CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Formas de razonamiento que muestran estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas verbales con el uso de un sistema de geometría dinámica (GeoGebra)

Tesis que presenta

Adrián Gómez Arciga

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

En la especialidad de

Matemática Educativa

Director de Tesis: **Dr. Luz Manuel Santos Trigo**

Ciudad de México Septiembre, 2021

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Doctorado en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN

Becario: 627612

Agradecimientos

Al Dr. Luz Manuel Santos Trigo por su orientación, paciencia y disponibilidad durante el desarrollo de la investigación, y porque a través de su trayectoria y profesionalismo entiendo el compromiso que tengo conmigo mismo y con la sociedad.

A mis sinodales, Dr. Luis Moreno Armella, Dr. Fernando Barrera Mora, Dr. Matías Camacho Machín y Dr. Armando Solares Rojas, por sus valiosas aportaciones para la mejora del trabajo.

Al Dr. Isaid Reyes Martínez por apoyarme en todo el proceso de la recolección de datos. El intercambio de ideas y las platicas que teníamos después de cada sesión con los estudiantes fueron de gran contribución y mejora para mi trabajo final.

A la Dra. Carmen Olvera Martínez, quien no solo estuvo atenta a mis avances y abonó a la estructuración del documento, sino también estuvo para escucharme y apoyarme cuando la duda, la ansiedad y la frustración se hacían presentes.

A mis compañeros del Math Problem Solving Team (Daniel, William, Miguel, Hugo y junior) que, entre reuniones, discusiones, debates y chistes, encontré hermandad en ellos.

A mi madrina Laura (mi Nina), porque siempre ha velado por mis intereses incondicionalmente. Ha sido, y siempre será, mi segunda madre.

A Adriana Parra que, a pesar de la gran carga de trabajo que tiene constantemente, siempre me atendió con calidez y con una sonrisa, logrando que todos los tramites que se tenían que hacer semestre tras semestre fueran llevaderos.

Dedico este trabajo a:

Mi madre y a mi padre, quienes siempre han tenido confianza en mis proyectos y decisiones, y de quienes he aprendido a seguir adelante sin importar las adversidades que surjan en el camino. Pero también dedico este trabajo a **Nirvana** (mi chiquis) que, con el deseo de inspirarla a mejorar, me comprometo a no dejar de aprender para poder enseñar.

Tabla de contenido

Resumen

El propósito de este estudio fue analizar cómo el uso sistemático de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) contribuye e influye en las formas de razonamiento que estudiantes de nivel bachillerato construyen y exhiben en la resolución de problemas verbales. Los participantes trabajaron en un escenario estructurado en términos de la resolución de problemas y mostraron dos acercamientos de solución relacionados: Un enfoque geométrico-dinámico, que les permitió construir, explorar y resolver los problemas geométricamente; y un segundo acercamiento que incluye el planteamiento de ecuaciones a partir de analizar los modelos dinámicos resultantes del primer acercamiento.

El estudio se realizó con un grupo de 20 estudiantes de nivel bachillerato que se encontraba cursando la materia de Matemáticas I en el primer semestre. La implementación y el desarrollo de las actividades y las tareas incluyeron 28 sesiones de dos horas cada una. Para el desarrollo de las sesiones, se formaron diez parejas de estudiantes, se proporcionó a cada una un iPad con las apps de GeoGebra instaladas, y se dispuso de un proyector para que pudieran presentar sus acercamientos al resto del grupo. Esta organización fue debido a que solo se contó con diez iPads para los estudiantes. También cabe señalar que no se tuvo acceso a internet durante las sesiones.

Los resultados muestran que los estudiantes se apropiaron de recursos y estrategias mediadas por el SGD que permitieron representar geométricamente los conceptos involucrados en los problemas, explorar y analizar relaciones entre los elementos de los modelos dinámicos construidos y hallar las soluciones. Asimismo, gracias a la exploración y análisis de relaciones, fue posible discutir con los estudiantes conceptos que no solo no se abordan cuando se resuelven estos problemas, sino que están íntimamente asociados con temas como razón, dominio, valores máximos y mínimos, cónicas, proporcionalidad directa e inversa.

Abstract

The aim of this study was to analyze the extent to which the systematic high school students' use of a Dynamic Geometry System (DGS) shapes and influences their ways of reasoning to represent and solve word problems. Based on a problem-solving framework, the participants showed two main approaches to deal with the problems: One that involves the construction of dynamic models of the problems that helped them identify and explore mathematical relationships that were important to solve the problems; and a second approach that focused on finding a parametrization of objects' behaviors that were involved in the models.

The study was carried out with a group of 20 high school students who were studying a first algebra course. The implementation and development of the activities and tasks included 28 sessions of two hours each. During the development of the sessions, the students worked in pairs using GeoGebra via an iPad. A projector was available so that the participants could present their approaches to the rest of the group.

The results showed that the students consistently developed resources and strategies proper and associated with the use of a DGS such as dragging objects within the task model, finding loci, and exploring mathematical relations to approach and solve the problems. Likewise, the participants' representations, exploration and analysis of relationships led them to discuss geometric meaning of involved concepts that were relevant to solve the tasks. In addition, themes that emerged during the participants' word problems approach include ratio of parameters, domains of relationships, optimization points, and conic sections. Thus, the students' use of GeoGebra was important to activate the tools affordances to represent and reason to solve the problems.

Capítulo 1: El Problema de Investigación

En este capítulo se introduce la problemática y el contexto de la investigación en términos de establecer una relación entre el estudio del álgebra, la resolución de problemas verbales y el uso de tecnologías digitales. Se presentan algunos antecedentes sobre la resolución de problemas verbales con el uso de tecnología, para comprender ¿qué se ha hecho? y ¿qué sigue? Así, se propone y se justifica el problema de investigación. Finalmente, se plantea la pregunta que guio esta investigación.

1.1 Descripción de la problemática.

Sobre tecnología digital.

En la actualidad, cada vez más jóvenes tienen acceso a tecnologías digitales que les permiten comunicarse con sus amigos a través de las redes sociales, compartir información, jugar en línea, interactuar con otras personas, así como obtener información de todo tipo de temas. Estas tecnologías digitales, a través de una amplia gama de dispositivos, también tienen presencia dentro del contexto educativo del estudiante. En particular, en el estudio de las matemáticas se cuenta con herramientas o desarrollos digitales como calculadoras gráficas y simbólicas, aplicaciones de acción matemática (como GeoGebra) para teléfonos inteligentes, pizarras interactivas y computadoras. Algunas aplicaciones permiten trazar gráficos, resolver ecuaciones y comunicar información, creando oportunidades para el desarrollo de la comprensión matemática al favorecer múltiples formas de representar, conectar y explorar conceptos matemáticos (Ndlovu et al., 2020; Roschelle et al., 2017). De hecho, Santos-Trigo y Aguilar-Magallón (2018) afirman que el uso coordinado y sistemático de estas herramientas o desarrollos digitales influye y amplía no solo las formas de representar y explorar los problemas o conceptos matemáticos, sino también las dinámicas que se originan en los ambientes de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, incorporar las tecnologías digitales de forma productiva en estos ambientes no ha sido un proceso sencillo. Hoy en día su implementación continúa por detrás de la velocidad de la evolución digital, posicionándola en un estatus marginal en lo que a educación matemática se refiere (Cevikbas & Kaiser, 2020). Y esto a pesar de que se reconoce que el uso de la tecnología digital en los ambientes de enseñanza-aprendizaje es una necesidad en el siglo XXI, resulta importante analizar cómo el uso sistemático de diversas tecnologías incide en la formación matemática de los estudiantes (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2011).

Entre las dificultades de su implementación se pueden señalar la gran cantidad de contenidos, los cuales se centran en procedimientos y reglas, las características de las tareas de instrucción y que un número considerable de profesores no tiene el entrenamiento que se requiere (Arcavi et al., 2017). Por ejemplo, en Álgebra es común encontrarse con "problemas" que piden hallar las raíces de una ecuación cuadrática, ¿cómo abordarlos si se permite el uso de una computadora o de una aplicación de teléfono inteligente? Más aún, ¿cuál es el aprendizaje que se promueve en los estudiantes si se permite solucionarlos con tecnología? Este tipo de problemas dejan de ser problemas si se incluye el uso de tecnología digital, pues con solo introducir en el dispositivo la ecuación planteada se obtendría el resultado sin necesidad de desarrollar los algoritmos o procedimientos que se hacen cuando se trabaja en lápiz y papel.

Para implementar la tecnología digital en la resolución de problemas, Arcavi et al. (2017) proponen que los contenidos deben transitar de un enfoque centrado en procedimientos y reglas a uno más conceptual, donde aspectos técnicos del Álgebra como despejar variables, simplificar expresiones, desarrollar operaciones entre expresiones algebraicas, resolver sistemas de ecuaciones, derivar, puedan ser solventados con las herramientas o desarrollos digitales para que los estudiantes dediquen más tiempo a desarrollar recursos y estrategias que permitan describir relaciones y resolver problemas que involucren la construcción y uso de relaciones funcionales.

Aunque esto pareciera que desatiende ideas o elementos importantes del Álgebra, no es así, sino todo lo contrario, analizar la forma en que se relacionan dos objetos o conceptos matemáticos a través de identificar patrones o invariantes es uno de los objetivos principales en el estudio del Álgebra porque favorece la comprensión conceptual de los procesos algebraicos (Kieran, 2020).

Entonces, si se implementa la tecnología digital en las clases de matemáticas, ¿es necesario modificar los contenidos que se imparten en los planes de estudio de Matemáticas o la forma en cómo se imparten? El debate que mantiene la comunidad académica sobre el impacto que puede tener el uso de tecnología en el currículo oficial sigue siendo polémico (Rojano & Sutherland, 2020). Sin embargo, su inclusión obliga a reflexionar sobre la pertinencia de los temas que se enseñan en Álgebra y la manera en que se enseñan; dado que gran parte de estos temas están orientados a dominar reglas y algoritmos, los estudiantes deben aprender a decidir cuáles procedimientos delegan a la tecnología y cuáles valen la pena ser analizados en términos de significados y formas de resolver problemas (Thomas, 2017).

Sobre Álgebra.

Describir qué es el álgebra en el ámbito educativo implica analizar las diversas interpretaciones que pueden darse a sus conceptos básicos y al pensamiento algebraico (Kendal & Stacey, 2004). Una idea central en el estudio del álgebra es la idea de generalización, que involucra el uso de un sistema de símbolos y un lenguaje propio para representar y operar la generalidad de situaciones expresadas verbalmente (Mason, 2005). Es decir, con álgebra es posible representar ideas abstractas y utilizarlas para comprender un fenómeno específico.

Por ejemplo, si se utiliza la letra n para representar el número de lados de un polígono regular, se puede plantear una fórmula (función) en términos de n para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados; estableciendo esta generalidad es posible comprender el fenómeno de cómo cambia la suma de los ángulos interiores de un polígono regular en términos del número de sus lados (en este caso, n actúa como una variable de una expresión algebraica "$180(n-2)$" que, en dicho contexto, solo tiene sentido para valores enteros mayores que 2).

La generalización en el comportamiento de un fenómeno se establece mediante el reconocimiento de patrones, que significa identificar lo que es constante de caso en caso, así como lo que varía entre casos (en el ejemplo anterior los casos serían el triángulo, el cuadrado, el pentágono, el hexágono, etc.). Y esto es, justamente, uno de los objetivos principales cuando se estudia Álgebra (Kieran, 2020). Además, una vez que se establece una generalización, respecto a una estructura matemática, puede llegar a ser: un punto de partida para realizar nuevas exploraciones en matemáticas, una herramienta para resolver problemas o una base formal para el razonamiento deductivo (Kilhamn et al., 2019).

En este contexto, los entornos digitales juegan un papel importante en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, porque les permiten acceder con anticipación a ideas valiosas en Álgebra (y por ende en Matemáticas): la generalización y el análisis de la variación (Rojano, 2018). Conforme la tecnología ha ido evolucionando, han surgido propuestas o enfoques que intentan integrarla en los planes de estudio de matemáticas: los han ido cambiando gradualmente de un enfoque tradicional, donde dedican gran parte de su contenido al desarrollo de competencias asociadas a la manipulación simbólica para que los estudiantes resuelvan ecuaciones algebraicas y generen expresiones algebraicas equivalentes, a un enfoque que destaca las relaciones funcionales, donde se promueve la modelación matemática y el uso de herramientas digitales (como los sistemas de álgebra computacional) que permiten la integración efectiva del álgebra con las otras ramas centrales de las matemáticas que se enseñan en la escuela (Fey & Smith, 2017). De hecho, es reconocido que, independientemente del uso de tecnología digital, el tema de funciones es un hilo conductor a lo largo del plan de estudios de matemáticas porque permite que los estudiantes adquieran una variedad de habilidades matemáticas: reconocer y describir relaciones funcionales, analizar, interpretar y comparar diversas representaciones de funciones, caracterizarlas por sus propiedades y resolver problemas con ayuda de funciones (Günster & Weigand, 2020).

Así, bajo el enfoque de funciones, el Álgebra puede ser visto como un medio para modelar situaciones y fenómenos de una diversidad de contextos en el cual se equilibra el aprendizaje de conceptos y técnicas y el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas (Graham et al., 2010; Rojano, 2018). Entonces, en lugar de pensar en el álgebra como una colección de técnicas de manipulación de símbolos para encontrar valores desconocidos de x (incógnita), tiene más sentido pensarlo como una forma de expresar y razonar sobre las relaciones entre cantidades o datos que varían en un problema, donde no solo se motiva el desarrollo del pensamiento algebraico, sino también el desarrollo del pensamiento funcional. Ante esto, surge la pregunta ¿qué tipo de problemas deben plantearse?

En un curso común de Álgebra los problemas verbales ocupan un espacio significativo en el plan de estudios de la disciplina, porque introducen a los estudiantes en el planteamiento de ecuaciones, posicionándolos, así, como uno de los temas más relevantes cuando se estudia Álgebra (Amado et al., 2019). Por esta razón, antes de usar o plantear otros tipos de problemas, vale la pena considerar a los problemas verbales para resolverlos bajo un enfoque orientado a funciones con el uso de tecnología digital y, posteriormente, analizar los resultados.

Sobre problemas verbales

Los problemas verbales se caracterizan por ser descripciones de situaciones problemáticas en las que se plantean una o más preguntas y que, para llegar a su solución, es necesario utilizar los datos numéricos y formular relaciones asociadas con en el enunciado del problema (Verschaffel et al., 2000). En los planes de estudio se destaca la importancia de que los estudiantes, al enfrentarse a problemas verbales, puedan desarrollar sus habilidades para resolver problemas y aprender nuevos conceptos (Verschaffel et al., 2020). Un ejemplo de problema verbal es:

Una llave puede llenar un depósito en 10 minutos y otra en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo pueden llenar el depósito las dos llaves juntas? (Baldor, 2001, p. 259)

Como puede notarse, el problema cuenta con los datos suficientes para responder la pregunta. Lo único que debe hacerse es identificar la relación que hay entre los datos conocidos y la incógnita, que en este caso es que la suma de las cantidades de los litros que llena cada llave por minuto equivale a la cantidad de litros que llenan ambas por minuto. Aunque parece redundante no lo es, esta equivalencia se expresa algebraicamente como: $V/10 + V/20 = V/x$, donde V es el volumen del depósito en litros, y x son los minutos en que llenan el depósito las dos llaves si trabajan juntas. Si se resuelve la ecuación para x, se obtiene la solución del problema ($x = 20/3 = 6.\overline{6}$ minutos).

Entre los objetivos de este tipo de problemas, destaca el que los estudiantes logren plantear ecuaciones algebraicas para resolverlos. Y para ello, normalmente recurren a un esquema muy similar al propuesto por Rees y Sparks (2005) en su libro de Álgebra, el cual se divide en seis pasos: 1) comprender el problema; 2) identificar los datos conocidos y desconocidos; 3) asignar a un dato desconocido la incógnita (generalmente representada con la letra x); 4) expresar los datos desconocidos que restan en términos de la incógnita; 5) formular la ecuación; y, 6) resolver la ecuación y comprobar el resultado. La intención de este esquema u otros parecidos es que los estudiantes tengan una guía que les permita enfrentarse a los problemas verbales mediante recursos y procedimientos algebraicos y solucionarlos.

Sin embargo, bajo este enfoque tradicional donde la prioridad es plantear y resolver ecuaciones para obtener la solución de los problemas, se ha identificado que, a pesar de que los estudiantes los resuelven correctamente, no muestran una comprensión plena de las situaciones que se les plantean. Esto se debe a que una de las habilidades que desarrollan, cuando implementan estos procedimientos, es la de reconocer o identificar palabras clave como "más", "la diferencia de", "el doble de", "es igual a", etc., que los guían a la selección de alguna operación aritmética, fórmula geométrica o expresión algebraica que les permite resolver el problema sin necesidad de prestar atención a su contexto (Verschaffel et al., 2000). Además, muchos estudiantes, aunque conocen los métodos algebraicos para resolver problemas verbales, prefieren utilizar cálculos numéricos, optando por el razonamiento aritmético en lugar del algebraico (Amado et al., 2019).

Entonces, ¿qué tipo de razonamiento se promueve o fomenta en los estudiantes cuando se enfrentan a los problemas verbales? ¿Tiene sentido enfocar la atención hacia la construcción de los modelos algebraicos de los problemas verbales? ¿Deben modificarse los problemas o las formas de resolverlos? En general, cuando los estudiantes se enfrentan a problemas matemáticos se espera que desarrollen: una base de conocimiento organizado y flexiblemente accesible que involucre el conocimiento conceptual relevante (por ejemplo, conocimiento de los diferentes tipos de problemas) y el conocimiento procedimental (es decir, estrategias de solución formales e informales); heurísticas, que son estrategias para identificar patrones, invariantes o relaciones que ayudan a resolver un problema cuando se desconoce algún procedimiento o fórmula para obtener su solución; estrategias metacognitivas, es decir, estrategias para monitorear y autoevaluar los procesos utilizados en la resolución de problemas y; actitudes consistentes con el quehacer de la disciplina (Schoenfeld, 1985, 1992; De Corte et al., 1996). En este sentido, las dificultades que presentan los estudiantes para aprender nuevas estrategias o formas de razonamiento que les permitan resolver problemas verbales es posible que se deban a una enseñanza basada en un enfoque que privilegia el uso de reglas y procedimientos para resolverlos (Gökkurt et al., 2018). Cambiar el enfoque en las formas de resolverlos ha mostrado que contribuye a construir nuevas formas de razonamiento en los estudiantes y a mejorar su comprensión (Verschaffel et al., 2020). ¿En qué consisten estas propuestas y qué impacto han tenido sobre el tipo de razonamiento que construyen los estudiantes? ¿Incluyen el uso de tecnología digital?

1.2 Antecedentes

Las propuestas curriculares en el estudio del Álgebra se han ido actualizando, y enfatizan cada vez más en la importancia de que los estudiantes se involucren en actividades de razonamiento y comprensión de significados del enunciado y sus soluciones, de tal manera que puedan explorar e identificar patrones, relaciones y funciones, construir modelos de situaciones que involucran fenómenos de variación, y discutir sobre las estructuras asociadas con el uso de símbolos algebraicos (Graham et al., 2010). En particular, en la resolución de problemas verbales han surgido propuestas con base en el marco de resolución de problemas que buscan que los estudiantes experimenten, articulen y debatan sobre los diferentes acercamientos a la solución (Blum & Niss, 1991; Verschaffel et al., 2000). Los resultados indican que es viable y más productivo trabajar bajo este enfoque.

Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández (2012) documentaron sobre las técnicas que alumnos de primer semestre de bachillerato utilizaron en su interacción con la hoja electrónica de cálculo (Excel) para resolver problemas algebraicos verbales de tasa: los autores distinguen este tipo de problemas por establecer relaciones entre cantidades no homogéneas como tiempo y dinero (ejemplo, "para la presentación de una obra de teatro se venden boletos de preventa a 40 y a $50 el día del espectáculo. Si entraron 480 personas al teatro y se obtuvieron $21000, ¿cuántas personas compraron boleto de preventa y cuántas compraron el día del espectáculo?" p. 94). Mostraron como el uso de la tecnología posibilitó el surgimiento de nuevas técnicas ("*tabla de valores, calculadora, f*órm*ulas recursivas, ensayo numérico sistematizado, relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables, y celda como variable"* p. 105) y propició la exploración, la búsqueda de patrones y relaciones, la formulación de conjeturas y la generalización, formalización y justificación de argumentos. Los autores concluyeron que la hoja electrónica de cálculo permitió el desarrollo del razonamiento algebraico asociado con la generalización y la expresión de generalidades, usando lenguajes simbólicos cada vez más formales. No obstante, también identificaron que los estudiantes tuvieron dificultades para determinar los significados de los símbolos x e y: los utilizaban como etiquetas, no los operaban o manipulaban como incógnitas o variables.

Arnau y Puig (2013) presentaron una investigación en la cual analizaron cómo influía la enseñanza de resolución de problemas verbales de diversos contextos con la hoja de cálculo en estudiantes de segundo curso de secundaria obligatoria (entre 13 y 14 años). Ellos concluyeron que el potencial dinámico de la hoja de cálculo favoreció el desarrollo de estrategias apoyadas en la generación de una gran cantidad de números, pero no contribuyó en el aprendizaje de la resolución algebraica de problemas. De hecho, observaron una disminución del uso del lenguaje algebraico cuando se resolvían problemas y un aumento en el uso de la estrategia de tanteo sistemático sobre las cantidades. Así, advierten que, a pesar de los beneficios o potencialidades que puede tener el uso de una hoja de cálculo para resolver problemas verbales, es necesario tener presentes los riesgos o contratiempos que encierra.

En un estudio más reciente, elaborado por Amado et al. (2019), se analizaron las formas en que, estudiantes de secundaria entre 13 y 14 años, representaron y resolvieron problemas verbales bajo un enfoque de resolución de problemas y con el uso de las herramientas de las hojas de cálculo. Los autores encontraron que, a pesar de que la hoja de calculo les ayudó a resolver los problemas e interpretar las soluciones como valores que satisfacen un conjunto de condiciones que están asociadas a las ecuaciones que comúnmente se utilizan para resolverlos, los estudiantes no aprendieron a usar representaciones algebraicas para resolverlos. La contribución del uso de la hoja de cálculo fue que le dieron sentido al concepto de solución de ecuaciones simultáneas, comprendieron que resolver un sistema de ecuaciones lineales significaba obtener las coordenadas de un punto en el que se cruzan dos o más funciones. Así, los autores concluyen que el uso de esta tecnología en la resolución de problemas verbales permite conectar conceptos claves en el estudio del álgebra: ecuaciones y funciones.

Otras investigaciones que también han implementado hojas de cálculo para la resolución de problemas verbales coinciden en que su uso promueve la identificación de patrones de comportamiento en datos numéricos y contribuye en el proceso de generalización, beneficiando el tránsito de un lenguaje verbal a uno simbólico mediante un tratamiento numérico (Filloy et al., 2001; Olvera-Martínez, 2010).

En la Tabla 1.1 se sintetizan las características de los estudios mencionados previamente.

Tabla 1.1 Síntesis de los antecedentes.

Estudio	Participantes	Tecnología	Posibilidades	Dificultades
Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández (2012)	Alumnos de primer semestre de bachillerato.	Hoja electrónica de cálculo.	Propició la exploración, la búsqueda de patrones y relaciones, la formulación de conjeturas y la generalización, formalización y justificación de argumentos.	El significado atribuido a los símbolos x e y fue el de etiquetas y no el de incógnitas y variables.
Arnau y Puig (2013)	Estudiantes de segundo curso de secundaria obligatoria.	Hoja electrónica de cálculo.	Favoreció el desarrollo de estrategias apoyadas en la generación de una gran cantidad de números.	No contribuyó en el aprendizaje de la resolución algebraica de problemas.
Amado et al. (2019)	Estudiantes de secundaria entre 13 y 14 años.	Hoja electrónica de cálculo.	Ayudó a resolver los problemas e interpretar las soluciones como valores que satisfacen un conjunto de condiciones.	No aprendieron a usar representaciones algebraicas para resolver los problemas.

Estas investigaciones, muestran como la implementación de un ambiente tecnológico (hojas de cálculo) en la resolución de problemas verbales puede ayudar a mejorar tanto la comprensión de los conceptos y objetos matemáticos involucrados como el tipo de razonamiento que construyen los estudiantes. Sin embargo, los resultados también muestran debilidades al momento de formalizar los procedimientos algebraicos. Esto nos indica que no solo hace falta más investigación sobre cómo implementar la tecnología digital para que los estudiantes experimenten prácticas que los ayuden a mejorar el desarrollo del pensamiento matemático, sino también sobre qué otras tecnologías o herramientas digitales pueden permitir el cumplimiento de los objetivos del Álgebra cuando se resuelven problemas verbales (Verschaffel et al., 2020).

1.3 Planteamiento del problema

En el ámbito educativo, el Álgebra se ha centrado generalmente en la manipulación de símbolos y dominio de técnicas para resolver ecuaciones o desigualdades. Sin embargo, en la actualidad, estas actividades pueden abordarse con el uso de aplicaciones digitales. Esto sugiere que el enfoque que ha tenido el Álgebra de realizar procedimientos de manipulación en lápiz y papel debería cambiar a uno donde se privilegie el reconocimiento de estrategias que producirán los resultados deseados y la interpretación del significado de las respuestas (NCTM, 2018). También es recomendable en el estudio del Álgebra, según Graham et al.

(2010), que los estudiantes desarrollen experiencias en las que conecten o integren conceptos algebraicos y geométricos en enfoques de resolución de problemas, pues, de este modo, “las interpretaciones geométricas de identidades algebraicas pueden ayudarles a dar significado y sentido a los símbolos y cálculos algebraicos” (p. 5).

En este contexto, el uso de un sistema de geometría dinámica (SGD), como GeoGebra, puede ser clave para integrar conceptos algebraicos y geométricos en la resolución de problemas, ya que da la posibilidad de representarlos, explorarlos y resolverlos desde un enfoque geométrico y dinámico, lo cual permite que los estudiantes puedan identificar patrones, invariantes y relaciones entre los elementos de un modelo que está asociado a un problema (Hoyles, 2018).

Santos-Trigo et al. (2019) coinciden en que el uso de un SGD puede ofrecer a los estudiantes nuevas formas de representar problemas algebraicos a través del razonamiento geométrico. Por ejemplo, representar problemas verbales mediante un SGD demandaría que los estudiantes interpreten los enunciados en términos del significado de objetos geométricos, y una vez construidos los modelos dinámicos podrían examinarlos moviendo sus elementos para identificar patrones o relaciones que los lleven a resolver los problemas.

Al respecto, Bozkurt y Uygan (2020) reconocen el potencial didáctico que tiene un SGD como GeoGebra en la resolución de problemas y la importancia de no usarlo de forma convencional (como sistemas de softwares estáticos). Explican que los SGD, mediante el arrastre, permiten a los estudiantes manipular objetos geométricos y explorar relaciones entre ellos, ya que el arrastre es el resultado de mover elementos de las configuraciones dinámicas sin cambiar sus relaciones geométricas subyacentes, lo que lo convierte en una estrategia eficaz de estos sistemas para el análisis y exploración de estructuras matemáticas.

En la misma dirección, Thomas (2017) señala que el uso de un SGD también puede emplearse para representar gráficamente ecuaciones o funciones polinomiales y analizar sus propiedades desde un enfoque geométrico, permitiendo a los estudiantes enfocar la atención hacia las propiedades y relaciones que se estudian de diversos dominios o áreas de las matemáticas. En general, el uso de un SGD influye en cómo los estudiantes conocen, comprenden y valoran las ideas matemáticas, pues cambian las formas en que se representan, exploran y resuelven problemas matemáticos (Roschelle et al., 2017).

Ante este panorama, es importante discutir y reflexionar hasta dónde llega el alcance de GeoGebra para expandir las formas de razonamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas algebraicos (Santos-Trigo et al., 2019). Por esta razón, el problema de investigación se centra en analizar y documentar de qué manera el uso de un sistema de geometría dinámica (GeoGebra) permite el desarrollo de conocimiento y habilidades matemáticas en estudiantes del nivel medio superior al resolver problemas verbales, con el objetivo de aportar más evidencias a la discusión que hay alrededor del uso de tecnología digital en la resolución de este tipo de problemas.

1.4 Pregunta de investigación

La pregunta que guio esta investigación fue la siguiente:

1. ¿Qué formas de razonamiento construyen y exhiben estudiantes del nivel medio superior cuando resuelven problemas verbales con el uso de un sistema de geometría dinámica, GeoGebra, bajo un escenario de aprendizaje que promueve la resolución de problemas?

El objetivo es analizar las formas en que los estudiantes representan, exploran y resuelven problemas verbales situados en diversos contextos con el uso de GeoGebra. En particular, se analiza la interpretación y significado geométrico que los estudiantes presentaron en la construcción y exploración de modelos geométricos de los enunciados de los problemas. La exploración de los modelos resultó importante en la búsqueda de relaciones y formas de resolver los problemas.

Capítulo 2: Marco Conceptual

En este capítulo se presentan los elementos del marco conceptual que sustentan el diseño e implementación de las actividades y tareas del estudio. Se destacan los principios que relacionan el uso de la tecnología en escenarios de aprendizaje con actividades de resolución de problemas. En particular, se caracterizan las formas de razonamiento que se promueven con el uso sistemático de GeoGebra y los procesos involucrados en el estudio de los problemas verbales.

El desarrollo del razonamiento matemático es esencial para el aprendizaje de las matemáticas, y se caracteriza por la habilidad de describir relaciones y generalizarlas en los procedimientos de solución (Kieran, 2020). Para ello, se deben favorecer ambientes que ofrezcan a los estudiantes la oportunidad de explorar los problemas desde diferentes enfoques, plantear conjeturas a partir de las exploraciones realizadas sobre las propiedades o relaciones que los satisfacen, y buscar argumentos (con base en evidencias, supuestos y definiciones) que validen o refuten las conjeturas planteadas y justifiquen sus soluciones (Graham et al., 2010). Así, el desarrollo del razonamiento matemático implica atender el significado y búsqueda de sentido de los conceptos matemáticos.

2.1 El estudio del Álgebra

La noción de que los estudiantes aprenden álgebra con solo memorizar las reglas para manipular símbolos, practicar la resolución de ecuaciones y simplificar expresiones, ha sido, en gran medida, remplazada por perspectivas que reconocen la importancia de que los estudiantes atiendan al significado de los objetos y procesos algebraicos. La visión de cómo se aprende álgebra cambió de un enfoque simbólico (donde lo importante es la manipulación simbólica) a uno donde se promueve el uso de representaciones múltiples, la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales.

En este sentido, Arcavi et al. (2017) identifican cinco puntos que son claves en la enseñanza del Álgebra. El primero está relacionado con enseñar álgebra a través de situaciones o problemas contextualizados, pues ayudan a darle sentido y propósito a las tareas que se plantean a los estudiantes. Para ello, deben tomarse en cuenta las experiencias y conocimientos preliminares de los estudiantes. El segundo es fomentar prácticas que sean productivas: orientadas hacia actividades o tareas que requieran habilidades del pensamiento de mayor orden, como la búsqueda de diferentes formas de resolverlas, evaluación de la pertinencia de los procedimientos, participación en las discusiones de clase, y reflexionar sobre los métodos o acercamientos mostrados. En este camino, pueden utilizarse problemas que se plantean comúnmente en los libros de textos, pero deben incluir variaciones sutiles que permitan prácticas productivas y retadoras para los estudiantes. El tercero es reconciliar a los procedimientos de rutina con el entendimiento, porque, a pesar de que hay una amplia discusión de si se oponen o complementan, se necesitan ambos para potenciar el pensamiento algebraico. Si bien los estudiantes deben mejorar su dominio en los procedimientos de rutina, también deben tener la posibilidad de adaptar o cambiar sus procesos de resolución de problemas cuando se enfrentan a situaciones distintas de las conocidas. El cuarto es ver los errores o dificultades de los estudiantes como una oportunidad para comprender de dónde o por qué surgen y, así, prevenir que sigan ocurriendo. Y el quinto punto es buscar formas de hacer accesible e involucrar a los estudiantes en pruebas o argumentos matemáticos, aun si estas se perciben abstractas y formales para ellos. Intentar de entender una prueba matemática o probar algo, puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor de dónde provienen las propiedades de lo que se prueba.

Por otra parte, Kieran (2020) identifica tres tipos de actividades en el estudio del álgebra que son esenciales para el desarrollo del pensamiento algebraico: (a) interpretación y representación algebraica de situaciones, propiedades, patrones y relaciones; (b) manipulación simbólica que permita el desarrollo de habilidades y aspectos conceptuales e; (c) implementación del álgebra como una herramienta para modelar situaciones, justificar y probar, hacer predicciones y conjeturas, buscar relaciones y resolver problemas.

Finalmente, Graham et al. (2010) menciona que el razonamiento algebraico incluye elementos claves como:

- Resolución razonada: interpretar la solución en términos del contexto.
- Conectar álgebra con geometría: representar diversas situaciones de forma algebraica y geométricamente y transitar entre ellas.
- Usar múltiples representaciones de funciones: representar la relación entre datos de forma tabular, gráfica, simbólica, visual y verbal, y valorar qué representaciones son más

útiles según las circunstancias, además de moverse con flexibilidad entre las representaciones.

- Modelar: desarrollar un modelo matemático de una situación o contexto particular.
- Analizar los parámetros: analizar la forma en que se relacionan los datos mediante la manipulación o variación de los parámetros.

Es ampliamente reconocido que el uso de la tecnología puede potenciar el desarrollo de la comprensión y competencias matemáticas en los estudiantes durante el proceso de resolver problemas. Ignorar las posibilidades que ofrece para explorar patrones, variantes e invariantes, mediante visualizar modelos dinámicos, sería perder una oportunidad para mejorar la educación y las oportunidades para que los estudiantes desarrollen un pensamiento algebraico robusto (Arcavi et al., 2017).

2.2 La resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales

El uso sistemático de tecnologías digitales en la resolución de problemas matemáticos potencia los modos en que los estudiantes representan, exploran y resuelven problemas (Santos-Trigo, 2019), desempeñando un papel importante en el desarrollo de las habilidades cognitivas de los estudiantes, las cuales influye en la conceptualización y en las formas de interactuar y explicar los problemas (Leung & Bolite-Frant, 2015). Así, resulta importante que los profesores conozcan y dominen el uso de diferentes tecnologías digitales para que puedan incorporarlas en sus prácticas y distinguir qué formas de razonamiento se fomentan con su uso.

Santos-Trigo (2019) identifica cuatro tipos de tareas cuando se trabaja bajo el enfoque de la resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales las cuales se caracterizan por las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que surgen en los procesos de solución.

a) Enfocarse en las figuras. Son tareas que utilizan un SGD para reconstruir las figuras que están descritas en los enunciados de los problemas o que aparecen como una imagen que acompaña al enunciado; en este sentido, el uso de GeoGebra es importante porque no solo ayuda a identificar y explorar los conceptos que se necesitan para construir una figura, sino también da la posibilidad a los estudiantes de conectar una serie de ideas y recursos matemáticos que les permite resolver y extender la situación planteada en el problema inicial. Enfocarse en la reconstrucción de figuras puede mejorar el proceso de comprensión.

b) Tareas de investigación. La finalidad de este grupo de tareas es transformar problemas rutinarios, como los que se encuentran en los libros de texto, en una serie de actividades de investigación y reflexión matemática. Las metas de los estudiantes no se reducen a solucionar los problemas, sino a buscar formas de extenderlos o conectarlos con otros problemas.
c) Tareas de variación. En este tipo de tareas interesa representar y analizar problemas que involucren fenómenos de variación mediante un modelo gráfico sin tener que recurrir a un modelo algebraico. Por ejemplo, los problemas a los que se enfrentan los estudiantes en Cálculo están diseñados para plantearse y resolverse mediante modelos algebraicos; sin embargo, con un SGD es posible resolverlos a través de analizar lugares geométricos que se generan al definir relaciones entre los elementos de los problemas, que son objetos geométricos representando fenómenos de variación.
d) Configuraciones dinámicas. Este tipo de tareas están dirigidas a la construcción de configuraciones dinámicas donde el objetivo es formular o plantear problemas y buscar argumentos que validen las relaciones matemáticas encontradas. Se distinguen porque no hay un problema inicial o una pregunta que responder.

Estas tareas pueden aparecer, y con frecuencia ocurren de manera simultánea, cuando se resuelve un problema. Es decir, los estudiantes pueden enfocarse en desarrollar una o más de estas tareas cuando se enfrentan a un problema con el respaldo de la tecnología. Por ejemplo, en los problemas verbales los estudiantes podrían concentrarse en *tareas de variación*, ya que la mayoría describen situaciones que involucran fenómenos de variación, sin embargo, también podrían dirigir su atención a tareas de *construcción de figuras* cuando el contexto de los problemas sea además geométrico.

Esta distinción de las tareas ofrece información a los profesores de qué actividades matemáticas son posibles de hacer y proponer a partir de problemas rutinarios, que permitan a los estudiantes conectar conceptos matemáticos, desarrollar estrategias y discutir en clase. Pero ¿de qué manera los profesores pueden plantear actividades que promuevan el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes cuando incorporan las tecnologías digitales en la resolución de problemas?

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) presentan un marco para planear y organizar actividades que promuevan el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes cuando incorporan tecnologías digitales en la resolución de problemas y, también, para analizar los procesos que siguen cuando se enfrentan a dichas actividades; se caracteriza por las siguientes fases, en donde se destacan el tipo de preguntas que pueden guiar la actividad de cada una:

1. Comprensión del problema. ¿Qué conceptos matemáticos previos traen los estudiantes y qué preguntas se plantean antes de iniciar con la resolución de un problema? Identificar los conceptos que se relacionan con el problema y plantear algunas preguntas que orienten la actividad, por ejemplo: ¿qué es lo que se busca?, ¿cuáles son los conceptos matemáticos involucrados en el problema?, ¿cómo representar la situación problemática con las herramientas tecnológicas disponibles?, etc.
2. Exploración. ¿De qué manera explorar las formas en las que se relacionan los datos explícitos e implícitos de un problema?, ¿qué estrategias y acercamientos a la solución resultan importantes? Valorar diferentes caminos para alcanzar la solución.
3. Búsqueda de distintos acercamientos a la solución. ¿Qué relaciones o invariantes se exhiben y cómo pueden aprovecharse para obtener la solución? Analizar y discriminar los distintos resultados encontrados para proponer una solución argumentada.
4. Integración y reflexiones. ¿Cuáles fueron las ideas principales que se aportaron para la solución del problema?, ¿qué estrategias se utilizaron y cuáles fueron las más efectivas?, ¿qué preguntas se plantearon antes, durante y después de resolver el problema? Discutir en torno a las actividades y resultados obtenidos.

Bajo este enfoque, el uso de un SGD en la resolución de problemas verbales juega un papel importante ya que, mediante la construcción de modelos dinámicos –en los cuales se tiene la posibilidad de cuantificar atributos y visualizar y analizar lugares geométricos–, permite explorar propiedades de una familia de objetos y, en consecuencia, proporciona información sobre patrones o invariantes que justifican relaciones emergentes o conjeturas

(Gómez-Arciga, 2021). Además, dado que las fases están diseñadas dentro del marco conceptual de la resolución de problemas propuesto por Schoenfeld (1985), la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático antes, durante y después de resolver un problema con el uso de tecnología digital está en términos de cuatro dimensiones que explican el éxito o fracaso que tiene un estudiante en el proceso (Santos-Trigo, 2014):

Dominio del conocimiento o recursos. Es el conocimiento formal o informal de hechos y conceptos básicos que un individuo tiene a su disposición durante la resolución de un problema.

Heurísticas o estrategias cognitivas. Las heurísticas son estrategias generales que ayudan a resolver un problema cuando se desconoce algún método o fórmula para obtener su solución. Algunos ejemplos de heurísticas que identificó Polya (1945) son: explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema o trabajar en casos específicos. Sin embargo, los estudiantes deben involucrarse en experiencias donde tengan la oportunidad de apropiarse de estas estrategias que les permitan saber cómo y cuándo utilizarlas.

Estrategias metacognitivas. Hacen referencia a los procesos de auto-monitoreo y auto-control del individuo, de los cuales el estudiante debe ser consciente para evaluar constantemente sus capacidades o limitaciones cuando resuelve problemas. Por ejemplo, los que resuelven problemas de manera exitosa, siempre monitorean sus procesos de solución y deciden con base en los resultados si continuarlos o abandonarlos para considerar otras alternativas.

Creencias. Esta dimensión se asocia con las creencias que un estudiante tiene de si mismo y del que hacer de la disciplina, las cuales se originan a partir de sus experiencias de aprendizaje. En consecuencia, las acciones y decisiones que toman los estudiantes cuando se enfrentan a un problema están influenciadas por estas. Por ejemplo, si un estudiante cree que el único procedimiento correcto para resolver alguna categoría de problemas matemáticos es el que le enseñó el profesor, no buscará otros caminos para resolverlos y tampoco aceptará como correctos procedimientos distintos que le muestren sus pares, a pesar de que sean correctos e incluso más eficientes.

Es importante señalar que el uso de las tecnologías digitales en la resolución de problemas amplía el repertorio de recursos y estrategias que se identifican en el marco, pues este se diseñó bajo un enfoque donde las herramientas principales para resolver problemas matemáticos eran el lápiz y el papel (Santos-Trigo & Aguilar-Magallón, 2018).

2.3 Uso de tecnologías digitales en el estudio del Álgebra

Con el objetivo de ayudar a los profesores a identificar cuáles tecnologías pueden usar en el estudio del Álgebra y cuándo, Arcavi, Drijvers y Stacey (2017) distinguen dos dimensiones principales que permite a los profesores decidir cómo organizar sus actividades enfocadas al desarrollo del pensamiento algebraico en términos de las tecnologías digitales: una es sobre su funcionalidad algebrica, y otra es sobre el rol pedagógico.

Dentro de la funcionaliad algebrica, se distinguen cuatro categorías principales: funcionalidad simbólica, funcionalidad gráfica, funcionalidad tabular, y funcionalidad de representación y visualización. La funcionalidad simbólica se refiere a la flexibilidad que tiene un dispositivo para introducir variables, expresiones y ecuaciones, y manipularlas. La funcionalidad gráfica es la posibilidad de graficar funciones e interactuar con ellas; de esta manera, mediante un ambiente gráfico, se pueden identificar propiedades de expresiones algebraicas. La funcionalidad tabular ofrece la oportunidad de analizar relaciones algebraicas o funcionales a través de valores numéricos que son ordenados en tablas; esta funcionalidad es conocida por ser la opción principal de las hojas de cálculo que usa Excel. Y la funcionalidad de representación y visualización es sobre la ejecutabilidad de multiples representaciones (simbólica, gráfica y tabular) y la posibilidad de combinarlas.

Dentro de la caracterización de los roles pedagógicos que pueden jugar las tecnologías digitales para el estudio del Álgebra se identifican: herramientas para hacer álgebra, ambientes para practicar habilidades y ambientes para desarrollar conceptos. Las herramientas tecnológicas que se encargan de desarrollar los procediemientos algebraicos pueden utilizarse para explotar aspectos pedágogicos si se utilizan adecuadamente; por ejemplo, es pertiente que los estudiantes se enfrenten a problemas donde tienen que decidir qué procedimientos delegan a estas y cómo interpretan los resultados. Los ambientes para practicar habilidades son aquellos que permiten a los estudiantes resolver ecuaciones y expandir o factorizar expresiones sin la necesidad de que haya un profesor presente; además, se caracterizan por ser softwares libres, ofrecer retroalimentación y estar en línea y disponibles en todo momento (por ejemplo, Khan Academy). Y el uso de tecnologías digitales para el desarrollo de conceptos se refiere a la posibilidad de conectar los conocimientos previos con conceptos, relaciones o propiedades que, si antes eran aspectos ocultos en las tareas que se desarrollan en lápiz y papel, ahora se hacen explícitos gracias a las imágenes y representaciones dinámicas impresionantes que se obtienen con las herramientas digitiales; no obstante, la orientación del profesor, el trabajo colaborativo y el intercambio de ideas entre los estudiantes son elementos cruciales para hacer estas conexiones exitosamente. Cabe señalar que estos roles pedagógicos que se pueden llevar a cabo con las tecnologías digitlaes no son mutamente excluyentes.

A partir de considerar estas dimensiones para la selección de herramientas digitales, los autores proponen enfatizar su uso en la enseñanza y aprendizaje de entidades fundamentales del Álgebra: variable, ecuación o equivalencia y función. Pues las nociones de estas entidades tienen diferentes facetas conceptuales que dependen de las formas en que son representadas. En este sentido, es de suma importancia que el profesor plantee tareas que, al resolverse con herramientas digitales, reflejen con claridad sus intenciones pedagógicas.

Con base en las dimensiones de esta propuesta, GeoGebra es una herramienta digital que cubre en gran medida los aspectos mencionados.

Capítulo 3: Metodología

En este capítulo se detalla el diseño y métodos del estudio: se describen la naturaleza y el contexto del estudio, se muestran las componentes que se consideraron en la implementación de las tareas y la evaluación, la selección de los problemas y, finalmente, se explican los procesos de recolección y análisis de datos.

3.1 Naturaleza del estudio

La naturaleza de este estudio es cualitativa, ya que tiene como objetivo caracterizar en qué medida los estudiantes de bachillerato se apropian de las herramientas que ofrece un SGD para representar y explorar dinámicamente los conceptos involucrados en los problemas verbales y proponer posibles rutas o caminos para solucionarlos. Mediante la observación e interacción controlada se busca comprender cómo los estudiantes interpretan las situaciones problemáticas que se les plantean cuando utilizan un SGD, y qué significado y sentido geométrico les dan a los conceptos involucrados en los problemas.

A lo largo del capítulo se describen las características y procesos que se llevaron a cabo en el estudio con la finalidad de atender a los criterios de credibilidad, transferibilidad, confiabilidad y de ratificación (Lincoln & Guba, 1985), los cuales le dan sustento a una investigación con enfoque cualitativo.

3.2 Contexto del estudio

Para realizar el estudio se seleccionó un grupo de bachillerato que cursaban la asignatura Matemáticas I que incluye el estudio y resolución de problemas verbales. El grupo estaba conformado por 20 estudiantes que tenían edades entre los 15 y 17 años. Las actividades del curso se implementaron durante un semestre con dos sesiones semanales de 2 horas cada una.

Para el desarrollo de las sesiones se dispuso de 11 iPads con la aplicación de GeoGebra instalada (10 para los estudiantes y una para el investigador) y un proyector. Debido al número limitado de iPads, se formaron parejas de estudiantes y se asignó un iPad a cada una. En este punto, es importante mencionar que hubo cuatro estudiantes que asistieron de forma irregular al curso, lo que provocó que en algunas sesiones se llevara a cabo una reagrupación de parejas, se formara un equipo de tres o se permitiera que un estudiante trabajara de forma individual. De las diez parejas que se formaron inicialmente, siete lograron mantenerse unidas hasta el final.

Dado que los estudiantes no contaban con experiencia para usar GeoGebra, se utilizaron las primeras cuatro sesiones del curso para introducirlos a este SGD, una vez que ya estaban familiarizados, las parejas dedicaban una o dos sesiones (dependiendo del grado de dificultad de la tarea) a representar y resolver las tareas con el uso de GeoGebra y luego, mediante el proyector, discutían los resultados obtenidos con el grupo completo.

Las sesiones fueron dirigidas por el investigador con apoyo del profesor titular de la materia. En particular, el profesor se encargaba de resolver dudas técnicas de los estudiantes sobre el dispositivo y el SGD, mientras el investigador se encontraba explicando algún problema. Pero cuando las parejas comenzaban a resolver una tarea, tanto el profesor como el investigador las apoyaban si tenían dudas, ya fuera de algún comando del SGD o para guiarlas en sus construcciones dinámicas.

3.3 Selección de los problemas verbales para el desarrollo de las sesiones.

En la revisión del contenido del curso de Matemáticas 1 aparece el estudio de los problemas verbales situados en contextos variados. Se seleccionaron 13 problemas verbales del libro *Matemáticas Simplificadas* (Conamat, 2009, pp. 362-377 y pp. 507-513), ocho que se resuelven con sistemas de ecuaciones lineales, y cinco que se resuelven con el uso de ecuaciones cuadráticas. Se dividieron en tres bloques según los objetivos perseguidos (Tabla 3.1): en el bloque 1 el objetivo fue ejemplificar y guiar a los estudiantes en la representación, exploración y resolución de los problemas a través de las fases propuestas en la implementación de las tareas; en el bloque 2, observar cómo los estudiantes resuelven los problemas con apoyo directo cuando experimentaban dificultades en la resolución; y en el bloque 3, observar sus procesos de resolución de problemas cuando se plantean problemas que, en un ambiente donde se usa lápiz y papel, se resuelven con distintos recursos (uso de ecuaciones cuadráticas) a los del segundo bloque. En otras palabras, en la tercer bloque la idea fue analizar cómo los estudiantes usaban la herramienta al representar, explorar y resolver problemas verbales que usualmente se resuelven utilizando ecuaciones de segundo grado.

El primer bloque constó de cuatro problemas con contextos distintos que permitieran el uso de diferentes representaciones dinámicas y estrategias para que los estudiantes observaran que, independientemente de seguir la ruta propuesta en las fases, podían resolver los problemas de distintas formas. En el segundo bloque se plantearon cuatro problemas del mismo tipo de la primera etapa, y en el tercero, cinco problemas que se resuelven utilizando ecuaciones de segundo grado.

En la Tabla 3.1 se muestran los problemas que se seleccionaron para cada bloque y su contexto.

Tabla 3.1. Problemas verbales desarrollados en las sesiones.

Bloque	Problema	Contexto
1	1. Un número excede en seis a otro, y el doble del mayor equivale al triple del menor. Encuentra los números.	Numérico
	2. La edad de Carlos es el triple de la de Mauricio y dentro de 10 años será el doble. Determina las edades actuales de Carlos y Mauricio.	Edades
	3. ¿Cuántos litros de una solución al 15% de alcohol se deben agregar a otra al 6% para obtener 180 litros de una nueva solución al 10% de alcohol?	Mezclas
	4. Un estanque se llena por una de dos llaves en 4 horas y la segunda lo llena en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren ambas llaves al mismo tiempo?	Capacidad de trabajo por unidad de tiempo
2	5. El perímetro de una triángulo isósceles es de 48 cm. Si el lado diferente equivale a 2/3 de la medida de los lados iguales, ¿cuál es la medida de los lados del triángulo?	Geométrico
	6. Un farmacéutico debe preparar 75 ml de una solución con un ingrediente activo al 2%. Si sólo tiene en existencia soluciones al 4 y 1%, ¿cuánto de cada solución deberá mezclar para la elaboración de la nueva solución al 2%?	Mezclas
	7. Para la recolección de trigo se utilizan dos cosechadoras, la primera tarda 8 horas y las dos juntas	Velocidad

	tardan 4.8 horas, ¿cuánto tiempo tardará la segunda en recolectar el trigo?	
	8. En cierta competencia de atletismo el corredor *A* se encuentra a 30 metros adelante del corredor *B*. El corredor *A* lleva una velocidad constante de 7 *km/h* y el corredor *B* lleva una velocidad constante de 8 *km/h*. Si los dos salen al mismo tiempo, ¿después de cuántos metros el corredor *B* alcanzará al corredor *A*?	Capacidad de trabajo por unidad de tiempo
3	9. La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180, ¿cuáles son los números?	Numérico
	10. Determina las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 280 *m* y su área es de 4 000 m^2.	Geométrico
	11. Un agricultor tiene necesidad de cercar 25 000 m^2 de su parcela; dicha propiedad es rectangular y colinda con un río, por lo que no necesita cercar ese lado. ¿Qué dimensiones tiene el terreno si el propietario dispone de 450 *m* de cerca?	Área
	12. ¿Cuáles son las dimensiones de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 36 *cm* y su área 54 cm^2?	Geométrico
	13. Dos llaves llenan un depósito en 6 horas, ¿cuánto tiempo necesitaría cada una, por separado, para llenarlo si una tarda 16 *h* más que la otra?	Capacidad de trabajo por unidad de tiempo

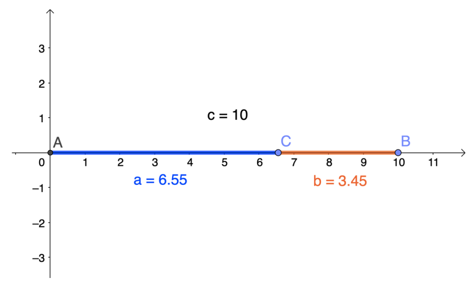
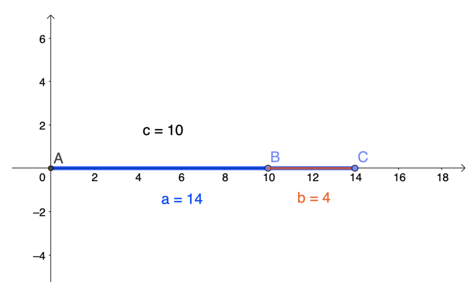
Para la selección de los problemas se hizo una lista donde se categoraizaron por su contexto: problemas que implican movimiento a velocidad uniforme, problemas que implican la realización de trabajo, problemas sobre mezclas, problemas sobre comparación de edades, problemas que involucran figuras geométricas y problemas sobre equivalencias numéricas. Después, el equipo de investigación los trabajó con GeoGebra en las sesiones de un seminario de resolución de problemas, idintificó los recursos y estrategias que podían activarse en la mayoría de estos y las formas en que podían ser representados geométricamente. Tomando en cuenta estos elementos fue que se seleccionaron los problemas para este estudio.

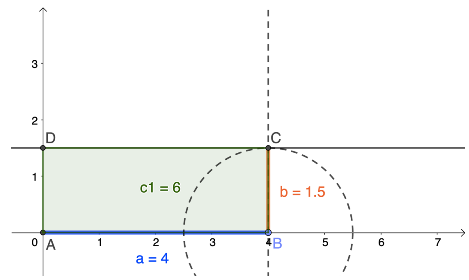
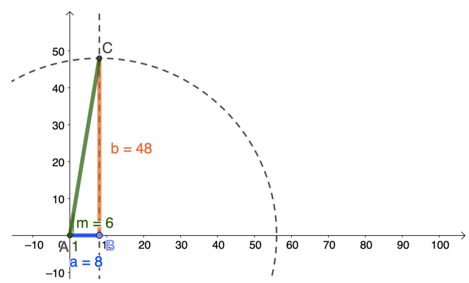
3.4 Implementación de los problemas

Los problemas y su implementación se estructuraron con base en cinco dimensiones que caracterizan a las clases de matemáticas que permiten potenciar el desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes (Schoenfeld, 2019). Estas son: (a) las matemáticas, que está enfocada en que los estudiantes tengan la oportunidad de aprender conceptos matemáticos, desarrollar técnicas o estrategias y hacer conexiones entre los conceptos que se involucran en las tareas mediante las discusiones que se generan en la clase, con el objetivo de que desarrollen hábitos del razonamiento matemático; (b) demanda cognitiva, en la cual se busca que los estudiantes tengan la posibilidad de darle sentido y significado a ideas matemáticas importantes y a su uso; (c) acceso equitativo a las matemáticas, que cada estudiante tenga la misma oportunidad de participar en clases y que sus participaciones sean igualmente valoradas por el resto del grupo y el profesor. El objetivo es que las actividades o tareas, que se plantean en las clases, promuevan una participación activa y dirigida hacia los contenidos esenciales de las matemáticas por parte de los estudiantes; (d) intervención, apropiación e identificación, que los estudiantes reconozcan las contribuciones propias y colectivas durante la resolución de tareas; y (e) evaluación formativa, que los estudiantes reflexionen sobre los procesos discutidos en las tareas para que incorporen sus experiencias a prácticas posteriores.

Durante la primera fase del estudio, se implementaron tareas o actividades donde los estudiantes tuvieron oportunidad de representar e interpretar el significado geométrico de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) a partir de modelos dinámicos construidos con GeoGebra tomando como referencia el sistema Cartesiano (Tabla 3.2). El objetivo fue introducirlos en el uso de la herramienta por medio de actividades básicas que los guiaran en la construcción de modelos dinámicos de las situaciones planteadas en los problemas verbales (véase el apéndice 1 para conocer cómo se implementaron estas actividades).

Tabla 3.2. Representación funcional de las operaciones básicas.
https://www.geogebra.org/m/nsgxhfre

	Descripción de la construcción	**Modelo**
Suma	$a + b = 10$: se construye el segmento c (segmento AB) de longitud 10 en el *eje horizontal*; luego, se construyen los segmentos AC y CB, donde el punto C está definido sobre el segmento c, y se nombran como a y b, respectivamente. Cuando varía el punto C, las longitudes de los segmentos a y b cambian, pero la suma de sus longitudes se mantiene constante: 10 unidades.	 https://www.geogebra.org/m/nsgxhfre#material/mqdxfqdf
Resta	$a - b = 10$: para representar la resta en GeoGebra, se reescribe la operación como $a = 10 + b$. Así, se aprovechan las ideas mostradas en el modelo de la suma. Se construye el segmento c (segmento AB) de longitud 10 en el *eje horizontal*; se define el punto C sobre el *eje horizontal*, pero se considera su dominio en el intervalo $(10, \infty)$. De esta manera, se construyen los segmentos AC y CB, y se nombran como a y b, respectivamente. Cuando el punto C es movido, las longitudes de los segmentos a y b cambian, pero la diferencia entre ellas se mantiene constante: 10 unidades.	 https://www.geogebra.org/m/nsgxhfre#material/bh7ffuae

Multiplicación	$ab = 6$: se traza el segmento AB sobre el *eje horizontal*, etiquetado como a; el segmento BC sobre la recta perpendicular al *eje horizontal* que pasa por el punto B, donde C es el punto de intersección entre la recta y una circunferencia de radio $r = 6/a$. Finalmente, se construye el rectángulo de lados a y b. Cuando el punto B es movido sobre el *eje*, las longitudes de los segmentos a y b varían, pero el área del rectángulo $ABCD$ (etiquetado como c1) es constante: 6 unidades. Es decir, el producto de a y b es constante.	 https://www.geogebra.org/m/nsgxhfre#material/tggxubag
División	$b/a = 6$: para la representación geométrica de la división se utiliza como base el modelo de la multiplicación, solo que, en este caso, el radio de la circunferencia es $r = 6a$. Luego, se traza el segmento AC y se mide su pendiente. Cuando el punto B es movido sobre el *eje*, las longitudes de los segmentos a y b cambian, pero la pendiente del segmento AC (etiquetada como m) es constante: 6 unidades. Es decir, la razón de b y a es constante.	 https://www.geogebra.org/m/nsgxhfre#material/ahnuhqcq

En los modelos de suma y resta, cuando el punto B se mueve sobre el eje, lo que se está modificando en cada expresión, respectivamente, es el valor constante. Lo mismo sucede para los modelos de multiplicación y división cuando se modifica el valor numérico del radio de cada circunferencia. En otras palabras, las representaciones dinámicas de las operaciones básicas permiten explorar y analizar de forma general cada expresión.

De esta manera, estos modelos pueden contextualizarse para analizar la forma en que se relacionan los conceptos involucrados en un problema. Por ejemplo, la velocidad uniforme de un móvil, dada por la fórmula v = d/t, puede representarse con el modelo de la división mostrado en la Tabla 3.2, donde a la pendiente se le asocia el valor de la velocidad, y a los segmentos *a* y *b*, los valores de tiempo y distancia, respectivamente (en esta representación, las unidades del sistema Cartesiano corresponderían a horas para las abscisas y kilómetros para las ordenadas). Así, es posible, mediante la definición de un punto con coordenadas $E = (a, m)$ y *b* un valor fijo, observar el comportamiento de la velocidad de un móvil con respecto al tiempo (Figura 3.1).

En este sentido, se buscó que los estudiantes utilizaran estos modelos en el camino para representar situaciones más complejas o con más datos e incógnitas.

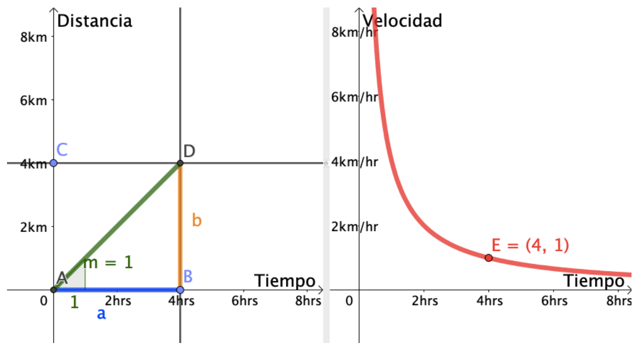


Figura 3.1. Modelo de la velocidad de un móvil con el valor *b* fijo, y gráfica de la relación entre el tiempo y la velocidad. El lugar geométrico descrito por el punto *E* se obtiene cuando es movido el punto *B* sobre el eje horizontal.

Después de trabajar con los estudiantes actividades sobre el uso de la herramienta, el siguiente objetivo fue que plantearan diferentes acercamientos para representar y resolver problemas verbales. Así, a través de fases que se muestran en las figuras 3.2 y 3.3, se promovió inicialmente la construcción de modelos dinámicos de los problemas con el uso de GeoGebra y, posteriormente, se enfocó la atención hacia el planteamiento del modelo algebraico de los problemas a partir de analizar relaciones asociadas con el movimiento de los elementos de la configuración dinámica del problema (Gómez-Arciga et al., 2018; Gómez-Arciga & Reyes-Martínez, 2019).

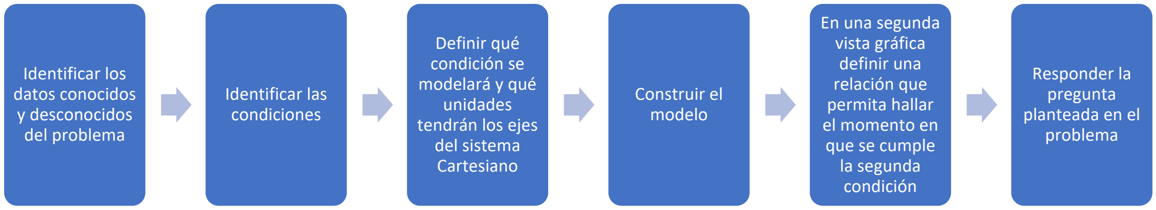


Figura 3.2. Fases para modelar y resolver un problema verbal con GeoGebra.

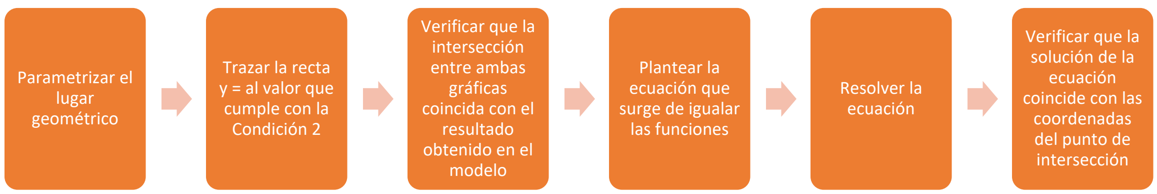


Figura 3.3. Fases involucradas en la formulación de ecuaciones a partir del modelo geométrico.

A continuación, con la intención de explicar cómo se desarrollan las fases y cómo fue el proceso de implementación del primer bloque de problemas mostrados en la tabla 3.1, se ilustra paso a paso la resolución del problema 1: *Un número excede en seis a otro, y el doble del mayor equivale al triple del menor. Encuentra los números.* (La resolución de los problemas 2, 3 y 4, pertenecientes al bloque 1, se pueden revisar en el apéndice 2)

Los problemas del bloque 1 se implementaron con la guía directa por parte del investigador. Así, durante el desarrollo de las sesiones el investigador iniciaba con preguntas guías: ¿cuáles son los datos conocidos y desconocidos del problema?, ¿cuáles son las condiciones que deben cumplirse entre los datos del problema?, ¿qué unidades conviene asociarle a los ejes del sistema Cartesiano?, ¿cuál condición se representará primero? En el siguiente cuadro se muestra la información del primer problema asociada a las tres primeras fases.

Datos	Condiciones	Condición por modelar	Unidades de los ejes
Dos números: *f* = número menor *g* = número mayor	1.- Un número excede en seis a otro. 2.- el doble del mayor equivale al triple del menor.	Condición 1	Unidades

Construir el modelo.

Las preguntas con las que el investigador guiaba esta fase son: ¿cómo representar geométricamente los datos de la condición a modelar?, ¿cuál objeto geométrico del modelo se asociará a la variable?, ¿cuáles datos se representan como objetos geométricos fijos en el modelo?, ¿y cuáles como objetos dinámicos? En este caso, el modelo de la primera condición se planteó con base en la construcción dinámica de la resta que se realizó en la segunda sesión (Figura 4, ver apéndice 1). Se trazaron los segmentos AB y BC en el eje horizontal (Figura 3.4), donde el segmento BC tenía una longitud de $f + 6$ unidades –longitud que se consiguió con la herramienta de *Circunferencia (centro y radio)*–. En esta construcción el número mayor estaba dado por *g*, y el menor, por *f*.

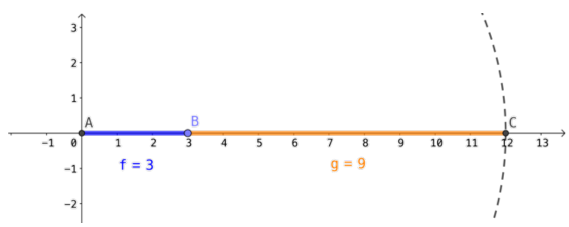


Figura 3.4. Modelo de la condición 1: un número excede en seis a otro ($g - f = 6$).

Análisis de relaciones.

Las preguntas guías que se utilizaron en esta fase fueron: ¿cómo representar los datos de la segunda condición en el SGD dado que se tiene el modelo dinámico de la primera condición?, ¿puede representarse la información de la segunda condición en el mismo sistema Cartesiano donde se modela la primera condición o es necesario utilizar un segundo sistema Cartesiano?, ¿cómo se relacionan los datos de la segunda condición con el objeto geométrico asociado a la variable?

Para este problema, el segmento *f* (Figura 3.4) se asocia a la variable *x*, ya que el segmento BC (o segmento *g*) se construyó en función de *f*. Se definieron los puntos $\mathrm{D} = (f, 2g)$ y $\mathrm{E} =$

$(f, 3f)$ en una segunda vista gráfica para analizar la forma en que se relacionaban el doble del número mayor y el triple del número menor con el número menor (Figura 3.5a). En la Figura 3.5a se observan los lugares geométricos que forman los puntos D y E cuando el punto B es movido sobre el eje horizontal. La información de las coordenadas de los puntos D y E en este caso particular es que, si el número menor es seis, el doble del número mayor es 24 y el triple del número menor es 18, respectivamente.

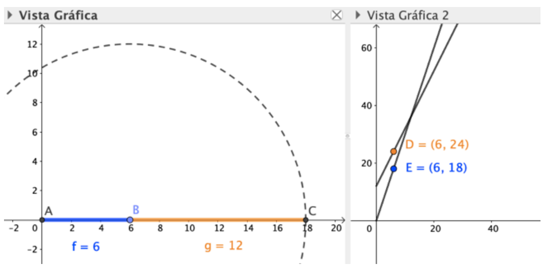


Figura 3.5a. Análisis de relaciones a través de graficar los lugares geométricos.

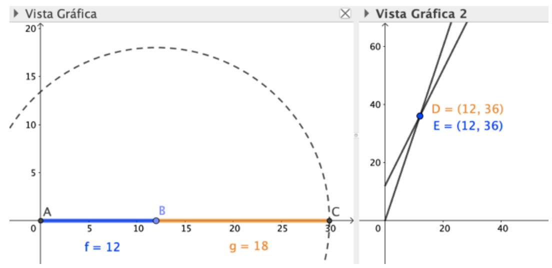


Figura 3.5b. Solución del problema en GeoGebra.

Solución en el acercamiento geométrico (interpretación).

¿Cómo se determina la solución del problema con base en el modelo dinámico?, ¿tiene sentido la solución según el contexto del problema?, ¿sigue funcionando el modelo si se cambia alguno de los parámetros iniciales? En la Figura 3.5b se observa que los números buscados son los valores numéricos de las longitudes de los segmentos f y g, que se obtienen cuando los puntos D y E coinciden.

Fase de parametrización.

En esta fase, como su nombre lo dice, se busca representar algebraicamente la situación modelada en el SGD. La parametrización del lugar geométrico descrito por el punto $D = (f, 2g)$ fue $y = 2(x + 6)$, donde $x = f$ & $f + 6 = g$; y la del punto $E = (f, 3f), y = 3x$.

Verificación visual.

Para verificar si son correctas las funciones que se obtienen en la parametrización, se grafican; si son correctas, deben superponerse a los lugares geométricos. En la Figura 3.6 se muestra la segunda vista gráfica de GeoGebra con las funciones o ecuaciones de rectas graficadas.

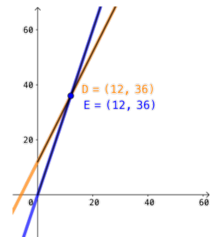


Figura 3.6. Gráficas de las funciones obtenidas en la parametrización de los lugares geométricos.

Formulación y solución de la ecuación asociada al modelo y verificación del resultado.

Finalmente, se les mostró que la ecuación que debía resolverse surgía de igualar las funciones parametrizadas, ya que la solución del problema se hallaba en la intersección de sus gráficas. Así, se obtuvo el valor de x, que estaba asociado al número menor, y se le aumentó seis para conseguir el número mayor:

$$2(x+6) = 3x$$

$$2x + 12 = 3x$$

$$x = 12$$

Por lo tanto, el valor de y, en cualquiera de las dos funciones fue 36. Este resultado es otra forma de verificar que las funciones parametrizadas son correctas, pues la solución de la ecuación coincidió con las coordenadas del punto de intersección.

En resumen, la implementación de los problemas del bloque 1 se basó en resolverlos mediante fases que promuevan los episodios caracterizados por Schoenfeld (2019). Las fases para representar y resolver un problema verbal con el uso de un SGD van dirigidas a que los estudiantes resuelvan los problemas verbales bajo un enfoque geométrico y dinámico. Este acercamiento implica que interpreten geométricamente los conceptos involucrados en los enunciados de los problemas, es decir, que los asocien a objetos geométricos. En este contexto, los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar o desarrollar estrategias distintas a las que se utilizan comunmente en un ambiente tradicional (que se caracteriza por el uso casi exclusivo de lapiz y papel) para representar, explorar y resolver situaciones problemáticas. En las fases para realizar la representación algebraica, la idea es que los estudiantes formulen las ecuaciones a partir de la solución geométrica obtenida. Esto lleva a que analicen nuevamente el modelo e identifiquen el objeto geométrico asociado a la variable o incógnita del problema para plantear la ecuación que corresponde al modelo y solucionarla. Así, los estudiantes tienen la oportunidad de conectar el significado geométrico de un concepto con su representación algebraica de sentido a las expresiones y ecuaciones algebraicas.

3.5. Sobre la evaluación

¿Cómo evaluar el proceso que llevan a cabo los estudiantes cuando resuelven problemas verbales con el uso de un Sistema de Geometría Dinámica? Con base en los elementos descritos en el marco conceptual, se estableció una rúbrica que, además de permitir que un profesor cuente con los criterios necesarios para evualuar el proceso de los estudiantes bajo el enfoque de la resolución de problemas con el uso de tecnología digital, provee a los mismos estudiantes un marco para autoevaluar su desempeño en la resolución de los problemas (Tabla 3.3).

La rúbrica está dividida en seis criterios, y cada criterio está dividido en tres niveles, los cuales indican los caminos potenciales asociados con la construcción del modelo de los problemas. El nivel 1 describe el desempeño de un estudiante de bajo rendimiento, y el nivel 3, el desempeño de un estudiante de alto rendimiento. Se destacan las formas de razonamiento que debe apropiarse un estudiante cuando se enfrenta a este tipo de tareas.

Tabla 3.3. Rúbrica para evaluar la resolución de problemas verbales con el uso de GeoGebra

Propósito:	Que el estudiante desarrolle, a través del uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), hábitos del pensamiento matemático: que exploré relaciones, identifique patrones e invariantes y plantee y valide conjeturas a través de mover o manipular objetos geométricos de un modelo dinámico; que busque diferentes caminos o formas de representar un problema verbal con el uso de un SGD para llegar a la solución; que argumente y comunique la solución con eficacia y con base en las herramientas del SGD utilizadas; que generalice la representación del problema y la conecte con otros problemas.	
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA: CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO DINÁMICO		
NIVEL 3: 10-9	NIVEL 2: 8-7	NIVEL 1: 6-5
Identifica e interpreta con claridad los datos y conceptos involucrados en el enunciado del problema. Representa geométricamente los datos conocidos y desconocidos del problema en un sistema Cartesiano adecuadamente. Esto implica que	Identifica e interpreta parcialmente los datos y conceptos involucrados en el enunciado del problema. Asigna adecuadamente las unidades de medida en los ejes y representa geométricamente	No identifica ni interpreta adecuadamente los datos y conceptos involucrados en el enunciado del problema. A lo más, asigna adecuadamente las unidades en los ejes, pero la representación geométrica de los

asigna unidades de medida a los ejes que son pertinentes y que identifica los elementos geométricos que deben ser fijos y variables. Construye un modelo dinámico que mantiene una de las condiciones descritas en el enunciado del problema cuando varía el elemento geométrico asociado a la incógnita. Es decir, supera “la prueba del arrastre” (término aceptado en el campo de la Educación Matemática cuando se trabaja en ambientes dinámicos).	algunos datos de manera conveniente. Sin embargo, no logra construir un modelo dinámico que mantenga una de las condiciones descritas en el problema cuando se varía el elemento geométrico asociado a la incógnita. Es decir, no supera “la prueba del arrastre” (término aceptado en el campo de la Educación Matemática cuando se trabaja en ambientes dinámicos).	datos conocidos y desconocidos carece de sentido y significado respecto del contexto de la situación planteada.
ANÁLISIS DE REALCIONES: EXPLORACIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS		
NIVEL 3: 10-9	NIVEL 2: 8-7	NIVEL 1: 6-5
Identifica la condición que falta por cumplirse del problema en el modelo dinámico construido. Define un punto que permite explorar la relación entre los elementos geométricos asociados a la incógnita y a la condición faltante. Traza e interpreta adecuadamente el lugar geométrico que describe el punto. Comprende que las dos condiciones que se expresan en el problema (A y B, respectivamente) pueden compararse mediante la resta o la razón, y ambas se cumplen (son iguales) cuando: A-B = 0; B-A = 0; A/B = 1 ó B/A = 1. Halla la solución del problema prestándole atención a la coordenada *y* del punto definido. Identifica el dominio del problema, es decir, ubica el intervalo respecto al	Identifica la condición que falta por cumplirse del problema en el modelo dinámico construido. Define un punto que permite explorar la relación entre los elementos geométricos asociados a la incógnita y a la condición faltante. Halla la solución del problema observando cuándo la coordenada *y* del punto alcanza el valor esperado. Sin embargo, tiene dificultades para interpretar la forma en que se relacionan los elementos seleccionados en las coordenadas del punto y para trazar los lugares geométricos correspondientes.	No identifica cuál es la relación que debe explorar para que se cumpla la condición restante descrita en el problema. Es posible que defina un punto que relaciona dos elementos del modelo, pero que, además de ser irrelevante la exploración de esa relación, no logra interpretar o darle sentido al lugar geométrico que obtiene.

eje *x* o *y* donde tiene sentido explorar las relaciones del modelo.		
SOLUCIÓN GRÁFICA: PARAMETRIZACIÓN		
NIVEL 3: 10-9	NIVEL 2: 8-7	NIVEL 1: 6-5
Identifica con claridad los elementos geométricos del modelo dinámico que deben asumirse como valores constantes o variables para parametrizar el lugar geométrico encontrado. Plantea la función asociada al lugar geométrico en términos de los elementos del modelo dinámico. Expresa la función en términos del elemento asociado a la incógnita del problema y lo renombra como "*x*" –porque GeoGebra solo acepta funciones en términos de *x* para graficarlas–, es decir, expresa cada elemento de la función en términos de la variable. Grafica la función asociada al lugar geométrico y la intersecta con la recta $y = y_0$, donde y_0 es el valor o dato numérico que cumple con la condición faltante. De esta manera, halla la solución gráfica, que está dada por la coordenada *x* de la intersección. Interpreta adecuadamente las gráficas respecto con el contexto del problema.	Identifica con claridad los elementos geométricos del modelo dinámico que deben asumirse como valores constantes o variables para parametrizar el lugar geométrico encontrado. Plantea la función asociada al lugar geométrico en términos de los elementos del modelo dinámico. Sin embargo, no expresa la función en términos del elemento asociado a la incógnita del problema, es decir, no expresa cada elemento de la función en términos de la variable.	No identifica con claridad los elementos geométricos del modelo dinámico que deben asumirse como valores constantes o variables para parametrizar el lugar geométrico encontrado. Por lo tanto, no puede trazar las gráficas correspondientes, en las cuales la coordenada *x* de su intersección se haya la solución del problema.
SOLUCIÓN ALGEBRAICA: PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN ASOCIADA AL MODELO		
NIVEL 3: 10-9	NIVEL 2: 8-7	NIVEL 1: 6-5
Identifica las funciones que debe igualar para plantear la ecuación asociada al modelo. Despeja correctamente.	Identifica las funciones que debe igualar para plantear la ecuación asociada al modelo.	No identifica las funciones que debe igualar para plantear la ecuación asociada al modelo. Por lo tanto, no presenta una solución algebraica.

Verifica que la solución algebraica coincida con la solución gráfica. Analiza que la respuesta obtenida tenga sentido en el contexto del problema.	Despeja correctamente, aunque puede cometer algunos errores aritméticos y algebraicos. Verifica que la solución algebraica coincida con la solución gráfica.	Si plantea la ecuación, despeja incorrectamente.
EXPLICACIÓN Y ANÁLISIS DEL RESULTADO: INTEGRACIÓN Y REFLEXIÓN SOBRE EL PROCESO		
NIVEL 3: 10-9	NIVEL 2: 8-7	NIVEL 1: 6-5
La explicación es clara y detallada. Interpreta correctamente el modelo, el lugar geométrico o la solución algebraica. Relaciona los significados de los elementos u objetos de la representación geométrica con la algebraica. Analiza si hay alguna relación de proporcionalidad en el comportamiento de los datos explorados. Generaliza el problema y lo explora y lo analiza. Identifica qué situaciones problemáticas pueden resolverse o ajustarse al modelo generado.	La explicación es clara pero poco detallada. Interpreta correctamente el modelo, el lugar geométrico o la solución algebraica. Relaciona los significados de los elementos u objetos de la representación geométrica con la algebraica, pero le falta profundizar. No analiza si hay alguna relación de proporcionalidad en el comportamiento de los datos explorados.	La explicación es difícil de entender. No interpreta correctamente el modelo, el lugar geométrico o la solución algebraica. No relaciona o conecta los significados de los elementos u objetos de la representación geométrica con la algebraica.
TRABAJO COLABORATIVO		
NIVEL 3: 10-9	NIVEL 2: 8-7	NIVEL 1: 6-5
Comienza desarrollando el problema de manera individual y, posteriormente, discute con sus compañeros los diferentes acercamientos que cada uno ha planteado. Comunica y argumenta sus resultados obtenidos. Tiene una participación activa durante la clase.	Inicia trabajando de forma individual y, posteriormente, compara su trabajo con el de sus compañeros. Sin embargo, no considera las sugerencias que le hacen y no aporta a las soluciones de los demás.	Trabaja de manera individual toda la clase; no comparte, compara o discute sus acercamientos con otro estudiante de la clase.

3.5 Recolección de datos

La recolección de datos se realizó mediante cuatro instrumentos: archivos de GeoGebra, videograbaciones, archivos de Word y notas de campo. A continuación, se explica la forma en la que se utilizó cada uno para recolectar los datos en esta investigación.

Archivos de GeoGebra: estos archivos fueron entregados por las parejas vía correo electrónico. Para analizarlos, se utilizó la opción de *protocolo de construcción* (incluida en GeoGebra), la cual permite reproducir los trazos que hicieron los estudiantes de principio a fin. De esta manera, fue posible observar tanto las ideas principales que les permitió construir un modelo dinámico como las dificultades que tuvieron los que no lo concretaron. También, se identificaron las herramientas o recursos del SGD que seleccionaron para representar las tareas.

Videograbaciones: las sesiones se grabaron para analizar los acercamientos que mostraron las parejas al enfrentarse a las tareas con el uso del SGD, ya que esta información no puede obtenerse de los archivos de GeoGebra. Esto implicó poner atención a las discusiones de las parejas y grupales. Se grababan los modelos o acercamientos que mostraban algunas parejas, mediante el proyector, al resto del grupo.

Archivos de Word: los trabajos extra-clase fueron entregados mediante estos archivos. La intención era que las parejas describieran los pasos o ideas que siguieron para construir los modelos dinámicos asociados a los problemas y, así, el investigador y el profesor tuvieran la posibilidad de analizar los resultados. En estos archivos los estudiantes podían pegar los enlaces de los modelos que habían guardado en GeoGebra para no tener que agregar tantas imágenes al documento.

Notas de campo: se utilizaron para destacar algunas ideas que, en un primer momento, se consideraron importantes en el desarrollo de las sesiones. Esto ayudó en la revisión de las videograbaciones porque se analizaron secciones específicas que ya se habían detectado en clase.

3.6 Análisis de datos

Para llevar a cabo el análisis de los datos fue necesario identificar todos los acercamientos distintos que se presentaron en la resolución de cada problema, y posteriormente, caracterizar las formas de razonar que exhibieron las parejas.

Los datos se analizaron con base en el marco conceptual descrito en el capítulo 2. Para ello, se elaboraron preguntas tomando en cuenta los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) que permitieran identificar los recursos y estrategias que activaron las parejas y las formas de razonamiento que desarrollaron cuando representaron, exploraron y resolvieron los problemas verbales con el uso de GeoGebra.

Representación dinámica (comprensión del problema):

- ¿Cómo se interpretó cada concepto involucrado en el enunciado del problema en términos geométricos?
- ¿Tienen sentido los objetos geométricos asociados a los conceptos del problema dentro del sistema de referencia utilizado? Es decir, ¿las unidades de medida de los ejes del sistema Cartesiano (por ejemplo: horas, metros, *km/h*, porcentaje, etc.) corresponden al modelo dinámico representado?
- ¿Qué herramientas del SGD se utilizaron para representar el modelo y cómo?

Exploración del comportamiento de los atributos del modelo:

- ¿Qué relaciones entre los atributos del modelo se analizaron?
- ¿Cómo se definieron las relaciones funcionales? (es decir, cómo se definieron las coordenadas del punto dinámico)
- ¿Qué información obtuvieron de las relaciones que analizaron?
- ¿Exploraron el comportamiento de otros atributos en el modelo que les diera información distinta a la que se preguntaba?

Solución del problema:

- ¿Hallaron la solución del problema?
- ¿La solución fue aproximada o exacta?
- ¿De cuántas formas diferentes resolvieron el problema?
- ¿Presentaron la solución gráfica y algebraica?

- ¿Interpretaron correctamente la solución en términos de los elementos del modelo?

Integración y reflexiones:

- ¿Pudieron explicar adecuadamente la estructura y las relaciones estructurales de su modelo?
- ¿Ajustaron los parámetros de su modelo correctamente cuando se cambiaron los valores numéricos del mismo problema?
- ¿Interpretaron correctamente las intersecciones o comportamiento de los lugares geométricos que se generaron en el modelo?
- ¿Explicaron claramente las ideas y estrategias principales que utilizaron para construir su modelo?

Se contrastaron los análisis de los datos presentados en las videograbaciones, los archivos de Word y GeoGebra. Esto hizo posible identificar las ideas que más utilizaron los estudiantes al momento de resolver los problemas y evidenciar las dificultades comunes en el proceso. A partir del análisis de los resultados, se caracterizan las formas esenciales de razonar que exhibieron los estudiantes con el uso de un sistema de geometría dinámica en la resolución de problemas verbales.

Capítulo 4: Análisis y Discusión de los Resultados

En este capítulo, se presentan, analizan, y discuten los resultados del estudio. Se resalta las formas de razonamiento que los participantes exhiben en la resolución de diversos tipos de problemas verbales. En cada problema se identifica el trabajo de las parejas y cómo generaron representaciones y exploraciones distintas de solución. También se identifican las dificultades que experimentaron durante el proceso de solución.

Se destaca, en cada problema, una tabla que incluye las ideas principales de los acercamientos presentados por las parejas.

4.1 Problemas del bloque 2.

Problema 5:

El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm. Si el lado diferente equivale a 2/3 de la medida de los lados iguales, ¿cuál es la medida de los lados del triángulo?

Parejas	Ideas principales de los acercamientos
Ismael-Gilberto Antonia-Alma	Construir una familia de triángulos isósceles con perímetro de 48 *cm.* Determinar las dimensiones del triángulo cuyo lado diferente mida 2/3 de uno de los lados iguales.
Eduardo-Daniela	Modelar, sin construir el triángulo, el comportamiento de la longitud del lado diferente cuando varían las longitudes de los lados iguales (aquí el lado diferente siempre mide 2/3 de uno de los lados iguales). Determinar las longitudes de los lados (o segmentos) que sumen 48 *cm.*
Alberto-Jésica	Construir una familia de triángulos isósceles que su lado diferente mida 2/3 de uno de los lados iguales, usando un segemento de longitud dada como unidad de medida; es decir, el lado diferente tiene el doble de longitud del segemento dado, y los lados iguales, el triple. Determinar las dimensiones del triángulo cuyos lados sumen 48 *cm.*, a partir de variar las longitud del segmento dado.
Andrés-Ramón Brenda-Karla	Construir una familia de triángulos isósceles donde sus lados iguales midan 3/2 de su lado diferente. Determinar las dimensiones del triángulo cuyos lados sumen 48 *cm.*

Para este problema, las parejas (seis) mostraron cuatro acercamientos distintos. Cuatro parejas (Elisa-Hugo, Yolanda-Natalia, Leo-Miguel y Gloria-Erika) presentaron un acercamiento incompleto que posteriormente terminaron a partir de la presentación y discusión grupal que se generó cuando las parejas compartieron sus soluciones.

Primer acercamiento (presentado por Ismael y Gilberto).

La idea inicial del primer acercamiento fue construir una familia de triángulos isósceles con perímetro de 48 *cm*. Para lograrlo, trazaron lo siguiente (Figura 4.1.1): un segmento *AB* en el eje horizontal, con *A* en el origen y *B* un punto móvil; una circunferencia centrada en *A* y con radio *AB*; una circunferencia centrada en *B* con radio $r = 48 - 2f$, (condición para que el perímetro del triángulo sea 48) donde *f* era la longitud del segmento *AB*; y el triángulo *ABD*, donde *D* era una de las intersecciones entre las circunferencias. Así, el triángulo *ABD* cumplía la condición de ser isósceles con $AB = AD$ y tener perímetro de 48 *cm*.

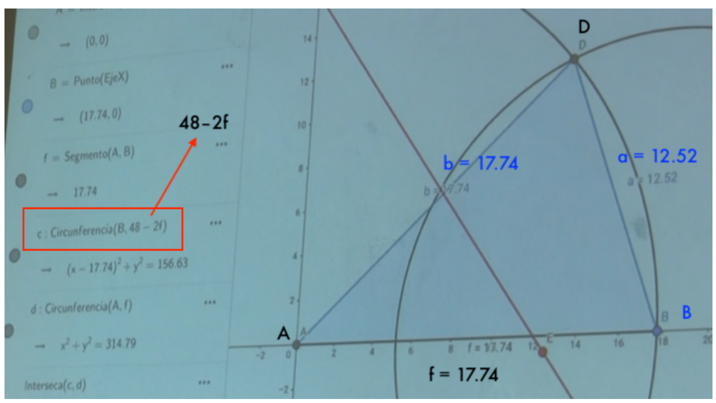


Figura 4.1.1. Construcción de la familia de triángulos isósceles con perímetro de 48 *cm* (https://www.geogebra.org/m/tkhuxvjw).

Cuando la pareja utilizó la prueba del arrastre para mostrar que su modelo era robusto, observó que el triángulo solo existía si *B* se movía en el intervalo (12, 24) (Figura 4.1.2).

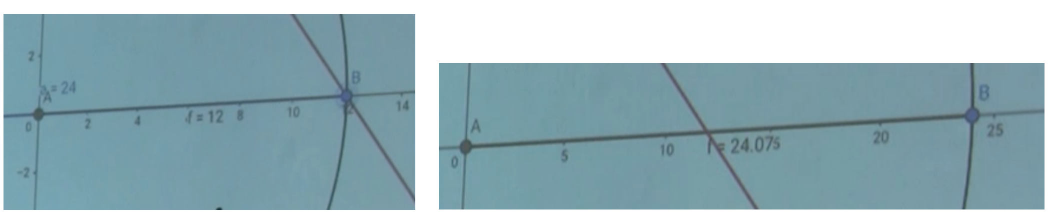


Figura 4.1.2. Posiciones del punto *B* donde deja de existir el triángulo *ABD*.

Esto no solo permitió identificar el dominio o intervalo para mover el punto B en el modelo (que los lados iguales del triángulo construido no podían medir igual o menos de 12 unidades ni igual o más de 24 unidades), sino también hizo posible que se llevara a cabo una discusión alrededor del concepto de la desigualdad del triángulo (¿qué relación guardan los lados de un triángulo para que pueda construirse?).

Enseguida, definieron el punto $E = \left(a, \frac{2}{3}b - a\right)$ con coordenadas la longitud del lado BD como coordenada *x* y como ordenada $\frac{2}{3}b - a$, que relacionaba al lado desigual con la diferencia de dos terceras partes de uno de los lados iguales y el lado desigual (*a* era la longitud del segmento *BD*, y *b*, la longitud del segmento *AD*, ver Figura 4.1.3). El punto *E* depende de la posición del punto *B*. El lugar geométrico del punto *E* cuando *B* se mueve sobre el eje *x* es una recta. La solución la hallaron cuando al mover *B*, el valor de la ordenada del punto *E* es cero, que gráficamente significa el punto que determina la intersección del lugar geométrico descrito por *E* y el eje horizontal (Figura 4.1.3).

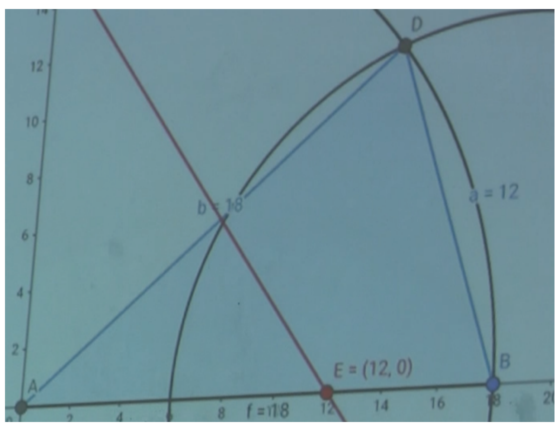
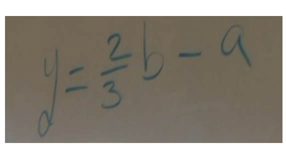


Figura 4.1.3. Dimensiones del triángulo que cumple con las condiciones del problema.

Finalmente, la pareja buscó parametrizar el lugar geométrico para obtener la solución algebraica, sin embargo, no consiguió concluir este proceso (Figura 4.1.4). La dificultad fue que no supo cómo expresar a "*y*" en términos de *a*.



$$y = \frac{2}{3}\mathrm{b} - \mathrm{a}$$

Figura 4.1.4. Variable *y* en términos de *a* y *b*.

Segundo acercamiento (presentado por Eduardo y Daniela).

El segundo acercamiento, mostrado por otra pareja, consistió en modelar la relación entre uno de los lados iguales y el diferente sin construir el triángulo. Entonces, trazó un segmento AB, con A en el origen y B un punto móvil sobre el eje horizontal, y un segmento AC, donde C fue el punto de intersección entre el eje vertical y la circunferencia con centro en A y radio $r = \frac{2}{3}f$ (f era la longitud del segmento AB) (Figura 4.1.5). Con estos trazos, el equipo aseguró que la longitud del segmento AC fuera *2/3* de la longitud del segmento AB para cualquier posición del punto B. Así, la longitud del segmento AC la asociaron a la medida del lado diferente del triángulo, y la longitud del segmento AB, a la medida de uno de los lados iguales.

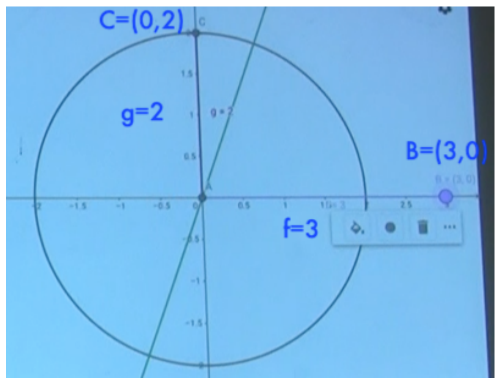


Figura 4.1.5. Modelo del segundo acercamiento (https://www.geogebra.org/m/de5kngap).

A partir del modelo, definió el punto $D = (f, 2f + g)$ que relacionaba la medida de uno de los lados iguales del triángulo con su perímetro (Figura 4.1.6). Las coordenadas que tiene el punto D en la Figura 4.1.6 se interpretan como: si uno de los lados iguales del triángulo mide 3 cm, entonces su perímetro es de 8 cm.

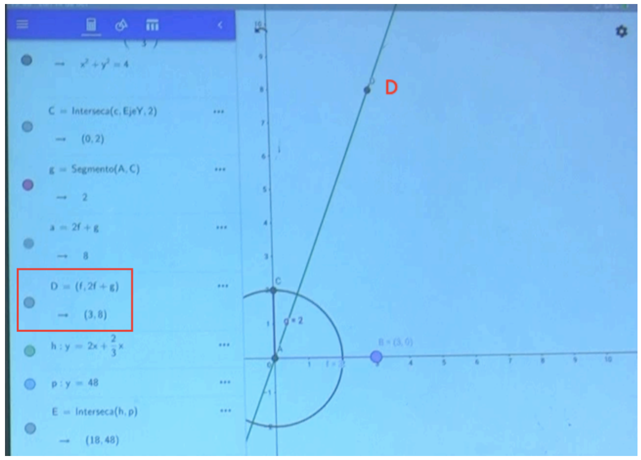


Figura 4.1.6. Análisis de la relación $D = (f, 2f + g)$.

La solución la obtuvo cuando la ordenada del punto *D* fue 48, porque cumplió con las condiciones descritas en el enunciado. En la Figura 4.1.7 se observa que cuando la medida de los lados iguales es 18 *cm* y la del diferente es 12 *cm*, el perímetro es de 48 *cm*, y que la solución gráfica se halla en la intersección del lugar geométrico descrito por *D* y la recta $y = 48$.

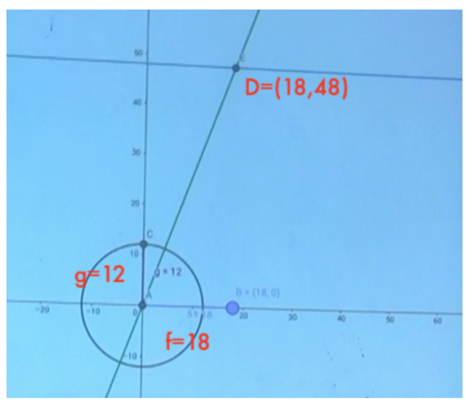
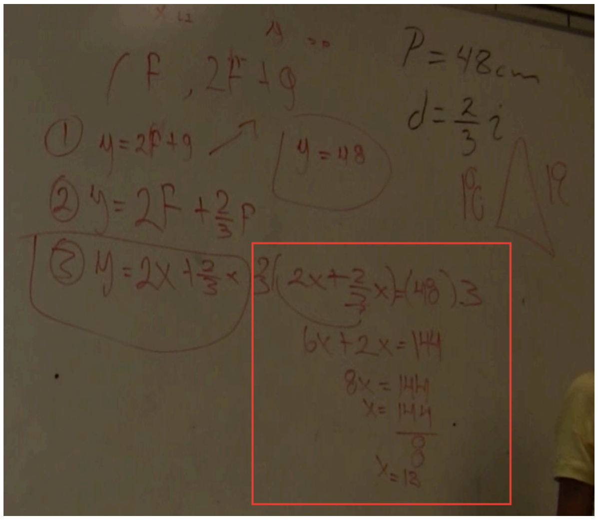


Figura 4.1.7. Solución gráfica del segundo acercamiento.

La parametrización y solución algebraica fue desarrollada adecuadamente por la pareja. En la Figura 4.1.8 puede observarse que planteó la ecuación $2x + \frac{2}{3}x = 48$, que fue resultado de igualar la función que surge de parametrizar el lugar geométrico y la función constante ($y = 48$), y la resolvió correctamente.



$$2x + \frac{2}{3}x = 48$$

$$3\left(2x + \frac{2}{3}x\right) = (48)3$$

$$6x + 2x = 144$$

$$8x = 144$$

$$x = \frac{144}{8}$$

$$x = 18$$

Figura 4.1.8. Solución algebraica del segundo acercamiento.

Tercer acercamiento (presentado por Alberto y Jésica).

La pareja primero construyó un triángulo que cumpliera con que su lado diferente midiera dos terceras partes de los lados iguales (Figura 4.1.9). Trazó el segmento *AB*, con *A* en el origen y *B* un punto móvil sobre el eje horizontal, y asumió que *f* (longitud del segmento *AB*) representaba un tercio de las longitudes de los lados del triángulo. Con este trazo base, trazó lo siguiente: una circunferencia centrada en *A* con radio igual a *2f*, y nombró *C* a la intersección de esta con el eje horizontal; dos circunferencias con radios iguales a *3f*, una centrada en *A*, y la otra, en *C*, y etiquetó como *E* a una de las intersecciones entre ellas; finalmente, trazó los segmentos *AC*, *CE* y *AE*, los cuales representaron el lado diferente y los lados iguales, respectivamente. La configuración del modelo que construyó, la pareja, mantenía las condiciones de que el triángulo *ACE* era isósceles y su lado diferente (la base del triángulo) era dos tercios de uno de los lados iguales, para cualquier posición de *B* (Figura 4.1.9).

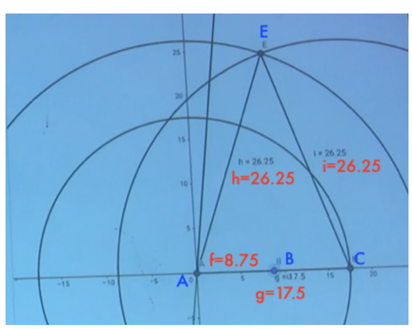


Figura 4.1.9. Modelo del tercer acercamiento (https://www.geogebra.org/m/sjyntafw).

Luego, definió el punto $F = (f, g + h + i)$ para explorar el comportamiento del perímetro respecto a *f*. Las dimensiones del triángulo que cumplían con las condiciones del problema las obtuvo cuando F coincidía con la recta $y = 48$ (Figura 4.1.10).

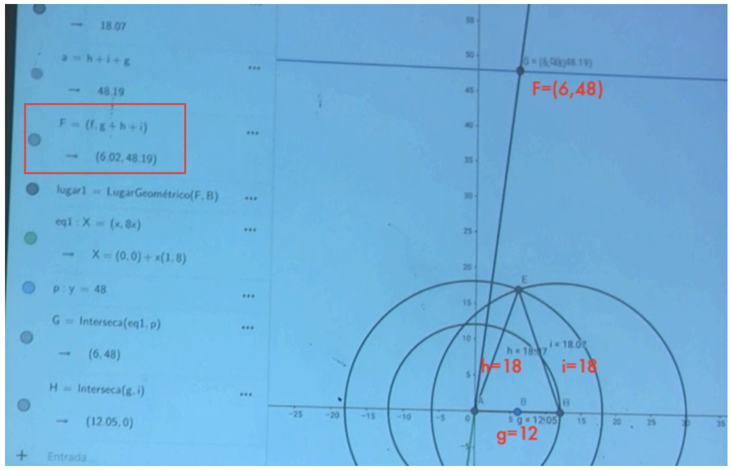
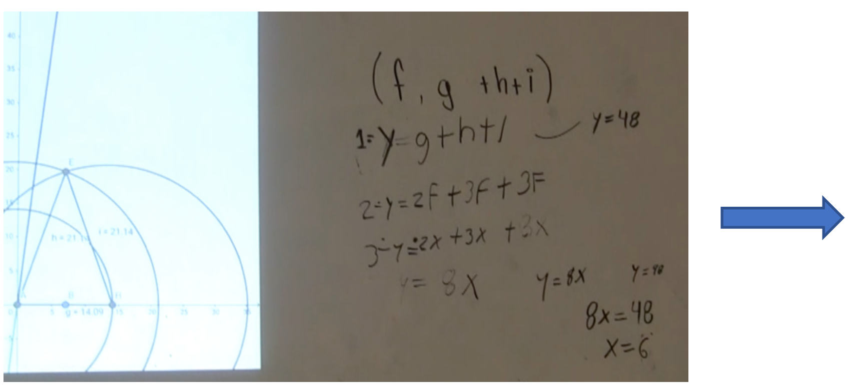


Figura 4.1.10. Solución gráfica del tercer acercamiento.

En la Figura 4.1.11 se muestra la parametrización y el planteamiento y solución de la ecuación que obtuvo de igualar las funciones $y = 8x$ & $y = 48$. La solución de la ecuación ($x = 6$) representó la longitud del segmento AB, así que tenía que sustituirse en g, h e i para obtener las medidas de los lados del triángulo.



$$y = g + h + i$$
$$y = 2f + 3f + 3f$$
$$y = 8x$$
$$8x = 48$$
$$x = 6$$

Figura 4.1.11. Solución algebraica del tercer acercamiento.

Cuarto acercamiento (presentado por Andrés y Ramón).

En el último acercamiento, la cuarta pareja desarrolló la misma idea que la tercera, solo que su segmento AB se asoció a la medida del lado diferente del triángulo. Esta decisión provocó pequeños cambios en el proceso de construcción del modelo (Figura 4.1.12). Primero, ya no necesitó trazar tres circunferencias, con dos le fue suficiente para hallar el tercer vértice del triángulo (punto D); y segundo, las circunferencias centradas en A y B tuvieron radio $r = \frac{3}{2} f$ (f era la longitud del segmento AB).

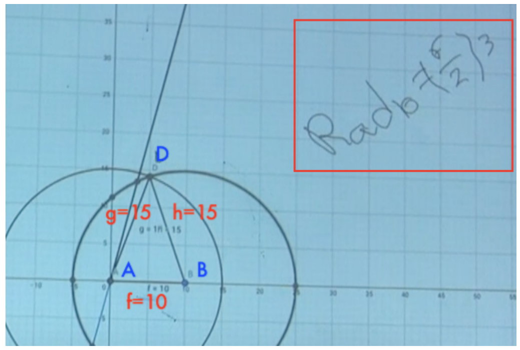


Figura 4.1.12. Modelo de la cuarta pareja (https://www.geogebra.org/m/xqcbpfvg).

La solución la halló en la abscisa de la intersección del lugar geométrico descrito por E y la recta $y = 48$, donde E lo definió como $E = (f, f + g + h)$ (Figura 4.1.13). En otras palabras, como E describió el comportamiento del perímetro con relación al lado diferente del triángulo, entonces las medidas de los lados del triángulo las consiguió cuando la ordenada de E fue 48.

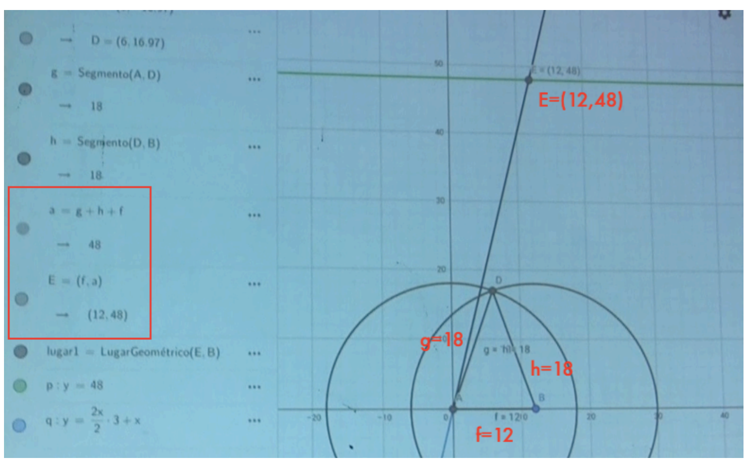
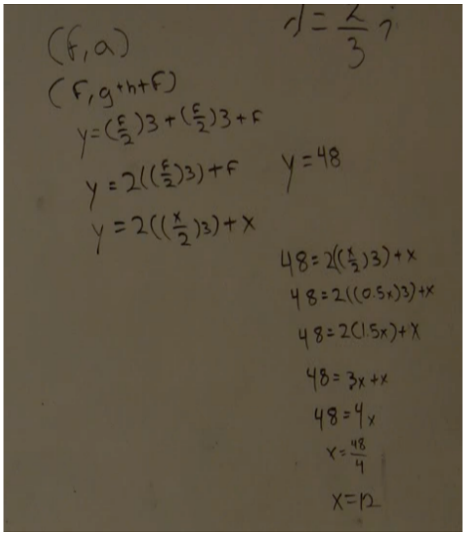


Figura 4.1.13. Solución gráfica de la cuarta pareja.

Al igual que la tercera pareja, parametrizó y desarrolló la solución algebraica (Figura 4.1.14), pero como la variable x se asoció al lado diferente, el resultado fue la medida de ese lado ($x = 12$).



$$(f, g + h + f)$$
$$y = (f/2)3 + (f/2)3 + f$$
$$y = 2\big((f/2)3\big) + f$$
$$y = 2\big((x/2)3\big) + x; y = 48$$
$$48 = 2\big((x/2)3\big) + x$$
$$48 = 2\big((0.5x)3\big) + x$$
$$48 = 2(1.5x) + x$$
$$48 = 3x + x$$
$$48 = 4x$$
$$x = 48/4$$
$$x = 12$$

Figura 4.1.14. Solución algebraica mostrada por la cuarta pareja.

Después de analizar los cuatro acercamientos puede observarse que, por el contexto del problema, todas las parejas, excepto la que presentó el segundo acercamiento, consideraron que para resolverlo era necesario, en un principio, construir un triángulo que cumpliera con alguna de las condiciones descritas en el enunciado. Esta idea de construir el triángulo permitió tener distintos acercamientos a la solución del problema, pero también provocó que cuatro parejas no presentaran una propuesta de solución, pues, como no se les planteó en los problemas del primer bloque alguno que implicara la construcción de una figura, no tuvieron una idea propia que les permitiera iniciar un acercamiento hacia la solución del problema.

¿Qué ofreció o qué aportó la construcción del triángulo al desarrollo del problema? Aunque no era necesario construirlo para resolver el problema, como se mostró en el segundo acercamiento, permitió prestarle atención a elementos o conceptos que no se toman en cuenta cuando se trabaja con lápiz y papel: dominio del problema, desigualdad del triángulo, construcción de la figura. Además, GeoGebra no solo favoreció la exploración de dichos elementos o conceptos, sino también ayudó a plantear las ecuaciones desde un enfoque gráfico, pues las ecuaciones fueron vistas como igualdades entre funciones que surgen de las relaciones analizadas en los modelos.

Problema 6:

Un farmacéutico debe preparar 75 ml de una solución con un ingrediente activo al 2%. Si sólo tiene en existencia soluciones al 4 y 1%, ¿cuánto de cada solución deberá mezclar para la elaboración de la nueva solución al 2%?

Acercamiento	Ideas principales
Elisa-Hugo	Representar las soluciones como dos longitudes de segmentos que sumen 75 en el eje horizontal: el primer segmento asociado a la solución del 1% de ingrediente activo, y el segundo, a la del 4%. Representar las cantidades de ingrediente activo de cada sustancia mediante longitudes de segmento en el eje vertical. Determinar las longitudes de los segmentos del eje horizontal cuando los del eje vertical sumen 15 (2% de 75).
Yolanda-Natalia Ismael-Gilberto Antonia-Alma Alberto-Jésica Andrés-Ramón Brenda-Karla	Representar las soluciones como dos longitudes de segmentos que sumen 75: el primer segmento asociado a la solución del 4% de ingrediente activo, y el segundo, a la del 1%. Representar las cantidades de ingrediente activo de cada sustancia mediante longitudes de segmento en el eje vertical. Determinar las longitudes de los segmentos del eje horizontal cuando los del eje vertical sumen 15 (2% de 75).

En este problema se presentaron dos acercamientos. El primero, realizado por una pareja, y el segundo, por seis parejas. Las otras tres parejas (Eduardo-Daniela, Leo-Miguel y Gloria-Erika) comenzaron la construcción del modelo igual al del segundo acercamiento, pero no lograron concluirlo porque no comprendieron el problema completamente. No obstante, a partir de la presentación y discusión grupal que se generó cuando las parejas compartieron sus soluciones, lo terminaron.

Los dos acercamientos que mostraron las parejas en la resolución de este problema partieron de la idea de representar la cantidad de mililitros de las soluciones al 1 y 4 porciento en el eje horizontal, de tal manera que se cumpliera la condición de que sumadas fueran 75 ml en total, y en el eje vertical representaron la cantidad de ingrediente activo que contenía cada solución (Figura 4.1.15). Así, en la Figura 4.1.15 (primer acercamiento mostrado por Elisa y Hugo), la longitud del segmento AC la asociaron a la solución del 1%; la del segmento CB, a la solución del 4%; el segmento AD de longitud $0.01g$ (0.01 veces la longitud del segmento AC), que se trazó con ayuda de la herramienta *Circunferencia (centro y radio)*, lo asociaron a la cantidad de ingrediente activo de la solución al 1%; el segmento AE de longitud $0.04f$, a la cantidad de ingrediente activo de la solución al 4%; y el segmento AF de longitud $0.02AB$, a la cantidad de ingrediente activo de la solución al 2%, que es la resultante de mezclar las soluciones del 1 y 4 por ciento. En este contexto, las unidades de los ejes fueron mililitros.

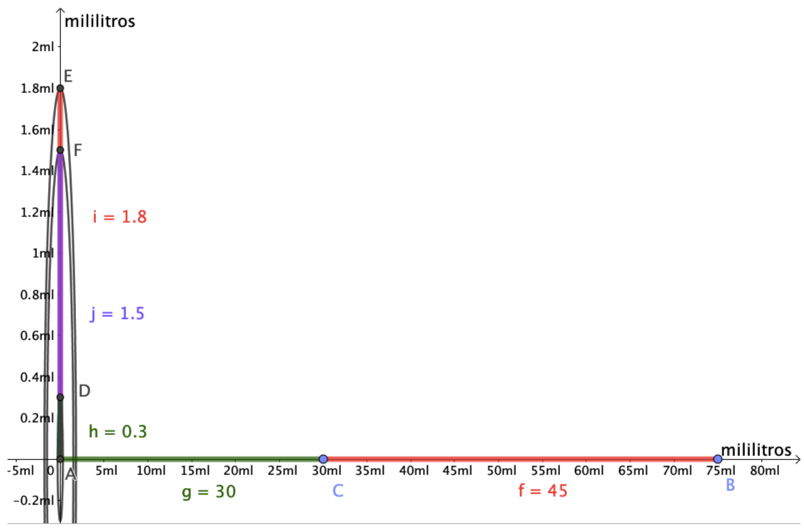
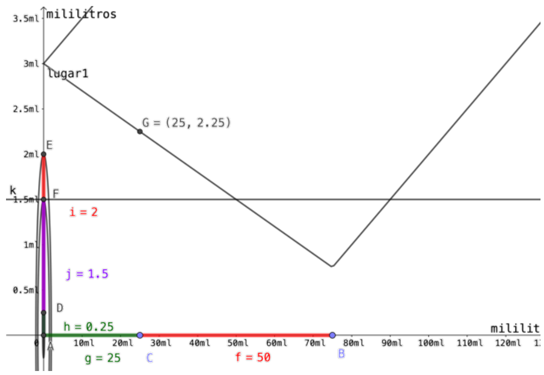


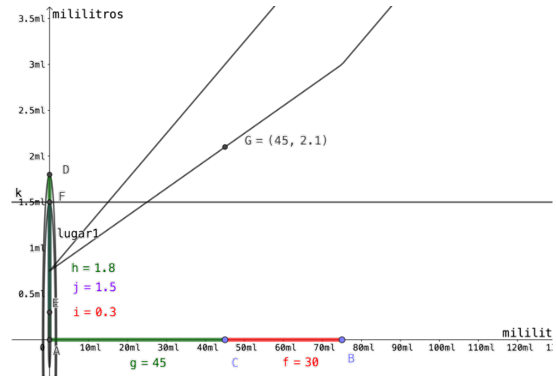
Figura 4.1.15. Representación geométrica de las soluciones (sustancias) y sus ingredientes activos (https://www.geogebra.org/m/m9bnh7e2).

Entonces, lo que analizaron en los dos acercamientos fue la relación entre las soluciones y sus cantidades de ingrediente activo. Es decir, exploraron los modelos a través de mover el punto C sobre el eje horizontal hasta hallar el instante en que la suma $AD + AE$ fuera igual a AF ó $h + i = j$, para determinar cuánta solución de cada una se debía mezclar.

A pesar de que las ideas generales y modelos coincidían en gran medida en los dos acercamientos, su diferencia fue notoria cuando se llevó a cabo el análisis del lugar geométrico descrito por el punto $G = (g, h + i)$ (Figura 4.1.16). Esta diferencia se dio porque el segmento g no representó a la sustancia al 1% en ambos casos, en el segundo modelo lo asociaron con la solución al 4%. Así, aunque la relación que analizaron en cada modelo fue la misma en términos geométricos: $(AC,\ AD + AE)$, el resultado fue distinto.



Lugar geométrico del primer acercamiento.



Lugar geométrico del segundo acercamiento (https://www.geogebra.org/m/gy9cnaa8).

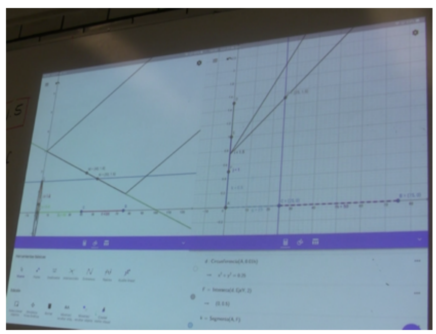
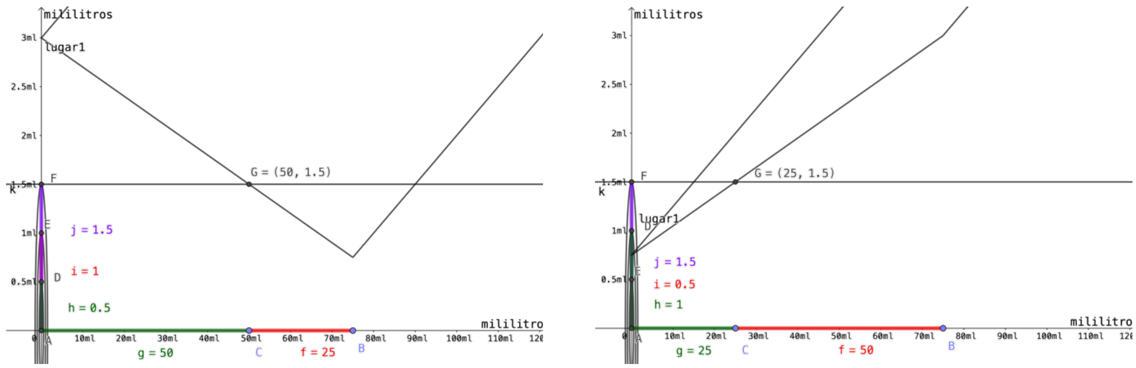


Imagen de ambos acercamientos.

Figura 4.1.16. Representación gráfica de los lugares geométricos de cada modelo.

En la gráfica del primer modelo (Figura 4.1.17a), el valor que hallaron para g, cuando se obtuvo que $AD + AE = AF$, fue 50, mientras que, para la gráfica del segundo modelo (Figura 4.1.17b), g fue 25. Bajo el contexto del problema, en el primer modelo encontraron que deben utilizar 50 ml de la solución al 1% de ingrediente activo para la mezcla, y en el segundo modelo, 25 ml de la solución al 4%.

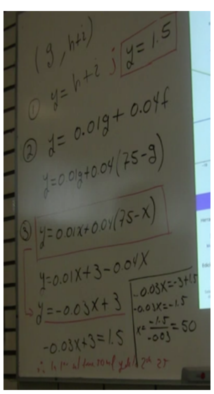


a b

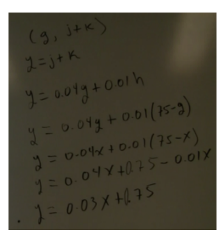
Figura 4.1.17. Soluciones gráficas de los dos acercamientos.

En la discusión grupal que se hizo sobre la interpretación de los modelos, los estudiantes comprendieron que la solución se hallaba en la intersección de la recta $y = 1.5$ (que representó la cantidad de ingrediente activo de la mezcla) y el lugar geométrico de cada modelo que se graficó dentro del intervalo $(0, 75)$. Esto fue un indicador de que los estudiantes consideraron el contexto del problema para identificar su dominio en la representación gráfica.

Enseguida hicieron la parametrización de los lugares geométricos de cada modelo (Figuras 4.1.18a y 4.1.18b) y obtuvieron sus respectivas soluciones algebraicas.



$$y = h + i;\ y = 1.5$$
$$y = 0.01g + 0.04f$$
$$y = 0.01g + 0.04(75 - g)$$
$$y = 0.01x + 0.04(75 - x)$$
$$y = 0.01x + 3 - 0.04x$$
$$y = -0.03x + 3$$
$$-0.03x + 3 = 1.5$$
$$-0.03x = 1.5 - 3$$
$$-0.03x = -1.5$$
$$x = -1.5/-0.03 = 50$$



$$y = j + k$$
$$y = 0.04g + 0.01h$$
$$y = 0.04g + 0.01(75 - g)$$
$$y = 0.04x + 0.01(75 - x)$$
$$y = 0.04x + 0.75 - 0.01x$$
$$y = 0.03x + 0.75$$

Figura 4.1.18a. Parametrización del lugar geométrico del primer acercamiento.

Figura 4.1.18b. Parametrización del lugar geométrico del segundo acercamiento.

La dificultad que se identificó durante este proceso fue la de representar *f* en términos de *g*. Cuando se preguntó a las parejas ¿cómo escribir la ecuación 2 (ver Figura 4.1.19a) en términos de *g*?, observaron el modelo (Figura 4.1.19b) y contestaron que *f* era $g/2$, lo que fue equivocado porque la condición que cumplían *f* y *g* era que sumaban 75. En vez de reflexionar sobre la forma en que construyeron el modelo, buscaron un patrón entre los valores que tenían las longitudes de los segmentos *f* y *g* en ese instante.

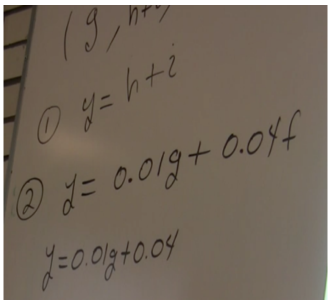


Figura 4.1.19a. Ecuación 2 de la parametrización del primer modelo.

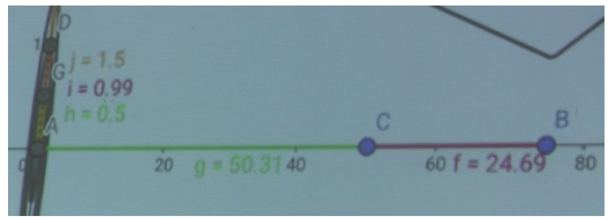


Figura 4.1.19b. Modelo del primer acercamiento.

No obstante, el investigador utilizó el mismo modelo dinámico para que los estudiantes verificaran si era correcta o no la respuesta que habían dado. En la Figura 4.1.20 se muestra cuando el punto *C* se movió a 40; se observó que la relación de los segmentos *f* y *g* mencionada por los estudiantes fue incorrecta (ya que la longitud de *f* no era la mitad de la longitud de *g*). De esta manera el SGD sirvió como un medio para invalidar la conjetura planteada.

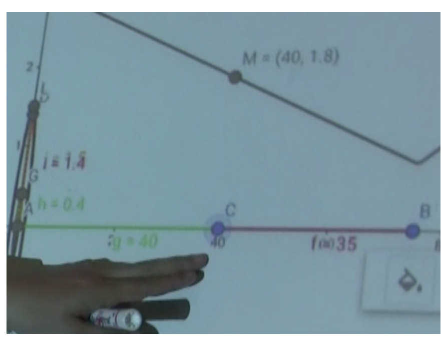


Figura 4.1.20. Cambio de la posición del punto *C* para verificar la conjetura planteada por las parejas.

En general, se observó que los modelos, que plantearon las parejas, permitieron resolver el problema sin dificultades mayores. A pesar de que es común que se les complique trabajar con porcentajes por el tema de conversiones, el SGD dio la posibilidad de no hacerlas, ya que las hace con solo usar la notación de "%" (por ejemplo: si se introduce la expresión "$1\%g$" en GeoGebra da como resultado la operación $0.01g$). Así, las parejas se enfocaron en las ideas generales para construir un modelo dinámico sin ocuparse de los aspectos aritméticos o algebraicos.

Problema 7:

Para la recolección de trigo se utilizan dos cosechadoras, la primera tarda 8 horas y las dos juntas tardan 4.8 horas, ¿cuánto tiempo tardará la segunda en recolectar el trigo?

Acercamiento	Ideas principales
Antonia-Alma Eduardo-Daniela Andrés-Ramón Elisa-Hugo Yolanda-Natalia Gloria-Erika	Representar, a través de pendientes, la velocidad con la que recolecta el trigo la primera cosechadora y la velocidad con la que recolectan el trigo las dos cosechadoras juntas. Modelar, a través de una tercera pendiente, la velocidad con la que recolecta el trigo la segunda cosechadora. Determinar el tiempo que tarda en recolectar el trigo la segunda cosechadora cuando la tercera pendiente equivale a la diferencia de las dos primeras. * Las 6 parejas mostraron dificultades en la interpretación del modelo.
Brenda-Karla	Representar, mediante áreas de rectángulos, la cantidad de trigo recolectado por la primera cosechadora y la cantidad de trigo recolectado por las dos juntas. * Esta pareja mostró dificultades para interpretar el modelo y hallar la solución.
Alberto-Jésica Ismael-Gilberto	Representar, a través de pendientes, la velocidad con la que recolecta el trigo la primera cosechadora y la velocidad con la que recolectan el trigo las dos cosechadoras juntas. Modelar, a través de una tercera pendiente, la velocidad con la que recolecta el trigo la segunda cosechadora. Determinar el tiempo que tarda en recolectar el trigo la segunda cosechadora cuando la tercera pendiente equivale a la diferencia de las dos primeras. * Las 2 parejas mostraron dominio en la interpretación del modelo.

En este problema verbal se mostraron tres acercamientos distintos. Trabajaron nueve parejas porque hubo inasistencia de dos estudiantes (Leo y Miguel). Todas las parejas resolvieron el problema.

Primer acercamiento (presentado por Antonia y Alma).

El primero se basó en el modelo que se construyó en el Problema 4 de del bloque 1 (ver Figura 27b del apéndice 2). Prácticamente, como identificaron que el contexto de ese problema era análogo a este, ajustaron ese modelo a los datos de este problema (Figura 4.1.21).

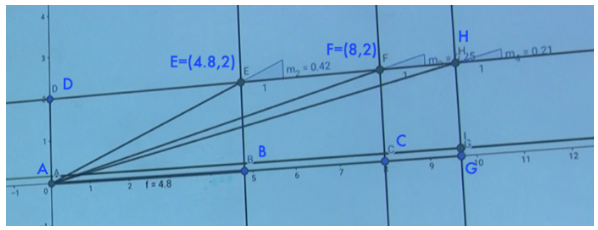


Figura 4.1.21. Modelo del primer acercamiento (https://www.geogebra.org/m/xe2xevgj).

En el modelo que se muestra en la Figura 4.1.21, la longitud del segmento AB se asoció al tiempo en el que dos máquinas recolectan trigo; la del segmento AC, al tiempo en que la primera máquina tarda en recolectarlo; la del segmento AD, a la cantidad total de trigo recolectado (las unidades de trigo recolectado se tomaron como toneladas); la pendiente del segmento AE (m_2), a la cantidad de trigo que recolectan las dos máquinas en una hora; la pendiente del segmento AF (m_3), a la cantidad de trigo que recolecta la primera máquina en una hora; la longitud del segmento AG (asociado a la variable), al tiempo en que la segunda máquina recolecta el trigo; y la pendiente del segmento AH (m_4), a la cantidad de trigo que recolecta la segunda máquina en una hora. Por lo tanto, el significado de las coordenadas del punto $E = (4.8,\ 2)$ fue que en 4.8 horas las dos cosechadoras recolectan 2 toneladas de trigo; las del punto $F = (8,\ 2)$, que en 8 horas la primera cosechadora recolecta la misma cantidad de trigo, y las del punto H, las horas en que la segunda cosechadora recolecta las 2 toneladas. Los puntos E y F fueron fijos, mientras que la posición del punto H dependía de la posición del punto G.

Sin embargo, cuando se cuestionó a la pareja sobre la interpretación de los elementos del modelo con base en el contexto del enunciado, tuvo dificultades para interpretarlo. La pareja expresó que las unidades del eje vertical eran cosechadoras y que por ese motivo el segmento AD era de longitud dos (Figura 4.1.21), porque eran dos cosechadoras según el problema. También mencionaron que las pendientes m_2, m_3 y m_4 eran velocidades de las cosechadoras, pero no pudieron especificar las unidades. Un integrante de otra pareja dijo que, si las pendientes representaban las velocidades de las cosechadoras, entonces las unidades del eje vertical representaban distancia, pero tampoco pudo darles sentido a los elementos del modelo bajo esa suposición.

Ante estas respuestas, el profesor intervino para aclarar las ideas principales del modelo y explicar por qué tenían sentido. Finalmente, la pareja movió el punto *G* sobre el eje horizontal hasta encontrar que el valor numérico de la pendiente m_4 fuera igual a la diferencia de las pendientes m_2 y m_3. Cuando obtuvo esta igualdad, hallaron que la segunda cosechadora tarda 12 horas en recolectar el trigo (Figura 4.1.22). También observó que la posición del punto *D* no afectaba la solución del problema.

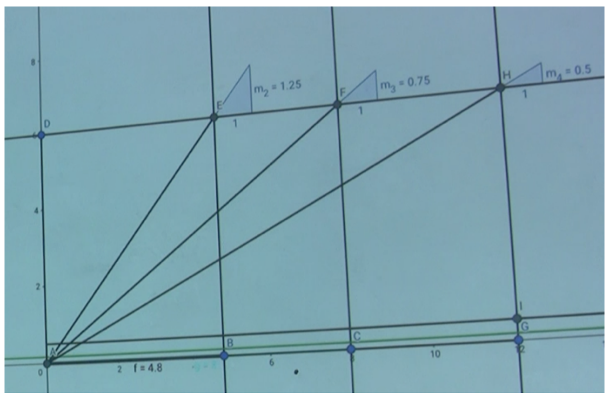


Figura 4.1.22. Posición del punto *G* donde se halla la solución del problema.

Lo que se puede observar de las dificultades que surgieron es que están asociadas a los conceptos de velocidad y razón. La pareja identificó las razones del modelo (que son las pendientes) y las asociaron con las velocidades de las cosechadoras; por ello, intentó de que las unidades del eje vertical fueran cosechadoras o distancia, porque así obtendría en las pendientes las "velocidades de las cosechadoras" o la razón de "distancia/tiempo" que es la fórmula de velocidad. Es decir, los conceptos de razón y velocidad los usaron indistintamente; no identificó a la razón como una operación general que permite comparar dos cantidades.

En las figuras 4.1.21 y 4.1.22 pueden observarse los lugares geométricos que obtuvo. La relación que graficó fue $(AG,\ m_2 - m_3)$ cuando tenía que graficar la relación $(AG,\ m_4)$, ya que se tenía que analizar la variación de m_4 respecto a AG que, en términos del problema, significaba analizar la variación de la velocidad de recolección de la segunda cosechadora respecto al tiempo. Este error de no prestar atención a los objetos que varían en el modelo ya se había visto en la resolución de los problemas del bloque 1. Los estudiantes tienden a utilizar los datos conocidos del problema en los análisis de relaciones.

Luego de corregir la relación, la pareja hizo la parametrización del lugar geométrico (ecuación 3 de la figura 4.1.23).

$$(1) y = m_4$$
$$y = m_2 - m_3$$
$$y = AD/4.8 - AD/8$$
$$(2) y = AD/AG$$
$$(3) y = AD/x$$

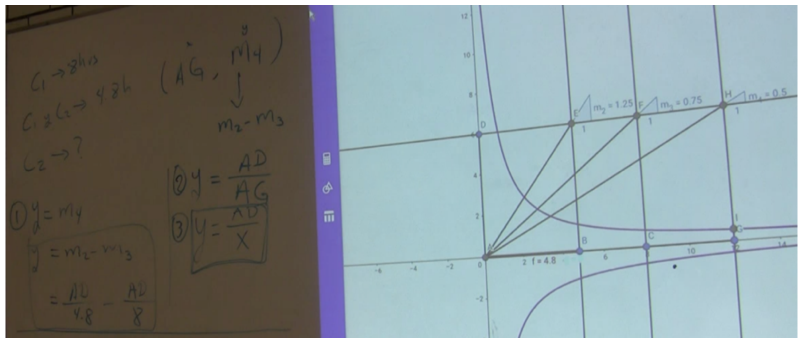
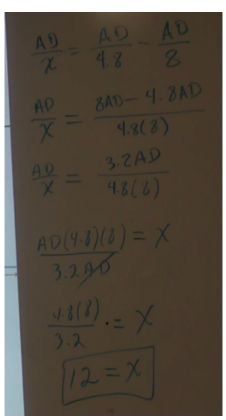


Figura 4.1.23. Representación gráfica y parametrización del lugar geométrico de la relación $(AG,\, m_4)$.

La ecuación por resolver la planteó de escribir $m_4 = m_2 - m_3$ en términos de AG, donde $AG = x$. En la Figura 4.1.24 se muestra la ecuación y el despeje que hizo para obtener el valor de x. En el proceso se observó que el término AD se eliminó, y se relacionó con el hecho de que, aunque se variara su valor en el modelo, no afectaba a la solución del problema.



$$\frac{AD}{x} = AD/4.8 - AD/8$$
$$\frac{AD}{x} = \frac{8AD - 4.8AD}{4.8(8)}$$
$$\frac{AD}{x} = \frac{32AD}{4.8(8)}$$
$$\frac{AD(4.8)(8)}{3.2AD} = x$$
$$\frac{4.8(8)}{3.2} = x$$
$$12 = x$$

Figura 4.1.24. Desarrollo y solución de la ecuación asociada al modelo.

Segundo acercamiento (presentado por Brenda y Karla).

En el segundo acercamiento (Figura 4.1.25), la pareja, consideró las unidades del eje horizontal como horas (tiempo), y las del eje vertical como velocidad de recolección (toneladas por hora). La construcción se basó en representar la cantidad de trigo recolectado mediante áreas de rectángulos. En la Figura 4.1.25 se muestran los puntos fijos C y D que fueron asociados a las razones de 1/4.8 y 1/8, respectivamente (la unidad se tomó como el 100% de trigo recolectado), y que los interpretaron como las fracciones de trigo que recolectan en una hora las dos cosechadoras trabajando juntas y la primera de forma individual. El punto B fue móvil y representó el tiempo de cosecha.

$$D \to .12 = \frac{1}{8}$$

$$C \to .2 = \frac{1}{4.8}$$

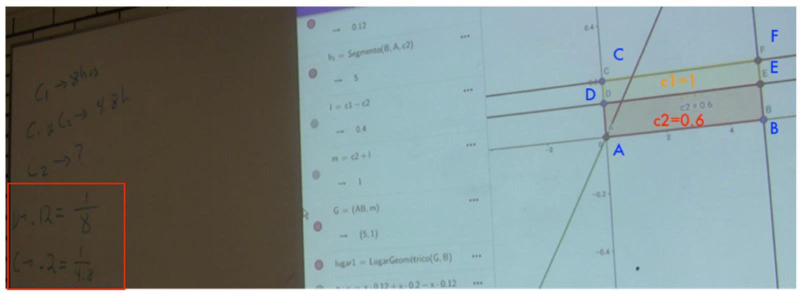


Figura 4.1.25. Segundo acercamiento del problema de las cosechadoras.

El valor numérico del área del rectángulo $ABED$ (polígono $c2$) representó el porcentaje de trigo recolectado por la primera cosechadora; y el valor numérico del área del rectángulo $ABFC$ (polígono $c1$), el porcentaje de trigo recolectado por ambas cosechadoras (las bases de ambos rectángulos dependían del punto B). De esta manera, en la Figura 4.1.25 puede interpretarse que en 4.8 horas las dos cosechadoras recolectaron el 100% del trigo, y que la primera recolectó el 60% del total. Así, la diferencia entre las áreas ($c1 - c2$), es decir, el área del rectángulo que se formó por los vértices $DEFC$, representó el porcentaje de trigo que recolectó la segunda cosechadora en x horas. Por lo tanto, si se quería saber cuánto tiempo le tomaba a la segunda cosechadora recolectar todo el trigo, solo debía moverse el punto B sobre el eje horizontal hasta encontrar para qué tiempo la diferencia de las áreas era 1 ($c1 - c2 = 1$), pues las velocidades con las que trabajan las cosechadoras eran constantes. En la Figura 4.1.26 se muestra la solución del problema (12 horas) en términos del modelo.

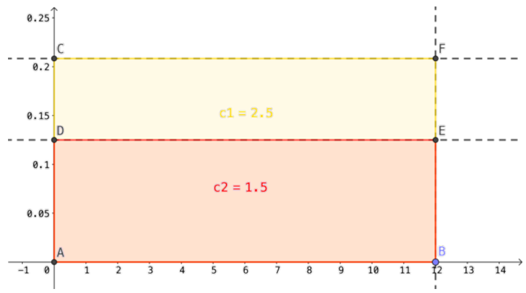


Figura 4.1.26. Posición de B donde se cumple que $c1 - c2 = 1$.

Sin embargo, la pareja no logró concretar esta idea. Definió la diferencia de las áreas como $i = c1 - c2$, que identificó como el porcentaje de trigo recolectado por la segunda cosechadora, analizó el comportamiento de la suma de $i + c2$, y concluyó que cuando la suma fuera igual a uno se obtendría el tiempo en que la segunda cosechadora recolecta el 100% del trigo. El profesor le mostró mediante una sustitución que analizar la suma $i + c2$ era equivalente a analizar $c1 - c2 + c2 = c1$; es decir, la pareja analizó el área del rectángulo *ABFC* (Figura 4.1.26) que estaba asociado al porcentaje de trigo recolectado por ambas cosechadoras, y no por la segunda como lo mencionó.

La discusión que guio el profesor fue con la intención de dar a notar que el único dato que no se había representado explícitamente en este acercamiento, pero que era necesario para resolver el problema, era la velocidad de recolección de la segunda cosechadora (el cual se hallaba en la longitud del segmento *CD*). De igual forma, la pareja no logró interpretar adecuadamente el modelo para dar respuesta a la pregunta planteada en el enunciado.

Tercer acercamiento (presentado por Alberto y Jésica).

El tercer acercamiento coincidió con las ideas y procedimientos que se desarrollaron en el primero (Figura 4.1.27). La diferencia fue que, en el proceso de interpretación y parametrización del modelo, la pareja mostró un mayor dominio, aunque en la resolución de la ecuación tuvo dificultades también (Figura 4.1.28).

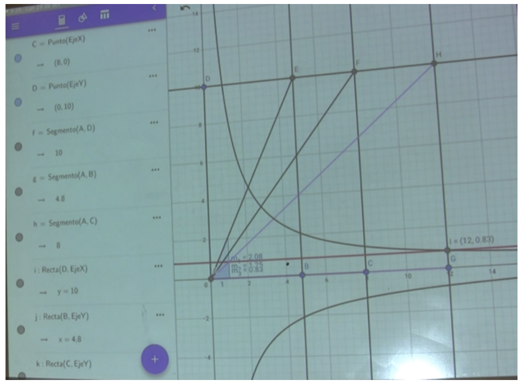


Figura 4.1.27. Modelo mostrado por la tercera pareja.

$$(1)\quad y = m_3$$

$$(2)\quad y = \frac{AD}{AG}$$

$$(3)\quad y = \frac{AD}{x}$$

$$y = m_1 - m_2$$

$$y = \frac{AD}{4.8} - \frac{AD}{8}$$

$$\frac{AD}{4.8} - \frac{AD}{8} = \frac{AD}{x}$$

$$x\left(\frac{3.2AD}{38.4}\right) = AD$$

$$x = \frac{38.4AD}{3.2AD} = 12$$

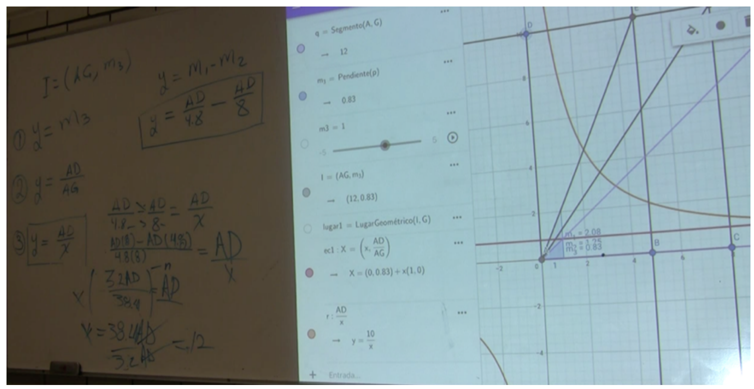


Figura 4.1.28. Parametrización y solución algebraica del problema.

En el desarrollo del problema es importante notar que, de los tres acercamientos, el segundo fue un intento de mostrar un camino distinto al que se planteó en el problema de las llaves (problema 4 del bloque 1, ver apéndice 2). La dificultad a la que se enfrentó esta pareja, después de haber representado los conceptos del enunciado, fue a la de no identificar correctamente lo que se debía analizar para obtener la solución del problema.

Las diferentes propuestas de modelos que plantean las parejas las compromete a justificar o argumentar el por qué tiene sentido y cómo reconocer que la solución es la correcta.

Problema 8:

En cierta competencia de atletismo el corredor A se encuentra a 30 metros adelante del corredor B. El corredor A lleva una velocidad constante de 7 km/h y el corredor B lleva una *velocidad constante de 8 km/h. Si los dos salen al mismo tiempo, ¿después de cuántos metros el corredor B alcanzará al corredor A?*

Acercamiento	Ideas principales
Leo-Miguel	Representar, mediante áreas de rectángulos, la cantidad de metros que recorrió cada corredor en t segundos. Explorar el comportamiento de la razón entre las cantidades recorridas de los corredores y determinar la cantidad de metros que recorrió B cuando la razón es igual a 1.
Brenda-Karla	Construir rectángulos cuyas longitudes de sus bases se asociaron con los kilómetros recorridos de cada corredor, y las longitudes de sus alturas, con sus velocidades. * Ausencia de sentido en la interpretación de las áreas.
Yolanda-Natalia Eduardo-Daniela	Representar, mediante áreas de rectángulos, la cantidad de kilómetros que recorrió cada corredor en t horas. Explorar el comportamiento de la diferencia entre las cantidades recorridas por los corredores y determinar la cantidad de metros que recorrió B cuando la diferencia es igual a 0.
Antonia-Alma	Representar, a través de pendientes, las velocidades de los corredores. Explorar el comportamiento de la diferencia entre las cantidades recorridas por los corredores y determinar la cantidad de metros que recorrió B cuando la diferencia es igual a 0.3 (esto es porque no se le agregó los metros de ventaja al primer corredor).

Se mostraron cuatro acercamientos para este problema. Cinco parejas no presentaron una propuesta concreta, debido a que no supieron cómo manejar las unidades de los ejes. Después de observar y discutir sobre los acercamientos que fueron presentados al grupo, estas cinco parejas terminaron sus modelos.

Primer acercamiento (presentado por Leo y Miguel).

En el primer acercamiento (Figura 4.1.29), la pareja, tomó las unidades del eje horizontal como tiempo, y las del eje vertical como velocidad. Mediante el área de rectángulos expresó la distancia, porque era el resultado del producto del tiempo y velocidad. Enseguida hizo una conversión de *km/h* a *m/s*. Entonces, el corredor *B* corrió a una velocidad de 2.22… *m/s*, y el corredor A, a una velocidad de 1.944… *m/s* (un integrante de la pareja hizo la conversión). La pareja explicó que hizo la conversión porque la diferencia que había entre los corredores estaba en metros. Así, en su modelo, cada segundo mostró la cantidad de metros recorridos por los corredores.

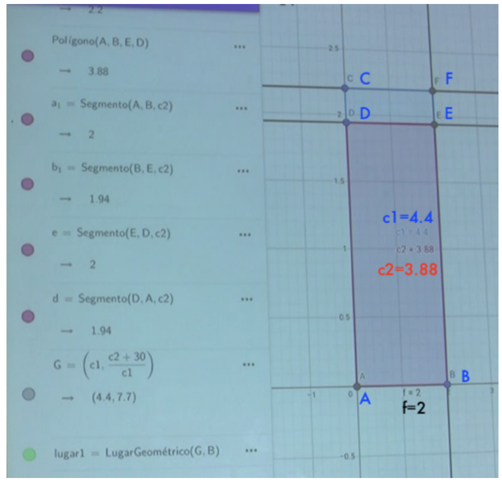


Figura 4.1.29. Modelo del primer acercamiento (https://www.geogebra.org/m/nmjkc6mj).

En la Figura 4.1.29 se muestra la cantidad de metros recorridos por ambos corredores en dos segundos, donde *c2* representó la distancia recorrida por A, y *c1*, la distancia recorrida por B. La pareja observó, mediante el lugar geométrico que describía el punto $G = \left(c1, \frac{c2+30}{c1}\right)$, para qué distancia *c1* se cumplía que $\frac{c2+30}{c1} = 1$ (Figura 4.1.30); dicho de otra forma, observó qué distancia recorrió el corredor *B* para alcanzar al corredor *A* (quien, en el mismo tiempo que *B*, ha recorrido $c2 + 30$ metros).

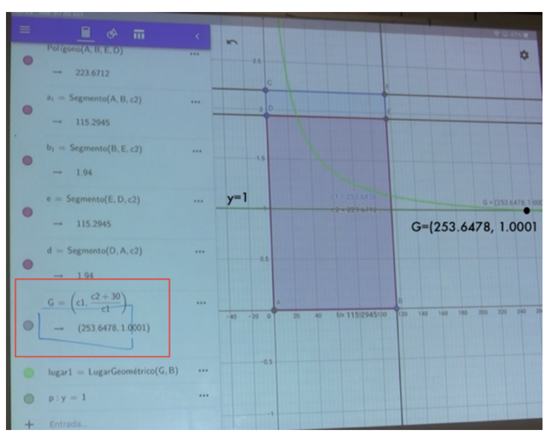


Figura 4.1.30. Exploración de la relación que hay entre las distancias recorridas por los corredores.

Se puede observar en la Figura 4.1.30 que, a los 253 metros, aproximadamente, el corredor B alcanzó al corredor A, ya que es la intersección entre el lugar geométrico y la recta $y = 1$. A partir de este resultado se preguntó a la pareja sobre el significado de la razón cuando era menor o mayor que 1: la pareja identificó que cuando la razón era menor a 1, significaba que el corredor B había rebasado al corredor A; en caso contrario, A mantenía el primer lugar.

Segundo acercamiento (presentado por Brenda y Karla).

En el segundo acercamiento (Figura 4.1.31), la pareja hace un modelo de áreas también, pero las unidades del eje horizontal las asociaron con distancia, y las del eje vertical, con velocidad. De esta manera, el área representó el producto de velocidad por distancia, lo que en el contexto del problema no tiene sentido. Además, en el eje horizontal construyó la base del segundo rectángulo 0.03 unidades mayor que el primero usando la herramienta de *Circunferencia (centro y radio)*, lo que implicó que la base del segundo rectángulo siempre fuera mayor que la del primero. Lo hizo así por el dato de que el primer corredor tiene 30 metros de ventaja; sin embargo, no se percató que en ese modelo el segundo corredor nunca alcanzaría al primero.

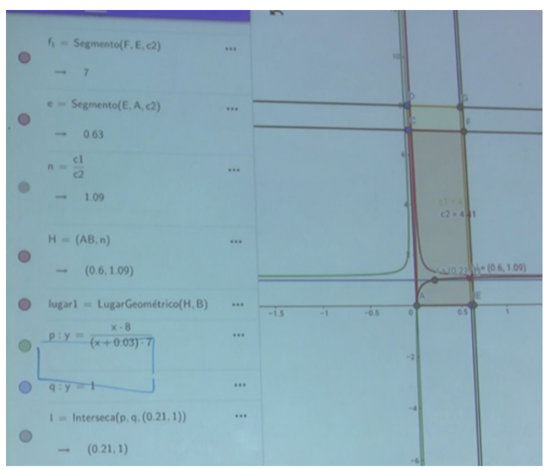


Figura 4.1.31. Modelo presentado por el segundo equipo.

Tercer acercamiento (presentado por Yolanda y Natalia).

En el tercer acercamiento, la pareja consideró las unidades del eje vertical como *km/h*, y las del eje horizontal como horas. Entonces, construyó rectángulos cuyas áreas se asociaron a las distancias recorridas por los corredores (Figura 4.1.32) y las analizó.

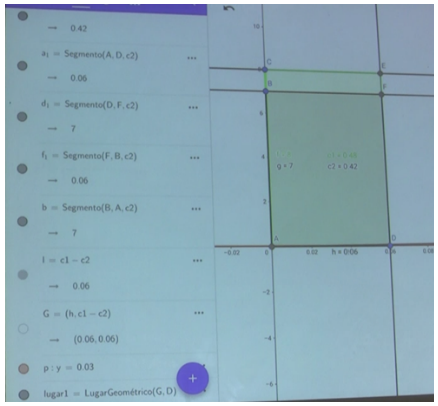


Figura 4.1.32. Tercer modelo presentado.

La solución la halló cuando se cumplió que $c1 - c2 = 0.03$, es decir, cuando la diferencia entre las distancias recorridas por el segundo y primer corredor fueran 30 metros. Y eso pasó en 0.03 horas (Figura 4.1.33). La pareja dio respuesta al problema fijándose en el área *c1 = 0.24*, que se interpretó como la distancia en kilómetros recorrida por el segundo corredor (Figura 4.1.34).

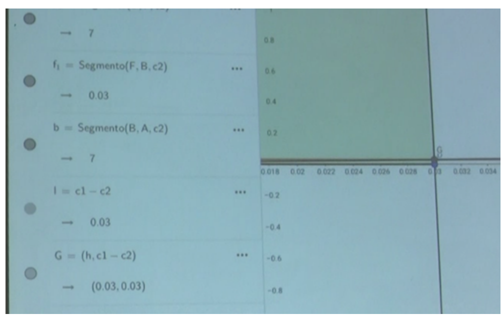


Figura 4.1.33. Solución del problema en términos del tiempo.

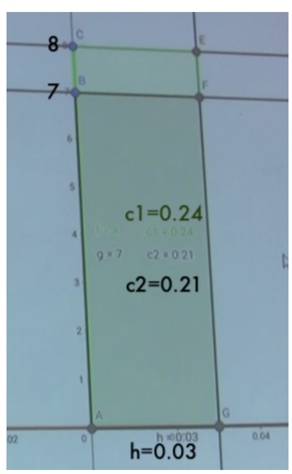


Figura 4.1.34. Solución del problema en términos de la distancia (área *c1*).

En este punto, se llevó a cabo la parametrización del primer y tercer modelo por las respectivas parejas, plantearon y resolvieron sus respectivas ecuaciones y se contrastaron los resultados. En la Figura 4.1.35 puede observarse la parametrización del primer modelo (ecuación 3 de la imagen), cuando la igualó a uno obtuvo que $x = 240$. Este resultado, además de coincidir con el del tercer modelo, evidenció que cuando se trabaja con decimales en la construcción del modelo es posible generar un margen de error significativo, pues cuando hizo la exploración la primera pareja, el resultado había dado aproximadamente 253 metros (13 metros de diferencia; ver Figura 4.1.30). Ante esto, corrigió los valores que se usaron en el modelo y obtuvo el resultado con precisión (ver modelo de la Figura 4.1.35). De hecho, también obtuvo con precisión, en el modelo, el tiempo que le tomó al segundo corredor alcanzar al primero: fueron 108 segundos.

$$(1)\quad y = \frac{c2 + 30}{c1}$$

$$(2)\quad y = \frac{\frac{1.94c1}{2.2} + 30}{c1}$$

$$(3)\quad y = \frac{\frac{1.94x}{2.2} + 30}{x}$$

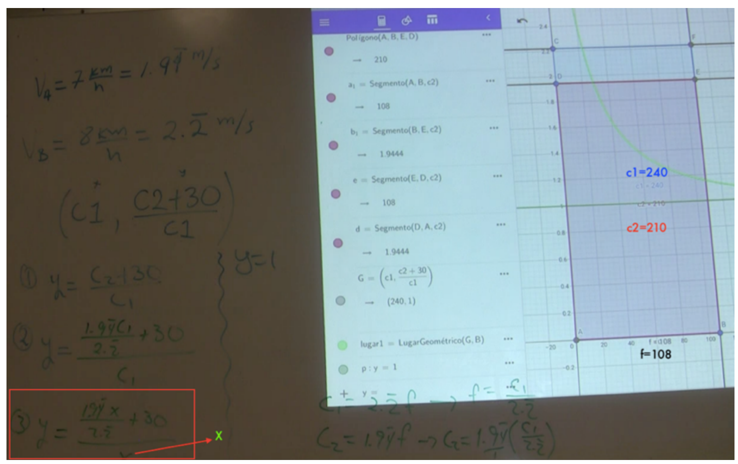
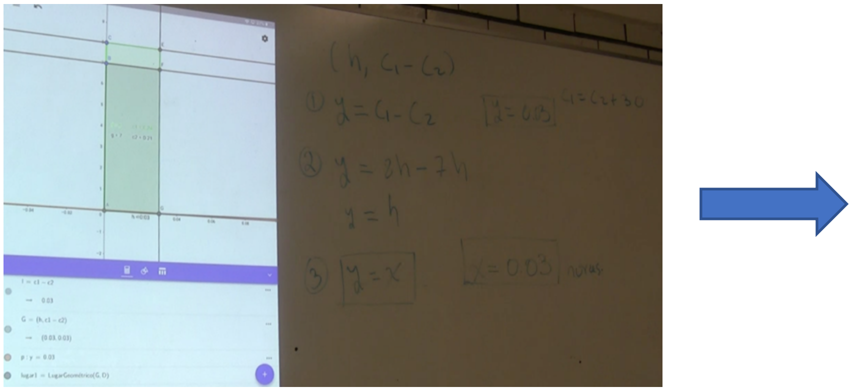


Figura 4.1.35. Parametrización del primer modelo mostrado.

En el caso del tercer acercamiento, la parametrización estuvo en términos del tiempo, que se identificó con la letra h del modelo y, por lo tanto, la solución algebraica dio como resultado 0.03 horas (Figura 4.1.36). La pareja hizo la conversión de las horas a segundos y observó que era el mismo tiempo que el del primer modelo (108 segundos), lo que les dio la seguridad de concluir que su resultado era correcto.



$$(1)\quad y = c1 - c2$$
$$(2)\quad y = 8h - 7h$$
$$y = h$$
$$(3)\quad y = x$$
$$y = 0.03$$

Figura 4.1.36. Parametrización del tercer modelo.

Al final, estos dos modelos se sustentaron en las mismas ideas y se construyeron de la misma forma. Las diferencias fueron: 1) las unidades que utilizaron las parejas; la primera, metros y segundos, y la segunda, kilómetros y horas; 2) el objeto geométrico que asignaron como variable; la primera asignó al área del rectángulo *c1* como variable, y la segunda, a la base. Estas diferencias provocaron que las parametrizaciones y las ecuaciones que se desarrollaron, aunque fueran distintas, llegaran al mismo resultado.

Cuarto acercamiento (presentado por Antonia y Alma).

La cuarta pareja mostró un acercamiento en el que las unidades del eje horizontal eran horas, como el de los acercamientos pasados, pero las unidades del eje vertical eran kilómetros; es decir, en el eje vertical asoció las unidades de distancia a diferencia de los modelos pasados que asociaron unidades de velocidad. De esta manera, buscó representar las velocidades de los corredores mediante pendientes (Figura 4.1.37). Para la representación geométrica de las velocidades trazó dos rectas: una con pendiente igual a 7, y la otra, con pendiente igual a 8.

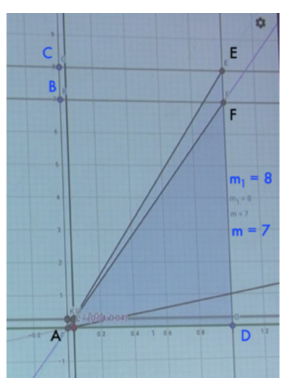


Figura 4.1.37. Representación geométrica de las pendientes.

Después, colocó el punto G móvil sobre el eje horizontal, trazó una perpendicular al mismo eje pasando por el punto G, marcó las intersecciones de esta con las rectas (puntos H y I) y, mediante perpendiculares al eje vertical que pasaban por los puntos H y I, marcó las intersecciones de estas con el eje vertical (puntos J y K) (Figura 4.1.38). Así, el segmento AG representó el tiempo transcurrido de la competencia, y el segmento JK la distancia entre los corredores en el tiempo AG (pues AK era la distancia recorrida por el primer corredor, y AJ, la distancia recorrida por el segundo).

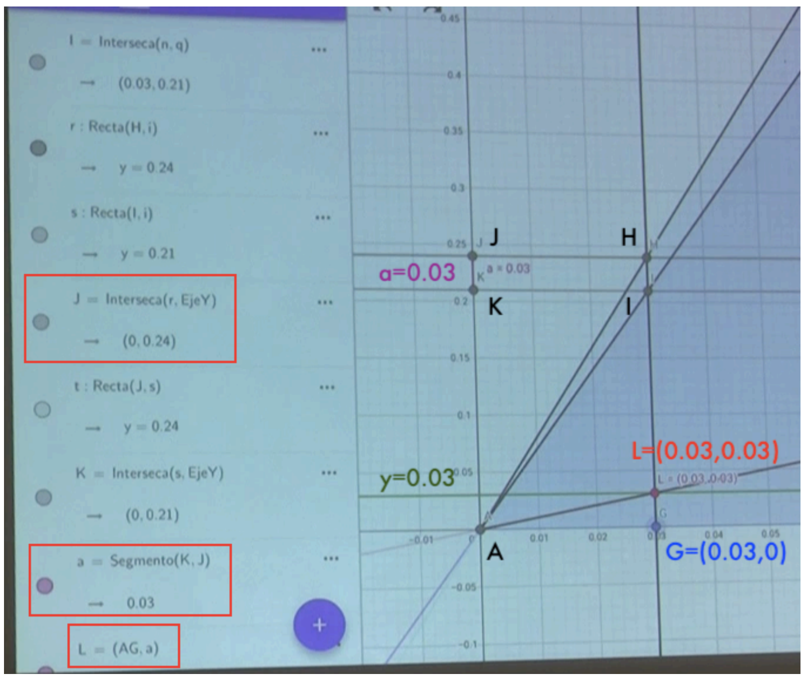


Figura 4.1.38. Modelo del problema (https://www.geogebra.org/m/dy4bcbsj).

En la Figura 4.1.38 se observa que el lugar geométrico que describe el punto $L = (AG, a)$ relaciona la longitud del segmento AG con la longitud del segmento JK, y sus coordenadas indican que para 0.03 horas, la distancia entre los corredores es de 0.03 km. Por lo tanto, como se cumplen las condiciones del problema para la posición en la que se encuentra el punto G, el dato de la distancia que recorrió el segundo corredor para alcanzar al primero, se encuentra en la ordenada del punto J (en la vista algebraica de la Figura 4.1.38 puede apreciarse ese dato), el cual es 0.24 km según el contexto de enunciado.

Este enfoque exhibió cómo, la pareja, adoptó la estrategia que se utilizó en el primer modelo del problema de las llaves (ver problema 4 del apéndice 2, Figura 27a) a este contexto. La estrategia consiste en analizar cómo se comporta la suma o diferencia de las ordenadas de segmentos con pendiente fija respecto a x.

4.2 Problemas del bloque 3.

Este último bloque constó de cinco problemas verbales que se resuelven con ecuaciones de segundo grado. La finalidad fue observar y analizar cómo resuelven las parejas estos problemas utilizando el SGD. Para ello, fue importante identificar los recursos, las estrategias y las ideas principales que expusieron en sus procesos.

Problema 9:

La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180, ¿cuáles son los números?

Acercamiento	Ideas principales
Ismael-Gilberto Antonia-Alma Eduardo-Daniela Alberto-Jésica Elisa-Hugo Leo-Miguel Gloria-Erika	Representar la suma de los dos números como dos segmentos que sus longitudes sumen 18. Explorar el comportamiento de la suma con ayuda de la herramienta lugar geométrico. Determinar los números (las longitudes de los segmentos) que dan 180 en el lugar geométrico.
Yolanda-Natalia Brenda-Karla Andrés-Ramón	Representar la suma de los dos números como dos segmentos que sus longitudes sumen 18. Construir dos cuadrados a partir de las longitudes de los dos segmentos para representar con sus áreas los valores de los números al cuadrado. Determinar los números (las longitudes de los segmentos) que hacen que la suma de las áreas de los cuadrados sea 180.

Se presentaron dos formas distintas de resolver el problema. Todas las parejas lo resolvieron.

Primer acercamiento (presentado por Ismael y Gilberto).

La construcción del modelo que se realizó en el primer acercamiento se basó en el modelo de la suma de dos números que se hizo en la primera sesión (ver apéndice 1, Figura 1). La pareja definió el segmento *AB* sobre el eje horizontal con *A* en el origen y *B* en 18, colocó el punto *C* en el segmento y definió los segmentos *g* y *h* (Figura 4.2.1).

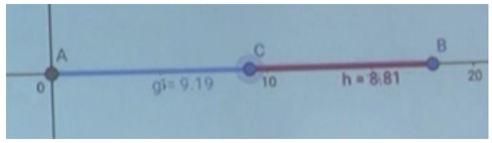


Figura 4.2.1. Representación geométrica de dos números que sumados dan 18.

En la Figura 4.2.2 se observa que trazó el lugar geométrico descrito por el punto $D = (g,\ g^2 + h^2)$ que relacionó la longitud del segmento *g* con la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos *g* y h. Esto le permitió ver el comportamiento de la suma de dos números al cuadrado cuando su suma lineal era 18.

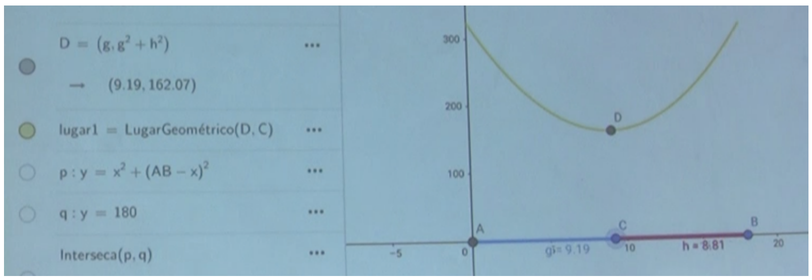


Figura 4.2.2. Lugar geométrico generado por el punto *D*.

La pareja mostró las posiciones del punto *C* donde la ordenada del punto *D* era 180 (Figuras 4.2.3 y 4.2.4), y halló que la segunda condición del problema se cumplía cuando los números eran 6 y 12 (que en términos geométricos fue cuando $g = 12$ y $h = 6$ ó cuando $g = 6$ y $h = 12$).

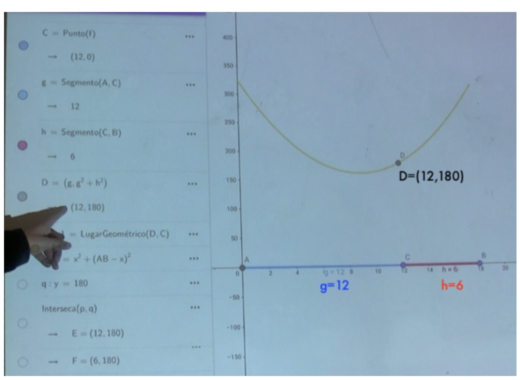


Figura 4.2.3. Solución del problema para $g = 12$ y $h = 6$.

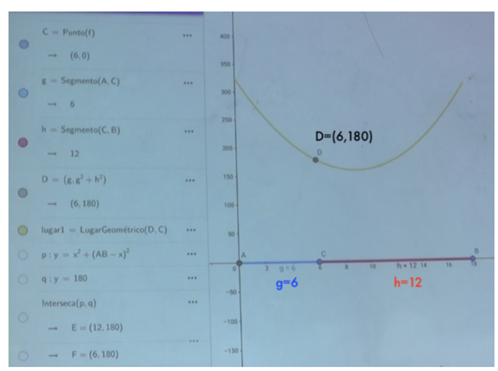


Figura 4.2.4. Solución del problema para $g = 6$ y $h = 12$.

Enseguida, parametrizó el lugar geométrico, del cual obtuvo la función $y = x^2 + (18 - x)^2$, graficó la función y la intersectó con la recta $y = 180$ (Figura 4.2.5). La pareja explicó que los puntos de intersección $F = (6{,}180)$ y $E = (12{,}180)$ significaban que, si el primer número era 6 o 12, la suma de los cuadrados de los dos números buscados era 180. Así, concluyó que los dos números buscados eran 6 y 12.

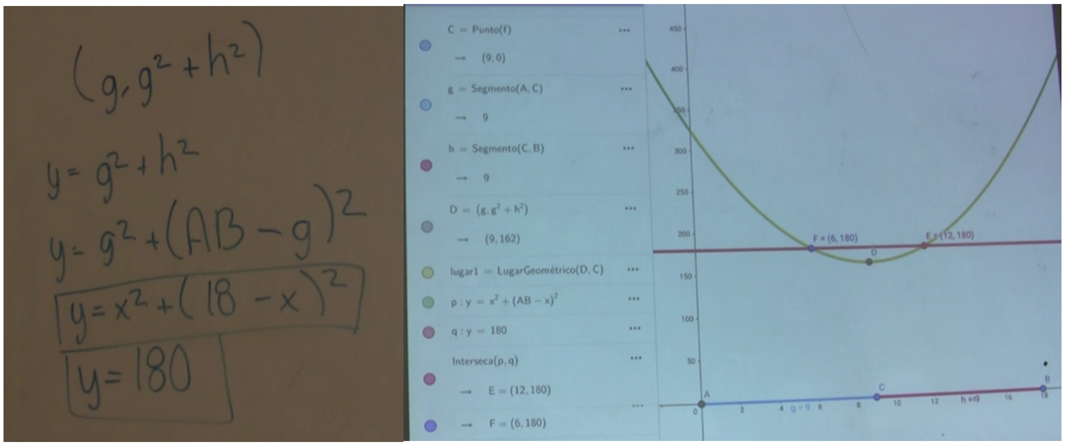
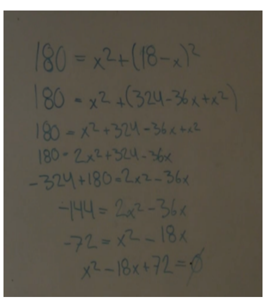
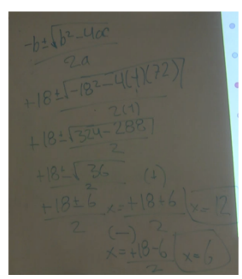


Figura 4.2.5. Parametrización y solución gráfica del primer acercamiento.

Finalmente, igualaron las ecuaciones para hallar la solución desde un enfoque algebraico (Figura 4.2.6).



$$180 = x^2 + (180 - x)^2$$
$$180 = x^2 + (324 - 36x + x^2)$$
$$180 = x^2 + 324 - 36x + x^2$$
$$180 = 2x^2 + 324 - 36x$$
$$-324 + 180 = 2x^2 - 36x$$
$$-144 = 2x^2 - 36x$$
$$-72 = x^2 - 18x$$
$$x^2 - 18x + 72 = 0$$



$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$\frac{+18 \pm \sqrt{-18^2 - 4(1)(72)}}{2(1)}$$
$$\frac{+18 \pm \sqrt{324 - 288}}{2}$$
$$\frac{+18 \pm \sqrt{36}}{2}$$
$$\frac{+18 \pm 6}{2}$$
$$x = \frac{+18 + 6}{2};\ x = 12$$
$$x = \frac{+18 - 6}{2};\ x = 6$$

Figura 4.2.6. Solución algebraica del problema basada en el modelo dinámico.

Después de resolver el problema se preguntó a la pareja ¿cómo hallaría, en el modelo, dos números que sumados den 18 y que la suma de sus cuadrados sea 100? Ella identificó que solo era necesario "mover" la recta paralela al eje horizontal hasta el 100 en el eje vertical, y observó que no era posible obtener dos números que sumados dieran 18 y que la suma de sus cuadrados fuera 100, pues la función hallada y la recta no se intersecaban (Figura 4.2.7).

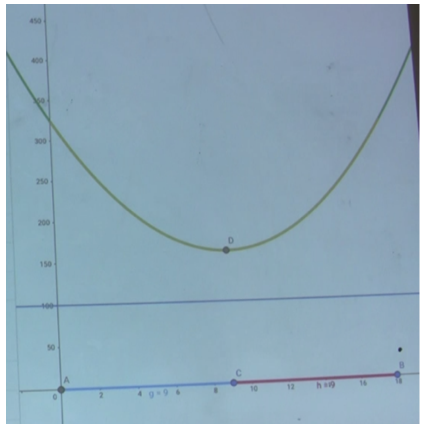


Figura 4.2.7. Modelo con el trazo de la recta $y = 100$.

Luego se le cuestionó si era posible hallar dos números que sumaran 18 y la suma de sus cuadrados fuera 400. La respuesta de la pareja fue que no era posible, porque, a pesar de que sí se intersecaban la función y la recta (ver Figura 4.2.8), no se intersecaban en el dominio del problema, es decir, la intersección no ocurrió en el intervalo donde se trazó el lugar geométrico, que era donde tenía sentido el contexto del problema.

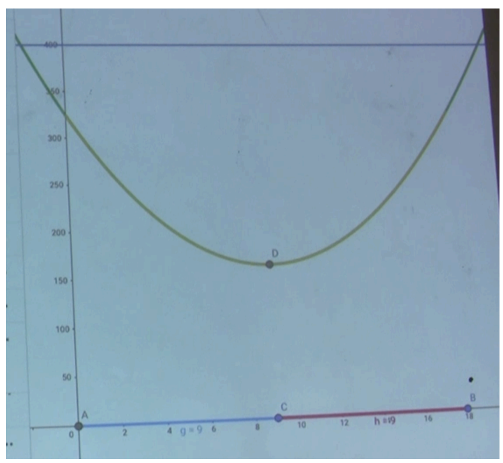


Figura 4.2.8. Modelo con el trazo de la recta $y = 400$.

De hecho, la pareja mostró que la suma de los cuadrados alcanzaba su valor máximo en los extremos del lugar geométrico (Figura 4.2.9), cuando un número era 0, y el otro, 18. Y también mostró que el mínimo valor que se podía obtener en la suma de los cuadrados era 162, valor que obtuvo cuando el punto D estaba en la mitad del lugar geométrico (Figura 4.2.10), cuando los dos números eran 9 y 9.

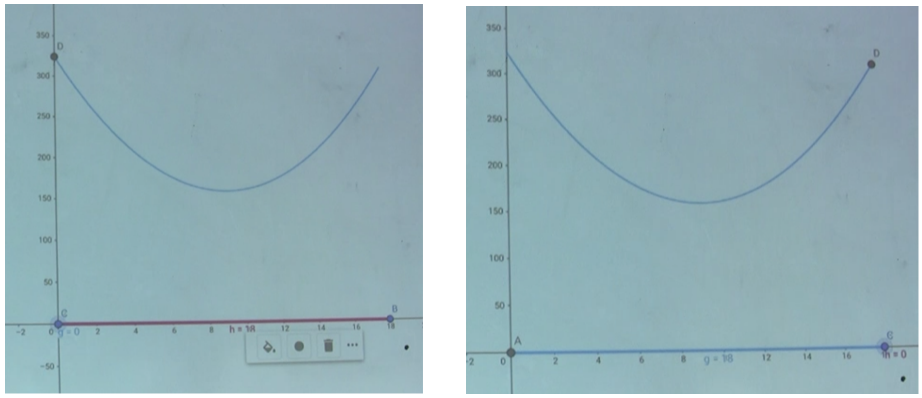


Figura 4.2.9. Valores máximos del lugar geométrico.

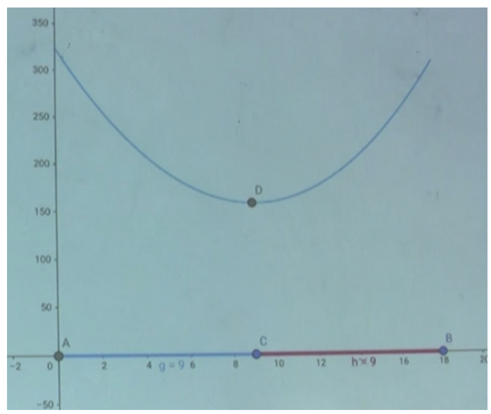


Figura 4.2.10. Valor mínimo del lugar geométrico.

En el desarrollo de este problema, la pareja mostró dominio en las fases de comprensión, representación (tanto geométrica como algebraica) y resolución. Esto se puede afirmar no solo porque llegó a la solución correcta, sino también porque respondió con asertividad a cada pregunta que se le planteó, y explicó con precisión el significado de la representación geométrica en términos del enunciado del problema.

Segundo acercamiento (presentado por Yolanda y Natalia).

Hubo un segundo acercamiento que se basó en construir cuadrados para representar mediante sus áreas cada número elevado a la segunda potencia (Figura 4.2.11). Para ello, la segunda pareja inició representando la suma de dos números que resultara 18 de la misma forma que lo hizo la primera pareja (ver Figura 4.2.1), y luego construyó dos cuadrados con la herramienta *Polígono regular* (que solo requiere que indiques dos vértices contiguos y el número de lados del polígono para construirlo automáticamente); el primero con base *AC*, y el segundo con base *CB*. Entonces, en la Figura 4.2.11 el valor numérico del área del cuadrado

ACFD representó el primer número elevado a la segunda potencia, y el valor numérico del cuadrado *CBHG*, el segundo número elevado a la segunda potencia.

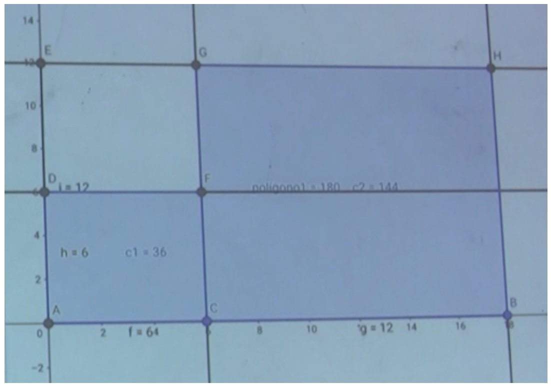
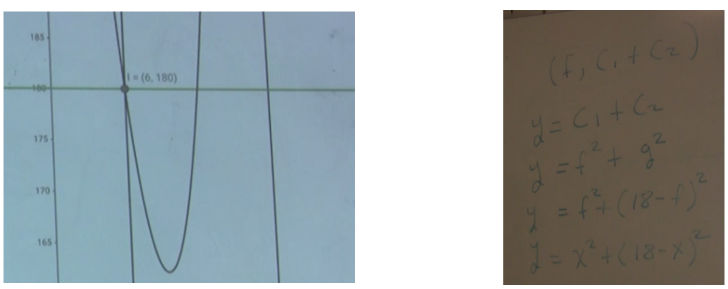


Figura 4.2.11. Modelo de áreas mostrado por la segunda pareja.

La solución del problema la halló cuando la suma de las áreas de los cuadrados fue 180 (en la Figura 4.2.11 se muestra una de las posiciones del punto *C* donde sucedió dicha condición). La pareja mostró el lugar geométrico descrito por el punto $I = (f, c1 + c2)$ y lo parametrizó (Figura 4.2.12). Como observó que la ecuación dada por la parametrización era la misma que obtuvo la pareja anterior, consideró que la solución dada por su modelo era correcta.



$$y = c1 + c2$$
$$y = f^2 + g^2$$
$$y = f^2 + (18 - f)^2$$
$$y = x^2 + (18 - x)^2$$

Figura 4.2.12. Lugar geométrico descrito por el punto $I = (f, c1 + c2)$ y su parametrización.

Problema 10:

Determina las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 280 m y su área es de 4,000 m^2.

Acercamiento	Ideas principales
Todas las parejas	Construir una familia de rectángulos con perímetro de 280 *m*. Determinar las dimensiones del rectángulo que tenga área de 4,000 m^2.

En este problema, todas las parejas optaron por construir un rectángulo cuyo perímetro fuera fijo para, después, hallar las dimensiones donde el área fuera 4,000 m^2. Por ejemplo, una de las parejas que mostró su acercamiento (Gloria y Erika), para construir un rectángulo con perímetro de 280 unidades, colocó un punto B móvil sobre el eje horizontal, trazó una circunferencia con centro en A (punto sobre el origen) y radio $r = 140 - f$ (140 es el semiperímetro del rectángulo, y *f*, la longitud del segmento AB), marcó con el punto D la intersección del eje vertical con la circunferencia y construyó el rectángulo *ABED* (ver Figura 4.2.13), donde el punto *E* se ubicó en la intersección de las rectas perpendiculares a los ejes que contienen los puntos *B* y *D*. Así, el perímetro del rectángulo construido se mantuvo constante sin importar la posición del punto *B*.

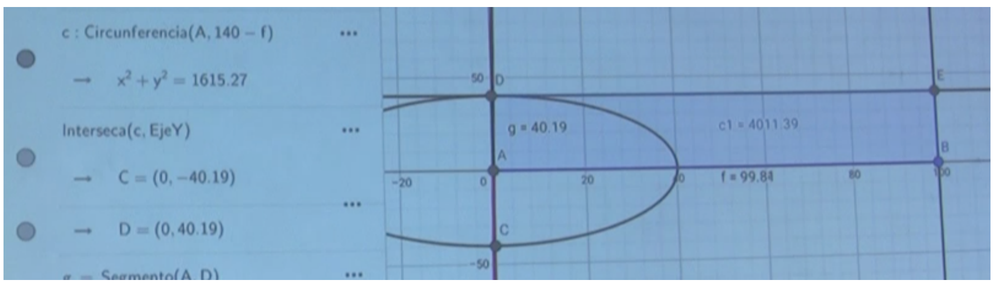


Figura 4.2.13. Construcción de una familia de rectángulos con perímetro de 280 unidades (https://www.geogebra.org/m/eafta79u).

Las dimensiones, que halló la pareja, de los rectángulos que cumplían con que sus áreas fueran de 4,000 unidades cuadradas eran de 100 unidades de base por 40 unidades de altura y viceversa (Figura 4.2.14). Las unidades de los ejes las seleccionaron como metros por el contexto del problema.

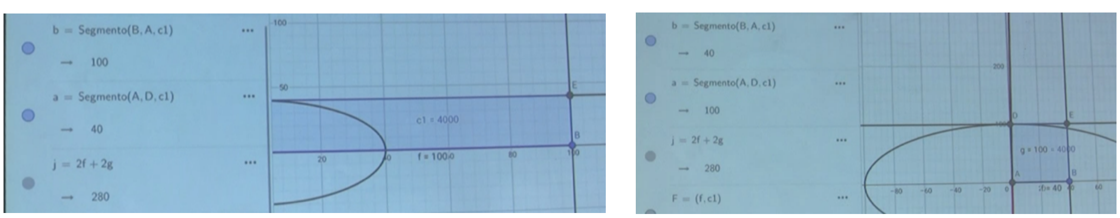
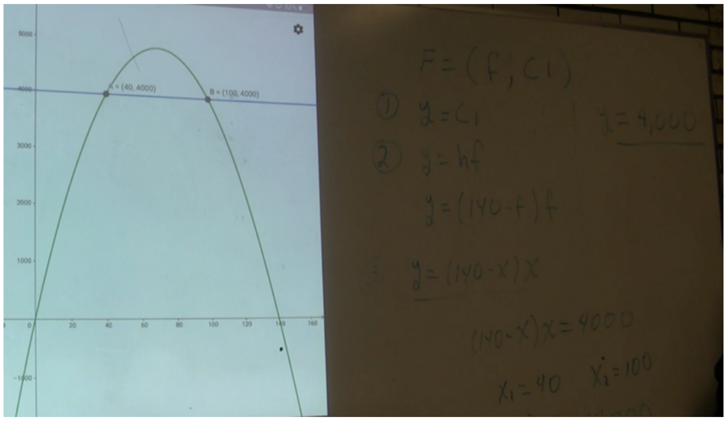


Figura 4.2.14. Dimensiones de los rectángulos que cumplen las condiciones establecidas en el enunciado del problema.

En la Figura 4.2.15 se muestra el trazo del lugar geométrico, su parametrización, las soluciones dadas por los puntos de intersección entre la parábola y la recta $y = 4000$, y su solución algebraica.



$$y = c1$$
$$y = hf$$
$$y = (140 - f)f$$
$$y = (140 - x)x$$
$$(140 - x)x = 4000$$
$$x_1 = 40; x_2 = 100$$

Figura 4.2.15. Parametrización del lugar geométrico y solución algebraica.

Dada la solución del problema, se preguntó a la pareja que si era posible construir un rectángulo de 280 metros de perímetro y de 5,000 m^2 de área: la respuesta fue que no. La pareja trazó la recta $y = 5000$, observó que no se intersecaba con la parábola (Figura 4.2.16), e interpretó correctamente el significado de las gráficas basado en el contexto del problema: no se puede obtener un área de 5,000 m^2 si el perímetro del rectángulo es 280 m. Incluso, la pareja mostró que el área máxima que se puede obtener de una familia de rectángulos que tienen un perímetro de 280 m es de 4,900 m^2 (Figura 4.2.17). Esto último, exhibe una reflexión o análisis por parte de los estudiantes que se relaciona, de manera general, con los problemas de máximos que se ven en cálculo diferencial.

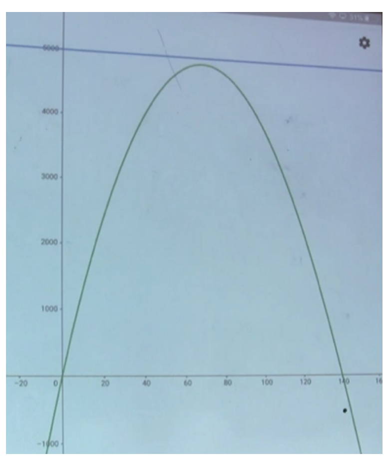


Figura 4.2.16. Trazo de la recta $y = 5000$.

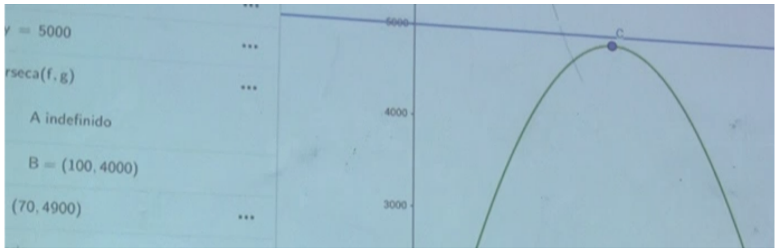


Figura 4.2.17. Vértice de la parábola o máximo de la función.

Problema 11:

Un agricultor tiene necesidad de cercar 25 000 m^2 *de su parcela; dicha propiedad es rectangular y colinda con un río, por lo que no necesita cercar ese lado. ¿Qué dimensiones tiene el terreno si el propietario dispone de 450 m de cerca?*

Acercamiento	Ideas principales
Leo-Miguel Gloria-Erika Ismael-Gilberto	Representar los lados de la cerca como tres longitudes de segmento unidos sobre el eje horizontal que suman 450 *m*., y dos tienen la misma longitud. Determinar, con ayuda de la herramienta lugar geométrico, las dimensiones del terreno que al multiplicar uno de los lados iguales de la cerca por el diferente se obtenga 25,000 m^2.
Yolanda-Natalia Andrés-Ramón	Representar los lados de la cerca como tres longitudes se segmento que suman 450 *m*., y construir el terreno rectangular. Determinar, con ayuda de la herramienta lugar geométrico, las dimensiones del terreno rectangular que al multiplicar su base por su altura se obtenga un área de 25,000 m^2.
Alberto-Jésica Antonia-Alma	Construir una familia de rectángulos con área igual a 25,000 m^2. Determinar las dimensiones del rectángulo que tres de sus lados sumen 450 *m*.

En el desarrollo de este problema se mostraron tres acercamientos. Dado que se ausentaron tres estudiantes (Brenda, Eduardo y Daniela), se formó un equipo de tres (Elisa, Hugo y Karla). Entonces, trabajaron siete parejas y este equipo, el cual no logró resolver el problema. El equipo de tres construyó un modelo después de que se discutieran los acercamientos de las parejas.

Primer acercamiento (presentado por Leo y Miguel).

En el primero, la pareja, trazó un segmento AB en el eje horizontal, con A en el origen y de longitud de 450 unidades, definió un punto C sobre el segmento, trazó una circunferencia con centro en C y radio AC, y trazó los segmentos AC, CE y EB nombrados como g, h e i, respectivamente (Figura 4.2.18).

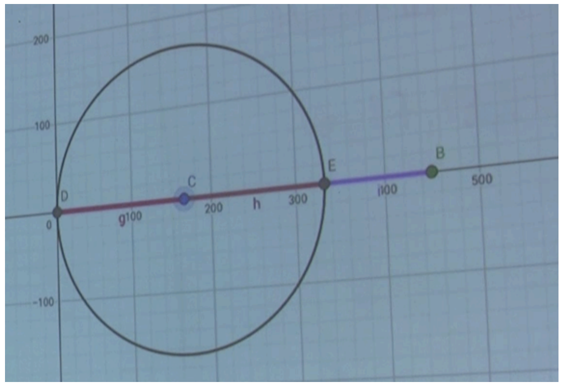


Figura 4.2.18. Modelo del primer acercamiento.

En este modelo se tomaron las unidades del eje horizontal como metros; así, la longitud del segmento AB representó los metros de cerca con los que disponía el propietario, los segmentos g y h representaron los lados iguales de la propiedad rectangular, y el segmento i, el lado diferente. Entonces, la pareja definió la variable b como $b = g \cdot i$, que representó el área del terreno, y encontró que las dimensiones que debía tener el terreno para cubrir un área de 25,000 m^2 eran de 100 metros para los lados iguales y 250 m para el lado diferente, o de 125 metros para los lados iguales y 200 m para el lado diferente (Figura 4.2.19).

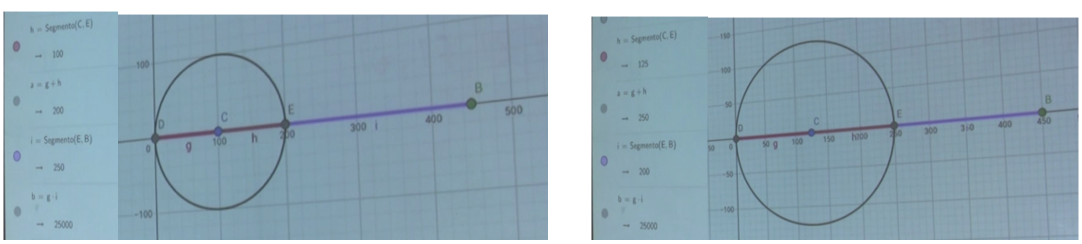


Figura 4.2.19. Posiciones del punto C donde hallaron las soluciones del problema.

A partir de esta exploración, se solicitó a la pareja que graficara el comportamiento del área en función de uno de los elementos del modelo y hallara la solución gráfica. Entonces, definió $F = (g, b)$, que relacionaba uno de los lados iguales del terreno cercado y su área, trazó el lugar geométrico que describía el punto (Figura 4.2.20), y trazó la recta $y = 25{,}000$ (Figura 4.2.21). La pareja señaló que las soluciones del problema se hallaban en los puntos de intersección del lugar geométrico y la recta.

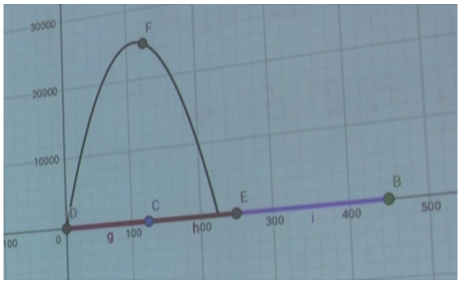


Figura 4.2.20. Lugar geométrico descrito por el punto $F = (g, b)$.

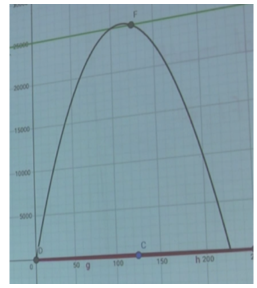


Figura 4.2.21. Trazo de la recta $y = 25{,}000$.

Como el lugar geométrico tenía dos dimensiones, a diferencia del modelo que se construyó utilizando solamente el eje horizontal, el investigador planteó la pregunta ¿qué unidades debe tener el eje vertical según los datos que estamos analizando en el lugar geométrico? La pareja respondió que metros cuadrados, ya que se estaba analizando el área cuando variaba el "ancho" del terreno cercado. También explicó que la curva descrita por el punto *F* mostraba que el área del terreno aumentaba conforme aumentaba su ancho, hasta llegar a un punto máximo, y luego comenzaba a disminuir. Ante este análisis, el investigador preguntó a la pareja ¿en qué intervalo debe moverse el punto *C* para que tenga sentido el modelo con base en el contexto del problema? La pareja se dio cuenta que las intersecciones de la parábola con el eje horizontal eran 0 y 225, y que dentro de ese intervalo se tenía un valor para el área (Figura 4.2.22). Es decir, identificó que el domino el problema era cuando el punto *C* pertenecía al intervalo abierto (0, 225).

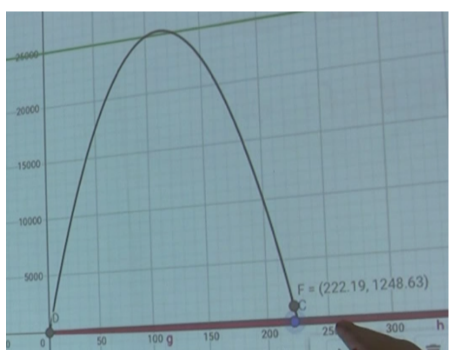


Figura 4.2.22. Análisis del domino del problema.

Segundo acercamiento (presentado por Yolanda y Natalia).

En la Figura 4.2.23 se muestra el modelo que construyó la segunda pareja. Decidió construir el rectángulo con perímetro fijo para, después, analizar su área. Básicamente la idea fue la misma que el de la pareja anterior, solo que esta sí modeló el terreno, lo que implicó que las unidades de los ejes se consideraran como metros lineales. El lugar geométrico y las soluciones coincidieron con las del acercamiento anterior.

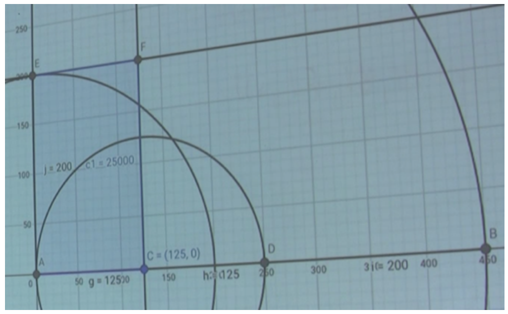


Figura 4.2.23. Modelo del terreno mostrado por el segundo equipo.

Tercer acercamiento (presentado por Alberto y Jésica).

Finalmente, la tercera pareja desarrolló un modelo del terreno donde fijó la condición del área, y exploró para qué dimensiones del rectángulo la suma de tres de sus lados era 450 unidades (Figura 4.2.24). Para ello, colocó un punto B móvil sobre el eje horizontal, trazó una circunferencia con centro en el origen y radio $r = 25000/AB$ y, mediante el trazo de rectas perpendiculares, construyó el rectángulo de base AB y altura r. De esta forma, el área del rectángulo fue constante e igual a 25,000 unidades cuadradas.

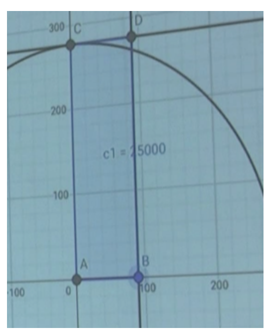


Figura 4.2.24. Modelo presentado por el tercer equipo.

Para resolver el problema, trazó el lugar geométrico descrito por el punto $E = (AB, AC + AB + CD)$, que relacionaba la base del rectángulo con la suma de tres de sus lados, trazó la recta $y = 450$ y halló las dimensiones de los rectángulos donde el punto E coincidía con la intersección del lugar geométrico y la recta (Figura 4.2.25). Las medidas coincidieron con los resultados de los acercamientos previos.

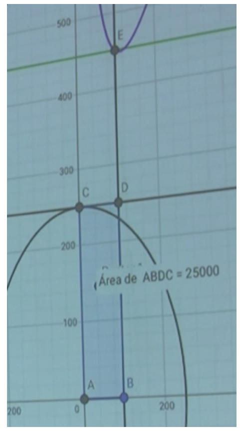


Figura 4.2.25. Una de las soluciones geométricas del problema bajo el modelo del tercer equipo (https://www.geogebra.org/m/en6spdfu).

En este enfoque también se hizo una discusión sobre el dominio del problema y la interpretación del lugar geométrico. La pareja observó que en esta construcción dinámica no se tenía un valor máximo para la cantidad de cerca que podía utilizarse si se cumplía la condición del que el área fuera constante, pero sí un valor mínimo (Figura 4.2.26). Y que dentro del intervalo (100, 125) se podía cercar un terreno con 25,000 m^2 utilizando menos de 450 m de cerca. La solución gráfica se observa en la Figura 4.2.27.

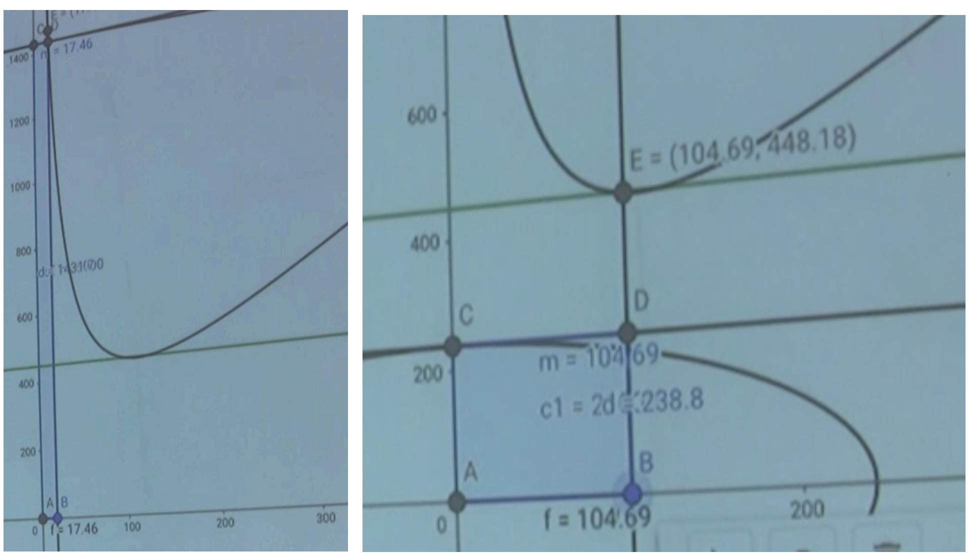


Figura 4.2.26. Exploración e interpretación del lugar geométrico obtenido por la tercera pareja.

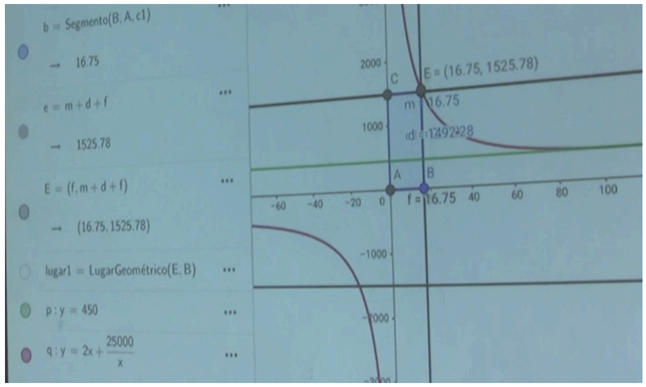


Figura 4.2.27. Parametrización del lugar geométrico.

Durante el desarrollo del problema no se mostraron acercamientos algebraicos porque se le dio prioridad a los modelos y a las discusiones que se generaron alrededor de ellos.

Problema 12:

¿Cuáles son las dimensiones de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 36 cm *y su área 54* cm^2*?*

Acercamiento	Ideas principales
Elisa-Hugo, Antonia-Alma, Eduardo-Daniela, Alberto-Jésica, Andrés-Ramón, Brenda-Karla, Elisa-Hugo, Yolanda-Natalia	Construir una familia de triángulos rectángulos con área de 54 cm^2. Determinar las dimensiones del triángulo que tenga un perímetro de 36 *cm*.

Las siete parejas que resolvieron este problema se basaron en la idea de construir una familia de triángulos rectángulos que cumplieran con la característica de tener área de 54 cm^2. Como los modelos de las parejas fueron muy similares, se presenta un solo acercamiento. En el caso de las tres parejas que faltaron en resolverlo, fue porque no asistió una pareja (Ismael y Gilberto), y las otras dos parejas eran de los estudiantes que más inasistencias habían tenido en el curso (Gloria-Erika y Leo-Miguel); es decir, tenían poca experiencia en resolver los problemas con el SGD. Por lo tanto, se limitaron a reconstruir el acercamiento que fue mostrado.

En el acercamiento que realizó una de las parejas (Elisa y Hugo), definió un punto *A* en el origen y un punto móvil *B* sobre el eje horizontal, trazó el segmento *AB* y lo etiquetó como *f*, trazó una circunferencia con centro en el origen y radio $r = 108/f$, marcó el punto *C* en la intersección de la circunferencia y el eje vertical y definió el polígono *ABC* (Figura 4.2.28).

Así, construyó un triángulo rectángulo con base de longitud *f*, altura r y, en consecuencia, área igual a 54 cm^2 sin importar la posición del punto B, ya que $rf/2 = \left((108/f)f\right)/2 = 108/2 = 54$.

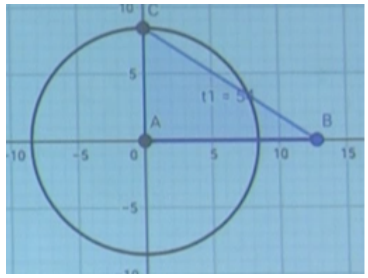


Figura 4.2.28. Construcción de una familia de triángulos rectángulos con área de 54 cm^2 (https://www.geogebra.org/m/qyz39s2a).

Luego, trazó el lugar geométrico descrito por el punto $D = (f, f + AC + CB)$, cuyas coordenadas relacionan la base del triángulo con su perímetro (Figura 4.2.29), y se discutió sobre su interpretación. La pareja identificó que, si la longitud de la base se aproximaba a cero, o se aumentaba tanto como lo permitiera GeoGebra al mover B, el perímetro era no acotado; es decir, identificó que el dominio donde podía moverse el punto B era del lado positivo del eje horizontal.

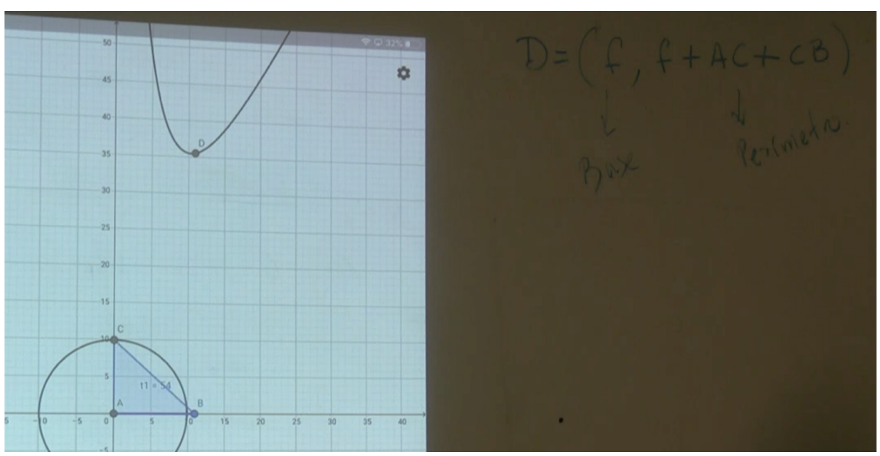
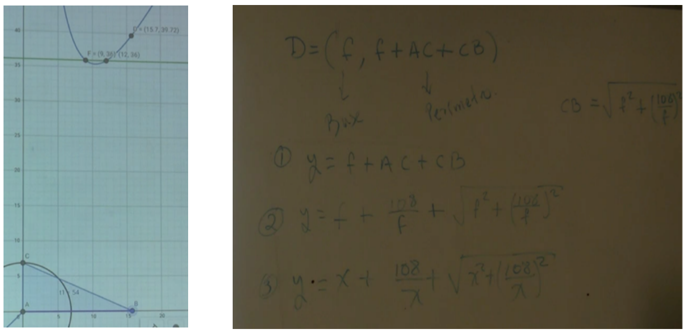


Figura 4.2.29. Lugar geométrico del punto $D = (f, f + AC + CB)$.

Una vez analizado el comportamiento del perímetro mediante el trazo del lugar geométrico del punto *D*, desarrolló la parametrización, trazó la recta $y = 36$ y obtuvo las medidas de los lados del triángulo que cumplía con ambas condiciones (Figura 4.2.30). En la Figura 4.2.30 se observa que las coordenadas de los puntos de intersección entre la gráfica asociada al lugar geométrico y la recta son $F = (9{,}36)$ y $E = (12{,}36)$, esto quiere decir que cuando el triángulo tiene base de 9 o 12 centímetros, su perímetro es de 36 centímetros. Más aún, si la base es 9 *cm*, entonces la altura es 12 *cm* para que se cumpla que el área es 54 cm^2 y, si la base es 12 *cm*, la atura es 9 *cm*. Por lo tanto, las medidas del triángulo rectángulo, que halló la pareja, que cumplían con las dos condiciones establecidas en el enunciado del problema eran 9 y 12 centímetros para los catetos y 15 centímetros para la hipotenusa.



$$(1)\quad y = f + AC + CB$$

$$(2)\quad y = f + \frac{108}{f} + \sqrt{f^2 + \left(\frac{108}{f}\right)^2}$$

$$(3)\quad y = x + \frac{108}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{108}{x}\right)^2}$$

Figura 4.2.30. Parametrización y solución geométrica del problema.

Cabe señalar que, al igualar a 36 el miembro derecho de la ecuación (3) (Figura 4.2.30) y resolver la ecuación que resulta se obtienen los valores de 9 y 12 para *x*, asociados a la base del triángulo *ABC*.

Problema 13:

Dos llaves llenan un depósito en 6 horas, ¿cuánto tiempo necesitaría cada una, por separado, para llenarlo si una tarda 16 horas más que la otra?

Acercamiento	Ideas principales
Andrés-Ramón Antonia-Alma Eduardo-Daniela Alberto-Jésica Ismael-Gilberto Brenda-Karla Elisa-Hugo Yolanda-Natalia	Representar, a través de una pendiente, la velocidad con la que las dos llaves juntas llenan un depósito. Representar, a través de dos pendientes, una en función de otra, la velocidad con que cada llave llena el depósito. Determinar el tiempo en que cada llave llena el depósito si la suma de sus velocidades (pendientes) es igual a velocidad de llenado de las dos llaves juntas.

Las dos parejas que no mostraron un acercamiento fue porque no se presentaron a las últimas sesiones del curso (Leo-Miguel y Gloria y Erika).

Para resolver este problema, ocho parejas replicaron las ideas que se mostraron en el segundo acercamiento del problema 4 del bloque 1 (ver apéndice 2), el cual describe la misma situación que éste. Por ejemplo, Andrés y Ramón, que fue la pareja que mostró su acercamiento, supusieron las unidades del eje horizontal como horas, y las del eje vertical, como litros, para construir un modelo que les permitiera analizar las velocidades de llenado de las llaves mediante pendientes de segmentos. En la Figura 4.2.31 se muestra el modelo que construyeron: trazaron el segmento *AB* (*A* era un punto en el origen y *B* un punto sobre el eje horizontal) con longitud de 6 unidades para representar el tiempo en que las dos llaves llenan el depósito; definieron *C* como un punto móvil sobre el eje vertical para representar la capacidad de litros del depósito; trazaron el segmento *AD* (*D* un punto móvil sobre el eje horizontal) para representar el tiempo en que la primera llave llena el depósito; el segmento *AE* con una longitud de 16 unidades mayor que el segmento *AD* para representar el tiempo en que la segunda llave llena el depósito; luego, trazaron perpendiculares a los ejes pasando por los puntos *B*, *C*, *D* y *E*, y marcaron las intersecciones entre estas rectas con los puntos *G*, *H* e *I*, para trazar los segmentos *AG*, *AH* y *AI*, que se utilizaron para representar, mediante sus pendientes, las velocidades con las que llenan el depósito las dos llaves juntas, la primera y la segunda, respectivamente.

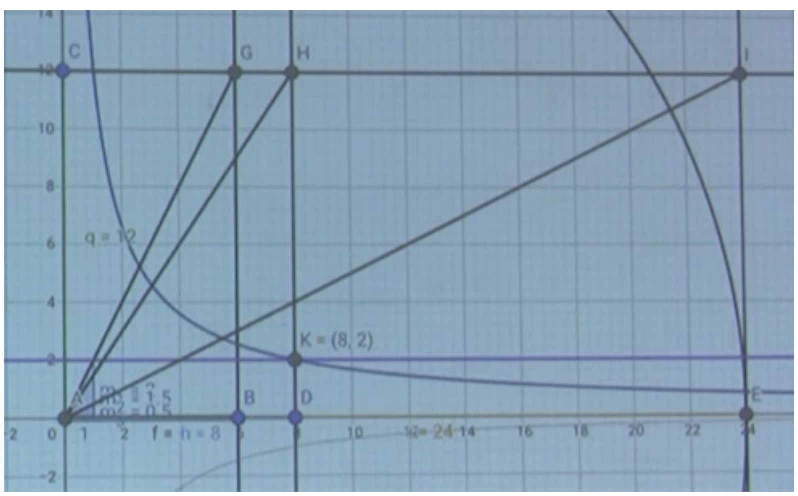


Figura 4.2.31. Modelo presentado por la mayoría de las parejas
(https://www.geogebra.org/m/zyqrnsnb).

Lo que se puede apreciar en la Figura 4.2.31 es la solución del problema. La interpretación para la posición en que se halla el modelo en la figura es: si las dos llaves llenan un depósito de 12 litros en 6 horas, entonces lo llenan a una razón de 2 *lts/h*; lo que implica que la primera llave llena el mismo depósito en 8 horas, y la segunda en 24 horas, ya que en esos tiempos las razones de llenado de cada llave son 1.5 *lts/h* y 0.5 *lts/h*, respectivamente, correspondiendo su suma al valor de la primera razón.

También, en la Figura 4.2.32, se puede observar que parametrizaron el lugar geométrico descrito por el punto $K = (h, m_2 + m_3)$, donde h era la longitud del segmento AD, y m_2 y m_3, las pendientes asociadas a las velocidades de llenado de la primera y segunda llave. La parametrización, dada por $s(x)$ (Figura 4.2.32), permitió constatar que la solución del problema siempre era la misma sin importar la cantidad de litros que le cupieran al depósito.

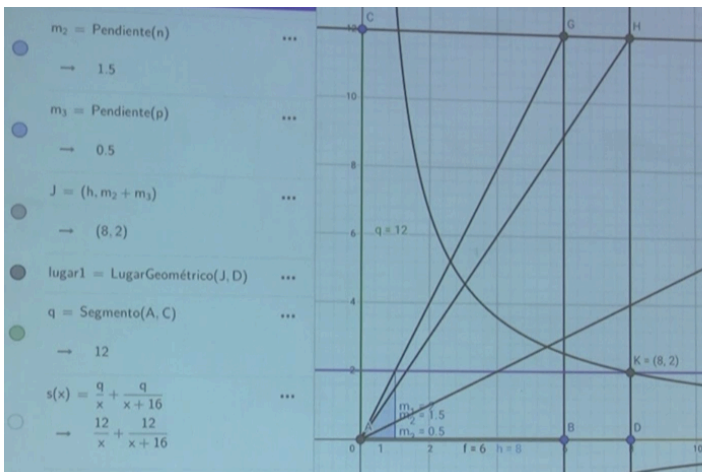


Figura 4.2.32. Parametrización del lugar geométrico descrito por el punto $K = (h, m_2 + m_3)$.

En la Figura 4.2.33 se muestra la gráfica que se obtuvo al parametrizar el lugar geométrico.

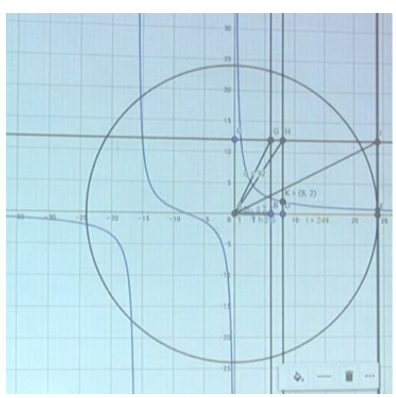


Figura 4.3.33. Gráfica de la función $s(x)$.

En este acercamiento, como en los demás, se puede observar que las parejas pueden resolver el problema utilizando las mismas estrategias y representaciones geométricas de los conceptos que se han hecho a lo largo de las sesiones, pero, en particular, se puede observar que utilizaron el mismo modelo que construyeron en el problema 4 (ver apéndice 2). En cambio, en un ambiente tradicional donde los estudiantes resuelven los problemas solo con el uso de lápiz y papel, no podrían resolver este problema con los mismos recursos o procedimientos algebraicos que se requieren para resolver el problema 4, pues mientras el problema 4 implica resolver ecuaciones lineales, éste implica resolver una ecuación cuadrática.

Esto exhibe que los modelos dinámicos son representaciones generales de las situaciones que se exponen en diversos problemas, y que pueden adaptarse sin importar el tipo de procedimiento o representación algebraica que requieran los problemas para ser resueltos.

4.3 Análisis y discusión de los resultados.

Con el objetivo de analizar el comportamiento que tuvieron las parejas durante el desarrollo de los problemas de los bloques 2 y 3, en la Tabla 4.1 se concentra información general de los resultados obtenidos en los problemas, y en la Tabla 4.2 se identifican los problemas resueltos correctamente por las parejas con el uso de GeoGebra.

Tabla 4.1. Información general de los problemas.

Problema	# de acercamientos distintos.	Parejas que sí resolvieron el problema con el SGD.	Parejas que no resolvieron el problema.	¿Se presentó al menos una solución algebraica?
5	4	6	4	Sí
6	2	7	3	Sí
7	3	9	1	Sí
8	4	5	5	Sí
9	2	10	0	Sí
10	1	10	0	Sí
11	3	7	3	No
12	1	7	3	No
13	1	8	2	No

Tabla 4.2. Problemas resueltos correctamente por las parejas con el uso del SGD.

Parejas	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13
Alberto-Jésica	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Andrés-Ramón	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Antonia-Alma	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Brenda-Karla	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓
Eduardo-Daniela	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓
Elisa-Hugo	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓	✓
Gloria-Erika	✗	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗
Ismael-Gilberto	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓
Leo-Miguel	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗
Yolanda-Natalia	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

A partir de la Tabla 4.1, puede observarse que, en los problemas del segundo bloque (problemas del 5 al 8), las parejas desarrollaron más acercamientos distintos, pero también hubo más parejas sin resolverlos, y al menos se presentó una solución algebraica en cada uno. La interpretación que se le puede dar a esta información es que las parejas tuvieron mayores dificultades para resolver estos problemas, pues al no tener claridad de cómo resolverlos con el SGD, se generaron más caminos distintos a la solución de cada problema. Por otro lado, los resultados de los problemas del tercer bloque (problemas del 9 al 13), muestran que los acercamientos son más homogéneos, y que son menos los equipos que no los resuelven, a pesar de que no hayan llegado a una solución algebraica. Esto puede interpretarse como que las parejas se apropiaron de recursos y estrategias que discutieron en el segundo bloque, optimizaron sus procedimientos y aprendieron de sus errores o interpretaciones equivocadas.

En la Tabla 4.2 se observa que, en general, las parejas tuvieron un buen desempeño en términos de resolver la mayoría de los problemas a través de representarlos geométricamente con el SGD, a excepción de las dos parejas que tuvieron más inasistencias en el curso (Gloria-Erika y Leo-Miguel). También puede identificarse que el problema que más trabajo les costó resolver fue el problema 8 (el problema de los corredores), pues se les complicó decidir qué unidades utilizar en los ejes, si metros o kilómetros; es decir, mostraron un bajo dominio en la conversión de unidades, y eso les generó confusión para representar los datos del problema de forma geométrica.

Entre los resultados, sobresalió que en los problemas que involucraban alguna figura geométrica en sus datos (problemas 5, 10, 11 y 12) hubo acercamientos donde las parejas las construyeron. A pesar de que las fases no impiden este tipo de representación, en ningún momento del estudio se llevó a cabo la construcción de alguna figura descrita en algún problema para resolverlo. Esto indica que el ambiente geométrico y dinámico, que promueve GeoGebra, también influye sobre las acciones y decisiones que toman los estudiantes cuando se enfrentan a un problema.

Otro resultado, que es importante señalar, fue que los estudiantes pudieron aplicar las mismas estrategias para ambos bloques de problemas sin mayor conflicto. Es decir, pudieron adaptar las estrategias de resolución utilizadas en la etapa introductoria y en el bloque 1 a los problemas presentados en el bloque 2 y 3. De esta manera, fue posible discutir sobre el comportamiento de distintas relaciones y hacer un análisis de los conceptos involucrados (razón, velocidad, máximo, mínimo, dominio).

No obstante, también hubo dificultades. Una de las más notorias fue su carente dominio para resolver las ecuaciones: aunque plantearon las ecuaciones a partir de los modelos construidos, mostraron dificultades con el hecho de sustituir sus variables o despejarlas para llegar a la solución. Esto puede afirmarse porque en el tercer bloque de problemas no tuvieron obstáculos para parametrizar los lugares geométricos, pero sí para resolver las ecuaciones que surgían de estas parametrizaciones.

Pero ¿qué ofrece a los estudiantes el proceso de resolver ecuaciones?, ¿realmente pierden información o conocimiento significativo en la resolución de problemas verbales si no resuelven las ecuaciones? En este capítulo se mostró que el SGD no solo permitió resolver los problemas, sino también analizar cómo se relacionaban sus datos, identificar sus dominios, buscar diferentes formas de resolverlos, discutir y reflexionar sobre los acercamientos mostrados, reconocer los errores en las interpretaciones geométrica de los datos. Es decir, el SGD promueve el desarrollo de actividades o procesos que son esenciales en el estudio del Álgebra. En este sentido, qué se pierde o qué se descuida cuando se dejan de resolver los problemas verbales bajo el enfoque algebraico donde se plantean y resuelven ecuaciones para hallar sus soluciones, en un principio parece que nada. La evidencia fue que en los problemas 5 al 8 sí utilizaron representaciones algebraicas, pero como un medio para formalizar las respuestas, como comprobación. Mientras que en los problemas del 9 al 13 no lograron resolver las ecuaciones, solo representarlas, pero comprendían que una ecuación representaba una equivalencia entre funciones que gráficamente era hallar el punto donde se intersecaban.

Capítulo 5: Conclusiones

En general, el uso de las herramientas por parte de los estudiantes funciona como un mediador en el proceso de aprender matemáticas, porque influyen en la clase de preguntas que se plantean los estudiantes y las decisiones que toman para resolver un problema. En este sentido, el uso sistemático de GeoGebra contribuyó en las formas de razonamiento de los estudiantes en la resolución de problemas verbales. Para ello, es importante identificar las formas de razonamiento que mostraron los estudiantes, las cuales es posible caracterizar a través de analizar los recursos, estrategias, representaciones y exploraciones que llevaron a cabo.

5.1 Caracterización de los procesos de resolución de los problemas y respuesta a la pregunta de investigación

Durante la resolución de los problemas de los bloques 2 y 3, se observó que las parejas realizaron distintas actividades en cada problema: seleccionar unidades para los ejes, identificar el dominio, determinar elementos fijos y móviles del modelo, buscar la solución, etc. Estas fueron resultado de seguir las fases que se les propusieron para trabajar con GeoGebra y de utilizar las estrategias y recursos mostrados en las tareas introductorias y en el desarrollo de los problemas del bloque 1. A partir de las actividades o acciones, que llevaron a cabo las parejas, se identificaron cuatro procesos o etapas que se distinguen por las formas de razonamiento mostradas: (1) interpretación geométrica de los conceptos; (2) representación de la situación planteada mediante un modelo dinámico; (3) identificación de relaciones mediante el trazo de lugares geométricos; (4) parametrización.

Interpretación geométrica de los conceptos. Esta etapa está ligada a las formas de representar e interpretar la información descrita en cada problema en términos de sus propiedades y atributos geométricos (en términos de la herramienta). En un principio, en las tareas introductorias, se mostró a las parejas cómo representar valores numéricos asociados a operaciones básicas mediante el uso de segmentos, áreas de rectángulos y pendientes. Las ideas expuestas en este proceso permitieron que representaran geométricamente los conceptos involucrados en los enunciados de los problemas. Pero como las representaciones se hicieron dentro del sistema Cartesiano, las parejas tuvieron que adecuar las unidades de los ejes a los contextos correspondientes. Es decir, en esta etapa no es suficiente con decidir qué objeto geométrico será utilizado para representar un concepto, sino también es necesario seleccionar las unidades de los ejes pertinentes a la situación que describe el problema.

Por ejemplo, en el primer acercamiento del problema 7 del bloque 2 (ver Figura 4.1.21) una pareja mostró una configuración dinámica adecuada para resolver el problema (basada en el modelo que se mostró en el segundo acercamiento del problema 4 del bloque 1, ver apéndice 2); pero cuando se le cuestionó sobre qué unidades de medida debían asignarse al eje vertical, no supo qué contestar. También, en este mismo problema, hubo un segundo acercamiento (ver Figura 4.1.25) donde la pareja interpretó correctamente los elementos del modelo y las unidades de los ejes, pero no logró hacer una representación de la información que fuera apropiada para analizarla y llegar a la solución.

De esta manera, se pueden identificar cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes para relacionar los conceptos de un problema con objetos geométricos. Esto da la oportunidad de formular estrategias que les ayude a mejorar la comprensión del problema y aumentar sus posibilidades de representarlo e interpretarlo adecuadamente en el SGD.

Representación de la situación planteada mediante un modelo dinámico. En esta etapa se construye un modelo dinámico del problema que cuenta con el sistema de referencia y con los objetos geométricos asociados a los conceptos que se consideraron en la etapa anterior. La importancia de esta etapa radica, justamente, en el dinamismo; es decir, en la posibilidad de explorar e identificar, mediante el movimiento de objetos dentro de un modelo, relaciones que posteriormente lleven a la solución del problema. Las ideas principales en esta etapa son: determinar cuáles elementos se mantendrán fijos en el modelo y cuáles serán móviles según los datos del problema, identificar cuál es la condición que se mantendrá invariante de las dos establecidas en el enunciado y definir qué elemento del modelo representará a la variable.

Por ejemplo, en el problema 5 del bloque 2 se mostraron cuatro acercamientos distintos a la solución, donde en cada modelo se fijaron diferentes elementos geométricos asociados a los datos del problema y se representaron de forma distinta las condiciones descritas en el enunciado. En todos los acercamientos, las parejas pudieron explorar e identificar relaciones y propiedades de los triángulos, como la de la desigualdad del triángulo que estuvo asociada al dominio del problema. También, en el problema 6 del bloque 2 (Figura 4.1.16) puede observarse que los modelos de ambos acercamientos se construyeron basándose en las mismas ideas, solo difirieron en el objeto geométrico que asignaron como variable, pero esa única diferencia en los modelos provocó que todos los resultados posteriores (trazo del lugar geométrico, parametrización e interpretación del modelo) fueran distintos.

En este sentido, esta etapa exhibe las formas en que los estudiantes interpretan y entienden el enunciado en términos de la herramienta.

Identificación de relaciones mediante el trazo de lugares geométricos. Esta etapa se caracteriza por la exploración y análisis que hacen los estudiantes mediante el trazo de lugares geométricos para comprender cómo se relacionan los elementos del modelo que presentan variación con el objeto geométrico asociado a la variable. Una estrategia importante para llevar a cabo este análisis dinámico es definir un punto cuya coordenada x contenga al elemento geométrico relacionado con la variable, y la coordenada y, uno de los elementos que varían (asociados, normalmente, a los parámetros de la segunda condición del enunciado).

Por ejemplo, en el problema 4 del bloque 1 (apéndice 2), una vez que las parejas identificaron los parámetros que variaban en el modelo, accedieron a una segunda vista gráfica y definieron un punto que relacionara a estos con el objeto geométrico asociado a la variable (segmento que representó el tiempo en que ambas llaves estaban abiertas). En la Figura 27a se observa que las parejas prestaron atención a los parámetros asociados con la cantidad llenada del estanque (segmentos r y q), y en la Figura 27b, al parámetro asociado con la velocidad que llenaban el estanque ambas llaves abiertas (pendiente m_3). Así, los estudiantes definieron el punto $J = (n, q + r)$ para analizar geométricamente el comportamiento del volumen que llenaban del estanque las llaves con relación al tiempo transcurrido (Figura 28a), dado por el primer modelo; y, también, definieron el punto $I = (n, m_3)$ para analizar el comportamiento de la velocidad con que llenaban el estanque ambas llaves abiertas en términos del tiempo (Figura 28b), dado por el segundo modelo. El lugar geométrico de J hace evidente que hay una relación de proporción directa entre los elementos de sus coordenadas, mientras que el de I, muestra una proporción inversa.

De esta forma, puede observarse que en un modelo es posible explorar y analizar distintas relaciones entre sus elementos a través del trazo de lugares geométricos, y obtener información que normalmente se ignora en la resolución de estos problemas. En general, las relaciones, que se analizan cuando se construyen dos o más modelos para un mismo problema, son distintas.

Parametrización. Los estudiantes valoraron que dar una solución formal con la herramienta implicaba parametrizar los lugares geométricos, porque les permitirían hallar los puntos de intersección asociados a la solución, desprendiéndose del modelo. Es decir, la parametrización les permitía hallar la solución exacta de los problemas sin importar que variaran los elementos del modelo o se cambiaran sus parámetros. En este sentido, en esta etapa, el razonamiento era conectar la representación algebraica con la geométrica.

Por ejemplo, en el problema 7 del bloque 2 pueden observarse, en el tercer acercamiento (Figuras 4.1.27 y 4.1.28), la parametrización y la solución determinada por la intersección de los lugares geométricos que, aunque fueran modificados los datos conocidos del enunciado, se ajustaba automáticamente y se actualizaban las coordenadas del punto de intersección, dando la solución en términos de las nuevas condiciones o datos. Además, en este acercamiento, se hizo una discusión sobre el significado de los factores involucrados en la expresión o función algebraica que se obtuvo a partir de la parametrización; y se relacionó el hecho de variar el volumen en el modelo sin que se modificara el resultado del problema con que el factor de la expresión algebraica asociado al volumen del estanque haya sido eliminado. En este sentido, la parametrización no solo es vista como un medio más para verificar la solución del problema, sino también como un medio para darle más sentido a las expresiones algebraicas, pues surgen de los modelos que los estudiantes han construido.

Entonces ¿qué formas de razonamiento construyen y exhiben estudiantes del nivel medio superior cuando resuelven problemas verbales con el uso del sistema de geometría dinámica, GeoGebra, bajo un escenario de aprendizaje que promueve la resolución de problemas?

Por lo mencionado anteriormente, las formas de razonamiento que construyeron y exhibieron los estudiantes cuando resolvieron problemas verbales con el uso del Sistema de Geometría Dinámica pueden resumirse de la siguiente manera:

- Representar e interpretar los datos descritos en cada problema en términos de sus propiedades y atributos geométricos. Esto implica contextualizar objetos o trazos geométricos (como segmentos, pendientes, áreas, perímetros) con ayuda del sistema Cartesiano e identificar el dominio del problema.
- Explorar e identificar, mediante el movimiento de los elementos de la representación geométrica del problema (modelo dinámico), relaciones que posteriormente lleven a la solución. Las acciones principales son: determinar cuáles elementos se mantendrán fijos en el modelo y cuáles serán móviles según los datos del problema, identificar cuál es la condición que se mantendrá invariante de las dos establecidas en el enunciado y definir qué elemento del modelo representará a la variable.
- Explorar y analizar, mediante el trazo de lugares geométricos, relaciones entre los elementos del modelo que presentan variación y el objeto geométrico asociado a la variable. Una estrategia importante para llevar a cabo este análisis dinámico es definir un punto cuya coordenada x contenga al elemento geométrico relacionado con la variable, y la coordenada y, uno de los elementos que varían (asociados, normalmente, a los parámetros de la segunda condición del enunciado).
- Parametrizar los lugares geométricos para hallar los puntos de intersección asociados a la solución. De esta forma no solo se halla la solución algebraica de un problema, sino también se conecta la representación geométrica con la algebraica.

En estos procesos o formas de razonamiento que exhibieron los estudiantes destaca la importancia de transitar entre la representación escrita (enunciado) y la representación geométrica, pues esto permitió que le dieran sentido y significado al uso de objetos geométricos. Asimismo, los estudiantes relacionaron que las ecuaciones que planteaban para hallar la solución de alguno de los problemas verbales eran las representaciones algebraicas de las gráficas y lugares geométricos trazados; de este modo, comprendieron que resolver una ecuación significaba hallar la intersección entre dos gráficas. En este sentido, las formas de razonar de los estudiantes iban dirigidas, primero, de lo verbal a lo geométrico y, posteriormente, de lo geométrico a lo algebraico.

También es importante señalar, y hacer énfasis, en que el desarrollo de los problemas implicó usar múltiples representaciones (verbal, geométrica, gráfica, algebraica), modelar las situaciones descritas en los enunciados y analizar el comportamiento de las relaciones a través de manipular los parámetros u objetos geométricos de los modelos, porque son elementos claves en el razonamiento algebraico y funcional.

5.2 Concentración de los procesos o acciones realizadas por las parejas

Con la intención de ser más precisos sobre el tipo de actividad que se lleva a cabo en cada etapa o proceso, se identificaron las acciones más frecuentes que realizaron las parejas durante la resolución de los problemas con el uso del Sistema de Geometría Dinámica. En el siguiente cuadro se enlistan las actividades o acciones que se identificaron en cada etapa.

Tabla 5.1. Acciones realizadas por los estudiantes en cada etapa.

Etapa	Acciones
Interpretación geométrica de los conceptos	- Identificación de los datos conocidos y desconocidos del problema. - Comprensión del problema. - Asignación de las unidades a los ejes. - Representación geométrica de los conceptos.
Representación de la situación planteada mediante un modelo dinámico	- Selección de los elementos fijos y móviles del modelo. - Identificación del objeto geométrico asociado a la incógnita o variable del problema. - Identificación de los elementos que varían del modelo cuando se mueve el elemento asociado a la variable. - Medición de los elementos (longitudes de segmentos, áreas y pendientes). - Análisis de la estructura del modelo y sus componentes (¿es coherente? ¿tiene sentido? ¿cuál es la condición invariante?). - Obtención de la solución a través de la exploración.
Visualización de una relación mediante el trazo de lugares geométricos	- Uso de una segunda vista gráfica. - Definición de una relación mediante las coordenadas de un punto (punto dinámico), que incluya a la variable en su coordenada x. - Asignación de las unidades de los ejes del sistema Cartesiano de la segunda vista gráfica. - Trazo del lugar geométrico descrito por el punto dinámico.

	- Análisis sobre el dominio del problema y el comportamiento de los elementos involucrados en la relación (búsqueda de patrones e invariantes).
Parametrización	- Expresión de las coordenadas del punto dinámico en términos del elemento geométrico asociado a la variable. - Renombramiento de la variable como x. - Representación gráfica de la expresión obtenida y de las curvas asociadas a los parámetros del problema. - Verificación de que la gráfica de la función que resultó de la parametrización coincida con el lugar geométrico. - Identificación de las intersecciones donde se obtiene la solución. - Análisis e interpretación de la expresión algebraica en términos del modelo.

El haber ordenado la información de esta manera hace posible observar que se desarrollaron los episodios de la resolución de problemas. La primera etapa presenta las características que resaltan en el episodio de comprensión del problema, pues es necesario identificar los conceptos e interpretarlos en términos de la herramienta para desarrollar la segunda etapa; es decir, es entender el problema bajo un enfoque geométrico y dinámico. En el caso de la segunda etapa, está moldeada por las estrategias que pueden utilizarse para construir un modelo que represente la situación descrita en el enunciado del problema y permita hallar la solución; en este sentido, puede identificarse con el episodio de ejecutar un plan para resolver el problema. La tercera etapa está íntimamente ligada al episodio de transformación del problema, pues en ella se aprovecha la información que brinda el lugar geométrico para involucrarse en actividades de reflexión e investigación matemática que van más allá de obtener la solución. Y finalmente, la cuarta etapa permite verificar y mejorar el argumento del resultado, lo que implica un análisis sobre todo el proceso desarrollado, un análisis retrospectivo.

5.3 Comentarios finales

A lo largo de esta investigación se observaron ventajas y dificultades que surgieron de trabajar bajo un escenario de aprendizaje que promueve el enfoque de la resolución de problemas con el uso de un Sistema de Geometría Dinámica. Y también, áreas de oportunidad que pueden ayudar a robustecer o extender esta investigación.

Una de las contribuciones del uso sistemático del SGD fue que las parejas tuvieron la posibilidad de resolver los problemas del bloque 3 (problemas 9, 10, 11, 12 y 13) utilizando los mismos recursos y estrategias que habían implementado en los problemas anteriores. Cabe recordar que los problemas del último bloque se caracterizan por que, en un ambiente tradicional, implican la resolución de una ecuación cuadrática para obtener su solución; esto significa que los estudiantes necesitan dominar recursos específicos para resolverlos que no son utilizados en la resolución de problemas verbales: despejes de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = k$, factorización de ecuaciones cuadráticas cuando el coeficiente a es 1 o diferente de 1, fórmula general (que incluye casos según el resultado del discriminante), etc. Entonces, si los acercamientos mostrados en los bloques 2 y 3 se distinguen por seguir los mismos patrones, sin importar la naturaleza o complejidad algebraica de los problemas, parece que en este ambiente dinámico la distinción que se hace a los problemas verbales queda superada.

El SGD, también, facilitó la exploración de las diferentes relaciones que existen entre los elementos o conceptos involucrados en los problemas. De esta manera, no solo se refuerza la forma en que se analizan los datos de una situación planteada, sino también se identifican los tipos de relación que tienen. Por ejemplo, en los problemas 9 y 10 se observan que los lugares geométricos son parábolas, lo que significa que las relaciones que se analizaron son simétricas, que habrá dos valores del eje horizontal asignados a uno del eje vertical. En el problema 13, se observa que hay una relación de proporcionalidad inversa que, gracias a que ya se había analizado una gráfica con la misma relación en el bloque 1, las parejas comprendieron mejor el concepto y aprendieron a identificarlo por sus propiedades geométricas. Además, estas exploraciones permitieron que se analizaran elementos asociados con problemas de optimización (máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento, dominio), pues el dinamismo de la herramienta hace accesible observar y explorar el comportamiento de objetos que en un ambiente tradicional no es posible. Así, cada vez que los estudiantes mostraban un modelo, analizaban cuál era su dominio para identificar dónde tenía sentido realizar la exploración de los objetos u elementos involucrados. Esto último, es una de las contribuciones más importantes de trabajar con modelos en un SGD, ya que permite que los estudiantes se enfoquen en los contextos que se plantean en los problemas, que es una actividad que omiten cuando se trabaja con lápiz y papel.

No obstante, se presentaron dificultades durante el desarrollo de los problemas. Una de las que sobresalió fue que las parejas, con base en los trazos que se les mostraron en las actividades introductorias (ver apéndice 1) para representar operaciones básicas, intentaron resolver los problemas en el SGD de forma similar a lo que se hace en lápiz y papel: no prestaban atención a los contextos de los problemas, solo identificaban las palabras clave y construían los modelos geométricos que se ajustaban a las operaciones básicas identificadas. En general, hubo dos tipos de resultados: los que no lograron concretar un modelo que les permitiera hallar la solución, pues no les daban un significado geométrico a los conceptos, careciendo de sentido las representaciones geométricas; y los que sí resolvieron algún problema con este tipo de representaciones. El segundo resultado, a pesar de ser correcto, es limitado. Por ejemplo, si se considera el siguiente problema: calcular el tiempo que tarda un vehículo en recorrer 120 km si lleva una velocidad constante de 40 *km/h*; la solución se obtiene despejando el tiempo en la fórmula de velocidad $t = d/v$ y sustituyendo los datos en ella. Pero, si este mismo problema se resuelve con el SGD utilizando el modelo asociado a la división o razón (que se mostró en la cuarta sesión de las actividades introductorias), entonces el tiempo se representaría como la pendiente de un segmento, la distancia como un segmento en el eje vertical con 120 unidades de longitud y la velocidad como un segmento en el eje horizontal con 40 unidades de longitud. Así, se obtendría que la pendiente del segmento sería igual a 3, que son las horas que tarda el vehículo en hacer todo el recorrido. Y aunque el resultado es correcto y su representación también, no es conveniente utilizarla, pues cuando se intenta extender esta idea al concepto de función, no es posible, porque significaría representar a la distancia en función de la velocidad, lo que no tendría mucho sentido en una situación "real".

Con esto, se quiere dejar claro que no se buscó que los estudiantes sustituyeran las operaciones básicas por trazos o construcciones geométricas específicas para continuar resolviendo los problemas con las ideas que tenían aprendidas en un ambiente tradicional; más bien, se les motivó, mediante preguntas, a que prestaran atención al contexto y plantearan modelos que realmente tuvieran sentido cuando los interpretaran.

Otras dificultades que se presentaron en el camino se asociaron más con el domino de recursos y uso de estrategias dentro del ambiente dinámico (GeoGebra). Por ejemplo, en el problema 4 (el problema de las llaves que llenan un estanque) se tuvo que agregar un segmento auxiliar para representar en su pendiente la velocidad a la que se llena el estanque cuando las dos llaves están abiertas y, así, poder solucionar el problema. Esta estrategia, al no ser intuitiva, les llevó tiempo asimilarla. Asimismo, presentaron dificultades para resolver las ecuaciones algebraicas que surgieron de los procesos de parametrizar las curvas, lo que refleja una debilidad en la manipulación algebraica.

Finalmente, este estudio puede contribuir en la formación o mejora del contenido curricular, ya que ofrece elementos puntuales en el diseño de las actividades, evaluación e implementación con e uso de tecnología digital. También, las formas de construir los modelos y exploraciones que se mostraron dan la posibilidad de proponer actividades que se relacionen con la resolución de problemas de optimización, pues las ideas y conceptos que están involucrados en este tipo de representaciones son esenciales para comprender ideas y conceptos matemáticos más sofisticados. Por ejemplo, analizar las pendientes en los modelos es equivalente a analizar cómo varía una razón y, en ese sentido, se tiene el inicio de una de las ideas fundamentales del cálculo diferencial. Del mismo modo, el análisis del comportamiento de las áreas rectangulares asociadas a productos se relaciona con el concepto de acumulación, un concepto fundamental en cálculo integral. Por lo tanto, este trabajo no solo demuestra que la ruta que se siguió para el desarrollo y resolución de los problemas es viable, sino también que puede ofrecer material, ideas, recursos y estrategias que son posibles con el uso sistemático de un SGD para la resolución de problemas que no estén catalogados como problemas verbales.

Referencias

Amado, N., Carreira, S., & Nobre, S. (2019). The spreadsheet affordances in solving complex word problems. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds), *Mathematical Problem Solving*. ICME-13 Monographs (pp. 91-109). Springer, Cham.

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacy, K. (2017). *The learning and teaching of algebra. Ideas, insights, and activities*. Routledge.

Arnau, D., & Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias,* 31 (3), pp. 49-66.

Baldor, A. (2001). *Álgebra de Baldor*. Grupo Editorial Patria.

Bozkurt, G., & Uygan, C. (2020). Lesson hiccups during the development of teaching schemes: a novice technology-using mathematics teacher's professional instrumental genesis of dynamic geometry. *ZDM Mathematics Education*, 52(7), 1349-1363. https://doi.org/10.1007/ s11858-020-01184-4.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 37-68.

Cevikbas, M., & Kaiser, G. (2020). Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 52(7), 1291-1305. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01191-5.

Colegio Nacional de Matemáticas (2009). *Matemáticas simplificadas*. Pearson Educación.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. En D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). Macmillan Library Reference Usa; Prentice Hall International.

Fey, J., & Smith, D. (2017). Algebra as part of an integrated high school curriculum. En S. Stewart (Ed), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 173-201). Springer, Cham. https://doi.org/ 10.1007/978-3-319-45053-7_7

Filloy, E., Rojano, T., & Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell and R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra*, (pp. 155-176). Kluwer Academic Publishers.

Gökkurt, B., Erdem, E., Örnek, T., & Soylu, Y. (2018). Are middle school mathematics teachers able to solve word problems without using variable?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49:1, 85-106, https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1349942

Gómez-Arciga, A. [en prensa](2021). Resolución de problemas verbales con GeoGebra: Una fuente de posibilidades en el estudio de relaciones. *Proceedings of the 43rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education.*

Gómez-Arciga, A., Olvera-Martínez, C., Aguilar-Magallón, D., & Poveda, W. E. (2018). Digital reasoning: Representing, exploring and solving word problems through the use of geogebra. En T. E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski (Eds), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education* (pp. 1171-1186). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Gómez-Arciga, A., & Reyes-Martínez, I. (2019). Acercamientos geométricos a problemas verbales en un ambiente de resolución de problemas con geogebra. En S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 820-828). St Louis, MO: University of Missouri.

Graham, K., Cuoco, A., & Zimmermann, G. (2010). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making in algebra.* Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Günster, S., & Weigand, H. G. (2020). Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM Mathematics Education*, 52(7), 1259-1274. https://doi.org/10.1007/s11858-020- 01179-1.

Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 209-228. 10.1080/14794802.2018.1484799

Kieran, C. (2020). Algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2da ed., pp. 36-44). Springer.

Kilhamn, C., Röj-Lindberg, A. S., & Björkqvist, O. (2019). School algebra. In *Encountering Algebra* (pp. 1-11). Springer, Cham.

Kendal, M., & Stacey, K. (2004). Algebra: A world of difference. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study* (pp. 329-346). Springer, Dordrecht.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). Springer.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park, CA: Sage.

Mason, J. (2005). *Developing thinking in algebra*. Sage.

National Council of Teacher of Mathematics (2011). *Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making.* VA, Reston: National Council of Teacher of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2018). *Catalyzing change in high school mathematics. Initiating critical conversations*. VA, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Ndlovu, M., Ramdhany, V., Spangenberg, E., & Govender, R. (2020). Preservice teachers' beliefs and intentions about integrating mathematics teaching and learning ICTs in their classrooms. *ZDM Mathematics Education,* 52(7), 1365-1380. https://doi.org/10.1007/s1185 8-020-01186-2.

Olvera-Martínez, C. (2010). *Rutas de comprensión y construcción del pensamiento algebraico que exhiben estudiantes con el uso de la hoja de cálculo en la resolución de problemas* (Tesis de maestría). Cinvestav, México.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Rees, P. & Sparks, F. (2005). *Álgebra*. McGraw-Hill/Interamericana.

Rojano, T. (2018). La investigación y el álgebra en el currículo de la educación básica: de los tiempos de la modernización educativa al presente. En A. Ávila (Coordinadora), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 238-252). Ciudad de México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

Rojano, T. & Sutherland, R. (2020). Technology and curricula in mathematics education. En

S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed., pp. 849-853). Springer.

Roschelle, J., Noss, R., Blikstein, P., & Jackiw, N. (2017). Technology for learning mathematics. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 853–878). Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds), *Mathematical Problem Solving*. ICME-13 Monographs (pp. 63-89). Springer, Cham.

Santos-Trigo, M., & Aguilar-Magallón, D. (2018). Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Polya al razonamiento digital. En A. Ávila (Coordinadora), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 148-167). Ciudad de México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

Santos-Trigo, M., Aguilar-Magallón, D., & Reyes-Martínez, I. (2019). A mathematical problem-solving approach based on digital technology affordances to represent, explore, and solve problems via geometric reasoning. En P. Felmer, P. Liljedahl, & B. Koichu (Eds), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 145-166). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_8

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 279-302.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically. Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp 334–370). Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2019). Reframing teacher knowledge: a research and development agenda. *ZDM Mathematics Education*, 52, 359-376. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01057-5.

Thomas, M. (2017). Rethinking algebra: A versatile approach integrating digital technology.

En S. Stewart (Ed), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 173-201). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_10

Vargas-Alejo,V., & Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), pp. 89-107.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger, Lisse.

Verschffeld, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed., pp. 908-911). Springer.

Apéndice 1

Desarrollo de las actividades introductorias.

En las primeras cuatro sesiones se plantearon actividades sobre cómo representar geométrica y dinámicamente las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), con tres objetivos principales: el primero, introducir a los estudiantes al uso de un SGD (GeoGebra), que conocieran e identificaran sus herramientas básicas; el segundo, enseñarles a construir modelos y a explorar relaciones de sus elementos; el tercero, proporcionarles recursos y estrategias para enfrentarse a los problemas verbales. De este modo, en cada actividad (con duración de una sesión cada una), se les guio a través de tres momentos que son claves durante la resolución de un problema cuando se implementa un SGD:

- Construcción del modelo: el investigador plantea preguntas que guían a las parejas a buscar significados geométricos tanto para los conceptos como las situaciones descritas en las actividades.
- Exploración: las parejas son dirigidas a tener un primer acercamiento a la construcción dinámica para visualizar aspectos generales; es decir, exploran el comportamiento de la estructura y de cada uno de sus componentes con solo mover uno de sus elementos.
- Análisis: las parejas hacen un análisis sobre las relaciones explícitas o implícitas que pueden definirse en el modelo con ayuda de las herramientas que ofrece el SGD para visualizar o medir objetos.

Sesión 1: suma.

En la primera sesión se llevó a cabo la construcción de un modelo dinámico en el sistema Cartesiano que representó la situación expresada por la ecuación $x + y = a$, donde "a" representaba un valor constante. Como el objetivo era que las parejas reflexionaran sobre el significado geométrico que se puede atribuir a diversos conceptos, se les planteó una situación específica mediante una pregunta: ¿cómo representar geométricamente en el plano Cartesiano dos números que sumados den diez?

Comprender qué se pide o se pregunta en la actividad, es esencial para elaborar un plan que permita resolverla. En este sentido, la pregunta que se planteó, a las parejas, implicó que identificaran que el contexto era numérico, que los datos conocidos y desconocidos eran números que no estaban asociados a alguna unidad específica, y que la relación entre ellos estaba dada por la operación suma.

Construcción del modelo: en esta fase, el investigador, guio a las parejas a través de las preguntas ¿cómo representar el valor de un número dentro de un sistema Cartesiano? ¿Qué significa geométricamente que dos números sumen 10? ¿Cómo construir un modelo donde se mantenga invariante la suma? Después de una discusión grupal, se llegó a un acuerdo de que los números se podían representar mediante longitudes de segmentos, y que la suma podía representarse como la unión de dos segmentos que sus longitudes sumaran 10. El investigador, con estas ideas, guio la construcción del modelo y mostró cómo representar la suma, de tal manera que siempre fuera 10 aunque variaran las longitudes de los segmentos (Figura 1). Las parejas lo iban reconstruyendo mientras que el profesor las apoyaba con las dudas técnicas que iban surgiendo.

En la Figura 1, la longitud del segmento *AB* representa el dato invariante: 10 unidades, que es el resultado de la suma. Y los datos desconocidos, que son los dos números sumados, están dados por los segmentos *AC* y *CB*, donde *C* es un punto que pertenece al segmento *AB*. De esta manera, las longitudes de los segmentos *AC* y *CB* suman diez sin importar la posición del punto *C*.

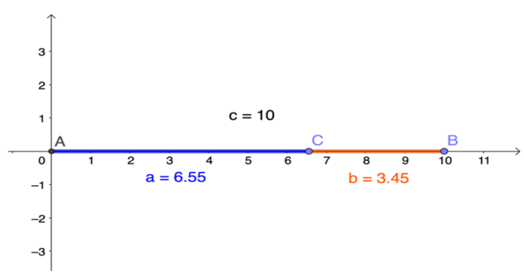
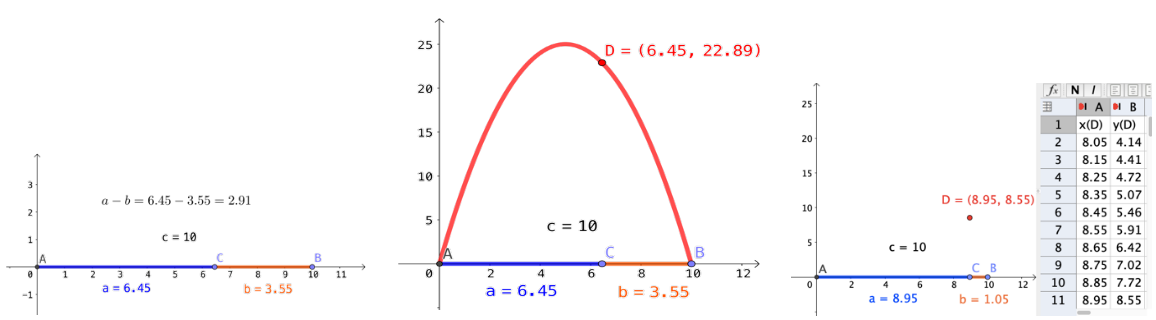


Figura 1. Modelo dinámico en el sistema Cartesiano de dos números que suman diez.
https://www.geogebra.org/m/nsgxhfre#material/mqdxfqdf

Exploración: la construcción del modelo dinámico permitió a las parejas explorar el comportamiento de la estructura y de cada uno de sus componentes con solo mover uno de sus elementos. El investigador guio esta fase con las siguientes preguntas: ¿en qué intervalo tiene sentido que se analice el movimiento del punto *C*? ¿Qué significa que el punto *B* sea movido sobre el eje horizontal? ¿Cuál es la interpretación del modelo si el punto *C* se encuentra en los extremos o fuera del intervalo (A, B)? Las parejas manipularon el modelo y observaron que si el punto *C* estaba en el intervalo cerrado [*A, B*], la suma de las longitudes de los segmentos era 10, y si estaba fuera de ese intervalo, la suma variaba y siempre era mayor a 10. Respecto al punto *B*, observaron que su posición en el eje horizontal indicaba el valor de la suma.

Análisis: en esta fase, el investigador, mostró de qué formas el SGD puede ayudar a analizar el comportamiento de las relaciones que hay entre los elementos del modelo. La primera fue utilizando la barra de entrada. Para analizar el comportamiento de la diferencia de los segmentos *AC* y *CB* (segmentos *a* y *b*, respectivamente) cuando el punto *C* era movido en el segmento *AB*, el investigador ingresó la operación $a - b$ en la barrada de entrada e hizo visual el resultado en la vista gráfica (Figura 2a). Así, las parejas pudieron analizar cómo se comportaba la resta de los segmentos cuando variaba la posición de *C*. La segunda forma fue utilizando la herramienta de *lugar geométrico*. Para este caso, el investigador primero definió el punto *D = (a, ab)*, que relacionaba la longitud del segmento *AC* con el producto de las longitudes de los segmentos *AC* y *CB*, y después trazó el lugar geométrico que describía el punto (Figura 2b). Así, las parejas pudieron observar y analizar el comportamiento del producto de dos números cuya suma era constante. La última forma fue utilizando una hoja de cálculo. El investigador analizó el comportamiento del punto *D = (a, a/b)* mediante una hoja de cálculo, en la cual se obtuvieron los datos de las parejas ordenadas generadas por el punto, que describían la relación de la longitud del segmento *AC* con la razón *a/b* (Figura 2c). Todas las formas mostradas por el investigador fueron reproducidas por las parejas.



(a) Análisis de la diferencia de *a* y *b* visualizando el resultado de la operación en el plano.

(b) Análisis del producto de *a* y *b* visualizando el lugar geométrico descrito por el punto *D = (a, ab)*.

(c) Análisis de la razón *a/b* visualizando los resultados en una hoja de cálculo.

Figura 2. Formas de explorar y analizar relaciones entre los segmentos *AC* y *BC*.

En esta actividad o sesión se resaltó la forma de representar, explorar y analizar una relación, dada por la operación suma, mediante un SGD. Las ideas importantes fueron: usar el plano Cartesiano como un sistema de referencia para el análisis; definir puntos sobre objetos geométricos para conseguir un movimiento ordenado y, así, tener la posibilidad de construir o definir una relación entre los elementos del modelo; identificar herramientas del SGD que permiten llevar a cabo un análisis más puntal (lugar geométrico, hoja de cálculo, medición).

Sesión 2: diferencia.

En esta sesión se construyó un modelo geométrico de dos números que su diferencia fuera diez unidades. Es decir, se representó dinámicamente la ecuación $x - y = a$, con "a" constante.

Construcción del modelo: gracias a la exploración y análisis del modelo de la suma, no fue difícil para las parejas proponer una forma de construir el modelo de la diferencia. El grupo estuvo de acuerdo en que el modelo de la suma podía adaptarse, si el punto *C* se situaba después del punto *B* (es decir, a la derecha), entonces la diferencia de las longitudes los segmentos *AC* y *CB* daba diez (longitud de *AB*) (Figura 3).

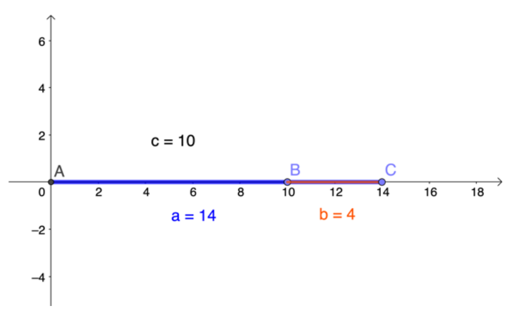


Figura 3. Modelo dinámico de dos números que restados den diez.
https://www.geogebra.org/m/nsgxhfre#material/bh7ffuae

Sin embargo, un estudiante mencionó que la diferencia de dos números igual a diez podía entenderse también como un número excede a otro en diez, lo que significaría construir un segmento que siempre fuera diez unidades mayor que otro. Ante esta idea, el investigador, introdujo la herramienta *Circunferencia (centro y radio)* para llevarla a cabo. Trazó un segmento *AB* sobre el eje horizontal y, con la herramienta *Circunferencia (centro y radio)*, trazó una circunferencia centrada en *B* con radio $r = b + 10$ (b era la longitud del segmento

AB), y trazó el segmento *AC*, donde el punto *C* era la intersección de la circunferencia con el eje horizontal (Figura 4). Así, cuando el punto *B* era movido sobre el eje horizontal, la configuración mantenía la propiedad de que el segmento *BC* era diez unidades mayor que el segmento *AB*.

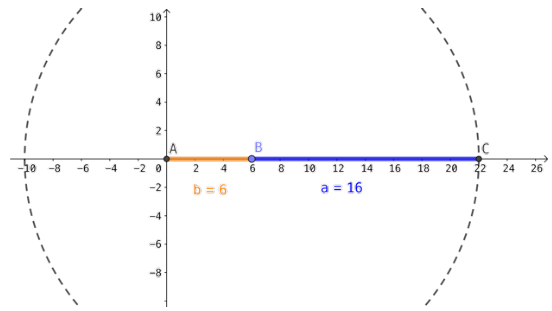
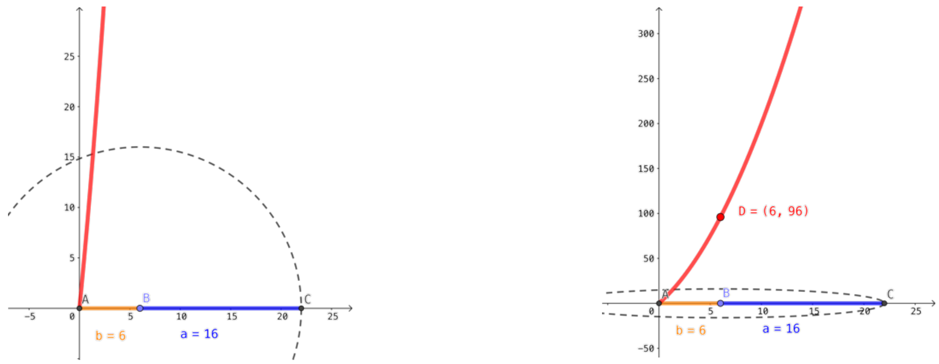


Figura 4. Modelo dinámico de la resta utilizando la herramienta *Circunferencia (centro y radio)*.

De esta manera, el investigador, no solo explicó una nueva herramienta del SGD a las parejas, sino también comentó la importancia de comprender el problema, ya que eso les daba oportunidad de hacer distintas representaciones de este.

Exploración: basados en el modelo que propuso el estudiante, el investigador pidió a las parejas identificar el dominio (es decir, identificar en qué intervalo tenía sentido analizar el movimiento del punto *B*) y analizar la información que se obtenía de la coordenada *x* del punto *C*. Después de una discusión grupal, las parejas identificaron que *B* no tenía ninguna restricción, que podía moverse sobre todo el eje horizontal sin afectar el resultado de la diferencia. Y sobre la coordenada *x* del punto *C*, mencionaron que mientras el punto *B* estuviera del lado positivo del eje horizontal, el valor de la coordenada sería igual a la suma de las longitudes de los segmentos $(a + b)$.

Análisis: continuando con el modelo propuesto por el estudiante, el investigador pidió que analizaran el comportamiento del producto y de la razón de los segmentos *a* y *b*. Las parejas decidieron hacerlo a través de visualizar los lugares geométricos de los puntos definidos como (*b*, *ab*) y (*b*, *a/b*) (Figuras 5 y 6).



(a) sin escala. (b) con escala 1:10.

Figura 5. Lugar geométrico descrito por el punto *D = (b, ab)*.

Cuando trazaron el lugar geométrico descrito por $D = (b, ab)$ parecía una semirrecta que partía del origen (Figura 5a) –de hecho, el punto *D* no se aprecia en la figura porque sus coordenadas son (6, 96)–. Esto podía ocasionar una malinterpretación de los datos, ya que podía suponerse que la relación entre *b* y el producto *ab* era directamente proporcional, lo cual era falso porque *a* y *b* eran variables. Para evitar dicha confusión, el investigador les mostró cómo trabajar en una escala 1:10, que permitió a las parejas evidenciar que el comportamiento del punto *D* no era lineal (Figura 5b).

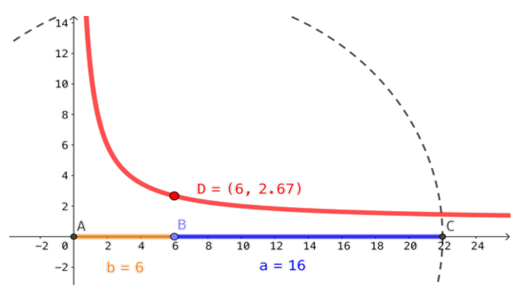


Figura 6. Lugar geométrico descrito por el punto *D = (b, a/b).*

Enseguida, analizaron la razón de *a* y *b* trazando el lugar geométrico descrito por el punto *D = (b, a/b)* (Figura 6). Las parejas, en general, mencionaron que cuando *b* aumentaba, la razón disminuía, y que cuando *b* disminuía, la razón aumentaba. El investigador agregó que la razón nunca era menor a 1 por más que aumentara *b*, y dejó abiertos los siguientes cuestionamientos ¿existe alguna relación de proporcionalidad entre *b* y la razón *a/b*? ¿Por qué la razón *a/b* no puede ser menor a uno? Estas preguntas no fueron respondidas por las parejas, pero dejó un antecedente sobre el tipo de análisis que debían hacer.

Esta sesión permitió que las parejas valoraran la importancia de manejar una escala adecuada para analizar el lugar geométrico de las relaciones, y reflexionaran sobre las ventajas del que ofrecía el SGD al poder analizar relaciones que no son evidentes en un ambiente tradicional.

Sesión 3: producto.

La ecuación que se representó dinámicamente en esta sesión fue $xy = a$. Pero la tarea se planteó como: construir el modelo geométrico de dos números que su producto sea igual a seis.

Construcción del modelo: antes que el investigador mostrara cómo construir este modelo por ser distinto a los dos anteriores, preguntó a las parejas sobre cómo representarían geométricamente el producto de dos números. Un estudiante logró identificar que una forma era construyendo un rectángulo cuyo valor numérico del área fuera igual al del producto. Entonces, partiendo de la respuesta del estudiante, y dado que el área debía ser invariante e igual a seis, el investigador construyó un rectángulo en el cual su altura dependía de la medida de su base. Esto es, si el producto se expresó como $ab = 6$ y su base media a, entonces su altura era $b = 6/a$ (Figura 7). Su base se asoció a uno de los números del producto, y su altura, al otro.

Para construir el modelo, el investigador, utilizó el recurso mostrado en la sesión anterior: *Circunferencia (centro y radio)*. Esto fue porque este recurso permite construir segmentos con longitudes en función de una magnitud de otro objeto geométrico. En la Figura 7 se observa que b es el radio de la circunferencia con longitud $6/\mathrm{a}$ y es perpendicular al eje horizontal. Así, fue posible construir un rectángulo que, cuando B era movido sobre el eje horizontal, su área era invariante.

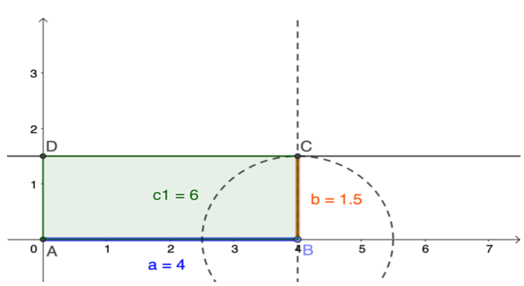


Figura 7. Modelo dinámico de dos números que multiplicados dan seis.

https://www.geogebra.org/m/nsgxhfre#material/tggxubag

Esta construcción implicó tomar en cuenta el eje vertical del sistema Cartesiano para modelar la situación que se planteó en la sesión.

Exploración: en esta fase, el investigador, les comentó que cuando un modelo dinámico se construía tomando en cuenta ambos ejes del sistema Cartesiano, se podían explorar otros tipos de relaciones, por ejemplo: si el punto *B* era movido sobre el eje horizontal ¿cómo se comportaba el perímetro del rectángulo? ¿Cómo cambiaba *b* en relación con *a*? ¿Qué lugar geométrico describía el punto *C* (se podía explorar activando *rastro*)? ¿El valor de *b* en algún momento era cero?

Análisis: el grupo llegó al acuerdo de analizar el comportamiento del perímetro y del vértice *C*, ambos casos con respecto a la base del rectángulo, que es la longitud del segmento *AB*. Para el análisis del comportamiento del perímetro, no fue necesaria la intervención del investigador, las parejas lo analizaron mediante el trazo del lugar geométrico descrito por el punto $E = (a, 2a + 2b)$ (Figura 8a), donde su coordenada *x* era la longitud de la base, y su coordenada *y*, el perímetro. En la Figura 8a, la posición del punto *E* indica que para un rectángulo de base cuatro unidades y área seis unidades cuadradas, su perímetro es 11 unidades. En este contexto, las parejas identificaron que la gráfica del lugar geométrico mostraba que se podía alcanzar un valor mínimo en el perímetro, y que, al mover el punto *B*, era posible afirmar que era cuando se formaba un cuadrado (Figura 8b).

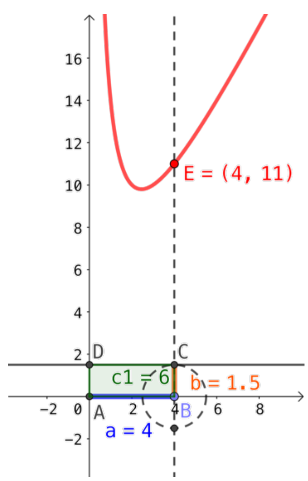


Figura 8a. Lugar geométrico que describe el comportamiento del perímetro del rectángulo *ABCD* en función de su base.

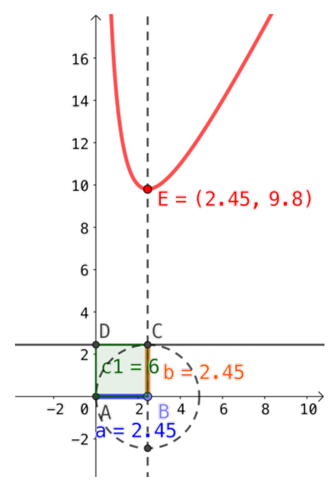


Figura 8b. Dimensiones del rectángulo cuando se obtiene el perímetro menor.

Por otro lado, para analizar el comportamiento del vértice *C*, el investigador mostró cómo trazar su lugar geométrico porque, a diferencia del punto *E* que fue definido a conveniencia para analizar una relación específica, el vértice *C* era un elemento que surgió de la construcción del modelo. De este modo, el investigador explicó que para analizar el lugar geométrico descrito por el punto *C* primero debía entenderse qué información se obtenía de sus coordenadas. Entonces, señaló que las coordenadas *x* e *y* del punto *C* estaban dadas por la base y la altura del rectángulo *ABCD*, respectivamente. Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por *C* era la relación que había entra *a* y *b* y, dado que su producto era constante, su relación era una proporción inversa. Este último concepto fue más fácil introducirlo a las parejas, porque el producto estaba asociado al área del rectángulo. Así, cuando el punto *B* era movido sobre el eje horizontal no solo observaron que, si *a* aumentaba, *b* disminuía (y viceversa); sino también que el área se mantenía constante.

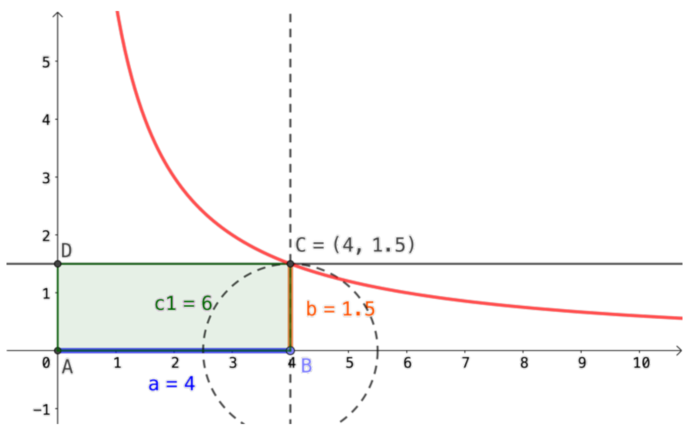


Figura 9. Lugar geométrico descrito por el vértice *C*.

Cabe señalar que en este modelo ya no se hizo un análisis sobre las operaciones básicas asociadas a las longitudes de los segmentos *a* y *b*. Más bien, se analizaron propiedades del modelo construido: perímetro y lugar geométrico de uno de sus vértices. Esto permitió abordar temas relacionados con optimización y proporcionalidad.

Sesión 4: razón.

En esta sesión se buscó una forma de representar la ecuación $y/x = a$ en el SGD. Sin embargo, como la razón no era un resultado que se asociara intuitivamente a un objeto geométrico, el investigador utilizó el modelo de la sesión anterior como apoyo; en él trazó el segmento *AC* del rectángulo *ABCD* (ver Figura 10) y obtuvo su pendiente. A las parejas se les pidió que movieran el punto B y dedujeran cómo se obtenía el valor de m a partir de los datos disponibles en el modelo.

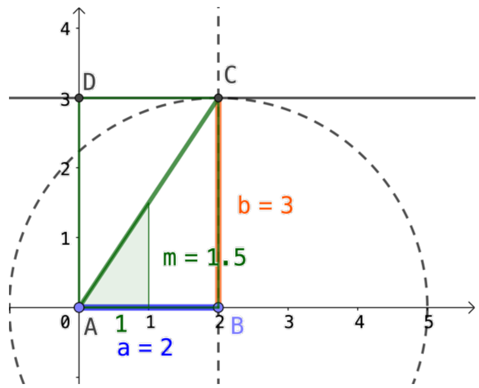


Figura 10. Obtención de la pendiente del segmento AC, trazado en el modelo del producto que se tomó como base.

Después de explorar el modelo, las parejas dedujeron que la pendiente se obtenía de dividir la longitud del segmento b entre la longitud del segmento a ($m = b/a$), y además observaron que el valor de la pendiente aumentaba cuando a disminuía, y viceversa. Así, las fases de **construcción** y **exploración** del modelo se realizaron de manera implícita.

Análisis: las parejas trazaron y analizaron el lugar geométrico descrito por el punto $F = (a, m)$ (Figura 11), y concretaron dos ideas: 1) si m era cero, el segmento o recta con pendiente m era horizontal; 2) si m se indefinía, el segmento o recta con pendiente m era vertical. En la segunda idea argumentaron que la pendiente se indefinía porque cuando movían el punto B "cerca" del origen, por la derecha e izquierda, se podía observar que el valor de m tendía al infinito o infinito negativo, respectivamente y, por lo tanto, no podía definirse un resultado para su posición vertical. De esta forma, la discusión y el análisis se dieron, implícitamente, alrededor del concepto de limite, lo que les permitió darle sentido al resultado de indefinido que mostraba GeoGebra en m cuando B se colocaba en el origen.

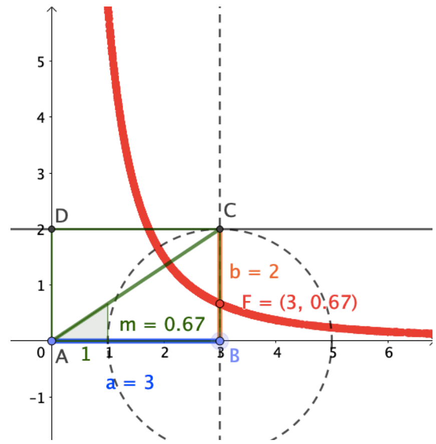


Figura 11. Lugar geométrico descrito por el punto $F = (a, m)$.

Esta sesión concluyó satisfactoriamente, en el aspecto de que los estudiantes comprendieron que la razón podía representarse mediante la pendiente de un segmento.

Comentarios sobre el desarrollo de las actividades introductorias.

El uso de un Sistema de Geometría Dinámica, como GeoGebra, permitió a los estudiantes representar y explorar relaciones numéricas y conceptos bajo un enfoque geométrico y dinámico. Esto dio la posibilidad de discutir grupalmente sobre el comportamiento de los elementos de cada modelo y refinar los conceptos involucrados en cada actividad, sin importar que las parejas no contaran con un dominio pleno de los conceptos que se enseñan previamente (proporcionalidad directa e inversa, pendiente, sistema Cartesiano y sus elementos).

Apéndice 2

Problemas del bloque 1.

A continuación, se muestra la resolución de los problemas verbales 2, 3 y 4. El problema 1 no se encuentra en esta sección porque está en la metodología. El desarrollo de estos problemas, al igual que las actividades introductorias, fueron guiados por el investigador y el profesor.

Problema 2:

La edad de Carlos es el triple de la de Mauricio y dentro de 10 años será el doble. Determina las edades actuales de Carlos y Mauricio.

El grupo completo inició ordenando la información del problema con base en las fases descritas en la metodología, como se muestra en el siguiente cuadro:

Datos	Condiciones	Condición por modelar	Unidades de los ejes
Edad de Carlos Edad de Mauricio	1.- la edad de Carlos es el triple de la de Mauricio. 2.- dentro de 10 años será el doble.	Condición 1	Eje horizontal: años. Eje vertical: años.

A partir de esta información, las parejas se enfocaron en construir un modelo que cumpliera con la primera condición del enunciado. La representación propuesta y aceptada por la mayoría de las parejas, después de una discusión grupal, fue la de representar, con un segmento AB en el eje horizontal, la edad de Mauricio, y en el eje vertical, la edad de Carlos con el segmento AC (Figura 12). El segmento AC lo trazaron utilizando la herramienta de *Circunferencia (centro y radio)* para definir su longitud en función de f, la cual fue igual $3f$. Con este trazo, aseguraron que la primera condición se mantuviera para cualquier posición del punto B sobre el eje horizontal.

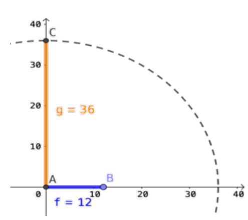


Figura 12. Modelo de la primera condición del problema 2.

En este modelo, el investigador propuso a las parejas analizar el comportamiento de la razón de $g + 10$ & $f + 10$, ya que la solución del problema la hallarían cuando la razón fuera 2. Entonces, las parejas definieron la relación dada por el punto $D = \left(f, \frac{g+10}{f+10}\right)$ que, en términos del enunciado, detalla el comportamiento de la razón de las edades de Carlos y Mauricio dentro de 10 años respecto a la edad actual de Mauricio, y trazaron el lugar geométrico (Figura 13). En la Figura 13 se observa el lugar geométrico descrito por *D* en la segunda vista gráfica, y sus coordenadas indican que, si Mauricio tiene 12 años en la actualidad, dentro de 10 años la razón de las edades de Carlos y Mauricio será de 2.09 aproximadamente.

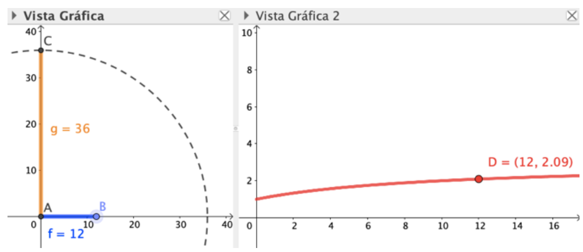


Figura 13. Lugar geométrico del punto *D*.

Con base en el modelo y la gráfica del lugar geométrico, se discutió y analizó con las parejas el comportamiento del punto *D* y el significado de sus coordenadas. Así, no solo hallaron las coordenadas del punto *D* que daban la solución del problema (Figura 14), sino también lo interpretaron correctamente: si en 10 años la edad de Carlos será el doble de la de Mauricio, las edades actuales de Carlos y Mauricio son 30 y 10, respectivamente, que corresponden a los segmentos *g* y *f* de la Figura 14.

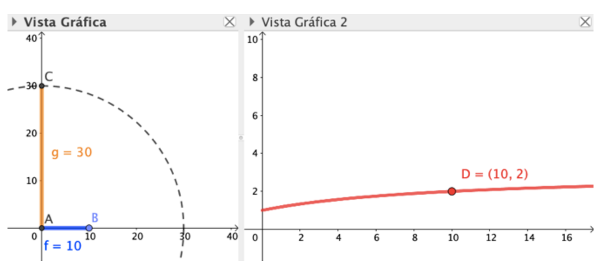


Figura 14. Solución en el acercamiento geométrico.

Luego, hicieron la parametrización del lugar geométrico descrito por $D = \left(f, \frac{g+10}{f+10}\right)$, que fue $y = \frac{3x+10}{x+10}$, donde $x = f$ & $g = 3f$, y graficaron la función *y* (Figura 15a). Observaron que la gráfica se superponía al lugar geométrico, lo que indicaba que la parametrización había sido correcta. Como en este problema solo habían trazado un lugar geométrico, y no dos como el problema 1, era necesario trazar otra función que les permitiera hallar el punto de intersección asociado a la solución. En un dialogo, entre las parejas y el investigador, se concluyó que era necesario trazar la recta $y = 2$, que era la representación gráfica de una razón constante según el contexto del problema, y que en la intersección de las funciones se hallaría la solución del problema (Figura 15b).

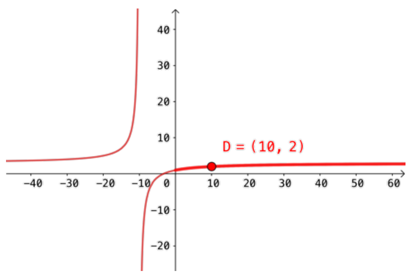


Figura 15a. Gráfica de la función parametrizada.

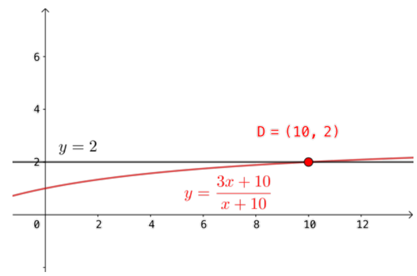


Figura 15b. Intersección de las funciones.

Finalmente, con ayuda del investigador, las parejas plantearon y resolvieron la ecuación que se obtuvo de igualar las funciones:

$$\frac{3x + 10}{x + 10} = 2$$

$$3x + 10 = 2(x + 10)$$

$$3x + 10 = 2x + 20$$

$$x = 10$$

Las parejas validaron el resultado sustituyendo el valor de x en las funciones.

Problema 3:

¿Cuántos litros de una solución al 15% de alcohol se deben agregar a otra al 6% para obtener 180 litros de una nueva solución al 10% de alcohol?

Puesto que las parejas no supieron cómo interpretar los porcentajes geométricamente, el investigador guio el proceso de resolución del problema. Decidió mostrarles dos acercamientos distintos para ayudarlos a tener una mejor comprensión del concepto de porcentaje. Comenzó identificando toda la información que se requería para construir un modelo que cumpliera con alguna de las condiciones descritas en el enunciado.

Datos	Condiciones	Condición por modelar	Unidades de los ejes
Conocidos: Solución A al 15% de alcohol. Solución B al 6% de alcohol. 180 litros de una solución C al 10% de alcohol. Desconocidos: Litros de la solución A. Litros de la solución B.	1.- La cantidad de litros de las soluciones A y B suman 180. 2.- El porcentaje de alcohol de las soluciones A y B mezcladas debe ser del 10%.	Condición 1	Eje horizontal: litros. Eje vertical: porcentaje.

El investigador mostró que la primera condición podía representarse mediante el modelo de la suma (Figura 16): trazó el segmento *AB* en el eje horizontal con longitud de 180, definió el punto *C* en el segmento y trazó los segmentos *AC* y *CB*, los cuales representaban los litros de la primera y segunda solución, respectivamente.

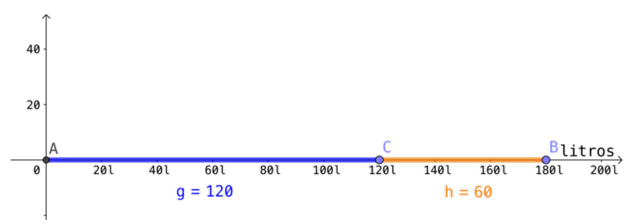


Figura 16. Representación dinámica de la primera condición.

Con base en esa representación, el investigador representó la cantidad de alcohol que había en cada solución. Para ello, consideró las unidades del eje vertical como porcentaje y, como el producto de los litros de una solución y su porcentaje de alcohol da como resultado los litros de alcohol que contiene dicha solución, la representación la basó en el modelo del producto; es decir, representó los litros de alcohol de cada solución mediante un área (Figura 17).

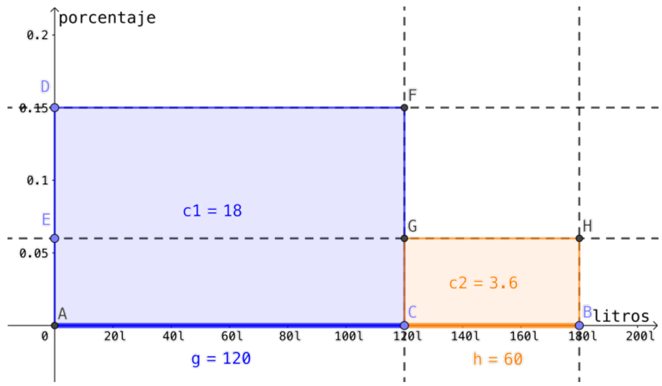


Figura 17. Representación de los litros de alcohol en cada solución.

El investigador señaló que los porcentajes serían representados en su forma decimal sobre el eje vertical, dentro del intervalo [0, 1]. De esta manera, el 15% de la primera solución lo asoció al 0.15 del eje vertical (punto *D*), y el 6% de la segunda, al 0.06 (punto *E*). Así, el valor numérico del área del rectángulo *ACFD* (nombrado *c1*) representó los litros de alcohol que hay en g litros de solución, y *c2*, los litros de alcohol que hay en h litros de solución, para cualquier posición del punto *C*. La información que se tiene en la Figura 17 se interpreta como: si se tienen 120 litros de una solución al 15% de alcohol, 18 litros son alcohol y; si se tienen 60 litros de una solución al 6% de alcohol, 3.6 litros son alcohol.

Como en el enunciado se pregunta cuántos litros de las soluciones al 15 y 6 porciento del alcohol deben mezclarse para obtener 180 litros de una nueva solución al 10%, el investigador analizó la relación que hay entre los litros de la solución al 15% de alcohol y la suma de litros de alcohol de las dos soluciones. Traducido al ambiente del SGD, significó analizar la relación dada por el punto $I = (g, c1 + c2)$ en la segunda vista gráfica (Figura 18).

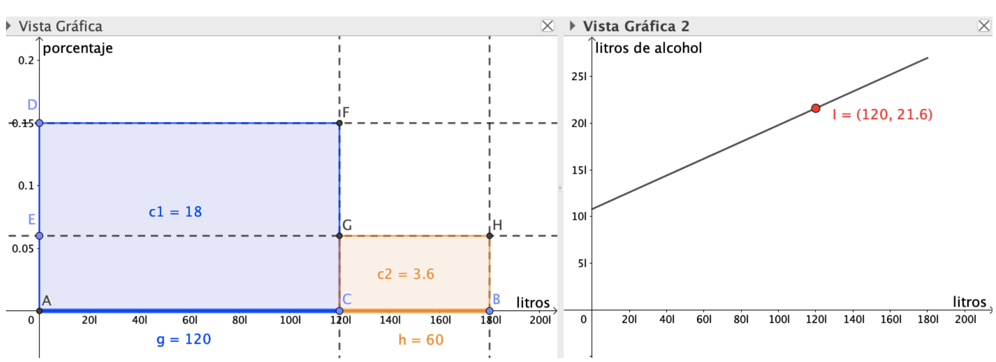


Figura 18. Lugar geométrico del punto $I = (g,\ c1 + c2)$.

El investigador señaló que las unidades del eje vertical cambiaban en la segunda vista gráfica, asociándose a litros de alcohol. Las coordenadas de *I* (Figura 18) se interpretaban como: si la mezcla de las soluciones contiene 120 litros de la solución al 15% de alcohol, hay 21.6 litros de alcohol en la mezcla.

Cuando la ordenada del punto *I* era 18, se obtenía la solución (Figura 19). Esto es porque la segunda condición expresa que la nueva solución debe contener 10% de alcohol de 180 litros de solución, es decir, 18 litros de alcohol. Por lo tanto, la respuesta del problema según los datos del modelo (Figura 19) fue: se deben agregar 80 litros de una solución al 15% de alcohol a 100 litros de una solución al 6% de alcohol para conseguir 180 litros de una nueva solución al 10% de alcohol.

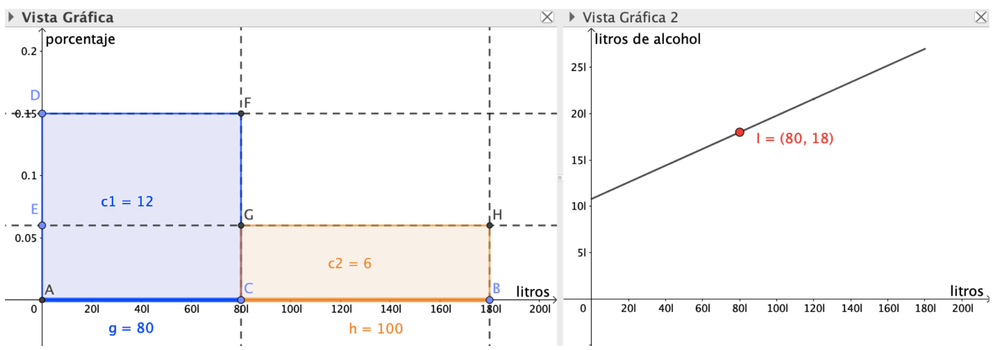


Figura 19. Solución del problema 3 en el acercamiento geométrico.

La parametrización, elaborada por el investigador, del lugar geométrico descrito por $I = (g,\ c1 + c2)$ fue $y = 0.15x + 0.06(180 - x)$, donde $x = g$, $c1 = 0.15g$, $c2 = 0.06h$ & $h = 180 - g$. Y, entonces, la solución la visualizó en la intersección de la función parametrizada y la recta $y = 18$ (Figura 20).

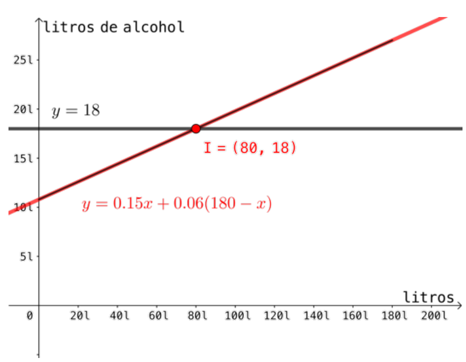


Figura 20. Intersección de la función parametrizada y la recta $y = 18$.

Como cierre de este acercamiento, las parejas y el investigador, resolvieron la ecuación que se obtuvo de igualar las funciones:

$$0.15x + 0.06(180 - x) = 18$$

$$0.09x + 10.8 = 18$$

$$0.09x = 7.2$$

$$x = 80$$

Validaron el resultado mostrado en el acercamiento geométrico mediante la solución de esta representación algebraica asociada a este acercamiento.

Segundo acercamiento.

El investigador consideró valioso mostrar otra forma de representar y resolver el problema, pues, así, las parejas tendrían más opciones e ideas para representar y resolver problemas que involucraran porcentajes. La condición que modeló en este acercamiento fue la misma que en el primero, pero asoció a las unidades del eje vertical como litros de alcohol –a diferencia del primero que las tomó como porcentaje–. En este sentido, la representación dinámica de la primera condición fue la misma que se mostró en la Figura 16.

El reto en este modelo fue, entonces, representar al porcentaje, pues tenía que ser expresado en términos de los litros de solución y de alcohol. Entonces, para que las parejas pudieran enfrentar este reto, el investigador les dio una expresión equivalente al porcentaje de alcohol:

$$concentración\ de\ alcohol = \frac{litros\ de\ alcohol}{litros\ de\ solución}$$

Con esta expresión, las parejas propusieron que el porcentaje o concentración de alcohol se representara como una pendiente. ¿Cómo trazar una recta dada su pendiente? A los estudiantes ya se les había mostrado cómo trazar una recta dada su pendiente cuando se representó la operación de división o razón (Tabla 3.2), pero, para esta situación en particular, se les compartió otra estrategia. Esta consistió en construir un triángulo rectángulo cuya base sobre el eje horizontal midiera uno, y la altura, 0.15. Así, la razón de los catetos (la altura entre la base) expresaría la concentración de alcohol. En la Figura 21a se observan los trazos auxiliares para la construcción del triángulo rectángulo: circunferencia centrada en el origen con radio uno, el punto *D* es la intersección de esta con el lado positivo del eje horizontal; circunferencia centrada en *D* con radio 0.15; recta perpendicular al eje horizontal que pasa por *D*, y *E* es la intersección de esta con la circunferencia de radio 0.15. Con estos trazos se aseguró que la recta *AE* tuviera pendiente 0.15.

Una vez que se mostró este acercamiento a los estudiantes, se les pidió que trazaran una recta con pendiente 0.06, la cual estaría asociada a la segunda solución (Figura 21b).

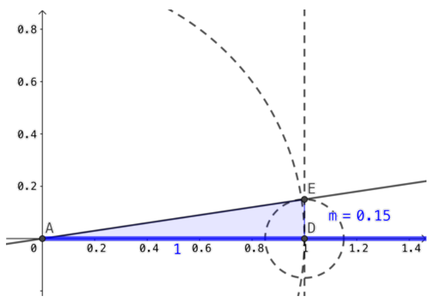


Figura 21a. Trazo de una recta dada su pendiente ($m = 0.15$).

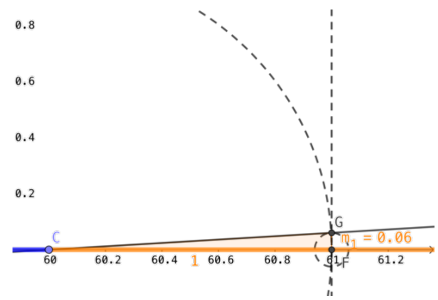


Figura 21b. Recta con pendiente 0.06 (m_1).

Dado que los valores de las pendientes eran relativamente pequeños respecto a los litros de solución, tanto el investigador como las parejas utilizaron la herramienta *Aproximar* –que permite hacer zoom a la pantalla para trabajar ya sea con unidades pequeñas o grandes–, pero en la Figura 22 puede observarse como quedó el modelo; las pendientes no varían, aunque el punto *C* sea movido sobre el segmento *AB*.

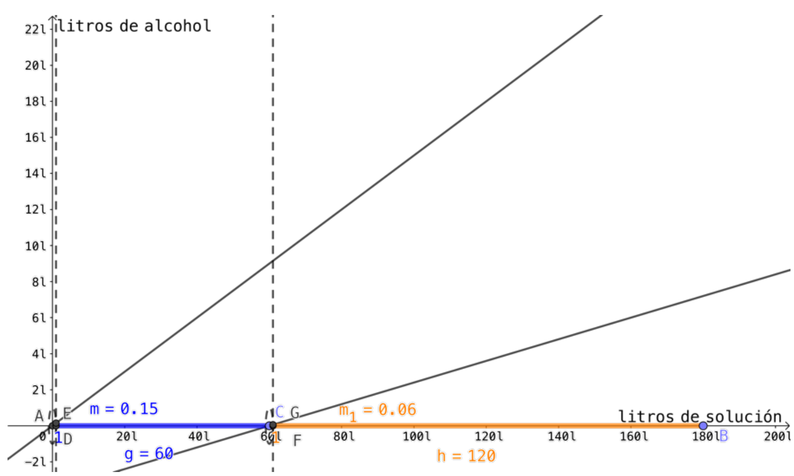


Figura 22. Rectas con pendientes de 0.15 y 0.06 asociadas a la primera y segunda solución, respectivamente.

Con base en el modelo, el investigador representó los litros de alcohol, de la primera y segunda solución, con los segmentos *r* y *s*, respectivamente (Figura 23), los cuales trazó sobre rectas perpendiculares al eje horizontal que pasaban por los puntos *C* y *B*. La interpretación del modelo que se tiene en la Figura 23 es: en una solución de 60 litros al 15% de alcohol, 9 litros son alcohol; y en una solución de 120 litros al 6% de alcohol, 7.2 litros son alcohol. En general, para cualquier posición del punto *C* en el intervalo [*A*, *B*], se tiene que: en una solución de *g* litros al 15% de alcohol, *r* litros son alcohol; y en una solución de *h* litros al 6% de alcohol, *s* litros son alcohol.

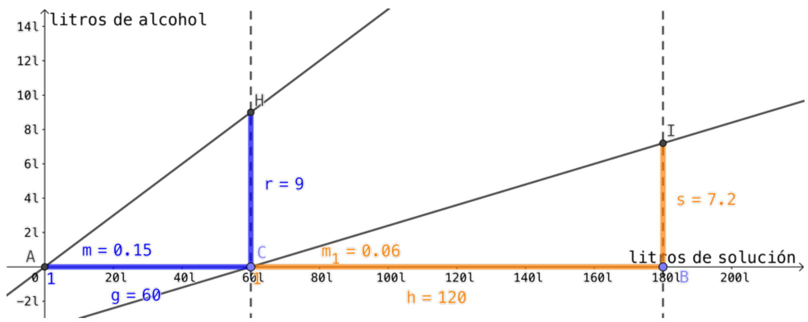


Figura 23. Los segmentos *r* y *s* representan los litros de alcohol que hay en cada solución.

La relación que analizó fue la de los litros totales de alcohol respecto a los litros de la primera solución $(g,\ r+s)$, al igual que el primer acercamiento. En consecuencia, obtuvo los mismos resultados en el análisis de la relación, la solución geométrica y la representación algebraica.

Con esto, el investigador, llevó a cabo una discusión con las parejas donde se compararon los dos acercamientos, y se observó que los elementos fijos y los dinámicos fueron los mismos. Es decir, en ambos, los elementos que se fijaron fueron lo que se asociaron a los porcentajes de alcohol, y los que tuvieron movimiento fueron los que se asociaron a los litros de solución. De esta manera, se les señaló que en una representación dinámica de un problema es importante decidir qué elementos fijan y qué elementos mueven, porque dependiendo de la decisión que tomen, deberán seleccionar las unidades adecuadas para los ejes.

Problema 4:

Un estanque se llena por una de dos llaves en 4 horas y la segunda lo llena en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren ambas llaves al mismo tiempo?

Este problema fue seleccionado por el investigador porque, además de ser uno de los más comunes en los libros de matemáticas I, no describe dos condiciones explícitas como los problemas anteriores. Por la información del problema, las parejas no tuvieron dificultad en coincidir con que las unidades adecuadas, para los ejes, serían horas para el eje horizontal y litros para el eje vertical. También, les fue fácil seguir los trazos que utilizó el investigador para representar los datos: trazó los segmentos *AB* y *AC* en el eje horizontal (Figura 24), asociados a los tiempos en que la primera y segunda llave llenan el estanque (valores fijos en el modelo), y trazó el segmento *AD* en el eje vertical, que se asoció al volumen del estanque (dato variable).

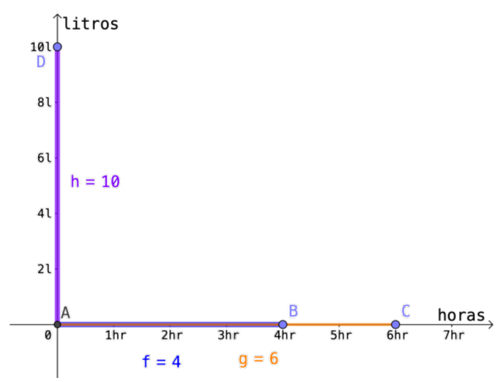


Figura 24. Representación de los datos.

Sin embargo, con esta representación no se podía extraer información significativa para resolver el problema. Ante ello, el investigador, hizo trazos auxiliares (Figura 25) y preguntó a las parejas sobre qué interpretación les podían dar con base en el enunciado. En la discusión grupal que se generó, identificaron que las pendientes de las rectas *AE* y *AF* estaban asociadas a las velocidades de llenado de la primera y segunda llave, respectivamente.

La información de la Figura 25 se interpreta como: una llave que tarda en llenar un estanque (o recipiente) de 10 litros en 4 horas, su velocidad de llenado es de 2.5 litros por hora; y una llave que tarda en llenar el mismo recipiente en 6 horas, su velocidad es de 1.67 litros por hora.

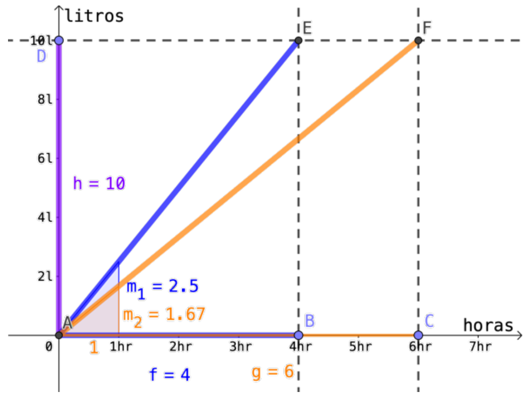


Figura 25. Trazos auxiliares y representación de la velocidad de llenado de cada llave.

El investigador agregó, a las observaciones hechas por las parejas, que un punto sobre el segmento AE o AF relacionaba la cantidad de litros llenados en x horas por la primera o segunda llave, respectivamente.

Como la velocidad y el volumen fueron conceptos asociados a los trazos auxiliares, el investigador decidió hacer el análisis de las relaciones tiempo-volumen y tiempo-velocidad. En este sentido, fue necesario trazar al segmento AG (G un punto sobre el segmento AB) para representar el tiempo en el que las llaves estuvieron abiertas (Figura 26).

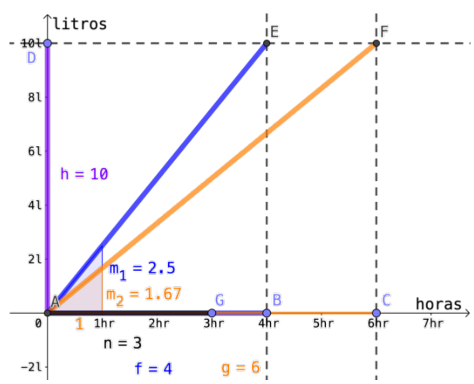


Figura 26. El segmento AG representó el tiempo en que las llaves estuvieron abiertas.

En este punto, se desprendieron dos acercamientos: (1) análisis del volumen respecto al tiempo y; (2) análisis de la velocidad respecto al tiempo. En la siguiente tabla se concentran los desarrollos de los acercamientos: análisis de las relaciones, soluciones geométricas y parametrizaciones.

<table>
<tr><td>Primer acercamiento: volumen-tiempo.</td><td>Segundo acercamiento: velocidad-tiempo.</td></tr>
<tr><td>En este acercamiento trazó los segmentos GH y GI (o segmentos q y r) para representar la cantidad de litros que han vertido la primera y segunda llave en n horas (Figura 27a).

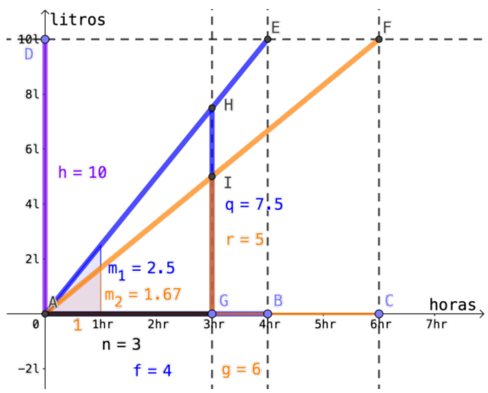


Figura 27a. Representación del volumen.</td><td>Aquí trazó el segmento AH, cuya pendiente (m_3) estuvo determinada por la razón del volumen del estanque y las horas que vertieron agua ambas llaves (Figura 27b). Es decir, la pendiente del segmento AH representó la velocidad a la que se llena el estanque cuando las dos llaves están abiertas.

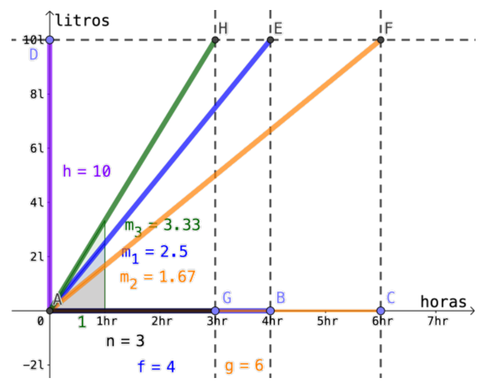


Figura 27b. Representación de la velocidad total.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de relaciones.</td></tr>
<tr><td>Con base en el modelo de la Figura 27a, definió en la segunda vista gráfica el punto $J = (n,\ q + r)$, que relacionaba los litros de agua vertida por las dos llaves en n horas, y analizó el lugar geométrico que describía (Figura 28a). En la Figura 28a, el punto J indica que se han vertido 12.5 litros en 3 horas cuando las dos llaves están abiertas.</td><td>Para analizar la relación entre el tiempo que las llaves están abiertas y la velocidad con la que vierten agua, definió el punto $I = (n, m_3)$ en la segunda vista gráfica (Figura 28b). En la Figura 28b, el punto I indica que el estanque se llena en 3 horas si se le vierten 3.33 litros por hora.</td></tr>
</table>

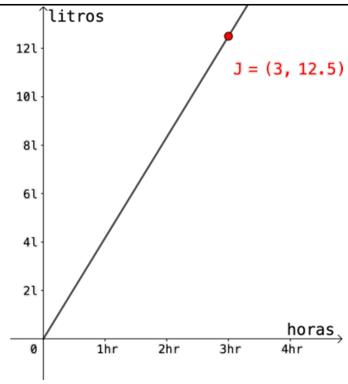


Figura 28a. Lugar geométrico descrito por el punto $J = (n,\ q + r)$.

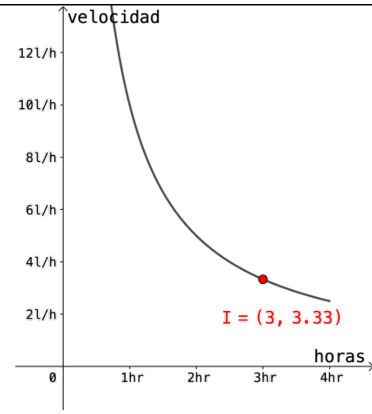


Figura 28b. Lugar geométrico descrito por el punto $I = (n, m_3)$.

Solución de los acercamientos geométricos

La solución en el modelo la obtuvo cuando la ordenada de punto J fue 10 (Figura 29a), ya que era el volumen del estanque –representado por la longitud del segmento h–. Por lo tanto, la respuesta al problema estuvo dada por la abscisa de J o la longitud del segmento AG: en 2.4 horas las llaves llenan el estanque.

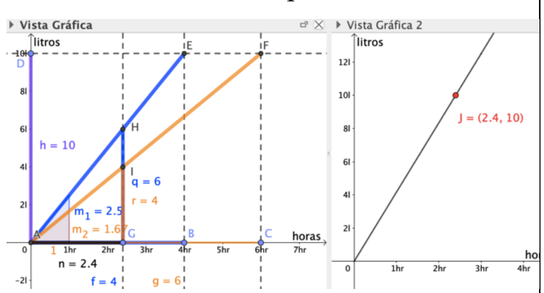


Figura 29a. Solución geométrica a través de analizar el volumen.

Como el objetivo fue hallar el tiempo en que se llena el estanque cuando las dos llaves están abiertas, buscó la posición del punto I en que su ordenada fuera 4.17, pues es el valor que se obtiene de sumar las velocidades (pendientes) con las que vierten el agua las llaves. La respuesta se observa en la abscisa del punto I (Figura 29b).

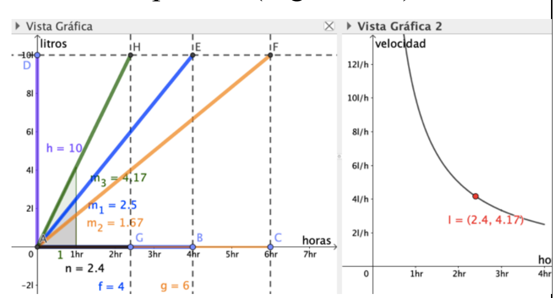


Figura 29b. Solución geométrica a través de analizar las velocidades.

Parametrización.

El lugar geométrico generado por $J = (n, q + r)$ lo parametrizó como $y = 2.5x + 1.67x$, donde $x = n$, $q = 2.5n$ & $r = 1.67n$. Sin embargo, las pendientes eran

La parametrización del lugar geométrico descrito por $I = (n,\ m_3)$ fue $y = \frac{h}{x}$, donde $x = n$ & h es el volumen del estanque. La valores dependientes de h (capacidad o volumen del estanque); si h variaba, las pendientes también. Entonces la parametrización la expresó como $y = \frac{h}{4}x + \frac{h}{6}x$.

Gráficamente, la solución estuvo en la intersección de la curva parametrizada y la recta $y = h$ (Figura 30a).

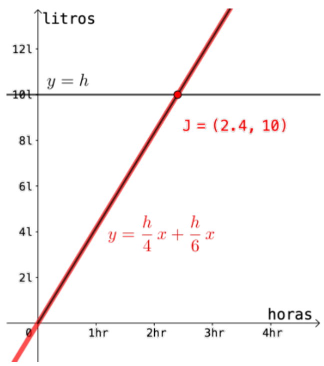


Figura 30a. Intersección de la curva parametrizada y la recta $y = h$.

Y la formulación y solución de la ecuación asociada al modelo fue:

$$\frac{h}{4}x + \frac{h}{6}x = h$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x = 1$$

$$x = \frac{24}{10} = 2.4$$

El resultado coincidió con la solución del modelo.

solución geométrica, entonces, estuvo dada por la intersección de la curva parametrizada y la recta $y = m_1 + m_2$ (Figura 30b).

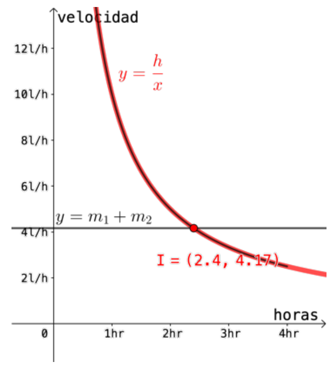


Figura 30b. Intersección de la curva parametrizada y la recta $y = m_1 + m_2$.

La formulación y solución de la ecuación asociada al modelo fue:

$$\frac{h}{x} = m_1 + m_2$$

Expresando a las pendientes o velocidades en términos de los datos del problema, la ecuación a resolver fue:

$$\frac{h}{x} = \frac{h}{4} + \frac{h}{6}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$x = 2.4$$

El resultado coincidió con la solución del modelo y la del otro acercamiento.

Una vez que el investigador mostró los dos acercamientos derivados del mismo modelo, fue posible contrastarlos e identificar que geométricamente había tanto una relación de proporción directa como en una de proporción inversa y, también, dotar de sentido a las ecuaciones que se formularon, pues cada término de la del primer acercamiento expresó volumen, y la del segundo, velocidad.

Comentarios del desarrollo de los problemas del bloque 2.

Aunque el desarrollo de los problemas del bloque 2 fue guiado, las representaciones dinámicas y sus respectivas exploraciones también fueron realizadas por las parejas. Las preguntas planteadas por el investigador no solo ayudaron a que las parejas pudieran construir modelos geométricos y dinámicos de los problemas, sino que fueron puntos de partida para discutir entre todo el grupo las ideas mostradas en los acercamientos. Y las discusiones sirvieron para que se fueran apropiando de los recursos que ofrece GeoGebra y aprendiendo estrategias que permitieran explorar y resolver los problemas. En este sentido, desarrollar los problemas, a través de las fases, jugó un papel importante, porque permitió seguir los procesos e ideas de forma ordenada. En la Tabla 1 se muestran las ideas principales de los procesos de solución de cada problema que se llevaron a cabo con el uso de GeoGebra durante este bloque de problemas.

Tabla 1. Ideas principales que se desarrollaron en cada problema.

Problema 1	**Problema 2**	**Problema 3**	**Problema 4**
Analizar la relación de los elementos o conceptos de cada condición por separado: esto significó, en el problema, analizar la forma en que se relacionaba geométricamente un número que excedía en seis a otro y, que al duplicarlo, equivaliera al menor. Esto implicó representar	Analizar la equivalencia de dos condiciones mediante la razón: se observó en este problema que una forma de analizar cuándo la edad de Carlos equivaldría al doble de la de Mauricio fue mediante analizar la razón, cuando diera 2, se cumpliría la equivalencia. Asignar a los ejes unidades	Desarrollar dos acrcamientos para el mismo problema a partir de cambiar las unidades asignadas a los ejes: asociarle unidades de porcentaje o de litros de alcohol al eje vertical, implicó desarrollar representaciones distintas de los datos del problema. Identificar los elementos fijos y variables en el	Involucrar trazos auxiliares en el modelo que permitan explorar y resolver el problema con al menos dos acercameintos distintos: representar los datos del problema no fue suficiente, se necesitó trazar un segmento auxiliar que permitiera analizar la cantidad llenada en el estanque después de

gráficamente el lugar geométrico de cada relación (Figuras 3.5a y 3.5b).	específicas: modelar las edades de Mauricio y Carlos y analizarlas mediante la razón, implicó asociarle unidades a los ejes adecuadas al contexto del problema.	modelo: a pesar de representar el porcentaje como longitudes de segmento en un modelo o como pendientes en el otro, fueron elementos fijos, y la cantidad de alcohol fue un elemento que variaba en ambos modelos.	un tiempo trancurrido *x*. Comparar los acercamientos: comparar los lugares geoméricos de los dos modelos que se presentaron ayudó a analizar el tipo de relación que hay entre los elementos del problema.

Estas ideas fueron clave para que las parejas puedieran plantaer diferentes acercameintos en la resolución de los problemas propuestos en el bloque 3. Además, como cada problema expresaba un contexto diferente, identificaron formas de representar e interpretar geométricamente los conceptos o elementos involucrados.