(x) \lambda_a} \psi_q \quad (1.8)$$

donde g_s es la constante de acoplamiento, que es la encargada de determinar la fuerza de la interacción. En la sección (1.3) se hablará más a detalle sobre esta cantidad; $a = 1, \dots, 8$ denota los generadores de la interacción fuerte y λ_a son las matrices de Gell-Mann. El principio de gauge demanda la invariancia de la teoría para una función $\epsilon_a(x)$ arbitraria. Por ello, para preservar esta invariancia, debemos introducir los ocho campos de los gluones, cuya transformación es

$$G_\mu^a \longrightarrow G'^a_\mu = G_\mu^a - \partial_\mu \epsilon_a(x) - g_s f_{abc} \epsilon_b(x) G_\mu^c \quad (1.9)$$

Notemos que el tercer término es proporcional a la constante de estructura del grupo. Esto es necesario para que la lagrangiana sea invariante ya que la teoría es no-Abeliana. En comparación con el campo del fotón, no existe un término análogo a este ya que la interacción electromagnética sí es Abeliana. Reemplazando la derivada covariante

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_s \lambda_a G_\mu^a \quad (1.10)$$

y añadiendo el término del campo libre para los bosones de gauge $-\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$ donde $F_a^{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c$, obtenemos finalmente la lagrangiana clásica de QCD

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = \sum_{q=u,d,\dots} \left[\bar{\psi}_q (i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}_q) \psi_q - \frac{1}{4} (\partial^\mu G_\nu^a - \partial^\nu G_\mu^a) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) \right. \\ \left. + g_s \bar{\psi}_q \gamma^\mu \lambda_a G_\mu^a \psi_q - \frac{g_s}{2} f_{abc} (\partial^\mu G_\nu^a - \partial^\nu G_\mu^a) G_\mu^b G_\nu^c \right. \\ \left. - \frac{g_s^2}{4} f_{abc} f_{ade} G_\mu^b G_\nu^c G_\mu^d G_\nu^e \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

o bien, de forma compacta

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{q=u,d,\dots} \bar{\psi}_q (i\gamma^\mu D_\mu - \hat{m}_q) \psi_q - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \quad (1.12)$$

Imponer la invariancia de gauge generó la interacción entre los campos fermiónicos de los quarks con los campos de gauge y además la auto-interacción entre los gluones. El primer término en (1.11) corresponde a la lagrangiana de los campos libres. El tercer término representa la interacción entre quarks y gluones. Finalmente, el segundo y los últimos dos términos se manifiesta la auto-interacción entre los campos gluónicos (vértices de 3-gluones y 4-gluones) en el término $-\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$, correspondiente a la lagrangiana de Yang-Mills sin quarks. Esta auto-interacción permite afirmar que los gluones tienen carga de color. Los vértices correspondientes se presentan en la Figura 1.1.

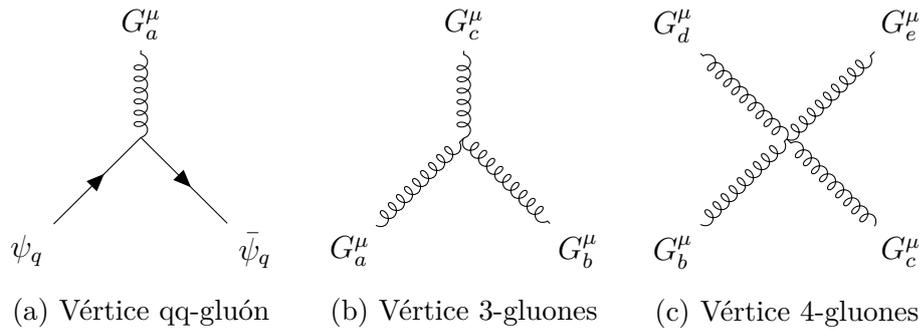


Figura 1.1: Vértices de interacción de la Lagrangiana de QCD

El vértice más general se representa como en la figura 1.2, donde la burbuja denota estructura no-perturbativa.

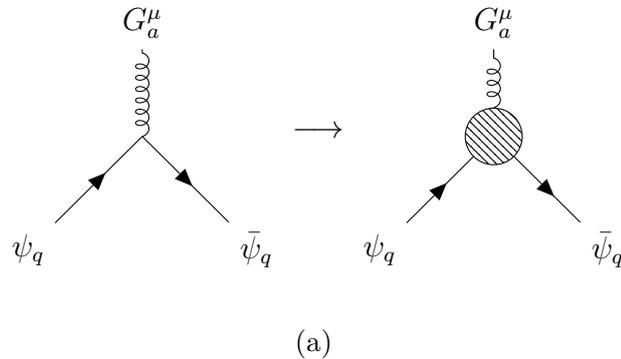


Figura 1.2: Vértice qq-gluón en QCD no-perturbativa.

1.2.3. $SU(N_f)$ de sabor

Si uno considera a QCD con N_f el número de sabores de quarks sin masa, entonces se tendrá una grupo simetría quiral de N_f sabores [29]

$$S = SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f) \otimes U_B(1) \otimes U_A(1) \quad (1.13)$$

donde $U_B(1)$ corresponde a la simetría del número bariónico y es una simetría exacta en QCD. La simetría quiral corresponde a $SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$ y se rompe de manera dinámica a $SU_V(N_f)$. Por último, está la simetría axial $U_A(1)$ que es una simetría exacta solamente en la teoría clásica, pero está rota en la teoría cuántica y se le conoce como anomalía $U_A(1)$.

Simetría del Número Bariónico

La simetría $U_B(1)$ está asociada al número bariónico. La transformación para los campos de quarks de la simetría es

$$U_B(1) : \quad \psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi \quad (1.14)$$

Esta transformación deja invariante la lagrangiana de QCD de tal manera que

$$j_B^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (1.15)$$

es una corriente conservada

$$\partial_\mu j_B^\mu(x) = 0 \quad (1.16)$$

Por lo tanto, $U_B(1)$ es una simetría de QCD y se manifiesta en la naturaleza mediante la conservación de un número cuántico denominado número bariónico, que denotaremos como B .

En todas las observaciones experimentales de decaimiento de bariones, el producto final sigue conteniendo bariones, es decir, un barión solamente puede decaer a bariones de tal manera que todos los números cuánticos involucrados se conserven, incluyendo el número bariónico. Un claro ejemplo de esto, y el más importante, es la estabilidad del protón. Este, al ser el barión más ligero, no puede decaer en otras partículas sin violar el número bariónico. Todos los demás bariones, al ser más pesados, tienen la libertad de decaer en otros bariones siempre y cuando la masa invariante se conserve. Por ejemplo, el neutrón decae de la forma

$$n \longrightarrow pe^- \bar{\nu}_e$$

Como $m_n > m_p$, entonces este proceso está permitido. Además, podemos notar que tanto en el estado final como inicial hay partículas bariónicas involucradas. Lo mismo ocurre en colisiones de la forma

$$pn \longrightarrow pn\pi^+, pp\pi^0, pp\pi^+\pi^-, \dots$$

No obstante, en colisiones pp se han observado producciones como

$$pp \longrightarrow ppp\bar{p}, ppn\bar{n}$$

Aquí podemos ver que en el producto final tenemos más bariones que en el estado inicial. Esto no debe alarmarnos porque el número barionico *no* es el número de bariones que hay en el proceso. El número bariónico se define como

$$\begin{aligned} B(\text{bariones}) &= 1 \\ B(\text{anti - bariones}) &= -1 \end{aligned}$$

de tal manera que B será un número cuántico que se conserva en cada reacción de este tipo.

Simetría de Isoespín y Quiral

Si imponemos que \mathcal{L}_{QCD} en el límite quiral, $m = 0$, sea invariante bajo transformaciones de la simetría $SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$ es equivalente pedir invariancia ante una transformación vectorial $SU(N_f)_V$ y una transformación axial $SU(N_f)_A$

$$SU(N_f)_V : \quad \psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\tau \cdot \frac{\omega}{2}} \psi \quad (1.17)$$

$$SU(N_f)_A : \quad \psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\tau \cdot \frac{\theta\gamma_5}{2}} \psi \quad (1.18)$$

donde τ son los generadores de la simetría de sabor $SU(N_f)$. Para $N_f = 2$, τ corresponde a las matrices de Pauli, en cambio para $N_f = 3$, a las matrices de Gell-Mann. Se sabe que $SU(N_f)_V$ corresponde a la simetría de isoespín, siendo esta una simetría aproximada del vacío de QCD. Su correspondiente corriente conservada es

$$j_\mu^V = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau^i\psi \quad (1.19)$$

En la simetría $SU(N_f)_V$ se manifiesta la existencia de multipletes *casi*-degenerados en el espectro hadrónico. Por ejemplo, en el modelo de quarks, si combinamos dos partículas con isoespín $I = \frac{1}{2}$

$$2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$$

se obtiene el multiplete

$$\left. \begin{aligned} \pi^+ &= -u\bar{d} \\ \pi^- &= d\bar{u} \\ \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \end{aligned} \right\} \text{Triplete}$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \left. \right\} \text{Singlete}$$

La simetría de isospín se manifiesta en el triplete de piones ya que $m_{\pi^\pm} \sim m_{\pi^0}$. En realidad, la pequeña diferencia de masa que existe entre los piones cargados y el neutro es debido a que la masa del u y d no son idénticas. Por lo tanto, la simetría de isospín está rota por la diferencia de masas entre los quarks u y d . Aunque la simetría de isospín no es una simetría exacta de la interacción fuerte sigue siendo una buena simetría si consideramos que $m_u \simeq m_d$, como se hará más adelante.

Continuando con la simetría $SU_A(N_f)$, correspondiente a la simetría quiral, al considerar el caso de quarks sin masa, la lagrangiana de QCD es invariante ante la transformación (1.18). La corriente conservada asociada es

$$j_\mu^A = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau^i \psi \quad (1.20)$$

No obstante, cuando consideramos el término de masa en la lagrangiana de QCD, la transformación (1.18) no es una simetría ya que la variación de la lagrangiana no es cero

$$\delta \mathcal{L}_{QCD} = -\bar{\psi} \hat{m} \psi \quad (1.21)$$

de tal manera que la divergencia de la corriente es $\partial_\mu j_\mu^A \neq 0$. Esto quiere decir que el término de masa de la lagrangiana clásica de QCD rompe *explícitamente* la simetría quiral $SU(N_f)_A$. Este es el motivo por el cual la simetría quiral no puede ser una simetría exacta.

Además de estar explícitamente rota, se sabe que la simetría quiral también se rompe de manera espontánea. Una implicación del rompimiento espontáneo de una simetría global y continua, como es el caso de la simetría quiral, es la existencia de partículas sin masa y de espín cero por cada generador del grupo. Estas partículas se conocen como bosones de Nambu-Goldstone (NG). El número de generadores se obtiene al calcular $N_f^2 - 1$. Por ejemplo, en el sector $\{u, d\}$ ($N_f = 2$) tendríamos 3 generadores que correspondería a

3 bosones de NG. Recordando que para $N_f = 2$, los observables son los tres piones, π^\pm y π^0 . Al ser partículas de masa muy pequeña, resulta bastante natural interpretarlos como los bosones de NG correspondientes a dos sabores. Para el caso de tres sabores se obtiene el octete y singlete de mesones pseudoescalares

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

El octete corresponde a los mesones $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta_8$ y el singlete al mesón η_0 . Los bosones de NG serían las partículas que conforman el octete de mesones pseudoescalares más ligeros, pión, kaón y η . El hecho de que estas partículas tengan masa finita es resultado del rompimiento explícito de la simetría quiral y debido a la diferencia de masas entre los quarks, $m_u \neq m_d \neq m_s$, lo cual implica que $m_\pi \neq m_K \neq m_\eta \neq m_{\eta'}$. En la tabla 1.2 y 1.3 se muestran las masas de los quarks y del nonete de mesones pseudoescalares.

Quark	Masas
u	$2.16_{-0.28}^{+0.49}$ MeV
d	$4.67_{-0.17}^{+0.48}$ MeV
s	93_{-5}^{+11} MeV
c	1.27 ± 0.02 GeV
b	$4.18_{-0.02}^{+0.03}$ GeV
t	172.76 ± 0.3 GeV

Tabla 1.2: Masas de quarks [3]

Mesones	Masas [MeV]
π^\pm	139.57039 ± 0.00018
π^0	134.9768 ± 0.0005
K^\pm	493.677 ± 0.013
K^0, \bar{K}^0	497.611 ± 0.0013
η	547.867 ± 0.017
η'	957.78 ± 0.06

Tabla 1.3: Masas de mesones pseudoescalares [3]

Cabe mencionar que las transformaciones que involucren a γ_5 , como es el caso de la simetría quiral (y en la axial, como se verá más adelante), se conocen como transformaciones axiales y están fuertemente relacionadas al cambio de paridad de los estados cuánticos. Si la simetría quiral se manifestara de forma directa en la naturaleza, cada multiplete de isoespín vendría acompañado de otro con paridad opuesta pero esto no se observa.

Simetría Axial

Para quarks sin masa, la lagrangiana de QCD es invariante bajo transformaciones globales de la simetría axial $U_A(1)$

$$U(1)_A : \quad \psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\beta\gamma_5}\psi \quad (1.22)$$

cuya corriente asociada es

$$j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \quad (1.23)$$

En principio, la divergencia de la corriente se anula en el límite quiral $m \rightarrow 0$ ya que en la teoría clásica, el teorema de Noether nos dice que $\partial^\mu j_{5\mu} = 0$. Si bien esto es cierto a nivel clásico, en la teoría cuántica no es así. A nivel cuántico resulta ser que la divergencia de la corriente axial está dada por [24]

$$\partial^\mu j_{5\mu} = \frac{\alpha_s N_c}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a \quad (1.24)$$

donde N_c es el número de color, $G_{\mu\nu}^a$ es el tensor de campos gluónicos y $\tilde{G}_{\mu\nu}^a$ es el tensor dual. A esto se le conoce como *anomalía axial*³. Esto surge porque las teorías no-abelianas como QCD tienen acciones $S = \int d^4x G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a$ finitas, soluciones conocidas como instantones [24, 45].

Como la corriente axial no se conserva a nivel cuántico uno podría pensar que la simetría está rota pero no es así. La consecuencia principal del rompimiento de una simetría es la existencia de bosones de NG. Entonces, si $U_A(1)$ estuviera rota debería existir otro bosón de Goldstone pero no existe evidencia experimental de que haya un noveno bosón. A este problema se le conoce como anomalía $U_A(1)$ o $U_A(1)$ -puzzle. Este enigma se refleja en la existencia del mesón pseudoescalar η' que es relativamente más pesado ($m_{\eta'} \sim 1$ GeV) que el resto. Si realmente la simetría $U_A(1)$ estuviera rota, entonces el mesón η' sería el noveno bosón de Goldstone y debería tener una masa mucho más pequeña. Este problema fue resuelto por 't Hooft [1, 2], cuya solución consistió en mostrar, mediante instantons, que la simetría $U_A(1)$ no tiene manifestación física y por tanto no es una simetría de QCD.

1.3. Libertad Asintótica y Confinamiento de Color

En general, la constante de acoplamiento en cualquier teoría permite determinar la fuerza de la interacción. Estas constantes surgen de manera natural en las teorías cuánticas de campo. Por ejemplo en QED la constante de estructura fina, $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}$, es la que juega el papel de constante de acoplamiento. Notemos que es proporcional al cuadrado de la carga eléctrica e , la

³Una anomalía ocurre cuando una simetría de la acción clásica no es una verdadera simetría de la teoría cuántica completa. La corriente de Noether recibe una contribución derivada de la cuantización.

cual describe la fuerza de acoplamiento de la carga de un electrón al campo electromagnético.

En analogía a lo anterior, en QCD la fuerza de acoplamiento se describe mediante la constante g_s que aparece en la lagrangiana de QCD, (1.11). Uno puede definir una constante de acoplamiento fuerte como $\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$. A diferencia de QED, donde α_{em} disminuye conforme decrece la energía, la fuerza de la interacción fuerte decrece y se desvanece asintóticamente al aumentar la energía, que en función de la transferencia de momento Q^2 [41]

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi} \sim \frac{1}{\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)} \quad (1.25)$$

En general, en una teoría cuántica de campos, la constante de acoplamiento que mide la fuerza de la interacción adquiere una dependencia de escala después de la regularización de integrales divergentes (ultravioleta) y después de la renormalización. La dependencia del acoplamiento con el cut-off UV se puede eliminar si se permite que el acoplamiento adquiera una dependencia de escala y normalizándolos a un valor conocido (o medido) en una escala dada. Este procedimiento de renormalización define el llamado *running coupling constant*, que en esencia es un acoplamiento efectivo [13]. En QCD perturbativa, las predicciones a observables generalmente se expresan en términos del acoplamiento renormalizado, siendo este una función de una cierta escala de renormalización μ . Cuando μ se aproxima a la escala de transferencia de momento Q de un proceso, entonces $\alpha_s(\mu^2 \sim Q^2)$ corresponde a la fuerza efectiva de la interacción fuerte en dicho proceso. Así, la dependencia de $\alpha_s(Q^2)$ con la transferencia de momento Q^2 codifica la dinámica subyacente de la física de hadrones. En la figura 1.3 se muestra una gráfica del running coupling α_s como función de Q . La razón por la que α_s tiene este comportamiento es debido a la auto-interacción entre gluones. Una manera fácil de entender esto es comparando con el vacío de QED. Primero hay que mencionar que en el vacío existen fluctuaciones que se manifiestan en forma de pares virtuales de partículas-antipartículas que están constantemente creándose y aniquilándose. En QED, un fotón virtual produce pares virtuales e^-e^+ que se aniquilan. Por ello, el vacío de QED se comporta como si fuera un medio polarizable de tal manera que una carga eléctrica e está rodeada de una nube de pares virtuales e^-e^+ . Si pensamos a los pares e^-e^+ como dipolos, estos se alinearán al campo eléctrico de e produciendo un apantallamiento de la carga eléctrica. Esta carga efectiva varía en función de la distancia como $\frac{1}{r}$, cuyo comportamiento se refleja en la constante de estructura fina, donde, efectivamente, para distancias cortas (o altas energías) α_{em} aumenta.

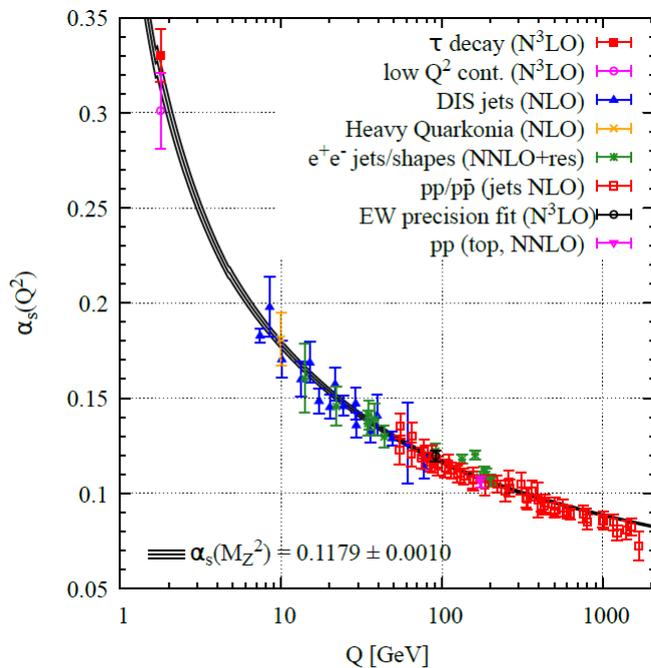


Figura 1.3: Constante de acoplamiento fuerte α_s como función de la escala de energía Q [3].

En QCD, el vacío consiste en pares virtuales quark-antiquark ($q\bar{q}$) y además gluones. En analogía a QED, los pares $q\bar{q}$ apantallan la carga de color, pero, como los gluones también poseen carga de color, generan su propio campo e interactúan con otros gluones. Esta auto-interacción fortalece el campo de tal manera que la fuerza entre quarks aumenta, haciendo que la carga efectiva crezca. Este comportamiento se suele modelar con un potencial efectivo de la forma $V(r) \sim \frac{\alpha_s}{r} + kr$, donde el primer término sería la contribución de los pares $q\bar{q}$ y el segundo el de los gluones. A partir de esto se concluye que la constante de acoplamiento α_s aumenta a largas distancias (o bajas energías).

El comportamiento de α_s tiene dos grandes implicaciones que discutiremos ahora. Como ya vimos, a altas energías α_s es pequeña, lo que significa que la fuerza de la interacción es débil. Esto sugiere que los quarks se comportan como partículas libres y es a lo que se le conoce como *Libertad Asintótica*. Por otra parte, según (1.25), α_s crece a medida que la energía disminuye, o bien, conforme aumenta la distancia. En contraste con QED, conforme aumenta la separación entre dos cargas de color, el campo aumenta. Debido a este comportamiento del campo de gluones, la densidad de fuerza entre los quarks es constante independientemente de su separación. Es por esto

que el potencial entre $q\bar{q}$ va como $\sim kr$, lo que conlleva a que la energía requerida para separar al par $q\bar{q}$ es “infinita”. Esto sugiere que los quarks deben permanecer unidos, formando estados ligados. A este fenómeno se le llama *Confinamiento* y es la razón por la que no se han observado quarks libres, solamente sistemas compuestos de quarks (hadrones). Adicionalmente, las observaciones experimentales muestran que las partículas hadrónicas detectadas son de color neutro. El confinamiento de color solo se entiende cualitativamente ya que aún no hay evidencia analítica que lo demuestre en teorías no-abelianas como es la QCD.

1.4. QCD Perturbativa y No-Perturbativa

Se puede determinar si la teoría es débil- o fuertemente acoplada dependiendo de la intensidad del acoplamiento. Si el acoplamiento $g < 1$ (ó α_s , el caso de QCD) entonces se dice que la teoría es débilmente acoplada. Este tipo de teorías tienen un carácter perturbativo ya que se puede describir de forma correcta mediante una expansión en potencias de g . Por otro lado, si $g > 1$ entonces se dice que la teoría es fuertemente acoplada. En este caso los métodos no-perturbativos juegan un papel importante para obtener descripciones aceptables de la teoría.

QCD perturbativa se utiliza para estudiar las interacciones fuertes a altas energías utilizando el hecho de que la constante de acoplamiento α_s es pequeña a estas escalas. El método empleado es hacer una expansión en potencias de $\alpha_s \ll 1$ para calcular observables físicos. A menudo los cálculos se realizan mediante expansiones de loops, o bien, implementando diagramas de Feynman.

Como se vió en la sección anterior, la constante de acoplamiento aumenta conforme la energía decrece. Esto significa que a bajas energías la constante de acoplamiento es $\alpha_s > 1$ por lo que no se puede utilizar teoría de perturbaciones. En estos casos se recurre a métodos no-perturbativos como son los modelos o teorías efectivas (Effective Field Theory, EFT).

La EFT es una aproximación a una teoría de campos que consiste en una idea básica: identificar los grados de libertad apropiados para describir el fenómeno físico que ocurre a una cierta escala de energía ignorando la subestructura y grados de libertad de escalas energéticas mayores. Un ejemplo clásico es la teoría de Fermi, que es una teoría efectiva de la interacción débil. El acoplamiento de los bosones de gauge W^\pm a los fermiones es la única interacción encargada de cambiar el sabor en el Modelo Estándar. La teoría de Fermi se encarga de estudiar los procesos de cambio de sabor a bajas energías, es decir, a energías $E \ll M_W$, mediante una lagrangiana efectiva

que se obtiene integrando sobre los campos de los bosones W^\pm en la lagrangiana del Modelo Estándar [39]. En términos de diagramas de Feynman, esto equivale a hacer que el propagador del bosón sea una interacción puntual. Este tipo de interacción se conoce como interacción efectiva de 4-fermiones (ver figura 1.4). El intercambio del bosón W puede describirse en términos de la teoría efectiva de Fermi para una transferencia de momento pequeña respecto a la masa del W . El propagador del W se reemplaza por un vértice de 4-fermiones. Este vértice es proporcional a la constante de fermi G_F .

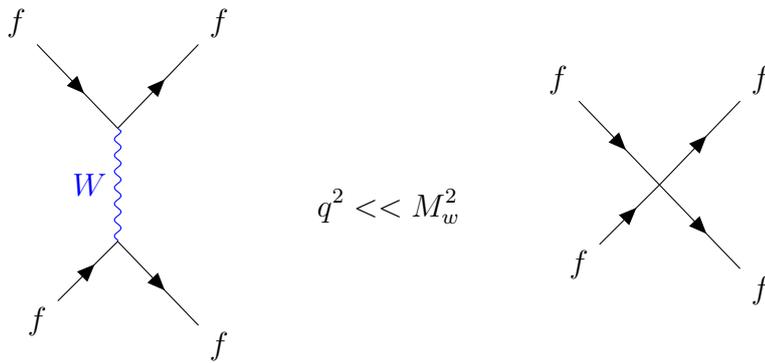


Figura 1.4: Interacción efectiva de 4-fermiones en la teoría de Fermi.

Esta idea también se implementa para describir QCD mediante el modelo efectivo de Nambu–Jona-Lasinio [36, 37]. *Grosso modo*, es un modelo que describe QCD a energías $E \ll \Lambda_{QCD}$ y contiene a los quarks como grados de libertad y está construido en base a las simetrías de QCD. En el siguiente capítulo abordaremos con mayor detalle este modelo.

Existen otros modelos efectivos como Chiral Perturbation Theory (ChPT), que se encarga de describir hadrones ligeros mediante el uso de grados de libertad hadrónicos, o bien, las teorías efectivas que utilizan grados de libertad de quarks y gluones para describir hadrones que contengan quarks pesados como son Heavy Quark Effective Theory (HQFT) y Non-Relativistic QCD (NRQCD); otras son Lattice-QCD, ecuaciones de Schwinger-Dyson, etcétera.

Capítulo 2

Modelo de Nambu–Jona-Lasinio

El modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) está inspirado en la teoría BCS de superconductividad [5, 6], donde se calcula la energía gap¹ en el espectro de excitación de los electrones. En esencia, la teoría BCS dice que, cuando los electrones están inmersos en una red cristalina, la energía entre ellos es negativa, i.e. atractiva, dando como resultado a un estado ligado de e^-e^- (pares de Cooper) para minimizar la energía, conocida como banda prohibida superconductora (band gap). En contraste con lo anterior, en el modelo NJL se considera que la interacción $q\bar{q}$ es atractiva, dando lugar a la creación dinámica de un condensado de pares $q\bar{q}$ en el vacío, análogo a los pares de Cooper en la teoría BCS. El condensado de quarks es resultado del rompimiento espontáneo de la simetría quiral. Por esta razón, el modelo NJL es de gran utilidad ya que ayuda a la comprensión de una las más importantes rupturas de simetría que ocurren en QCD, la simetría quiral.

Inicialmente el modelo NJL [36, 37] se construyó con una teoría de nucleones interactuantes². Hoy en día se reinterpreta como un modelo con grados de libertad de quarks, cuyos estados ligados se describen mediante la ecuación de Bethe-Salpeter (BSE). No obstante, el modelo NJL no es una teoría gauge ya que no incluye a los bosones (gluones) como grados de libertad, por lo que no puede describir el confinamiento de color. Además, debido a la forma en la que se asume la interacción entre quarks, tampoco es un teoría de campos renormalizable. Este último punto es una de las deficiencias del modelo ya que debe especificar una regularización para tratar con las integrales

¹Energía necesaria para romper el “enlace” que une a dos electrones que están formando un par de Cooper.

²La interacción nuclear fuerte entre nucleones es mediada por piones y se le conoce como interacción de Yukawa

divergentes que aparecen.

2.1. Densidad Lagrangiana del Modelo NJL

Como se vio en el capítulo anterior, la lagrangiana de QCD es

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{q=u,d,\dots} \bar{\psi} (i\not{D} - \hat{m}_q) \psi - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \quad (2.1)$$

donde \hat{m}_q denota la matriz de masas de los quarks, ψ_q los campos fermiónicos y $F_{\mu\nu}^a$ es el tensor de los campos de gluones. La simetría en el espacio de sabor ($N_f = 3$) que satisface la lagrangiana de QCD para quarks sin masa es

$$\mathcal{S}_{\text{QCD}} = \text{SU}_L(3) \otimes \text{SU}_R(3) \otimes \text{U}_B(1) \otimes \text{U}_A(1) \quad (2.2)$$

Para que un modelo efectivo describa de manera apropiada una teoría, este debe contener al menos las mismas simetrías. Entonces, para obtener una descripción apropiada de QCD, el modelo NJL también tiene que satisfacer las mismas simetrías, hasta donde sea posible.

La lagrangiana de QCD se puede separar en dos términos como sigue

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{quiral}} + \mathcal{L}_{\text{masa}} \quad (2.3)$$

donde $\mathcal{L}_{\text{masa}}$ es la contribución de las masas de los quarks

$$\mathcal{L}_{\text{masa}} = -\bar{\psi} \hat{m}_q \psi \quad (2.4)$$

para el caso de tres sabores $\hat{m}_q = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ y

$$\mathcal{L}_{\text{quiral}} = \bar{\psi} i\not{D} \psi - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \quad (2.5)$$

El primer término de (2.5) contiene la interacción entre quarks y gluones y la interacción entre gluones está codificada en $F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$. La lagrangiana de NJL tendrá la misma estructura

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{quiral}} + \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{masa}} \quad (2.6)$$

donde $\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{masa}}$ será igual a (2.4) y el término quirral deberá contener la dinámica y también una parte de interacción. A diferencia de la lagrangiana de QCD, el modelo NJL solo involucra grados de libertad de quarks. Como los gluones no están incluidos, una forma de pensar que sí están presentes es haciendo que el propagador del bosón sea una interacción puntual, tal y como se hace en la teoría de Fermi para la interacción débil (sección 1.4), aunque esto no

es verdad. De igual modo, el intercambio de gluones que ocurre en QCD se puede remplazar por un vértice de 4-fermiones como se muestra en la figura 2.1.

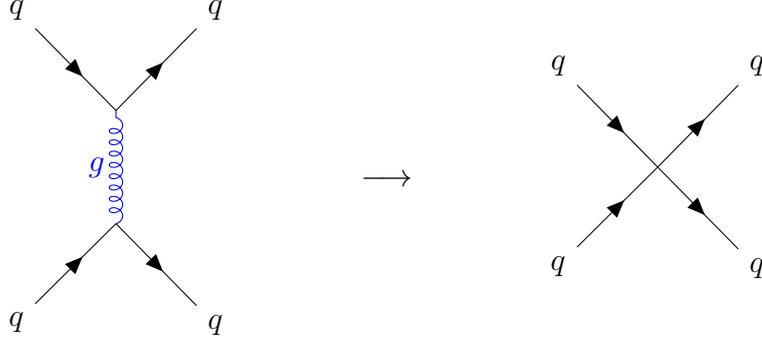


Figura 2.1: Interacción efectiva de 4-fermiones en el modelo NJL.

De esta manera, la lagrangiana quirál tendrá la forma

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{quiral}} = \bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi + \mathcal{L}_{4\text{-fermiones}} \quad (2.7)$$

Podemos pensar que los grados de libertad de los gluones estarán absorbidos en una constante de acoplamiento efectiva G_π , proveniente de la interacción efectiva de 4-fermiones. En el modelo NJL, esta interacción tiene la forma

$$\mathcal{L}_{4\text{-fermiones}} = G_\pi \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\lambda^a\psi)^2] \quad (2.8)$$

El primer término corresponde a la interacción escalar y el segundo término a la pseudoescalar. Con esto, podemos escribir la lagrangiana de NJL

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \hat{m}_q)\psi + G_\pi \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\lambda^a\psi)^2] \quad (2.9)$$

Esta lagrangiana engloba las simetrías de QCD. La simetría $U_A(1)$ a nivel cuántico no es una simetría de QCD y como vimos en el capítulo anterior, esta simetría no tiene manifestación física en la naturaleza por lo que necesita ser removida. En el capítulo 3 abordaremos la manera de resolver este problema al añadir el determinante de 't Hooft a la lagrangiana de NJL.

2.1.1. Masa Dinámica y Ecuación de Gap

La lagrangiana de interacción (2.8) induce una auto-energía a los campos de los fermiones que genera una masa efectiva, M_q . Esta masa se conoce

como masa dinámica o masa constituyente y es resultado de la formación del condensado de quarks debido al rompimiento espontáneo de la simetría quiral.

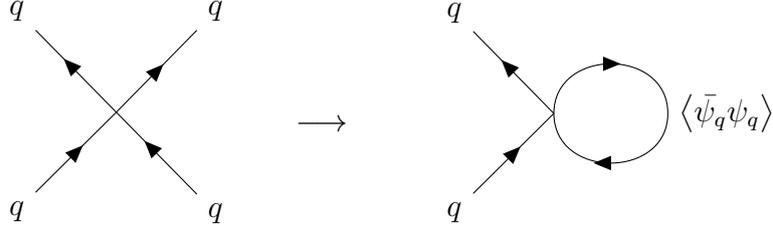


Figura 2.2: Generación dinámica de masa en la aproximación de campo medio.

La auto-energía del quark que surge del término de interacción se suele calcular dentro de las aproximaciones de Hartree o Hartree-Fock. Para obtener la ecuación de gap haremos uso de la aproximación de Hartree-Fock. Recordando que el propagador libre de Feynman se define como

$$iS(x, x') = \langle T [\psi(x)\bar{\psi}(x')] \rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-x')}}{\not{p} - m_q + i\epsilon} \quad (2.10)$$

donde T es el “time-ordered product” y m_q es la masa corriente (o desnuda) que aparece en la lagrangiana de NJL. En general, el propagador satisface la ecuación de movimiento

$$(i\not{\partial} - \Sigma) S(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (2.11)$$

donde $\Sigma(x, x')$ es la auto-energía total, que en este caso es debido a los vértices de interacción escalar $(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2$ y pseudoescalar $(\bar{\psi}\gamma_5\lambda^a\psi)^2$ que aparecen en la lagrangiana de NJL. En la aproximación de campo medio, figura 2.2, los términos de Hartree-Fock para la auto-energía asociada al vértice escalar es [29, 42]

$$\begin{aligned} \Sigma^s &= \Sigma_{\text{Hartree}}^s + \Sigma_{\text{Fock}}^s \\ &= 2G_\pi(\lambda^a) \text{Tr } iS(x, x)(\lambda^a) - 2G_\pi(\lambda^a) iS(x, x)(\lambda^a) \end{aligned} \quad (2.12)$$

y para el vértice pseudoescalar

$$\begin{aligned} \Sigma^{ps} &= \Sigma_{\text{Hartree}}^{ps} + \Sigma_{\text{Fock}}^{ps} \\ &= 2G_\pi(\gamma_5\lambda^a) \text{Tr } iS(x, x)(\gamma_5\lambda^a) - 2G_\pi(\gamma_5\lambda^a) iS(x, x)(\gamma_5\lambda^a) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Tr denota la traza sobre índices de color y de Dirac. La auto-energía total es

$$\Sigma^{(4)} = \Sigma^s + \Sigma^{ps} \quad (2.14)$$

Como podemos notar, la auto-energía total de la interacción de 4-fermiones al ser independiente de x y x' , podemos identificarla una masa efectiva $M_q = m_q + \Sigma^{(4)}$, donde M_q es la masa dinámica generada por la interacción. La solución de (2.11) en el espacio de momento es el propagador del quark vestido de sabor q (Apéndice B.1)

$$S(p) = \frac{\not{p} + M_q}{p^2 - M_q^2} \quad (2.15)$$

Definimos el condensado quiral como el valor de expectación del vacío

$$\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle = -i \text{Tr} S_q(x, x) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} S_q(p) \quad (2.16)$$

Al sustituir en (2.12) y (2.13) vamos a obtener términos de la forma $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ y $\langle \bar{\psi} \gamma_5 \psi \rangle$ en los correspondientes términos de Hartree. Como el vacío debe ser invariante de Lorentz y conservar paridad se debe cumplir que

$$\langle \bar{\psi}_L \psi_R \rangle = \langle \bar{\psi}_R \psi_L \rangle \quad (2.17)$$

donde ψ_L y ψ_R son las componentes derecha e izquierda del campo de quark ψ

$$\psi_L = (1 - \gamma_5) \psi \quad (2.18)$$

$$\psi_R = (1 + \gamma_5) \psi \quad (2.19)$$

de aquí se sigue que

$$\langle \bar{\psi} \gamma_5 \psi \rangle = \langle \bar{\psi}_L \psi_R \rangle - \langle \bar{\psi}_R \psi_L \rangle = 0 \quad (2.20)$$

Por tanto, los únicos valores de expectación distintos de cero serán los relacionados con la densidad escalar $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$, es decir, la interacción del vértice pseudoescalar no contribuye a la auto-energía. Por otra parte, recordando que la traza que aparece en (2.12) es sobre índices de color y de Dirac, al hacer la traza de color tendremos un factor de $N_c G_\pi$ en el término de Hartree, mientras que el de Fock solo será proporcional a G_π . Como el modelo de NJL es una teoría efectiva se debe cumplir que $N_c G_\pi \sim \mathcal{O}(1)$ en el límite $N_c \rightarrow \infty$, de modo que podemos ignorar la aproximación de Fock ya que

es de orden N_c^{-1} [42]. Por lo tanto, solamente la aproximación de Hartree tendrá contribución a la auto-energía. Con esto, la auto-energía total es

$$\Sigma^{(4)} = 4iN_c G_\pi \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S_q(p) \quad (2.21)$$

donde tr solo denota la traza sobre índices de Dirac. Así, la ecuación de gap es entonces

$$M_q = m_q + 4iN_c G_\pi \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S_q(p) \quad (2.22)$$

que en términos del condensado quiral es

$$M_q = m_q - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle \quad (2.23)$$

La ecuación de gap se ilustra esquemáticamente en la figura 2.3. El lado izquierdo representa el inverso del propagador del quark vestido y el primer término del lado derecho corresponde al inverso del propagador del quark desnudo, $S_0^{-1}(p) = \not{p} - m_q + i\epsilon$ y el loop representa la interacción de 4-puntos en la aproximación de campo medio. El quark interactúa con el vacío de QCD a través del condensado quiral.



Figura 2.3: Ecuación de Gap en el modelo NJL

Ahora podemos proceder a calcular el condensado quiral. Para ello requerimos la traza del propagador del quark (Apéndice A.2)

$$\text{Tr} S_q(p) = \frac{4N_c M_q}{p^2 - M_q^2} \quad (2.24)$$

Sustituyendo en el condensado queda que

$$\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle = 4iN_c M_q \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_q^2 + i\epsilon} \quad (2.25)$$

Esta última integral está definida en el espacio de Minkowski. Para pasar al espacio Euclidean debemos aplicar la rotación de Wick. Esto consiste en cambiar las componentes del 4-momento por $p^0 \rightarrow ip_E^0$ y $\vec{p} \rightarrow \vec{p}_E$ (Apéndice B.3). Denotando $\Delta_q(p) = p^2 - M_q^2$, la integral es

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_q(p)} \longrightarrow - \int \frac{id^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + M_q^2} \quad (2.26)$$

A partir de aquí omitimos los subíndices E sin olvidar que estamos integrando en el espacio Euclidiano. Ahora nuestro problema es que esta integral diverge. La manera de hacer que esta integral sea finita es utilizando un método de regularización. Primero hacemos el cambio (Apéndice B)

$$\frac{1}{p^2 + M_q^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(p^2 + M_q^2)} \quad (2.27)$$

e integrando en el momento se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_q(p)} &= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(p^2 + M_q^2)} \\ &= -i \int_0^\infty d\tau e^{-\tau M_q^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-\tau p^2} \\ &= -i \int_0^\infty d\tau e^{-\tau M_q^2} \frac{(2\pi^2)}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dp p^3 e^{-\tau p^2} \\ &= -i \int_0^\infty d\tau e^{-\tau M_q^2} \frac{(2\pi^2)}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{2\tau^2} \right) \\ &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\tau^2} e^{-\tau M_q^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ahora en lugar de tener una divergencia UV en p tenemos divergencia en $\tau = 0$. Para regular la integral debemos introducir un cut-off en el límite inferior. Como τ tiene unidades de energía inversa al cuadrado, a este corte se llama ultravioleta y lo denotaremos como $\tau_{UV} = \Lambda_{UV}^{-2}$. Por otra parte, para $\tau = \infty$, a pesar de que la integral no presenta inconvenientes, vamos a introducir otro cut-off (infrarrojo) denotado por $\tau_{IR} = \Lambda_{IR}^{-2}$. Así

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_q(p)} = -\frac{i}{16\pi^2} \int_{\Lambda_{UV}^{-2}}^{\Lambda_{IR}^{-2}} d\tau \frac{1}{\tau^2} e^{-\tau M_q^2} \quad (2.29)$$

El condensado quiral es entonces

$$\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle = -\frac{3M_q}{4\pi^2} \int_{\Lambda_{UV}^{-2}}^{\Lambda_{IR}^{-2}} d\tau \frac{e^{-\tau M_q^2}}{\tau^2} \quad (2.30)$$

Fianlmente, sustituyendo en la ecuación de gap obtenemos

$$M_q = m_q + \frac{3G_\pi M_q}{\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\tau M_q^2}}{\tau^2} \quad (2.31)$$

Resulta ser que la masa dinámica M_q es considerablemente mayor a la masa corriente m_q . En el límite quiral, $m_q = 0$, la ecuación (2.31) tiene dos soluciones. Una de ellas claramente es $M_q = 0$. En cambio, si consideramos una constante de acoplamiento $G_\pi \neq 0$, existe una solución no trivial para la masa constituyente M_q . Esta solución solamente existe cuando la constante de acoplamiento excede un valor crítico $G_\pi > G_{\text{crit}}$ [36], que en el esquema de tiempo propio es

$$G_{\text{crit}} = \frac{\pi^2}{3(\Lambda_{UV}^2 - \Lambda_{IR}^2)} \quad (2.32)$$

Por lo tanto, la generación dinámica de la masa de los quarks sucede bajo esta condición. Dicho de otra manera, siempre y cuando $G_\pi > G_{\text{crit}}$ tendremos generación dinámica de masas. Esto ocurre cuando la teoría es fuertemente acoplada. En la figura 2.4 se muestra un bosquejo de la masa dinámica en función de la constante de acoplamiento G_π . Cuando el condensado quiral es cero se le conoce como fase de Wigner-Weyl y cuando el condensado es diferente de cero como fase de Nambu-Goldstone.

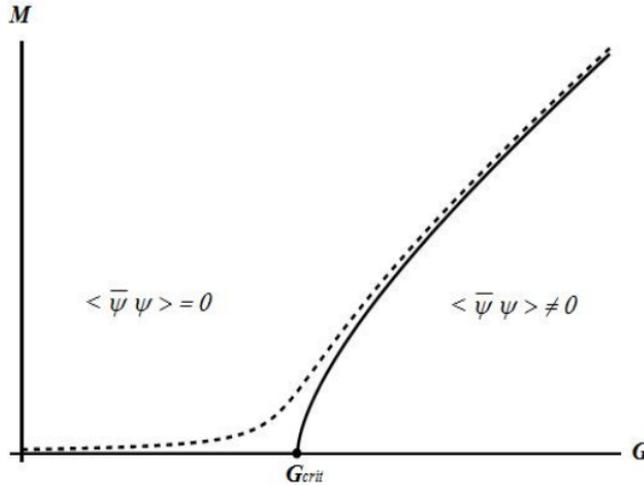


Figura 2.4: Representación de las masas dinámicas en función de la constante de acoplamiento [11].

Como ejemplo, si tomamos $\Lambda_{IR} = 0$ se tiene que

$$G_{\text{crit}}\Lambda_{\text{UV}}^2 = \frac{\pi^2}{3} \quad (2.33)$$

Como G_{crit} tiene unidades de $[\text{Energía}]^{-2}$ y Λ_{UV}^2 de $[\text{Energía}]^2$ entonces esta cantidad es como una constante de acoplamiento adimensional. Por lo tanto, para que $M \neq 0$ se debe cumplir que $G_{\text{crit}}\Lambda_{\text{UV}}^2 > \pi^2/3$, correspondiente a un acoplamiento fuerte. En nuestro caso utilizaremos $\Lambda_{\text{UV}} = 0.645 \text{ GeV}$, lo que nos dará una constante de acoplamiento crítica de $G_{\text{crit}} = 7.91 \text{ GeV}^{-2}$, que cumple con la condición antes mencionada.

2.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

Al igual que las ecuaciones de Schwinger-Dyson, la ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) juegan un papel importante en la física hadrónica. La BSE nos ayudan a describir estados ligados de sistemas de dos cuerpos como lo son los mesones. Es por ello que podemos implementarlas para obtener información del espectro de masas de los mesones pseudoescalares más ligeros. Como se trata de describir estados ligados de quarks ligeros debemos emplear un formalismo covariante de la BSE.

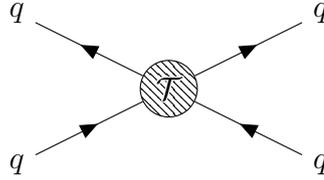


Figura 2.5: Amplitud de dispersión quark-antiquark

En la BSE se considera una dispersión quark-antiquark, como se muestra en la figura 2.5. Las líneas sólidas corresponden a los propagadores de los quarks y la línea a rayas a la matriz T de dispersión, cuya amplitud está dada por la ecuación integral

$$\mathcal{T}(k) = \mathcal{K} + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{K}S(p+k)\mathcal{T}(k)S(p) \quad (2.34)$$

donde $S(p)$ es el propagador de los quarks y \mathcal{K} es el kernel de la interacción quark-antiquark. En la figura 2.6 se muestra esquemáticamente.

$$(2.35)$$

Figura 2.6: Ecuación de Bethe-Salpeter que determina la matriz T .

La interacción efectiva en RPA es

$$iU_{ij}(k^2) = (i\gamma_5)T_i \left(-\frac{ig_{mqq}^2}{k^2 - m_m^2} \right) T_j(i\gamma_5) \quad (2.36)$$

donde g_{mqq} es la constante de acoplamiento del vértice y T_i se escoge de acuerdo al canal. En el espacio de sabor

$$T_i = \begin{cases} \lambda_3 & \pi^0 \\ \lambda_1^\pm & \pi^\pm \\ \lambda_6^\pm & K^0, \bar{K}^0 \\ \lambda_4^\pm & K^\pm \end{cases} \quad (2.37)$$

donde

$$\lambda_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \quad (2.38)$$

$$\lambda_4^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \quad (2.39)$$

$$\lambda_6^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \quad (2.40)$$

La BSE se obtiene al asumir que los estados ligados se manifiestan en el polo de la función de Green de 4-puntos. Así, al iterar el vértice de 4-puntos en la aproximación de fase aleatoria (RPA), la ecuación de Bethe-Salpeter es

$$(2.41)$$

cuya amplitud de dispersión es de la forma

$$\begin{aligned} iU_{ij}(k^2) &= (i\gamma_5)T_i \{2iG_\pi + 2iG_\pi [-i\Pi_m(k^2)] 2iG_\pi + \dots\} (i\gamma_5)T_j \\ &= (i\gamma_5)T_i \left[\frac{2iG_\pi}{1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2)} \right] (i\gamma_5)T_j \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $m = \pi, K$, denota el canal y $\Pi_m(k^2)$ es el diagrama de burbuja que está dado por

$$\begin{aligned} -i\Pi_m(k^2) &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\gamma_5 T^i iS_i(p) i\gamma_5 T^j iS_j(p+k)] \\ &= i\gamma_5 T \cdot \text{---} \circ \text{---} \cdot i\gamma_5 T \end{aligned} \quad (2.43)$$

Definimos la matriz-t reducida como

$$\Delta_m(k^2) = \frac{2G_\pi}{1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2)} \quad (2.44)$$

Si comparamos (2.36) y (2.42) se sigue que

$$\Delta_m(k^2) = \frac{2G_\pi}{1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2)} = -\frac{g_{mqq}^2}{k^2 - m_m^2} \quad (2.45)$$

El polo que aparece en la ecuación (2.42) define la masa del mesón pseudoescalar, de modo que debemos evaluar

$$1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2 = m_m^2) = 0 \quad (2.46)$$

De aquí en adelante asumiremos la simetría de isoespín, $m_u = m_d$, lo cual implica que $S_u(p) = S_d(p)$. Al no considerar interacciones electromagnéticas, los piones y kaones son estados degenerados. Por ello será suficiente con hacer el cálculo para π^+ y K^+ . Experimentalmente se sabe que el pión cargado tiene una masa mayor al pión neutro, $m_{\pi^\pm} = 139.6$ MeV y $m_{\pi^0} = 135$ MeV por tanto *no* son estados degenerados. Lo mismo ocurre para los kaones, $m_{K^\pm} = 493.7$ MeV y $m_{K^0} = 497$ MeV.

2.2.1. Diagrama de Burbuja del Pión

Para obtener la masa del pión debemos evaluar

$$1 - 2G_\pi \Pi_\pi(k^2 = m_\pi^2) = 0 \quad (2.47)$$

Para ello requerimos calcular el diagrama de burbuja correspondiente. Al hacer la traza de color obtendremos un factor de $N_c = 3$. Además, cambiando de la representación estándar $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_8\}$ a la base de sabor $\{\lambda_0, \lambda_1^\pm, \lambda_3, \lambda_4^\pm, \lambda_6^\pm, \lambda_8\}$ tendremos que $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$. Con esto, al hacer la traza de color y sabor el diagrama de burbuja para el pión se reduce a

$$\Pi_\pi(k^2) = -6i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_5 S(p) \gamma_5 S(p+k)] \quad (2.48)$$

siendo $S(p)^{-1} = p^2 - M_u^2$ es el propagador del quark vestido. Sustituyendo los propagadores en el diagrama de burbuja

$$\Pi_\pi(k^2) = -6i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} [\gamma_5 (\not{p} + M_u) \gamma_5 (\not{p}_+ + M_u)]}{[p^2 - M_u^2] [p_+^2 - M_u^2]} \quad (2.49)$$

donde $p_+ = p + k$. Evaluando la traza de Dirac

$$\text{tr} [\gamma_5 (\not{p} + M_u) \gamma_5 (\not{p}_+ + M_u)] = -4(p^2 + p \cdot k + M_u^2) \quad (2.50)$$

El diagrama de burbuja queda

$$\Pi_\pi(k^2) = 24i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + p \cdot k + M_u^2}{[p^2 - M_u^2] [p_+^2 - M_u^2]} \quad (2.51)$$

Ahora, reescribimos el integrando como

$$\frac{2(p^2 + p \cdot k - M_u^2)}{\Delta_u(p) \Delta_u(p_+)} = \frac{1}{\Delta_u(p)} + \frac{1}{\Delta_u(p_+)} + \frac{-k^2}{\Delta_u(p) \Delta_u(p_+)}$$

Hemos denotado $\Delta_u(p) = p^2 - M_u^2$. Sustituyendo en (2.51) y simplificando (los cálculos a detalle se encuentran en el apéndice C) se llega a una expresión para el diagrama de burbuja de la forma

$$\Pi_\pi(k^2) = 24i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_u(p)} + k^2 I_{uu}(k^2) \quad (2.52)$$

donde

$$I_{uu}(k^2) = -12i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_u(p) \Delta_u(p_+)} \quad (2.53)$$

La primera integral de (2.52) es similar a la que aparece en el condensado quirral, por lo que podemos expresar (2.52) en términos del condensado. Por otra parte, para evaluar la integral $I_{uu}(k^2)$ debemos utilizar la rotación de Wick, parametrización de Feynman y al final regularizarla mediante el esquema de tiempo propio. Con esto, la integral resultante es (ver Apéndice B)

$$I_{uu}(k^2) = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau[-x(1-x)k^2 + M_u^2]} \quad (2.54)$$

Entonces, el diagrama de burbuja en términos del condensado quirral y la integral $I_{uu}(k^2)$ es

$$\Pi_\pi(k^2) = -\frac{2 \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle}{M_u} + k^2 I_{uu}(k^2) \quad (2.55)$$

2.2.2. Diagrama de Burbuja del Kaón

Para el canal del kaón el diagrama correspondiente al kaón es

$$\Pi_K(k^2) = -6i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_5 S_u(p) \gamma_5 S_s(p+k)] \quad (2.56)$$

En este caso los propagadores son

$$S_u(p) = \frac{\not{p} + M_u}{p^2 - M_u^2 + i\epsilon} \quad (2.57)$$

$$S_s(p) = \frac{\not{p} + \not{k} + M_s}{p_+^2 - M_s^2 + i\epsilon} \quad (2.58)$$

Sustituyéndolos en la traza

$$\text{tr} [\gamma_5 S_u(p) \gamma_5 S_s(p+k)] = \frac{\text{tr} [\gamma_5 (\not{p} + M_u) \gamma_5 (\not{p} + \not{k} + M_s)]}{[p^2 - M_u^2] [p_+^2 - M_s^2]} \quad (2.59)$$

La traza de Dirac es

$$\text{tr} [\gamma_5 (\not{p} + M_u) \gamma_5 (\not{p} + \not{k} + M_s)] = -4 [p^2 + p \cdot k - M_u M_s] \quad (2.60)$$

Sustituyendo, el diagrama de burbuja queda

$$\Pi_K(k^2) = -24i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + p \cdot k - M_u M_s}{[p^2 - M_u^2] [p_+^2 - M_s^2]} \quad (2.61)$$

El integrando se puede reescribir como

$$\frac{2(p^2 + p \cdot k - M_u M_s)}{[p^2 - M_u^2][p_+^2 - M_s^2]} = \frac{1}{p^2 - M_u^2} + \frac{1}{p_+^2 - M_s^2} + \frac{(M_s - M_u)^2 - k^2}{[p^2 - M_u^2][p_+^2 - M_s^2]}$$

que al sustituir en el diagrama de burbuja obtenemos una expresión de la forma

$$\Pi_K(k^2) = 12i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\Delta_u(p)} + \frac{1}{\Delta_s(p_+)} \right] + [k^2 - (M_s - M_u)^2] I_{us}(k^2) \quad (2.62)$$

donde en este caso

$$I_{us}(k^2) = -12i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_u(p)\Delta_s(p_+)} \quad (2.63)$$

Al igual que en el caso del pión, para evaluar esta última integral necesitamos aplicar la rotación de Wick y parametrización de Feynman (ver Apéndice C.1). Finalmente, esta integral en la regularización de tiempo propio es

$$I_{us}(k^2) = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau[-x(1-x)k^2 + (1-x)M_s^2 + xM_u^2]} \quad (2.64)$$

Al igual que en el caso del pión, podemos reescribir (2.65) en términos del condensado quiral del quark u y el quark s

$$\Pi_K(k^2) = -\frac{\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle}{M_u} - \frac{\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle}{M_s} + [k^2 - (M_s - M_u)^2] I_{us}(k^2) \quad (2.65)$$

Podemos notar que si hacemos $M_s = M_u$ en (2.65) recuperamos el diagrama de burbuja del pión. Siendo así, podemos reescribir el diagrama de burbuja más general para piones y kaones

$$\Pi_m(k^2) = -\frac{\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle}{M_i} - \frac{\langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle}{M_j} + [k^2 - (M_j - M_i)^2] I_{ij}(k^2) \quad (2.66)$$

con $m = \pi, K$ y

$$I_{ij}(k^2) = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau \Delta_{ij}} \quad (2.67)$$

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = -\frac{3M_i}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\tau M_i^2}}{\tau^2} \quad (2.68)$$

y se ha definido $\Delta_{ij} = -x(1-x)k^2 + (1-x)M_j^2 + xM_i^2$. Finalmente, por conveniencia definiremos

$$\Pi_{\text{ps}}^{ij}(k^2) = -\frac{\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle}{2M_i} - \frac{\langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle}{2M_j} + \frac{1}{2} [k^2 - (M_j - M_i)^2] I_{ij}(k^2) \quad (2.69)$$

tal que

$$\Pi_{\text{m}}(k^2) = 2\Pi_{\text{ps}}^{ij}(k^2) \quad (2.70)$$

El superíndice i en Π_{ps}^{ij} denota el sabor de quark y j al antiquark.

2.3. Propiedades de Mesones Pseudoescalares

2.3.1. Masas y Bosones de Nambu-Goldstone

La masa de los mesones pseudoescalares π y K se definen evaluando el polo que aparece en (2.42) on-shell, es decir $k^2 = m_{\text{m}}^2$, ($\text{m} = \pi, K$)

$$1 - 2G_{\pi}\Pi_{\text{m}}(k^2 = m_{\text{m}}^2) = 0 \quad (2.71)$$

Si utilizamos la ecuación de gap, (2.23), para reescribir el diagrama de burbuja (2.66) y lo sustituimos en (2.71), las masas del pión y kaón se puede expresar como (Apéndice C)

$$m_{\pi}^2 = \frac{m_u}{M_u} \frac{1}{2G_{\pi}I_{uu}(m_{\pi}^2)} \quad (2.72)$$

$$m_{\text{K}}^2 = (M_s - M_u)^2 + \left(\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_s}{M_s} \right) \frac{1}{4G_{\pi}I_{us}(m_{\text{K}}^2)} \quad (2.73)$$

Para el caso del pión, al tomar el límite quirral, $m_u \rightarrow 0$, obtenemos que $m_{\pi} = 0$ y por tanto el pión es un bosón de Nambu-Goldstone. Similarmente, para el kaón en este límite, $m_q \rightarrow 0$ ($q = u, s$) su masa también desaparece, $m_K = 0$, siendo también un bosón de Nambu-Goldstone.

2.3.2. Constante de Acoplamiento

La constante de acoplamiento $g_{\text{m}qq}$ ($\text{m} = \pi, K$), está relacionada con el polo que aparece en la amplitud de dispersión

$$iU_{ij}(k^2) = (i\gamma_5)T_i \left[\frac{2iG_\pi}{1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2)} \right] (i\gamma_5)T_j \quad (2.74)$$

Podemos determinar la constante de acoplamiento g_{mqq} que aparece en (2.36) mediante el diagrama de burbuja (2.66). La ecuación (2.36) proviene de una teoría efectiva donde los quarks interactúan mediante el intercambio de piones y es la que define la constante de acoplamiento g_{mqq} .

Para obtener la constante de acoplamiento debemos hacer una expansión alrededor del polo en $k^2 = m_m^2$ en (2.42)

$$1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2) = [1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2)] \Big|_{k^2=m_m^2} + \frac{\partial [1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2)]}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_m^2} \times (k^2 - m_m^2) + \dots \quad (2.75)$$

el primer término es cero por (2.71), de modo que, a primer orden

$$1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2) \simeq 2G_\pi \frac{\partial\Pi_m(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_m^2} (k^2 - m_m^2) \quad (2.76)$$

de aquí se sigue que

$$\frac{2iG_\pi}{1 - 2G_\pi\Pi_m(k^2)} \simeq \frac{-i \left(\frac{\partial\Pi_m(k^2)}{\partial k^2} \right)^{-1} \Big|_{k^2=m_m^2}}{k^2 - m_m^2} \quad (2.77)$$

por lo tanto, la amplitud de dispersión será

$$iU_{ij}(k^2) = (i\gamma_5)T_i \frac{-i \left(\frac{\partial\Pi_m(k^2)}{\partial k^2} \right)^{-1} \Big|_{k^2=m_m^2}}{k^2 - m_m^2} (i\gamma_5)T_j \quad (2.78)$$

Comparando con (2.36) se obtiene la constante de acoplamiento en términos del diagrama de burbuja

$$g_{mqq}^2 = \left(\frac{\partial\Pi_m(k^2)}{\partial k^2} \right)^{-1} \Big|_{k^2=m_m^2} \quad (2.79)$$

que en la regularización de tiempo propio es (Apéndice C)

$$g_{\pi qq}^{-2}(k^2) = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau [1 - \tau(x^2 - x)k^2] \frac{e^{-\Delta_{uu}\tau}}{\tau} \quad (2.80)$$

$$g_{Kqq}^{-2}(k^2) = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\Delta_{us}\tau}}{\tau} \times \\ \times \{1 - \tau(x^2 - x)[k^2 - (M_s - M_u)^2]\} \quad (2.81)$$

donde donde $\Delta_{ij} = -x(1-x)k^2 + (1-x)M_j^2 + xM_i^2$. Estas constantes de acoplamiento son esenciales para el cálculo de las constantes de decaimiento y otros observables como veremos en la siguiente sección.

2.3.3. Constante de Decaimiento

La constante de decaimiento del pión, f_π , juega un papel importante en el cálculo de algunos observables, por ejemplo, en el ancho de decaimiento leptónico del pión, ya que f_π es una medida de la intensidad de la desintegración. También, aparece en la relación de Goldberger-Treiman (GT) [18]

$$f_\pi g_{\pi N} = \sqrt{2} m_p g_A + \mathcal{O}(m^2) \quad (2.82)$$

que relaciona los acoplamientos fuerte $g_{\pi N}$, y débil g_A , con la masa del protón, m_p . El estudio de la relación (2.82) ha sido gran interés ya que se ha visto que existe una discrepancia entre el valor experimental de la constante de decaimiento³, $f_\pi^{\text{exp}} = 93$ MeV, y la predicción teórica mediante la relación de GT, $f_\pi^{GT} \sim 87$ MeV. Esto se suele relacionar con el rompimiento explícito de la simetría quiral [27] y la relación de GT solamente es exacta en el límite quiral, $m_u = m_d = 0$. A nivel de quarks, la relación GT es de la forma

$$f_\pi g_{\pi qq} = M_q + \mathcal{O}(m^2) \quad (2.83)$$

Otra importante relación es la de Gell-Mann-Oakes-Renner (GMOR) [16]

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_d) \langle \bar{\psi}_u \psi_u + \bar{\psi}_d \psi_d \rangle + \mathcal{O}(m^2) \quad (2.84)$$

Este resultado muestra que el cuadrado de la masa del pión es proporcional a la suma de las masas corrientes de los quarks (que son las encargadas de romper explícitamente la simetría quiral) y de los condensados (que es la manifestación del rompimiento espontáneo de la simetría quiral).

³Existen varias convenciones en las que las constantes de decaimiento difieren por un factor de $\sqrt{2}$.

CAPÍTULO 2. MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO

La constante de decaimiento de los mesones pseudoescalares se define a través del acoplamiento de una corriente axial al mesón pseudoescalar

$$\langle 0 | J_{5\mu}^i(x) | P(k) \rangle = ik_\mu f_m \quad (2.85)$$

donde $J_{5\mu}^i(x)$ es la corriente axial y $|P(k)\rangle$ denota el estado del mesón pseudoescalar. Esta expresión se traduce como [29]

$$ik_\mu f_m = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\gamma_\mu \gamma_5 T_i iS(p) i g_{mqq} \gamma_5 T_j iS(p+k)] \quad (2.86)$$

En esta expresión $i g_{\pi qq} \gamma_5$ es la amplitud del estado ligado. Calculando la traza y aplicando la parametrización de Feynman y la rotación de Wick, en la regularización de tiempo propio (Apéndice C.5) la constante de decaimiento del pión es

$$f_\pi = \frac{N_c g_{\pi \bar{q}q} M_u}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau \Delta_{uu}} \quad (2.87)$$

Similarmente, la constante del decaimiento del kaón da

$$\begin{aligned} f_K = & \frac{N_c g_{K \bar{q}q} (M_s - M_u)}{8\pi^2} \frac{1}{k^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau^2} \left(e^{-\tau M_s^2} - e^{-\tau M_u^2} \right) \\ & + \frac{N_c g_{K \bar{q}q}}{8\pi^2} \left[(M_u + M_s) - \frac{(M_s - M_u)(M_u^2 - M_s^2)}{k^2} \right] \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau \Delta_{us}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

donde $\Delta_{ij} = -x(1-x)k^2 + (1-x)M_j^2 + xM_i^2$.

Podemos probar que la relación de GT, (2.83) se sigue cumpliendo en el modelo NJL. Partiendo del diagrama de burbuja del pión

$$\Pi_\pi(k^2) = -\frac{2 \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle}{M_u} + k^2 I_{uu}(k^2) \quad (2.89)$$

y por definición, la derivada parcial de $\Pi_\pi(k^2)$ respecto a k^2 corresponde al inverso del cuadrado de la constante de acoplamiento $g_{\pi qq}$, por tanto podemos expresar la constante de acoplamiento como

$$g_{\pi qq}^2 = \frac{1}{I_{uu}(k^2)} \quad (2.90)$$

Por otra parte, la constante de decaimiento del pión expresada en términos de la integral $I_{uu}(k^2)$ es

$$f_\pi = g_{\pi qq} M_u I_{uu}(k^2) \quad (2.91)$$

Multiplicando por $g_{\pi qq}$ se sigue que

$$f_\pi g_{\pi qq} = M_u \quad (2.92)$$

Esta última expresión corresponde a la relación de GT a nivel de quark. También podemos obtener la relación de GMOR como sigue. Tomando el cuadrado de (2.91) y sustituyendo la ecuación de gap y la condición de masa para el pión, (2.72) obtenemos

$$f_\pi^2 m_\pi^2 \simeq -m_u \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \quad (2.93)$$

que corresponde al término de primer orden de (2.84) en la simetría de isospín, $m_u = m_d$. Ambas relaciones son independientes del esquema de regularización del modelo NJL.

2.4. Ajuste de Parámetros

En esencia, el modelo NJL tiene cuatro parámetros: la masa corriente del quark m_q (o la masa dinámica M_q), la constante de acoplamiento G_π y los dos cut-off, Λ_{UV} y Λ_{IR} . Hay distintas formas de realizar el ajuste de parámetros y ciertas consideraciones que uno puede tomar. Por ejemplo, en el caso del cut-off Λ_{IR} podemos o no incluirlo en la regularización de las integrales, ya que realmente no existe muchas diferencia en los calculos si $\Lambda_{IR} = 0$ o $\Lambda_{IR} \neq 0$. Típicamente el cut-off Λ_{IR} se elige del orden de la escala de QCD, $\Lambda_{QCD} \sim 200 - 300$ MeV. Esto es debido a que para energías $E \ll \Lambda_{QCD}$ el acoplamiento es fuerte y estamos en el régimen no-perturbativo. Otro punto a seguir tiene que ver con la masa del quark. Si consideramos que el protón está constituido de tres quarks, entonces la masa efectiva será $M_q \sim \frac{m_p}{3}$. Por esta razón, como la masa del protón es del orden de 1 GeV, la masa constituyente se suele tomar $M_q \sim 300 - 400$ MeV [4].

El conjunto de parámetros del modelo usualmente se fijan al ajustar la masa del pión $m_\pi^{\text{exp}} = 140$ MeV, la masa del kaón $m_K^{\text{exp}} = 495$ MeV y la constante de decaimiento del pión $f_\pi^{\text{exp}} = 93$ MeV ya que son observables que se conocen con gran precisión. El valor del condensado quiral también entra en consideración pero no es muy preciso. Como se discute en Ref. [14], se sabe que $190 \text{ MeV} < -\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3} < 260 \text{ MeV}$.

El método que hemos empleado se discute a continuación. Algunos autores suelen tomar como parámetro libre la masa corriente m_u y la fijan dentro del

rango de valores empíricos conocidos, $m_u \sim 5$ MeV [29, 46]. En nuestro caso elegimos tomar la masa constituyente M_u como parámetro libre, dentro de los valores fenomenológicamente aceptables [7]. De esta manera, tomando $M_u = 400$ MeV y $\Lambda_{\text{IR}} = 240$ MeV, podemos determinar el valor de Λ_{UV} mediante el cálculo de la constante de acoplamiento (2.87) ajustando el valor empírico $f_\pi^{\text{exp}} = 93$ MeV. El valor obtenido es $\Lambda_{\text{UV}} = 645$ MeV. Una vez hecho esto, procedemos a fijar la constante de acoplamiento G_π . Esto se obtiene a partir de la ecuación de Bethe-Salpeter para la masa del pión, (2.71), fijando $m_\pi = 140$ MeV. El cálculo nos da un valor de $G_\pi = 19.03 \text{ GeV}^{-2}$. Solo queda fijar el valor de la masa corriente m_u . Esto se hace fijando $M_u = 400$ MeV en la ecuación de gap, (2.31), cuya solución da $m_u = 16.4$ MeV. Con este conjunto de parámetros podemos determinar la masa del quark s mediante la ecuación de Bethe-Salpeter para el kaón. Si fijamos la masa del kaón a $m_K^{\text{exp}} = 495$ MeV se obtiene la masa constituyente $M_s = 611$ MeV y con la ecuación de gap calculamos la masa corriente, dando un valor de $m_s = 356$ MeV.

Una vez determinado el conjunto de parámetros podemos calcular los condensados quirales para los quarks u y s , las constantes de acoplamiento g_{mqq} y la constante de decaimiento del kaón. En la tabla 2.1 se muestran los resultados numéricos de estos cálculos junto con los parámetros utilizados. En particular, las masas de los quarks no pueden medirse directamente, sino que deben determinarse indirectamente a través de su influencia en las propiedades hadrónicas. En la tabla 2.1 se reportan las masas corrientes de los quarks en el esquema $\overline{\text{MS}}$. De igual manera, los valores para las masas corrientes de los quarks ligeros siguen en controversia.

Parámetros y observables	Modelo NJL	Valor Experimental
m_π	0.140	0.140
m_K	0.495	0.495
f_π	0.093	0.093
f_K	0.097	0.110
Λ_{IR}	0.240	-
Λ_{UV}	0.645	-
G_π	19.04	-
m_u	0.0164	0.00216
m_s	0.356	0.093
M_u	0.4	-
M_s	0.611	-
$g_{\pi qq}$	4.23	-
$g_{K qq}$	4.57	-
$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$	-0.171	-
$\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3}$	-0.150	-

Tabla 2.1: Parámetros del Modelo NJL. Las unidades están en GeV, excepto las constantes de acoplamiento g_{mqq} (adimensional).

Se obtuvimos las constantes de acoplamiento $g_{\pi qq} = 4.23$ y $g_{K qq} = 4.57$, esta última se utilizó para determinar la constante de decaimiento del kaón $f_K = 0.097$ GeV que tiene un 11.8% de error respecto a su valor experimental $f_K^{\text{exp}} = 0.110$ GeV. En contraste con la evidencia experimental, la constante de decaimiento del kaón cumple con el requerimiento de ser mayor a la constante de decaimiento del pión. En nuestro calculo su razón es $f_K/f_\pi = 1.04$. Este resultado subestima el valor empírico de $1.21 < f_K/f_\pi < 1.28$ [29].

Con el conjunto de parámetros que hemos empleado se ha obtenido un valor de -171 MeV para el condensado quiral del quark u , el cual está subestimado debido al valor de la masa dinámica de $M_u = 400$ MeV. Los valores típicos reportados en la literatura [14, 17] para la masa dinámica del quark u suelen ser del orden de 300 MeV obteniendo valores para el condensado quiral unos $\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3} < -260$ MeV. Siguiendo el mismo procedimiento podemos determinar los parámetros para distintos valores de la masa constituyente del quark up, por ejemplo en un rango de $M_u = 300 - 400$ MeV como se muestra en la tabla 2.2. Podemos ver que el valor del condensado quiral incrementa conforme disminuye la masa constituyente M_u . En la figura 2.7 se muestra el condensado quiral como función de la masa constituyente M_u . Según [17], el valor sugerido (límite superior) para el condensado quiral es de

CAPÍTULO 2. MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO

$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3} \sim -0.250$ GeV, que en nuestro caso obtenemos un valor de -0.253 GeV utilizando una masa $M_u = 0.230$ GeV y el cut-off $\Lambda_{UV} = 1.0769$ GeV.

M_u	Λ_{UV}	G_π	$G_\pi \Lambda_{UV}^2$	m_u	m_s	M_s	$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$	$\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3}$
0.30	0.727	9.90	5.23	0.0112	0.278	0.537	-0.194	-0.187
0.32	0.696	11.77	5.71	0.0124	0.300	0.552	-0.187	-0.175
0.34	0.675	13.60	6.21	0.0139	0.316	0.566	-0.182	-0.166
0.36	0.660	15.5	6.74	0.0148	0.332	0.581	-0.177	-0.159
0.38	0.651	17.25	7.31	0.0156	0.343	0.595	-0.174	-0.154
0.40	0.645	19.03	7.92	0.0164	0.356	0.611	-0.171	-0.150

Tabla 2.2: Parámetros en el esquema PTR con respecto a M_u . Unidades en GeV, excepto $G_\pi \Lambda_{UV}^2$ (adimensional).

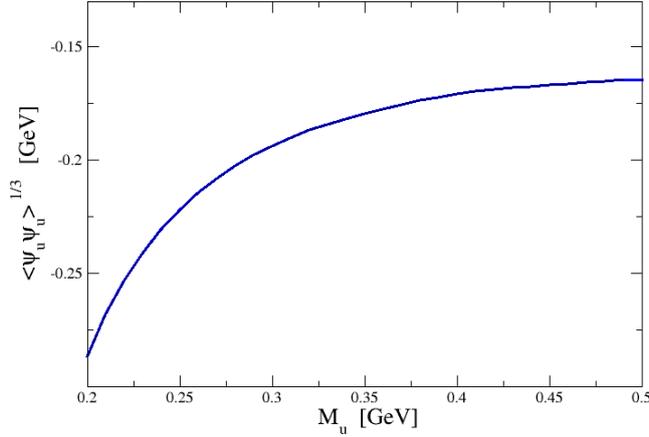


Figura 2.7: Condensado quiral del quark u como función de la masa constituyente M_u .

Para el condensado quiral del quark s obtuvimos $\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3} = -0.150$ GeV. Experimentalmente se conoce que la razón $\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle / \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle = 0.8 \pm 0.1$, que en nuestro cálculo corresponde a $\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle / \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle = 0.87$.

En resumen, en este capítulo se estudió el modelo Nambu–Jona-Lasinio para tres sabores en el esquema de regularización de tiempo propio para explorar las propiedades de quarks y mesones pseudoescalares. Mediante un adecuado ajuste de parámetros logramos estimar cantidades como la masa dinámica del quark s , constante de decaimiento del kaón, constantes de

acoplamiento pión-quark-antiquark y kaón-quark-antiquark y los condensados quirales correspondientes a los quarks u y s . Con ello discutimos si las cantidades predichas son valores cercanos a las observaciones experimentales. Además, se hizo un análisis del comportamiento de los parámetros del modelo respecto al valor de la masa constituyente del quark u .

Capítulo 3

Modelo NJL y Determinante de 't Hooft

En el capítulo anterior desarrollamos las características principales del modelo NJL para tres sabores, siendo este de gran utilidad para explorar el rompimiento espontáneo y explícito de la simetría quiral. En este modelo obtuvimos de forma natural la aparición de un condensado quiral, la generación dinámica de las masas de los quarks y logramos obtener al pión y kaón como bosones de Nambu-Goldstone (NG) que son consecuencia de la ruptura dinámica de esta simetría. El único inconveniente es que no podemos describir a las partículas restantes de $SU(3)$, η y η' , ya que los mecanismos para generar sus masas no proporcionan una descripción satisfactoria. Esto es debido a que en este modelo la simetría axial $U_A(1)$ sigue presente y necesitamos removerla. La solución a esto es incluyendo el determinante de 't Hooft en el modelo NJL.

Como se vio en el capítulo 1, el espectro de QCD con 3 quarks sin masa, $m_u = m_d = m_s = 0$, debe contener 8 bosones de Nambu-Goldstone provenientes del rompimiento espontáneo de la simetría quiral $SU_L(3) \times SU_R(3)$ que corresponden al octete de mesones pseudoescalares más ligeros: π^\pm , π^0 , K^\pm , K^0 , \bar{K}^0 y η_8 . Estos tienen masas relativamente pequeñas a comparación del singlete de $SU(3)$, η_0 . Los mesones pseudoescalares η_0 y η_8 se mezclan para dar origen a los estados físicos η y η' . La diferencia de masas entre los mesones η y η' no se puede explicar de manera natural mediante el modelo de quarks. A este problema se le conoce como $\eta - \eta'$ *puzzle* y fue discutido por Kobayashi y Maskawa [31] mediante la ruptura explícita de la simetría $U_A(1)$. Al mismo tiempo, 't Hooft resolvió este problema mediante el mecanismo de instantones, que consiste en añadir un término de 6-fermiones a la lagrangiana efectiva de NJL [22]. Además, la existencia de una densidad de carga topológica del campo de gluones distinta de cero y la divergencia anó-

mala en la corriente axial del singlete de sabor dan lugar a un rompimiento espontáneo de la simetría $U_A(1)$ [40]. A diferencia de la simetría quiral, esta ruptura no implica la existencia de una partícula de NG ya que no existe un buen candidato en el espectro de masas de QCD que pueda representar un noveno bosón de NG. $U_A(1)$ no es una simetría a nivel cuántico.

3.1. Nonete de Mesones Pseudoescalares

Al hacer la descomposición de suma directa de la simetría de sabor $SU_F(3)$, $3 \otimes \bar{3} = 1 + 8$, obtenemos el octete y singlete

$$\left. \begin{aligned} \pi^+ &= -u\bar{d} \\ \pi^- &= d\bar{u} \\ \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ K^+ &= u\bar{s} \\ K^- &= s\bar{u} \\ K^0 &= d\bar{s} \\ \bar{K}^0 &= -s\bar{d} \\ \eta_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \end{aligned} \right\} \text{Octete}$$

$$\left. \eta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \right\} \text{Singlete}$$

Los piones y kaones se observan en la naturaleza, pero las partículas η_0 y η_8 no porque la descomposición solo considera interacciones fuertes. Si incluimos a la interacción débil y electromagnética, estas se encargan de cambiar el sabor del quark dando lugar una “mezcla” en los eigenestados mediante un ángulo θ_P , conocido como ángulo de mezcla pseudoescalar. La descomposición real será entonces una combinación lineal de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_P & \sin \theta_P \\ -\sin \theta_P & \cos \theta_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}$$

donde η y η' son las partículas que sí se observan en la naturaleza y el valor experimental del ángulo es $\theta_P = -11.3$ [3]. Si hacemos una aproximación suponiendo que θ_P es pequeño entonces $\eta \sim \eta_8$ y $\eta' \sim \eta_0$, es decir, el mesón η' “corresponde” al singlete y η es parte del octete de $SU_F(3)$.

3.2. Lagrangiana de NJL y Determinante de 't Hooft

En el capítulo 1 vimos que la simetría axial $U_A(1)$ no tiene manifestación en la naturaleza. Si así fuese, todo el nonete de mesones pseudoescalares aparecerían como bosones de Nambu-Goldstone. Sin embargo, como se observa que el η' tiene una masa de casi 1 GeV no podemos considerarlo como tal. Una forma de resolver este problema es relacionando la masa $m_{\eta'}$ con la anomalía axial de QCD.

En el capítulo anterior trabajamos con la lagrangiana de NJL que solo contiene una interacción de 4-fermiones. Esta interacción sigue conteniendo a la simetría $U_A(1)$ no deseada. Una manera de removerla es añadiendo una interacción de 6-fermiones (figura 3.1)

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - \hat{m}_q)\psi + \mathcal{L}_{4\text{-fermiones}} + \mathcal{L}_{6\text{-fermiones}} \quad (3.1)$$

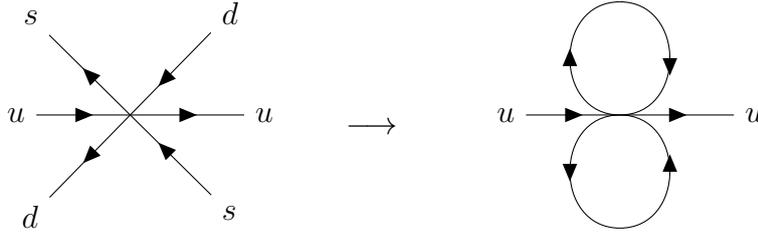


Figura 3.1: Aproximación de Hartree para el vértice de 6-fermiones.

Esta interacción inicialmente fue sugerida por Kobayashi y Maskawa [31] para explicar la diferencia de masas de los mesones pseudoescalares η y η' , mientras que 't Hooft la introdujo para describir la interacción de instantones. Si consideramos la corriente axial $J_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\gamma_5\psi(x)$ uno esperaría que, a nivel clásico, su divergencia se anule en el límite quiral, $m_q \rightarrow 0$. No obstante, a nivel cuántico resulta ser que la divergencia de la corriente axial es no-nula debido al acoplamiento de instantones a los quarks. Así, 't Hooft demostró que la interacción efectiva entre quarks se puede representar mediante un vértice de 6-fermiones de la forma

$$\mathcal{L}_{6\text{-fermiones}} = -K (\det [\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] + \det [\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi]) \quad (3.2)$$

K denota el acoplamiento efectivo del vértice y el determinante está definido en el espacio de sabor. Incluir una interacción de este tipo a la lagrangiana de NJL es de suma importancia ya que es la encargada de romper la simetría axial $U_A(1)$.

3.3. Ecuación de Gap

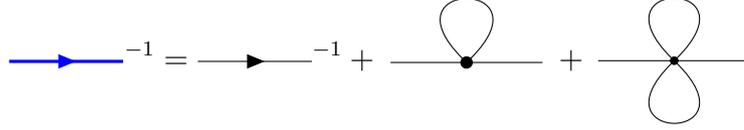


Figura 3.2: Ecuación de Gap en el modelo NJL

En el capítulo anterior vimos que, en la aproximación de Hartree, la interacción de 4-fermiones da lugar a un loop de quark (figura 2.2). Ahora, si añadimos la interacción de 6-fermiones (figura 3.1) tendremos entonces dos lazos de quark involucrados como se muestra en la figura 3.2. Estos se verán reflejados mediante un término adicional en la ecuación de gap [30]

$$M_i = m_i - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle + 2K \epsilon_{ijk} \langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle \langle \bar{\psi}_k \psi_k \rangle \quad (3.3)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor antisimétrico de Levi-Civita definido como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (ijk) \text{ es permutación par} \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es permutación impar} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.4)$$

G_π y K son las constantes de acoplamiento correspondientes a la interacción de 4-fermiones y de 6-fermiones, respectivamente. Añadir el determinante de 't Hooft a la lagrangiana de NJL dio como resultado la mezcla de sabor¹ entre quarks y ahora, en lugar de tener una sola ecuación de gap, tenemos un sistema de 3 ecuaciones acopladas

$$M_u = m_u - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle + 2K \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (3.5)$$

$$M_d = m_d - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle + 2K \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \quad (3.6)$$

$$M_s = m_s - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle \quad (3.7)$$

Notemos que si hacemos $K = 0$ recuperamos las ecuaciones de gap obtenidas para la lagrangiana de NJL con solo una interacción de 4-fermiones. Respetando la simetría de isoespín, $m_u = m_d$, el sistema de ecuaciones se reduce a

¹Esta mezcla de sabor *no* es la misma que en las interacciones débiles.

$$M_u = m_u - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (3.8)$$

$$M_s = m_s - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (3.9)$$

En el límite quiral la ecuación de gap tiene una solución trivial $M_q = 0$ y una no-trivial en la que se genera la masa dinámica. Para analizar el caso no-trivial tomemos la ecuación de gap para el quark u

$$M_u = m_u - 4 \left(G_\pi - \frac{1}{2} K \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \right) \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \quad (3.10)$$

El término $(G_\pi - \frac{1}{2} K \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle)$ tiene unidades de $(\text{energía})^{-2}$ por lo que la podemos interpretar como una constante de acoplamiento efectiva. El condensado quiral está dado por

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = -4i N_c M_i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_i^2 + i\epsilon} \quad (3.11)$$

que en la regularización de tiempo propio es

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = -\frac{3M_i}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\tau M_i^2}}{\tau^2} \quad (3.12)$$

Podemos escribir el condensado en términos de la función especial $\text{Ei}(x)$ (Apéndice B.5)

$$-\text{Ei}(-ax) = \int_{ax}^{\infty} dt \frac{e^{-at}}{t} \quad (3.13)$$

y es válido tanto para $\Lambda_{IR} = 0$ como para $\Lambda_{IR} \neq 0$. Así, el condensado para el quark u se puede expresar como

$$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle = -\frac{3M_u}{4\pi^2} \Lambda_{UV}^2 \left[e^{-\frac{M_u^2}{\Lambda_{UV}^2}} + \frac{M_u^2}{\Lambda_{UV}^2} \text{Ei} \left(-\frac{M_u^2}{\Lambda_{UV}^2} \right) \right] \quad (3.14)$$

Sustituyendo en la ecuación de gap y tomando el límite quiral

$$1 = \frac{3g^2}{\pi^2} \left[e^{-\frac{M_u^2}{\Lambda_{UV}^2}} + \frac{M_u^2}{\Lambda_{UV}^2} \text{Ei} \left(-\frac{M_u^2}{\Lambda_{UV}^2} \right) \right] \quad (3.15)$$

Aquí hemos absorbido el cut-off Λ_{UV} en una constante de acoplamiento adimensional

$$g^2 = \left(G_\pi - \frac{1}{2} K \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \right) \Lambda_{UV}^2 \quad (3.16)$$

La solución no-trivial para la ecuación de gap solamente existe si $0 < \frac{\pi^2}{3g^2} < 1$. Es decir, tendremos un valor crítico g_{crit}^2 para el cual los quarks (originalmente sin masa) adquieren masa dinámica. Esto es similar a lo discutido en la última parte de la sección 2.1. Por lo tanto, siempre y cuando $g > g_{crit}$ entonces los quarks obtendrán masa dinámica lo que equivale a tener un condensado quiral distinto de cero.

3.4. Ecuación de Bethe-Salpeter

En el capítulo anterior, cuando solo teníamos una interacción de 4-fermiones, construimos un vértice de 4-puntos para describir los estados ligados. Siguiendo el mismo camino, para poder describir a los mesones incluyendo la interacción de 't Hooft debemos construir un vértice efectivo adicional asociado al vértice de 6-fermiones. Este vértice se reduce a una interacción efectiva de 4-puntos cerrando un lazo de quark como se muestra en la figura 3.3. Cada bucle introducirá un término proporcional al condensado quiral o combinaciones de ellos.

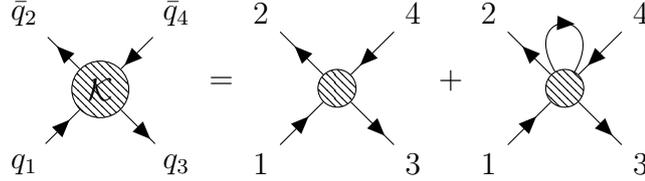


Figura 3.3: Kernel de la BSE generado por $\mathcal{L}_{4\text{-fermiones}}$ y $\mathcal{L}_{6\text{-fermiones}}$

Estos vértices efectivos son necesarios para generar el kernel de la interacción de la ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) para la matriz-T de dispersión

$$\mathcal{T}(k) = \mathcal{K} + i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\mathcal{K} S(p) \mathcal{T}(k) S(p+k)] \quad (3.17)$$

Los elementos de matriz del kernel \mathcal{K} están definidos como [30, 46]

$$\langle \bar{q}_4 q_3 | \mathcal{K} | \bar{q}_2 q_1 \rangle = \sum_{i,j,\alpha} K_\alpha^{ij} (\Gamma_\alpha \lambda^i)_{34} (\Gamma_\alpha \lambda^j)_{12} \quad (3.18)$$

donde λ^i son las matrices de Gell-Mann, Γ_α son

$$\begin{aligned} \Gamma_s &= 1 & \Gamma_{ps} &= i\gamma_5 & \Gamma_T &= \sigma_{\mu\nu} \\ \Gamma_V &= \gamma_\mu & \Gamma_A &= \gamma_\mu\gamma_5 \end{aligned} \quad (3.19)$$

y los coeficientes K_α^{ij} están en términos de las constantes de acoplamiento G_π y K . Es conveniente cambiar de la representación estándar $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_8\}$ a la base de sabor $\{\lambda_0, \lambda_1^\pm, \lambda_3, \lambda_4^\pm, \lambda_6^\pm, \lambda_8\}$, ecuaciones (2.38)-(2.40). En esta base la constante de acoplamiento efectiva pseudoescalar es [30]

$$K_m = G_\pi - \frac{1}{2}Kc_{ij} \quad (3.20)$$

con $m = \pi, K$ y los coeficientes están dados por

$$c_{ij} = \begin{cases} \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle & i = 1^\pm, j = 1^\mp; i = j = 3 \\ \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle & i = 4^\pm, j = 4^\mp; i = 6^\pm, j = 6^\mp \\ \frac{4}{3} \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle - \frac{1}{3} \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle & i = j = 8 \\ -\frac{4}{3} \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle - \frac{2}{3} \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle & i = j = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle & i = 0, j = 8 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.21)$$

i, j denotan los índices correspondientes a las matrices de Gell-Mann en el espacio de sabor. Para el pión cargado $i = 1^\pm, j = 1^\mp$ y para el pión neutro $i = j = 3$. Entonces, para los piones $c_{ij} = \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle$. Por otra parte, para el kaón cargado $i = 4^\pm, j = 4^\mp$ y para el neutro $i = 6^\pm, j = 6^\mp$. Entonces para los kaones $c_{ij} = \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle$. Por otra parte, notemos que para el singlete y el octete los coeficientes c_{ij} son combinaciones lineales de los condensados de los quarks u y s

$$c_{00} = -\frac{4}{3} \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle - \frac{2}{3} \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (3.22)$$

$$c_{08} = c_{80} = \frac{\sqrt{2}}{3} \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (3.23)$$

$$c_{88} = \frac{4}{3} \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle - \frac{1}{3} \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (3.24)$$

La matriz-t reducida será similar a (2.44) con la diferencia de que en este caso tenemos una constante de acoplamiento efectiva que incluye la interacción de 't Hooft. La BSE para la matriz t reducida será

$$\Delta_m(k^2) = \frac{2K_m}{1 - 2K_m\Pi_m(k^2)} \quad (3.25)$$

donde $\Pi_m(k^2)$ está dado por (2.66) y el polo que aparece en (3.25) define las masas de para piones y kaones. En cuanto al sistema $\eta - \eta'$ se ve más complicado porque aparece una mezcla de sabor entre el octete y el singlete. Por ello, para los mesones η y η' , la matriz-t (3.25) se escribe de forma matricial

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2) = 2\hat{\mathbf{K}} \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]^{-1} \quad (3.26)$$

El subíndice η en $\hat{\Delta}_\eta(k^2)$ se refiere a los dos mesones η y η' . $\hat{\Pi}(k^2)$ y $\hat{\mathbf{K}}$ son matrices 2×2 que definiremos en la siguiente sección.

3.5. Masas de Mesones Pseudoescalares

El procedimiento para obtener la masa del pión y el kaón resulta básicamente similar a lo visto en la sección 2.2, la única diferencia es que, al incluir la interacción de 't Hooft, la constante de acoplamiento $G_\pi \rightarrow K_m = G_\pi - \frac{1}{2}Kc_{ij}$, con $m = \pi, K$. Por tanto, en la aproximación de fase aleatoria, la matriz-t reducida está dada por (3.25) cuyo polo define las masas de los mesones ($m = \pi, K$)

$$1 - 2K_m\Pi_m(k^2 = m_m^2) = 0 \quad (3.27)$$

donde $\Pi_m(k^2)$ está dado por (2.70) y las constantes de acoplamiento efectivas correspondientes a cada canal son

$$K_\pi = G_\pi - \frac{1}{2}K \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (3.28)$$

$$K_K = G_\pi - \frac{1}{2}K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \quad (3.29)$$

Para obtener la masa del pión debemos resolver

$$1 - 2K_\pi\Pi_\pi(k^2 = m_\pi^2) = 0 \quad (3.30)$$

donde

$$\Pi_\pi(k^2) = -\frac{2 \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle}{M_u} + k^2 I_{uu}(k^2) \quad (3.31)$$

y para el kaón, la condición para obtener su masa es

$$1 - 2K_K \Pi_K(k^2 = m_K^2) = 0 \quad (3.32)$$

donde

$$\Pi_K(k^2) = -\frac{\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle}{M_u} - \frac{\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle}{M_s} + [k^2 - (M_u - M_s)^2] I_{us}(k^2) \quad (3.33)$$

Para los mesones η y η' la matriz-t se escribe de forma matricial

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2) = 2\hat{\mathbf{K}} \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]^{-1} \quad (3.34)$$

$\hat{\Pi}(k^2)$ y $\hat{\mathbf{K}}$ son matrices 2×2 definidas como

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{08} \\ K_{80} & K_{88} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\hat{\Pi}(k^2) = \begin{bmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{08} \\ \Pi_{80} & \Pi_{88} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

los elementos de matriz de $\hat{\Pi}(k^2)$ son

$$\Pi_{00} = \frac{2}{3} (2\Pi^{uu} + \Pi^{ss}) \quad (3.37)$$

$$\Pi_{08} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\Pi^{uu} - \Pi^{ss}) \quad (3.38)$$

$$\Pi_{80} = \Pi_{08} \quad (3.39)$$

$$\Pi_{88} = \frac{2}{3} (\Pi^{uu} + 2\Pi^{ss}) \quad (3.40)$$

y los elementos de matriz de $\hat{\mathbf{K}}$

$$K_{00} = G_\pi + \frac{1}{2} K c_{00} \quad (3.41)$$

$$K_{08} = -\frac{1}{2} K c_{08} \quad (3.42)$$

$$K_{80} = K_{08} \quad (3.43)$$

$$K_{88} = G_\pi - \frac{1}{2} K c_{88} \quad (3.44)$$

donde $\Pi^{ii}(k^2)$ ($i = u, s$) es el diagrama de burbuja (2.69) y c_{ij} (3.21). La condición para determinar las masas de los mesones η y η' es similar al caso de π y K solo que expresada de manera matricial

$$\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right] \Big|_{k^2=m^2} = 0 \quad (3.45)$$

Para determinar las masas de los mesones η y η' se debe diagonalizar el inverso de la matriz-t reducida a través de una transformación ortogonal. El desarrollo es un tanto largo y lo puede encontrar en el Apéndice C.3.2. El resultado es

$$\text{diag } \hat{\Delta}_\eta(k^2)^{-1} = \frac{1}{4 \det \hat{\mathbf{K}}} \begin{bmatrix} M_\eta(k^2)^{-1} & 0 \\ 0 & M_{\eta'}(k^2)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

donde

$$M_\eta(k^2)^{-1} = D' + A' + \sqrt{(D' - A')^2 - 4B'^2} \quad (3.47)$$

$$M_{\eta'}(k^2)^{-1} = D' + A' - \sqrt{(D' - A')^2 - 4B'^2} \quad (3.48)$$

Y

$$A' = K_{00} - 2\Pi_{88} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (3.49)$$

$$B' = -K_{08} - 2\Pi_{08} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (3.50)$$

$$D' = K_{88} - 2\Pi_{00} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (3.51)$$

La condición para determinar las masas de los mesones η y η' será entonces

$$M_\eta(k^2 = m_\eta^2)^{-1} = 0 \quad (3.52)$$

$$M_{\eta'}(k^2 = m_{\eta'}^2)^{-1} = 0 \quad (3.53)$$

Cabe mencionar que si omitimos la interacción de 't Hooft haciendo $K = 0$ y resolvemos las ecuaciones (3.52)-(3.53) obtenemos las masas correspondientes a los mesones pseudoescalares $u\bar{u}$ y $s\bar{s}$. Además, en el límite quiral $m_q \rightarrow 0$, al resolver (3.52) obtenemos que la masa del mesón es cero que, junto con los piones y kaones, completamos los ocho bosones de Nambu-Goldstone. No obstante, al resolver (3.53) la masa no se anula, consecuencia de la anomalía axial.

3.6. Constantes de Acoplamiento

Las constantes de acoplamiento efectivas g_{mqq} se pueden identificar de la forma usual, mediante la aproximación del polo en $k^2 = m_m^2$

$$\Delta_m(k^2) = \frac{2K_m}{1 - 2K_m\Pi_m(k^2)} \simeq -\frac{g_{mqq}^2}{k^2 - m_m^2} \quad (3.54)$$

El subíndice denota a los mesones, $m = \pi, K$. Para los canales del pión y kaón

$$g_{\pi qq}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_\pi(k^2)}{\partial k^2} \right)^{-1} \Big|_{k^2=m_\pi^2} \quad (3.55)$$

$$g_{K qq}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_K(k^2)}{\partial k^2} \right)^{-1} \Big|_{k^2=m_K^2} \quad (3.56)$$

En cuanto al sistema $\eta - \eta'$, la manera de calcular las constantes de acoplamiento es distinta debido a la mezcla de sabor. De igual manera debemos hacer una aproximación en el polo de (3.34). Para ellos, expresamos (3.34) como (Apéndice C.3.2)

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2) = \frac{2}{\det [1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}}]} \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Ahora, definiremos el polo como

$$P(k^2) \equiv \det [1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}}] = \frac{A'D' - B'^2}{\det \hat{\mathbf{K}}} \quad (3.58)$$

Haciendo una expansión al rededor de $k^2 = m_\eta^2$ tenemos que

$$P(k^2) = P(k^2 = m_\eta^2) + \frac{\partial P(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_\eta^2} (k^2 - m_\eta^2) + \dots \quad (3.59)$$

El primer término es cero por (3.45), por tanto a primer orden

$$P(k^2) \simeq \frac{\partial P(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_\eta^2} (k^2 - m_\eta^2) \quad (3.60)$$

Como $k^2 = k_\mu^\mu = k_0^2 - \|\vec{k}^2\|$, el diferencial es

$$dk^2 = d(k_0^2 - \|\vec{k}^2\|) = d(k_0^2) = 2k_0 dk_0 = 2m_\eta dk_0 \quad (3.61)$$

y hemos usado que $k^\mu = (k_0, \vec{0}) = (m_\eta, \vec{0})$ (mesón en reposo). Por tanto

$$P(k^2) \simeq \frac{\partial P(k^2)}{2m_\eta \partial k_0} \Big|_{k_0=m_\eta} (k^2 - m_\eta^2) \quad (3.62)$$

Tomando el inverso de la ecuación anterior y sustituyendo en (3.57), la matriz-t reducida es

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2) \simeq \frac{4m_\eta}{\left. \frac{\partial P(k^2)}{\partial k_0} \right|_{k_0=m_\eta}} \frac{1}{k^2 - m_\eta^2} \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Recordando que

$$\Delta_m(k^2) = -\frac{g_{mqq}^2}{k^2 - m_m^2} \quad (3.64)$$

al comparar las dos últimas expresiones podemos definir los acoplamientos para el singlete y el octete como

$$g_{0\eta}^2 = -\frac{4m_\eta A'}{\left. \frac{\partial P(k^2)}{\partial k_0} \right|_{k_0=m_\eta}} \quad (3.65)$$

$$g_{8\eta}^2 = -\frac{4m_\eta D'}{\left. \frac{\partial P(k^2)}{\partial k_0} \right|_{k_0=m_\eta}} \quad (3.66)$$

$$g_{0\eta}g_{8\eta} = -\frac{4m_\eta B'}{\left. \frac{\partial P(k^2)}{\partial k_0} \right|_{k_0=m_\eta}} \quad (3.67)$$

de tal manera que

$$\left[\hat{\Delta}_\eta(k^2) \right]_{ab} = -\frac{g_{a\eta}g_{b\eta}}{k^2 - m_\eta^2} \quad (3.68)$$

con $a, b = 0, 8$. Finalmente, mediante una rotación de sabor podemos obtener las constantes de acoplamiento de los mesones η y η' [19]

$$\begin{pmatrix} g_{\eta qq} \\ g_{\eta ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{8\eta} \\ g_{0\eta} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

De aquí se obtiene que

$$g_\eta^{uu} = \frac{1}{\sqrt{3}}g_{8\eta} + \sqrt{\frac{2}{3}}g_{0\eta} \quad (3.70)$$

$$g_\eta^{ss} = \sqrt{\frac{2}{3}}g_{0\eta} - \frac{2}{\sqrt{3}}g_{8\eta} \quad (3.71)$$

Los acoplamientos para el η' se puede calcular de la misma manera.

3.7. Resultados Numéricos

Hasta ahora nos hemos encontrado con dos tipos de integrales divergentes, el condensado quiral y la integral $I_{ij}(k^2)$

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = -4iN_c M_i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_i(p)} \quad (3.72)$$

$$I_{ij}(k^2) = -4iN_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_i(p)\Delta_j(p_+)} \quad (3.73)$$

donde $\Delta_i(p) = p^2 - M_i^2$ y $p_+ = p + k$. Cuando se tienen términos de la forma $\frac{1}{X^{n+1}}$, en este esquema se hace el cambio

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^{n+1}} &\rightarrow \frac{1}{n!} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}}} d\tau \tau^n e^{-\tau X} && \text{si } \text{Re}(X) > 0 \\ \frac{1}{X^{n+1}} &\rightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}}} d\tau \tau^n e^{\tau X} && \text{si } \text{Re}(X) < 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Entonces, para escoger correctamente el cambio debemos prestar atención en el signo de X . Para el condensado quiral, $X = \Delta_i(p) = p^2 + M_i^2$ y $n = 0$. En este caso $\text{Re}(X) > 0$ ya que p^2 y M_i^2 son siempre positivos. Así, después de aplicar la rotación de Wick, el condensado quiral en el esquema de tiempo propio es

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = -\frac{3M_i}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\tau M_i^2}}{\tau^2} \quad (3.75)$$

Que en términos de la función $\text{Ei}(x)$ se expresa como

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = -\frac{3M_i}{4\pi^2} &\left[\Lambda_{UV}^2 e^{-\frac{M_i^2}{\Lambda_{UV}^2}} + M_i^2 \Lambda_{UV}^2 \text{Ei}\left(-\frac{M_i^2}{\Lambda_{UV}^2}\right) \right. \\ &\left. - \Lambda_{IR}^2 e^{-\frac{M_i^2}{\Lambda_{IR}^2}} - M_i^2 \text{Ei}\left(-\frac{M_i^2}{\Lambda_{IR}^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

Por otra parte, la integral $I_{ij}(k^2)$ presenta mayores inconvenientes. Después de realizar la rotación de Wick y parametrización de Feynman, la integral se puede escribir como

$$I_{ij}(k^2) = 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{(p^2 + \Delta_{ij})^2} \quad (3.77)$$

En la regularización de tiempo propio

$$I_{ij}(k^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\Delta_{ij}\tau} \quad (3.78)$$

donde

$$\Delta_{ij} = k^2 [(x - A_{ij})^2 + B_{ij}] \quad (3.79)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M_j^2 - M_i^2}{k^2} \right) \quad (3.80)$$

$$B_{ij} = -\frac{1}{4} - \frac{(M_j^2 - M_i^2)^2}{4k^4} + \frac{M_i^2 + M_j^2}{k^2} \quad (3.81)$$

En (3.78) tenemos que $X = p^2 + \Delta_{ij}$ y $n = 2$. Como p^2 siempre es positivo entonces el signo de X dependerá del signo de Δ_{ij} . Fijándonos en (3.79), podemos notar que, como k^2 y $(x - A_{ij})^2$ siempre son positivos, entonces el signo de Δ_{ij} dependerá de si B_{ij} es positivo o negativo. Para $B_{ij} > 0$ es

$$I_{ij}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[\text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{IR}^2} \right) \right] \quad (3.82)$$

mientras que para $B_{ij} < 0$ el signo de Δ_{ij} dependerá del valor de x . Por ello es necesario separar la integral en tres regiones de la siguiente forma (Apéndice C)

$$I_{ij}(k^2) = I_{ij}^{(1)}(k^2) + I_{ij}^{(2)}(k^2) + I_{ij}^{(3)}(k^2) \quad (3.83)$$

donde

$$I_{ij}^{(1)}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^{\alpha_{ij}^-} dx \left[\text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{IR}^2} \right) \right] \quad (\Delta_{ij} > 0)$$

$$I_{ij}^{(2)}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_{\alpha_{ij}^-}^{\alpha_{ij}^+} dx \left[\text{Ei} \left(\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) - \text{Ei} \left(\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{IR}^2} \right) \right] \quad (\Delta_{ij} < 0)$$

$$+ i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{i \frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} e^{i\theta}} \quad (3.84)$$

$$I_{ij}^{(3)}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_{\alpha_{ij}^+}^1 dx \left[\text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{IR}^2} \right) \right] \quad (\Delta_{ij} > 0)$$

con $\alpha_{ij}^{\pm} = A_{ij} \pm \sqrt{-B_{ij}}$.

3.7.1. Ajuste de Parámetros

Al añadir la interacción de 't Hooft (3.2) al modelo NJL necesitamos incluir su correspondiente constante de acoplamiento K al conjunto de parámetros. Las integrales divergentes requieren forzosamente añadir el cut-off Λ_{UV} para hacerlas finitas porque no convergen cuando $\tau = 0$. En cambio, para $\tau = \infty$ las integrales no tienen problemas, por lo que podemos o no incluir el cut-off Λ_{IR} . Así que no debería haber mucha diferencia si usamos $\Lambda_{IR} = 0$ o $\Lambda_{IR} \sim \Lambda_{QCD}$. Siendo así, el ajuste de parámetros se hizo para ambos casos. Se usó M_u como parámetro libre y fijamos el resto de parámetros ajustando la masa del pión y su constante de decaimiento, $m_\pi^{exp} = 0.140$ GeV, $f_\pi^{exp} = 0.093$ GeV, la masa del kaón, $m_K^{exp} = 0.495$ GeV y la masa del η' , $m_{\eta'}^{exp} = 0.958$ GeV. Fijando $M_u = 0.4$ GeV se obtuvieron los parámetros y observables que se muestran en la tabla 3.1. Las masas, constantes de decaimiento, condensados quirales y cut-off están en unidades GeV. Las constantes de acoplamiento G_π y K en GeV^{-2} y GeV^{-5} , respectivamente.

Parámetros y Observables	Modelo NJL		Valor Experimental
	$\Lambda_{IR} = 0$	$\Lambda_{IR} = 0.240$	
m_π	0.140	0.140	0.1395
m_K	0.495	0.495	0.4946
m_η	0.346	0.354	0.548
$m_{\eta'}$	0.957	0.958	0.958
f_π	0.093	0.093	0.093
f_K	0.098	0.099	0.110
Λ_{UV}	0.637	0.645	-
G_π	17.08	16.45	-
K	1927.5	1734.1	-
m_u	0.0171	0.0164	0.00216
m_s	0.370	0.363	0.093
M_u	0.400	0.400	-
M_s	0.651	0.648	-
$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$	-0.169	-0.171	-
$\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3}$	-0.144	-0.144	-

Tabla 3.1: Resultados numéricos obtenidos en el modelo NJL con determinante de 't Hooft. Unidades en GeV.

La masa constituyente de los quarks se calcula mediante (3.8). Una observación que hay que destacar es el valor obtenido para la masa constituyente

del quark s , M_s . Cuando hicimos el cálculo mediante el modelo NJL sin incluir la interacción de 't Hooft (capítulo 2) la masa obtenida fue de $M_s = 611$ MeV. De acuerdo a la tabla 3.1, podemos notar un aumento de aproximadamente el 6% en la masa del quark strange que es resultado de incluir el determinante de 't Hooft al modelo NJL. En las tablas 3.2 y 3.3 se muestran algunos de los valores de la masa constituyente M_s respecto a la masa M_u para los dos distintos cut-off.

M_u	m_u	m_s	Λ_{UV}	G_π	K	M_s
0.20	0.0054	0.156	1.090	2.51	47.57	0.425
0.25	0.0098	0.247	0.790	5.57	319.14	0.559
0.30	0.0131	0.307	0.688	9.31	799.62	0.559
0.35	0.0155	0.346	0.649	13.23	1376.62	0.608
0.40	0.0171	0.370	0.6367	17.08	1927.50	0.651

Tabla 3.2: Parámetros y masa constituyente M_s respecto a M_u usando $\Lambda_{IR} = 0$.

M_u	m_u	m_s	Λ_{UV}	G_π	K	M_s
0.20	0.0035	0.110	1.322	1.749	16.04	0.403
0.25	0.0076	0.208	0.876	4.483	161.87	0.482
0.30	0.0114	0.282	0.727	8.140	552.90	0.549
0.35	0.0143	0.332	0.667	12.276	1128.01	0.603
0.40	0.0164	0.363	0.645	16.447	1734.1	0.648

Tabla 3.3: Parámetros y masa constituyente M_s respecto a M_u usando $\Lambda_{IR} = 0.240$ GeV.

Como la masa del quark s a cambiado debido a la interacción de 't Hooft, su correspondiente condensado quiral se verá afectado de igual manera. Para el cut-off $\Lambda_{IR} = 0.240$ se obtiene un valor de $\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3} = -0.144$ GeV. En cuanto al condensado del quark u obtenemos $\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3} = -0.171$ GeV.

Por otra parte, en nuestro modelo la constante de decaimiento del kaón, f_K , es menor al valor observado, 110 MeV. Para el cut-off $\Lambda_{IR} = 0.240$, el cociente entre las constantes de decaimiento del pión y kaón es $f_K/f_\pi = 1.06$. Este valor subestima el valor empírico, $f_K^{\text{exp}}/f_\pi^{\text{exp}} = 1.18$.

Otro importante resultado de incluir la interacción de 't Hooft es la descripción correcta de la masa de los mesones η y η' . En este modelo se logró estimar la masa del mesón η con $m_\eta = 354$ MeV, que está por debajo de la

CAPÍTULO 3. MODELO NJL Y DETERMINANTE DE 'T HOOFT

masa empírica de 458 MeV. Cuando $K = 0$ las masas del sistema $\eta - \eta'$ se reducen a las masas de los mesones pseudoescalares $u\bar{u}$ y $s\bar{s}$, respectivamente. En el caso del mesón pseudoescalar $u\bar{u}$, su masa corresponde a la masa del pión, $m_\pi = 0.140$ GeV y en el caso del mesón pseudoescalar $s\bar{s}$, la masa obtenida es $m_{s\bar{s}} = 0.722$ GeV. Además, hemos calculado las constantes de acoplamiento meson-quark de los mesones η , η' y las correspondientes al octete y singlete. Los resultados se encuentran en la tabla 3.4. Las constantes de acoplamiento g_{mqq} no son observables por lo que solamente se determinan fenomenológicamente. Entre los cálculos de varios grupos de autores [11, 19, 30] los valores difieren considerablemente para cada constante de acoplamiento. Podemos encontrar en la literatura $3.8 < g_{\pi qq} < 4.62$, $4.02 < g_{K qq} < 5.12$, $2.33 < g_{\eta qq} < 4.7$ y $1.33 < g_{\eta' qq} < 2.7$.

Constantes de Acoplamiento	Modelo NJL	
	$\Lambda_{\text{IR}} = 0$	$\Lambda_{\text{IR}} = 0.240$
$g_{\pi qq}$	4.25	4.25
$g_{K qq}$	4.88	4.79
$g_{\eta qq}$	1.92	1.94
$g_{\eta ss}$	-1.77	-1.78
$g_{\eta 0}$	0.85	0.85
$g_{\eta 8}$	2.13	2.15
$g_{\eta' qq}$	3.35	4.22
$g_{\eta' ss}$	-0.91	-0.86
$g_{\eta' 0}$	2.36	3.09
$g_{\eta' 8}$	2.46	2.49

Tabla 3.4: Constantes de acoplamiento meson-quark g_{mqq} (adimensional).

En resumen, en este capítulo hemos añadido una interacción de 6-puntos, conocida como interacción de 't Hooft, al modelo Nambu–Jona-Lasinio. La ventaja de hacerlo es que con ella removemos la simetría axial $U_A(1)$ de la lagrangiana de NJL ya que esta no es una simetría de QCD. Además, mediante el determinante de 't Hooft generamos la mezcla de sabor de quark, dando lugar a la aparición de los mesones η y η' , completando así el nonete de mesones pseudoescalares.

Después de realizar el ajuste de parámetros, procedimos a explorar las propiedades de los quarks u y s (asumiendo la simetría de isoespín, $m_u = m_d$) y de los mesones pseudoescalares π , K , η , η' . Notamos que, a comparación del modelo NJL sin interacción de 't Hooft, uno de los principales diferencias fue un cambio del 6% en la masa dinámica del quark s gracias a la mezcla de

CAPÍTULO 3. MODELO NJL Y DETERMINANTE DE 'T HOOFT

sabor que surge en las ecuaciones de gap. Esto propició a una modificación en el valor del condensado quiral del quark s y en la constante de decaimiento f_K . Finalmente, remover la simetría $U_A(1)$ trae consigo la generación de los mesones $\eta - \eta'$ y la posibilidad de hacer predicciones como sus masas y constantes de acoplamiento mesón-quark.

Capítulo 4

Propiedades de Mesones a Densidad Finita

En el ámbito de la física nuclear y de altas energía, se ha vuelto de suma importancia estudiar las propiedades de la materia que interactúa fuertemente en condiciones de temperatura y densidad bariónica finita. La teoría térmica de campos es la encargada de trasladar el estudio del vacío al caso de temperatura T y potencial químico μ finitos. A altas temperaturas y/o densidades se espera que la simetría quiral se restaure, que como hemos discutido numerosas veces, está rota en el vacío. De hecho, podemos tratar con ambas cantidades por separado y llegar al mismo resultado. Es decir, en el caso $T = 0$ y $\mu \neq 0$ (cold nuclear matter) se llega a una restauración parcial de la simetría quiral a densidades grandes [10], mientras que para $T \neq 0$ y $\mu = 0$ (meson gas) la restauración se encuentra a temperaturas $T \sim 160$ MeV, como ha sido mostrado por Lattice QCD [44]. En conjunto, es decir $T \neq 0$ y $\mu \neq 0$, la conclusión es que la simetría quiral se restaura a altas temperaturas y grandes densidades. Debido a esto, se espera que las propiedades de la materia fuertemente interactuante se vean afectadas por esta transición de fase quiral. Uno de los principales propósitos de los experimentos de colisiones de iones pesados (e.g. LHC, RHIC, FAIR, NICA, JPARC, etc.) es la observación de la restauración de la simetría quiral a temperatura y densidad finita [32].

Hasta este punto hemos estudiado las propiedades de los quarks ligeros y de sus estados ligados en el vacío. Ahora lo que nos compete es explorar el comportamiento de cantidades como las masas de los quarks y mesones, condensados quirales, etc. a densidad finita, sin involucrar a la temperatura. Para ello consideraremos los estados ligados en materia nuclear para investigar el cambio de la estructura del vacío de QCD a densidad finita a través de las propiedades de los mesones pseudoescalares en el medio nuclear. Los efec-

tos del medio se calculan con ayuda del modelo de Quark-Meson Coupling (QMC) [23] junto con el modelo NJL y el determinate de 't Hooft.

4.1. Materia Nuclear

Vamos a considerar el caso $T = 0$ y $\mu_q \neq 0$. La condición de que el potencial químico de quarks sea distinto de cero significa que el número de quarks no es igual al número de antiquarks, i.e. hay bariones en el sistema. A densidad finita tendremos conservación del número bariónico y potenciales químicos asociados a los quarks por lo que necesitamos un término adicional en la lagrangiana de NJL

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\text{NJL}} + \bar{\psi} \hat{\mu} \gamma_0 \psi \quad (4.1)$$

donde $\hat{\mu} = \text{diag}(\mu_u, \mu_d, \mu_s)$ es la matriz de potencial químico para 3 sabores de quark. Para comprender la relación entre el potencial químico y la densidad bariónica consideremos el caso de un gas de Fermi. En mecánica estadística, el momento de Fermi, p_F , está relacionado con la densidad como

$$p_F = (3\pi^2 \rho_B)^{1/3} \quad (4.2)$$

Por otra parte, la energía de Fermi, E_F se define como

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \quad (4.3)$$

Entonces, E_F es proporcional a $\rho_B^{2/3}$. Además, para un sistema a $T = 0$, la energía de Fermi corresponde al potencial químico μ_B . Por lo tanto

$$\mu_B = \frac{(3\pi^2 \rho_B)^{2/3}}{2m} \quad (4.4)$$

Por otra parte, el potencial químico bariónico es 3 veces el potencial químico de quarks

$$\mu_B = 3\mu_q \quad (4.5)$$

por lo tanto, el potencial químico de quarks es proporcional a la densidad bariónica

$$\mu_q = \frac{(3\pi^2 \rho_B)^{2/3}}{6m} \quad (4.6)$$

La relación de proporcionalidad anterior nos permite describir las propiedades de los quarks y sus estados ligados en términos de la densidad bariónica en lugar del potencial químico.

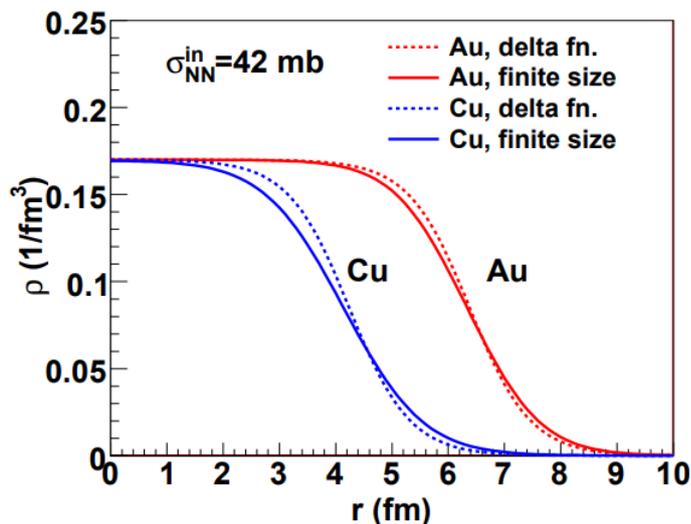


Figura 4.1: Ejemplo de distribuciones de densidad para núcleos de Au y Cu [20].

La densidad dentro de los núcleos atómicos es constante en el centro, de aproximadamente $\rho_0 \sim 0.17 \text{ fm}^{-3}$ y se conoce como “normal nuclear matter density”. En la figura 4.1 se muestra un ejemplo de la densidad nuclear bariónica en función del radio nuclear para núcleos de oro y cobre en la que se aprecia lo antes mencionado. Este hecho conlleva a definir un sistema idealizado denominado materia nuclear. Esta consiste en un número grande de nucleones (protones y neutrones) que interactúan mediante fuerzas nucleares, cuyo volumen y número de partículas es infinito. La idealización más común, y la que usaremos, es la materia nuclear simétrica, donde se tiene el mismo número de protones y neutrones en el sistema.

Para comprender cómo se ven afectados los quarks en un medio nuclear consideremos un nucleón libre formado por tres quarks ligeros (u, d). Ahora supongamos que el nucleón está ligado en materia nuclear simétrica. Cuando la densidad bariónica no es alta (alrededor de la densidad bariónica normal), la interacción entre nucleones es mediante un potencial de intercambio de mesones escalar (σ), vectorial (ω) e isovectorial (ρ). Estos campos mesónicos se acoplan directamente a los quarks confinados dentro del nucleón, es decir, los quarks sentirán los potenciales escalares V_σ^q , vectoriales V_ω^q e isovectoriales V_ρ^q . En la aproximación de Hartree de campo medio, la lagrangiana correspondiente es [23]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_l \left[\not{\partial} - (m_l - V_\sigma^q) - V_c(r) - \gamma_0 \left(V_\omega^q + \frac{1}{2} V_\rho^q \right) \right] \psi_l \quad (4.7)$$

con $l = u, d$. Los efectos del medio se manifiestan solo en los quarks ligeros (u, d), ya que estos son los que se acoplan a los campos σ , ω y ρ . En cambio, si incluimos al quark s , este no se ve afectado en materia nuclear. De (4.7) podemos definir una masa corriente efectiva como

$$m_l^* \equiv m_l - V_\sigma^q \quad (4.8)$$

que corresponde a la masa corriente para los quarks ligeros u y d en el medio nuclear. El potencial V_σ^q se obtiene a partir del modelo QMC. En cuanto al quark s , como no se acopla directamente al medio entonces $m_s^* = m_s$. Todas las cantidades que se ven afectadas por el medio nuclear las denotaremos con un asterisco de ahora en adelante. Conocer la dependencia de la masa corriente con la densidad nuclear es de suma importancia para determinar la masa dinámica de los quarks, junto con los condensados quirales como veremos en la siguiente sección.

4.2. Ecuación de Gap en Materia Nuclear

En la sección anterior vimos la dependencia de la masa corriente de los quarks con la densidad, (4.8). La masa corriente de los quarks en el vacío es la que aparece en el modelo NJL y el potencial escalar V_σ^q se calcula mediante el modelo QMC [23]. De esta manera, dados m_l y V_σ^q , podemos determinar la masa corriente como función de la densidad y con ella la masa dinámica de los quarks en el medio nuclear al resolver la ecuación de gap en el medio.

Las masas constituyentes en el vacío están dadas por (3.5)-(3.7). La interacción de los quarks con el potencial vectorial entra como un cambio en el momento p^μ

$$p^\mu \longrightarrow p^{*\mu} = p^\mu + V^\mu \quad (4.9)$$

donde $V^\mu = (V^0, \vec{0})$ siendo $V^0 = V_\omega^q$ la componente temporal de potencial vectorial (dado por el modelo QMC). De esta manera, para obtener la modificación en el medio de la masa dinámica basta con hacer el cambio $m_l \rightarrow m_l^*$ y $p^\mu \rightarrow p^{*\mu}$ en las ecuaciones de gap. Las masas constituyentes dependientes de la densidad son entonces, ver ecuaciones (3.5)-(3.7)

$$M_u^* = m_u^* - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* \quad (4.10)$$

$$M_d^* = m_d^* - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle^* + 2K \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* \quad (4.11)$$

$$M_s^* = m_s^* - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle^* \quad (4.12)$$

Para las constantes de acoplamiento G_π y K se desconoce cómo calcular su dependencia con la densidad por lo que asumiremos que no dependen de ella. En [35] se presentan propuestas de la constante de acoplamiento K como función de la densidad y sus implicaciones en las propiedades de quarks y mesones pseudoescalares.

Los condensados quirales que aparecen en las ecuaciones de gap, (4.10), presentan una dependencia con el medio a través de la masa dinámica en el propagador $S_i^*(p^*)$

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle^* = -iN_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} S_i^*(p^*) \quad (4.13)$$

con $i = u, d$. El propagador a densidad finita es

$$S_i^*(p^*) = \frac{\not{p}^* + M_i^*}{p^{*2} - M_i^{*2}} \quad (4.14)$$

Calculamos la traza

$$\text{Tr} S_i^* = \text{Tr} \left[\frac{\not{p}^* + M_i^*}{p^{*2} - M_i^{*2}} \right] \quad (4.15)$$

$$= \frac{4M_i^*}{p^{*2} - M_i^{*2}} \quad (4.16)$$

Sustituyendo en el condensado quiral

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle^* &= -4iN_c M_i^* \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^{*2} - M_i^{*2}} \\ &= -4iN_c M_i^* \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p+V)^2 - M_i^{*2}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si hacemos el cambio de variable $p \rightarrow p + V$ eliminamos la dependencia en V , quedando así

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle^* = -4iN_c M_i^* \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_i^{*2}} \quad (4.18)$$

Finalmente aplicando la rotación de Wick y la regularización de tiempo propio, el condensado quiral dependiente de la densidad es de la forma

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle^* = -\frac{N_c M_i^*}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau^2} e^{-\tau M_i^{*2}} \quad (4.19)$$

Dado m_i^* , al resolver (4.10)-(4.12) obtenemos la dependencia con la densidad de M_i^* .

Por último, es necesario enfatizar ciertos aspectos importantes para el quark strange. Como hemos mencionado anteriormente, la masa corriente del quark s es la misma que en el vacío porque no se acopla al medio nuclear. No obstante, a pesar de que $m_s^* = m_s$, la masa dinámica solamente será igual a su valor en el vacío cuando $K = 0$. De otra manera, al incluir el determinante de 't Hooft ($K \neq 0$) el quark s pueda acoplarse al medio indirectamente a través del condensado quiral del quark u . Gracias a la mezcla de sabor generada por el determinante de 't Hooft, la masa del quark s también cambiará con la densidad.

4.3. Mesones Pseudoescalares en el Medio y Restauración Parcial de la Simetría Quiral

El estudio de interacciones del tipo mesón-barión y las propiedades de los mesones a densidad finita es de gran interés en la física nuclear y hadrónica. Las propiedades de los mesones en el medio nuclear están relacionadas con los potenciales de interacción entre el mesón y el núcleo, las correcciones de las secciones transversales en el medio en la producción de hadrones y resonancia, en procesos de reabsorción, etc. En particular, la espectroscopía de masa “perdida” es una de las herramientas utilizadas para la observación de estados ligados mesón-núcleo, por ejemplo en [21] estudian teóricamente la formación de átomos piónicos profundamente ligados y en [35] estados ligados de los mesones η y η' con núcleos.

Ha lo largo de la historia, las interacciones del tipo π -núcleo y K -núcleo han sido estudiados tanto teórica como experimentalmente proporcionando evidencia de la modificación de las propiedades de piones y kaones en el medio. En cambio, las interacciones η -nucleon/núcleo aún no es tan clara como en el caso de piones y kaones debido a la falta de haces de η en los experimentos. No obstante, los estados ligados de η 's con núcleos sí se estudian a nivel teórico. El estudio de la materia en el medio nuclear es de suma

importancia para la comprensión de una posible restauración de la simetría quiral en materia nuclear.

La propagación de piones a densidad bariónica finita se ha estudiado a lo largo de la historia de tal manera que los parámetros de la interacción pion-nuclear están bien determinados a densidades bajas. En 1991, Brown y Koch [8] sugieren que la masa del pión decrece conforme aumenta la densidad, obteniendo una relación de la forma

$$\frac{m_\pi^{*2}}{m_\pi^2} = 1 - \frac{\rho_B}{1.6\rho_0} \quad (4.20)$$

donde m_π^* y m_π son las masas del pión en el medio y en el vacío, respectivamente. Se han llevado a cabo estudios experimentales en esta línea a partir de dispersión entre piones y núcleos, producción de dipiones y mediante espectroscopía de átomos piónicos profundamente ligados. Esta última es de las más exitosas ya que permite explorar las propiedades de los piones en el medio porque los estados ligados tienen anchos lo suficientemente estrechos para realizar espectroscopía de manera detallada donde se sugiere que la restauración de la simetría quiral ocurre en el núcleo [26]. En cuanto a los resultados obtenidos de dispersiones elásticas de pion-núcleo se ha observado una reducción en la constante de decaimiento del pión, f_π , de un 12% a densidades $\rho = 0.6\rho_0$ [15, 25].

Por otra parte, las propiedades de los kaones también se ven modificadas en materia bariónica. En materia nuclear simétrica, se han obtenido predicciones de que la masa efectiva del mesón K disminuye al aumentar la densidad nuclear. Por ejemplo, Kaplan y Nelson [28] obtienen una expresión similar a (4.20) para el kaon

$$\frac{m_K^{*2}}{m_K^2} = 1 - \frac{\rho_B}{\rho_c} \quad (4.21)$$

ρ_c es un parámetro cuyo valor es aproximadamente 3 veces la densidad nuclear. Este comportamiento para la masa del kaón en el medio es compatible con las observaciones experimentales de dispersiones K -núcleon. Además, en colisiones relativistas de núcleos se obtiene una densidad bariónica suficiente para que el kaón reduzca su masa, por lo tanto la producción y propagación de kaones y antikaones en colisiones núcleo-núcleo proporcionan información y evidencia sobre las modificaciones en el medio de los hadrones [43].

En cuanto a los mesones η y η' la situación es más complicada. Si bien no tenemos la suficiente información experimental de la existencia de estados ligados de η con el núcleo, las propiedades del η en el medio nuclear ha sido estudiado mediante diversos enfoques (modelo QMC, Chiral Perturbation

Theory, Relativistic Mean Field Theory, etc.). En la literatura se ha reportado que la masa efectiva del mesón η a densidad normal, ρ_0 , está entre $0.82 < m_\eta^*/m_\eta < 0.95$ [47]. En cuanto al mesón η' se está buscando una posible formación de estados ligados η' -núcleo. En [38] se discute sobre cómo obtener información de las propiedades del mesón η' en el medio mediante los anchos medios provenientes de la fotoproducción de η' a partir de núcleos.

Como hemos dicho antes, estudiar las modificaciones de las propiedades de los mesones en el medio sirven para extraer información sobre la restauración parcial de la simetría chiral en el medio nuclear.

4.4. Ecuación de Bethe-Salpeter en Materia Nuclear

De manera análoga al vacío, en materia nuclear, las soluciones de la ecuación de Bethe-Salpeter son los estados ligados de quark-antiquark vestidos. Estas soluciones se obtienen evaluando en el polo de los propagadores que surgen de la aproximación de fase aleatoria. Al igual que en el vacío, ecuación (3.25), la matriz t reducida está dada por

$$\Delta_m^*(k^{*2}) = \frac{2K_m^*}{1 - 2K_m^*\Pi_m^*(k^{*2})} \quad (4.22)$$

Las masas están definidas evaluando en el polo

$$1 - 2K_m^*\Pi_m^*(k^{*2} = m_m^{*2}) = 0 \quad (4.23)$$

m_m^* es la masa del mesón en el medio. Las constantes de acoplamiento efectivas dependientes de la densidad para cada canal ($m = \pi, K$) son

$$K_K^* = G_\pi - \frac{1}{2}K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* \quad (4.24)$$

$$K_\pi^* = G_\pi - \frac{1}{2}K \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* \quad (4.25)$$

y el diagrama de burbuja en materia nuclear será

$$\Pi_m^*(k^{*2}) = 2\Pi_{ps}^{*ij}(k^{*2}) \quad (4.26)$$

donde

$$\Pi_{ps}^{*ij}(k^{*2}) = 6i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_5 S_i^*(p^*) \gamma_5 S_j^*(p^* + k^*)] \quad (4.27)$$

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES DE MESONES A DENSIDAD FINITA

donde tr es la traza sobre índices de Dirac. El diagrama de burbuja en el medio correspondiente para generar las masas del pión y kaón son

$$\Pi_{ps}^{ll}(k^{*2}) = 6i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_5 S_l^*(p^*) \gamma_5 S_l^*(p^* + k^*)] \quad (4.28)$$

$$\Pi_{ps}^{ls}(k^{*2}) = 6i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_5 S_s^*(p^*) \gamma_5 S_l^*(p^* + k^*)] \quad (4.29)$$

con $l = u, d$, denota a los quarks ligeros. Notemos que, como el quark strange no se acopla al medio nuclear entonces el momento no se verá modificado por el potencial vectorial, es decir

$$S_s^*(p^*) = \frac{\not{p} + M_s^*}{p^2 - M_s^{*2}} \quad (4.30)$$

El diagramas de burbuja en el vacío, (2.69), está expresado en términos de los condensados quirales y la integral $I_{ij}(k^2)$. Esto quiere decir que, en materia nuclear, también podremos expresarlo de manera similar (Apéndice C)

$$\Pi_{ps}^{ij}(k^{*2}) = -\frac{\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle^*}{2M_i} - \frac{\langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle^*}{2M_j} + \frac{1}{2} [k^{*2} - (M_j^* - M_i^*)^2] I_{ij}(k^{*2}) \quad (4.31)$$

Para el pión, $i = j = u$, el diagrama de burbuja en el medio es

$$\Pi_{ps}^{uu}(k^{*2}) = -\frac{\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^*}{M_u^*} + \frac{1}{2} k^{*2} I_{uu}(k^{*2}) \quad (4.32)$$

Combinando (4.32) junto con la condición de masa del pion

$$1 - 2K_\pi^* \Pi_\pi^*(k^{*2} = m_\pi^{*2}) = 0 \quad (4.33)$$

y las ecuaciones de gap (4.10), obtenemos una expresión para la masa del pión de la forma (Apéndice C)

$$m_\pi^{*2} = \frac{m_u^*}{M_u^*} \frac{1}{2K_\pi^* I_{uu}(m_\pi^{*2})} \quad (4.34)$$

Esta expresión muestra que el pión es un bosón de Nambu-Goldstone en el límite quiral.

La dependencia con la densidad del condensado quiral ya la conocemos, (4.19), solo nos hace falta expresar la integral $I_{ij}(k^2)$ en materia nuclear para tener la forma explícita de la ecuación de Bethe-Salpeter dependientes de la densidad. Para generar la masa del pión necesitamos quarks ligeros. La integral correspondiente es

$$I_{ii}^*(k^{*2}) = -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_l^*(p^*)\Delta_l^*(p^* + k^*)} \quad (4.35)$$

donde

$$\Delta_l^*(p^*) = p^{*2} - M_l^{*2} \quad (4.36)$$

Aplicando la rotación de Wick y la parametrización de Feynman

$$\begin{aligned} I_{ii}^*(k^{*2}) &= -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^{*2} - M_l^{*2}][(p^* + k^*)^2 - M_l^{*2}]} \\ &= 4N_c \int dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^{*2} + 2(1-x)p^* \cdot k^* + (1-x)k^{*2} + M_l^{*2}]^2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Aquí $p^* = p + V$. Haciendo el cambio de variable $p \rightarrow p + V$ quedará de la forma

$$I_{ii}^*(k^{*2}) = 4N_c \int dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 + 2(1-x)p \cdot k^* + (1-x)k^{*2} + M_l^{*2}]^2} \quad (4.38)$$

Para escribirlo de una forma más conveniente hacemos el cambio $p \rightarrow p - (1-x)k$ tal que

$$I_{ii}^*(k^{*2}) = 4N_c \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 + x(1-x)k^{*2} + M_l^{*2}]^2} \quad (4.39)$$

Finalmente aplicando la regularización de tiempo propio obtenemos la integral

$$I_{ii}^*(k^{*2}) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int dx \int d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau\Delta_{ii}^*} \quad (4.40)$$

donde $\Delta_{ii}^* = -x(1-x)k^{*2} + M_l^{*2}$. En este último paso hemos hecho el cambio $k^2 \rightarrow -k^2$.

Ahora, para el caso del kaón hay que tener especial cuidado al calcular $I_{us}^*(k^{*2})$ ya que el quark s no se acopla con el medio. Necesitamos la integral

$$I_{us}^*(k^{*2}) = -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_s^*(p^*)\Delta_u^*(p^* + k^*)} \quad (4.41)$$

Para el quark s el 4-momento no se verá modificado por el medio

$$\Delta_s^*(p^*) = p^2 - M_s^{*2} \quad (4.42)$$

Aquí podemos ver que solo se acopla de manera indirecta a través de la masa constituyente M_s^* , siempre y cuando incluyamos el determinante de t'Hooft. Calculamos la integral

$$\begin{aligned} I_{us}^*(k^{*2}) &= -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p_+^{*2} - M_u^{*2}] [p^2 - M_s^{*2}]} \\ &= -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_+ + V)^2 - M_u^{*2}] [p^2 - M_s^{*2}]} \\ &= -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p + k + V)^2 - M_u^{*2}] [p^2 - M_s^{*2}]} \\ &= -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p + k^*)^2 - M_u^{*2}] [p^2 - M_s^{*2}]} \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde $k^* = k + V$. Ahora, aplicando la parametrización de Feynman,

$$I_{us}^*(k^{*2}) = -4iN_c \int dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\{x [(p + k^*)^2 - M_u^{*2}] + (1 - x) [p^2 - M_s^{*2}]\}^2} \quad (4.44)$$

Reescribiendo el denominador

$$\begin{aligned} x [(p + k^*)^2 - M_u^{*2}] + (1 - x) [p^2 - M_s^{*2}] &= x(p + k^*)^2 + (1 - x)p^2 \\ &\quad - (1 - x)M_s^* - xM_u^* \\ &= (p + xk^*)^2 + x(1 - x)k^{*2} \\ &\quad - (1 - x)M_s^* - xM_u^* \end{aligned} \quad (4.45)$$

Como la integral solo es en p , podemos hacer el cambio $p \rightarrow p + xk^*$. La integral queda

$$I_{us}^*(k^{*2}) = -4iN_c \int dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 + x(1 - x)k^{*2} - (1 - x)M_s^* - xM_u^*]} \quad (4.46)$$

Aplicando la rotación de Wick

$$I_{us}^*(k^{*2}) = 4N_c \int dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + \Delta_{us}^*)^2} \quad (4.47)$$

donde

$$\Delta_{us}^* = -x(1-x)k^{*2} + (1-x)M_s^* + xM_u^* \quad (4.48)$$

Notemos que $k^* = k + V$, entonces

$$k^{*2} = k^2 + 2k \cdot V + V^2 \quad (4.49)$$

donde V es el potencial vectorial

$$V^\mu = (V^0, \vec{0}) = (V_\omega^q, \vec{0}) \quad (4.50)$$

por lo tanto

$$k^{*2} = k^2 + 2k \cdot V^0 + (V^0)^2 \quad (4.51)$$

En la regularización de tiempo propio

$$I_{us}^*(k^{*2}) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau \Delta_{us}^*} \quad (4.52)$$

Finalmente, para el sistema $\eta - \eta'$ se necesitan las integrales $I_{uu}^*(k^{*2})$ y $I_{ss}^*(k^{*2})$

$$\begin{aligned} I_{ss}^*(k^{*2}) &= -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_s^*(p^*) \Delta_s^*(p^* + k^*)} \\ &= -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_s^*(p) \Delta_s^*(p + k)} \\ &= -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+k)^2 - M_s^{*2}] [p^2 - M_s^{*2}]} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Aplicando parametrización de Feynman, rotación de Wick y regularización de tiempo propio queda

$$I_{ss}^*(k^{*2}) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau \Delta_{ss}^*} \quad (4.54)$$

donde

$$\Delta_{ss}^* = -x(1-x)k^2 + M_s^* \quad (4.55)$$

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES DE MESONES A DENSIDAD FINITA

Notemos que la dependencia en la densidad solo se manifiesta de manera indirecta a través de la masa dinámica M_s^* .

Para obtener la masa de los mesones pseudoescalares en el medio nuclear debemos resolver la ecuación de Bethe-Salpeter para un valor dado de la densidad a través de la componente temporal potencial vectorial, V^0 , obtenido mediante el modelo QMC [23].

4.5. Resultados Numéricos

En esta sección se muestran los resultados de nuestros cálculos numéricos para las masas constituyentes de los quarks y masas de los mesones pseudoescalares en el medio nuclear con y sin el determinante de 't Hooft. Nuevamente se tomó como parámetro libre la masa dinámica $M_u = 0.4$ GeV. En la tabla 4.1 se muestra el conjunto de parámetros. Las masas y cut-off Λ_{IR} están en unidades GeV; G_π y K en unidades GeV^{-2} y GeV^{-5} , respectivamente.

m_u	m_s	G_π	K	M_s	Λ_{UV}	Λ_{IR}
0.0171	0.370	17.10	1927.5	0.651	0.637	0
0.0164	0.363	16.45	1734.2	0.648	0.645	0.240
0.0164	0.356	19.00	0.0	0.611	0.645	0.240

Tabla 4.1: Parámetros y masas corriente y constituyente de los quarks u y s , con $M_u = 0.4$ GeV.

El acoplamiento con el medio nuclear solo ocurre en quarks ligeros y por ende sus masas corrientes varían con la densidad, mientras que el quark s permanece sin cambios en su masa, $m_s = m_s^*$. Para la masa corriente del quark u utilizamos los valores que se obtienen del modelo QMC mostrados en la tabla 4.2. En la figura 4.2 se aprecia la masa corriente como función de la densidad ρ_B/ρ_0 .

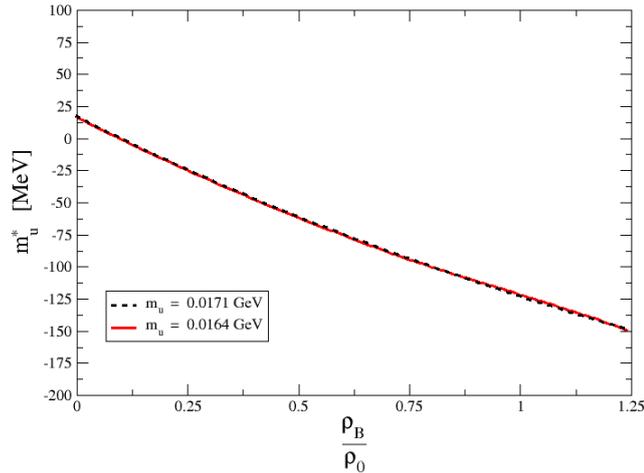


Figura 4.2: Masa corriente del quark u en función de la densidad, calculada mediante el modelo QMC [23].

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES DE MESONES A DENSIDAD FINITA

ρ_B/ρ_0	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25
(a) m_u^*	16.4	-25.08	-61.77	-94.5	-123.81	-150.34
(b) m_u^*	17.1	-24.38	-61.06	-93.74	-123.10	-149.62

Tabla 4.2: Masa corriente m_u^* en unidades MeV para (a) $\Lambda_{IR} = 240$ MeV (b) $\Lambda_{IR} = 0$.

Dada la masa corriente m_u^* podemos determinar la masa constituyente M_u^* como función de la densidad utilizando la ecuación de gap ($K = 0$)

$$M_u^* = m_u^* + \frac{3G_\pi M_u^*}{\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\tau M_u^{*2}}}{\tau^2} \quad (4.56)$$

En la tabla 4.3 se muestran los valores obtenidos para la masa dinámica M_u^* en el medio nuclear. En ambos casos la masa dinámica del quark u decrece conforme aumenta la densidad como se ve en la figura 4.3. Al llegar a la densidad nuclear normal, $\rho_B/\rho_0 = 1$, tenemos una disminución del 37 % para el caso $\Lambda_{IR} = 0$ y del 33 % para $\Lambda_{IR} = 0.240$ GeV.

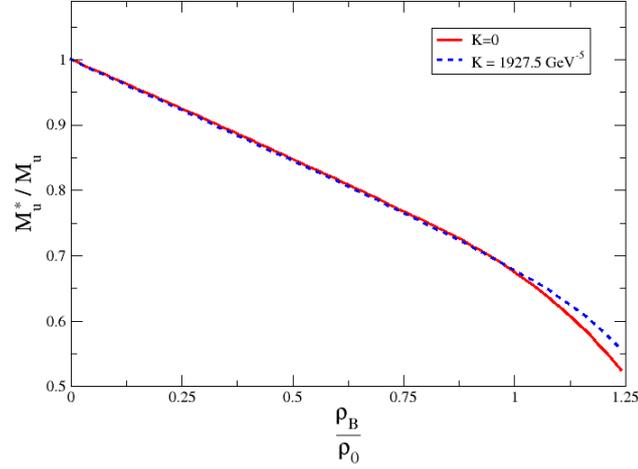
	$K = 0$		$K = 1927.5 \text{ GeV}^{-5}$	
ρ_B/ρ_0	M_u^* [GeV]	$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$ [GeV]	M_u^* [GeV]	$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$ [GeV]
0.00	0.400	-0.172	0.400	-0.172
0.25	0.370	-0.173	0.369	-0.173
0.50	0.339	-0.174	0.338	-0.174
0.75	0.307	-0.174	0.306	-0.174
1.00	0.270	-0.173	0.271	-0.173
1.25	0.207	-0.167	0.220	-0.170

(a) $\Lambda_{IR} = 0$

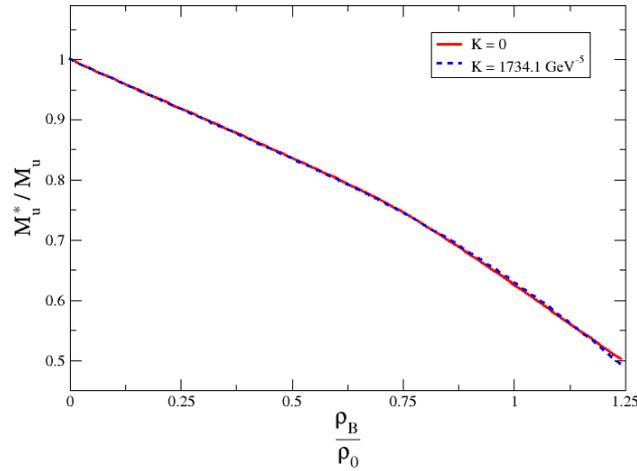
	$K = 0$		$K = 1734.1 \text{ GeV}^{-5}$	
ρ_B/ρ_0	M_u^* [GeV]	$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$ [GeV]	M_u^* [GeV]	$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$ [GeV]
0.00	0.400	-0.172	0.400	-0.172
0.25	0.367	-0.173	0.367	-0.173
0.50	0.334	-0.174	0.334	-0.174
0.75	0.298	-0.174	0.298	-0.174
1.00	0.252	-0.172	0.252	-0.172
1.25	0.195	-0.166	0.205	-0.167

(b) $\Lambda_{IR} = 0.240$ GeV

Tabla 4.3: Masa constituyente y condensado quiral del quark u en el medio nuclear. Unidades en GeV.



(a) $\Lambda_{IR} = 0$



(b) $\Lambda_{IR} = 0.240 \text{ GeV}$

Figura 4.3: Masa constituyente M_u^* como función de ρ_B/ρ_0 .

En cuanto a la magnitud del condensado quiral, $\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$, la disminución es de tan solo el 0.6 %. El comportamiento con la densidad del condensado es ligeramente distinto ya que a densidades $\rho_B < \rho_0$ aumenta, mientras que para $\rho_B \geq \rho_0$ comienza a decrecer.

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES DE MESONES A DENSIDAD FINITA

Por otra parte, como el quark strange no se acopla directamente con el medio, su masa corriente no cambia, $m_s = m_s^*$. La ecuación de gap correspondiente es ($K = 0$)

$$M_s^* = M_s = m_s + \frac{3G_\pi M_s}{\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\tau M_s^2}}{\tau^2} \quad (4.57)$$

La masa dinámica en el medio será entonces igual a la masa dinámica en el vacío, correspondiente a 0.611 GeV, siempre y cuando $K = 0$. Al incluir el determinante de 't Hooft el quark s puede acoplarse al medio de forma indirecta gracias a la mezcla entre sabores de quarks que aparece en las ecuaciones de gap

$$M_u^* = m_u^* - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* \quad (4.58)$$

$$M_s^* = m_s^* - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* \quad (4.59)$$

que en la simetría de isoespín, $M_d^* = M_u^*$. La masa dinámica del quark s sí cambiará con la densidad solamente si $K \neq 0$. En la tabla 4.4 se presentan los valores obtenidos numéricamente para la masa constituyente del quark strange a densidad finita.

	$K = 1927.5 \text{ GeV}^{-5}$		$K = 1734.1 \text{ GeV}^{-5}$	
ρ_B/ρ_0	$M_s^* \text{ [GeV]}$	$\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3} \text{ [GeV]}$	$M_s^* \text{ [GeV]}$	$\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3} \text{ [GeV]}$
0.00	0.651	-0.144	0.648	-0.144
0.25	0.654	-0.143	0.651	-0.144
0.50	0.656	-0.143	0.652	-0.144
0.75	0.656	-0.143	0.651	-0.144
1.00	0.654	-0.145	0.646	-0.145
1.25	0.647	-0.144	0.636	-0.146

Tabla 4.4: Masa constituyente del quark s en el medio nuclear.

Como se puede ver en la tabla 4.4, la masa constituyente del quark s aumenta menos del 1% respecto a su masa en el vacío conforme crece la densidad. Notemos que esto ocurre para densidades $\rho_B/\rho_0 < 0.75$. A densidades mayores a 0.75, la masa comienza a decrecer. Este comportamiento se aprecia mejor en la figura 4.4. En ella se ve que la masa constituyente del quark strange es constante hasta densidades $\rho_B/\rho_0 = 0.75$ y luego decrece un poco. Para $\rho_B = \rho_0$, la masa constituyente M_s^* aumenta solo un 0.4% con el cut-off $\Lambda_{IR} = 0$, mientras que con el cut-off $\Lambda_{IR} = 0.240 \text{ GeV}$ disminuye el 0.3%.

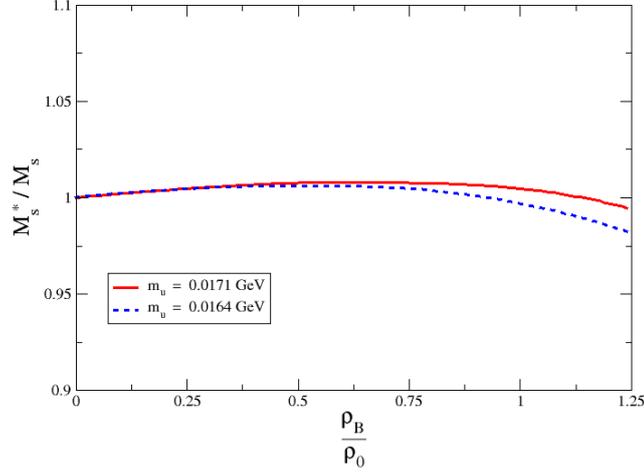


Figura 4.4: Masa constituyente del quark s en función de ρ_B/ρ_0 .

Una vez calculadas las masas constituyentes de los quarks u y s en el medio nuclear se procede a determinar las masas de los mesones pseudoescalares. Primero discutiremos los resultados correspondientes a los mesones π y K , dejando por último al sistema $\eta - \eta'$. Para obtener las masas de los mesones en función de la densidad debemos resolver numéricamente la ecuación de Bethe-Salpeter

$$1 - 2G_\pi \Pi_m(k^{*2} = m_m^{*2}) = 0 \quad (4.60)$$

con $m = \pi, K$, e incluyendo el determinante de 't Hooft

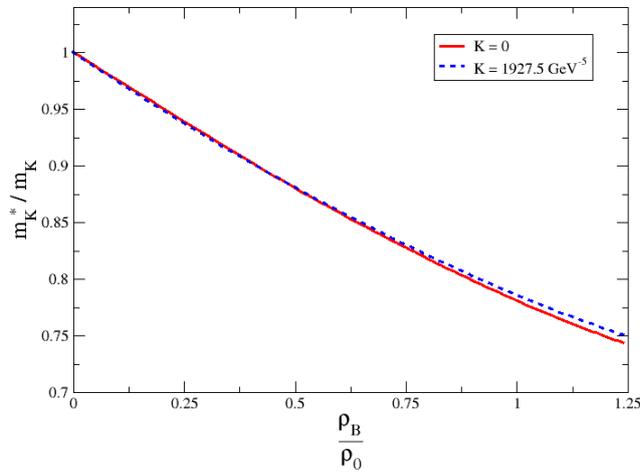
$$1 - 2K_m^* \Pi_m(k^{*2} = m_m^{*2}) = 0 \quad (4.61)$$

Como se discutió en la sección 4.3, esperamos obtener información a cerca de las propiedades de los piones en el medio nuclear. Sin embargo, en este modelo no se obtuvieron resultados favorables para la masa del pión. Se encontró que su masa desaparece rápidamente a partir de densidades muy bajas. En comparación con [23], donde también se ha utilizado el modelo NJL+QMC, se encontró que la masa del pión disminuye de manera lineal conforme la densidad aumenta, cuyo decrecimiento es de un 6.4% para densidades de $\rho_B/\rho_0 = 1$. Además, en otros casos [35] se predice lo contrario, es decir, un aumento en la masa del pión para densidades $\rho_B > \rho_0$.

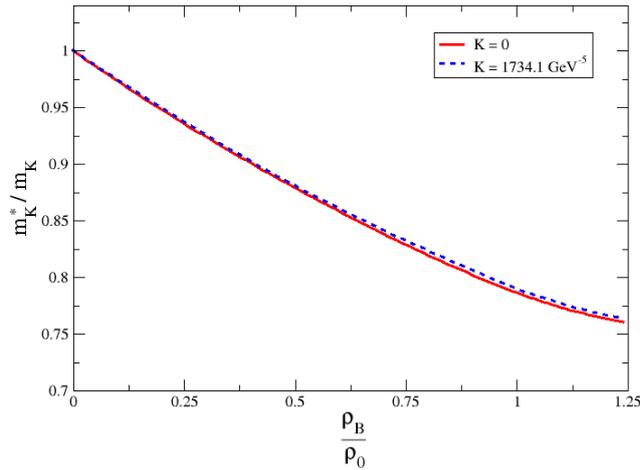
En cuanto al mesón K , el modelo predice un decrecimiento en la masa al aumentar la densidad, como se muestra en la figura 4.5. La disminución es de aproximadamente un 20% cuando se alcanza una densidad igual a la

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES DE MESONES A DENSIDAD FINITA

densidad nuclear normal, $\rho_B/\rho_0 = 1$. Además, examinando la tabla 4.5 se ve que la masa prácticamente no se ve modificada por la interacción de 't Hooft ya que la diferencia en las masas es menor al 1 %.



(a) $\Lambda_{IR} = 0$



(b) $\Lambda_{IR} = 0.240 \text{ GeV}$

Figura 4.5: Masa del kaón como función de ρ_B/ρ_0 .

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES DE MESONES A DENSIDAD FINITA

ρ_B/ρ_0	m_K^* [GeV]			
	$\Lambda_{IR} = 0$		$\Lambda_{IR} = 0.240 \text{ GeV}$	
	$K = 0$	$K = 1927.1 \text{ GeV}^{-5}$	$K = 0$	$K = 1734.1 \text{ GeV}^{-5}$
0.00	0.493	0.495	0.496	0.495
0.25	0.463	0.464	0.464	0.464
0.50	0.434	0.436	0.436	0.436
0.75	0.408	0.411	0.411	0.412
1.00	0.385	0.389	0.390	0.391
1.25	0.366	0.371	0.386	0.389

Tabla 4.5: Masa del kaón a densidad nuclear finita.

Pasando al sistema $\eta - \eta'$, primero discutamos el caso $K = 0$. Al hacer $K = 0$ las masas del sistema $\eta - \eta'$ se reducen a las masas de los mesones pseudoescalares $u\bar{u}$ y $s\bar{s}$, respectivamente. En el caso del mesón pseudoescalar $u\bar{u}$, su masa en el vacío corresponde a la masas del pión, $m_\pi = 0.140 \text{ GeV}$ y en el caso del mesón pseudoescalar $s\bar{s}$, su masa en el vacío corresponde a $m_{s\bar{s}} = 0.722 \text{ GeV}$.

Ahora, para generar las masas de los mesones η y η' debemos evaluar numéricamente el determinante

$$\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right] \Big|_{k^2=m_{\eta(\eta')}^2} = 0 \quad (4.62)$$

ρ_B/ρ_0	m_η^* [GeV]		$m_{\eta'}^*$ [GeV]	
	$\Lambda_{IR} = 0$	$\Lambda_{IR} = 0.240$	$\Lambda_{IR} = 0$	$\Lambda_{IR} = 0.240$
0.00	0.346	0.354	0.957	0.958
0.25	0.265	0.271	0.971	0.972
0.50	0.165	0.170	0.979	0.974
0.75	0.0	0.0	0.982	0.971
1.00	0.0	0.0	0.976	0.953
1.25	0.0	0.0	0.949	0.912

Tabla 4.6: Masa de η y η' a densidad nuclear finita.

En la tabla 4.6 se muestran los resultados numéricos obtenidos para las masas de los mesones η y η' . Para el mesón η' se encontró que en el medio nuclear su masa crece para densidades relativamente bajas. Para densidades $\rho_B/\rho_0 \geq 0.75$ la masa del η' comienza a disminuir, como se aprecia en la figura 4.6.

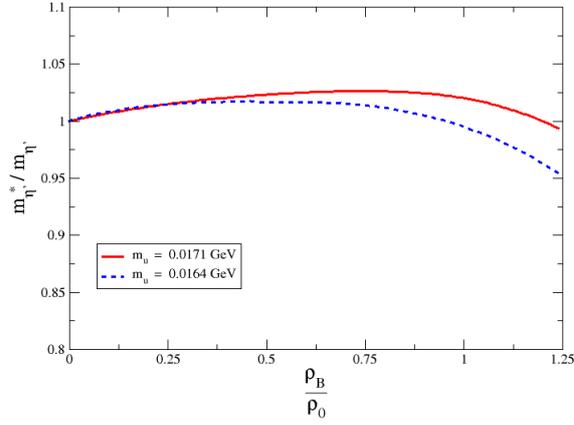


Figura 4.6: Masa del mesón η' como función de ρ_B/ρ_0 .

En cuanto al mesón η hemos encontrado que su masa decrece rápidamente, figura 4.7, hasta desaparecer a densidades cercanas a $\rho_B/\rho_0 = 0.75$.

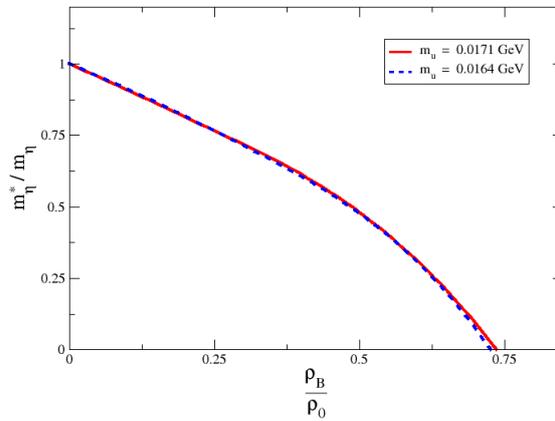


Figura 4.7: Masa del mesón η como función de ρ_B/ρ_0 .

Las modificaciones de las propiedades de quarks y mesones pseudoescalares en materia nuclear simétrica se han explorado con el modelo NJL junto con el modelo QMC. Hemos encontrado que la masa constituyente del quark up decrece conforme aumenta la densidad nuclear. Se calculó que la razón entre la masa dinámica del quark u en el medio con las del vacío es de 0.675, que corresponde a una disminución del 33%. El caso del quark strange, su masa decrece a densidades mayores a la densidad nuclear normal. Además, la disminución de la magnitud del condensado quiral del quark u a medida que aumenta la densidad de materia nuclear indica que la simetría quiral se restaura parcialmente a densidad bariónica finita.

Para generar las masas del nonete de mesones pseudoescalares es necesario incluir la interacción de 't Hooft al modelo. El modelo NJL estándar solamente nos aporta información a cerca de los mesones π y K y de los mesones pseudoescalares, $u\bar{u}$ y $s\bar{s}$. En este caso solamente pudimos estimar el cambio en la masa del kaón en el medio nuclear, donde encontramos que esta disminuye conforme aumenta la densidad. En cuanto al pión no se logró estimar su masa a densidad finita, esta es una de las deficiencias del esquema NJL+QMC. Respecto al mesón pseudoescalar $s\bar{s}$, este no se ve afectado por el medio porque el quark strange no se acopla directamente con el medio nuclear si no incluimos la interacción de 't Hooft, por tanto, la masa de $s\bar{s}$ es constante a densidad finita.

Al incluir la interacción de 't Hooft logramos obtener información sobre los mesones K , η y η' . Para el caso de los mesones K y η se encontró que la razón entre sus masas en el medio con la del vacío disminuyen a medida que la densidad de la materia nuclear aumenta. Nuestra estimación para m_K^*/m_K es de 0.78 a densidad nuclear normal. En cambio, en el caso del mesón η , la masa se hace cero cuando $\rho_B = \rho_0$. Finalmente, los resultados obtenidos para el mesón η' fueron un aumento en su masa hasta densidades $\rho_B/\rho_0 < 0.75$, posteriormente ésta comienza a disminuir al ir aumentando la densidad.

Sigue siendo de total importancia continuar con el estudio de las propiedades del nonete de mesones pseudoescalares en el medio. En un futuro se podría trabajar sin emplear el modelo QMC, por ejemplo como [35] bajo el esquema de regularización de tiempo propio. Esto también podría extenderse a temperatura finita.

Capítulo 5

Termodinámica en el modelo NJL

A temperatura y potencial químico cero, la generación del condensado de quarks provoca la ruptura espontánea de la simetría quiral. En cambio, al aumentar la temperatura, ocurre una transición de fase (que se cree que es de segundo orden) de la fase Goldstone-Nambu a la fase Wigner-Weyl, es decir, al incluir efectos térmicos, la condensación de quarks se verá afectada hasta desaparecer y así restaurar la simetría quiral.

En el capítulo anterior exploramos las propiedades de quarks, mesones y la restauración parcial de la simetría quiral en materia nuclear mediante el modelo NJL+'t Hooft. En esta ocasión incluiremos efectos térmicos con la finalidad de explorar la transición de fase en donde ocurre la restauración de la simetría quiral.

Existen dos tipos de transiciones de fase que se esperan a temperatura y potencial químico finitos: confinamiento-desconfinamiento y rompimiento-restauración de la simetría quiral. Ambas han sido estudiadas mediante Lattice QCD donde se ha estimado que las dos transiciones ocurren a la misma temperatura. Los cálculos indican que la restauración de la simetría quiral se da a $T = 100 - 200$ MeV. También se ha intentado determinar fenomenológicamente la temperatura y potencial químico críticos en la cual ocurre la transición mediante modelos efectivos como es el caso del modelo Nambu-Jona-Lasinio.

Comprender el comportamiento de QCD a densidad y temperatura finita es de fundamental importancia ya que bajo estas condiciones la materia hadrónica experimenta una transición de fase al llamado Plasma de Quark-Gluon (QGP). Esta forma de materia se produjo en las etapas más tempranas del Universo por lo que su estudio es de gran interés para la interpretación de las mediciones realizadas en los experimentos de colisiones de iones pesados

relativistas, donde se alcanzan temperaturas altas y grandes densidades y por tanto una transición de una fase de materia hadrónica a una que contiene quarks y gluones.

Esta capítulo es un primer avance hacia el estudio de las propiedades de la materia fuertemente interactuante a temperatura y potencial químico finitos con el propósito de que en un futuro hagamos un estudio similar al visto en el capítulo 4 pero sin el modelo QMC.

5.1. Condensado Quiral a Temperatura y Potencial Químico Finitos

El condensado quiral está definido como

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = - \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + M}{p^2 + M^2} \quad (5.1)$$

Para describir al sistema a temperatura T y potencial químico μ finitos debemos expresar las integral sobre el momento en el formalismo de Matsubara. Esto se logra sistemáticamente mediante la transcripción [12, 34]

$$p \longrightarrow p_n = (\tilde{\omega}_n, \vec{p}) \quad (5.2)$$

donde $\tilde{\omega}_n = \omega_n + i\mu$, siendo ω_n las frecuencias de Matsubara

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T \quad (5.3)$$

En el formalismo de Matsubara, las integrales en el momento son de la forma [34]

$$i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p_0, \vec{p}) \longrightarrow -T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(\tilde{\omega}_n, \vec{p}) \quad (5.4)$$

La integración sobre la componente temporal del momento consiste en una suma sobre las frecuencias de Matsubara. Entonces, haciendo la suma de Matsubara y la traza en el condensado quiral, (5.1) queda

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle (T, \mu) = -12M_i T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_n^2 + M_i^2} \quad (5.5)$$

donde

$$p_n^2 = \tilde{\omega}_n^2 + \vec{p}^2 \quad (5.6)$$

CAPÍTULO 5. TERMODINÁMICA EN EL MODELO NJL

Usando la relación de dispersión, $E^2 = M^2 + \vec{p}^2$, el condensado quiral se puede expresar en términos de la energía E como

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle (T, \mu) = -12M_i T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + E^2} \quad (5.7)$$

Integrando en el ángulo sólido queda

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle (T, \mu) &= -\frac{6M_i T}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{\tilde{\omega}_n^2 + E^2} \\ &= -\frac{6M_i}{\pi^2} \int_0^{\infty} dp p^2 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{\tilde{\omega}_n^2 + E^2} \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para evaluar esta integral consideremos una suma sobre n para una función arbitraria $f(\omega_n)$

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) \quad (5.9)$$

donde $\omega_n = 2\pi nT$ para bosones y $\omega_n = (2n+1)\pi T$ para fermiones. Podemos escribir la suma discreta como una integral de contorno introduciendo una función auxiliar $F(p_0)$

$$F(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1} \quad \text{fermiones} \quad (5.10)$$

$$F(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \quad \text{bosones} \quad (5.11)$$

donde $\beta = 1/T$. De tal manera que

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dp_0 f(p_0) \frac{1}{e^{\beta p_0} \pm 1} \quad (5.12)$$

En nuestro caso

$$f(\omega_n) = \frac{1}{(\omega_n + i\mu)^2 + E^2} \quad (5.13)$$

Entonces, de (5.12) la suma sobre frecuencias de Matsubara puede escribirse como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{\tilde{\omega}_n^2 + E^2} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dp_0 \frac{1}{(p_0 - \mu)^2 - E^2} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T}} + 1} \quad (5.14)$$

El signo negativo proviene del cambio $\omega_n = ip_0$. La función $f(p_0)$ tiene dos polos ubicados en $\pm E + \mu$. Para evaluar la integral utilizamos el teorema del residuo

$$\oint_C dz f(z) = 2\pi i \sum_k \text{Res}[f(z)]_{z=z_k} \quad (5.15)$$

donde z_k denota los polos de la función $f(z)$. Calculando los residuos obtenemos que

$$\text{Res}[f(\omega_n)]_{\omega_n=\omega_1} = \frac{1}{2E} \frac{1}{e^{\frac{E+\mu}{T}} + 1} \quad (5.16)$$

$$\text{Res}[f(\omega_n)]_{\omega_n=\omega_2} = -\frac{1}{2E} \left[1 - \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1} \right] \quad (5.17)$$

Por lo tanto, la sumatoria es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{\tilde{\omega}_n^2 + E^2} = \frac{1}{2E} (1 - f^+ - f^-) \quad (5.18)$$

donde

$$f^{\pm}(T, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{E \pm \mu}{T}} + 1} \quad (5.19)$$

es la función de distribución de Fermi (o número de ocupación) para quarks (+) y antiquarks (-). Por último, podemos reescribir (5.18) usando la identidad

$$1 - \tanh x = \frac{2}{e^{2x} + 1} \quad (5.20)$$

de tal manera que

$$(1 - f^+ - f^-) = \frac{1}{2} \left[\tanh \frac{E - \mu}{2T} + \tanh \frac{E + \mu}{2T} \right] \quad (5.21)$$

Sustituyendo en el condensado quiral se sigue que

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle (T, \mu) = -\frac{3M_i}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{\tilde{p}^2}{E} \left[\tanh \frac{E - \mu}{2T} + \tanh \frac{E + \mu}{2T} \right] \quad (5.22)$$

donde $E = (\vec{p}^2 + M^2)^{1/2}$. Mediante la regularización de tiempo propio podemos expresar el término $1/E$ como sigue

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{(\vec{p}^2 + M^2)^{1/2}} = \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\tau(p^2+M^2)}}{\sqrt{\pi\tau}} \quad (5.23)$$

Esta integral puede ser expresada en términos de la función Γ incompleta

$$\Gamma(a; x) = \int_x^\infty dt t^{a-1} e^{-t} \quad (5.24)$$

En este caso

$$\int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{e^{-\tau(p^2+M^2)}}{\sqrt{\pi\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}E} \Gamma\left(\frac{1}{2}; \tau E^2\right) \quad (5.25)$$

o bien, en términos de la función Error Complementaria

$$\text{Erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}; x^2\right) \quad (5.26)$$

El condensado quiral para $T \neq 0$ y $\mu \neq 0$ toma la forma

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle (T, \mu) = -\frac{3M_i}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{\vec{p}^2}{E} \text{Erfc}\left(\frac{E}{\Lambda_{UV}}\right) \left[\tanh \frac{E - \mu}{2T} + \tanh \frac{E + \mu}{2T} \right] \quad (5.27)$$

o bien

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle (T, \mu) = -\frac{3M_i}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{\vec{p}^2}{E} \text{Erfc}\left(\frac{E}{\Lambda_{UV}}\right) (1 - f^+ - f^-) \quad (5.28)$$

Notemos que al tomar $T = \mu = 0$ tenemos que $f^+ = f^- = 0$ y por tanto recuperamos la expresión para el condensado quiral en el vacío (integrada sobre la componente temporal del momento). Si consideramos altas temperaturas o potencial químico, el factor $(1 - f^+ - f^-)$ tiende a cero lo que implica que el condensado quiral también va a cero. Por lo tanto, existe una temperatura o potencial químico crítico para la cual el condensado quiral será cero (fase de Wigner-Weyl). Por esta razón, el condensado se puede definir como el parámetro de orden de la transición de fase quiral

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle \begin{cases} = 0 & \text{si } T > T_c \quad (\text{o } \mu > \mu_c) \\ \neq 0 & \text{si } T < T_c \quad (\text{o } \mu < \mu_c) \end{cases} \quad (5.29)$$

El comportamiento del parámetro de orden en función de la temperatura nos da información sobre la transición de fase. En la siguiente sección discutiremos con más detalle la transición de fase quiral

5.2. Masa Dinámica y Transición de Fase Quiral

A temperatura y potencial químico finito, la ecuación de gap tiene la misma estructura matemática que en el vacío, solamente se ve modificada por la dependencia en T y μ del condensado quiral en (5.28). Primero consideremos la ecuación de gap sin incluir la interacción de 't Hooft

$$M_i = m_i - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle (T, \mu) \quad (5.30)$$

para $i = u, s$ (en la simetría de isoespín) y donde $\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle (T, \mu)$ esta dada por (5.27). Asumiremos que G_π es independientes de la temperatura y del potencial químico. Los efectos del medio en el condensado quiral hacen que este se reduzca conforme crece la temperatura o el potencial químico. Entonces, para T o μ grande, el condensado quiral tiende a cero y por tanto la masa dinámica M_i se reducirá a la masa corriente m_i .

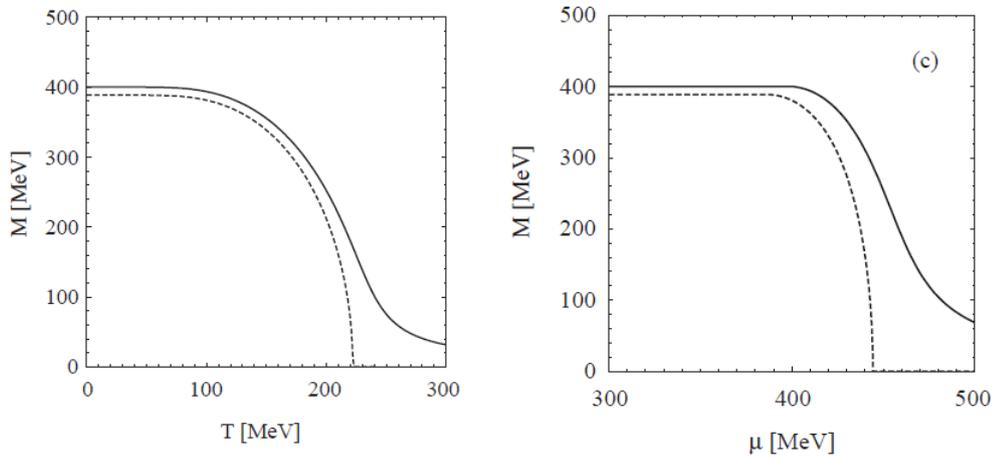


Figura 5.1: Masa constituyente del quark u como función de la temperatura (izquierda) y como función del potencial químico (derecha) [9]. La línea punteada corresponde al límite quiral.

El comportamiento de la masa dinámica se ilustra en la figura 5.1 para el caso del quark up [9]. La línea punteada es resultado de tomar el límite quiral,

$m_u = 0$, en la ecuación de gap. Podemos ver que en ambas gráficas la masa constituyente se hace cero en un cierto valor de T o μ . A dicha temperatura o potencial químico se le denomina crítico y representa la temperatura, T_c , o potencial químico, μ_c , por encima de la cual la masa dinámica es igual a cero. También se aprecia que la masa dinámica es una función continua alrededor de T_c/μ_c , lo que sugiere ser una transición de fase de segundo orden. Por otra parte, para $m_u \neq 0$, la transición de fase ya no ocurre a una T_c o μ_c definida, sino en una región alrededor del punto crítico. A este tipo de transiciones suaves se les llama cross-over. El comportamiento que observamos en la figura 5.1 de la masa dinámica a temperatura y/o potencial químico finito lleva a pensar que la transición de fase es de segundo orden. No obstante, no basta con resolver la ecuación de gap para determinar el orden de la transición ya que esta no tiene una solución única. De acuerdo con [33], para determinar el orden de la transición de fase es necesario minimizar el potencial termodinámico (gran canónico).

Además de resolver (5.30), también incluiremos las ecuaciones de gap en el modelo NJL con interacción de 't Hooft. Estas tendrán la misma estructura

$$M_u = m_u - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle + 2K \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (5.31)$$

$$M_d = m_d - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle \quad (5.32)$$

$$M_s = m_s - 4G_\pi \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle \quad (5.33)$$

donde $\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle = \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle(T, \mu)$. De igual manera, asumimos que la constante K no depende de la temperatura ni potencial químico. En la siguiente sección discutiremos los resultados obtenidos para la masa dinámica de los quarks ligeros dentro del marco del modelo NJL estándar y su extensión mediante el determinante de 't Hooft a potencial químico finito y temperatura finita.

5.3. Resultados Numéricos

En esta sección se presenta los resultados numéricos de las propiedades de los quarks a temperatura y potencial químico finito. Los cálculos se realizaron con el mismo conjunto de parámetros, utilizando como parámetro libre la masa dinámica $M_u = 0.4$ GeV. En la tabla 5.1 se muestran los resultados obtenidos para las masas constituyentes de los quarks u y s (asumiendo la simetría de isoespín, $m_u = m_d$) a potencial químico finito al resolver la ecuación de gap (5.30) utilizando el conjunto de parámetros, $m_u = 0.0164$ GeV, $m_s = 0.356$ GeV, $G_\pi = 19.04$ GeV⁻² y $\Lambda_{UV} = 0.645$ GeV, con $T = 0.03$ GeV. Según los resultados obtenidos, la masa dinámica M_q disminuye conforme el potencial químico aumenta.

μ	M_u	M_s	$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$	$\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3}$
0.00	0.400	0.611	-0.172	-0.150
0.25	0.400	0.611	-0.172	-0.150
0.50	0.269	0.611	-0.149	-0.149
0.75	0.028	0.533	-0.053	-0.132
1.00	0.019	0.403	-0.032	-0.085
1.25	0.017	0.366	-0.018	-0.052

Tabla 5.1: Condensado quiral y masa dinámica del quark u a potencial químico finito para $T = 0.03$ GeV en el modelo NJL. Las unidades son GeV.

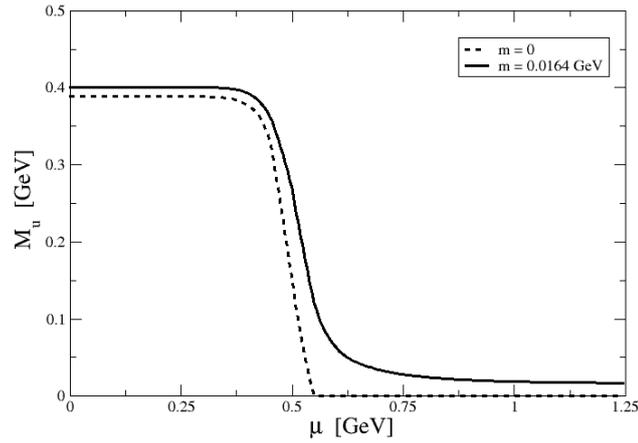


Figura 5.2: Masa constituyente M_u como función del potencial químico a $T = 0.030$ GeV.

En la figura 5.2 se muestra la masa constituyente M_u como función del potencial químico a $T = 0.03$ GeV. La línea punteada corresponde al caso del límite quiral, $m_u = 0$. En ambas, la masa dinámica es constante para potencial químico $\mu < 0.35$ GeV. Después cae rápidamente en el intervalo $0.35 < \mu < 0.55$ GeV, tendiendo a la masa corriente $m_u = 0.0164$. En el caso del límite quiral, $m_u = 0$, para $\mu \sim 0.55$ GeV la masa dinámica se hace cero. Este sería el potencial químico crítico en donde ocurre la transición de fase. Por el contrario, para una masa desnuda finita, $m_u \neq 0$, la parte dinámica de la masa desaparece y solo queda la masa corriente.

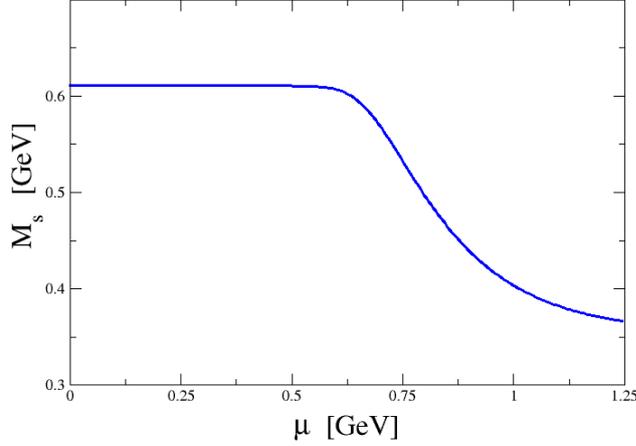


Figura 5.3: Masa constituyente M_s como función del potencial químico a $T = 0.030$ GeV.

En la figura 5.3 se muestra la masa dinámica del quark s a $T = 0.030$ GeV como función del potencial químico. Similarmente, la masa constituyente posee un comportamiento constante para un potencial químico de $\mu < 0.55$ y posteriormente disminuye hasta un 40 % con respecto a la masa en el vacío $M_s = 0.611$ GeV. Para $\mu > 1$ GeV la masa dinámica desaparece, quedando el valor de la masa corriente $m_s = 0.356$ GeV.

μ	M_u	M_s	$\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3}$	$\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^{1/3}$
0.00	0.400	0.653	-0.172	-0.144
0.25	0.400	0.653	-0.172	-0.144
0.50	0.281	0.623	-0.151	-0.148
0.75	0.027	0.521	-0.053	-0.132
1.00	0.018	0.411	-0.031	-0.086
1.25	0.017	0.379	-0.018	-0.051

Tabla 5.2: Condensado quiral y masa dinámica de los quarks u y s a potencial químico finito para $T = 0.03$ GeV en el modelo NJL+'t Hooft. Unidades en GeV.

En la tabla 5.2 se muestran los resultados obtenidos para las masas constituyentes de los quarks u y s a potencial químico finito mediante el modelo NJL+'t Hooft, resolviendo (5.31)-(5.33). El conjunto de parámetros es $m_u = 0.0164$ GeV, $m_s = 0.356$ GeV, $G_\pi = 16.45$ GeV⁻², $K = 1734.1$ GeV⁻⁵ y $\Lambda_{UV} = 0.645$ GeV, con $T = 0.030$ GeV.

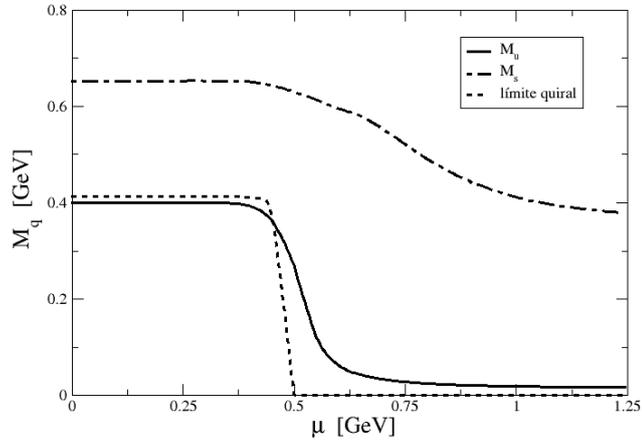


Figura 5.4: Masa constituyente M_s como función del potencial químico a $T = 0.030$ GeV.

La única diferencia está en la masa dinámica y el condensado del quark s , proveniente de la mezcla de sabor que ocurre al incluir la interacción de 't Hooft. En la figura 5.4 tenemos M_u y M_s a temperatura y potencial químico finitos. El comportamiento de la masa constituyente del quark u es similar al caso anterior. Para un potencial químico de $\mu > 0.55$ cae rápidamente, acercándose al valor de su masa corriente m_u . Por otra parte, la masa dinámica del quark s ahora disminuye más lentamente, pero igualmente acercándose a su masa corriente m_s .

Capítulo 6

Resumen y Conclusiones

El propósito de esta tesis de Maestría ha sido explorar las propiedades de la materia hadrónica en el vacío y en el medio mediante un modelo efectivo de la Cromodinámica Cuántica (QCD), el modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) con determinante de 't Hooft para tres sabores de quarks. Para ello fue necesario hacer una revisión de las bases teóricas de QCD, como del modelo NJL, de manera tal que este continúe conservando las mismas simetrías de QCD y así obtener una descripción realista de la interacción entre quarks. Las simetrías más relevantes estudiadas a lo largo de esta tesis fueron la simetría quirial y la simetría axial $U_A(1)$. Trabajar con este modelo es de utilidad ya que nos permite explorar el mecanismo de ruptura espontánea de la simetría quirial y sus manifestaciones en la física hadrónica, por ejemplo en la generación dinámica de la masa de los quarks, la aparición de condensados quirales y de bosones de Nambu-Goldstone. No obstante, uno de los inconvenientes de trabajar con el modelo NJL es que este sigue conteniendo la simetría axial $U_A(1)$, la cual no es una simetría de QCD. Por ello nos vimos en la necesidad de incorporar al modelo la interacción de 't Hooft, que es la encargada de removerla. Además, incluir el determinante de 't Hooft nos permite generar al nonete de mesones pseudoescalares, ya que este produce la mezcla de sabor entre quarks u , d y s , que es necesaria para formar a los mesones η y η' . Sin la interacción de 't Hooft solo seríamos capaces de generar a piones y kaones, como se discutió en el capítulo 2. Trabajando en la aproximación de campo medio se logra obtener las masas dinámicas de los quarks y los condensados quirales. Una vez hecho esto usamos la ecuación de Bethe-Salpeter para describir estados ligados de quark-antiquark y así determinar las masas de los mesones pseudoescalares. Es necesario trabajar bajo un esquema de regularización para poder tratar con las integrales divergentes que aparecen en los condensados quirales y en la ecuación de Bethe-Salpeter; en nuestro caso optamos por la regularización de tiempo propio. Como el modelo NJL

es no-renormalizable, el esquema de regularización forma parte del modelo, es decir, hay dependencia del esquema de regularización. Además de calcular las masas de quarks y sus estados ligados también se consideraron propiedades de mesones como constantes de acoplamiento mesón-quark-antiquark y las constantes de decaimiento para piones y kaones. Cabe mencionar que a lo largo de esta tesis se trabajó bajo la simetría de isospín de tal manera que la masa del quark up es igual a la masa del quark down.

Primero se estudiaron las propiedades de quarks y mesones en el vacío. En el capítulo 2 se abordó el modelo NJL estándar (sin interacción de 't Hooft). En este caso el modelo contiene cuatro parámetros, siendo la masa constituyente del quark u uno de ellos y que utilizamos como parámetro libre con el valor de $M_u = 400$ MeV. Para fijar el resto de parámetros se utilizaron los valores experimentales para la masa del pión, kaón y la constante de decaimiento del pión. Los resultados obtenidos con el conjunto de parámetros resultante se muestran en la tabla 2.1. El valor obtenido para el condensado quiral del quark u fue de $\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^{1/3} = -0.171$ GeV, que subestima los valores fenomenológicos reportados que suelen ser del orden de -0.250 GeV. Esto nos hizo explorar otros rangos para la masa dinámica del quark u encontrando que, para una masa de $M_u = 230$ MeV, el valor del condensado quiral es de -0.253 MeV. Por lo tanto, el valor del condensado mejora para masas dinámicas menores a 400 MeV. Por otra parte, se logró calcular la constante de decaimiento del kaón con un error del 12% respecto a su valor experimental. En particular, el cociente f_K/f_π obtenido en nuestros cálculos fue de 1.04, resultando ser menor a la evidencia experimental. En el capítulo 3 se incorporó la interacción de 't Hooft al modelo NJL. Las dos consecuencias más relevantes fueron que, gracias a la mezcla de sabor de quarks, la masa del quark strange se modificó ligeramente en comparación con el resultado obtenido en el modelo NJL estándar y además la generación de las masas de los mesones η y η' . En este caso, al modelo se le añade un nuevo parámetro, correspondiente a la interacción, teniendo entonces 5 parámetros. Nuevamente utilizamos como parámetro libre la masa dinámica del quark u e incluimos la masa del quark η' para realizar el ajuste de parámetros. Los resultados obtenidos se encuentran en la tabla 3.1. En el modelo NJL estándar la masa del quark s resultante fue de 611 MeV, mientras que en el modelo NJL+'t Hooft se obtuvo una masa de 651 MeV. La masa calculada para el mesón η fue de 354 MeV y para el η' de 957 MeV.

A partir del capítulo 4 se desarrollaron los temas principales de la presente tesis, la aplicación del modelo NJL para el estudio de las propiedades de quarks y mesones en el medio. En particular, en el capítulo 4 se estudió el comportamiento de la materia fuertemente interactuante a densidad finita

combinando el modelo NJL+'t Hooft y el modelo Quark Meson Coupling (QMC). El modelo QMC nos da los potenciales de campo medio a los cuales se acoplan los quarks ligeros. Con ello podemos conocer la masa corriente del quark up con la densidad y así determinar la masa dinámica en el medio nuclear. En este punto encontramos que la masa constituyente del quark up disminuye casi linealmente conforme aumenta la densidad bariónica. En cuanto al comportamiento del condensado quiral se encontró que este aumenta a bajas densidades pero comienza a disminuir cuando la densidad bariónica ρ_B sobrepasa la densidad nuclear normal, ρ_0 . Este resultado nos permite concluir que existe una restauración parcial de la simetría quiral en materia nuclear. En cuanto al quark strange se observó que su masa dinámica presenta cambios considerables a altas densidades. A bajas densidades, la masa constituyente del quark s se mantiene casi constante y a partir de $\rho_B > \rho_0$ esta comienza a disminuir. Este sutil comportamiento no produjo cambios notorios en el condensado quiral del quark s . Una de las deficiencias del modelo es que la masa del pión decrece muy rápido con la densidad. Tal comportamiento no es realista. No obstante, para el kaón encontramos una disminución en su masa conforme aumenta la densidad bariónica. Por ejemplo, para $\rho_B = \rho_0$ la masa disminuye un 20 % respecto a su masa en el vacío. La masa del mesón η también disminuye al aumentar la densidad pero se hace cero para densidades de aproximadamente $\rho_B/\rho_0 \sim 0.75$, lo cual desafortunadamente no es realista. El comportamiento de la masa del mesón η' es distinto ya que esta comienza a aumentar ligeramente pero cuando alcanza densidades $\rho_B/\rho_0 \sim 0.75$ comienza a disminuir. Finalmente, en el capítulo 5 se hizo una primera revisión acerca del comportamiento de las propiedades de los quarks a temperatura T y potencial químico μ finitos mediante el formalismo de Matsubara. En este marco, se estudió el cambio en la masa constituyente de los quarks tanto en el límite quiral como a valores finitos de la masa corriente de los quarks. A una temperatura de $T = 30$ MeV y masa corriente finita, la masa constituyente es constante para valores de $\mu < 0.35$ GeV, posteriormente cae rápidamente hasta acercarse al valor de su masa corriente, es decir $M_u \rightarrow m_u$. En cambio, en el límite quiral, la masa dinámica del quark u cae a cero cuando $\mu = 0.55$ GeV, que sería considerado como el valor crítico en donde ocurre la transición de fase quiral. Estos resultados, a pesar de haberse estudiado un solo valor de T , muestran que a temperatura finita ocurre una restauración total de la simetría quiral.

En un futuro se pretende seguir explorando las propiedades de QCD a temperatura y potencial químico finitos mediante el modelo NJL, continuando con las modificaciones de las masas de los mesones a temperatura y potencial químico finitos, temperatura crítica y el diagrama de fases de QCD.

Apéndice A

Estructura Matemática

A.1. Matrices de Dirac

Estructura Matemática

En notación de Dirac, las matrices γ^μ son In Dirac notation, the four gamma matrices are

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

que cumplen con las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Se define la matrices γ^5 como el producto de las cuatro matrices

$$\gamma^5 := i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

y cumple con la relación de anticonmutación

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{A.5})$$

A.1.1. Identidades

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu = 4g^{\nu\lambda} \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda = g^{\mu\nu}\gamma^\lambda + g^{\nu\lambda}\gamma^\mu - g^{\mu\lambda}\gamma^\nu - i\epsilon^{\sigma\mu\nu\lambda}\gamma_\sigma\gamma^5 \quad (\text{A.11})$$

donde $\epsilon^{\sigma\mu\nu\lambda}$ es el tensor antisimétrico de Levi-Civita en 4 dimensiones.

A.2. Trazas de Dirac

$$\text{tr}[I] = 4 \quad (\text{A.12})$$

$$\text{tr}[A\not{p}] = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\text{tr}[\gamma^\mu] = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\text{tr}[\gamma^5\gamma^5] = 4 \quad (\text{A.15})$$

$$\text{tr}[\lambda_i\lambda_j] = 2\delta_{ij} \quad (\text{A.16})$$

1. La traza de un producto impar de matrices- γ es cero

$$\text{tr}[\gamma^\mu] = \text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda] = \text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\delta] = \dots = 0 \quad (\text{A.17})$$

2. La traza de un producto par de matrices- γ sigue la fórmula de recurrencia

$$\text{tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] = \sum_{k=2}^n (-1)^k g^{\mu_1 \mu_k} \text{tr} [\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] \quad (\text{A.18})$$

por ejemplo, para $n = 4$

$$\begin{aligned} \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma] &= g^{\mu\nu} \text{tr} [\gamma^\lambda \gamma^\sigma] - g^{\mu\lambda} \text{tr} [\gamma^\nu \gamma^\sigma] + g^{\mu\sigma} \text{tr} [\gamma^\nu \gamma^\lambda] \\ &= 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Propiedades de la Traza

$$\text{tr} (A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B \quad (\text{A.20})$$

$$\text{tr} (cA) = c \text{tr} A \quad (\text{A.21})$$

A.2.1. Traza del Propagador de Quark

El propagador se define como

$$S_q(p) = \frac{1}{\not{p} - M} \quad (\text{A.22})$$

Haciendo la traza sobre índices de color y reescribiendo queda

$$\text{Tr} S_q(p) = \text{Tr} \left(\frac{1}{\not{p} - M} \right) \quad (\text{A.23})$$

$$= N_c \text{tr} \left(\frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$= N_c \text{tr} \left(\frac{\not{p}}{p^2 - M^2} \right) + N_c \text{tr} \left(\frac{M}{p^2 - M^2} \right) \quad (\text{A.25})$$

tr denota la traza sobre índices de Dirac solamente. Usando las identidades mostradas en el Apéndice A.2, el primer término es cero, por tanto

$$\text{Tr} S_q(p) = N_c \text{tr} \left(\frac{M}{p^2 - M^2} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$= N_c M \text{tr} \left(\frac{I}{p^2 - M^2} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$= N_c M \left(\frac{4}{p^2 - M^2} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$= 4N_c M \frac{1}{p^2 - M^2} \quad (\text{A.29})$$

A.3. Matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\
 \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Apéndice B

Métodos de Integración y Regularización

B.1. Ecuación de Dirac y Propagador de Feynman

El propagador de Feynman es una Función de Green que satisface la ecuación de Dirac

$$(i\cancel{\partial} - M) \mathcal{S}(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (\text{B.1})$$

Aplicando la transformada de Fourier obtenemos el propagador en el espacio de momentos

$$\mathcal{S}(p) = \frac{1}{\cancel{p} - M} = \frac{\cancel{p} + M}{\cancel{p}^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (\text{B.2})$$

donde se ha añadido el término $i\epsilon$ al propagador por convergencia de la integral de camino. integral.

B.2. Parametrización de Feynman

El propagador de Feynman es

$$\frac{1}{A + i\epsilon} = -i \int_0^\infty dt e^{it(A+i\epsilon)} \quad (\text{B.3})$$

Para obtener la parametrización de Feynman vamos a considerar un producto de propagadores que será de la forma

$$\frac{1}{(A_1 + i\epsilon)(A_2 + i\epsilon)\dots(A_n + i\epsilon)} = (-i)^n \int_0^\infty dt_1 \dots dt_n e^{i \sum_j^n t_j (A_j + i\epsilon)} \quad (\text{B.4})$$

APÉNDICE B. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN Y REGULARIZACIÓN

El primer paso es introducir una identidad en el producto de propagadores. Para ello utilizaremos la identidad en términos de la función δ -Dirac

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \quad (\text{B.5})$$

que, si usamos la propiedad

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \quad (\text{B.6})$$

se puede reescribir como

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} \delta\left(1 - \frac{1}{\alpha} \sum_j^n t_j\right) \quad (\text{B.7})$$

por tanto, el producto de propagadores es

$$\frac{1}{(A_1 + i\epsilon) \dots (A_n + i\epsilon)} = (-i)^n \int_0^{\infty} \frac{dt_1 \dots dt_n dt_\alpha}{\alpha} e^{i \sum_j^n t_j (A_j + i\epsilon)} \quad (\text{B.8})$$

y haciendo el cambio de variable $t_i = \lambda x_i$ se sigue que

$$\frac{1}{(A_1 + i\epsilon) \dots (A_n + i\epsilon)} = (-i)^n \int_0^{\infty} dx_1 \dots dx_n d\lambda \lambda^{n-1} \delta\left(1 - \sum_j^n x_j\right) e^{i \sum_j^n \lambda x_j (A_j + i\epsilon)}$$

definiendo la función $\Gamma(n)$ como

$$B^n \Gamma(n) = \frac{(n-1)!}{B^n} = \int_0^{\infty} d\lambda^n e^{-\lambda B} \quad (\text{B.9})$$

podemos notar que la integral en λ se puede escribir como una función $\Gamma(n)$ tal que

$$\frac{1}{(A_1 + i\epsilon) \dots (A_n + i\epsilon)} = \int_0^{\infty} dx_1 \dots dx_n \frac{(n-1)!}{\left[\sum_j^n x_j (A_j + i\epsilon)\right]^n} \delta\left(1 - \sum_j^n x_j\right)$$

Finalmente, dado que $\sum_j^n x_j = 1$ entonces $x_j > 0$, esto significa que la región de integración está entre $0 < x_j < 1$, por lo tanto

$$\frac{1}{(A_1 + i\epsilon) \dots (A_n + i\epsilon)} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \frac{(n-1)!}{\left[\sum_j^n x_j (A_j + i\epsilon)\right]^n} \delta\left(1 - \sum_j^n x_j\right)$$

La última ecuación corresponde a la parametrización de Feynman.

B.4. Regularización de Tiempo Propio

La regularización de tiempo propio (PTR) consiste en que, si tenemos expresiones de la forma $\frac{1}{X^{n+1}}$ hacemos el cambio

$$\frac{1}{X^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty d\tau \tau^n e^{-\tau X} \quad (\text{B.15})$$

Un ejemplo en el que se implementan estas ecuaciones es en el condensado quiral. En este tenemos un término de la forma $\frac{1}{X^{n+1}}$ con $n = 0$ que es

$$\frac{1}{p^2 + M_q^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(p^2 + M_q^2)} \quad (\text{B.16})$$

La condición para que la integral en τ exista es que la parte real del argumento de la exponencial sea positiva, $\text{Re}(x) > 0$. Si se presenta el caso en el que esto no sea cierto, necesitamos hacer un cambio en el signo de la exponencial tal que

$$\frac{1}{X^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^\infty d\tau \tau^n e^{\tau X} \quad (\text{B.17})$$

B.5. Función Integral Exponencial $Ei(x)$

La función Integral Exponencial $Ei(x)$ es un función especial definida como

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x dt \frac{e^t}{t} \quad (\text{B.18})$$

Esta función presenta un polo en $t = 0$, por lo que hay que interpretarla en términos del Valor Principal de Cauchy

$$Ei(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\alpha} dt \frac{e^t}{t} + \int_{\alpha}^x dt \frac{e^t}{t} \right]$$

Esta función nos será de mayor utilidad si la reescribimos a través de una transformación de paridad

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -t \\ x &\rightarrow -x \end{aligned}$$

obtenemos

$$\mathcal{E}_1(x) = -Ei(-x) = \int_x^\infty dt \frac{e^{-t}}{t} \quad (\text{B.19})$$

APÉNDICE B. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN Y REGULARIZACIÓN

Si hacemos el cambio de variable $t \rightarrow at$ queda que

$$- Ei(-ax) = \int_{ax}^{\infty} dt \frac{e^{-at}}{t} \quad (\text{B.20})$$

Válido para $a > 0$.

Algunas integrales indefinidas que nos serán de utilidad son

$$\int dt \frac{e^{at}}{t} = Ei(at) \quad (\text{B.21})$$

$$\int dt \frac{e^{at}}{t^2} = -\frac{e^{at}}{t} + aEi(at) \quad (\text{B.22})$$

Apéndice C

Desarrollo Matemático

C.1. Cálculo para el Diagrama de Burbuja

El diagrama de burbuja para tres sabores de quark está definido como

$$\Pi_m(k^2) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\gamma_5 T^i iS_l(p) i\gamma_5 T^j iS_s(p+k)] \quad (\text{C.1})$$

Donde l denota el sabor de quark ligero y s al extraño. La traza es sobre índices de color, sabor y de Dirac. La traza de color nos dará un factor de N_c , y en la base de sabor los elementos de matriz T_i cumplen con la propiedad $\text{Tr}(T_i T_j) = 2\delta_{ij}$

$$\Pi_m(k^2) = -2iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_5 S_l(p) \gamma_5 S_s(p+k)] \quad (\text{C.2})$$

Los propagadores son

$$S_l(p) = \frac{\not{p} + M_l}{p^2 - M_l^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.3})$$

$$S_s(p) = \frac{\not{p} + \not{k} + M_s}{(p+k)^2 - M_s^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.4})$$

sustituyendo

$$\text{tr} [\gamma_5 S_l(p) \gamma_5 S_s(p+k)] = \frac{\text{tr} [\gamma_5 (\not{p} + M_l) \gamma_5 (\not{p} + \not{k} + M_s)]}{[p^2 - M_l^2] [(p+k)^2 - M_s^2]} \quad (\text{C.5})$$

calculamos la traza de Dirac

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[\gamma_5(\not{p} + M_l)\gamma_5(\not{p} + \not{k} + M_s)] &= \text{tr}[(-\not{p} + M_l)(\not{p} + \not{k} + M_s)] \\
 &= \text{tr}[(-\not{p})(\not{p} + \not{k}) + M_l M_s] \\
 &= \text{tr}[-\not{p}\not{p} - \not{p}\not{k} + M_l M_s] \\
 &= -4p^2 - 4p \cdot k + 4M_l M_s \\
 &= -4[p^2 + p \cdot k - M_l M_s] \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

con esto (C.2) queda

$$\Pi_m(k^2) = 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{2(p^2 + p \cdot k - M_l M_s)}{[p^2 - M_l^2][(p+k)^2 - M_s^2]} \tag{C.7}$$

reescribimos el numerador como sigue

$$\begin{aligned}
 2(p^2 + p \cdot k - M_l M_s) &= 2p^2 + 2p \cdot k - 2M_l M_s \\
 &= (p^2 - M_l^2) + [(p+k)^2 - M_s^2] + (M_l - M_s)^2 - k^2 \\
 &= \Delta_l(p) + \Delta_s(p_+) + (M_l - M_s)^2 - k^2 \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

En la última línea denotamos $\Delta(p) = p^2 - M^2$ y $p_+ = p + k$. Ahora si dividimos entre el denominador del diagrama de burbuja

$$\frac{2(p^2 + p \cdot k - M_l M_s)}{\Delta_l(p)\Delta_s(p_+)} = \frac{1}{\Delta_l(p)} + \frac{1}{\Delta_s(p_+)} + \frac{(M_l - M_s)^2 - k^2}{\Delta_l(p)\Delta_s(p_+)} \tag{C.9}$$

Sustituyendo en (C.7) obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}
 \Pi_m(k^2) &= 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_l(p)} + 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_s(p_+)} \\
 &\quad + 4iN_c [(M_l - M_s)^2 - k^2] \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_l(p)\Delta_s(p_+)} \tag{C.10}
 \end{aligned}$$

o bien

$$\Pi_m(k^2) = 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\Delta_l(p)} + \frac{1}{\Delta_s(p_+)} \right] + [k^2 - (M_l - M_s)^2] I_{ls}(k^2) \tag{C.11}$$

donde hemos definido la integral

$$I_{ls}(k^2) = -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_l(p)\Delta_s(p+k)} \tag{C.12}$$

APÉNDICE C. DESARROLLO MATEMÁTICO

Ahora debemos evaluar las tres integrales que aparecen en (C.11). Para ello utilizaremos las técnicas vista en el Apéndice B. Notemos que la primera integral es la misma que calculamos para el condensado quiral, (??), por tanto

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_l(p)} = -\frac{i}{16\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^2} e^{-\tau M_l^2} \quad (\text{C.13})$$

Como integral no converge en $\tau = 0$ introducimos el cut-off Λ_{UV}^2 para regular la divergencia. Ahora, como el segundo término de (C.11) tiene la misma forma matemática se obtiene una expresión similar

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_s(p_+)} = -\frac{i}{16\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^2} e^{-\tau M_s^2} \quad (\text{C.14})$$

Ahora, para el tercer término de (C.11) debemos evaluar (C.12). Primero aplicaremos la parametrización de Feynman de tal manera que

$$\frac{1}{\Delta_l(p)\Delta_s(p_+)} = \int_0^1 \frac{dx}{\{x(p^2 - M_l^2) + (1-x)[(p+k)^2 - M_s^2]\}^2} \quad (\text{C.15})$$

Desarrollando el denominador se obtiene

$$\begin{aligned} D &\equiv x(p^2 - M_l^2) + (1-x)[(p+k)^2 - M_s^2] \\ &= p^2 + 2(1-x)p \cdot k + (1-x)k^2 + (x-1)M_s^2 - xM_l^2 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Reescribimos haciendo el cambio $p \rightarrow p - (1-x)k$

$$\begin{aligned} D &= p^2 - 2(1-x)p \cdot k + (1-x)^2k^2 + 2(1-x)[p \cdot k - (1-x)k^2] \\ &\quad + (1-x)k^2 + (x-1)M_s^2 - xM_l^2 \\ &= p^2 + (1-x)[1 - (1-x)]k^2 + (x-1)M_s^2 - xM_l^2 \\ &= p^2 + x(1-x)k^2 + (x-1)M_s^2 - xM_l^2 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

sustituyendo en (C.15) queda

$$\frac{1}{\Delta_l(p)\Delta_s(p_+)} = \int_0^1 \frac{dx}{[p^2 + x(1-x)k^2 + (x-1)M_s^2 - xM_l^2]^2} \quad (\text{C.18})$$

integrando en el 4-momento y aplicando la rotación de Wick

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_l(p)\Delta_s(p_+)} &= \int \frac{id^4p_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{[-p_E^2 - x(1-x)k_E^2 + (x-1)M_s^2 - xM_l^2]^2} \\ &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{[p^2 + x(1-x)k^2 + (1-x)M_s^2 + xM_l^2]^2} \end{aligned}$$

En la última línea quitamos el subíndice E por simplicidad. Con esto podemos reescribir la integral $I_{ls}(k^2)$

$$I_{ij}(k^2) = 4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{[p^2 + x(1-x)k^2 + (1-x)M_s^2 + xM_l^2]^2} \quad (\text{C.19})$$

Para evaluar la integral en el 4-momento vamos a reescribir el denominador del integrando. Cambiaremos los subíndices $l \rightarrow i$, $s \rightarrow j$. Haciendo el cambio $k^2 \rightarrow -k^2$ y denotando

$$\Delta_{ij} = -x(1-x)k^2 + (1-x)M_j^2 + xM_i^2 \quad (\text{C.20})$$

el diagrama de burbuja queda

$$\Pi_m(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^2} \left(e^{-\tau M_i^2} + e^{-\tau M_j^2} \right) + [k^2 - (M_i - M_j)^2] I_{ij}(k^2) \quad (\text{C.21})$$

donde

$$I_{ij}(k^2) = 4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{(p^2 + \Delta_{ij})^2} \quad (\text{C.22})$$

Esta última integral también hay que regularla mediante la regularización de tiempo propio

$$\begin{aligned} I_{ij}(k^2) &= 4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{-\tau(p^2 + \Delta_{ij})} \\ &= 4N_c \int_0^1 dx \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{-\Delta_{ij}\tau} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-\tau p^2} \\ &= 4N_c \int_0^1 dx \int_0^{\infty} d\tau \tau e^{-\Delta_{ij}\tau} \left[\frac{(2\pi^2)}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\tau^2} \right] \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\Delta_{ij}\tau} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Por último, podemos reescribir el diagrama de burbuja de la ecuación (C.21) en términos del condensado quiral y la integral $I_{ij}(k^2)$ como

$$\Pi_m(k^2) = -\frac{\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle}{M_i} - \frac{\langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle}{M_j} + [k^2 - (M_i - M_j)^2] I_{ij}(k^2) \quad (\text{C.24})$$

Finalmente, definimos

$$\Pi_{\text{ps}}^{ij}(k^2) = -\frac{\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle}{2M_i} - \frac{\langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle}{2M_j} + \frac{1}{2} [k^2 - (M_i - M_j)^2] I_{ij}(k^2) \quad (\text{C.25})$$

tal que

$$\Pi_m(k^2) = 2\Pi_{\text{ps}}^{ij}(k^2) \quad (\text{C.26})$$

C.2. Evaluación de la integral $I_{ij}(k^2)$ mediante $\text{Ei}(x)$

Nos interesa la integral

$$I_{ij}(k^2) = 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{(p^2 + \Delta_{ij})^2} \quad (\text{C.27})$$

Para evaluar esta última integral hay que notar que el integrando es de la forma $\frac{1}{X^{n+1}}$, con $n = 1$. Esto quiere decir que podemos proceder a aplicar la regularización de tiempo propio. Antes de hacerlo hay que hacer un análisis del signo de X . Para el caso $X = p^2 + \Delta_{ij} > 0$ aplicamos la ecuación (B.15)

$$\begin{aligned} I_{ij}(k^2) &= 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^\infty d\tau \tau e^{-\tau(p^2 + \Delta_{ij})} \\ &= 4N_c \int_0^1 dx \int_0^\infty d\tau \tau e^{-\Delta_{ij}\tau} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-\tau p^2} \\ &= 4N_c \int_0^1 dx \int_0^\infty d\tau \tau e^{-\Delta_{ij}\tau} \left[\frac{(2\pi^2)}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\tau^2} \right] \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{\text{UV}}^2}^\infty d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\Delta_{ij}\tau} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Similarmente para el caso $X = p^2 + \Delta_{ij} < 0$ obtenemos

$$I_{ij}(k^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{\text{UV}}^2}^\infty d\tau \frac{1}{\tau} e^{\Delta_{ij}\tau} \quad (\text{C.29})$$

La integral $I_{ij}(k^2)$ se puede escribir como

$$I_{ij}(k^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} [\Theta(\Delta_{ij}\tau)e^{-\Delta_{ij}\tau} + \Theta(-\Delta_{ij}\tau)e^{\Delta_{ij}\tau}] \quad (\text{C.30})$$

donde $\Theta(\Delta_{ij}\tau)$ es la función escalón de Heaviside

$$\Theta(\Delta_{ij}\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta_{ij}\tau < 0 \\ 1 & \text{si } \Delta_{ij}\tau \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

Como nuestro principal objetivo es calcular las masas de los mesones a través de la BSE, necesitamos calcular el diagrama de burbuja (C.25). Esto se logra evaluando correctamente la integral (C.30) y el condensado quiral. Lo siguiente que haremos será reescribir esta expresión utilizando una función especial conocida como Integral Exponencial $Ei(x)$ mostrada en la sección (B.5).

Primero, reescribimos el condensado quiral $\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle$ utilizando la integral (B.22)

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} \frac{e^{-M_q^2\tau}}{\tau^2} &= \left[-\frac{e^{-M_q^2\tau}}{\tau} - M_q Ei(-M_q^2\tau) \right]_{\tau_{UV}^2}^{\infty} \\ &= -M_q Ei(-\infty) + \frac{e^{-M_q^2\tau_{UV}^2}}{\tau_{UV}^2} + M_q Ei(-M_q^2\tau_{UV}^2) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

la función Integral exponencial evaluada en $-\infty$ es cero, $Ei(-\infty) = 0$, por lo que el primer término se anula. Sustituyendo $\tau_{UV}^2 = \frac{1}{\Lambda_{UV}^2}$ queda que

$$\int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} \frac{e^{-M_q^2\tau}}{\tau^2} = \Lambda_{UV}^2 e^{-\frac{M_q^2}{\Lambda_{UV}^2}} + M_q^2 Ei\left(-\frac{M_q^2}{\Lambda_{UV}^2}\right) \quad (\text{C.33})$$

Por tanto, el condensado se escribe de la forma

$$\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle = -\frac{N_c M_q}{4\pi^2} \left[\Lambda_{UV}^2 e^{-\frac{M_q^2}{\Lambda_{UV}^2}} + M_q^2 Ei\left(-\frac{M_q^2}{\Lambda_{UV}^2}\right) \right] \quad (\text{C.34})$$

Ahora vamos a escribir la integral $I_{ij}(k^2)$ en términos de $Ei(x)$. Hay que tener cuidado ya que esta integral se debe calcular de diferente manera, dependiendo del signo de Δ_{ij} . Reescribimos Δ_{ij} como sigue

$$\begin{aligned}
 \Delta_{ij} &= k^2 \left[(x^2 - x) + \frac{(1-x)M_j^2}{k^2} + \frac{M_i^2}{k^2} \right] \\
 &= k^2 \left[(x^2 - x) + \frac{M_j^2}{k^2} - \frac{x(M_j^2 - M_i^2)}{k^2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right] \\
 &= k^2 \left[(x^2 - x) + \frac{M_j^2}{k^2} - \frac{x(M_j^2 - M_i^2)}{2k^2} - \frac{x(M_j^2 - M_i^2)}{2k^2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right] \\
 &= k^2 \left[(x^2 - x) + \frac{M_j^2}{k^2} - \frac{x(M_j^2 - M_i^2)}{2k^2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \left(1 + \frac{M_j^2 - M_i^2}{k^2} \right) \right] \\
 &= k^2 \left[x^2 + \frac{M_j^2}{k^2} - \frac{x}{2} \left(1 + \frac{M_j^2 - M_i^2}{k^2} \right) - \frac{x}{2} \left(1 + \frac{M_j^2 - M_i^2}{k^2} \right) \right] \\
 &= k^2 \left[x^2 + \frac{M_j^2}{k^2} - 2x \left(1 + \frac{M_j^2 - M_i^2}{k^2} \right) \right] \tag{C.35}
 \end{aligned}$$

definiendo

$$A_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M_j^2 - M_i^2}{k^2} \right) \tag{C.36}$$

sustituyendo y completando el binomio al cuadrado

$$\begin{aligned}
 \Delta_{ij} &= k^2 \left(x^2 + \frac{M_j^2}{k^2} - 2xA_{ij} \right) \\
 &= k^2 \left[(x - A_{ij})^2 - A_{ij}^2 + \frac{M_j^2}{k^2} \right] \\
 &= \left[(x - A_{ij})^2 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{M_j^2 - M_i^2}{k^2} \right)^2 + \frac{M_j^2}{k^2} \right] \\
 &= \left[(x - A_{ij})^2 - \frac{1}{4} - \frac{(M_j^2 - M_i^2)^2}{4k^4} + \frac{M_i^2 + M_j^2}{k^2} \right] \tag{C.37}
 \end{aligned}$$

definiendo

$$B_{ij} = -\frac{1}{4} - \frac{(M_j^2 - M_i^2)^2}{4k^4} + \frac{M_i^2 + M_j^2}{k^2} \tag{C.38}$$

queda entonces

$$\Delta_{ij} = k^2 [(x - A_{ij})^2 + B_{ij}] \tag{C.39}$$

De esta última expresión podemos notar que el signo depende solamente de si B_{ij} es positivo o negativo. Eso es debido a que k^2 y $(x - A_{ij})^2$ siempre son positivos. Por lo tanto, si $\Delta_{ij} > 0$ entonces $B_{ij} > 0$ y caso contrario.

Comenzando con el caso $B_{ij} > 0$, como $\Delta_{ij} > 0$ la integral $I_{ij}(k^2)$ se reduce a

$$I_{ij}(k^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\Delta_{ij}\tau} \quad (\text{C.40})$$

y usando (B.20) queda que

$$I_{ij}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}} \right) \quad (\text{C.41})$$

Ahora resta analizar el caso $\Delta_{ij} < 0$. Primero de la ecuación (C.30), utilizamos la identidad $\Theta(-x) = 1 - \Theta(x)$

$$\begin{aligned} I_{ij}(k^2) &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} \{ [1 - \Theta(-\Delta_{ij}\tau)] \Theta(\Delta_{ij}\tau) e^{-\Delta_{ij}\tau} + \Theta(-\Delta_{ij}\tau) e^{\Delta_{ij}\tau} \} \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} \{ e^{-\Delta_{ij}\tau} + \Theta(-\Delta_{ij}\tau) [e^{\Delta_{ij}\tau} - e^{-\Delta_{ij}\tau}] \} \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

el término entre corchetes lo escribimos como un seno hiperbólico, $2 \sinh x = e^x - e^{-x}$

$$\begin{aligned} I_{ij}(k^2) &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} \{ e^{-\Delta_{ij}\tau} + \Theta(-\Delta_{ij}\tau) 2 \sinh \Delta_{ij}\tau \} \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\Delta_{ij}\tau}}{\tau} + \frac{2N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \Theta(-\Delta_{ij}\tau) \frac{\sinh \Delta_{ij}\tau}{\tau} \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

la función de Heaviside es

$$\Theta(-\Delta_{ij}\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta_{ij}\tau > 0 \\ 1 & \text{si } \Delta_{ij}\tau \leq 0 \end{cases} \quad (\text{C.44})$$

Para la primera integral utilizamos la ecuación (B.20) y para el segundo término, como nos interesa el caso $\Delta_{ij} < 0$ queda

$$I_{ij}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) + \frac{2N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{\sinh \Delta_{ij}\tau}{\tau} \quad (\text{C.45})$$

APÉNDICE C. DESARROLLO MATEMÁTICO

Notemos que la primera integral es válida solamente para $\Delta_{ij} > 0$, más adelante retomaremos este término ya que hay que analizarlo en función de la variable x . Primero trabajemos en el segundo término. Para hacer la integral en τ hacemos el cambio $\tau \rightarrow \frac{1}{\tau}$

$$I_{ij}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) + \frac{2N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda_{UV}^2} d\tau \frac{\sinh \frac{\Delta_{ij}}{\tau}}{\tau} \quad (\text{C.46})$$

e introduciendo la función especial $\operatorname{Shi}(x)$, conocida como Seno Hiperbólico Integral, cuya derivada es

$$\frac{d\operatorname{Shi}(x)}{dx} = \frac{\sinh x}{x} \quad (\text{C.47})$$

haciendo el cambio $x \rightarrow \frac{1}{x}$ se sigue que

$$\frac{d\operatorname{Shi}(\frac{1}{x})}{dx} = -\frac{\sinh \frac{1}{x}}{x} \quad (\text{C.48})$$

la integral será

$$\int_0^{\Lambda_{UV}^2} d\tau \frac{\sinh \frac{\Delta_{ij}}{\tau}}{\tau} = -\operatorname{Shi} \left(\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \quad (\text{C.49})$$

Así, la integral $I_{ij}(k^2)$ queda

$$I_{ij}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) - \frac{2N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \operatorname{Shi} \left(\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right)$$

El último término lo podemos reescribir. Para ello utilizamos la identidad

$$\operatorname{Shi}(x) = -i\operatorname{Si}(ix) \quad (\text{C.50})$$

donde $\operatorname{Si}(x)$ es la función especial llamada Seno Integral definida como

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x dt \frac{\sin t}{t} \quad (\text{C.51})$$

otra definición es

$$\operatorname{si}(x) = -\int_x^\infty dt \frac{\sin t}{t} \quad (\text{C.52})$$

al restar ambas ecuaciones obtenemos una integral $t \in [0, \infty]$

$$\operatorname{Si}(x) - \operatorname{si}(x) = \int_0^\infty dt \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.53})$$

de aquí se sigue que

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} + \text{si}(x) \quad (\text{C.54})$$

sustituyendo en (C.50) obtenemos

$$\text{Shi}(x) = -\frac{i\pi}{2} - i\text{si}(ix) \quad (\text{C.55})$$

Ahora, por definición, la función $\text{si}(x)$ es la antiderivada de la función $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$, entonces, por construcción tenemos que

$$\int_{-ia}^{ia} dx \frac{\sin x}{x} = \text{si}(ia) - \text{si}(-ia) = 2ia \quad (\text{C.56})$$

hemos usado que la función $\text{si}(x)$ es una función impar. Ahora, haciendo el cambio de variable $x = ae^{i\theta}$ tenemos que

$$\int_{-ia}^{ia} dx \frac{\sin x}{x} \longrightarrow i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin(ae^{i\theta}) = 2\text{si}(ia) \quad (\text{C.57})$$

y usando la fórmula de Euler podemos escribir

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{iae^{i\theta}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(ae^{i\theta}) + 2\text{si}(ia) \quad (\text{C.58})$$

la primera integral es

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos(ae^{i\theta}) = \pi \quad (\text{C.59})$$

así

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{iae^{i\theta}} = \pi + 2\text{si}(ia) \quad (\text{C.60})$$

luego, de (C.55) podemos reescribir la función $\text{si}(ia)$ como

$$2\text{si}(ia) = 2i\text{Shi}(a) - \pi \quad (\text{C.61})$$

sustituyendo se sigue que

$$i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{iae^{i\theta}} = -2\text{Shi}(a) \quad (\text{C.62})$$

En nuestro caso tenemos $a = \frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2}$. Esta integral la podemos sustituir en la última expresión que obtuvimos para $I_{ij}(k^2)$, ecuación (C.2), obteniendo

$$I_{ij}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[\text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) + i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{i\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} e^{i\theta}} \right] \quad (\text{C.63})$$

Ahora hay que estudiar la integral sobre x . Procederemos analizando el comportamiento de la función $\text{Ei}(-\Delta_{ij}/\Lambda_{UV}^2)$. Primero regresemos a la definición de la función Integral Exponencial

$$\text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) = - \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\Delta_{ij}\tau}}{\tau} \quad (\text{C.64})$$

válido para $\Delta_{ij} > 0$. Si hacemos el cambio $\xi \rightarrow \tau\Delta_{ij}$ queda

$$\text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) = - \int_{\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2}}^{\infty} d\xi \frac{e^{-\xi}}{\xi} \quad (\text{C.65})$$

la función $f(\xi) = \frac{e^{-\xi}}{\xi}$ presenta una singularidad en $\xi = 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} |f(\xi)| = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{e^{-\xi}}{\xi} \right| = \frac{1}{0} = \infty \quad (\text{C.66})$$

y como $\xi = \tau\Delta_{ij}$ entonces ξ también es una función de x

$$\xi(x) = \tau\Delta_{ij}(x) = 0 \quad (\text{C.67})$$

por lo tanto, la función $\text{Ei}(-\Delta_{ij}/\Lambda_{UV}^2)$ tendrá singularidades en los puntos donde $\Delta_{ij}(x) = 0$. Esto es consistente ya que $\text{Ei}(0) = -\infty$. Resolviendo la ecuación cuadrática

$$\Delta_{ij}(x) = k^2 [(x - A_{ij})^2 + B_{ij}] = 0 \quad (\text{C.68})$$

se obtiene

$$x \equiv \alpha_{ij}^{\pm} = A_{ij} \pm \sqrt{-B_{ij}} \quad (\text{C.69})$$

por lo tanto, α_{ij}^{\pm} son los puntos en donde $\text{Ei}(0) = -\infty$. Como α_{ij}^{\pm} están definidos entre los límites de integración, es decir, $0 < \alpha_{ij}^{\pm} < 1$, podemos dividir la integral en tres partes

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) &= \int_0^{\alpha_{ij}^-} dx \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) + \int_{\alpha_{ij}^-}^{\alpha_{ij}^+} dx \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \\ &+ \int_{\alpha_{ij}^+}^1 dx \text{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

Ahora analicemos más concretamente el comportamiento de $\Delta_{ij}(x)$. Ya vimos que esta función tiene dos ceros en $x \in [0, 1]$. Como es una función cuadrática, hay que determinar si tiene un máximo o un mínimo. Minimizando

$$\frac{d\Delta_{ij}}{dx} = 2k^2(x - A_{ij}) = 0 \quad (\text{C.71})$$

$$\frac{d^2\Delta_{ij}}{dx^2} = 2k^2 \quad (\text{C.72})$$

Como $k^2 > 0 \Rightarrow \frac{d^2\Delta_{ij}}{dx^2} > 0$ entonces $x = A_{ij}$ es un mínimo y está definido en el intervalo $\alpha^- < A_{ij} < \alpha^+$. Por ello, en el intervalo $[\alpha^-, \alpha^+]$ la función $\Delta_{ij}(x) < 0$. Por tanto, la integral queda

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) &= \int_0^{\alpha_{ij}^-} dx \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) + \int_{\alpha_{ij}^-}^{\alpha_{ij}^+} dx \operatorname{Ei} \left(\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \\ &+ \int_{\alpha_{ij}^+}^1 dx \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.73})$$

Con esto, podemos escribir la ecuación (C.63) como

$$I_{ij}(k^2) = I_{ij}^{(1)}(k^2) + I_{ij}^{(2)}(k^2) + I_{ij}^{(3)}(k^2) \quad (\text{C.74})$$

donde

$$I_{ij}^{(1)}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^{\alpha_{ij}^-} dx \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \quad (\text{C.75})$$

$$I_{ij}^{(2)}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_{\alpha_{ij}^-}^{\alpha_{ij}^+} dx \left[\operatorname{Ei} \left(\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) + i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{i \frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} e^{i\theta}} \right] \quad (\text{C.76})$$

$$I_{ij}^{(3)}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_{\alpha_{ij}^+}^1 dx \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \quad (\text{C.77})$$

C.3. Masas de Mesones Pseudoescalares

C.3.1. Bosones de Nambu-Goldstone

Para determinar las masas de los mesones hay que evaluar el polo de la matriz-T

$$1 - 2G_\pi \Pi_m(k^2 = m_m^2) = 0 \quad (\text{C.78})$$

A partir de esta ecuación podemos llegar a una expresión donde se muestre que, en el límite quiral $m_q = 0$, el pión y el kaón son bosones de Nambu-Goldstone. El diagrama de burbuja para el pión es

$$\Pi_\pi(k^2) = -\frac{2\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle}{M_u} + k^2 I_{uu}(k^2) \quad (\text{C.79})$$

utilizando la ecuación de gap el condensado quiral se puede escribir como

$$\langle\bar{\psi}_i\psi_i\rangle = -\frac{M_i - m_i}{4G_\pi} \quad (\text{C.80})$$

sustituyendo en el diagrama del burbuja, evaluando en $k^2 = m_\pi^2$

$$\Pi_\pi(m_\pi^2) = -\frac{M_u - m_u}{2G_\pi M_u} + m_\pi^2 I_{uu}(m_\pi^2) \quad (\text{C.81})$$

sustituyendo en (C.78) obtenemos

$$1 - 2G_\pi \Pi_\pi(m_\pi^2) = \frac{m_u}{M_u} - 2G_\pi I_{uu}(m_\pi^2) \quad (\text{C.82})$$

igualando a cero y resolviendo para m_π^2 se sigue que

$$m_\pi^2 = \frac{m_u}{M_u} \frac{1}{2G_\pi m_\pi^2 I_{uu}(m_\pi^2)} \quad (\text{C.83})$$

en el límite quiral, $m_u = 0$, la masa del pión es cero, $m_\pi = 0$. De manera similar para el kaón, el diagrama de burbuja correspondiente es

$$\Pi_K(k^2) = -\frac{\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle}{M_u} - \frac{\langle\bar{\psi}_s\psi_s\rangle}{M_s} + [k^2 - (M_s - M_u)^2] I_{us}(k^2) \quad (\text{C.84})$$

sustituyendo el condensado quiral (C.80)

$$\Pi_K(m_K^2) = -\frac{M_u - m_u}{4G_\pi M_u} - \frac{M_s - m_s}{4G_\pi M_s} + [m_K^2 - (M_s - M_u)^2] I_{us}(m_K^2) \quad (\text{C.85})$$

sustituyendo en (2.46)

$$1 - 2G_\pi \Pi_K(m_K^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_s}{M_s} \right) \frac{1}{4G_\pi I_{us}(m_K^2)} \quad (\text{C.86})$$

al igualar a cero y resolviendo para m_K^2 se sigue que

$$m_K^2 = (M_s - M_u)^2 + \left(\frac{m_u}{M_u} + \frac{m_s}{M_s} \right) \frac{1}{4G_\pi I_{us}(m_K^2)} \quad (\text{C.87})$$

En el límite quiral $m_u = m_s = 0$, que implica $M_u = M_s$, obtenemos que la masa del kaón también se anula.

C.3.2. Masas η y η'

Para el caso de los mesones η y η' , el propagador se puede escribir de forma matricial

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2) = 2\hat{\mathbf{K}} \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]^{-1} \quad (\text{C.88})$$

donde $\hat{\Pi}(k^2)$ y $\hat{\mathbf{K}}$ son las matrices 2×2

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} G + \frac{K}{3} (2\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle + \langle\bar{\psi}_s\psi_s\rangle) & -\frac{\sqrt{2}K}{6} (\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle - \langle\bar{\psi}_s\psi_s\rangle) \\ -\frac{\sqrt{2}K}{6} (\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle - \langle\bar{\psi}_s\psi_s\rangle) & G - \frac{K}{3} (4\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle + \langle\bar{\psi}_s\psi_s\rangle) \end{bmatrix} \quad (\text{C.89})$$

$$\hat{\Pi}(k^2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(2\Pi^{uu} + \Pi^{ss}) & \frac{2\sqrt{2}}{3}(\Pi^{uu} - \Pi^{ss}) \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}(\Pi^{uu} - \Pi^{ss}) & \frac{2}{3}(\Pi^{uu} + 2\Pi^{ss}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.90})$$

donde $\Pi^{ii}(k^2)$ ($i = u, s$), es el diagrama de burbuja para $i = j$.

La condición para determinar las masas de los mesones η y η' es la misma pero expresada de forma matricial

$$\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right] \Big|_{k^2=m^2} = 0 \quad (\text{C.91})$$

para calcular las masas de los mesones η y η' debemos diagonalizar el propagador a través de una transformación ortogonal. Denotando los elementos de matriz $\hat{\Pi}(k^2)$ como

$$\Pi_{00} = \frac{2}{3}(2\Pi^{uu} + \Pi^{ss}) \quad (\text{C.92})$$

$$\Pi_{08} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\Pi^{uu} - \Pi^{ss}) \quad (\text{C.93})$$

$$\Pi_{80} = \Pi_{08} \quad (\text{C.94})$$

$$\Pi_{88} = \frac{2}{3}(\Pi^{uu} + 2\Pi^{ss}) \quad (\text{C.95})$$

y los elementos de matriz de $\hat{\mathbf{K}}$

$$K_{00} = G + \frac{K}{3} (2\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle + \langle\bar{\psi}_s\psi_s\rangle) \quad (\text{C.96})$$

$$K_{08} = -\frac{\sqrt{2}K}{6} (\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle - \langle\bar{\psi}_s\psi_s\rangle) \quad (\text{C.97})$$

$$K_{80} = K_{08} \quad (\text{C.98})$$

$$K_{88} = G - \frac{K}{6} (4\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle - \langle\bar{\psi}_s\psi_s\rangle) \quad (\text{C.99})$$

así

$$1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 1 - 2(\Pi_{00}K_{00} + K_{80}\Pi_{80}) & -2(\Pi_{00}K_{08} + 2K_{88}\Pi_{08}) \\ -2(K_{00}\Pi_{80} + K_{80}\Pi_{88}) & 1 - 2(K_{08}\Pi_{80} + K_{88}\Pi_{88}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.100})$$

pero necesitamos el inverso de la ecuación anterior. El inverso de una matriz A se calcula mediante

$$\hat{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{(\text{Adj } \hat{\mathbf{A}})^T}{\det A} \quad (\text{C.101})$$

Implementando esto, primero calculamos el adjunto de $1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}}$ es

$$\text{Adj} \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right] = \begin{bmatrix} 1 - 2(K_{08}\Pi_{80} + K_{88}\Pi_{88}) & 2(\Pi_{00}K_{08} + 2K_{88}\Pi_{08}) \\ 2((K_{00}\Pi_{80} + K_{80}\Pi_{88})) & 1 - 2(\Pi_{00}K_{00} + K_{80}\Pi_{80}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.102})$$

y su matriz traspuesta es

$$\text{Adj}^T \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right] = \begin{bmatrix} 1 - 2(K_{08}\Pi_{80} + K_{88}\Pi_{88}) & 2(K_{00}\Pi_{80} + K_{80}\Pi_{88}) \\ 2((\Pi_{00}K_{08} + 2K_{88}\Pi_{08})) & 1 - 2(\Pi_{00}K_{00} + K_{80}\Pi_{80}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.103})$$

con esto, el inverso es

$$\left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]^{-1} = \frac{\text{Adj}^T \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]}{\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]} \quad (\text{C.104})$$

por lo tanto, la ecuación (C.88) queda

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2) = \frac{2\text{Adj}^T \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]}{\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]} \begin{bmatrix} K_{00} & K_{08} \\ K_{80} & K_{88} \end{bmatrix} \quad (\text{C.105})$$

al hacer el producto matricial obtenemos como elementos de matriz

$$A = 2K_{00}(1 - 2\Pi_{88}K_{88}) + (2K_{08})^2\Pi_{88} \quad (\text{C.106})$$

$$B = 2K_{08} + \Pi_{08}(2K_{00}2K_{88} - (2K_{08})^2) \quad (\text{C.107})$$

$$D = 2K_{88}(1 - 2\Pi_{00}K_{00}) + (2K_{08})^2\Pi_{00} \quad (\text{C.108})$$

de tal manera que $\hat{\Delta}_\eta(k^2)$ tiene la forma

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2) = \frac{1}{\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \quad (\text{C.109})$$

podemos reescribir los elementos de la matriz anterior en términos del determinante de $\hat{\mathbf{K}}$

$$\det \hat{\mathbf{K}} = K_{00}K_{88} - (K_{80})^2 \quad (\text{C.110})$$

así, los elementos de matriz quedan

$$A = 2K_{00} - 4\Pi_{88} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (\text{C.111})$$

$$B = 2K_{08} + 4\Pi_{08} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (\text{C.112})$$

$$D = 2K_{88} - 4\Pi_{00} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (\text{C.113})$$

redefiniendo

$$A' = \frac{1}{2}A = K_{00} - 2\Pi_{88} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (\text{C.114})$$

$$B' = \frac{1}{2}B = K_{08} + 2\Pi_{08} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (\text{C.115})$$

$$D' = \frac{1}{2}D = K_{88} - 2\Pi_{00} \det \hat{\mathbf{K}} \quad (\text{C.116})$$

el propagador queda

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2) = \frac{2}{\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]} \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \quad (\text{C.117})$$

su inverso

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2)^{-1} = \frac{(\text{Adj } \hat{\Delta}_\eta)^T}{\det \hat{\Delta}_\eta} = \frac{1}{\det \hat{\Delta}_\eta} \begin{bmatrix} D' & -B' \\ -B' & A' \end{bmatrix} \quad (\text{C.118})$$

donde

$$\det \hat{\Delta}_\eta = \frac{2}{\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]} (A'D' - B'^2) \quad (\text{C.119})$$

sustituyendo

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2)^{-1} = \frac{(\text{Adj } \hat{\Delta}_\eta)^T}{\det \hat{\Delta}_\eta} = \frac{\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]}{2(A'D' - B'^2)} \begin{bmatrix} D' & -B' \\ -B' & A' \end{bmatrix} \quad (\text{C.120})$$

se puede demostrar que

$$\frac{\det \left[1 - 2\hat{\Pi}(k^2)\hat{\mathbf{K}} \right]}{A'D' - B'^2} = \frac{1}{\det \hat{\mathbf{K}}} \quad (\text{C.121})$$

por lo tanto

$$\hat{\Delta}_\eta(k^2)^{-1} = \frac{(\text{Adj} \hat{\Delta}_\eta)^T}{\det \hat{\Delta}_\eta} = \frac{1}{2 \det \hat{\mathbf{K}}} \begin{bmatrix} D' & -B' \\ -B' & A' \end{bmatrix} \quad (\text{C.122})$$

Ahora necesitamos diagonalizar $\hat{\Delta}_\eta(k^2)^{-1}$ mediante la ecuación característica

$$\det(\hat{\Delta}_\eta^{-1} - \lambda) = 0 \quad (\text{C.123})$$

obtenemos

$$(D'A' + B'^2) - \lambda(D' - A') + \lambda^2 = 0 \quad (\text{C.124})$$

cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[D' + A' \pm \sqrt{(D' - A')^2 - 4B'^2} \right]$$

por lo tanto, la matriz diagonalizada es

$$\text{diag } \hat{\Delta}_\eta(k^2)^{-1} = \frac{1}{4 \det \hat{\mathbf{K}}} \begin{bmatrix} M_\eta(k^2)^{-1} & 0 \\ 0 & M_{\eta'}(k^2)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.125})$$

siendo los elementos de la diagonal

$$M_\eta(k^2)^{-1} = D' + A' + \sqrt{(D' - A')^2 - 4B'^2} \quad (\text{C.126})$$

$$M_{\eta'}(k^2)^{-1} = D' + A' - \sqrt{(D' - A')^2 - 4B'^2} \quad (\text{C.127})$$

Las ecuaciones (C.126) y (C.127) nos dan las masas on-shell ($k^2 = m^2$) de los mesones η y η' .

C.4. Cálculo Constante de Acoplamiento

C.4.1. Constante de Acoplamiento $g_{\pi qq}$ y g_{Kqq}

Retomando la ecuación (C.25), derivando respecto a k^2 , la constante de acoplamiento es

$$\begin{aligned} g_{mqq}^{-2}(k^2) &= \frac{\partial \Pi_{ps}^{ij}(k^2)}{\partial k^2} \\ &= [k^2 - (M_j - M_i)^2] \frac{\partial I_{ij}(k^2)}{\partial k^2} + I_{ij}(k^2) \end{aligned} \quad (\text{C.128})$$

La integral $I_{ij}(k^2)$ en la regularización de tiempo propio es (C.23)

$$I_{ij}(k^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\Delta_{ij}\tau} \quad (\text{C.129})$$

donde $\Delta_{ij} = -x(1-x)k^2 + (1-x)M_j^2 + xM_i^2$. Calculamos la derivada parcial, como solamente Δ_{ij} depende de k^2 , la derivada opera sobre la exponencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ij}(k^2)}{\partial k^2} &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial k^2} [e^{-\Delta_{ij}\tau}] \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} (-\tau) \frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial k^2} e^{-\Delta_{ij}\tau} \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} (-\tau)(x^2 - x) e^{-\Delta_{ij}\tau} \\ &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau (x^2 - x) e^{-\Delta_{ij}\tau} \end{aligned} \quad (\text{C.130})$$

Sustituyendo, la constante de acoplamiento queda

$$g_{mqq}^{-2}(k^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \{1 - \tau(x^2 - x) [k^2 - (M_i - M_j)^2]\} \frac{e^{-\Delta_{ij}\tau}}{\tau} \quad (\text{C.131})$$

C.4.2. Constante de Acoplamiento con $\text{Ei}(x)$

La constante de acoplamiento se define como

$$g_{mqq}^{-2}(k^2) = \frac{\partial \Pi_m(k^2)}{\partial k^2} \quad (\text{C.132})$$

APÉNDICE C. DESARROLLO MATEMÁTICO

donde $\Pi_m = 2\Pi_{ps}(k^2)$ es el diagrama de burbuja. Retomando la ecuación (C.25) y derivando respecto a k^2 , la constante de acoplamiento es

$$\begin{aligned} g_{mq}^{-2}(k^2) &= 2 \frac{\partial \Pi_{ps}^{ij}(k^2)}{\partial k^2} \\ &= [k^2 - (M_j - M_i)^2] \frac{\partial I_{ij}(k^2)}{\partial k^2} + I_{ij}(k^2) \end{aligned} \quad (\text{C.133})$$

recordando que

$$I_{ij}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \quad (\text{C.134})$$

calculamos la derivada parcial

$$\frac{\partial I_{ij}(k^2)}{\partial k^2} = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \frac{\partial}{\partial k^2} \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) \quad (\text{C.135})$$

la derivada de la función Integral Exponencial $\operatorname{Ei}(-x)$ es

$$\frac{\partial \operatorname{Ei}(-x)}{\partial x} = \frac{1}{x} e^{-x} \quad (\text{C.136})$$

si $\operatorname{Ei}[af(x)]$, usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial \operatorname{Ei}[af(x)]}{\partial x} = \frac{e^{af(x)}}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (\text{C.137})$$

en nuestro caso tendremos que

$$\frac{\partial \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right)}{\partial k^2} = \frac{e^{-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2}}}{\Delta_{ij}} \frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial k^2} \quad (\text{C.138})$$

por lo tanto

$$\frac{\partial I_{ij}(k^2)}{\partial k^2} = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \frac{e^{-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2}}}{\Delta_{ij}} \frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial k^2} \quad (\text{C.139})$$

sustituyendo en la constante de acoplamiento queda

$$g_{mq}^{-2}(k^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \operatorname{Ei} \left(-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2} \right) + [k^2 - (M_j - M_i)^2] \frac{e^{-\frac{\Delta_{ij}}{\Lambda_{UV}^2}}}{\Delta_{ij}} \frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial k^2} \right\} \quad (\text{C.140})$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial k^2} = m^2 & \left[\frac{(M_s^2 - M_u^2)^2}{k^5} - \frac{M_s^2 + M_u^2}{k^3} + \frac{2(M_s^2 - M_u^2) \left(\frac{1}{2} \left(-1 - \frac{Ms^2 - Mu^2}{k^2} \right) + x \right)}{k^3} \right] \\ & + 2k \left[-\frac{1}{4} - \frac{(M_s^2 - M_u^2)^2}{4k^4} + \frac{Ms^2 + Mu^2}{2k^2} + \left(\frac{1}{2} \left(-1 - \frac{M_s^2 - M_u^2}{k^2} \right) + x \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.141})$$

C.5. Constantes de Decaimiento

C.5.1. Constante de Decaimiento f_π

Para obtener la constante de decaimiento del pión debemos calcular

$$\begin{aligned} ik_\mu f_\pi \delta^{ij} &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_\mu \gamma_5 T_i iS \left(p + \frac{k}{2} \right) i g_{\pi \bar{q} q} \gamma_5 T_j iS \left(p - \frac{k}{2} \right) \right] \\ ik_\mu f_\pi &= -N_c g_{\pi \bar{q} q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 S \left(p + \frac{k}{2} \right) \gamma_5 S \left(p - \frac{k}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.142})$$

Los propagadores son

$$S \left(p + \frac{k}{2} \right) = \frac{\not{p} + \frac{\not{k}}{2} + M}{(p + \frac{k}{2})^2 - M^2} \quad (\text{C.143})$$

$$S \left(p - \frac{k}{2} \right) = \frac{\not{p} - \frac{\not{k}}{2} + M_u}{(p - \frac{k}{2})^2 - M^2} \quad (\text{C.144})$$

sustituyendo queda

$$ik_\mu f_\pi = -N_c g_{\pi \bar{q} q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 (\not{p} + \frac{\not{k}}{2} + M) \gamma_5 (\not{p} - \frac{\not{k}}{2} + M) \right]}{\left[(p + \frac{k}{2})^2 - M^2 \right] \left[(p - \frac{k}{2})^2 - M^2 \right]} \quad (\text{C.145})$$

Calculamos la traza

$$\begin{aligned}
 & \text{tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \left(\not{p} + \frac{\not{k}}{2} + M \right) \gamma_5 \left(\not{p} - \frac{\not{k}}{2} + M \right) \right] = \\
 & = \text{tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_5 \not{p} - \gamma_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_5 \frac{\not{k}}{2} + \gamma_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_5 M + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\not{k}}{2} \gamma_5 \not{p} - \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\not{k}}{2} \gamma_5 \frac{\not{k}}{2} \right. \\
 & \quad \left. + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\not{k}}{2} \gamma_5 M + \gamma_\mu \gamma_5 M \gamma_5 \not{p} - \gamma_\mu \gamma_5 M \gamma_5 \frac{\not{k}}{2} + \gamma_\mu \gamma_5 M \gamma_5 M \right] \\
 & = p^\lambda p^\sigma \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\sigma] - \frac{p^\lambda k^\sigma}{2} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\sigma] + M p^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] \\
 & \quad + \frac{k^\lambda p^\sigma}{2} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\sigma] - \frac{k^\lambda k^\sigma}{4} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\sigma] + \frac{M k^\lambda}{2} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] \\
 & \quad + M p^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\lambda] - \frac{M k^\lambda}{2} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\lambda] + M^2 \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5] \\
 & = M k^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] \\
 & = M (-4g_{\mu\lambda}) k^\lambda \\
 & = -4M k_\mu
 \end{aligned} \tag{C.146}$$

Sustituyendo

$$i k_\mu f_\pi = 4N_c g_{\pi\bar{q}q} M k_\mu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p + \frac{k}{2})^2 - M^2][(p - \frac{k}{2})^2 - M^2]} \tag{C.147}$$

La integral es

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p + \frac{k}{2})^2 - M^2][(p - \frac{k}{2})^2 - M^2]} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^\infty d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau\Delta_{uu}} \tag{C.148}$$

Sustituyendo obtenemos la constante de decaimiento del pión

$$f_\pi = \frac{N_c}{4\pi^2} g_{\pi\bar{q}q} M \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^\infty d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau\Delta_{uu}} \tag{C.149}$$

y como

$$I_{uu}(k^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^\infty d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau\Delta_{uu}} \tag{C.150}$$

queda que

$$f_\pi = M g_{\pi\bar{q}q} I_{uu}(k^2) \tag{C.151}$$

donde $M = M_u$ y $g_{\pi\bar{q}q}$ viene dada por (C.131) para $i = j$.

C.5.2. Constante de Decaimiento del f_K

$$\begin{aligned}
 ik_\mu f_K \delta^{ij} &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_\mu \gamma_5 T_i i S_l \left(p + \frac{k}{2} \right) i g_{k\bar{q}q} \gamma_5 T_j i S_s \left(p - \frac{k}{2} \right) \right] \\
 &= -N_c g_{K\bar{q}q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \left(\not{p} + \frac{\not{k}}{2} + M_l \right) \gamma_5 \left(\not{p} - \frac{\not{k}}{2} + M_s \right) \right]}{\left[\left(p + \frac{k}{2} \right)^2 - M_l^2 \right] \left[\left(p - \frac{k}{2} \right)^2 - M_s^2 \right]}
 \end{aligned}$$

Calculamos la traza de Dirac

$$\begin{aligned}
 &\text{tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \left(\not{p} + \frac{\not{k}}{2} + M \right) \gamma_5 \left(\not{p} - \frac{\not{k}}{2} + M \right) \right] = \\
 &= \text{tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_5 \not{p} - \gamma_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_5 \frac{k}{2} + \gamma_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_5 M_s + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{k}{2} \gamma_5 \not{p} - \gamma_\mu \gamma_5 \frac{k}{2} \gamma_5 \frac{k}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{k}{2} \gamma_5 M_s + \gamma_\mu \gamma_5 M_l \gamma_5 \not{p} - \gamma_\mu \gamma_5 M_l \gamma_5 \frac{k}{2} + \gamma_\mu \gamma_5 M_l \gamma_5 M_s \right] \\
 &= p^\lambda p^\sigma \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\sigma] - \frac{p^\lambda k^\sigma}{2} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\sigma] + M_s p^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] \\
 &\quad + \frac{k^\lambda p^\sigma}{2} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\sigma] - \frac{k^\lambda k^\sigma}{4} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\sigma] + \frac{M_s k^\lambda}{2} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] \\
 &\quad + M_l p^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\lambda] - \frac{M_l k^\lambda}{2} \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\lambda] + M_l M_s \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5] \\
 &= M_s p^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] + \frac{1}{2} M_s k^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] + M_l p^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\lambda] \\
 &\quad - \frac{1}{2} M_s k^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5 \gamma_\lambda] \\
 &= M_s p^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] + \frac{1}{2} M_s k^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] - M_l p^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] \\
 &\quad + \frac{1}{2} M_s k^\lambda \text{tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_5] \\
 &= (M_s - M_l)(-4g_{\mu\lambda})p^\lambda + \frac{1}{2}(M_s + M_l)(-4g_{\mu\lambda})k^\lambda \\
 &= -4 \left[(M_s - M_l) p_\mu + \frac{1}{2} (M_s + M_l) k_\mu \right]
 \end{aligned} \tag{C.152}$$

Sustituyendo queda

$$ik_\mu f_K = 4N_c g_{K\bar{q}q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\left[(M_s - M_l) p_\mu + \frac{1}{2} (M_s + M_l) k_\mu \right]}{\left[\left(p + \frac{k}{2} \right)^2 - M_l^2 \right] \left[\left(p - \frac{k}{2} \right)^2 - M_s^2 \right]} \tag{C.153}$$

Haciendo la contracción con k_ν

$$\begin{aligned} i f_K g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu &= 4N_c g_{K\bar{q}q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{[(M_s - M_l) g^{\mu\nu} p_\mu k_\nu + \frac{1}{2} (M_s + M_l) g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu]}{[(p + \frac{k}{2})^2 - M_l^2] [(p - \frac{k}{2})^2 - M_s^2]} \\ i f_K k^2 &= 4N_c g_{K\bar{q}q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{[(M_s - M_l) p \cdot k + \frac{1}{2} (M_s + M_l) k^2]}{[(p + \frac{k}{2})^2 - M_l^2] [(p - \frac{k}{2})^2 - M_s^2]} \end{aligned} \quad (\text{C.154})$$

Separando en dos integrales

$$\begin{aligned} i f_K k^2 &= 4N_c g_{K\bar{q}q} (M_s - M_l) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot k}{[(p + \frac{k}{2})^2 - M_l^2] [(p - \frac{k}{2})^2 - M_s^2]} \\ &\quad + 2N_c g_{K\bar{q}q} (M_s + M_l) k^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p + \frac{k}{2})^2 - M_l^2] [(p - \frac{k}{2})^2 - M_s^2]} \end{aligned} \quad (\text{C.155})$$

Para la primera integral reescribimos el integrando como

$$\begin{aligned} \frac{2p \cdot k}{[(p + \frac{k}{2})^2 - M_l^2] [(p - \frac{k}{2})^2 - M_s^2]} &= \frac{1}{(p - \frac{k}{2})^2 - M_s^2} - \frac{1}{(p + \frac{k}{2})^2 - M_l^2} \\ &\quad + \frac{M_l^2 - M_s^2}{[(p + \frac{k}{2})^2 - M_l^2] [(p - \frac{k}{2})^2 - M_s^2]} \end{aligned} \quad (\text{C.156})$$

Al integrar en el 4-momento podemos hacer el cambio $p \rightarrow p + \frac{k}{2}$ sin perder generalidad. Con esto obtendremos integrales conocidas

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_l(p)} &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^2} e^{-\tau M_l^2} \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_l(p) \Delta_s(p_+)} &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau \Delta_{ls}} \end{aligned} \quad (\text{C.157})$$

Sustituyendo y haciendo el cambio $k^2 \rightarrow -k^2$ en la ecuación (C.155), la constante de decaimiento es

$$\begin{aligned} f_K &= \frac{N_c g_{K\bar{q}q} (M_s - M_l)}{8\pi^2 k^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^2} (e^{-\tau M_s^2} - e^{-\tau M_l^2}) \\ &\quad + \frac{N_c g_{K\bar{q}q}}{8\pi^2} \left[(M_l + M_s) - \frac{(M_s - M_l)(M_l^2 - M_s^2)}{k^2} \right] \int_0^1 dx \int_{\tau_{UV}^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\tau \Delta_{ls}} \end{aligned} \quad (\text{C.158})$$

y reescribiendo en términos de los condensados quirales y la integral $I_{ls}(k^2)$ queda

$$f_K = \frac{g_{K\bar{q}q}}{2} \frac{(M_s - M_l)}{k^2} \left[\frac{\langle \bar{\psi}_l \psi_l \rangle}{M_l} - \frac{\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle}{M_s} \right] + \frac{g_{K\bar{q}q}}{2} \left[(M_l + M_s) - \frac{(M_s - M_l)(M_l^2 - M_s^2)}{k^2} \right] I_{ls}(k^2) \quad (\text{C.159})$$

donde $g_{K\bar{q}q}$ viene dada por (C.131) para $i, j = l, s$. Notemos que si hacemos $M_l = M_s$ recuperamos la expresión para la constante de decaimiento del pión, como es de esperarse.

C.6. Diagrama de Burbuja en el Medio Nuclear

El diagrama de burbuja en el medio nuclear es

$$\Pi_m(k^{*2}) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\gamma_5 T^i S_i(p^*) i\gamma_5 T^j S_j(p^* + k^*)] \quad (\text{C.160})$$

Haciendo la traza de color y sabor

$$\Pi_m(k^{*2}) = -2iN_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_5 S_i(p^*) \gamma_5 S_j(p^* + k^*)] \quad (\text{C.161})$$

Los propagadores son

$$S_i(p^*) = \frac{\not{p}^* + M_i^*}{p^{*2} - M_i^{*2} + i\epsilon} \quad (\text{C.162})$$

$$S_j(p^*) = \frac{\not{p}^* + \not{k}^* + M_j^*}{(p^* + k^*)^2 - M_j^{*2} + i\epsilon} \quad (\text{C.163})$$

sustituyendo

$$\text{tr} [\gamma_5 S_i(p^*) \gamma_5 S_j(p^* + k^*)] = \frac{\text{tr} [\gamma_5 (\not{p}^* + M_i^*) \gamma_5 (\not{p}^* + \not{k}^* + M_j^*)]}{[p^{*2} - M_i^{*2}] [(p^* + k^*)^2 - M_j^{*2}]} \quad (\text{C.164})$$

calculamos la traza de Dirac

$$\text{tr} [\gamma_5 (\not{p}^* + M_i^*) \gamma_5 (\not{p}^* + \not{k}^* + M_j^*)] = -4 [p^{*2} + p^* \cdot k^* - M_i^* M_j^*] \quad (\text{C.165})$$

con esto (C.161) queda

$$\Pi_m(k^{*2}) = 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{2(p^{*2} + p^* \cdot k^* - M_i^* M_j^*)}{[p^{*2} - M_i^*] [(p^* + k^*)^2 - M_j^{*2}]} \quad (\text{C.166})$$

Reescribimos el numerador como sigue

$$2(p^{*2} + p^* \cdot k^* - M_i^* M_j^*) = \Delta_i(p^*) + \Delta_j(p_+^*) + (M_i^* - M_j^*)^2 - k^{*2} \quad (\text{C.167})$$

Hemos denotamos $\Delta(p^*) = p^* - M^*$ y $p_+^* = p^* + k^*$. Ahora si dividimos entre el denominador del diagrama de burbuja

$$\frac{2(p^{*2} + p^* \cdot k^* - M_i^* M_j^*)}{\Delta_i(p^*) \Delta_j(p_+^*)} = \frac{1}{\Delta_i(p^*)} + \frac{1}{\Delta_j(p_+^*)} + \frac{(M_i^* - M_j^*)^2 - k^{*2}}{\Delta_i(p^*) \Delta_j(p_+^*)} \quad (\text{C.168})$$

Sustituyendo en (C.166) obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \Pi_m(k^{*2}) = & 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_i(p^*)} + 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_j(p_+^*)} \\ & + 4iN_c [(M_i^* - M_j^*)^2 - k^{*2}] \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_i(p^*) \Delta_j(p_+^*)} \end{aligned} \quad (\text{C.169})$$

o bien

$$\Pi_m(k^{*2}) = 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\Delta_i(p^*)} + \frac{1}{\Delta_j(p_+^*)} \right] + [k^{*2} - (M_i^* - M_j^*)^2] I_{ij}(k^{*2}) \quad (\text{C.170})$$

donde

$$I_{ij}(k^{*2}) = -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_i(p^*) \Delta_j(p_+^*)} \quad (\text{C.171})$$

El condensado quiral en materia nuclear es

$$\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle^* = -4iN_c M_i^* \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_i(p^*)} \quad (\text{C.172})$$

por lo que podemos expresar (C.170) en términos del condensado quiral como

$$\Pi_m(k^{*2}) = -\frac{\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle^*}{M_i^*} - \frac{\langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle^*}{M_j^*} + [k^{*2} - (M_i^* - M_j^*)^2] I_{ij}(k^{*2}) \quad (\text{C.173})$$

C.7. Masa del Pión en el Medio Nuclear

De la condición on-shell para la masa del pión

$$1 - 2K_\pi^* \Pi_\pi^*(k^{*2} = m_\pi^{*2}) \quad (\text{C.174})$$

Sustituyendo el correspondiente diagrama de burbuja, (C.173) para $i = j = u$ se obtiene la expresión

$$1 + \frac{4K_\pi^* \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^*}{M_u^*} - 2K_\pi^* m_\pi^{*2} I_{uu}(m_\pi^{*2}) = 0 \quad (\text{C.175})$$

y de la ecuación de gap

$$M_u^* = m_u^* - 4G \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* + 2K \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* \quad (\text{C.176})$$

$$= m_u^* - 4 \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* \left(G_\pi - \frac{1}{2} K \langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle^* \right) \quad (\text{C.177})$$

$$= m_u^* - 4 \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* K_\pi^* \quad (\text{C.178})$$

De aquí

$$4 \langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle^* K_\pi^* = m_u^* - M_u^* \quad (\text{C.179})$$

Sustituyendo en (C.175) se sigue que

$$\frac{m_u^*}{M_u^*} - 2K_\pi^* m_\pi^{*2} I_{uu}(m_\pi^{*2}) \quad (\text{C.180})$$

La masa del pión es entonces

$$m_\pi^{*2} = \frac{m_u^*}{M_u^*} \frac{1}{2K_\pi^* I_{uu}(m_\pi^{*2})} \quad (\text{C.181})$$

Bibliografía

- ¹G. 't Hooft, «Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle», [Phys. Rev. D **14**, 3432-3450 \(1976\)](#).
- ²G. 't Hooft, «Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies», [Phys. Rev. Lett. **37**, 8-11 \(1976\)](#).
- ³P. Z. et al., *Particle Data Group*, Prog. Theor. Exp. Phys. 2020 (2020).
- ⁴L. Ametller y A. Bramon, «Constituent-quark masses and SU(3)-breaking in meson decays», [Annals of Physics **154**, 308-318 \(1984\)](#).
- ⁵J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer, «Microscopic Theory of Superconductivity», [Phys. Rev. **106**, 162-164 \(1957\)](#).
- ⁶J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer, «Theory of Superconductivity», [Phys. Rev. **108**, 1175-1204 \(1957\)](#).
- ⁷V. Borika Jovanovic, S. Ignjatovic, D. Borika y P. Jovanovic, «Constituent quark masses obtained from hadron masses with contributions of Fermi-Breit and Glozman-Riska hyperfine interactions», [Phys. Rev. D **82**, 117501 \(2010\)](#).
- ⁸G. Brown, V. Koch y M. Rho, «The pion at finite temperature and density», [Nuclear Physics A **535**, 701-714 \(1991\)](#).
- ⁹M. Buballa, «NJL-model analysis of dense quark matter», [Physics Reports **407**, 205-376 \(2005\)](#).
- ¹⁰J. J. Cobos-Martínez, K. Tsushima, G. Krein y A. W. Thomas, *Partial restoration of chiral symmetry in cold nuclear matter: the ρ -meson case*, 2017.
- ¹¹G. A. G. Contrera, «Estudio de propiedades hadrónicas y de materia de quarks en modelos efectivos de quarks con interacciones no locales», Tesis doct. (CNEA, Buenos Aires, 2011).
- ¹²Z.-F. Cui, J.-L. Zhang y H.-S. Zong, «Proper time regularization and the QCD chiral phase transition», [Scientific Reports **7**, 45937 \(2017\)](#).

-
- ¹³A. Deur, S. J. Brodsky y G. F. de Teramond, «The QCD Running Coupling», *Nucl. Phys.* **90**, 1 (2016).
- ¹⁴H. Dosch y S. Narison, «Direct extraction of the chiral quark condensate and bounds on the light quark masses», *Physics Letters B* **417**, 173-176 (1998).
- ¹⁵E. Friedman, M. Bauer, J. Breitschopf, H. Clement, H. Denz, E. Doroshkevich, A. Erhardt, G. J. Hofman, R. Meier, G. J. Wagner y G. Yaari, «In-Medium Isovector πN Amplitude from Low-Energy Pion Scattering», *Phys. Rev. Lett.* **93**, 122302 (2004).
- ¹⁶M. Gell-Mann, R. J. Oakes y B. Renner, «Behavior of Current Divergences under $SU_3 \times SU_3$ », *Phys. Rev.* **175**, 2195-2199 (1968).
- ¹⁷L. Giusti, F. Rapuano, M. Talevi y A. Vladikas, «The QCD chiral condensate from the lattice», *Nuclear Physics B* **538**, 249-277 (1999).
- ¹⁸M. L. Goldberger y S. B. Treiman, «Decay of the Pi Meson», *Phys. Rev.* **110**, 1178-1184 (1958).
- ¹⁹T. Hatsuda y T. Kunihiro, «QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian», *Physics Reports* **247**, 221-367 (1994).
- ²⁰T. Hirano e Y. Nara, «Eccentricity fluctuation effects on elliptic flow in relativistic heavy ion collisions», *Physical Review C* **79** (2009).
- ²¹S. Hirenzaki, H. Toki y T. Yamazaki, «(d,³He) reactions for the formation of deeply bound pionic atoms», *Phys. Rev. C* **44**, 2472-2479 (1991).
- ²²G. 't Hooft, «How instantons solve the U(1) problem», *Physics Reports* **142**, 357-387 (1986).
- ²³P. T. P. Hutaauruk, J. J. Cobos-Martínez, Y. Oh y K. Tsushima, «Valence-quark distributions of pions and kaons in a nuclear medium», *Phys. Rev. D* **100**, 094011 (2019).
- ²⁴B. L. Ioffe, *Physics-Uspekhi* **51**, 616 (2008).
- ²⁵D. Jido, T. Hatsuda y T. Kunihiro, «In-medium pion and partial restoration of chiral symmetry», *Physics Letters B* **670**, 109-113 (2008).
- ²⁶D. Jido y S. Goda, *Partial restoration of chiral symmetry and pion in nuclear medium*, 2011.
- ²⁷H. F. Jones y M. D. Scadron, «Goldberger-Treiman relation and chiral-symmetry breaking», *Phys. Rev. D* **11**, 174-182 (1975).
- ²⁸D. Kaplan y A. Nelson, «Kaon condensation in dense matter», *Nuclear Physics A* **479**, 273-284 (1988).
-

BIBLIOGRAFÍA

- ²⁹S. P. Klevansky, «The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics», *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649-708 (1992).
- ³⁰S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl y W. Weise, «Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model: (I). Mesonic modes», *Nuclear Physics A* **516**, 429-468 (1990).
- ³¹M. Kobayashi y T. Maskawa, «Chiral Symmetry and η -X Mixing», *Progress of Theoretical Physics* **44**, 1422-1424 (1970).
- ³²G. Martinez, *Advances in Quark Gluon Plasma*, 2013.
- ³³A. Masayuki e Y. Koichi, «Chiral restoration at finite density and temperature», *Nuclear Physics A* **504**, 668-684 (1989).
- ³⁴J. Morones Ibarra, A. Enriquez-Perez-Gavilan, A. Rodriguez, F. Flores-Baez, N. Mata-Carrizalez y E. Ordoñez, «Chiral symmetry restoration and the critical end point in QCD», *Open Physics* **15** (2017).
- ³⁵H. Nagahiro, M. Takizawa y S. Hirenzaki, « η -and η' -mesic nuclei and $U_A(1)$ anomaly at finite density», *Phys. Rev. C* **74** (2006).
- ³⁶Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, «Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I», *Phys. Rev.* **122**, 345-358 (1961).
- ³⁷Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, «Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II», *Phys. Rev.* **124**, 246-254 (1961).
- ³⁸M. Nanova, «In-medium properties of η' meson», *Progress in Particle and Nuclear Physics* **67**, From Quarks and Gluons to Hadrons and Nuclei, 424-428 (2012).
- ³⁹M. Neubert, «Effective field theory and heavy quark physics», en *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Physics in $D \geq 4$* (dic. de 2005), págs. 149-194.
- ⁴⁰S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, 2.^a ed., Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2000).
- ⁴¹G. Prosperini, M. Raciti y C. Simolo, «On the running coupling constant in QCD», *Progress in Particle and Nuclear Physics* **58**, 387-438 (2007).
- ⁴²E. Quack y S. P. Klevansky, «Effective $1/N_c$ expansion in the Nambu—Jona-Lasinio model», *Phys. Rev. C* **49**, 3283-3288 (1994).
- ⁴³P. Senger (KaoS), «Meson production in dense nuclear matter», *Acta Phys. Polon. B* **29**, ed. por T. Matulewicz, J. Skalski y Z. Sujkowski, 273-288 (1998).

- ⁴⁴P. Steinbrecher, «The QCD crossover at zero and non-zero baryon densities from Lattice QCD», [Nuclear Physics A **982**, The 27th International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions: Quark Matter 2018, 847-850 \(2019\)](#).
- ⁴⁵D. Tong, *Lectures Lectures on Gauge Theory*, 2018.
- ⁴⁶U. Vogl y W. Weise, «The Nambu and Jona Lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei», [Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195-272 \(1991\)](#).
- ⁴⁷X. H. Zhong, G. X. Peng, L. Li y P. Z. Ning, « η mesons in nuclear matter», [Phys. Rev. C **73**, 015205 \(2006\)](#).