

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del  
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Factores de forma de transición de los  
mesones  $\eta$  y  $\eta'$  utilizando las ecuaciones de  
Dyson-Schwinger y Bethe-Salpeter con una  
interacción de contacto**

**Tesis que presenta**

**Enrique Carreón Martínez**

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Jesús Javier Cobos Martínez**

Ciudad de México

Junio, 2021

# Agradecimientos

A mi familia, en especial a mi mamá Alicia, a mi papá Enrique, y a mi hermano Eduardo, quienes me han brindado todo su apoyo, amor y consideración durante toda mi vida, en especial durante mi formación profesional.

Al Dr. Jesús Javier Cobos Martínez por su guía y disposición para resolver cualquier duda que tuviera, sin importar que tan sencilla fuera.

Al Dr. Luis Alberto Hernández Rosas y al Dr. Pablo Roig Garcés por sus observaciones y sugerencias a este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por (CONACYT) por el apoyo económico para realizar mis estudios de Maestría.

Finalmente, me gustaría agradecer a mis amigos, compañeros y profesores de maestría y universidad por sus enseñanzas, pero sobre todo su amistad a lo largo de todos estos años.

# Resumen

El uso de una interacción de contacto tipo vector $\times$ vector y el esquema de truncamiento *Rainbow-Ladder*(RL) dentro del kernel de las ecuaciones de Dyson-Schwinger (DSE) y de Bethe-Salpeter (BSE) ha dado resultados satisfactorios para las masas y constantes de decaimiento de los estados base de mesones pseudoescalares y vectoriales ligeros. Sin embargo, para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  se debe de ir mas allá y agregar un kernel adicional debido a la contribución de la anomalía no abeliana, en el cual se tiene que especificar la forma de la interacción.

En el presente trabajo proponemos un modelo simple para dicha interacción, donde se considera una fuerza de acoplamiento constante y adimensional  $\xi$ , y ángulo de mezclado entre las estructuras tensoriales  $\theta_\xi$ , los cuales se determinan minimizando el error cuadrático medio usando valores experimentales. Una vez determinados los parámetros, se calculan las masas, constantes de decaimiento para los canales *light*( $l$ ) y *strange*( $s$ ), y anchos de decaimiento de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ .

Finalmente, se obtienen los factores de forma de transición de los mesones  $\pi^0$ ,  $\eta$  y  $\eta'$  en función de la transferencia de momento  $Q$ , y se verifica su comportamiento asintótico para valores grandes de la energía.

# Abstract

The development of a contact interaction of the type vector  $\times$  vector and the truncation scheme *Rainbow-Ladder*(RL) inside the kernel of the Dyson-Schwinger equations (DSE) y de Bethe-Salpeter equations (BSE) has given pretty good results for the masses and decay constants for the ground-states of light pseudoscalar and vector mesons. However, for the mesons  $\eta$  y  $\eta'$  we have to go forward and add a new kernel because of the abelian anomaly contribution, on which we have to specify the form of the interaction.

In the present dissertation, we propose a really simple model for this interaction, where we considerate a dimensionless coupling strength  $\xi$ , and a mixing angle between the tensorial structures  $\theta_\xi$ , which are determinate minimizing the mean squared error using experimental data. Once these parameters are found, we calculate the masses, decay constants for the channels *light*( $l$ ) and *strange*( $s$ ), and decay widths for the mesons  $\eta$  and  $\eta'$ .

Finally, we calculate the transition form factor for the mesons  $\pi^0$ ,  $\eta$  and  $\eta'$  in function of the transferred momentum  $Q$ , and we verify their asymptotic behavior.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. QCD y sus simetrías</b>	<b>5</b>
2.1. Eightfold-Way . . . . .	5
2.2. Modelo de quarks . . . . .	7
2.2.1. Simetría de isoespín $SU(2)_I$ . . . . .	7
2.2.2. Simetría de sabor $SU(3)_f$ . . . . .	8
2.3. Simetría de color $SU(3)_c$ y características de QCD . . . . .	10
2.4. Límite quiral y rompimiento dinámico de simetría quiral . . . . .	10
<b>3. Ecuación de Dyson-Schwinger</b>	<b>13</b>
3.1. DSE en QED . . . . .	16
3.1.1. DSE para el propagador del fotón . . . . .	18
3.1.2. DSE para el propagador del electrón . . . . .	20
3.1.3. DSE para el vértice fermión-fotón . . . . .	22
3.2. DSE para el propagador vestido del quark en QCD . . . . .	23
<b>4. Ecuación de Bethe-Salpeter</b>	<b>25</b>
4.1. Derivación de la ecuación de Bethe-Salpeter . . . . .	25
4.2. BSE homogénea . . . . .	28
4.3. Normalización canónica de la BSA . . . . .	32
<b>5. GE y BSA para el truncamiento RL en IC</b>	<b>34</b>
5.1. Ecuación de gap . . . . .	34
5.2. BSA para mesones pseudoescalares . . . . .	37
5.2.1. Normalización de la BSA para mesones pseudoescalares . . . . .	41
5.2.2. Constante de decaimiento leptónico para mesones pseudoescalares . . . . .	44
5.3. BSA para mesones vectoriales . . . . .	45
5.3.1. Normalización de la BSA para mesones vectoriales . . . . .	46
5.3.2. Constante de decaimiento leptónico para mesones vectoriales . . . . .	47
5.4. Resultados numéricos . . . . .	47

<b>6. Mesones <math>\eta</math> y <math>\eta'</math> en IC</b>	<b>50</b>
6.1. Ecuaciones para $E_{\eta,\eta'}^f$ y $F_{\eta,\eta'}^f$ . . . . .	53
6.2. Forma explícita de los elementos del kernel $K_{\eta,\eta'}$ . . . . .	56
6.3. Normalización alterna de la BSA para los mesones $\eta, \eta'$ . . . . .	61
6.4. Constantes de decaimiento leptónico para los mesones $\eta, \eta'$ . . . . .	62
6.5. Resultados numéricos . . . . .	63
<b>7. Factores de forma de transición</b>	<b>65</b>
7.1. Vértice quark-fotón . . . . .	65
7.2. TFF para el pion . . . . .	67
7.3. TFF para $\eta, \eta'$ . . . . .	70
7.4. Discusión de los resultados . . . . .	74
<b>8. Resumen y conclusiones</b>	<b>76</b>
<b>Apéndices</b>	<b>77</b>
<b>A. Notaciones y convenciones</b>	<b>77</b>
A.1. Convenciones en el espacio de Minkowski . . . . .	77
A.2. Convenciones en el espacio Euclideo . . . . .	80
<b>B. Estructura de la BSA para mesones</b>	<b>83</b>
B.1. Mesones pseudoescalares . . . . .	83
B.2. Mesones vectoriales . . . . .	85
<b>C. Parametrización de Feynman</b>	<b>87</b>
C.1. Parametrización para $[\Delta_{M_f}(q + P)\Delta_{M_g}(q)]^{-1}$ . . . . .	87
C.2. Parametrización para $[\Delta_{M_f}(k - Q_1)\Delta_{M_f}(k + Q_2)\Delta_{M_f}(k)]^{-1}$ . . . . .	88
<b>D. Identidad de Ward-Takahashi</b>	<b>90</b>
D.1. Deducción de la WTI . . . . .	90
D.2. Identidad de Ward-Takahashi axial . . . . .	92
<b>E. Cálculo de integrales</b>	<b>95</b>
<b>F. Cálculo de trazas de <math>K_A</math></b>	<b>99</b>
F.1. Cálculo de $Tr [\mathcal{Z}\gamma_5\chi_{\eta,\eta'}]$ . . . . .	99
F.2. Cálculo de $Tr [\mathcal{Z}\gamma_5\not{P}\chi_{\eta,\eta'}]$ . . . . .	101
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>



# Capítulo 1

## Introducción

La cromodinámica cuántica (QCD) es el formalismo dentro del modelo estándar de partículas encargado de estudiar las interacciones fuertes, en la cual los portadores de carga de color son los distintos sabores de quarks y gluones, mientras que los mediadores de la fuerza son los gluones. Una de las características más importantes de QCD que surge del hecho de que sea una teoría cuántica de campos no Abelianas, es la libertad asintótica del acoplamiento fuerte [2, 3], el cual se vuelve pequeño a distancias cortas (energías grandes) tal que se puede aplicar satisfactoriamente teoría de perturbaciones [4], mientras que a distancias largas (energías pequeñas) crece tanto que se llega a la zona de hadronización/confinamiento donde debe usarse un tratamiento no perturbativo. Otro hecho importante de la teoría es que los campos gluónicos puedan interactuar entre sí, formando vértices de tres y cuatro gluones, además de la posibilidad de crear estados ligados de solo gluones, conocidos como “glueballs” [1].

En el régimen de bajas energías aparecen fenómenos tales como el confinamiento de color, el hecho de que los quarks y gluones no se pueden observar libremente sino que siempre se encuentran confinados dentro de los hadrones, o como el rompimiento dinámico de la simetría quiral (DCSB), en el cual las masas corrientes de los quarks (que surgen del mecanismo de Higgs [5]) se transforman en masas conocidas como constituyentes o dinámicas debido a las interacciones entre los quarks y gluones, las cuales son las que constituyen a los hadrones. Una consecuencia del DCSB es la existencia de bosones de Nambu-Goldstone, tal que, para el caso de QCD con los tres sabores ligeros de quark, estos bosones de Goldstone son los miembros del octete de mesones pseudoescalares, los cuales adquieren una masa pequeña debido al rompimiento explícito de la simetría quiral.

Algunos de los métodos no perturbativos más utilizados son Lattice QCD, en el cual se hacen simulaciones numéricas con métodos de Monte Carlo para calcular observables y funciones de correlación empleando una métrica Euclídeana donde se discretiza el espacio tiempo [6], y las ecuaciones de Dyson-Schwinger (DSE) y Bethe-Salpeter (BSE) (que es el enfoque que se va a emplear en este trabajo), las cuales son, respectivamente las ecuaciones de movimiento de las funciones de correlación de los campos de los quarks y gluones y las ecuaciones de los estados ligados [7-9]. Como las DSE y BSE son en realidad un número infinito de ecuaciones acopladas, hay que truncar en algún punto para poder obtener valores numéricos; una de

las más utilizadas es la truncación *Rainbow-Ladder*(RL), ya que, entre otras cosas, preserva invariancia de Lorentz, simetría quiral y también satisface la conservación de la corriente electromagnética [10-12]. En esquemas de truncamiento como el RL se usan en el fondo las identidades de Ward-Green-Takahashi (WGT), las cuales imponen relaciones en los kernels de las DSEs y BSEs para los propagadores de los quarks, para los estados ligados como los mesones y de los vértices quark-gluon [13].

Otra parte importante de las DSE y BSE es especificar cómo es la interacción que se empleará. En los últimos años se ha utilizado el Ansatz de una interacción de contacto tipo vector-vector [14], la cual, al ser usada en el kernel de las DSEs para el propagador vestido de los quarks [15-17], e introduciendo un mecanismo que asegura la ausencia de quarks libres [18, 19], describe de buena manera propiedades de los mesones pseudoescalares y vectoriales tales como su masa, límite quiral, constantes de decaimiento y factores de forma [20-25], razón por la cual se usará esta interacción de contacto en la presente tesis.

Para extender estas ideas a los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  y así dar una descripción del nonete de mesones pseudoescalares completo, se debe de ir más allá del truncamiento RL [26]. Esto se logra introduciendo en la BSE el kernel adicional  $K_A$ , tal que, suponiendo que  $m_u = m_d = m_l$ , se obtendrán para cada mesón dos BSA en los canales *light*(1) y *strange*(s) [27]. La forma que se usara para este kernel es la misma que en [28], tal que el modelo dependerá de la fuerza de acoplamiento  $\xi(k^2)$  y del ángulo  $\theta_\xi$  que controla la fuerza relativa entre las estructuras tensoriales. Nosotros proponemos que  $\xi(k^2)$  sea un parámetro constante de la teoría, de tal forma que  $\xi$  y  $\theta_\xi$  se determinaran con los datos experimentales de las masas [29] y fenomenológicos de las constantes de decaimiento leptónico de estos mesones [31-33], y luego se procede a calcular sus factores de forma de transición y comparar con el correspondiente del pión.

Una vez calculadas las masas y constantes de decaimiento del nonete de mesones pseudoescalares completo, se pueden calcular los factores de forma de transición (TFF) de los procesos  $\pi^0, \eta, \eta' \rightarrow \gamma^{(*)}\gamma$ , siendo  $\gamma^*$  y  $\gamma$  respectivamente fotones virtual y real, tal que se pueden comparar como son las curvas de estos TFF y ver cómo es su dependencia asintótica para transferencias de momento grandes.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En el siguiente capítulo se empieza dando un contexto histórico de algunas razones del porqué se teorizó la existencia de la fuerza fuerte en el interior de los núcleos atómicos, y como a partir de esta idea se plantearon varios modelos y teorías para tratar de explicar estas propiedades de las partículas hasta que se llegó a la implementación de QCD. También vemos algunas de las propiedades de QCD, y cómo a partir de su Lagrangiano se construyen las corrientes vectorial y axial, tal que se analiza la generación de las masas dinámicas de los quarks como consecuencia del rompimiento dinámico de la simetría quiral. En el tercer capítulo se habla de las ecuaciones de Dyson-Schwinger y de su derivación a partir de integrales de camino de funcionales generadores. En particular, usando como ejemplo campos escalares, se derivan las DSEs para los propagadores del fotón, del electrón y del vértice fermión-fotón en la electrodinámica cuántica (QED) y la DSE para el propagador vestido del quark en QCD, la cual es también conocida como la ecuación

de gap. En el cuarto capítulo, usando de nueva cuenta el formalismo de las integrales de camino y funcionales generadores, se deriva la forma general de la ecuación de Bethe-Salpeter, ecuación de movimiento relativista de estados ligados, tal que calculando la forma explícita de la función de Green de cuatro puntos se obtiene la ecuación de Bethe-Salpeter homogénea. En la parte final del capítulo se procede a calcular la condición de normalización de la BSE con respecto al momento total del mesón  $P$ . En el quinto capítulo introducimos la interacción de contacto tipo vector×vector y el truncamiento RL, de tal manera que regularizando las integrales con los cortes ultravioleta  $\tau_{UV}$  e infrarrojo  $\tau_{IR}$ , la ecuación de Gap se convierte en la ecuación desde donde se calcularán las masas dinámicas para los distintos sabores de quark, y también se da la ecuación para encontrar los condensados de quark. Después, empleando la interacción de contacto y truncamiento RL en la forma general de la BSA para los mesones pseudoescalares y vectoriales obtenidas en el Apéndice B de este trabajo, se establecen los kernels para cada tipo de mesón y se llegan a ecuaciones de eigenvalores, tal que las soluciones no triviales de estas ecuaciones resultan ser las masas de los mesones pseudoescalares y vectoriales. También se obtienen las ecuaciones para normalizar las BSA y las ecuaciones para calcular las constantes de decaimiento para cada tipo de mesón. En la parte final del capítulo se especifican los parámetros de la teoría, los cuales se obtienen por un ajuste, tal que se calculan las masas dinámicas y condensados de quark para cada tipo de quark, y luego se obtienen las masas, BSA y constantes de decaimiento para distintos mesones pseudoescalares y vectoriales, y se hace una comparación de los resultados obtenidos con los datos experimentales. En el sexto capítulo se introduce el kernel  $K_A$  debido a la contribución de la anomalía no Abelian para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , tal que combinándolo con el kernel  $K_L$  visto en el capítulo 5, se obtiene una BSE para la mezcla de las correlaciones de los canales  $l$  y  $s$  de dichos mesones, es decir,  $\Gamma_{\eta,\eta'}^l$  y  $\Gamma_{\eta,\eta'}^s$ . Después, usando nuevamente la forma que toma la BSA para los mesones pseudoescalares en la interacción de contacto, y empleando el truncamiento RL, se llega a un sistema de ecuaciones  $4 \times 4$  para las funciones  $E_{\eta,\eta'}^l, F_{\eta,\eta'}^l, E_{\eta,\eta'}^s, F_{\eta,\eta'}^s$ , tal que las soluciones no triviales de dicho sistema serán las masas de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ . Para calcular las entradas del sistema de ecuaciones mostramos porque hay que tener cuidado al usar la regularización de tiempo propio en los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , ya que las integrales se dividirán en intervalos dadas ciertas condiciones, tal que, introduciendo unas funciones que servirán como los límites de integración, las integrales se dividirán en intervalos o colapsarán en una sola integral dependiendo del caso. Luego se presenta una normalización alterna de la BSA que es más conveniente de utilizar en los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , en la cual se supone que ahora el eigenvalor del sistema de ecuaciones es una función del momento del mesón  $P$ , y se muestra como las ecuaciones para calcular las constantes de decaimiento se modifican de las que teníamos previamente, tal que usando las consideraciones de la regularización de tiempo propio mencionadas anteriormente, se dan las ecuaciones para calcular las constantes de decaimiento de los canales  $l$  y  $s$  para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , y la ecuación para calcular los anchos de decaimiento de los procesos  $\eta, \eta' \rightarrow \gamma\gamma$ . En la parte final del capítulo se presentan los parámetros que obtuvimos al hacer el ajuste por error cuadrático medio, tal que se calculan las masas, constantes de decaimiento para los canales  $l$  y  $s$ , y los anchos de decaimiento para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , y se comparan los resultados obtenidos con los que se reportan en la literatura. En el séptimo capítulo se empieza estudiando el vértice

quark-fotón en la interacción de contacto y truncamiento RL, tal que se gráfica su parte transversal en función de  $Q^2$  para los sabores de quark  $l$  y  $s$ . Después, empleando la BSA para los mesones pseudoescalares en la interacción de contacto mencionada anteriormente, obtenemos dos contribuciones para el TFF del proceso  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ , tal que suponemos un diagrama de Feynman de triángulo donde hay un intercambio de momento interno entre los dos vértices quark-fotón. Procediendo de manera similar para los procesos  $\gamma^*\gamma \rightarrow \eta, \eta'$ , se encuentran dos contribuciones en los TFF por cada canal  $l$  y  $s$  de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , las cuales son muy similares a las dos contribuciones obtenidas en el caso del pión, salvo modificaciones que se deben de hacer en las integrales debido a las precauciones en la regularización de tiempo propio mencionadas anteriormente. En la parte final del capítulo, una vez obtenidos los TFF para  $\pi^0$ ,  $\eta$  y  $\eta'$ , juntamos las curvas en una sola gráfica para comparar, y luego vemos como es su comportamiento asintótico para una transferencia de momento  $Q^2$  grande, para ver si los resultados obtenidos son iguales a lo reportado en la literatura. Finalmente, en el último capítulo presentamos un resumen y nuestras conclusiones. En la presente tesis también se incluyen seis apéndices, en los cuales se presenta material complementario y cálculos de expresiones que se utilizan a lo largo de nuestro trabajo.

## Capítulo 2

# Cromodinámica cuántica y sus simetrías

En este capítulo hablaremos de algunas teorías y modelos con los que se trató de entender y agrupar al zoológico de partículas descubiertas en el siglo XX, tal que se analizará las simetrías que poseen y de cómo a partir de estas ideas se construyó la teoría cuántica de campos conocida como QCD, que es la parte del modelo estándar de partículas que se utiliza actualmente para estudiar a los procesos fuertes. También veremos algunas de las propiedades más importantes de QCD y se hablará del rompimiento dinámico de la simetría quiral, proceso responsable de que los hadrones tengan las masas que conocemos actualmente.

### 2.1. Eightfold-Way

A principios del siglo XX una de las mayores preguntas que se hacían los físicos era porqué los protones dentro del núcleo atómico no se repelían violentamente por la fuerza eléctrica, ya que, debido a la ínfima distancia de unos con otros, esta fuerza debía de ser extremadamente grande; la conclusión a la que llegaron es que debía de existir una nueva fuerza de muy corto alcance, a la cual simplemente llamaron fuerza fuerte [34]. El primer intento de dar una teoría para esta nueva fuerza fue hecho por Yukawa en 1934 [35], en la cual se supone que el protón y neutrón en el núcleo atómico se atraen entre sí por un campo bosónico, y debido al corto alcance de esta fuerza, el mediador debía de tener una masa diferente de cero; como las estimaciones de la masa de este mediador caían entre las masas del electrón y la del protón, se llamó a esta partícula *mesón*, proveniente del griego *mésos*, que significa literalmente “que está en medio”.

En 1947 Marshak de manera teórica [36] y varios grupos de manera experimental en rayos cósmicos [37,38] descubrieron la existencia de este mesón de Yukawa, al cual se llamó pión. Con el paso de los años se encontraron nuevas partículas que interactúan mediante la fuerza fuerte, a las cuales se les llamó *hadrones*, mientras que a las que no interactúan mediante esta fuerza se les conoce como *leptones*; estas partículas que interactúan fuertemente se

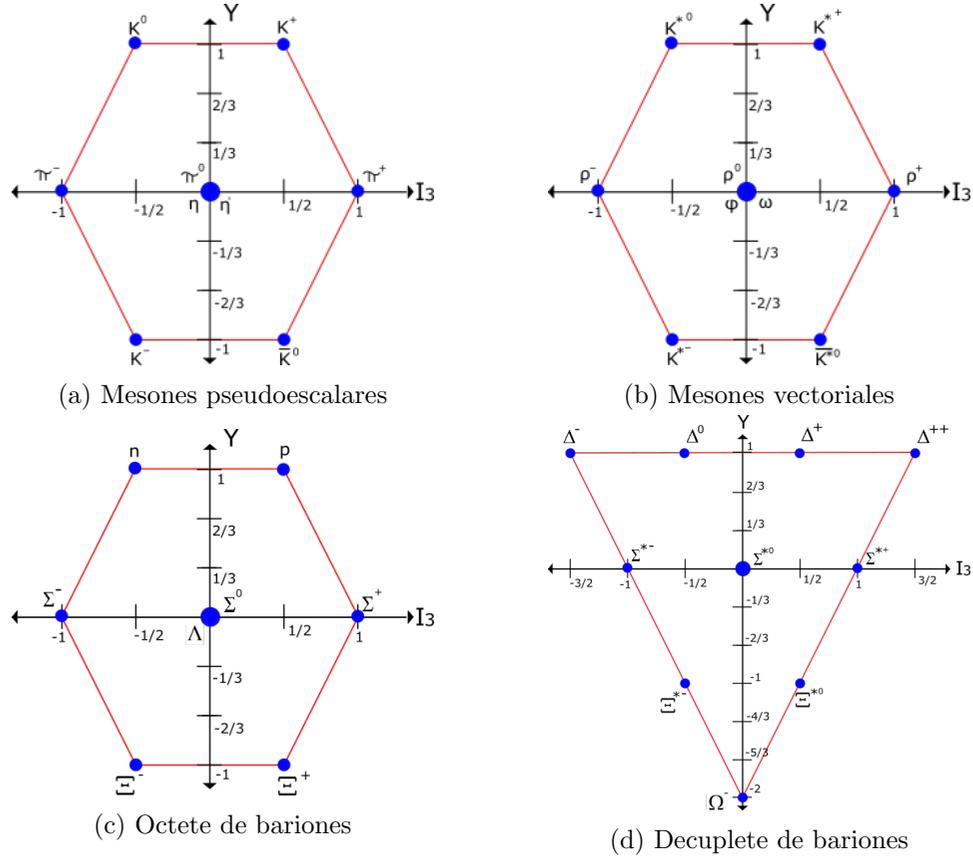


Figura 2.1: Eightfold way en el espacio  $I_3 - Y$  (Cantidades que se definirán a continuación).

dividen en dos familias, los *bariones* y los *mesones*<sup>1</sup>, los cuales tienen respectivamente espín semientero y entero. Con la implementación del nuevo número cuántico que se conservaba en las interacciones fuertes, la *extrañeza*  $s$ , Gell-Mann introdujo en 1961 el arreglo que se conoce como el *Eightfold-way* [39], tal que todo el zoológico de hadrones descubiertos hasta ese momento se clasificaban de acuerdo a su extrañeza y carga eléctrica en singletes, octetes y decupletes de partículas, como se observa en la Figura 2.1, donde  $I_3$  es la tercera componente del isoespín y  $Y$  es la hipercarga.

Uno de los mayores logros del *Eightfold-way* fue la predicción del hiperón  $\Omega^-$  (el cual se encontró experimentalmente poco después en EE.UU [40]), ya que Gell-Mann estimó con una gran precisión la masa y números cuánticos que debería de tener.

<sup>1</sup>También se habla de la existencia de hadrones exóticos, aunque la evidencia experimental aun no es concluyente

## 2.2. Modelo de quarks

Para tratar de explicar el porqué de estos arreglos geométricos, Gell-Mann y colaboradores propusieron en 1964 que en realidad los hadrones están compuestos por constituyentes aún más elementales, a los cuales se llamaron quarks [41]. Se planteó que había 3 tipos de quarks,  $q = u, d, s$ , y que para cada uno de ellos existía su correspondiente antipartícula  $\bar{q}$  con la carga eléctrica y extrañeza opuesta; hoy en día sabemos que en realidad hay 6 “sabores” de quarks y sus correspondientes antiquarks. A partir de estas ideas surgió lo que hoy se conoce como el modelo de quarks, en el cual los quarks se ven como los elementos de la base del espacio de sabor, de tal forma que los hadrones se escriben en términos de esta base y entonces se habla de “rotaciones” de sabor para pasar de un hadrón a otro. Como estas rotaciones de sabor deben de ser transformaciones unitarias, se obtienen grupos de simetría  $SU(N)$ , dependiendo del número de quarks que se consideren, y el hecho de que la masa de los quarks no sea la misma hace que estas simetrías sean aproximadas.

### 2.2.1. Simetría de isospín $SU(2)_I$

Considerando solamente a los quarks  $u$  y  $d$ , el hecho de que  $m_u \approx m_d$  nos dice que para estos quarks la interacción fuerte posee una simetría de sabor muy buena, a la cual se llama isospín por su similitud con el tratamiento angular que se hace para el espín. De esto, la base en el espacio de sabor será simplemente

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (2.1)$$

donde  $I$  es el isospín total e  $I_3$  es la tercera componente, tal que se dice que forman un doblete de isospín. Esto explica lo que propuso Heisenberg de que el protón y el neutrón se podían ver como dos estados de la misma cosa, el nucleón, ya que en realidad el protón está formado por dos quarks  $u$  y un quark  $d$ , mientras que el neutrón está compuesto por dos quark  $d$  y un quark  $u$ , y así el pasar de un protón a un neutrón es simplemente hacer una rotación de sabor en el espacio  $SU(2)$ . Para los antiquarks se tiene algo parecido, ya que también forman un doblete de isospín dado por

$$-|\bar{d}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad |\bar{u}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (2.2)$$

donde cambiar el orden de los sabores  $u$  y  $d$  y el signo menos en el antiquark  $\bar{d}$  se hace para que los quarks y antiquarks se transformen exactamente en la misma forma, es decir, con la misma transformación unitaria  $\hat{U}$ , la cual da invarianza ante el cambio  $u \leftrightarrow d$  de la forma

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Los generadores de este grupo  $SU(2)_I$  son justamente las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (2.4)$$

tal que definiendo

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} , \quad (2.5)$$

se obtiene que

$$\hat{U} = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}} . \quad (2.6)$$

### 2.2.2. Simetría de sabor $SU(3)_f$

Extendiendo las ideas pasadas para incluir al quark  $s$ , se obtiene una nueva simetría, pero dado que  $m_s > m_u, m_d$ , esta simetría será solo aproximada, pero aún así nos será muy útil para construir los estados asociados a los mesones y bariones compuestos por los 3 quarks ligeros. De esta forma, la base en este espacio es

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (2.7)$$

tal que se construye la rotación unitaria que está relacionada a la invarianza  $u \leftrightarrow d \leftrightarrow s$

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} , \quad (2.8)$$

donde se obtiene que los generadores del grupo  $SU(3)_f$  son justamente las matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (2.9) \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que en general se define la hipercarga como la suma del número bariónico ( $\mathbb{B}$ ), extrañeza ( $S$ ), encanto ( $C$ ), belleza ( $B$ ) y topness ( $T$ ), es decir,  $Y = \mathbb{B} + S + C + B + T$ ,

Sabor	Q	No. Bariónico	S	Y	$I_3$
u	2/3	1/3	0	1/3	1/2
d	-1/3	1/3	0	1/3	-1/2
s	-1/3	1/3	-1	-2/3	0
$\bar{u}$	-2/3	-1/3	0	-1/3	-1/2
$\bar{d}$	1/3	-1/3	0	-1/3	1/2
$\bar{s}$	1/3	-1/3	1	2/3	0

Tabla 2.1: Números cuánticos de los quarks y antiquarks ligeros.

se tiene que la hipercarga y el isospín se pueden escribir en términos de las matrices de Gell-Mann de la forma

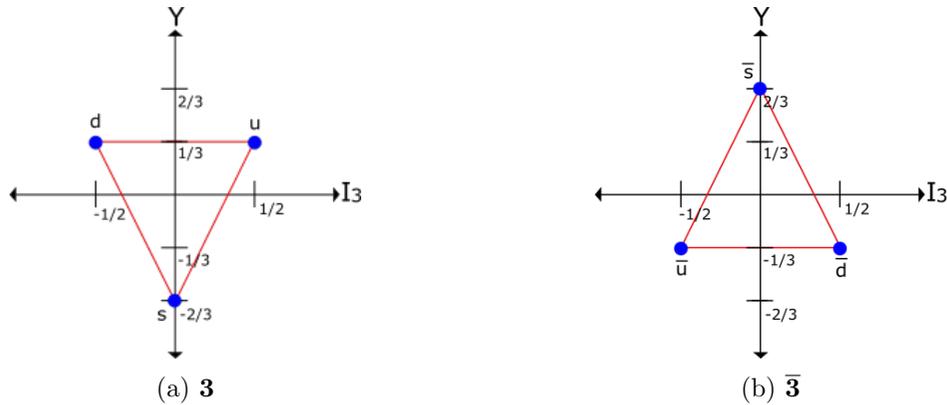
$$I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 \quad , \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \quad , \quad (2.10)$$

de donde se sigue la siguiente relación para la carga eléctrica de la partícula

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad , \quad (2.11)$$

En la Tabla 2.1 se enlistan los números cuánticos de los quarks y antiquarks ligeros, y dado que los antiquarks ligeros también constituyen una base para un grupo  $SU(3)_f$ , en el espacio  $I_3 - Y$  se forman los arreglos triangulares para los quarks y antiquarks, como se muestra en la Figura 2.2. Finalmente, combinando las representaciones de  $SU(3)_f$  para los quarks y antiquarks que se denotan respectivamente como  $\mathbf{3}$  y  $\bar{\mathbf{3}}$ , y usando el hecho de que los bariones están formados por tres quarks, mientras que los mesones están formados por un quark y un antiquark, se obtiene

$$\text{Mesón} = \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad , \quad (2.12)$$

Figura 2.2: Representación de los quarks y antiquarks ligeros en el espacio  $I_3 - Y$ .

$$\text{Barión} = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} , \quad (2.13)$$

que son justamente los octetes, singletes y decuplete que introdujo Gell-Mann.

### 2.3. Símetria de color $SU(3)_c$ y características de QCD

A pesar de que el modelo de quarks fue muy útil para explicar el origen de los multipletes de los hadrones y predijo la existencia de la partícula  $\Omega^-$ , este presenta un problema teórico. Dado que los bariones  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^-$  y  $\Omega^-$  están formados respectivamente por tres quarks idénticos  $u$ ,  $d$  y  $s$ , los cuales están en la misma configuración de espín, se ve que su función de onda total es simétrica, pero como estas partículas son fermiones, dicha función de onda debería de ser totalmente anti simétrica.

Para resolver esta aparente violación del principio de exclusión de Pauli, Greenberg postuló en 1964 que cada sabor de quark venía a su vez en tres *colores* rojo, verde y azul [42] (aunque el término color se introdujo en 1970 por Lichtenberg[43]), tal que este nuevo número cuántico forma una simetría exacta,  $SU(3)_c$ , y así la función de onda de los bariones antes mencionados será totalmente anti simétrica, ya que la función de onda de color es anti simétrica. Con esta simetría de color se construye la teoría conocida como cromodinámica cuántica (QCD), la cual es la teoría cuántica de campos no Abelianas que describe a las interacciones fuertes, donde el mediador de la fuerza es el gluon, mientras que los portadores de carga (de color) son justamente los quarks.

Por otra parte, como el color en un proceso fuerte se debe de conservar así como se conserva la carga eléctrica en QED, considerando el proceso  $d \rightarrow d + g$ , se ve que si el quark  $d$  entrante es por ejemplo de color verde, mientras que el quark  $d$  saliente es de color rojo, el gluon se debe de llevar esta diferencia de color para que el color total se conserve, es decir, el gluon lleva una unidad positiva de color verde y una unidad negativa de color rojo. De lo anterior se ve que los gluones son *bicolores*, tal que se encuentra que hay ocho tipos de gluones en total [34]; esta propiedad de que los gluones lleven color hace que se puedan acoplar entre sí, resultando en vértices de tres y cuatro gluones, cosa que no pasa por ejemplo en QED con los fotones, ya que estos son eléctricamente neutros. Otra característica que diferencia QCD con QED es la *libertad asintótica* de la “constante” de acoplamiento fuerte  $\alpha_s$  (descubierta por Groos, Wilczek y Politzer en 1973 [2, 3]<sup>2</sup>), tal que esta constante toma un valor grande a bajas energías (distancias largas), mientras que es pequeña a energías altas (distancias cortas), como se observa esquemáticamente en la Figura 2.3.

### 2.4. Límite quiral y rompimiento dinámico de simetría quiral

La acción básica de QCD depende de los campos espinoriales de los quarks  $\psi$  y de los campos vectoriales de los gluones  $A_\mu$ , la cual se escribe en el espacio de Minkowski de la forma [57]

---

<sup>2</sup>descubrimiento con el cual obtienen el premio Nobel de Física en 2004

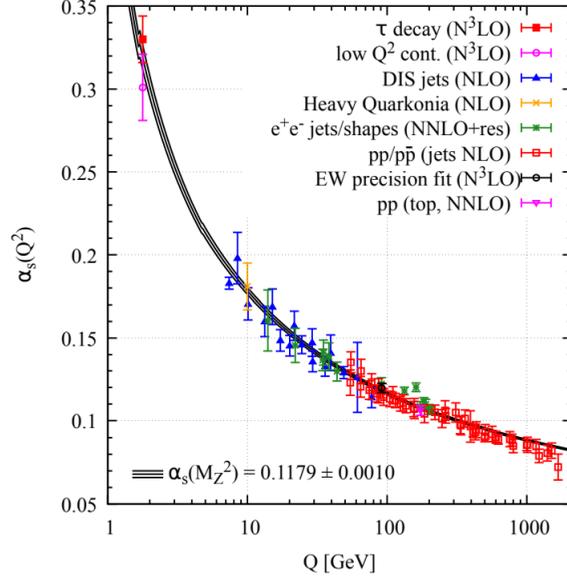


Figura 2.3: Acoplamiento fuerte  $\alpha_s$  en función de la energía  $Q$  para diferentes grados de la teoría de perturbaciones de QCD [95].

$$S[\bar{\psi}, \psi, A] = \int d^4x \sum_{f=u,d,s,\dots} \left[ \bar{\psi}_f(x) (i\not{D} - m_{fg}) \psi_f(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G^{a\mu\nu}(x) \right], \quad (2.14)$$

siendo  $m_{fg} = m_f \delta_{fg}$  una matriz diagonal cuyas entradas son las masas de los diferentes sabores de quark,  $D_\mu$  es la derivada covariante y  $G_{\mu\nu}^a(x)$  es el tensor de fuerza del campo de los gluones, los cuales están dados respectivamente por las expresiones

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a t^a, \quad (2.15)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.16)$$

donde  $f = 1, \dots, N_f$  es el índice de sabor,  $a, b, c = 1, \dots, 8$  son los índices de color para los gluones, y  $f^{abc}$  son las constantes de estructura de  $SU(3)_c$ . En el límite quiral  $m_u = m_d = m_s = 0$ , la parte correspondiente a los quarks toma la forma simple

$$S_{\text{Quiral}}[\bar{\psi}, \psi] = i \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu D_\mu \psi(x). \quad (2.17)$$

Usando las constantes  $\omega_V^a$  y  $\omega_A^a$ , se ve que la acción en el límite quiral es invariante ante las transformaciones unitarias

$$\psi \rightarrow e^{i\lambda_a \omega_V^a} \psi , \quad (2.18a)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \lambda_a \omega_A^a} \psi , \quad (2.18b)$$

con lo cual del teorema de Noether se generan las corrientes vectorial y axial dadas respectivamente por [44]

$$J_a^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu t_a \psi(x) , \quad (2.19)$$

$$J_{5a}^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 t_a \psi(x) , \quad (2.20)$$

y sus correspondientes cargas conservadas

$$Q_a(x) = \int d^3x J_a^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) t_a \psi(x) , \quad (2.21)$$

$$Q_{5a}(x) = \int d^3x J_{5a}^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \gamma_5 t_a \psi(x) , \quad (2.22)$$

donde  $t_a = \lambda_a/2$ . Si se hace el mismo procedimiento fuera del límite quiral, se encuentra que

$$\partial_\mu J_a^\mu(x) = \bar{\psi}(x) [t_a, m] \psi(x) , \quad (2.23)$$

$$\partial_\mu J_{5a}^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \{ \gamma_5 t_a, m \} \psi(x) . \quad (2.24)$$

De (2.23) vemos que la corriente vectorial se conserva si  $m_u = m_d = m_s$ , que es el límite de la simetría de sabor  $SU(3)_f$ , mientras que dé (2.24) la corriente axial se conserva solo en el límite quiral y solo de manera clásica, es decir, se tiene una anomalía axial.

Por otra parte, la conjetura de Nambu-Goldstone de la simetría quiral nos dice que las transformaciones continuas dadas en (2.18) dejan a la acción invariante, pero no lo harán con el estado base  $|0\rangle$  [45], es decir, la acción y el estado base se transforman de diferente manera y entonces la simetría quiral se rompe dinámicamente debido a las interacciones. De esta forma, el teorema de Goldstone dicta que aparece un bosón de Nambu-Goldstone sin masa y espín cero por cada simetría continua rota [46, 47], donde para el caso de  $SU(3)_f$  estos bosones serán justamente los mesones del octete de mesones pseudoescalares; el hecho de que esta simetría sea solo aproximada es lo que hace que en realidad los mesones pseudoescalares adquieran una masa diferente de cero. Este rompimiento dinámico de simetría quiral (DCSB) es muy importante, ya que es el mecanismo que transforma las masas corrientes de los quarks en masas dinámicas, las cuales son las que se combinan para dar la masa de todos los hadrones.

## Capítulo 3

# Ecuacion de Dyson-Schwinger

La derivación de ecuaciones integrales para las funciones de Green entre amplitudes de campos se realizó por Schwinger y Dyson de manera independiente a mediados del siglo XX [48-50], las cuales después se conocerían como *Dyson-Schwinger Equation* (DSE), tal que se obtiene un tratamiento para el caso relativista de estados ligados. El inconveniente de este método, como se verá a continuación, es que se obtienen un número infinito de ecuaciones acopladas; una de las maneras más prácticas de obtener estas ecuaciones es mediante funcionales generadores de las funciones de Green conectadas e irreducibles [16, 51-54, 78]. Estas ecuaciones son de gran relevancia en el presente trabajo, ya que los propagadores de los electrones y fotones en QED y el propagador del quark en QCD obedecen cada uno su propia DSE, de tal forma que usando una interacción de contacto y un truncamiento adecuado se deriva la ecuación de gap, la cual permite determinar numéricamente la masa dinámica de los quarks y así obtener la forma exacta de los propagadores de los quarks en esta aproximación.

Consideremos los funcionales generadores  $Z[J]$  y  $G[J]$ , tal que están relacionados de la forma

$$Z[J] = e^{G[J]} . \quad (3.1)$$

Así, dado que  $Z[J]$  es de alguna forma el equivalente a la función de partición en mecánica estadística, el hecho de que  $G[J] = \text{Ln}(Z[J])$ , nos dice que  $G[J]$  es el equivalente a la energía libre de Helmholtz. Por otra parte, usando campos escalares como ejemplo (aunque en general se puede hacer para cualquier tipo de campo), se tiene que  $Z[J]$  está definido a través de la acción para el campo escalar  $\Phi$ , y de las fuentes externas  $J_\mu$  de la forma

$$Z[J] = \int \mathfrak{D}\Phi e^{i\sigma} , \quad (3.2)$$

donde

$$\sigma = S[\Phi] + \int d^4x J(x)\Phi(x) . \quad (3.3)$$

Ahora, haciendo una rotación de Wick, se pasa la componente temporal del espacio de Minkowski ( $t$ ) a la respectiva componente temporal del espacio Euclideo 3+1 ( $t^E$ ) de la forma  $t \rightarrow -it^E$  (Véase Apéndice A), tal que se sigue que [9]

$$\int^M d^4x^M \Rightarrow -i \int^E d^4x^E , \quad (3.4)$$

donde el funcional generador  $Z[J]$  en el espacio Euclideo se escribe como

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi \exp(-S_E[\Phi] + J \cdot \Phi) , \quad (3.5)$$

siendo  $S_E$  ahora la acción en el espacio Euclideo, aunque por simplicidad se seguira usando simplemente  $S$  para referirse a la acción. De igual manera, en el espacio Euclideo se define el producto interno como

$$J \cdot \Phi = \int d^4x J(x)\Phi(x) . \quad (3.6)$$

Ahora, dado que las condiciones de frontera para este potencial generador  $Z[J]$  nos dicen que se tiene que desvanecer en el infinito, tenemos que

$$\int D\Phi \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} e^{-S[\Phi]+J \cdot \Phi} = \int D\Phi \left[ \frac{-\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} + J(x) \right] e^{-S[\Phi]+J \cdot \Phi} = 0 , \quad (3.7)$$

y como en general para una función  $f(x)$  se cumple que

$$\int dx f(x) e^{ax} = \int dx f \left( \frac{d}{da} \right) e^{ax} = f \left( \frac{d}{da} \right) \int dx e^{ax} , \quad (3.8)$$

obtenemos ,

$$\left[ -\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) + J(x) \right] Z[J] = 0 , \quad (3.9)$$

lo que en términos de  $G[J]$  se describe como

$$-\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} \left( \frac{\delta G[J]}{\delta J(x)} \right) e^{G[J]} + J(x) e^{G[J]} = 0 . \quad (3.10)$$

Multiplicando por  $e^{-G[J]}$ , y usando la relación  $e^{-X} f(\partial) e^X = f(\partial + \partial X)$ , se obtiene

$$\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} \left[ \frac{\delta G[J]}{\delta J(x)} + \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] - J(x) = 0 . \quad (3.11)$$

Justamente (3.9) y (3.11) son las ecuaciones de Dyson-Schwinger para las funciones de Green completas y conectadas respectivamente, que son un conjunto infinito de ecuaciones entre funciones de correlación, tal que se expande en potencias de las fuentes externas  $J_\mu(x)$ , y al final se eliminan estas fuentes, es decir

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle_c &= \frac{1}{Z} \int \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) e^{-S[\Phi]} D\Phi \\
&= \frac{\delta^n \text{Ln}(Z[J])}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J=0} \\
&= \frac{\delta^n G[J]}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J=0} ,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ahora, haciendo una transformación de Legendre, las funciones de Green conectadas están relacionadas con las funciones de Green irreducibles (vértices propios) mediante el nuevo funcional generador

$$\Gamma(\tilde{\Phi}) = \tilde{\Phi} \cdot J - G[J] , \tag{3.13}$$

donde  $\tilde{\Phi}$  es la variable conjugada de la fuente externa  $J(x)$ , tal que sabemos que estará dada de la forma

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{\delta G[J]}{\delta J(x)} , \tag{3.14}$$

de lo que se sigue ,

$$\frac{\delta \tilde{\Phi}(x)}{\delta J(x')} = \frac{\delta^2 G[J]}{\delta J(x') \delta J(x)} . \tag{3.15}$$

Para ver qué es exactamente  $\tilde{\Phi}$ , recordando que  $G[J] = \text{Ln}(Z[J])$ , se sigue que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(x) &= \tilde{\Phi}(x; J) \\
&= \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \\
&= \frac{1}{Z[J]} \int \Phi(x) e^{-S[J] + J \cdot \Phi} D\Phi \\
&= \langle \Phi(x) \rangle_J ,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

es decir,  $\tilde{\Phi}$  es el valor de expectación en el vacío de  $\Phi$  en presencia de la fuente  $J$ . Luego, de (3.13) notamos que

$$\frac{\delta \Gamma[\tilde{\Phi}]}{\delta \tilde{\Phi}(x)} = J(x) , \tag{3.17}$$

de lo que se sigue que

$$\frac{\delta J(x)}{\delta \tilde{\Phi}(x')} = \frac{\delta^2 \Gamma[\tilde{\Phi}]}{\delta \tilde{\Phi}(x') \delta \tilde{\Phi}(x)} , \tag{3.18}$$

y entonces, juntado (3.15) con (3.18) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta^4(x-x') &= \int d^4y \frac{\delta\tilde{\Phi}(x)}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\tilde{\Phi}(x')} \\ &= \int d^4y \frac{\delta^2 G[J]}{\delta J(y)\delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma[\tilde{\Phi}]}{\delta\tilde{\Phi}(y)\delta\tilde{\Phi}(x')} . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por lo tanto, al evaluar la delta en  $x = x'$

$$\frac{\delta^2 G[J]}{\delta J(y)\delta J(x)} = \left[ \frac{\delta^2 \Gamma[\tilde{\Phi}]}{\delta\tilde{\Phi}(y)\delta\tilde{\Phi}(x)} \right]^{-1} . \quad (3.20)$$

Ahora, usando (3.13), (3.17), y usando regla de la cadena, de (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{\partial S[\Phi]}{\partial\Phi(x)} \left[ \tilde{\Phi}(x) + \int d^4x' \frac{\delta\tilde{\Phi}(x')}{\delta J(x)} J(x') - \int d^4x' \frac{\delta\Gamma[\tilde{\Phi}]}{\delta\tilde{\Phi}(x')} \frac{\delta\tilde{\Phi}(x')}{\delta J(x)} - \int d^4x' \frac{\delta\tilde{\Phi}(x')}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\Phi}(x')} \right] \\ &= \frac{\partial S[\Phi]}{\partial\Phi(x)} \left[ \tilde{\Phi}(x) - \frac{\delta\tilde{\Phi}(x)}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\Phi}(x)} \right] . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Finalmente, usando (3.17) y (3.18)

$$\frac{\delta\Gamma[\tilde{\Phi}]}{\delta\tilde{\Phi}} - \frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi} \left[ \tilde{\Phi} - \left( \frac{\delta^2 \Gamma[\tilde{\Phi}]}{\delta\tilde{\Phi}\delta\tilde{\Phi}} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta\tilde{\Phi}} \right] = 0 , \quad (3.22)$$

la cual es la DSE para los vértices propios.

### 3.1. DSE en QED

El formalismo presentado de las ecuaciones de Dyson-Schwinger se puede aplicar a cualquier teoría cuántica de campos, en particular nosotros por simplicidad vamos a trabajar en QED, tal que encontraremos los propagadores vestidos del fotón y del electrón inmersos en una fuente externa de campo electromagnético. Con esto en mente, supongamos los campos  $\psi(x)$  y  $\bar{\psi}(x)$  (para el electrón y positrón respectivamente), tal que sus fuentes son  $\eta(x)$  y  $\bar{\eta}(x)$ , y también se considera la fuente externa de potencial electromagnético  $J_\mu(x)$ . De esto, se construye el potencial generador  $Z(J, \eta, \bar{\eta})$ , tal que partiendo de la forma de (3.5), su integral de camino está dada de la forma

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathfrak{D}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) e^{i\sigma} , \quad (3.23)$$

donde en este caso

$$\sigma = S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + \int d^4x [J^\mu(x)A_\mu(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x)] \quad , \quad (3.24)$$

tal que  $\mathcal{D}(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$  es la medida de la integral de camino y  $S$  es la acción en QED. Ahora, dado que en un sistema interactuante de fotones, electrones y positrones el Lagrangiano es de la forma [54]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^\gamma + \mathcal{L}_0^{e^+,e^-} + \mathcal{L}_{int} \quad , \quad (3.25)$$

con

$$\mathcal{L}_0^\gamma = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2\xi} (\vec{\partial} \cdot \vec{A})^2 \quad , \quad \mathcal{L}_0^{e^+,e^-} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi \quad , \quad \mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\cancel{A}\psi \quad , \quad (3.26)$$

siendo  $\xi$  el parámetro de norma fijo. Usando esto, la acción de este sistema de QED será

$$\begin{aligned} S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \left( \bar{\psi}(x) [i\cancel{\partial} - m + e\cancel{A}] \psi(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}A_\mu(x) \left[ -\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A_\nu(x) \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

con  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  el operador D'Alembertiano. Luego, tomando las consideraciones que se muestran en el Apéndice A para pasar del espacio de Minkowski al espacio Euclidean, es decir,  $t \rightarrow -it$ ,  $i\cancel{\partial} \rightarrow -\cancel{\partial}$  y  $\cancel{A} \rightarrow -i\cancel{A}$ , el funcional generador en el espacio euclidean tendrá la forma [55]

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathfrak{D}(A, \psi, \bar{\psi}) \exp \left( -S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] \right. \\ \left. + \int d^4x [J^\mu(x)A_\mu(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x)] \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

tal que

$$\begin{aligned} S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \left( \bar{\psi}(x) [\cancel{\partial} + m + ie\cancel{A}] \psi(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}A_\mu(x) \left[ -\square \delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A_\nu(x) \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Usando esta acción, vemos que

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) + \left[ -\square \delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A_\nu(x) \quad . \quad (3.30)$$

Ahora, recordando que el funcional generador de las funciones de Green conectadas  $G[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]$  se relaciona con el funcional  $Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]$  de la forma

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = e^{G[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]} , \quad (3.31)$$

y que con una transformada de Legendre obtenemos el funcional generador para las funciones de Green irreducibles  $\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]$ , es decir

$$\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x [J^\mu(x)A_\mu(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x)] - G[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] , \quad (3.32)$$

obtenemos las relaciones

$$\frac{\delta G}{\delta J_\mu} = A_\mu, \quad \frac{\delta G}{\delta \eta} = \psi, \quad \frac{\delta G}{\delta \bar{\eta}} = -\bar{\psi} , \quad (3.33)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} = J_\mu, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} = \eta, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} = -\bar{\eta} , \quad (3.34)$$

### 3.1.1. DSE para el propagador del fotón

Recordemos que en (3.7) se vio que la integral funcional de una derivada funcional total es cero bajo las condiciones de frontera adecuadas, con lo cual, tomando la derivada funcional con respecto a  $A_\mu$ , vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathfrak{D}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \exp \left( -S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + \int d^4x [J^\mu(x)A_\mu(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x)] \right) \\ &= \left( -\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} \left[ \frac{\delta}{\delta J}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, -\frac{\delta}{\delta \eta} \right] + J_\mu(x) \right) Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para obtener el propagador del fotón se eliminan los campos del electrón y positrón, es decir, se hace  $\bar{\psi} = \psi = 0$ , tal que usando (3.33) y (3.34) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} &= \left[ -\square \delta_{\mu\nu} + \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A_\nu(x) \\ &+ ie \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \left( \frac{\delta^2 G}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(x)} \right) \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} \right] . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando (3.20)

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} &= \left[ -\square\delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu\partial_\nu \right] A_\nu(x) \\ &+ ieTr \left[ \gamma_\mu \left( \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(x)} \right)^{-1} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} \right] . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Definiendo

$$\left( \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)} \right)^{-1} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} = S(x, y, [A_\mu]) , \quad (3.38)$$

como el propagador del electr3n incluyendo correcciones debido a la presencia del campo externo  $A_\mu$ , aplicando  $\delta/\delta A_\nu$  a (3.37) y haciendo  $A_\mu = 0$ , el inverso del propagador del fot3n toma la forma

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{-1}(x, y) &= \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(x)\delta A_\nu(y)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}^{A_\mu=0} = \left[ -\square\delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu\partial_\nu \right] \delta^4(x - y) \\ &+ ieTr \left[ \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta A_\nu(x)} \left( \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(x)} \right)^{-1} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}^{A_\mu=0} \right] . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Por otra parte, considerando una matriz  $M$  de dimensi3n finita, vemos que para la matriz identidad  $I$  de dimensi3n finita

$$\frac{dI}{dx} = 0 = \frac{d}{dx} [M(x)M^{-1}(x)] = \frac{dM(x)}{dx} M^{-1}(x) + M(x) \frac{dM^{-1}(x)}{dx} , \quad (3.40)$$

multiplicando a la izquierda por  $M^{-1}$

$$\frac{dM^{-1}(x)}{dx} = -M^{-1}(x) \frac{dM(x)}{dx} M^{-1}(x) . \quad (3.41)$$

Usando lo anterior y el propagador del electr3n de (3.38), el inverso del propagador del fot3n toma la forma

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{-1}(x, y) &= \left[ -\square\delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu\partial_\nu \right] \delta^4(x - y) \\ &+ ie \int d^4u d^4w Tr \left[ \gamma_\mu S(x, w) \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(u)\delta\psi(w)} S(w, x) \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}^{A_\mu=0} \right] , \end{aligned} \quad (3.42)$$

lo cual se puede reescribir como

$$D_{\mu\nu}^{-1}(x, y) = (D_0)_{\mu\nu}^{-1}(x, y) + \Pi_{\mu\nu}(x, y) , \quad (3.43)$$

Figura 3.1: Propagador del fotón.

donde  $(D_0)_{\mu\nu}^{-1}(x, y)$  es el inverso del propagador para la parte no interactuante del fotón y  $\Pi_{\mu\nu}(x, y)$  es la autoenergía (tensor de polarización) del fotón, los cuales están dados por

$$(D_0)_{\mu\nu}^{-1}(x, y) = \left[ -\square\delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu\partial_\nu \right] \delta^4(x - y) , \quad (3.44)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(x, y) = ie^2 \int d^4u d^4w Tr [\gamma_\mu S(x, w) \Gamma_\nu(y; u, w) S(w, x)] , \quad (3.45)$$

donde el vértice propio fermión-bosón se define como

$$e\Gamma_\nu(y; u, w) = \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(u) \delta \psi(w)} \Bigg|_{\substack{A_\mu=0 \\ \bar{\psi}=\psi=0}} . \quad (3.46)$$

Finalmente, dado que en general es más conveniente trabajar en el espacio de momentos, tomando la transformada de Fourier el inverso del propagador del fotón se escribe en el espacio de momentos de la forma

$$D_{\mu\nu}^{-1}(p) = (D_0)_{\mu\nu}^{-1}(p) + \Pi_{\mu\nu}(p) , \quad (3.47)$$

tal como se ve en la Figura 3.1, donde

$$(D_0)_{\mu\nu}^{-1}(p) = p^2 \delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu , \quad (3.48)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr [\gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu(q, q+p) S(q+p)] . \quad (3.49)$$

### 3.1.2. DSE para el propagador del electrón

Realizando ahora la derivada funcional de (3.7) con respecto a  $\bar{\psi}(x)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathfrak{D}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \exp \left[ -S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + \int d^4x (J^\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x)) \right] \\ &= \left[ -(\not{\partial} + m + ie\mathbf{A}) \psi(x) + \eta(x) \right] Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] , \end{aligned} \quad (3.50)$$

lo cual se reescribe usando las variables conjugadas de  $A_\mu$  y  $\psi$  como

$$\left[ - \left( \not{\partial} + m + ie\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} + \eta(x) \right] Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = 0 . \quad (3.51)$$

Luego, tomando la derivada con respecto a  $\eta(y)$  y fijando  $\bar{\eta} = \eta = 0$

$$\left[ \delta^4(x-y) - \left( \not{\partial} + m + ie\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \frac{\delta^2 G[J_\mu, 0, 0]}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} \right] e^{G[J_\mu, 0, 0]} = 0 , \quad (3.52)$$

tal que usando la ecuación (3.20) en (3.38) se define el propagador del electrón en términos de la fuente externa  $J_\mu$  de la forma

$$S(x, y; [J_\mu]) = \frac{\delta^2 G}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} , \quad (3.53)$$

de donde se obtiene

$$\delta^4(x-y) - \left( \not{\partial} + m + ie\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) S[x, y; [J_\mu]] \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} = 0 , \quad (3.54)$$

lo que se puede reescribir de la forma

$$\delta^4(x-y) = (\not{\partial} + m) S[x, y; [J_\mu]] \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} + ie\gamma^\mu \left( \frac{\delta S[x, y; [J_\mu]] \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}}{\delta J^\mu(x)} \right) . \quad (3.55)$$

Aplicando regla de la cadena y usando (3.38), (3.41) y (3.46), notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[x, y; [J_\mu]]}{\delta J^\mu(x)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}^{A_\mu=0} &= \int d^4 z \frac{\delta A_\nu(z)}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta A_\nu(z)} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x) \delta \psi(y)} \right)^{-1} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}^{A_\mu=0} \\ &= e \int d^4 z d^4 u d^4 v \frac{\delta A_\nu(z)}{\delta J^\mu(x)} S(x, u) \Gamma_\nu(u, v; z) S(v, y) \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}^{A_\mu=0} \\ &= e \int d^4 z d^4 u d^4 v D_{\mu\nu}(x, z) S(x, u) \Gamma_\nu(u, v; z) S(v, y) , \end{aligned} \quad (3.56)$$

y donde se usó el hecho de que

$$D_{\mu\nu}^{-1}(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(y)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}^{A_\mu=0} = \frac{\delta J^\mu(x)}{\delta A_\nu(y)} . \quad (3.57)$$

Por lo tanto, eliminando las fuentes externas, multiplicando por  $S^{-1}(y, y')$  e integrando sobre  $y'$ , (3.55) se reduce a

$$S^{-1}(x, y) = (\not{\partial} + m) \delta^4(x-y) + ie^2 \int d^4 z d^4 u D_{\mu\nu}(x, z) \gamma_\mu S(x, u) \Gamma_\nu(u, v; z) , \quad (3.58)$$

la cual es justamente la DSE en el espacio de posiciones para el propagador del electrón. Finalmente, tomando la transformada de Fourier, la DSE para el propagador del electrón se escribe en el espacio de momentos de la forma (como se ve en la Figura 3.2)

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= i\not{p} + m + e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu D_{\mu\nu}(p-q) S(q) \Gamma_\nu(q, p) \\ &= S_0^{-1}(p) + \Sigma(p) , \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde  $S_0^{-1}(p)$  es el propagador no interactuante del electrón y  $\Sigma(p)$  es su autoenergía, los cuales están dados de la forma

$$S_0^{-1}(p) = i\not{p} + m , \quad (3.60)$$

$$\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu D_{\mu\nu}(p-q) S(q) \Gamma_\nu(q, p) . \quad (3.61)$$

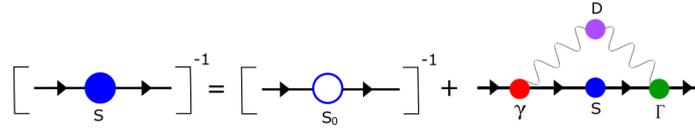


Figura 3.2: Propagador del electrón.

### 3.1.3. DSE para el vértice fermión-fotón

Procediendo de manera similar a lo que se hizo para derivar los propagadores del fotón y del electrón, se encuentra que la DSE para el vértice fermión-fotón es de la forma [16,56]

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S(p'+q) \Gamma_\mu(p'+q, p+q) S(p+q) K(p'+q, p+q, q) , \quad (3.62)$$

con  $K$  el kernel de dispersión fermión-antifermión. En la Figura 3.3 se ve que  $\Gamma_\mu$  esta acoplado al propagador del fermión  $S$  (función de 2 puntos) y a una amplitud de dispersión fermión-antifermión  $M$  (función de 4 puntos), la cual a su vez satisface una ecuación integral [56]. En notación simbólica se tiene que

$$M = K + K(S)^2K + K(S)^2K(S)^2K + \dots = K + K(S)^2M . \quad (3.63)$$

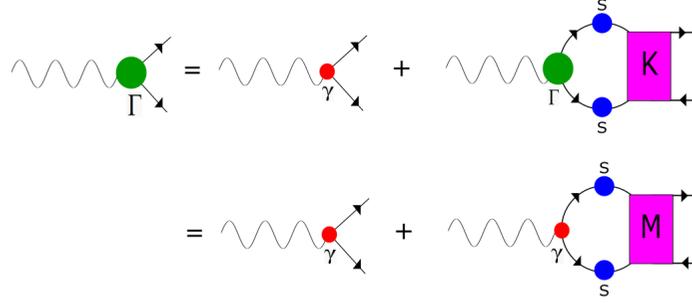


Figura 3.3: Vértice fermión-fotón.

### 3.2. DSE para el propagador vestido del quark en QCD

De acuerdo a la prescripción de Faddeev y Popov [58], para mantener la invarianza de norma en QCD (y en general en teorías de norma no Abelianas) se deben de introducir los campos escalares llamados *ghost* ( $\bar{B}^a, B^a$ ), los cuales son campos auxiliares no físicos que entran como líneas internas en los diagramas de Feynman para lasos. De esta forma, tomando las consideraciones descritas en el Apéndice A y la acción de QCD que involucra los ghost dada en [16], la acción general de QCD toma la forma en el espacio Euclideo

$$S_{QCD}[\bar{\psi}, \psi, A, \bar{B}, B] = S_{quark}[\bar{\psi}, \psi, A] + S_{ghost}[\bar{\psi}, \psi, A, \bar{B}, B] , \quad (3.64)$$

siendo  $S_{quark}$  la acción básica que involucra a los quark y gluones escrita en (2.13), mientras que  $S_{ghost}$  es la acción que se debe de agregar debido a la contribución de los ghost, la cual está dada por la expresión

$$S_{ghost}[A, \bar{B}, B] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A_\mu^a(x) \partial_\nu A_\nu^a(x) - \partial_\mu \bar{B}^a(x) D_\mu^{ab}(x) B^a(x) \right] , \quad (3.65)$$

con  $D_\mu^{ab}$  la derivada covariante en la representación adjunta dada por

$$D_\mu^{ab}(x) = \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c(x) . \quad (3.66)$$

De (3.65) vemos que los ghost interactúan solo con el campo de los gluones, lo hace que aparezca un vértice ghost-gluon, aparte del vértice normal quark-gluon y de los vértices de tres y cuatro gluones. Entonces, construyendo un funcional generador  $Z[J]$  de la forma de (3.5) con la renormalización de la acción (3.64), y procediendo de manera similar a como se hizo en la sección pasada para QED, se llega a que el inverso del propagador vestido del quark de sabor  $f$  toma la forma [16,59]

$$S_f^{-1}(p) = Z_{2F} (i\not{p} + Z_m m_f) + Z_{1F} \int^\Lambda \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}^{ab}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_f(q) \Gamma_\nu^{bf}(p, q) , \quad (3.67)$$

donde  $Z_i$  son constantes de renormalización,  $\Lambda$  es un regulador de masa y  $g$  es la constante de acoplamiento fuerte, además de que

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p-q) = \delta^{ab} D_{\mu\nu}(p-q) , \quad (3.68)$$

$$\Gamma_\nu^a(p, q) = \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_\nu(p, q) , \quad (3.69)$$

son respectivamente el propagador renormalizado para el gluon vestido y el vértice vestido renormalizado quark-gluon. Comparando (3.67) con (3.59), y haciendo por simplicidad las constantes de renormalización iguales a uno, se escribe al propagador vestido del quark de la forma

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + \Sigma(p) , \quad (3.70)$$

donde  $S_0^{-1}(p)$  es la parte no interactuante del propagador, y  $\Sigma(p)$  es la autoenergía del quark, las cuales están dadas por

$$S_0^{-1}(p) = i\not{p} + m , \quad (3.71)$$

$$\Sigma(p) = g^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu D_{\mu\nu}(p-q) S(q) \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_\nu(p, q) . \quad (3.72)$$

La ecuación (3.70) es conocida como la ecuación de gap, la cual es la DSE para el propagador vestido del quark, en donde se debe especificar la forma del propagador de los gluones y el vértice quark-gluón. Al principio del capítulo 5 se verá que, al introducir una interacción de contacto y un truncamiento adecuado, la ecuación de gap será de hecho la ecuación de la cual se determinan numéricamente las masas dinámicas para los diferentes sabores de quarks.

## Capítulo 4

# Ecuación de Bethe-Salpeter

Para el estudio de estados ligados de partículas y cómo estas se dispersan, en mecánica cuántica no relativista se utiliza la ecuación de Lippmann–Schwinger, la cual se deriva a partir de principios variacionales [71]. En el caso de teorías cuánticas de campos relativistas (justo como es el caso de QED y QCD), un tratamiento de estados ligados se hace con la ecuación de Bethe-Salpeter, la cual es una serie infinita de ecuaciones integrales acopladas para dos partículas. La forma general de la BSE se derivó por primera vez por E.E. Salpeter y H.A. Bethe en 1951 a partir de diagramas de Feynman [72], aunque fue primero publicada por Y. Nambu en 1950 pero sin derivación [73]. La BSE es tal vez la ecuación más importante utilizada en esta tesis, ya que es justamente la ecuación de movimiento de los mesones, partículas en las que estamos interesados en este trabajo, de tal forma que de la BSE homogénea y de su condición de normalización se obtienen propiedades de los mesones tales como su masa y constantes de decaimiento.

### 4.1. Derivación de la ecuación de Bethe-Salpeter

Al igual que para las ecuaciones de Dyson-Schwinger, una de las formas más sencillas y que más se usa en la actualidad para derivar las ecuaciones de Bethe-Salpeter es usando integrales de camino en el análisis funcional. Para esto, por simplicidad supongamos como ejemplo un modelo de dos partículas escalares  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , tal que intercambian a una tercera partícula  $\Phi$ ; en QED esto sería un electrón y positrón intercambiando fotones, mientras que en QCD serían los quarks y antiquarks intercambiando gluones. Procediendo de manera similar a como se hizo en la sección 3, el funcional generador en el espacio de Minkowski se escribe como

$$Z[j_1, j_2, J] = \int \mathfrak{D}(\phi_1, \phi_2, \Phi) e^{i\sigma} \quad , \quad (4.1)$$

con

$$\sigma = S + j_1 \cdot \phi_1 + j_2 \cdot \phi_2 + J \cdot \Phi \quad . \quad (4.2)$$

Dado que en general la Lagrangiana libre para un campo escalar en una teoría interactuante de  $D$  dimensiones se sabe que toma la forma

$$\mathcal{L}[\Phi] = \int d^{D-1}x dt \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \Phi)^2 - \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i \Phi \partial_j \Phi - \frac{1}{2}m^2 \Phi^2 - O(\Phi^3) \right], \quad (4.3)$$

se sigue que para el modelo propuesto de tres partículas interactuantes la acción en el espacio de Minkowski se escribe como

$$S[\Phi] = \int d^3x dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [(\partial_t \phi_i)^2 - (\partial_j \phi_i)^2 - m_i^2 \phi_i^2] + \frac{1}{2} [(\partial_t \Phi)^2 - (\partial_j \Phi)^2 - M^2 \Phi^2] - \frac{1}{2} g(\phi_1^2 \Phi + \phi_2^2 \Phi) \right], \quad (4.4)$$

donde el último término describe la interacción. Esta acción se pasa al espacio Euclideo tomando las consideraciones del Apéndice A, tal que

$$S[\Phi] = i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\partial_\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i + m_i^2 \phi_i^2) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi + M^2 \Phi^2) + \frac{1}{2} g (\phi_1^2 \Phi + \phi_2^2 \Phi) \right]. \quad (4.5)$$

De esta forma, el funcional generador en el espacio Euclideo se escribe como

$$Z[j_1, j_2, J] = \int \mathfrak{D}(\phi_1, \phi_2, \Phi) \exp \left( -S + \sum_{i=1}^2 j_i \cdot \phi_i + J \cdot \Phi \right), \quad (4.6)$$

luego, tomando la derivada funcional con respecto a  $\phi_1(x_1)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathfrak{D}(\phi_1, \phi_2, \Phi) \frac{\delta}{\delta \phi_1(x_1)} \exp \left( -S + \sum_{i=1}^2 j_i \cdot \phi_i + J \cdot \Phi \right) \\ &= [ -(\partial^2 + m_1^2 + g\Phi) \phi_1(x_1) + j_1(x_1) ] Z[j_1, j_2, J], \end{aligned} \quad (4.7)$$

y cambiando los campos escalares por sus variables conjugadas, es decir, haciendo  $\phi_1 \rightarrow \delta/\delta j_1$  y  $\Phi \rightarrow \delta/\delta J$ , se obtiene

$$\begin{aligned} j_1(x_1) Z[j_1, j_2, J] &= \left( \partial^2 + m_1^2 + g \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \frac{\delta Z[j_1, j_2, J]}{\delta j_1(x_1)} \\ &= \left( \partial^2 + m_1^2 + g \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \frac{\delta G[j_1, j_2, J]}{\delta j_1(x_1)} Z[j_1, j_2, J]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Recordando de (3.38) que el propagador del campo  $\phi_1$  está dado de la forma

$$S_1(x_1, y_1; J) = \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_1(x_1) \delta \phi_1(y_1)} \right)^{-1} \Big|_{\phi_1=\phi_2=0} = \frac{\delta^2 G}{\delta j_1(x_1) \delta j_1(y_1)} \Big|_{\phi_1=\phi_2=0}, \quad (4.9)$$

usando esto y derivando (4.8) con respecto a  $j_1(y_1)$  se sigue que

$$\delta^4(x_1 - y_1) = \left( \partial^2 + m_1^2 + g \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) S_1(x_1, y_1; J) . \quad (4.10)$$

Luego, usando el equivalente de (3.56) para QCD, es decir

$$\left. \frac{\delta S[x_1, y_1; J]}{\delta J(x_1)} \right|_{\Phi=0} = g \int d^4z d^4u d^4v D_1(x_1, z) S_1(x_1, u) \Gamma_1(u, v; z) S_1(v, y_1) , \quad (4.11)$$

la autoenergía de la partícula 1 en el espacio de momentos toma la forma

$$\Sigma_1(x_1, v) = g^2 \int d^4z d^4u D_1(x_1, z) S_1(x_1, u) \Gamma_1(u, v; z) , \quad (4.12)$$

y haciendo  $\Phi = 0$ , se obtiene de (4.10)

$$\begin{aligned} \delta^4(x_1 - y_1) &= (\partial^2 + m_1^2) S_1(x_1, y_1) + g^2 \int d^4z d^4u d^4v D_1(x_1, z) S_1(x_1, u) \Gamma_1(u, v; z) S_1(v, y_1) \\ &= (\partial^2 + m_1^2) S_1(x_1, y_1) + \int d^4v \Sigma_1(x_1, v) S_1(v, y_1) \\ &= (\partial^2 + m_1^2 + \Sigma_1) S_1(x_1, y_1) , \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde se utiliza la notación

$$\Sigma_1 S_1(x_1, y_1) = \int d^4v \Sigma_1(x_1, v) S_1(v, y_1) . \quad (4.14)$$

Siguiendo esta idea, para construir la función de Green para la propagación de 2 partículas, es decir, la función de Green de 4 puntos  $G(x_1, y_1; x_2, y_2)$ , se deben de tomar las derivadas funcionales con respecto a  $j_1(y_1)$ ,  $j_2(x_2)$  y  $j_2(y_2)$  en (4.8), y luego hacer  $j_1 = j_2 = J = 0$ , es decir

$$\frac{\delta^3}{\delta j_1(y_1) \delta j_2(x_2) \delta j_2(y_2)} \left[ j_1 Z[j_1, j_2, J] = \left( \partial^2 + m_1^2 + g \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \frac{\delta G[j_1, j_2, J]}{\delta j_1(x_1)} Z[j_1, j_2, J] \right] \Bigg|_{j_1=j_2=J=0} , \quad (4.15)$$

de donde se sigue

$$\left( \partial^2 + m_1^2 + g \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) G(x_1, y_1; x_2, y_2) = \delta^4(x_1 - y_1) S_2(x_2, y_2) , \quad (4.16)$$

tal que

$$G(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{\delta^4 G}{\delta j_1(x_1) \delta j_1(y_1) \delta j_2(x_2) \delta j_2(y_2)} . \quad (4.17)$$

Pasando el término con  $g$  a la derecha y sumando y restando  $\Sigma_1$

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m_1^2 + \Sigma_1) G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \delta^4(x_1 - y_1) S_2(x_2, y_2) \\ &+ \left( \Sigma_1 - g \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) G(x_1, y_1; x_2, y_2) . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Multiplicando por  $S_1(z_1, x_1)$ , integrando sobre  $x_1$  y usando (4.13)

$$\begin{aligned} \int d^4 x_1 \delta^4(z_1 - x_1) G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \int d^4 x_1 \delta^4(x_1 - y_1) S_1(z_1, x_1) S_2(x_2, y_2) \\ &+ \int d^4 x_1 S_1(z_1, x_1) \left( \Sigma_1 - g \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) G(x_1, y_1; x_2, y_2) , \end{aligned} \quad (4.19)$$

haciendo  $x_1 \leftrightarrow z_1$  en el lado derecho de la igualdad

$$\begin{aligned} G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \int d^4 z_1 \delta^4(z_1 - y_1) S_1(x_1, z_1) S_2(x_2, y_2) \\ &+ \int d^4 z_1 S_1(x_1, z_1) \left( \Sigma_1 - g \frac{\delta}{\delta J(z_1)} \right) G(z_1, y_1; x_2, y_2) , \end{aligned} \quad (4.20)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= S_1(x_1, y_1) S_2(x_2, y_2) \\ &+ \int d^4 z_1 S_1(x_1, z_1) \left( \Sigma_1 - g \frac{\delta}{\delta J(z_1)} \right) G(z_1, y_1; x_2, y_2) . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Finalmente, introduciendo el Kernel de interacción irreducible fermión-antifermión  $K(x_1, y_1; x_2, y_2)$  [74], se obtiene la ecuación de Bethe-Salpeter inhomogénea

$$\begin{aligned} G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= S_1(x_1, y_1) S_2(x_2, y_2) \\ &+ \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 S_1(x_1, z_1) S_2(x_2, z_2) K(z_1, z_3; z_2, z_4) G(z_3, y_1; z_4, y_2) . \end{aligned} \quad (4.22)$$

## 4.2. Ecuación de Bethe-Salpeter homogénea

Para obtener la ecuación de Bethe-Salpeter homogénea se calcula explícitamente la función Green de 4 puntos, la cual está dada de la forma

$$G(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle 0 | T [ \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \bar{\phi}_1(y_1) \bar{\phi}_2(y_2) ] | 0 \rangle , \quad (4.23)$$

donde  $x_i, y_i$  son 4-vectores de la forma  $x_i^\mu = (t_{x_i}, \vec{x}_i)$ , y  $T$  es el símbolo de ordenamiento definido como

$$T[f(x_1)f(x_2)] = \begin{cases} f(x_1)f(x_2) & \text{si } t_1 > t_2 \\ f(x_2)f(x_1) & \text{si } t_2 > t_1 \end{cases}, \quad (4.24)$$

el cual se puede escribir en términos de la función escalón  $\Theta(t)$  como

$$T[f(x_1)f(x_2)] = \Theta(t_1 - t_2)f(x_1)f(x_2) + \Theta(t_2 - t_1)f(x_2)f(x_1). \quad (4.25)$$

Entonces, suponiendo que  $t_{x_1}, t_{x_2} > t_{y_1}, t_{y_2}$  (y luego al revés), la función de Green de 4 puntos se reescribe de la forma

$$G(x_1, y_1; x_2, y_2) = \langle 0 | T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)] T[\bar{\phi}_1(y_1)\bar{\phi}_2(y_2)] | 0 \rangle \Theta(t_{x_1} - t_{y_1})\Theta(t_{x_2} - t_{y_2}) \\ + \langle 0 | T[\phi_2(x_2)\phi_1(x_1)] T[\bar{\phi}_2(y_2)\bar{\phi}_1(y_1)] | 0 \rangle \Theta(t_{y_1} - t_{x_1})\Theta(t_{y_2} - t_{x_2}). \quad (4.26)$$

Definiendo las coordenadas relativas entre las 2 partículas cargadas

$$x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad (4.27)$$

y escogiendo  $\eta_1, \eta_2 > 0$  tales que

$$\eta_1 + \eta_2 = 1, \quad (4.28)$$

se definen las coordenadas  $X$  y  $Y$  de la forma

$$X = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2, \quad Y = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2, \quad (4.29)$$

tal que

$$x_1 = X + \eta_2 x, \quad x_2 = X - \eta_1 x, \quad y_1 = Y + \eta_2 y, \quad y_2 = Y - \eta_1 y. \quad (4.30)$$

Usando esto, se simplifican las funciones escalón de (4.26) en términos de estas nuevas coordenadas como

$$\Theta(t_X - t_Y) = \Theta(t_{x_1} - t_{y_1})\Theta(t_{x_2} - t_{y_2}), \quad \Theta(t_Y - t_X) = \Theta(t_{y_1} - t_{x_1})\Theta(t_{y_2} - t_{x_2}), \quad (4.31)$$

y dada la relación de completos para estados ortonormales  $|P\rangle$

$$\int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} |P\rangle \langle P| = 1, \quad (4.32)$$

donde

$$\omega_P = \sqrt{\vec{P}^2 + M^2}, \quad (4.33)$$

se reescribe (4.26) como

$$\begin{aligned}
G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} \langle 0|T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)]|P\rangle \langle P|T[\bar{\phi}_1(y_1)\bar{\phi}_2(y_2)]|0\rangle \Theta(t_X - t_Y) \\
&+ \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} \langle 0|T[\phi_2(x_2)\phi_1(x_1)]|P\rangle \langle P|T[\bar{\phi}_2(y_2)\bar{\phi}_1(y_1)]|0\rangle \Theta(t_Y - t_X) .
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Ahora, definiendo las funciones de onda de Bethe-Salpeter (y sus conjugadas)

$$\chi_P(x_1, x_2) = \langle 0|T[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)]|P\rangle , \quad \bar{\chi}_P(x_1, x_2) = \langle P|T[\bar{\phi}_1(y_1)\bar{\phi}_2(y_2)]|0\rangle , \tag{4.35}$$

y dado que por la invarianza translacional de la teoría se cumple que

$$\chi_P(x_1 + a, x_2 + a) = e^{-iP \cdot a} \chi_P(x_1, x_2) , \tag{4.36}$$

se sigue fácilmente que [75]

$$\chi_P(x_1, x_2) = e^{-iP \cdot X} \chi_P(x) , \quad \bar{\chi}_P(x_1, x_2) = e^{iP \cdot X} \bar{\chi}_P(x) , \tag{4.37}$$

tal que la función de Green de 4 puntos toma ahora la forma

$$\begin{aligned}
G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} \Theta(t_X - t_Y) \chi_P(x) \bar{\chi}_P(y) e^{-i\omega_P(t_X - t_Y) + i\vec{p} \cdot (\vec{X} - \vec{Y})} \\
&+ \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} \Theta(t_Y - t_X) \chi_P(x) \bar{\chi}_P(y) e^{i\omega_P(t_X - t_Y) - i\vec{p} \cdot (\vec{X} - \vec{Y})} .
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Para sustituir las funciones escalón, usemos su representación integral [76]

$$\Theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-izt}}{z + i\epsilon} , \tag{4.39}$$

tal que multiplicando por  $e^{-i\omega_P \Delta t}$

$$\Theta(\Delta t) e^{-i\omega_P \Delta t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-i\Delta t(z + \omega_P)}}{z + i\epsilon} , \tag{4.40}$$

y haciendo el cambio de variable  $z \rightarrow z + \omega_P$

$$\Theta(\Delta t) e^{-i\omega_P \Delta t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz\Delta t}}{z - \omega_P + i\epsilon} . \tag{4.41}$$

Si se define el 4-vector  $P^\mu = (z, \vec{P})$ , se obtiene de (4.38)

$$G(x_1, y_1; x_2, y_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \frac{i}{2\omega_P} \chi_P(x) \bar{\chi}_P(y) \left[ \frac{e^{-iP \cdot (X-Y)}}{P^0 - \omega_P + i\epsilon} + \frac{e^{iP \cdot (X-Y)}}{P^0 - \omega_P + i\epsilon} \right] . \tag{4.42}$$

Haciendo  $P^\mu \rightarrow -P^\mu$  en el segundo término

$$\begin{aligned}
G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{i}{2\omega_P} \chi_P(x) \bar{\chi}_P(y) \left[ \frac{1}{P^0 - (\omega_P - i\epsilon)} \right] e^{-iP \cdot (X-Y)} \\
&\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{i}{2\omega_P} \chi_P(x) \bar{\chi}_P(y) \left[ \frac{1}{P^0 + (\omega_P - i\epsilon)} \right] e^{-iP \cdot (X-Y)} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{i}{2\omega_P} \chi_P(x) \bar{\chi}_P(y) \left[ \frac{2\omega_P - 2i\epsilon}{(P^0)^2 - (\omega_P - i\epsilon)^2} \right] e^{-iP \cdot (X-Y)} .
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Aplicando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  y usando (4.33)

$$\begin{aligned}
G(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \left[ \frac{i\chi_P(x) \bar{\chi}_P(y)}{(P^0)^2 - \omega_P^2} \right] e^{-iP \cdot (X-Y)} \\
&= \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \left[ \frac{i\chi_P(x) \bar{\chi}_P(y)}{(P^0)^2 - \vec{P}^2 - M^2} \right] e^{-iP \cdot (X-Y)} \\
&= \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \left[ \frac{i\chi_P(x) \bar{\chi}_P(y)}{P^2 - M^2} \right] e^{-iP \cdot (X-Y)} .
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Como ya se mencionó con anterioridad, es más conveniente trabajar en el espacio de momentos, entonces si  $p$  es la variable conjugada de  $x$ , de manera similar a (4.29) se obtiene

$$p = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2 \quad , \quad P = p_1 + p_2 \quad , \quad p_1 = \eta_1 P + p \quad , \quad p_2 = \eta_2 P - p \quad , \tag{4.45}$$

donde  $P$  es el momento total de las dos partículas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ ,  $p_{1,2}$  son los momentos individuales de cada partícula, y  $p$  es el momento relativo entre ellas. Entonces tomando la transformada de Fourier de (4.44)

$$G(P; q, q') = \frac{i\chi_P(q) \bar{\chi}_P(q')|_{P^2=M^2}}{P^2 - M^2} + R \quad , \tag{4.46}$$

la cual se escribe en el espacio Euclideo como

$$G(P; q, q') = \frac{\chi_P(q) \bar{\chi}_P(q')|_{P^2=-M^2}}{P^2 + M^2} + R \quad , \tag{4.47}$$

donde  $R$  son los términos regulares en  $P^2$ , es decir, no tienen polos para la condición On-shell del espacio Euclideo  $P^2 = -M^2$  (o  $P^2 = M^2$  en el espacio de Minkowski). Por otra parte, tomando la transformada de Fourier de la BSE inhomogénea definida en (4.22)

$$G = S_1(p_1) S_2(p_2) \delta^4(q - q') + S_1(p_1) S_2(p_2) \int d^4 q'' K(P; q, q'') G(P; q, q'') \quad , \tag{4.48}$$

la cual en notación simbólica se escribe simplemente como

$$G(P; q, q') = S_1 S_2 + S_1 S_2 K G \quad . \quad (4.49)$$

Usando (4.47) en (4.49) vemos que

$$\frac{\chi_P \bar{\chi}_P}{P^2 + M^2} + R = S_1 S_2 + S_1 S_2 K \left( \frac{\chi_P \bar{\chi}_P}{P^2 + M^2} + R \right) \quad , \quad (4.50)$$

tal que multiplicando por  $P^2 + M^2$  y evaluando en la condición On-Shell  $P^2 = -M^2$  se obtiene

$$\chi_P \bar{\chi}_P = S_1 S_2 K \chi_P \bar{\chi}_P \quad , \quad (4.51)$$

es decir, en notación simbólica se llega a que

$$\chi_P = S_1 S_2 K \chi_P \quad , \quad (4.52)$$

lo cual se escribe de manera explícita como

$$\chi(P; q) = S_1(p_1) S_2(p_2) \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} K(P; q, q') \chi(P, q') \quad . \quad (4.53)$$

Finalmente, introduciendo la amplitud de Bethe-Salpeter (BSA)  $\Gamma(P; q)$  que está definida como

$$\chi(P; q) = S_1(p_1) \Gamma(P; q) S_2(p_2) \quad , \quad (4.54)$$

multiplicando (4.53) a la izquierda por  $S_1^{-1}(p_1)$  y a la derecha por  $S_2^{-1}(p_2)$  se obtiene la ecuación

$$\Gamma(P; q) = \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} K(P; q, q') S_1(\eta_1 P + q') \Gamma(P; q') S_2(\eta_2 P - q') \quad , \quad (4.55)$$

la cual es justamente la BSE homogénea para la BSA en el espacio de momentos.

### 4.3. Normalización canónica de la Amplitud de Bethe-Salpeter

Hay varias formas de normalizar las funciones de onda de Bethe-Salpeter y las BSA, dependiendo del parámetro a considerar; en particular nosotros vamos a usar la normalización canónica, en la cual si se define

$$D^{-1} = S_1 S_2 \quad , \quad (4.56)$$

de (4.22) la BSE inhomogénea se escribe simbólicamente como

$$G = D^{-1} + D^{-1} K G \quad . \quad (4.57)$$

Multiplicando a la izquierda por  $D$  se obtiene

$$DG = I + KG \quad , \quad (4.58)$$

siendo  $I$  la matriz identidad, tal que claramente se obtiene la solución

$$G = (D - K)^{-1} \quad . \quad (4.59)$$

Usando (3.41) se ve que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = \frac{\partial (D - K)^{-1}}{\partial \lambda} = - (D - K)^{-1} \frac{\partial (D - K)}{\partial \lambda} (D - K)^{-1} \quad , \quad (4.60)$$

tal que la condición de normalización para la BSE en términos del parámetro  $\lambda$  toma la forma

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -G \left( \frac{\partial D}{\partial \lambda} - \frac{\partial K}{\partial \lambda} \right) G \quad . \quad (4.61)$$

Considerando  $G$  como la función de Green en el espacio Euclideo de momento definida en (4.47), escogiendo  $\lambda = P_\mu$  y aplicando regla de la cadena, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \lambda} &= \frac{\partial G}{\partial P_\mu} = \frac{P^2}{\partial P_\mu} \frac{\partial G}{\partial P^2} = 2P_\mu \frac{\partial}{\partial P^2} \left[ \frac{\chi_P(q) \bar{\chi}_P(q')}{P^2 + M^2} \right] \\ &= -2P_\mu \left[ \frac{\chi_P(q) \bar{\chi}_P(q')}{(P^2 + M^2)^2} \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.62)$$

y así de (4.61) se obtiene

$$2P_\mu \left[ \frac{\chi_P(q) \bar{\chi}_P(q')}{(P^2 + M^2)^2} \right] = \left[ \frac{\chi_P(q) \bar{\chi}_P(q')}{P^2 + M^2} \right] \left( \frac{\partial D}{\partial P_\mu} - \frac{\partial K}{\partial P_\mu} \right) \left[ \frac{\chi_P(q) \bar{\chi}_P(q')}{P^2 + M^2} \right] \quad , \quad (4.63)$$

de donde se sigue que en notación simbólica la normalización canónica para  $\chi_P$  es

$$2P_\mu = \frac{\partial}{\partial P_\mu} \bar{\chi}_P (D - K) \chi_P \quad , \quad (4.64)$$

mientras que sustituyendo explícitamente las formas de  $\chi_P$ ,  $D$  y  $K$  se encuentra la normalización para  $\Gamma$

$$2P_\mu = \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} Tr \left[ \bar{\Gamma}(-Q; q) S_1(\eta_1 P + q') \Gamma(Q; q) S_2(\eta_2 P - q') \right] \Big|_{P=Q} \quad . \quad (4.65)$$

Como se verá en el siguiente capítulo, dependiendo del tipo de mesón a estudiar (nosotros nos enfocaremos solo en los mesones pseudoescalares y vectoriales) la BSA va a cambiar su forma general, tal que la condición de normalización va a variar para cada multiplete de mesones.

## Capítulo 5

# Ecuación de gap y BSA para el truncamiento RL en IC

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, la BSA nos da una descripción de como es el estado ligado quark-antiquark a considerar, es decir, una descripción de los mesones, tal que la estructura de la BSA en el espacio de Dirac cambia para satisfacer los números cuánticos requeridos en cada tipo de mesón. En el presente trabajo solo consideraremos mesones pseudoescalares y vectoriales, donde la forma que toma la BSA para cada tipo de estos mesones se ve con detalle en el Apéndice B. Sin embargo, sabemos que en la BSA se debe de dar la forma del propagador de los quarks  $S(p)$ , el cual está dado por la ecuación de gap vista al final del capítulo 3, de tal forma que hay que especificar primero como es la interacción a considerar. De esta forma, primero describiremos la interacción de contacto (IC) y el truncamiento RL que se van a emplear, y luego procederemos a calcular la ecuación de gap (GE) para los diferentes sabores de los quarks, las ecuaciones correspondientes a la BSA para los mesones pseudoescalares y vectoriales, la condición de normalización que deben de seguir y la respectiva constante de decaimiento, y finalmente se ajustaran los parámetros de la teoría con datos experimentales para obtener los valores numéricos de las cantidades antes mencionadas.

### 5.1. Ecuación de gap

Recordando que en la ecuación de gap se deben de especificar tanto el propagador de los gluones como el vértice quark-gluón, un tratamiento que ha resultado ser muy útil en los últimos años es usar una interacción de contacto tipo vector×vector tal que el modelo no dependa del momento relativo entre el quark y el antiquark, en la cual se asume que el propagador del gluón es de la forma

$$g^2 D_{\mu\nu}(p - q) = \delta_{\mu\nu} \frac{4\pi\alpha_{IR}}{m_g^2} , \quad (5.1)$$

siendo  $m_g = 800$  MeV una escala de masa típica para el gluon del grupo de renormalización de un bucle [10, 60-62], y  $\alpha_{IR}$  un parámetro que se ajusta con los datos experimentales. Ahora, como en la práctica no se puede trabajar con un número infinito de ecuaciones, las DSE se

deben de truncar a algún orden; para esto usaremos el truncamiento RL, ya que es el orden dominante en el esquema de truncación más usado que preserva las simetrías globales [70]. Este truncamiento nos dice que el vértice quark-gluón se reduce al vértice desnudo, es decir

$$\Gamma_\nu(p, q) = \gamma_\nu . \quad (5.2)$$

Por otra parte, haciendo  $N_c = 3$ , se obtiene de la siguiente relación que

$$\frac{\lambda^a \lambda^a}{2} = \frac{(N_c)^2 - 1}{2N_c} = \frac{4}{3} , \quad (5.3)$$

y así la ecuación de gap dada de (3.70) en esta interacción se reduce a

$$S^{-1}(p) = i\not{p} + m + \frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu . \quad (5.4)$$

Por otra parte, una forma más general del propagador vestido del quark esta dado a partir de funciones escalares de Lorentz  $A(p^2)$  y  $B(p^2)$  de la forma [8,16]

$$S^{-1}(p) = i\not{p}A(p^2) + B(p^2) , \quad (5.5)$$

lo que implica que

$$S(p) = \frac{-i\not{p}A(p^2) + B(p^2)}{p^2A^2(p^2) + B^2(p^2)} . \quad (5.6)$$

Para determinar a las funciones  $A(p^2)$  y  $B(p^2)$ , consideremos los proyectores

$$\hat{P}_A = -\frac{i}{4} \left( \frac{\not{p}}{p^2} \right) , \quad (5.7a)$$

$$\hat{P}_B = \frac{1}{4} I_{4 \times 4} , \quad (5.7b)$$

con  $I_{4 \times 4}$  la matriz identidad 4x4, tal que usando (5.5) y (5.6) en (5.4), aplicando los proyectores  $\hat{P}_A, \hat{P}_B$  y sacando traza sobre los índices de Dirac, se obtienen las ecuaciones

$$A(p^2) = 1 + \frac{32\pi\alpha_{IR}}{3p^2m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(q \cdot p) A(p^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} , \quad (5.8a)$$

$$B(p^2) = m + \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3mg^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{B(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} , \quad (5.8b)$$

Notemos que al usar coordenadas polares la integral de (5.8a) toma la forma

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(q \cdot p) A(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} \sim \int q^3 f(q^2) p q dq \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta \cos \theta d\theta , \quad (5.9)$$

donde la integral angular es 0, con lo cual

$$A(p^2) = 1 . \quad (5.10)$$

Al sustituir este valor en (5.8b), notamos que la ecuación no depende de  $p$ , es decir,  $B$  es independiente de  $p$  y se puede escribir

$$B(p^2) = M , \quad (5.11)$$

lo que nos da que el propagador vestido del quark se escribe de la forma más sencilla

$$S^{-1}(p) = i\not{p} + M , \quad (5.12)$$

y de lo que se sigue que

$$S(p) = \frac{-i\not{p} + M}{p^2 + M^2} , \quad (5.13)$$

siendo  $M$  la masa dinámica del quark. De esto, la ecuación gap se escribe en términos de  $M$  de la forma

$$M = m + \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3mg^2} M \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M^2} , \quad (5.14)$$

donde se ve que la integral de momento presenta una divergencia cuadrática y entonces hay que regularizar. Al cambiar a coordenadas esféricas nada en la integral depende de la parte angular, y así integrando sobre el ángulo sólido y haciendo el cambio de variable  $s = q^2$  se obtiene

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \left[ \pi^2 \int_0^\infty s ds \frac{1}{s + M^2} \right] . \quad (5.15)$$

Ahora, usando la integración de tiempo propio

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty e^{-\tau A} d\tau , \quad (5.16)$$

se sigue que

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M^2} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty s ds \frac{1}{s + M^2} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty e^{-\tau M^2} d\tau \int_0^\infty s ds e^{-\tau s} , \quad (5.17)$$

y realizando por partes la integral sobre  $s$  se obtiene

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M^2} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \tau^{-2} e^{-\tau M^2} d\tau , \quad (5.18)$$

tal que sustituyendo (5.18) en (5.14), la ecuación de gap resulta ser

$$M = m + \frac{4\alpha_{IR}}{3\pi m_g^2} M \int_0^\infty t^{-2} e^{-tM^2} dt . \quad (5.19)$$

Como ya se mencionó anteriormente, hay que regularizar esta integral. Usando los cortes ultravioleta e infrarrojo  $\tau_{UV}$  y  $\tau_{IR}$ , la ecuación de gap ahora se escribe como

$$M = m + \frac{4\alpha_{IR}}{3\pi m_g^2} M \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-2} e^{-\tau M^2} d\tau . \quad (5.20)$$

Notemos que un valor finito de  $\tau_{IR} = 1/\Lambda_{IR}$  implementa confinamiento, ya que asegura la ausencia de producción de quarks libres [17-19], mientras que  $\tau_{UV} = 1/\Lambda_{UV}$  fija la escala de todas las cantidades dimensionales. Otra cantidad física importante que se puede calcular con el propagador vestido del quark es el condensado de quarks  $\kappa_q$ , el cual está dado por la relación [14]

$$\kappa_q = -\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} , \quad (5.21)$$

donde

$$\langle \bar{q}q \rangle = -N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} Tr_D [S(q)] = -N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} Tr_D \left[ \frac{-i\not{q} + M}{q^2 + M^2} \right] . \quad (5.22)$$

Sacando la traza sobre los índices de Dirac y usando la regularización de tiempo propio, se obtiene

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4MN_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M^2} = -4MN_c \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-2} e^{-\tau M^2} d\tau . \quad (5.23)$$

Para finalizar esta sección, notemos que de (5.20) se ve claramente que  $M_0 \neq 0$  es una solución no trivial, que es justo lo que se esperaba para la masa dinámica de los quarks por el rompimiento dinámico de la simetría quiral discutido al final de capítulo dos. Siguiendo con esto, de (5.23) se encuentra que  $\kappa_0 \neq 0$ , lo cual también se esperaba, ya que este término es el condensado del vacío cuántico.

## 5.2. BSA para mesones pseudoescalares

En general, la amplitud de Bethe-Salpeter para los mesones pseudoescalares se escribe en términos de los covariantes de Dirac como (véase Apéndice B)

$$\Gamma_{PS}(P; p) = \gamma_5 [iE_{PS}(P; p) + \not{P}F_{PS}(P; p) + \not{p}G_{PS}(P; p) + \sigma_{\mu\nu} p_\mu P_\nu H_{PS}(P; p)] , \quad (5.24)$$

pero como ya se dijo anteriormente, en la interacción de contacto empleada el modelo no depende del momento relativo  $p$  entre el quark y el antiquark, tal que se eliminan los últimos dos términos de (5.24). Además, para que  $E$  y  $F$  sean adimensionales se suele dividir a  $F$  por

una unidad de masa, tal que considerando un mesón pseudoescalar con un quark de sabor  $f$  y un antiquark de sabor  $g$ , la BSA se escribe de la forma

$$\Gamma(P) = i\gamma_5 E(P) + \frac{1}{2M_R} \gamma_5 \not{P} F(P) , \quad (5.25)$$

donde  $M_R$  es la masa reducida de las masas dinámicas de sabor  $f$  y  $g$ , la cual está dada como

$$M_R = \frac{M_f M_g}{M_f + M_g} . \quad (5.26)$$

Definiendo los proyectores

$$\mathcal{P}_E = -\frac{i}{4} \gamma_5 , \quad \mathcal{P}_F = -\frac{M_R}{2P^2} \gamma_5 \not{P} , \quad (5.27)$$

de (5.25) se ve que

$$Tr_D [\mathcal{P}_E \Gamma] = E , \quad Tr_D [\mathcal{P}_F \Gamma] = F . \quad (5.28)$$

Ahora, dado que en el truncamiento *ladder* el Kernel de dispersión fermión-antifermión toma la forma simple [16]

$$K = g^2 \left( i \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right) D_{\mu\nu}(p-q) \left( i \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right) , \quad (5.29)$$

y al usar la interacción de contacto antes descrita se sigue que  $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = 0$ , tal que de (4.55) se obtiene

$$\Gamma(P) = -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_f(q_+) \Gamma(P) S_g(q_-) \gamma_\mu , \quad (5.30)$$

donde  $q_+ = q + P$  y  $q_- = q$ . De esta forma, usando (5.27) en (5.25) y sacando traza sobre los índices de Dirac, se obtienen las siguientes ecuaciones acopladas para  $E$  y  $F$

$$E = (K_{EE}) E + (K_{EF}) F , \quad (5.31a)$$

$$F = (K_{FE}) F + (K_{FF}) F , \quad (5.31b)$$

lo cual se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = K_{PS} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} , \quad (5.32)$$

donde los elementos de matriz se calculan de la expresión

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} Tr_D [\mathcal{P}_i \gamma_\mu S_f(q_+) \mathcal{D}_j(P) S_g(q_-) \gamma_\mu] \\ &= -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{Tr_D [\mathcal{P}_i \gamma_\mu (-i\not{q}_+ + M_f) \mathcal{D}_j(P) (-i\not{q}_- + M_g) \gamma_\mu]}{(q_+^2 + M_f^2)(q_-^2 + M_g^2)} , \end{aligned} \quad (5.33)$$

siendo  $i, j = E, F$  y

$$\mathcal{D}_E = i\gamma_5 \quad , \quad \mathcal{D}_F = \frac{1}{2M_R}\gamma_5 \not{P} \quad . \quad (5.34)$$

Después de evaluar las trazas con las propiedades de las trazas de matrices de Dirac listadas en el Apéndice A, hacer el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$ , y usar la parametrización de Feynman de un parámetro vista en el Apéndice C, se obtiene

$$K_{EE} = -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ (-4) \frac{q^2 + M_f M_g - x(1-x)P^2 + (q \cdot P)(1-2x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] , \quad (5.35)$$

donde en el espacio Euclideo

$$\mathfrak{M}_{fg}^2 = M_f^2 x + M_g^2 (1-x) + x(1-x)P^2 \quad , \quad (5.36)$$

pero recordando que en (5.9) se vio que la integral angular de una función que tenga un término de la forma  $(q \cdot P)$  es 0,  $K_{EE}$  se reduce a

$$\begin{aligned} K_{EE} &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{q^2 + M_f M_g - x(1-x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\ &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} + \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}_{fg}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] . \end{aligned} \quad (5.37)$$

En el Apéndice E se hace un tratamiento para integrales de momento de la forma  $f(\mathfrak{M}_{fg}^2, x)$ , tal que si  $\mathfrak{M}_{fg}^2 > 0$  para toda  $x \in [0, 1]$  (como es el caso del pión y kaón), se sigue que

$$K_{EE} = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \left[ I_{1p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) + (M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}_{fg}^2) I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) \right] , \quad (5.38)$$

donde

$$I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{e^{-\tau_{UV}^2 \mathfrak{M}_{fg}^2} - e^{-\tau_{IR}^2 \mathfrak{M}_{fg}^2}}{2 \cdot \mathfrak{M}_{fg}^2} \right] , \quad (5.39a)$$

$$I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} = \frac{1}{16\pi^2} \left[ E_i(-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2) - E_i(-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2) \right] , \quad (5.39b)$$

$$I_{1p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \Lambda_{UV}^2 e^{-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2} - \Lambda_{IR}^2 e^{-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2} - \mathfrak{M}_{fg}^2 I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) \right] , \quad (5.39c)$$

siendo  $E_i$  la integral exponencial definida por

$$E_i(u) = - \int_{-u}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{\infty}^{-u} \frac{e^{-t}}{t} dt . \quad (5.40)$$

Procediendo de manera similar, las demás entradas del Kernel toman la forma

$$\begin{aligned} K_{EF} &= -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ -\left(\frac{2P^2}{M_R}\right) \frac{M_g(1-x) + xM_f}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\ &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left(\frac{P^2}{2M_R}\right) \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_g(1-x) + xM_f}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \\ &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left(\frac{P^2}{2M_R}\right) \int_0^1 dx [M_g(1-x) + xM_f] I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) , \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} K_{FE} &= -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ (-4M_R) \frac{M_g(1-x) + xM_f}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\ &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} (M_R) \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_g(1-x) + xM_f}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \\ &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} (M_R) \int_0^1 dx [M_g(1-x) + xM_f] I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) , \end{aligned} \quad (5.42)$$

Comparando estas últimas ecuaciones vemos que

$$K_{FE} = \frac{2M_R^2}{P^2} K_{EF} , \quad (5.43)$$

con lo cual finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} K_{FF} &= -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2(M_f M_g - x(1-x)P^2) - q^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \\ &= -\frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2) - (\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} . \end{aligned} \quad (5.44)$$

El último término se elimina debido a la identidad de Ward-Takahashi axial (ecuación (D.28) del Apéndice D), tal que

$$\begin{aligned}
K_{FF} &= -\frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \\
&= -\frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_g + xM_f^2 + (1-x)M_g^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \\
&= -\frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 dx [M_f M_g + xM_f^2 + (1-x)M_g^2] I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) .
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Una vez determinadas todas las entradas del Kernel  $K_{PS}$  se vuelve al sistema de ecuaciones acopladas para  $E$  y  $F$ , el cual se puede reescribir como

$$(K_{PS} - I_{2 \times 2}) \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = 0 , \tag{5.46}$$

siendo  $I_{2 \times 2}$  la matriz identidad  $2 \times 2$ , tal que este sistema de ecuaciones va a tener solución diferente a la trivial si su determinante es 0, es decir, se tiene solución para los  $P^2$  tales que

$$\det(K_{PS}(P^2) - I_{2 \times 2}) = 0 . \tag{5.47}$$

Por lo tanto, usando la condición On-shell para los mesones pseudoescalares  $P^2 = -m_{PS}^2$ , la masa del mesón pseudoescalar se obtiene sacando numéricamente las raíces de la función

$$D_{PS}(m_{PS}) = \det(K_{PS}(-m_{PS}^2) - I_{2 \times 2}) , \tag{5.48}$$

tal que una vez obtenida la masa del mesón se regresa al sistema de ecuaciones para determinar numéricamente  $E$  y  $F$  y así obtener explícitamente la forma de la BSA para cada mesón pseudoescalar.

### 5.2.1. Normalización de la BSA para mesones pseudoescalares

A partir de la condición de normalización canónica de la BSA vista al final del capítulo 4, de (4.65) se obtiene la condición de normalización para los mesones pseudoescalares

$$2P_\mu = N_c \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr_D [\bar{\Gamma}_H(-Q) S_f(q_+) \Gamma_H(Q) S_g(q_-)] \Big|_{P=Q} , \tag{5.49}$$

donde nuevamente  $q_+ = q + P, q_- = q$ ,  $\Gamma_H$  es la BSA normalizada y se introduce el número de colores  $N_c$ , ya que para todos los colores se obtiene exactamente la misma expresión. Introduciendo una constante de normalización  $N_H$  tal que  $\Gamma_H = \Gamma/N_H$ , donde  $\Gamma$  es la BSA que ya se obtuvo, si  $N_H$  absorbe al 2 multiplicando a  $P_\mu$  se obtiene

$$P_\mu = N_c \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr_D \left[ \frac{\bar{\Gamma}(-Q)}{N_H} S_f(q_+) \frac{\Gamma(Q)}{N_H} S_g(q_-) \right] \Big|_{P=Q} . \tag{5.50}$$

Contrayendo esta expresión con  $P_\mu$  y pasando la constante de normalización a la izquierda

$$N_H^2 = \frac{N_c}{P^2} P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} Tr_D [\Gamma(-Q) S_f(q_+) \Gamma(Q) S_g(q_-)] \Big|_{P=Q} . \quad (5.51)$$

Usando (5.25) y (5.34) esta ecuación toma la forma

$$N_H^2 = N_c [(N_{EE}) E^2 + (N_{EF}) EF + (N_{FE}) FE + (N_{FF}) F^2] , \quad (5.52)$$

donde

$$N_{jk} = \frac{1}{P^2} P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} Tr_D [\overline{\mathcal{D}}_j(-Q) S_f(q_+) \mathcal{D}_k(Q) S_g(q_-)] \Big|_{P=Q} , \quad (5.53)$$

con  $j, k = E, F$ . Definiendo las funciones

$$J(x) = x(1-x) , \quad (5.54a)$$

$$K(x) = M_f x + M_g(1-x) , \quad (5.54b)$$

$$L(x) = M_f^2 x + M_g^2(1-x) , \quad (5.54c)$$

$$L^\pm(x) = M_f M_g \pm L(x) , \quad (5.54d)$$

vemos que

$$\begin{aligned} P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} (\mathfrak{M}_{fg}^2) &= P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} (M_f^2 x + M_g^2(1-x) + x(1-x)P^2) \\ &= 2x(1-x)P^2 = 2J(x)P^2 , \end{aligned} \quad (5.55)$$

de lo cual se obtiene

$$P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left[ \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} \right] = -\frac{P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} (\mathfrak{M}_{fg}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} = \frac{-2J(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} , \quad (5.56)$$

$$P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left[ \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] = -2 \frac{P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} (\mathfrak{M}_{fg}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} = \frac{-4J(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} . \quad (5.57)$$

Entonces, evaluando en (5.53) las trazas de Dirac, haciendo el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$ , usando la parametrización de Feynman de un parámetro vista en el Apéndice C y eliminando las integrales que contengan potencias impares de  $(q \cdot P)$  ya que al integral sobre la parte angular dan 0 como se vio en (5.9), se obtiene

$$\begin{aligned} N_{EE} &= \frac{1}{P^2} P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ -4 \int_0^1 dx \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 + q^2 + (q \cdot P)(1-2x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\ &= -\frac{4}{P^2} P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}_{fg}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} + \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} \right] . \end{aligned} \quad (5.58)$$

Usando las funciones de (5.54) y las derivadas de (5.56) y (5.57), se sigue que

$$\begin{aligned}
N_{EE} &= -\frac{4}{P^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ P^\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left( \frac{L^-(x) - 2J(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} + \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} \right) \right] \\
&= -\frac{4}{P^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{-4J(x)P^2(L^-(x) - 2J(x)P^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} + \frac{-4J(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} + \frac{-2J(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\
&= 8 \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} J(x) \left[ \frac{2(L^-(x) - 2J(x)P^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} + \frac{3}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] .
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Finalmente, dado que estas integrales son de la forma de (5.39), se obtiene

$$N_{EE} = 8 \int_0^1 dx J(x) [2(L^-(x) - 2J(x)P^2) I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) + 3I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2)] . \tag{5.60}$$

Procediendo de manera similar se encuentran

$$\begin{aligned}
N_{EF} &= \frac{1}{P^2} P^\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{2}{M_R} \int_0^1 dx \frac{M_f x P^2 + M_g(1-x)P^2 + (q \cdot P)(M_g - M_f)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\
&= -\frac{2}{M_R P^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ P^\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left( \frac{K(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right) \right] \\
&= -\frac{2}{M_R P^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(x) \left[ \frac{-4J(x)P^4}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} + \frac{P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\
&= -\frac{2}{M_R} \int_0^1 dx K(x) [-4J(x)P^2 I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) + I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2)] ,
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$N_{FE} = N_{EF} = -\frac{2}{M_R} \int_0^1 dx K(x) [-4J(x)P^2 I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) + I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2)] , \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
N_{FF} &= \frac{1}{P^2} P^\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left( \int_0^1 dx \frac{[M_f M_g - x(1-x)P^2 - \frac{1}{2}q^2 + (q \cdot P)(1-2x)] P^2}{M_R^2 (q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right) \\
&= \frac{1}{M_R^2} P^\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} - \frac{\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] .
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Usando la identidad de Ward-Takahashi axial, esta última ecuación se reduce a

$$\begin{aligned}
N_{FF} &= \frac{1}{M_R^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left( \frac{L^+(x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right) \\
&= -\frac{4P^2}{M_R^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{J(x)L^+(x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} \\
&= -\frac{4P^2}{M_R^2} \int_0^1 dx J(x)L^+(x) I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) \ ,
\end{aligned} \tag{5.64}$$

### 5.2.2. Constante de decaimiento leptónico para mesones pseudoescalares

Una vez que la BSA se ha normalizado canónicamente se pueden calcular observables tales como la constante de decaimiento leptónico, la cual está definida para mesones pseudoescalares por [25]

$$P_\mu f_{PS} = N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr_D [\gamma_5 \gamma_\mu S_f(q_+) \Gamma_H(P) S_g(q_-)] \ , \tag{5.65}$$

siendo  $\Gamma_H$  justamente la BSA normalizada, tal que contrayendo esta ecuación con  $P_\mu$  se obtiene

$$f_{PS} = \frac{N_c}{P^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr_D [\gamma_5 \not{P} S_f(q_+) \Gamma_H(P) S_g(q_-)] \ . \tag{5.66}$$

Usando (5.25) y (5.34) la constante de decaimiento leptónico se expresa ahora de la forma

$$f_{PS} = N_c [K_E E_H + K_F F_H] \ , \tag{5.67}$$

donde

$$K_i = \frac{1}{P^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr_D [\gamma_5 \not{P} S_f(q_+) \mathcal{D}_i S_g(q_-)] \ . \tag{5.68}$$

Procediendo de manera similar a como se hizo con los elementos  $K_{ij}$  y  $N_{ij}$  de (5.33) y (5.53) respectivamente, se obtienen

$$\begin{aligned}
K_E &= \frac{1}{P^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ 4 \int_0^1 dx \frac{[M_f x + M_g(1-x)] P^2 + (q \cdot P) (M_g - M_f)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\
&= 4 \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{K(x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \\
&= 4 \int_0^1 dx K(x) I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) \ ,
\end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}
K_F &= \frac{1}{P^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{2}{M_R} \int_0^1 dx \frac{[-\frac{1}{2}q^2 + M_f M_g - x(1-x)P^2 + (q \cdot P)(1-2x)] P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \\
&= -\frac{2}{M_R} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} + \frac{-\frac{1}{2}q^2 - \mathfrak{M}_{fg}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] ,
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Finalmente, usando la identidad de Ward-Takahashi axial, las funciones de (5.54) y las integrales de (5.39), se obtiene

$$\begin{aligned}
K_F &= -\frac{2}{M_R} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{L^+(x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \\
&= -\frac{2}{M_R} \int_0^1 dx L^+(x) I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) .
\end{aligned} \tag{5.71}$$

### 5.3. BSA para mesones vectoriales

En general la amplitud de Bethe-Salpeter para los mesones vectoriales se escribe en términos de 8 covariantes de Dirac (véase Apéndice B), pero como ya vimos que en esta interacción el modelo no depende del momento relativo  $p$  entre el quark y el antiquark, en este caso solo sobreviven 2 covariantes de Dirac tal que la BSA para los mesones vectoriales toma la forma

$$\Gamma_\mu(P) = \gamma_\mu^T E_{vect}(P) + \frac{1}{2M_R} \sigma_{\mu\nu} P_\nu F_{vect}(P) , \tag{5.72}$$

donde  $P_\mu \gamma_\mu^T = 0$ ,  $\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = \gamma_\mu$  y se agrega el  $1/2M_R$  para asegurar que  $E_{vect}(P)$ ,  $F_{vect}(P)$  sean adimensionales. Si empleamos el truncamiento RL e introducimos (5.72) en (4.55), al realizar los cálculos se obtiene que

$$F_{vect}(P) = 0 , \tag{5.73}$$

con lo cual la amplitud de Bethe-Salpeter vectorial en este truncamiento toma la forma aún más simple

$$\Gamma_\mu(P) = \gamma_\mu^T E_{vect}(P) . \tag{5.74}$$

De esta forma, de (4.55) la ecuación de Bethe-Salpeter para los mesones vectoriales toma la forma

$$1 - K_{vect}(P^2) = 0 , \tag{5.75}$$

donde

$$K_{vect}(P^2) = -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{Tr[\gamma_\mu\gamma_\nu(-i\not{q}_+ + M_f)\gamma_\mu(-i\not{q}_- + M_g)\gamma_\nu]}{(q_+^2 + M_f^2)(q_-^2 + M_g^2)} , \quad (5.76)$$

Procediendo como en el caso pseudoescalar, se obtiene

$$\begin{aligned} K_{vect}(P^2) &= -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-2(M_f M_g - x(1-x)P^2) - q^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \\ &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}_{fg}^2) + (\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} , \end{aligned} \quad (5.77)$$

eliminando el último término debido a la identidad de Ward-Takahashi axial dada en la ecuación (D.28), usando las funciones de (5.54) y las integrales de (5.39), se obtiene finalmente

$$K_{vect}(P^2) = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 dx [L^-(x) - 2J(x)P^2] I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) . \quad (5.78)$$

De esta forma, al usar la condición On-shell  $P^2 = -m_{vect}^2$ , la masa de los mesones vectoriales se obtienen sacando las raíces de la BSE, es decir

$$D_{vect}(m_{vect}) = 1 - K_{vect}(-m_{vect}^2) . \quad (5.79)$$

### 5.3.1. Normalización de la BSA para mesones vectoriales

Al igual que en el caso pseudoescalar, la BSA vectorial se tiene que normalizar de acuerdo a la ecuación (5.49), donde en este caso se agrega en el lado derecho un factor adicional de 1/3 debido a que se deben de considerar las tres polarizaciones de estos mesones. Como ya vimos que en el truncamiento RL la BSA para los mesones vectoriales solo tiene el factor  $E_{vect}$ , al hacer los cálculos se sigue que esta BSA se normaliza de la forma simple [24]

$$\frac{1}{E_{vect}^2} = \frac{9m_g^2}{4\pi\alpha_{IR}} \frac{\partial}{\partial P^2} K_{vect}(P^2) \Big|_{P^2 = -m_{vect}^2} , \quad (5.80)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial P^2} K_{vect}(P^2) = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx J(x) [(L^-(x) - 2J(x)P^2) I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) + I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2)] . \quad (5.81)$$

### 5.3.2. Constante de decaimiento leptónico para mesones vectoriales

La constante de decaimiento leptónico vectorial está definida de la forma [25]

$$f_{vect} = \frac{N_c}{3m_{vect}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr_D [\gamma_\mu S(q_+) \Gamma_{vect_\mu} S(q_-)] , \quad (5.82)$$

tal que después de ocupar la parametrización de Feynman y proceder como en el caso pseudoescalar, se encuentra que

$$f_{vect} = \frac{12E_{vect}}{m_{vect}} \int_0^1 dx [L^-(x) - 2J(x)P^2] I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) . \quad (5.83)$$

## 5.4. Resultados numéricos

Como ya se mencionó anteriormente, para dar resultados numéricos de los observables hay que especificar el valor de los parámetros del modelo, es decir, valores para  $m_u$ ,  $m_d$ ,  $m_s$ ,  $\alpha_{IR}$  y  $\Lambda_{UV}$ . Para esto usamos el conjunto de parámetros de [21]:  $m_u = m_d = m_l = 7$  MeV,  $m_s = 170$  MeV,  $\Lambda_{UV} = 0.905$  MeV, y  $\alpha_{IR} = 0.93\pi$ ; este valor de  $\alpha_{IR}$  es similar a estimaciones recientes del acoplamiento de QCD para un momento igual a cero [63–69]. Usando estos parámetros en las ecuaciones (3.92) y (3.95) se encuentran las masas dinámicas y condensados de quarks de los sabores  $l$ ,  $s$  y el límite quiral, los cuales se presentan en la Tabla 5.1. En [80] empleando Lattice QCD se encuentran los valores  $\kappa_l^{\overline{MS}}(2 \text{ GeV}) = 0.283(2)$  GeV,  $\kappa_s^{\overline{MS}}(2 \text{ GeV}) = 0.290(15)$  GeV, mientras que en un artículo más reciente [81] encuentran el valor  $\kappa_s^{\overline{MS}}(2 \text{ GeV}) = 0.296(11)$  GeV. Por otra parte, en [82] usando teoría quiral de perturbaciones ( $\chi$ PT) encuentran los valores  $\kappa_l^{\chi PT}(2 \text{ GeV}) = 0.267(16)$  GeV y  $\kappa_l^{\chi PT}(1 \text{ GeV}) = 0.242(15)$  GeV. Para el caso del condensado del vacío, en [83] dan el valor  $\kappa_0 = 0.24$  GeV, el cual dicen los autores es un estimado de los resultados experimentales de [84], mientras que en [21] se obtiene un valor de  $\kappa_0 = 0.241$  GeV. Comparando estos resultados experimentales de los condensados de quarks con los obtenidos en nuestro modelo, vemos que en general nuestros resultados son buenos, ya que se está dentro del orden de unidades y no se difiere mucho de los resultados experimentales. De igual manera, los resultados de las masas dinámicas son del orden esperado, es decir, de un tercio de la masa del protón.

Por otra parte, usando los parámetros antes mencionados en las ecuaciones (5.47), (5.52) y (5.67) se pueden calcular respectivamente las masas, BSA y constantes de decaimiento de los mesones pseudoescalares, mientras que de las ecuaciones (5.79), (5.80) y (5.83) se obtienen los resultados equivalentes para los mesones vectoriales. Estos resultados se muestran en las Tablas 5.2 y 5.3 respectivamente, donde a su vez se comparan los valores obtenidos de nuestro modelo con los resultados experimentales que dan los autores en [83], que de igual forma son valores estimados de los valores experimentales que se reportan en [84]. De esto vemos que las masas obtenidas de los mesones pseudoescalares están en total acuerdo con los resultados experimentales, y que sus constantes de decaimiento están dentro del orden buscado. Para el caso vectorial tanto las masas como las constantes de decaimiento difieren más de lo que

se esperaría, siendo los los valores más rescatables la masa del mesón  $\phi$  y la constante de decaimiento del mesón  $\rho$ .

$M_0$	$M_l$	$M_s$	$\kappa_0$	$\kappa_l$	$\kappa_s$
0.36	0.37	0.53	0.241	0.242	0.242

Tabla 5.1: Masas dinámicas y condesado de quarks para los distintos sabores ligeros de quark. Todas las cantidades están dadas en GeV.

	$m_{PS}$	$E_{PS}$	$F_{PS}$	$f_{PS}$	$m_{exp}$	$f_{exp}$
Quiral	0	3.562	0.457	0.100	0	0.088
$\pi$	0.140	3.593	0.474	0.101	0.138	0.131
$K$	0.499	3.810	0.588	0.106	0.496	0.160
$s\bar{s}$	0.701	4.043	0.745	0.111	-	-

Tabla 5.2: Masas, BSA y constantes de decaimiento leptónico de los mesones  $\pi$ ,  $K$ , el estado  $s\bar{s}$  y el límite quiral obtenidas de nuestro modelo comparado con los valores experimentales. Todas las cantidades están dadas en GeV.

	$m_{vect}$	$E_{vect}$	$f_{vect}$	$m_{exp}$	$f_{exp}$
Quiral	0.919	1.519	0.130	0.780	0.150
$\rho$	0.929	1.530	0.129	0.770	0.216
$K^*$	1.030	1.628	0.128	0.892	0.225
$\phi$	1.130	1.231	0.121	1.020	0.236

Tabla 5.3: Masas, BSA y constantes de decaimiento leptónico de los mesones  $\rho$ ,  $K^*$ ,  $\phi$  y el límite quiral obtenidas de nuestro modelo comparado con los valores experimentales. Todas las cantidades están dadas en GeV.

Para finalizar el capítulo, notemos que solo falta incluir a los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  para obtener un análisis de todo el nonete de mesones pseudoescalares, que es justamente lo que se hará en el siguiente capítulo. El análisis para estos mesones se hace aparte ya que tienen una contribución extra debido a la anomalía no Abelian, lo cual hace que su kernel no sea tan directo de calcular y haya que hacer consideraciones extra. Sin embargo, la contribución que presentan estos mesones debido al truncamiento RL es la misma que se discutió en este capítulo, tal que el kernel visto en la sección 5.2 es el kernel  $K_L$  del que se hablará en el capítulo 6. Más aún, dado que  $\eta$  y  $\eta'$  también son mesones pseudoescalares, su constante de decaimiento se calcula de la misma forma que se vio en la sección 5.2.2, solo que en este caso

se discutirá una nueva regularización que es más útil para cuando los eigenvalores dependen del momento.

## Capítulo 6

# Masas, BSA y constantes de decaimiento de los mesones $\eta$ y $\eta'$ en IC

Todo el desarrollo hecho en el capítulo pasado usando el truncamiento RL en la interacción de contacto nos asegura que en el límite quiral la masa de los mesones pseudoescalares es cero, lo cual es justamente el caso requerido para los piones y kaones por ser los bosones de Goldstone que surgen del DCSB. Sin embargo, para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  este procedimiento no sirve, ya que  $\eta'$  no puede ser bosón de Goldstone debido a que su masa es de casi 1 GeV, con lo cual hay que hacer un tratamiento un tanto diferente para estos mesones si se quiere dar un modelo que describa completamente al nonete de mesones pseudoescalares. Siguiendo con esta idea, supongamos que el kernel de Bethe-Salpeter se descompone como

$$K = K_L + K_A \ , \quad (6.1)$$

tal que  $K_L$  es un kernel que nos asegurará obtener las propiedades del límite quiral (en nuestro caso será el kernel “Ladder” visto en el capítulo 5), mientras que  $K_A$  se puede ver como la contribución de la anomalía no Abelian. Entonces, dado que en general la ecuación de Bethe-Salpeter homogénea de (4.55) introduciendo los índices  $l_1, l_2, l'_1, l'_2$  de color, sabor y espinor toma la forma [14,20]

$$[\Gamma_{\eta, \eta'}(k; P)]_{l_1 l_2} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [K_L(P; k, q) + K_A(P; k, q)]_{l_1 l_2}^{l'_1 l'_2} [\chi_{\eta, \eta'}(P; q)]_{l'_1 l'_2} \ . \quad (6.2)$$

Si suponemos simetría de isospín, es decir,  $m_u = m_d = m_l$ , usando la base de sabor se escribe [30,31]

$$\chi_{\eta, \eta'}(P; k) = \mathbb{F}^l \chi_{\eta, \eta'}^l(P; k) + \mathbb{F}^s \chi_{\eta, \eta'}^s(P; k) \ , \quad (6.3)$$

donde

$$\mathbb{F}^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\chi_{\eta,\eta'}^f(P; k) = S_f(k_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^f(P; k) S_f(k_-), \quad (6.5)$$

con  $f = l, s$  y siendo  $\Gamma_{\eta,\eta'}^f$  las correlaciones  $\bar{f}f$  en los mesones  $\eta, \eta'$ . De esta forma, definiendo

$$S = \text{diag} [S_l, S_l, S_s] = \begin{pmatrix} S_l & 0 & 0 \\ 0 & S_l & 0 \\ 0 & 0 & S_s \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

se sigue que  $\chi_{\eta,\eta'}(P; k)$  y  $\Gamma_{\eta,\eta'}(P; k)$  toman la forma

$$\begin{aligned} \chi_{\eta,\eta'}(P; k) &= S(k_+) \Gamma_{\eta,\eta'}(P; k) S(k_-) \\ &= \text{diag} [\chi_{\eta,\eta'}^l(P; k), \chi_{\eta,\eta'}^l(P; k), \sqrt{2} \chi_{\eta,\eta'}^s(P; k)] \\ &= \begin{pmatrix} \chi_{\eta,\eta'}^l(P; k) & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\eta,\eta'}^l(P; k) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \chi_{\eta,\eta'}^s(P; k) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\eta,\eta'}(P; k) &= \mathbb{F}^l \Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; k) + \mathbb{F}^s \Gamma_{\eta,\eta'}^s(P; k) \\ &= \text{diag} [\Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; k), \Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; k), \sqrt{2} \Gamma_{\eta,\eta'}^s(P; k)] \\ &= \begin{pmatrix} \Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; k) & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; k) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \Gamma_{\eta,\eta'}^s(P; k) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

Por otra parte, el kernel de la contribución de la anomalía no Abelianas debe de ser de la forma general [28]

$$[K_A(P; k, q)]_{l_1 l_2}^{l'_1 l'_2} = \sum_{i=1}^4 \sum_{f=l,s} a_i^f(P; k, q) \left[ \mathcal{F}^f \mathcal{D}_i(P; q) \right]_{l'_2 l'_1} \left[ \mathcal{F}^f \mathcal{D}_i(P; k) \right]_{l_1 l_2}, \quad (6.9)$$

donde  $a_i^f(P; k, q)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  son funciones escalares cuya forma no es de gran relevancia para este trabajo. En [26] se da la parametrización fenomenológica para los  $a_i^f(P; k, q)$

$$\begin{aligned}
\sum_{f=l,s} a_1^f [\mathcal{F}^f \mathcal{D}_1]_{l'_2 l'_1} [\mathcal{F}^f \mathcal{D}_1]_{l_2 l_1} &= \xi(t^2) \cos^2(\theta_\xi) [\mathcal{Z} \mathcal{D}_1]_{l'_2 l'_1} [\mathcal{Z} \mathcal{D}_1]_{l_1 l_2} \quad , \\
\sum_{f=l,s} a_2^f [\mathcal{F}^f \mathcal{D}_2]_{l'_2 l'_1} [\mathcal{F}^f \mathcal{D}_2]_{l_2 l_1} &= \frac{1}{M_l^2} \xi(t^2) \sin^2(\theta_\xi) [\mathcal{Z} \mathcal{D}_2]_{l'_2 l'_1} [\mathcal{Z} \mathcal{D}_2]_{l_1 l_2} \quad , \\
a_{3,4}^f &= 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

donde  $\xi$  es una fuerza de acoplamiento adimensional,  $\theta_\xi$  controla la fuerza relativa entre las estructuras tensoriales escogidas, y

$$\mathcal{Z} = \text{diag}[1, 1, \mathcal{V}_A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{V}_A \end{pmatrix} \quad , \tag{6.11}$$

con  $\mathcal{V}_A = M_l/M_s = 0.69$  un parámetro que introduce una dependencia en el rompimiento de simetría de sabor de  $SU(3)_f$ . Así, introduciendo (6.10) en (6.9) se sigue que

$$[K_A(P; k, q)]_{l'_1 l'_2}^{l'_1 l'_2} = \xi(t^2) \left( \cos^2(\theta_\xi) [\mathcal{Z} \mathcal{D}_1]_{l'_2 l'_1} [\mathcal{Z} \mathcal{D}_1]_{l_1 l_2} + \frac{1}{x^2} \sin^2(\theta_\xi) [\mathcal{Z} \mathcal{D}_2]_{l'_2 l'_1} [\mathcal{Z} \mathcal{D}_2]_{l_1 l_2} \right) \quad , \tag{6.12}$$

tal que definiendo  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_E$ ,  $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_F$ , los cuales están dados en (5.34), obtenemos

$$[K_A(P; k, q)]_{l'_1 l'_2}^{l'_1 l'_2} = \xi(t^2) \left( -\cos^2(\theta_\xi) [\mathcal{Z} \gamma_5]_{l'_2 l'_1} [\mathcal{Z} \gamma_5]_{l_1 l_2} + \frac{1}{x^2} \sin^2(\theta_\xi) [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P}]_{l'_2 l'_1} [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P}]_{l_1 l_2} \right) \quad . \tag{6.13}$$

Ahora, dado que un Kernel que usa el truncamiento RL para la ecuación de gap y la BSE es de la forma [11,70]

$$[K_L(P; k, q)]_{l'_1 l'_2}^{l'_1 l'_2} = \frac{4}{3} D_{\mu\nu}(k - q) [i\gamma_\mu]_{l'_1 l'_1} [i\gamma_\nu]_{l'_2 l'_2} \quad , \tag{6.14}$$

tal que en nuestro caso podemos considerar  $D_{\mu\nu}(k - q)$  como en (5.1), combinando las expresiones para  $K_L$  y  $K_A$  obtenidas en (6.15) y (6.13) respectivamente, y contrayendo los índices primados, la BSE para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  dada en (6.2) toma la forma

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\eta, \eta'}(P; k) &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(k - q) [\gamma_\mu \chi_{\eta, \eta'}(P; q) \gamma_\nu] \\
&\quad - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \cos^2(\theta_\xi) \text{Tr} [\mathcal{Z} \gamma_5 \chi_{\eta, \eta'}(P; q)] [\mathcal{Z} \gamma_5] \\
&\quad + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{M_l^2} \xi(t^2) \sin^2(\theta_\xi) \text{Tr} [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P} \chi_{\eta, \eta'}(P; q)] [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P}] \quad ,
\end{aligned} \tag{6.15}$$

donde se obviaron los índices  $l_1$  y  $l_2$ , y la traza es sobre índices de color, sabor y espinor. Ahora, dado que  $\Gamma_{\eta,\eta'}(P; k)$ ,  $\chi_{\eta,\eta'}(P; k)$  y  $\mathcal{Z}$  se vio que son matrices 3x3, de (6.8) vemos que la ecuación (6.15) es en realidad una BSE para la mezcla de las correlaciones  $\Gamma_{\eta,\eta'}^l$  y  $\Gamma_{\eta,\eta'}^s$ , de la cual se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; k) = & -\frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(k-q) \gamma_\mu \chi_{\eta,\eta'}^l(P; q) \gamma_\nu \\ & - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \cos^2(\theta_\xi) \text{Tr} [\mathcal{Z} \gamma_5 \chi_{\eta,\eta'}(P; q)] \gamma_5 \\ & + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{M_l^2} \xi(t^2) \sin^2(\theta_\xi) \text{Tr} [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P} \chi_{\eta,\eta'}(P; q)] \gamma_5 \not{P} , \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\eta,\eta'}^s(P; k) = & -\frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(k-q) \gamma_\mu \chi_{\eta,\eta'}^s(P; q) \gamma_\nu \\ & - \frac{\mathcal{V}_A}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \cos^2(\theta_\xi) \text{Tr} [\mathcal{Z} \gamma_5 \chi_{\eta,\eta'}(P; q)] \gamma_5 \\ & + \frac{\mathcal{V}_A}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{M_s^2} \xi(t^2) \sin^2(\theta_\xi) \text{Tr} [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P} \chi_{\eta,\eta'}(P; q)] \gamma_5 \not{P} . \end{aligned} \quad (6.17)$$

La mezcla de las correlaciones  $\Gamma_{\eta,\eta'}^l$  y  $\Gamma_{\eta,\eta'}^s$  se obtiene de las funciones  $\chi_{\eta,\eta'}$ , ya que de (6.3) y (6.5) se tiene que

$$\chi_{\eta,\eta'}(P; k) = \mathcal{F}^l S_l(k_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; k) S_l(k_-) + \mathcal{F}^s S_s(k_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^s(P; k) S_s(k_-) . \quad (6.18)$$

### 6.1. Ecuaciones para $E_{\eta,\eta'}^f$ y $F_{\eta,\eta'}^f$

Usando la forma que toma la BSA para los mesones pseudoescalares en nuestro modelo dado en (5.25), y dado que para los mesones  $\eta, \eta'$  el quark y antiquark son del mismo sabor  $f$ , se tiene que

$$\Gamma_{\eta,\eta'}^f(P) = i\gamma_5 E_{\eta,\eta'}^f(P) + \frac{1}{M_f} \gamma_5 \not{P} F_{\eta,\eta'}^f(P) , \quad (6.19)$$

con  $f = l, s$ , tal que definiendo los nuevos proyectores

$$\mathcal{P}_E = -\frac{i}{4} \gamma_5 , \quad \mathcal{P}_F = -\frac{M_f}{4P^2} \gamma_5 \not{P} , \quad (6.20)$$

se calcula fácilmente que

$$\text{Tr}_D [\mathcal{P}_E \Gamma_{\eta,\eta'}^f] = E_{\eta,\eta'}^f , \quad \text{Tr}_D [\mathcal{P}_F \Gamma_{\eta,\eta'}^f] = F_{\eta,\eta'}^f . \quad (6.21)$$

De manera similar se sigue que

$$Tr_D [\mathcal{P}_E \gamma_5] = -\frac{i}{4} Tr_D [\gamma_5^2] = -i , \quad (6.22a)$$

$$Tr_D [\mathcal{P}_E \gamma_5 \not{P}] = -\frac{i}{4} Tr_D [\gamma_5^2 \not{P}] = 0 , \quad (6.22b)$$

$$Tr_D [\mathcal{P}_F \gamma_5] = -\frac{M_f}{4P^2} Tr_D [\gamma_5 \not{P} \gamma_5] = 0 , \quad (6.22c)$$

$$Tr_D [\mathcal{P}_F \gamma_5 \not{P}] = -\frac{M_f}{4P^2} Tr_D [\gamma_5 \not{P} \gamma_5 \not{P}] = M_f , \quad (6.22d)$$

tal que aplicando  $\mathcal{P}_E$  y  $\mathcal{P}_F$  a (6.16) y (6.17), y luego sacando la traza sobre los índices de Dirac, se obtienen las siguientes ecuaciones acopladas para  $E_{\eta,\eta'}^l$ ,  $F_{\eta,\eta'}^l$ ,  $E_{\eta,\eta'}^s$  y  $F_{\eta,\eta'}^s$

$$E_{\eta,\eta'}^l = (K_L)_{EE}^l E_{\eta,\eta'}^l + (K_L)_{EF}^l F_{\eta,\eta'}^l + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \cos^2(\theta_\xi) i Tr [\mathcal{Z} \gamma_5 \chi_{\eta,\eta'}] , \quad (6.23a)$$

$$F_{\eta,\eta'}^l = (K_L)_{FE}^l E_{\eta,\eta'}^l + (K_L)_{FF}^l F_{\eta,\eta'}^l + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \frac{M_l}{M_l^2} \text{sen}^2(\theta_\xi) Tr [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P} \chi_{\eta,\eta'}] , \quad (6.23b)$$

$$E_{\eta,\eta'}^s = (K_L)_{EE}^s E_{\eta,\eta'}^s + (K_L)_{EF}^s F_{\eta,\eta'}^s + \beta \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \cos^2(\theta_\xi) i Tr [\mathcal{Z} \gamma_5 \chi_{\eta,\eta'}] , \quad (6.23c)$$

$$F_{\eta,\eta'}^s = (K_L)_{FE}^s E_{\eta,\eta'}^s + (K_L)_{FF}^s F_{\eta,\eta'}^s + \beta \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \frac{M_s}{M_l^2} \text{sen}^2(\theta_\xi) Tr [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P} \chi_{\eta,\eta'}] , \quad (6.23d)$$

donde

$$(K_L)_{jk}^f = -\frac{4}{3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(k-q) Tr_D [\mathcal{P}_j \gamma_\mu S_f(q_+) \mathcal{D}_k(P) S_f(q_-) \gamma_\nu] , \quad (6.24)$$

con  $f = l, s$ ,  $j, k = E, F$ ,  $\mathcal{D}_E = i\gamma_5$ ,  $\mathcal{D}_F = \gamma_5 \not{P}$  y  $\beta = \frac{\mathcal{V}_A}{\sqrt{2}}$ . Ahora, en el Apéndice F se calcula la forma que toman las trazas sobre índices de sabor, color y espinor de (6.23), las cuales están dadas por las expresiones

$$Tr [\mathcal{Z} \gamma_5 \chi_{\eta,\eta'}(P; q)] = i N_c \sum_{f=l,s} \sum_{I=E,F} b^f d^{fI} T^{fEI}(P; q) A_{\eta,\eta'}^{fI}(P) , \quad (6.25)$$

$$Tr [\mathcal{Z} \gamma_5 \not{P} \chi_{\eta,\eta'}(P; q)] = N_c \sum_{f=l,s} \sum_{I=E,F} b^f d^{fI} T^{fFI}(P; q) A_{\eta,\eta'}^{fI}(P) , \quad (6.26)$$

donde

$$b^l = 2 , \quad b^s = \sqrt{2} \mathcal{V}_A , \quad (6.27a)$$

$$d^{fE} = 1 , \quad d^{fF} = \frac{1}{M_f} , \quad (6.27b)$$

$$A_{\eta,\eta'}^{fE} = E_{\eta,\eta'}^f , \quad A_{\eta,\eta'}^{fF} = F_{\eta,\eta'}^f , \quad (6.27c)$$

y

$$T^{fEE} = 4 \left[ \frac{q^2 - x(1-x)P^2 + M_f^2 + (q \cdot P)(1-2x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} \right] , \quad (6.28)$$

$$T^{fEF} = \frac{4M_f P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} = T^{fFE} , \quad (6.29)$$

$$T^{fFF} = -4P^2 \left[ \frac{-\frac{1}{2}q^2 + M_f^2 - x(1-x)P^2 + (q \cdot P)(1-2x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} \right] , \quad (6.30)$$

siendo en este caso

$$\mathfrak{M}_f^2 = \mathfrak{M}_{fg}^2|_{f=g} = xM_f^2 + (1-x)M_f^2 + x(1-x)P^2 = M_f^2 + x(1-x)P^2 . \quad (6.31)$$

De esta forma, las ecuaciones de (6.23) se reescriben como

$$\begin{aligned} E_{\eta,\eta'}^l &= (K_L)_{EE}^l E_{\eta,\eta'}^l + (K_L)_{EF}^l F_{\eta,\eta'}^l \\ &+ (K_A)_{EE}^l E_{\eta,\eta'}^l + (K_A)_{EF}^l F_{\eta,\eta'}^l + (K_A)_{EE}^s E_{\eta,\eta'}^s + (K_A)_{EF}^s F_{\eta,\eta'}^s , \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} F_{\eta,\eta'}^l &= (K_L)_{FE}^l E_{\eta,\eta'}^l + (K_L)_{FF}^l F_{\eta,\eta'}^l \\ &+ (K_A)_{FE}^l E_{\eta,\eta'}^l + (K_A)_{FF}^l F_{\eta,\eta'}^l + (K_A)_{FE}^s E_{\eta,\eta'}^s + (K_A)_{FF}^s F_{\eta,\eta'}^s , \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} E_{\eta,\eta'}^s &= (K_L)_{EE}^s E_{\eta,\eta'}^s + (K_L)_{EF}^s F_{\eta,\eta'}^s \\ &+ \beta \left[ (K_A)_{EE}^l E_{\eta,\eta'}^l + (K_A)_{EF}^l F_{\eta,\eta'}^l + (K_A)_{EE}^s E_{\eta,\eta'}^s + (K_A)_{EF}^s F_{\eta,\eta'}^s \right] , \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} F_{\eta,\eta'}^s &= (K_L)_{FE}^s E_{\eta,\eta'}^s + (K_L)_{FF}^s F_{\eta,\eta'}^s \\ &+ \beta \left[ (K_A)_{FE}^l E_{\eta,\eta'}^l + (K_A)_{FF}^l F_{\eta,\eta'}^l + (K_A)_{FE}^s E_{\eta,\eta'}^s + (K_A)_{FF}^s F_{\eta,\eta'}^s \right] , \end{aligned} \quad (6.35)$$

donde

$$(K_A)_{EI}^f = - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \cos^2(\theta_\xi) N_c b^f d^{fI} T^{fEI} , \quad (6.36a)$$

$$(K_A)_{FI}^f = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi(t^2) \frac{M_f}{M_l^2} \text{sen}^2(\theta_\xi) N_c b^f d^{fI} T^{fFI} . \quad (6.36b)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (6.32)-(6.35) son un sistema de ecuaciones acopladas para  $E_{\eta,\eta'}^l$ ,  $F_{\eta,\eta'}^l$ ,  $E_{\eta,\eta'}^s$  y  $F_{\eta,\eta'}^s$  que está dado en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} E_{\eta,\eta'}^l \\ F_{\eta,\eta'}^l \\ E_{\eta,\eta'}^s \\ F_{\eta,\eta'}^s \end{pmatrix} = [K_{\eta,\eta'}]_{4 \times 4} \begin{pmatrix} E_{\eta,\eta'}^l \\ F_{\eta,\eta'}^l \\ E_{\eta,\eta'}^s \\ F_{\eta,\eta'}^s \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

donde

$$K_{\eta,\eta'} = \begin{pmatrix} (K_L)_{EE}^l + (K_A)_{EE}^l & (K_L)_{EF}^l + (K_A)_{EF}^l & (K_A)_{EE}^s & (K_A)_{EF}^s \\ (K_L)_{FE}^l + (K_A)_{FE}^l & (K_L)_{FF}^l + (K_A)_{FF}^l & (K_A)_{FE}^s & (K_A)_{FF}^s \\ \beta (K_A)_{EE}^l & \beta (K_A)_{EF}^l & (K_L)_{EE}^s + \beta (K_A)_{EE}^s & (K_L)_{EF}^s + \beta (K_A)_{EF}^s \\ \beta (K_A)_{FE}^l & \beta (K_A)_{FF}^l & (K_L)_{FE}^s + \beta (K_A)_{FE}^s & (K_L)_{FF}^s + \beta (K_A)_{FF}^s \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

## 6.2. Forma explícita de los elementos del kernel $K_{\eta,\eta'}$

Dado que para obtener resultados numéricos hay que dar una forma explícita a  $D_{\mu\nu}(k-q)$  del kernel  $K_L$  y a  $\xi(t)$  del kernel  $K_A$ , para el primer kernel usamos la misma interacción del capítulo 5, es decir la interacción de contacto dada en (5.1)

$$D_{\mu\nu}(k-q) = \frac{4\pi\alpha_{IR}}{m_g^2} \delta_{\mu\nu}, \quad (6.39)$$

mientras que para el kernel de la anomalía no Abelianas proponemos

$$\xi(k-q) = \xi_0, \quad (6.40)$$

para que no haya dependencia en el momento relativo entre el quark y el antiquark en ninguna parte del modelo. De esta forma, al sustituir (6.39) en (6.24), las entradas de  $K_L$  están dadas por

$$\begin{aligned} (K_L)_{jk}^f &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left( \frac{4\pi\alpha_{IR}}{m_g^2} \delta_{\mu\nu} \right) Tr_D [\mathcal{P}_j \gamma_\mu S_f(q_+) \mathcal{D}_k(P) S_f(q_-) \gamma_\nu] \\ &= -\frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr_D [\mathcal{P}_j \gamma_\mu S_f(q_+) \mathcal{D}_k(P) S_f(q_-) \gamma_\mu], \end{aligned} \quad (6.41)$$

donde notamos que los elementos de este kernel van a ser casi los mismos que los del kernel visto en el capítulo 5, ya que las trazas en (6.41) son las mismas que en (5.33), solo que en

este caso el quark y antiquark tienen el mismo sabor,  $f$ . De esta forma, haciendo los sabores  $g = f$ , de (5.38) obtenemos

$$\begin{aligned} (K_L)_{EE}^f &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} + \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}_{fg}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \right] \Big|_{g=f} \\ &= \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_f^2} + \frac{-2J(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} \right] , \end{aligned} \quad (6.42)$$

ya que de (5.36) se sigue que  $\mathfrak{M}_f^2 = \mathfrak{M}_{fg}^2|_{f=g} = M_f^2 + x(1-x)P^2$  y se usaron las funciones de (5.54). Sin embargo, para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  hay que tener cuidado al usar la regularización de tiempo propio, ya que la función  $\mathfrak{M}_f^2$  toma valores negativos para algunos  $x \in [0, 1]$  debido a la gran masa del mesón  $\eta'$ , tal que las integrales sobre  $x$  del tipo de (5.39) no van a estar bien definidas (Véase Apéndice E). Para trabajar en este caso, recordemos que la condición On-Shell en el espacio Euclideo es  $P^2 = -m^2$ , con  $m$  la masa del mesón, tal que conviene introducir explícitamente el signo menos en la parte de  $\mathfrak{M}_f^2$  que contiene al término  $P^2$  para hacer el análisis más fácil, de tal forma que se define la función

$$\mathcal{W}_f^2 = M_f^2 - x(1-x)P^2 , \quad (6.43)$$

tal que la condición On-shell será ahora  $P^2 = m^2$ . La introducción del signo menos se hace ya que esta nueva función se puede reescribir de la forma

$$\mathcal{W}_f^2 = P^2 \left[ (x - A_f)^2 + B_f \right] , \quad (6.44)$$

donde

$$A_f = \frac{1}{2} , \quad B_f = -\frac{1}{4} + \frac{M_f^2}{P^2} . \quad (6.45)$$

Se ve que  $\mathcal{W}_f^2$  puede ser tanto positiva como negativa, dependiendo de los valores de  $x$ ,  $M_f$ ,  $P^2$  y de la combinación de  $B_f$  con  $(x - A_f)$ . Si  $B_f > 0$ , resulta que  $\mathcal{W}_f^2$  es positiva para todo  $x \in [0, 1]$ , ya que  $(x - A_f)^2$  siempre es positivo, mientras que si  $B_f < 0$  se tiene que  $\mathcal{W}_f^2$  puede ser positivo o negativo, dependiendo del valor de  $x$ . Con esto mente, las raíces de  $\mathcal{W}_f^2$  para  $B_f < 0$  se obtienen de

$$(x - A_f)^2 + B_f = 0 , \quad (6.46)$$

es decir

$$x_f^\pm = A_f \pm \sqrt{-B_f} , \quad (6.47)$$

tal que  $x_f^+$  y  $x_f^-$  dividen al eje  $x$  en 3 regiones, en donde  $\mathcal{W}_f^2 > 0$  para  $x < x_f^-$  y  $x_f^+ < x$ , mientras que  $\mathcal{W}_f^2 < 0$  para  $x_f^- < x < x_f^+$ . Esto se puede ver fácilmente, ya que

$$\mathcal{W}_f^2(x=0) = M_f^2 > 0 \quad , \quad \mathcal{W}_f^2(x=1) = M_f^2 > 0 \quad , \quad (6.48)$$

y así  $\mathcal{W}_f^2$  es una función cóncava hacia arriba. Por lo tanto, definiendo

$$\alpha_f^\pm = \begin{cases} x_f^\pm & , \text{ si } B_{fg} < 0 \\ 1 & , \text{ si } B_{fg} > 0 \end{cases} \quad , \quad (6.49)$$

e introduciendo explícitamente el signo menos de la condición On-Shell, de (6.42) obtenemos

$$(K_L)_{EE}^f = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx [I_{1p}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2I_{2p}(\mathcal{W}_f^2)] \right. \\ \left. + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx [I_{1n}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2I_{2n}(\mathcal{W}_f^2)] \right. \\ \left. + \int_{\alpha_f^+}^1 dx [I_{1p}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2I_{2p}(\mathcal{W}_f^2)] \right\} \quad , \quad (6.50)$$

donde

$$I_{1p}(\mathcal{W}_f^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \Lambda_{UV}^2 e^{-\mathcal{W}_f^2/\Lambda_{UV}^2} - \Lambda_{IR}^2 e^{-\mathcal{W}_f^2/\Lambda_{IR}^2} - \mathcal{W}_f^2 I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right] \quad , \quad (6.51a)$$

$$I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ E_i(-\mathcal{W}_f^2/\Lambda_{IR}^2) - E_i(-\mathcal{W}_f^2/\Lambda_{UV}^2) \right] \quad , \quad (6.51b)$$

$$I_{3p}(\mathcal{W}_f^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{e^{-\tau_{UV}^2 \mathcal{W}_f^2} - e^{-\tau_{IR}^2 \mathcal{W}_f^2}}{2 \cdot \mathcal{W}_f^2} \right] \quad , \quad (6.51c)$$

$$I_{1n}(\mathcal{W}_f^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \Lambda_{UV}^2 e^{\mathcal{W}_f^2/\Lambda_{UV}^2} - \Lambda_{IR}^2 e^{\mathcal{W}_f^2/\Lambda_{IR}^2} + \mathcal{W}_f^2 I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) \right] \quad , \quad (6.52a)$$

$$I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ E_i(\mathcal{W}_f^2/\Lambda_{IR}^2) - E_i(\mathcal{W}_f^2/\Lambda_{UV}^2) \right] \quad , \quad (6.52b)$$

$$I_{3n}(\mathcal{W}_f^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{e^{\tau_{IR}^2 \mathcal{W}_f^2} - e^{\tau_{UV}^2 \mathcal{W}_f^2}}{2 \cdot \mathcal{W}_f^2} \right] \quad , \quad (6.52c)$$

integrales que se ven a detalle en el Apéndice E, siendo  $E_i$  la integral exponencial definida en (5.40). Vemos que con la definición de  $\alpha_f^\pm$  justamente  $(K_L)_{EE}^f$  se divide en los 3 intervalos para  $B_{fg} < 0$ , mientras que si  $B_{fg} > 0$  las últimas dos integrales se eliminan y se regresa a un caso similar al de (6.42). De esta forma, procediendo de manera similar con las demás entradas de  $(K_L)^f$ , de (5.41), (5.42) y (5.45) obtenemos respectivamente

$$(K_L)_{EF}^f = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} (-P^2) \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\} \quad , \quad (6.53)$$

$$(K_L)_{FE}^f = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \left( \frac{M_f^2}{2} \right) \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\}, \quad (6.54)$$

$$(K_L)_{FF}^f = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} (-M_f^2) \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\}. \quad (6.55)$$

Por otra parte, para los elementos del Kernel  $(K_A)_{jk}^f$  sustituimos (6.40) en las ecuaciones de (6.36), tal que usando la forma explícita de  $d^{fE}$  y  $T^{fEE}$  dadas respectivamente en (6.27b) y (6.28), se obtiene

$$\begin{aligned} (K_A)_{EE}^f &= - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \xi_0 \cos^2(\theta_\xi) N_c b^f d^{fE} T^{fEE} \\ &= - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \xi_0 \cos^2(\theta_\xi) N_c b^f \left( 4 \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_f^2} + \frac{-2J(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} \right] \right) \\ &\quad - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \xi_0 \cos^2(\theta_\xi) N_c b^f \left( 4 \int_0^1 dx \frac{(q \cdot P)(1-2x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} \right) \\ &= - 4\xi_0 \cos^2(\theta_\xi) N_c b^f \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_f^2} + \frac{-2J(x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (6.56)$$

donde la integral que contiene al término  $(q \cdot P)$  se eliminó ya que recordemos que al integrar sobre la parte angular da 0. Luego, introduciendo explícitamente el signo menos que proviene de la condición On-Shell, e integrando por intervalos tal como se hizo para los elementos  $(K_L)_{jk}^f$ , se sigue que

$$\begin{aligned} (K_A)_{EE}^f &= -4\xi_0 \cos^2(\theta_\xi) N_c b^f \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx [I_{1p}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2 I_{2p}(\mathcal{W}_f^2)] \right. \\ &\quad + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx [I_{1n}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2 I_{2n}(\mathcal{W}_f^2)] \\ &\quad \left. + \int_{\alpha_f^+}^1 dx [I_{1p}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2 I_{2p}(\mathcal{W}_f^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Procediendo de manera similar para las demás entradas del kernel  $(K_A)^f$ , usando (6.27)-(6.30), (6.40), (6.49), (6.51) y (6.52) en (6.36), sin mucha dificultad se obtiene que

$$\begin{aligned}
(K_A)_{EF}^f &= - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi_0 \cos^2(\theta_\xi) N_c b^f d^{fF} T^{fEF} \\
&= 4P^2 \xi_0 \cos^2(\theta_\xi) N_c b^f \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\} ,
\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
(K_A)_{FE}^f &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi_0 \frac{M_f}{M_l^2} \text{sen}^2(\theta_\xi) N_c b^f d^{fE} T^{fFE} \\
&= \frac{-4M_f^2 P^2}{M_l^2} \xi_0 \text{sen}^2(\theta_\xi) N_c b^f \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\} ,
\end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned}
(K_A)_{FF}^f &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \xi_0 \frac{M_f}{M_l^2} \text{sen}^2(\theta_\xi) N_c b^f d^{fF} T^{fFF} \\
&= \frac{8M_f^2 P^2}{M_l^2} \xi_0 \text{sen}^2(\theta_\xi) N_c b^f \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\} .
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Finalmente, volviendo al sistema de ecuaciones acopladas para  $E_{\eta,\eta'}^f$  y  $F_{\eta,\eta'}^f$  de (6.37), el cual se puede reescribir usando la matriz identidad  $I_{4 \times 4}$  como

$$(K_{\eta,\eta'} - I_{4 \times 4}) \begin{pmatrix} E_{\eta,\eta'}^l \\ F_{\eta,\eta'}^l \\ E_{\eta,\eta'}^s \\ F_{\eta,\eta'}^s \end{pmatrix} = 0 , \tag{6.61}$$

este sistema de ecuaciones tiene solución diferente a la trivial si su determinante es 0, tal que usando la condición On-shell  $P^2 = m^2$ , las raíces de la función

$$F_{\eta,\eta'}(m) = \det (K_{\eta,\eta'}(m^2) - I_{4 \times 4}) , \tag{6.62}$$

nos dan las masas de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , las cuales están dadas en función de los parámetros  $\xi_0$  y  $\theta_\xi$ ; estos parámetros se ajustaran para obtener las masas experimentales de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , lo cual se discutirá a más detalle en la última sección de este capítulo. Una vez determinados los parámetros y las masas de los mesones, se puede calcular explícitamente la forma que toman las BSA  $\Gamma_{\eta,\eta'}^f$ , las cuales también se deben de normalizar como se hizo con las BSA del pión, kaón y de los mesones vectoriales en el capítulo anterior.

### 6.3. Normalización alterna de la BSA para los mesones $\eta, \eta'$

En las ecuaciones (6.37) y (6.61) se ha supuesto que el eigenvalor es 1, lo cual hace que el sistema solo tenga solución para la condición On-Shell  $P^2 = m^2$ , siendo esta  $m$  justamente la masa del mesón. Un procedimiento análogo es insertar el “eigenvalor”  $\lambda(P^2)$ , tal que ahora el sistema de ecuaciones tendrá solución para todo  $P^2$ , siendo los verdaderos estados ligados las soluciones en las cuales al meter la condición On-shell se obtenga  $\lambda(m^2) = 1$ . Usando esta función  $\lambda$  se llega a que la normalización de la BSA para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  está dada por la condición [27]

$$\left[ \frac{dLn\lambda(P^2)}{dP^2} \right]_{P^2=-m_M^2}^{-1} = 2Tr \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \bar{\Gamma}_M^l(-P)\chi_M^l(P; q) + \bar{\Gamma}_M^s(-P)\chi_M^s(P; q) \right] , \quad (6.63)$$

donde la traza es sobre índices de color y espinor,  $\Gamma$  es la BSA normalizada y  $M = \eta, \eta'$ . Sacando la traza sobre los índices de color, introduciendo una constante de normalización  $N_M$  tal que  $\Gamma_M \rightarrow \Gamma_M/N_M$ , donde ahora  $\Gamma_M$  es la amplitud que se obtiene al resolver (6.61), e introduciendo nuevamente el signo de la condición on-shell, la condición de normalización toma la forma

$$N_M^2 = 2DN_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr_D \left[ \bar{\Gamma}_M^l(-P)\chi_M^l(P; q) + \bar{\Gamma}_M^s(-P)\chi_M^s(P; q) \right] , \quad (6.64)$$

con

$$D = \left( \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dP^2} \right) \Big|_{P^2=m_M^2} . \quad (6.65)$$

Aplicando regla de la cadena y usando la condición On-Shell, vemos que

$$\frac{d\lambda}{dP^2} = \frac{d\lambda}{dm} \frac{dm}{dP^2} = \frac{d(\sqrt{P^2})}{dP^2} \frac{d\lambda}{dm} = \frac{1}{2\sqrt{P^2}} \frac{d\lambda}{dm} = \frac{1}{2m} \frac{d\lambda}{dm} , \quad (6.66)$$

Luego, usando (5.25) y (5.34) se tiene que (6.64) toma la forma

$$N_M^2 = 2DN_c \sum_{f=l,s} \left[ (N_{EE})_M^f E_M^f E_M^f + (N_{EF})_M^f E_M^f F_M^f \right. \\ \left. + (N_{FE})_M^f F_M^f E_M^f + (N_{FF})_M^f E_M^f E_M^f \right] , \quad (6.67)$$

donde

$$(N_{jk})_M^f = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} Tr \left[ \bar{\mathcal{D}}_j(-P) S_f(q_+) \mathcal{D}_k(P) S_f(q_-) \right] , \quad (6.68)$$

con  $j, k = E, F$ . Evaluando las trazas de Dirac, haciendo el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$ , usando la parametrización de Feynman de un parámetro vista en el Apéndice C, eliminando las integrales que contengan potencias impares de  $(q \cdot P)$  ya que al integral sobre la parte angular dan 0 como se vio en (5.9), introduciendo explícitamente el signo menos de la condición on-shell, e integrar en los intervalos dados por  $\alpha_f^\pm$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
(N_{EE})_M^f &= -4 \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{2J(x)P^2}{(q^2 + \mathcal{W}_f^2)^2} + \frac{1}{q^2 + \mathcal{W}_f^2} \right] \\
&= -4 \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx [I_{1p}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2 I_{2p}(\mathcal{W}_f^2)] \right. \\
&\quad + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx [I_{1n}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2 I_{2n}(\mathcal{W}_f^2)] \\
&\quad \left. + \int_{\alpha_f^+}^1 dx [I_{1p}(\mathcal{W}_f^2) + 2J(x)P^2 I_{2p}(\mathcal{W}_f^2)] \right\} , \tag{6.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(N_{EF})_M^f &= (N_{FE})_M^f = \frac{4}{M_f} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{K(x)P^2}{(q^2 + \mathcal{W}_f^2)^2} \\
&= \frac{4K(x)P^2}{M_f} \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\} , \tag{6.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(N_{FF})_M^f &= -\frac{4P^2}{M_f^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2M_f^2}{(q^2 + \mathcal{W}_f^2)^2} \\
&= -8P^2 \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\} . \tag{6.71}
\end{aligned}$$

#### 6.4. Constantes de decaimiento leptónico para los mesones $\eta, \eta'$

Una vez normalizadas las amplitudes de Bethe-Salpeter para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , la constante de decaimiento leptónico se calcula de (5.66) como se hizo para el pión y el kaón, solo hay que hacer los cambios los sabores de quark  $g = f$ , introducir explícitamente el signo menos de la condición On-shell, e integrar en los intervalos dados por  $\alpha_f^\pm$ , de lo cual se sigue de (5.67), (5.69) y (5.71) que

$$f_M^f = N_c \left[ (K_E)_M^f E_M^f + (K_F)_M^f F_M^f \right] , \tag{6.72}$$

donde

$$\begin{aligned}
(K_E)_M^f &= 4K(x) \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \mathcal{W}_f^2)^2} \\
&= 4K(x) \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\} , \tag{6.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(K_F)_M^f &= -\frac{4}{M_f} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2M_f^2}{(q^2 + \mathcal{W}_f^2)^2} \\
&= -8M_f \left\{ \int_0^{\alpha_f^-} dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^-}^{\alpha_f^+} dx I_{2n}(\mathcal{W}_f^2) + \int_{\alpha_f^+}^1 dx I_{2p}(\mathcal{W}_f^2) \right\} . \tag{6.74}
\end{aligned}$$

Con estas constantes de decaimiento leptónico se pueden obtener los anchos de decaimiento  $\eta, \eta' \rightarrow \gamma\gamma$ , los cuales están dados por la expresión [30]

$$\Gamma_{M \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{9\alpha_{em}^2 m_M^3}{64\pi^3} \left[ c_l \frac{f_M^l}{(f^l)^2} + c_s \frac{f_M^s}{(f^s)^2} \right]^2 , \tag{6.75}$$

con  $c_l = 5/9$ ,  $c_s = \sqrt{2}/9$ ,  $\alpha_{em} = 1/137$ , y donde

$$(f^l)^2 = (f_\eta^l)^2 + (f_{\eta'}^l)^2 , \tag{6.76a}$$

$$(f^s)^2 = (f_\eta^s)^2 + (f_{\eta'}^s)^2 . \tag{6.76b}$$

## 6.5. Resultados numéricos

Tomando los parámetros especificados al final del capítulo anterior dados en [21], es decir,  $m_l = 7$  MeV,  $m_s = 170$  MeV,  $\Lambda_{UV} = 0.905$  MeV y  $\alpha_{IR} = 0.93\pi$ , vemos que en el modelo propuesto para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  los únicos parámetros libres por determinar son  $\xi_0$  y  $\theta_\xi$ . En [27] presentan los valores para las constantes de decaimiento:  $f_\eta^l = 0.090(13)$  GeV,  $f_\eta^s = -0.093(28)$  GeV,  $f_{\eta'}^l = 0.073(14)$  GeV,  $f_{\eta'}^s = 0.094(8)$  GeV, los cuales son en realidad una recopilación de diferentes valores fenomenológicos obtenidos en las diferentes referencias [30-32]. Usando esto y los valores experimentales  $m_\eta = 0.548$  GeV y  $m_{\eta'} = 0.958$  GeV dados en [29], se obtienen los parámetros  $\xi_0 = 6.0$  y  $\cos^2(\theta_\xi) = 0.89$  al hacer un ajuste, los cuales dan un error cuadrático medio total del 17%, donde hay que señalar que en el ajuste se dio más peso a las masas de los mesones. Con estos parámetros se obtienen los resultados listados en la Tabla 6.1. Luego, usando (6.76) y los resultados de la Tabla 6.1, de la ecuación (6.75) se obtienen los anchos de decaimiento

$$\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma} = 0.517 \text{ KeV} \quad , \quad \Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma} = 4.84 \text{ KeV} \quad , \tag{6.77}$$

	$m_\eta$	$m_{\eta'}$	$f_\eta^l$	$f_\eta^s$	$f_{\eta'}^l$	$f_{\eta'}^s$
Modelo IC	0.555	0.947	0.079	-0.069	0.094	0.081
Experimentos	0.548	0.958	0.090(13)	-0.093(28)	0.073(14)	0.094(8)

Tabla 6.1: Masas y constantes de decaimiento leptónico para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ : Todas las cantidades están dadas en GeV.

valores que concuerdan con los resultados empíricos  $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}^{exp} = 0.516(22)$  keV y  $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}^{exp} = 4.35(36)$  keV de [29].

Comparando los valores obtenidos de nuestro modelo con los valores experimentales y fenomenológicos descritos anteriormente, vemos que la simpleza del modelo tal vez no de resultados tan buenos para las constantes de decaimiento, pero siguen estando dentro de un rango aceptable, mientras que los resultados de las masas y de los anchos de decaimiento son muy buenos. Esto último nos hace pensar que en general un modelo simple como este es más que efectivo para estudiar a los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , donde posteriormente se podría dar una forma más complicada a  $\xi(k - q)$  para tratar de ajustar mejor los valores de las constantes de decaimiento.

Para finalizar el capítulo, hay que mencionar que con todo lo realizado hasta ahora ya estamos listos para obtener los factores de forma de transición electromagnéticos para distintos mesones (nosotros nos enfocaremos sólo en los mesones  $\pi^0, \eta, \eta'$ ). Esto ya que, como se verá en el siguiente capítulo, los factores de forma de transición se calculan a partir del vértice quark-gluón y de las BSA de los distintos mesones, razón por la cual era muy importante fijar todos los parámetros de nuestro modelo y obtener buenos valores para las masas de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ .

## Capítulo 7

# Factores de forma de transición

Los factores de forma electromagnéticos son importantes en la física de partículas ya que están definidos como la transformada de Fourier de las distribuciones de carga, de tal forma que se pueden entender como la fuerza de interacción entre las partículas en dicho espacio de Fourier. En particular, si en un proceso se crean nuevas partículas, se habla de un factor de forma de transición (TFF), el cual se dice ser electromagnético si hay fotones involucrados en la interacción. Nosotros estamos interesados en los TFF electromagnéticos del pión neutro y de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , los cuales se obtienen de procesos como  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-M$ , con  $M = \eta, \eta'$  [85, 86] (como se muestra en la Figura 7.1), tal que antes de calcularlos será necesario estudiar la interacción de los fotones con los quarks constituyentes de dichos mesones, es decir, estudiaremos el vértice quark-fotón  $\Gamma_\mu$ .

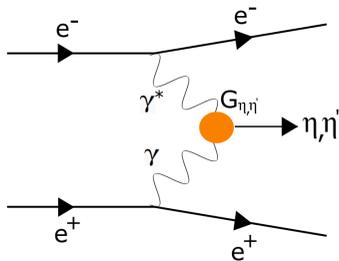


Figura 7.1: Proceso  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-M$ .

### 7.1. Vértice quark-fotón

Recordemos que en la subsección 3.1.3 se mostró la DSE para el vértice fermión-fotón, y que en (5.29) se vio la forma simple que toma el kernel de dispersión fermión-antifermión en el truncamiento RL, de tal forma que de la ecuación (3.62) se obtiene que la BSE para el vértice quark-fotón en el truncamiento RL toma la forma [20,21]

$$\Gamma_\mu(Q) = \gamma_\mu - \frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \chi_\mu(q_+, q) \gamma_\nu , \quad (7.1)$$

con

$$\chi(q_+, q) = S(q + P)\Gamma_\mu(Q)S(q) , \quad (7.2)$$

siendo  $Q$  y  $P$  respectivamente los momentos del fotón y del mesón constituido por los quarks vestidos. Luego, como ya se dijo que en la interacción de contacto el kernel es independiente del momento relativo de los quarks, se puede escribir la solución general del vértice quark-fotón como

$$\Gamma_\mu(Q) = \gamma_\mu^T P_T(Q^2) + \gamma_\mu^L P_L(Q^2) , \quad (7.3)$$

donde

$$Q_\mu \gamma_\mu^T = 0 , \quad (7.4a)$$

$$\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = \gamma_\mu . \quad (7.4b)$$

Ahora, introduciendo la identidad de Ward-Takahashi deducida en la primera sección del Apéndice D

$$Q_\mu \Gamma_\mu(k; p) = i [S^{-1}(p) - S^{-1}(k)] , \quad (7.5)$$

siendo  $Q = k - p$ , si usamos la forma del propagador del quark dada en el capítulo 3,  $S^{-1}(k) = i\not{k} + M$ , y la ecuación (7.3) en la ecuación de Ward-Takahashi, se obtiene

$$Q_\mu [\gamma_\mu^T P_T + \gamma_\mu^L P_L] = i [i\not{p} + M - i\not{k} - M] = -(p - k)_\mu \gamma_\mu = Q_\mu \gamma_\mu , \quad (7.6)$$

tal que usando (7.4) se sigue que

$$Q_\mu \gamma_\mu^L P_L = Q_\mu \gamma_\mu^L , \quad (7.7)$$

es decir

$$P_L(Q^2) = 1 . \quad (7.8)$$

De esta forma, el vértice quark-fotón es en realidad de la forma

$$\Gamma_\mu(Q) = \gamma_\mu^T P_T(Q^2) + \gamma_\mu^L , \quad (7.9)$$

tal que al insertar esto en (7.1) se obtiene que

$$P_T(Q^2) = \frac{1}{1 - K_\gamma(Q^2)} , \quad (7.10)$$

donde  $K_\gamma$  resulta ser el kernel para los mesones vectoriales, el cual está dado por la ecuación (5.55), tal que entonces el denominador de  $P_T(Q^2)$  es la BSA para los mesones vectoriales

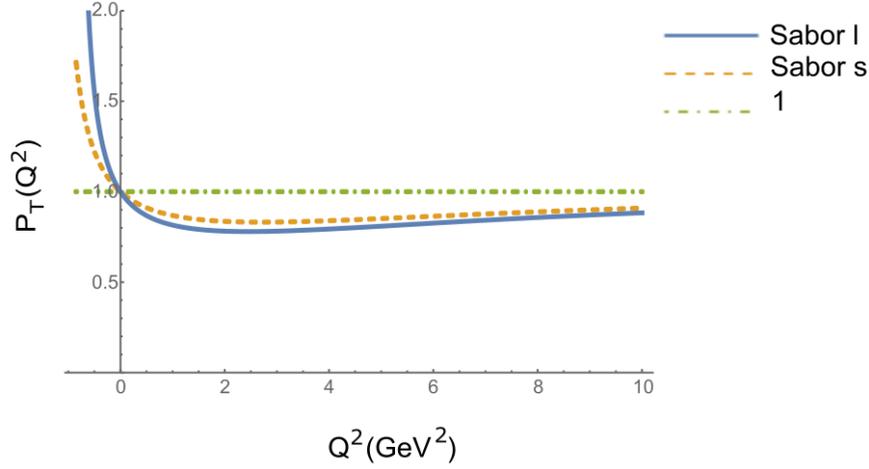


Figura 7.2:  $P_T$  en función de  $Q^2$  para los sabores  $l$  y  $s$  comparando con la recta  $P_T = 1$ .

vista en la sección 5.2. Así, dado que las raíces de la BSA para el caso vectorial son justamente las masas de los mesones vectoriales, si se considera que el quark y antiquark del mesón tienen el mismo sabor  $f$ ,  $P_T(Q^2)$  va a presentar un polo en la masa del mesón  $\rho$  para el sabor  $l$ , mientras que el polo será la masa del mesón  $\phi$  para el sabor  $s$ . En la Figura 7.2 se presentan las gráficas de  $P_T(Q^2)$  para cada uno de estos sabores de quark, donde se compara con la recta  $P_T(Q^2) = 1$ . También notemos que como  $P_T(0) = 1$ , en este caso el vértice vestido quark-fotón es simplemente el vértice desnudo  $\gamma_\mu$ , es decir

$$\Gamma_\mu(0) = \gamma_\mu . \quad (7.11)$$

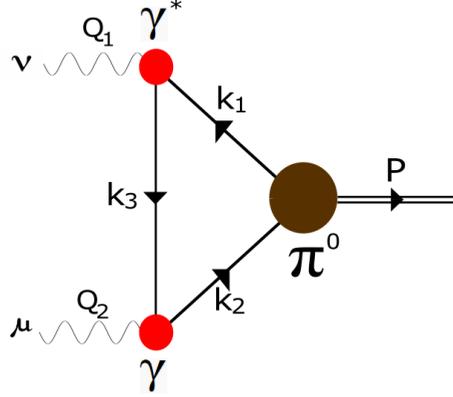
Por lo tanto, vemos que para calcular el TFF del pión neutro solo habrá que considerar el  $P_T(Q^2)$  para el sabor  $l$ , mientras que para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  también hay que considerar el correspondiente al sabor  $s$ , ya que como se vio en el capítulo anterior estos mesones mezclan ambos canales.

## 7.2. TFF para el pion

El factor de forma de transición electromagnético para el pion neutro,  $G^{\gamma^* \pi^0 \gamma}$ , en el truncamiento RL se obtiene a partir de [77]

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}(Q_1 Q_2) = T_{\mu\nu}(Q_1, Q_2) + T_{\nu\mu}(Q_2, Q_1) , \quad (7.12)$$

donde  $Q_1, Q_2$  son respectivamente los momentos del fotón virtual  $\gamma^*$  y del fotón real  $\gamma$  entrantes, y  $P = Q_1 + Q_2$  es el momento total del  $\pi^0$ , como se muestra en la Figura 7.3, tal que [77]

Figura 7.3: Transición  $\gamma^*\pi^0\gamma$ .

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(Q_1, Q_2) &= \frac{\alpha_{em}}{\pi f_\pi} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} Q_{1\alpha} Q_{2\beta} G^{\gamma^*\pi^0\gamma}(Q_1^2, Q_1 \cdot Q_2, Q_2^2) \\
&= Tr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S(k_1) \Gamma_\pi(k_1, k_2; P) i\mathcal{Q}\Gamma_\mu(Q_2; k_2, k_3) S(k_2) S(k_3) i\mathcal{Q}\Gamma_\nu(Q_1; k_3, k_1) ,
\end{aligned} \tag{7.13}$$

con  $\mathcal{Q} = \text{diag}(2/3, -1/3)e$ ,  $\Gamma_\pi$  la BSA para el pion definida en el capítulo 5 y la traza es sobre los índices de color, sabor y espinor. La distribución de momentos es  $k_1 = k - Q_1$ ,  $k_2 = k + Q_2$ ,  $k_3 = k$ , y debido a la condición On-shell  $P^2 = -m_\pi^2$  y a la virtualidad de uno de los fotones, se tienen las constricciones cinemáticas

$$P = Q_1 + Q_2 \quad , \quad Q_1^2 = Q^2 \quad , \quad Q_2^2 = 0 \quad , \quad 2Q_1 \cdot Q_2 = -(m_\pi^2 + Q^2) \quad . \tag{7.14}$$

Vemos que la traza sobre los índices de color nos da simplemente el factor  $N_c$ , mientras que para los índices de sabor resulta el factor  $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] e^2 = \frac{e^2}{3}$ . Luego, definiendo

$$V_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} Q_{1\alpha} Q_{2\beta} \quad , \tag{7.15}$$

tal que  $V^2 = V^{\mu\nu} V_{\mu\nu} = V_{\mu\nu} V_{\mu\nu}$ , y usando (7.11) para el vértice del fotón 2 y (7.3) para el vértice del fotón 1, de (7.13) se obtiene

$$\begin{aligned}
G^{\gamma^*\pi^0\gamma}(Q^2) &= G_E^{\gamma^*\pi^0\gamma}(Q^2) + G_F^{\gamma^*\pi^0\gamma}(Q^2) \\
&= \frac{4\pi^2 N_c f_\pi}{3} P_T(Q^2) \left[ T_1 E_\pi + T_2 \frac{F_\pi}{M} \right] \quad ,
\end{aligned} \tag{7.16}$$

donde

$$T_j = \frac{1}{V^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} V^{\mu\nu} \frac{\text{Tr}_D \left[ \hat{S}(k_1) D_j i\gamma_\mu \hat{S}(k_2) \hat{S}(k_3) i\gamma_\nu \right]}{\Delta_M(k_1) \Delta_M(k_2) \Delta_M(k_3)} , \quad (7.17)$$

con  $j = 1, 2$ , y se usó el hecho de que  $S(k) = \frac{-ik+M}{k^2+M^2} = \frac{\hat{S}(k)}{\Delta_M(k)}$ , siendo  $M = M_l$  por ser el caso del pión.

Para el denominador  $[\Delta_M(k_1)\Delta_M(k_2)\Delta_M(k_3)]$  se emplea la parametrización de Feynman descrita a detalle en el Apéndice C.2, tal que tomando las restricciones de (7.14) y haciendo el cambio de variable  $k \rightarrow k - (xQ_2 - xyP)$ , se obtiene

$$T_1 = 8M \int_0^1 \int_0^1 xdx dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + \mathcal{M}^2)^3} , \quad (7.18a)$$

$$T_2 = -4 \int_0^1 \int_0^1 xdx dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Ak^2 + B}{(k^2 + \mathcal{M}^2)^3} , \quad (7.18b)$$

donde

$$\mathcal{M}^2 = M^2 + xy [Q^2(1-x) - x(1-y)m_\pi^2] , \quad (7.19)$$

y

$$A = 2 - 3x , \quad (7.20a)$$

$$B = 2 [-M^2(-2+x) - xy (Q^2(-1+x)^2 + m_\pi^2(-2+x)(1-y)x)] . \quad (7.20b)$$

Notemos que la integral sobre  $k$  de  $T_2$  diverge logarítmicamente, con lo cual se debe de regularizar con los cortes  $\Lambda_{UV}$  y  $\Lambda_{IR}$  tal como se hizo con las integrales de los capítulos 5 y 6, mientras que la integral sobre  $k$  de  $T_1$  converge y no es necesario que se regularice. Entonces, haciendo  $N_c = 3$  y usando (7.18), de (7.16) se obtiene

$$G_E^{\gamma^* \pi^0 \gamma}(Q^2) = 32\pi^2 f_\pi E_\pi M P_T(Q^2) \int_0^1 \int_0^1 x I_3(\mathcal{M}^2) dx dy , \quad (7.21)$$

$$G_F^{\gamma^* \pi^0 \gamma}(Q^2) = -16\pi^2 f_\pi \frac{F_\pi}{M} P_T(Q^2) \int_0^1 \int_0^1 x [A I_{2p}(\mathcal{M}^2) + (B - A \cdot \mathcal{M}^2) I_{3p}(\mathcal{M}^2)] dx dy , \quad (7.22)$$

donde  $I_{jp}(\mathcal{M}^2)$ ,  $j = 1, 2, 3$  son las integrales regularizadas vistas en (5.39), mientras que  $I_3(\mathcal{M}^2)$  es la función no regularizada dada por

$$I_3(\mathcal{M}^2) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty e^{-\tau \mathcal{M}^2} d\tau = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{2\mathcal{M}^2}\right) . \quad (7.23)$$

Después de juntar las contribuciones  $G_E^{\gamma^*\pi^0\gamma}(Q^2)$  y  $G_F^{\gamma^*\pi^0\gamma}(Q^2)$  dadas respectivamente en (7.21) y (7.22), de (7.16) se obtiene el TFF para el pión neutro para cada valor de  $Q^2$ , de tal forma que en la Figura 7.4 se muestra la gráfica del comportamiento de  $G^{\gamma^*\pi^0\gamma}$  para distintos valores positivos de  $Q^2$ , en donde se normalizó a 1 dividiendo entre  $G^{\gamma^*\pi^0\gamma}(Q^2 = 0)$ .

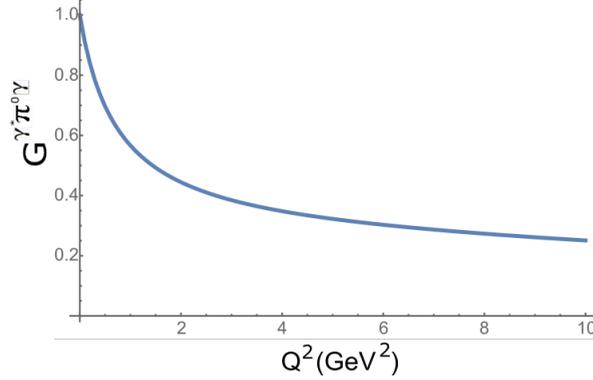


Figura 7.4: TFF para el pión neutro en función de la transferencia de momento.

### 7.3. TFF para $\eta, \eta'$

En el capítulo 6 se vio que en los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  se mezclan los canales  $l$  y  $s$ , con lo cual el TFF electromagnético para el proceso  $\gamma^*\gamma \rightarrow \eta, \eta'$ ,  $G_{\eta, \eta'}$ , se puede modelar de la misma forma como se hizo para el pión, es decir, se tiene el mismo esquema de la Figura 7.3 y las constricciones cinemáticas de (7.14), tal que para  $M = \eta, \eta'$  se obtiene de [27]

$$\frac{\alpha_{em}}{2\pi} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} Q_{1\alpha} Q_{2\beta} G_M(Q_1^2, Q_1 \cdot Q_2, Q_2^2) = \frac{\alpha_{em}}{2\pi} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} Q_{1\alpha} Q_{2\beta} \left[ c_l G_M^l(Q^2) + c_s G_M^s(Q^2) \right], \quad (7.24)$$

es decir,

$$G_M = c_l G_M^l + c_s G_M^s, \quad (7.25)$$

con  $c_l = 5/9$ ,  $c_s = \sqrt{2}/9$ ,  $\alpha_{em} = 1/137$ , y donde

$$G_M^f(Q^2) = Tr_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i\chi_\mu^f(k_3, k_1) \Gamma_M^f(P; k_1, k_2) S_f(k_2) i\Gamma_\nu^f(k_2, k_3). \quad (7.26)$$

Procediendo de manera similar a como se hizo en el caso del pión, se encuentra que

$$\begin{aligned} G_M^f(Q^2) &= \left[ (G_E)_M^f(Q^2) + (G_F)_M^f(Q^2) \right] \\ &= \frac{2\pi}{\alpha_{em}} P_T^f(Q^2) \left[ T_{1M}^f E_M^f + T_{2M}^f \frac{F_M^f}{M_f} \right], \end{aligned} \quad (7.27)$$

siendo  $P_T^f(Q^2)$  las funciones definidas en (7.10) para los distintos canales, y donde  $T_{1M}^f$  y  $T_{2M}^f$  están dadas de la misma forma de (7.18) en términos de las funciones de (7.20), tal que considerando los distintos sabores de  $M_f$  y definiendo la nueva función

$$\mathcal{M}_M^f = M_f^2 + xy [Q^2(1-x) - x(1-y)m_M^2] , \quad (7.28)$$

se sigue que

$$T_{1M}^f = 8M_f \int_0^1 \int_0^1 xdx dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + \mathcal{M}_M^f)^3} , \quad (7.29a)$$

$$T_{2M}^f = -4 \int_0^1 \int_0^1 xdx dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{A_M^f k^2 + B_M^f}{(k^2 + \mathcal{M}_M^f)^3} , \quad (7.29b)$$

con

$$A_M^f = 2 - 3x , \quad (7.30a)$$

$$B_M^f = 2 [-M_f^2(-2+x) - xy (Q^2(-1+x)^2 + m_M^2(-2+x)(1-y)x)] . \quad (7.30b)$$

Notemos que la función de (7.28) puede tomar valores negativos debido a lo grande que son las masas de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , tal que procediendo de manera un tanto similar a como se hizo en el capítulo 6, si se hace el cambio de variable  $\tilde{y} \rightarrow 1-y$ , esta función se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_M^f &= M_f^2 + x(1-y) [Q^2(1-x) - xym_M^2] \\ &= m_M^2 \left[ (xy - C_M^f)^2 + D_M^f \right] , \end{aligned} \quad (7.31)$$

donde

$$C_M^f = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{Q^2}{m_M^2}(1-x) \right] , \quad (7.32a)$$

$$D_M^f = \frac{M_f^2}{m_M^2} - \frac{1}{4} \left[ x - \frac{Q^2}{m_M^2}(1-x) \right]^2 . \quad (7.32b)$$

Antes de continuar, notemos que el cambio de variable en  $y$  no afecta las integrales de (7.29), ya que  $d\tilde{y} = -dy$ , lo que resulta en que

$$\int_{\tilde{y}=0}^1 d\tilde{y} = - \int_{y=1}^0 dy = \int_{y=0}^1 dy . \quad (7.33)$$

Sin embargo, las funciones de (7.30) si van a cambiar, las cuales toman la forma

$$A_M^f = 2 - 3x , \quad (7.34a)$$

$$B_M^f = 2 [-M_f^2(-2+x) - x(1-y)(Q^2(-1+x)^2 + m_M^2(-2+x)xy)] . \quad (7.34b)$$

Ahora, de (7.31) vemos que  $\mathcal{M}_M^f$  solo puede ser negativa en el caso en que  $D_M^f < 0$ , lo cual de (7.32b) se traduce en la condición

$$\frac{M_f^2}{m_M^2} < \frac{1}{4} \left[ x - \frac{Q^2}{m_M^2}(1-x) \right]^2 , \quad (7.35)$$

es decir,  $\mathcal{M}_M^f$  puede ser negativa para las  $x$  tales que

$$1 - \frac{1 - \frac{2M_f}{m_M}}{1 + \frac{Q^2}{m_M^2}} < x_M^f , \quad (7.36)$$

mientras que siempre será positiva para  $x$  menores a ese valor. Luego, una vez determinada para que región de  $x$  se tiene que  $D_M^f < 0$ , de (7.31) se encuentran los valores de  $y$  para los cuales  $\mathcal{M}_M^f$  cambia de signo, los cuales son

$$y_M^{f\pm} = \frac{C_M^f \pm \sqrt{-D_M^f}}{x} , \quad (7.37)$$

donde se sigue que  $\mathcal{M}_M^f$  es negativa para los valores de  $y$  tales que  $y_M^{f-} < y < y_M^{f+}$ .

Por lo tanto, definimos

$$\alpha_M^f = \begin{cases} x_M^f & , si \quad x_M^f \leq 1 \\ 1 & , si \quad x_M^f > 1 \end{cases} , \quad (7.38)$$

$$\beta_M^{f-} = \begin{cases} 0 & , si \quad y_M^{f-} \leq 0 \\ y_M^{f-} & , si \quad y_M^{f-} > 0 \end{cases} , \quad (7.39)$$

$$\beta_M^{f+} = \begin{cases} y_M^{f+} & , si \quad y_M^{f+} \leq 1 \\ 1 & , si \quad y_M^{f+} > 1 \end{cases} , \quad (7.40)$$

tal que usando las restricciones cinemáticas de (7.14) y las integrales regularizadas para argumentos positivo y negativo vistas respectivamente en (6.51) y (6.52), y la integral no regularizada  $I_3$  definida en (7.23), se sigue que las contribuciones  $E$  y  $F$  para los TFF de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  se calculan como

$$\begin{aligned}
(G_E)_M^f(Q^2) = (H_M^f)_1 & \left\{ \int_0^{x_M^f} \int_0^1 x I_3(\mathcal{M}_M^f) dx dy \right. \\
& + \int_{x_M^f}^1 \int_0^{\beta_M^{f-}} x I_3(\mathcal{M}_M^f) dx dy \\
& + \int_{x_M^f}^1 \int_{\beta_M^{f-}}^{\beta_M^{f+}} x I_3(\mathcal{M}_M^f) dx dy \\
& \left. + \int_{x_M^f}^1 \int_{\beta_M^{f+}}^1 x I_3(\mathcal{M}_M^f) dx dy \right\} , \tag{7.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(G_F)_M^f(Q^2) = (H_M^f)_2 & \left\{ \int_0^{x_M^f} \int_0^1 x \left[ A_M^f I_{2p}(\mathcal{M}_M^f) + (B_M^f - A_M^f \cdot \mathcal{M}_M^f) I_{3p}(\mathcal{M}_M^f) \right] dx dy \right. \\
& + \int_{x_M^f}^1 \int_0^{\beta_M^{f-}} x \left[ A_M^f I_{2p}(\mathcal{M}_M^f) + (B_M^f - A_M^f \cdot \mathcal{M}_M^f) I_{3p}(\mathcal{M}_M^f) \right] dx dy \\
& + \int_{x_M^f}^1 \int_{\beta_M^{f-}}^{\beta_M^{f+}} x \left[ A_M^f I_{2n}(\mathcal{M}_M^f) + (B_M^f + A_M^f \cdot \mathcal{M}_M^f) I_{3n}(\mathcal{M}_M^f) \right] dx dy \\
& \left. + \int_{x_M^f}^1 \int_{\beta_M^{f+}}^1 x \left[ A_M^f I_{2p}(\mathcal{M}_M^f) + (B_M^f - A_M^f \cdot \mathcal{M}_M^f) I_{3p}(\mathcal{M}_M^f) \right] dx dy \right\} , \tag{7.42}
\end{aligned}$$

donde

$$(H_M^f)_1 = \frac{16\pi M_f}{\alpha_{em}} E_M^f P_T^f(Q^2) , \tag{7.43a}$$

$$(H_M^f)_2 = -\frac{8\pi}{\alpha_{em}} \frac{F_M^f}{M_f} P_T^f(Q^2) . \tag{7.43b}$$

Finalmente, introduciendo (7.27) en (7.25), vemos que

$$G_M = c_l \left[ (G_E)_M^l + (G_F)_M^l \right] + c_s \left[ (G_E)_M^s + (G_F)_M^s \right] , \tag{7.44}$$

tal que juntando las contribuciones de (7.41) y (7.42) para cada sabor de quark, se obtienen  $G_\eta$  y  $G_{\eta'}$  en función de  $Q^2$ , de tal forma que en la Figura 7.5 se muestra la gráfica del comportamiento de  $G_{\eta, \eta'}$  para distintos valores positivos de  $Q^2$ , en donde se normalizaron las curvas a 1 dividiendo respectivamente entre  $G_{\eta, \eta'}(Q^2 = 0)$ .

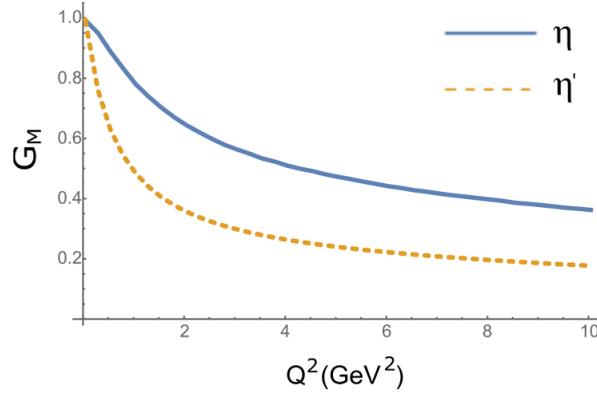


Figura 7.5: TFF para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  en función de la transferencia de momento.

#### 7.4. Discusión de los resultados

De los cálculos obtenidos en la sección anterior, podemos juntar las curvas de los TFF de los mesones  $\pi^0$ ,  $\eta$  y  $\eta'$  en una sola gráfica para comparar entre ellas, como se muestra en la Figura 7.6, siendo  $N = \pi^0, \eta, \eta'$  y tal que cada curva se normalizo a 1. De esto vemos que la curva del  $\pi^0$  queda por debajo de la curva del  $\eta'$ , pero por arriba de la del  $\eta$ , comportamiento que también presentan las gráficas de los TFF para estos mesones en [27]. Por otra parte, notamos que la curva del mesón  $\eta'$  es la que depende más débilmente de  $Q^2$ , lo cual es algo que se esperaba debido a su gran masa, ya que de la función de (7.28),  $\mathcal{M}_M^f = M_f^2 + xy [Q^2(1-x) - x(1-y)m_M^2]$ , el último término empieza a dominar sobre la contribución de  $Q^2$ . Este comportamiento se presenta también para los mesones  $\eta_b$  y  $\eta_c$  [88], donde se observa que las gráficas de sus TFF dependen todavía más débilmente de  $Q^2$  conforme la masa del mesón es más grande.

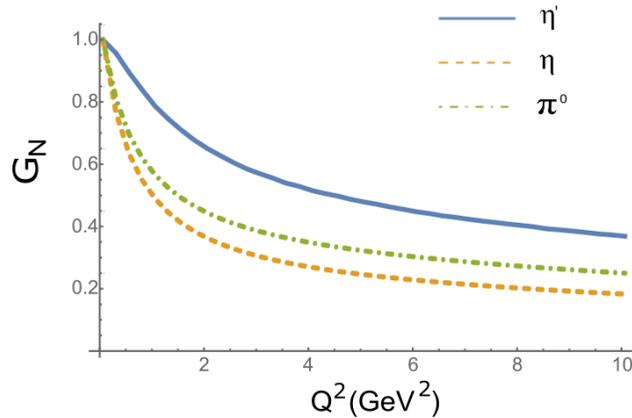


Figura 7.6: TFF para los mesones  $\pi^0, \eta$  y  $\eta'$  en función de la transferencia de momento.

Ahora, una característica importante de cualquier modelo que describa los TFF de los mesones pseudoescalares es su comportamiento para  $Q_1^2$  y  $Q_2^2$  grandes, ya que para modelos

con diagramas a nivel de árbol como el que usamos (Figura 7.3) [87,89-91], o incluso para diagramas donde domina la contribución vectorial (VDM) [92-94], se predice que para un solo fotón off-shell la dependencia asintótica es  $G_N \sim 1/Q^2$  cuando  $Q^2 \rightarrow \infty$ . De esta forma, para ver la dependencia asintótica de nuestro modelo graficamos  $Q^2 G_N$  con respecto de  $Q^2$ , donde  $N = \pi^0, \eta, \eta'$ , como se muestra en la Figura 7.7.

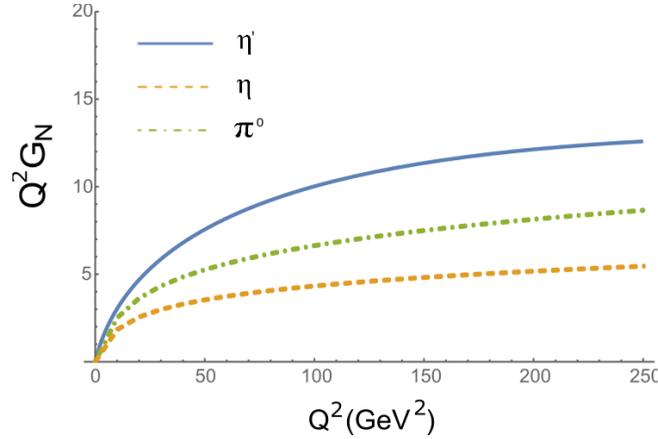


Figura 7.7: Comportamiento asintótico de los TFF para los mesones  $\pi^0, \eta$  y  $\eta'$  en función de la transferencia de momento.

De la Figura 7.7 vemos que, para  $Q^2$  grandes,  $Q^2 G_N$  tiende a ser una recta, lo cual significa que se cumple que  $G_N \sim 1/Q^2$  cuando  $Q^2 \rightarrow \infty$ , es decir, se llega a la dependencia asintótica que nuestro modelo debía de cumplir bajo las condiciones que impusimos.

## Capítulo 8

# Resumen y conclusiones

En el presente trabajo se dió una introducción a QCD y al formalismo de las ecuaciones de Dyson-Schwinger y Bethe-Salpeter, tal que se obtienen las ecuaciones de movimiento para los propagadores del electrón, fotón, vértice fermión-fotón en QED, su equivalente para el propagador del quark en QCD, la amplitud de Bethe-Salpeter para los mesones y su condición de normalización. Después se usa una interacción de contacto y el truncamiento RL para obtener los kernels de los mesones pseudoescalares y vectoriales, de los cuales se calculan sus masas y constantes de decaimiento. Luego, debido a la anomalía no abeliana, se agrega un kernel extra para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  y se procede a calcular las masas, constantes de decaimiento y anchos de decaimiento de dichos mesones. Finalmente se procede a calcular los factores de forma de transición electromagnéticos para los mesones  $\pi^0$ ,  $\eta$  y  $\eta'$ , tal que se hace una comparación de sus graficas en función de la transferencia de momento  $Q^2$ .

La interacción de contacto con truncamiento RL y usando la regularización de tiempo propio con cortes  $IR$  y  $UV$  predice de mejor forma las masas y constantes de decaimiento de los mesones pseudoescalares  $\pi^0$ ,  $K$ ,  $s\bar{s}$  (y su límite quiral) que lo correspondiente a los mesones vectoriales  $\rho$ ,  $K^*$ ,  $\phi$  (y el respectivo límite quiral vectorial). En lo concerniente a los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , vemos que, a pesar de la simplicidad del modelo usado para  $\xi(t)$  considerándolo como una constante  $\xi_0$  a determinar, los resultados obtenidos para las masas y anchos de decaimiento son realmente buenos, mientras que los resultados para las constantes de decaimiento están dentro de un rango aceptable. Esto nos hace pensar que un modelo tan simple como este es más que efectivo como una primera aproximación para poder describir completamente al nonete de mesones pseudoescalares.

Para los factores de forma de transición electromagnéticos se obtiene el comportamiento esperado al momento de comprar entre ellos, es decir, que la curva del TFF del mesón  $\eta'$  sea menos sensible a  $Q^2$  comparada a la de los otros dos, que la curva del TFF del  $\pi^0$  quede entre la de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , y lo más importante, que los TFF todos decaen asintóticamente como  $1/Q^2$ .

# Apéndice A

## Notaciones y convenciones

A lo largo de este escrito se trabaja tanto en el espacio de Minkowski como en el espacio Euclideo, así que el propósito de este Apéndice es mostrar que notaciones y convenciones se utilizan en el espacio de Minkowski y luego obtener sus equivalentes en el espacio Euclideo.

### A.1. Convenciones en el espacio de Minkowski

En el espacio de Minkowski el 4-vector contravariante de posición en unidades naturales se escribe como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) , \quad (\text{A.1})$$

y usaremos la representación del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) , \quad (\text{A.2})$$

tal que los covectores o 4-vectores covariantes se definen de la forma

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu , \quad (\text{A.3})$$

el cual se ve por componentes como

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{x}) . \quad (\text{A.4})$$

A partir de esto se pueden definir 4-vectores cuyas entradas sean derivadas parciales de las coordenadas espaciales, es decir

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) , \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) , \quad (\text{A.5})$$

y entonces se define el 4-vector de momento  $p^\mu$  en términos de estos operadores

$$p_\mu = i\partial_\mu = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \quad , \quad p^\mu = i\partial^\mu = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \quad , \quad (\text{A.6})$$

tal que explícitamente las componentes sus componentes son

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \vec{p}) \quad , \quad (\text{A.7a})$$

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) \equiv (E, -p_x, -p_y, -p_z) = (E, -\vec{p}) \quad . \quad (\text{A.7b})$$

Por otra parte, el producto escalar de dos 4-vectores está dado por la expresión

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu y^\mu \quad , \quad (\text{A.8})$$

tal que el invariante de Lorentz para una partícula de masa  $m$  en esta métrica es

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - (\vec{p})^2 = m^2 \quad , \quad (\text{A.9})$$

y la transformada de Fourier se escribe como

$$f(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} f(p) \quad . \quad (\text{A.10})$$

Ahora, dado que los quarks son partículas de espín 1/2, introduzcamos las matrices de Dirac para estas partículas. En la representación usual, que es la que postuló Bjorken en 1959, las matrices de Dirac  $4 \times 4$  se escribe de la forma

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{A.11})$$

donde  $I_{2 \times 2}$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ , y  $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  son las matrices de Pauli, las cuales están dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{A.12})$$

y así se construyen los 4-vectores

$$\gamma^\mu = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\} \quad , \quad (\text{A.13a})$$

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = \{\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3\} \quad . \quad (\text{A.13b})$$

También se introduce otra matriz de Dirac muy útil

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \quad , \quad (\text{A.14})$$

donde  $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$  es el tensor completamente antisimétrico de Levi-Civita de cuatro dimensiones, tal que en esa representación

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.15})$$

Otra representación de las matrices de Dirac que se usa frecuentemente es la representación quiral, en donde se tiene

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & I_{2 \times 2} \end{pmatrix} . \quad (\text{A.16})$$

Esta última representación es muy útil, ya que nos permite proyectar al campo de Dirac  $\psi$  en sus componentes izquierda y derecha a través de los proyectores

$$\hat{P}_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{P}_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{2 \times 2} \end{pmatrix} . \quad (\text{A.17})$$

Las matrices de Dirac satisfacen el Algebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I_{4 \times 4} , \quad (\text{A.18})$$

y también tienen las propiedades de hermeticidad

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma_0 , \quad \vec{\gamma}^\dagger = -\vec{\gamma} , \quad (\text{A.19})$$

tal que estas últimas propiedades de pueden juntar en la propiedad

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 . \quad (\text{A.20})$$

Otras propiedades importantes de las matrices de Dirac son

$$(\gamma^0)^2 = I_{4 \times 4} , \quad (\text{A.21a})$$

$$(\gamma^j)^2 = -I_{4 \times 4} , \quad (\text{A.21b})$$

$$(\gamma^5)^2 = I_{4 \times 4} , \quad (\text{A.21c})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4I_{4 \times 4} , \quad (\text{A.21d})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu , \quad (\text{A.21e})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma_\mu = 4g^{\alpha\nu} I_{4 \times 4} , \quad (\text{A.21f})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\alpha , \quad (\text{A.21g})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 , \quad (\text{A.21h})$$

$$[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 , \quad (\text{A.21i})$$

donde  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ,  $j = 1, 2, 3$  y  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

Finalmente, haciendo uso de la notación *slash*,  $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ , se cumplen las propiedades para la traza sobre los índices de Dirac

$$Tr [I_{4 \times 4}] = 4 \quad , \quad (A.22a)$$

$$Tr [\gamma^\mu] = Tr [\gamma^5] = 0 \quad , \quad (A.22b)$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad , \quad (A.22c)$$

$$Tr [\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = 0 \quad , \quad \text{para } n \text{ impar} \quad , \quad (A.22d)$$

$$Tr [\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = 0 \quad , \quad \text{para } n \text{ par} \quad , \quad (A.22e)$$

$$Tr [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] = 4 [g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}] \quad , \quad (A.22f)$$

$$Tr [\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu] = 4i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad , \quad (A.22g)$$

$$\begin{aligned} Tr [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 4g^{\alpha\beta} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \\ &\quad - 4g^{\alpha\mu} [g^{\beta\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\beta\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\beta\sigma} g^{\nu\rho}] \\ &\quad + 4g^{\alpha\nu} [g^{\beta\mu} g^{\rho\sigma} - g^{\beta\rho} g^{\mu\sigma} + g^{\beta\sigma} g^{\mu\rho}] \\ &\quad - 4g^{\alpha\rho} [g^{\beta\mu} g^{\nu\sigma} - g^{\beta\nu} g^{\mu\sigma} + g^{\beta\sigma} g^{\mu\nu}] \\ &\quad + 4g^{\alpha\sigma} [g^{\beta\mu} g^{\nu\rho} - g^{\beta\nu} g^{\mu\rho} + g^{\beta\rho} g^{\mu\nu}] \quad , \end{aligned} \quad (A.23)$$

en donde se han empleado las propiedades de la traza

$$Tr [A + B] = Tr [A] + Tr [B] \quad , \quad (A.24a)$$

$$Tr [cA] = cTr [A] \quad , \quad \text{con } c \in \mathbb{C} \quad , \quad (A.24b)$$

$$Tr [ABC] = Tr [CAB] = Tr [BCA] \quad . \quad (A.24c)$$

## A.2. Convenciones en el espacio Euclideo

En el espacio Euclideo la métrica es de la forma

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 1, 1) \quad , \quad (A.25)$$

donde  $\delta_{\mu\nu}$  es la delta de Kronecker. De esto vemos que en el espacio Euclideo se pueden subir y bajar índices sin preocuparse por un cambio de signo, ya que para cualquier 4-vector  $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (\vec{x}, -it)$  su covector es simplemente

$$x_\mu = \delta_{\mu\nu} x^\nu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = x^\mu , \quad (\text{A.26})$$

y así el producto escalar de dos 4-vectores toma la forma

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_\mu y_\mu . \quad (\text{A.27})$$

La mayor diferencia al trabajar en el espacio Euclideo es que la coordenada temporal se va a ver modificada mediante una rotación de Wick, es decir,  $t^E = it^M$ , y entonces los cálculos que se hicieron en el espacio de Minkowski que involucran a  $t$  se van a seguir valiendo con el cambio  $t \rightarrow -it^E$ . Siguiendo con esta idea, las matrices de Dirac Euclidianas se escriben en término de las matrices de Dirac usuales de la forma

$$\gamma_j^E = -i\gamma^j \quad , \quad \gamma_4^E = \gamma^0 , \quad (\text{A.28})$$

donde en este caso las 4 matrices si son Hermitianas, es decir

$$(\gamma_\mu^E)^\dagger = \gamma_\mu^E . \quad (\text{A.29})$$

Explícitamente estas matrices de Dirac Euclidianas están dadas por

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix} , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -i\vec{\sigma} \\ i\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.30})$$

y el álgebra que satisfacen es

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} . \quad (\text{A.31})$$

Luego, se construye  $\gamma_5$  en este espacio como

$$\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 , \quad (\text{A.32})$$

donde explícitamente

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ -I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.33})$$

Por otra parte, el cambio  $t \rightarrow -it^E$  hace que  $\not{A}$  e  $i\not{\partial}$  se transforman como

$$\not{A} = \gamma_\mu \cdot A^\mu = \gamma^0 A^0 - \gamma^j A^j \longrightarrow -i\gamma_4^E A_4^E - i\gamma_j^E A_j^E = -i\gamma_\mu^E \cdot A^\mu = -i\not{A} , \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} i\not{\partial} = i\gamma_\mu \cdot \partial^\mu &= i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} \longrightarrow i\gamma_4^E \frac{\partial}{\partial(-it^E)} - \gamma_j^E \frac{\partial}{\partial x^j} , \\ &= -\left( \gamma_4^E \frac{\partial}{\partial(t^E)} + \gamma_j^E \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = -\gamma_\mu^E \cdot \partial_\mu^E = -\not{\partial} . \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Procediendo de manera similar se puede encontrar como se transforman cantidades en el espacio de momento, tal que en la Tabla A.1 se da una lista de como ciertas cantidades pasan del espacio de Minkowski al espacio Euclideo. Finalmente, de (A.6) se obtiene que en este espacio el 4-vector de momento toma la forma

$$p^\mu = (p^1, p^2, p^3, p^4) = (\vec{p}, iE) , \quad (\text{A.36})$$

tal que el invariante de Lorentz o condición On-Shell en el espacio Euclideo es justamente

$$p^2 = p_\mu p^\mu = (\vec{p})^2 - E^2 = -m^2 . \quad (\text{A.37})$$

Espacio de posiciones		Espacio de momentos	
1.	$\int^M d^4 x^M \rightarrow -i \int^E d^4 x^E$	1.	$\int^M d^4 k^M \rightarrow i \int^E d^4 k^E$
2.	$\not{\partial} \rightarrow i\gamma^E \cdot \partial^E$	2.	$\not{k} \rightarrow -i\gamma^E \cdot k^E$
3.	$\not{A} \rightarrow -i\gamma^E \cdot A^E$	3.	$\not{A} \rightarrow -i\gamma^E \cdot A^E$
4.	$A_\mu B^\mu \rightarrow -A^E \cdot B^E$	4.	$k_\mu q^\mu \rightarrow -k^E \cdot q^E$
5.	$x^\mu \partial_\mu \rightarrow x^E \cdot \partial^E$	5.	$k_\mu x^\mu \rightarrow -k^E \cdot x^E$

Tabla A.1: Conversion de cantidades del espacio de Minkowski al espacio Euclideo

## Apéndice B

# Estructura de la Amplitud de Bethe-Salpeter para mesones

En la derivación de la ecuación de Bethe-Salpeter hecha en el capítulo 4, se llegó a que la Amplitud de Bethe-Salpeter  $\Gamma(P; p)$  depende tanto del momento total  $P$  del estado ligado de las dos partículas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , como en el momento relativo  $p$  entre ellas; este razonamiento se ajusta a lo que se quiere hacer en QCD, ya que un mesón es un estado ligado de un quark y un antiquark. Considerando los 4-vectores  $\gamma_\mu$ ,  $p_\mu$  y  $P_\mu$  que están en el espacio de Dirac, se pueden construir estructuras linealmente independientes en este espacio, tal que se habla de una base; a los elementos de la base del espacio de Dirac de los conoce como los covariantes de Dirac. De esta forma, la BSA se escribe en términos de los covariantes de Dirac como

$$\Gamma(P; p) = \sum_{i=1}^{N_J} T_i(P, p, \gamma) F_i(P^2, P \cdot p, p^2) , \quad (\text{B.1})$$

donde  $T_i$  son los covariantes de Dirac,  $F_i$  son funciones invariantes de Lorentz, y  $N_J$  el número de covariantes del espacio, el cual depende del espín  $J$  del mesón.

### B.1. Mesones pseudoescalares

Como ya se mencionó anteriormente, los covariantes de Dirac se obtienen de productos escalares de los 4-vectores  $\gamma_\mu$ ,  $p_\mu$  y  $P_\mu$ . Notando que los productos escalares  $\gamma_\mu \gamma^\mu$ ,  $p^2$ ,  $P^2$ ,  $P \cdot p$  son constantes, se considera a  $\mathbf{1}$  como el primer candidato a ser covariante de Dirac.

Ahora, dado que el producto escalar en el espacio de Dirac está dado de la forma

$$\langle A|B \rangle = \text{Tr}[A \cdot B] , \quad (\text{B.2})$$

vemos que  $\langle \mathbf{1}|\not{p} \rangle = 0 = \langle \mathbf{1}|\not{P} \rangle$ , mientras que

$$\langle \not{p}|\not{P} \rangle = \text{Tr}[\not{p} \cdot \not{P}] = 4(p \cdot P)\mathbf{1} , \quad (\text{B.3})$$

es decir, se tiene que  $\not{p}$ ,  $\not{P}$  si son ortogonales a  $\mathbf{1}$ , pero no lo son entre sí y en principio no se pueden tomar como covariantes de Dirac. Sin embargo, considerando una proyección transversal de  $\not{p}$  con respecto a  $P$ , se obtiene

$$Tr \left[ \left( \not{p} - \not{P} \frac{p \cdot P}{P^2} \right) \cdot \not{P} \right] = Tr[\not{p}\not{P} - p \cdot P] = 4(p \cdot P)\mathbf{1} - 4(p \cdot P)\mathbf{1} = 0 , \quad (\text{B.4})$$

con lo cual  $\not{p}$ ,  $\not{P}$  si se pueden considerar como covariantes de Dirac. Finalmente, usando  $\sigma_{\mu\nu}$  se construye

$$\sigma_{\mu\nu} p_\mu P_\nu = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] p_\mu P_\nu = \frac{i}{2} [\not{p}, \not{P}] , \quad (\text{B.5})$$

el cual será otro covariante de Dirac, ya que

$$Tr[\mathbf{1} \cdot \sigma_{\mu\nu} p_\mu P_\nu] = \frac{i}{2} Tr [[\not{p}, \not{P}]] = \frac{i}{2} Tr [\not{p}\not{P} - \not{P}\not{p}] = 4(p \cdot P)\mathbf{1} - 4(p \cdot P)\mathbf{1} = 0 , \quad (\text{B.6})$$

$$Tr \left[ \left( \not{p} - \not{P} \frac{p \cdot P}{P^2} \right) \cdot \sigma_{\mu\nu} p_\mu P_\nu \right] = \frac{i}{2} Tr \left[ \not{p}(\not{p}\not{P} - \not{P}\not{p}) - \frac{p \cdot P}{P^2} \not{P} (\not{p}\not{P} - \not{P}\not{p}) \right] = 0 , \quad (\text{B.7})$$

$$Tr[\not{P} \cdot \sigma_{\mu\nu} p_\mu P_\nu] = \frac{i}{2} Tr[\not{P}(\not{p}\not{P} - \not{P}\not{p})] = 0 . \quad (\text{B.8})$$

De esta forma, los 4 candidatos a ser covariantes de Dirac son

$$T_1 = \mathbf{1} , \quad T_2 = i\not{P} , \quad T_3 = i\not{p} , \quad T_4 = i\sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu , \quad (\text{B.9})$$

donde la unidad imaginaria  $i$  se agregó para que todos los covariantes estén en unidades reales y no en imaginarias. Cabe señalar que no es posible encontrar más covariantes de Dirac, ya que debido al álgebra de Clifford,  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ , cualquier otra combinación de productos escalares de  $\gamma_\mu$ ,  $p_\mu$  y  $P_\mu$  se puede reducir a los covariantes ya mencionados.

Para construir la BSA de los mesones pseudoescalares en el espacio Euclideo, se debe de asegurar que los covariantes de Dirac tengan sus mismos números cuánticos, es decir,  $J^{PC} = 0^{-+}$ . Es fácil ver que todos los covariantes dados tienen paridad positiva, pero como se necesita paridad negativa, usando  $\gamma_5$  (que tiene paridad negativa) los covariantes de Dirac que tienen la misma paridad que los mesones pseudoescalares son

$$T_1 = i\gamma_5 , \quad T_2 = \gamma_5 \not{P} , \quad T_3 = \gamma_5 \not{p} , \quad T_4 = \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} p_\mu P_\nu . \quad (\text{B.10})$$

Por otra parte, dado que la conjugación de carga de la BSA está dada por

$$\Gamma(P; p) \rightarrow \bar{\Gamma}(P; p) = (C\Gamma(-P; p)C^{-1})^T , \quad (\text{B.11})$$

donde  $T$  indica transpuesta de la matriz y  $C = \gamma_2\gamma_4$ , se sigue que la conjugación de carga de una matriz de Dirac en el espacio Euclideo está dada por

$$\gamma^\mu \rightarrow (C\gamma^\mu C^{-1})^T = -(\gamma^\mu)^T = -\gamma^\mu . \quad (\text{B.12})$$

De esto se obtiene que

$$\begin{aligned} \not{p} \rightarrow (C\not{p}C^{-1})^T &= (C\gamma^\mu p_\mu C^{-1})^T = (C\gamma^\mu C^{-1}Cp_\mu C^{-1})^T \\ &= (Cp_\mu C^{-1})^T (C\gamma^\mu C^{-1})^T = (-p_\mu)(-\gamma^\mu) = \not{p} , \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \not{P} \rightarrow -(C\not{P}C^{-1})^T &= -(C\gamma^\mu P_\mu C^{-1})^T = -(C\gamma^\mu C^{-1}CP_\mu C^{-1})^T \\ &= -(CP_\mu C^{-1})^T (C\gamma^\mu C^{-1})^T = -(-P_\mu)(-\gamma^\mu) = -\not{P} . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Usando los resultados anteriores se sigue que

$$\begin{aligned} [\not{p}, \not{P}] \rightarrow (C[\not{p}, -\not{P}]C^{-1})^T &= -(C\not{p}\not{P}C^{-1})^T + (C\not{P}\not{p}C^{-1})^T \\ &= -(C\not{p}C^{-1}C\not{P}C^{-1})^T + (C\not{P}C^{-1}C\not{p}C^{-1})^T \\ &= -(C\not{P}C^{-1})^T (C\not{p}C^{-1})^T + (C\not{p}C^{-1})^T (C\not{P}C^{-1})^T \\ &= -(\not{P})(\not{p}) + (\not{p})(\not{P}) = [\not{p}, \not{P}] . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Finalmente, dado que  $\gamma_5 \rightarrow (C\gamma_5 C^{-1})^T = \gamma_5$ , se obtiene que las paridades de carga para  $T_1, T_2, T_3, T_4$  son respectivamente  $+, -, +, +$ , tal que la BSA para los mesones pseudoescalares se escribe como

$$\Gamma_{PS}(P; p) = \gamma_5 [iE_{PS}(P; p) + \not{P}F_{PS}(P; p) + \not{p}G_{PS}(P; p) + \sigma_{\mu\nu}p_\mu P_\nu H_{PS}(P; p)] , \quad (\text{B.16})$$

donde se necesitan respectivamente las paridades de carga  $+, -, +, +$  en las funciones invariantes de Lorentz  $E_{PS}, F_{PS}, G_{PS}, H_{PS}$  apropiados.

## B.2. Mesones vectoriales

Para el caso de los mesones vectoriales se trabaja con las matrices de Dirac transversales  $\gamma_\mu^T$ , tal que se pueden encontrar 12 covariantes Dirac linealmente independientes, pero para que se respetan los números cuánticos de los mesones vectoriales (en particular la conjugación de carga), y el comportamiento transversal de su BSE, el número de covariantes de Dirac debe de ser ocho [74]. De esta forma, la BSA para el caso vectorial se escribe como

$$\Gamma_\mu(P; p) = \sum_{i=1}^8 T_\mu^i(P, p, \gamma) F_i(P^2, P \cdot p, p^2) , \quad (\text{B.17})$$

donde

$$\begin{aligned}
T_\mu^1 &= \gamma_\mu^T & , & & T_\mu^2 &= p_\mu^T \not{\psi} & , \\
T_\mu^3 &= p_\mu^T \not{P} & , & & T_\mu^4 &= \gamma_\mu^T [\not{\psi}, \not{P}] - p_\mu^T \not{P} & , \\
T_\mu^5 &= ip_\mu^T \mathbf{1} & , & & T_\mu^6 &= i[\gamma_\mu^T, \not{\psi}] & , \\
T_\mu^7 &= i\gamma_\mu^T \not{P} & , & & T_\mu^8 &= ip_\mu^T [\not{\psi}, \not{P}] & .
\end{aligned}
\tag{B.18}$$

## Apéndice C

# Parametrización de Feynman

La idea general de la parametrización de Feynman es poder resolver integrales de expresiones que tienen varios factores en el denominador, tal que si se tienen  $A_n$  factores, esta expresión se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 \cdots A_n} &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{k=1}^n x_k)}{[\sum_{k=1}^n x_k A_k]^n} \\ &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \\ &\quad \frac{1}{[A_1 + x_1(A_2 - A_1) + \cdots + x_{n-1}(A_n - A_{n-1})]^n} . \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Este tipo de integrales aparecen en diferentes áreas de matemáticas y física, en especial en los diagramas de Feynman con bucles. Una parametrización alterna es [79]

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 \cdots A_n} &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{n-1}^* \\ &\quad \frac{x_1^{n-2} x_2^{n-3} \cdots x_{n-2}}{[A_n x_1 \cdots x_{n-1} + A_{n-1} x_1 \cdots x_{n-2} (1 - x_{n-1}) + \cdots + A_1 (1 - x_1)]^n} . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

La segunda parametrización es la que se ocupara, ya que el hecho de que los límites de integración sean los mismos en todas las integrales va a hacer más rápido y práctico el cálculo numérico a desarrollar.

### C.1. Parametrización para $[\Delta_{M_f}(q+P)\Delta_{M_g}(q)]^{-1}$

La forma más simple de la parametrización de Feynman es para  $n = 2$ , la cual de (C.2) se escribe como

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[Ax + B(1-x)]^2} . \quad (\text{C.3})$$

Integrales de expresiones de esta forma aparecen en el capítulo 5 en las componentes del kernel  $K_{PS}$  de la BSA para los mesones pseudoescalares, tal que para  $A = \Delta_{M_f}(q_+)$ ,  $B = \Delta_{M_g}(q_-)$ , y haciendo  $q_+ = q + P$ ,  $q_- = q$ , se sigue que

$$\frac{1}{(q_+^2 + M_f^2)(q_-^2 + M_g^2)} = \int_0^1 \frac{dx}{\left[ ((q+P)^2 + M_f^2)x + (q^2 + M_g^2)(1-x) \right]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{D^2} . \quad (\text{C.4})$$

Desarrollando el denominador  $D$

$$D = ((q+P)^2 + M_f^2)x + (q^2 + M_g^2)(1-x) = q^2 + 2xq \cdot P + xP^2 + M_f^2x + M_g^2(1-x) , \quad (\text{C.5})$$

y haciendo el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$ , vemos que

$$\begin{aligned} D &= (q^2 - 2xq \cdot P + x^2P^2) + 2x(q \cdot P - xP^2) + xP^2 + M_f^2x + M_g^2(1-x) \\ &= q^2 + M_f^2x + M_g^2(1-x) + x(1-x)P^2 = q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2 , \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

donde se define

$$\mathfrak{M}_{fg}^2 = M_f^2x + M_g^2(1-x) + x(1-x)P^2 . \quad (\text{C.7})$$

Por lo tanto, se encuentra la relación

$$\frac{1}{(q_+^2 + M_f^2)(q_-^2 + M_g^2)} = \int_0^1 \frac{dx}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} . \quad (\text{C.8})$$

## C.2. Parametrización para $[\Delta_{M_f}(k - Q_1)\Delta_{M_f}(k + Q_2)\Delta_{M_f}(k)]^{-1}$

Si ahora se considera el caso para  $n = 3$ , de (C.2) se obtiene

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{2x}{[xyA + x(1-y)B + (1-x)C]^3} . \quad (\text{C.9})$$

Integrales de expresiones de esta forma aparecen en el capítulo 7 en el TFF del pión y de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ , tal que para  $A = \Delta_{M_f}(k_1)$ ,  $B = \Delta_{M_f}(k_2)$ ,  $C = \Delta_{M_f}(k_3)$ , y usando el hecho de que  $k_1 = k - Q_1$ ,  $k_2 = k + Q_2$  y  $k_3 = k$ , se sigue que

$$\frac{1}{\Delta_{M_f}(k_1)\Delta_{M_f}(k_2)\Delta_{M_f}(k_3)} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{2x}{D^3} , \quad (\text{C.10})$$

tal que al desarrollar  $D$  se obtiene

$$\begin{aligned}
D &= xy [(k - Q_1)^2 + M_f^2] + x(1 - y) [(k + Q_2)^2 + M_f^2] + (1 - x) [k^2 + M_f^2] \\
&= xy [k^2 - 2k \cdot Q_1 + Q_1^2 + M_f^2] + x(1 - y) [k^2 + 2k \cdot Q_2 + Q_2^2 + M_f^2] \\
&\quad + (1 - x) [k^2 + M_f^2] \\
&= xy [-2k \cdot Q_1 + Q_1^2] + x(1 - y) [2k \cdot Q_2 + Q_2^2] + k^2 + M_f^2 \\
&= k^2 + M_f^2 + xyQ_1^2 + x(1 - y)Q_2^2 + 2k \cdot (xQ_2 - xyP) \quad ,
\end{aligned} \tag{C.11}$$

donde se usó el hecho de que  $Q_1 + Q_2 = P$ . Haciendo el cambio de variable  $k \rightarrow k - (xQ_2 - xyP)$  se sigue que

$$\begin{aligned}
D &= [k - (xQ_2 - xyP)]^2 + M_f^2 + xyQ_1^2 + x(1 - y)Q_2^2 \\
&\quad + 2 [k - (xQ_2 - xyP)] \cdot (xQ_2 - xyP) \\
&= k^2 - 2k \cdot (xQ_2 - xyP) + (xQ_2 - xyP)^2 + M_f^2 + xyQ_1^2 + x(1 - y)Q_2^2 \\
&\quad + 2k \cdot (xQ_2 - xyP) - 2(xQ_2 - xyP)^2 \\
&= k^2 - (x^2Q_2^2 - 2x^2yQ_2 \cdot P + x^2y^2P^2) + M_f^2 + xyQ_1^2 + x(1 - y)Q_2^2 \quad .
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Ahora, usando las restricciones dinámicas

$$Q_1^2 = Q^2 \quad , \quad Q_2^2 = 0 \quad , \quad 2Q_1 \cdot Q_2 = -(m_\pi^2 + Q^2) \quad , \quad P^2 = -m_\pi^2 \quad , \tag{C.13}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
Q_1 \cdot P &= Q_1 \cdot (Q_1 + Q_2) = Q^2 - \frac{1}{2} (m_\pi^2 + Q^2) = -\frac{1}{2} (m_\pi^2 - Q^2) \quad , \\
Q_2 \cdot P &= Q_2 \cdot (Q_1 + Q_2) = -\frac{1}{2} (m_\pi^2 + Q^2) \quad ,
\end{aligned} \tag{C.14}$$

tal que de (C.12) se obtiene

$$\begin{aligned}
D &= k^2 + M_f^2 + xyQ^2 - x^2y (m_\pi^2 + Q^2) + x^2y^2m_\pi^2 \\
&= k^2 + M_f^2 + xy(1 - x)Q^2 - x^2y(1 - y)m_\pi^2 \\
&= k^2 + \mathcal{M}_f^2 \quad ,
\end{aligned} \tag{C.15}$$

donde se define

$$\mathcal{M}_f^2 = M_f^2 + xy [Q^2(1 - x) - x(1 - y)m_\pi^2] \quad . \tag{C.16}$$

## Apéndice D

# Identidad de Ward-Takahashi

La identidad de Ward-Takahashi (WTI) es muy importante en el estudio de teorías de norma, ya que de alguna forma es la expresión diagramática de la conservación de la carga (carga eléctrica en QED y carga de sabor en QCD) y surge como consecuencia de la invarianza de norma.

### D.1. Deducción de la WTI

Usando el formalismo de integrales de camino que se empleó en los capítulos 3 y 4, el funcional generador para QED en el espacio Euclideo está dado por (3.28), es decir

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}) \exp \left( -S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + \int d^4x [J^\mu(x)A_\mu(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x)] \right) , \quad (\text{D.1})$$

donde  $S$  es la acción definida en (3.29)

$$S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \left( \bar{\psi}(x) [\not{\partial} + m + ie\not{A}] \psi(x) + \frac{1}{2} A_\mu(x) \left[ -\square\delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu\partial_\nu \right] A_\nu(x) \right) . \quad (\text{D.2})$$

Si consideramos la transformación infinitesimal

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) + ie\alpha(x)\psi(x) , \quad (\text{D.3})$$

para que la acción permanezca invariante se necesita que el potencial electromagnético se transforme como

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) , \quad (\text{D.4})$$

de tal forma que (D.3) y (D.4) forman una transformación infinitesimal invariante de norma, lo que hará que la integral de camino no cambie. Entonces, al variar el funcional  $Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]$  y quedarnos a primer orden en  $\alpha(x)$ , se obtiene

$$0 = \delta Z = \left[ ie\alpha(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) + (\partial_\mu\alpha)J_\mu - \frac{1}{\xi}(\partial_\mu A^\mu)\partial^2\alpha \right] Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] , \quad (\text{D.5})$$

tal que realizando la derivada funcional con respecto a  $\alpha(x)$  y usando las relaciones de (3.34) para escribir esto en términos del funcional generador  $\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]$ , obtenemos

$$\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} + ie \left( \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x) + \bar{\psi}(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} \right) + \frac{1}{\xi}\partial^2\partial_\mu A_\mu(x) = 0 . \quad (\text{D.6})$$

Luego, tomando derivadas funcionales con respecto a  $\psi(y)$  y  $\bar{\psi}(z)$  y fijando  $A = \psi = \bar{\psi} = 0$

$$\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)\delta A_\mu(x)} = ie \left[ -\delta^4(x-y)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(x)} + \delta^4(x-z)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)\delta\psi(x)} \right] . \quad (\text{D.7})$$

Esta expresión se puede reescribir en términos del propagador del fermión y del vértice propio fermión-fotón que están dados respectivamente en las ecuaciones (3.38) y (3.46), tal que

$$\partial_\mu e\Gamma_\mu(x; y, z) = ie [\delta^4(x-y)S^{-1}(x-z) - \delta^4(x-z)S^{-1}(x-y)] . \quad (\text{D.8})$$

Pasando al espacio de momentos se obtiene finalmente la identidad de Ward-Takahashi

$$p^\mu\Gamma_\mu(k; p_1, p_2) = i [S^{-1}(p_2) - S^{-1}(p_1)] . \quad (\text{D.9})$$

Por otra parte, si en (D.6) tomamos la derivada funcional con respecto a  $A_\nu(y)$ , y otra vez fijamos  $A = \psi = \bar{\psi} = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(x)\delta A_\nu(y)} \Big|_{\psi=\bar{\psi}=0}^{A=0} + \frac{1}{\xi}\partial^2\partial_\nu\delta^4(x-y) &= 0 , \\ \partial_\mu D_{\mu\nu}^{-1}(x, y) + \frac{1}{\xi}\partial^2\partial_\nu\delta^4(x-y) &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

donde se usó la forma del inverso del propagador del fotón dada en (3.39). Sacando la transformada de Fourier de esto, se obtiene

$$p^\mu \left[ -D_{\mu\nu}^{-1}(p) + \frac{p^2}{\xi}\delta_{\mu\nu} \right] = 0 . \quad (\text{D.11})$$

Por otra parte, recordando de (3.47) que en el espacio de momento el inverso del propagador del fotón se puede escribir en términos del propagador no interactuante y de su autoenergía de la forma

$$D_{\mu\nu}^{-1}(p) = (D_0)_{\mu\nu}^{-1}(p) + \Pi_{\mu\nu}(p) , \quad (\text{D.12})$$

con

$$(D_0)_{\mu\nu}^{-1}(p) = p^2\delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu , \quad (\text{D.13})$$

tenemos entonces que

$$p^\mu (D_0)_{\mu\nu}^{-1}(p) = p^2 p_\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^2 p_\nu = \frac{p^2}{\xi} p_\nu , \quad (\text{D.14})$$

tal que sustituyendo (D.12) y (D.14) en (D.11) obtenemos finalmente la identidad de Ward para la autoenergía del fotón

$$p^\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0 , \quad (\text{D.15})$$

es decir, las correcciones al propagador del fotón son transversas, con lo cual se pueden escribir en términos de una función escalar de la forma

$$\Pi_{\mu\nu}(p^2) = (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \Pi(p^2) . \quad (\text{D.16})$$

## D.2. Identidad de Ward-Takahashi axial

El rompimiento dinámico de simetría en QCD y características fenomenológicas del límite quiral, como que la masa de los bolsones de Goldstone sea cero en dicho límite, se pueden entender por la preservación de la identidad de Ward-Takahashi axial, la cual se debe de ser válida en cualquier truncación de las DSE. En el límite quiral esta identidad toma la forma

$$-iP_\mu \Gamma_{5\mu}(P; p) = S_f^{-1}(p_+) \gamma_5 + \gamma_5 S_g^{-1}(p_-) , \quad (\text{D.17})$$

donde  $\Gamma_{5\mu}(P; p)$  es el vértice del vector axial,  $\gamma_5$  es el vértice pseudoescalar y  $S_f(p)$  es el propagador de quark de sabor  $f$ . La DSE para  $\Gamma_{5\mu}(P; p)$  se escribe como

$$\Gamma_{5\mu}(P; p) = \gamma_5 \gamma_\mu - \frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\nu S_f(q_+) \Gamma_{5\mu}(P; q) S_g(q_-) \gamma_\nu , \quad (\text{D.18})$$

tal que contrayendo con  $-iP_\mu$  y usando la identidad de Ward-Takahashi axial

$$\begin{aligned} S_f^{-1}(p_+) \gamma_5 + \gamma_5 S_g^{-1}(p_-) &= -i\gamma_5 \not{P} \\ &- \frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\nu S_f(q_+) \left[ S_f^{-1}(q_+) \gamma_5 + \gamma_5 S_g^{-1}(q_-) \right] S_g(q_-) \gamma_\nu , \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

de lo cual se sigue

$$S_f^{-1}(p_+) \gamma_5 + \gamma_5 S_g^{-1}(p_-) = -i\gamma_5 \not{P} - \frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\gamma_\nu \gamma_5 S_g(q_-) \gamma_\nu + \gamma_\nu S_f(q_+) \gamma_5 \gamma_\nu] . \quad (\text{D.20})$$

Ahora, dado que  $q_+ = q + P$ ,  $q_- = q$  y  $S_f^{-1}(p) = i\not{p} + M_f$ , obtenemos

$$\begin{aligned} [i\not{q} + i\not{P} + M_f]\gamma_5 + \gamma_5[i\not{q} + M_g] &= -i\gamma_5\not{P} \\ &\quad - \frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \gamma_\nu\gamma_5 \frac{-i\not{q} + M_g}{q^2 + M_g^2} \gamma_\nu \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\nu \frac{-i\not{q}_+ + M_f}{q_+^2 + M_f^2} \gamma_5\gamma_\nu \right] , \end{aligned} \quad (D.21)$$

conmutando  $\gamma_5$  de ambos lados de la ecuación, fácilmente se llega a la relación

$$M_f + M_g = \frac{16\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \left[ \frac{-i\not{q} + M_g}{q^2 + M_g^2} + \frac{i\not{q}_+ + M_f}{q_+^2 + M_f^2} \right] \gamma_\nu . \quad (D.22)$$

Multiplicando (D.22) por  $I_{4 \times 4}$  y sacando la traza sobre los índices de Dirac, y luego multiplicando (D.22) ahora por  $\not{P}$  y sacando la traza, se obtienen respectivamente las ecuaciones

$$M_f + M_g = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{M_f}{q_+^2 + M_f^2} + \frac{M_g}{q^2 + M_g^2} \right] , \quad (D.23)$$

$$0 = W = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{P \cdot q_+}{q_+^2 + M_f^2} - \frac{P \cdot q}{q^2 + M_g^2} \right] . \quad (D.24)$$

En el límite quiral  $P^2 = 0$  se tiene que  $M_f = M_g = M_0$ , con lo cual (D.23) se escribe en este límite de la forma

$$M_0 = \frac{64\pi\alpha_{IR}}{3m_g^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_0}{q^2 + M_0^2} , \quad (D.25)$$

la cual es justamente la ecuación de gap vista en el capítulo 5 para la masa dinámica de un quark. Por otra parte, desarrollando el lado derecho de (D.24)

$$\begin{aligned} 0 = W &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{(q \cdot P + P^2)(q^2 + M_g^2) - q \cdot P(q^2 + 2q \cdot P + P^2 + M_f^2)}{(q_+^2 + M_f^2)(q^2 + M_g^2)} \right] \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{q^2 P^2 + M_g^2 P^2 - q \cdot P(2q \cdot P + P^2 + M_f^2 - M_g^2)}{(q_+^2 + M_f^2)(q^2 + M_g^2)} \right] . \end{aligned} \quad (D.26)$$

Haciendo el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$  y ocupando la parametrización de Feynman de un parámetro vista en el Apéndice C, sin mucho problema se obtiene

$$0 = W = \int_0^1 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{q^2 - 2\frac{(q \cdot P)^2}{P^2} + \mathfrak{M}_{fg}^2}{\left(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2\right)^2} - \frac{(q \cdot P)f(x; P, M_f, M_g)}{\left(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2\right)^2} \right] , \quad (D.27)$$

con  $\mathfrak{M}_{fg}^2 = M_f^2 x + M_g^2 (1 - x) + x(1 - x)P^2$ .

El último término de (D.27) se hace cero como se demuestra en el capítulo 5, tal que al realizar la integral sobre la parte angular se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
 0 = W &= \int_0^1 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^2(1 - 2\cos^2\theta) + \mathfrak{M}_{fg}^2}{\left(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2\right)^2} \\
 &= \int_0^1 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2}{\left(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2\right)^2} .
 \end{aligned} \tag{D.28}$$

Esta ecuación es la identidad Ward-Takahashi axial que se ocupa en los capítulos 5 y 6 cuando se está trabajando con kernels de la DSE y BSE para los mesones pseudoescalares, tal que nos dice que el modelo esta regularizado de tal forma que se evitan divergencias cuadráticas y logarítmicas si y sólo si se satisface esta identidad.

## Apéndice E

# Cálculo de integrales de la regularización por tiempo propio

En los capítulos 5, 6 y 7 de la presente tesis aparecen integrales de la forma

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{f(\mathfrak{M}_{fg}^2, x)}{\left(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2\right)^j}, \quad (\text{E.1})$$

donde  $\mathfrak{M}_{fg}^2 = M_f^2 x + M_g^2(1-x) + x(1-x)P^2$  y  $j = 1, 2, 3$ . Como se verá a continuación, el signo de  $\mathfrak{M}_{fg}^2$  es muy importante al calcular estas integrales, ya que se debe de proceder de una forma u otra si esta función toma valores negativos o no. En el capítulo 5, al momento de obtener la ecuación de gap en la interacción de contacto y regularizar, se encontró la relación

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M^2} = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-2} e^{-\tau M^2} d\tau. \quad (\text{E.2})$$

Con esta idea, se definen las siguientes funciones para  $\mathfrak{M}_{fg}^2 > 0$

$$I_{1p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau, \quad (\text{E.3a})$$

$$I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau, \quad (\text{E.3b})$$

$$I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau, \quad (\text{E.3c})$$

donde el subíndice  $p$  indica justamente que se considera  $\mathfrak{M}_{fg}^2$  positiva. Usando (E.2) se ve claramente que

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} = I_{1p}(\mathfrak{M}_{fg}^2). \quad (\text{E.4})$$

Luego, notando que

$$\frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial \mathfrak{M}_{fg}^2} \left( \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} \right), \quad (\text{E.5a})$$

$$\frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial (\mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \left( \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} \right), \quad (\text{E.5b})$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} &= -\frac{\partial}{\partial \mathfrak{M}_{fg}^2} I_1(\mathfrak{M}_{fg}^2) \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{M}_{fg}^2} \left[ \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial (\mathfrak{M}_{fg}^2)^2} I_1(\mathfrak{M}_{fg}^2) \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial (\mathfrak{M}_{fg}^2)^2} \left[ \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau \right] \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

con lo cual

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2} = I_{1p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau, \quad (\text{E.8a})$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^2} = I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau, \quad (\text{E.8b})$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}_{fg}^2)^3} = I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau. \quad (\text{E.8c})$$

Para dar una forma más sencilla de como calcular estas integrales, notemos que

$$I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{e^{-\tau_{UV}^2 \mathfrak{M}_{fg}^2} - e^{-\tau_{IR}^2 \mathfrak{M}_{fg}^2}}{2 \cdot \mathfrak{M}_{fg}^2} \right]. \quad (\text{E.9})$$

Luego, introduciendo la siguiente forma de la función integral exponencial

$$E_i(u) = - \int_{-u}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{\infty}^{-u} \frac{e^{-t}}{t} dt , \quad (\text{E.10})$$

que está definida para valores negativos de  $u$ , notamos que

$$\begin{aligned} \int_{1/\Lambda_{UV}^2}^{1/\Lambda_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau} d\tau &= \int_{\infty}^{1/\Lambda_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau} d\tau + \int_{1/\Lambda_{UV}^2}^{\infty} \tau^{-1} e^{-\tau} d\tau \\ &= \int_{\infty}^{1/\Lambda_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau} d\tau - \int_{\infty}^{1/\Lambda_{UV}^2} \tau^{-1} e^{-\tau} d\tau \\ &= E_i(-1/\Lambda_{IR}^2) - E_i(-1/\Lambda_{UV}^2) , \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

tal que haciendo el cambio de variable  $\tau \rightarrow \tau \mathfrak{M}_{fg}^2$  se obtiene

$$\begin{aligned} I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{1/\Lambda_{UV}^2}^{1/\Lambda_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2}^{\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{16\pi^2} [E_i(-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2) - E_i(-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2)] . \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Por otro lado, dado que integrando por partes se obtiene la relación

$$\int \frac{e^{cx}}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left[ -\frac{e^{cx}}{x^{n-1}} + c \int \frac{e^{cx}}{x^{n-1}} dx \right] , \quad \text{para } n \neq 1 , \quad (\text{E.13})$$

vemos que

$$\begin{aligned} I_{1p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{1/\Lambda_{UV}^2}^{1/\Lambda_{IR}^2} \tau^{-2} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ -\tau^{-1} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} \Big|_{1/\Lambda_{UV}^2}^{1/\Lambda_{IR}^2} - \mathfrak{M}_{fg}^2 \int_{1/\Lambda_{UV}^2}^{1/\Lambda_{IR}^2} \tau^{-1} e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau \right] , \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

tal que usando (E.12) se llega a que

$$I_{1p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \Lambda_{UV}^2 e^{-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2} - \Lambda_{IR}^2 e^{-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2} - \mathfrak{M}_{fg}^2 I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) \right] . \quad (\text{E.15})$$

Resumiendo todo lo anterior, integrales de la forma de (E.1) para  $\mathfrak{M}_{fg}^2 > 0$  se calculan como

$$I_{1p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \Lambda_{UV}^2 e^{-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2} - \Lambda_{IR}^2 e^{-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2} - \mathfrak{M}_{fg}^2 I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) \right] , \quad (\text{E.16a})$$

$$I_{2p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ E_i(-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2) - E_i(-\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2) \right] , \quad (\text{E.16b})$$

$$I_{3p}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{e^{-\tau_{UV}^2 \mathfrak{M}_{fg}^2} - e^{-\tau_{IR}^2 \mathfrak{M}_{fg}^2}}{2 \cdot \mathfrak{M}_{fg}^2} \right] . \quad (\text{E.16c})$$

Por otra parte, como ya se mencionó anteriormente que la función integral exponencial dada en (E.10) solo está definida para argumentos negativos, para  $\mathfrak{M}_{fg}^2 < 0$  se definen las siguientes funciones

$$I_{1n}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-2} e^{\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau , \quad (\text{E.17a})$$

$$I_{2n}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} \tau^{-1} e^{\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau , \quad (\text{E.17b})$$

$$I_{3n}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{16\pi^2} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} e^{\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau , \quad (\text{E.17c})$$

donde el subíndice  $n$  indica que en este caso se está considerando explícitamente que  $\mathfrak{M}_{fg}^2$  es negativa. Entonces, cambiando el signo de  $\mathfrak{M}_{fg}^2$  en (E.16), las integrales  $I_{jn}^{fg}$  se escriben en términos de funciones integral exponencial y exponencial de la forma

$$I_{1n}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \Lambda_{UV}^2 e^{\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2} - \Lambda_{IR}^2 e^{\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2} + \mathfrak{M}_{fg}^2 I_{2n}(\mathfrak{M}_{fg}^2) \right] , \quad (\text{E.18a})$$

$$I_{2n}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ E_i(\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{IR}^2) - E_i(\mathfrak{M}_{fg}^2/\Lambda_{UV}^2) \right] , \quad (\text{E.18b})$$

$$I_{3n}(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{e^{\tau_{IR}^2 \mathfrak{M}_{fg}^2} - e^{\tau_{UV}^2 \mathfrak{M}_{fg}^2}}{2 \cdot \mathfrak{M}_{fg}^2} \right] . \quad (\text{E.18c})$$

Por último, de (E.8c) vemos que esta integral no necesariamente se debe de regular ya que no diverge, con lo cual se definen la nueva función

$$I_3(\mathfrak{M}_{fg}^2) = \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty e^{-\tau \mathfrak{M}_{fg}^2} d\tau = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{1}{2\mathfrak{M}_{fg}^2} \right) . \quad (\text{E.19})$$

## Apéndice F

# Cálculo de trazas del kernel de la anomalía no abeliana

En la BSA para los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  obtenida en el capítulo 6 aparecen dos trazas sobre los índices de color, sabor y espinor que se deben de calcular para dar la forma explícita del kernel de la contribución de la anomalía no abeliana  $K_A$ . Como cada una de estas trazas se divide a su vez en varias trazas sobre los índices de Dirac, el cálculo no es tan directo y por ello en este Apéndice se desarrollarán los cálculos de manera explícita.

### F.1. Cálculo de $Tr [\mathcal{Z}\gamma_5\chi_{\eta,\eta'}]$

Al sacar la traza sobre los índices de color simplemente se obtiene el factor  $N_c$ , mientras que para los índices de sabor se separan  $\mathcal{Z}$  y  $\chi_{\eta,\eta'}(P; q)$  en sus componentes usando (6.11) y (6.5) respectivamente, tal que

$$Tr [\mathcal{Z}\gamma_5\chi_{\eta,\eta'}(P; q)] = N_c Tr_D \left[ 2\gamma_5 S_l(q_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; q) S_l(q_-) + \sqrt{2}\mathcal{V}_A \gamma_5 S_s(q_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^s(P; q) S_s(q_-) \right]. \quad (\text{F.1})$$

De la forma general que obtiene en nuestro modelo la BSA para mesones pseudoescalares dada en (5.25), las trazas sobre los índices de Dirac de (F.1) se calculan como

$$\begin{aligned} Tr_D \left[ \gamma_5 S_f(q_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^f(P; q) S_f(q_-) \right] &= Tr_D \left[ \gamma_5 S_f(q_+) \gamma_5 S_f(q_-) \right] iE_{\eta,\eta'}^f(P) \\ &+ Tr_D \left[ \gamma_5 S_f(q_+) \gamma_5 \not{P} S_f(q_-) \right] \frac{F_{\eta,\eta'}^f(P)}{M_f}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Luego, definiendo

$$T^{fEE}(P; q) = Tr_D \left[ \gamma_5 S_f(q_+) \gamma_5 S_f(q_-) \right], \quad (\text{F.3a})$$

$$iT^{fEF}(P; q) = Tr_D \left[ \gamma_5 S_f(q_+) \gamma_5 \not{P} S_f(q_-) \right], \quad (\text{F.3b})$$

la ecuación (F.2) se reescribe como

$$\begin{aligned} Tr_D \left[ \gamma_5 S_f(q_+) \Gamma_{\eta, \eta'}^f(q; P) S_f(q_-) \right] &= \left[ T^{fEE} \right] i E_{\eta, \eta'}^f(P) + \left[ iT^{fEF} \right] \frac{F_{\eta, \eta'}^f(P)}{M_f} \\ &= i \left[ T^{fEE} E_{\eta, \eta'}^f(P) + T^{fEF} \frac{F_{\eta, \eta'}^f(P)}{M_f} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

y entonces, usando esto en (F.1), se llega a que

$$\begin{aligned} Tr \left[ \mathcal{Z} \gamma_5 \chi_{\eta, \eta'}(P; q) \right] &= i N_c \left[ 2 \left( T^{lEE} E_{\eta, \eta'}^l(P) + T^{lEF} \frac{F_{\eta, \eta'}^l(P)}{M_l} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} \mathcal{V}_A \left( T^{sEE} E_{\eta, \eta'}^s(P) + T^{sEF} \frac{F_{\eta, \eta'}^s(P)}{M_s} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Definiendo

$$b^l = 2, \quad b^s = \sqrt{2} \mathcal{V}_A, \quad (\text{F.6a})$$

$$d^{fE} = 1, \quad d^{fF} = \frac{1}{M_f}, \quad (\text{F.6b})$$

$$A_{\eta, \eta'}^{fE} = E_{\eta, \eta'}^f, \quad A_{\eta, \eta'}^{fF} = F_{\eta, \eta'}^f, \quad (\text{F.6c})$$

vemos que la traza de (F.1) toma finalmente la forma

$$Tr \left[ \mathcal{Z} \gamma_5 \chi_{\eta, \eta'}(P; q) \right] = i N_c \sum_{f=l, s} \sum_{I=E, F} b^f d^{fI} T^{fEI}(P; q) A_{\eta, \eta'}^{fI}(P). \quad (\text{F.7})$$

Por otra parte, para calcular explícitamente las trazas  $T^{fEI}$  de (F.3) se procede de manera parecida a como se hizo con el kernel  $K_{PS}$  del capítulo 5, es decir, se hace el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$  y se usa la parametrización de Feynman vista en la primera sección del Apéndice C, tal que

$$\begin{aligned} T^{fEE} &= Tr_D \left[ \gamma_5 S_f(q_+) \gamma_5 S_f(q_-) \right] \\ &= Tr_D \left[ \gamma_5 \left( \frac{-i \not{q}_+ + M_f}{q_+^2 + M_f^2} \right) \gamma_5 \left( \frac{-i \not{q}_- + M_f}{q_-^2 + M_f^2} \right) \right] \Bigg|_{q \rightarrow q - xP} \\ &= 4 \left[ \frac{q^2 - x(1-x)P^2 + M_f^2 + (q \cdot P)(1-2x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

$$\begin{aligned}
T^{fEF} &= -iTr_D [\gamma_5 S_f(q_+) \gamma_5 \not{P} S_f(q_-)] \\
&= -iTr_D \left[ \gamma_5 \left( \frac{-i\not{q}_+ + M_f}{q_+^2 + M_f^2} \right) \gamma_5 \not{P} \left( \frac{-i\not{q}_- + M_f}{q_-^2 + M_f^2} \right) \right] \Big|_{q \rightarrow q-xP} \\
&= \frac{4M_f P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} ,
\end{aligned} \tag{F.9}$$

donde

$$\mathfrak{M}_f^2 = \mathfrak{M}_{fg}^2|_{f=g} = xM_f^2 + (1-x)M_f^2 + x(1-x)P^2 = M_f^2 + x(1-x)P^2 . \tag{F.10}$$

## F.2. Cálculo de $Tr [\mathcal{Z}\gamma_5 \not{P}\chi_{\eta,\eta'}]$

Procediendo de manera similar a como se hizo en la sección anterior, al sacar la traza sobre los índices de color y sabor se sigue que

$$\begin{aligned}
Tr [\mathcal{Z}\gamma_5 \not{P}\chi_{\eta,\eta'}(P; q)] &= N_c Tr_D \left[ 2\gamma_5 \not{P} S_l(q_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^l(P; q) S_l(q_-) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2}\mathcal{V}_A \gamma_5 \not{P} S_s(q_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^s(P; q) S_s(q_-) \right] .
\end{aligned} \tag{F.11}$$

Luego, usando la forma de la BSA para los mesones pseudoescalares de (5.25), se obtiene

$$\begin{aligned}
Tr_D [\gamma_5 \not{P} S_f(q_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^f(q; P) S_f(q_-)] &= Tr_D [\gamma_5 \not{P} S_f(q_+) \gamma_5 S_f(q_-)] iE_{\eta,\eta'}^f(P) \\
&\quad + Tr_D [\gamma_5 \not{P} S_f(q_+) \gamma_5 \not{P} S_f(q_-)] \frac{F_{\eta,\eta'}^f(P)}{M_f} .
\end{aligned} \tag{F.12}$$

Entonces, definiendo

$$-iT^{fFE} = Tr_D [\gamma_5 \not{P} S_f(q_+) \gamma_5 S_f(q_-)] , \tag{F.13a}$$

$$T^{fFF} = Tr_D [\gamma_5 \not{P} S_f(q_+) \gamma_5 \not{P} S_f(q_-)] , \tag{F.13b}$$

la última ecuación se reescribe como

$$\begin{aligned}
Tr_D [\gamma_5 \not{P} S_f(q_+) \Gamma_{\eta,\eta'}^f(P; q) S_f(q_-)] &= [-iT^{fFE}] iE_{\eta,\eta'}^f(P) + [T^{fFF}] \frac{F_{\eta,\eta'}^f(P)}{M_f} \\
&= \left[ T^{fFE} E_{\eta,\eta'}^f(P) + T^{fFF} \frac{F_{\eta,\eta'}^f(P)}{M_f} \right] .
\end{aligned} \tag{F.14}$$

Finalmente, usando (F.14), la traza de (F.11) toma la forma

$$\begin{aligned} Tr [\mathcal{Z}\gamma_5 \not{P}\chi_{\eta,\eta'}(P; q)] &= N_c \left[ 2 \left( T^{lFE} E_{\eta,\eta'}^l(P) + T^{lFF} \frac{F_{\eta,\eta'}^l(P)}{M_l} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}\mathcal{V}_A \left( T^{sFE} E_{\eta,\eta'}^s(P) + T^{sFF} \frac{F_{\eta,\eta'}^s(P)}{M_s} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

lo que se reescribe usando las funciones de (F.6) como

$$Tr [\mathcal{Z}\gamma_5 \not{P}\chi_{\eta,\eta'}(P; q)] = N_c \sum_{f=l,s} \sum_{I=E,F} b^f d^{fI} T^{fFI}(P; q) A_{\eta,\eta'}^{fI}(P), \quad (\text{F.16})$$

donde explícitamente las trazas  $T^{fFI}$  de (F.13) toman la forma

$$\begin{aligned} T^{fFE} &= iTr_D [\gamma_5 \not{P}S_f(q_+) \gamma_5 S_f(q_-)] \\ &= iTr_D \left[ \gamma_5 \not{P} \left( \frac{-i\not{q}_+ + M_f}{q_+^2 + M_f^2} \right) \gamma_5 \left( \frac{-i\not{q}_- + M_f}{q_-^2 + M_f^2} \right) \right] \Big|_{q \rightarrow q-xP} \\ &= \frac{4M_f P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2}, \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

$$\begin{aligned} T^{fFF} &= Tr_D [\gamma_5 \not{P}S_f(q_+) \gamma_5 \not{P}S_f(q_-)] \\ &= -iTr_D \left[ \gamma_5 \not{P} \left( \frac{-i\not{q}_+ + M_f}{q_+^2 + M_f^2} \right) \gamma_5 \not{P} \left( \frac{-i\not{q}_- + M_f}{q_-^2 + M_f^2} \right) \right] \Big|_{q \rightarrow q-xP} \\ &= -4P^2 \left[ \frac{-\frac{1}{2}q^2 + M_f^2 - x(1-x)P^2 + (q \cdot P)(1-2x)}{(q^2 + \mathfrak{M}_f^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

# Bibliografía

- [1] V. Crede y C. A. Meyer, Prog. Part. Nucl. Phys. **63**, 74-116 (2009).
- [2] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343-1346 (1973).
- [3] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346-1349 (1973).
- [4] R. Brock *et al.* [CTEQ], Rev. Mod. Phys. **67**, 157-248 (1995).
- [5] T. P. Cheng and L. F. Li, Gauge Theory of Elementary Particles Physics (Oxford University Press, 1984).
- [6] M. C. Bañuls and K. Cichy, Rep. Prog. Phys. **83**, no.2, 024401 (2020).
- [7] P. Maris and C. D. Roberts, Int. J. Mod. Phys. E **12**, 297-365 (2003).
- [8] A. Krassnigg y C. D. Roberts, Nucl. Phys. A **737**, 7-15 (2004).
- [9] C. D. Roberts and S. M. Schmidt, Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, S1-S103 (2000).
- [10] P. Maris and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **56**, 3369-3383 (1997).
- [11] H. J. Munczek, Phys. Rev. D **52**, 4736-4740 (1995).
- [12] S. x. Qin, L. Chang, Y. x. Liu, C. D. Roberts and D. J. Wilson, Phys. Rev. C **85**, 035202 (2012).
- [13] D. Binosi, L. Chang, J. Papavassiliou, S. X. Qin and C. D. Roberts, Phys. Rev. D **93**, no.9, 096010 (2016).
- [14] L. X. Gutierrez-Guerrero, A. Bashir, I. C. Cloet and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **81**, 065202 (2010).
- [15] A. Bashir, L. Chang, I. C. Cloet, B. El-Bennich, Y. X. Liu, C. D. Roberts and P. C. Tandy, Commun. Theor. Phys. **58**, 79-134 (2012).
- [16] C. D. Roberts and A. G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477-575 (1994).
- [17] G. Krein, C. D. Roberts and A. G. Williams, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 5607-5624 (1992).
- [18] D. Ebert, T. Feldmann and H. Reinhardt, Phys. Lett. B **388**, 154-160 (1996).

- [19] C. D. Roberts, Prog. Part. Nucl. Phys. **61**, 50-65 (2008).
- [20] H. L. L. Roberts, C. D. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **82**, 065202 (2010).
- [21] H. L. L. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero, C. D. Roberts and D. J. Wilson, Phys. Rev. C **83**, 065206 (2011).
- [22] D. J. Wilson, I. C. Cloet, L. Chang and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **85**, 025205 (2012).
- [23] C. Chen, L. Chang, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, S. Wan and D. J. Wilson, Phys. Rev. C **87**, 045207 (2013).
- [24] C. Chen, L. Chang, C. D. Roberts, S. Wan and D. J. Wilson, Few Body Syst. **53**, 293-326 (2012).
- [25] M. A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez and A. Bashir, Phys. Rev. D **92**, no.5, 054031 (2015).
- [26] M. S. Bhagwat, L. Chang, Y. X. Liu, C. D. Roberts and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **76**, 045203 (2007).
- [27] M. Ding, K. Raya, A. Bashir, D. Binosi, L. Chang, M. Chen and C. D. Roberts, Phys. Rev. D **99**, no.1, 014014 (2019).
- [28] A. Holl, A. Krassnigg, C. D. Roberts and S. V. Wright, Int. J. Mod. Phys. A **20**, 1778-1784 (2005).
- [29] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], Phys. Rev. D **98**, no.3, 030001 (2018).
- [30] T. Feldmann, P. Kroll and B. Stech, Phys. Rev. D **58**, 114006 (1998).
- [31] T. Feldmann, P. Kroll and B. Stech, Phys. Lett. B **449**, 339-346 (1999).
- [32] M. Benayoun, L. DelBuono and H. B. O'Connell, Eur. Phys. J. C **17**, 593-610 (2000).
- [33] F. De Fazio and M. R. Pennington, JHEP **07**, 051 (2000).
- [34] D. Griffiths, Introduction to Elementary Particles (WILEY-VCH, 2008).
- [35] H. Yukawa, Rev. Mod. Phys. **21**, 474 (1949).
- [36] R. E. Marshak and H. A. Bethe, Phys. Rev. **72**, 506 (1947).
- [37] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini and C. F. Powell, Nature **159**, 694-697 (1947).
- [38] G. D. Rochester and C. C. Butler, Nature **160**, 855-857 (1947).
- [39] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067-1084 (1962).

- [40] V. E. Barnes *et al.*, Phys. Rev. Lett. **12**, 204-206 (1964).
- [41] O. W. Greenberg, Ame. J. Phys. **50**, 1074 (1982).
- [42] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, 598-602 (1964).
- [43] D. B. Lichtenberg, Unitary Symmetry and Elementary Particles (Academic Press, 1978).
- [44] S. Abel, Class notes on “Anomalies”, Durham University, [https://www.maths.dur.ac.uk/dma0saa/lecture\\_notes.pdf](https://www.maths.dur.ac.uk/dma0saa/lecture_notes.pdf).
- [45] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345-358 (1961).
- [46] J. Goldstone, Il Nuovo Cimento **19**, 154-164 (1961).
- [47] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965-970 (1962).
- [48] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736-1755, (1949).
- [49] J. S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452-455, (1951).
- [50] J. S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 455-459, (1951).
- [51] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory (Addison-Wesley, 1995).
- [52] V. P. Nair, Quantum Field Theory A Modern Perspective (Springer, 2005).
- [53] R. J. Rivers, Path Integral Methods in Quantum Field Theory (Cambridge University Press, 1987).
- [54] C. Itzykson and J. B. Zuber, Quantum Field Theory (McGraw-Hill, 1980).
- [55] F. E. Serna, “Dressed Perturbation Theory for the Quark Propagator”, Universidade Estadual Paulista Master Dissertation, 2013.
- [56] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Field (McGraw-Hill, 1965).
- [57] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, An Introduction to the Standar Model of Particle Physics (Cambridge University Press, 2007).
- [58] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25**, 29-30 (1967).
- [59] F. E. Serna, “Symmetry-preserving contact interaction model for hadron structure and quark matter”, Universidade Estadual Paulista PhD Thesis, 2017.
- [60] M. A. Pichowsky, S. Walawalkar and S. Capstick, Phys. Rev. D **60**, 054030 (1999).
- [61] P. Maris and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **60**, 055214 (1999).
- [62] S. x. Qin, L. Chang, Y. x. Liu, C. D. Roberts and D. J. Wilson, Phys. Rev. C **84**, 042202 (2011).

- [63] P. Maris and P. C. Tandy, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **161**, 136-152 (2006).
- [64] A. C. Aguilar, D. Binosi, J. Papavassiliou and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D **80**, 085018 (2009).
- [65] S. J. Brodsky and G. F. de Teramond, Acta Phys. Polon. B **41**, 2605-2643 (2010).
- [66] A. C. Aguilar, D. Binosi and J. Papavassiliou, JHEP **07**, 002 (2010).
- [67] O. Oliveira and P. Bicudo, J. Phys. G **38**, 045003 (2011).
- [68] P. Boucaud, M. E. Gomez, J. P. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, O. Pene and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D **82**, 054007 (2010).
- [69] M. R. Pennington and D. J. Wilson, Phys. Rev. D **84**, 119901 (2011).
- [70] A. Bender, C. D. Roberts and L. Von Smekal, Phys. Lett. B **380**, 7-12 (1996).
- [71] B. A. Lippmann and J. Schwinger, Phys. Rev. **79**, 469-480 (1950).
- [72] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232-1242 (1951).
- [73] Y. Nambu, Prog. Theor. Phys. **5**, 614-633 (1950).
- [74] A. Krassnigg, Class notes on “Hands-On Quantum Field Theory”, Universität Graz, <https://vdocuments.site/hands-on-quantum-field-theory-hands-on-quantum-field-theory-univ-prof-mag-dr.html>.
- [75] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **43**, 1-81 (1969).
- [76] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction (CRC Press, 2013).
- [77] K. Raya, L. Chang, A. Bashir, J. J. Cobos-Martinez, L. X. Gutiérrez-Guerrero, C. D. Roberts and P. C. Tandy, Phys. Rev. D **93**, no.7, 074017 (2016).
- [78] T. Weigand, Class notes on “Quantum Field Theory I ”, Heidelberg University, <https://www.thphys.uni-heidelberg.de/courses/weigand/QFT1-12-13.pdf>.
- [79] K. Kannike, “NOTES ON FEYNMAN PARAMETRIZATION AND THE DIRAC DELTA FUNCTION”, University of Notre Dame 2013, [http://kodu.ut.ee/~kkannike/english/science/physics/notes/feynman\\_param.pdf](http://kodu.ut.ee/~kkannike/english/science/physics/notes/feynman_param.pdf).
- [80] C. McNeile, A. Bazavov, C. T. H. Davies, R. J. Dowdall, K. Hornbostel, G. P. Lepage and H. D. Trottier, Phys. Rev. D **87**, no.3, 034503 (2013).
- [81] C. T. H. Davies *et al.* [HPQCD], Phys. Rev. D **100**, no.3, 034506 (2019).
- [82] M. Jamin, Phys. Lett. B **538**, 71-76 (2002).
- [83] P. Maris and P. C. Tandy, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **161**, 136-152 (2006).

- [84] S. Eidelman *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. B **592**, no.1-4, 1-5 (2004).
- [85] J. P. Lees *et al.* [BaBar], Phys. Rev. D **98**, no.11, 112002 (2018).
- [86] I. Babiarz, W. Schäfer and A. Szczurek, "Production of  $\eta_c(1S, 2S)$  in  $e^+e^-$  and  $pp$  collisions', 'PoS **ICHEP2020**, 449 (2021).
- [87] S. S. Agaev, V. M. Braun, N. Offen, F. A. Porkert and A. Schäfer, Phys. Rev. D **90**, no.7, 074019 (2014).
- [88] K. Raya, M. A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez and A. Bashir, Few Body Syst. **59**, no.6, 133 (2018).
- [89] G. Kopp, T. F. Walsh, and P. M. Zerwas, Nucl. Phys. B **70**, 461 (1974).
- [90] S. M. Berman and D. A. Geffen, Il Nuovo Cimento **18**, 1192-1202 (1960).
- [91] P. Kroll, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 219-220, 2 (2011).
- [92] L. G. Landsberg, Phys. Rep. **128**, 301-376 (1985).
- [93] A. E. Dorokhov, M. A. Ivanov and S. G. Kovalenko, Phys. Lett. B **677**, 145-149 (2009).
- [94] B. I. Young, Phys. Rev. **161**, 1620-1630 (1967).
- [95] P. A. Zyla *et al.* (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 083C01 (2020).