

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Congruencias geodésicas y tétradas nulas en
el espacio-tiempo de Ernst**

Tesis que presenta

Oscar Jaime Michelin Galindo Uriarte

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Directora de tesis: **Dra. Nora Eva Bretón Báez**

Ciudad de México

Abril, 2021

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

A mi mentora la Dra. Nora Eva Bretón Báez, le agradezco de manera infinita que nunca dejó de apoyarme, la confianza que me ha tenido y sobre todo la paciencia incalculable que mantuvo conmigo. Me brindó un gran conocimiento y sobre todo su amistad. Por esto y más siempre se encontrara en el palacio de mis recuerdos.

A mis sinodales: Dr. Luis Alberto López Suárez y Dr. Josué De Santiago Sanabria, por su amabilidad al aceptar evaluarme y brindarme correcciones adecuadas acerca de mi trabajo.

A mis compañeros de carrera, estoy feliz de haberlos conocido, son maravillosas personas con los cuales tuve unas exquisitas charlas y pase buenos momentos.

También agradezco el apoyo económico del CONACyT a través de la beca de Maestría con número de apoyo 735595.

Resumen

En este trabajo presentamos el análisis geodésico y de congruencias, tanto temporales como nulas, del espacio-tiempo de Ernst que representa un agujero negro estático inmerso en un campo magnético/eléctrico uniforme. Entre los principales resultados que se encuentran es que la presencia del campo electromagnético confina las partículas dentro de un potencial, haciendo que éstas precesen (órbitas estables) entre un radio máximo y mínimo. Por otra parte, la introducción del campo uniforme rompe la simetría esférica que se tiene en la métrica de Schwarzschild, haciendo que se pierda una constante de movimiento para las partículas de prueba y las geodésicas, por lo que no se pueden integrar de manera exacta. En particular, hemos analizado geodésicas en el plano ecuatorial para partículas con y sin masa. Las partículas masivas pueden o no estar cargadas haciendo que la interacción con el campo sea diferente en cada caso, dando lugar a diferentes tipos de trayectorias. En el caso de partículas sin masa, el campo interactúa puramente a través de la curvatura del espacio, sin distinción entre campo magnético o eléctrico. El análisis de los escalares ópticos lo realizamos tomando en cuenta en que son independientes de la cuadrivelocidad particular mediante la que se generan. Notamos que la presencia del campo electromagnético uniforme genera el efecto de distorsión (shear) en las congruencias nulas. En las congruencias temporaloides genera una discontinuidad irremovible a partir de la cual la distorsión se vuelve imaginaria. La expansión también se ve afectada, aumentando o disminuyendo proporcionalmente a la magnitud del campo electromagnético.

Abstract

In this work we present the analysis of the timelike and null geodesics and congruences corresponding to the Ernst spacetime, that represents a static black hole immersed in an external uniform electric or magnetic field. Among the main results are that the presence of the electromagnetic field has a confining effect, that can be seen from the effective potential, that presents maxima and minima, that correspond to unstable and stable orbits, respectively; as well as bound orbits precessing between maxima and minima. The inclusion of the uniform electromagnetic field breaks the spherical symmetry of the Schwarzschild black hole, resulting then in one movement constant less, implying this that geodesics are not integrable. In particular, we have analyzed geodesics in the equatorial plane for massive and massless particles. Massive particles may or may not be charged, making the interaction with the field different in each case, giving rise to different types of trajectories. In the case of massless particles, the field interacts purely through the curvature of space, without distinction between magnetic or electric field. The analysis of the optical scalars is carried out taking into account that they are independent of the particular four-velocity from which they are generated. We note that the presence of the uniform electromagnetic field generates the distortion effect (shear) in the null congruences. In the timelike congruences the presence of the electromagnetic field generates an irremovable discontinuity and for larger radius the distortion becomes imaginary. The expansion increases or decreases in proportion to the magnitude of the electromagnetic field.

Índice general

Introducción	1
1. Dinámica en relatividad general	3
1.1. Introducción	3
1.2. Geodésica	3
1.3. Ecuación geodésica	3
1.4. Congruencias Geodésicas	4
1.5. Congruencias Geodésicas temporaloides	5
1.6. Curvatura	6
1.7. Ecuación de Desviación Geodésica	8
1.8. Escalares ópticos	10
1.9. Congruencias Geodésicas Nulas o luxoides	12
1.10. Formalismo de Newman-Penrose	15
1.10.1. Tétradas Complejas Nulas	15
1.10.2. Escalares de Newman-Penrose o Coeficientes de Espín	16
1.10.3. Escalares Weyl	16
1.10.4. Escalares de Ricci	17
2. Geodésicas en el espacio-tiempo de Ernst	19
2.1. Métrica de Ernst	19
2.2. Unidades adimensionales	20
2.3. Partículas cargadas en un campo magnético de Ernst	20
2.3.1. Ecuaciones de movimiento	21
2.3.2. Potencial efectivo	22
2.3.3. Órbitas internas más estables	23
2.3.4. Potencial efectivo magnético	24
2.4. Geodésicas fuera del plano ecuatorial	26
2.5. Partículas cargadas en un campo eléctrico de Ernst	32
2.5.1. Ecuaciones de movimiento	32
2.5.2. Potencial efectivo eléctrico	33
2.6. Partículas sin masa en un campo de Ernst	37
2.6.1. Ecuaciones de movimiento	37
2.7. Tensor de energía momento	39
2.8. Condiciones de Energía	40

2.8.1. Condición de Energía Débil	41
2.8.2. Condición de Energía Dominante	41
2.8.3. Condición de Energía Fuerte	42
3. Congruencias en el espacio tiempo de Ernst	43
3.1. Introducción	43
3.2. Congruencias geodésicas temporales	43
3.2.1. Cálculo de cuatriveLOCIDADES temporaloides	43
3.2.2. Forma 1100 Ernst temporaloides	45
3.2.3. CuatriveLOCIDAD temporal de la forma 1110	47
3.2.4. Teorema de Enfoque	49
3.3. Congruencias Nulas en la métrica de Ernst	50
3.3.1. Formas n^μ 1100 y ℓ^μ 1100	51
3.3.2. Escalar de Kretschmann	53
3.4. Tétradas Complejas Nulas	53
3.4.1. Coeficientes de Espín.	54
3.4.2. Escalares de Weyl	54
3.4.3. Escalares de Ricci	55
3.4.4. Escalares Ópticos	55
3.4.5. Ecuaciones de Sachs	55
4. Conclusiones	57
A. Código Maple (GRTensor III)	61
A.1. Congruencias Temporaloides	62
A.2. Congruencias Nulas	62
Bibliografía	64

Introducción

La detección de ondas gravitacionales en 2015, por parte de Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) [1], consistente en una señal de onda gravitacional emitida como resultado de la fusión de dos agujeros negros ha dado lugar a un consenso sobre la existencia de dichos objetos compactos. Por otra parte, la observación de la sombra de un agujero negro (anillo asimétrico brillante que rodea un centro oscuro) por la colaboración del Event Horizon Telescope (EHT) [2–7], ha sido otra evidencia de que dichos objetos muy compactos, existen y la explicación más sencilla de las observaciones es que se trata de agujeros negros en el centro de las galaxias [observación de la "fotografía" del agujero negro en el centro de galaxia M87]. El reciente premio Nobel del año pasado (2020), va en la dirección de reconocer la importancia de estos hechos. En particular las observaciones de las órbitas de las estrellas cercanas al centro de nuestra galaxia; estas órbitas observadas encuentran su contraparte teórica en las geodésicas alrededor de un centro masivo, calculadas usando relatividad general.

Por esas razones nos hemos propuesto estudiar las geodésicas en la vecindad de un agujero negro. Como se sabe la mayoría de las galaxias alojan en su centro agujeros negros supermasivos (10^{6-9} masas solares) y están permeadas por campos magnéticos, cuyo origen aún está en debate. También la mayoría de los objetos compactos observados como estrellas de neutrones, están acompañadas por campos magnéticos de fondo. Nuestro estudio se centra en un agujero negro inmerso en un campo magnético; además de estudiar las geodésicas, también son importantes los llamados escalares ópticos que se refieren a la evolución de un conjunto de geodésicas llamadas congruencias. Las congruencias pueden ser temporales o luxoides, y nos pueden proveer de información que no se encuentra mediante el estudio de las geodésicas.

En esta tesis, analizaremos aspectos teóricos de las geodésicas en el espacio tiempo de Ernst, que describe un agujero negro de Schwarzschild inmerso en un campo de fondo uniforme eléctrico o magnético. El capítulo 1, estará dedicado a dar un breve repaso de los conceptos clave que usaremos a través de la presente tesis. Daremos la definición de geodésica y de congruencias geodésicas, haciendo distinción entre nulas y temporales. El capítulo 2, muestra las ecuaciones de movimiento, derivadas del Hamiltoniano o del Lagrangiano, equivalentemente. Se muestran las gráficas obtenidas a diferentes planos en los distintos campos de Ernst. En el capítulo 3 investigamos la expansión, distorsión (shear) y rotación (twist) de las congruencias en el espaciotiempo de Ernst a partir del formalismo de Newman-Penrose. Finalmente, en el capítulo

4, concluimos la tesis resumiendo el desarrollo que se obtuvo capítulo a capítulo y los resultamos a los que llegamos.

Notaciones y convenciones

A lo largo del presente texto, adoptamos la convención de suma de Einstein para índices repetidos. Los índices de espacio-tiempo se indican con letras griegas (α, β, \dots) y van de 0 a 4; los índices para la parte espacial se denotan con letras latinas (i, j, \dots) y van de 1 a 3. Usamos unidades naturales donde la velocidad de la luz y la constante de gravitación universal normalizadas a uno.

Capítulo 1

Dinámica en relatividad general

1.1. Introducción

El espacio-tiempo es el modelo de la relatividad general que combina espacio y tiempo como un continuo; para poder describirlo se usa geometría diferencial de variedades pseudo-Riemmanianas. Este capítulo está dedicado a resumir los elementos de la teoría de la relatividad general que son importantes para el desarrollo de la presente tesis. Un tratamiento más completo de los temas presentados en esta sección se pueden encontrar en [8–12].

Comenzaremos con la descripción de congruencias, considerando separadamente los casos de congruencias geodésicas temporaloides y congruencias geodésicas nulas. Para posteriormente introducir los escalares ópticos, los cuales nos dan información del comportamiento de las partículas de prueba que no obtenemos del estudio de una sola geodésica.

1.2. Geodésica

La noción de movimiento geodésico será la herramienta principal de este trabajo. La idea básica de las geodésicas es que son trayectorias que "se curvan lo menos posible"; dicho de otra manera, son las "trayectorias más rectas posibles" que se pueden dibujar en una geometría curva. En términos del tiempo propio de un observador son aquellas trayectorias que maximizan el tiempo propio. Presentamos las definiciones estándar de la ecuación geodésica y de los escalares ópticos [8].

1.3. Ecuación geodésica

Dado un operador derivada covariante, ∇_μ , definimos una geodésica como una curva $\gamma(\lambda)$ cuyo vector tangente U^μ se propaga en paralelo a lo largo de sí mismo, es decir,

$$U^\lambda \nabla_\lambda U^\alpha = 0. \quad (1.1)$$

Una parametrización que produce la ecuación (1.1) es llamada una parametrización afín. En algún sistema coordenado una geodésica parametrizada afinamente $\gamma(\lambda)$ es mapeada a una curva $x^\mu(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ ($U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$), la cual satisface la ecuación siguiente

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (1.2)$$

a la ecuación (1.2) se le conoce como ecuación de la geodésica, donde x^μ representa las coordenadas de la trayectoria y $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$ son los símbolos de Christoffel, que en términos de la métrica y el operador derivada ordinario, están dados por

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (\partial_\gamma g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\mu g_{\beta\gamma}). \quad (1.3)$$

En este trabajo, el espacio-tiempo será una variedad Lorentziana tetradimensional dotada con signatura métrica $(-, +, +, +)$. Una geodésica γ con vector tangente $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ se dice:

- Temporaloide (partículas masivas, como el electrón, el protón ,etc) si

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu < 0, \quad (1.4)$$

en todas partes a lo largo de γ ;

- Luxoide o Nula (partículas sin masa, como el fotón o el gravitón) si

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0, \quad (1.5)$$

en todas partes a lo largo de γ ;

- Espacialoide (partículas que rebasan la velocidad de la luz, nos referimos a ellas como taquiones) si

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu > 0, \quad (1.6)$$

en todas partes a lo largo de γ .

Los dos primeros tipos de geodésicas se conocen como geodésicas causales.

1.4. Congruencias Geodésicas

Una congruencia es un conjunto de curvas en una región abierta del espacio-tiempo de manera que cada punto de la región se encuentra precisamente en una curva. Podemos pensar en una congruencia geodésica como el trazado de los caminos de un conjunto de partículas que no interactúan entre sí y que se mueven a través del espacio-tiempo con caminos no intersectantes.

1.5. Congruencias Geodésicas temporaloides

En particular, para congruencias temporales o temporaloides, éstas deben de satisfacer las ecuaciones (1.1) y (1.4) normalizada. En la presente tesis nos restringiremos a trabajar con métricas diagonales, esta elección hace que las ecuaciones que satisfacen las congruencias temporaloides adquieran las expresiones que a continuación desarrollamos. Comencemos por la norma de la cuadrivelocidad,

$$\begin{aligned}
 -1 &= U_\mu U^\mu \\
 &= g_{\mu\alpha} U^\alpha U^\mu \\
 &= g_{00} U^0 U^0 + g_{i0} U^0 U^i + g_{0j} U^j U^0 + g_{ij} U^j U^i \\
 &= g_{00} (U^0)^2 + g_{ii} (U^i)^2.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Para futuros desarrollos, escribimos las expresiones para los distintos símbolos de Christoffel para un métrica diagonal,

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} &= 0, & \Gamma^\mu{}_{\nu\nu} &= -\frac{1}{2g_{\mu\mu}} \partial_\mu g_{\nu\nu}, \\
 \Gamma^\mu{}_{\mu\nu} &= \partial_\nu \ln \sqrt{|g_{\mu\mu}|}, & \Gamma^\mu{}_{\mu\mu} &= \partial_\mu \ln \sqrt{|g_{\mu\mu}|}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Aquí $\mu \neq \nu \neq \lambda$ y no hay suma sobre índices repetidos. Desarrollamos a continuación (1.1) para $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned}
 U^\lambda \nabla_\lambda U^0 &= U^\lambda (\partial_\lambda U^0 + \Gamma^0{}_{\mu\lambda} U^\mu) \\
 &= U^\lambda (\partial_\lambda U^0 + \Gamma^0{}_{0\lambda} U^0 + \Gamma^0{}_{i\lambda} U^i) \\
 &= U^0 (\partial_0 U^0 + \Gamma^0{}_{00} U^0 + \Gamma^0{}_{i0} U^i) + U^j (\partial_j U^0 + \Gamma^0{}_{0j} U^0 + \Gamma^0{}_{ij} U^i) \\
 &= U^0 \partial_0 U^0 + (U^0)^2 (\partial_0 \ln \sqrt{|g_{00}|}) + U^0 U^i (\partial_i \ln \sqrt{|g_{00}|}) \\
 &\quad + U^j \partial_j U^0 + U^0 U^j (\partial_j \ln \sqrt{|g_{00}|}) + U^i U^j \left(-\frac{\delta_{ij}}{2g_{00}} \partial_0 g_{ii} \right) \\
 &= U^\lambda \partial_\lambda U^0 + U^0 U^\lambda (\partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{00}|}) + U^0 U^i (\partial_i \ln \sqrt{|g_{00}|}) - \frac{(U^i)^2}{2g_{00}} \partial_0 g_{ii} \\
 &\quad + U^0 U^0 (\partial_0 \ln \sqrt{|g_{00}|}) - U^0 U^0 (\partial_0 \ln \sqrt{|g_{00}|}) \\
 0 &= U^\lambda \partial_\lambda U^0 + 2U^0 U^\lambda \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{00}|} - \frac{(U^\lambda)^2}{2g_{00}} \partial_0 g_{\lambda\lambda},
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

similarmente, para las componentes $\alpha = i$, $i = 1, 2, 3$ en (1.1), obtenemos lo

siguiente

$$\begin{aligned}
U^\lambda \nabla_\lambda U^i &= U^\lambda (\partial_\lambda U^i + \Gamma^i_{\mu\lambda} U^\mu) \\
&= U^\lambda (\partial_\lambda U^i + \Gamma^i_{0\lambda} U^0 + \Gamma^i_{j\lambda} U^j) \\
&= U^0 (\partial_0 U^i + \Gamma^i_{00} U^0 + \Gamma^i_{j0} U^j) + U^k (\partial_k U^i + \Gamma^i_{0k} U^0 + \Gamma^i_{jk} U^j) \\
&= U^0 \left(\partial_0 U^i - \frac{U^0}{2g_{ii}} \partial_i g_{00} + U^j \delta_{ij} \partial_0 \ln \sqrt{|g_{ii}|} \right) + U^k \left(\partial_k U^i + U^0 \delta_{ik} \partial_0 \ln \sqrt{|g_{ii}|} + \Gamma^i_{jk} U^j \right) \\
&= U^0 \partial_0 U^i - \frac{(U^0)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{00} + U^0 U^i \partial_0 \ln \sqrt{|g_{ii}|} + U^k \partial_k U^i + U^0 U^i \partial_0 \ln \sqrt{|g_{ii}|} \\
&\quad + U^j U^k \left(\delta_{ij} \delta_{ik} \partial_i \ln \sqrt{|g_{ii}|} + \delta_{ij} \partial_k \ln \sqrt{|g_{ii}|} - \frac{\delta_{jk}}{2g_{ii}} \partial_i g_{jj} + \frac{0}{i \neq j \neq k} + \delta_{ik} \partial_j \ln \sqrt{|g_{ii}|} \right) \\
&= U^\lambda \partial_\lambda U^i - \frac{(U^0)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{00} + 2U^0 U^i \partial_0 \ln \sqrt{|g_{ii}|} + (U^i)^2 \partial_i \ln \sqrt{|g_{ii}|} + U^i U^k \partial_k \ln \sqrt{|g_{ii}|} \\
&\quad - \frac{(U^j)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{jj} + U^i U^j \partial_j \ln \sqrt{|g_{ii}|} \\
&= U^\lambda \partial_\lambda U^i - \frac{(U^0)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{00} + 2U^0 U^i \partial_0 \ln \sqrt{|g_{ii}|} + U^i U^k \partial_k \ln \sqrt{|g_{ii}|} \\
&\quad - \frac{(U^j)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{jj} - \frac{(U^i)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{ii} + \frac{(U^i)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{ii} + U^i U^j \partial_j \ln \sqrt{|g_{ii}|} \\
&= U^\lambda \partial_\lambda U^i - \frac{(U^\lambda)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{\lambda\lambda} + U^i U^\lambda \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{ii}|} + U^i U^0 \partial_0 \ln \sqrt{|g_{ii}|} + U^i U^j \partial_j \ln \sqrt{|g_{ii}|} \\
0 &= U^\lambda \partial_\lambda U^i + 2U^i U^\lambda \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{ii}|} - \frac{(U^\lambda)^2}{2g_{ii}} \partial_i g_{\lambda\lambda},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

los resultados (1.9) y (1.10) se resumen en la siguiente ecuación

$$U^\lambda \partial_\lambda U^\alpha + 2U^\alpha U^\lambda \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{\alpha\alpha}|} - \frac{(U^\lambda)^2}{2g_{\alpha\alpha}} \partial_\alpha g_{\lambda\lambda} = 0, \tag{1.11}$$

tomando en cuenta que la ecuación anterior es válida únicamente para métricas diagonales.

1.6. Curvatura

La curvatura es cuantificada por el tensor de curvatura de Riemann $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, el cual es un tensor del tipo (1,3) (una vez contravariante, tres veces covariante) tal que para

todos los campos vectoriales duales¹ ω_γ , tenemos que

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \omega_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha \omega_\gamma = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \omega_\delta, \quad (1.12)$$

en términos de los símbolos de Christoffel las componentes del tensor de Riemann se escriben como

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\delta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\delta - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\delta. \quad (1.13)$$

Los componentes $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\epsilon} R^\epsilon{}_{\beta\gamma\delta}$ satisfacen las relaciones de simetría

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0. \quad (1.14)$$

De la contracción del tensor de Riemann del primer y tercer índice obtenemos el tensor de curvatura de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}. \quad (1.15)$$

El tensor de Ricci satisface la propiedad de simetría $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. De la traza del tensor de Ricci obtenemos el escalar de Ricci o escalar de curvatura R

$$R = R^\alpha{}_\alpha = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Definimos ahora el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

y las ecuaciones de campo de Einstein, que relacionan la curvatura del espacio-tiempo (tensor de Einstein) con una distribución de materia

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

donde Λ es la constante cosmológica, la cuál consideraremos cero para el resto de la tesis. $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[-g^{\lambda\rho} (F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho}) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho}) \right]. \quad (1.19)$$

Donde el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ depende a su vez del cuadripotencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, ϕ y \vec{A} son los potenciales eléctrico y vectorial magnético respectivamente.

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (1.20)$$

Así como las ecuaciones de Maxwell gobiernan cómo los campos eléctricos y magnéticos responden a cargas y corrientes, la ecuación de campo de Einstein gobierna cómo

¹Dado un V un espacio vectorial real de dimensión finita n . El espacio dual V^* está definido como el espacio vectorial que consiste de todos los funcionales lineales $\zeta : V \rightarrow \mathcal{R}$.

responde la métrica a la energía y al momento de la materia; de la traza de (1.17), podemos notar que el escalar de Ricci satisface

$$-R = 8\pi T. \quad (1.21)$$

Introduciendo (1.21) en (1.17), obtenemos la expresión siguiente

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (1.22)$$

1.7. Ecuación de Desviación Geodésica

El tensor de Riemann también describe otra característica relacionada con la curvatura. Demuestra que la curvatura produce una aceleración entre dos geodésicas vecinas, incluso si ellas comienzan paralelas, la forma del espacio tiempo evita que las geodésicas permanezcan paralelas.

Para analizar este comportamiento consideraremos dos geodésicas $\gamma_0(\tau)$ y $\gamma_1(\tau)$ (fig. 1.1), cada una de ellas mapeada a una curva $x^\alpha(\tau)$, donde τ es el parámetro afín y, las geodésicas pueden ser espacialoides, nulas o temporaloides. Al espacio entre $\gamma_0(\tau)$ y $\gamma_1(\tau)$ lo parametrizaremos por una familia de geodésicas, a cada una de estas se le asignará una etiqueta $s \in [0, 1]$, tal que $s = 0$ corresponde a γ_0 y $s = 1$ a γ_1 . De esta manera, la colección de geodésicas estará descrita por $x^\alpha(\tau, s)$. El campo vectorial $U^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}$, es tangente a las geodésicas y satisface la ecuación (1.2). Mientras que si fijamos τ y variamos s obtendremos un campo vectorial $V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}$, que por lo general no son geodésicas. De estos campos vectoriales podemos notar que la derivada de Lie, de uno respecto del otro será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_U V^\alpha &= U^\mu \nabla_\mu V^\alpha - V^\mu \nabla_\mu U^\alpha & \mathcal{L}_V U^\alpha &= V^\mu \nabla_\mu U^\alpha - U^\mu \nabla_\mu V^\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} V^\alpha - \frac{\partial}{\partial s} U^\alpha & &= \frac{\partial}{\partial s} U^\alpha - \frac{\partial}{\partial \tau} V^\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} & &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial s} \\ &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tau \partial s} - \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s \partial \tau} & &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s \partial \tau} - \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tau \partial s} \\ &= 0 & &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por lo tanto, de la serie de igualdades tenemos que

$$\mathcal{L}_U V^\alpha = \mathcal{L}_V U^\alpha = 0 \Leftrightarrow U^\mu \nabla_\mu V^\alpha = V^\mu \nabla_\mu U^\alpha. \quad (1.24)$$

Podemos usar esta relación para demostrar que $V^\alpha U_\alpha$ es constante a lo largo de γ_0

$$\begin{aligned}
 \frac{DV^\alpha}{\partial\tau} &= U^\beta \nabla_\beta (V^\alpha U_\alpha) \\
 &= (U^\beta \nabla_\beta V^\alpha) U_\alpha + V^\alpha (U^\beta \nabla_\beta U_\alpha) \\
 &= (V^\beta \nabla_\beta U^\alpha) U_\alpha + V^\alpha (0) \\
 &= \frac{1}{2} V^\beta \nabla_\beta (U^\alpha U_\alpha) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Calculemos ahora, la aceleración relativa de γ_1 con respecto a γ_0 ,

$$\begin{aligned}
 \frac{D^2 V^\alpha}{\partial\tau^2} &= U^\mu \nabla_\mu (U^\nu \nabla_\nu V^\alpha) \\
 &= U^\mu \nabla_\mu (V^\nu \nabla_\nu U^\alpha) \\
 &= U^\mu (\nabla_\mu V^\nu) (\nabla_\nu U^\alpha) + U^\mu V^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu U^\alpha) \\
 &= V^\mu (\nabla_\mu U^\nu) (\nabla_\nu U^\alpha) + U^\mu V^\nu (\nabla_\nu \nabla_\mu U^\alpha - R^\alpha_{\sigma\mu\nu} U^\sigma) \\
 &= V^\mu \nabla_\mu (U^\nu \nabla_\nu U^\alpha) - V^\mu U^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu U^\alpha + U^\mu V^\nu (\nabla_\nu \nabla_\mu U^\alpha - R^\alpha_{\sigma\mu\nu} U^\sigma) \\
 &= -R^\alpha_{\sigma\mu\nu} U^\sigma U^\mu V^\nu.
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Finalmente, la ecuación

$$\frac{D^2 V^\alpha}{\partial\tau^2} = -R^\alpha_{\sigma\mu\nu} U^\sigma U^\mu V^\nu, \tag{1.27}$$

es conocida como la ecuación de desviación geodésica. Rige la evolución de un vector de separación V^μ que conecta una familia uniparamétrica de geodésicas vecinas. De (1.24) podemos notar que el vector V^μ también satisface que

$$\frac{D}{d\tau} V^\mu = U^\nu \nabla_\nu V^\mu = B^\mu{}_\nu V^\nu, \tag{1.28}$$

donde el tensor $B^\mu{}_\nu$, mide la falla de V^μ para ser transportado en paralelo a lo largo de la congruencia; en otras palabras, describe hasta qué punto las geodésicas se desvían de permanecer perfectamente paralelas. Así mismo, éste está dado por

$$B^\mu{}_\nu = \nabla_\nu U^\mu, \tag{1.29}$$

dado el campo vectorial U^ν , en cada punto p consideramos el subespacio del espacio tangente (TpM) correspondiente a vectores a U^ν , que satisfacen $U^\nu U_\nu = -1$. Cualquier vector en TpM se puede proyectar en este subespacio a través del tensor de proyección

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu. \tag{1.30}$$

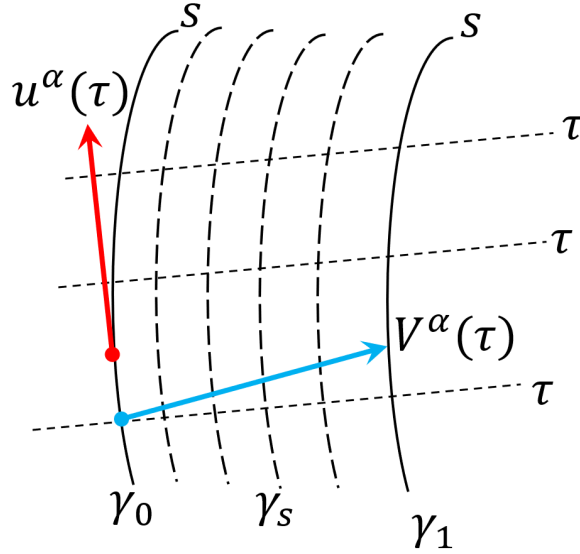


Figura 1.1: Vector de desviación V^α entre una colección de geodésicas.

1.8. Escalares ópticos

El tensor $B_{\mu\nu}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica ($\Theta P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}$) y otra antisimétrica ($\omega_{\mu\nu}$). A su vez, la parte simétrica puede ser descompuesta en la traza (Θ) y una parte libre de traza ($\sigma_{\mu\nu}$),

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\Theta P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

Desarrollamos ahora los elementos que describen la descomposición (1.31). El primer término es la expansión θ de la congruencia, y corresponde a la traza de $B_{\mu\nu}$. La expansión describe el cambio en un volumen de una esfera de partículas de prueba centradas en nuestra geodésica. Considerando los símbolos de Christoffel para una métrica diagonal, la expansión es

$$\begin{aligned} \Theta &= P^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \nabla_\mu U^\mu \\ &= \partial_\mu U^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} U^\alpha \\ &= \partial_\mu U^\mu + \left(\partial_\alpha \ln \sqrt{|g_{\mu\mu}|} \right) U^\alpha. \end{aligned} \quad (1.32)$$

El shear (o distorsión) $\sigma_{\mu\nu}$, dado por

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mu\nu} &= \frac{(B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu})}{2} - \frac{\Theta}{3} P_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2}(\nabla_\nu U_\mu + \nabla_\mu U_\nu) - \frac{\Theta}{3}(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\nu U_\mu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} U_\alpha + \partial_\mu U_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U_\alpha) - \frac{\Theta}{3}(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\nu U_\mu + \partial_\mu U_\nu) - \frac{\Theta}{3}(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) - \delta_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\mu\mu} U_\mu - (1 - \delta_{\mu\nu}) \delta_{\alpha\mu} \Gamma^\mu_{\mu\nu} U_\mu \\
 &\quad - (1 - \delta_{\mu\nu}) \delta_{\alpha\nu} \Gamma^\nu_{\mu\nu} U_\nu - (1 - \delta_{\alpha\mu})(1 - \delta_{\alpha\nu}) \Gamma^\alpha_{\mu\mu} U_\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U_\alpha \\
 &\quad - (1 - \delta_{\mu\nu}) \delta_{\alpha\mu} U_\mu \partial_\nu \text{Ln} \sqrt{|g_{\mu\mu}|} - (1 - \delta_{\mu\nu}) \delta_{\alpha\mu} U_\mu \partial_\nu \text{Ln} \sqrt{|g_{\mu\mu}|} \\
 &\quad - (1 - \delta_{\mu\nu}) \delta_{\alpha\nu} U_\nu \partial_\mu \text{Ln} \sqrt{|g_{\nu\nu}|} - (1 - \delta_{\alpha\mu})(1 - \delta_{\alpha\nu}) \left(-\frac{U_\alpha}{2g_{\alpha\alpha}} \partial_\alpha g_{\mu\mu} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\nu U_\mu + \partial_\mu U_\nu) - \frac{\Theta}{3}(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) - \delta_{\mu\nu} U_\mu \partial_\mu \text{Ln} \sqrt{|g_{\mu\mu}|} - (1 - \delta_{\mu\nu}) \delta_{\alpha\mu} U_\mu \partial_\nu \text{Ln} \sqrt{|g_{\mu\mu}|} \\
 &\quad - (1 - \delta_{\mu\nu}) \delta_{\alpha\nu} U_\nu \partial_\mu \text{Ln} \sqrt{|g_{\nu\nu}|} + (1 - \delta_{\alpha\mu})(1 - \delta_{\alpha\nu}) \left(\frac{U_\alpha}{2} \partial_\alpha g_{\mu\mu} \right),
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

el shear representa un cambio en el conjunto de trayectorias de nuestra colección de partículas de prueba; por ejemplo, cambia la sección transversal de la congruencia inicialmente circular a una forma elipsoidal, está libre de traza. Cuya escalar viene dado por,

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}} \tag{1.34}$$

Por último tenemos a la rotación (o twist) $\omega_{\mu\nu}$, dada por

$$\begin{aligned}
 \omega_{\mu\nu} &= \frac{(B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu})}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(\nabla_\nu U_\mu - \nabla_\mu U_\nu) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\nu U_\mu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} U_\alpha - \partial_\mu U_\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U_\alpha) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\nu U_\mu - \partial_\mu U_\nu).
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

El cual es un tensor antisimétrico, donde cada una de sus entradas describe la rotación alrededor de un eje; por ejemplo, la componente xy describe una rotación alrededor

del eje z , mientras que la componente yx describe una rotación en el sentido opuesto del mismo eje. El escalar de rotación viene dado por,

$$\omega = \sqrt{\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} \quad (1.36)$$

La evolución de la congruencia se calcula a través de la derivada covariante a lo largo del camino, $D/d\tau = U^\sigma \nabla_\sigma$. Aplicando este operador a nuestro tensor $B_{\mu\nu}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{DB_{\mu\nu}}{d\tau} &= U^\sigma \nabla_\sigma B_{\mu\nu} = U^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\nu U_\mu = U^\sigma \nabla_\nu \nabla_\sigma U_\mu + R_{\sigma\nu\mu}{}^\gamma U^\sigma U_\gamma \\ &= \nabla_\nu (U^\sigma \nabla_\sigma U_\mu) - (\nabla_\nu U^\sigma)(\nabla_\sigma U^\mu) + R_{\sigma\nu\mu}{}^\gamma U^\sigma U_\gamma \\ &= -B^\sigma{}_\nu B_{\mu\sigma} + R_{\sigma\nu\mu}{}^\gamma U^\sigma U_\gamma. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Tomando la traza de (1.37), obtenemos lo siguiente

$$U^\sigma \nabla_\sigma \Theta = \frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu. \quad (1.38)$$

La ecuación (1.38) es conocida como la ecuación de Raychaudhuri, la cual muestra la interrelación entre los tres escalares ópticos(1.32,1.34,1.36).

1.9. Congruencias Geodésicas Nulas o luxoides

Trabajar con congruencias de geodésicas nulas es muy complicado, puesto que nosotros estudiamos la evolución de los vectores en un subespacio tridimensional normal al campo tangente, esto carece de sentido para la geodésica nula ya que el vector tangente de una curva nula es normal a sí mismo. En estos casos es más importante la evolución de vectores en un subespacio bidimensional de vectores espaciales normales al campo vectorial tangente nulo $\ell^\mu = dx^\mu/dt$. En situaciones como ésta, no hay una forma única de definir el subespacio, ya que los observadores en diferentes marcos de Lorentz tendrán diferentes nociones de lo que constituye un vector espacial.

El método que nosotros seguiremos, es simplemente elegir un segundo vector nulo auxiliar n^μ , que (en algún marco) apunta en la dirección espacial opuesta a ℓ^μ . El vector de desviación V^α será ortogonal y transportado de Lie a lo largo de las geodésicas. Las siguientes ecuaciones se satisfacen para el caso nulo:

$$\ell^\mu \ell_\mu = 0, \quad \ell^\mu \nabla_\mu \ell^\nu = 0, \quad n^\mu n_\mu = 0, \quad n^\mu \ell_\mu = -1, \quad V^\beta \nabla_\beta \ell^\alpha = \ell^\beta \nabla_\beta V^\alpha. \quad (1.39)$$

Además, exigimos que el vector auxiliar sea transportado paralelamente,

$$\ell^\mu \nabla_\mu n^\nu = 0. \quad (1.40)$$

Un detalle muy importante es que el transporte paralelo preserve los productos internos, por lo que se seguirá satisfaciendo (1.39). Las condiciones (1.39) hacen que

el cuadrivector n^μ no sea único. Pero como veremos, las cantidades que nos importan expansión, distorsión y rotación son independientes del cuadrivector nulo n^μ .

Ahora, introduciremos el espacio que consiste de aquellos vectores V^μ que son ortogonales a ℓ^μ y n^μ , al cual llamaremos T_\perp ²,

$$T_\perp = \{V^\mu | V^\mu \ell_\mu = 0, V^\mu n_\mu = 0\}. \quad (1.41)$$

Similarmente, que en el caso temporaloide, para el vector de desviación geodésica V^α , la ecuación que rige su evolución está dada por

$$\frac{D^2 V^\alpha}{d\lambda^2} = -R^\alpha_{\sigma\mu\nu} \ell^\sigma \ell^\mu V^\nu, \quad (1.42)$$

Definimos además, el tensor proyector que proyecta en el subespacio normal T_\perp , el cual resulta ser

$$Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \ell_\mu n_\nu + \ell_\nu n_\mu. \quad (1.43)$$

El tensor $Q_{\mu\nu}$ actúa como una métrica cuando se aplica a los vectores en T_\perp , mientras que aniquila cualquier tensor que sea proporcional a ℓ^μ y n^μ . Sean $V^\mu, W^\nu \in T_\perp$, algunas propiedades del tensor $Q_{\mu\nu}$ de proyección son

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} V^\mu W^\nu &= g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu \\ Q^\mu{}_\nu V^\nu &= V^\mu \\ Q^\mu{}_\nu \ell^\nu &= 0 \\ Q^\mu{}_\nu n^\nu &= 0 \\ Q^\mu{}_\nu Q^\nu{}_\sigma &= Q^\mu{}_\sigma \\ \ell^\sigma \nabla_\sigma Q^\mu{}_\nu &= 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Para medir el fallo del vector de desviación normal V^μ para que sea propagado paralelamente usamos el tensor

$$B^\mu{}_\nu = \nabla_\nu \ell^\mu, \quad (1.45)$$

y además, de la ecuación (1.39) tenemos que

$$\frac{DV^\mu}{d\lambda} \equiv \ell^\nu \nabla_\nu V^\mu = B^\mu{}_\nu V^\nu. \quad (1.46)$$

Pero en el caso nulo no necesitamos el tensor $B_{\mu\nu}$, la información relevante se encuentra en su versión proyectada,

$$\hat{B}^\mu{}_\nu = Q^\mu{}_\alpha Q^\beta{}_\nu B^\alpha{}_\beta. \quad (1.47)$$

²Es claro ver que hay una infinidad de elementos que pertenecen a este espacio cuya dimensión es 4, debido a que la dimensión de la variedad es 4.

Para analizar la evolución de (1.46), descomponemos $\hat{B}_{\mu\nu}$ en los escalares ópticos de expansión, shear y rotación

$$\hat{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Theta Q_{\mu\nu} + \hat{\sigma}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\nu}, \quad (1.48)$$

donde

$$\Theta = Q^{\mu\nu} \hat{B}_{\mu\nu}, \quad (1.49)$$

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu} = \hat{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\Theta Q_{\mu\nu}, \quad (1.50)$$

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = \hat{B}_{[\mu\nu]}. \quad (1.51)$$

El $\frac{1}{2}$ es debido a que el espacio normal T_{\perp} es bidimensional, lo que también nos dice que $Q^{\mu\nu}Q_{\mu\nu} = 2$. Nótese también que la ausencia de rotación, es decir, $\hat{\omega}_{\mu\nu} = 0$ es una condición necesaria y suficiente para que la congruencia sea una hiper superficie ortogonal. La evolución de $\hat{B}_{\mu\nu}$ a lo largo del camino está dada por

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{B}_{\mu\nu}}{d\lambda} &= \ell^{\sigma} \nabla_{\sigma} \hat{B}_{\mu\nu} = \ell^{\sigma} \nabla_{\sigma} (Q^{\alpha}_{\mu} Q^{\beta}_{\nu} \nabla_{\alpha} \ell_{\beta}) \\ &= Q^{\alpha}_{\mu} Q^{\beta}_{\nu} \ell^{\sigma} \nabla_{\sigma} \nabla_{\alpha} \ell_{\beta} \\ &= -Q^{\alpha}_{\mu} Q^{\beta}_{\nu} (B_{\alpha}^{\sigma} B_{\beta\sigma} + R_{\alpha\lambda\beta\sigma} \ell^{\lambda} \ell^{\sigma}) \\ &= -\hat{B}_{\mu}^{\sigma} \hat{B}_{\nu\sigma} - Q^{\alpha}_{\mu} Q^{\beta}_{\nu} R_{\alpha\lambda\beta\sigma} \ell^{\lambda} \ell^{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Tomando la traza de (1.52), encontramos la ecuación de evolución para la expansión de las geodésicas nulas,

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\Theta^2 - \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{\sigma}^{\mu\nu} - \hat{\omega}_{\mu\nu} \hat{\omega}^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu}. \quad (1.53)$$

Notemos que, como ℓ^{μ} es nulo, de la ecuación de Einstein, tenemos que

$$R_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \ell^{\mu} \ell^{\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu}, \quad (1.54)$$

veremos que el término $-R_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu}$ resulta ser negativo, puesto que para que posea significado físico debe satisfacer la primera de las siguientes condiciones de energía:

- Condición de Energía Nula (CEN), establece que $T_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu} \geq 0$ para todo vector nulo ℓ^{μ} , es decir, $T^{00} - T^{ii} \geq 0$ para i fijo; si el tensor de energía momento es el de un fluido perfecto $T^{00} = \rho$ (densidad de energía) y $T^{ii} = P$ (presión), equivaldría a satisfacer la desigualdad $\rho + P \geq 0$.

Para un observador que tiene un vector tangente ℓ^μ , la densidad de energía local parece ser $T_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu$. Por tanto, esta suposición equivale a decir que la densidad de energía medida por cualquier observador es no negativa.

- Condición de Energía Nula Dominante (CEND), para cualquier cuadrivector ℓ^μ nulo, $T_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu \geq 0$ y $T^{\mu\nu}\ell_\mu$ es un vector no espacialoide. Es decir, se debe satisfacer que $T^{00} + T^{ii} \geq 0$. Si el tensor de energía momento es el de un fluido perfecto $T^{00} = \rho$ (densidad de energía) y $T^{ii} = P$ (presión), las densidades de energía y presiones permitidas son $\rho \geq |P|$ e incluso la densidad negativa está permitida siempre que $P = -\rho$.

1.10. Formalismo de Newman-Penrose

El enfoque de la tétrada nula desarrollado por Newman y Penrose es un método muy útil y poderoso para la construcción de soluciones de las ecuaciones de Einstein y para estudiar campos físicos que se propagan en un espacio-tiempo curvo. Sin entrar en mucho detalle, presentamos los escalares que introduce este formalismo, más adelante los usaremos para el cálculo de los escalares ópticos para la métrica de Ernst.

1.10.1. Tétradas Complejas Nulas

En la relatividad general, una tétrada compleja nula $\{l, n, m, \bar{m}\}$ consiste de dos cuadrivectores nulos con entradas reales (l y n) y un par de vectores nulos conjugados (m y \bar{m}) que satisfacen los siguientes productos

$$l^\mu l_\mu = 0, \quad n^\mu n_\mu = 0, \quad l^\mu n_\mu = -1, \quad (1.55)$$

$$m^\mu m_\mu = 0, \quad \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad m^\mu \bar{m}_\mu = 1, \quad (1.56)$$

$$l^\mu m_\mu = 0, \quad l^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (1.57)$$

$$n^\mu m_\mu = 0, \quad n^\mu \bar{m}_\mu = 0. \quad (1.58)$$

Tomando estos resultados, podemos construir una métrica $g_{\alpha\beta}$ adecuada que pueda subir y bajar índices

$$g_{\alpha\beta} = -l_\alpha n_\beta - n_\alpha l_\beta + m_\alpha \bar{m}_\beta + \bar{m}_\alpha m_\beta, \quad (1.59)$$

cuya inversa se puede expresar de la siguiente manera

$$g^{\alpha\beta} = -l^\alpha n^\beta - n^\alpha l^\beta + m^\alpha \bar{m}^\beta + \bar{m}^\alpha m^\beta. \quad (1.60)$$

Uno siempre puede construir una tétrada compleja nula a partir de una tétrada real ortonormal $\{e_{(0)}, e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$ de la siguiente manera:

$$l_\alpha = \frac{e_{(0)} + e_{(1)}}{\sqrt{2}}, \quad (1.61)$$

$$n_\alpha = \frac{e_{(0)} - e_{(1)}}{\sqrt{2}}, \quad (1.62)$$

$$m_\alpha = \frac{e_{(2)} + ie_{(3)}}{\sqrt{2}}, \quad (1.63)$$

$$\bar{m}_\alpha = \frac{e_{(2)} - ie_{(3)}}{\sqrt{2}}. \quad (1.64)$$

Este arreglo no es único ya que siempre se pueden elegir otros que satisfagan las condiciones (1.55) a (1.58).

1.10.2. Escalares de Newman-Penrose o Coeficientes de Espín

Newman y Penrose [13] introdujeron un conjunto de doce escalares complejos independientes que están definidos como combinación lineal de los coeficientes de rotación de Ricci para la tétrada nula compleja. Los coeficientes son

$$\kappa = -m^\alpha l_{\alpha;\beta} l^\beta, \quad \rho = -m^\alpha l_{\alpha;\beta} \bar{m}^\beta, \quad (1.65)$$

$$\sigma = -m^\alpha l_{\alpha;\beta} m^\beta, \quad \tau = -m^\alpha l_{\alpha;\beta} n^\beta, \quad (1.66)$$

$$\pi = \bar{m}^\alpha n_{\alpha;\beta} l^\beta, \quad \nu = \bar{m}^\alpha n_{\alpha;\beta} n^\beta, \quad (1.67)$$

$$\mu = \bar{m}^\alpha n_{\alpha;\beta} m^\beta, \quad \lambda = \bar{m}^\alpha n_{\alpha;\beta} \bar{m}^\beta, \quad (1.68)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\bar{m}^\alpha m_{\alpha;\beta} l^\beta - n^\alpha l_{\alpha;\beta} l^\beta), \quad \gamma = \frac{1}{2} (l^\alpha n_{\alpha;\beta} l^\beta - m^\alpha \bar{m}_{\alpha;\beta} n^\beta), \quad (1.69)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (l^\alpha n_{\alpha;\beta} \bar{m}^\beta - \bar{m}^\alpha \bar{m}_{\alpha;\beta} \bar{m}^\beta), \quad \beta = \frac{1}{2} (\bar{m}^\alpha m_{\alpha;\beta} m^\beta - n^\alpha l_{\alpha;\beta} m^\beta). \quad (1.70)$$

1.10.3. Escalares Weyl

En el formalismo Newman-Penrose de la relatividad general, los escalares de Weyl, refieren a un conjunto de cinco escalares complejos que decodifican las diez componentes independientes del tensor de Weyl [14] en un espacio tiempo tetradimensional. Los escalares de Weyl son

$$\Psi_0 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta, \quad (1.71)$$

$$\Psi_1 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha n^\beta l^\gamma m^\delta, \quad (1.72)$$

$$\Psi_2 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha m^\beta \bar{m}^\gamma n^\delta, \quad (1.73)$$

$$\Psi_3 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha n^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta, \quad (1.74)$$

$$\Psi_4 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{m}^\alpha n^\beta \bar{m}^\gamma n^\delta. \quad (1.75)$$

1.10.4. Escalares de Ricci

Las diez componentes independientes del tensor de Ricci, están dadas por los cuatro escalares reales $\{\Phi_{00}, \Phi_{11}, \Phi_{22}, \Lambda'\}$, tres escalares complejos $\{\Phi_{10}, \Phi_{20}, \Phi_{21}\}$ y sus conjugados.

$$\Phi_{00} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta, \quad \Phi_{11} = \frac{1}{4} R_{\alpha\beta} (l^\alpha n^\beta + m^\alpha \bar{m}^\beta), \quad (1.76)$$

$$\Phi_{01} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} l^\alpha m^\beta, \quad \Phi_{10} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} l^\alpha \bar{m}^\beta, \quad (1.77)$$

$$\Phi_{02} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} m^\alpha m^\beta, \quad \Phi_{20} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta, \quad (1.78)$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} m^\alpha n^\beta, \quad \Phi_{21} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \bar{m}^\alpha n^\beta, \quad (1.79)$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad \Lambda' = \frac{R}{24}. \quad (1.80)$$

Estos escalares, son una manera más sencilla de calcular los escalares ópticos; en el siguiente capítulo se usarán para el caso particular de la métrica de Ernst y veremos el efecto del campo electromagnético en las congruencias de geodésicas, si hacen que las congruencias diverjan o converjan.

Capítulo 2

Geodésicas en el espacio-tiempo de Ernst

En este capítulo, consideraremos el movimiento de partículas de prueba a lo largo de geodésicas en el campo gravitacional de un agujero negro inmerso en un campo magnético o eléctrico uniforme, descrito por la métrica de Ernst. Las órbitas de las partículas de prueba se pueden estudiar mediante usando el potencial efectivo, de manera similar a un potencial de fuerzas centrales en mecánica clásica.

2.1. Métrica de Ernst

La métrica de Ernst [15] corresponde a un agujero negro (no rotante, tipo Schwarzschild) inmerso en un campo magnético (o eléctrico) externo. En cuatro dimensiones, en coordenadas esféricas (en unidades naturales donde $c = G = 1$) la métrica de Ernst está dada por

$$ds^2 = \Lambda^2 (-f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2) + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} d\phi^2, \quad (2.1)$$

donde

$$f = 1 - \frac{2M}{r}, \quad \Lambda = 1 + \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4}, \quad (2.2)$$

donde B parametriza la intensidad de campo magnético (o eléctrico) y M la masa del agujero negro.

Las soluciones de Ernst se caracterizan por los cuadripotenciales electromagnéticos, uno donde el agujero negro está inmerso en un campo magnético uniforme, en cuyo caso el cuadripotencial de Maxwell será

$$A_{M\mu} = \frac{Br^2 \sin^2 \theta}{2\Lambda} d\phi, \quad (2.3)$$

y otro donde el agujero negro está inmerso en un campo eléctrico uniforme

$$A_{E\mu} = Br f \cos \theta dt. \quad (2.4)$$

Cabe señalar que debido a la presencia del campo electromagnético, la solución de Ernst no es asintóticamente plana. La métrica de Ernst (2.1), junto con (2.3) o (2.4), es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein-Maxwell parametrizada por la masa del agujero negro M y la intensidad del campo externo magnético o eléctrico uniformes, denotados en ambos casos como B , y además se considera que la constante cosmológica es cero. Al hacer $B = 0$ en la métrica (2.1), ésta se reduce a la métrica de Schwarzschild y haciendo $M = 0$ se reduce al universo magnético de Melvin [16].

2.2. Unidades adimensionales

Para presentar las ecuaciones de una manera más concisa es conveniente normalizar todos los parámetros [17]. A continuación definimos las cantidades adimensionales que serán usadas a lo largo de la tesis.

$$M = \frac{GM_{SI}}{c^2}, \quad B^2 = \frac{4\pi\epsilon_0 G^3 M_{SI}^2}{c^6} \mathcal{B}_{SI}^2, \quad q^2 = \frac{q_{SI}^2}{\mu_{SI}^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G}, \quad (2.5)$$

$$r = \frac{c^2 r_{SI}}{GM_{SI}}, \quad \tau = \frac{c^3 \tau_{SI}}{GM_{SI}}, \quad t = \frac{c^3 t_{SI}}{GM_{SI}}. \quad (2.6)$$

Donde M es la masa en unidades de longitud, G la constante de gravitación universal, c la velocidad de la luz en el vacío. Los parámetros $\mathcal{B}_{SI}, q_{SI}, t_{SI}$, son la intensidad de campo magnético en unidades SI (Tesla o Gauss), la carga eléctrica de la partícula de prueba (Coulomb), y el tiempo en segundos. La energía efectiva y el momento angular serán denotados por $E = \frac{E_{SI}}{\mu c^2}$ y $L = \frac{L_{SI}}{\mu M_{SI} c}$ respectivamente.

2.3. Partículas cargadas en un campo magnético de Ernst

Para una partícula de prueba cargada con carga q y masa μ moviéndose en las proximidades de un agujero negro con masa M , rodeada por un campo magnético externo asintóticamente uniforme de magnitud \mathcal{B}_{SI} , el campo magnético efectivo $\frac{qB}{2}$ refleja la interacción de la fuerza electromagnética de Lorentz y la gravedad para un tipo dado de materia cargada representada por la carga específica o relación carga masa $\frac{q}{\mu}$ [18, 19]

$$\frac{qB}{2} = \frac{q_{SI}}{\mu} \frac{\mathcal{B}_{SI}}{2} \frac{GM_{SI}}{c^3} \quad (2.7)$$

Este parámetro puede ser muy grande incluso para campos magnéticos débiles si el valor de la carga específica $\frac{q}{\mu}$ es grande, y la influencia de la fuerza electromagnética en el movimiento de las partículas cargadas no puede despreciarse incluso para campos magnéticos débiles. En nuestro enfoque, la partícula cargada puede representar materia que va desde electrones, protones, iones, hasta algunas inhomogeneidades

cargadas masivas (polvo cargado) que orbitan en la región más interna del disco de acreción o en sus proximidades. La carga específica de la partícula cargada $\frac{q}{\mu}$ varía desde un máximo para electrones hasta cero. Para un agujero negro de masa igual a diez masas solares $M \approx 10M_{\odot}$ ($M_{\odot} = 1.9891 \times 10^{30} \text{kg}$), podemos tener un electrón e^- en un campo magnético $\mathcal{B} \sim 10^{-5}$ Gauss, o un grano de polvo cargado (un electrón perdido, $\mu = 2 \times 10^{-16} \text{kg}$) en un campo magnético $\mathcal{B} \sim 10^9$ Gauss y la magnitud del parámetro del campo magnético es la misma en ambos casos, siendo $B = 0.004$. El carácter del movimiento es el mismo en estos casos. En la tabla (2.1) podemos comparar a qué campo magnético (en Gauss) estarían sometidos un electrón, un protón y algunos iones de acuerdo a su relación carga masa.

$M = 10M_{\odot}$	Electrón	Protón	Ion de Fe	Polvo cargado
$B = 0.1$	$10^{-4}G$	$0.4G$	$24G$	$10^{10}G$

Cuadro 2.1: Intensidad del campo magnético, \mathcal{B} en Gauss, correspondiente al parámetro magnético $B = 0.1$ para varios tipos de partículas cargadas que se mueven cerca de un agujero negro de diez masas solares.

2.3.1. Ecuaciones de movimiento

El movimiento de una partícula de prueba de carga e por unidad de masa (la masa de las partículas a tratar sin pérdida de generalidad se tomara como $\mu = 1$ para todas las ecuaciones y cálculos de la tesis) es descrito por una trayectoria $x^{\mu}(\tau)$, donde τ es el parámetro afín. En el caso de trayectorias temporaloides, τ puede ser considerado como el tiempo propio medido por la partícula. El movimiento puede ser determinado por métodos distintos: (1) resolviendo las ecuaciones geodésicas (1.2), y si la partícula está cargada usando las ecuaciones de fuerza de Lorentz; (2) resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange o (3) mediante las ecuaciones de Hamilton, cualquiera de los métodos es equivalente. En este trabajo las ecuaciones de movimiento serán derivadas usando las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}}$, donde el Lagrangiano a usar será $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} + qA_{\mu}\dot{x}^{\mu}$, y cuyo momento covariante viene dado por la expresión $P_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}}$; los puntos denotan la derivada respecto al parámetro afín τ . Para el caso de partículas cargadas en la métrica magnética de Ernst, donde el cuadripotencial electromagnético está dado por (2.3), el Lagrangiano correspondiente es

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \left[\Lambda^2 \left(-f\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} \dot{\phi}^2 \right] + \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda} \dot{\phi}, \quad (2.8)$$

este Lagrangiano es independiente de t y ϕ , lo que da lugar a las constantes de movimiento de la energía E y el momento angular azimutal L de la partícula de prueba, obteniendo lo siguiente,

$$E = \Lambda^2 f \dot{t}, \quad L = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} \dot{\phi} + \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda}, \quad (2.9)$$

resolviendo los sistemas anteriores para \dot{t} y $\dot{\phi}$

$$\dot{t} = \frac{E}{\Lambda^2 f}, \quad \dot{\phi} = \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \theta} \left(L - \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda} \right). \quad (2.10)$$

Sustituyendo las constantes de movimiento (2.10) en la definición de lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + q A_\mu \dot{x}^\mu$ se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & -\frac{E^2}{2\Lambda^2 f} + \frac{\Lambda^2}{2f} \dot{r}^2 + \frac{r^2 \Lambda^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \left(L - \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda} \right)^2 \\ & + \frac{qB}{2} \Lambda \left(L - \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a (2.11) para las coordenadas restantes, obtenemos las siguientes ecuaciones de segundo orden para r y θ ,

$$\begin{aligned} \ddot{r} = & \left(\frac{f'}{2f} - \frac{\partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \dot{r}^2 + f \left(r + \frac{r^2 \partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \dot{\theta}^2 - \frac{2\partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \dot{r} \dot{\theta} \\ & - \left(\frac{f'}{2f} + \frac{\partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \frac{E^2}{\Lambda^4} + \frac{f}{r^3 \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{r \partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \left(L - qB \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda} \right)^2 \\ & + qB \frac{f}{r \Lambda} \left(1 - \frac{r \partial_r \Lambda}{2\Lambda} \right) \left(L - qB \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda} \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \frac{\partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2 f} - \dot{\theta}^2 \right) - 2 \left(1 + \frac{\partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \frac{\dot{r} \dot{\theta}}{r} \\ & - \frac{E^2 \partial_\theta \Lambda}{r^2 \Lambda^5 f} + \frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \right) \left(L - \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda} \right)^2 \\ & + \frac{qB}{r^2 \Lambda \sin \theta} \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \partial_\theta \Lambda}{2\Lambda} \right) \left(L - \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

aquí f' denota la derivada de $f(r)$ respecto a r . Además, de la invarianza de la norma $\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \equiv -\frac{1}{2}$, que junto con (2.10), da la ecuación siguiente,

$$-\frac{E^2}{2\Lambda^2 f} + \frac{\Lambda^2}{2} \left(\frac{\dot{r}^2}{f} + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{\Lambda^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \left(L - \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda} \right)^2 = -\frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

Para las partículas sin masa $\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \equiv 0$, que de manera similar constituye una constante de movimiento.

2.3.2. Potencial efectivo

Las características cualitativas del movimiento se revelan de la siguiente manera. Analicemos el caso de una partícula que posee cierta energía E , que se acerca a un

agujero negro. Suponiendo que de las ecuaciones de movimiento se deriva una ecuación con la forma siguiente

$$K(q, \dot{q}) + V(q) = E, \quad (2.15)$$

donde $K(q, \dot{q})$ y $V(q)$ son la energía cinética y potencial efectivo, respectivamente, en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas. Fijando $K(q, \dot{q})$ a cero, encontramos los puntos de retorno; es decir, los puntos de máxima aproximación de la partícula al agujero negro y la máxima distancia de éste. Un potencial efectivo típico es graficado en la figura (2.1). En esta misma figura, la energía de la partícula se muestra como una línea horizontal que siempre se encontrará por encima del potencial. La intersección de la línea horizontal con el potencial representa los puntos de retorno. En el diagrama se muestran 3 posibles casos: para partículas con energías entre $V(r) < E < E_1$, en esta región la partícula estaría precesando alrededor del agujero, entre un radio máximo y mínimo; las partículas con energías E_2 corresponden a partículas que llegan del infinito, sus trayectorias se deflecan un poco y regresan al infinito; el segmento $E_3 > E$ correspondería a partículas que caen directamente en el agujero negro.

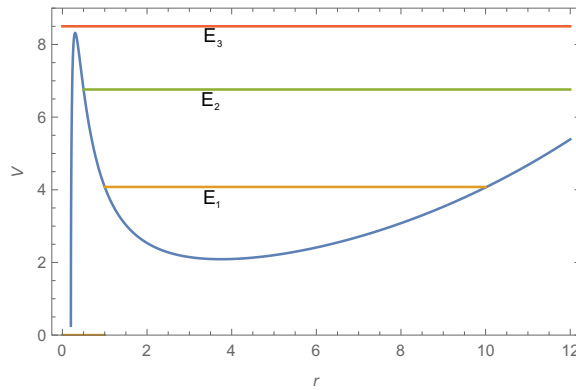


Figura 2.1: Potencial efectivo típico.

2.3.3. Órbitas internas más estables

Las órbitas circulares internas más estables (innermost stable circular orbits, ISCO, por sus siglas en inglés), es la órbita circular más pequeña en la que una partícula de prueba puede orbitar de forma estable un objeto masivo. La ubicación de la ISCO, o el radio ISCO, depende del momento angular de la partícula de prueba. Las condiciones que el potencial debe satisfacer para que se exista una ISCO son

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r_{ISCO}} = 0, \quad \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r_{ISCO}} = 0, \quad (2.16)$$

donde r_{ISCO} es el radio de la órbita ISCO, los cuales son puntos silla. En el caso particular de la métrica de Schwarzschild, ésta posee ISCO's en los radios $r_{ISCO} =$

$\frac{6m}{1+\sqrt{1-\frac{12m^2}{L^2}}}$, para una partícula de prueba con momento angular igual o mayor a $L = 2\sqrt{3}m \sin \theta$. Las órbitas ISCO son distintivas de Relatividad General, no hay análogo Newtoniano; éstas señalan la transición entre la región donde existen órbitas circulares estables y la región donde las partículas caerán inevitablemente al agujero negro. En el contexto del disco de acreción, la ISCO marca el límite interno del modelo de disco de Shakura-Sunyaev [20, 21]. Estas órbitas también son usadas como condiciones iniciales para simulaciones de discos de acreción así como también para extraer información sobre la rotación y/o la carga de un agujero negro.

q	B	L	r
0	0	3.4641016151378	6
0	0.001	3.4642782487098738	5.999136705541017
0	0.01	3.481435104053428	5.919970596699374
0	0.03	3.6046369112076513	5.522006914428242
0	0.1	4.566104702003126	4.726204553950144
0.001	0.001	3.464272247911197	5.999136706603875

Cuadro 2.2: Radios ISCO y su específico momento angular para diferentes valores del campo en el plano ecuatorial. El radio ISCO de Schwarzschild es $r_{\text{ISCO}} = 6m$.

2.3.4. Potencial efectivo magnético

Como queremos observar las características cualitativas del movimiento de nuestra partícula masiva, proponemos reescribir (2.14) de dos maneras distintas, la primera en términos de un potencial efectivo y una parte cinética

$$\Lambda^4(\dot{r}^2 + r^2 f \dot{\theta}^2) + V_{eff}^2 = E^2, \quad V_{eff}^2 = \frac{\Lambda^4 f}{r^2 \sin^2 \theta} \left(L - \frac{qB r^2 \sin^2 \theta}{2 \Lambda} \right)^2 + \Lambda^2 f, \quad (2.17)$$

Para la segunda tratamos de resolver (2.14) para la parte cinética y además factorizando el resto de la ecuación en términos de la energía correspondiente,

$$\Lambda^4(\dot{r}^2 + r^2 f \dot{\theta}^2) = (E - V_M)(E + V_M), \quad (2.18)$$

donde

$$V_{M\pm} = \pm \sqrt{V_{eff}^2}. \quad (2.19)$$

Para obtener un panorama del efecto del campo sobre la partícula masiva, graficamos el potencial V_{eff}^2 en la figura (2.2). En dicha figura, de izquierda a derecha cada columna representa los planos $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$. En la primera fila de arriba hacia

abajo, el campo y la carga son nulas, de la segunda a la cuarta fila el campo posee el valor $B = 0.03$. Para el segundo renglón la carga es nula. En los últimos dos renglones la carga corresponde a $q = 1$ y $q = -1$, respectivamente. En todos los gráficos $m = 1$. Del primer renglón notamos que, las gráficas aumentan cuantitativamente conforme uno se va acercando a los polos, no se observa algún cambio cualitativo. Del segundo al cuarto renglón, que corresponde los escenarios de una partícula masiva con carga neutra, positiva y negativa inmersa en un campo, respectivamente; se observa de inmediato que el efecto del campo es el de confinar fuertemente a las partículas; conforme la partícula se acerca a los polos notamos que, el máximo del potencial aumenta cuantitativamente y el efecto confinador del campo se va perdiendo. Para el caso de la carga neutra, el potencial tiende al mismo valor en al infinito, sin importar el momento angular, aunque a mayor momento angular mayor confinamiento; en el caso de cargas positivas, el potencial crece más rápidamente a menor momento angular, por tanto a menor momento mayor confinamiento; en el caso de cargas negativas a mayor momento angular mas rápido crecerá el potencial. Para todos los casos en la variación de L podemos observar que para $L = 0$ no hay movimiento circular (órbitas atrapadas), dado que el potencial efectivo no presenta mínimos; mientras que para L 's mayores a cero hay órbitas temporales estables. Entonces, el efecto más importante del campo magnético es que confina partículas en órbitas acotadas. Lo que nos estaría diciendo, que el disco de acreción de agujero negro puede tener su origen (o parte de la explicación de su origen) en los campos magnéticos que generalmente se observan en vecindades de los agujeros negros. A pesar de que generalmente el origen de los discos de acreción se adjudica a la rotación de los agujeros negros. Para el caso de partículas masivas, de la métrica magnética de Ernst, los puntos críticos (candidatos a puntos máximos, mínimos y puntos silla) se obtendrán de derivar el potencial efectivo (2.17) respecto a r e igualar a cero, reduciéndose a satisfacer la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 0 = & 32B^4(5M - 3r)r^6(BL - 2q)^2 \sin^6 \theta \\
 & + 128 [(-5B^2L^2 + 12BLq - 4q^2 - 8)r + M(7B^2L^2 - 16BLq + 4q^2 + 12)] B^2r^4 \sin^4 \theta \\
 & - 512 [B^2L^2r + M(B^2L^2 - 4BLq + 4)] r^2 \sin^2 \theta - 2048(3M - r)L^2,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

que es un polinomio de grado siete en r , por lo cual no se puede resolver analíticamente. El momento angular L necesario para que exista un ISCO, estará dado por

$$\begin{aligned}
 \left(L_{ISCO} - \frac{2q(\Lambda - 1)}{B\Lambda} P(r, M, \theta) \right)^2 Q(r, M, \theta) = & (\Lambda - 1)^2(19Mr - 6r^2 - 15M^2) \\
 & + (\Lambda - 1)[(14 + 4q^2)M^2 \\
 & - 4(3 + q^2)Mr(2 + q^2)r^2] \\
 & + 16M(r - 3M),
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde

$$\begin{aligned} P(r, M, \theta) &= \frac{(\Lambda - 1)(3r - 5M) + M}{(\Lambda - 1)(3r - 5M) + 3M - r}, \\ Q(r, M, \theta) &= \frac{\Lambda^2}{r^2} [(\Lambda - 1)(5M - 3r) + 4r - 12M]^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

para que existan órbitas circulares $L \geq L_{ISCO}$.

2.4. Geodésicas fuera del plano ecuatorial

Es bien sabido que las formulaciones Hamiltonianas y Lagrangiana son equivalentes, pero numéricamente hablando, es más fácil integrar el sistema de ecuaciones Hamiltoniano, debido a que hay menos condiciones iniciales que buscar. El movimiento de partículas cargadas sujetas a influencias gravitatorias y fuerzas electromagnéticas está contenido en el Hamiltoniano, el cual está definido por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \Pi_\beta = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (p_\alpha - qA_\alpha)(p_\beta - qA_\beta), \quad (2.23)$$

donde el momento covariante está definido de la siguiente manera

$$\Pi_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu. \quad (2.24)$$

Cuyas ecuaciones de movimiento canónico están dadas por las ecuaciones

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}, \quad (2.25)$$

En particular para este caso

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (g^{tt} p_t^2 + g^{rr} p_r^2 + g^{\theta\theta} p_\theta^2 + g^{\phi\phi} (p_\phi - qA_\phi)^2) \quad (2.26)$$

Obteniendo la ecuación para \dot{p}_r , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{2} [(\partial_r g^{tt}) p_t^2 + (\partial_r g^{rr}) p_r^2 + (\partial_r g^{\theta\theta}) p_\theta^2 + (\partial_r g^{\phi\phi}) (p_\phi - qA_\phi)^2 \\ &\quad - 2qg^{\phi\phi} (p_\phi - qA_\phi) (\partial_r A_\phi)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{g^{tt}}{g^{\theta\theta}} \partial_r g^{\theta\theta} - \partial_r g^{tt} \right) E^2 + \left(\frac{g^{rr}}{g^{\theta\theta}} \partial_r g^{\theta\theta} - \partial_r g^{rr} \right) p_r^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{g^{\phi\phi}}{g^{\theta\theta}} \partial_r g^{\theta\theta} - \partial_r g^{\phi\phi} \right) (L - qA_\phi)^2 + 2qg^{\phi\phi} (p_\phi - qA_\phi) (\partial_r A_\phi) + \frac{\partial_r g^{\theta\theta}}{g^{\theta\theta}} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde en la última línea de (2.27) se sustituyó las ecuaciones de movimiento $p_t = -E$ y $p_\phi = L$, así como el valor de p_θ^2 de la ecuación de normalización $\Pi^\mu \Pi_\mu = -1$. La ecuación (2.27) es independiente de p_θ , $\dot{\theta}$, \dot{p}_θ y $\ddot{\theta}$, por lo que se puede integrar para un θ fijo. Similarmente, la ecuación para p_θ será

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_\theta}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} [(\partial_\theta g^{tt})p_t^2 + (\partial_\theta g^{rr})p_r^2 + (\partial_\theta g^{\theta\theta})p_\theta^2 + (\partial_\theta g^{\phi\phi})(p_\phi - qA_\phi)^2 \\
 &\quad - 2qg^{\phi\phi}(p_\phi - qA_\phi)(\partial_\theta A_\phi)] \\
 &= -\frac{\partial_\theta \Lambda}{f\Lambda^3} E^2 + \frac{f\partial_\theta \Lambda}{\Lambda^3} p_r^2 + \frac{\partial_\theta \Lambda}{r^2 \Lambda^3} p_\theta^2 + \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \right) \left(L - \frac{qB}{2} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda} \right)^2 \\
 &\quad + qB \frac{\Lambda}{\sin \theta} \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \partial_\theta \Lambda}{2\Lambda} \right) \left(L - \frac{qB}{2} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda} \right)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Observar una geodésica de Ernst en un espacio tridimensional en su totalidad es difícil, puesto que las ecuaciones diferenciales no poseen soluciones analíticas en r y θ . Esto ocurre porque el campo magnético rompe la simetría esférica, haciendo que se pierda una constante de movimiento. Los constantes de movimiento restantes para su integración son las que están asociadas a su energía, el momento angular y su masa, E , L y μ respectivamente. Por lo tanto, para obtener información sobre las geodésicas en el espacio-tiempo de Ernst, se fija θ . Esta acción, provoca que el sistema de ecuaciones sea integrable para ese ángulo. Para un ángulo distinto de $\pi/2$, la ecuación (2.28) no se anula, entonces para poder imaginar como se ve la partícula a θ fijo, entonces suponemos que la partícula está siendo sometida a una fuerza cuya expresión es (2.28). Si deseamos graficar una geodésica en el caso particular de Schwarzschild, las partículas masivas tienen que poseer una energía entre el mínimo del potencial y su asíntota. Para el caso del espacio tiempo de Ernst, la energía de la partícula puede estar entre el mínimo y el máximo del potencial V_{M+} . Algunos resultados particulares se muestran en la figura (2.3). En dicha figura, de izquierda a derecha cada columna representa los planos $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$ y $\pi/6$, respectivamente. El primer renglón corresponde a partículas en la métrica de Schwarzschild. Del segundo al cuarto renglón están inmersos en un campo magnético y poseen las cargas $q = 0, 1$ y -1 , respectivamente. El campo magnético B es perpendicular al plano de la hoja, i.e. alineado en la dirección z . Otro efecto del campo además de confinar es el de comprimir la región de órbitas acotadas, dicha acción también se manifiesta aunque la partícula carezca de carga (el campo actúa como curvatura). Este efecto es mayor para cargas negativas, el cual se puede apreciar comparando las gráficas (2.3a), (2.3e), (2.3i) y (2.3m). En todos los casos, el valor inicial del radio inicial corresponde al radio donde la energía potencial es mínima. Se puede observar que la partícula precesa alrededor de un radio mínimo y un radio máximo, conforme uno se va acercando a los polos ambos aumentan. Todas las gráficas muestran una proyección de las órbitas al plano ecuatorial para el ángulo que se fija.

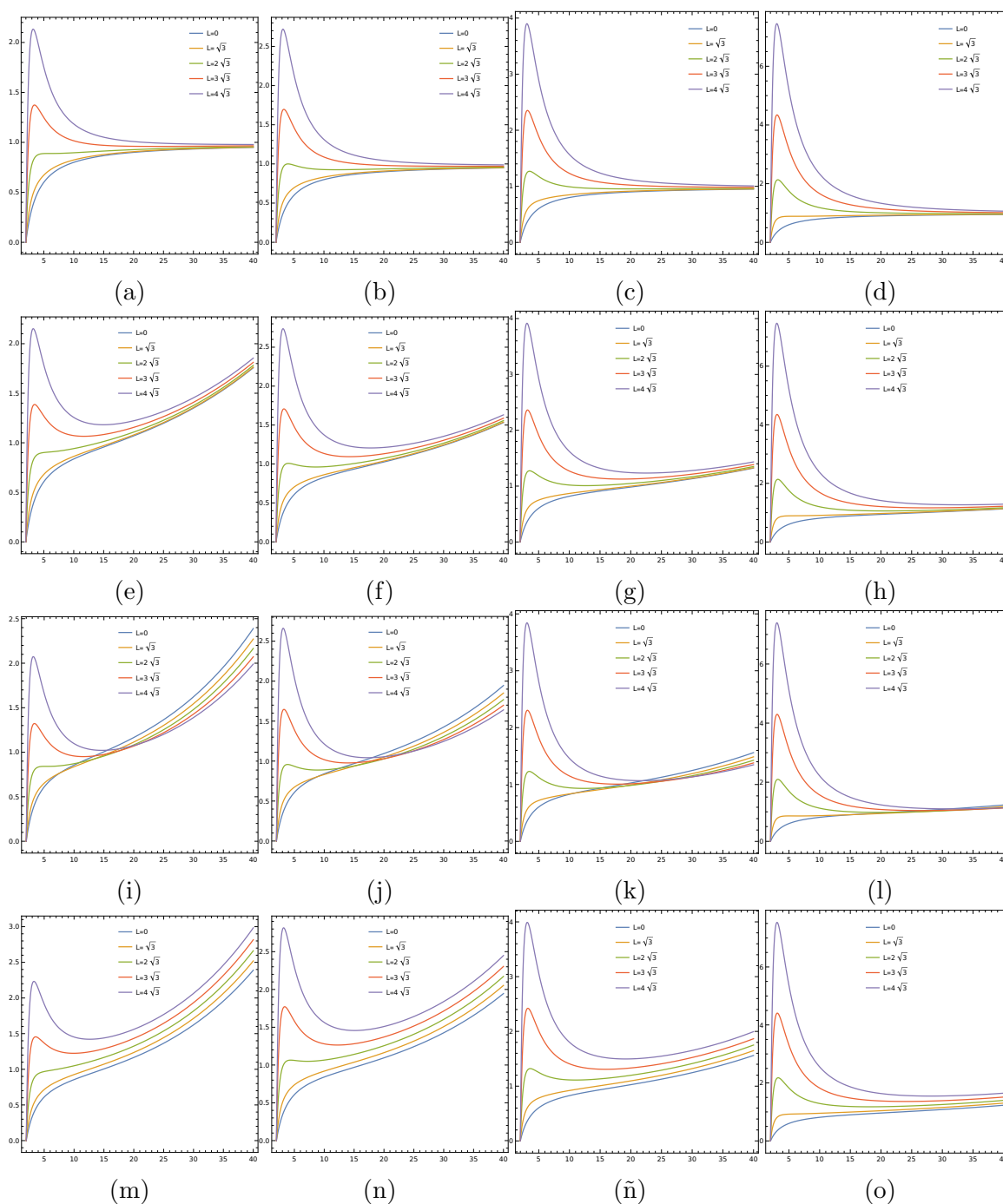


Figura 2.2: Gráficos (V_{eff}^2 vs r) a diferentes valores de L . De izquierda a derecha cada columna representa los planos $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$. En la primera fila de arriba hacia abajo, el campo y la carga son nulas, de la segunda a la cuarta fila el campo posee el valor $B = 0.03$. Para el segundo renglón la carga es nula. En los últimos dos renglones la carga es unitaria positiva y negativa, respectivamente. En todos los gráficos $m = 1$.

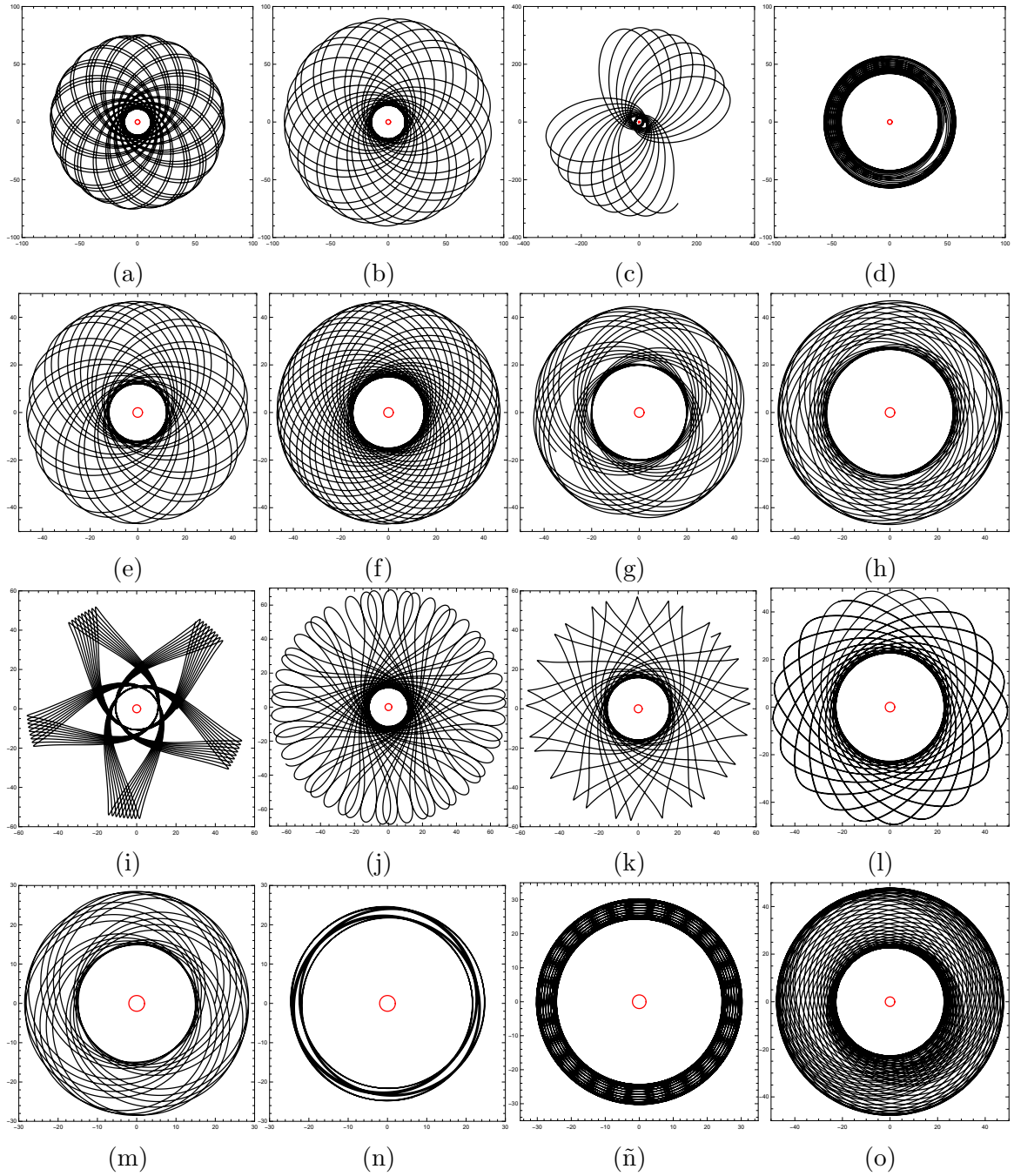


Figura 2.3: Geodésicas magnéticas temporaloides a diferentes ángulos proyectados en el plano xy ($L = 5$, $M = 1$, $B = 0.003$). De izquierda a derecha cada columna representa los planos $\theta = \pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$, respectivamente. El primer renglón corresponde a partículas en la métrica de Schwarzschild. Los renglones segundo, tercero y cuarto están inmersos en un campo magnético y poseen las cargas $q = 0, 1$ y -1 , respectivamente. El círculo rojo corresponde al horizonte de eventos. El campo magnético B es perpendicular al plano de la hoja, alineado en la dirección z .

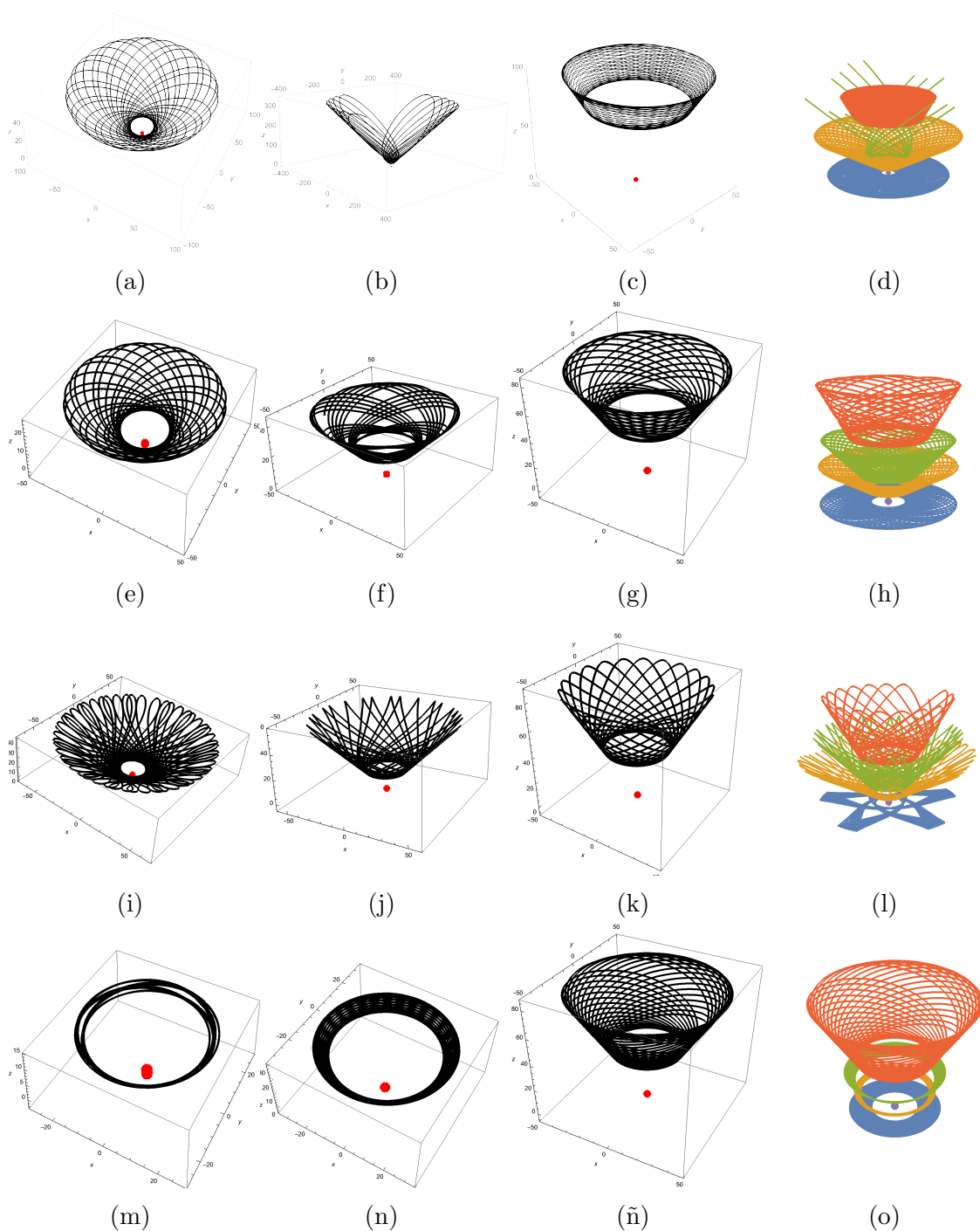


Figura 2.4: Geodésicas magnéticas temporaloides a diferentes ángulos en el espacio ($L = 5$, $M = 1$, $B = 0.003$). De izquierda a derecha las primeras tres columnas representan $\theta = \pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$, individualmete y, la cuarta los muestra en el mismo espacio más el caso $\theta = \pi/2$. El primer renglón corresponde a partículas en la métrica de Schwarzschild. Los renglones segundo, tercero y cuarto están inmersos en un campo magnético y poseen las cargas $q = 0, 1$ y -1 , respectivamente. El círculo rojo corresponde al horizonte de eventos.

La figura (2.4), escenifica el mismo caso que se gráfica en (2.3). De izquierda a derecha las primeras tres columnas representan $\theta = \pi/3, \pi/4$ y $\pi/6$, individualmete y, la cuarta los muestra en el mismo espacio más el caso $\theta = \pi/2$. El primer renglón corresponde a partículas en la métrica de Schwarzschild. Los renglones segundo, tercero y cuarto están inmersos en un campo magnético y poseen las cargas $q = 0, 1$ y -1 , respectivamente. Las tablas 2.3 y 2.4 muestran las condiciones iniciales para obtenerlas.

θ	$r(0)$	$\dot{r}(0)$	E
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{2}(5 + \sqrt{13})$	0.147523401163659	0.9888337406024021
$\frac{\pi}{3}$	30	0.126035329056206	0.9918599390731573
$\frac{\pi}{4}$	$25 + 5\sqrt{19}$	0.101559172953842	0.9947020619641412
$\frac{\pi}{6}$	$50 + 10\sqrt{22}$	0.015316036676902	0.9956410550293472

Cuadro 2.3: Condiciones iniciales Geodésica de Schwarzschild, el radio inicial corresponde al mínimo del potencial (figuras 2.3a, 2.3b, 2.3c y 2.3d).

q	θ	$r(0)$	$\dot{r}(0)$	E
0	$\frac{\pi}{2}$	20.5822691555127	0.14029728554130472	0.988833740602402
	$\frac{\pi}{3}$	27.785977089056285	0.11402283561613943	0.991859939073157
	$\frac{\pi}{4}$	40.41402546769432	0.07788784212576798	0.994702061964141
	$\frac{\pi}{6}$	69.59156765160657	0.0541628286190874	0.999900000000000
1	$\frac{\pi}{2}$	20.5822691555127	0.17987507665314006	0.988833740602402
	$\frac{\pi}{3}$	27.785977089056285	0.19435284752512927	0.991859939073157
	$\frac{\pi}{4}$	39.12607314345979	0.13641964026140288	0.994702061964141
	$\frac{\pi}{6}$	65.71976921880535	0.08104223368385854	0.995641055029347
-1	$\frac{\pi}{2}$	19.90565169509516	0.07316260501293312	0.988833740602402
	$\frac{\pi}{3}$	26.66948782872806	0.014867913083698614	0.993000000000000
	$\frac{\pi}{4}$	38.298537134795644	0.022565701032862043	0.999900000000000
	$\frac{\pi}{6}$	64.69509958470306	0.07800219469410814	1.010000000000000

Cuadro 2.4: Condiciones iniciales Geodésicas de Ernst, el radio inicial corresponde al mínimo del potencial (figura 2.3).

2.5. Partículas cargadas en un campo eléctrico de Ernst

2.5.1. Ecuaciones de movimiento

Para el caso de partículas cargadas en la métrica eléctrica de Ernst, donde el potencial está dado por (2.4). El Hamiltoniano será,

$$\mathcal{H}_E = -\frac{(p_t - qBrf \cos \theta)^2}{2\Lambda^2 f} + \frac{fp_r^2}{2\Lambda^2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2\Lambda^2} + \frac{\Lambda^2 p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.29)$$

donde B es la intensidad de campo eléctrico. Podemos notar que (2.29) no depende de t ni de ϕ por lo que el Hamiltoniano posee como constantes de movimiento a la energía E y el momento angular L de la siguiente manera

$$\begin{aligned} p_t &= P_t + qA_t & p_\phi &= P_\phi + qA_\phi \\ -E &= -\Lambda^2 f \dot{t} + qBrf \cos \theta & L &= \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} \dot{\phi} \\ \Rightarrow \dot{t} &= \frac{E + qBrf \cos \theta}{\Lambda^2 f}, & \Rightarrow \dot{\phi} &= \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \theta} L. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De esta manera, podemos reescribir el Hamiltoniano (2.29) en términos de las constantes de movimiento (2.30) como

$$\mathcal{H}_E = -\frac{(E + qBrf \cos \theta)^2}{2\Lambda^2 f} + \frac{fP_r^2}{2\Lambda^2} + \frac{P_\theta^2}{2r^2\Lambda^2} + \frac{\Lambda^2 L^2}{2r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.31)$$

Si queremos el Lagrangiano, solo basta con sustituir las constantes de movimiento (2.30) en la definición $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + qA_\mu\dot{x}^\mu$, obteniendo la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_E = -\frac{(E + qBrf \cos \theta)^2}{2\Lambda^2 f} + \frac{\Lambda^2}{2f}\dot{r}^2 + \frac{r^2\Lambda^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\Lambda^2 L^2}{2r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.32)$$

Además, de la invarianza de la norma $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \equiv -\frac{1}{2}$ tenemos que,

$$-\frac{(E + qBrf \cos \theta)^2}{2\Lambda^2 f} + \frac{\Lambda^2}{2f}\dot{r}^2 + \frac{r^2\Lambda^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\Lambda^2 L^2}{2r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{1}{2}. \quad (2.33)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen de (2.32) para las otras coordenadas son

$$\begin{aligned}
 \ddot{r} = & \left(\frac{f'}{2f} - \frac{\partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \dot{r}^2 + f \left(r + \frac{r^2 \partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \dot{\theta}^2 - \frac{2\partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \dot{r} \dot{\theta} \\
 & - \left(\frac{f'}{2f} + \frac{\partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \frac{(E + qBr \cos \theta)^2}{\Lambda^4} + \frac{f}{r^3 \sin^2 \theta} \left(1 - r \frac{\partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) L^2 \\
 & + \frac{qB \cos \theta}{\Lambda^4} (E + qBr \cos \theta), \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} = & \frac{\partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2 f} - \dot{\theta}^2 \right) - 2 \left(1 + \frac{\partial_r \Lambda}{\Lambda} \right) \frac{\dot{r} \dot{\theta}}{r} \\
 & - (E + qBr \cos \theta)^2 \frac{\partial_\theta \Lambda}{r^2 \Lambda^5 f} + \frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \right) L^2 \\
 & - \frac{qB \sin \theta}{r \Lambda^4 f} (E + qBr \cos \theta). \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

Comparando término a término la ecuación (2.12) con (2.34), podemos notar que los primeros tres términos del lado derecho de la igualdad son iguales, en cuanto a los términos cuarto y quinto podemos notar que, en el caso magnético, el campo magnético resta magnitud al momento angular, mientras que en el caso eléctrico le añade un término a la energía. El sexto término corresponde a una contribución particular; para el caso magnético es un término asociado con el momento angular, mientras que para el caso eléctrico es un término que depende de la energía. La comparación entre (2.13) y (2.35) produce las mismas conclusiones.

2.5.2. Potencial efectivo eléctrico

Nuevamente se propone descomponer (2.33) para identificar un potencial efectivo y los términos que corresponden a la energía cinética del sistema,

$$\Lambda^4 (\dot{r}^2 + r^2 f \dot{\theta}^2) + V_{eff}^2 = E^2, \quad V_{eff}^2 = E^2 - (E + qBr f \cos \theta)^2 + \frac{\Lambda^4 f L^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \Lambda^2 f, \tag{2.36}$$

$$\Lambda^4 (\dot{r}^2 + r^2 f \dot{\theta}^2) = (E - V_E)(E + V_E), \tag{2.37}$$

donde

$$V_E = \sqrt{V_{eff}^2}. \tag{2.38}$$

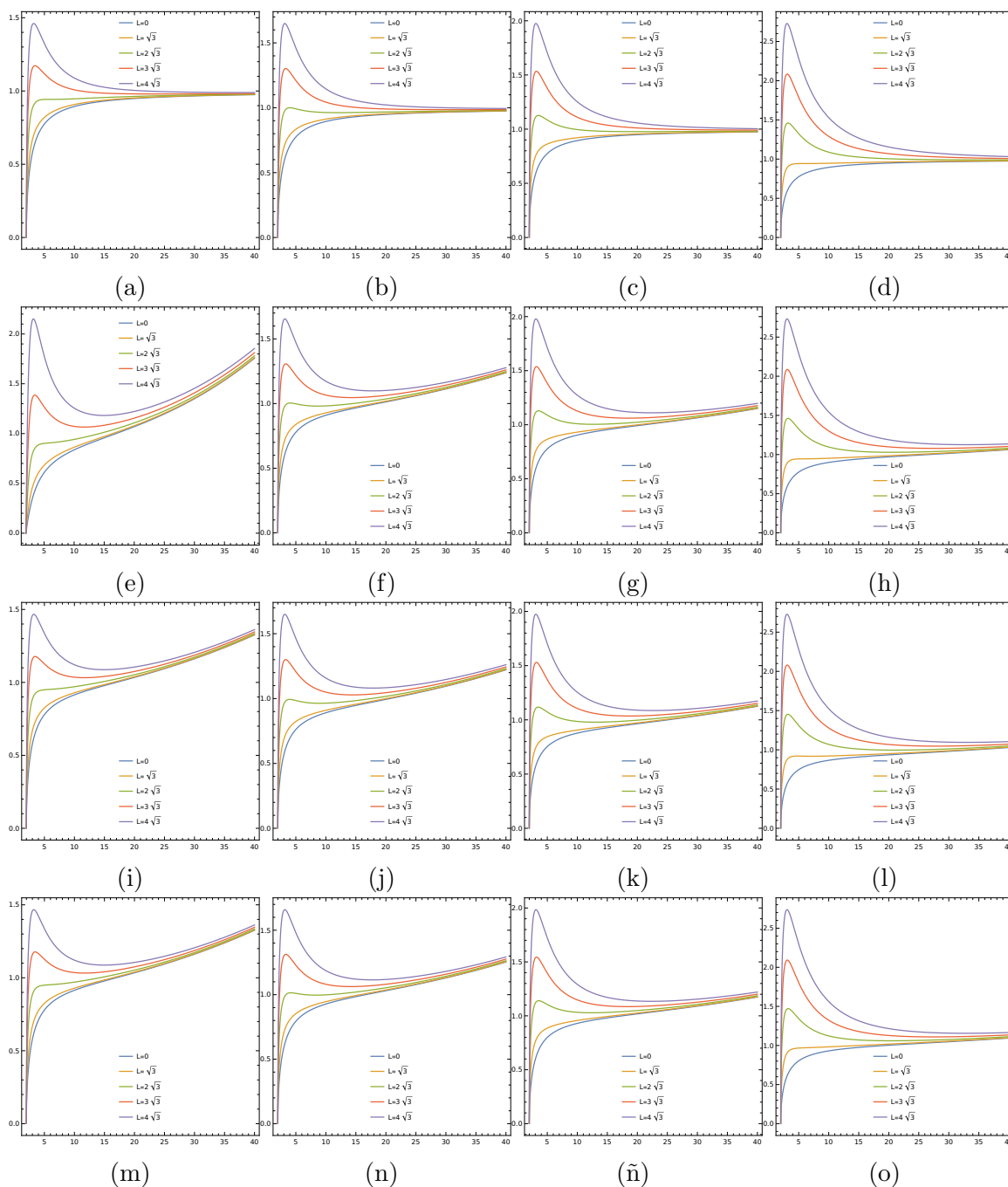


Figura 2.5: Gráficos (V_{E+} vs r) a diferentes valores de L . De izquierda a derecha cada columna representa los planos $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$. En la primera fila de arriba hacia abajo, el campo y la carga son nulas, de la segunda a la cuarta fila el campo posee el valor $B = 0.03$. Para el segundo renglón la carga es nula. En los últimos dos renglones la carga es unitaria positiva y negativa, respectivamente. En todos los gráficos $M = 1$.

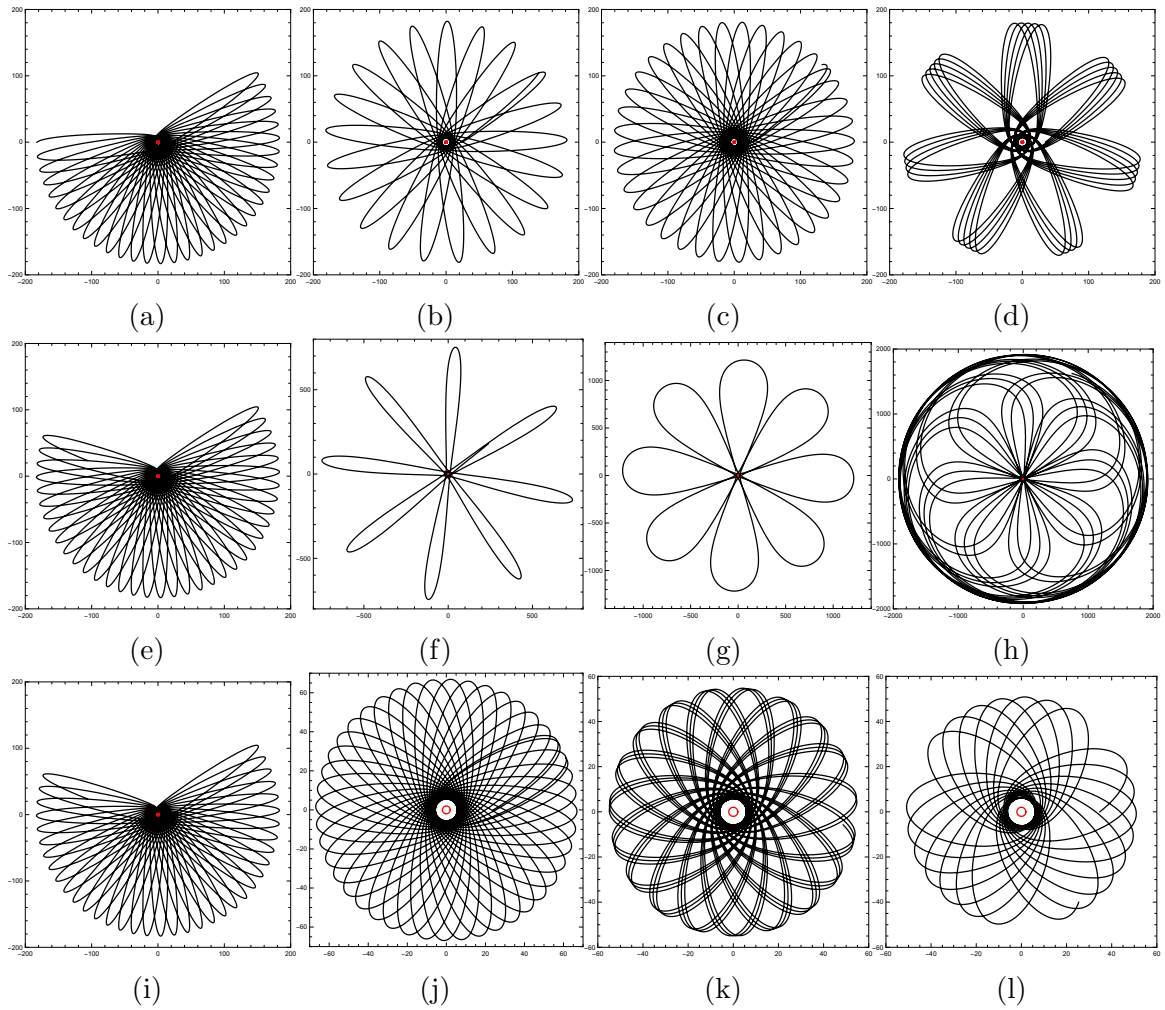


Figura 2.6: Geodésicas eléctricas temporaloides a diferentes ángulos proyectados en el plano xy ($L = 5$, $M = 1$, $B = 0.003$). De izquierda a derecha cada columna representa los planos $\theta = \pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$, respectivamente. El primer renglón corresponde a partículas en la métrica de Schwarzschild. Los renglones segundo, tercero y cuarto están inmersos en un campo eléctrico y poseen las cargas $q = 0, 1$ y -1 , respectivamente. El círculo rojo corresponde al horizonte de eventos. El campo eléctrico B es perpendicular al plano de la hoja, alineado en la dirección z .

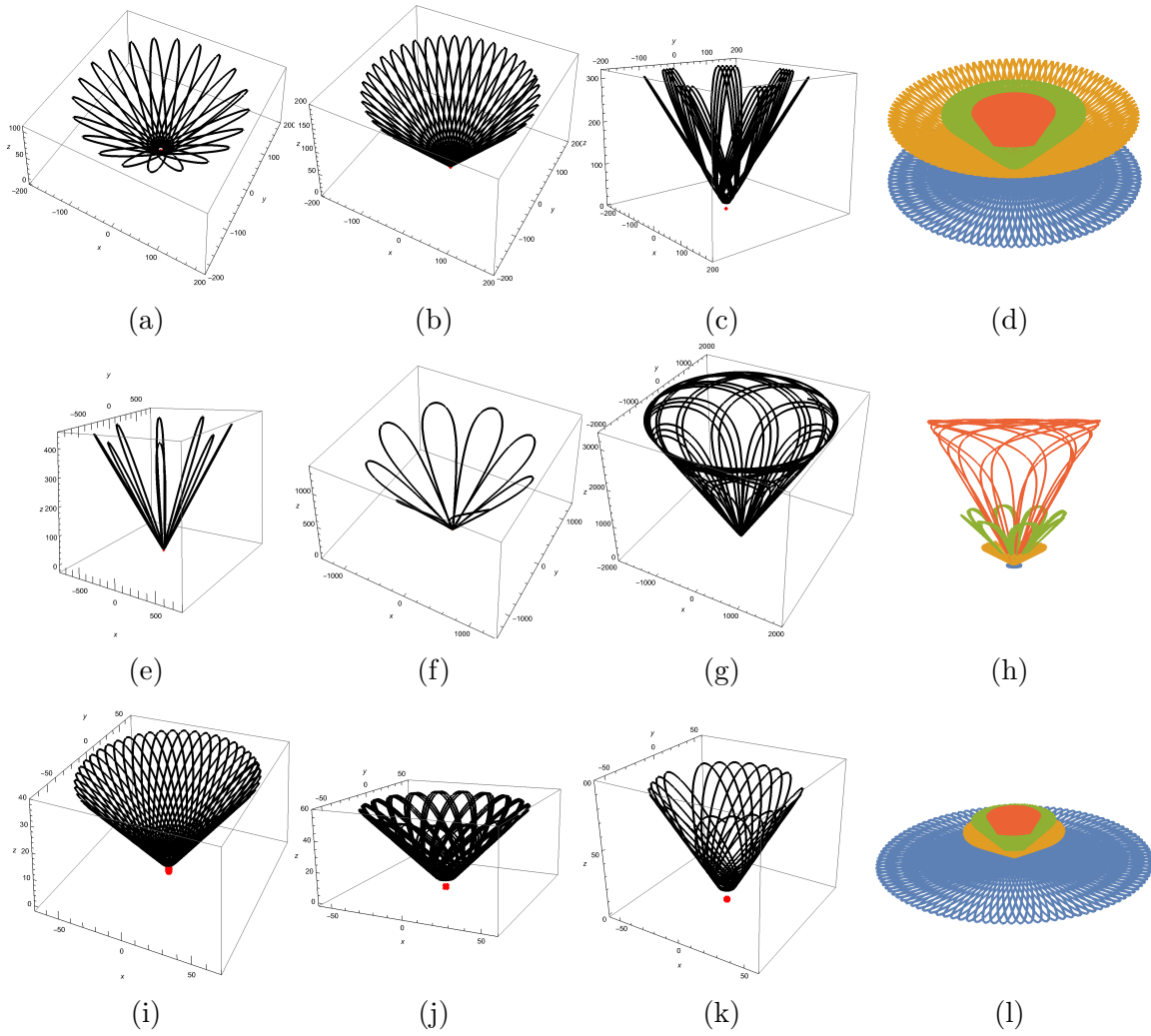


Figura 2.7: Geodésicas eléctricas temporaloides a diferentes ángulos en el espacio ($L = 5$, $M = 1$, $B = 0.003$). De izquierda a derecha las primeras tres columnas representan $\theta = \pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$, individualmete y, la cuarta los muestra en el mismo espacio más el caso $\theta = \pi/2$. El primer renglón corresponde a partículas en la métrica de Schwarzschild. Los renglones segundo, tercero y cuarto están inmersos en un campo eléctrico y poseen las cargas $q = 0, 1$ y -1 , respectivamente. El círculo rojo corresponde al horizonte de eventos.

Para observar el efecto del campo eléctrico sobre la partícula masiva, graficamos el potencial V_{E+} en la figura (2.5). En dicha figura, de izquierda a derecha cada columna representa los planos $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$. En la primera fila de arriba hacia abajo, el campo y la carga son nulas, de la segunda a la cuarta fila el campo posee el valor $B = 0.03$. Para el segundo renglón la carga es nula. En los últimos dos renglones la carga corresponde a $q = 1$ y $q = -1$, respectivamente. En todos los gráficos $M = 1$. Del primer renglón notamos que, el máximo del potencial aumenta a mayor momento angular, así como también conforme la partícula se va acercando a los polos, no se

observa algún cambio cualitativo. Del segundo al cuarto renglón, que corresponde los escenarios de una partícula masiva con carga neutra, positiva y negativa inmersa en un campo, respectivamente; se observa de inmediato que el efecto del campo es el de confinar fuertemente a las partículas; conforme la partícula se acerca a los polos notamos que, el máximo del potencial aumenta cuantitativamente y el efecto confinador del campo se va perdiendo. En presencia del campo eléctrico, sin importar el valor de la carga, el potencial tiende al mismo valor en el infinito, solamente hay ligeras variaciones cuantitativas debido a los signos de las cargas.

En las gráficas (2.6a,2.6e,2.6i) no hay variación por el valor de la carga debido a que estamos en el plano ecuatorial y el término que hace que la carga contribuya depende del factor $\cos \theta$, que para $\theta = \pi/2$ es cero; por tanto su efecto se aprecia al ir disminuyendo θ . Para el movimiento geodésico de partículas neutras (sin carga), dado que no están cargadas, y no hay una fuerza electromagnética neta sobre ellas, su interacción con el campo magnético es a través de la curvatura del espacio-tiempo.

Para obtener las gráficas mostradas en (2.7), se debe fijar θ y suponer que la partícula está siendo sometida a una fuerza, la cual está dada por el producto de la masa μ de la partícula por la aceleración (2.35).

2.6. Partículas sin masa en un campo de Ernst

2.6.1. Ecuaciones de movimiento

En este caso, tomamos como partícula de prueba al fotón, el cuál se acerca a un agujero negro de Schwarzschild inmerso en un campo magnético o eléctrico. El Lagrangiano que modela ésta situación es el siguiente,

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} \left[\Lambda^2 \left(-f\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} \dot{\phi}^2 \right], \quad (2.39)$$

como el Lagrangiano es independiente de t y ϕ , la partícula de prueba posee las constantes de movimiento de la energía E y el momento angular L ,

$$E = \Lambda^2 f \dot{t}, \quad L = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} \dot{\phi}. \quad (2.40)$$

Sustituyendo las constantes de movimiento (2.40) en la definición de lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$,

$$\mathcal{L}_F = -\frac{E^2}{2\Lambda^2 f} + \frac{\Lambda^2}{2} \left(\frac{\dot{r}^2}{f} + r^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{\Lambda^2}{2r^2 \sin^2 \theta} L^2. \quad (2.41)$$

la normalización se puede obtener sustituyendo $e = 0$ en cualquiera de las ecuaciones de norma (2.14) o (2.33), de donde obtenemos una descomposición en términos de un potencial efectivo, así

$$\Lambda^4 (\dot{r}^2 + r^2 f \dot{\theta}^2) = E_F^2 - V_{Feff}^2 \quad V_{Feff}^2 = \frac{\Lambda^4 f L_F^2}{r^2 \sin^2 \theta} \quad V_{F\pm} = \pm \frac{\Lambda^2 \sqrt{f} L_F}{r \sin \theta} \quad (2.42)$$

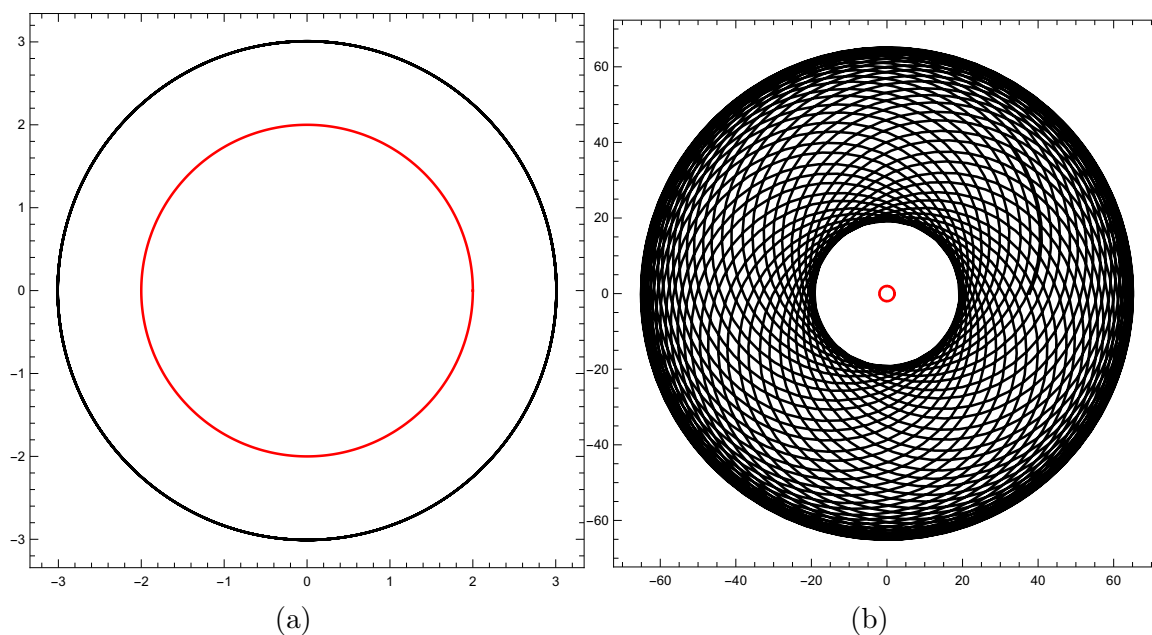


Figura 2.8: Geodésicas nulas en el plano ecuatorial. (a) Geodésica $r = 3M$ Schwarzschild. (b) El fotón está inmerso en un campo $B = 0.03$. El círculo rojo corresponde al horizonte de eventos. En todos los casos $M = 1$.

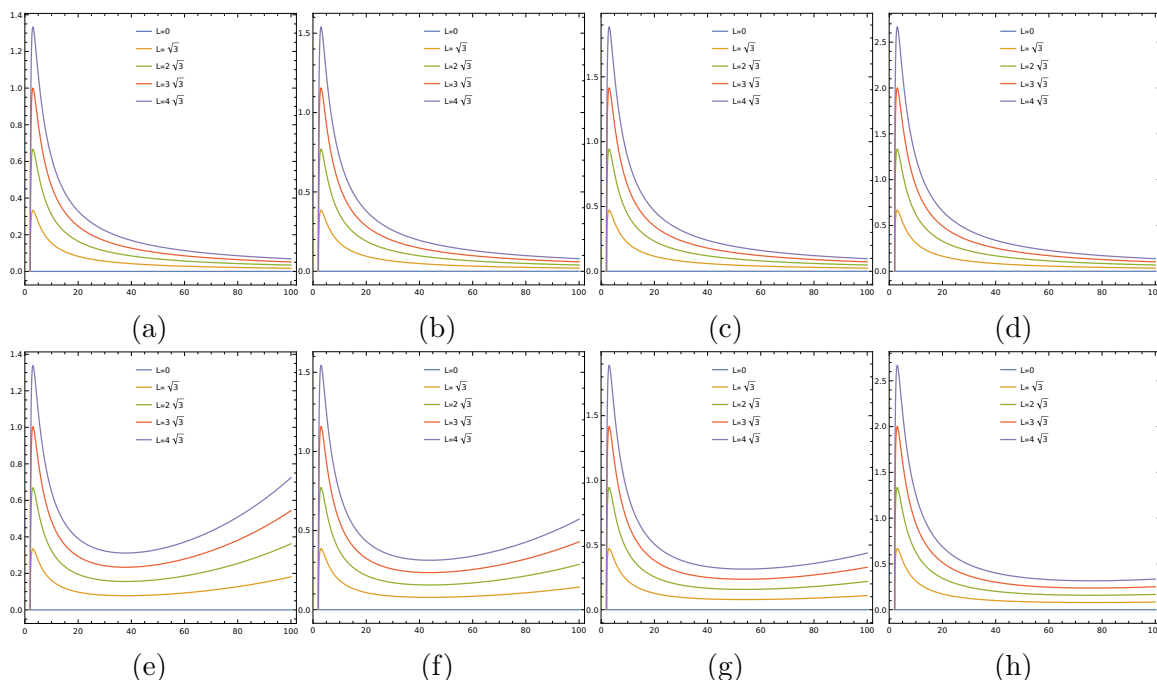


Figura 2.9: Gráficos $(V_F \text{ vs } r)$. En el 1^{er} renglón el campo es nulo, mientras que en el 2^{do} posee una magnitud de $B = 0.03$. En todos los gráficos $M = 1$ y $L = 10$.

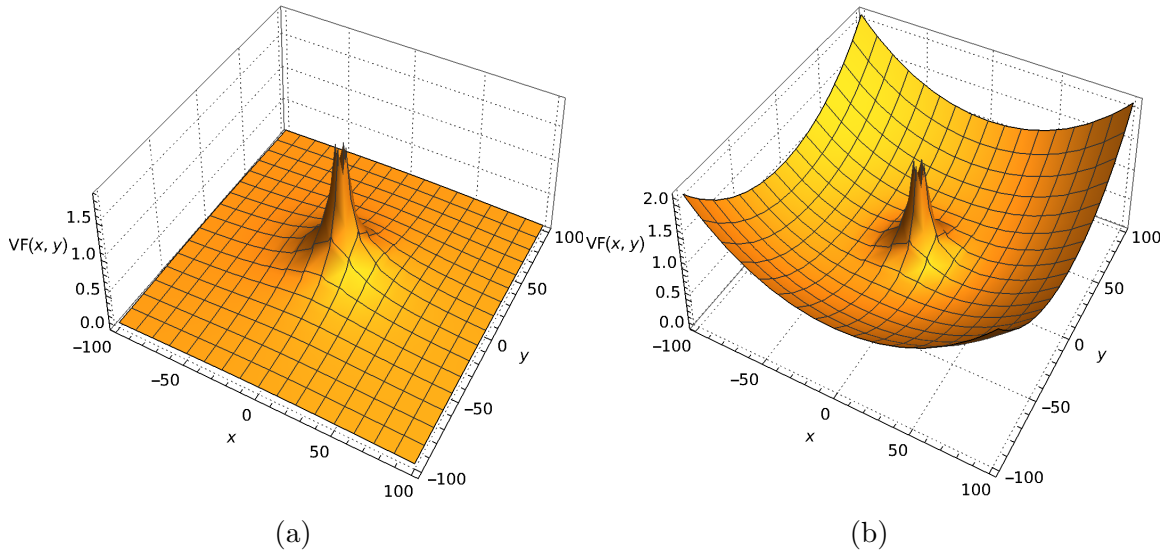


Figura 2.10: Potencial $VF(x, y)$. En (a) $B = 0$ y en (b) $B = 0.03$. En todos los gráficos $m = 1$.

Podemos notar, de la gráfica (2.9e) que el efecto del campo es confinar al fotón, y que incluso puede tener órbitas circulares estables, correspondientes a un mínimo del potencial efectivo. También existen órbitas circulares inestables, correspondientes al máximo del potencial.

2.7. Tensor de energía momento

El tensor electromagnético que se obtiene del potencial magnético (2.3), para un campo magnético uniforme B , es

$$F_{\alpha\beta} = \frac{Br \sin \theta}{\Lambda^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & r \cos \theta \\ 0 & -\sin \theta & -r \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Mientras que el potencial eléctrico (2.4), para un campo eléctrico uniforme B , nos arroja el tensor electromagnético siguiente

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B \cos \theta & Brf \sin \theta & 0 \\ B \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ -Brf \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Para ambos casos se obtiene que el tensor energía momento $T_{\mu\nu}$ (1.19) es el siguiente

$$\begin{pmatrix} -\frac{B^2 f \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2 (\cos^2 \theta - f \sin^2 \theta)}{8\pi\Lambda^2 f} & -\frac{B^2 r \sin 2\theta}{8\pi\Lambda^2} & 0 \\ 0 & -\frac{B^2 r \sin 2\theta}{8\pi\Lambda^2} & -\frac{B^2 r^2 (\cos^2 \theta - f \sin^2 \theta)}{8\pi\Lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^6} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Para poder interpretar el tensor energía momento, elegimos un marco caracterizado por la cuadrivelocidad u^μ y se buscan soluciones de la ecuación de valor propio

$$T_\alpha{}^\beta u^\alpha = \lambda u^\beta \quad (2.46)$$

explícitamente, el tensor $T_\alpha{}^\beta$ es el siguiente

$$\begin{pmatrix} \frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2 (\cos^2 \theta - f \sin^2 \theta)}{8\pi\Lambda^4} & -\frac{B^2 \sin 2\theta}{\pi r \Lambda^4} & 0 \\ 0 & -\frac{B^2 r f \sin 2\theta}{\pi\Lambda^4} & \frac{B^2 (\cos^2 \theta - f \sin^2 \theta)}{8\pi\Lambda^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^4} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

el cual es similar (en el sentido del álgebra lineal) a la matriz diagonal que presentamos a continuación

$$\begin{pmatrix} \frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^4} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Hemos diagonalizado el $T_{\mu\nu}$ para poder entender cuál es el significado físico de estas componentes, haremos una analogía con un tensor energía momento de un fluido perfecto el cuál esta definido por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (2.49)$$

donde ρ es la densidad de energía y P la presión; analizaremos si se satisfacen las condiciones de energía [22].

2.8. Condiciones de Energía

Ya vimos que las ecuaciones de Einstein se pueden resolver para encontrar un tensor de energía momento que corresponde a la geometría del espacio tiempo aunque

muchas veces las soluciones pueden o no ser razonables. Para discernir si lo son, recurrimos a las condiciones de energía para elegir soluciones que tengan significado físico. Para poder hacer un análisis del último elemento del lado derecho de la ecuación (1.38), usaremos la ecuación (1.22) para reescribir este elemento en términos del tensor energía momento $T_{\mu\nu}$ de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) U^\mu U^\nu = 8\pi \left(T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu + \frac{1}{2}T \right). \quad (2.50)$$

En particular, el término $T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu$ representa la densidad de energía de la materia medida por un observador cuya cuadrivelocidad es U^μ . De acuerdo a las diferentes circunstancias se consideran las siguientes condiciones de energía.

2.8.1. Condición de Energía Débil

La condición débil de energía establece que $T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0$ para todos los vectores temporales U^μ , o equivalentemente impone que la densidad de energía medida por el observador siempre sea positiva $\rho \geq 0$ y que la densidad de energía más la presión también sea positiva $\rho + P \geq 0$. El cumplimiento de esta condición asegura que la densidad de energía medida por cualquier observador siempre será positiva

$$T_0^0 \geq 0. \quad (2.51)$$

También la densidad de energía más la presión en cualquier posición debe ser positiva

$$T_0^0 - T_i^i \geq 0. \quad (2.52)$$

Aplicando la primera condición al tensor de energía-momento en el espaciotiempo de Ernst, llegamos a que la distancia radial debe satisfacer la siguiente desigualdad

$$\frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta \right)}{8\pi\Lambda^4} \geq 0 \implies r \geq 2m \sin^2 \theta, \quad (2.53)$$

de manera similar, se mantiene la misma relación para la segunda condición

$$2 \frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta \right)}{8\pi\Lambda^4} \geq 0 \implies r \geq 2m \sin^2 \theta, \quad (2.54)$$

es decir, la condición de energía débil se satisface al menos para toda la región fuera del horizonte de eventos $r \geq 2m$.

2.8.2. Condición de Energía Dominante

La condición de energía dominante incluye los mismos requisitos que la condición de la energía débil y añade como requisito que $T^{\mu\nu}U_\mu$ sea un vector no espacialoide. Para un fluido perfecto, estas condiciones son equivalentes a $\rho \geq |P|$; la densidad de energía debe ser no negativa y mayor o igual a la presión. Esta condición se cumple

si la velocidad local de cualquier fluido observable es siempre menor que la velocidad local de la luz. Esto está asegurado si la presión local del fluido no excede la densidad de energía

$$T_0^0 + T_i^i \geq 0. \quad (2.55)$$

Lo cual se traduce para el sistema del agujero negro inmerso en el campo electromagnético en la siguiente expresión para la distancia radial

$$2 \frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^4} \geq 0 \implies r \geq 2m \sin^2 \theta. \quad (2.56)$$

Nuevamente, esta condición de energía se satisface al menos para toda la región fuera del horizonte de eventos.

2.8.3. Condición de Energía Fuerte

La condición de energía fuerte establece que $T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq \frac{1}{2}T^\lambda_\lambda U^\sigma U^\sigma$ para todos los vectores temporaloides U^μ , o equivalentemente que $\rho + P \geq 0$ y $\rho + 3P \geq 0$. Esta condición garantiza que toda la materia físicamente bien comportada ejerce un efecto de convergencia en las geodésicas nulas y temporales. Esto está asegurado si

$$T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 \geq 0. \quad (2.57)$$

La cuál también debe de satisfacer

$$T_0^0 + T_i^i \geq 0. \quad (2.58)$$

La primera condición se satisface inmediatamente, pues siempre es cero, la segunda nuevamente nos arroja

$$\frac{B^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \sin^2 \theta\right)}{8\pi\Lambda^4} \geq 0 \implies r \geq 2m \sin^2 \theta. \quad (2.59)$$

Podemos notar que las tres condiciones se reducen a satisfacer la desigualdad (2.53), que surge de la condición de energía débil, y se satisfacen de manera absoluta para todo radio fuera del horizonte de eventos; por lo tanto si se cumple la condición de energía débil se cumple la condición de energía fuerte y viceversa. Lo mismo aplica para la condición de energía dominante.

Capítulo 3

Congruencias en el espacio tiempo de Ernst

3.1. Introducción

El calculo de curvatura mediante el método de las tétradas, ocupa tres ingredientes clave: (1) que el operador derivada sea compatible con la métrica, $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$. (2) Que el operador derivada sea libre de torsión. (3) Que el tensor de Riemann se relacione con el operador derivada como se expresa en la ecuación (1.12).

La teoría de Newman-Penrose (formalismo de tétradas nulas) comulga con los tres ingredientes que acabamos de mencionar, por ello la aplicaremos al caso particular de la métrica de Ernst. Obtendremos las tétradas necesarias para calcular los coeficientes de espín, los escalares de Weyl y Ricci, así como las ecuaciones de Sachs y los escalares ópticos que se desprenden de estas ecuaciones. Estudiar los escalares ópticos

Comenzaremos con la descripción de las congruencias geodésicas temporaloides, que interpretamos como familias de partículas de prueba masivas que caen libremente. Posteriormente analizaremos las congruencias geodésicas nulas cuya importancia radica en el hecho de que las interpretamos como familias de rayos de luz que se propagan libremente.

3.2. Congruencias geodésicas temporales

Las congruencias geodésicas temporaloides deben satisfacer las ecuaciones (1.1) y (1.4) normalizada, para ello primero plantemos el sistema general que debe satisfacer la cuadrivelocidad.

3.2.1. Cálculo de cuadrivelocidades temporaloides

Con el objetivo de describir la congruencia temporal primero deberemos determinar la cuadrivelocidad apropiada. Proponiendo encontrar una cuadrivelocidad arbi-

traria

$$U^\alpha = (u^0(r, \theta), u^1(r, \theta), u^2(r, \theta), u^3(r, \theta)), \quad (3.1)$$

que satisfaga las ecuaciones (1.1) y (1.7), aplicada a la métrica de Ernst (2.1), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales,

$$-1 = \Lambda^2 \left[-f (U^0)^2 + f^{-1} (U^1)^2 + r^2 (U^2)^2 \right] + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} (U^3)^2, \quad (3.2)$$

$$0 = U^\lambda \partial_\lambda U^0 + 2U^0 U^1 \left(\frac{B^2 r \sin^2 \theta}{2\Lambda} + \frac{m}{r^2} \right) + U^0 U^2 \left(\frac{B^2 r^2 \sin \theta \cos \theta}{\Lambda} \right), \quad (3.3)$$

$$0 = U^\lambda \partial_\lambda U^1 + (U^1)^2 \left(\frac{B^2 r \sin^2 \theta}{2\Lambda} - \frac{m}{r^2} \right) + U^1 U^2 \left(\frac{B^2 r^2 \sin \theta \cos \theta}{\Lambda} \right) \\ + (U^0)^2 \left[\frac{m}{r^2} + f^2 \frac{B^2 r \sin^2 \theta}{2\Lambda} \right] - ((U^2)^2 + (U^3)^2 \sin^2 \theta) f \left(r + \frac{B^2 r \sin^2 \theta}{\Lambda} \right), \quad (3.4)$$

$$0 = U^\lambda \partial_\lambda U^2 + \left(\frac{2U^2 U^1}{r\Lambda} + \frac{(U^3)^2 \sin \theta \cos \theta}{\Lambda^5} \right) \left(1 + \frac{3}{4} B^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \\ + \frac{B^2 \sin \theta \cos \theta}{2\Lambda} [(U^0)^2 f - (U^1)^2 f^{-1} + r^2 (U^2)^2], \quad (3.5)$$

$$0 = U^\lambda \partial_\lambda U^3 + 2U^3 \left(\frac{4 - B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4 + B^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) \left(\frac{U^1}{r} + \frac{U^2 \cos \theta}{\sin \theta} \right). \quad (3.6)$$

Para su resolución se usó la función "pdsolve" de Maple. En principio sólo basta encontrar una solución real para poder analizar el comportamiento de la congruencia. Para encontrar soluciones al sistema anterior, se propusieron cuadrivelocidades con algunas entradas diferentes de cero, dependientes de r y θ . En la tabla (3.1) resumimos los resultados obtenidos con el GRtensor III de Maple. El código implementado se encuentra en el apéndice A. Los unos representan entradas no nulas y los ceros entradas vacías. Por ejemplo, la forma 1100 corresponde a proponer la cuadrivelocidad $U^\mu = (U^1(r, \theta), U^2(r, \theta), 0, 0)$. Inc es la abreviación de inconsistente, esta situación se presenta cuando se ha encontrado una tetraada que satisface la ecuación de la norma, pero no puede ser transportado paralelamente sobre sí mismo. R e Im son soluciones exactas reales e imaginarias. P es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que sólo puede ser resuelto numéricamente, si alguna de las anteriores posee el símbolo (θ) indica que para obtener dicha solución se fijó $\theta = \frac{\pi}{2}$, los cuadros vacíos indican que el tiempo de computo era mayor a un día por lo cual no se terminó de realizar.

Cuadrivector	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Schwarzschild	Inc	Inc	Inc	Im	Im	Im+R+P	Im+R+P	Inc	Im(θ)	Im	Im	R+Im	R+Im	R(θ)	R(θ)
Ernst	Inc	Inc	Inc	Im(θ)	Im(θ)	P+Im(θ)	P+Im(θ)	Inc	Im(θ)	Im(θ)	Im(θ)	R(θ)	R(θ)	P	

Cuadro 3.1: Cuadrivelocidades propuestas para las métricas de Ernst y Schwarzschild. Los unos representan entradas de funciones no nulas que dependen de r y θ . Inc significa que el sistema propuesto es inconsistente; R e Im son soluciones exactas reales e imaginarias; P es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que solo puede ser resuelto numéricamente, si alguna de las anteriores posee el símbolo (θ) indica que para obtener dicha solución se ha fijado $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3.2.2. Forma 1100 Ernst temporaloide

Las cuadrivelocidades de la forma 1100 aplicadas al sistema de ecuaciones (3.2) a (3.6) generan el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 u^\lambda \nabla_\lambda u^t &= u^\lambda \partial_\lambda u^t + 2u^t u^\lambda \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{tt}|} - \frac{(u^\lambda)^2}{2g_{tt}} \partial_t g_{\lambda\lambda} \\
 0 &= \left(\frac{\partial u^t}{\partial r} + \frac{(3f\Lambda + \Lambda - 4f)}{r\Lambda f} u^t \right) u^r.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 u^\lambda \nabla_\lambda u^r &= u^\lambda \partial_\lambda u^r + 2u^r u^\lambda \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{rr}|} - \frac{(u^\lambda)^2}{2g_{rr}} \partial_r g_{\lambda\lambda} \\
 0 &= u^r \frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{(3\Lambda f - 4f + \Lambda)}{2\Lambda r} (u^t)^2 - \frac{(5\Lambda f - 4f - \Lambda)}{2\Lambda f} (u^r)^2.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 u^\lambda \nabla_\lambda u^\theta &= u^\lambda \partial_\lambda u^\theta + 2u^\theta u^\lambda \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{\theta\theta}|} - \frac{(u^\lambda)^2}{2g_{\theta\theta}} \partial_\theta g_{\lambda\lambda} \\
 0 &= \frac{B^2 \cos \theta \sin \theta}{2\Lambda f} [-(u^t)^2 f^2 + (u^r)^2].
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 u^\lambda \nabla_\lambda u^\phi &= u^\lambda \partial_\lambda u^\phi + 2u^\phi u^\lambda \partial_\lambda \ln \sqrt{|g_{\phi\phi}|} - \frac{(u^\lambda)^2}{2g_{\phi\phi}} \partial_\phi g_{\lambda\lambda} \\
 0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

y la ecuación a la que está sujeta la norma

$$\begin{aligned}
 u_\mu u^\mu &= g_{00}(u^0)^2 + g_{ii}(u^i)^2 \\
 -1 &= \frac{\Lambda^2}{f} [-(u^t)^2 f^2 + (u^r)^2].
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Este sistema no tiene una solución general para θ arbitraria, puesto que se hace inconsistente debido a que las ecuaciones (3.9) y (3.11) se reducen a la misma expresión igualada a cantidades diferentes. Resolvimos esta situación anulando la ecuación (3.9) para $\theta = 0, \pi/2$ y π ; la acción de fijar θ para los ángulos antes mencionados, hace que el sistema posea solución única. Para el caso $\theta = \pi/2$, el sistema tiene la siguiente solución

$$u^\mu = \left(\frac{a}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{B^2 r^2}{4}\right)^2}, \pm \frac{\sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{1+B^2 r^2}{4}\right)^2}}{\left(1 + \frac{B^2 r^2}{4}\right)^2}, 0, 0 \right). \quad (3.12)$$

Donde $a \in \mathbb{R}^+$ nos da una familia de soluciones. El signo positivo aplica para las geodésicas salientes (r aumenta) y el negativo (r disminuye) para las entrantes. La ecuación (3.12) satisface (1.1) y (1.7), indistintamente del valor de a . Sustituyendo (3.12) en las ecuaciones (1.29) a (1.38), obtendremos los escalares ópticos y la ecuación de Raydchaudhuri correspondientes

$$\begin{aligned} \Theta &= \pm \frac{4a^2 + 4\Lambda f - (7f + 1)\Lambda^2}{2r\Lambda^2 \sqrt{a^2 - f\Lambda^2}}, \\ \sigma &= \sqrt{\frac{(49f^2 + 2f + 1) - \frac{104f^2 + 8f}{\Lambda} + \frac{-92fa^2 + 64f^2 + 4a^2}{\Lambda^2} + \frac{176fa^2}{\Lambda^3} + \frac{52a^4 - 96fa^2}{\Lambda^4} - \frac{96a^4}{\Lambda^5} + \frac{48a^4}{\Lambda^6}}{6r^2(a^2 - f\Lambda^2)}, \\ \frac{d\Theta}{d\lambda} &= -\frac{49f^2 + 6f + 1 - \frac{72f^2 + 8f}{\Lambda} + \frac{32f^2 - 80fa^2}{\Lambda^2} + \frac{80fa^2}{\Lambda^3} + \frac{40a^4 - 16fa^2}{\Lambda^4} - \frac{32a^4}{\Lambda^5}}{4r^2(a^2 - \Lambda^2 f)}, \\ \omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Cuyos valores en el horizonte de eventos se reducen a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Theta &= \pm \frac{4a^2 - (B^2 m^2 + 1)^2}{4am(B^2 m^2 + 1)^2}, \\ \sigma &= \frac{\sqrt{48B^4 m^4 a^4 + 4(B^2 m^2 + 1)^2 a^4 + 4(B^2 m^2 + 1)^4 a^2 + (B^2 m^2 + 1)^6}}{8\sqrt{6}ma(B^2 m^2 + 1)^3}, \\ \frac{d\Theta}{d\lambda} &= -\frac{B^{10}m^{10} + 5B^8m^8 + (B^2m^2 + 1)(10B^4m^4 + 8a^4 + 1)}{16m^2a^2(B^2m^2 + 1)^5}, \\ \omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donde se aprecia que tanto la expansión como la distorsión son finitos. Las congruencias no presentan rotación. La ecuación de Raychaudhuri, que gobierna la evolución de la expansión, nos indica que ésta siempre disminuye. Es decir, la gravedad tiende a enfocar las geodésicas en el sentido de que una congruencia inicialmente divergente (geodésicas apartándose) se encontrará que diverge lentamente en un futuro cercano y

que una congruencia inicialmente convergente (geodésicas que se juntan) convergerán más rápidamente. Los escalares ópticos se muestran en la figura (3.1).

La cuadrivelocidad para el caso de un agujero negro de Schwarzschild se obtiene haciendo $B = 0$ en (3.12). Se obtienen las mismas soluciones para los valores de θ a 0 y π . Para estos casos los escalares ópticos y la ecuación de Raychaudhuri se reducen a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Theta &= \pm \frac{2k^2r + 3m - 2r}{\sqrt{r^3(k^2r + 2m - r)}}, & \sigma &= \sqrt{\frac{2(k^2r + 3m - r)^2}{3r^3(k^2r + 2m - r)}} \\ \frac{d\Theta}{d\lambda} &= -\frac{2(k^2 - 1)^2r^2 + 8m(k^2 - 1)r + 9m^2}{r^3(k^2r + 2m - r)}, & \omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde k es una constante distinta de cero.

3.2.3. Cuadrivelocidad temporal de la forma 1110

Sólo para ilustrar que no es trivial encontrar una cuadrivelocidad a partir de la cual se generan los escalares ópticos, también se encontró una cuadrivelocidad de la forma (1,1,1,0) dada por

$$\begin{aligned} 16f^2\Lambda^4(u^0)^2 + k_1 &= 27(\Lambda - 1)^2f^3(f - 4) + (\Lambda - 1)(162\Lambda - 146)f^2 \\ &\quad + (\Lambda - 1)(-108\Lambda^2 + 76)f + 27\Lambda^2 - 38\Lambda + 27, \\ \frac{256r^2\Lambda^4(u^1)^2 + k_2f}{r^2} &= -2916(\Lambda - 1)^2f^6(f - 6) \\ &\quad - 108f^4(\Lambda - 1)(405\Lambda f - 544\Lambda - 389f + 480) \\ &\quad + (-45468\Lambda^2 + 80568\Lambda - 35292)f^3 \\ &\quad + (20088\Lambda^2 - 33008\Lambda + 13304)f^2 \\ &\quad + (-4900\Lambda^2 + 7048\Lambda - 2596)f \\ &\quad + 432\Lambda^2 - 608\Lambda - k_1 + 432, \\ \frac{256r^4\Lambda^4(u^2)^2 - k_2}{12(f - 1)^2r^2} &= [9(\Lambda - 1)(f - 1)^2 + 4] [27(\Lambda - 1)(f - 1)^2 + 4]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

No repetiremos el análisis de los escalares ópticos correspondientes dado que los mismos son independientes de la cuadrivelocidad particular mediante la que se generan.

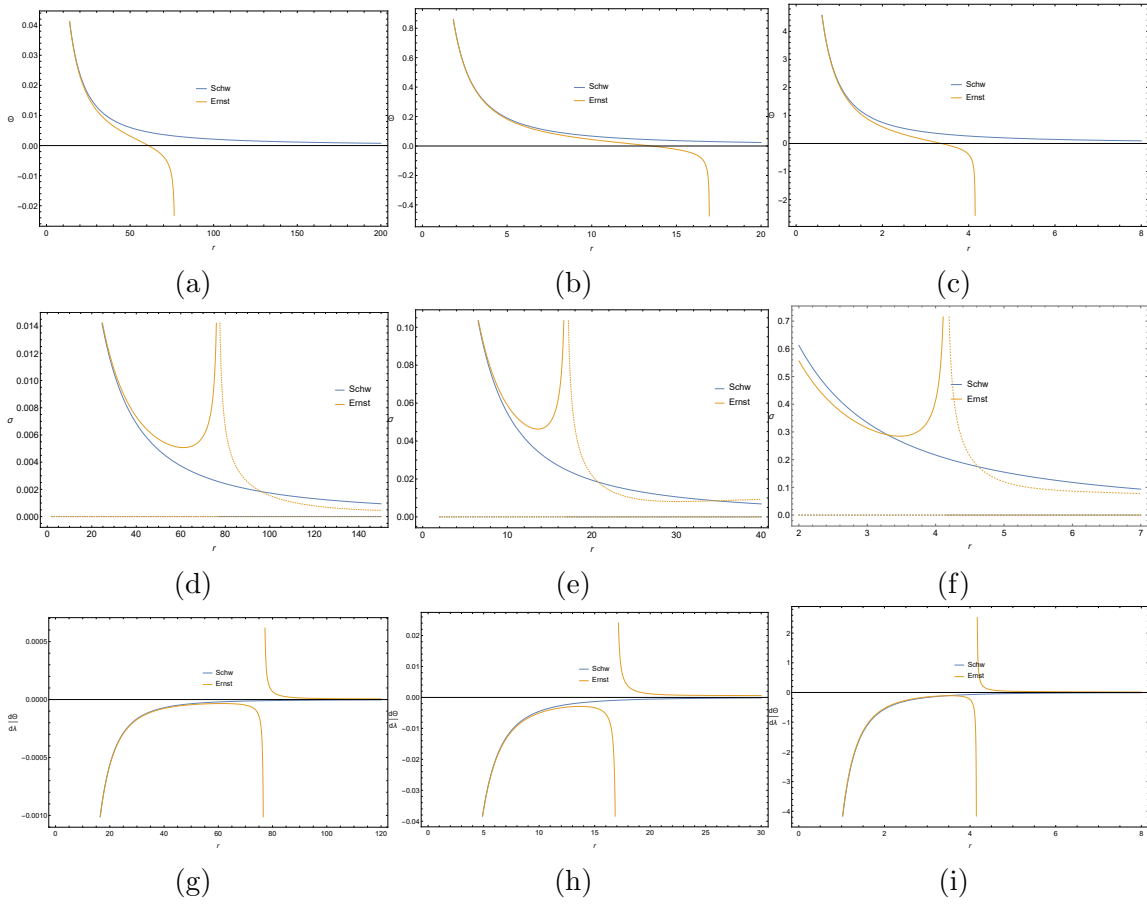


Figura 3.1: Escalares Ópticos para las métricas de Ernst (curva amarilla) y Schwarzschild (curva azul) para congruencias temporaloides. De arriba hacia abajo, el primer renglón corresponde a la expansión, el segundo al Shear y la tercera fila a la ecuación de Raychaudhuri. De izquierda a derecha las intensidades de campo están asociadas a cada columna cuyos valores son $B = 0.003$, 0.03 y 0.3 , en todos los casos $m = 1$ y $k = 1$.

Las gráficas (3.1a), (3.1b) y (3.1c), demuestran que el efecto del campo sobre la expansión es disminuirla e inclusive hacerla tender a menos infinito cuando r tiende a r_s , que es el radio en el cuál $a^2 - f\Lambda^2 = 0$. La expansión después del radio r_s es completamente imaginaria por lo que carece de significado físico. También, se puede notar que cuando el campo se anula la expansión es máxima. Para distancias cercanas al horizonte la expansión es indistinguible de la correspondiente al agujero negro de Schwarzschild. En el horizonte la expansión es finita, como se ve en la ec. (3.14), aunque de las gráficas pareciera que diverge. Lo mismo aplica a la distorsión (shear). De las gráficas (3.1d), (3.1e) y (3.1f), podemos observar que el shear aumenta en presencia del campo y se vuelve completamente imaginario a partir del punto r_s . Las gráficas (3.1g), (3.1h) y (3.1i) muestran que la presencia del campo presenta una discontinuidad en el punto r_s , esta discontinuidad no se presenta en el agujero negro

de Schwarzschild, surge por la presencia del campo magnético, aún cuando éste sea muy pequeño, eventualmente se alcanzará sin importar el valor que le demos a la constante a . Al incrementar la magnitud del campo magnético el comportamiento es el mismo cualitativamente, sin embargo note que las escalas sí varían.

3.2.4. Teorema de Enfoque

La importancia de la ecuación de Raychaudhuri (1.38) es revelada por el siguiente teorema:

Theorem 3.2.1 (Teorema de enfoque (temporaloide)) *Sea una congruencia de geodésicas temporaloides, con un vector tangente u^μ , de modo que $\omega_{\alpha\beta} = 0$, y se mantenga la condición de energía fuerte,*

$$T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geq \frac{1}{2}Tu^\alpha u_\alpha, \quad (3.17)$$

en virtud de las ecuaciones de campo de Einstein (1.22), tal que $R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geq 0$. Entonces la ecuación de Raychaudhuri implica que

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \leq 0. \quad (3.18)$$

Por tanto, la expansión debe disminuir durante la evolución de la congruencia. Así, una congruencia inicialmente divergente ($\Theta_0 < 0$) divergerá menos rápidamente en el futuro, mientras que una congruencia inicialmente convergente ($\Theta_0 > 0$) convergerá más rápidamente en el futuro.

Este es el enunciado del teorema de enfoque. Su interpretación física es que la gravitación es una fuerza atractiva cuando se mantiene la condición de energía fuerte, y las geodésicas se enfocan como resultado de esta atracción. Bajo las condiciones del teorema (3.2.1), la ecuación de Raychaudhuri, se reduce a

$$\frac{d\Theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\Theta^2, \quad (3.19)$$

integrando esta última ecuación, obtenemos que

$$\frac{1}{\Theta(\tau)} \geq \frac{1}{\Theta_0} + \frac{\tau}{3} \quad (3.20)$$

donde $\Theta_0 = \Theta(0)$. Esto muestra que si la congruencia es inicialmente convergente ($\Theta_0 < 0$), entonces $\Theta(\tau) \rightarrow -\infty$ dentro de un tiempo propio $\tau \leq \frac{3}{|\Theta_0|}$. La interpretación de este resultado es que la congruencia desarrollará una cáustica, un punto en el que algunas de las geodésicas se unen. Obviamente, una cáustica es una singularidad de la congruencia, y ecuaciones como (1.38) pierden su significado en tales puntos.

En particular, en nuestro caso, las gráficas (3.1) muestran una singularidad en los puntos r_s , por lo tanto corresponden a una cáustica. Dicha cáustica no se presenta en ausencia del campo. Lo que ocurre es que nuestras geodésicas se cruzan en un punto y, posteriormente dará lugar a que la geodésica no tenga una única dirección lo que haría que el modelo falle y por tanto, los escalares ópticos dejan de tener sentido.

3.3. Congruencias Nulas en la métrica de Ernst

Para determinar las congruencias nulas para la métrica de Ernst, nuestra primera tarea fue encontrar los cuadvectores ℓ^μ y n^μ que satisfacen las ecuaciones (1.39) y (1.40). Como la métrica no depende de t ni de ϕ , sin pérdida de generalidad proponemos que nuestros cuadvectores dependen únicamente r y θ . Las tablas (3.2) y (3.3) muestran algunos resultados acerca de lo que pasa cuando construimos las cuadvelocidades con entradas particulares; los unos representan las entradas no nulas del cuadvector. Los resultados que arrojan las diferentes situaciones que se pueden presentar se denotan de la manera siguiente: Inc significa que el sistema es inconsistente, es decir, hay por lo menos dos ecuaciones que están igualadas a distintas cantidades; PC significa que el producto entre estos vectores siempre será cero; Im nos dice que se obtiene una solución imaginaria; Par es el caso en que Maple no pudo resolver la ecuación diferencial parcial de manera exacta pero lo toma como solución del sistema; R es una solución real exacta. Se pueden obtener más casos, pero solo se buscaba una solución en particular, las cantidades que nos importan no dependen de $\ell^\mu(r)$, por lo que no es necesario seguir buscando soluciones.

$\ell^\mu \backslash n^\mu$	0011	0101	0110	0111	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0011	Inc	Inc	Inc	Im+P	Inc	Inc	Inc	PC	Inc	Inc	P
0101	Inc	Im (θ)	Inc	Im	Inc	PC	Inc	Inc	Inc	Inc	Im (θ)
0110	Inc	Inc	Im	Int+P	PC	Inc	Inc	Inc	Inc	Im+P	Im+Int
0111	Inc	P+Im (θ)	Im		Inc	Inc		Inc			
1001	Inc	Inc	PC		Inc	Inc	Inc	Inc	Inc	Inc	Inc
1010	Inc	PC	Inc	Inc	Inc	Inc	R	Inc	Inc	R	muy largo
1011	Inc	Inc	Inc		Inc	Inc		Inc			
1100	PC	Inc	Inc	Inc	Inc	Inc	Inc	R	Inc	R	R
1101	Inc	Im (θ)	Inc		Inc	Inc		R			
1110	Inc	Inc	Im+P		Inc	R+P		R			
1111	Inc	Im (θ)	Im+P	Im (θ)+P	Inc	R+P		R			

Cuadro 3.2: Resultado de las cuadvelocidades propuestas para la métrica de Schwarzschild para partículas sin masa o nulas. Los unos representan entradas de funciones no nulas que dependen de r y θ . Inc significa que el sistema propuesto es inconsistente; PC indica que el producto entre vectores siempre será cero; R e Im son soluciones exactas reales e imaginarias; P e Int son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales e integrales respectivamente que solo pueden ser resueltos numéricamente, si alguna de las anteriores posee el símbolo (θ) indica que para obtener dicha solución se fijo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Una vez elegidas nuestras cuadvelocidades, se utilizaron las ecuaciones (1.45) a (1.51) y se procedió a calcular los escalares ópticos. Es difícil analizar las cantidades obtenidas, puesto que para apreciarlas en su totalidad deberíamos de graficarlas en 4 dimensiones espaciales ($x, y, z, \Theta(x, y, z)$). Pero podemos analizar su comportamiento graficando la función contra r para distintos valores de θ .

$\ell^\mu \backslash n^\mu$	0011	0101	0110	0111	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0011	Inc	Inc	Inc		Inc	Inc	Inc	PC			
0101	Inc	Inc	Inc		Inc	PC	Inc	Inc			
0110	Inc	Inc	Im+P		PC	Inc	Inc	Inc			
0111			Im+P		Inc	Inc		Inc			
1001	Inc	Inc	PC		Inc	Inc	Inc	Inc			
1010	Inc	PC	Inc		Inc	Inc	Inc	Inc			
1011	Inc	Inc	Inc		Inc	Inc		Inc			
1100	PC	Inc	Inc		Inc	Inc	Inc	R(θ)			
1101			Inc		Inc	Inc		R(θ)			
1110	Inc	Inc	Im+P		Inc			R(θ)			
1111			Im+P		Inc			R(θ)			

Cuadro 3.3: Resultado de las cuadrivelocidades propuestas para la métrica de Ernst para partículas sin masa o nulas. Los unos representan entradas de funciones no nulas que dependen de r y θ . Inc significa que el sistema propuesto es inconsistente; PC indica que el producto entre vectores siempre será cero; R e Im son soluciones exactas reales e imaginarias; P e Int son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales e integrales respectivamente que solo pueden ser resueltas numéricamente.

3.3.1. Formas n^μ 1100 y ℓ^μ 1100

En particular, unos cuadvectores ℓ^μ y n^μ ambos de la forma 1100 que satisfacen (1.39) y (1.40), para la métrica (2.1) en $\theta = \frac{\pi}{2}$ son

$$\ell^\mu = \left(\frac{1}{2a \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{B^2 r^2}{4}\right)}, \frac{\pm 1}{2a \left(1 + \frac{B^2 r^2}{4}\right)}, 0, 0 \right), \quad (3.21)$$

$$n^\mu = \left(a, \mp a \left(1 - \frac{2m}{r}\right), 0, 0 \right), \quad (3.22)$$

donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Estos vectores dan como resultado los escalares ópticos siguientes

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\pm 1}{ra \left(1 + \frac{B^2 r^2}{4}\right)^2}, & \sigma &= \frac{B^2 r}{2a \left(1 + \frac{B^2 r^2}{4}\right)^3} \\ \frac{d\Theta}{d\lambda} &= -\frac{-5 \left(1 + \frac{B^2 r^2}{4}\right) + 4}{2a^2 r^2 \left(1 + \frac{B^2 r^2}{4}\right)^5}, & \omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En particular el valor que adquieren en el horizonte de eventos $r = 2m$, es el siguiente

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{\pm 1}{2ma(1+B^2m^2)^2}, & \sigma &= \frac{B^2m}{a(1+B^2m^2)^3} \\ \frac{d\Theta}{d\lambda} &= -\frac{-5(1+B^2m^2)+4}{2a^2r^2(1+B^2m^2)^5}, & \omega &= 0.\end{aligned}\quad (3.24)$$

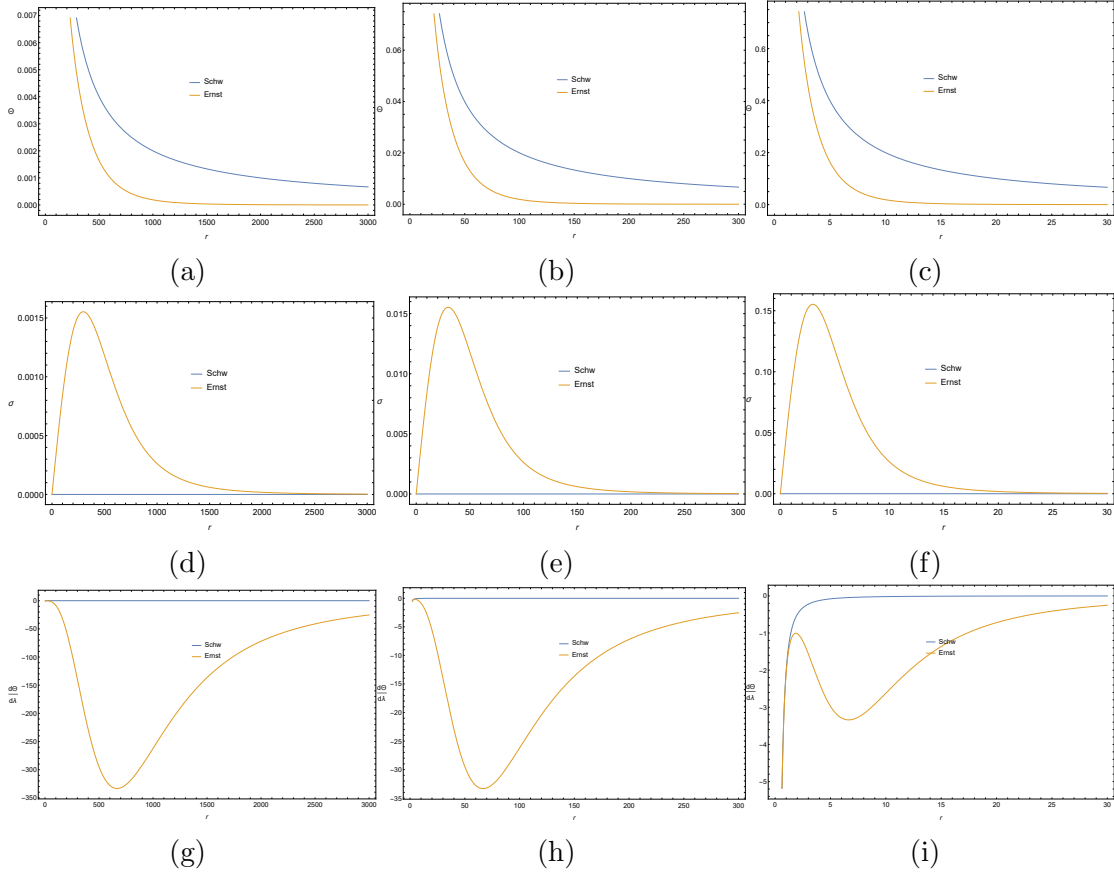


Figura 3.2: Escalares Ópticos de las métricas de Ernst (curva amarilla) y Schwarzschild (curva azul) para congruencias nulas. De arriba hacia abajo, el primer renglón corresponde a la expansión, el segundo al Shear y la tercera fila a la ecuación de Raychaudhuri. De izquierda a derecha las intensidades de campo están asociadas a cada columna cuyos valores son $B = 0.003$, 0.03 y 0.3 , en todos los casos $m = 1$ y $a = \frac{1}{2}$.

Para las congruencias nulas vemos que la diferencias respecto del caso de Schwarzschild es mayor que para las congruencias temporales. La expansión es siempre menor en presencia del campo magnético, aunque para distancias cercanas al horizonte son indistinguibles; en términos de rayos de luz diríamos que el campo conserva mayor tiempo un haz de luz, mientras que para el agujero negro sin campo magnético,

el haz de rayos converge más lentamente a medida que se acerca al agujero negro. Para mayores magnitudes del campo magnético el efecto de convergencia se presenta para radios más cercanos al horizonte. En cuanto a la distorsión, ésta no se presenta en ausencia del campo magnético, entonces en términos de un haz de rayos de luz, el campo magnético tiene el efecto de distorsionar dichos haces de luz. En la tercera fila se aprecia la evolución de la expansión, la cual disminuye hasta un mínimo, empezando después a aumentar, obedeciendo principalmente a la evolución del shear.

3.3.2. Escalar de Kretschmann

Para la métrica (2.1), el escalar de Kretschmann se reduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 K = \frac{1}{r^6(1 + B^2r^2 \sin^2 \theta)^8} & [144(7m^2 - 2rm)B^8r^8 \sin^8(\theta) \\
 & - 288(2B^2mr^3 + 6m^2 - rm)B^6r^6 \sin^6(\theta) \\
 & + 32(6B^4r^6 + 42B^2mr^3 + 31m^2 + 9rm)B^4r^4 \sin^4(\theta) \\
 & - 32(12B^4r^6 + 46B^2mr^3 - 6m^2 + 9rm)B^2r^2 \sin^2(\theta) \\
 & + 320B^4r^6 + 192B^2mr^3 + 48m^2]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

el denominador solamente posee una singularidad real en $r = 0$, al igual que en ausencia del campo magnético, sin embargo esta singularidad en la curvatura se hace más intensa, del orden de $1/r^{22}$ en presencia del campo magnético.

3.4. Tétradas Complejas Nulas

Tomando como base la métrica de Ernst (2.1), usaremos el algoritmo descrito en la sección (1.10) de ésta tesis, para construir un grupo de tetradas nulas. El primer paso en ésta construcción es reescribir la métrica de Ernst de la siguiente manera,

$$ds^2 = -\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \tag{3.26}$$

donde el resultado de la elección biunívoca es mostrado a continuación

$$\omega_0 = -\Lambda\sqrt{f}dt, \tag{3.27}$$

$$\omega_1 = \frac{\Lambda}{\sqrt{f}}dr, \tag{3.28}$$

$$\omega_2 = \Lambda r d\theta, \tag{3.29}$$

$$\omega_3 = \frac{r \sin \theta}{\Lambda} d\phi. \tag{3.30}$$

Con ésta elección construimos la tetrad m^μ y sin perdida de generalidad también usamos las ecuaciones (3.21) y (3.22) obteniéndose las tetradas siguientes

$$\ell^\mu = \left(\frac{1}{2af\Lambda}, \frac{\pm 1}{2a\Lambda}, 0, 0 \right), \quad m^\mu = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}\Lambda r}, i \frac{\Lambda}{\sqrt{2}r \sin \theta} \right), \quad (3.31)$$

$$n^\mu = (a, \mp af, 0, 0), \quad \bar{m}^\mu = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}\Lambda r}, -i \frac{\Lambda}{\sqrt{2}r \sin \theta} \right). \quad (3.32)$$

Ahora calculemos los escalares de Weyl, de Ricci y los coeficientes de espín y veamos que escalares ópticos encontramos.

3.4.1. Coeficientes de Espín.

Para la métrica de Ernst, los coeficientes de espín en el formalismo de Newman-Penrose son

$$\kappa = 0, \quad \rho = -\frac{1}{2ar\Lambda^2}, \quad (3.33)$$

$$\sigma = -\frac{B^2 r \sin^2 \theta}{4a\Lambda^3}, \quad \tau = -\frac{B^2 r \sin \theta \cos \theta}{2\sqrt{2}\Lambda^2}, \quad (3.34)$$

$$\pi = \frac{B^2 r \sin \theta \cos \theta}{2\sqrt{2}\Lambda^2}, \quad \nu = 0, \quad (3.35)$$

$$\mu = -a \frac{f}{r}, \quad \lambda = -a \frac{B^2 r f \sin^2 \theta}{2\Lambda}, \quad (3.36)$$

$$\epsilon = 0, \quad \gamma = 0, \quad (3.37)$$

$$\alpha = -\frac{B^2 r \sin \theta \cos \theta}{4\sqrt{2}\Lambda^2}, \quad \beta = -\frac{(3\Lambda - 4) \cos \theta}{2\sqrt{2}r\Lambda^2 \sin \theta}. \quad (3.38)$$

3.4.2. Escalares de Weyl

Para la métrica de Ernst tenemos que los escalares de Weyl en el formalismo de Newman-Penrose son

$$\Psi_0 = \frac{3B^2 \sin^2 \theta (\Lambda - 2)}{8a^2 \Lambda^6}, \quad (3.39)$$

$$\Psi_1 = \frac{3B^2 \cos \theta \sin \theta (\Lambda - 2)}{4\sqrt{2}a\Lambda^5}, \quad (3.40)$$

$$\Psi_2 = -(\Lambda - 2) \frac{(-B^2 r^2 + 3\Lambda f + 3\Lambda - 2f - 4)}{2r^2 \Lambda^4}, \quad (3.41)$$

$$\Psi_3 = \frac{3B^2 a f \cos \theta \sin \theta (\Lambda - 2)}{2\sqrt{2}a\Lambda^3}, \quad (3.42)$$

$$\Psi_4 = \frac{6a^2 f^2 (\Lambda - 1) (\Lambda - 2)}{\Lambda^2 r^2}. \quad (3.43)$$

3.4.3. Escalares de Ricci

Para la métrica de Ernst tenemos que los escalares de Ricci en el formalismo de Newman-Penrose son

$$\Phi_{00} = \frac{B^2 \sin^2 \theta}{4a^2 \Lambda^6}, \quad \Phi_{11} = \frac{B^2 \cos^2 \theta}{\Lambda^4} \quad (3.44)$$

$$\Phi_{01} = \frac{B^2 \sin \theta \cos \theta}{2\sqrt{2}a\Lambda^5}, \quad \Phi_{10} = \frac{B^2 \sin \theta \cos \theta}{2\sqrt{2}a\Lambda^5}, \quad (3.45)$$

$$\Phi_{02} = -\frac{B^2 f \sin^2 \theta}{2\Lambda^4}, \quad \Phi_{20} = -\frac{B^2 f \sin^2 \theta}{2\Lambda^4}, \quad (3.46)$$

$$\Phi_{12} = -\frac{B^2 a f \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}\Lambda^3}, \quad \Phi_{21} = -\frac{B^2 a f \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}\Lambda^3}, \quad (3.47)$$

$$\Phi_{22} = \frac{4a^2 f^2 (\Lambda - 1)}{r^2 \Lambda^2}, \quad \Lambda' = 0. \quad (3.48)$$

3.4.4. Escalares Ópticos

La parte real e imaginaria de las ecuaciones siguientes

$$-\rho = \Theta + i\bar{\omega}, \quad (3.49)$$

$$-\sigma = \zeta_1 + i\zeta_2, \quad (3.50)$$

se conocen como escalares ópticos; en particular, $\Theta = \frac{1}{2}\nabla_\alpha l^\alpha$ es la expansión, $\bar{\omega}$ es la torsión, y (ζ_1, ζ_2) el shear.

De manera directa tenemos que nuestra expansión y torsión son

$$\Theta = \frac{1}{2ar\Lambda^2}, \quad \bar{\omega} = 0. \quad (3.51)$$

Similarmente para el shear tenemos que

$$\zeta_1 = \frac{B^2 r \sin^2 \theta}{4a\Lambda^3}, \quad \zeta_2 = 0. \quad (3.52)$$

La expansión y el shear son los mismos que se muestran en la figura (3.2). Todos los resultados antes mencionados son válidos para todo ángulo θ .

3.4.5. Ecuaciones de Sachs

En un intento por encontrar la dependencia directa entre el parámetro afín λ y las coordenadas r y θ , usaremos las ecuaciones de Sachs [23],

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \phi_{00}, \quad (3.53)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \psi_0, \quad (3.54)$$

Estas ecuaciones dependen de σ y ρ que a su vez dependen de r y θ , usando la regla de la cadena, podemos notar que si tomamos a λ como el parámetro afín tenemos que

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho(r, \theta)}{d\lambda} = \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\lambda}, \quad (3.55)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma(r, \theta)}{d\lambda} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\lambda}, \quad (3.56)$$

si asociamos las ecuaciones anteriores a una matriz, basta con multiplicar por la matriz inversa para obtener los valores de \dot{r} y $\dot{\theta}$

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial r} & \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial r} & \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial r} & \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial r} & \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

de donde

$$\dot{\rho} = \frac{5\Lambda - 4}{4a^2 r^2 \Lambda^5}, \quad \dot{\sigma} = \frac{B^2 \sin^2 \theta (5\Lambda - 6)}{8a^2 \Lambda^6} \quad (3.58)$$

podemos notar que $\dot{\rho}$ posee la misma expresión que la ecuación (3.23), con excepción del factor de $\frac{1}{2}$, también notemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial r} & \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial r} & \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2ar^2\Lambda(2\Lambda - 3) & 2\Lambda^3 ar^2 \\ ar\Lambda^2(5\Lambda - 6) \tan \theta & -\frac{4 \csc 2\theta a \Lambda^3 (5\Lambda - 4)}{B^2 r} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

con estos datos tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a\Lambda^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

de las relaciones obtenidas en (3.60) vemos que

$$\Lambda^4 (\dot{r}^2 + r^2 f \dot{\theta}^2) = \frac{1}{4a^2}, \quad (3.61)$$

esta última ecuación la asociamos a una especie de energía cinética, la cual es constante y será nuestro indicador de que tan aceptable es la propuesta que sugerimos al inicio de la sección. A diferencia de lo que se observa en (2.42), donde es variable y depende de otros parámetros, en este caso suponemos que la relación (3.60) no denota una dependencia correcta, entonces no buscaremos integrarla para encontrar una expresión explícita para $r(\lambda)$ y $\theta(\lambda)$.

Capítulo 4

Conclusiones

Para muchos investigadores resulta interesante analizar los campos electromagnéticos y el movimiento de partículas cargadas en espacio tiempo curvos. En esta tesis, estudiamos el movimiento de partículas masivas con y sin carga, así como el movimiento de partículas sin masa en el espacio tiempo de Ernst, que representa un agujero negro de Schwarzschild estático inmerso en un campo magnético/eléctrico uniforme. Una situación como ésta puede modelar, aunque de una manera primitiva, una situación real puesto que las observaciones sugieren que hay un agujero negro en el centro de las galaxias y que éstos pueden poseer un campo magnético en su vecindad, aunque desconozcamos el origen de este campo.

El primer capítulo es un breve repaso de la teoría empleada en el presente trabajo; las expresiones explícitas presentadas son únicamente para métricas diagonales.

El segundo capítulo posee los resultados referentes a las geodésicas, así como las ecuaciones de movimiento correspondientes, obtenidas del Lagrangiano o Hamiltoniano. De este capítulo, en lo general concluimos lo siguiente,

- La configuración de un campo magnético real en la vecindad de un agujero negro no esta cerca de ser uniforme, pero la solución de Ernst plantea una buena aproximación de un campo electromagnético en la vecindad de un agujero negro.
- El efecto del campo magnético externo sobre las partículas de prueba sin masa o masivas es el de confinarlas, modificando las curvas de potencial, haciendo que posean un mínimo, máximo y puntos silla. Ésta modificación tiene como consecuencia que se generen órbitas circulares que provocan que las partículas estén precesando. El campo a su vez rompe la simetría axial de Schwarzschild causando que las geodésicas no sean integrables para un θ arbitrario.
- El máximo del potencial aumenta cuantitativamente y el efecto confinador del campo se va perdiendo conforme la partícula de prueba se acerca a los polos. Así como también, el campo magnético disminuye de manera efectiva la magnitud del momento angular si la carga es positiva y lo contrario si es negativa, mientras que en el caso eléctrico aumenta de manera efectiva la energía, si la carga es

positiva y lo contrario si es negativa. En el caso de partículas sin masa no se aprecian estas variaciones.

- La curvatura del espacio tiempo es generada por dos términos: la masa del agujero negro y la presencia del campo magnético/eléctrico. En el caso de partículas masivas, se añaden términos extra a las ecuaciones de movimiento si éstas están cargadas, porque interactúan directamente con los campos. La interacción de los campos magnéticos o eléctricos con partículas nulas es únicamente por medio de la curvatura del espacio-tiempo y no hace distinción entre campo magnético o eléctrico.
- La condición que debe satisfacer una partícula para que se mantenga en una superficie a θ constante es que se le debe aplicar una fuerza cuya aceleración es (2.13) y (2.35) para el caso magnético y eléctrico, respectivamente.
- No sabemos concretamente si hay una cuarta constante de movimiento para un θ arbitrario, podríamos suponer que existe para un número limitado de condiciones iniciales; en la literatura se han estudiado los casos para los que no existe la cuarta constante de movimiento y se describen como caóticos.
- Se determinó la ecuación para el momento angular que deben satisfacer las órbitas ISCO, como función del campo magnético B y la masa del agujero negro, más allá de este valor la partícula puede tener una órbita estable. El radio de la ISCO es decreciente, es decir, se acerca al horizonte a medida que se aumenta B .

El tercer capítulo muestra un desarrollo de las congruencias geodésicas nulas y temporaloides y una aplicación del formalismo de Newman-Penrose al caso de congruencias nulas.

- En cuanto a los escalares ópticos temporaloides. Comenzando por la expansión, se puede notar de las gráficas (3.1a), (3.1b) y (3.1c), que la expansión en el caso de Schwarzschild es monótona decreciente y siempre positiva, en cuanto a la de Ernst es decreciente y en ciertas regiones negativa, provocando que la congruencia converja (debido a la presencia del campo); hay una singularidad en $k^2 - f\Lambda^2$, dicha singularidad se aleja del horizonte de eventos si aumentamos k y se acerca al horizonte si aumentamos el campo B .
- El escalar de expansión para el caso de congruencia nula, mantiene el mismo patrón en las métricas de Ernst y Schwarzschild, la presencia del campo lo único que hace es que la disminuye cuantitativamente.
- El shear o distorsión temporaloides (figuras (3.1d), (3.1e) y (3.1f) para Schwarzschild es monótono decreciente y siempre positivo mientras que en el caso de Ernst tiene un mínimo y una singularidad a partir de la cuál el shear se vuelve imaginario y para radios mayores mantiene el comportamiento del shear de Schwarzschild.

- La ecuación de Raychaudhuri temporaloides mantiene el mismo patrón en un inicio en ambos casos, monótono creciente negativo; llegando al punto $k^2 - f\Lambda^2$ Ernst posee una singularidad donde a partir de la cuál se vuelve positivo monótono decreciente.
- En el shear correspondiente al caso de congruencia nula, éste es cero para el caso de Schwarzschild, mientras que en Ernst es inducido por el campo, provocando que genere una contracción en las geodésicas.

También se puede mencionar que la situación del agujero negro de Schwarzschild en un campo magnético externo se ha abordado en varios trabajos previos, considerando que el campo magnético es débil y se trata como una perturbación, sin embargo trabajando con la solución exacta de Ernst no tenemos esta limitante ya que la solución vale para cualquier magnitud del campo (excepto si son campos fuera del límite de la electrodinámica de Maxwell).

Finalmente mencionamos que surgieron varias preguntas en el transcurso de este trabajo, varias de las cuales no abordamos por falta de tiempo. Podemos mencionar la existencia de una cuarta constante de movimiento, la cual para demostrar si existe o no deberíamos plantear la ecuación para el tensor de Killing para esta métrica. Por otra parte también encontramos que esta métrica ha sido estudiada usando los mapas de Poincaré que son regiones en el espacio fase que nos podrían indicar dónde podrían existir estas condiciones de integrabilidad para las geodésicas o más precisamente que condiciones iniciales aplicar.

Apéndice A

Código Maple (GRTensor III)

El código usado en Maple para encontrar las congruencias nulas y temporaloides se muestra en las secciones de éste apéndice.

NOTA IMPORTANTE. Para reproducir por completo los resultados de la tesis se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Instalar Maple 2020 en Windows 10 en la carpeta " $C : \backslash Program Files \backslash Maple2020$ "
- Descargar el paquete GRTensor III en formato .zip del enlace (<https://github.com/grtensor/grtensor>) y desempaquetar en la carpeta " $C : \backslash Program Files \backslash Maple2020$ "
- En un archivo de texto escribir:

```
Ndim_ := 4 :  
x1_ := t :  
x2_ := r :  
x3_ := theta :  
x4_ := phi :  
sig_ := 2 :  
g11_ := -(1 + (B ^ 2 * r ^ 2 * sin(theta) ^ 2)/4) ^ 2 * (1 - 2 * m/r) :  
g22_ := (1 + (B ^ 2 * r ^ 2 * sin(theta) ^ 2)/4) ^ 2 / (1 - 2 * m/r) :  
g33_ := (1 + (B ^ 2 * r ^ 2 * sin(theta) ^ 2)/4) ^ 2 * r ^ 2 :  
g44_ := r ^ 2 * sin(theta) ^ 2 / (1 + (B ^ 2 * r ^ 2 * sin(theta) ^ 2)/4) ^ 2 :  
Info_ := 'Métrica de Ernst':
```

guardarlo como ernst.mpl en
" $C : \backslash Program Files \backslash Maple2020 \backslash grtensor - master \backslash metrics$ ".

Una vez que se han realizado las instrucciones anteriores, solo basta copiar y pegar el código que se enuncia en las secciones siguientes, en una hoja en blanco en el editor de Maple y presionar las teclas $Ctrl + Shift + Enter$ al mismo tiempo y todo el código se ejecutará.

A.1. Congruencias Temporaloides

```
restart;
libname;
libname := "C : \Program Files\Maple2020\grtensor - master\metrics\lib", lib-
name;
grOptionMetricPath := "C : \Program Files\Maple2020\grtensor-master\metrics";
with(grtensor);
qload(ernst);
grcalc(g(dn, dn));
grdisplay(g(dn, dn));
grdef('u{\wedge a} := [u0(r, theta), u1(r, theta), 0, 0]');
grcalc(u(up), vnorm[u], acc[u](up));
grdisplay(u(up));
gralter(u(up), vnorm[u], acc[u](up), simplify);
grdisplay(vnorm[u], acc[u](up));
ans := pdsolve([grcomponent(acc[u](up), [t]) = 0, grcomponent(acc[u](up), [r]) = 0,
grcomponent(acc[u](up), [theta]) = 0, grcomponent(acc[u](up), [phi]) = 0,
grcomponent(vnorm[u]) = -1]);
grdef('up{\wedge a} := [k * r / (r - 2 * m), -sqrt(r * (k * k * r + 2 * m - r)) / r, 0, 0]');
grcalc(up(up), vnorm[up], acc[up](up));
gralter(up(up), vnorm[up], acc[up](up), simplify);
grcalc(expsc[up], shear[up], vor[up]);
gralter(expsc[up], shear[up], vor[up], simplify);
grdisplay(up(up), vnorm[up], acc[up](up), expsc[up], shear[up], vor[up]);
grdef('ray{} := -expsc[up] * expsc[up] / 3 - shear[up] * shear[up] + vor[up] * vor[up] -
R{ab} * up{\wedge a} * up{\wedge b}');
grcalc(ray);
gralter(ray, simplify);
grdisplay(ray);
```

A.2. Congruencias Nulas

```
restart;
libname;
libname := "C : \Program Files\Maple2020\grtensor - master\metrics\lib", lib-
name;
grOptionMetricPath := "C : \Program Files\Maple2020\grtensor-master\metrics";
with(grtensor);
qload(ernst);
grdef('l{\wedge a} := [l0(r), l1(r), 0, 0]');
grdef('kk{\wedge a} := [kk0(r), kk1(r), kk2(r), kk3(r)]');
grdef('p{} := l{a} * kk{\wedge a}');
```

```

grdef('tp{\wedge a} := kk{\wedge b} * l{\wedge a; b}');
grcalc(l(up), kk(up), p, vnorm[l], vnorm[kk], tp(up));
gralter(p, vnorm[l], vnorm[kk], tp(up), simplify);
grdisplay(l(up), kk(up), p, vnorm[l], vnorm[kk], tp(up));
t1 := simplify(grcomponent(p), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
t2 := simplify(grcomponent(vnorm[kk]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
t3 := simplify(grcomponent(vnorm[l]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
a0 := simplify(grcomponent(tp(up), [t]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
a1 := simplify(grcomponent(tp(up), [r]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
a2 := simplify(grcomponent(tp(up), [theta]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
a3 := simplify(grcomponent(tp(up), [phi]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
ans := pdsolve([t1 = -1, t2 = 0, t3 = 0, a0 = 0, a1 = 0, a2 = 0, a3 = 0]);
grdef('kp{\wedge a} := [1/(2 * k * (1 - 2 * m/r) * (1 + B \wedge 2 * r \wedge 2/4) \wedge 2), -1/(2 * k * (1 +
B \wedge 2 * r \wedge 2/4) \wedge 2), 0, 0]');
grdef('lp{\wedge a} := [k, k * (1 - 2 * m/r), 0, 0]');
grdef('pp{\wedge} := lp{\wedge a} * kp{a}');
grdef('tpp{\wedge a} := kp{\wedge b} * lp{\wedge a; b}');
grcalc(kp(up), lp(up), vnorm[kp], vnorm[lp], pp, tpp(up));
gralter(kp(up), lp(up), vnorm[kp], vnorm[lp], pp, tpp(up), simplify);
grdisplay(kp(up), lp(up), vnorm[kp], vnorm[lp], pp, tpp(up));
simplify(grcomponent(vnorm[kp]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(vnorm[lp]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(pp), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(tpp(up), [t]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(tpp(up), [r]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(tpp(up), [theta]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(tpp(up), [phi]), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
grdef('Q{ab} := g{ab} + kp{a} * lp{b} + kp{b} * lp{a}');
grdef('B{\wedge ab} := kp{\wedge a; b}');
grdef('Bg{\wedge ab} := Q{\wedge ac} * Q{\wedge db} * B{\wedge cd}');
grcalc(B(up, dn), Q(dn, dn), Bg(up, dn));
gralter(B(up, dn), Q(dn, dn), Bg(up, dn), simplify);
grdisplay(B(up, dn), Q(dn, dn), Bg(up, dn));
grdef('expansion{\wedge} := Q{\wedge a \wedge b} * Bg{ab}');
grdef('Tshear{ab} := Bg{(ab)} - (1/2) * expansion * Q{ab}');
grdef('escShear{\wedge} := sqrt(Tshear{\wedge ab} * Tshear{\wedge ba}');
grdef('Ttwist{ab} := Bg{[ab]}');
grdef('escTwist{\wedge} := Ttwist{\wedge a \wedge b} * Ttwist{ab}');
grdef('RK{\wedge} := R{ab} * kp{\wedge a} * kp{\wedge b}');
grdef('ray{\wedge} := -(1/2) * expansion * expansion - escShear + escTwist - RK');
grcalc(expansion, Tshear(dn, dn), escShear, Ttwist(dn, dn), escTwist, RK, ray);
gralter(expansion, Tshear(dn, dn), escShear, Ttwist(dn, dn), escTwist, RK, ray, sim-
plify);

```

```
grdisplay(expansion, Tshear(dn, dn), escShear, Ttwist(dn, dn), escTwist, RK, ray);
simplify(grcomponent(expansion), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(escShear), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(escTwist), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
simplify(grcomponent(ray), [cos(theta) = 0, sin(theta) = 1]);
grcalc(RiemSq);
gralter(RiemSq, simplify);
grdisplay(RiemSq);
xx := simplify(grcomponent(RiemSq), [cos(theta) = 0, B^2 * r^2 + 4 = 4 * A, 1 -
2 * m/r = f]);
simplify(xx, [B^2 * r^2 = 4 * x]);
```

Bibliografía

- [1] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, vol. 116, no. 6:p. 061102, 2016.
- [2] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, no. L1:p. 1, 2019.
- [3] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, no. L2:p. 1, 2019.
- [4] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, no. L3:p. 1, 2019.
- [5] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, no. L4:p. 1, 2019.
- [6] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, no. L5:p. 1, 2019.
- [7] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, no. L6:p. 1, 2019.
- [8] R. M. Wald. *General Relativity*. Amsterdam University Press, 1984.
- [9] J. A. Wheeler C. W. Misner, K. S. Thorne. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [10] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004.
- [11] V. Folov and I. Novikov. *Black Hole Physics*. Springer Publishing, 1998.
- [12] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [13] E. Newman and R. Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Mathematical Physics*, vol. 3(3):p. 566, 1962.

- [14] S.W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.
- [15] F. Ernst. Black holes in a magnetic universe. *Mathematical Physics*, vol. 17:pág. 54–56, 1976.
- [16] M. A. Melvin. Dynamics of cylindrical electromagnetic universes. *Physical Review*, vol. 139(1B):B225–B243, 1965.
- [17] Hackstein J. and Hackmann E. Influence of weak electromagnetic fields on charged particle ISCOs. *General Relativity And Gravitation*, 52(2), 2020.
- [18] V.P.Frolov, A.A.Shoom. Motion of charged particles near a weakly magnetized Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, page 82, 2010.
- [19] A.Tursunov, Z.Stuchlík, M.Kolos. Circular orbits and related quasi-harmonic oscillatory motion of charged particles around weakly magnetized rotating black holes. *Phys. Rev. D*, pages 93, 084012, 2016.
- [20] N.I. Shakura, R.A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, 24:p. 337 – 355, 1973.
- [21] Marek A. Abramowicz and P. Chris Fragile. Foundations of Black Hole Accretion Disk Theory. *Living Rev. Relativity*, 16, 2013.
- [22] M. da Silva and O. Goldoni. Energy conditions for electromagnetic field in presence of cosmological constant. *Proceedings Of 5Th International School On Field Theory And Gravitation*, 2009.
- [23] R. Sachs. Gravitational waves in general relativity. VI. The outgoing radiation condition. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, vol. 264, no. 1318:p. 309, 1961.