



**Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Geodésicas en sistemas binarios corrotantes
de Kerr**

Tesis que presenta

José Arturo Báez Jiménez

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Directores de tesis:

**Dra. Nora Eva Bretón Báez
Dr. Roberto Iván Cabrera Munguía**

Ciudad de México

Enero, 2021

Agradecimientos

Agradezco a mis asesores, Dra. Nora Eva Bretón Báez y Dr. Roberto Iván Cabrera Munguía, por su enorme apoyo, paciencia y enseñanzas en el desarrollo de este trabajo. Por ser grandes entusiastas en el desarrollo de la física, y un ejemplo de dedicación, perseverancia y disciplina.

Agradezco enteramente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca otorgada durante la realización de este trabajo.

Al Departamento de Física del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav), a toda la plantilla de investigadores entusiastas de la física y personal administrativo que conforma el departamento.

A mis sinodales: Dr. Luis Alberto López Suárez y Dr. Eloy Ayón Beato por sus sugerencias y comentarios respecto a la mejora de esta tesis.

A mis compañeros de generación por las largas horas de discusión tratando de entender la física, pero aun más, por su amistad y buenos momentos que pasamos juntos en estos dos años en el Departamento de Física.

A todos ellos, gracias.

*A mis padres y a mis hermanos,
por su apoyo, paciencia y amor incondicional.*

Resumen

En este trabajo estudiamos el movimiento de partículas de prueba neutras y de partículas con masa despreciable en el campo gravitacional de una configuración binaria axialsimétrica estacionaria de dos agujeros negros con rotación separados por una singularidad cónica y localizados entre sí a una distancia arbitraria. Este sistema está descrito por una métrica binaria de Kerr corrotante para fuentes extremas. Además, realizamos un análisis de la métrica binaria en el límite de horizonte cercano; esto nos permitió derivar una métrica de Kerr deformada y estudiar las propiedades dinámicas de la configuración binaria en el proceso de fusión, donde logramos identificar la existencia de un estado atractivo y otro repulsivo entre las fuentes antes de que se produzca el proceso de fusión.

Encontramos que para las partículas de prueba las órbitas cerradas y no cerradas dentro del plano ecuatorial y meridional son posibles en este espacio-tiempo. Se señalan de forma particular los siguientes aspectos: (i) las partículas de prueba logran cruzar entre las dos fuentes solo si su momento angular es igual a cero, y (ii) para partículas de prueba cuya masa es despreciable, la presencia de órbitas circulares estables e inestables en el plano ecuatorial, solo sucede cuando la fuerza entre los dos agujeros negros es repulsiva.

Abstract

The present work is devoted to an analytical study of the geodesic motion of test particles, massless and massive, immersed in the gravitational field of a rotating binary black hole setup described by a corotating extreme binary Kerr metric, where the black holes are separated by a conical singularity and located at an arbitrary distance among each other. Besides, we develop a near-horizon limiting procedure to derive a deformed Kerr merging metric that permits the study of its dynamical properties; and we have been able to recognize the existence of one attractive and another repulsive state among sources before the merger process takes place.

We find that for the test particles, closed and non-closed orbits on the equatorial and meridional planes are possible in this spacetime. The following aspects are particularly noted: (i) the test particles manage to cross between the two sources only if their conserved angular momentum is equal to zero, and (ii) for massless test particles the presence of stable and unstable circular orbits in the equatorial plane only happens when the state of interaction occurring within the binary system is repulsive.

Contenido

Introducción	1
1 Geodésicas en espacio tiempo estacionario	5
1.1 Antecedentes: Concepto de geodésica y relevancia física	5
1.1.1 Definición de geodésica	5
1.1.2 Formalismo lagrangiano.	6
1.1.3 Formalismo hamiltoniano.	7
1.1.4 Ecuación de Hamilton-Jacobi.	8
1.2 Espacio-tiempo de Kerr	8
1.2.1 Horizontes de eventos	9
1.3 Análisis geodésico de la solución de Kerr	10
1.3.1 Geodésicas: Caso general	11
1.3.2 Geodésicas en el plano ecuatorial	13
1.4 Sistema binario electrostático más simple: El caso de Majumdar-Papapetrou . .	16
1.4.1 Geodésicas en el plano meridional	17
1.4.2 Geodésicas en el plano de simetría $z = 0$	18
2 Soluciones binarias de Kerr	21
2.1 Métrica de Kinnersley-Chitre	21
2.2 Métrica corrotante y sus límites físicos	25
2.2.1 Métrica binaria de Kerr en el límite de contacto	26
2.3 Transformación de coordenadas	31
3 Geodésicas de la métrica binaria corrotante de Kerr	33
3.1 Ecuaciones de movimiento	33
3.2 Movimiento en el plano ecuatorial	34
3.2.1 Geodésicas tipo tiempo	36
3.2.2 Geodésicas nulas	40
3.3 Movimiento en el plano meridional	43
Conclusiones y resultados	49

Introducción

En 1915 Einstein presentó su famosa teoría general de la relatividad, en donde, por primera vez, salen a la luz sus famosas ecuaciones de campo, definidas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Esta última ecuación representa un sistema de diez ecuaciones no lineales acopladas para una métrica $g_{\mu\nu}$. Dada la complejidad de las ecuaciones de campo, Einstein creyó que no habría una solución analítica para éstas, o que al menos pasarían muchos años antes de que alguien encontrara una, por esta razón, dedicó sus esfuerzos a encontrar una solución de manera aproximada y a concluir que, bajo las consideraciones apropiadas de sus ecuaciones, podía recuperar las ecuaciones de gravedad de Newton y explicar la anomalía en la precesión del perihelio de Mercurio, un hecho incompatible con la teoría de gravedad newtoniana.

Sin embargo, en 1916 Karl Schwarzschild presentó la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein, la cual representa lo que hoy se conoce como un agujero negro estático. Este sistema se define como estático ya que se considera que no hay efectos de rotación. Eventualmente, aparecieron más soluciones para las ecuaciones de Einstein, y fue así que la gente comenzó a proponer situaciones físicas más complicadas, intentando describir los efectos que generaban objetos masivos dotados de carga y momento angular, ya que esto se asemeja más a la realidad que presenta un objeto celeste muy compacto en el espacio exterior. Cuando se acopla la gravedad de Einstein con la electrodinámica de Maxwell se derivan lo que se denomina como ecuaciones de Einstein-Maxwell (EM), y la primera solución a este sistema de ecuaciones es la llamada solución de Reissner-Nordström (1916); un agujero negro caracterizado por su masa y su carga eléctrica.

Los esfuerzos de la comunidad científica, desarrollaron soluciones que permitieron tener, aunque poco realista, una primera idea de los fenómenos físicos que ocurren en estas regiones del espacio-tiempo; como los espacios-tiempos con simetría axial que fueron estudiados por primera vez en 1917 por Weyl [1], que logró obtener todas las soluciones estáticas de vacío. Con el paso del tiempo se fueron encontrando nuevas soluciones así como se ha tratado de entender la presencia de puntos singulares en las soluciones; los trabajos de Birkhoff en 1923, Eddington en 1924, Einstein y Rosen en 1935 dejaron precedente en esta área, sin embargo, no fue sino hasta 1960, con el trabajo de Krustal y Szekeres, que se encontró un sistema de coordenadas maximalmente extendido y regular para la métrica de Schwarzschild, y que permitieron dar una solución al problema de la singularidad coordinada. Por otro lado, trabajos de científicos de la talla de Chandrasekhar, Oppenheimer, Volkoff y Snyder [2,3], mostraron que es posible encontrar obje-

tos compactos de tamaño apenas mayor a su radio gravitacional, y además, que la formación de agujeros negros, objetos sumamente compactos, es posible a través del colapso gravitacional de estrellas masivas. Para 1963, Roy Kerr presentó una métrica más general que describe el campo gravitacional de un objeto compacto rotante [4]. Tal solución en vacío describe la geometría de un agujero negro estacionario (con rotación), y tan solo unos años después Carter encontró una cuarta constante de movimiento asociada a una *simetría escondida* usando el formalismo de Hamilton-Jacobi; esta simetría adicional permite la separabilidad de las ecuaciones geodésicas. El desarrollo fue tal que para finales de los 60's ya se hablaba de los teoremas que definen las propiedades generales de un agujero negro como el *Teorema de no pelo*, que establece que los agujeros negros están definidos únicamente por tres parámetros: su masa, su espín (momento angular) y su carga; la *conjetura de censura cósmica de Penrose*, que establece que una singularidad siempre está protegida por un horizonte; es decir, que no existe conexión causal entre los eventos del interior de un agujero negro con el exterior.

En 2015, el experimento Advanced LIGO realizó la primera detección directa de ondas gravitacionales; esta detección confirma la existencia de agujeros negros binarios en la naturaleza [5]. Desde entonces, gracias a los numerosos esfuerzos de la colaboración LIGO-Virgo se han observado una serie de señales de ondas gravitacionales debido al proceso de fusión de sistemas binarios de agujeros negros [6]. Por otro lado, en el mes de abril de 2019, la colaboración del *Event Horizon Telescope* (EHT) presentó la primera imagen a escala del horizonte de eventos (*sombra*) del candidato a agujero negro supermasivo M87, imagen construida a partir de observaciones previas [7, 8]. La imagen capturada por el EHT es consistente con las expectativas de la sombra de un agujero negro de Kerr. Debido a que las simulaciones numéricas son la principal herramienta al momento de considerar procesos de fusión entre dos agujeros negros, esto motiva a la comunidad científica a contrastar estas observaciones con los modelos en el marco de las soluciones exactas, así como las propiedades dinámicas alrededor de estas configuraciones. A pesar de que la relatividad numérica parece ganar terreno frente a las soluciones exactas, dado que las ecuaciones de Einstein son no lineales, la importancia del estudio de estas últimas radica en diferentes motivos, por ejemplo, los modelos analíticos permiten obtener una primera idea de los fenómenos físicos que ocurren, así como hacer o desmentir conjeturas sobre las propiedades generales de estos sistemas. Por otro lado, en simulaciones numéricas, soluciones exactas pueden ser usadas como condiciones iniciales para evolucionar sistemas dinámicos. Dicho esto como motivación, el presente trabajo pretende analizar algunas de las propiedades dinámicas que presentan configuraciones binarias de agujeros negros.

Nuestro trabajo de investigación está dividido en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 realizamos una revisión del concepto de geodésica en el marco de la Relatividad General; describimos las propiedades generales de un agujero negro rotante de Kerr, así como un análisis detallado de la estructura geodésica de esta solución a través del método de Hamilton-Jacobi. Por otro lado, realizamos el análisis geodésico para el caso de Majumdar-Papapetrou [9, 10], que corresponde al caso electrostático más simple de un sistema binario de agujeros negros extremos.

En el Capítulo 2 se describe de forma explícita la métrica desarrollada por Cabrera [11], que describe una configuración estacionaria axialsimétrica binaria de agujeros negros extremos de Kerr corrotantes de masas desiguales separados por una singularidad cónica. Esta métrica está

descrita en términos de parámetros de Komar [12], siendo tres los parámetros físicos de esta solución: las masas de cada fuente (M_1 y M_2) y una distancia arbitraria de separación entre las fuentes (R). Adicionalmente, se da una descripción de las propiedades dinámicas de la configuración. Analizaremos también el estado límite de fusión y derivaremos la métrica binaria cercana al límite de fusión.

En el Capítulo 3 estableceremos las ecuaciones de movimiento para geodésicas nulas y geodésicas tipo tiempo, que describen las trayectorias en la vecindad de la configuración binaria descrita en el Capítulo 2; adicionalmente, presentaremos algunas trayectorias numéricas en el plano ecuatorial y meridional, dando una clasificación de las órbitas posibles.

En el capítulo 4 se discuten los resultados y conclusiones, presentándolos en el orden de aparición en esta tesis para recordarle al lector los puntos más sobresalientes. Brevemente se dan algunas perspectivas a futuro del presente trabajo.

Capítulo 1

Geodésicas en espacio tiempo estacionario

En este capítulo estudiaremos el concepto de geodésica desde la perspectiva de la relatividad general. En particular se realizará el análisis geodésico para dos soluciones: la primera es la métrica encontrada por Kerr que describe la geometría de un agujero negro estacionario (con rotación); y la segunda es la métrica de Majumdar-Papapetrou que describe el caso electrostático más simple en una configuración binaria.

1.1 Antecedentes: Concepto de geodésica y relevancia física

Para comprender mejor las propiedades físicas de las soluciones a las ecuaciones de campo gravitacional, resulta esencial el estudio de las trayectorias de partículas de prueba y rayos de luz en el espacio-tiempo que describen tales soluciones. Nos referimos a estas trayectorias con el nombre de geodésicas, que intuitivamente pueden pensarse como una generalización a espacios con curvatura de la trayectoria más corta entre dos puntos (recta en el espacio plano). El estudio de estas trayectorias resulta interesante desde la perspectiva observacional, ya que solo se observa la materia y la luz, por lo tanto, pueden dar una idea de la física de un campo gravitacional dado. Por otra parte, este estudio también resulta importante desde un punto de vista fundamental, ya que estas trayectorias resultan útiles para clasificar un espacio-tiempo dado, con la finalidad de estudiar fenómenos físicos como procesos de acreción y radiación gravitacional, como sucede en el espacio-tiempo de Kerr, cuya evolución de las trayectorias depende de la energía radiada y de su momento angular, así como de los parámetros que caracterizan el agujero negro.

1.1.1 Definición de geodésica

Se entiende por geodésica a la curva que representa la trayectoria más corta entre dos puntos de un espacio-tiempo. La expresión más general de una geodésica para una partícula, moviéndose en un espacio-tiempo descrito por una métrica $g_{\mu\nu}$ es

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (1.1)$$

donde x^ν representa las coordenadas de la trayectoria y $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ son los símbolos de Christoffel. La ecuación (1.1) es un sistema acoplado de n ecuaciones diferenciales de segundo orden para n funciones $x^\nu(\tau)$. Existen tres clases de geodésicas:

1. Geodésicas nulas: Rayos de luz o partículas sin masa.

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu = 0. \quad (1.2)$$

2. Geodésicas tipo espacio: Si bien esta categoría de geodésicas son matemáticamente consistentes, no son de interés físico, ya que representa partículas que viajan con velocidades mayores a la de la luz.

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu > 0. \quad (1.3)$$

3. Geodésicas tipo tiempo: Este tipo de geodésicas describen las trayectorias de partículas (masivas) con velocidades menores a la de la luz.

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu < 0. \quad (1.4)$$

Para esta clasificación se entiende que la derivada es con respecto al parámetro afín que genera la geodésica, $\dot{x}^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$, además, se ha tomado una signatura $(-, +, +, +)$ para la métrica $g_{\mu\nu}$, la cual usaremos en el resto de este trabajo.

La ecuación (1.1), define la expresión más general (para una partícula de prueba sin carga eléctrica), que nos permite obtener las ecuaciones de movimiento de una partícula; dada una métrica $g_{\mu\nu}$, es posible emplear otros formalismos para generar estas trayectorias, como se describe en [13, 15].

1.1.2 Formalismo lagrangiano.

Otra propiedad de las geodésicas, es que son curvas con el tiempo propio más largo entre dos puntos dados. Esta propiedad, para la geodésica tipo tiempo, significa que la acción para una partícula de masa m es

$$S[x^\mu(\tau)] = \int_a^b \mathcal{L} d\tau, \quad \mathcal{L} = -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}, \quad (1.5)$$

con puntos iniciales y finales fijos, la geodésica es extrema. Para determinar la ecuación geodésica correspondiente a este extremo se impone la condición de normalización

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1, \quad (1.6)$$

que fija el significado de τ como el tiempo propio. Entonces la variación de la acción (1.5) da como resultado la ecuación geodésica (1.1).

Por otro lado, en [13] se muestra que para una acción más general, imponiendo restricciones utilizando multiplicadores de lagrange η

$$\bar{S}[x^\mu(\tau), \eta(\tau)] = \int_a^b \bar{\mathcal{L}} d\tau, \quad \bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left[\eta^{-1} g_{\mu\nu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} - m^2 \eta \right], \quad (1.7)$$

se encuentra que la ecuación

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0, \quad (1.8)$$

es equivalente a (1.1), siempre que τ sea parámetro afín y $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$, donde \mathcal{L} está dada por (1.5).

1.1.3 Formalismo hamiltoniano.

El Hamiltoniano

$$H = p_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} - \mathcal{L}, \quad p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}, \quad (1.9)$$

será nulo para la acción (1.5). Luego, el Hamiltoniano propio puede ser obtenido a partir de la acción (1.7), tal que

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^\mu} = \eta^{-1} g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \\ \bar{H} &= p_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} - \bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \eta [g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

La acción correspondiente en su forma Hamiltoniana es

$$\bar{S}_H[x^\mu(\tau), p_\mu(\tau), \eta(\tau)] = \int d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu - \bar{H}), \quad (1.11)$$

y las ecuaciones de movimiento de Hamilton se describen como

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x^\mu}, \quad (1.12)$$

donde, la variación de (1.11) respecto a η nos da la restricción

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2 = 0. \quad (1.13)$$

Esta última ecuación es una restricción *mass shell* para una partícula de prueba. Luego, reparametrizando el parámetro afín de la forma

$$\begin{aligned} d\sigma &= \eta d\tau, & \frac{dx^\mu}{d\sigma} &= \dot{x}^\mu, \\ H &= \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2), \end{aligned} \quad (1.14)$$

permitiendo que las ecuaciones (1.12) se conviertan en

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x^\mu}, \quad (1.15)$$

esto nos indica que el Hamiltoniano (1.14) puede utilizarse como punto de partida para estudiar el movimiento de partículas en una variedad Riemanniana. Es importante enfatizar que este hamiltoniano tiene un límite bien definido para $m \rightarrow 0$, porque puede usarse en la descripción de trayectorias de partículas de masa cero (fotones).

1.1.4 Ecuación de Hamilton-Jacobi.

Como se muestra en [13], es posible aplicar el formalismo de Hamilton-Jacobi empleando las acciones (1.5) y (1.7), asignando una norma $\eta = 1$, tal que τ sea el parámetro afín con el objetivo de obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi para partículas relativistas, teniendo así

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + m^2 = 0, \quad (1.16)$$

o bien la expresión equivalente,

$$-\frac{\partial \bar{S}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x^\nu}, \quad (1.17)$$

donde (1.16), puede ser fácilmente obtenida de (1.17) mediante la transformación

$$\bar{S} = S + \frac{1}{2} m^2 \lambda. \quad (1.18)$$

1.2 Espacio-tiempo de Kerr

La métrica de Kerr describe un espacio-tiempo axialmente simétrico y estacionario en el vacío, caracterizado por la masa y el momento angular del agujero negro [4]. En coordenadas de Kerr, esta métrica tiene la forma

$$ds^2 = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + 2(du + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) - \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right)(du + a \sin^2 \theta d\phi)^2. \quad (1.19)$$

Esta solución se encuentra caracterizada por las constantes M y a , siendo M igual a la masa de Komar, y a el parámetro de espín que se relaciona con el momento angular de Komar J , mediante la relación $a = J/M$. Por otro lado, el escalar de curvatura $R_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\rho\sigma\mu\nu}$ es [14]

$$R_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}, \quad (1.20)$$

que diverge para $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$, por lo tanto, la métrica posee una singularidad física en

$$r = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (1.21)$$

En la misma investigación [4], Kerr también presenta una segunda versión de su métrica bajo la transformación

$$(r - ia) \exp^{i\phi} = \sin \theta = x + iy, \quad r \cos \theta = z, \quad u = t + r. \quad (1.22)$$

Siendo (t, x, y, z) las coordenadas cartesianas del espacio-tiempo de Minkowski, definiendo una solución asintóticamente plana, donde el elemento de línea (1.19) toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^2}{r^2 + a^2z^2} \left[dt + \frac{r(xdx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r} dz \right]^2. \quad (1.23)$$

De este modo, tomando como referencia (1.22), observamos que

$$x^2 + y^2 = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (1.24)$$

Evaluando la singularidad (1.21) en (1.24), se tiene

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0. \quad (1.25)$$

De este último conjunto de expresiones, se entiende que la singularidad física del espacio-tiempo de Kerr no es un punto en el espacio sino que representa un anillo con un radio a en $\theta = \pi/2$.

Si bien la descripción anterior es útil para entender la naturaleza de la singularidad de anillo que posee la métrica de Kerr, resulta más familiar describir la solución de Kerr en las llamadas coordenadas de Boyer-Lindquist

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (1.26)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta.$$

Además los coeficientes métricos de la solución de Kerr son independientes de t y ϕ , por lo tanto posee dos vectores de Killing, siendo uno de estos espacial y el otro temporal, cuyas componentes son $\xi_{(\phi)}^\mu = \delta_\phi^\mu$ y $\xi_{(t)}^\mu = \delta_t^\mu$, respectivamente.

1.2.1 Horizontes de eventos

El agujero negro de Kerr presenta dos horizontes, siendo estos definidos por las regiones que satisfacen $1/g_{rr} = 0$; es decir

$$r^2 - 2Mr + a^2 = 0, \quad (1.27)$$

cuyas soluciones son

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (1.28)$$

En este caso r_+ representa el horizonte externo u horizonte de eventos, mientras que r_- describe el horizonte interno. Esta última superficie resulta ser una superficie de Cauchy. Es fácil notar

que (1.28) solo tiene sentido físico cuando $M^2 > a^2$, de lo contrario la solución de Kerr no tiene un horizonte de eventos, describiendo únicamente una singularidad desnuda.

Existen otras regiones de interés en la solución de Kerr, particularmente, existe una superficie fuera del horizonte de eventos donde el vector temporal de Killing $\xi_{(t)}^\mu$ pasa de ser temporal a ser de tipo espacio. El límite de esta región ocurre cuando el vector de Killing temporal se vuelve nulo $\xi_{(t)}^\mu \xi_{(t)\mu} = g_{tt} = 0$, es decir

$$\Sigma - 2Mr = 0, \quad (1.29)$$

donde Σ está dada por (1.26), así las soluciones de (1.29) son

$$r_{\pm E} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.30)$$

La superficie r_{+E} se denomina superficie de límite estacionario o ergosuperficie. Por otra parte, la solución r_{-E} no tiene significado físico. Además, la región entre el horizonte de eventos y la superficie de límite estacionario se conoce como ergosfera o ergoregión; la existencia de esta región permite, en teoría, diversos mecanismos de extracción de energía para agujeros negros rotantes. En la Figura (1.1) se muestra la ergosfera externa y el horizonte de eventos externo para el parámetro de rotación $a = 0.86$ y $M = 1$.

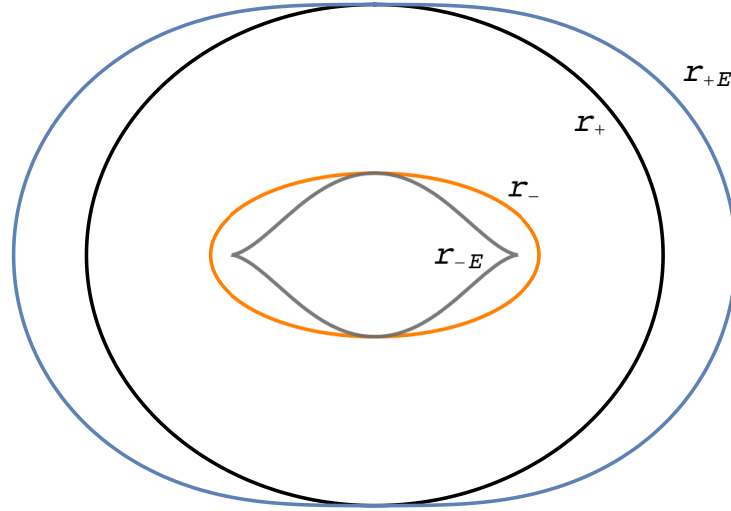


Figura 1.1: Ergosfera externa r_{+E} y horizonte de eventos r_+ para el espacio tiempo de Kerr. Se define como ergoregión a la región acotada por estas dos superficies.

1.3 Análisis geodésico de la solución de Kerr

Existe una gran cantidad de trabajos dedicados a estudiar las trayectorias geodésicas en la vecindad de un agujero negro rotante. Los trabajos de Chandrasekhar [15], Misner [16] y Teo [17], entre otros, han permitido un mejor entendimiento de las propiedades del espacio-tiempo de Kerr. Sin embargo, el trabajo de Carter [18] ha permitido un avance significativo en la línea de estudio de las geodésicas, al encontrar una simetría adicional en la solución de Kerr; esto

permitió la separabilidad de las ecuaciones de movimiento para las geodésicas fuera del plano ecuatorial en este espacio-tiempo. En esta sección obtendremos las ecuaciones de movimiento para la métrica de Kerr dentro y fuera del plano ecuatorial empleando los formalismos descritos en la Sección 1.1.

1.3.1 Geodésicas: Caso general

Como se mencionó en la sección anterior, el espacio tiempo de Kerr posee dos simetrías asociadas a las cantidades conservadas para una partícula de prueba; L_z y E , siendo estas últimas el momento angular a lo largo del eje de rotación y la energía, respectivamente, que junto con la ecuación $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu + m^2 = 0$, nos permite integrar tres ecuaciones de movimiento. Por otro lado, la ecuación de Hamilton-Jacobi para una acción \bar{S} tiene la forma

$$\begin{aligned}\bar{S} &= S + \frac{1}{2}m^2\tau, \\ g^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S + m^2 &= 0.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Para una partícula en el espacio tiempo de Kerr es posible escribir la función de Hamilton-Jacobi de la forma

$$S = -Et + L_z\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta),\tag{1.32}$$

que nos permite incorporar la información respecto a las cantidades conservadas L_z y E .

Como demostró Carter [18], esta acción permite una separación completa de variables, como describiremos a continuación. A partir de la forma $g^{\mu\nu}$ para la métrica (1.26), es posible reescribir (1.31) de la forma

$$\begin{aligned}-\left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta\right] E^2 + \frac{4Mar}{\Delta} EL_z + \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta}\right] L_z \\ + \Delta S_{,r}^2 + S_{,\theta}^2 = -m^2 [r^2 + a^2 \cos^2 \theta],\end{aligned}\tag{1.33}$$

donde $S_{,i} = \partial_i S$. Esta última expresión puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 E^2 - 4MarEL_z + a^2 L_z^2] + \Delta S_{,r}^2 + m^2 r^2 + 2aL_z E + a^2 \sin^2 \theta E^2 \\ + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + S_{,\theta}^2 + m^2 a^2 \cos^2 \theta - 2aL_z E = 0,\end{aligned}\tag{1.34}$$

de la cual resulta evidente que la parte radial debe ser equivalente a una constante menos la parte angular; es decir,

$$K = \left(Ea \sin \theta - \frac{L_z}{\sin \theta}\right)^2 + S_{,\theta}^2 + m^2 a^2 \cos^2 \theta,\tag{1.35}$$

donde K representa la constante de separación encontrada por Carter, la cual es generada por un tensor de Killing de rango 2.

Debido a que las funciones de cantidades conservadas también se conservan, cualquier función de K y de las otras tres constantes de movimiento puede ser usada como una cuarta constante de movimiento, tal que en ciertas ocasiones resulta más conveniente usar la forma alternativa

$$\mathcal{Q} = K + (L_z - aE)^2. \quad (1.36)$$

Así, las ecuaciones de Hamilton-Jacobi son

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \left(aE \sin \theta - \frac{L_z}{\sin \theta}\right)^2 + m^2 a^2 \cos^2 \theta &= K, \\ \Delta \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \frac{[(r^2 + a^2)E - aL_z]^2}{\Delta} + m^2 r^2 &= -K, \end{aligned} \quad (1.37)$$

tal que la acción \bar{S} de (1.31) toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{2} m^2 \tau - Et + L_z \phi + S_r + S_\theta, \\ S_r &= \int^r \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} dr, \quad S_\theta = \int^\theta \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta, \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde

$$\begin{aligned} R(r) &= [E(r^2 + a^2) - aL_z]^2 - (m^2 r^2 + K) \Delta, \\ \Theta(\theta) &= K - m^2 a^2 \cos^2 \theta - \left(Ea \sin \theta - \frac{L_z}{\sin \theta}\right)^2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

La forma integral de las ecuaciones geodésicas se puede obtener utilizando el hecho de que las derivadas parciales de la acción de Jacobi respecto a las integrales del movimiento son constantes [16], esto permite obtener el conjunto de ecuaciones de primer orden para partículas masivas y para fotones [16, 18]

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{dr}{d\tau} &= \sqrt{R(r)}, \\ \Sigma \frac{d\theta}{d\tau} &= \sqrt{\Theta(\theta)}, \\ \Sigma \frac{d\phi}{d\tau} &= -\left(aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta}\right) + \frac{a}{\Delta} \left(E(r^2 + a^2) - L_z a\right), \\ \Sigma \frac{dt}{d\tau} &= -a \left(aE \sin^2 \theta - L_z\right) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - L_z a]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Para las ecuaciones de r y θ es posible adoptar la reparametrización $m\tau \rightarrow \tau$, $E/m \rightarrow E$, $L/m \rightarrow L$, y $m^2 \rightarrow \delta$ al dividir entre m^2 , tal que $\delta = 1$ para partículas másivas y $\delta = 0$ para fotones. En este sentido el significado físico de E y L corresponde a la energía y momento angular por unidad de masa para partículas masivas, mientras que para fotones corresponde a la energía y momento angular en infinito. En lo subsecuente en este trabajo se adoptará esta convención para δ .

1.3.2 Geodésicas en el plano ecuatorial

El movimiento en el plano ecuatorial es un caso especial. Debido a la simetría de reflexión $\theta \rightarrow \pi - \theta$, este plano es una subvariedad geodésica. Esto significa que el movimiento de una partícula o rayo de luz con las condiciones iniciales $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$ está restringido al plano ecuatorial. Tomando el caso particular $\theta = \pi/2$ en (1.40) tenemos las ecuaciones de movimiento en el plano ecuatorial descritas por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \pm r^{-3/2} \sqrt{P(r)}, \\ \dot{\phi} &= \frac{(r - 2M)L + 2aME}{r\Delta}, \\ \dot{t} &= \frac{Er(r^2 + a^2) - 2aM(L - aE)}{r\Delta}, \\ P(r) &= E^2(r^3 + a^2r + 2a^2M) - 4aMEL - (r - 2M)L^2 - r\Delta\delta. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Estas últimas ecuaciones nos permiten realizar un estudio de las propiedades del movimiento en la vecindad de un agujero negro de Kerr, reescribiendo $R(r)$ en términos de dos funciones potencial. Nótese que la ecuación radial para el movimiento geodésico puede ser reescrita como

$$\dot{r}^2 = \frac{r^3 + a^2r + 2a^2M}{r^3} (E - V_+)(E - V_-), \quad (1.42)$$

siendo V_{\pm} las soluciones de la ecuación $R(r) = 0$ para E , las cuales son

$$V_{\pm} = \frac{2aLM \pm \sqrt{r(r^3\delta + (L^2 + a^2\delta)r + 2a^2M\delta)\Delta}}{r^3 + a^2r + 2a^2M}. \quad (1.43)$$

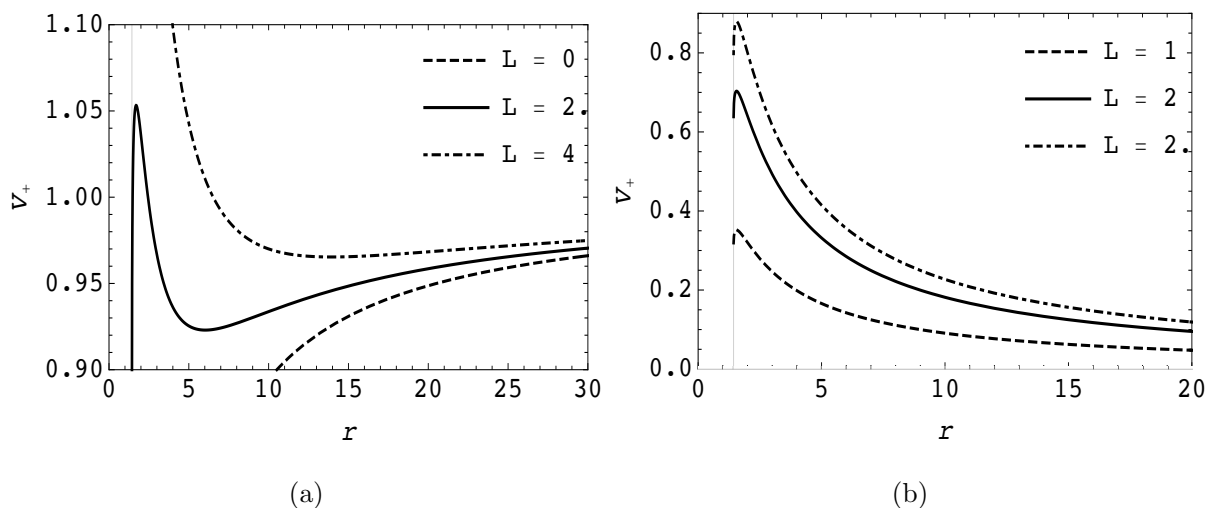


Figura 1.2: Potencial efectivo V_+ para la solución de Kerr en el plano ecuatorial para (a) partículas masivas y (b) fotones, para diferentes valores de L . Los parámetros se han asignado como $M = 1$ y $a = 0.9$. La línea vertical representa el horizonte de eventos.

Para parámetros M y a de un agujero negro rotante previamente definidos, las funciones potencial V_{\pm} dependen únicamente de r y de la constante de movimiento L . Debido a que (1.42)

debe tomar estrictamente valores positivos, entonces, el movimiento de partículas con energía específica E es posible en las regiones donde $E \geq V_+$ y $E \leq V_-$. Sin embargo, las orbitas físicamente aceptables son aquellas cuya energía cumple $E \geq V_+$, así, la región $E \leq V_-$ queda excluida.

Para el caso de partículas con masa es posible notar a partir de (1.43) que $V_+(r \rightarrow \infty) = \pm 1$ y que $V_+(r \rightarrow r_+) = aL/2Mr_+$, siendo r_+ el horizonte de eventos descrito por (1.28), mientras que para fotones $V_+(r \rightarrow \infty) = 0$. En la Figura 1.2 se muestran las funciones potencial V_+ para partículas masivas ($\delta = 1$) y para fotones ($\delta = 0$) a partir de las condiciones descritas anteriormente para la función potencial V_+ . Así mismo, también es posible identificar para el caso de partículas con masa, que logran alcanzar el infinito solo si su energía $E \geq 1$. Cuando $E > 1$ la velocidad de la partícula no se vuelve nula en infinito (movimiento hiperbólico). Para el caso $E = 1$, la velocidad se vuelve asintóticamente nula en infinito (movimiento parabólico) [13]. Mientras que cuando $E < 1$, es posible obtener órbitas cerradas con al menos un punto de retorno radial. Por otro lado, para el caso de rayos de luz, es posible obtener dispersión de su trayectoria en la vecindad del agujero negro y orbitas circulares inestables; sin embargo, no es posible obtener orbitas con más de un punto de retorno.

Para el caso de partículas masivas, es posible determinar las condiciones de energía E y momento angular L para órbitas circulares resolviendo el sistema de ecuaciones

$$P(r) = \frac{d}{dr}P(r) = 0. \quad (1.44)$$

Obteniendo, que dichas condiciones para órbitas circulares están dadas por

$$E = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}, \quad L = \frac{\pm\sqrt{Mr}(r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2)}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}. \quad (1.45)$$

Las orbitas circulares estables existen solo en el dominio $r > r_{ISCO}$ (*radius innermost stable orbit*), que son posibles de determinar luego de resolver

$$P(r) = \frac{d}{dr}P(r) = \frac{d^2}{dr^2}P(r) = 0, \quad (1.46)$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación para $r > r_{ISCO}$:

$$r^2 - 3a^2 - 6Mr \pm 8a\sqrt{Mr} = 0, \quad (1.47)$$

cuya solución puede reescribirse en forma paramétrica [13]

$$\begin{aligned} r_{ISCO} &= M\{3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)^{1/2}]\}, \\ Z_1 &= 1 + (1 - a^2/M^2)^{1/3} [(1 + a/M)^{1/3} + (1 - a/M)^{1/3}], \\ Z_2 &= (3a^2/M^2 + Z_1^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

La coordenada r_{ISCO} representa un punto de silla en el perfil de potencial V_{\pm} , que localiza la órbita circular más interna (que de hecho es inestable) a la que puede acceder una partícula de

prueba alrededor de un agujero negro de Kerr caracterizado por a y M . En la Figura (1.3), se representa la localización del r_{ISCO} , tal que la existencia de mínimos locales en los perfiles de potencial se presentaran siempre dentro del dominio $r > r_{ISCO}$, que como se ha mencionado previamente, representan la ubicación de órbitas circulares estables.

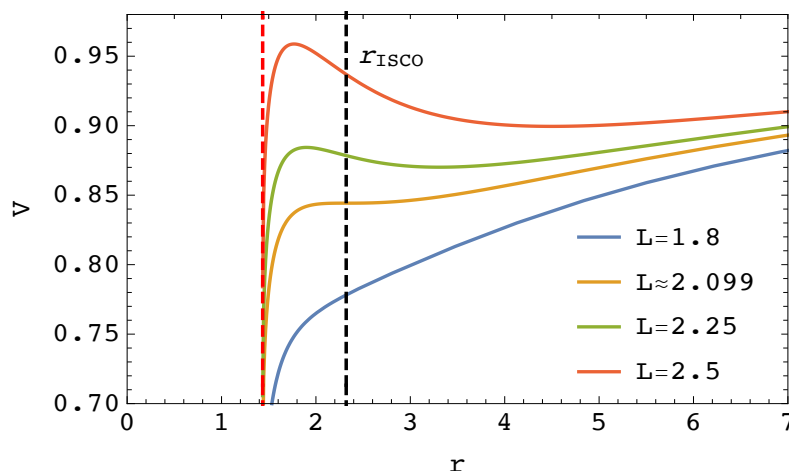


Figura 1.3: Perfiles de potencial V_+ para un agujero negro de Kerr caracterizado por $a = 0.9$ y $M = 1$, cuyo momento angular para la partícula de prueba está dado por L . La línea vertical negra representa el valor de $r_{ISCO} \approx 2.32088$, que define un punto de silla en el perfil de potencial para una partícula de prueba con momento angular $L = 2.09978$ (gráfica naranja). La línea roja vertical representa el horizonte de eventos.

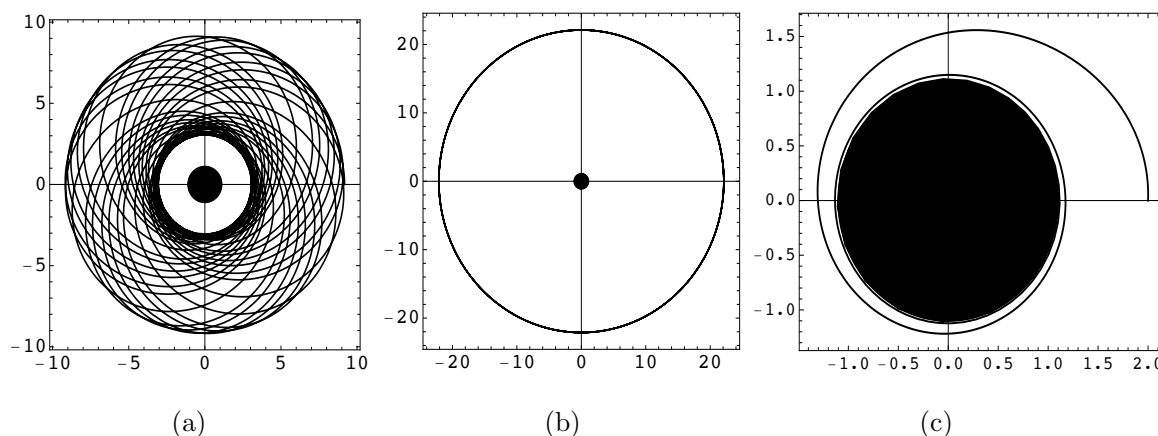


Figura 1.4: Geodésicas para partículas masivas en el plano ecuatorial caracterizado por $M = 1$ y $a = 0.995$, el círculo negro representa el horizonte de eventos. Los parámetros L y E se han asignado como: (a) $E = 0.922512$, $L = 2.48974$, (b) $E = 0.977861$, $L = 4.91711$ y (c) $E = 3$, $L = 2.48974$.

Por otro lado, para el caso de rayos de luz es posible determinar el radio de la órbita circular inestable más cercana al agujero negro al resolver $dV_+/dr = 0$ para r en el dominio $r > r_+$, el cual está definido por

$$r_{foton} = 2M \left(1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{a}{M} \right) \right] \right). \quad (1.49)$$

En la Figura 1.4 se muestran algunos tipos de órbitas para partículas masivas en la vecindad de un agujero negro de Kerr. Particularmente se observa la presencia de órbitas circulares estables, órbitas cerradas que precesan respecto al origen y órbitas cayendo dentro del horizonte de eventos del agujero negro de Kerr.

1.4 Sistema binario electrostático más simple: El caso de Majumdar-Papapetrou

En esta sección se introduce una primera aproximación para el entendimiento de las órbitas de partículas de prueba alrededor de sistemas binarios de objetos astrofísicos compactos, tomando como referencia los trabajos de [19, 20]. Consideremos la métrica de Majumdar-Papapetrou en coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{U^2} + U^2(d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2), \quad (1.50)$$

donde

$$U(\rho, z) = 1 + \frac{M}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} + \frac{M}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}}. \quad (1.51)$$

Esta solución representa dos agujeros negros de masa M y carga Q que se encuentran en equilibrio, donde $Q = M$. En las coordenadas (ρ, z) , los horizontes de eventos se reducen a dos puntos definidos en $z = \pm d$; es decir, el parámetro $2d$ representa la distancia entre las dos fuentes. En este contexto es posible escribir el lagrangiano para el movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Majumdar-Papapetrou vía $2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, mientras que a partir de la conservación del Hamiltoniano se tiene que¹

$$2\mathcal{L} = -\frac{\dot{t}^2}{U^2} + U^2(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = -\delta. \quad (1.52)$$

Las ecuaciones geodésicas son encontradas variando la acción respecto al lagrangiano (1.52). Así, las ecuaciones de movimiento están dadas a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0. \quad (1.53)$$

Tal que τ es un parámetro afín y $x^\mu = (t, \rho, \phi, z)$. Además, los coeficientes de la métrica (1.50) son independientes de t y ϕ , por lo tanto posee dos vectores de Killing, $\xi_{(\phi)}^\mu = \delta_\phi^\mu$ y $\xi_{(t)}^\mu = \delta_t^\mu$ que se relacionan con las cantidades conservadas de la energía E y el momento angular L de la partícula de prueba; es decir,

$$\begin{aligned} E &= -\xi_{(t)\mu}p^\mu = \frac{\dot{t}}{U^2}, \\ L &= \xi_{(\phi)\mu}p^\mu = \rho^2 U^2 \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

¹El Hamiltoniano está descrito por la misma cantidad que el Lagrangiano, i.e. $2H = 2\mathcal{L} = -\delta$, cuya diferencia es que el primero está expresado en términos de momentos en lugar de velocidades. Esto es una consecuencia debida a la dependencia cuadrática de las velocidades en el Lagrangiano.

Así, usando las constantes de movimiento E y L , las ecuaciones de movimiento para ρ y z están dadas por

$$\ddot{\rho} - \frac{L^2(U + \rho U_\rho)}{\rho^3 U^5} + \frac{2\dot{\rho}\dot{z}U_z - (E^2 + z^2 - \rho^2)U_\rho}{U} = 0 \quad (1.55)$$

$$\ddot{z} - \frac{L^2 U_z}{\rho^2 U^5} + \frac{2\dot{\rho}\dot{z}U_\rho - (E^2 - z^2 + \rho^2)U_z}{U} = 0 \quad (1.56)$$

Donde el subíndice ρ y z representa una derivada parcial respecto a la variable correspondiente, y el punto indica derivada respecto al parámetro afín. Luego de algunas manipulaciones algebraicas, es posible encontrar una ecuación para la conservación de la energía sustituyendo (1.54) en (1.52), tal que

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + V_{eff}(\rho, z) = E^2, \quad V_{eff} = \frac{L^2}{\rho^2 U^4} + \frac{\delta}{U^2}. \quad (1.57)$$

1.4.1 Geodésicas en el plano meridional

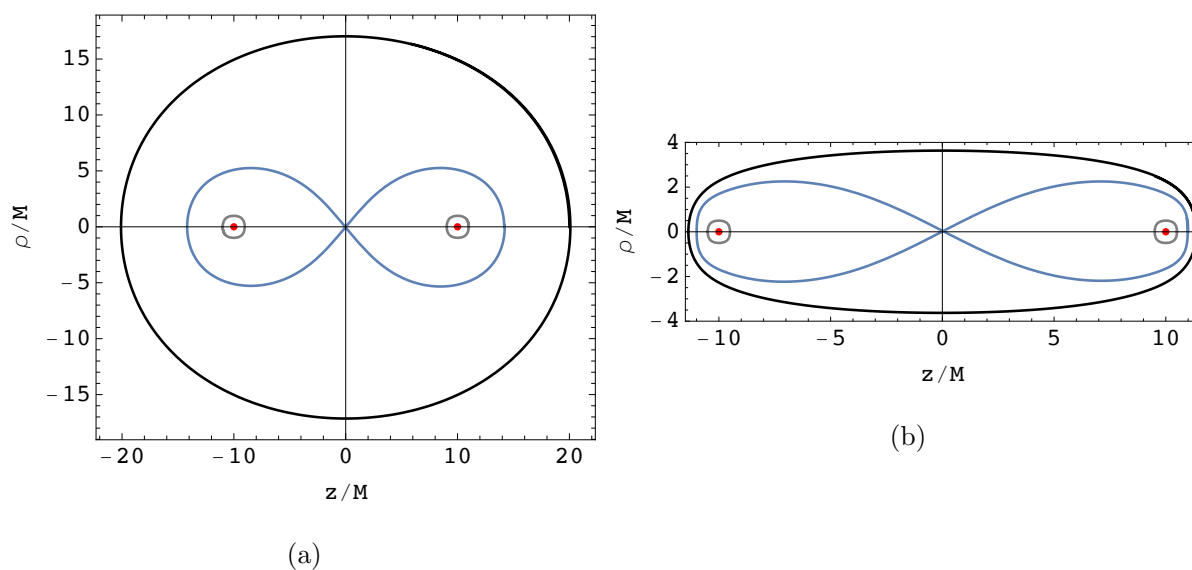


Figura 1.5: Geodésicas para partículas masivas en el plano meridional caracterizado por $M = 1$ y $d = 0.995$, los puntos representan los horizontes de eventos. Los parámetros L y E se han asignado como: (a) $E = 0.922512$, $L = 2.48974$, (b) $E = 0.977861$, $L = 4.91711$ y (c) $E = 3$, $L = 2.48974$.

Para estudiar las trayectorias geodésicas en el plano que contiene a las dos fuentes, se impone la condición $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$ a las ecuaciones de movimiento dadas por (1.55) y (1.56). Debido a la Ec. (1.54), $L = 0$. Como se indica en [15], para una separación arbitraria entre dos agujeros negros las ecuaciones geodésicas no son separables. Sin embargo, con ayuda de métodos de integración numéricos² es posible encontrar tres tipos de geodésicas nulas y tipo tiempo cerradas (ver Figura 1.5); como se clasifican en [19],

²Para integrar las ecuaciones de movimiento (1.55) se ha empleado el algoritmo de Runge-Kutta con tamaño de paso adaptativo.

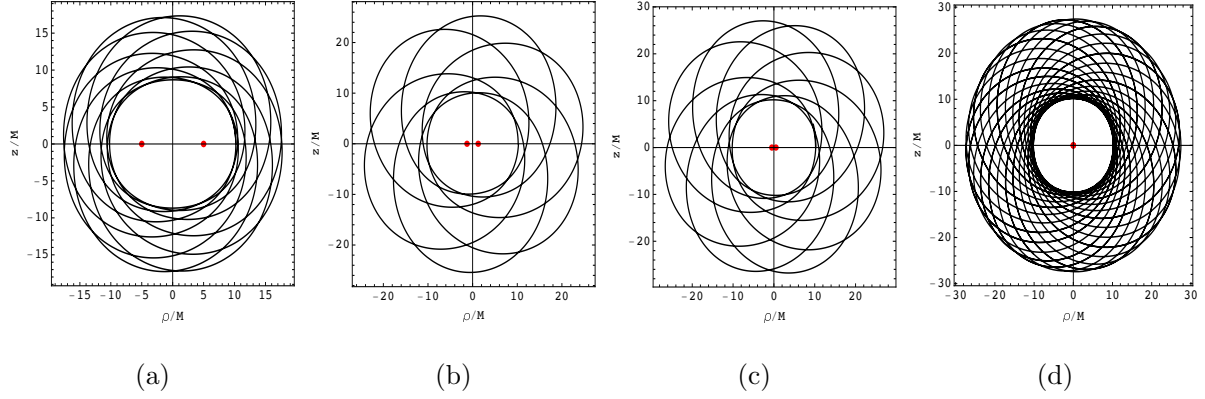


Figura 1.6: Geodésicas para partículas masivas en el plano meridional caracterizado por $M = 1$. Los parámetros de la partícula de prueba se han asignado $E = 0.96$, $z(0) = 10.2$, $\dot{z}(0) = 0$. Las fuentes están localizadas en $z = \pm d$ donde, (a) $d = 5$, (b) $d = 2.5$, (c) $d = 0.5$ y (d) $d = 0.01$. El valor de $\dot{\rho}(0)$ se ha calculado para cada a .

1. Órbitas que encierran los horizontes de ambas fuentes (órbita negra). Para pequeñas separaciones ($d \ll M$), el radio coordenado para cada órbita es $\sim 2M$. El periodo coordenado correspondiente es $\sim 16\pi M$.
2. Órbitas que encierran solo una de las fuentes (órbita azul). Para grandes separaciones entre las dos fuentes, las partículas de prueba solo sienten el campo gravitacional de una sola fuente. En este escenario las órbitas describen una trayectoria casi circular de radio $\sim M$. El periodo coordenado correspondiente es $\sim 8\pi M$.
3. Órbitas que encierran ambos horizontes pasando por el eje de simetría z (órbita gris).

De acuerdo con el análisis descrito en [19], estas trayectorias geodésicas son inestables; notamos que la integración numérica requiere un seguimiento cuidadoso. Si bien algunas orbitas son más estables que otras, eventualmente la partícula de prueba colapsa a la singularidad de alguna de las fuentes. Los diversos tipos de geodésicas nulas dentro del plano meridional han sido estudiadas previamente en [21]. En la Figura 1.6 se da una representación similar para las geodésicas en el plano meridional para un sistema binario de Majumdar-Papapetrou en la situación en que ambas fuentes se acercan hasta llegar al proceso de fusión ($d = 0$). Esto se realiza fijando las condiciones iniciales de la partícula de prueba.

1.4.2 Geodésicas en el plano de simetría $z = 0$

Al restringir el movimiento geodésico al plano $z = 0$ se tiene que las ecuaciones de movimiento (1.55) y (1.56) son separables. Adicionalmente, podemos reescalar las unidades como $\rho \rightarrow \rho/a$ y $M \rightarrow M/d$. Tras estas consideraciones el potencial de interacción U toma la forma

$$U = 1 + \frac{2M}{\sqrt{\rho^2 + 1}}. \quad (1.58)$$

Considerando esta restricción para z la ecuación (1.57) se convierte en

$$\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho, z) = E^2, \quad V_{eff} = \frac{L^2}{\rho^2 U^4} + \frac{\delta}{U^2}. \quad (1.59)$$

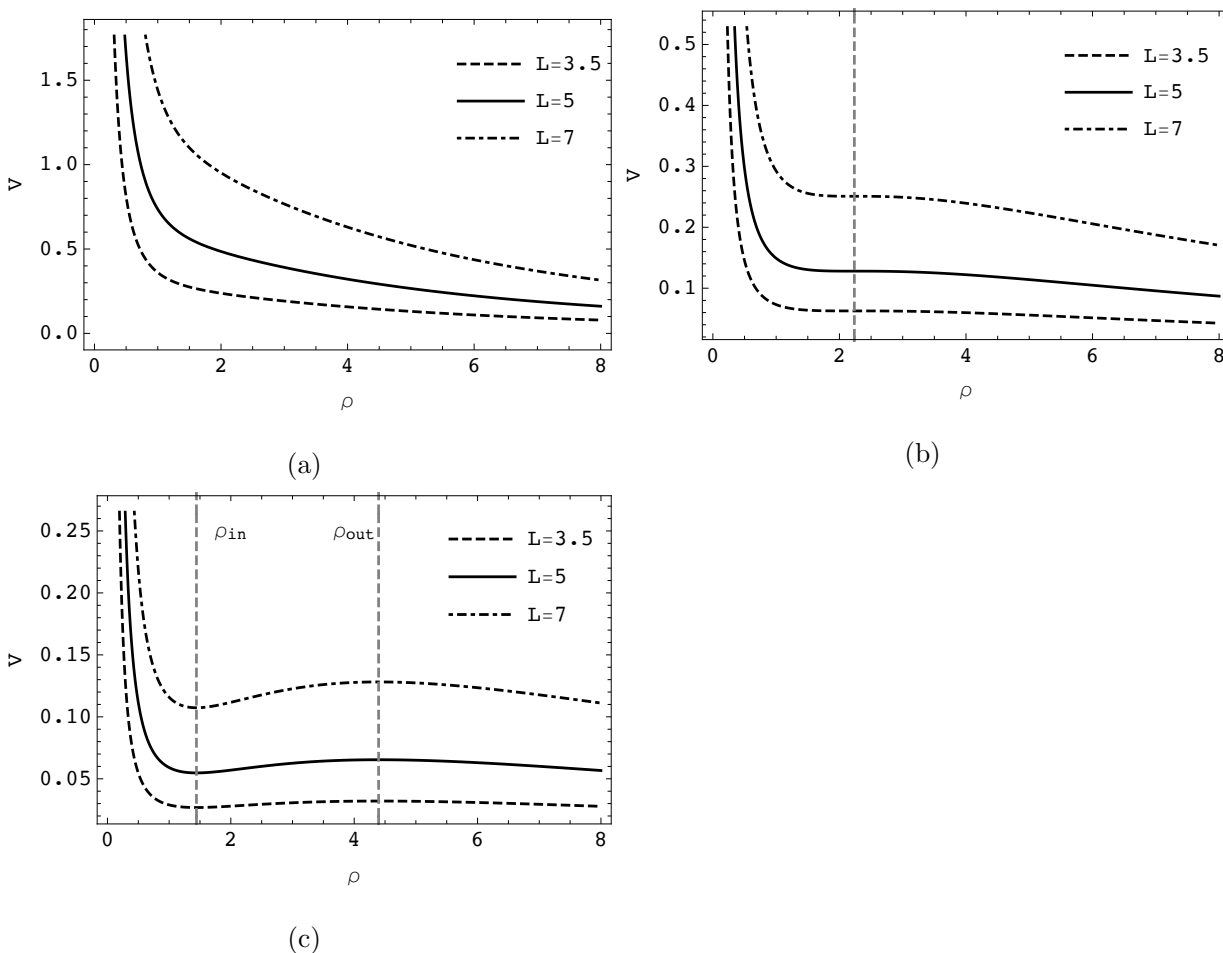


Figura 1.7: Potenciales efectivos para partículas sin masa con diferentes momentos angulares L y diversos valores de M . (a) $M = 1$, donde no existen puntos críticos; (b) $M = \bar{M} = \sqrt{27}/8$, donde solo existe una órbita circular inestable que está localizada por la línea vertical en $\rho = \sqrt{5}$ y; (c) $M = 2.5$, donde existen dos órbitas circulares de radios ρ_{in} y ρ_{out} . Nótese que la existencia de órbitas circulares está enteramente determinada por el valor de M .

Para geodésicas nulas ($\delta = 0$) es posible determinar analíticamente dos puntos críticos que corresponden a órbitas cerradas estables e inestables, tras resolver para ρ la condición $dV_{eff}/d\rho = 0$ se encuentra que

$$(\rho^2 + 1)^{3/2} = 2M(\rho^2 - 1). \quad (1.60)$$

Posteriormente, al realizar la sustitución $\eta^2 = \rho^2 + 1$, esta última expresión puede escribirse como la ecuación cúbica [20]

$$\eta^3 - 2M\eta^2 + 4M = 0. \quad (1.61)$$

Como se indica en [20], la existencia o inexistencia de órbitas circulares de fotones está determinada por el discriminante de esta última ecuación cúbica $\Delta = 128M^2(M^2 - 27/8)$, donde el valor crítico de M que cumple $\Delta = 0$ es $\bar{M}^2 = 27/8$. Cuando $M > \bar{M}$ el discriminante es positivo y se presentan dos órbitas circulares, las cuales corresponden a las soluciones de (1.61), que a saber son [19, 20],

$$\begin{aligned} \rho_{out} &= \sqrt{\frac{4M^2}{9} \left(1 + 2 \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \gamma \right] \right)^2 - 1}, \\ \rho_{in} &= \sqrt{\frac{4M^2}{9} \left(1 - 2 \sin \left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos^{-1} \gamma \right] \right)^2 - 1}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

donde $\gamma = 1 - 27/(4M^2)$. El potencial efectivo V_{eff} posee un máximo en $\rho = \rho_{out}$, donde se localiza una órbita circular inestable, mientras que en $\rho = \rho_{in}$, el potencial efectivo posee un mínimo, donde se localiza una órbita circular estable. Por otro lado, cuando $M = \bar{M}$, las dos órbitas circulares coinciden y se obtiene una órbita circular degenerada localizada en $\rho = \sqrt{5}$, mientras que para $M < \bar{M}$, el discriminante de (1.61) es negativo y no es posible encontrar órbitas circulares para fotones [20, 22]. Los potenciales efectivos para geodésicas nulas son mostrados en la Figura 1.7, para diferentes valores de la masa M y el momento angular L . Para partículas masivas ($\delta = 1$), el potencial efectivo (1.57) posee un término adicional, por lo tanto, el número y la localización de órbitas circulares dependerá tanto de M como del momento angular L [22]. Sin embargo, para este caso, la condición $dV_{eff}/d\rho = 0$, resulta en una ecuación más complicada y, por lo tanto, es difícil determinar las condiciones analíticas para ρ_{in} y ρ_{out} en caso de que existan máximos y mínimos. En la Figura 1.8 se muestran algunos ejemplos de órbitas tipo tiempo y nulas, las cuales son consistentes con las presentadas en [19].

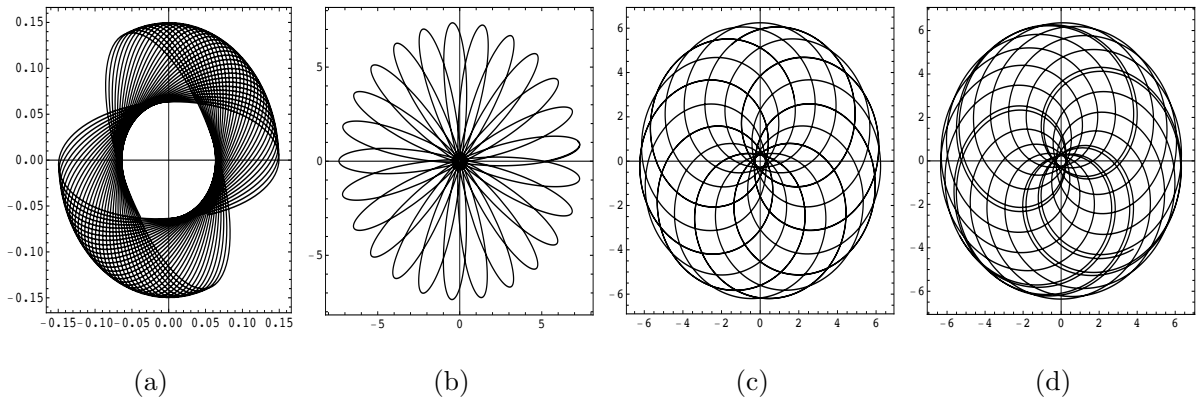


Figura 1.8: Geodésicas tipo tiempo (a) y (b); y geodésicas nulas (c) y (d), en el plano de simetría $z = 0$. Este espacio-tiempo ha sido caracterizado por (a) $E = 0.0920047$, $M = 5$, $d = 1$ y $L = 0.5$; (b) $E = 0.456023$, $M = 10$, $d = 2$ y $L = 2$. Geodésicas nulas en el plano de simetría $z = 0$. Este espacio-tiempo ha sido caracterizado por (c) $E = 0.0366882$, $M = 5$, $d = 1$ y $L = 1$; (d) $E = 0.0366882$, $M = 6$, $d = 1.2$ y $L = 1.2$.

Capítulo 2

Soluciones binarias de Kerr

En este capítulo realizaremos una descripción de la solución binaria de dos fuentes extremas tipo Kerr corrotantes en términos de los parámetros de Komar, así como una descripción de las propiedades dinámicas y algunos aspectos termodinámicos del sistema para regiones cercanas al colapso gravitacional; esta situación obedece una condición dinámica que permite determinar el límite físico de contacto.

2.1 Métrica de Kinnersley-Chitre

Las ecuaciones de Einstein acopladas con las ecuaciones de Maxwell, es decir la gravedad acoplada con la electrodinámica de Maxwell, para espacio-tiempos estacionarios y con simetría axial, se pueden escribir en la formulación de los potenciales de Ernst [23]. Dichos potenciales permiten una descripción alternativa, en términos de potenciales gravitacionales \mathcal{E} y electromagnéticos Φ . Esta formulación ha resultado muy útil ya que las simetrías de las ecuaciones de Ernst han permitido generar nuevas soluciones. Por ejemplo, mediante la técnica de Hauser y Ernst o mediante el método de Sibgatulin que esencialmente emplean el conocimiento de los potenciales de Ernst en el eje de simetría, determinados en función de las fuentes, y se hace una extensión analítica en el espacio complejo de los potenciales de Ernst. Introduciendo nuevas fuentes o nuevos parámetros se generan así, usando las simetrías del espacio complejo de los potenciales de Ernst, nuevos potenciales de Ernst, a partir de los cuales posteriormente se pueden calcular las componentes métricas que son las necesarias para hacer un estudio físico de dichas soluciones.

Un espacio tiempo estacionario axialmente simétrico está descrito y bien definido por la métrica de Papapetrou [10]

$$ds^2 = f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] - f (dt - \omega d\phi)^2, \quad (2.1)$$

y las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío pueden reducirse a una nueva ecuación compleja mediante el formalismo de Ernst [24]

$$(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) (\mathcal{E}_{\rho\rho} + \rho^{-1} \mathcal{E}_\rho + \mathcal{E}_{zz}) = 2 (\mathcal{E}_\rho^2 + \mathcal{E}_z^2). \quad (2.2)$$

Donde el subíndice ρ y z denota una derivada parcial. Un sistema binario de fuentes extremas tipo Kerr puede ser completamente descrito mediante la solución exacta de Kinnersley-Chitre (KCH) [25], donde el potencial de Ernst \mathcal{E} que resuelve (2.2) está descrita por

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{\Lambda - 2\Gamma}{\Lambda + 2\Gamma}, \\ \Lambda &= (\alpha^2 - \beta^2)^2(x^2 - y^2)^2 + p^2(x^4 - 1) + q^2(y^4 - 1) \\ &\quad - 2i\alpha(x^2 + y^2 - 2x^2y^2) - 2ipqxy(x^2 - y^2) - 2i\beta xy(x^2 + y^2 - 2), \\ \Gamma &= e^{-i\gamma_0} [px(x^2 - 1) + iqy(y^2 - 1) \\ &\quad - i(p\alpha + iq\beta)x(x^2 - y^2) + i(p\beta + iq\alpha)y(x^2 - y^2)],\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde (x, y) son coordenadas prolatas esferoidales definidas como

$$x = \frac{r_+ + r_-}{2\kappa}, \quad y = \frac{r_+ - r_-}{2\kappa}, \quad r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \kappa)^2},\tag{2.4}$$

que se relacionan con las coordenadas cilíndricas (ρ, z) mediante

$$\rho = \kappa\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}, \quad z = \kappa xy.\tag{2.5}$$

La solución (2.3) está determinada por los parámetros reales adimensionales $\{p, q, \gamma_0, \alpha, \beta\}$ ¹ y la mitad de la distancia de separación de las fuentes, κ . Además los primeros tres parámetros satisfacen

$$p^2 + q^2 = 1, \quad |e^{-i\gamma_0}| = 1.\tag{2.6}$$

Es posible describir la métrica de KCH, mediante una representación más física, usando la reparametrización presentada por Cabrera [11], donde el potencial de Ernst en el eje de simetría adopta la forma

$$\mathcal{E}(\rho = 0, z) = \frac{z^2 - [M + i(\mathfrak{q} + 2J_0)]z + \frac{2\Delta - R^2}{4} + \frac{\mathfrak{q}(P_1 + P_2)}{2M} - 2\mathfrak{q}J_0 + i\left(P_1 - \frac{2J_0(P_2 + M\mathfrak{q})}{\mathfrak{q}}\right)}{z^2 + (M - i\mathfrak{q})z + \frac{2\Delta - R^2}{4} - \frac{\mathfrak{q}(P_1 + P_2)}{2M} + iP_2},\tag{2.7}$$

$$\Delta = M^2 - \mathfrak{q}^2,$$

donde la solución de KCH contiene ahora cinco parámetros $\{M, \mathfrak{q}, R, P_1, P_2\}$, donde M corresponde a la masa total del sistema, R es la distancia de separación entre las fuentes, mientras que P_1, P_2 y \mathfrak{q} no tienen un significado físico evidente². En el mismo artículo, Cabrera muestra que al resolver las condiciones de regularidad, es posible dar una representación más adecuada para un sistema binario de Kerr corrotante separado por una singularidad cónica [26, 27] o strut (soporte), a partir de la solución exacta de KCH [25, 28], mediante la parametrización física

¹Esté conjunto de parámetros carece de significado físico, sin embargo, es posible adoptar una representación más adecuada para la métrica de KCH en términos de los parámetros de Komar.

²Más tarde se muestra que \mathfrak{q} relaciona las cantidades físicas M_1, M_2 y R a través de una ley dinámica.

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\epsilon \mathfrak{q}}{\sqrt{P_0}}, & q &= -\frac{\epsilon(R+M)}{\sqrt{P_0}}, & e^{-i\gamma_o} &= \epsilon \frac{\mathfrak{q}(\Delta - MR - R^2) + i\delta_0}{MR\sqrt{P_0}}, \\
\alpha &= \frac{\mathfrak{q}\delta_0}{\Delta P_0}, & \beta &= \frac{M\mathfrak{q}(\Delta + MR)}{\Delta P_0}, & P_0 &= (R+M)^2 + \mathfrak{q}^2, \\
\delta_0 &= \sqrt{\Delta(R^2 + MR + \mathfrak{q}^2)^2 + M^2\mathfrak{q}^2(R^2 - \Delta)}, & \epsilon &= \pm 1.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Por otro lado, las integrales de Komar [12] para cada masa y momento angular puede ser calculado a través de las formulas de Tomimatsu [29],

$$M_i = \frac{1}{8\pi} \int_{H_i} \omega \operatorname{Im}(\mathcal{E}_z) d\phi dz, \quad J_i = -\frac{1}{8\pi} \int_{H_i} \omega \left(1 + \frac{1}{2} \omega \operatorname{Im}(\mathcal{E}_z) \right) d\phi dz. \tag{2.9}$$

Explicitamente las masas y momentos angulares son [11]

$$\begin{aligned}
M_{1,2} &= \frac{M}{2} \mp \frac{\epsilon\delta_0}{2(\Delta + MR)}, \\
J_{1,2} &= M_{1,2} \left[\frac{\mathfrak{q}}{2} - \frac{\Delta(R+M)(R^2 + MR + \mathfrak{q}^2) \pm (\Delta + MR)\epsilon\delta_0}{2M\mathfrak{q}(R^2 - \Delta)} \right],
\end{aligned} \tag{2.10}$$

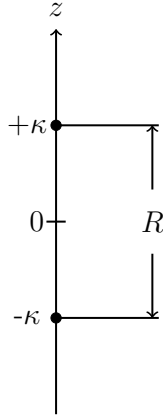


Figura 2.1: Representación esquemática de fuentes desiguales de Kerr en un sistema binario para el caso extremo.

donde $M = M_1 + M_2$ representa exactamente la masa ADM total [30] del sistema, donde ahora la distancia de separación entre las dos fuentes es $R = 2\kappa$, mientras que ϵ se refiere a la localización de las fuentes. Sin pérdida de generalidad, mas tarde tomaremos el caso $\epsilon = 1$, donde la primera/segunda fuente se localiza arriba/abajo respectivamente. La configuración para dos fuentes se muestra en la Figura 2.1, tal que los horizontes de eventos para fuentes extremas se describen como puntos para el caso axialsimétrico. Además resulta interesante mencionar que este resultado físico es invariante bajo la transformación $\{\alpha, \beta, p, q, \gamma_o\} \rightarrow \{\alpha, \beta, -p, -q, \gamma_o - \pi\}$ en los parámetros reales, debido a esto (2.8) muestra dos posibilidades que podrían utilizarse en parámetros reales $\{p, q, e^{-i\gamma_o}\}$. Por otro lado, la diferencia entre las expresiones de las masas está definida por

$$\delta_0 = \epsilon(M_2 - M_1)(\Delta + MR), \tag{2.11}$$

lo que permite que las cantidades físicas $\{M_1, M_2, R\}$ estén relacionados entre sí a través de una ley dinámica que permite estudiar la interacción de agujeros negros con struts, siendo esta definida a través de una ecuación bicubica para \mathfrak{q} ; es decir

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}^6 + 3\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}^4 + 3\mathfrak{a}_2\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{a}_3 &= 0, \\ \mathfrak{a}_1 &= (1/3) [2R^2 + 2MR - 2M^2 + (M_1)], \\ \mathfrak{a}_2 &= (1/3)(R + M) [(R - M)(R^2 + 2MR - M^2) - 2M(M_1 - M_2)^2], \\ \mathfrak{a}_3 &= -M^2(R + M)^2 [R^2 - (M_1 - M_2)^2], \end{aligned} \quad (2.12)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{(k)}^2 &= -\mathfrak{a}_1 + e^{i2\pi k/3} [\mathfrak{b}_o + \sqrt{\mathfrak{b}_o^2 - \mathfrak{a}_o^3}]^{1/3} + e^{-i2\pi k/3} \mathfrak{a}_o [\mathfrak{b}_o + \sqrt{\mathfrak{b}_o^2 - \mathfrak{a}_o^3}]^{1/3}, \\ \mathfrak{a}_o &= \mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{b}_o = (1/2) [3\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3 - 2\mathfrak{a}_1^3], \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Finalmente, se tiene que el potencial de Ernst y las funciones métricas $f(x, y)$, $\gamma(x, y)$, y $\omega(x, y)$ del elemento de línea (2.1) para un sistema binario corrotante de dos fuentes extremas de Kerr están dadas por [11]

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\Lambda - 2\Gamma}{\Lambda + 2\Gamma}, \quad f = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{N}}, \quad e^{2\gamma} = \frac{\mathcal{D}}{\mathfrak{q}^4 R^4 (x^2 - y^2)^4}, \quad \omega = \frac{R(y^2 - 1)(x - 1)\mathcal{W}}{2\mathcal{D}}, \\ \Lambda &= \mathfrak{q}^2(R^2 - \Delta)(x^2 - y^2)^2 + \Delta[\mathfrak{q}^2(x^4 - 1) + (R + M)^2(y^4 - 1)] \\ &\quad + 2i\mathfrak{q}\left\{xy[\Delta(R + M)(x^2 - y^2) - M(MR + \Delta)(x^2 + y^2 - 2)] - \delta_0(x^2 + y^2 - 2x^2y^2)\right\}, \\ \Gamma &= \epsilon \left(\frac{\mathfrak{q}(\Delta - MR - R^2) + i\delta_0}{MRP_0} \right) \left\{ \Delta P_0 [\mathfrak{q}x(x^2 - 1) - i(R + M)y(y^2 - 1)] \right. \\ &\quad \left. - \mathfrak{q} \{M(\Delta + MR) [(R + M)x - i\mathfrak{q}y] - \delta_0 [(R + M)y - i\mathfrak{q}x]\} (x^2 - y^2) \right\}, \\ \mathcal{D} &= \Theta^2 + (x^2 - 1)(y^2 - 1)\Sigma^2, \quad \mathcal{N} = \mathcal{D} + \Theta\Pi - (1 - y^2)(x - 1)\Sigma\mathcal{T}, \quad \mathcal{W} = (x + 1)\Sigma\Pi - \Theta\mathcal{T} \\ \Theta &= \mathfrak{q}^2(R^2 - \Delta)(x^2 - y^2)^2 + \Delta[\mathfrak{q}^2(x^2 - 1)^2 + (R + M)^2(y^2 - 1)^2], \\ \Sigma &= 2\mathfrak{q} \left\{ \mathfrak{q}^2 R x^2 + [2M(\Delta + MR) - \mathfrak{q}^2 R] y^2 - 2\delta_0 x y \right\}, \\ \Pi &= \left(\frac{4}{MR} \right) \left\{ \mathfrak{q}^2 x \left[M^2 R (R(x^2 - y^2) + 2Mx) + \Delta(\Delta - MR - R^2)(1 + y^2) - 4M\delta_0 y \right] \right. \\ &\quad \left. + y \left[2M(\Delta(R + 2M)(R^2 + \mathfrak{q}^2) + M^4 R) y + \delta_0 (M(\Delta + MR)(1 + y^2) - \mathfrak{q}^2 R(1 + x^2)) \right] \right\}, \\ \mathcal{T} &= \left(\frac{4\mathfrak{q}\Delta}{MR} \right) \left\{ -(R^2 + MR + \mathfrak{q}^2)(Rx + R + 2M)x - y \left[M(R^2 - \Delta)y + \delta_0(1 + x) \right] - MP_0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde se ha escrito la solución completa usando la representación de Perjés [31]. En la referencia [11] también se ha descrito una métrica contrarrotante en términos de parámetros físicos; los cuales también satisfacen una ecuación bicúbica. Sin embargo, en el caso contrarrotante resulta más difícil realizar un procedimiento límite para describir el caso físico cuando las fuentes se tocan entre sí.

2.2 Métrica corrotante y sus límites físicos

La métrica (2.14) permite estudiar un sistema binario de agujeros negros que se mantiene separado por un strut (puntal o soporte). En las variables x y y , las fuentes se definen como puntos ubicados en el eje de simetría en $z = R/2$ y $z = -R/2$, respectivamente. Esta métrica contiene tres parámetros reales $\{M_1, M_2, R\}$ arbitrarios y es un caso particular de la solución exacta de KCH [25, 28]. Aunado a ello, esta métrica es asintóticamente plana ya que $f \rightarrow 1$, $\gamma \rightarrow 0$, y $\omega \rightarrow 0$ cuando $(x \rightarrow \infty, |y| < 1)$, además de satisfacer las condiciones de regularidad en el eje de simetría, esto es, $\omega(x, \pm 1) = \omega(\pm 1, y) = 0$. Por otro lado, los momentos angulares descritos en (2.10), se pueden reescribir como

$$J_1 = \frac{M_1^2 \mathfrak{q} P_0}{M [(R + M_1)^2 - M_2^2 + \mathfrak{q}^2]}, \quad J_2 = \frac{M_2^2 \mathfrak{q} P_0}{M [(R + M_2)^2 - M_1^2 + \mathfrak{q}^2]}, \quad (2.15)$$

donde $J = J_1 + J_2$ es el momento angular total del sistema, y cada momento angular J_i es una función de las masas y la distancia de separación entre las dos fuentes, una vez que se conoce una forma explícita del parámetro \mathfrak{q} de la condición dinámica (2.12). En el caso particular $k = 0$, la solución para \mathfrak{q} estará completamente definida por un parámetro real \mathfrak{q} cuyo rango comienza y termina en el valor determinado por la masa total M para todo el rango de R ; es decir, $\mathfrak{q}(R = 0) = \mathfrak{q}(R \rightarrow \infty) = M_1 + M_2$. La solución de este parámetro real en (2.15) permite demostrar que durante el proceso de fusión $R = 0$ cada momento angular J_i está relacionado con su respectiva masa M_i a través de [32]

$$J_1 = M_1 M, \quad J_2 = M_2 M, \quad (2.16)$$

donde dicho proceso concibe un solo agujero negro extremo de masa $M = M_1 + M_2$ y momento angular $J = J_1 + J_2$. Esto permite demostrar que se satisface la condición conocida para agujeros negros extremos

$$J = J_1 + J_2 = (M_1 + M_2)^2. \quad (2.17)$$

Por otro lado, en el límite $R \rightarrow \infty$, cuando las fuentes están muy alejadas entre sí, también es posible recuperar las expresiones convencionales para agujeros negros extremos; es decir

$$\frac{J_1}{M_1^2} = 1, \quad \frac{J_2}{M_2^2} = 1. \quad (2.18)$$

Respecto a las características dinámicas del sistema binario de dos fuentes corrotantes, es posible conocer la fuerza de interacción asociada con el strut, esto puede ser calculado directamente mediante la formulación presentada en [27, 33]. Se obtiene que la fuerza de interacción entre las dos fuentes está dada por [11, 32]³

$$\mathcal{F} = \frac{e^{-\gamma_0} - 1}{4} = \frac{M_1 M_2 [(R + M)^2 - \mathfrak{q}^2]}{(R^2 - \Delta) [(R + M)^2 + \mathfrak{q}^2]}, \quad \gamma_0 \equiv \gamma(x = 1). \quad (2.19)$$

El strut evita que los agujeros negros colapsen entre sí; es decir, que mientras más cercanas se encuentren las fuentes, la fuerza de interacción se hará cada vez más grande. En el caso

³ \mathcal{F} es una medida de la fuerza de interacción y está relacionado con el deficit angular por medio de $\Delta\varphi = -8\pi\mathcal{F}$.

contrario, cuando las fuentes se localizan muy lejos una de otra, desarrollando \mathcal{F} para $R \rightarrow \infty$ se obtiene,

$$\mathcal{F} \simeq \frac{M_1 M_2}{R^2} \left[1 - \frac{2M^2}{R^2} + \frac{4M(M_1^2 + 8M_1 M_2 + M_2^2)}{R^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^4}\right) \right]. \quad (2.20)$$

Por otro lado, el 'area del i -ésimo horizonte de eventos, que denotaremos S_i , se determina a partir de las expresiones obtenidas en [32], al considerar el caso extremo, obteniendo así

$$S_i = 4\pi \frac{M_i^2 [(R+M)^2 + \mathbf{q}^2 - 2a_i \mathbf{q}]^2 + a_i^2 (R^2 - \Delta)^2}{R^2 [(R+M)^2 + \mathbf{q}^2]}, \quad (2.21)$$

donde $a_i = J_i/M_i$ es el momento angular por unidad de masa. Es importante comentar que la fuerza de interacción y el área del horizonte se relacionan mediante la identidad de Gabach-Clement [34] para sistemas estacionarios en vacío; es decir,

$$\sqrt{1 + 4\mathcal{F}} = \frac{8\pi |J_i|}{S_i}. \quad (2.22)$$

2.2.1 Métrica binaria de Kerr en el límite de contacto

Un caso particular no-trivial a considerar dentro de la métrica binaria corrotante de Kerr, es cuando las fuentes tienden al límite de contacto; es decir cuando $R \rightarrow 0$. En la referencia [35, 36], los autores consideran el proceso límite de horizonte cercano para obtener la métrica correspondiente que describe un sistema de dos cuerpos de agujeros negros extremos corrotantes de Kerr, cerca del límite de contacto. Para este fin establecieron un reescalamiento en las coordenadas de Weyl, dado por

$$\begin{aligned} \rho &= \hat{\rho}\lambda, & z &= \hat{z}\lambda, & t &= \frac{\hat{t}}{\lambda}, & \phi &= \hat{\phi} + \frac{1}{2M} \frac{\hat{t}}{\lambda}, \\ p &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2} - 2P}{4}\lambda, & \kappa &= M\lambda, \end{aligned} \quad (2.23)$$

posteriormente efectuaron la sustitución de estos parámetros y tomaron el límite $\lambda \rightarrow 0$ en la métrica presentada en [28], obteniendo por este método una geometría generalizada en el límite cercano al horizonte extremo de Kerr. En este caso, P y p son los parámetros adimensionales que conforman la métrica de KCH.

Motivados por este trabajo [35, 36], aunque siguiendo un método diferente, usaremos (2.14) para realizar un tratamiento de la métrica en el límite de contacto de los horizontes de eventos de un sistema binario de agujeros negros extremos corrotantes de Kerr en términos de los parámetros físicos de Komar. Esto tiene la ventaja de que al tener en cuenta el aspecto físico de la solución, resulta en una representación más adecuada para tratar las propiedades físicas y termodinámicas del sistema binario. Además de que resulta bastante útil para revelar más detalles acerca de la existencia de otro estado final importante en este límite de contacto, en el cual la fuerza de interacción entre los dos agujeros negros es repulsiva y el área de sus horizontes correspondientes aumenta. Cabe resaltar que en [36] no se estudia el caso repulsivo y además

no se muestra cómo se obtiene la forma de p como una función de P en la ecuación (2.23).

Con el propósito de obtener la forma explícita de p de la ecuación (2.23) así como el resto de parámetros reales como una función de P , se empleará el valor para \mathbf{q} cerca del límite de contacto; es decir, $\mathbf{q} = M + C_0 R$, con el objetivo de realizar en (2.8) una expansión de primer orden en la variable R . Esto resulta en

$$\begin{aligned} p &= \epsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - C_0}{2} \frac{R}{2M} \right), & q &= -\epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - C_0}{2} \frac{R}{2M} \right), & \alpha &= \frac{Q}{2\sqrt{2}\epsilon C_0}, \\ \beta &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2C_0} \right), & P &= -\epsilon \left(\frac{1 + 2C_0}{\sqrt{2}} \right), & Q &= -\epsilon \sqrt{1 - P^2}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde a partir de la expresión para P es posible conseguir

$$C_0 = -\frac{\sqrt{2} + 2\epsilon P}{2\sqrt{2}}, \quad (2.25)$$

cuya sustitución en (2.24) permite obtener

$$\begin{aligned} p &= \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2} + 2\epsilon P}{4} \lambda \right), & Q &= -\epsilon \sqrt{1 - P^2}, & q &= -\epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2} + 2\epsilon P}{4} \lambda \right), \\ \alpha &= \frac{\sqrt{1 - P^2}}{\sqrt{2} + 2\epsilon P}, & \beta &= \frac{\sqrt{2} + \epsilon P}{\sqrt{2} + 2\epsilon P} = -\sqrt{\frac{1}{2} + \alpha^2}, & \lambda &= \frac{R}{2M}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Observamos de la expresión anterior que al tomar $\epsilon = -1$ se recupera la forma específica para el parámetro real p de (2.23) así como el resto de los parámetros. Una vez que se conoce el valor de C_0 en términos de los parámetros físicos de Komar, se obtiene una representación física completa del conjunto algebraico $\{\alpha, \beta, p, q, P, Q\}$. De esta manera, teniendo en cuenta una vez más las contribuciones de orden diferente de cero, es decir, $\mathbf{q} = M + C_0 R$ en la condición dinámica (2.12), es posible obtener una ecuación cuadrática para C_0 , a saber es

$$2(M_1^2 + M_2^2)C_0^2 + 4M_1M_2C_0 - M_1M_2 = 0, \quad (2.27)$$

cuya solución está dada por

$$C_0 = \frac{-2M_1M_2 + \epsilon M \sqrt{2M_1M_2}}{2(M_1^2 + M_2^2)}, \quad \epsilon = \pm 1, \quad (2.28)$$

tal que la expresión para ϵP en (2.24) toma la forma

$$\epsilon P = -\left(\frac{(M_1 + M_2)^2 + \epsilon M \sqrt{2M_1M_2}}{\sqrt{2}(M_1^2 + M_2^2)} \right), \quad \epsilon = \pm 1. \quad (2.29)$$

Considerando nuevamente la ecuación (2.12), pero aproximando cerca del límite de contacto para órdenes más altos en R se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= M_1 + M_2 + C_0 R + C_1 R^2 + C_2 R^3 + \mathcal{O}(R^4), \\
C_1 &= \frac{4C_0^3 - 1}{4M}, \\
C_2 &= \frac{64C_0^6 - 8C_0^5 - 28C_0^4 + 8C_0^2 - 2C_0 - 1}{32M^2 C_0},
\end{aligned} \tag{2.30}$$

donde los coeficientes C_1, C_2, \dots , pueden ser obtenidos recursivamente y expresados en términos de C_0 . Una vez conocido el valor de \mathbf{q} en el límite de contacto, es posible sustituir (2.30) en (2.14), de tal suerte que una expansión a primer orden en R permite obtener el potencial de Ernst y las funciones métricas en dicho límite, que expresadas en coordenadas de Boyer-Lindquist⁴ (r, θ) , están descritas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &\simeq 1 - \frac{2M}{r - iM \cos \theta} \left(1 - \frac{M(M_2 - M_1)(r - M) \cos \theta - iM \sin^2 \theta}{\sqrt{2M_1 M_2}} \frac{C_0 R}{r - M} + \mathcal{O}(R^2) \right), \\
f &\simeq \left(1 - \frac{2Mr}{\Xi} \right) \left(1 + \frac{2M(M_2 - M_1)(r + M)(\Xi - 2Mr) + 4M^2 r \sin^2 \theta}{\sqrt{2M_1 M_2} \Xi(\Xi - 2Mr)} \frac{C_0 R \cos \theta}{r - M} + \mathcal{O}(R^2) \right), \\
e^{2\gamma} &\simeq 1 - \frac{M^2 \sin^2 \theta}{(r - M)^2} \left(1 - \frac{4(M_2 - M_1) C_0 R \cos \theta}{\sqrt{2M_1 M_2} (r - M)} + \mathcal{O}(R^2) \right), \\
\omega &\simeq -\frac{2M^2 r \sin^2 \theta}{\Xi - 2Mr} \left(1 - \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{2M_1 M_2}} \frac{3\Xi - 2M(r + 2M \cos^2 \theta)}{\Xi - 2Mr} \frac{C_0 R \cos \theta}{r} + \mathcal{O}(R^2) \right), \\
\Xi &= r^2 + M^2 \cos^2 \theta,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

las cuales definen una métrica deformada para un sistema binario de fuentes extremas rotantes en límite cercano al proceso de fusión. Por otra parte, notemos que el elemento de línea (2.1) en coordenadas de Boyer-Lindquist se escribe como

$$ds^2 = f^{-1} (e^{2\gamma} (dr^2 + (r - M)^2 d\theta^2) + (r - M)^2 \sin^2 \theta d\phi^2) - f (dt - \omega d\phi)^2. \tag{2.32}$$

Con el elemento de línea en este sistema de coordenadas, es fácil identificar que la métrica en el límite de contacto (2.31) nos permite recuperar la métrica de un agujero negro extremo de Kerr de masa $M = M_1 + M_2$, en la situación física en la que $R = 0$. Por otro lado, mediante una expansión en series a primer orden en R de (2.19) y (2.21) es posible derivar las formulas para la fuerza de interacción entre las dos fuentes así como el área del horizonte en el límite de horizonte cercano, esto es

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{M_1 M_2 + \epsilon \sqrt{2M_1 M_2} M}{2(M_1 + M_2)^2}, \\
S_i &= 8\pi M_i M^2 \left(\frac{M - \epsilon \sqrt{2M_1 M_2}}{M_1^2 + M_2^2} \right), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

⁴La transformación directa de coordenadas prolatas esferoidales (x, y) a coordenadas de Weyl (ρ, z) está dada por (2.4), mientras que las coordenadas de Boyer-Lindquist se relacionan directamente con las coordenadas de Weyl mediante $\rho = (r - M) \sin \theta$, $z = (r - M) \cos \theta$.

Esto lleva a concluir la existencia de dos estados en el límite de contacto, uno atractivo ($\mathcal{F} > 0$) y otro repulsivo⁵ ($\mathcal{F} < 0$) con un área de horizonte de eventos menor o mayor, de acuerdo a la elección de $\epsilon = 1$ o $\epsilon = -1$ respectivamente.

Como ya se ha mencionado, el análisis de la ecuación bicúbica (2.12) permite un mejor entendimiento de la dinámica del sistema, tal que, a partir de sus soluciones es posible determinar dos estados posibles para la fuerza de interacción entre las fuentes; como consecuencia en el caso repulsivo, los valores que puede adquirir R están limitados por la fuerza de interacción, ya que a ciertas distancias se empiezan a observar los efectos de la repulsión. Es posible estudiar el comportamiento de este parámetro a partir de (2.13) asignando convenientemente $k = 0$, ya que bajo esta consideración \mathfrak{q} es real y además converge a un mismo valor cuando $R = 0$ y cuando $R \rightarrow \infty$, siendo éste la suma de las masas $M = M_1 + M_2$, ver Figura 2.2(a); esto nos permite identificar un dominio de R para uno de estos estados de interacción. El dominio de R para el segundo estado de interacción, cuando aparecen efectos repulsivos entre las fuentes, ocurre cuando $k = 2$ y sorprendentemente parece estar definido en el dominio $0^+ < R < M_2 - M_1$ con $M_2 > M_1$, ver Figura 2.2(b) además de que tiende a la suma de las masas cuando $R \rightarrow 0$. Entendiendo que en el dominio $0^+ < R < M_2 - M_1$, la ecuación (2.12) tendrá dos soluciones reales positivas, determinando esto los dos estados de interacción. Por otra parte, la solución de la ecuación dinámica cuando $k = 1$ no corresponde a una situación física debido a que no es real cuando $R = 0$, siendo éste el límite donde se da el proceso de fusión.

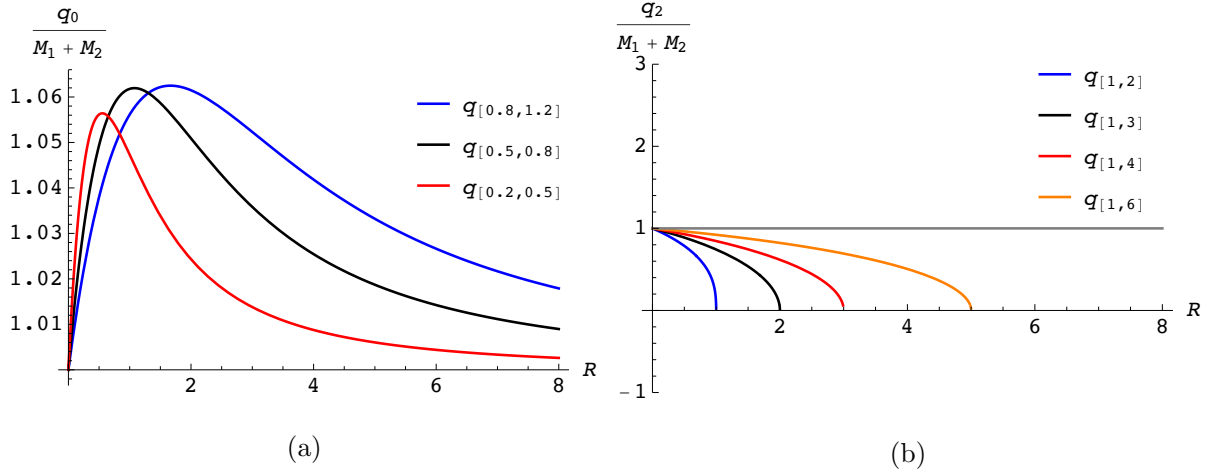


Figura 2.2: (a) Comportamiento del parámetro \mathfrak{q} para $k = 0$ tomando diferentes valores para las masas M_1 y M_2 , denotados por $[M_1, M_2]$. (b) Comportamiento del parámetro \mathfrak{q} para $k = 2$ tomando diferentes valores para las masas M_1 y M_2 .

Para concluir esta sección, discutiremos brevemente la ley de las áreas del horizonte de agujeros negros, que origina la segunda ley de la termodinámica para agujeros negros, para la métrica descrita en el capítulo presente. De acuerdo a la ley de las áreas, si dos agujeros negros se fusionan el área final del horizonte de eventos resultante es mayor que la suma de las áreas de los dos horizontes iniciales [37]; esto se debe de cumplir para toda R ; es decir

⁵Un estado atractivo/repulsivo se define como interacción donde la atracción gravitacional generada es mayor/menor que la producida por la rotación de las fuentes

$$S_{12} \geq S_1 + S_2. \quad (2.34)$$

Primeramente, el área del horizonte de la fuente de Kerr durante la fusión está dada por

$$S_{12} = 8\pi(M_1 + M_2)^2, \quad (2.35)$$

además, es posible comprobar que el área del horizonte para una sola fuente aislada tiende asintóticamente a $S_i(R = \infty) = 8\pi M_i^2$, a partir de la expresión para el momento angular (2.15) al tomar el límite cuando $R \rightarrow \infty$ y usando un valor para $\mathfrak{q} = M_1 + M_2 + C_0 R$.

Por otro lado, hemos visto que para un valor $R \rightarrow 0^+$ en el límite de contacto de las fuentes, existen dos estados; siendo el primero de ellos atractivo, de acuerdo a (2.33) esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0^+) &= \frac{M_1 M_2 + \sqrt{2M_1 M_2}(M_1 + M_2)}{2(M_1 + M_2)^2} > 0, \\ S_1(0^+) + S_2(0^+) &= \frac{8\pi(M_1 + M_2)^3(M_1 + M_2 - \sqrt{2M_1 M_2})}{M_1 + M_2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

De estas últimas expresiones es posible derivar la relación $S_{12}/(S_1 + S_2) \geq 1$, ya que

$$\frac{S_{12}}{S_1 + S_2} = 1 + \frac{\sqrt{2M_1 M_2}}{M_1 + M_2} \geq 1. \quad (2.37)$$

Nótese que la igualdad se cumple solo si alguna de las masas es cero.

El segundo de los estados descritos es el repulsivo, recordemos que para este caso el dominio de R es $0^+ < R < M_2 - M_1$ para $M_2 > M_1$. Nuevamente a partir de (2.33) se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0^+) &= \frac{M_1 M_2 - \sqrt{2M_1 M_2}(M_1 + M_2)}{2(M_1 + M_2)^2} < 0, \\ S_1(0^+) + S_2(0^+) &= \frac{8\pi(M_1 + M_2)^3(M_1 + M_2 + \sqrt{2M_1 M_2})}{M_1 + M_2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

De donde se obtiene $S_{12}/(S_1 + S_2) \leq 1$, ya que

$$\frac{S_{12}}{S_1 + S_2} = 1 - \frac{\sqrt{2M_1 M_2}}{M_1 + M_2} \leq 1. \quad (2.39)$$

Finalmente en la Figura 2.3, se muestra el comportamiento de la suma del área de los horizontes $S_1 + S_2$ respecto al área de la fuente una vez que ha sucedido el proceso de fusión S_{12} para todo R , tanto para el estado atractivo, como el repulsivo. El caso atractivo cumple la ley de las áreas; sin embargo, sorprendentemente el segundo estado de interacción (repulsivo) viola la ley de las áreas para los agujeros negros; es decir, que el área del horizonte de fusión es menor que la suma de las áreas, creemos que esto se debe a que el sistema necesitaría adquirir energía externa al sistema para vencer la fuerza de repulsión y alcanzar esta situación física, lo cual lo hace un proceso termodinámicamente inviable.

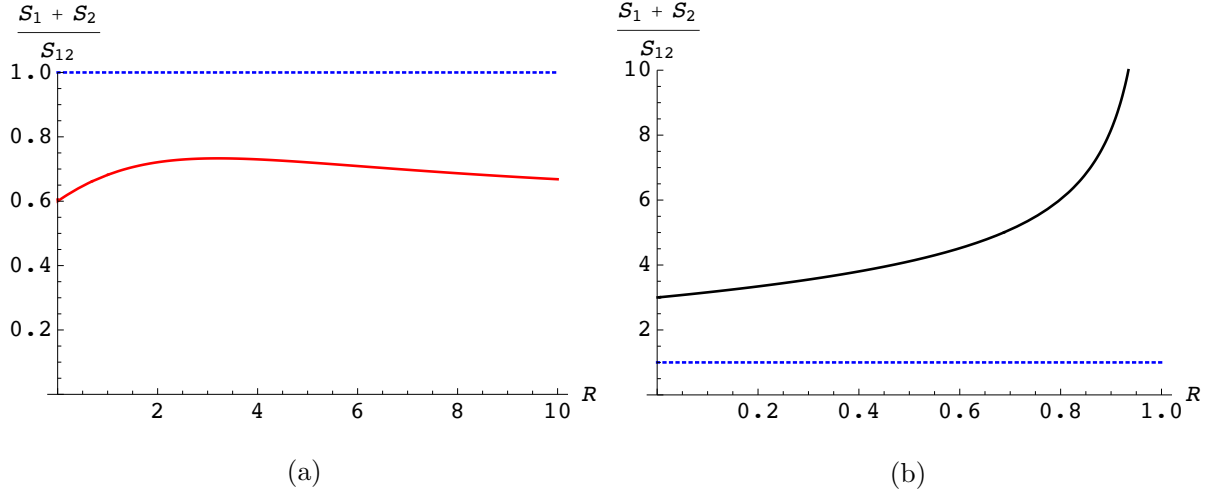


Figura 2.3: Gráficas de la relación $(S_1 + S_2)/S_{12}$ para (a) caso atractivo $(S_1 + S_2)/S_{12} \geq 1$ y (b) caso repulsivo $(S_1 + S_2)/S_{12} \leq 1$.

2.3 Transformación de coordenadas

Como se ha descrito en el presente capítulo, la métrica (2.14) describe un sistema binario de agujeros negros extremos de Kerr corrotantes. Esta métrica es mejor descrita en coordenadas prolatas esferoidales (x, y) , siendo el elemento de línea de Papapetrou en este sistema coordenado dado por

$$ds^2 = \kappa^2 f^{-1} \left(e^{2\gamma} (x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\phi^2 \right) - f(dt - \omega d\phi)^2. \quad (2.40)$$

Para realizar el tratamiento geodésico resulta más conveniente el uso de otros sistemas de coordenadas. Las relaciones (2.4) nos permiten transformar directamente la métrica de coordenadas prolatas esferoidales (x, y) a coordenadas de Weyl (ρ, z) . En la Figura 2.4 se muestra una representación esquemática de esta transformación. Adicionalmente, la transformación a coordenadas de Weyl permite reescribir (2.40) de la forma (2.1),

$$ds^2 = f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] - f(dt - \omega d\phi)^2. \quad (2.41)$$

Por otro lado, para el estudio de las trayectorias geodésicas en el plano $z = 0$ resulta conveniente presentar la métrica (2.14) en coordenadas de Boyer-Linquist (r, θ) , expresión que se obtiene directamente mediante la transformación

$$\rho = (r - M) \sin \theta, \quad z = (r - M) \cos \theta. \quad (2.42)$$

La representación esquemática de las coordenadas (r, θ) se muestra en la Figura 2.4. Esta transformación permite reescribir el elemento de línea (2.1) de la forma

$$ds^2 = f^{-1} (e^{2\gamma} (dr^2 + (r - M)^2 d\theta^2) + \rho^2 d\phi^2) - (dt - \omega d\phi)^2. \quad (2.43)$$

En el siguiente capítulo realizaremos el estudio de las trayectorias permitidas para las partículas de prueba en el espacio-tiempo generado por el sistema de dos agujeros negros corrotantes extremos de Kerr.

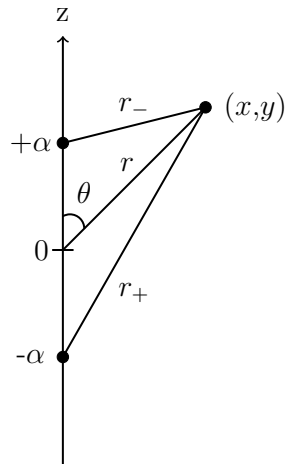


Figura 2.4: Representación esquemática de las coordenadas prolatas esferoidales (x, y) , coordenadas de Weyl (ρ, z) y coordenadas de Boyer-Lindquist .

Capítulo 3

Geodésicas de la métrica binaria corrotante de Kerr

En este capítulo desarrollamos el análisis geodésico alrededor de dos fuentes extremas corrotantes de Kerr, encontrando que es posible obtener órbitas acotadas.

3.1 Ecuaciones de movimiento

Recordemos que para una métrica dada las geodésicas son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange con el Lagrangiano descrito por

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (3.1)$$

Mientras que de la conservación del Hamiltoniano se obtiene

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -\delta, \quad (3.2)$$

donde $\delta = 0$ para geodésicas nulas y $\delta = 1$ para geodésicas tipo tiempo, parametrizadas por el tiempo propio. Las geodésicas tipo espacio no son objeto de interés físico en el presente trabajo.

Es posible expresar la métrica (2.14) en coordenadas de Weyl $x^\mu = (t, \rho, \phi, z)$, lo que nos permite expresar el Lagrangiano de la forma

$$2\mathcal{L} = f^{-1} \left[e^{2\gamma} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + \rho^2 \dot{\phi}^2 \right] - f \left(\dot{t} - \omega \dot{\phi} \right)^2. \quad (3.3)$$

En este sistema de coordenadas los coeficientes métricos son independientes de t y ϕ , esto nos permite identificar las constantes de movimiento

$$E = f\dot{t} - \omega f\dot{\phi}, \quad L = \omega f\dot{t} + (f^{-1}\rho^2 - f\omega^2)\dot{\phi}, \quad (3.4)$$

asociadas a los vectores de Killing ξ_t y ξ_ϕ , respectivamente. La constante E es interpretada como la energía por unidad de masa de una partícula masiva o bien como la energía del fotón clásico, mientras que L es la componente del momento angular en z . El par de ecuaciones de E y L puede ser resuelto para \dot{t} y $\dot{\phi}$, tal que las ecuaciones de movimiento para estas coordenadas son

$$\dot{\phi} = \frac{f(L - \omega E)}{\rho^2}, \quad \dot{t} = \frac{E}{f} + \frac{f\omega(L - \omega E)}{\rho^2}, \quad (3.5)$$

Por otro lado, aplicando el formalismo Lagrangiano, ahora para las coordenadas ρ y z es posible obtener las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= \frac{fe^{-2\gamma}(L - E\omega)}{2\rho^2} \left[2fE \frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \left(\frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{2f}{\rho} \right) (L - E\omega) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2f^{-1}e^{2\gamma}} (\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) \frac{\partial}{\partial\rho} (f^{-1}e^{2\gamma}) - \frac{\dot{\rho}\dot{z}}{f^{-1}e^{2\gamma}} \frac{\partial}{\partial z} (f^{-1}e^{2\gamma}) - \frac{E^2}{2fe^{2\gamma}} \frac{\partial f}{\partial\rho}, \\ \ddot{z} &= \frac{fe^{-2\gamma}(L - E\omega)}{2\rho^2} \left[2fE \frac{\partial\omega}{\partial z} - (L - E\omega) \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2f^{-1}e^{2\gamma}} (\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) \frac{\partial}{\partial z} (f^{-1}e^{2\gamma}) - \frac{\dot{\rho}\dot{z}}{f^{-1}e^{2\gamma}} \frac{\partial}{\partial\rho} (f^{-1}e^{2\gamma}) - \frac{E^2}{2fe^{2\gamma}} \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A partir de la ecuación (3.2) es posible definir un potencial efectivo $V(\rho, z)$ de la forma $\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = V(\rho, z)$, esto es,

$$V(\rho, z) = e^{-2\gamma} \left(E^2 - \frac{f^2(L - E\omega)^2}{\rho^2} - f\delta \right). \quad (3.7)$$

Notemos que debido a la forma de $V(\rho, z)$, el movimiento de la partícula de prueba está restringido a la región $V(\rho, z) \geq 0$. Es importante mencionar que el conjunto de ecuaciones (3.5) y (3.6) corresponden al movimiento geodésico en la vecindad de un sistema estacionario y con simetría axial, para una partícula de prueba eléctricamente neutra. En la referencia [38] se estudia el movimiento geodésico para un sistema binario contrarrotante. Desde luego que los sistemas binarios siendo soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein presentan algunas propiedades geodésicas cualitativamente similares, sin embargo, cada sistema binario está caracterizado por diferentes parámetros, así que resulta interesante estudiar el movimiento en un sistema corrotante en el cual es posible determinar un límite físico de contacto definido por (2.12) como se ha presentado en el Capítulo 2.

3.2 Movimiento en el plano ecuatorial

En esta sección estudiaremos el movimiento geodésico dentro del plano ecuatorial, así llamado el plano $z = 0$. Bajo esta restricción, la ecuación (3.6) para ρ toma la forma

$$2fe^{2\gamma}\ddot{\rho} = \frac{f(L - E\omega)^2}{\rho^3} \left(2f - \rho \frac{\partial f}{\partial\rho} \right) - E^2 \frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{2Ef^3(L - E\omega)}{\rho^2} \frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \dot{\rho}^2 f^2 \frac{\partial}{\partial\rho} (f^{-1}e^{2\gamma}). \quad (3.8)$$

Es importante enfatizar que, a menos que se indique lo contrario, en la presente sección se consideran los coeficientes métricos como $e^{2\gamma} = e^{2\gamma}(\rho, z = 0)$, $f = f(\rho, z = 0)$ y $\omega = \omega(\rho, z = 0)$. Por otra parte, el lado derecho de la ecuación (3.7) es un polinomio de segundo grado para la energía E , de modo que es posible reescribirla como

$$\dot{\rho}^2 = e^{-2\gamma} \left(\frac{\rho^2 - f^2 \omega^2}{\rho^2} \right) (E - V_+) (E - V_-), \quad (3.9)$$

donde los potenciales V_{\pm} quedan determinados en función de los coeficientes métricos como

$$V_{\pm} = \frac{-f^2 L \omega \pm \rho \sqrt{f^2 L^2 + \delta \rho^2 f - \delta f^3 \omega^2}}{\rho^2 - f^2 \omega^2}. \quad (3.10)$$

R	\mathfrak{q}_0	\mathfrak{q}_2	$V_+(\mathfrak{q}_0)$	$V_-(\mathfrak{q}_0)$	$V_+(\mathfrak{q}_2)$	$V_-(\mathfrak{q}_2)$
2	3.17552	-	0.650229	-0.513661	-	-
0.99	3.13212	0.538906	0.65092	-0.511609	0.809769	-0.565055
0.5	3.08162	2.35956	0.651595	-0.510885	0.651387	-0.513408
0.1	3.01921	2.89563	0.651933	-0.510915	0.651927	-0.510968
0.01	3.00199	2.98996	0.651951	-0.510885	0.651951	-0.510886
0.001	3.0002	2.999	0.651951	-0.510885	0.651951	-0.510885

Tabla 3.1: Valores numéricos del potencial efectivo V_{\pm} para partículas masivas ($\delta = 1$) con una distancia radial fija $\rho = 5$. Los parámetros se han asignado $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ y $L = 2.5$. El valor numérico para el potencial efectivo de una sola fuente de Kerr extrema cuya masa es $M = M_1 + M_2$, está dado por $V_+ \approx 0.651951$ y $V_- \approx -0.510885$.

Vale la pena mencionar que la condición $z = 0$ podría imponer en algunas ocasiones alguna condición extra a las geodésicas, debido a la segunda ecuación de (3.6), sin embargo, aún no hemos llegado a un resultado concluyente al respecto. En el límite en el que $R \rightarrow 0$, esta expresión se reduce al potencial radial para un solo agujero negro de Kerr extremo ($a = M$) descrito por (1.43). Recordemos que en este límite $\mathfrak{q} \rightarrow M$, y que en el plano ecuatorial la coordenada ρ se relaciona con la coordenada r de Boyer-Lindquist vía $\rho = r - M$. Adicionalmente, para $\rho \rightarrow \infty$ la función potencial tiende asintóticamente a $V_{\pm} = \pm 1$ para partículas masivas y a $V_{\pm} = 0$ para fotones. Las Tablas 3.1 y 3.2 muestran valores numéricos del potencial efectivo para partículas masivas ($\delta = 1$) y para fotones ($\delta = 0$), con una distancia radial fija, conforme

R	\mathfrak{q}_0	\mathfrak{q}_2	$V_+(\mathfrak{q}_0)$	$V_-(\mathfrak{q}_0)$	$V_+(\mathfrak{q}_2)$	$V_-(\mathfrak{q}_2)$
2	3.17552	-	0.223301	-0.0947531	-	-
0.99	3.13212	0.538906	0.225808	-0.0885492	0.335838	-0.0911235
0.5	3.08162	2.35956	0.226825	-0.868395	0.226222	-0.0882428
0.1	3.01921	2.89563	0.227252	-0.0862335	0.227234	-0.0862754
0.01	3.00199	2.98996	0.227273	-0.0862072	0.227272	-0.0862076
0.001	3.0002	2.999	0.227273	0.0862069	0.227273	-0.0862069

Tabla 3.2: Valores numéricos del potencial efectivo V_{\pm} para partículas sin masa ($\delta = 0$) con una distancia radial fija $\rho = 5$. Los parámetros se han asignado $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ y $L = 2.5$. El valor numérico para el potencial efectivo de una sola fuente de Kerr extrema cuya masa es $M = M_1 + M_2$, está dado por $V_+ \approx 0.227273$ y $V_- \approx -0.0862069$.

la distancia entre las fuentes tiende a cero; es importante mencionar que se muestran las dos soluciones reales de (2.12), \mathfrak{q}_0 y \mathfrak{q}_2 descritos en la Sección 2.2 y el potencial efectivo asociado a cada \mathfrak{q} donde resulta evidente que en el proceso de fusión $R \rightarrow 0$, el potencial efectivo V_{\pm} de la métrica binaria corrotante tiende al potencial efectivo para una sola fuente de Kerr extrema descrito por (1.43) cuya masa y parámetro de rotación a está dada por $a = M = M_1 + M_2$.

A partir de la expresión (3.10) es posible realizar un análisis de las propiedades del movimiento radial dentro del plano ecuatorial tanto para partículas masivas como para fotones. Las órbitas de interés físico son aquellas en las que las partículas de prueba poseen una energía $E \geq V_+$.

3.2.1 Geodésicas tipo tiempo

En la figura 3.1 se muestran las funciones potenciales V_+ para espacios-tiempos caracterizados con $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $R = 2$ y con distinto valor de momento angular $L \geq 0$ para partículas de prueba masivas; con esta condición para el momento angular se entiende que las trayectorias son órbitas prógradas, es decir, que el momento angular de la partícula de prueba tiene el mismo sentido que la configuración binaria de Kerr. A partir de estos perfiles de potencial, es posible identificar diferentes escenarios físicos de acuerdo a la energía E .

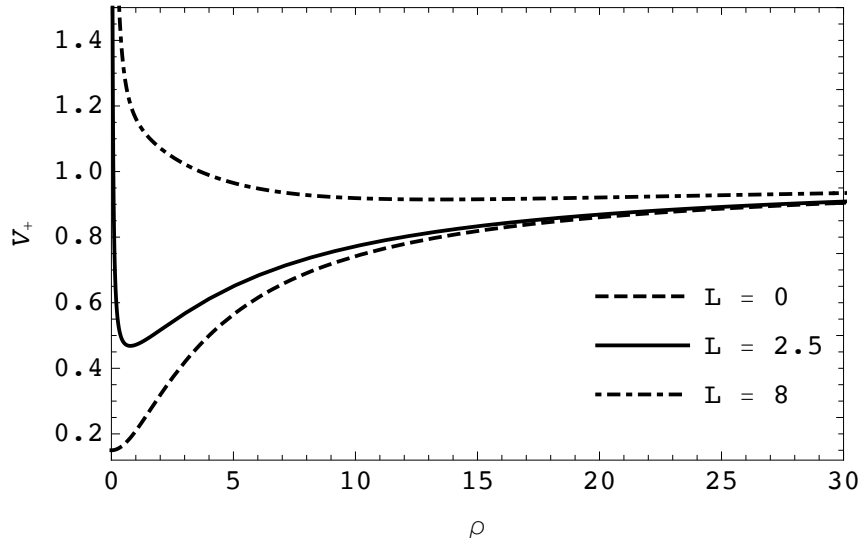


Figura 3.1: Potencial efectivo V_+ para la solución de doble Kerr corrotante en el plano ecuatorial para partículas masivas. Los parámetros se han fijado como: $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ y $R = 2$.

De este modo para partículas masivas podemos identificar los siguientes tipos de órbitas:

(a) Órbitas circulares estables. Para partículas masivas la presencia de un mínimo local en el potencial efectivo nos permite identificar la existencia de órbitas circulares estables; esto sucede cuando se cumple la condición,

$$V(\rho) = E^2 - \frac{f^2 (L - E\omega)^2}{\rho^2} - f = 0, \quad (3.11)$$

es decir, cuando $\dot{\rho} = 0$. Además, se pueden obtener de forma explícita las condiciones de energía y momento angular para órbitas circulares estables al resolver el sistema de ecuaciones $V(\rho) = dV(\rho)/d\rho = 0$, de donde se obtiene

$$\begin{aligned} E_{circ} &= \frac{\rho\sqrt{f}}{\sqrt{\rho^2 - f^2\chi^2}}, & L_{circ} &= E(\omega + \chi), \\ \chi &= \frac{\rho\left(-\omega_{,\rho}f^2 + \sqrt{\omega_{,\rho}^2f^4 + f_{,\rho}\rho(2f - f_{,\rho}\rho)}\right)}{f(2f - f_{,\rho}\rho)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde el subíndice denota derivada parcial y la variable ρ en estas últimas expresiones corresponde al radio de la órbita circular. Adicionalmente es posible obtener el radio de la órbita estable circular más interna r_{ISCO} , al sustituir (3.12) en la expresión $d^2V(\rho)/d\rho^2 = 0$. De donde se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} &\left(\omega_{,\rho}\omega_{,\rho\rho}f^5\rho(2f - f_{,\rho}\rho) + \omega_{,\rho}^2f^4[2f^2 + (-f_{,\rho}^2 + f_{,\rho\rho}f)\rho^2] + \right. \\ &\omega_{,\rho}f^2\sqrt{\omega_{,\rho}^2f^4 + f_{,\rho}\rho(2f - f_{,\rho}\rho)}[2f^2 + 2f_{,\rho}^2\rho^2 - f\rho(4f_{,\rho} + f_{,\rho\rho}\rho)] \\ &\rho(2f - f_{,\rho}\rho)(3f_{,\rho}f^2 - 4f_{,\rho}^2f\rho + f_{,\rho}^3\rho^2 + f^2[f_{,\rho\rho}\rho - \\ &\left. \omega_{,\rho\rho}f\sqrt{\omega_{,\rho}^2f^4 + f_{,\rho}\rho(2f - f_{,\rho}\rho)}]) \right) / \left(f^2\rho^2(\omega_{,\rho}^2f^4 + 3f_{,\rho}f\rho - \right. \\ &\left. f_{,\rho}^2\rho^2 - f^2[2 + \omega_{,\rho}\sqrt{\omega_{,\rho}^2f^4 + f_{,\rho}\rho(2f - f_{,\rho}\rho)}]) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Es importante mencionar que las condiciones (3.12) y (3.13) en forma general han sido presentadas previamente por [39].

Por otro lado, para ciertas configuraciones de masas $\{M_1, M_2\}$ es posible identificar órbitas circulares inestables. Hemos encontrado que para un R dado existe un límite para las masas, a partir del cual comienzan a aparecer estas órbitas circulares inestables. Sin embargo, a diferencia del caso de Majumdar-Papapetrou del Capítulo 1, resulta bastante complicado encontrar una expresión analítica para este límite.

(b) Órbitas de dispersión. Debido al comportamiento asintótico que presenta V_+ , es posible identificar geodésicas abiertas, o bien, no acotadas, para la condición $E > 1$ para el caso de geodésicas tipo tiempo. Para estas órbitas las partículas sólo sufren una deflexión en su trayectoria al acercarse al sistema binario, pero no son atrapadas por él.

(c) Órbitas acotadas. En la situación física en la que el momento angular de la partícula $L \geq 0$, es posible obtener órbitas acotadas que precisan solamente para partículas masivas, cuya energía satisface $E_{min} < E < 1$, donde E_{min} corresponde al valor mínimo del potencial $V(\rho)$.

Además, para esta configuración no es posible obtener órbitas que colapsan hacia a alguna de las fuentes, como se muestra en la Figura 1.4(c), debido a la localización de las fuentes en $z = \pm R/2$

para valores finitos de R , debido a que las fuentes se encuentran fuera del plano $z = 0$, donde está restringido el movimiento de las partículas. Como puede observarse en la misma figura, se presenta un efecto tipo barrera de potencial para todo $L \neq 0$, tal que la partícula de prueba no logra tocar el eje que une las fuentes (strut). Por otro lado, cuando $L = 0$ este efecto tipo barrera de potencial desaparece, permitiendo que la partícula de prueba alcance el mencionado eje.

Como se mencionó en el Capítulo 2, es posible identificar dos situaciones cuando ambas fuentes estan próximas al límite de contacto físico; el primero es cuando la fuerza de interacción es atractiva y el segundo cuando es repulsiva. Como se mencionó en la Sección 2.2 la existencia de estos dos estados sucede cuando la distancia de separación entre las dos fuentes cumple $R < M_2 - M_1$. De modo que es posible ver el comportamiento de la función V_+ conforme $R \rightarrow 0$. En la Figura 3.2, se observa la función V_+ para partículas masivas, con $R = 0.99$ y cada valor de q dado por (2.12) cuya fuerza de interacción está determinada por (2.19); la Figura 3.2(a) corresponde al caso atractivo, mientras que la Figura 3.2(b) representa el caso repulsivo, para $L \neq 0$; en ambos casos se observa un potencial con posibles órbitas acotadas que precesan, órbitas circulares u órbitas dispersadas, así como también se observa que una partícula de prueba con momento angular distinto de cero no puede tocar el eje de simetría. Vale la pena mencionar que para el caso repulsivo la función potencial V_+ diverge cuando $\rho^2 - f^2\omega^2 = 0$, y, como consecuencia, tenemos una especie de barrera de potencial más alejada del eje de simetría respecto al caso atractivo. Como ya se describió para (3.10), conforme R se aproxima más y más a cero, las funciones de potencial para los dos objetos tienden a ser más similares, hasta recuperar el potencial para una sola fuente extrema de Kerr, como se ilustra en las Tablas 3.1 y 3.2.

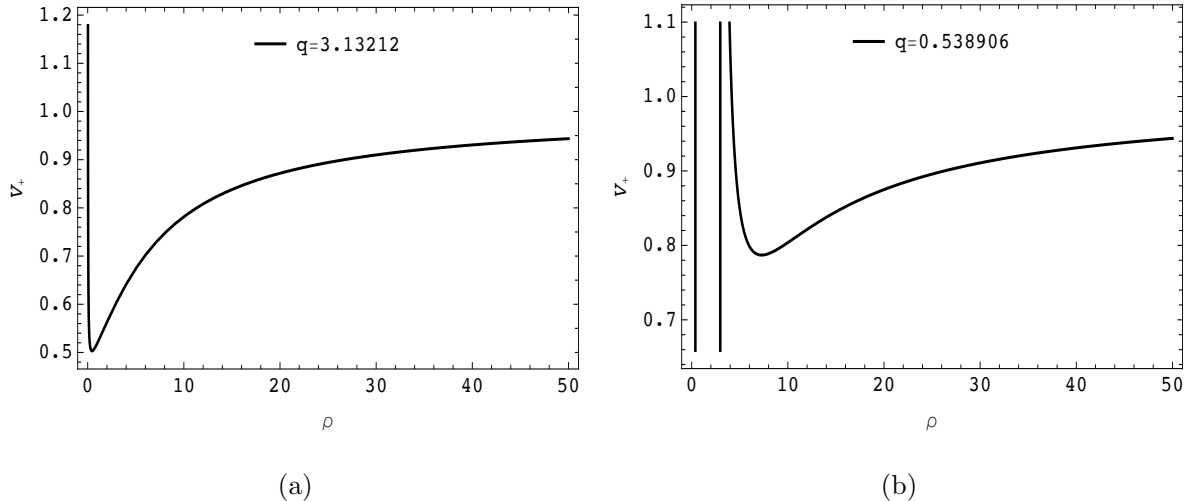


Figura 3.2: Potencial efectivo V_+ para la solución de doble Kerr corrotante en el plano ecuatorial para partículas masivas, los parámetros se han asignado como $L = 3$, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $R = 0.99$, donde la fuerza de interacción entre las fuentes es (a) atractiva y (b) repulsiva.

En la Figura 3.3, se muestran ejemplos de cada tipo de órbitas para partículas masivas. Es posible obtener órbitas circulares estables para la configuración de dos fuentes extremas de Kerr

corrotantes (Figura 3.3(a)). Las órbitas dispersadas corresponden a trayectorias no acotadas, una vez que éstas orbitan alrededor del eje de simetría, las partículas de prueba escapan hacia el infinito, Figura 3.3(c). Se entiende que en la Figura 3.3, el eje de simetría corresponde al punto situado en $(0,0)$. Por otra parte, para partículas masivas es posible obtener dos tipos de órbitas acotadas; para $L \neq 0$ la partícula de prueba sigue una órbita típica en un potencial atractivo y nunca logra alcanzar el eje de simetría. Por otro lado, para $L = 0$, es posible obtener órbitas de dispersión y órbitas de presección, donde las partículas de prueba logran alcanzar el eje de simetría.

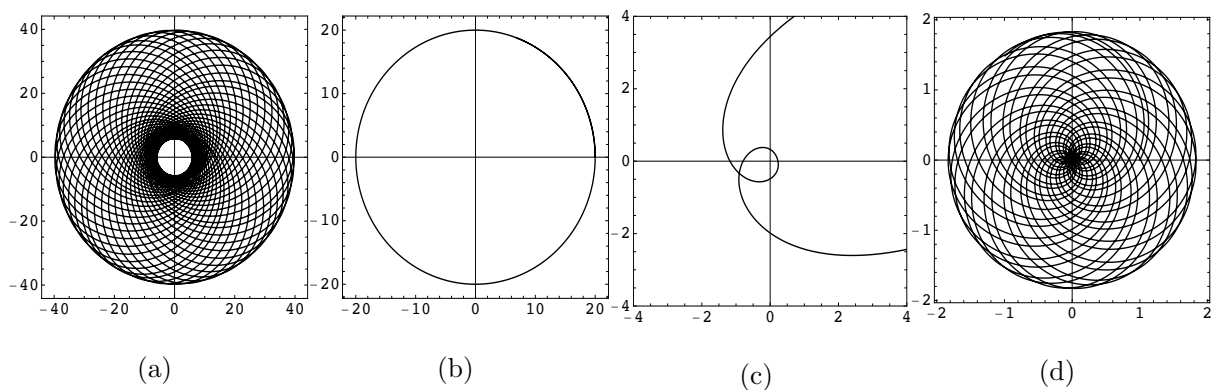


Figura 3.3: Diferentes clases de órbitas en el plano ecuatorial para partículas masivas. Los parámetros E , L y la condición inicial ρ_0 se han fijado como: (a) $E = 0.945$, $L = 8$ y $\rho_0 = 13$; (b) $E = 0.9386$, $L = 9.2213$ y $\rho_0 = 20$; (c) $E = 1.1$, $L = 5$ y $\rho_0 = 10$; y (d) $E = 0.3$, $L = 0$ y $\rho_0 = 1$. El resto de parámetros se han asignado $R = 2$, $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$. El parámetro q se ha calculado a partir de estos últimos.

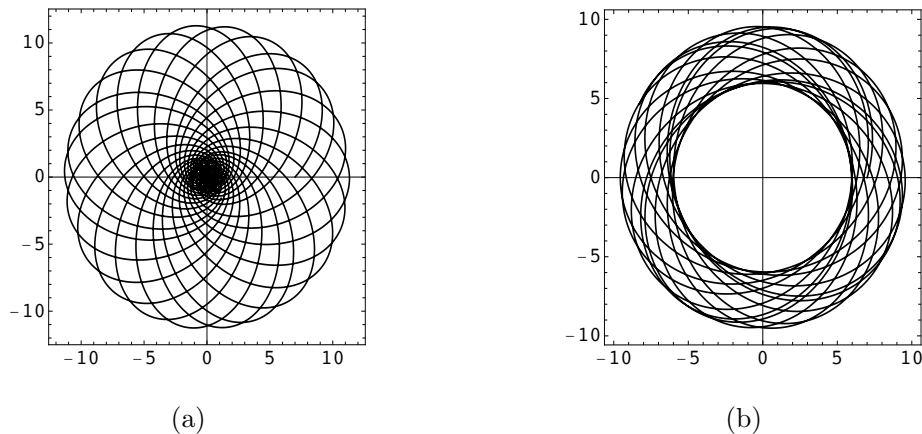


Figura 3.4: Órbitas en el plano ecuatorial para partículas masivas, los parámetros se han asignado como $R = 0.99$, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $L = 3$, $E = 0.8$, $\rho_0 = 7$. Para este valor de R las soluciones para q son (a) $q = 3.13212$, caso atractivo y (b) $q = 0.5389$, caso repulsivo.

En la Figura 3.4, se muestra un ejemplo para órbitas con $R = 0.99$ que, como ya se ha mencionado, existen dos casos para la fuerza de interacción entre las fuentes. La partícula de prueba se ha caracterizado con los mismos parámetros en ambos casos y con las mismas

condiciones iniciales, donde la diferencia más significativa es la proximidad al eje de simetría aún con los mismos parámetros. La Figura 3.4(a) corresponde al escenario físico en que la fuerza de interacción entre las fuentes es atractiva, mientras que la Figura 3.4(b) corresponde al repulsivo.

3.2.2 Geodésicas nulas

A continuación estudiaremos las propiedades de las geodésicas para partículas sin masa, desde el punto de vista de los potenciales efectivos. El potencial efectivo a considerar es,

$$V_+ = \frac{fL}{\rho^2 + f\omega}, \quad (3.14)$$

donde podemos identificar que en caso existir puntos críticos (máximos y mínimos locales) estos serán independientes del momento angular.

En la Figura 3.5, se muestran los potenciales V_+ para espacios tiempos caracterizados con $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $R = 2$ y diferente valor de momento angular, donde es posible identificar que para esta configuración de parámetros no existen máximos y mínimos locales, es decir, no tenemos órbitas cerradas. Ante este escenario es natural preguntarse si existen puntos críticos (máximos y mínimos) para el potencial V_+ para el caso de partículas sin masa como fotones, debido a que las órbitas circulares inestables son relevantes para el estudio de fenómenos físicos como sombras se agujeros negros. Una primera respuesta podría ser que el hecho de que el potencial (3.10) tienda al correspondiente para una sola fuente de Kerr extrema, eventualmente nos permitiera identificar órbitas circulares inestables y recuperar lo que ya conocemos para el estudio de un solo objeto, donde es bien sabido que para partículas sin masa es posible identificar solo un punto crítico correspondiente a este tipo de órbitas.

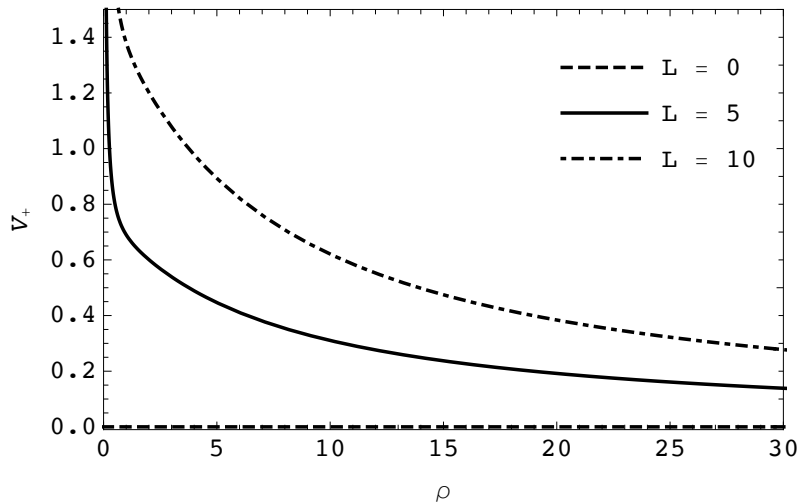


Figura 3.5: Potencial efectivo V_+ para la solución de doble Kerr corrotante en el plano ecuatorial para fotones, para diferentes valores de L . Los parámetros se han asignado como: $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ y $R = 2$.

Sin embargo, como ya se ha mencionado, existen dos estados de interacción entre las fuentes para el dominio $0^+ < R < M_2 - M_1$. Esto nos permite identificar la existencia de dos puntos críticos cuando la interacción entre las dos fuentes es repulsiva. En la Figura 3.6, se muestra el potencial efectivo V_+ para diferentes valores de R cuando la fuerza de interacción entre las fuentes es repulsiva, es decir, se ha empleado la solución \mathfrak{q}_2 de (2.12). Además, conforme R tiende a cero, el potencial V_+ tiende a ser el mismo que cuando éstas se atraen.

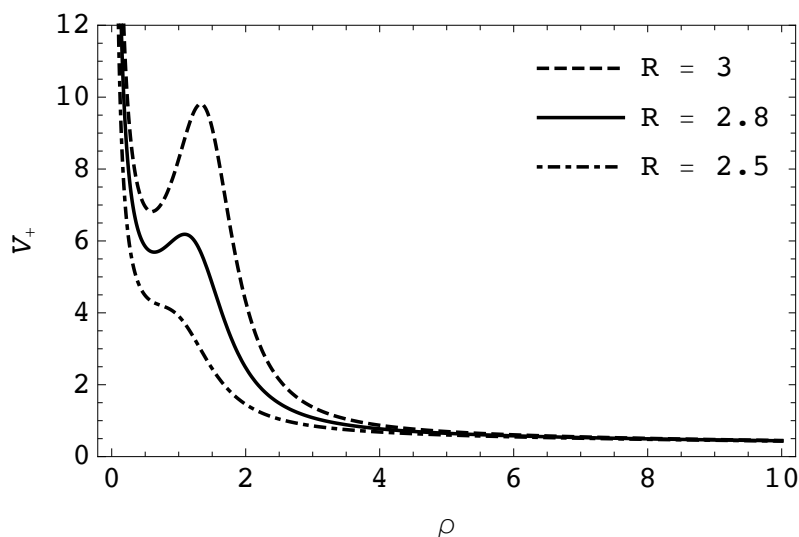


Figura 3.6: Potencial efectivo V_+ para la solución de doble Kerr corrotante en el plano ecuatorial para fotones, para diferentes valores de R . Los potenciales corresponden al caso repulsivo entre las fuentes. Los parámetros se han asignado como: $M_1 = 1$, $M_2 = 6$, mientras que \mathfrak{q} se ha calculado para cada R .

De este modo podemos clasificar las órbitas de partículas sin masa de la siguiente manera:

(a) Órbitas circulares. Para el caso en el que la fuerza de interacción entre las fuentes es repulsiva, es posible identificar dos puntos críticos en el potencial V_+ que da lugar a órbitas circulares. Donde la localización de éstas órbitas está dada por las soluciones reales positivas de la condición, $d(V(\rho))/d\rho = 0$.

(b) Órbitas acotadas. Para partículas de prueba cuya energía esté entre los valores que toma el potencial efectivo V_+ en los puntos críticos, es posible identificar órbitas acotadas que precesan alrededor del eje de simetría. Naturalmente dada esta condición, solo es posible identificar este tipo de órbitas en el caso repulsivo.

(c) Órbitas dispersadas. Este tipo de órbitas está presente cuando la fuerza de interacción entre las fuentes es tanto atractiva como repulsiva.

En la Figura 3.7 se muestran diferentes tipos de órbitas de dispersión cuando la fuerza de interacción entre las fuentes es atractiva. Por otro lado en la Figura 3.8, se muestra un ejemplo de cada tipo de órbita cuando la fuerza de interacción es repulsiva.

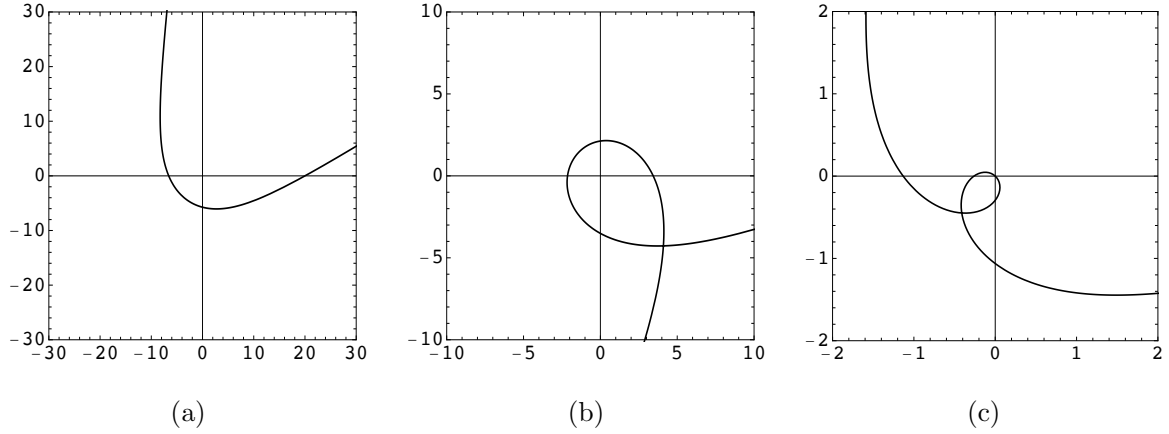


Figura 3.7: Órbitas en el plano ecuatorial para fotones. Los parámetros E , L y ρ_0 se han asignado: (a) $E = 1.3$, $L = 15$ y $\rho_0 = 20$; (b) $E = 1.8$, $L = 15$ y $\rho_0 = 20$ y; (c) $E = 0.5$, $L = 0$ y $\rho_0 = 20$. El resto de parámetros se han asignado $R = 2$, $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$. El parámetro q se ha calculado a partir de estos últimos (ecuación bicúbica).

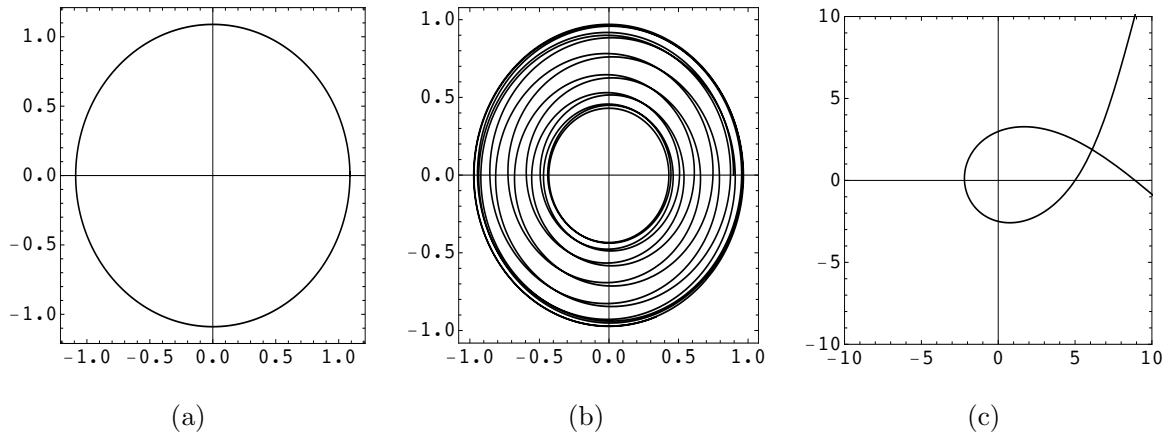


Figura 3.8: Órbitas en el plano ecuatorial para fotones, caso repulsivo. Los parámetros se han asignado: (a) $E = 6.1848$, y $\rho_0 = 1.0891$; (b) $E = 6.1$ y $\rho_0 = 0.895$ y; (c) $E = 2$ y $\rho_0 = 5$. El resto de parámetros se han asignado $R = 2.8$, $M_1 = 1$ y $M_2 = 6$. El parámetro q_2 se ha calculado a partir de estos últimos. Los puntos críticos son independientes del momento angular L . Con estos parámetros la localización de las órbitas circulares estable e inestables es $\rho_{min} = 0.63637$ y $\rho_{max} = 1.0891$ respectivamente.

3.3 Movimiento en el plano meridional

Es posible estudiar el comportamiento de las trayectorias geodésicas dentro del plano que contiene a ambas fuentes, al imponer la restricción $\dot{\phi} = \text{constante}$, es decir, $\dot{\phi} = 0$. De modo que a partir de (3.5) es posible obtener la relación

$$L = \omega(\rho, z)E. \quad (3.15)$$

Donde ω es el coeficiente métrico mostrado en (2.14), escrito en coordenadas de Weyl. Si imponemos esta misma restricción, $\dot{\phi} = 0$, a la ecuación de movimiento en ϕ para una sola fuente de Kerr extrema descrita por (1.40), y posteriormente se resuelve para L , se obtiene la relación,

$$L = \frac{2EM^2r}{M^2 - (r - M)^2 \csc^2 \theta}, \quad (3.16)$$

descrita en coordenadas de Boyer-Lindquist. Por otra parte, se obtiene una relación idéntica a partir de (3.15) al realizar una expansión en series cuando $R \rightarrow 0$ y realizar la transformación de coordenadas correspondiente, recordemos que en este límite $\mathfrak{q} \rightarrow M$.

Es importante mencionar que al restringir el movimiento de las partículas de prueba a un plano meridional el Lagrangiano descrito por (3.3) toma la forma

$$2\mathcal{L} = f^{-1} [e^{2\gamma}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)] - ft^2. \quad (3.17)$$

Donde solo es posible identificar una constante de movimiento asociada al vector de Killing temporal ξ_t , y una dependencia funcional para L , como se muestra en (3.15). Así, tras imponer estas restricciones es posible reescribir las ecuaciones de movimiento de la forma,

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= -\frac{1}{2f^{-1}e^{2\gamma}} \frac{\partial}{\partial \rho} (f^{-1}e^{2\gamma}) (\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) - \frac{1}{f^{-1}e^{2\gamma}} \frac{\partial}{\partial z} (f^{-1}e^{2\gamma}) \dot{\rho}\dot{z} - \frac{E^2}{2fe^{2\gamma}} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{2f^{-1}e^{2\gamma}} \frac{\partial}{\partial z} (f^{-1}e^{2\gamma}) (\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2) - \frac{1}{f^{-1}e^{2\gamma}} \frac{\partial}{\partial \rho} (f^{-1}e^{2\gamma}) \dot{\rho}\dot{z} - \frac{E^2}{2fe^{2\gamma}} \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \dot{t} &= \frac{E}{f}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Mientras que el potencial efectivo queda descrito por

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = V(\rho, z), \quad V(\rho, z) = e^{-2\gamma} (E^2 - f\delta). \quad (3.19)$$

Debido a la definición de $V(\rho, z)$, el movimiento de las partículas de prueba estará restringido a la región donde $V(\rho, z) \geq 0$.

Como se menciona en [21], para una distancia arbitraria R entre las fuentes de un sistema binario, las ecuaciones de movimiento no son separables. Sin embargo, con la ayuda de métodos de solución numérica¹ podemos resolver el sistema de ecuaciones (3.6). Con el fin de encontrar

¹La solución numérica del sistema de ecuaciones fue realizado utilizando el algoritmo de simplificación de ecuaciones residual, contenido dentro del programa de computo *Mathematica*.

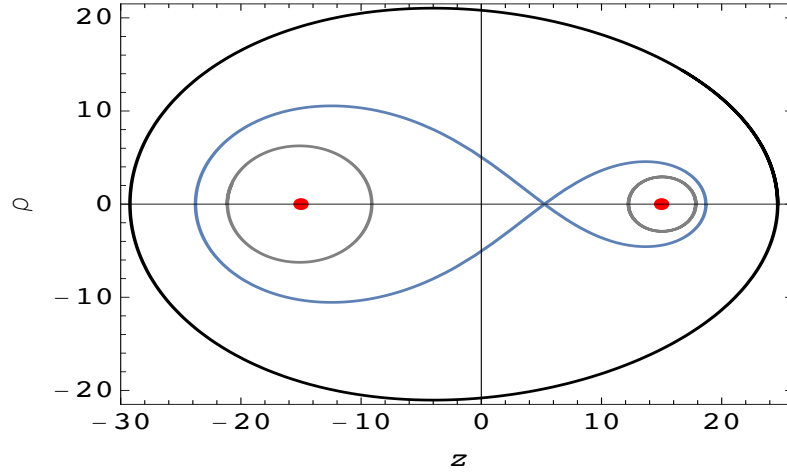


Figura 3.9: Tipos de órbitas genéricas presentes en el plano meridional, para partículas de prueba masivas, es decir, geodésicas tipo tiempo. El sistema binario se ha caracterizado por $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ y $R = 30$, mientras que para la partícula de prueba $E = 0.97$, en las tres clases de órbitas variando la condición inicial $z(0)$, cuyos valores numéricos son $z(0) = 17.848$ (órbita gris derecha), $z(0) = -21.145$ (órbita gris izquierda), $z(0) = 18.68$ (órbita azul) y $z(0) = 24.654$ (órbita negra).

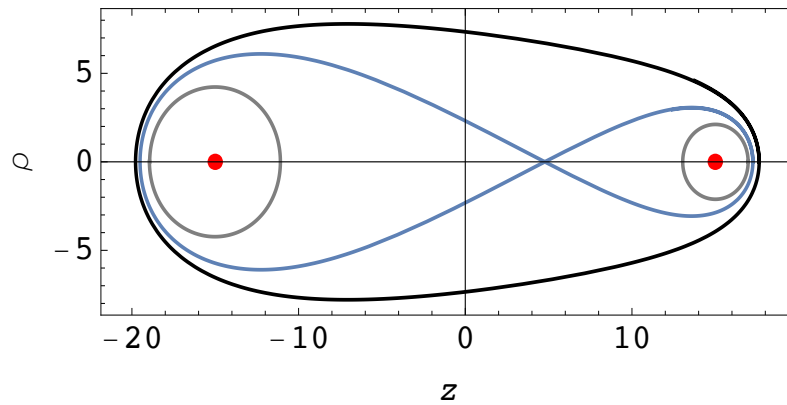


Figura 3.10: Tipos de órbitas genéricas presentes en el plano meridional, para fotones, es decir, geodésicas nulas. El sistema binario se ha caracterizado por $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ y $R = 30$, mientras que para la partícula de prueba se ha asignado $E = 0.97$ en las tres clases de órbitas variando la condición inicial $z(0)$, cuyos valores numéricos son $z(0) = 16.968637$ (órbita gris derecha), $z(0) = -18.9352$ (órbita gris izquierda), $z(0) = 17.25606$ (órbita azul) y $z(0) = 17.6269$ (órbita negra).

órbitas simétricas consideramos las condiciones iniciales $\rho(0) = 0$, $z(0) = z_0$ y $\dot{z}(0) = 0$, adicionalmente al considerar (3.19) encontramos

$$\dot{\rho}(0) = \pm \sqrt{e^{-2\gamma(0, z_0)}(E^2 - f(0, z_0)\delta)}. \quad (3.20)$$

Con estas condiciones iniciales, es posible identificar los siguientes casos particulares asignando diferentes valores de E , L y z_0 (ver Figuras 3.9 y 3.10); del movimiento geodésico en el plano $\phi = 0$: (a) Órbitas que rodean ambos horizontes (órbitas negras), cuando $R \rightarrow 0$, la métrica general (2.1) toma la forma de la métrica de Kerr, tal que las ecuaciones de movimiento son separables y estarán descritas por (1.40). (b) Órbitas que rodean el horizonte de una sola fuente (órbitas grises), a distancias muy grandes $R \rightarrow \infty$, las partícula de prueba solo percibirán el campo gravitacional de solo la fuente que orbitan. (c) Órbitas que rodean ambos horizontes (órbitas azules), atravesando el eje de simetría entre $-R/2 < z < R/2$.

Se ha encontrado numéricamente que las geodésicas nulas son inestables, mientras que las geodésicas tipo tiempo logran completar un mayor número de orbitas alrededor de una o ambas de las fuentes, antes de colapsar hacia a alguna de las fuentes, o bien, escapar de la interacción del sistema binario. En general, para un R arbitrario el comportamiento de las trayectorias resulta ser caótico, sin embargo, conforme la distancia de separación se hace más y más pequeña, obteniéndose así órbitas cerradas como se observa en la Figura 3.11

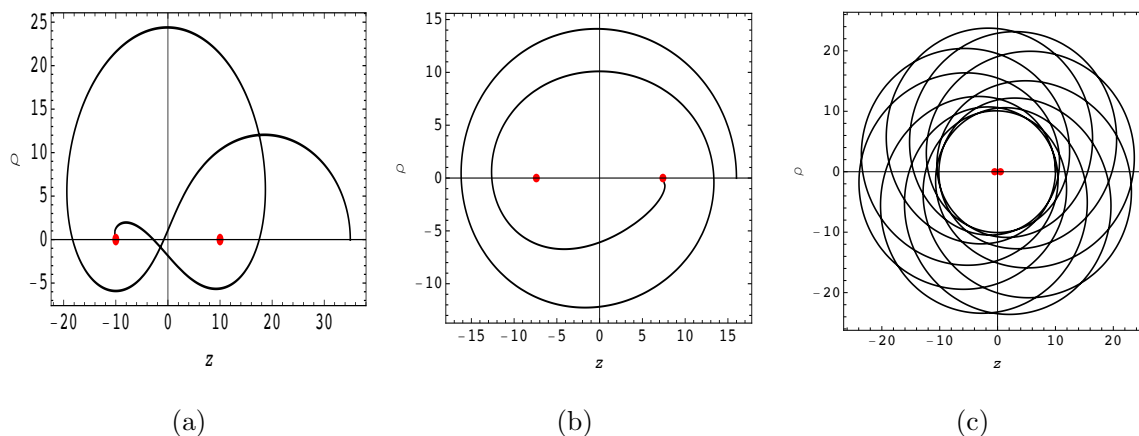


Figura 3.11: Órbitas para partículas masivas en un sistema binario caracterizado por $M_1 = 0.5$, $M_2 = 0.7$ y (a) $R = 20$, (b) $R = 14.8$ y (c) $R = 1$. El resto de parámetros se ha asignado como $E = 0.97$ y la q se ha calculado para cada valor de R .

Además, es posible identificar una diferencia significativa en las trayectorias geodésicas en el dominio $0^+ < R < M_2 - M_1$, que como ya se ha mencionado en reiteradas ocasiones en este trabajo, el parámetro q nos permite identificar dos estados en la fuerza de interacción de las fuentes que conforman el sistema binario. En la Figura 3.12, se presentan un par de trayectorias para partículas masivas cuya caracterización de las fuentes y de la partícula de prueba son idénticas, pero para diferentes q . La Figura 3.12(a) que corresponde al caso atractivo entre las fuentes del sistema binario, presenta una órbita cerrada estacionaria, es decir, la órbita no presenta precesión en largos periodos de tiempo, mientras que la Figura

3.12(b) que corresponde al caso repulsivo, la trayectoria presenta una precesión evidente en el mismo intervalo del parámetro afín.

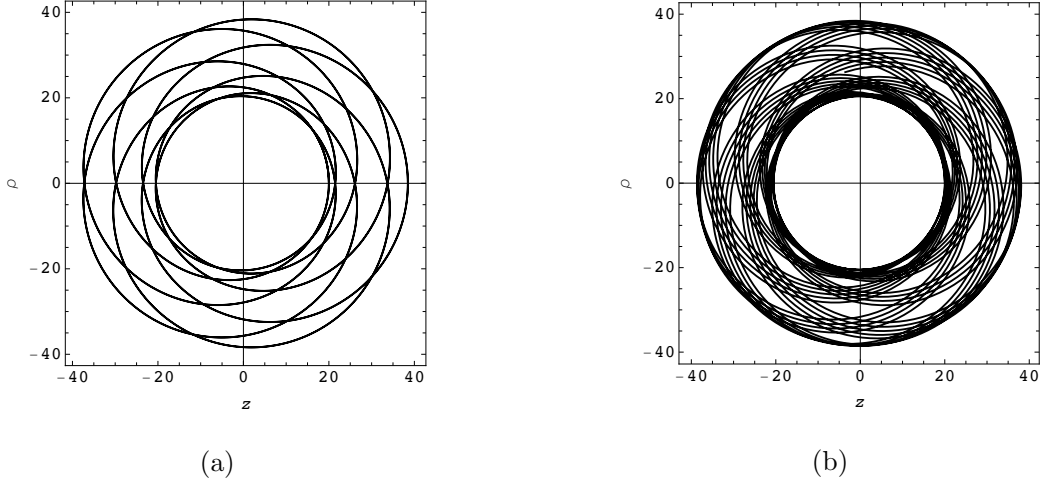


Figura 3.12: Comparación de órbitas en el plano meridional para el caso (a) atractivo y (b) repulsivo cuyo parámetro \mathfrak{q} es $\mathfrak{q}_0 = 3.08162$ y $\mathfrak{q}_2 = 2.35956$ respectivamente, para partículas masivas. Los parámetros se han asignado $E = 0.96$, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ y $R = 0.5$.

En este punto, puede resultar natural al lector preguntarse ¿Cuál es la diferencia entre las gráficas obtenidas para las trayectorias observadas en el caso idéntico de Majumdar-Papapetrou y doble Kerr? Debido a que en las Figuras 3.9 y 3.10 aparentemente no se presenta ningún efecto significativo de arrastre producto de la rotación, sin embargo, este efecto puede notarse a medida que las fuentes se acercan entre sí (ver Figuras 3.13 y 3.14). El lector puede observar que este efecto de arrastre no se presenta en el caso de Majumdar-Papapetrou (ver Figura 1.6).

Por último, hay que mencionar que, en general, el movimiento de las partículas de prueba en el plano meridional resulta ser caótico, sin embargo, es posible identificar algunas órbitas casi-estacionarias, como puede observarse en la Figura 3.13 y en la Figura 3.14(d).

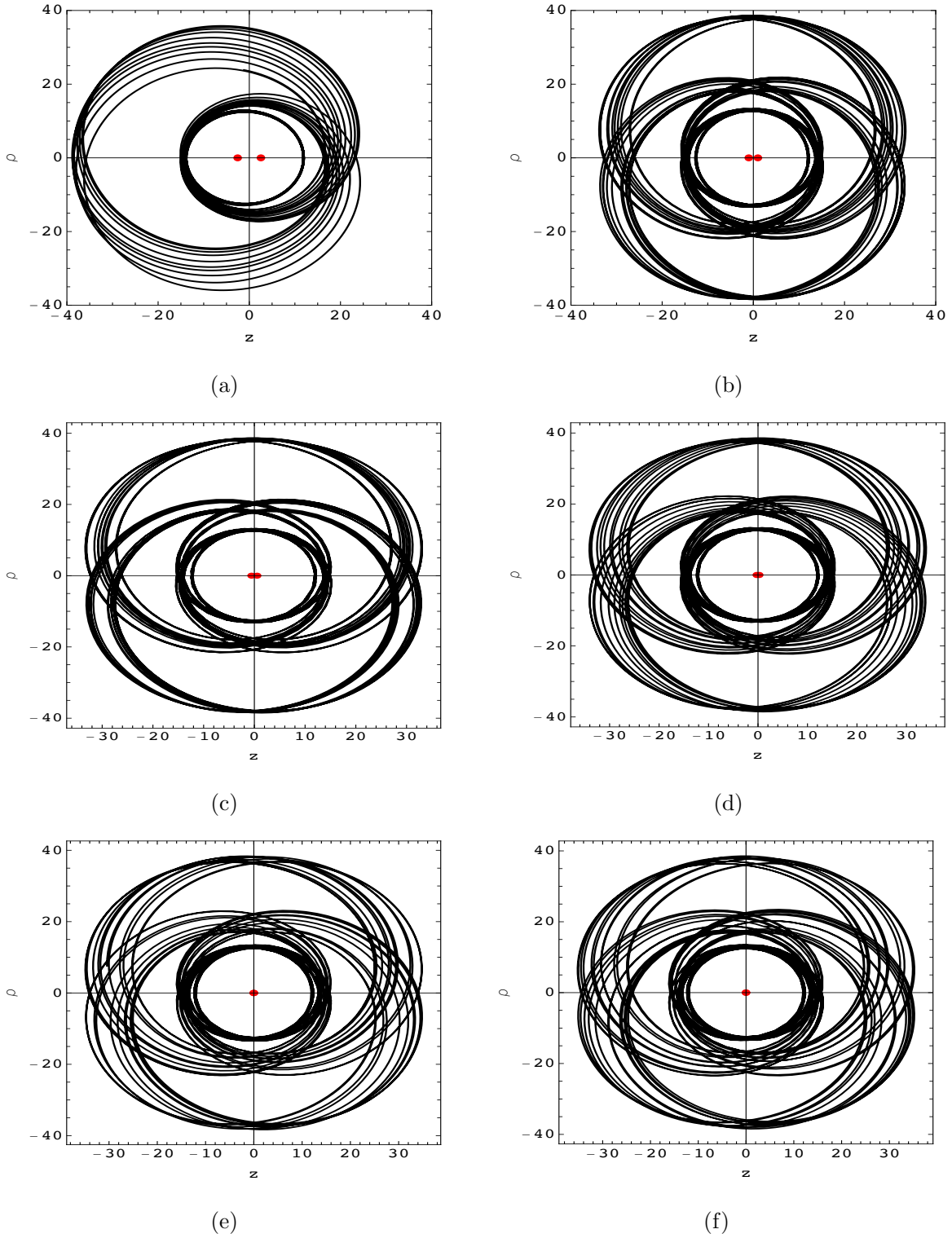


Figura 3.13: Geodésicas para partículas masivas en el plano meridional caracterizado por $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$, las condiciones iniciales para las partículas de prueba se han asignado $E = 0.96$ y $z(0) = 12$. Y la distancia de separación entre las fuentes (a) $R = 5.1$, (b) $R = 2$, (c) $R = 1.1$, (d) $R = 0.5$, (e) $R = 0.1$ y (f) $R = 0.01$. Los parámetros q y $\dot{\rho}(0)$, se han calculado para cada R , en todas la Figuras se ha considerado el proceso atractivo entre las fuentes.

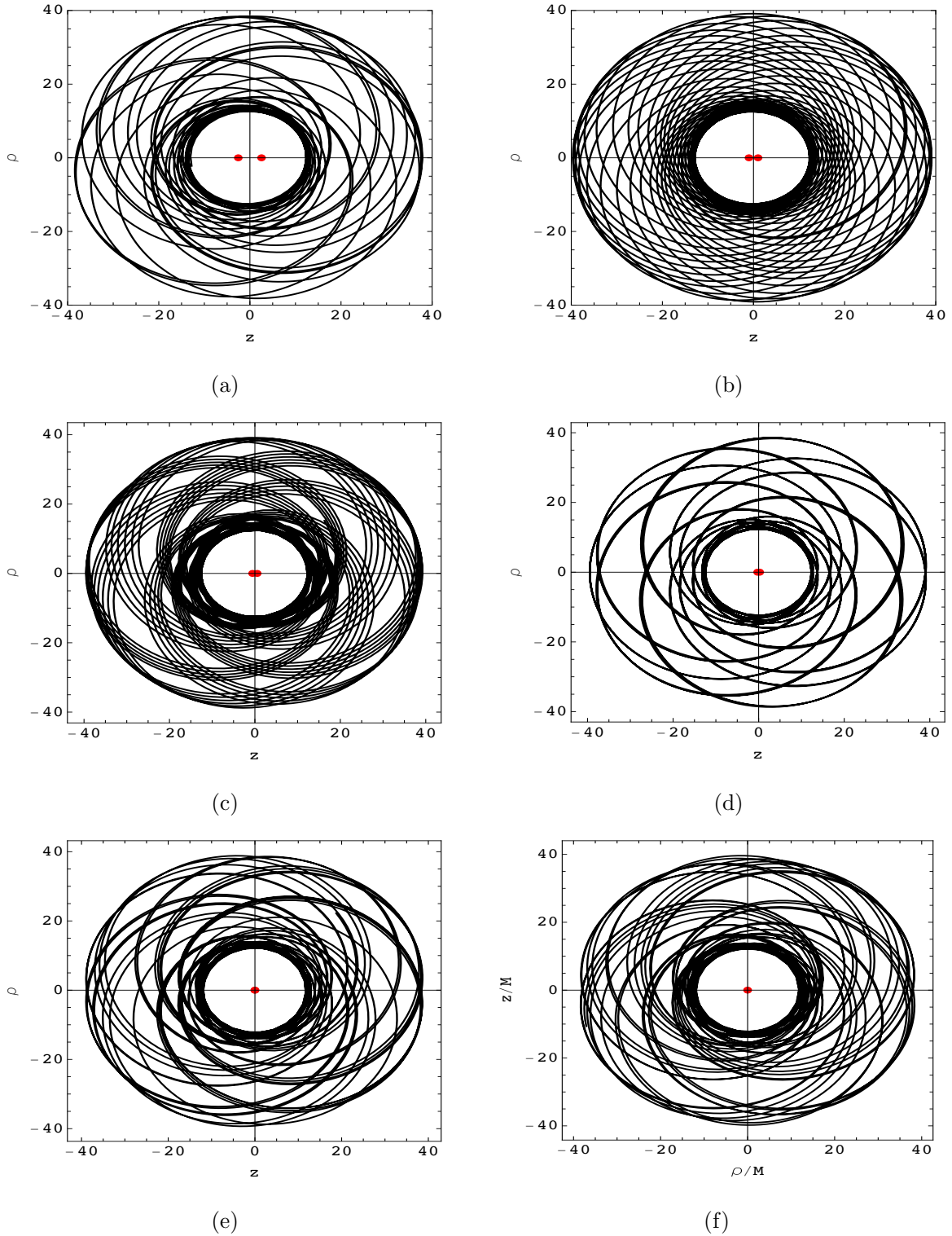


Figura 3.14: Geodésicas para partículas masivas en el plano meridional caracterizado por $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$, las condiciones iniciales para las partículas de prueba se han asignado $E = 0.96$, $z(0) = 12.4$ y $\dot{z}(0) = 0$. Y la distancia de separación entre las fuentes (a) $R = 5.1$, (b) $R = 2$, (c) $R = 1.1$, (d) $R = 0.5$, (e) $R = 0.1$ y (f) $R = 0.01$. Los parámetros \mathfrak{q} y $\dot{\rho}(0)$, se han calculado para cada R , en todas la Figuras se ha considerado el proceso atractivo entre las fuentes.

Conclusiones y perspectivas

A continuación indicamos los resultados obtenidos en esta tesis, así como nuestro trabajo a realizar en un futuro cercano.

Conclusiones:

En este trabajo estudiamos el movimiento de partículas de prueba en el campo gravitacional generado por un sistema binario, que es una solución de las ecuaciones de Einstein para una métrica axialsimétrica estacionaria, que representa dos fuentes con rotación separados por una singularidad cónica y localizados entre sí a una distancia arbitraria. Este sistema está descrito por una métrica binaria de Kerr corrotante para fuentes extremas donde es importante enfatizar que aún cuando estos sistemas contienen singularidades cónicas entre fuentes que rompen con la definición de un agujero negro, es importante mencionar que la singularidad cónica no es másiva lo que permite definir la masa ADM [30] total como la suma de las dos masas, además, la presencia de esta singularidad nos permite estudiar algunas características relacionadas con la interacción por medio de la fuerza de interacción. Se realizó un análisis de la métrica binaria en el límite de horizonte cercano; esto nos permitió derivar una métrica de Kerr deformada y estudiar las propiedades dinámicas de la configuración binaria en el proceso de un acercamiento arbitrario de las fuentes, donde logramos identificar la existencia de dos escenarios físicos entre las fuentes antes de que se produzca el proceso de fusión.

Realizamos en forma detallada el análisis geodésico para un agujero negro de Kerr, siguiendo el trabajo realizado por diferentes autores [13, 16, 17, 19, 20], mostrando así la separabilidad de las ecuaciones de movimiento gracias a una constante de movimiento escondida [18]. El Capítulo 1 es una revisión del método de separación desarrollado por Carter el cual resulta indispensable para motivar y enfatizar al lector la importancia del análisis y estudio de las propiedades físicas de un sistema a partir de las trayectorias geodésicas alrededor de un agujero negro de Kerr.

Tras tomar el proceso de límite de fusión, reportamos la métrica correspondiente que permite la descripción de fusiones de fuentes binarias corrotantes, que sorprendentemente queda descrita de una forma sencilla. A primer orden en R esta métrica deformada para una configuración binaria de Kerr extremo en el límite de horizonte cercano permite recuperar la métrica para un agujero negro extremo de Kerr de masa $M = M_1 + M_2$, en la situación física $R = 0^+$. Además se reporta de manera detallada un método para calcular de manera recursiva la métrica deformada a órdenes superiores en R en términos de los parámetros físicos de Komar. Esperamos que nuestros resultados aclaren el método de obtención de la métrica en el límite de horizonte cercano, reportado en [36] la cual es una derivación poco transparente al lector.

Se reporta una expresión sencilla para la fuerza de interacción entre las dos fuentes de una configuración binaria extrema de Kerr corrotante, que permite identificar dos estados de interacción, uno atractivo y uno repulsivo en el límite de horizonte cercano, es decir, cuando ambas fuentes se tocan entre sí, pero no se fusionan aún. Además se reporta un dominio en el que se presenta el estado de interacción repulsivo.

Se muestra que el segundo estado de interacción (repulsivo) viola la ley de las áreas para los agujeros negros, es decir, que el área del horizonte de fusión es menor que la suma de las áreas. Creemos que esto nos indica desde el punto de vista termodinámico que es un proceso inestable y poco probable de suceder.

Se presenta un análisis de geodésicas tipo tiempo en la vecindad de una configuración binaria corrotante de agujeros negros de Kerr extremos. Las geodésicas en el plano ecuatorial pueden clasificarse de tres formas: circulares, con precesión, y con dispersión. A distancias finitas de R , no se presentan órbitas que colapsan en el horizonte de alguna de las fuentes localizadas en $z = \pm R/2$; como consecuencia es posible encontrar órbitas acotadas cerca del eje de simetría. Por otro lado, para valores de R que permiten la presencia de un segundo estado de interacción (repulsivo) entre las fuentes, es posible observar a partir de los potenciales efectivos que el radio interno de los tres tipos de órbitas es mayor que en el caso de interacción atractivo.

Se reporta numéricamente que a partir de la expresión de potencial efectivo descrita por (3.10) para el movimiento radial del sistema binario estudiado, se recupera el potencial efectivo correspondiente a una sola fuente de Kerr con masa $M = M_1 + M_2$ cuando $R \rightarrow 0$, para realizar esto se consideró una coordenada radial fija $\rho = 5$, mientras que el resto de parámetros se asignaron como $z = 0$ y $L = 2.5$. Así mismo, para el caso ecuatorial, tras hacer un desarrollo en serie de las ecuaciones de movimiento, se recuperan las ecuaciones geodésicas correspondientes a una sola fuente de Kerr.

Se presenta el análisis de geodésicas nulas en el campo gravitacional de una configuración binaria corrotante de agujeros negros de Kerr extremos. De forma particular, cuando la fuerza de interacción entre las fuentes es atractiva solo podemos obtener órbitas dispersadas. Sin embargo, cuando la fuerza de interacción es repulsiva, encontramos máximos y mínimos locales en la función potencial, lo que da lugar a la presencia de órbitas circulares estables e inestables.

En el estudio del plano meridional se clasificó numéricamente la existencia de tres tipos de órbitas para partículas masivas y fotones, de acuerdo la forma en la que orbitan cerca de los horizontes de eventos. El análisis numérico se logró asignando las condiciones iniciales $\rho(0) = 0$, $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = 0$ y $\dot{\rho}(0)$, donde este último está determinado por (3.20), de esta manera se obtuvieron diferentes tipos de órbitas asignando diferentes valores a los parámetros z_0 , L y E para la partícula de prueba. En general, para un R arbitrario, las trayectorias que siguen las partículas de prueba resulta ser caótico, sin embargo, para ciertas distancias de separación es posible identificar algunas órbitas casi estacionarias. Por otra parte, en el plano meridional, el efecto del proceso repulsivo entre las fuentes se ve reflejado en la precesión de las órbitas, como se muestra en la (Figura 3.12).

Perspectivas:

Como perspectivas a futuro del presente trabajo podemos mencionar:

1. Buscar la separabilidad para las ecuaciones geodésicas usando la métrica en el límite de horizonte cercano.
2. Derivar una expresión para la métrica en el límite de horizonte cercano para una configuración binaria corrotante no extrema.
3. Estamos interesados en estudiar los modos cuasinormales en el límite de contacto, relevantes para el estudio de la producción de ondas gravitacionales.
4. Extender la métrica binaria empleada en este trabajo a otro tipo de soluciones para eliminar la singularidad cónica mediante la inclusión de algún campo particular; dilatónico, magnético, eléctrico, etc. (in progress)

Bibliografía

- [1] H. Weyl, Zur gravitationstheorie, Ann. Phys. **359**, 117 (1917).
- [2] R. C. Tolman, Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid, Phys. Rev. **55**, 364 (1939).
- [3] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, On Continued Gravitational Contraction, Phys. Rev. **59**, 455 (1939).
- [4] R. P. Kerr, Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).
- [5] B. P. Abbot *et al*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
- [6] B. P. Abbot *et al*, Phys. Rev. X **6**, 041015 (2016).
- [7] Event Horizon Colaboration *et al*, arXiv:1906.11238 (2019).
- [8] K. Akiyama *et al*, The Ast. J. Lett. **875**, L2 (2019).
- [9] S. D. Majumdar, A class of exact solutions of Einstein's field equations, Phys. Rev. **72** (1947) 390.
- [10] A. Papapetrou, A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution, Proc. R. Irish Acad. Sect. A **51**, 191 (1947).
- [11] I. Cabrera-Munguia, Extreme binary black holes in a physical representation, Prog. Theor. Exp. Phys. **10**, 103E01 (2018).
- [12] A. Komar, Covariant conservation laws in general relativity, Phys. Rev. **113**, 934 (1959).
- [13] V. P. and A. Zelnikov, Introduction to Black Holes Physics, Oxford University Press (1983).
- [14] M. Visser, The Kerr spacetime: A brief introduction, arXiv: 0706.0622 (2007).
- [15] S. Chandrasekhar, The Mathematical Theory of Black Holes, Oxford University Press (1983).
- [16] C. W. Misner, K. S. Thorne and A. Wheeler, Gravitation ,Princeton University Press (1973).

- [17] E. Teo, Spherical photon orbits around a Kerr black hole, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 1909 (2003).
- [18] B. Carter, Global structure of the Kerr family of gravitational fields, *Phys. Rev.* **194**, 1559 (1968).
- [19] V. Cardoso *et al.*, Black hole binaries: ergoregions, photon surfaces, wave scattering, and quasinormal modes, *Phys. Rev. D* **98**, 064036 (2018).
- [20] M. Patil, P. Mishra and D. Narasimha, Curious case of gravitational lensing by binary black holes: A tale of two photon spheres, new relativistic images, and caustics, *Phys. Rev. D* **95**, 024026 (2017).
- [21] S. Chandrasekhar, The two-centre problem in general relativity: the scattering of radiation by two extreme Reissner–Nordström black-holes, *Proc. R. Soc. Lon. A* **421**(1861), 227 (1989).
- [22] A. Wunch, T. Müller, Circular orbits in the extreme Reissner-Nordström dihole metric, D. Wiskopff and G. Wunner, *Phys. Rev. D.* **87**, 024007 (2013).
- [23] F. J. Ernst, New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. II, *Phys. Rev.* **168**, 1415 (1968).
- [24] F. J. Ernst, New formulation of the axially symmetric gravitational field problem, *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).
- [25] W. Kinnersley and D. M. Chitre, Symmetries of the stationary Einstein–Maxwell equations. IV. Transformations which preserve asymptotic flatness, *J. Math. Phys* **19**, 2037 (1978).
- [26] R. Bach and H. Weyl, Neue lösungen der Einsteinschen gravitationsgleichungen, *Math. Z.* **13**, 134 (1922).
- [27] W. Israel, Line sources in general relativity, *Phys. Rev. D* **15**, 935 (1977).
- [28] V. S. Manko and E. Ruiz, On a simple representation of the Kinnersley-Chitre metric, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **125**, 1241 (2011).
- [29] A. Tomimatsu, On gravitational mass and angular momentum of two black holes in equilibrium, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **70**, 385 (1983).
- [30] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity, *Phys. Rev.* **122**, 997 (1961).
- [31] Z. Perjés, Factor structure of the Tomimatsu-Sato metrics, *J. Math. Phys.* **30**(10), 2197 (1989).
- [32] I. Cabrera-Munguia, Unequal binary configurations of interacting Kerr black holes, *Phys. Lett. B*, **786**, 466 (2018).

- [33] G. Weinstein, On rotating black holes in equilibrium in general relativity, *Comm. P. App. Math.* **43**, 903 (1990).
- [34] M. E. Gabach Clement, Bounds of the force between black holes, *Class. Quantum Grav.* **29**, 165008 (2012).
- [35] J. Cifre and M. J. Rodriguez, A near horizon extreme binary black hole geometry, *Eur. Phys. J. C* **79**, 754 (2019).
- [36] J. Cifre, M. J. Rodriguez, Generalized near horizon extreme binary black hole geometry; S. Hadar and E. Rickenbach, *Phys. Rev. D* **100**, 044033 (2019).
- [37] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, The four laws of black hole mechanics, *Comm. Math. Phys.* **31**(2), 161 (1973).
- [38] F.L Dubeibe and J. D. Sanabria, Geodesic motion in a stationary dihole spacetime, *Phys. Rev. D*, **94**(4), 044058 (2016).
- [39] M. Stute and M. Camenzind, Towards a self-consistent relativistic model of the exterior gravitational field of rapidly rotating neutron stars, *Mon. R. Ast. Soc.*, **336**(3), 831 (2002).