Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional
Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

# EXPRESIONES DE GENERALIZACIÓN ALGEBRAICA EN EDADES TEMPRANAS. UN ESTUDIO LONGITUDINAL CON ESTUDIANTES DE 10 A 12 AÑOS

Tesis que presenta:

**Genny Rocío Uicab Ballote**

Para obtener el grado de:

**Doctora en Ciencias**

en la especialidad de:

**Matemática Educativa**

Directores de la tesis:

**Dra. María Teresa Rojano Ceballos**

**Dra. Montserrat García Campos**

Ciudad de México Agosto, 2021

## Agradecimientos

A la Dra. María Teresa Rojano Ceballos y a la Dra. Montserrat García Campos por sus aportaciones y recomendaciones académicas para el desarrollo del trabajo de investigación y por el apoyo personal brindado durante la estancia de doctorado.

A la Universidad Autónoma de Yucatán y al Programa para el Desarrollo Profesional Docente por el apoyo y la beca otorgada para realizar los estudios de doctorado.

# Índice

# Índice de Tablas

# Índice de Figuras

# Abreviaturas

| | |
|---|---|
| Comp. | Compilador |
| ed. | edición |
| ed. orig. | edición original |
| Ed. | Editor |
| Eds. | Editores |
| et al. | y otros |
| etc. | etcétera |
| Inc. | Incorporation |
| p. | página |
| pp. | páginas |
| p. ej. | por ejemplo |
| Vol. | Volumen |

**Resumen.** El proyecto de investigación que se presenta en este documento tiene como propósito el estudio de las expresiones de generalización que producen estudiantes de 10 a 12 años, apoyados en sus experiencias y conocimientos previos, sin enseñanza o entrenamiento en tareas de generalización. Se enfatizan el proceso de generalización y alcance de la generalización algebraica que se identifican en tales expresiones.

Se parte de la premisa que la generalización es inherente al pensamiento algebraico y expresar la generalidad matemática, aún incipiente, contribuye a la adquisición del lenguaje algebraico. El proceso de generalización de acuerdo con Mason (1989, 1996) consiste en una espiral continua de acciones: *manipular* ejemplos particulares (primera acción), que permitan *obtener sentido de* lo que ocurre en ellos (segunda acción), a fin de *articular* generalidades (tercera acción) y expresarlas en alguna forma matemática útil. Respecto a las expresiones de generalización, existen varias formas de registro que permiten apreciar la generalidad que los estudiantes comunican (Mason et al., 1999). Antes de la notación alfanumérica, los estudiantes suelen expresar la generalización algebraica mediante el lenguaje natural.

Los resultados muestran que los estudiantes en edades tempranas pueden formular expresiones concisas de generalización algebraica mediante una combinación de lenguaje natural con símbolos aritméticos.

Palabras clave: generalización algebraica, edades tempranas, lenguaje natural.

**Abstract.** The purpose of the research project presented in this document is to study the expressions of generalization produced by students aged 10 to 12, supported by their previous experiences and knowledge, without teaching or training in generalization tasks. The generalization process and the scope of algebraic generalization identified in such expressions are emphasized.

The premise is, generalization is inherent in algebraic thinking, and expressing mathematical generality, still incipient, is important because it is conceived to contribute to the acquisition of algebraic language. The generalization process according to Mason (1989, 1996) consists of a continuous spiral of actions: manipulation of particular examples (first action), to getting a sense of what happens in them (second action), to articulate generalities (third action) and express them in some useful mathematical form. Regarding the expressions of generalization, there are several forms of registration that allow seeing the generality that the students communicate (Mason et al.,1999). Before alphanumeric notation, students usually express algebraic generalization through natural language.

The results show that students at early ages can formulate concise expressions of algebraic generalization through a combination of natural language with arithmetic symbols.

Keywords: algebraic generalization, early ages, natural language.

# Introducción

El interés de esta investigación se centra en el proceso de generalización y las expresiones de generalización algebraica que producen estudiantes de 10 a 12 años durante la resolución de tareas matemáticas que promueven generalización. Para la resolución de las tareas los estudiantes se basan solamente en sus experiencias y conocimientos previos, no cuentan con entrenamiento en tareas de generalización.

De acuerdo con Mason, Graham y Johnston-Wilder (2005) cada estudiante desde que inicia la escuela tiene la capacidad de abstraer y generalizar a partir de casos particulares. De modo que, resulta de gran importancia orientar esa cualidad hacia la generalización matemática (Mason, 1996), lograr que la usen y desarrollen en un contexto de números y relaciones para dar lugar al pensamiento algebraico (Mason, 2008).

Asimismo, expresar la generalización que se reconoce es un proceso que contribuye al desarrollo y adquisición del lenguaje algebraico. De modo que, cuando los estudiantes comunican las regularidades que observan en tareas matemáticas de generalización, es referencia del trabajo algebraico, aún principiante, que ellos producen (Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1999).

El lenguaje algebraico se caracteriza por su notación alfanumérica, sin embargo, esta investigación se basa en una perspectiva que no hace énfasis en dicha notación, sino en las expresiones de generalización algebraica que pueden producir los estudiantes de manera incipiente, en formato escrito y verbal, con base en sus conocimientos previos de aritmética adquiridos durante sus cursos escolares anteriores, sin haber recibido enseñanza ni entrenamiento previo en tareas de generalización.

Para dar cuenta de los objetivos de investigación se organiza el contenido del presente documento en siete capítulos.

En el Capítulo I se presenta la problemática de investigación que concierne a las dificultades de los escolares de educación secundaria para transitar de un pensamiento aritmético hacia un pensamiento algebraico. Las dificultades reportadas proporcionan pautas para explorar si cierto tipo de actividad algebraica puede ser accesible a estudiantes de educación primaria y así, contribuir a una transición hacia el estudio formal del álgebra desde edades tempranas.

En este capítulo también se describen los antecedentes, mediante los cuales se proporciona un panorama general de investigaciones en torno al desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas, especialmente, desde aquellas contribuciones enfocadas en la generalización algebraica distinguiendo aquellas que provienen de algunos investigadores cuya trayectoria en esta línea de investigación es de más de diez años.

En el Capítulo II se presenta un referente respecto a las expresiones de generalización que suelen producir estudiantes en edades tempranas al resolver tareas de generalización matemática. Se reconoce el lenguaje natural y las respuestas genuinas de los estudiantes en la comunicación de sus expresiones de generalización.

En el Capítulo III se proporciona el marco de referencia, el cual se basa en las contribuciones de John Mason respecto a la capacidad de generalizar que poseen los estudiantes. Mason (1996) opina que, expresar la generalidad es un proceso que se corresponde con una espiral continua de acciones denominadas manipular, obtener sentido de y articular. Dicha espiral consiste, a grandes rasgos, en la *manipulación* de ejemplos particulares para *obtener sentido de* lo que está ocurriendo con dichos ejemplos, con el fin de dirigir ese sentido hacia la *articulación* de generalidades y expresarlas en alguna forma matemática útil.

Respecto a las expresiones de generalización, es importante hacer notar que no sólo las expresiones simbólicas son de naturaleza matemática (Mason et al., 1999). Se considera que tanto las formas simbólicas como las verbales representan medios para expresar la generalidad y, por lo tanto, se consideran algebraicas, aunque se reconoce que para ciertas tareas matemáticas es imprescindible una forma simple y concisa de registrar.

Se considera que el desarrollo del lenguaje algebraico es un proceso. Lo esencial en ese proceso es tratar de expresar aquellas regularidades que se perciben en las actividades de generalización matemática, por lo tanto, el trabajo algebraico surge en los estudiantes cuando logran expresar la generalización que identifican en las tareas de generalización. De manera que, se reconoce la importancia que los estudiantes traten de expresar esas ideas algebraicas, aunque éstas no posean la notación alfanumérica.

En el Capítulo IV se describe el diseño de las tareas de generalización que se aplicaron a los estudiantes. Están organizadas en cuatro bloques: el Bloque I se conforma de secuencias figurales-numéricas, el Bloque II de secuencias numéricas y los Bloques III y IV de problemas en contexto. Las tareas se rigen por una regla de generalización que corresponde a la relación entre dos variables y, es precisamente el registro de la expresión de dicha regla, que permitirá apreciar el alcance de la generalidad algebraica en los estudiantes. También, se describen en el Capítulo IV el tipo de estudio, los participantes y la aplicación llevada a cabo.

En el Capítulo V se presenta el análisis de las secuencias figurales-numéricas y numéricas y en el Capítulo VI, el análisis de los problemas en contexto. El análisis se realizó por estudiante para poder identificar las manifestaciones de generalización en cada individuo; y se organizó por bloque, debido a que las tareas de cada bloque presentan características comunes.

En el Capítulo VII se proporcionan las conclusiones y reflexiones finales. Los resultados de esta investigación dan cuenta no sólo de la capacidad de generalización que poseen los estudiantes, sino también de la facultad que tienen para producir expresiones precisas de generalización algebraica.

En el tránsito por la espiral, en la acción manipular, los estudiantes pueden identificar las regularidades que observan en los casos particulares y distinguir aquello que cambia y cómo cambia, lo que a su vez los lleva a encontrar generalizaciones cercanas. Inicialmente, los estudiantes suelen proceder por conteo y de forma recursiva, pero en la medida en que identifican características relevantes, algunos obtienen sentido de generalidad y logran articular una regla de generalización que les permite encontrar generalizaciones lejanas. Proporcionar términos lejanos, a partir de los términos dados, da cuenta en ellos de su capacidad para reconocer el comportamiento de las variables y establecer la relación de correspondencia que se define en cada tarea matemática.

Respecto a las expresiones y el alcance de generalización algebraica, se muestra que, mediante los cálculos aritméticos y el lenguaje natural o idiosincrásico, algunos estudiantes pueden representar la generalización que perciben proporcionando expresiones exactas y sofisticadas.

Por último, se incluyen los Anexos A, B, C y D, cada uno de ellos corresponde a un bloque de tareas. En cada anexo se proporciona el resumen de resultados de cada una de las tareas pertenecientes al bloque correspondiente.

# Capítulo I

## Razonamiento algebraico en edades tempranas

En este capítulo se describe la problemática de investigación que refiere, a grandes rasgos, acerca de las dificultades de los escolares de educación secundaria para transitar de un pensamiento aritmético hacia un pensamiento algebraico. A raíz de las dificultades reportadas en diversas investigaciones surgen estudios que proporcionan pautas para explorar cierto tipo de actividad algebraica accesible a estudiantes de educación primaria, de manera que, se pueda contribuir a una transición hacia el estudio formal del álgebra desde edades tempranas, referente en el cual se ubica el problema y propósito de esta investigación.

### 1.1 Problemática de investigación. Dificultades en el tránsito de la aritmética hacia el álgebra

Durante las últimas décadas del siglo XX, las investigaciones en torno al álgebra estuvieron enfocadas principalmente en los escolares de educación secundaria y los resultados mostraron las dificultades que tienen para transitar de un pensamiento aritmético hacia un pensamiento algebraico (Kieran, Pang, Schifter y Fong, 2016)[1]. Algunas dificultades se

[1] Todas las traducciones de las referencias bibliográficas en inglés, citadas en todo el documento, son responsabilidad de la autora.

atribuyen a que varios cursos de álgebra empiezan con el uso de letras como objetos matemáticos y, posteriormente, se procede con las operaciones que involucran dichos objetos. No se genera un vínculo entre la aritmética y el álgebra, por lo tanto, los estudiantes no tienen oportunidad de construir conexiones explícitas entre esos dos dominios (Kieran y Chalouh, 1993).

Diversas investigaciones realizadas a partir de la década de los ochenta, como los trabajos desarrollados por Matz (1980); Herscovics y Kieran (1980); Booth (1981, 1982); Filloy y Rojano (1984, 1989) entre otros, dieron cuenta de cómo el arraigo al pensamiento numérico influye en la interpretación y uso de las letras y expresiones en las etapas iniciales del aprendizaje del álgebra (Filloy, Puig y Rojano, 2008).

En efecto, en la aritmética, la actividad matemática radica en hallar respuestas numéricas particulares, mientras que en álgebra se trata de establecer relaciones y expresarlas de forma general y concisa. Una razón para producir expresiones generales en álgebra es poder usarlas como *reglas de procedimiento* para resolver y dar solución a diversos problemas (Booth, 1988). Aunque las respuestas a ciertos problemas pueden ser numéricas, lo importante en álgebra es la expresión general y la manipulación matemática de dicha expresión.

Ciertamente, los estudiantes de secundaria tienen conocimientos de conceptos y habilidades algebraicas, sin embargo, con frecuencia no pueden aplicarlos en situaciones de resolución de problemas; tampoco parecen comprender muchas de las estructuras que subyacen a los conceptos y procedimientos. Entonces, para cubrir esa falta de comprensión, probablemente, los estudiantes recurren a memorizar reglas y procedimientos (Kieran, 1992). A menudo, llegan a creer que esta actividad representa la esencia del álgebra.

Aunado a ello, Thorpe (1999) refiere a que, en algunos libros de texto el álgebra suele ser presentada como una colección de trucos, lo que no permite el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. En cambio, es necesario estimular en ellos la capacidad de analizar y profundizar las situaciones en un contexto matemático para razonar cómo se están manipulando los elementos matemáticos, de tal manera que, puedan generar conclusiones relevantes que, además, logren comunicar claramente.

Lodholz (1990) hace notar que, la expresión “transitar de lo aritmético hacia lo algebraico” sugiere que existe algo entre la aritmética y el álgebra, es decir, algún contenido que cierra la brecha entre la aritmética de la escuela primaria y el álgebra de la escuela secundaria. Bajo esa idea, dicho autor hace notar la importancia de un currículo deseable en álgebra. No obstante, un problema que surge de manera inmediata es pensar en el álgebra como un curso o una secuencia de cursos llamados preálgebra, los cuales suelen, simplemente, extender durante un periodo mayor de tiempo los temas presentados en un curso tradicional de álgebra (Herscovics y Linchevski, 1994).

Desde la postura de Kieran y Chalouh (1993), lo que se debe tener en consideración como prealgebraico es aquella área de aprendizaje matemático en la que los estudiantes construyen su álgebra a partir de su aritmética, es decir, construir significados para los símbolos y operaciones del álgebra en términos de su conocimiento de la aritmética. Aunado a ello, Linchevski y Herscovics (1994) destacan la importancia de tomar en consideración aquellos obstáculos cognitivos que deben superarse para transitar de la aritmética hacia el álgebra.

Varias dificultades que presentan los estudiantes reflejan el modo en que se les ha enseñado desde la primaria, por ejemplo, el uso del signo igual que generalmente enfatiza la noción de operación-resultado (Kieran, 1981; Kieran y Sfard, 1999); el no poder restar un número mayor a uno menor que suele enseñarse como una regla; la multiplicación que suele presentarse como suma repetida; etc., es decir, se enfatiza la instrucción aritmética para obtener resultados numéricos de operaciones que involucran números y medidas particulares, pero cuando posteriormente se introducen las letras como símbolos para las variables, estas son mal interpretadas al tomar el lugar de números particulares (Schielmann, Carraher y Brizuela, 2011).

Desde la perspectiva de Kaput (1999), el álgebra escolar que se ha enseñado y aprendido, desde hace más de un siglo, como un conjunto de procedimientos desconectados de otros saberes matemáticos y del mundo real de los estudiantes ha generado dificultades en su comprensión. Asimismo, Kaput interpreta el hecho de simplificar expresiones algebraicas, resolver ecuaciones y aprender reglas para manipular símbolos como una imagen tradicional del álgebra.

Otro aspecto, que conlleva a los estudiantes a tener dificultades para transitar de la aritmética hacia el álgebra, es el lenguaje propiamente algebraico al que no le encuentran sentido y que los lleva a asignar valores numéricos a las letras, o hacia la generalización incorrecta de ciertas propiedades (Castro, 2012). Los alumnos suelen aprender las reglas algebraicas, pero no necesariamente entienden los símbolos, percibiendo el álgebra como un sistema abstracto, sin conexión con la realidad y vacío de significado, es decir, no hay comprensión del lenguaje algebraico en sus aspectos sintáctico y semántico (Esquinas, 2009). Por ello, de acuerdo con Kaput (2000), es importante tener en consideración el aspecto lingüístico del álgebra desde edades tempranas.

El lenguaje algebraico, si se compara con el dominio de un idioma, requiere el uso repetido durante un tiempo prolongado para dominarlo. De hecho, el lenguaje que se aprende en la infancia es sin acento y está integrado a los patrones de pensamiento de cada individuo. De manera que, el aprendizaje del álgebra debe integrarse al aprendizaje de otras ramas de la matemática, ya que para aprender un idioma las personas necesitan usarlo para expresar algo significativo para ellos, como las relaciones cuantitativas que surgen dentro de las matemáticas (p. ej. en aritmética y geometría) y fuera de ellas cuando son usadas para modelar los fenómenos del mundo (Kaput, 2000).

Para ir concluyendo, se puede decir que, la necesidad de establecer un puente entre la aritmética y el álgebra en un enfoque tradicional se plantea de tal modo que, el puente aparece hacia el final de la aritmética y el comienzo del álgebra. Pero la transición de la aritmética hacia el álgebra implica conocimientos y habilidades desarrolladas, previamente, que permitan entender los conceptos algebraicos. Por lo tanto, se sugiere que la aritmética sea considerada como parte del álgebra (Schielmann et al., 2011).

Finalmente, las diversas dificultades manifestadas por escolares de educación secundaria han proporcionado referentes para investigar el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas, en la expectativa de contribuir a una transición adecuada hacia el estudio formal del álgebra. En el marco de esta perspectiva, a continuación, se describen algunos antecedentes teóricos que ponen en contexto el problema de investigación y orientan el propósito de este trabajo.

## 1.2 Antecedentes

Estos antecedentes están organizados de forma que proporcionan un panorama general de investigaciones en torno al desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas. Especialmente, desde aquellas contribuciones enfocadas en la generalización algebraica, destacándose aquellas que provienen de investigadores con trayectoria, en esta línea de investigación, por más de diez años.

### 1.2.1 Álgebra en edades tempranas

Varias investigaciones revelan que los estudiantes en edades tempranas, de 6 a 12 años, deberían estar expuestos a actividades algebraicas a la par que desarrollan sus habilidades aritméticas. Hay evidencia de cómo diversos niños conjeturan, argumentan y justifican ciertas tareas matemáticas que promueven en ellos el desarrollo de ideas algebraicas (Blanton y Kaput, 2005; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006, Cooper y Warren, 2011; Tanişli, 2011; Rivera, 2018).

El desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de edades tempranas no es un planteamiento nuevo; en China y Rusia, por ejemplo, en los años 50 y 60 fueron introducidas actividades algebraicas en estudiantes de escuela elemental. En otros países de Europa y Norteamérica, la discusión de integrar actividades algebraicas en el currículo matemático en los primeros grados de educación empezó en los años 70. Sin embargo, es en las últimas dos décadas que ha habido un mayor énfasis y aceptación para desarrollar en los estudiantes nociones algebraicas en edades tempranas. Muestra de ello es que en Estados Unidos el National Council of Teachers of Mathematics (Consejo Nacional de Profesores de

Matemáticas) propuso introducir como parte del contenido matemático temas de álgebra en todos los niveles académicos. De hecho, es aceptado que para lograr la meta de "álgebra para todos", los estudiantes de escuelas primarias y secundarias deben tener experiencias que los preparen, adecuadamente, para un estudio formal del álgebra en grados posteriores (Cai y Knuth, 2011).

Cabe destacar que el estudio de nociones algebraicas en edades tempranas no significa mover el currículo de álgebra de la secundaria a la primaria, sino que se requiere, fundamentalmente, de un cambio que permita a la aritmética ser vista y enseñada de tal modo que, contribuya a la transición hacia el álgebra (Cai y Knuth, 2011).

Se considera importante mencionar que, se pueden encontrar en la literatura algunas concepciones del álgebra que fueron propuestas para guiar su enseñanza en la educación secundaria, entre ellas destacan las cuatro concepciones planteadas por Usiskin (1987): aritmética generalizada; estudio de procedimientos para la resolución de ciertos tipos de problemas; estudio de relaciones entre cantidades y estudio de estructuras. Por su parte, Kaput (1995) propuso cinco concepciones: álgebra como generalización y formalización de patrones y regularidades, especialmente, como razonamiento aritmético generalizado y como razonamiento cuantitativo generalizado; como manipulación de formalismos (tenues) guiados sintácticamente; como estudio de estructuras y sistemas abstractos a partir de cálculos aritméticos y relaciones; como estudio de funciones, relaciones y variación conjunta y, finalmente, álgebra como lenguaje de modelado. A su vez, Kieran (1996) planteó tres concepciones de acuerdo con las actividades que, típicamente, realizan los estudiantes en el marco del álgebra escolar de secundaria: actividades de generalizar, de transformar y de meta-nivel; siendo un rasgo característico en su propuesta, el uso de un álgebra simbólica.

De manera similar, para dar lugar al estudio de nociones algebraicas en edades tempranas se formularon concepciones respecto al álgebra y pensamiento algebraico; distinguiéndose las aportaciones de Kieran realizadas en 2004, con base en su propuesta de 1996, quien sugiere que el pensamiento algebraico de los primeros grados implica el desarrollo de formas de pensar, el cual se puede promover mediante las actividades meta-nivel. Tales actividades incluyen resolución de problemas, modelado, percepción de la estructura, estudio del cambio, análisis de relaciones, generalización, justificación, prueba y predicción; actividades en las cuales el álgebra puede usarse como herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra. Asimismo, estas actividades de meta-nivel son esenciales para las otras actividades del álgebra, las de generalizar y transformar. La distinción relevante de esta propuesta es el hecho de realizar actividades sin utilizar necesariamente álgebra simbólica; convirtiéndose en vehículos ideales para el desarrollo, en edades tempranas, de un pensamiento algebraico con un enfoque no simbólico o pre-simbólico.

También se distinguen las aportaciones de Kaput (2014), quien considera dos aspectos centrales del razonamiento algebraico en edades tempranas: la generalización y la expresión de generalizaciones en forma cada vez más sistemática hacia sistemas de símbolos convencionales; y el razonamiento guiado sintácticamente en sistemas de símbolos convencionales. Estos aspectos pueden promoverse a través de tres vertientes. La primera, involucra la construcción de generalizaciones a partir de razonamientos aritméticos y cuantitativos. Esta dirección es tomada por muchos educadores e investigadores como la ruta primaria hacia el álgebra. Incluye generalizar operaciones aritméticas y sus propiedades, así como razonar sobre relaciones más generales y sus formas, por ejemplo, propiedades del cero, conmutatividad, relaciones inversas, etc. Este es el corazón del álgebra como aritmética generalizada. Incluye la construcción del aspecto sintáctico del álgebra, a partir de la estructura aritmética, construyendo la idea básica de que se puede reemplazar una expresión por una equivalente. Implica observar las expresiones aritméticas de una manera nueva en términos de su forma, en lugar de su valor, cuando se realiza el cálculo de operaciones.

La segunda vertiente implica una generalización especial que involucra la noción de función, donde expresar la generalización puede ser considerada al describir una variación sistemática de elementos bajo algún dominio. Con frecuencia se comienza con actividades básicas de patrones considerándose precursores de otras formas de generalización matemática. Las ideas relacionadas con la de función, Kaput las considera enriquecedoras y de gran alcance, éstas incluyen, por ejemplo, diversos tipos de cambio, linealidad, razón, proporción, etc. En esta vertiente, también, se hace uso de una amplia gama de sistemas de símbolos que incluyen tablas, gráficos y otros.

La tercera vertiente que propone Kaput involucra la modelación como actividad algebraica. Un primer tipo de modelación es respecto a un número o cantidad específica, compete a problemas aritméticos que típicamente toman la forma de una ecuación, por lo tanto, la variable se considera como una incógnita en lugar de una variable que representa un conjunto de posibilidades. Un segundo tipo de modelación consiste en generalizar y expresar patrones y regularidades en situaciones o fenómenos que surgen fuera o dentro de las matemáticas. Aquí, el dominio de generalización es la situación que se está modelando; con frecuencia la expresión de generalización toma la forma de una o más variables que luego pueden expresar una función o clase de funciones. Finalmente, un tercer tipo de modelación involucra la generalización a partir de problemas aritméticos que no requirieren maniobras algebraicas para resolverlos, pero se abordan desde una perspectiva algebraica para generalizar y profundizar en las relaciones involucradas incluyendo comparaciones con otros modelos y otras situaciones.

### 1.2.2 Generalización y razonamiento algebraico

En relación con el apartado anterior, Kieran (1996, 2004) y Kaput (2014) refieren que las actividades de generalización son consideradas promotoras del razonamiento algebraico en edades tempranas. La generalización implica un nivel de razonamiento o comunicación más allá de los casos particulares, observando y exponiendo aquello que es común, centrándose en las regularidades y patrones, estructuras y relaciones que se identifican (Kaput, 1999). Asimismo, la generalización se concibe como un factor determinante en el desarrollo del pensamiento algebraico y la preparación para el aprendizaje posterior del álgebra (Cooper y Warren, 2011).

Existen diversos trabajos de investigación que se han enfocado en el estudio de la generalización algebraica. En los siguientes apartados se destacan las aportaciones de algunos investigadores, quienes han contribuido y dado continuidad a esta línea de investigación durante varios años, algunos de ellos con aportaciones iniciales con estudiantes de secundaria, pero cuyos trabajos recientes se enfocan en edades tempranas (entre 6 a 12 años). El trabajo de estos autores a lo largo de varios años les permite proporcionar diversas aportaciones, desde la construcción de aproximaciones teóricas, tipos de tareas de generalización, estrategias de los estudiantes en la resolución de diferentes tareas, etc. A continuación, se describen brevemente esos referentes.

### 1.2.3 Hacia una transformación del estudio del álgebra

Las contribuciones de Kaput en relación al estudio de la transición del pensamiento aritmético hacia el algebraico empiezan en la década de los ochenta. Sus primeros trabajos (Sims-Knight y Kaput, 1983) reportaron las dificultades que manifestaron los estudiantes al resolver problemas que requerían la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Dichas dificultades revelaron que fueron desarrolladas, de manera ingenua, a través de la experiencia previa de los estudiantes, tanto en su naturaleza cotidiana como en sus cursos de matemáticas, dando lugar a generalizaciones inapropiadas ante nuevas situaciones.

Posteriormente, en la década de los noventa, Kaput (1995) propuso la necesidad de “algebrizar” el plan de estudios de matemáticas de secundaria, considerando cinco concepciones del álgebra, desde aritmética generalizada hasta una extensión del álgebra que comprende funciones, modelado y estructuras abstractas. Sin embargo, su visión implicaba una reforma del estudio del álgebra a través de todos los años escolares. Las dos primeras concepciones del álgebra (aritmética generalizada y simbolización guiada sintácticamente) incorporan características centrales del razonamiento algebraico que impulsan a las demás; la tercera y cuarta (estructuras y sistemas abstractos) abordan temas matemáticos de relevancia para el álgebra; y la última (modelado) plantea al álgebra como una red de lenguajes. Todas las concepciones deben considerarse vinculadas y ricamente entretejidas, de ninguna manera separadas. Y cada una tiene diferentes aportes en la cognición humana y capacidades lingüísticas que permiten apoyar en diferentes tipos de experiencia, particularmente, en aquellas que acontecen en niños pequeños en sus formas primitivas y emergentes.

Para Kaput (1995, 1999), la generalización y la formalización son una característica intrínseca de gran parte de la actividad matemática. También, refiere que los sistemas matemáticos y los contextos en los que se puede promover la generalización y la formalización son ilimitados. Por lo que, reconoce dos fuentes de generalización y formalización: el razonamiento en el marco propio de las matemáticas y el razonamiento fuera de ellas, pero sujetas a matematización.

Asimismo, Kaput (1999) considera que, el objetivo de la generalización es establecer algunos objetos simbólicos formales que pretenden representar lo que se generaliza. También, considera importante hacer que las generalizaciones estén sujetas a un mayor razonamiento, quizás con la ayuda de cálculos aritméticos que se guían temporalmente por sintaxis y patrones, asociados con el sistema formal, más que con lo formalizado. Los actos de generalización y formalización gradual de la generalidad construida deben preceder al trabajo con formalismos; de lo contrario, los formalismos no tienen origen en la experiencia del estudiante. De hecho, considera que la generalización se expresa, en el inicio, mediante el lenguaje, la entonación y el gesto naturales, en lugar del simbolismo formal, ya que éste no está desarrollado sino tiene que desarrollarse (Kaput, 2000).

Para contribuir en el desarrollo de la generalización en edades tempranas, Kaput y Blanton (2000) sugieren como primera estrategia de *algebrización* tres tipos de cambio en el salón de clases: *algebrizar* materiales de instrucción, contribuir en la formación docente y crear una cultura de prácticas de enseñanza en el aula, de manera que, estos cambios promuevan en los estudiantes el desarrollo del pensamiento algebraico. Dichos autores realizan un estudio longitudinal trabajando con profesores de primaria durante los ciclos escolares 1997-1998 y 1998-1999; proyecto en el cual, conciben que una reforma del álgebra implica reconocer que la génesis del pensamiento algebraico se encuentra en las actividades matemáticas de los niños más pequeños, brindando oportunidades para que generalicen y formalicen su pensamiento (Kaput y Blanton, 2000). De tal modo que, en la medida en que los maestros de primaria sean capaces de desarrollar el pensamiento algebraico de los niños, se puede contribuir a una reforma del álgebra y, por tanto, a una reforma de las matemáticas en general.

Entre las tareas para estudiantes en edades tempranas, Blanton y Kaput (2002, 2004) sugieren aquellas, en las que el razonamiento algebraico se promueve a través de la generalización de patrones numéricos hasta la descripción de relaciones funcionales. El diseño de estas tareas se caracteriza por incorporar la aritmética en contextos que requieren de un pensamiento matemático más complejo como: saber representar datos; usar aritmética (números y operaciones) para modelar un fenómeno que involucre variación; examinar cómo ciertas perturbaciones en un fenómeno afectan un modelo; razonar algebraicamente sobre las formas de las secuencias numéricas; apoyar el uso apropiado y elección de operaciones; y finalmente, profundizar en el razonamiento aritmético para la comprensión de relaciones entre números. Los autores afirman, que este tipo de tareas ofrecen a los estudiantes una experiencia matemática, donde los procesos aritméticos y algebraicos interactúan simbióticamente.

Una de las formas que adopta el razonamiento algebraico es el de pensamiento funcional, el cual, Blanton y Kaput (2004, 2011) conceptualizan como aquel, que incorpora la construcción y generalización de patrones y relaciones, utilizando diversas herramientas lingüísticas y de representación; así como aquel, que involucra el tratamiento de funciones, objetos matemáticos útiles por su naturaleza misma. Por último, estos autores consideran que los niños de primaria son capaces de pensar funcionalmente, de manera que el desarrollo de este pensamiento en edades tempranas puede contribuir al éxito en matemáticas en los grados posteriores.

### 1.2.4 Naturaleza algebraica de la aritmética

Analúcia Schliemann, David Carraher y Bárbara Brizuela conforman un grupo de investigadores quienes desde 1998, han estado investigando y documentando el aprendizaje del álgebra en edades tempranas, desde prescolar hasta secundaria. A través de sus investigaciones han encontrado que la introducción del álgebra, como parte del plan de estudios de matemáticas en edades tempranas es factible. También, el uso de herramientas específicas de representación (tablas, gráficos, notación numérica, algebraica y ciertas estructuras del lenguaje natural) las cuales ayudan a los estudiantes a expresar relaciones funcionales entre números y cantidades, así como en la resolución de problemas algebraicos.

Asimismo, dichos autores conciben que la aritmética es parte del álgebra, como tal, los temas de aritmética deben abordarse como repertorio de ideas y conceptos más abstractos. De tal manera que, esto no solo enriquecerá la comprensión de la aritmética en los niños, sino que, también, permitirá sentar las bases para el aprendizaje significativo del álgebra avanzada en los años posteriores. Opinan que este cambio hacia una aritmética algebrizada, puede incluir enfoques diversos que posiblemente se superpongan, como la generalización aritmética; el paso de números particulares a números generalizados; la introducción de variables y covariación en problemas verbales; así como la reorganización de currículos que permitan unir e incluir una serie de temas, como el concepto de función (Schielmann et al., 2011).

En sus primeros trabajos, estos investigadores estudian acerca de la comprensión de conceptos algebraicos, relaciones y notación; investigan respecto a la comprensión intuitiva en estudiantes de segundo a cuarto grado de primaria y cómo ésta, evoluciona a través de experimentos de enseñanza diseñados para explotar la naturaleza algebraica de la aritmética y el razonamiento algebraico sobre cantidades.

Además, consideran que existe una evolución natural, desde la comprensión de las matemáticas como proceso hasta la comprensión de las matemáticas como estructura. Pero también, opinan que muchas de las dificultades que experimentan los estudiantes de álgebra y preálgebra son producto de su instrucción temprana en matemáticas, la cual suele centrarse en la resolución de problemas demasiado restringidas en lo aritmético; con un enfoque en la notación para registrar cálculos, en lugar de proporcionar una descripción de lo que se sabe acerca de un problema; y con un enfoque en el cálculo de valores, en lugar de las relaciones entre conjuntos (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000).

Igualmente, proponen un enfoque de álgebra como aritmética generalizada de números y cantidades, en el que el concepto de función tome un papel principal (Carraher et al., 2006). De tal manera que, consideran la transición de la aritmética al álgebra como moverse de un pensamiento que compete a relaciones entre números y medidas particulares hacia un pensamiento acerca de relaciones entre conjuntos de números y medidas (relaciones funcionales); y de calcular respuestas numéricas hacia describir relaciones entre variables. Para lograr esto, se requiere proporcionar una serie de problemas a los estudiantes para que puedan comenzar a notar y articular la generalidad que perciben entre variables. También hacen notar, que las tablas juegan un papel crucial en este proceso, ya que permiten registrar sistemáticamente diversos resultados y buscar patrones en ellos (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2001).

Entre las tareas que implementan este grupo de investigadores (Carraher et al., 2006; Schielmann et al., 2011) se pueden apreciar: a las operaciones aritméticas tratadas como funciones (especialmente las funciones aditivas y multiplicativas); la generalización como base del razonamiento algebraico y el uso temprano de notación algebraica (uso de letras para representar cantidades incógnitas y variables).

Opinan que en los entornos escolares el álgebra se introduce, comúnmente, sin enfatizar las funciones, además, la atención se centra en “resolver $x$” en las ecuaciones donde $x$ se trata como un número desconocido único. En cambio, una perspectiva funcional amplía el significado de las expresiones algebraicas al tratar a “$x$” como una variable, es decir, como un objeto que puede variar en su valor. Por lo que, se impulsa a los estudiantes a pasar de un pensamiento basado en operaciones con números específicos hacia un pensamiento de relaciones entre variables (Carraher, Martinez y Schielmann, 2008).

Respecto a la notación, este grupo de investigadores considera que la notación algebraica desempeña un papel importante, tanto en el aprendizaje del álgebra como en la resolución de problemas algebraicos (Schielmann et al., 2011), destacando que la notación puede servir como registro y guía para el pensamiento matemático de los estudiantes, como seguimiento de las diferentes partes de un problema o como ayuda para encontrar respuesta a un problema. Reconocen que los niños pueden combinar tanto la notación idiosincrásica como la convencional en sus representaciones. Sin embargo, hacen notar que la notación algebraica y convencional puede ser utilizada para fomentar su comprensión de los problemas y conceptos algebraicos (Schielmann et al., 2011).

De igual manera, reconocen que es necesario documentar cómo se va ampliando gradualmente en los niños, el repertorio simbólico que utilizan para expresar propiedades algebraicas generales, en virtud de que, los niños no se mueven repentinamente de una expresión sin símbolos a las representaciones escritas convencionales. Para finalizar, aunque en sus primeras investigaciones se identifica una introducción muy temprana de la notación algebraica, en recientes investigaciones admiten que las palabras son símbolos, los diagramas son símbolos y la representación matemática escrita es simbólica, se ajuste o no a las convenciones matemáticas.

### 1.2.5 Generalización algebraica

Luis Radford es un investigador cuyas aportaciones, respecto a la transición del pensamiento aritmético hacia el pensamiento algebraico, surgen en la década de los noventa. Como teórico sociocultural opina que para los estudiantes resulta difícil alcanzar una competencia adecuada en el complejo lenguaje simbólico del álgebra, por lo que, considera de interés el estudio de procesos que permiten a los alumnos dotar de significados a los símbolos y a las letras del lenguaje algebraico (Radford, 1999).

En relación con el desarrollo del pensamiento algebraico, reconoce que es difícil tener una definición precisa y concisa de este pensamiento, debido al amplio alcance de los objetos algebraicos (p. ej. ecuaciones, funciones, patrones, etc.) y sus procesos (p. ej. simplificar), así como las diferentes maneras posibles de concebir el pensamiento en general (Radford, 2010a).

Sin embargo, Radford (2001) manifiesta que el pensamiento algebraico, tal como lo conocemos hoy, ha sido un largo proceso de conceptualizaciones y reconceptualizaciones y que la evolución histórica de este pensamiento requirió traducciones a otros idiomas y nuevas interpretaciones culturales. De tal forma que, el pensamiento algebraico como lo identificamos en la actualidad es el resultado de interpretaciones matemáticas babilónicas por parte de los griegos, que a su vez fueron reinterpretadas y desarrolladas por los árabes en el siglo IX y luego por los matemáticos del Renacimiento en el siglo XVI. Las formas de trabajo y producción del siglo XVI, así como las nuevas formas de relaciones sociales, hicieron posibles nuevas ideas algebraicas (Radford, 2006). Por lo cual, opina que la investigación del desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes sólo puede llevarse a cabo en el contexto de las formas culturales del pensamiento matemático, históricamente constituidas y dirigidas en los salones de clase mediante la elección pedagógica de problemas y actividades (Radford, 2012).

Respecto a la generalización, considera, desde un punto de vista didáctico, que se debe tener en cuenta que ésta depende de los objetos matemáticos que generalizamos. La generalización no es una actividad libre de contexto. Por ejemplo, ¿cuáles son las características de la generalización basada en patrones geométricos-numéricos? Opina que hay dos elementos específicos en este tipo de generalizaciones. El primero trata de un aspecto lógico y el segundo está relacionado con el papel que juegan las representaciones externas (Radford, 1996).

Hace énfasis en no confundir las generalizaciones algebraicas con otras formas de tratar lo general. También, sugiere a los docentes estar equipados con estrategias adecuadas para que los estudiantes se involucren con los patrones en un sentido algebraico, por lo que propone la siguiente definición de generalización:

> “Generalizar un patrón algebraicamente se basa en la capacidad de captar un elemento común observado en algunos elementos de una secuencia S, siendo consciente de que este elemento común se aplica a todos los términos de S y poder usarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S” (Radford, 2010a, p. 42).

En otras palabras, la generalización algebraica de un patrón se basa en percibir algo común en lo local, que posteriormente se generaliza a todos los términos de la secuencia y sirve como referente para construir nuevos elementos que se encuentran fuera del campo perceptivo. Es la capacidad de notar algo general en lo particular y poder expresar dicha generalidad. De acuerdo con Radford (2010a), la generalidad algebraica se compone de diferentes capas, algunas más profundas que otras, por lo que la expresión de generalidad está vinculada a la forma de razonar y expresar lo general (p. ej. el sistema semiótico algebraico alfanumérico convencional, el lenguaje natural u otra forma).

La expresión directa de los términos de una secuencia requiere la elaboración de una regla. Pero no son las notaciones simbólicas las que hacen que el pensamiento sea algebraico, sino la forma en que se piensa respecto a lo general (Radford, 2008a).

De hecho, Radford destaca que hay muchas formas semióticas (además de la simbólica) para expresar la idea algebraica de incógnita, variable, parámetro, etc., considerando que esta perspectiva es importante para la Educación Matemática en virtud de que, *ontogenéticamente* hablando, hay espacio para una gran zona conceptual donde los estudiantes pueden comenzar a pensar algebraicamente, incluso, si aún no están recurriendo a signos alfanuméricos. Esta zona la denomina *zona de aparición del pensamiento algebraico* y opina que ha permanecido en gran parte ignorada, como resultado de una obsesión por reconocer lo algebraico sólo en lo simbólico (Radford, 2010b).

Para Radford (2014a), el saber algebraico no es una secuencia de signos que se ven sobre un papel, esos solamente son signos, no es saber; saber es algo diferente. Confundir los signos con el saber, sería como confundir una partitura con la música. El saber algebraico es una síntesis, histórica y culturalmente codificada de hacer y reflexionar en términos analíticos, sobre números desconocidos y conocidos. Considera que las formas matemáticas de razonamiento se han forjado y refinado a través de siglos de actividad cognitiva, por lo tanto, están lejos de ser triviales para los estudiantes (Radford, 2010b).

Hace notar que el saber reposa en una idea dialéctico materialista; dialéctica entre lo potencial y lo actual. Lo potencial es algo que puede suceder; y lo actual, la ocurrencia concreta de lo que potencialmente puede suceder. Así, el saber, es aquello que se actualiza en labor[2] conjunta con otros, al ser actualizado se vuelve objeto de conciencia y pensamiento para los estudiantes; y la transformación del saber, en objeto de conciencia, es lo que se concibe como aprendizaje (Radford, 2014a).

El aprendizaje puede ser teorizado como procesos de objetivación, es decir, aquellos procesos sociales mediante los cuales los estudiantes comprenden la lógica cultural con la que los objetos de conocimiento han sido desarrollados; con los que llegan a familiarizarse gradualmente mediante las formas de acción y pensamiento históricamente constituidos (Radford, 2008b). En los primeros trabajos de Radford, la objetivación aparece como concepto, más adelante, la establece como teoría. A grandes rasgos, la teoría de la objetivación trata de dar cuenta de la producción de saberes y de subjetividades en el aula de clases, a través de lo que Radford (2014a) llama una *lógica cultural de producción* por medio de dos conceptos, objetivación y subjetivación, mediante los cuales estudia el saber y el ser respectivamente.

La *lógica cultural de producción* está mediatizada por las formas de producción de saberes en las aulas de clase y por las formas de cooperación humana. Las formas de producción del conocimiento incluyen nociones acerca del saber, la verdad, emisión de juicios y pruebas que se fomentan en el aula de clases; mientras que, en las formas de cooperación humana se involucran los tipos de interacción con otros individuos (Radford, 2014a).

Radford (2014b) manifiesta que la teoría de la objetivación se articula alrededor de dos ejes: la educación en general; y la enseñanza y aprendizaje vinculados al saber y ser. El saber hace referencia al conocimiento y acto de conocer, es un proceso perpetuo de conocimiento, es un proceso sin fin, proceso siempre en movimiento. El ser, es la transformación perpetua del sujeto, el sujeto como proyecto social, político, cultural e histórico. Estos dos ejes están en

[2] En un sentido Hegeliano pero desarrollado por Leont'ev bajo el término "actividad". Radford concibe más adecuado el término labor, y considera que es la categoría ontológica fundamental de la teoría de la objetivación. La labor es una actividad humana, es algo que los maestros y estudiantes producen. Y que el saber se mueve de la pura posibilidad a lo actual, a través de una labor.

una relación dialéctica, en la enseñanza y aprendizaje ocurren los dos, la transformación del sujeto a través de lo que conoce y al mismo tiempo ese conocimiento transforma al sujeto en un sujeto nuevo, en un sujeto modificado.

En el marco de esta teoría, Radford (2012) argumenta que el pensamiento algebraico, en edades tempranas, se basa en las posibilidades del estudiante para comprender patrones en formas de covariación culturalmente evolucionadas y usarlas para encontrar términos lejanos no especificados. En contraste con los enfoques mentales de la cognición, Radford (2010c) opina que el pensamiento se considera una práctica social tangible materializada en el cuerpo (p. ej. a través de acciones cinestésicas, gestos), en el uso de signos (p. ej. símbolos matemáticos, gráficas, palabras escritas y habladas) y artefactos de diferentes tipos (reglas, calculadoras, etc.).

Destaca que el trabajo conjunto entre profesor y alumnos (desde una óptica de Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky, 1999) contribuye a nuevas operaciones intelectuales, las cuales no son inventadas por los niños o adquiridas a través de los adultos, sino que surgen a través de una serie de transformaciones cualitativas interconectadas. Asimismo, desde una visión epistemológica, opina que las variables (así como otros objetos algebraicos) pueden expresarse, genuinamente, a través de signos distintos a los alfanuméricos del simbolismo algebraico moderno convencional. Este punto de vista es totalmente compatible con el desarrollo histórico del álgebra (Radford, 2010c).

### 1.2.6 Generalización de patrones. Construcción, expresión y justificación

Ferdinand Rivera es un investigador joven en el ámbito de la generalización, sus estudios en esta dirección datan del 2006 llevados a cabo con estudiantes de secundaria y en años recientes (2013, 2015, 2018) enfocados en edades tempranas. Entre sus primeros trabajos, se reporta que la mayoría de los estudiantes de secundaria resuelven con éxito casos particulares de patrones figurales lineales, mediante estrategias de tipo visual y numérica, solo algunos usan álgebra para expresar relaciones correctas o generalizar una fórmula explícita (Rivera y Becker, 2009).

Rivera (2013) refiere el término *generalización de patrones* para aludir tanto las prácticas matemáticas de construcción, como a la justificación de fórmulas directas. Los patrones que se consideran en sus investigaciones competen a aquellos que promueven estructuras relacionales o alguna estructura matemática. Expresa que todas las estructuras deben ser coherentes, generales y precisas. Coherentes en el sentido de que hay una sola regla que puede determinar todos los resultados necesarios; generales, que pueden explicar el mayor número de términos posibles; y precisas en el entendido de que es factible predecir un término hipotéticamente respecto al término real. Siempre que sea posible, se debe trabajar con estructuras simples.

En relación con las estrategias de generalización visual, Rivera, Knott y Evitts (2007), en el marco de un proyecto de investigación con estudiantes de secundaria, reconocen que éstas permiten la producción de diferentes fórmulas equivalentes para el mismo patrón, lo que no se logra en la generalización numérica. Opinan que dichas estrategias permiten la discusión del significado de expresiones y fórmulas equivalentes. Respecto a los estudiantes que usan estrategias numéricas consideran que, aunque logran establecer fórmulas, algunos tienen dificultades para justificar la fórmula y sus partes.

Rivera (2013) menciona que cuando los estudiantes resuelven actividades de patrones figurales, se enfrentan al menos a dos dificultades. Primera dificultad, necesitan percibir de manera diferente lo que visualizan, de hecho, es percibir desde una perspectiva matemática. Existen diferencias entre la forma habitual de ver figuras, generalmente de forma icónica y la forma matemática con la que se espera que se miren (Rivera et al., 2007). Por ejemplo, los estudiantes pueden enfocarse en ciertas características de una secuencia figural, identificando lo que cambia o permanece invariante en cada término, lo que les permite reconocer similitudes y diferencias. Sin embargo, no es tan simple percibir a primera instancia las características que distinguen a una secuencia, debido a la predisposición humana o a la tendencia natural de prestar atención principalmente a lo que uno considera significativo ver, es un fenómeno al que denota *diversidad perceptual*, es decir, lo que una persona considera significativamente invariante o no, puede ser irreconocible o no trivial para otra.

Segunda dificultad, especialmente entre los estudiantes de primaria, ellos necesitan adquirir la práctica matemática de que un patrón con pocos elementos se comportará, muy probablemente, de acuerdo con una expresión general que logra ser extraída de la estructura matemática proporcionada a partir de los elementos cercanos y que luego se proyectará a elementos lejanos. Esta práctica se concibe como la necesidad de una *explicación de regularidad*, relativa a la *fase de estructuración* de alto nivel, que sigue a la *fase concreta* de extensión del patrón (Rivera, 2013).

Para Rivera (2010), la generalización de patrones implica la coordinación de dos acciones interdependientes: (1) *acción abductiva-inductiva sobre los objetos*, que implica usar diferentes formas de contar y estructurar objetos discretos o partes de un patrón, de una manera algebraicamente útil; y (2) *acción simbólica*, que implica traducir (1) en forma de generalización algebraica. La abducción, tomada desde la visión de Charles Peirce, la considera como una hipótesis preliminar generada a partir de las características comunes que se pueden apreciar en los elementos de un patrón (Rivera, 2008). Existe una actividad de razonamiento en la que permean conjeturas, de modo que, se van construyendo abducciones parciales. Una abducción completa requiere un proceso combinado de abducción-inducción.

Las pistas de tipo perceptual proporcionan una posible fuente de afirmaciones abductivas. Cuando los estudiantes analizan los casos particulares de un patrón figural, suelen producir interpretaciones plausibles. Al principio, la abducción implica generar inicialmente una hipótesis o un rango reducido de hipótesis, que luego se someten a verificación a través de la inducción. La abducción es la fuente de ideas originales y, a menudo, está influenciada por conocimientos y experiencias previas; a diferencia de la inducción que corrobora una afirmación abductiva probándola en casos particulares, con la esperanza de que los posibles errores se corrijan a través de la validación de más casos (Rivera 2013).

Existen estudiantes que pueden emitir fuertes abducciones, éstas se caracterizan por ser simples, conservadoras, unificadoras y de gran comprensión. En la actividad matemática de generalización de patrones y en otros contextos matemáticos, una fuerte abducción es una condición deseada (Rivera 2013). El término *algebraicamente útil*, respecto a la generalización de patrones, consiste en la producción de una fuerte abducción que debe ser emitida en forma de expresión directa o fórmula concreta (Lee, 1996 citado en Rivera, 2013). Es importante mencionar que, las hipótesis abductivas proporcionan explicaciones o justificaciones que no se prueban. De hecho, proporcionan explicaciones o justificaciones que asignan ante todo responsabilidad causal.

Otros aspectos que va concretando Rivera (2015), en sus trabajos más recientes de investigación, son los factores que configuran el procesamiento de la generalización de patrones, los cuales influyen en la construcción, expresión y justificación de las estructuras interpretadas por los estudiantes. Dichos factores son los siguientes:

- *La naturaleza y fuentes de generalización*. Algunos estudiantes se centran en las relaciones invariantes prestando atención a lo que ocurre en cada término; mientras que otros tienden a concentrarse en sus métodos o procedimientos, en vez de los objetos mismos.

- *Tipos de estructuras*. Dependiendo de la edad existen ciertos tipos de estructuras que suelen construir los estudiantes, influenciados por lo que encuentran significativo y relevante.

- *Atención o conciencia de la estructura*. La atención puede ser orientada a través del número suficiente de términos que se proporciona en una secuencia. También, en la variedad de tareas que se proponen, incluyendo aquellas en las que sólo se proporciona un caso particular bien definido, donde el foco principal de atención de los estudiantes está dirigido hacia la búsqueda de la estructura del patrón a generalizar.

- *Representación de las generalizaciones*. Representar se refiere a comunicar, expresar y transmitir explícitamente en algún medio (o medios) reconocibles, en forma y contenido, desde expresiones aproximadas, idiosincrásicas y no estructuradas, hasta expresiones exactas, sofisticadas y estructuradas.

- *Contextos en la generalización*. Es importante cuidar la combinación de contexto y cálculo para que los estudiantes expresen una adecuada generalización. Una aportación de los contextos (Ellis, 2007 citado en Rivera, 2015) es la evolución conceptual en los estudiantes, la cual resulta de trabajar primero con patrones numéricos (conjunto discreto) y después en contextos de relaciones cuantitativas (conjunto continuo) para desarrollar principios generales, más poderosos, relacionados con la linealidad.

En edades tempranas, los estudios de investigación empírica que desarrolla Rivera (2018) sobre generalización de patrones, describen principalmente el papel de los factores cognitivos, mencionados previamente, que suelen estar presentes en los estudiantes al generalizar patrones figurales y numéricos. El autor expresa que no existe un camino único u óptimo para que un estudiante produzca una generalización exitosa, lo que lleva a considerar diversos caminos que dependen en gran medida de cómo ellos interpretan las características de un patrón (forma, propiedad figural o numérica, relaciones, etc.), especialmente de cómo procesan esas características. Sin embargo, refiere que, en edades tempranas, existen tres tipos de razonamiento inferencial involucrados en la construcción y justificación de la generalización de patrones: abducción, inducción y deducción cerrada; en esta última, tanto la regla establecida por abducción e inducción, los elementos conocidos, así como la extensión del patrón, se utilizan como hipótesis para justificar una conclusión.

Existen diversos aspectos que pueden ser objeto de estudio en el contexto de la generalización algebraica en edades tempranas, algunos de estos se aprecian en este apartado. En esta investigación, es de particular interés el estudio de las expresiones de generalización que producen los estudiantes cuando resuelven tareas que promueven generalización. En el siguiente capítulo se explica sobre este tema.

# Capítulo II

## Expresiones de generalización algebraica

Se parte de la premisa que, expresar la generalidad es un proceso que contribuye al desarrollo y adquisición del lenguaje algebraico. De modo que, cuando los estudiantes comunican las regularidades que observan en tareas matemáticas de generalización, es referencia del trabajo algebraico, aún principiante, que ellos producen (Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1999).

### 2.1 Notación alfanumérica del lenguaje algebraico

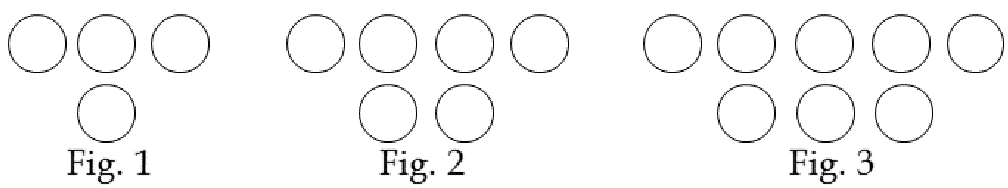
Una característica del lenguaje algebraico es la notación alfanumérica, lo que genera posturas acerca del rol que juegan los signos en el pensamiento algebraico, sobre todo en edades tempranas, sin experiencias en el uso de la notación algebraica. Wagner (1983) relata la siguiente anécdota al introducir literales simbólicas:

> El tema de la sesión fue enteros consecutivos. La profesora intentaba preparar a los estudiantes hacia la secuencia $x$, $x+1$, ... empezando con un ejemplo numérico, por lo cual preguntó ¿cuál es el entero consecutivo que sigue después de 17? Un estudiante contestó, “18”. Considerando que la representación de añadir 1 podría ser un problema

para los estudiantes, la profesora sabiamente preguntó: ¿Qué tenemos que hacerle al 17 para llegar a 18?, "Anadir 1" contestaron. "Bien", alentó la profesora. "Ahora supongamos que usamos $x$ para representar un entero desconocido, ¿cómo podemos escribir el siguiente entero consecutivo después de $x$?, es decir, ¿cómo podemos representar el número que obtenemos cuando añadimos 1 a $x$?". Sin dudar, la respuesta fue "$y$" (Wagner, 1983, p.474). En el abecedario, la "$y$" es la siguiente letra después de la "$x$".

Cuando los estudiantes no tienen experiencias en percibir cantidades variables o usar símbolos que representen esas cantidades variables, es difícil que puedan atribuir, de manera espontánea, literales para representar sus expresiones de generalización.

En el marco de un proyecto de investigación realizado por Radford (1999), un grupo conformado por tres estudiantes de 14 años interpretaron "n" como se expone en el siguiente diálogo. La tarea que resolvieron corresponde a una secuencia geométrica-numérica, como se aprecia en la Figura 2-1. Dicha tarea fue resuelta después de un mes de que los estudiantes fueron introducidos a conceptos básicos de patrones.




¿Cuántos círculos hay
* en la parte superior de la figura n° 6?
* en la parte inferior de la figura n° 6?
* en total en la figura n° 6?

¿Cuántos círculos hay
* en la parte superior de la figura n° 11?
* en la parte inferior de la figura n° 11?
* en total en la figura n° 11?

¿Cuántos círculos hay en la parte superior de la figura n° "n"?
¿Cuántos círculos en total hay en la figura n° "n"?
¡Explicar la respuesta!

*Figura 2-1.* Secuencia geométrica-numérica presentada por Radford (1999) en un estudio de investigación con estudiantes de secundaria.

| | |
|---|---|
| Alumno 2: | Wow! [refiriéndose al total en la figura n° 11] esa era fácil. [Lee ahora la siguiente pregunta] ¿Cuántos círculos hay en la parte superior de la figura "n"? ¿Qué? [proporcionando la hoja con un gesto hacia sus compañeros] O.K. ¡Esto que lo haga otro! |
| Alumno 1: | ¿Cuántos círculos…? ¿Qué significa esto? |
| Alumno 2: | No sé. |
| Alumno 1: | ¿Cuál es la figura n? … ¿No es qué letra en el alfabeto? |
| Alumno 2: | Pregúntale al profesor. |
| Alumno 1: | [Contando las letras del alfabeto que ha escrito] Catorce, n es 14 pues es la catorceava letra del alfabeto ¿no es cierto? |
| Alumno 1: | ¿Cuántos círculos tendrá la fila superior de la figura 14? n es 14. |
| Alumno 2: | ¡No! ¡No es 14! |
| Alumno 1: | ¡Sí! ¡Sí es! |
| | En ese momento el profesor se aproxima al grupo. |
| Alumno 3: | ¿Qué es n? |
| Alumno 2: | ¿Qué es n? No lo sabemos… |
| Alumno 1: | n es 14 pues es la catorceava letra del alfabeto ¿no es cierto? |
| Profesor: | n es un número cualquiera. |
| Alumno 2: | O.K. |
| Alumno 1: | No entiendo. |
| Profesor: | ¿No entiendes? |
| Alumno 3: | ¿Para cuál? [refiriéndose a las figuras] ¿éste, éste o éste? |
| Profesor: | No importa cuál. |
| Alumno 1: | 14 |
| Profesor: | Puede ser 14… |
| Alumno 2: | [Interrumpiendo] ¿No importa qué número? |
| Profesor: | [Continuando la frase anterior]...puede ser 18, puede ser 25… |
| Alumno 1: | ¡Ah! ¿Puede ser cualquier número? |
| Alumno 2: | El número que decidamos. |
| Alumno 1: | O.k, n puede ser euhh… |
| Alumno 2: | Doce |
| Alumno 1: | Sí |

De acuerdo con Radford (1999), los alumnos entienden la expresión "un número cualquiera" en el sentido del sistema semiótico de la aritmética, es decir, como un número arbitrariamente escogido, pero concreto.

En otra investigación, desarrollada por Schielmann et al. (2011), se entrevistó a dos alumnas de tercer grado de primaria. El problema por resolver corresponde a un problema de alturas, en el que se plantea que Martha es 3 pulgadas más alta que Alan. Durante la entrevista, el entrevistador e investigador (David Carraher) se centra en promover la expresión $x + 3$, dando lugar al siguiente episodio.

| | |
|---|---|
| David: | Bien, ahora, si no supiera la altura de Alan, entonces solo tendría que decir: "Bueno, no la conozco así que voy a llamarla '$x$'…" |
| Melisa: | Podrías adivinarla. |
| Jennifer: | Se podría decir eso, pero, bueno, solo te diría que digas cualquier número. |
| David: | ¿Por qué no uso una $x$ y digo que cualquiera que sea lo voy a llamar $x$? |
| Ambas: | [Perplejas] |
| David: | ¿Les gusta esa idea o se siente extraña? |
| Jennifer: | Es extraña. |
| Melissa | No, más o menos… |
| David: | [Hablándole a Jennifer] ¿Se siente raro? |
| Jennifer: | Sí, porque tiene que tener, tiene que tener un número. Porque…todas las personas en el mundo tienen una altura |

Para Jennifer no resulta apropiado usar la letra $x$ que representa cualquier altura y describir la altura de Alan, ya que Alan no puede tener cualquier altura, sino una altura determinada (Schielmann et al., 2011). El entrevistador plantea otro ejemplo, con la intención de que Jennifer acepte usar la letra $x$ para representar una cantidad variable.

| | |
|---|---|
| David: | OK. Bueno… lo voy a hacer un poco diferente. Tengo un poco de dinero en mi bolsillo. |
| David: | Les voy a decir lo siguiente: voy a sacar una moneda de un peso, ¿OK? Y voy a dártela por ahora. Tengo un poco de dinero aquí [en la billetera], ¿podemos llamar $x$ a lo que tengo? Porque, sea lo que sea, es eso, es la cantidad de dinero que tengo. |
| Jennifer: | No se puede llamar $x$ porque… si tienes algo de dinero allí, no puedes simplemente llamarlo $x$, porque tienes que contar cuánto dinero [hay] ahí adentro. |
| David: | Pero ¿qué pasa si no lo sabes? |
| Jennifer: | Lo abres y lo cuentas. |

Jennifer insistió en que no sería adecuado referirse al dinero en la billetera como $x$, ya que ésta contenía una cantidad fija y determinada de dinero (Schielmann et al., 2011).

Aunque los estudiantes presentan dificultades para la notación algebraica; Carpenter, Franke y Levi (2003), citados en Blanton et al. (2017), argumentan que la transición del lenguaje natural a la notación simbólica no es tan difícil si los estudiantes ya perciben y entienden las cantidades variables que son representadas.

De hecho, en la directriz de Kaput (2014) se conciben las expresiones de generalización orientadas sistemáticamente hacia sistemas de símbolos convencionales. Y en la dirección de Carraher et al. (2006) y Schielmann et al. (2011), ya se distingue el uso temprano de notación algebraica, es decir, el uso de letras para representar cantidades incógnitas y variables, en virtud de que, consideran que dicha notación influye en el aprendizaje del álgebra. Estos últimos autores, afirman que los estudiantes como Jennifer y Melissa pueden hacer la transición de letras como incógnitas, hacia letras como variables. En el caso de Jennifer, expresan que con el tiempo se redujo su conflicto, al pensar que la cantidad de dinero en la billetera hipotéticamente podría asumir más de un valor. A continuación, la explicación de Jennifer para la letra $x$:

Jennifer: La cantidad de dinero que hay ahí es… cualquier cantidad ahí dentro. Y después… si quieres agregar 5 centavos, si era como…imagina que son 50 centavos, le añades 5 más y entonces serían 55 centavos.

Radford (2018), de igual manera, sugiere un simbolismo que incluye al alfanumérico, aunque también involucra los sistemas semióticos no convencionales, como el lenguaje natural, los gestos, el ritmo y otros recursos semióticos a través de los cuales considera que los estudiantes dan significado a la generalidad algebraica. No obstante, para promover el simbolismo alfanumérico se hace necesaria la intervención del docente quien introduce el uso de letras y orienta su significado (ver p. ej. Blanton y Kaput, 2004; Radford, 1999; Carraher, Schliemann y Schwartz, 2013), ya que pasar de una notación aritmética a una notación algebraica, implica un cambio conceptual que requiere ser desarrollado paulatinamente.

Desde la perspectiva de Mason (1999, 2018), la notación matemática formal se debe trabajar de forma gradual, a la velocidad individual de quien aprende. Los estudiantes deben percibir que los símbolos se usan para expresar generalidades, pero sólo los emplearán en forma exitosa cuando estén listos para hacerlo y cuando perciban una necesidad de hacerlo (Mason, 1999). Asimismo, Mason destaca que es importante examinar el significado que los estudiantes le dan a las expresiones simbólicas.

Ciertamente, cuando los estudiantes resuelven tareas de generalización en las que las literales juegan el rol de variables, suelen usar las letras como una etiqueta para representar un objeto y no una cantidad. Esto debido a que, cuando se empieza a introducir en el aula el uso de las letras como símbolos matemáticos, éstas suelen usarse, justamente, como etiquetas, por ejemplo 8 pelotas (8 *p*), 10 manzanas (10 *m*), 20 metros (20 *m*) y esta connotación es la que suele influir posteriormente (Grimaldi e Itcovich, 2013). Wagner (1983) menciona que los símbolos literales pueden resultar fáciles de usar, pero difíciles de entender.

## 2.2 Expresiones de generalización algebraica no alfanuméricas

En el recorrido gradual hacia la notación algebraica es importante reconocer que, cuando los niños no tienen experiencias formales en tareas de generalización, recurren a su repertorio de conocimientos y experiencias previas para desarrollar representaciones que ellos consideran significativas, aunque no siempre sean las correctas. A través de esas respuestas genuinas transmiten la naturaleza de sus generalizaciones (Rivera, 2013).

Estas representaciones propias de los estudiantes, que no corresponden a representaciones convencionales o institucionales, son denominadas representaciones funcionales por Cortés, Hitt y Saboya (2014, 2016). Dichas representaciones están vinculadas al pensamiento espontáneo de los estudiantes cuando resuelven un problema o una situación problema. De tal modo que, los estudiantes suelen producir representaciones espontáneas que usualmente no es posible catalogar dentro del repertorio de representaciones institucionales; sin embargo, son las que ayudan principalmente a los estudiantes en la resolución de las tareas solicitadas (Hitt, Saboya y Cortés, 2017; Hitt 2020). De hecho, los autores opinan que existe una tendencia a no considerar las representaciones espontáneas como elementos sustanciales para hacerlas evolucionar hacia las representaciones institucionales.

También, es importante mencionar que, cuando los niños se enfrentan por primera vez a tareas de generalización, ver alguna regularidad puede ocurrir pasado un determinado tiempo y expresarlo por escrito suele ser más complicado que comunicarlo oralmente (Mason, 1999).

Para Mason et al. (1999) existen varias formas de registro que permiten apreciar la generalidad que los estudiantes expresan. Y en la medida en que son expuestos a tareas de generalización no sólo van desarrollando su capacidad para generalizar, sino que pueden producir expresiones sofisticadas de generalización (Mason, 1999). Para dicho autor, no solo las expresiones alfanuméricas son de naturaleza matemática, sino que reconoce que las expresiones verbales también se consideran algebraicas. Antes de los símbolos alfanuméricos, los estudiantes suelen expresar lo que perciben en las tareas de generalización mediante el lenguaje natural. A continuación, algunos ejemplos de manifestaciones de generalización en edades tempranas.

En un estudio llevado a cabo por Warren (2005a), se les presentó a niños con edad promedio de 9 años el siguiente patrón figural ♡♡♡□♡♡♡□. Los niños con instrucción del docente registraron en una tabla la cantidad de corazones y cuadrados para 4 repeticiones, es decir, 3, 6, 9, 12 para la columna etiquetada como ‘corazones’ y 1, 2, 3, 4 para la columna etiquetada como ‘cuadrados’. Se les preguntó a los niños cuántos cuadrados y cuántos corazones habría para cien repeticiones. Una niña contestó “cien cuadrados y ciento ocho corazones” y cuando se le preguntó por qué, apuntó la última entrada de su tabla y mencionó que hay ocho corazones más que rectángulos (en la cuarta repetición se puede notar que hay 12 corazones y 4 cuadrados por lo que, se tienen 8 corazones más que cuadrados). Cuando se le preguntó a la clase si la respuesta era correcta, varios alumnos estuvieron de acuerdo con dicho resultado, sin embargo, una niña que estaba en desacuerdo, apuntando la tabla respondió: “hay trescientos corazones y cien rectángulos porque tres veces uno es tres, tres veces dos es seis, tres veces tres es nueve”.

Otro ejemplo que se presenta a continuación pertenece al estudio denominado Generalizing to Extend Arithmetic to Algebraic Reasoning (GEAAR) desarrollado por Blanton y Kaput (2004). La tarea se denomina “Ojos y colas” y se aplicó a estudiantes de primaria, posterior a sesiones previas de tareas de generalización. El objetivo del proyecto era que los profesores transformaran el enfoque de la aritmética, hacia oportunidades para que los estudiantes construyeran patrones, conjeturaran, generalizaran y justificaran relaciones matemáticas.

*Tarea: Ojos y colas*

*Supongamos que estuvieras en un refugio de perros y quisieras contar todos los ojos de los perros que se encuentran ahí. Si hubiera un perro ¿cuántos ojos habría? ¿Y si hubiera dos perros? ¿Tres perros? ¿100* *perros? ¿Ves alguna relación entre el número de perros y el número de ojos? ¿Cómo describirías esta relación? ¿Cómo sabes que dicha relación funciona?*

*Supongamos ahora que quieres encontrar cuántos ojos y colas había en total. ¿Cuántos ojos y colas hay para un perro? ¿Dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Cómo describirías la relación entre el número de perros y el número de ojos y colas? ¿Cómo sabes que dicha relación funciona?*

Entre los resultados se encontró que los estudiantes de 6 y 7 años representaron con un punto cada ojo y con una marca larga cada cola. Algunos de ellos expresaron el patrón como, “contar por dos” o “cada vez que agregamos un perro más, obtenemos dos ojos”. Los datos se calcularon hasta para 10 perros. Algunas expresiones en estudiantes de 8 y 9 años evidenciaron una relación multiplicativa “tienes que duplicar el número de perros para obtener el número de ojos”. Y en estudiantes de 10 a 12 años se encontraron expresiones del estilo “no importa cuántos perros tengas, puedes multiplicarlo por 2".

Kaput, Carraher y Blanton (2014) reconocen que el lenguaje natural sirve como punto importante de partida hacia la notación simbólica y el aprendizaje del álgebra, porque les permite comenzar a entender y describir conceptos algebraicos usando un lenguaje conocido.

## 2.3 Tareas matemáticas que promueven generalización

Existen diferentes tareas matemáticas para promover el desarrollo de la generalización algebraica en edades tempranas; y motivar a través de ellas las expresiones de generalización. En esta investigación se proponen la resolución de secuencias figurales-numéricas, numéricas y problemas en contexto. A continuación, se describen las características que distinguen a estas tareas.

### 2.3.1 Secuencias y patrones

Una secuencia es un conjunto de elementos ordenados mediante un patrón o relación. Hay dos clases de secuencias que suelen explorarse en edades tempranas para propiciar la generalización: aquellas que se conforman de patrones de repetición y las que se conforman de patrones de crecimiento (Warren, 2005b; Warren y Cooper, 2006; Rivera, 2013).

Un *patrón de repetición* se concibe como aquella unidad discernible de repetición. La repetición del patrón forma la secuencia, es decir, la secuencia tiene una estructura cíclica que puede generarse por la aplicación repetida del patrón. Las secuencias que suelen trabajarse con los escolares pequeños (principalmente de prescolar a tercer grado) son figurales, mayormente geométricas, un ejemplo de ello se puede apreciar en la Figura 2-2.

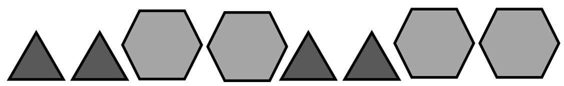


*Figura 2-2*. Secuencia conformada por un patrón de repetición geométrico, presentada en Rittle-Johnson, Fyfe, McLean y McEldoon (2013).

Este tipo de secuencias permite guiar a los estudiantes a moverse en un solo conjunto de elementos; conduciéndoles a distinguir la unidad de repetición (patrón); crear nuevas secuencias con la misma regla estructural; extender o continuar las secuencias (ya sea una o más unidades de repetición); o completar la parte faltante de la secuencia (al remover algunas piezas para que el estudiante las coloque acorde con la unidad de repetición). También, es posible mediante este tipo de secuencias encauzar a los estudiantes pequeños a establecer relaciones entre dos conjuntos, pero para ello se requiere mayor intervención docente.

Las secuencias que involucran *patrones de crecimiento* se caracterizan por tener unidades distinguibles llamadas términos y cada término depende del anterior o del valor numérico de la posición (Queensland Studies Authority, 2005). Pueden ser figurales o numéricas, los términos aumentan de forma progresiva siguiendo una determinada regla que determina el crecimiento. Tienen un nivel de dificultad mayor que las secuencias que involucran patrones de repetición, por lo que en la educación primaria están recomendados para los cursos de tercero a sexto grado. Dependiendo de la complejidad de la regla se incrementa la dificultad para resolverlas (Zapatera, 2018). En la Figura 2-3 se presenta un ejemplo de secuencia figural o geométrica, creciente (aumenta de forma progresiva) y lineal (porque la regla que lo rige es $2n$).

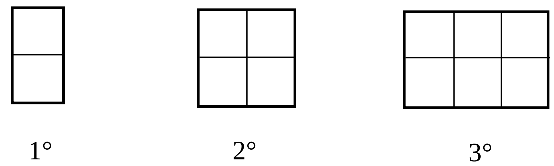



*Figura 2-3*. Secuencia conformada por un patrón de crecimiento, presentada en Warren (2009).

Las secuencias figurales son de interés en diversas investigaciones (Carraher, Martinez y Schielman, 2008; Böttinger y Söbbeke, 2009; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016) porque los patrones al ser visuales pueden conducir a encontrar la regla de generalización, expresándola de varias maneras dando oportunidad, incluso, a trabajar con expresiones equivalentes (Lee y Freiman, 2006; Villa, 2006; Rivera et al., 2007), por ejemplo, en la Figura 2-4 se muestran algunas formas en las que estudiantes de secundaria visualizaron el patrón figural presentado, proporcionando diferentes expresiones matemáticas equivalentes. Sin embargo, no cualquier forma visual es factible de expresar simbólicamente de manera inmediata, como en el inciso a) en la que se visualiza fácilmente la constante 3, pero no la expresión faltante que compete a $3n - 2$.

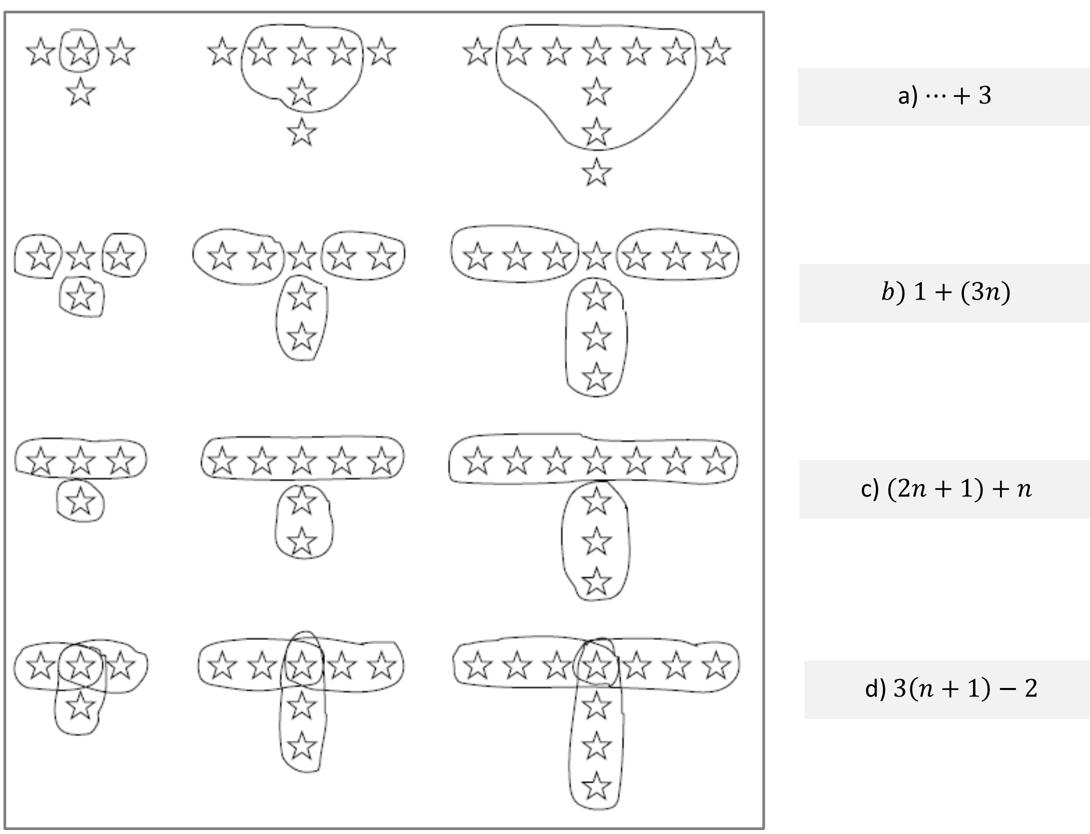



*Figura 2-4*. Algunas formas en que los estudiantes visualizaron el patrón creciente. Tomado de Lee y Freimann (2006).

En cuanto a las secuencias numéricas, el trabajo en edades tempranas se centra primeramente en encontrar el siguiente número de la secuencia y los estudiantes suelen hallarlo basándose del número anterior (Wilkie, 2014). Para encontrar la regla es necesario poner en juego otro tipo de habilidades visuales, así como habilidades numéricas y de abstracción (Villa, 2006). Cuando las secuencias numéricas corresponden a secuencias aritméticas, la técnica que suele usarse es el de *diferencias*, la cual es propia de la definición de secuencia aritmética (Zazkis & Liljedahl, 2002a). Las diferencias pueden darse entre los términos o entre cada término y su posición, a partir de ahí abstraer la regla que define a la secuencia. Por ejemplo, en la Figura 2-5 la diferencia entre dos términos consecutivos de la secuencia es 3.

$$\mathbf{2} \xrightarrow{3} \mathbf{5} \xrightarrow{3} \mathbf{8} \xrightarrow{3} \mathbf{11} \qquad \mathbf{14} \qquad \mathbf{17} \qquad \dots$$

*Figura 2-5*. Secuencia numérica presentada en Wilkie (2014).

Además de la diferencia entre términos para encontrar la regla que define a la secuencia, es necesario enfocarse en los elementos del conjunto posición (ver Figura 2-6). Mason et al. (2005) refieren a este enfoque de atención como reconocimiento de relaciones.

Diferencia entre términos

Valor de la posición

Valor resultante que corresponde al término, disminuido en 1

Regla

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $3(1)-1$ | $3(2)-1$ | $3(3)-1$ | $3(4)-1$ | | | | $3(n)-1$ |
| Término | **2** | **5** | **8** | **11** | **14** | **17** | **…** | |
| Posición | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | $n$ |

*Figura 2-6*. Referentes para encontrar la regla que define a la secuencia numérica. Elaboración propia.

Cuando se trabaja con secuencias es importante considerar que los estudiantes puedan conjeturar una regla verdadera con los conocimientos previos que poseen. Sin embargo, es importante mencionar que ninguna secuencia finita de elementos genera de manera única el siguiente término, por ejemplo, en la secuencia numérica 1, 2, 3, 4, 5, 6… el siguiente término puede ser 7 si la secuencia es definida por $a_n = n$, o bien 727 si la secuencia está definida por $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) + n$. Pero a simple vista, es más factible continuar la secuencia con el término 7, que con 727 (Zazkis y Liljedalh, 2002b).

### 2.3.2 Problemas en contexto hipotético

En los problemas en contexto hipotético, la situación que se plantea se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo del problema (Barrera y Santos, 2002). Este comportamiento no se basa en datos o información real o de laboratorio. Sin embargo, hay una intención en la organización de los datos para provocar que el proceso de solución responda a ciertos fines didácticos.

Estos problemas[3] se conforman de un texto informativo en el que se describe cierto evento a ser resuelto; se involucra algún contexto en el que se incluyen personajes, hechos, fenómenos, etc., que puedan ser interpretados por los estudiantes y cuya solución o dominio de la variable está delimitado por el contexto mismo. En la resolución, es de interés explorar las maneras en las que los estudiantes interpretan los datos involucrados en la situación, las representaciones que suelen usar y cómo establecen las relaciones entre las variables implicadas.

Carraher, Schielmann y Brizuela (2000) expresan que los contextos de naturaleza cotidiana suelen proporcionar referentes significativos para la resolución de tareas matemáticas. Inclusive, hacen referencia a que el rol que juega el estudiante en el contexto de la situación presentada (p. ej. situarse como cajero de una tienda, el nieto que ahorra dinero, el niño que compra en la tienda, etc.) en ocasiones puede contribuir a estrategias adecuadas de resolución.

También, estos autores refieren que las cantidades sirven como precursoras de las variables matemáticas, las cuales son componentes de las funciones (Schielmann, Carraher y Brizuela,

[3] En lo sucesivo, cuando se use la frase *problemas en contexto* o incluso solo la palabra *problemas* se referirá a problemas en contexto hipotético.

2011, p.133). Refiriéndose a Fridman (1991), estos autores destacan que, mediante la asignación de números a las cantidades, ya sea directamente ("toma 10 centímetros de cuerda") o a través del cálculo de la medición, los individuos producen cantidades medidas. Estas representaciones cuando se les da forma en la notación contienen información tanto acerca de la cantidad (a través de una unidad de medida), como acerca del número (cuántas unidades hay). Los autores opinan que, las medidas son objetos matemáticos especiales en actividades de la vida cotidiana.

Asimismo, los autores toman en consideración cómo los vendedores ambulantes manejan cantidades haciendo "matemática oral". Cuando calculan el precio de una cierta cantidad de artículos que venden, comienzan a partir del precio de un artículo y por lo general realizan sumas sucesivas de ese precio tantas veces como el número de artículos a ser vendido, sumando dinero con dinero y artículo con artículo (realizando operaciones sobre medidas de la misma naturaleza). Posteriormente, establecen una correspondencia de valores entre las diferentes medidas, por ejemplo, 3 cocos son 105, 6 cocos son 210. De manera que, los contextos cotidianos pueden crear condiciones que permitan a los estudiantes establecer relaciones entre las variables involucradas y no centrarse, únicamente, en los cálculos numéricos (Schielmann, et al., 2011).

Otros autores, como Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988), expresan que los problemas en contexto, por ejemplo, *Cada lápiz cuesta 6.5 pesos. Si deseo comprar 30 lápices ¿cuánto debo pagar?* suelen ser más difíciles de resolver por los niños que los problemas en formato numérico ($6.5 \times 30$), ya que el proceso de resolución de un problema en contexto requiere primero de una fase de comprensión del texto para dar lugar a la fase de solución. En la fase de comprensión, se procesa el texto y se crean representaciones y relaciones cuantitativas internas correspondientes a lo expresado. En la fase de solución, se transforman dichas relaciones cuantitativas que se representan tanto interna como externamente para llegar a una solución. Por lo general, en la fase de solución, el problema es traducido a una expresión simbólica y luego dicha expresión es resuelta.

Sin embargo, a pesar de la dificultad que implica la resolución de problemas en contexto, Mason (2018) manifiesta que los niños responden a desafíos que se perciben como accesibles e incluso alcanzables, pero que, desafortunadamente, a menudo la escuela contribuye a suprimir esta respuesta natural. Los niños se acostumbran a que les digan exactamente qué hacer, hasta el punto de la dependencia. Pero, en la resolución de problemas no se trata simplemente de obtener respuestas a tareas rutinarias, sino más bien desarrollar la capacidad y habilidades de los estudiantes ante tareas novedosas y exigentes que movilicen sus conocimientos.

Considerando los referentes proporcionados, a continuación, se plantea el problema de investigación.

## 2.4 Problema de investigación

El presente estudio, el cual incursiona en el ámbito del razonamiento algebraico en edades tempranas, tiene como propósito de investigación analizar el proceso de generalización y las expresiones incipientes que producen estudiantes de 10 a 12 años cuando resuelven tareas matemáticas de generalización, basándose solamente en sus experiencias y conocimientos previos, sin enseñanza o entrenamiento en tareas de generalización.

Aunque se comparte la postura de que una notación alfanumérica es característica del lenguaje algebraico, esta investigación se basa en una perspectiva que no hace énfasis en dicha notación, sino en las expresiones de generalización algebraica que pueden producir los estudiantes de manera incipiente en formato escrito y verbal, con base en sus conocimientos previos de aritmética adquiridos durante sus cursos escolares anteriores, sin haber recibido un entrenamiento en tareas de generalización.

De acuerdo con Mason, et al. (2005) cada estudiante desde que inicia la escuela tiene la capacidad de abstraer y generalizar a partir de casos particulares. De modo que, resulta de gran importancia orientar esa cualidad hacia la generalización matemática (Mason, 1996), lograr que la usen y desarrollen en un contexto de números y relaciones para dar lugar al pensamiento algebraico (Mason, 2008). Asimismo, para las expresiones de generalización, se debe permitir que fluya el lenguaje natural antes de introducir cualquier notación externa, así como tratar de interpretar las generalizaciones que los estudiantes expresan como punto de referencia para promover la notación alfanumérica.

Así, el interés de esta investigación consiste en analizar esas expresiones de generalización, *primitivas*, que producen los estudiantes y poder apreciar en ellos ese potencial para generalizar que refiere Mason (1996, 1999, 2014). También, son de interés el proceso de generalización hasta llegar a la expresión emitida, así como el tipo de registro que proporcionan los estudiantes. Para dar cuenta de ello, el marco de referencia compete a las aportaciones de John Mason, el cual se explicará con mayor detalle en el Capítulo IV.

Respecto a las tareas matemáticas de generalización, mediante las cuales se pretenden observar el proceso y obtener las expresiones de generalización algebraica por parte de los estudiantes, estas competen al diseño de secuencias figurales-numéricas, secuencias numéricas y problemas en contexto, las cuales están definidas por una regla de generalización que corresponde a la relación entre dos variables.

### 2.4.1 Objetivos de investigación

Los objetivos de investigación son:

1. Analizar y describir el proceso de generalización de los estudiantes durante la resolución de secuencias figurales-numéricas, numéricas y problemas en contexto.

2. Determinar el alcance de generalización algebraica en las expresiones producidas por los estudiantes al explicitar la regla de generalización que subyace a cada tarea matemática.

Las tareas se proponen en un orden estructurado que conlleva ir gradualmente de secuencias figurales-numéricas a problemas en contexto. Mediante las secuencias figurales-numéricas se pretende que los estudiantes pongan en práctica sus habilidades visuales y aritméticas.

Posteriormente, a través de las secuencias numéricas y los problemas en contexto de texto breve, con los datos numéricos organizados en tablas, se promueve que los estudiantes trabajen solamente con relaciones numéricas. Finalmente, se proponen problemas en contexto de texto extenso, promoviendo que los estudiantes establezcan las relaciones entre las variables, apoyados por el contexto. Los detalles de dichas tareas matemáticas se describirán en el Capítulo IV.

# Capítulo III

## Aportaciones teóricas de John Mason sobre generalización algebraica

Este trabajo de investigación se sustenta en las contribuciones realizadas por John Mason, durante más de tres décadas, respecto a la capacidad de generalizar que poseen los estudiantes; y cómo ésta, puede ser desarrollada mediante tareas matemáticas que conduzcan a los escolares a expresar la generalidad que observan. Para ir explicando los referentes que conforman las aportaciones de este autor, analizaremos la siguiente secuencia[4] tomada de Mason (1999).

Considérese la siguiente secuencia presentada horizontalmente, fila por fila:

$$\begin{array}{l} 1 \times 6 + 6 = 3 \times 4 \\ 2 \times 7 + 6 = 4 \times 5 \\ 3 \times 8 + 6 = 5 \times 6 \\ 4 \end{array} \qquad \text{(I)}$$

[4] El análisis y resolución de dicha secuencia es realizado por la autora de este documento.

Si nos preguntamos ¿qué sigue en la cuarta fila? Muy probablemente expresemos:

$$4 \times 9 + 6 = 6 \times 7 \qquad \text{(II)}$$

De acuerdo con Mason (1999), esto es posible porque uno experimenta una sensación de generalidad de cómo debería continuar el patrón. Mason et al. (2005) destacan que cada estudiante tiene la capacidad de abstraer y generalizar a partir de casos particulares; y que expresar la generalidad es natural y parte del ser humano.

Opina que la generalización es una raíz del álgebra y que los estudiantes deben realizar tareas de generalización desde la primera oportunidad para que esa capacidad natural pueda fortalecerse. Aquellos estudiantes que no tienen oportunidad de generalizar se encuentran en desventaja a medida que avanzan en la escuela (Mason, 2018). La manipulación de objetos –matemáticos– familiares es el comienzo para empezar a apreciar la estructura matemática que subyace en ellos, a partir de los cuales se espera que los estudiantes puedan, eventualmente, expresar la generalización que perciben (Mason, 1999).

Continuando con el análisis de la secuencia (I), se pueden proponer más filas de números y simplemente responder a una secuencia creciente, identificando y reconociendo ciertas características en ellas. Pero también se puede ir más allá preguntando por los números que conformarían determinada fila, por ejemplo, ¿cuáles serán los números de la fila doce o que inician con el número 12? Este es un ejemplo que promueve una generalización cercana y que suele caracterizarse por la intención de continuar la secuencia, dibujando o escribiendo los números, fila por fila, hasta llegar a la solicitada.

Construir una fila, cuyo número inicial sea mucho más distante que el número 12, por ejemplo 85, conlleva prestar mayor atención a los detalles y empezar a generar conjeturas para poder construir dicha fila. Los valores distantes promueven una generalización lejana, que se caracteriza por la necesidad de buscar una regla general, ya que proceder fila por fila resultaría engorroso.

La acción de completar más números ya sea física o mentalmente, sirve para aclarar y precisar el sentido de lo que está sucediendo, así como preparar el camino para la declaración de una regla general (Mason, 1989).

El proceso que conduce a la generalización de la secuencia (I), o cualquier otra secuencia, puede corresponderse con una espiral de acciones continuas, denominadas *manipular*, *obtener sentido de* y *articular* (Mason, 1996), que se describen a continuación.

### 3.1 Espiral de acciones en el proceso de generalización

La espiral de acciones (ver Figura 3-1), propuesta por Mason (1996), consiste en la *manipulación* de ejemplos particulares para *obtener sentido* de lo que está ocurriendo en ellos, con el fin de llevar este sentido hacia la *articulación* de generalidades y expresarlas en alguna forma matemática útil.

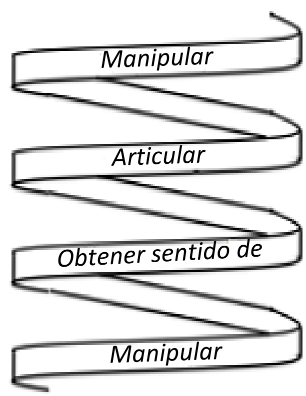



*Figura 3-1*. Espiral de acciones. Tomado de Mason, Graham y Johnston-Wilder (2005).

La *manipulación* (sea de objetos físicos, mentales o simbólicos) proporciona las bases para apreciar lo que está sucediendo, permitiendo detectar patrones, relaciones, generalidades, etc. Resulta útil hacer un ejemplo o incluso varios para detectar lo que está ocurriendo; esta práctica es algo natural y común. Además, es productiva, ya que los ejemplos son casos particulares de una situación más general (Mason, Burton y Stacey, 2010). Considerando la secuencia (I) presentada como ejemplo, la manipulación se lleva a cabo con las filas proporcionadas y creando nuevas filas de números para detectar las regularidades y diferencias.

Detectar lo que está sucediendo, permite *obtener sentido de* alguna característica o propiedad de los objetos que se están manipulando, lo que da lugar, a tener referentes de la estructura matemática que conlleva a la regla de generalización. Por ello, es importante proporcionar actividades a los estudiantes, que los involucren en identificar características con los casos particulares proporcionados y al crear nuevos casos, permitiéndoles reflexionar sobre aquello que van descubriendo. Asimismo, es necesario generar perturbaciones que conduzcan a la obtención de sentido, como ocurre en la secuencia (I) al solicitar los números de la fila que inician con el número 12, especialmente, con el número 85. Cuando se intenta generalizar, resulta necesario prestar atención a ciertos detalles, los cuales conducen a formular conjeturas, que en ocasiones suelen ser verdaderas.

Obtener sentido de las regularidades y diferencias que se observan, permite *articular* relaciones estructurales hasta obtener una articulación precisa; es articular la característica o propiedad que se está percibiendo y manifestarla como expresión de generalidad. Cuando esto ocurre, tal expresión se convierte en una conjetura confiable, la cual puede ser manipulada y usarse para encontrar otras propiedades; lo que permite continuar de forma ascendente en la espiral empezando un nuevo ciclo de ascenso. Mason (1989) refiere inclusive, que el proceso de abstraer en matemáticas ocurre en un cambio momentáneo de articular a manipular (en una nueva acción de manipular, al ascender).

La obtención de sentido va muy vinculada con la expresión de generalidad, la cual no desaparece cuando la expresión llega a ser objeto de manipulación. La expresión actúa como referente para hacer surgir evocaciones asociadas con ella. Por tal motivo, hay una gran diferencia cuando uno da cuenta de su propia generalidad, que tratar de traducir la generalidad de alguien más (Mason, 1989). Existen estudiantes que pueden manipular la generalidad expuesta por el profesor, pero no pueden explicar por qué hacen lo que hacen.

La articulación de una visión de generalidad, primero en imágenes o palabras y luego en expresiones cada vez más concisas utilizando símbolos, es un gran logro que sólo se consigue después de un gran esfuerzo cognitivo. Ahora bien, cuando la resolución resulta difícil y las conjeturas erróneas, es sensato regresar nuevamente a manipular nuevos ejemplos, cercanos y lejanos, para volver a ascender en la espiral. Esta acción de construir nuevos ejemplos para obtener sentido se conoce como *especialización*; los ejemplos que uno escoge o construye son especiales, en el sentido de que son instancias particulares de la situación general (Mason, 1980). Además, cuando uno construye sus propios ejemplos, a menudo lo conducen al reconocimiento de la estructura de generalización.

Mason et al. (2010) mencionan que estar atascado es algo natural, por eso sugieren *especializarse* hasta obtener sentido y lograr articular la generalización deseada. En ocasiones, el hecho de estar atascado puede favorecer al aprendizaje, siempre y cuando no predomine la frustración. Cuando se trabaja con estudiantes, es importante contribuir en dar pautas que les permitan desatorarse del obstáculo para que puedan obtener sentido y proseguir en la articulación de la generalización.

## 3.2 Atención

Para moverse en la espiral, entre las diferentes acciones de manipular, obtener sentido y articular, es necesario reflexionar respecto a la atención. Mason et al. (2010) hacen notar que lo que contribuye a la resolución de los problemas matemáticos son aquellos cambios de atención en el individuo.

Las personas pueden mirar sutil o fijamente una escena, situación, un póster, diagrama o ejercicio percibiendo el todo, pero al mismo tiempo reconociendo que hay componentes que conforman ese todo. El foco dominante de la atención suele centrarse en mirar primero desde una perspectiva holística, la cual conllevará a desencadenantes metonímicos que traerán a la mente posibles acciones (Mason et al., 2010). Para ejemplificar, préstese atención a la Figura 3-2, ¿qué se puede observar de manera inmediata?

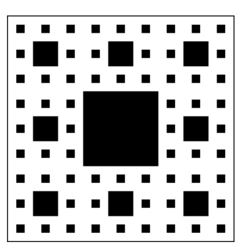


*Figura 3-2*. Fractal de Sierpinski.

Probablemente, uno observa un cuadro constituido por cuadrados negros de diferentes tamaños; percibiendo un cuadrado central de mayor tamaño, rodeado de cuadrados de menor tamaño (reconocimiento del todo). Sin embargo, el todo y cada una de sus partes se encuentran vinculados, lo que permitirá nuevas percepciones como, por ejemplo, que el marco que rodea al cuadrado mayor, ubicado en el centro, está formado por ocho imágenes (Figura 3-3) de características semejantes al cuadro principal. El reconocimiento del todo es determinante, es lo que permite mirar las partes que lo conforman, incluso, desencadenar el reconocimiento de las relaciones involucradas.

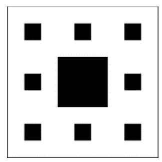


*Figura 3-3*. La imagen presentada es un componente de la Figura 3-2.

Cuando el foco de atención se centra en los detalles de discernimiento; se distinguen elementos, “esto no, aquello sí”, seleccionando partes del todo para una observación más minuciosa. Al centrar la atención se pueden resaltar algunas características como primer plano e ignorar otras como fondo (o segundo plano). Esta cualidad permite reconocer entre diferentes objetos, identificar sus características y detectar relaciones entre ellos (Mason, 2014).

En un trabajo reciente de Rivera (2018), se le solicitó a David, un estudiante de 7 años, que proporcionara la etapa 10 de la siguiente secuencia figural (Figura 3-4). Este suceso aconteció después de que David trabajara con patrones repetitivos y antes de que recibiera cualquier instrucción formal sobre patrones no repetitivos.

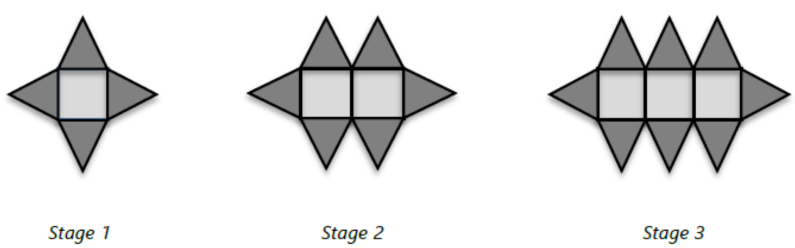



*Figura 3-4*. Secuencia figural presentada a David mediante material concreto.
Tomado de Rivera (2018).

Durante la entrevista se le solicitó a David construir las etapas 4 y 5 (ver Figura 3-5).

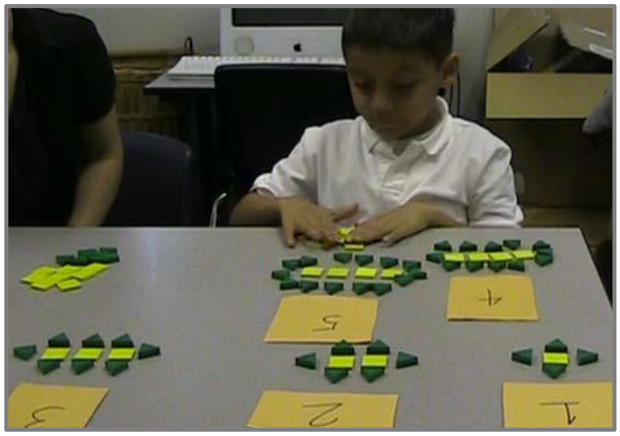


*Figura 3-5*. Construcción de las etapas 4 y 5. Tomado de Rivera (2018).

Posteriormente, el entrevistador le dijo:

Entrevistador: Ahora supongamos que nos saltamos pasos y construimos la etapa 10. ¿Cómo sería? [David dibujó su etapa 10 en una hoja de papel, ver Figura 3-6].

*Figura 3-6*. Construcción de la etapa 10. Tomado de Rivera (2018).

Al solicitarle que explique cómo supo lo que debía hacer, respondió:

David: Porque los copio de éste [apunta la etapa 3] porque los triángulos estaban como rodeando estos pequeños cuadrados, así que tengo éste [refiriéndose a la etapa 10].

Entrevistador: ¿Cómo sabías cuántos cuadrados poner ahí?

David: Porque quería que encajaran.

Cuando David construyó las etapas 4 y 5 (Figura 3-5), primero construyó bordes triangulares y luego agregó los cuadrados. En consecuencia, produjo etapas inconsistentes que le llevaron a una generalización incorrecta. David percibió el todo, vio una unidad completa que incrementaba en tamaño en cada etapa, pero no divisó lo detalles.

Sin detenernos en aspectos filosóficos o psicológicos, se puede decir que la atención no es algo material o tangible, sino que es parte de o reside en la mente (Mason, 1982); y por lo general, no somos conscientes de ella. Sin embargo, se puede hacer referencia a una "estructura de atención" y distinguirla en actividades matemáticas. Por estructura de atención se interpretan aquellas maneras en las que las personas prestan atención, incluyendo los cambios tenues y rápidos de atención que surgen durante la actividad matemática.

Con base en su experiencia, Mason (2004) sugiere cinco formas de atención: apreciación de la totalidad, discernimiento de detalles (características y atributos), reconocimiento de relaciones (parte-parte, parte-todo), identificación de propiedades y deducción a partir de las definiciones (los axiomas y las definiciones se expresan independientemente de los objetos particulares). A continuación, se presenta una descripción general de cómo se concibe la estructura de atención, mediante dichas formas y la conexión entre ellas.

### 3.2.1 Estructura de atención

Cuando se es confrontado con algo que no nos es familiar, la atención suele centrarse en la *apreciación de la totalidad* o en algunas partes del todo, sin identificar los detalles o las relaciones entre las partes. Pasado un breve momento o un período mayor de tiempo, los detalles pueden empezar a distinguirse y algunos aspectos o partes del todo suelen percibirse sobre el resto (Mason et al., 2005). Por ejemplo, ¿en qué se centra la atención cuando uno mira $\frac{3}{4}$? ¿Se percibe simplemente la fracción $\frac{3}{4}$, una operación de división a realizar, el resultado de la operación de la división, o algo adicional?

Si se logran *discernir los detalles*, se espera que, a partir de ellos se empiecen a *reconocer las relaciones* que están involucradas entre las partes o el todo con las partes. Las relaciones caracterizan lo que se quiere generalizar, por lo que deben imponerse en aquello que se percibe. Sin embargo, detectar relaciones o propiedades no siempre resulta fácil; porque éstas suelen estar en términos de una acción y dicha acción opera sobre aquello que se percibe, es decir, no suelen ser explícitas y están involucradas en las diferentes partes del todo. Las relaciones detectadas, finalmente, conducen a establecer propiedades.

Prestar atención solo a los detalles, puede dejar atrapado a un individuo en detalles particulares. El movimiento flexible, de un lado a otro entre los detalles y las relaciones, conduce a la apreciación del todo y con sus partes (Mason et al., 2005).

Retomemos la secuencia (I), podemos prestar atención a las relaciones entre los números que se observan en las filas verticales (Ia), estas relaciones pueden conducirnos a encontrar filas horizontales consecutivas completando la secuencia de forma creciente, inclusive si se desea encontrar una fila relativamente distante. Por ejemplo, para encontrar los números de la fila 20 se puede proceder fila por fila para obtenerla. Sin embargo, este proceder no nos conducirá a la generalización de la secuencia. Ahora bien, si centramos la atención en las relaciones entre los números de las filas horizontales (Ib), éstas son las que nos llevarán a la generalización de la secuencia, pero para ello resultan útiles las relaciones entre los números de las filas verticales.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \times & 6 & + & 6 & = & 3 & \times & 4 \\ 2 & \times & 7 & + & 6 & = & 4 & \times & 5 \\ 3 & \times & 8 & + & 6 & = & 5 & \times & 6 \\ 4 & & & & & & & & \end{array} \quad \text{(Ia)} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \times & 6 & + & 6 & = & 3 & \times & 4 \\ 2 & \times & 7 & + & 6 & = & 4 & \times & 5 \\ 3 & \times & 8 & + & 6 & = & 5 & \times & 6 \\ 4 & & & & & & & & \end{array} \quad \text{(Ib)}$$

El reconocimiento de las relaciones, entre los números de las filas horizontales o verticales, es lo que Mason (2004) denomina *relaciones parte-parte*. Las *relaciones parte-todo* se refieren al análisis de todas las relaciones entre las diferentes partes del todo, es decir, tanto las filas horizontales como las verticales que en conjunto conducen a la generalización de la secuencia.

Centrándonos en las relaciones horizontales se pretende reconocer alguna cualidad o propiedad de los números, que permita formular la regla de generalización. En este caso, se identifica el sucesor de un número natural y apoyándose en ello se puede deducir la generalidad de la secuencia, como se aprecia en la secuencia (III).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \times & 6 & + & 6 & = & 3 & \times & 4 \\
2 & \times & 7 & + & 6 & = & 4 & \times & 5 \\
3 & \times & 8 & + & 6 & = & 5 & \times & 6 \\
12 & \times & 17 & + & 6 & = & 14 & \times & 15 \\
 & & & & & & n & \times & n+1 \\
(n-2) & \times & (n+3) & + & 6 & = & n & \times & (n+1) \quad \text{para } n \geq 3, n \in N
\end{array}
\tag{III}
$$

Una vez que se logran *identificar propiedades* mediante los casos particulares y proporcionar una regla de generalización, esta regla está en camino de convertirse en *definición o axioma*, lo cual, de acuerdo con Mason (2003), es la esencia de la estructura de atención.

### 3.2.2 Cambios de atención

En cuanto a los cambios entre las diferentes formas de atención, en ocasiones estos son rápidos, a menudo sutiles, pero fundamentales en el pensamiento matemático. Mientras se observa, en un abrir y cerrar de ojos puede ocurrir un cambio de atención y ser consciente de los detalles, entre un cúmulo de otros sin discernir (Mason, 2004). Por ello, cuando el estudiante está atascado en la tarea de generalizar, se le puede sugerir observar qué permanece y qué cambia.

El discernimiento suele surgir al estar expuesto a varios ejemplos particulares, los cuales permiten observar la variación entre ellos y dan lugar al reconocimiento de cierta sistematicidad. Cuando se toma conciencia de aquello que varía, se genera un cambio en la estructura de la atención, ya que ese discernimiento puede desencadenar esa capacidad natural para identificar relaciones, reconocer propiedades y razonar sobre la base de las propiedades encontradas. Formalizar en matemáticas es la acción evidente de un cambio, para considerar ciertas propiedades como definitivas (Mason, 2004). De hecho, el proceso de abstraer es un cambio sutil de atención; de ver una expresión como una expresión de generalidad, a verla como un objeto o propiedad (Mason, 1989).

Sin embargo, encontrar relaciones no siempre es un proceso activo. Es posible que, a pesar de discernir ciertos detalles, esa distinción no sea relevante para el estudiante en determinado momento. Es probable que no haya vinculación con experiencias pasadas o conocimientos previos que permitan conectar la información nueva con información previa. Mason (1989) hace notar que la experiencia es fragmentaria. Se suelen recopilar fragmentos de historias que hemos escuchado o construido, en un intento de organizar nuestra propia experiencia. Se recurre, constantemente, a la experiencia pasada para buscar situaciones similares y esa similitud es la que conforma la estructura de nuestro entendimiento.

Además de la estructura y cambios de atención, Mason et al. (1999) manifiestan que el álgebra es el lenguaje con el cual se expresa la generalidad en forma sucinta. Sin embargo, opinan que la adquisición del lenguaje algebraico es un proceso; y lo esencial en ese proceso, es tratar de expresar aquellas regularidades que se perciben en las actividades de generalización. El trabajo algebraico surge en los estudiantes cuando desean expresar algo que han percibido, *ese trabajo será su álgebra* (aún incipiente). Por lo tanto, tiene sentido invertir tiempo tratando de que los estudiantes obtengan alguna imagen mental que esté involucrada o asociada a aquello que se desea generalizar, tratando de expresarlo verbalmente ya sea con uno mismo o con otros y, solo luego, tratar de registrar o expresar sus ideas, ya sea mediante dibujos o palabras. Los registros escritos pueden pasar por muchos borradores diferentes, antes de convertirse en sucintos y formales.

## 3.3 Expresión de la generalidad

Mason et al. (1999) hacen notar que, en situaciones de generalización matemática existe una tendencia a apresurar la introducción y uso de la $x$. Pero la expresión de la generalidad es un proceso. Dichos autores consideran tres etapas: ver, decir y registrar. “Ver” se refiere a la identificación mental de una regularidad o relación, esto puede ocurrir después de un período de tiempo trabajando con cierto número de ejemplos particulares, hasta que se logra la identificación de algo común. Ver generalidades, implica que los estudiantes puedan identificar factores clave y combinarlos para producir una regla que funcione.

El "decir" puede tener lugar tanto en voz baja (internamente) como en voz alta, en interacción con otras personas; es expresar con palabras aquello que se ha reconocido. Antes de decir las generalidades observadas se suele decir qué ocurre en casos particulares. Mason (1989) concibe que uno puede conversar consigo mismo, esto es, uno puede ponerse en contacto con cierto contenido, leer un texto y tener un sentido activo (construir, especializarse, conjeturar, generalizar, justificar) guiado por el texto o por materiales diseñados por alguien experto. De cierta manera, el estudiante está conversando con el contenido, mediado por un experto a través de materiales estructurados.

Sin embargo, decir en voz alta en interacción con otras personas permite ir clarificando lo que se quiere expresar. Los estudiantes que no están acostumbrados a explicar; con frecuencia, en un primer intento, no incluyen todas las palabras o características necesarias para comunicar lo que se desea escuchar (Mason et al., 1999). Para enfocar la atención en los detalles, reconocer las relaciones involucradas y expresarlas a los demás, Mason (2019) propone la acción pedagógica "decir lo que uno ve", permitiendo así, identificar las propiedades que encaucen a formular una regla de generalización.

"Registrar" un patrón o relación es hacer visible el lenguaje, lo cual conduce a la simbolización y la comunicación escrita, aunque esto es algo que se ha encontrado difícil tanto para pequeños como adultos, por lo que no hay que apresurar el uso de los símbolos si aún es prematuro. Es mejor, emplear una mayor cantidad de tiempo en los procesos de ver y decir, aunque estas actividades no parezcan de naturaleza explícitamente algebraica. Cuando se esté en la etapa de registrar, se debe tomar en cuenta que ésta puede involucrar una variedad de formatos: dibujos, dibujos con palabras, la mayor parte palabras y algunos símbolos o la mayor parte de símbolos con algunas palabras (Mason et al., 1999).

### 3.3.1 Formas de registrar

Aunque existe la necesidad de que los estudiantes eventualmente aprendan símbolos convencionales, se requiere invertir mucho tiempo para lograr esa meta. Hay ciertas formas de registro que varían desde lo verbal hasta lo completamente simbólico, pero de acuerdo con Mason et al. (1999), para algunas personas sólo se reconoce como álgebra la última forma. Para dichos autores, el registro de la notación matemática es gradual, los estudiantes necesitan ver que los símbolos se usan para expresar generalidades, pero sólo los usarán de manera exitosa cuando estén preparados para ello y perciban la necesidad de hacerlo.

A medida que los estudiantes progresan de las palabras a los símbolos hay ciertas etapas identificables. En el nivel más simple los registros suelen ser mediante dibujos, o dibujos combinados con palabras. En niveles más sofisticados pueden identificarse solamente palabras, asumiendo que alguien externo pueda entender lo manifestado; o una combinación de palabras y símbolos. El uso completo de símbolos suele venir en última instancia. Cabe destacar, que no se sugiere que cada estudiante tenga que pasar en orden por dichas etapas; posiblemente algunos estarán ya en alguna etapa.

Desde la perspectiva de este trabajo y de acuerdo con Mason et al. (1999), es importante destacar que no sólo las expresiones simbólicas son de naturaleza matemática, de hecho, estas expresiones son de gran valor únicamente cuando tienen significado para los estudiantes. Los registros verbales representan medios para expresar la generalidad y, por lo tanto, pueden considerarse también algebraicas, aunque se reconoce que para ciertas tareas matemáticas es imprescindible una forma simple y sucinta de registrar. Adicionalmente, es importante que los estudiantes generen su propia simbología antes de usar la de alguien más, esto último requiere de mayor experiencia.

Para valorar que los registros son de carácter algebraico, es necesario considerar la estructura matemática que se identifica en ellos.

### 3.4 Estructura matemática

Existen diferentes posturas sobre lo que se considera estructura matemática, por ejemplo, Kieran (2018) opina que la capacidad de percibir la estructura matemática es crucial para tener éxito en la actividad de transformación algebraica y dar sentido a esas transformaciones.

Mientras que Venkat, Askew, Watson y Mason (2019) consideran que la palabra estructura es difícil de precisar en el ámbito de la educación matemática.

Para Mason, Stephens y Watson (2009), *estructura matemática* se concibe como aquella identificación de propiedades generales que se reconocen en situaciones particulares, por ejemplo, relaciones entre conjuntos, relaciones entre elementos, estos elementos pueden ser objetos matemáticos como números y triángulos.

De acuerdo con estos autores, el dominio de procedimientos es un componente importante para obtener sentido matemático, pero es de poco valor para los estudiantes si es meramente procedimental, ya que la carga en la memoria y la recuperación de la información se vuelve cada vez más pesada. En cambio, cuando los procedimientos son acompañados de una mínima apreciación de estructura matemática, de poder explicar, conectar relaciones etc., se vuelven efectivos y el aprendizaje se enfoca en una reconstrucción de hechos y no depende completamente de la memoria para ello. Asimismo, consideran que la apreciación de la estructura matemática es esencial para la comprensión y está al alcance de los escolares de todas las edades, incluso si no es explícita o no está completamente articulada.

Dichos autores hacen referencia también, a que el énfasis en lo sintáctico conduce al énfasis en las técnicas, mientras que el énfasis en lo semántico conduce al énfasis en las relaciones estructurales. La característica importante de las relaciones estructurales no es convertirlas en contenido para ser aprendidas factualmente, sino promover que puedan ser percibidas mediante ejemplos cuidadosamente diseñados y variados, de manera que los estudiantes puedan reconstruirlas cuando las necesiten. Cuando este proceso de centrarse en las relaciones estructurales se vuelve familiar, se produce una combinación entre recordar la sintaxis y la reconstrucción semántica basada en la comprensión.

Por ello, Venkat et al. (2019) destacan la importancia de prestar atención al grado de generalidad en el lenguaje para explorar aquellas bases que se perciben en una estructura emergente o matemática. La estructura emergente expresa un enfoque de relación matemática local entre los elementos, donde la apreciación de las propiedades generales aún estaría por emerger. Mientras que, la estructura matemática tiene un referente general, con un enfoque en el que se identifican las propiedades de la relación matemática entre los elementos.

En el siguiente ejemplo (Figura 3-7), la primera respuesta no hace referencia a relación alguna, ni entre las cantidades de las expresiones numéricas, ni entre las operaciones de multiplicación y división. Refleja ausencia del reconocimiento de alguna estructura matemática.

En respuesta a la pregunta, qué es igual y qué diferente en las siguientes dos expresiones numéricas:

$$3 \times 2 = 6 \qquad 6 \div 2 = 3$$

Se escucha decir a los estudiantes:

(1) Ambas expresiones numéricas tienen un tres, un dos y un seis.
(2) Si a tres personas les doy dos dulces a cada una, entonces podría decir que seis dulces compartidos entre tres personas, tocaría a cada persona dos dulces.
(3) Sé que puedo invertir multiplicar por 3 con dividir por 3.

*Figura 3-7*. Respuestas de los estudiantes en una tarea matemática. Tomado de Venkat et al. (2019).

La segunda respuesta expresa una relación matemática local entre los números y operaciones proporcionadas, considerándose presencia de una estructura emergente, en virtud de que las propiedades generales aún están por emerger. Finalmente, la tercera respuesta, aunque con falta de precisión en la estructura gramatical, evidencia características más generales con un enfoque en las propiedades de las relaciones involucradas. Es importante hacer notar que, las características generales no se expresan con ejemplos particulares.

Para concluir este capítulo, con base en las aportaciones teóricas propuestas por John Mason se realizará el análisis de las expresiones de generalización producidas por los estudiantes, se determinará el alcance de generalidad algebraica que se identifique en ellas y se evidenciará el proceso de generalización a través de la espiral de acciones; aspectos que se esperan identificar cuando los estudiantes participantes resuelvan las tareas matemáticas diseñadas.

# Capítulo IV

## Diseño y aplicación de las tareas matemáticas

Para dar cuenta del proceso y expresiones de generalización se diseñaron y aplicaron 17 tareas durante dos ciclos escolares. Los estudiantes participantes cursaban quinto grado de primaria cuando se aplicaron las primeras tareas y se continuó trabajando con ellos durante sexto grado. De modo que, este estudio es de tipo longitudinal y de cohorte (Cohen y Morrison, 2007), debido a que se realizó un seguimiento a los mismos estudiantes durante dos años aproximadamente. A continuación, se presentan los apartados que conforman el método de investigación.

### 4.1 Diseño de las tareas matemáticas

Las tareas diseñadas están organizadas en cuatro bloques. El Bloque I se conforma de secuencias figurales-numéricas, el Bloque II de secuencias numéricas y los Bloques III y IV de problemas en contexto. Las tareas se rigen por una regla de generalización que corresponde a la relación entre dos variables, el registro incipiente de esa regla permitirá apreciar el alcance de la generalidad en los estudiantes. La transición entre bloques se realiza introduciendo nuevos elementos, que permitan ir gradualmente de las secuencias figurales-numéricas, hasta los problemas en contexto de texto extenso. En la Figura 4-1 se presenta un resumen de la organización de las tareas y los rasgos principales que las caracterizan.

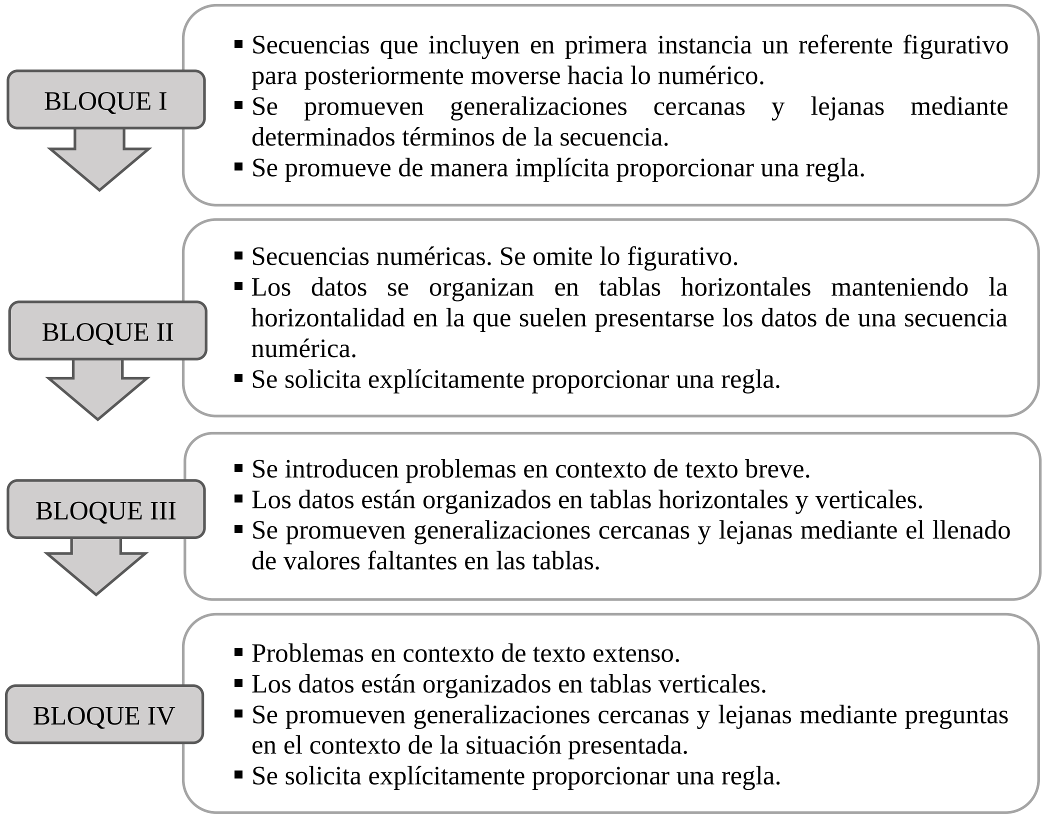



*Figura 4-1*. Organización y orden de las tareas matemáticas diseñadas.

Asimismo, las tareas diseñadas en este estudio se consideran instrumentos semiestructurados, ya que incluyen un conjunto de preguntas que requieren ser contestadas por los participantes de la manera que les parezca apropiada (Cohen et al., 2007). Los instrumentos semiestructurados se identifican por ser de formato abierto, lo que permite a los encuestados responder en sus propios términos. Sin embargo, por la naturaleza de la presente investigación las respuestas de las preguntas tienen un dominio prestablecido, ya que no son preguntas en las que se les pide la opinión de los estudiantes, sino son resoluciones a tareas matemáticas. Como lo expresan dichos autores se establece un repertorio, pero no se presupone la naturaleza de la respuesta. A continuación, se describen a detalle las tareas que conforman cada bloque.

**Bloque I. Secuencias figurales-numéricas.** Este bloque se conforma de 8 secuencias, cada una es presentada a los estudiantes mediante una figura con puntos y el número de la figura correspondiente. Existen trabajos de investigación (Roig y Llinares, 2008; Warren, 2009) que presentan secuencias numéricas usando dos conjuntos de números diferentes: cardinales para denotar el número de elementos del término y ordinales para denotar la posición del término. En este trabajo se consideró no involucrar a los números ordinales, aunque las secuencias poseen un orden, dicho orden se etiquetó con carácter cardinal. En lugar de escribir 1°, 2°, 3° término, etc., se escribió Figura 1, Figura 2, Figura 3, etc., con el fin de transitar adecuadamente al conjunto dominio de los problemas en contexto. La relación entre el número de puntos y número de la figura (estructura matemática) está definida por alguna función matemática de la forma $f: N \to N$, presentadas en la Tabla 4-1.

*Tabla 4-1.* Funciones que definen a las secuencias figurales-numéricas del Bloque I.

| Secuencia | Función involucrada |
|---|---|
| 1 | $f(x) = x$ |
| 2 | $f(x) = 2x$ |
| 3 | $f(x) = 2x - 1$ |
| 4 | $f(x) = x^2$ |
| 5 | $f(x) = 3x$ |
| 6 | $f(x) = x + 3$ |
| 7 | $f(x) = 4x$ |
| 8 | $f(x) = x + 4$ |

Se consideró iniciar este bloque de tareas con la secuencia definida por la función identidad, valorando que los estudiantes podrían identificar y expresar sin dificultad la relación que corresponde al mismo número de puntos y número de figura, además, que este preámbulo pudiera servir de experiencia previa para las diferentes exigencias involucradas en las siguientes tareas.

Las secuencias 2 y 3 involucran a los conjuntos de números pares e impares respectivamente, también se valoró que los estudiantes pudieran expresar la regla de generalización correspondiente a cada secuencia, por tener referentes de esos conjuntos de números desde sus primeros años de educación básica. Estas primeras secuencias empezarán a conformar el repertorio de experiencias de los estudiantes en tareas de generalización.

La Secuencia 4, pretende que los estudiantes determinen una relación cuadrática. Esta secuencia se incluyó considerando que los estudiantes cuentan con conocimientos previos sobre perímetro y área de rectángulos desde cuarto de primaria (Secretaría de Educación Pública, 2016). Inclusive, el patrón figural que se proporciona en esta secuencia presenta intencionalmente puntos distribuidos formando cuadrados para ayudar a encontrar la relación correspondiente. En caso de que los conocimientos previos de área no emergieran en los estudiantes, se opina que podrían establecer la relación mediante el uso adecuado de la multiplicación; para ello es muy importante prestar atención a la organización de los puntos de las figuras.

Las secuencias 5 y 7 pretenden que los estudiantes establezcan una relación multiplicativa y las secuencias 6 y 8 una relación aditiva. Están definidas por funciones de las formas $f(x) = ax$ y $f(x) = x + b$ respectivamente. Este tipo de secuencias se incluyeron porque competen a operaciones básicas y se asume que los estudiantes poseen las habilidades para trabajar con ellas. Asimismo, en cada par de secuencias (5 y 6, 7 y 8) se consideró que los parámetros $a$ y $b$ sean de valor pequeño e iguales para apreciar cómo los estudiantes establecen la distinción del rol del parámetro. Como previamente se había usado el valor $a = 2$ en la secuencia número 2, los valores que se usaron fueron el 3 para las secuencias 5 y 6, el 4 para las secuencias 7 y 8.

A continuación, se describen los elementos generales que conforman a todas las secuencias del Bloque I. En vista de que poseen un formato similar con pequeñas variantes, se hace referencia a la Secuencia 1 (Figura 4-2) para explicar y referir dichos elementos. Las secuencias de este bloque se conforman de cinco incisos:

- En el inciso a) se presenta la secuencia por medio de figuras y se solicita dibujar los puntos que le corresponden a las siguientes dos o tres figuras de la secuencia. Esta solicitud promueve una generalización cercana, debido a que se puede continuar la secuencia dibujando los siguientes términos hasta llegar al requerido.

- En el inciso b) se sustituye la figura por el número de puntos que conforman cada figura. La intención de ello fue el de guiar posteriormente al estudiante hacia una generalización lejana, prescindiendo de dibujar.

· En el inciso c) se solicita, sin dibujar figura alguna, el número de puntos de determinada figura no tan alejada de la secuencia numérica. Nuevamente, se promueve una generalización cercana, pero en un ámbito numérico. En las secuencias 5 a 8 además se solicita explicar lo realizado.

Nombre: ______________________________

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

1, 2, 3, 4, …

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

1, 2, 3, 4, ☐, ☐, ☐, …

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10?

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25?

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 70? Explica cómo lo has hecho.

*Figura 4-2*. Secuencia 1, Bloque I.

· En el inciso d) se pide el número de puntos de una figura que se encuentra más distante que la del inciso c). Se considera el valor pedido como generalización cercana, pero se promueve lo que Mason (1996) denomina manipulación de más casos concretos, que permiten ir apreciando la generalización para poder articularla correctamente. En las actividades 3 a 8 se solicita, además, explicar lo realizado.

· Finalmente, el inciso e) promueve una generalización lejana, ya que solicita el número de puntos de una figura que resultaría laborioso o tedioso hallarlo mediante dibujos o por conteo. Se espera que esto, conlleve al estudiante a la necesidad de buscar una alternativa más eficiente (construcción y explicación de una regla).

Las acciones de la espiral se motivan en el diseño de las tareas (ver Figura 4-3) a través de la organización y articulación de las preguntas mediante las cuales se promueve un razonamiento inductivo (*manipulación* de casos particulares), con la intención de que los estudiantes identifiquen la relación de correspondencia entre el número de puntos y el número de figura (*obtener sentido de*) para *articular* la regla de generalización que la define.

Los cambios de atención se promueven entre los incisos y serán explícitos a través de las expresiones de generalización que emitan los estudiantes. En relación con dichas expresiones se espera que los estudiantes, a medida que manipulen los casos particulares, "vean" la relación entre las variables de la secuencia (etapa *ver* durante el proceso de expresar la generalidad); e identifiquen aquello que permanece y lo que varía para articular la regla de generalización que caracteriza dichas variables. En cada inciso se solicita hacer un registro de tipo figural, numérico o con palabras (etapa *registrar*), lo cual permitirá apreciar la articulación que va realizando el estudiante. En este tipo de tareas, en la que no hay intervención por parte del investigador o docente, la etapa *decir* se asume que ocurre internamente en el estudiante en interacción con el contenido; y al tener un sentido activo, que le lleve a emitir sus expresiones de generalización guiado por la estructura de la tarea diseñada.

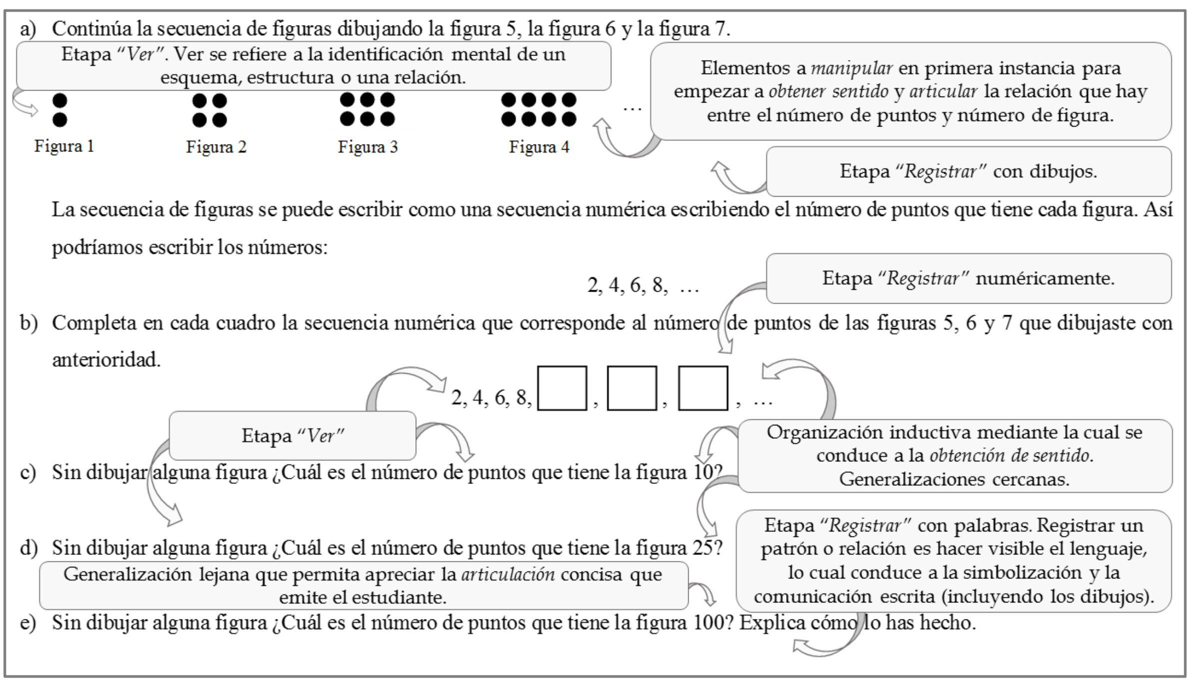



*Figura 4-3*. Interpretación de la espiral de acciones y etapas en el diseño de las secuencias del Bloque I.

▪ **Bloque II. Secuencias numéricas.** Transitando del Bloque I al Bloque II se omite lo figural en las secuencias. Los datos presentados en las dos secuencias que conforman este bloque están organizados en un registro tabular horizontal, acorde con la posición de los datos en las tareas del Bloque I. La relación, entre los dos conjuntos de datos para cada secuencia, está definida por una de las funciones matemáticas de la forma $f: N \rightarrow N$ que se presentan en la Tabla 4-2.

La Secuencia 9 corresponde a una relación multiplicativa y la Secuencia 10 a una relación aditiva. Las secuencias 2 y 9 tienen la misma estructura matemática $f(x) = 2x$ permitiendo que los estudiantes transiten gradualmente entre los bloques de tareas, manteniendo algunos elementos y añadiendo otros.

*Tabla 4-2.* Funciones que definen a las secuencias numéricas del Bloque II.

| Secuencia | Función involucrada |
|---|---|
| 9 | $f(x) = 2x$ |
| 10 | $f(x) = x + 2$ |

Cada secuencia de este bloque se conforma de 5 incisos (ver Figura 4-4):

- En el inciso a) se presentan los primeros siete términos de la secuencia numérica dispuestos en una tabla horizontal. Se promueve una generalización cercana, ya que mediante conteo se puede encontrar el término requerido.

- En el inciso b) se solicita de manera implícita una expresión que dé cuenta de una generalización lejana, al requerir que se explique cómo se obtiene cada uno de los números de dicha secuencia numérica. En el inciso c) se pide al estudiante explícitamente escribir una regla que permita encontrar cualquier número de la secuencia. De acuerdo con Mason et al. (1999), el lenguaje algebraico es un proceso y lo importante en ese proceso es que los estudiantes expresen las regularidades que perciban, ese trabajo será su álgebra aún incipiente. Durante el análisis es de interés poder valorar las expresiones de generalización que registren los estudiantes.

Nombre: _______________________________________________ Edad: ______________________

Observa la siguiente secuencia numérica:

| **Número** de la secuencia | 2, | 4, | 6, | 8, | 10, | 12, | 14, | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Término** de la secuencia | Término 1 | Término 2 | Término 3 | Término 4 | Término 5 | Término 6 | Término 7 | Término **aún no conocido de la secuencia** |

a) ¿Qué número le corresponde al término 9 de la secuencia? Explica cómo lo has encontrado.

b) Explica con tus palabras cómo se obtiene cada uno de los números de esta secuencia numérica.

c) Escribe una regla precisa que permita a otros niños encontrar cualquier número de esta secuencia numérica.

d) Ahora usemos la regla que has proporcionado y encontremos un número de la secuencia. Por ejemplo, ¿Qué número le corresponde al término 500 de la secuencia numérica? Escribe tu procedimiento obedeciendo la regla que diste.

e) Usemos nuevamente la regla que has proporcionado, pero tú escoge qué término de la secuencia quieres. Ahora completa la información:

El término ________ de la secuencia numérica, es el número __________.

*Figura 4-4*. Secuencia 9, Bloque II.

- El inciso d) también promueve un regreso a la acción manipular mediante una generalización lejana. Es posible que, el estudiante no pueda expresar la regla explícitamente en el inciso c) pero sí poder usarla implícitamente, de manera que, mediante el valor lejano se pueda evidenciar el uso de una regla. También, es factible que aquellos estudiantes que aún no hayan identificado alguna regla de generalización logren manipular, obtener sentido y articular la regla, debido a la exigencia de un valor lejano.

- El inciso e) promueve que los estudiantes elijan el número que deseen, ese número peculiar puede ser un valor cercano o lejano. Mason (1999) expresa que estas encomiendas tienden, por un lado, a estimular en ellos una conciencia de la gama de elecciones posibles que pueden elegir (valores que corresponden al dominio de la función), y por otro, permiten apreciar cuál es el alcance de la generalización que para ellos representa la secuencia. Así, los estudiantes se apropian de los ejemplos que ellos mismos generan, mientras tienen la vivencia del alcance de la generalidad que están expresando.

En estas dos secuencias también se promueve un razonamiento inductivo, se destaca en ellas la etapa "registrar" durante su resolución. También juega un papel importante la representación tabular, que contribuye a una distinción de los dos conjuntos de elementos definidos; y mediante las preguntas se promueve que los estudiantes identifiquen que hay una relación entre ellos, de tal forma que éstas sirven de apoyo para que los estudiantes expresen la generalización, en términos de las dos variables involucradas.

La espiral de acciones se promueve a través de la *manipulación* de los casos particulares mediante el registro tabular, el cual permite a los estudiantes identificar la relación de correspondencia entre el número y término de la secuencia (*obtener sentido de*) para poder *articular* la regla de generalización (Figura 4-5). En estas secuencias se fomentan dos ciclos de acciones, el primero mediante los incisos a), b) y c); el segundo a través del inciso d). Respecto a los cambios de atención, estos se promueven entre la transición de los incisos y se harán explícitos a través de las expresiones de generalización que proporcionen los estudiantes. En el diseño hay un énfasis principal en aquellos cambios de atención que lleven a la articulación y expresión de la regla de generalización, los cuales se impulsan solicitando el registro explícito de dicha regla.

Observa la siguiente secuencia numérica:

Ejemplos a *manipular* para empezar a *obtener sentido* y *articular* la relación entre el número de puntos y número de la figura (inciso a).

| **Número** de la secuencia | **2,** | **4,** | **6,** | **8,** | **10,** | **12,** | **14,** | **…** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Término** de la secuencia | Término **1** | Término **2** | Término **3** | Término **4** | Término **5** | Término **6** | Término **7** | Término **aún no conocido** de la secuencia |

- Se promueve la *articulación* de la regla de generalización.
- Se destaca la etapa "registrar" durante el desarrollo de la secuencia.

Generalización cercana.

a) ¿Qué número le corresponde al término 9 de la secuencia? Explica cómo lo has encontrado.

b) Explica con tus palabras cómo se obtiene cada uno de los números de esta secuencia numérica.

c) Escribe una regla precisa que permita a otros niños encontrar cualquier número de esta secuencia numérica.

Generalización lejana.

d) Ahora usemos la regla que has proporcionado y encontremos un número de la secuencia. Por ejemplo, ¿Qué número le corresponde al término 500 de la secuencia numérica? Escribe tu procedimiento obedeciendo la regla que diste.

Regreso. Manipulación de casos particulares – obtención de sentido – articular.

e) Usemos nuevamente la regla que has proporcionado, pero tú escoge qué término de la secuencia quieres. Ahora completa la información:

Alcance de la generalidad.

El término __________ de la secuencia numérica, es el número ___________.

*Figura 4-5*. Interpretación de la espiral de acciones y etapas en el diseño de las secuencias del Bloque II.

▪ **Bloque III. Problemas en contexto de texto breve.** Cada problema incluye una pequeña descripción que relaciona a las variables involucradas, enseguida se presenta el registro tabular de algunos datos que satisfacen la regla correspondiente (Figura 4-6). La relación entre las variables está determinada por las funciones matemáticas que se muestran en la Tabla 4-3.

Nombre:______________________________ Edad:______________

Laura trabaja en una papelería y tiene una tabla incompleta de los precios que debe cobrar, relacionado con el número de copias a color que debe imprimir.

Ayuda a Laura a completar la tabla poniendo el número faltante en los espacios sombreados.

| **Precio** | \$2 | \$4 | | … | | \$22 | … | \$50 | … | | … | \$400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de copias** | 1 | 2 | 3 | … | 10 | | … | | … | 150 | … | |

*Figura 4-6*. Problema 1 de contexto breve, Bloque III.

*Tabla 4-3.* Funciones que definen a los problemas del Bloque III.

| Problema | Función involucrada |
|---|---|
| 1 | $f(x) = 2x$ |
| 2 | $f(x) = x + 2$ |
| 3 | $f(x) = 4x$ |

Este bloque se conforma de tres problemas. Los problemas 1 y 2 se determinan por las mismas funciones que las secuencias 9 y 10. Como se mencionó anteriormente, la finalidad de ello es para que los estudiantes transiten gradualmente entre las tareas, por ello, además de las mismas funciones matemáticas, los datos se registran en tablas horizontales como en el Bloque II. La nueva característica en este Bloque III es el contexto proporcionado, promoviendo que los estudiantes puedan interpretar los valores numéricos en el contexto del problema. Asimismo, ir preparándolos hacia los problemas de texto extenso que conforman el Bloque IV. En el Problema 3 los valores numéricos ahora son presentados en una tabla vertical.

Respecto al registro tabular, las tablas pueden ser de ayuda para la presentación e interpretación de los valores numéricos. Glazer (2011) destaca que la organización de los valores numéricos mediante tablas es un método invaluable de representación para encontrar relaciones entre las variables, con el fin de determinar los patrones, propiedades y relaciones. Asimismo, las representaciones visuales de los valores numéricos son muy importantes para la comprensión, ya que a menudo pueden revelar aquello que no se ve fácilmente en otros formatos como, por ejemplo, en una descripción verbal (Burke, 2007).

Estrella (2014) considera que un modelo genérico de tabla contiene títulos o encabezados, los cuales permiten conocer a las variables involucradas en el contexto; y contiene números, que representan los valores que van tomando las variables. Saber qué representan dichos números permite compararlos e identificar cómo se relacionan. Las tablas suelen presentarse en formato horizontal o vertical, su elección depende de cómo se desea organizar la información y pueda apreciarse su lectura.

En las secuencias figurales-numéricas del Bloque I se presentan los valores organizados horizontalmente sin incluir tablas. En el Bloque II se introducen los registros tabulares en formato horizontal; este formato se mantiene en los dos primeros problemas del Bloque III, porque la variante en dichas tareas es transitar de las secuencias a los problemas en contexto. Promovido este tránsito, entonces el Problema 3 de este último bloque incluye una tabla vertical, este formato se mantendrá en los problemas del Bloque IV. Se considera que las tablas verticales pueden proporcionar un mejor referente visual para establecer las relaciones entre las variables involucradas, porque promueven la lectura de pares de números (relación entre las variables) de izquierda a derecha, como se lleva a cabo la lectura de un texto.

En cuanto a la espiral de acciones de Mason, la acción manipular se motiva mediante la lectura e interpretación de los primeros pares de números registrados en la tabla, así como al encontrar valores de la variable dependiente dados valores cercanos de la variable independiente (Figura 4-7). A medida que se manipulen valores cada vez más distantes para encontrar los valores correspondientes de la variable dependiente (operación inversa), se promueve la acción obtención de sentido. La acción *articular* se impulsa al encontrar los pares correspondientes de los valores distantes propuestos, ya que esto da cuenta en ellos del uso de una regla implícita que compete a la relación entre número de copias y precio. En estos problemas no se invita a proporcionar explicaciones para obtener el registro de las expresiones de generalización porque el objetivo principal es que los estudiantes transiten de las secuencias hacia los problemas.

Laura trabaja en una papeleria y tiene una tabla incompleta de los precios que debe cobrar, relacionado con el número de copias a color que debe imprimir.

Ayuda a Laura a completar la tabla poniendo el número faltante en los espacios sombreados.

Acción manipular.

Acción articular.

| Precio | $2 | $4 | | … | | $22 | … | $50 | … | | … | $400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de copias | 1 | 2 | 3 | … | 10 | | … | | … | 150 | … | |

Acción obtención de sentido.

Etapa *"Registrar"* numéricamente.

*Figura 4-7.* Interpretación de la espiral de acciones en el diseño de problemas en contexto del Bloque III.

- **Bloque IV. Problemas en contexto de texto extenso.** Los problemas que conforman este bloque se caracterizan por tener más información textual, una parte de dicha información corresponde a una introducción para contextualizar al estudiante y otra compete a los datos que conciernen a las variables involucradas. Se puede apreciar un ejemplo de este tipo de problemas en las Figuras 4-8 y 4-9.

Los sábados acostumbro comprar panuchos con Doña Soco. Ella me comenta que en la mañana prepara 150 tortillas y las rellena de una vez con su frijol. En la tarde cuando empiezan a llegar los clientes, ella empieza a freir los panuchos para que los sirva calientitos.

En la siguiente tabla aparece la cantidad de tortillas que le falta freir.

| Tiempo que transcurre en minutos | Cantidad de tortillas de panucho que le faltan freír |
|---|---|
| 0 minutos | 150 tortillas |
| 1 minuto | 149 tortillas |
| 2 minutos | 148 tortillas |
| 3 minutos | 147 tortillas |
| 4 minutos | 146 tortillas |
| … | … |

*Figura 4-8.* Problema 5. Información y datos del problema.

1. De acuerdo con la tabla contesta las siguientes preguntas:

a) Cuando transcurre un minuto, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír a Doña Soco?
b) Cuando transcurren 2 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?
c) Cuando transcurren 5 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?
d) Cuando transcurren 6 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?

2. ¿Qué ocurre con la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco a medida que pasan los minutos?

3. Escribe la regla que permita encontrar la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco conforme pasan los minutos.

4. Usando la regla que has proporcionado encuentra la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco cuando han transcurrido 20 minutos.

5. Usando la regla que has proporcionado encuentra la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco cuando han transcurrido 45 minutos.

6. ¿Para qué otros valores de tiempo podemos encontrar la cantidad de panuchos que le falta freír a Doña Soco?

7. ¿Cuántos minutos transcurrirán para que Doña Soco haya frito todas las tortillas de panucho?

*Figura 4-9*. Problema 5. Preguntas para promover la construcción de la regla de generalización y el alcance de la generalización.

Las funciones matemáticas involucradas en cada problema se presentan en la Tabla 4-4.

*Tabla 4-4.* Funciones que definen a los problemas del Bloque IV.

| Problema | Función involucrada |
|---|---|
| 4 | $f(x) = 2^x$ |
| 5 | $f(x) = 150 - x$ |
| 6 | $f(x) = 5000 - 500x$ |
| 7 | $f(x) = x^2$ |

Se asume que las estructuras matemáticas de los problemas que competen a este bloque son de mayor grado de dificultad, comparadas con las de los bloques anteriores. Sin embargo, se tiene la hipótesis de que los estudiantes, mediados por el contexto, podrían expresar o aproximar la regla de generalización correspondiente, es decir, que sí puedan articular y expresar con sus palabras cómo se comportan y relacionan las variables. El preámbulo de trabajar las 13 secuencias, así como los conocimientos escolares y personales adquiridos durante el desarrollo de este proyecto de investigación son componentes que se consideran, contribuirán a la resolución de los problemas de este bloque.

La estructura matemática del Problema 4 corresponde a la relación $f(x) = 2^x$. No se asume que los estudiantes puedan proporcionar expresiones que refieran textualmente a un crecimiento exponencial, pero sí que puedan expresar cómo perciben ese crecimiento. Para contribuir a que puedan articular la relación se incluyen dos registros de apoyo: un diagrama figural y una tabla de valores.

El Problema 5 está definido por una relación lineal de la forma $f(x) = ax + b$, con $a = -1$ lo cual indica que la relación es decreciente. Se considera que la dificultad de esta situación está justamente en que los estudiantes expresen ese comportamiento decreciente. Los elementos de apoyo para resolver el problema son el contexto, con información propia de la región de procedencia de los estudiantes, y el registro tabular.

El Problema 6 compete también a una relación de la forma $f(x) = ax + b$, pero su dificultad radica en que su dominio incluye números negativos y los estudiantes de educación básica no trabajan con este campo de números, sin embargo, se considera que con una introducción breve acerca de lo que representan dichos números en el contexto del problema, que trata sobre temperatura, puedan usarlos para expresar la relación entre las variables correspondientes.

Finalmente, el Problema 7 está definido por una relación cuadrática. Para su resolución, los estudiantes deben estar inscritos al sexto grado y previamente haber resuelto en el Bloque I una secuencia figural-numérica con la misma estructura matemática, por lo que, se tiene la expectativa de que los estudiantes puedan expresar en este problema alguna notación algebraica incipiente.

La organización de las preguntas de estos problemas es análoga a las planteadas en las secuencias figurales-numéricas, por lo tanto, la espiral de acciones de Mason se promueve de la siguiente forma: en primera instancia se pregunta por casos particulares (*acción manipular*) para que el estudiante *obtenga sentido* de la relación entre las variables involucradas y pueda *articular* la regla correspondiente de generalización, sobre todo expresarla (Figura 4-10).

Los sábados acostumbro comprar panuchos con Doña Soco. Ella me comenta que en la mañana prepara 150 tortillas y las rellena de una vez con su frijol. En la tarde cuando empiezan a llegar los clientes, ella empieza a freir los panuchos para que los sirva calientitos.

En la siguiente tabla aparece la cantidad de tortillas que le falta freir.

| Tiempo que transcurre en minutos | Cantidad de tortillas de panucho que le faltan freír |
|---|---|
| 0 minutos | 150 tortillas |
| 1 minuto | 149 tortillas |
| 2 minutos | 148 tortillas |
| 3 minutos | 147 tortillas |
| 4 minutos | 146 tortillas |
| ... | ... |

Casos particulares. Se promueve la acción manipular.

1. De acuerdo con la tabla contesta las siguientes preguntas:

a) Cuando transcurre un minuto, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír a Doña Soco?
b) Cuando transcurren 2 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?
c) Cuando transcurren 5 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?
d) Cuando transcurren 6 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?

Se promueve la acción obtención de sentido.

2. ¿Qué ocurre con la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco a medida que pasan los minutos?

Se promueve la articulación y expresión de la regla de generalización.

3. Escribe la regla que permita encontrar la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco conforme pasan los minutos.

Mediante los siguientes incisos se promueve el regreso a la espiral de acciones.

4. Usando la regla que has proporcionado encuentra la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco cuando han transcurrido 20 minutos.

5. Usando la regla que has proporcionado encuentra la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco cuando han transcurrido 45 minutos.

6. ¿Para qué otros valores de tiempo podemos encontrar la cantidad de panuchos que le falta freír a Doña Soco?

Se promueve el alcance de la generalización.

7. ¿Cuántos minutos transcurrirán para que Doña Soco haya frito todas las tortillas de panucho?

*Figura 4-10*. Interpretación de la espiral de acciones en el Problema 5.

Adicionalmente, se incluyen preguntas que guían hacia la reflexión de diferentes valores que pueden tomar las variables (alcance de la generalización), así como la interpretación de dichos valores en el contexto proporcionado. Los cambios de atención se promueven en el tránsito de los incisos y la intencionalidad de las preguntas.

## 4.2 Pilotaje de las tareas diseñadas

Cohen et al. (2007) expresan que la redacción de los instrumentos es de suma importancia y que las pruebas preliminares son cruciales para su éxito. Un pilotaje tiene varias funciones, principalmente para aumentar la confiabilidad, validez y practicabilidad del instrumento. Pueden contribuir a:

- Verificar la claridad de los elementos del instrumento, instrucciones y diseño.
- Eliminar ambigüedades o dificultades en la redacción.
- Verificar los niveles de legibilidad para el público objetivo.
- Realizar observaciones sobre el tipo de pregunta y su formato.
- Identificar omisiones, elementos redundantes e irrelevantes.
- Verificar el tiempo necesario para completar el instrumento.
- Etc.

En el pilotaje de las tareas diseñadas participaron 2 niños voluntarios, pertenecientes a diferentes escuelas públicas ubicadas en la ciudad de Mérida, Yucatán, México. El voluntario 1 participó durante el ciclo escolar 2017-2018 cuando cursaba el quinto grado de primaria, pero su familia dejó la ciudad al término del ciclo escolar y no se pudo seguir contando con su participación en el periodo 2018-2019. Una problemática en los estudios a largo plazo es que algunos de los participantes no puedan continuar colaborando, debido a circunstancias que pueden acontecer durante el periodo de la investigación (Cohen et al., 2007).

Por esta razón, se contó con la participación del voluntario 2 a quien se le aplicaron todas las secuencias y los problemas de texto breve durante el verano 2018. En la primera mitad del ciclo escolar 2018-2019 se le aplicaron los problemas de texto extenso. El resumen de la participación de los dos voluntarios se puede apreciar en la Tabla 4-5.

*Tabla 4-5.* Resumen de participación de los voluntarios en el pilotaje de las tareas diseñadas.

| Voluntarios | Grado escolar | Periodo | Tareas aplicadas |
|---|---|---|---|
| Voluntario 1 | Quinto grado | Ciclo escolar 2017-2018 | Secuencias 1-10<br>Problemas 1-3 |
| Voluntario 2 | Quinto grado | Verano 2018 | Secuencias 1-10<br>Problemas 1-3 |
| Voluntario 2 | Sexto grado | Ciclo escolar 2018-2019 | Problemas 4-7 |

El pilotaje de las tareas contribuyó a mejorar la redacción de algunas preguntas e instrucciones, identificar omisiones, mejorar el formato para una distribución adecuada de la información y medir el tiempo de resolución de las tareas. También permitió considerar y prever aspectos logísticos para la grabación de las entrevistas.

## 4.3 Participantes. Muestra no probabilística

El estudio considera una muestra no probabilística, ya que la investigación se lleva a cabo con un grupo de estudiantes sabiendo que no representa a la población en general, sino que se representa a sí mismo (Cohen et al., 2007). Sin embargo, aunque la muestra no es representativa, sí comparte características comunes con otros grupos de la población general y los resultados pueden ser un referente para esos grupos. Entre los rasgos comunes se pueden encontrar: estudiantes de educación básica, de escuelas públicas en zonas urbanas, con los mismos planes y programas de estudio que el resto del país.

El muestreo se denomina de conveniencia (Cohen et al., 2007) porque se trabajó con estudiantes pertenecientes a una escuela pública, que brindó las facilidades para llevar la aplicación de las tareas durante dos ciclos escolares. La escuela se llama Justo Sierra Méndez y se encuentra ubicada en el municipio de Tekit, Yucatán, México. Durante el ciclo escolar 2017-2018 participaron 31 estudiantes, 18 mujeres y 13 varones, con edades entre 10 y 11 años. Los alumnos estaban inscritos en quinto grado de primaria cuando inició el estudio de investigación.

Durante el ciclo escolar 2018-2019 participaron 25 estudiantes. Esto fue debido a que sólo se tomaron en cuenta, de los 31 estudiantes, a aquellos que completaron las trece tareas aplicadas durante el ciclo escolar anterior. Cuando un estudiante no asistía el día que se llevaba a cabo la aplicación de alguna tarea, se programaba otra visita para aplicársela. Sin embargo, algunos niños en la siguiente visita para recuperación de la tarea tenían nuevamente inasistencia. Los estudiantes participantes, 14 mujeres y 11 varones, con edades entre 11 y 12 años ya se encontraban cursando sexto grado.

El plan y programa de estudios vigente en ambos ciclos escolares corresponde al año 2011. Cabe mencionar que, en el año 2017 se emitió un nuevo plan de estudio que se empezó a implementar en el ciclo escolar 2018-2019, pero durante la investigación esta implementación se realizó en primer y segundo grado de la educación básica (Secretaría de Educación Pública, 2017).

## 4.4 Aplicación

Durante el ciclo escolar 2017-2018 se aplicaron en formato impreso todas las secuencias correspondientes a los Bloques I y II, así como los problemas de texto breve pertenecientes al Bloque III. Los estudiantes trabajaron de manera individual y no hubo intervención por parte del investigador.

Durante el ciclo escolar 2018-2019 se aplicaron los problemas del Bloque IV también en formato impreso y se realizaron entrevistas individuales semiestructuradas. El objetivo de llevar a cabo entrevistas fue para obtener evidencias verbales (registro "decir") y por el grado de dificultad de los problemas de este bloque. Mason (1989) hace notar que el "decir" puede tener lugar en voz alta y que es más fácil poder verbalizar las ideas que escribirlas. Asimismo, se consideró que mediante la intervención del investigador se podría promover el tránsito en la espiral de acciones, a través de sugerir la manipulación de nuevos casos particulares o sugerir cambios de atención hacia el comportamiento de las variables involucradas en los problemas.

Cabe mencionar que las entrevistas semiestructuradas se caracterizan por tener un guion de preguntas, pero se tiene libertad para profundizar en aquellas respuestas otorgadas por los estudiantes que resulten relevantes o en aquellas que requieran mayor exploración, para lo cual se pueden realizar nuevas preguntas no establecidas previamente. Se considera que los participantes puedan ampliar, brindar detalles, aclarar o precisar su respuesta cuando sea necesario (Cohen, et al., 2007; Blasco y Otero, 2008). También se deben tener en cuenta ciertos cuidados al realizar las entrevistas, por ejemplo, no influir en las respuestas, orientar cortésmente a los entrevistados si se encuentran divagando, comunicar claramente, ser pacientes en la espera de las respuestas, etc. Las preguntas consideradas como guion para orientar la entrevista forman parte del diseño de los problemas.

Finalmente, cada problema del Bloque IV está organizado de la siguiente forma: en la primera hoja se presentan la descripción y datos del problema; y en las siguientes hojas se proporcionan, gradualmente, las preguntas, otorgando las pausas correspondientes entre una pregunta y otra en la espera de la resolución por parte del estudiante.

# Capítulo V

## Análisis de las secuencias pertenecientes a los Bloques I y II

El estudio es de naturaleza cualitativa y de corte descriptivo (Miles y Huberman, 1994), en vista de que los datos de interés son: el proceso de generalización y las expresiones de generalización que producen los estudiantes, las cuales se analizan, describen e interpretan.

Como se ha mencionado anteriormente, durante el ciclo escolar 2017-2018 se aplicaron las tareas que conforman los Bloques I y II. El análisis se realiza por estudiante para poder identificar las manifestaciones de generalización en cada individuo y se organiza por bloque, debido a que las tareas de cada bloque presentan características comunes. Los estudiantes se etiquetaron del 1 al 25 por orden alfabético de acuerdo con su primer apellido.

### 5.1 Bloque I. Espiral de acciones

El análisis para dar cuenta del proceso de generalización en las secuencias del Bloque I bajo la espiral de acciones de Mason se explica a continuación y se esquematiza en la Figura 5-1. Las respuestas o procedimientos correctos a los incisos a), b) y c) permiten apreciar en los estudiantes la *acción manipular*. Además, son indicadores de que empiezan a identificar las regularidades que presentan las secuencias dadas, reconociendo aquello que permanece y lo que cambia y; junto con la respuesta correcta del inciso d) se interpreta que los estudiantes *obtienen sentido* de la generalización, aunque en algunos casos pueden continuar en la acción manipular. Si adicionalmente se tiene una respuesta correcta en e), se interpreta que los estudiantes logran *articular* alguna generalidad a través de una regla implícita. Las explicaciones otorgadas en este inciso son las expresiones que permiten identificar la forma del registro y el alcance de la generalidad que ellos manifiestan.

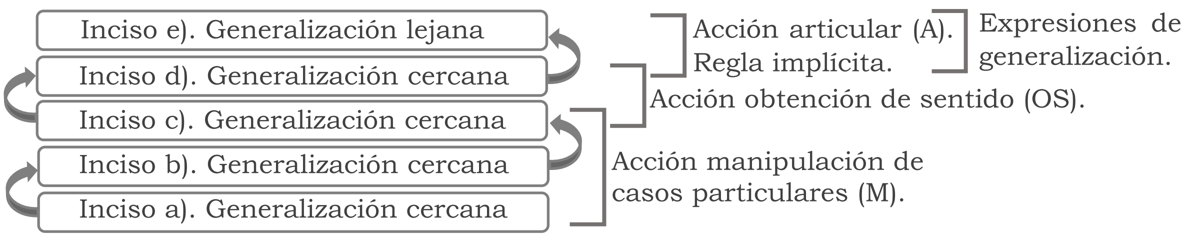



*Figura 5-1.* Interpretación de la espiral de acciones en las secuencias del Bloque I. Elaboración propia.

A continuación, mediante las respuestas obtenidas en algunas secuencias pertenecientes a este bloque se ejemplifica la forma de realizar el análisis del proceso de generalización. Asimismo, a través del análisis se identifican algunas características adicionales relevantes.

**Secuencia 2. Estudiantes E15 y E8.** La estructura matemática que caracteriza a esta secuencia es $f(x) = 2x$. Se identifica que E15 construye las figuras 5 y 6 replicando la forma del patrón (Figura 5-2). Posteriormente, en la Figura 7 pone la cantidad correcta de puntos, pero ya no continua con la forma del patrón. Se evidencia en E15 una manipulación adecuada de los casos particulares tanto figural (inciso a) como numérica (inciso b).

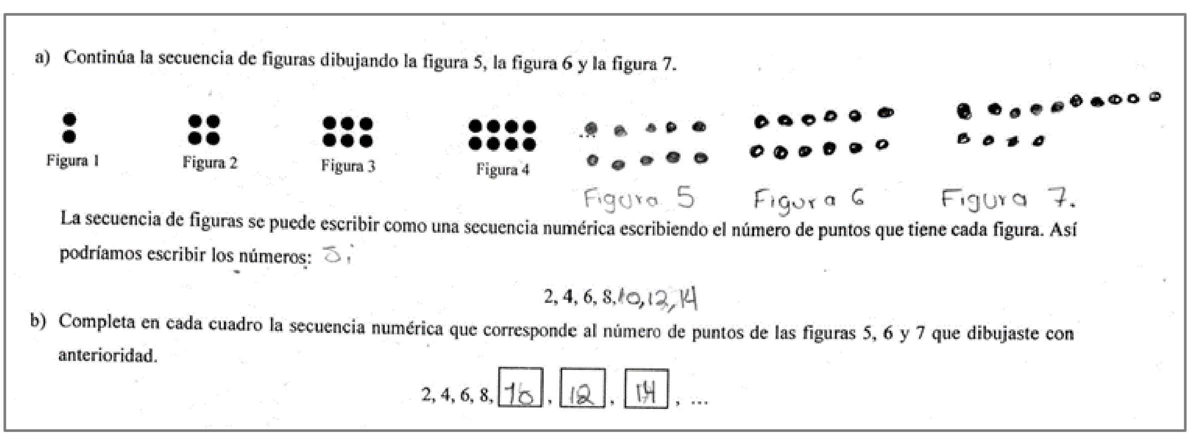

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 Figura 7.

La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

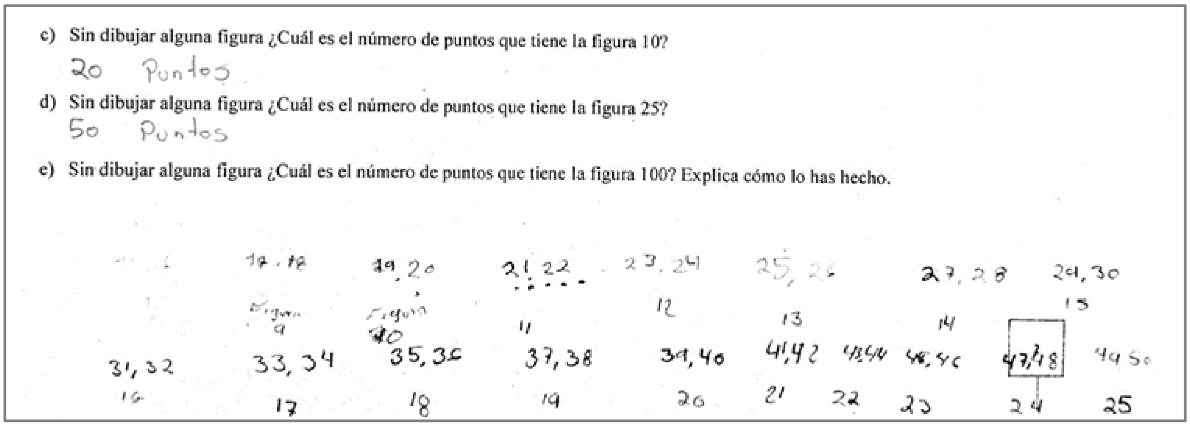
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

2, 4, 6, 8, $\boxed{10}$, $\boxed{12}$, $\boxed{14}$, ...

*Figura 5-2.* Respuestas de E15 en la Secuencia 2 del Bloque I. Incisos a) y b).

A medida que E15 manipula ejemplos con valores cada vez más distantes (incisos c y d, Figura 5-3) se interpreta en primera instancia que obtiene sentido de la generalidad, sobre todo por la respuesta del inciso d). Sin embargo, al observar que no responde el inciso e) y prestar atención a la información que se encuentra en la parte inferior de su hoja de respuestas, se evidencia que tanto el inciso d) como e) los resuelve por recursión (Figura 5-3). Por lo tanto, las respuestas de E15 competen solo a la acción manipular, no transita a las acciones obtención de sentido ni articular.


c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10?

20 Puntos

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25?

50 Puntos

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 100? Explica cómo lo has hecho.

*Figura 5-3.* Respuestas de E15 en la Secuencia 2 del Bloque I. Incisos c), d) y e).

E8 al igual que E15 también construye correctamente las figuras 5, 6 y 7; y evidencia una manipulación adecuada de los casos particulares tanto figural (inciso a) como numérica para valores cercanos y distantes (incisos b, c y d). Pero a diferencia de E15, se interpreta en el inciso e) que E8 obtiene sentido de la generalidad y logra articular, además de expresar, la regla de generalización entre el número de puntos y el número de la figura (ver Figuras 5-4 y 5-5).

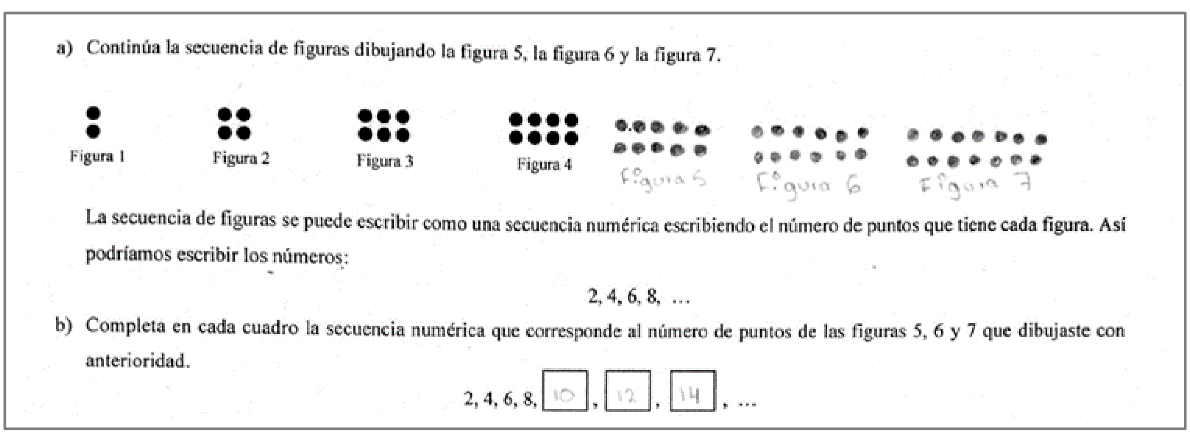

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 Figura 7

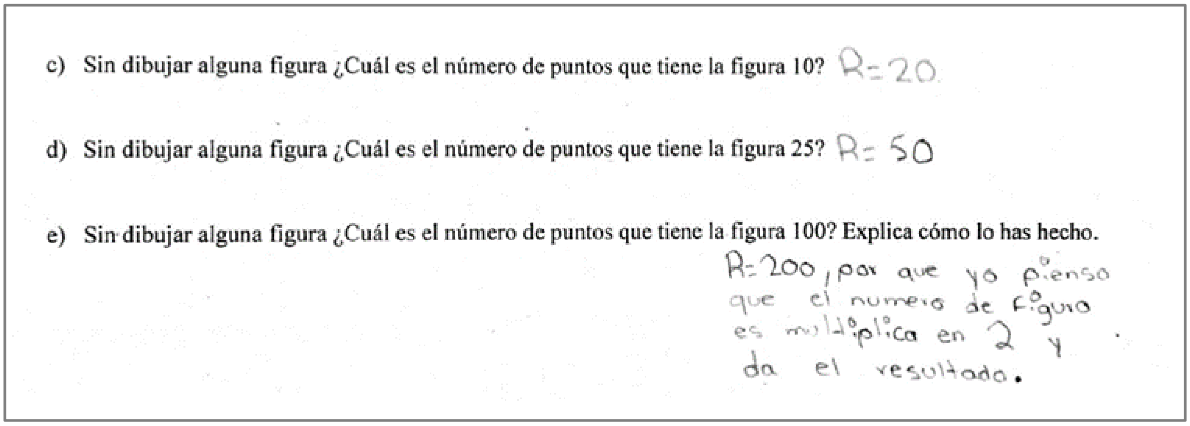
La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

2, 4, 6, 8, …

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

2, 4, 6, 8, $\boxed{10}$, $\boxed{12}$, $\boxed{14}$, …

*Figura 5-4.* Respuestas de E8 en la Secuencia 2 del Bloque I. Incisos a) y b).


c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10? R= 20

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25? R= 50

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 100? Explica cómo lo has hecho.
R=200, por que yo pienso que el numero de figura es multiplica en 2 y da el resultado.

*Figura 5-5.* Respuestas de E8 en la Secuencia 2 del Bloque I. Incisos c), d) y e).

De acuerdo con el diagrama de la Figura 5-1 en relación con las acciones y los incisos de las secuencias, las acciones de E15 se sintetizan en Manipular-Manipular-Manipular-Manipular-No Contestó y las acciones de E8 en Manipular-Manipular-Manipular-Obtención de Sentido-Articular, es decir, M-M-M-M-NC y M-M-M-OS-A respectivamente.

De manera análoga se realizó el análisis de la Secuencia 2 con los 23 estudiantes restantes y las acciones que se reconocieron en cada uno se resumen en la Tabla 5-1, identificándose que 18 de ellos logran completar un ciclo de acciones; articulando una regla de generalización que usan de manera implícita para responder correctamente de forma numérica, aunque no todos consiguen expresarla apropiadamente.

*Tabla 5-1*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 2, Bloque I.

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | OS | A |
| E2 | M | | | | |
| E3 | M | M | M | OS | A |
| E4 | | | | | |
| E5 | M | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | M | OS | A |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | M | OS | A |

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E9 | M | M | M | OS | A |
| E10 | M | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | M | OS | A |
| E12 | M | M | M | OS | A |
| E13 | M | M | M | OS | A |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | M | M | M | M | NC |
| E16 | M | M | M | OS | A |
| E17 | M | M | M | OS | A |

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E18 | M | M | M | OS | A |
| E19 | M | M | | | |
| E20 | M | M | | | |
| E21 | M | M | M | OS | A |
| E22 | M | M | M | OS | A |
| E23 | M | M | M | OS | A |
| E24 | M | M | | | |
| E25 | M | M | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

Es importante mencionar que hay una distinción entre articular y expresar. Se evidencia en algunos estudiantes el uso de una regla implícita de generalización que les permite resolver correctamente los casos particulares lejanos, es decir, logran articular una regla de generalización, pero no logran explicarla (expresarla). En otro apartado se expondrá respecto a las expresiones de generalización que manifiestan los estudiantes. Para el caso de E8 se observa que, además de articular una regla de generalización la cual usa, correctamente, al resolver los incisos, la expresa apropiadamente en lenguaje natural especificando la relación correspondiente entre el número de la figura y el número de puntos (Figura 5-5, inciso e).

**Secuencia 4. Estudiante E5.** Esta secuencia compete a una relación cuadrática, de tal manera que los puntos están distribuidos formando cuadrados con la intención de ayudar a los estudiantes a encontrar la relación correspondiente. Analizando las respuestas de E5 se identifica en el inciso a) que continúa correctamente la secuencia para las figuras 5, 6 y 7 (ver Figura 5-6); incluso continúa la forma de la figura, evidenciando la manipulación de casos particulares tanto figural como numérica (incisos a y b).

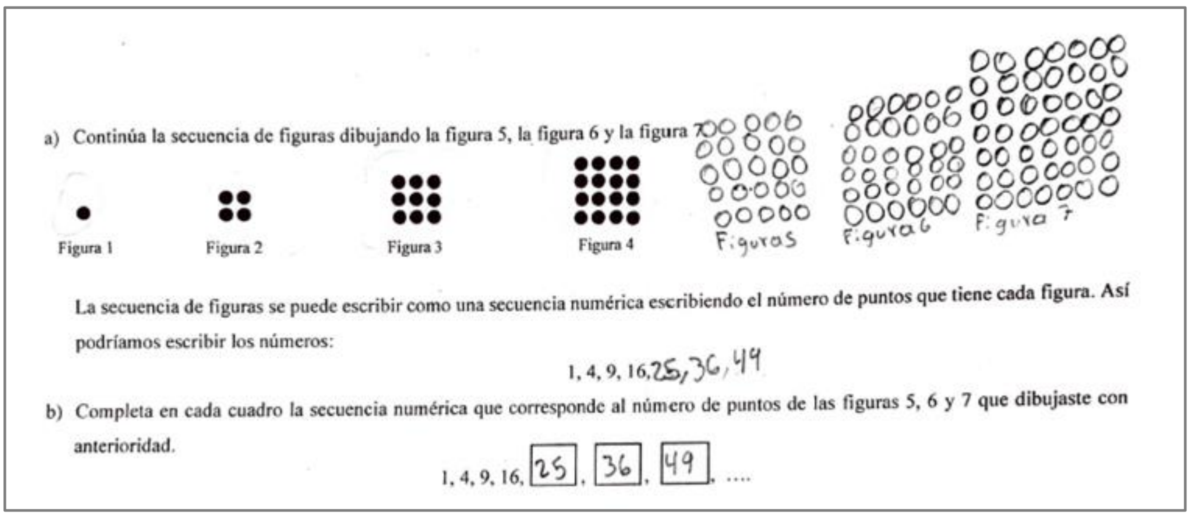

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura5 Figura6 Figura 7

La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

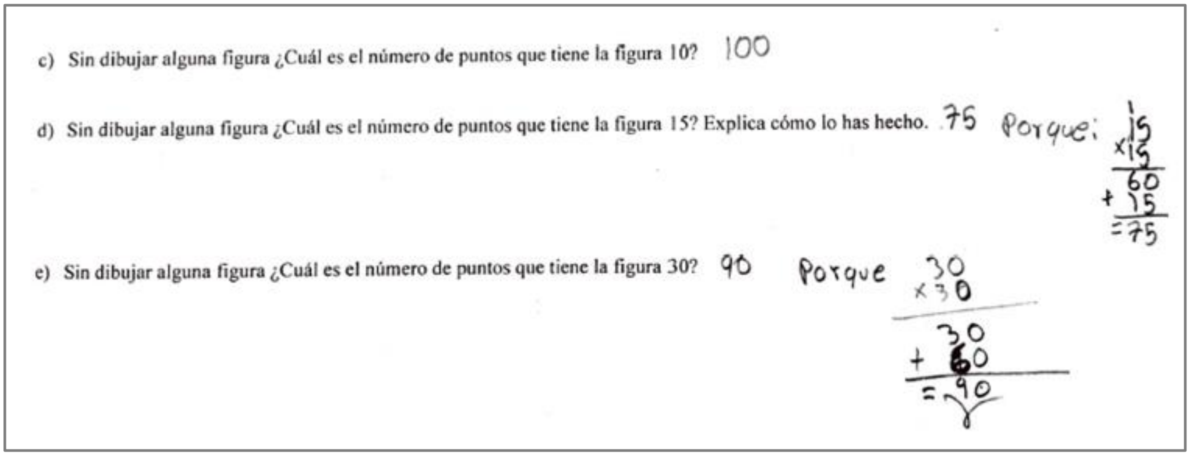
1, 4, 9, 16,25,36,49

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ....

*Figura 5-6.* Respuestas de E5 en la Secuencia 4 del Bloque I. Incisos a) y b).

La respuesta al inciso c) permite interpretar que E5 transita de la acción manipular hacia la obtención de sentido. Cuando E5 resuelve para valores cada vez más lejanos se interpreta la articulación de una regla correcta de generalización la cual usa para resolver los incisos d) y e) (Figura 5-7). Aunque no responde correctamente dichos incisos porque no resuelve correctamente el algoritmo de la multiplicación, sus procedimientos dan cuenta de la formulación correcta de la regla que aplica para encontrar el número de puntos de los valores solicitados.


c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10? 100

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 15? Explica cómo lo has hecho. 75 Porque: 15 x15 60 +15 =75

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 30? 90 Porque 30 x30 30 +60 =90

*Figura 5-7.* Respuestas de E5 en la Secuencia 4 del Bloque I. Incisos c), d) y e).

Se concluye que E5 transita, de forma adecuada, entre las acciones manipular, obtener sentido y articular durante la resolución de la Secuencia 4. Las acciones de E5 se resumen en M-M-M-OS-A. De la misma manera, se realizó el análisis de la Secuencia 4 con los 24 estudiantes restantes y las acciones que se reconocieron en cada uno se resumen en la Tabla 5-2.

*Tabla 5-2.* Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 4, Bloque I.

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | | | |
| E2 | M | | | | |
| E3 | M | | | | |
| E4 | | | | | |
| E5 | M | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | M | OS | |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | M | OS | A |
| E9 | | | | | |
| E10 | M | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | M | OS | A |
| E12 | M | M | M | OS | A |
| E13 | M | M | M | | |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | | | | | |
| E16 | M | M | M | OS | A |
| E17 | M | M | M | OS | A |
| E18 | M | M | M | | |
| E19 | M | | | | |
| E20 | NC | | | | |
| E21 | | | | | |
| E22 | | | | | |
| E23 | | | | | |
| E24 | | | | | |
| E25 | | | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

De acuerdo con la Tabla 5-2 se observa que esta secuencia resultó difícil de resolver para la mayoría de los estudiantes. Aunque la distribución de los puntos correspondía a formas cuadradas, no todos *prestaron atención* a esta cualidad figural de la secuencia. Por ejemplo, dos estudiantes hicieron explícita la diferencia entre términos y se asume, que con base en esas diferencias encontraron los siguientes términos cercanos (Figura 5-8), pero dicho procedimiento no resultó factible para hallar términos distantes.

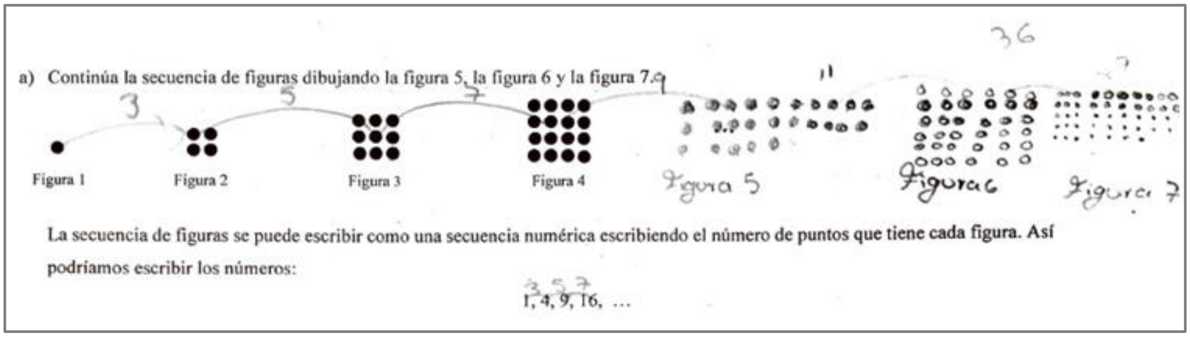


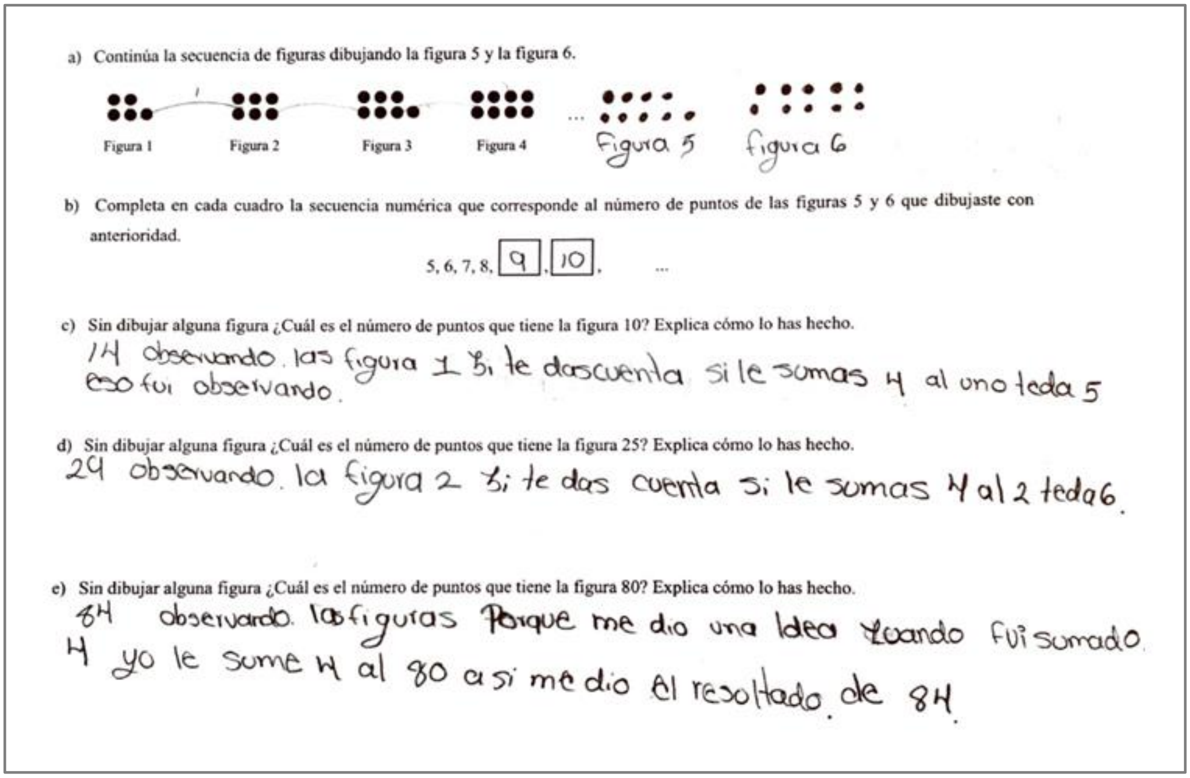

*Figura 5-8*. Estudiante E3 encontrando las diferencias entre los puntos de las figuras dadas.

Se interpreta en estos casos que la *estructura de atención* de los estudiantes estaba centrada solo en el *discernimiento de los detalles* (como la diferencia entre términos) y no en la *apreciación de la totalidad* (además de la diferencia, la distribución cuadrada de los puntos) que les permitiera identificar la relación entre el número de puntos y el número de la figura. Mason (1989) hace referencia a que la búsqueda de relaciones puede ser complicada, aunque se puedan apreciar características que se cumplen en una secuencia, éstas no siempre resultarán útiles para articular una generalización o se requerirán de características adicionales para conectarlas (lo que se denomina parte-parte o parte-todo).

También se interpreta, que la dificultad en la búsqueda de relaciones matemáticas radique en que no se tengan experiencias previas o esas experiencias no sean lo suficientemente robustas para conectar conocimientos anteriores con los nuevos, por ejemplo, la referencia del área de un cuadrado. O que las experiencias previas tengan mucho énfasis en lo sintáctico y no en lo semántico lo que impide apreciar su utilidad en nuevos contextos, por ejemplo, que las multiplicaciones tengan énfasis en lo memorístico de tal forma que en la Secuencia 4 algunos estudiantes no perciben que en lugar del conteo se pueden multiplicar $n$ filas por $m$ puntos de cada fila y además que $m = n$.

Adicionalmente, mediante la resolución de esta secuencia se detectó que varios estudiantes no sabían las tablas de multiplicar y tampoco el algoritmo de la multiplicación.

**Secuencia 8. Estudiante E3**. La secuencia compete a la relación aditiva $f(x) = x + 4$. El estudiante E3 resuelve correctamente la secuencia para las figuras 5 y 6 de manera figural como numérica (incisos a y b). A partir del inciso c) se puede interpretar que E3 empieza a obtener sentido de la generalidad lo cual se confirma a través de los siguientes incisos d) y e), concluyendo que el estudiante articula la regla de generalización que corresponde a la secuencia proporcionada (Figura 5-9).



a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5 y la figura 6.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ... Figura 5 figura 6

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5 y 6 que dibujaste con anterioridad.

5, 6, 7, 8, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, ...

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10? Explica cómo lo has hecho.

14 observando. las figura 1 Bi te dascuenta si le sumas 4 al uno teda 5 eso fui observando.

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25? Explica cómo lo has hecho.

29 observando. la figura 2 Bi te das cuenta si le sumas 4 al 2 teda6.

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 80? Explica cómo lo has hecho.

84 observando. lasfiguras Porque me dio una Idea Kuando fui sumado 4 yo le sume 4 al 80 asi me dio el resoltado. de 84.

*Figura 5-9*. Respuestas proporcionadas por E3 en la Secuencia 8.

Es importante reconocer que las acciones obtención de sentido y articular no ocurren en un momento específico ya que esto es muy propio de lo que sucede cognitivamente en cada estudiante. Sin embargo, el diseño de las secuencias y el análisis intentan plasmar aquellos dos momentos en los que se interpretan que ya ocurrieron tales acciones, de tal forma que cuando se aprecia el tránsito entre las diferentes acciones, la acción obtención de sentido suele reconocerse en el inciso d) y la acción articular en e).

El tránsito entre las acciones de la espiral de los 25 estudiantes respecto a la Secuencia 8 se presenta en la Tabla 5-3. Esta secuencia resultó difícil de resolver de igual manera que la Secuencia 6, ambas competen a relaciones aditivas de la forma $f(x) = x + b$ . Los estudiantes identifican la variación entre términos, pero resulta difícil para ellos encontrar la regla de generalización.

*Tabla 5-3.* Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 8, Bloque I.

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | | |
| E2 | | | | | |
| E3 | M | M | M | OS | A |
| E4 | M | M | | | |
| E5 | M | M | M | | |
| E6 | M | M | | | |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | OS | OS | A |
| E9 | M | M | M | OS | A |
| E10 | M | M | | | |
| E11 | M | M | | | |
| E12 | M | M | M | OS | A |
| E13 | M | M | M | M | |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | M | M | M | M | |
| E16 | M | M | M | | |
| E17 | M | M | M | M | |
| E18 | M | M | M | OS | |
| E19 | M | M | M | | |
| E20 | M | M | | | |
| E21 | M | M | M | | |
| E22 | M | M | M | M | |
| E23 | M | M | M | M | |
| E24 | M | M | | | |
| E25 | M | M | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

De modo análogo al presentado en este apartado se realizó el análisis para todas las secuencias figurales-numéricas del Bloque I. En el Anexo A se incluye el resumen del análisis de acciones de los estudiantes para todas las secuencias.

## 5.2 Bloque I. Expresiones de generalización

El siguiente análisis que se realizó tanto para el Bloque I como para los demás bloques corresponde a las expresiones proporcionadas por los estudiantes en cada secuencia y problema, con la finalidad de determinar en ellas el alcance de generalización algebraica. Las diferentes expresiones encontradas en todas las tareas de los bloques se clasificaron en cinco categorías, de acuerdo con el alcance de generalización algebraica comunicadas al expresar la relación de correspondencia que define a cada tarea. También fue de interés identificar el tipo de registro proporcionado.

Las categorías se describen a continuación y se ejemplifican con respuestas textuales proporcionadas por los estudiantes en las secuencias 1 y 2 del Bloque I. Asimismo, para mayor referente se muestra enseguida la clasificación de todas las respuestas registradas en la Secuencia 1. Las clasificaciones de las expresiones de generalización de las secuencias restantes se encuentran en el Anexo A.

- **Categoría 1.** Incluye aquellas expresiones que no refieren a las variables involucradas, ni a la variación, ni a la relación de correspondencia. Por ejemplo, en la Secuencia 1 definida por $f(x) = x$, al responder cuál es el número de puntos que tiene la figura 70 y explicar cómo se ha realizado, E21 escribe "tiene 70 me apoye en el ejemplo". Se evidencia la articulación de una regla de correspondencia que el estudiante usa para contestar correctamente de forma numérica, pero no hay estructura matemática en la expresión que produce.

- **Categoría 2.** Incluye expresiones en las que se menciona la variación o las variables, pero sin vincularlas a la relación de correspondencia. Por ejemplo, en la Secuencia 1, E16 escribe "70 porque las figuras ban de 1 en 1". En este caso, el estudiante se centra sólo en una variable (número de figura) y expresa la variación que percibe entre las figuras, pero no establece una relación de correspondencia. Otro ejemplo lo encontramos en E20 al expresar "70 porque es lo mismo", en esta expresión, aunque la palabra "mismo" apela a que E20 compara las dos variables involucradas, no escribe la relación de correspondencia de manera explícita.

- **Categoría 3.** Se consideran las expresiones que denotan la relación de correspondencia para un número particular, es decir, se expresa la generalización, pero aplicada al número solicitado u otro número al ejemplificar (generalización local). En la Secuencia 1, E5 escribe "R=70 ¿porque? porque aumenta de 1 en 1 y si es 70=70×1=70". La expresión 70×1=70 muestra la relación de correspondencia formulada, pero aplicada específicamente al número 70. Dos ejemplos en la Secuencia 2 definida por $f(x) = 2x$ al responder cuál es el número de puntos que tiene la figura 100 y explicar cómo se ha realizado, son los siguientes: E11 escribe "200 por que el doble de 100 es = 200"; y E3 "100 lo puedes multiplicar por 2 y así te da 200", en ambas expresiones se evidencia la regla correcta de correspondencia, pero específicamente para el número 100.

- **Categoría 4.** Se consideran aquellas expresiones que dan cuenta de lo que ocurre de manera general con la relación entre las dos variables, por ejemplo, E14 en la Secuencia 1 escribe "70 puntos porque cada punto tiene el mismo numero que el de las figuras". La expresión evidencia la relación de correspondencia, sin embargo, no cada punto tiene el mismo número que el de las figuras, sino el número de puntos es el mismo número que el de las figuras. También se asume que la expresión proporcionada en esta categoría da referencia de que los estudiantes consideran que la regla se aplica a diferentes valores, sin que se pretenda que ellos tengan noción del conjunto dominio de la relación de correspondencia.

- **Categoría 5.** Las expresiones son concisas y precisas. Evocan un término cualquiera. Nuevamente se enfatiza que, aunque las expresiones dan cuenta de que los estudiantes consideran una regla que se aplica a diferentes valores, no se asume que ellos tengan noción del conjunto dominio de la relación de correspondencia. Por ejemplo, en la Secuencia 1, E10 escribe "el número de la figura es el mismo que el de los puntos".

Las expresiones que se destacan pertenecen a las categorías 3, 4 y 5. La Categoría 3 da evidencia de una regla correcta pero aplicada de manera local, sólo a un caso particular. Las expresiones de las categorías 3 y 4 se distinguen por la generalidad algebraica que se formula en ellas.

A continuación, se presenta la clasificación de las respuestas proporcionadas por los estudiantes en el inciso e) de la Secuencia 1, Bloque I. De los 25 estudiantes, 23 de ellos ofrecieron una explicación de cómo habían encontrado el número de puntos para la figura 70. Aunque las 23 respuestas proporcionadas ofrecen el valor correcto, es decir, 70 puntos que le corresponden a la figura 70, no todos los estudiantes lograron comunicar una expresión de carácter algebraico. De las respuestas, 9 fueron clasificadas en la Categoría 1, 7 en la Categoría 2, 3 en la Categoría 3, 2 en la Categoría 4 y 2 en la Categoría 5 (Tabla 5-4).

*Tabla 5-4.* Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso e), Secuencia 1, Bloque I.

| **Categoría 1** |
|---|
| E1. 70 puntos lo hice contando los numeros en mi mente y leyendo muy bien las preguntas |
| E7. 70 multiplicando y sumando |
| E12. 70 pensando cuantos puntos tendría si fuera dibujando |
| E15. con 70 puntos o otra figuras mas |
| E18. 70 puntos yo lo he hecho como me lo valla explicando la pregunta. |
| E19. viendo figuras y lo conte y me dio 70 |
| E21. tiene 70 me apoye en el ejemplo |
| E23. sume de 10 en 10 asta que llege a 70, 10+10+10+10+10+10+10=70 |
| E25. primero deberiamo escribir 70 bolitas y ya sabras el resultado |

| **Categoría 2** |
|---|
| E3. 70 porque las figuras ban de 1 en 1<br>E9. tiene 70 porque es de un puntito por ejemplo si pongo 10 siempre va a ser 10<br>E11. 70 porque el numero 70 que te muestra es esa cantidad que es<br>E16. 70 va aumentando de 1 en 1<br>E17. 70. boy siguiendo por los números o por los puntos.<br>E20. 70 porque es lo mismo<br>E24. 70 porque me fije de los puntos y números |
| **Categoría 3** |
| E5. R=70 ¿porque? porque aumenta de 1 en 1 y si es 70=70x1=70<br>E13. 70 puntos. En las figuras se puede ver que avanza de uno en uno así que si la figura 1 tiene un punto la figura 2 tendrá 2 puntos.<br>E22. 70 puntos yo busque su patron la figura 1 tiene 1 punto y la figura 2 tiene 2 puntos y asi lo estube haciendo |
| **Categoría 4** |
| E6. 70 puntitos cada figura tiene los mismos puntitos. ejemplo: figura 1 = 1 puntito<br>E14. 70 puntos porque cada punto tiene el mismo numero que el de las figuras |
| **Categoría 5** |
| E8. 70, porque el numero de figuras es lo mismo que el de puntos, ejemplo: si el numero de figura es 100 igual los puntos seran 100<br>E10. 70 puntos el número de la figura es el mismo que el de los puntos |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

## 5.3 Bloque II. Espiral de acciones

A continuación, se presenta el análisis de las secuencias que corresponden al Bloque II. En esta sección 5.3 se explica el análisis del tránsito por la espiral de acciones; en la sección 5.4, la clasificación de las expresiones de generalización.

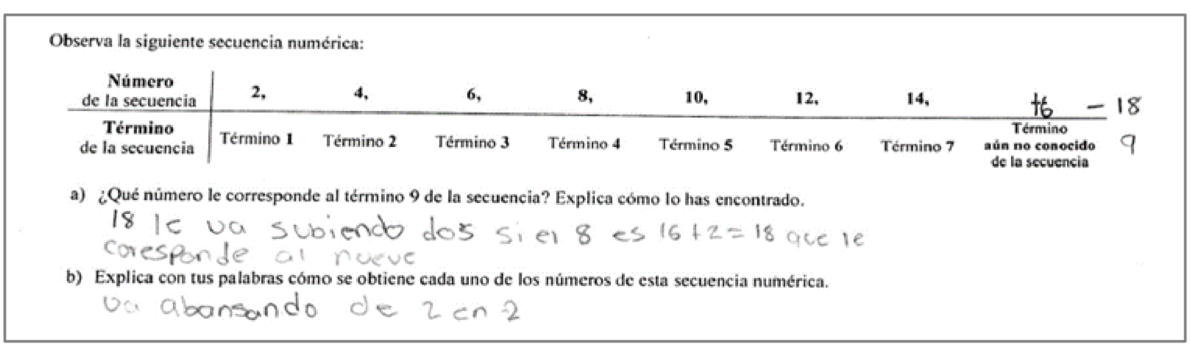
La Figura 5-10 presenta la interpretación de la espiral de acciones respecto a las respuestas de los incisos de las secuencias numéricas de este bloque. Las respuestas o procedimientos correctos de los tres primeros incisos permiten interpretar en los estudiantes la transición de un primer ciclo de acciones: manipular (inciso a), obtener sentido de (inciso b) y articular (inciso c). En c) se solicita explícitamente escribir una regla, sin embargo, si los estudiantes no lograran articularla ni expresarla, entonces las respuestas correctas del inciso d) podrían dar cuenta del uso implícito o explícito de la regla de generalización.

El inciso d) se caracteriza como el tránsito hacia un segundo ciclo de acciones mediante el *regreso* a la acción manipular a través de un valor lejano (término 500) que dé evidencia de la obtención de sentido y en su caso, a la formulación o reformulación de la regla de generalización. La respuesta correcta en e) es referencia del alcance de la generalización que manifiestan los estudiantes, interpretado a través del valor que proporcionen, según este sea cercano o lejano. Finalmente, las explicaciones otorgadas en los incisos a) y b), la regla explícita solicitada en c), la resolución y explicación en d) permiten analizar el registro y las expresiones de generalización que producen los estudiantes.


*Figura 5-10.* Interpretación de la espiral de acciones en las secuencias del Bloque II. Elaboración propia.

En este apartado se presentan las diferentes respuestas de dos estudiantes en la Secuencia 9 para ejemplificar el análisis del proceso de generalización. El resumen de acciones de los estudiantes respecto a la Secuencia 10 se encuentra en el Anexo B.

**Secuencia 9. Estudiantes E9 y E13.** La estructura matemática que compete a esta secuencia numérica es $f(x) = 2x$. Las respuestas de E9 proporcionan evidencia de que mediante la manipulación de los casos particulares identifica cómo varían los números de la secuencia, reconociendo esa variación como una diferencia de 2 unidades (inciso a). La explicación que proporciona en b) permite apreciar esa variación que reconoce (Figura 5-11).



Observa la siguiente secuencia numérica:

| Número de la secuencia | 2, | 4, | 6, | 8, | 10, | 12, | 14, | ~~16~~ — 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Término de la secuencia | Término 1 | Término 2 | Término 3 | Término 4 | Término 5 | Término 6 | Término 7 | Término aún no conocido de la secuencia 9 |

a) ¿Qué número le corresponde al término 9 de la secuencia? Explica cómo lo has encontrado.

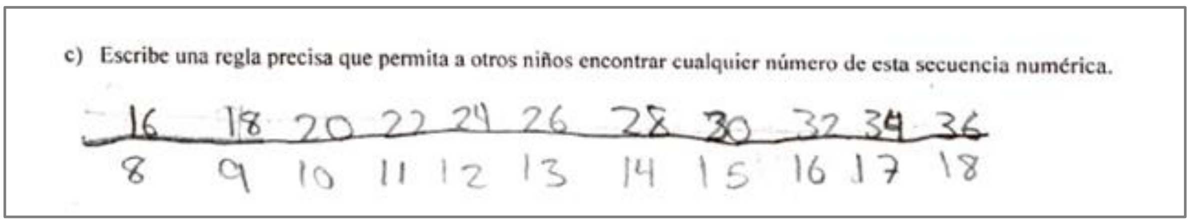
18 le va subiendo dos si el 8 es 16+2=18 que le corresponde al nueve

b) Explica con tus palabras cómo se obtiene cada uno de los números de esta secuencia numérica.

va abansando de 2 en 2

*Figura 5-11*. Respuestas del Estudiante E9 en los incisos a) y b) de la Secuencia 9, Bloque II.

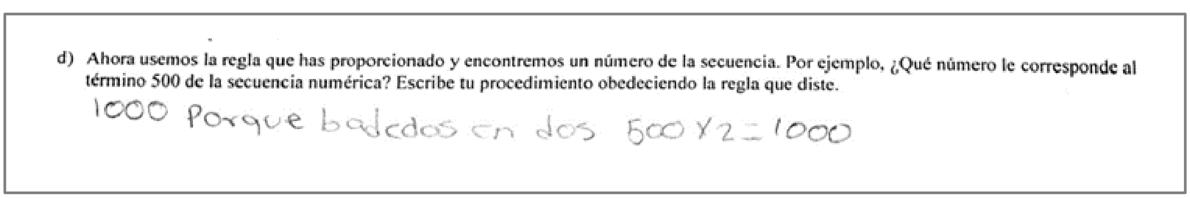
En el inciso c), E9 expresa su regla mediante la ejemplificación de casos particulares, desde el término 8 hasta el 18 (Figura 5-12), distinguiéndose la continuación de los términos proporcionados en el registro tabular. De acuerdo con el diseño de las secuencias, desde el inciso a) hasta c) se promueve un ciclo de acciones, pero por las respuestas de E9 se interpreta que no transita a las acciones obtención de sentido y articular, sus acciones corresponden solamente a la acción manipular, es decir, M-M-M. No obstante, la respuesta proporcionada en el inciso c) permite dar cuenta que E9 lleva a cabo la acción que Mason (1980) denomina especialización. Esta acción refiere a la manipulación de nuevos ejemplos cercanos o incluso lejanos para volver a ascender en la espiral. Los nuevos ejemplos que se construyen suelen conducir, a veces, al reconocimiento de la estructura de generalización.


c) Escribe una regla precisa que permita a otros niños encontrar cualquier número de esta secuencia numérica.

16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36
8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

*Figura 5-12*. Respuesta del Estudiante E9 en el inciso c) de la Secuencia 9, Bloque II.

Continuando con las respuestas de E9, se identifica en el inciso d) la manipulación del caso particular lejano (término 500) el cual multiplica por 2. Se interpreta de los incisos c) y d) que E9 asciende en la espiral de acciones evidenciado obtención de sentido y articulación de la generalización deseada. Las acciones que se manifiestan en E9 para el inciso d) son M-OS-A (Figura 5-13).

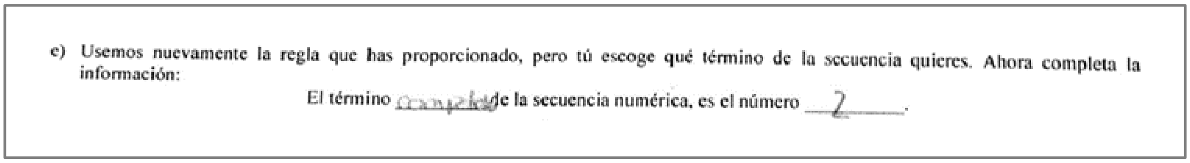

d) Ahora usemos la regla que has proporcionado y encontremos un número de la secuencia. Por ejemplo, ¿Qué número le corresponde al término 500 de la secuencia numérica? Escribe tu procedimiento obedeciendo la regla que diste.

1000 Porque badcdos en dos 500X2=1000

*Figura 5-13*. Respuesta del Estudiante E9 en el inciso d) de la Secuencia 9, Bloque II.

Se aprecia en las diferentes respuestas de E9 cómo se van modificando sus expresiones para denotar la variación que identifica entre términos: “$16 + 2 = 18$”, “va avanzando de 2 en 2” y “$500 \times 2 = 1000$”. Pero es hasta el inciso d), en el segundo ciclo de acciones, que se reconoce en E9 la obtención de sentido y articulación de una regla de generalización (Categoría 3) que usa, específicamente, para el valor 500.

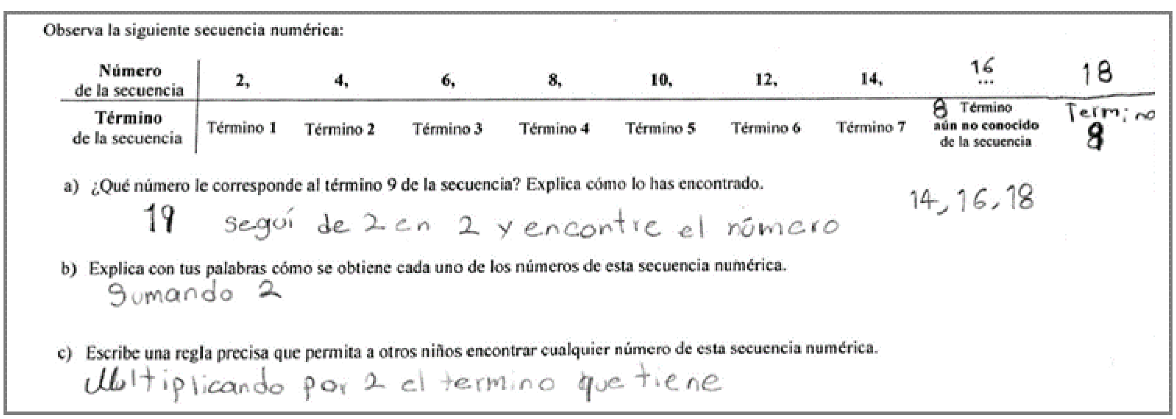
Finalmente, en el inciso e) en el que se espera identificar el alcance de la generalidad se aprecia que el cuestionamiento no resultó claro para E9 (Figura 5-14).


e) Usemos nuevamente la regla que has proporcionado, pero tú escoge qué término de la secuencia quieres. Ahora completa la información:

El término [illegible] de la secuencia numérica, es el número 2.

*Figura 5-14*. Respuesta del Estudiante E9 en el inciso e) de la Secuencia 9, Bloque II.

A diferencia de E9, se puede apreciar claramente cómo E13 transita en las acciones manipular, obtención de sentido y articular completando un ciclo de acciones desde el inciso a) hasta c), que culmina con la expresión de una regla de generalización algebraica en c). En el inciso a) hace notar que los números de la secuencia van de 2 en 2 (primer registro), en b) expresa que los números de la secuencia se obtienen "sumando 2" (segundo registro) y en c) expresa una regla concisa al escribir "multiplicando por 2 el término que tiene" (Figura 5-15). Se concluye que las acciones de E13 son M-OS-A, primer ciclo de acciones para los incisos a)-c).


Observa la siguiente secuencia numérica:

| Número de la secuencia | 2, | 4, | 6, | 8, | 10, | 12, | 14, | 16 ... | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Término de la secuencia | Término 1 | Término 2 | Término 3 | Término 4 | Término 5 | Término 6 | Término 7 | 8 Término aún no conocido de la secuencia | Termino 9 |

a) ¿Qué número le corresponde al término 9 de la secuencia? Explica cómo lo has encontrado.

19 segui de 2 en 2 y encontre el número 14, 16, 18

b) Explica con tus palabras cómo se obtiene cada uno de los números de esta secuencia numérica.

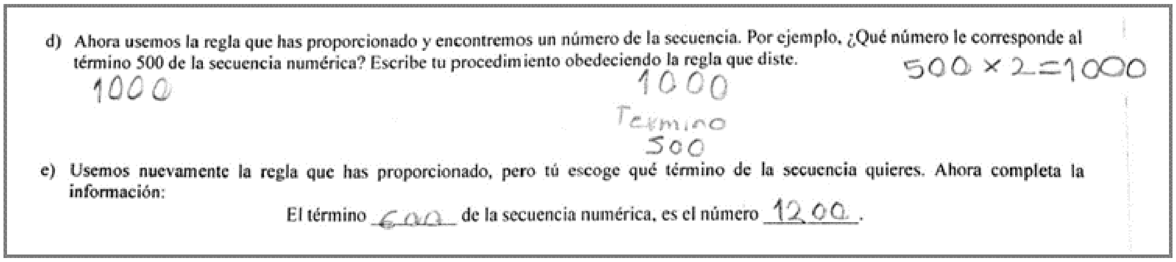
Sumando 2

c) Escribe una regla precisa que permita a otros niños encontrar cualquier número de esta secuencia numérica.

Multiplicando por 2 el termino que tiene

*Figura 5-15.* Respuestas del Estudiante 13 en la Secuencia 9, Bloque II. Incisos a), b) y c).

En el inciso d) se observa que E13 aplica para el término 500 (Figura 5-16) la regla que articuló y expresó correctamente, por lo tanto, sus acciones se clasifican nuevamente en M-OS-A, segundo ciclo de acciones definido para el inciso d).


d) Ahora usemos la regla que has proporcionado y encontremos un número de la secuencia. Por ejemplo, ¿Qué número le corresponde al término 500 de la secuencia numérica? Escribe tu procedimiento obedeciendo la regla que diste.
1000 1000 500 × 2 = 1000
Termino 500

e) Usemos nuevamente la regla que has proporcionado, pero tú escoge qué término de la secuencia quieres. Ahora completa la información:
El término 600 de la secuencia numérica, es el número 1200.

*Figura 5-16.* Respuestas del Estudiante 13 en la Secuencia 9 del Bloque II. Incisos d) y e).

Por último, en el inciso e) al solicitarle que proporcione el término que desee y encuentre el número correspondiente, E13 escoge el término 600 (Figura 5-16). Se puede apreciar de acuerdo con Mason (1999) el alcance de la generalidad que representa la secuencia para dicho estudiante. El valor proporcionado se clasificó como generalización lejana (GL).

De modo similar se realizó el análisis correspondiente de las respuestas de los otros 23 estudiantes para la Secuencia 9 y las acciones que se reconocieron en cada uno se resumen en la Tabla 5-5. Cabe mencionar, nuevamente, que se promovieron dos ciclos de acciones, uno inicial (incisos a, b y c) y uno de regreso (inciso d), así como el alcance de la generalización que percibe cada estudiante (inciso e). Se encontró que algunos de ellos sí lograron transitar en el primer ciclo de acciones, mientras que otros estudiantes se quedaron en la acción manipular; y fue hasta el segundo ciclo de acciones (inciso d) que se interpretó a través de sus respuestas, la articulación de la regla de generalización.

*Tabla 5-5*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 9, Bloque II.

| **E** | **a), b), c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|
| E1 | M-M | M-OS-A | GC1 |
| E2 | M-OS-A | M-OS-A | |
| E3 | M-OS-A | M-OS-A | GC2 |
| E4 | | NC | |
| E5 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E6 | M-OS-A | M-OS-A | |
| E7 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E8 | M-OS-A | M-OS-A | GC1 |
| E9 | M-M-M | M-OS-A | |
| E10 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E11 | M | NC | |
| E12 | M-M-M | M-OS-A | GC1 |
| E13 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E14 | M-OS-A | M-OS-A | GC1 |
| E15 | M | M-OS-A | |
| E16 | M | M-OS-A | GC1 |
| E17 | M-OS-A | M-OS-A | GC1 |
| E18 | M-OS-A | M-OS-A | GC2 |
| E19 | M-OS | M-OS-A | GC1 |
| E20 | M-M | NC | NC |
| E21 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E22 | M | M-OS-A | |
| E23 | M | | |
| E24 | M | | |
| E25 | M | NC | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; GC1=Generalización Cercana Tipo 1 (valores entre 6 y 13); GC2=Generalización Cercana Tipo 2 (valores 30 y 47); GL=Generalización Lejana (valores entre 100 y 1000). Espacio en blanco=Se interpreta que el estudiante no logra alguna de las acciones M, OS, A o no proporciona correctamente un valor en el inciso e). NC=No contestó.*

Respecto al inciso e), a través de los valores proporcionados se aprecia el alcance de la generalización que manifestaron algunos estudiantes en relación con la secuencia, estos valores se clasificaron como Generalización Cercana Tipo 1 o Tipo 2 (GCT1 o GCT2) o Generalización Lejana (GL). Siete estudiantes escogieron valores entre 6 y 13 (GCT1), dos estudiantes escogieron los valores 30 y 47 (GCT2) y cinco estudiantes valores entre 100 y 1000 (GL).

La Secuencia 10 de este bloque se analizó de manera semejante, el resumen de resultados se encuentra en el Anexo B.

## 5.4. Bloque II. Expresiones de generalización

Respecto a las expresiones de generalización que proporcionaron los estudiantes para la Secuencia 9, en la Tabla 5-6 se muestra la clasificación de acuerdo con las cinco categorías descritas en el apartado 5.2.

Las expresiones reportadas en la Tabla 5-6 fueron tomadas en su mayoría de las explicaciones solicitadas en los incisos a) o b) de la secuencia, ya que se observó en varios estudiantes que el vocablo "regla" no tuvo la connotación de fórmula matemática como se esperaba propiciar. En virtud de que los estudiantes no tienen entrenamiento en este tipo de tareas, las expresiones de generalización como regla o fórmula matemática surgieron en varios de ellos cuando se les solicitaba explicar lo realizado.

*Tabla 5-6*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso a), b) o c) de la Secuencia 9, Bloque II.

| **Categoría 1** |
|---|
| E16. a) Fijándome en la secuencia<br>E25. b) Fui contando |
| **Categoría 2** |
| E1. b) si hay 2 y 4 es fácil sabras que de 2 en 2 va / c) podrían contar de cuanto en cuanto va y el ultimo te dara<br>E9. b) va abansando de 2 en 2<br>E11. b) la secuencia de dos en dos<br>E12. c) contando de 2 en 2<br>E15. a) abansa de 2 en 2<br>E19) b) multiplicando o a vese sumando |

| |
|---|
| **Categoría 2** |
| E20. b) los números ban abansando de 2 en 2<br>E22. a) avansa en 2 en 2<br>E23. a) avansa de 2 en 2 / b) sumando lo que se pide<br>E24. b) esta secuencia avansa de 2 en 2 |
| **Categoría 3** |
| E6. c) multiplicar 2 x 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 |
| **Categoría 4** |
| E2. b) multiplicado por 2<br>E3. b) multiplicando x 2<br>E5. b) multiplicando de la tabla del 2<br>E18. c) multiplicar por 2 lo que te piden<br>E21. b) de la secuencia numérica el 8 es 16 el 9 es 18 es el doble de los números |
| **Categoría 5** |
| E7. c) multiplicar el término por dos<br>E8. c) Multiplicando por 2 el término, por ejemplo, si el termino es 10, la secuencia es 20<br>E10. b) multiplicando 2 al numero / c) solo ve el numero que este y multiplicalo por 2<br>E13. c) Multiplicando por 2 el termino que tiene<br>E14. c) Multiplicar por 2 el número que te dan<br>E17. c) Es multiplicar el numero del termino por dos |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

En primer lugar, se puede concluir respecto a los Bloques I y II y acorde con Mason et al. (2005), que los estudiantes sí tienen la capacidad de generalizar y pueden expresar generalizaciones algebraicas, en algunos estudiantes esta capacidad se percibe más desarrollada.

En segundo lugar, los estudiantes no tuvieron dificultades para trabajar con secuencias figurales-numéricas y numéricas; e interpretar, adecuadamente, los datos presentados en registros tabulares. Asimismo, pudieron identificar características relevantes de las secuencias, principalmente la variación entre términos, lo que les permitió llevar a cabo generalizaciones cercanas. Algunos estudiantes también pudieron encontrar generalizaciones lejanas y articular una regla de generalización, principalmente para aquellas relaciones matemáticas de la forma $f(x) = ax$ , esto puede ser debido a que la regla de generalización se determina solamente por el valor de la variación, lo cual no ocurre en aquellas de la forma $f(x) = x + b$, en las que, además del valor de la variación se requiere tomar en cuenta el valor inicial de la secuencia y esto dificulta encontrar y expresar la regla de generalización. Sin embargo, en la medida en que los estudiantes van adquiriendo experiencia al resolver las secuencias se considera que incrementa su repertorio de conocimientos, por ejemplo, en las secuencias 2 y 9 que competen a la misma relación $f(x) = 2x$, se pudo observar mayor precisión en las expresiones de generalización proporcionadas para la Secuencia 9.

Mason (1989) expresa que conforme los alumnos adquieren experiencia van refinando sus expresiones, de manera que los registros escritos pueden pasar por diversos borradores antes de convertirse en sucintos y formales (Mason, et al., 1999). Dicho autor destaca tener en cuenta que se requiere tiempo para fortalecer y desarrollar esa capacidad natural para generalizar, así como tiempo para poder expresarla.

Por último, con relación a las expresiones de generalización, se puede apreciar que los estudiantes se comunican principalmente mediante palabras con un lenguaje idiosincrásico. Algunos registros son una combinación de palabras con símbolos aritméticos y pocos realizan dibujos. Las únicas respuestas que evidenciaron registro con dibujos fueron las de E12 y E16.

E12 resolvió los incisos c) y d) de la Secuencia 5 definida por $f(x) = 3x$ continuando el patrón figural como se puede apreciar en la Figura 5-17; estas construcciones le permitieron ir de lo figural a lo numérico.

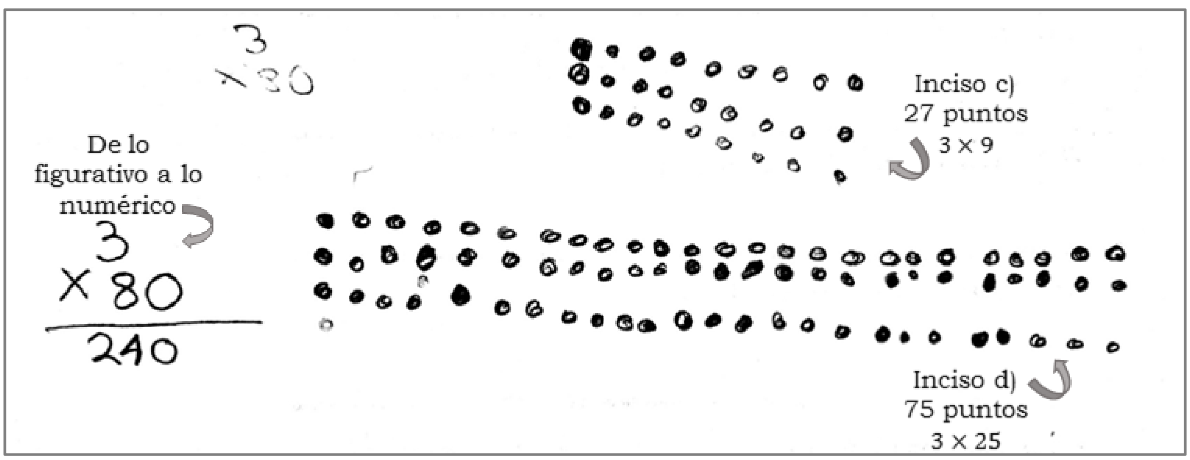
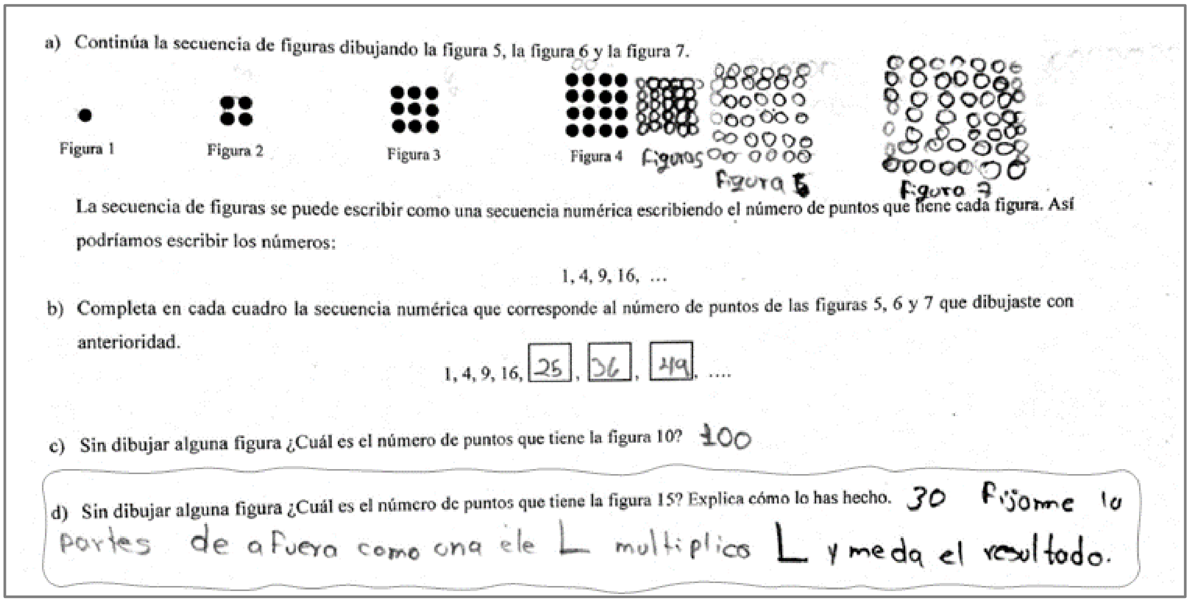



*Figura 5-17.* Respuestas del Estudiante 12 en la Secuencia 5 del Bloque I. Incisos c) y d).

Por su parte E16, en la Secuencia 4 definida por $f(x) = x^2$ escribió su regla de generalización mediante palabras y dibujos como se aprecia en el inciso d) de la Figura 5-18. Adicionalmente, se interpreta que plantea la operación $15 \times 15$, pero en lugar de multiplicar realizó la suma, lo que dio como resultado 30 en lugar de 225.



a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figuras Figura 5 Figura 7

La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

1, 4, 9, 16, …

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

1, 4, 9, 16, $\boxed{25}$, $\boxed{36}$, $\boxed{49}$, ….

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10? 100

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 15? Explica cómo lo has hecho. 30 Fijome lo portes de a Fuera como ona ele L multiplico L y meda el resultodo.

*Figura 5-18.* Respuestas del Estudiante 16 en la Secuencia 4 del Bloque I. Regla de generalización mediante palabras y dibujos, inciso d).

Finalmente, con relación a las expresiones de generalización, la mayoría de los estudiantes proporcionan evidencia del manejo de una regla implícita que les permite encontrar las respuestas correctas en las diferentes secuencias. Se encontró que algunos pueden comunicar las relaciones de correspondencia mediante reglas de generalización algebraica; unos de forma imprecisa y otros de forma concisa, incluso, haciendo referencia a un término cualquiera.

# Capítulo VI

## Análisis de los problemas pertenecientes a los Bloques III y IV

Las tareas de los Bloques III y IV competen a problemas en contexto, los cuales se caracterizan por tener información textual que describe la situación problema. Los problemas pertenecientes al Bloque III se aplicaron durante el ciclo escolar 2017-2018 y los problemas del Bloque IV durante todo el ciclo escolar 2018-2019.

### 6.1 Bloque III. Espiral de acciones

En la Figura 6-1 se presenta el diagrama de la interpretación de la espiral de acciones realizada con base en los valores numéricos, correctos y faltantes de cada tabla proporcionada en los problemas que competen a este bloque. Los valores correctos encontrados por los estudiantes para la variable dependiente, a partir de los valores cercanos de la variable independiente que les son proporcionados, dan referencia de que se encuentran en la acción manipular. La obtención de sentido se interpreta que ocurre cuando los estudiantes encuentran los valores correctos para la variable independiente, a partir de valores cercanos o no tan lejanos de la variable dependiente. Finalmente, se considera que la acción articular ha ocurrido cuando los estudiantes encuentran los valores correctos tanto de la variable dependiente como independiente para valores lejanos proporcionados, ya que da cuenta de que los estudiantes hacen uso de la regla implícita que compete a la relación de correspondencia, así como también evidencian el manejo de operaciones inversas.

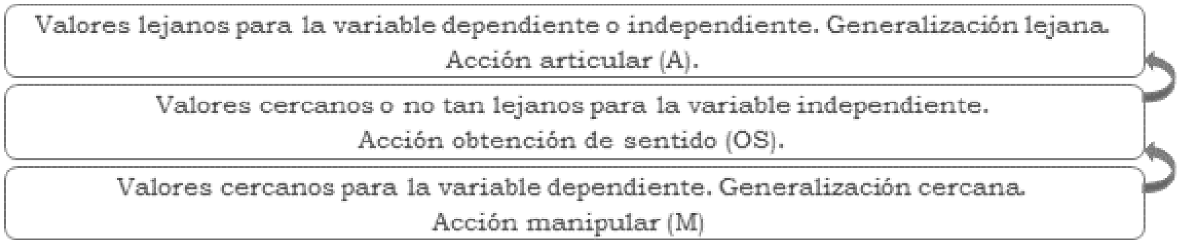
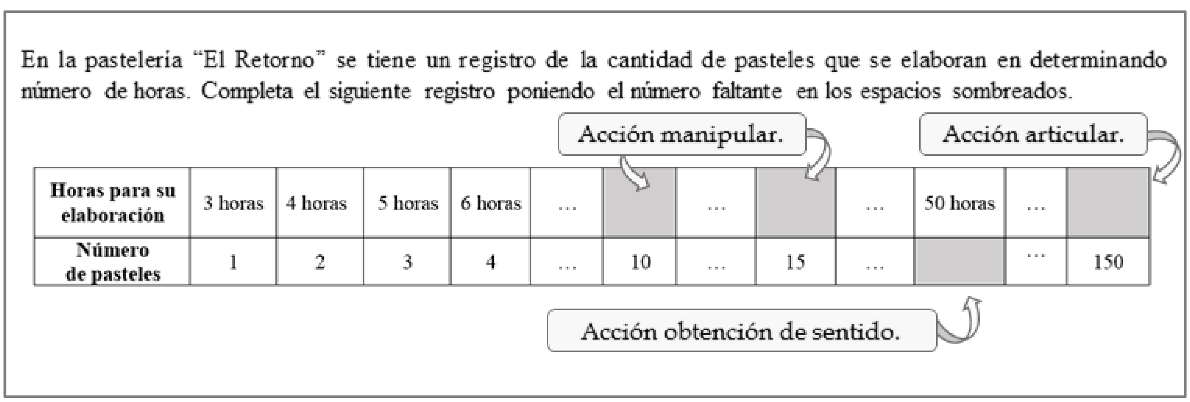



*Figura 6-1.* Interpretación de la espiral de acciones en los problemas del Bloque III. Elaboración propia.

A continuación, se ejemplifica la forma de llevar a cabo, el análisis de la espiral de acciones mediante las respuestas proporcionadas por algunos estudiantes en el Problema 2.

**Problema 2. Estudiantes E21, E19 y E3.** La estructura matemática que compete al Problema 2 es $f(x) = x + 2$. La tabla que se incluye en el problema requiere ser completada correctamente con cuatro valores: los valores de la variable dependiente para 10 y 15 (ver Figura 6-2) que competen a la acción manipular, el valor de la variable independiente para 50 que evidencia la acción obtención de sentido y, finalmente, el valor que le corresponde a 150 que manifiesta la acción articular.

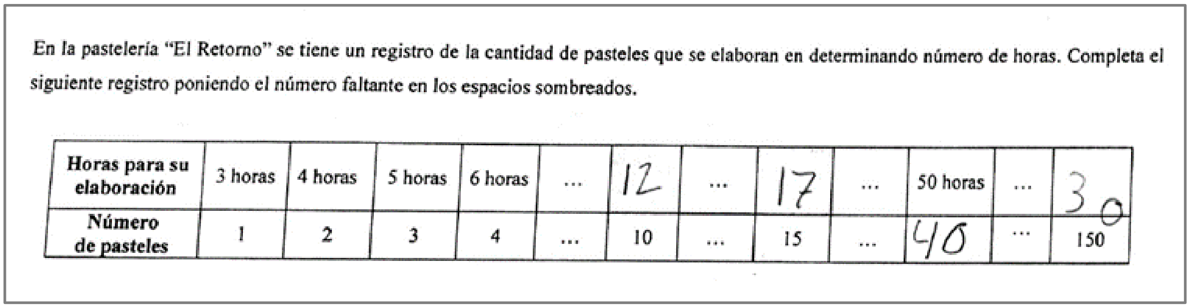

En la pastelería "El Retorno" se tiene un registro de la cantidad de pasteles que se elaboran en determinando número de horas. Completa el siguiente registro poniendo el número faltante en los espacios sombreados.

| **Horas para su elaboración** | 3 horas | 4 horas | 5 horas | 6 horas | … | | … | | … | 50 horas | … | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de pasteles** | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 10 | … | 15 | … | | … | 150 |



*Figura 6-2.* Interpretación de la espiral de acciones en el Problema 2, Bloque III.

Revisemos a continuación, las respuestas de los estudiantes E21, E19 y E13 para ejemplificar el análisis de la espiral de acciones. E21 proporciona correctamente los valores correspondientes para 10 y 15 pero no para 50 ni 150, por lo tanto, se concluye que no transita a las acciones obtención de sentido y articular (Figura 6-3).

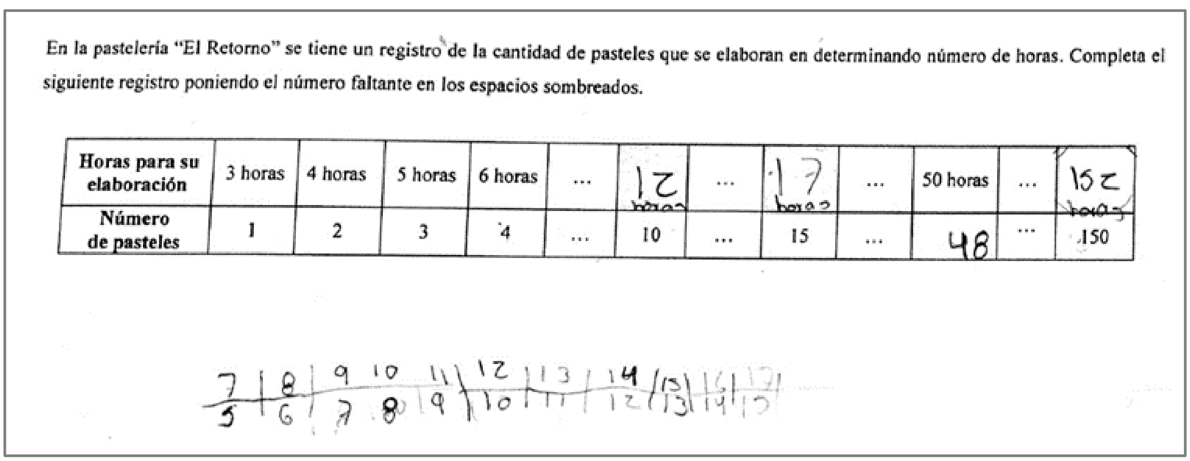


En la pastelería "El Retorno" se tiene un registro de la cantidad de pasteles que se elaboran en determinando número de horas. Completa el siguiente registro poniendo el número faltante en los espacios sombreados.

| Horas para su elaboración | 3 horas | 4 horas | 5 horas | 6 horas | … | 12 | … | 17 | … | 50 horas | … | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de pasteles | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 10 | … | 15 | … | 40 | … | 150 |

*Figura 6-3.* Valores proporcionados por E21 en el Problema 2, Bloque III.

En el caso de E19 sí proporciona correctamente todos los valores faltantes requeridos, lo que permite asumir que transita en las tres acciones de un ciclo completo de la espiral, asumiendo que articula, implícitamente, de forma correcta la regla de generalización que compete al problema. Se observa en la hoja de respuestas de E19 que manipula otros casos particulares cercanos (Figura 6-4), desde el valor 5 de la variable independiente hasta el valor 15, de ahí, se interpreta que E19 obtiene sentido y articula la regla de generalización que le permite encontrar los valores restantes.



En la pastelería "El Retorno" se tiene un registro de la cantidad de pasteles que se elaboran en determinando número de horas. Completa el siguiente registro poniendo el número faltante en los espacios sombreados.

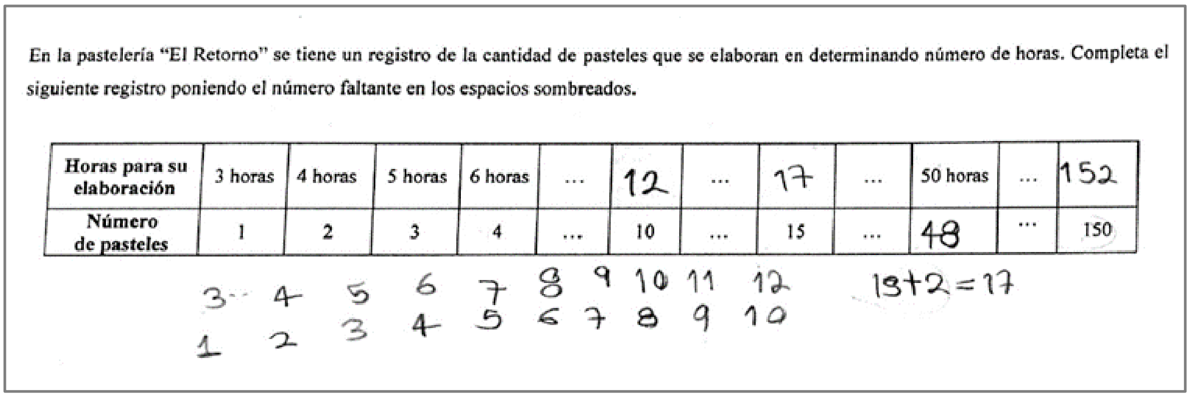
| Horas para su elaboración | 3 horas | 4 horas | 5 horas | 6 horas | … | 12 horas | … | 17 horas | … | 50 horas | … | 152 horas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de pasteles | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 10 | … | 15 | … | 48 | … | 150 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

*Figura 6-4.* Valores proporcionados por E19 en el Problema 2, Bloque III.

Por su parte, el estudiante E13 procede de manera similar a E19 manipulando otros valores particulares; reescribe los primeros pares de valores proporcionados en el problema y encuentra los siguientes, hasta el par ordenado (10, 12). Se interpreta que E13 transita a las acciones obtención de sentido y articular, incluso, se observa que escribe “15+2=17” evidenciando la regla de correspondencia aplicada a un caso particular (ver Figura 6-5), aunque en estas tareas no se solicitó explicar procedimientos ni escribir alguna regla.

Se reconoce que E19 y E13 construyen nuevos ejemplos que les permitan ascender en la espiral de acciones. Como se ha mencionado con anterioridad, esta acción de construir nuevos ejemplos para poder obtener sentido y lograr la articulación deseada se conoce como especialización.


En la pastelería “El Retorno” se tiene un registro de la cantidad de pasteles que se elaboran en determinando número de horas. Completa el siguiente registro poniendo el número faltante en los espacios sombreados.

| Horas para su elaboración | 3 horas | 4 horas | 5 horas | 6 horas | … | 12 | … | 17 | … | 50 horas | … | 152 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de pasteles | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 10 | … | 15 | … | 48 | … | 150 |

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 15+2=17
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

*Figura 6-5.* Valores proporcionados por E13 en el Problema 2, Bloque III.

Se concluye que las acciones de E21 son M-M, mientras que para E19 y E13, M-M-OS-A, destacando que en E13 se evidencia la obtención de sentido y la articulación de la regla con anticipación. Se ha mencionado con anterioridad que estas últimas acciones no tienen un momento específico por su naturaleza cognitiva, pero el diseño de las secuencias y el análisis intentan plasmar aquellos dos momentos en los que se interpretan que ya han ocurrido tales acciones. Y para el Problema 2, la acción obtención de sentido suele concretarse con el par ordenado (48, 50) y la acción articular con el par (150, 152), asumiendo correctos todos los pares ordenados anteriores a ellos.

De manera análoga se realizó el análisis de los valores proporcionados para este Problema 2 por los 22 estudiantes restantes. El resumen de las acciones se presenta en la Tabla 6-1. Los valores correctos V1 y V2 corresponden a la acción manipular, el valor V3 a la acción obtención de sentido y el valor V4 a la acción articular.

*Tabla 6-1*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 2, Bloque III.

| E | V1 | V2 | V3 | V4 |
|---|---|---|---|---|
| E1 | | | | |
| E2 | | | | |
| E3 | M | M | OS | A |
| E4 | M | M | NC | |
| E5 | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | OS | A |
| E7 | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | OS | A |
| E9 | | | | |
| E10 | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | OS | |
| E12 | | | | |
| E13 | M | M | OS | A |
| E14 | M | M | OS | A |
| E15 | | | | |
| E16 | | | | |
| E17 | M | M | OS | A |
| E18 | M | M | OS | A |
| E19 | M | M | OS | A |
| E20 | M | M | | |
| E21 | M | M | | |
| E22 | | | | |
| E23 | M | M | OS | |
| E24 | | | | |
| E25 | M | M | | |

*Nota: E=Estudiante; V1-V4 representan los cuatro valores solicitados en el Problema 2, ordenados de izquierda a derecha en el registro tabular; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

El resumen de resultados para los problemas 1 y 3 se presentan en el Anexo C. En los problemas de este bloque no se solicitó proporcionar explicaciones, por lo tanto, no hay evidencia de expresiones de generalización.

## 6.2 Bloque IV. Espiral de acciones y expresiones de generalización

En el diagrama de la Figura 6-6 se muestra cómo se interpreta, de manera general, la espiral de acciones en los problemas del Bloque IV.

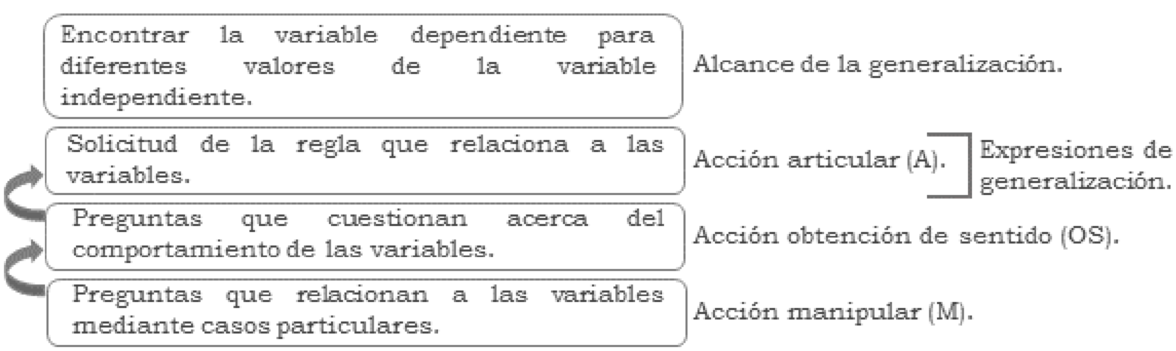



*Figura 6-6.* Interpretación de la espiral de acciones en los problemas del Bloque IV.

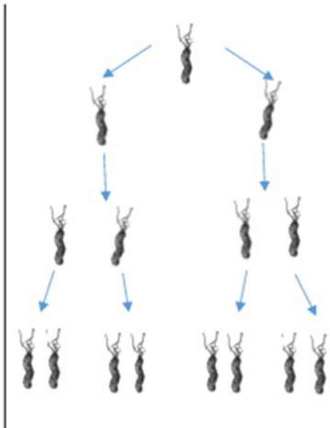
Las respuestas o procedimientos correctos a las primeras preguntas que refieren casos particulares, de valores cercanos, permiten apreciar en los estudiantes la acción manipular. Asimismo, son indicadores de que los estudiantes empiezan a identificar aquello que permanece o cambia y permiten el tránsito hacia la obtención de sentido, acción que se concreta al responder, correctamente, a las siguientes preguntas que cuestionan sobre el comportamiento de las variables involucradas en cada problema presentado. La respuesta correcta o con mayor precisión de la regla de correspondencia es referencia de que ha ocurrido la acción articular y también da cuenta acerca de la expresión de generalización algebraica que produce el estudiante. Es importante mencionar que cada problema tiene características particulares y, por tanto, el análisis de la espiral de acciones se describe específicamente para cada problema.

A continuación, se ejemplificará el análisis de la espiral de acciones presentando la resolución de dos problemas. La aplicación de los problemas de este bloque se caracteriza por tener información del registro "decir", por ello se presentarán como referentes las hojas contestadas por escrito de los estudiantes, así como extractos de entrevista que en conjunto dan cuenta de la espiral de acciones.

**Problema 4. Estudiante E14.** El Problema 4 corresponde a la relación $f(x) = 2^x$. En la Figura 6-7 se presenta el planteamiento del problema y en la Figura 6-8 el tránsito en la espiral de acciones mediante las preguntas planteadas.

¿Sabes qué son las bacterias? Las bacterias son unos organismos vivos muy pequeños, no visibles a simple vista, suelen moverse y son de diversas formas. Existen bacterias que pueden causarnos enfermedades por eso es importante seguir ciertas recomendaciones, como lavarnos las manos antes y después de comer.

Las bacterias se reproducen de la siguiente forma. De una bacteria surgen 2 bacterias hijas, cada bacteria hija genera otras 2 bacterias y así sucesivamente. Según el tipo de bacteria esta reproducción ocurre cada cierto número de minutos. Analicemos el caso de una bacteria que se reproduce cada minuto.



...

| Tiempo en minutos | Cantidad de bacterias |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| ... | ... |

*Figura 6-7*. Planteamiento del Problema 4, Bloque IV.

1. De acuerdo con la información contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 1?

b) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 2?

c) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 3?

Casos particulares.
Se promueve la acción manipular.

d) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 4? ¿Por qué?

e) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 5? ¿Por qué?

Se promueve la acción obtención de sentido.

2. ¿Qué pasa con la cantidad de bacterias conforme pasan los minutos?

3. Escribe la regla que permita encontrar la cantidad de bacterias por minuto.

Se promueve la articulación y expresión de la regla de generalización.

4. Usando la regla que has proporcionado encontremos la cantidad de bacterias a los 10 minutos.

5. Observa los valores que corresponden al tiempo.
¿Habrá otros valores de tiempo para determinar la cantidad de bacterias correspondiente?

| Tiempo en minutos | Cantidad de bacterias |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| ... | ... |

Se promueve el alcance de la generalización.

*Figura 6-8.* Preguntas que guían la resolución del Problema 4, Bloque IV.

A continuación, se ejemplifica el análisis de la espiral de acciones mediante las respuestas del estudiante E14 al resolver este problema. En primer lugar, E14 responde correctamente los casos particulares que corresponden a los incisos a), b) y c) de la pregunta 1 apoyándose de la información proporcionada en el registro tabular (Figura 6-9).

**1. De acuerdo con la información contesta las siguientes preguntas:**

**a) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 1?** 2

**b) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 2?** 4

**c) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 3?** 8

*Figura 6-9.* Respuestas proporcionadas por E14 en los tres primeros incisos de la pregunta 1 del Problema 4.

Posteriormente, E14 lee en voz alta la pregunta 1d) "¿Cuál será el número de bacterias al minuto 4? ¿Por qué?", toma una hoja de papel y realiza el dibujo que se muestra en la Figura 6-10. El número de bacterias al minuto 4 no se encuentra en el registro tabular con la intención de provocar un cambio de atención que permita al estudiante identificar aquello que cambia y cómo cambia.

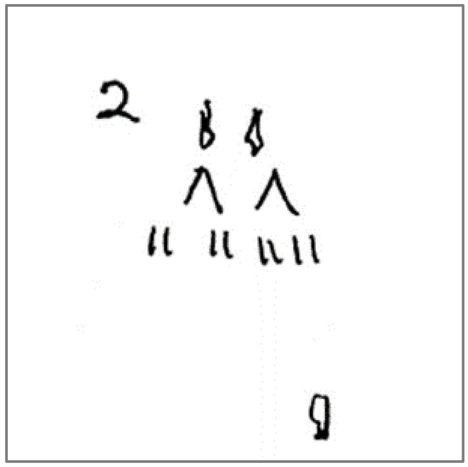


*Figura 6-10.* Dibujo que realiza E14 para responder la pregunta 1d) del Problema 4.

Después de dibujar, se queda pensativo un instante mirando la pregunta 1d) y responde verbalmente:

| | |
|---|---|
| E14: | 10 |
| Investigador: | ¿10? |
| E14: | [Escribe el número 10 en la hoja de respuestas][5] |

El investigador toma la hoja del planteamiento del problema y señalando el diagrama, le sugiere:

| | |
|---|---|
| Investigador: | ¿Puedes dibujar aquí las bacterias que van surgiendo? [Mostrando en el diagrama la fila en donde se encuentran las 8 bacterias] ¿Puedes dibujarlas ahí?... Dibújalas, o si quieres poner el número [refiriéndose a poner el número 2 para representar el número de bacterias que nacen por cada bacteria]… |
| E14: | [Dibuja 16 bacterias, Figura 6-11] |

[5] La información en corchetes corresponde a descripciones que escribe el investigador.

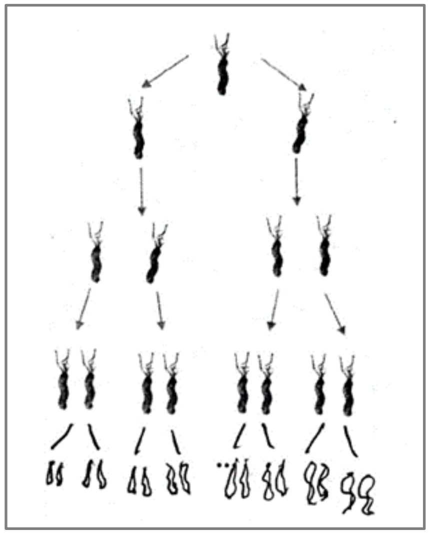


*Figura 6-11.* E14 dibuja 16 bacterias.

Investigador: Vamos a contarlas

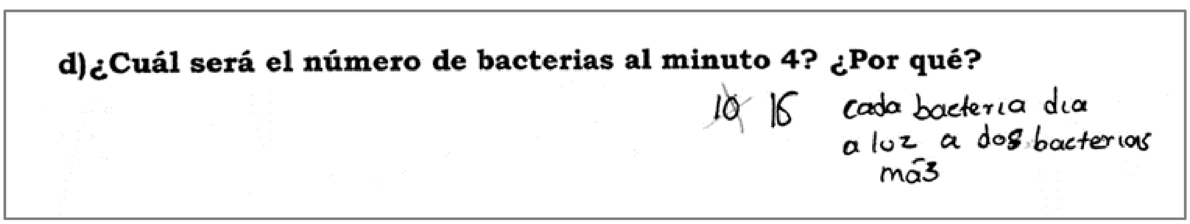
E14: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
16 [enfatizando la respuesta]

Investigador: ¿Qué te convence más, 10 o 16?

E14: 16 [ríe y escribe su respuesta]

Investigador: [Continuando con la pregunta 1d)] ¿Por qué?

E14: Porque cada bacteria… nació… dio a dos más [escribe en su hoja de respuestas "cada bacteria dio a luz a dos bacterias más", Figura 6-12]



**d)¿Cuál será el número de bacterias al minuto 4? ¿Por qué?**

~~10~~ 16 cada bacteria dio a luz a dos bacterias más

*Figura 6-12.* Respuesta final de E14 en el inciso d) de la pregunta 1 del Problema 4.

Posteriormente, E14 lee la pregunta 1e):

E14: ¿Cuál será el número de bacterias al minuto cinco y por qué? [Responde] Aaayn [y empieza a dibujar bacterias]

Investigador: Sin que tengas que dibujar ¿qué haríamos?

E14: Emm… [Observa el diagrama, apunta las 16 bacterias que dibujó y dice] dos por dos… [Se queda observando, luego escribe la multiplicación 16 × 2, y menciona] 16 por 2

Investigador: Ok.

E14: [Resuelve la multiplicación y escribe en su hoja de respuestas] 32, porque al número 16 lo multipliqué por 2 (Figura 6-13)

Investigador: Y si yo te preguntara por el número de bacterias al minuto 6

E14: [Escribe y resuelve la multiplicación 32 × 2 y dice] 64

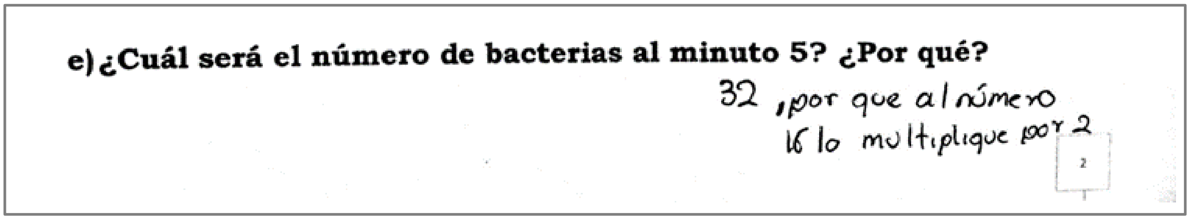
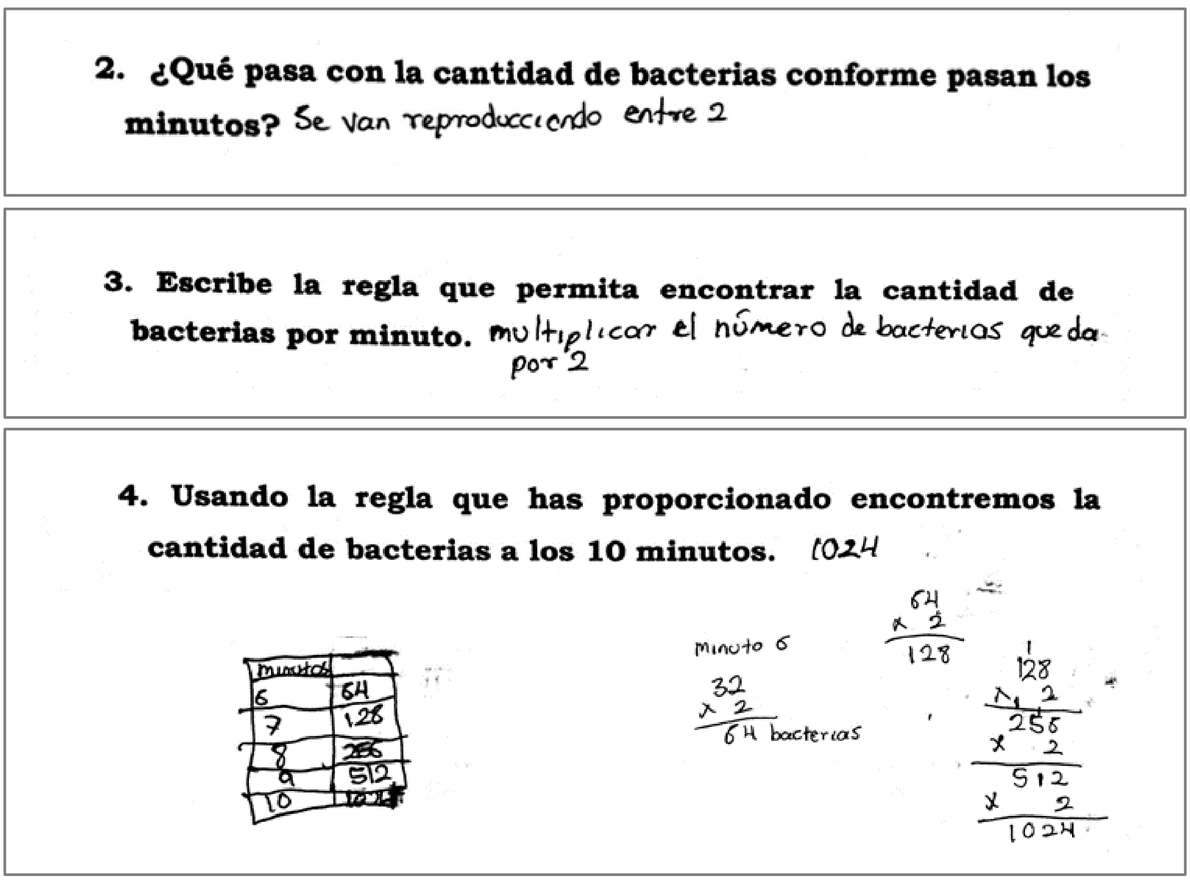

**e) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 5? ¿Por qué?**
32, por que al número 16 lo multiplique por 2

*Figura 6-13.* Respuesta de E14 en el inciso e) de la pregunta 1 del Problema 4.

Enseguida, E14 resuelve las siguientes preguntas planteadas en el problema, una por una, sin intervención del investigador. En la pregunta 2 escribe que las bacterias "se van reproduciendo entre 2" conforme pasan los minutos (Figura 6-14). La regla que proporciona para encontrar la cantidad de bacterias por minuto, en la pregunta 3, expresa lo siguiente: "multiplicar el número de bacterias que da por 2"; esta expresión se considera de carácter algebraico, aunque es de tipo recursivo. La palabra "da" se interpreta de la siguiente manera: E14 refiere a un resultado previamente obtenido el cual se debe multiplicar por 2. Posteriormente, aplicando la regla que ha proporcionado encuentra, en la pregunta 4, la cantidad de bacterias (1024 en total) que se reproducen a los 10 minutos.


**2. ¿Qué pasa con la cantidad de bacterias conforme pasan los minutos?** Se van reproducciendo entre 2

**3. Escribe la regla que permita encontrar la cantidad de bacterias por minuto.** multiplicar el número de bacterias que da por 2

**4. Usando la regla que has proporcionado encontremos la cantidad de bacterias a los 10 minutos.** 1024

| minutos | |
|---|---|
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| 9 | 512 |
| 10 | 1024 |

minuto 6

32 x 2 = 64 bacterias

64 x 2 = 128

128 x 2 = 256

256 x 2 = 512

512 x 2 = 1024

*Figura 6-14.* Respuestas de E14 a las preguntas 2, 3 y 4 del Problema 4.

Una vez que E14 encuentra la cantidad de bacterias para el minuto 10, el entrevistador plantea la siguiente pregunta:

| | |
|---|---|
| Investigador: | ¿Y si yo pidiera a los 50 minutos? |
| E14: | ahaha |
| Investigador: | ¿Qué pasaría? … ¿Qué haría? |
| E14: | Multiplicaría lo que me dio en 49 minutos por 2 |
| Investigador: | Ok. |

La respuesta proporcionada por E14 para el minuto 50 compete a una generalización algebraica, aunque corresponde a un ejemplo particular.

Finalmente, E14 resuelve la pregunta 5:

| | |
|---|---|
| E14: | [Lee la pregunta 5] Observa los valores que corresponden al tiempo. ¿Habrá otros valores de tiempo para determinar la cantidad de bacterias correspondientes? |
| Investigador: | ¿Queda claro lo que estoy preguntando? |
| E14: | [Mueve sus manos indicando más o menos] |
| Investigador: | ¿Más o menos? Aquí dice: observa los valores que corresponden al tiempo ¿cuáles son esos? |
| E14 | [Apunta los valores de la columna que corresponde a la cantidad de bacterias] |
| Investigador | Pero ¿esos son valores del tiempo? ¿Cuáles son los del tiempo? |
| E14 | [Apunta los valores de la columna que corresponde al tiempo y dice] 0, 1, 2, 3 |
| Investigador | Bien, entonces la pregunta es ¿habrá otros valores de tiempo para determinar la cantidad de bacterias que le correspondan a esos valores? |
| E14 | Sí |
| Investigador | Puedes poner tu respuesta aquí [señalando la hoja de respuestas] |
| E14: | [Escribe "si"] |
| Investigador | ¿Me puedes dar ejemplos de esos otros valores? |
| E14: | Como el de 10 que usted dijo |
| Investigador | ¿Hay otros? |
| E14: | Como el de 50 que también me dijo… puede haber el de 100 también, el de 200 y habrán más |

Con base en las respuestas dadas por E14 respecto a otros valores de tiempo para determinar la cantidad de bacterias correspondientes, se evidencia en dicho estudiante el alcance de generalidad para el problema planteado. De hecho, reconoce los valores dados por el investigador, sugiere otros valores, incluso lejanos y manifiesta que hay más.

Se concluye que las acciones de E14 durante la resolución del problema, desde el inciso a) de la pregunta 1 hasta la pregunta 4 son: Manipular-Manipular-Manipular-Manipular-Manipular-Obtención de Sentido-Articular, con intervención del investigador para reconsiderar la respuesta proporcionada en el inciso d), de tal manera que se pueden resumir dichas acciones en M-M-M-**M**-M-OS-A. La letra M en negrillas indica que hubo intervención del investigador propiciando en el estudiante un cambio de atención. Respecto al alcance de la generalización se etiqueta con una “S” o “NS” si el estudiante responde “Sí” o “No sabe” a la pregunta 5.

De modo análogo se realizó el análisis por cada estudiante para el Problema 4. En la Tabla 6-2 se presenta el tránsito en la espiral de acciones que se identificó en cada uno de los 25 estudiantes.

*Tabla 6-2*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 4, Bloque IV.

| E | 1a) | 1b) | 1c) | 1d) | 1e) | 2,3,4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | **M** | M | OS-**A** | S |
| E2 | M | M | M | | | | NS |
| E3 | M | M | M | M | M | OS-**A** | S |
| E4 | M | M | M | **M** | | | NS |
| E5 | M | M | M | M | M | OS-**A** | **S** |
| E6 | M | M | M | M | M | OS-**A** | S |
| E7 | M | M | M | M | M | OS-**A** | S |
| E8 | M | M | M | M | M | OS-**A** | S |
| E9 | M | M | M | **M** | **M** | OS-A | **S** |
| E10 | M | M | M | M | M | OS-A | S |
| E11 | **M** | M | **M** | **M** | M | **OS-A** | S |
| E12 | M | M | M | **M** | **M** | | NS |
| E13 | M | M | M | M | M | OS-A | S |
| E14 | M | M | M | **M** | M | OS-A | S |
| E15 | M | M | M | **M** | **M** | **OS-A** | S |
| E16 | M | M | M | **M** | M | OS-**A** | S |
| E17 | M | M | M | M | M | OS-**A** | NS |
| E18 | M | M | M | M | M | OS-**A** | **S** |
| E19 | M | M | **M** | **M** | M | OS-A | S |
| E20 | M | M | **M** | **M** | M | OS-**A** | S |
| E21 | M | M | **M** | **M** | **M** | **OS-A** | S |
| E22 | M | M | M | **M** | M | OS-**A** | S |
| E23 | M | M | M | **M** | **M** | OS-A | S |
| E24 | M | M | M | M | M | **OS**-A | S |
| E25 | M | M | M | M | | | NS |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; S= Sí, NS=No Sabe, Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A. La letra en negrilla indica intervención por parte del investigador.*

La intervención del investigador, que se destaca en negrillas, se caracteriza por provocar un cambio de atención en los estudiantes que les permita transitar en la espiral de acciones o precisar la expresión de generalización que producen. No es una intervención con carácter de enseñanza y no se insiste para que los estudiantes logren el tránsito en las acciones si se observan dificultades para transitar.

Existen otras intervenciones del investigador como se pueden apreciar en los extractos compartidos, pero son de otro tipo, permiten obtener información adicional que contribuye a tener más referentes respecto a las producciones de los estudiantes. Como se ha mencionado en el Capítulo IV, durante las entrevistas se tiene libertad para profundizar en aquellas respuestas otorgadas por los estudiantes que resulten relevantes o en aquellas que requieran mayor exploración.

**Problema 4. Expresiones de generalización.** Las diferentes expresiones de generalización producidas por los estudiantes pertenecen a alguna de las categorías descritas con anterioridad. A continuación, se describen nuevamente y se ejemplifican con expresiones producidas por los estudiantes en la resolución del Problema 4.

- **Categoría 1.** Incluye aquellas expresiones que no refieren a las variables involucradas ni a la variación ni a la relación de correspondencia. Por ejemplo, la respuesta de E9 para expresar la regla que permita encontrar la cantidad de bacterias por minuto es la siguiente: “observar y contarlos las bacterias, ejemplo en el minuto 1=2=4=8=16=32=64”.

- **Categoría 2.** Incluye expresiones en las que se mencionan la variación o las variables, pero sin vincularlas a la relación de correspondencia. Por ejemplo, E17 expresa la regla como “multiplicar el número de un minuto y ba a dar dos y así bas llendo multiplicando por dos”. Aunque E17 identifica una multiplicación por dos no establece una relación de correspondencia, sino sólo describe el fenómeno de reproducción de las bacterias.

- **Categoría 3.** Se consideran las expresiones que denotan la relación de correspondencia para un número particular, es decir, se expresa la generalización, pero aplicada al número solicitado u otro número al ejemplificar. Las respuestas a esta categoría fueron propiciadas, principalmente, por el investigador al cuestionar sobre la cantidad de bacterias para determinada cantidad de minutos. Por ejemplo, al preguntarle a E14 cuál sería el número de bacterias al minuto 50, el estudiante respondió “multiplicaría lo que me dio en 49 minutos por 2”. Aunque la expresión otorgada no expresa una relación exponencial, debido a que los estudiantes no tienen conocimientos previos de este tipo de crecimiento, que ocurre en determinados fenómenos biológicos, el tipo de respuesta otorgada de manera recursiva por E14 y otros estudiantes, se considera la expresión de generalización con mayor precisión para el Problema 4 que se puede proporcionar para casos particulares distantes.

- **Categoría 4.** Se consideran aquellas expresiones que dan cuenta de lo que ocurre de manera general con la relación entre las dos variables. Para este problema de bacterias, se clasifican en esta categoría aquellas expresiones de generalización que denotan 'multiplicar por 2 a la cantidad de bacterias'. Por ejemplo, las respuestas de E1 "multiplicando x 2 conforme van las bacterias" y E24 "multiplicando el numero de vacterias que hay x 2" se clasifican en esta categoría.

- **Categoría 5.** Las expresiones son concisas y precisas, evocan un término cualquiera, interpretándose que los estudiantes consideran una regla que se aplica a diferentes valores, sin asumir que ellos tengan noción del conjunto dominio de la relación de correspondencia. La respuesta final de E5 "multiplicando/ x 2/ a la cantidad de bacterias/ del minuto al que este atrás" es un ejemplo de expresión de generalización en esta categoría. Las diagonales intercaladas muestran cómo va modificándose la respuesta del estudiante bajo la intervención del investigador.

A continuación, en la Tabla 6-3 se comparten las expresiones de generalización que proporcionaron los estudiantes. Se escribe la primera respuesta del estudiante en la que no hubo intervención y esta se clasifica en la categoría correspondiente, posteriormente, en caso de intervención se agrega la información que va proporcionando el estudiante separándola mediante una diagonal y se incluye entre paréntesis la nueva clasificación.

*Tabla 6-3*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el Problema 4, Bloque IV.

| **Categoría 1** |
|---|
| E9. Observar y contarlos las bacterias, ejemplo en el minuto 1=2=4=8=16=32=64<br>E10. De cada bacteria en 1mn. salen 2 y asi se ban multiplicando<br>E22. Depende del numero de las bacterias |
| **Categoría 2** |
| E3. Multiplicando los minutos por las bacterias y observando/Para 50 minutos multiplicaríamos el resultado del número 49 x 2 (Categoría 3)<br>E5. Multiplicando/x 2/a la cantidad de bacterias (Categoría 4)/del minuto al que este atras (Categoría 5)<br>E17. Multiplicar el número de un minuto y ba a dar dos y así bas llendo multiplicando por dos<br>E18. Multiplicar la bacteria en dos la mamá en dos y cada mama se tiene que ir multiplicando en dos |

| **Categoría 2** |
|---|
| E20. Le voy sumándole dos y luego otros dos |
| **Categoría 4** |
| E1. Multiplicando x 2 conforme van las bacterias<br>E6. Al anterior lo multiplicas x 2 y te da el siguiente<br>E7. Para llegar al resultado multiplicarlo por x 2/el numero de la respuesta anterior (Categoría 5)<br>E8. Multiplicando la cantidad de bacterias del minuto anterior/Multiplicando la cantidad de bacterias con el numero que se obtuvo anteriormente, multiplicandolo x 2 (Categoría 5)<br>E11. Debo de contar todas las bacterias y multiplicar por dos<br>E13. El doble de la cantidad de las bacterias |
| **Categoría 5** |
| E14. Multiplicar el número de bacterias que da por 2/Multiplicaría lo que me dio en 49 minutos por 2 (Categoría 3)<br>E15. Multiplicar el número 2 por las bacterias y en la cantidad<br>E16. Multiplicar por 2 a las bacterias<br>E19. Multiplicando las bacterias x 2<br>E21. Duplicar las bacterias<br>E23. Multiplicar el numero de bacterias por 2<br>E24. Multiplicando el numero de vacterias que hay x 2 |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

**Problema 6. Estudiante E10.** El Problema 6 presenta una relación de correspondencia entre la profundidad y la temperatura del océano Antártico definida por $f(x) = 5000 - 500x$. En la Figura 6-15 se presenta el planteamiento del problema y el registro tabular de los datos.


En nuestro planeta existen cinco océanos: el Atlántico, Índico, Pacífico, Ártico y Antártico. Las temperaturas de sus aguas son diferentes, por ejemplo, el océano Pacífico en su superficie es de aguas más calientes que las aguas de la superficie del océano Antártico, sin embargo, en las profundidades de todos los océanos la temperatura es fría.

La profundidad del océano Antártico es de aproximadamente 7236 metros. Observemos los datos de la tabla y prestemos atención a diferentes profundidades del océano Antártico y sus respectivas temperaturas.

| Temperatura en grados centígrados (°C) | Profundidad en metros |
|---|---|
| … | … |
| -1 °C | 5500 metros |
| 0 °C | 5000 metros |
| 1 °C | 4500 metros |
| 2 °C | 4000 metros |
| … | … |


*Figura 6-15.* Planteamiento del Problema 6, Bloque IV.

En la Figura 6-16 se muestra el tránsito en la espiral de acciones mediante las preguntas planteadas.

1. De acuerdo con la tabla contesta las siguientes preguntas:

a) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 0 °C (cero grados centígrados)?
b) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 1 °C (un grado centígrado)?
c) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 2 °C?
d) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 3 °C? ¿Cómo encontraste la respuesta?

Casos particulares temperatura positiva.
Se promueve la acción manipular.

2. ¿Qué ocurre con la profundidad del océano a medida que aumenta la temperatura?

Se promueve la acción obtención de sentido.

3. Si la temperatura es de 8 °C ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico?
4. Observa la tabla de datos, si la temperatura es de -1 °C (menos un grado centígrado o un grado bajo cero) ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico?

Casos particulares temperatura negativa.
Se promueve la acción manipular.

5. Si la temperatura es de -2 °C (menos 2 grados centígrados o 2 centígrados bajo cero) ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico?

Se promueve la acción obtención de sentido.

6. ¿Qué ocurre con la profundidad del océano a medida que disminuye la temperatura?

Se promueve la articulación y expresión de la regla de generalización.

7. Escribe la regla que permita encontrar la profundidad del océano Antártico si conocemos la temperatura.

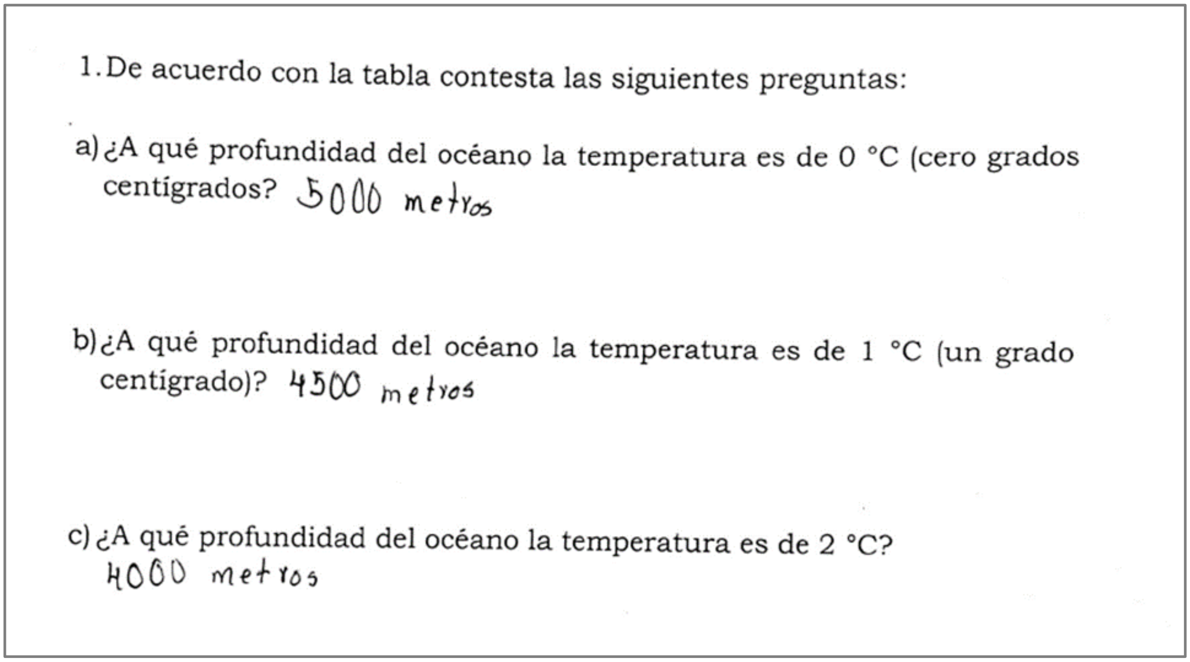
Mediante los siguientes incisos se promueve el regreso a la espiral de acciones.

8. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea 9 °C.
9. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea 10 °C.
10. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea -3 °C.

*Figura 6-16.* Preguntas que guían la resolución del Problema 6, Bloque IV.

Se presenta a continuación, la resolución al problema realizada por el estudiante E10 para ejemplificar el análisis de la espiral de acciones. E10 resuelve correctamente los incisos a),

b) y c) de la pregunta 1 evidenciando la lectura apropiada del registro tabular y la manipulación de casos particulares cuando la temperatura incrementa (Figura 6-17).



1. De acuerdo con la tabla contesta las siguientes preguntas:

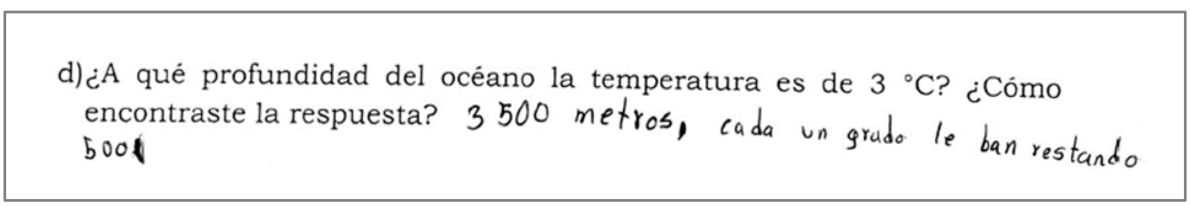
a) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 0 °C (cero grados centígrados? 5000 metros

b) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 1 °C (un grado centígrado)? 4500 metros

c) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 2 °C? 4000 metros

*Figura 6-17.* Respuestas de E10 a los incisos a), b) y c) de la pregunta 1 del Problema 6.

Posteriormente, en el inciso d) se pregunta por la profundidad del océano cuando la temperatura es de 3°C, valor que no se encuentra proporcionado en el registro tabular. E10 proporciona correctamente el valor de 3500 m para 3°C y explica cómo cambia la profundidad por cada grado de temperatura (Figura 6-18).



d) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 3 °C? ¿Cómo encontraste la respuesta? 3 500 metros, cada un grado le ban restando 500

*Figura 6-18.* Respuesta de E10 al inciso d) de la pregunta 1 del Problema 6.

Seguidamente, E10 lee en voz alta la pregunta 2 "¿Qué ocurre con la profundidad del océano a medida que aumenta la temperatura? Y responde "disminuye 500 metros" (Figura 6-19).

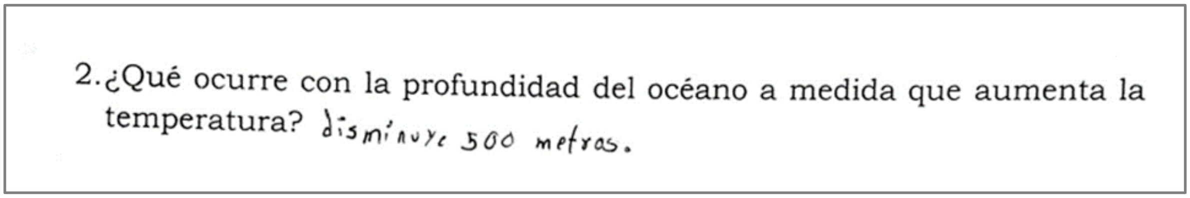

2. ¿Qué ocurre con la profundidad del océano a medida que aumenta la temperatura? disminuye 500 metros.

*Figura 6-19.* Respuesta de E10 a la pregunta 2 del Problema 6.

Se evidencia que E10 identifica cómo varía la profundidad del océano a medida que incrementa la temperatura. Asimismo, se interpreta que reconoce que por cada grado de temperatura que incrementa, la profundidad del océano disminuye 500 m.

A continuación, E10 resuelve la pregunta 3 que plantea hallar la profundidad del océano cuando la temperatura es de 8°C. La primera respuesta de E10 fue 6000 m de profundidad. Lo que hizo para llegar a ese resultado fue restar 3500−500 y multiplicar el resultado por 2. El investigador espera que escriba su respuesta y luego pregunta ¿qué está pasando con ese valor?, intentando entender lo que el estudiante realizó. Se interpreta que E10 encontró la profundidad para 4°C y multiplicó por 2 para obtener la profundidad a los 8°C. El investigador intentando que E10 reflexione respecto a lo realizado le dice:

Investigador: Checa acá [le muestra la respuesta que escribió E10 en la pregunta 2], ¿qué dijiste?

E10: Disminuye 500… [revisa las operaciones que realizó y de manera inmediata, sin oportunidad de interactuar con él, dice] está mal [tacha su respuesta y enseguida procede a resolver recursivamente hasta encontrar 1000 metros para 8°C, Figura 6-20]

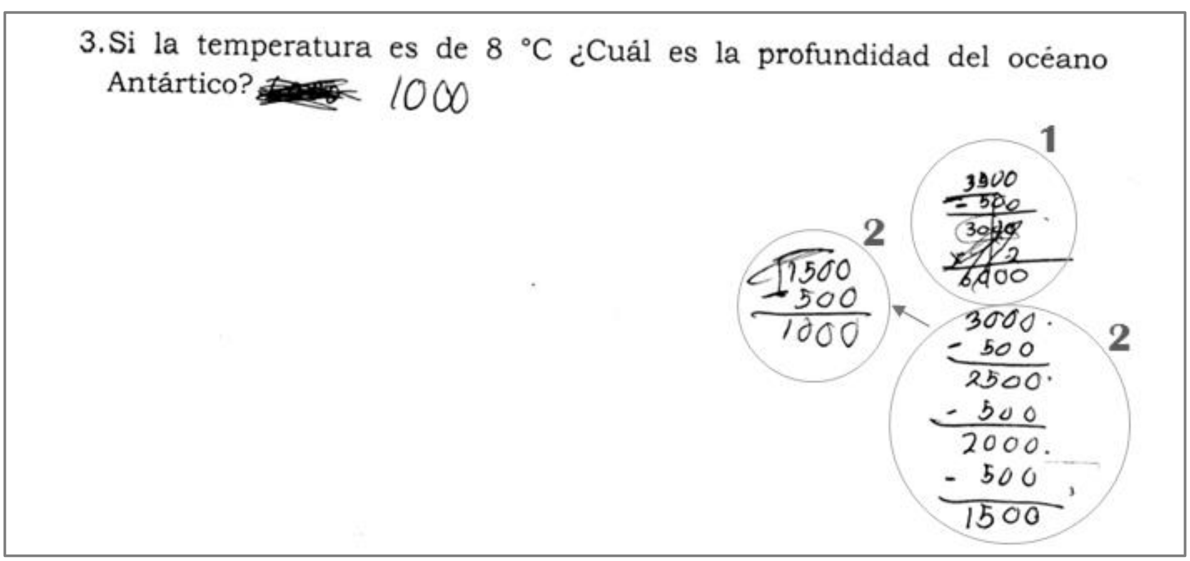

3. Si la temperatura es de 8 °C ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico? 1000



*Figura 6-20.* Primera y segunda respuestas de E10 a la pregunta 3 del Problema 6.

Una vez que el estudiante escribe la nueva respuesta que corresponde al valor de 1000, el investigador le dice:

| | |
|---|---|
| Investigador: | Quiero retomar lo que hiciste porque me parece interesante lo que planteaste acá [apuntando la multiplicación], sólo que tienes que reestructurar… si multiplicamos, qué hacemos con esa cantidad… |
| Investigador: | ¿Qué observas que pasa con la profundidad a medida que aumenta la temperatura? ¿Qué me dijiste? |
| E10: | Disminuye 500 |
| Investigador: | ¿Cuánto va disminuyendo? [Enfatizando] |
| E10: | 500 |
| Investigador: | Si yo pienso en un grado ¿cuánto disminuyo? |
| E10: | 500 metros |
| Investigador: | Si yo pienso en dos grados ¿cuánto disminuyo? |
| E10: | 500 metros |
| Investigador: | Pero si ahorita ya dije dos ¿cuánto…? |
| E10: | Ah, 1000 metros |
| Investigador: | Ajá… si pienso ahora que he cambiado a 20 grados de temperatura ¿qué crees que va pasando con los 500? ¿qué debería hacer? |
| E10: | Restarlo |
| Investigador: | Si está bien restarlo, pero si pienso en multiplicar…<br>Otra vez [explicando de nuevo]… un grado me dijiste que voy a bajar… |
| E10: | 500 |
| Investigador: | 500 [afirma] cuando yo llegue a 2… |
| E10: | 1000 |
| Investigador: | Ya bajé 1000… cuando yo llegue a 3 |
| E10: | 1500 |
| Investigador: | ¿Qué operación está involucrada? |
| E10: | Multiplicar |
| Investigador: | ¿Qué multiplico? |
| E10: | 1 por…500, 2 por 500, 3 por 500 |
| Investigador: | Si yo pienso en 20 grados ¿qué multiplicaría? |
| E10: | 20 por 500 |
| Investigador: | Entonces, fíjate que esa idea es interesante…cuando estoy pensando en los 8 grados [valor de la temperatura en la pregunta 3] ¿qué crees qué debe ocurrir? |
| *E10: | [Escribe en la hoja de respuestas al mismo tiempo que va diciendo] multiplicar 8 por 500 [y resuelve la multiplicación, Figura 6-21, respuesta 3] |
| Investigador: | Esa cantidad que tienes ahí [refiriéndose a los 4000] ¿qué significa? [pregunta retórica] que por 8 grados hay 4000 metros… Ahora ¿qué hago con esa cantidad? Yo estoy ubicada en cero grados centígrados… y en cero grados centígrados ¿cuánto tenía de profundidad? |
| E10: | 5000 |
| Investigador: | Pero tú ya hiciste que aumente 8 grados de temperatura y algo pasó con la profundidad… |
| E10: | Disminuye |
| Investigador: | ¿Cuánto le voy a disminuir? |
| E10: | 500 |

Investigador: Otra vez [explicando de nuevo]… Yo estoy parada en los 5000 metros en cero grados, 5000 es mi profundidad, si pasa un grado yo debo de…

E10: Restarle 500

Investigador: Si pasan 2 grados debo de…

E10: Restarle 500

Investigador: Otros 500 más, en este caso serían…

E10: 1000

Investigador: Si pasan 3 [grados] yo debo de restarle… ¿cuánto?

E10: 1500

Investigador: Pero ese 1500 ¿cómo lo obtuve?... multiplicando…

*E10: Lo multipliqué [responde al mismo tiempo que el investigador dice multiplicando y mueve afirmativamente la cabeza como si en ese momento lograra articular la regla] ah sí…eh… 4000 lo voy a restar a 5000 [escribe en su hoja de respuesta 5000-4000 y resuelve obteniendo 1000, Figura 6-20, respuesta 4]

Mediante la interacción entre investigador y estudiante se interpreta que E10 (en *) obtiene sentido y articula una regla de correspondencia para aquellos casos en los que la temperatura aumenta.

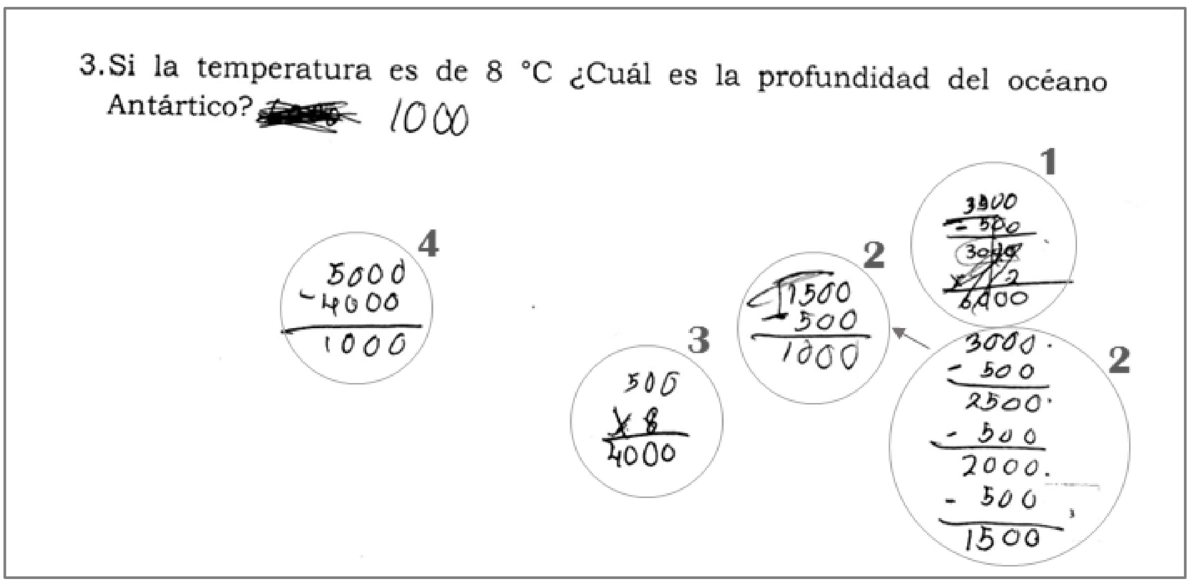



*Figura 6-21.* Tercera y cuarta respuestas de E10 a la pregunta 3 del Problema 6.

Posteriormente, E10 resuelve correctamente las preguntas 4 y 5 que competen a casos particulares cuando la temperatura disminuye (Figura 6-22). El valor de la profundidad que corresponde a $-2$°C no se proporciona en el registro tabular, por lo que se evidencia que E10 identifica cómo cambia la profundidad a medida que la temperatura cambia de $-1$°C a $-2$°C. Cabe mencionar que E10 no necesitó ayuda para leer las expresiones negativas, incluso conocía el símbolo °C (el cual leyó como grados Celsius, nomenclatura que no se menciona en el problema).

4. Observa la tabla de datos, si la temperatura es de -1 °C (menos un grado centígrado o un grado bajo cero) ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico? 5500 metros

5. Si la temperatura es de -2 °C (menos 2 grados centígrados o 2 centígrados bajo cero) ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico? 6000

*Figura 6-22.* Respuestas de E10 a las preguntas 4 y 5 del Problema 6.

Enseguida, en respuesta a la pregunta 6 "¿Qué ocurre con la profundidad del océano a medida que disminuye la temperatura?" E10 contesta: "Aumenta 500" (Figura 6-23).

6. ¿Qué ocurre con la profundidad del océano a medida que disminuye la temperatura? Aumenta 500

*Figura 6-23.* Respuesta de E10 a la pregunta 6 del Problema 6.

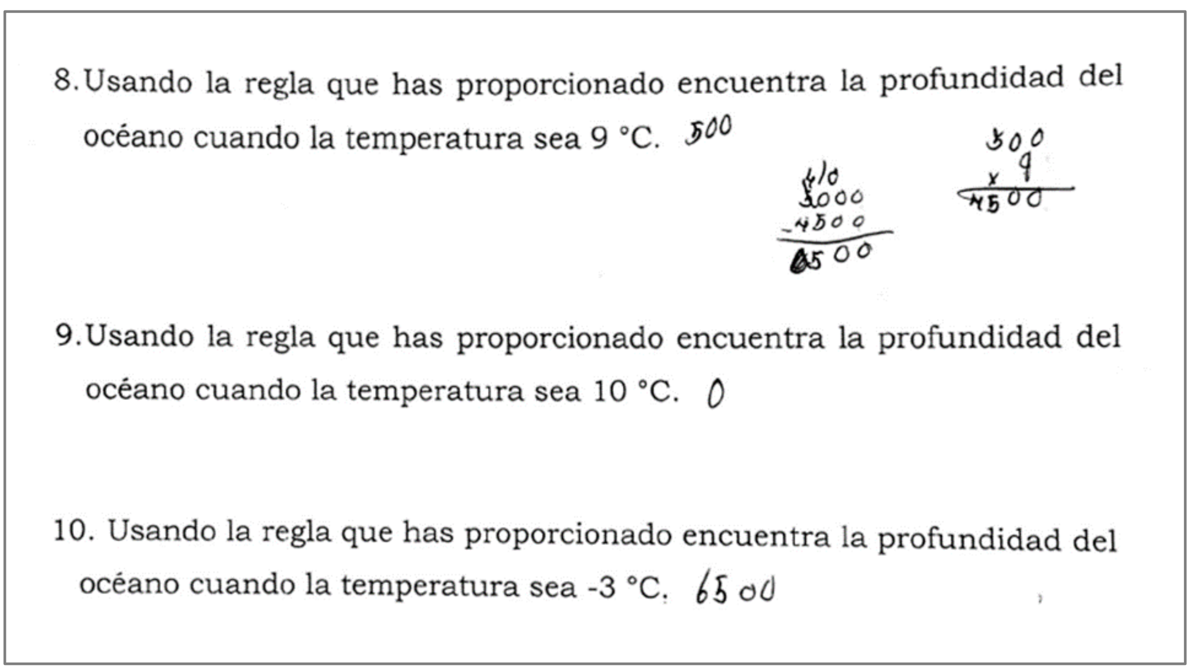
Una vez resueltos los casos particulares y promovidos los cambios de atención hacia la profundidad del océano, conforme la temperatura aumenta o disminuye, se solicita la regla de correspondencia que permita encontrar la profundidad del océano conociendo la temperatura. E10 expresa la regla de la siguiente manera: "multiplicas el grado por 500 y después restas la respuesta a 5000 metros" (Figura 6-24).

7. Escribe la regla que permita encontrar la profundidad del océano Antártico si conocemos la temperatura. multiplicas el grado por 500 y despues restas la respuesta a 5000 metros.

*Figura 6-24.* Regla de generalización que proporciona E10 en el Problema 6.

Se considera que, con base en la resolución realizada con anterioridad para el caso particular 8°C, E10 logra concretar la regla de generalización algebraica. Si bien, la expresión proporcionada es correcta y por lo tanto permite sustituir cualquier valor de temperatura para obtener la profundidad correspondiente, se interpreta que E10 no está considerando en la expresión aquellos casos en los que la temperatura es negativa, porque este hecho implica conocer la regla de la multiplicación para números negativos, y se asume que aún no forma parte del repertorio de conocimientos previos de E10. Sin embargo, es de destacar la forma en que E10 expresa la regla de manera precisa y concisa.

Finalmente, E10 resuelve las últimas preguntas que conforman el Problema 6 (Figura 6-25). Estas preguntas promueven el regreso a la acción manipular proporcionando un nuevo ciclo de acciones que permita a aquellos estudiantes que aún no hayan logrado articular la regla de generalización, formularla o reformularla. En aquellos estudiantes que hayan formulado la regla de generalización, como E10, permite verificarla mediante la resolución de los nuevos casos particulares, así como también permiten apreciar el reconocimiento del alcance de la generalización.


8. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea 9 °C. 500

9. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea 10 °C. 0

10. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea -3 °C. 6500

*Figura 6-25.* Respuestas de E10 en las preguntas 8, 9 y 10 del Problema 6.

Las acciones de E10 en la resolución del problema se sintetizan de la siguiente forma: M-M-M-M-OS-**A**-M-M-OS-A-M-OS-A-M-OS-A-M-OS-A. El análisis de los 24 estudiantes restantes respecto a este Problema 4 se realizó de manera similar y se resume en la Tabla 6-4.

*Tabla* 6-4 Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 6, Bloque IV.

| **E** | **1a)** | **1b)** | **1c)** | **1d)** | **2,3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | M | OS-M | **M** | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E2 | M | M | M | | | M | | | | | | |
| E3 | M | M | M | M | OS-M | M | **M** | OS | A | **M**-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E4 | M | M | M | | | M | | | | | | |
| E5 | M | M | M | M | OS-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E6 | **M** | M | M | M | OS-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E7 | M | M | M | M | OS-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E8 | M | M | M | M | OS-M | M | M | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E9 | M | M | M | M | OS-M | **M** | M | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E10 | M | M | M | M | OS-**A** | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E11 | M | M | M | M | OS-M | M | **M** | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E12 | M | | M | M | | | | | | | | |
| E13 | M | M | M | M | OS-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E14 | M | M | M | M | OS-M | **M** | **M** | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E15 | M | M | M | M | **OS**-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E16 | M | M | M | M | OS-M | M | M | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E17 | M | M | M | M | **OS-M** | M | **M** | **OS** | A | M-**OS-A** | M-**OS-A** | M-OS-A |
| E18 | M | M | M | M | OS-M | M | **M** | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E19 | M | M | M | M | **OS**-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E20 | **M** | M | M | **M** | **OS-M** | M | **M** | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E21 | M | **M** | M | **M** | **OS**-M | M | **M** | **OS** | **A** | **M**-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E22 | **M** | **M** | M | M | **OS-A** | M | M | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E23 | M | **M** | M | M | **OS**-M | M | **M** | **OS** | **A** | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E24 | M | M | M | **M** | OS-M | M | **M** | **OS** | **A** | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E25 | **M** | M | M | **M** | OS-M | M | **M** | OS | A | **M-OS-A** | **M-OS-A** | **M-OS-A** |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A. La letra en negrilla indica intervención por parte del investigador.*

Respecto a las expresiones de generalización, la mayoría de los estudiantes formularon la regla de forma recursiva expresando lo que acontece con la profundidad cuando la temperatura aumenta o disminuye. En la Tabla 6-5 se presentan las expresiones clasificadas en las categorías correspondientes.

Para varios estudiantes el problema implicó conocer e interpretar nuevos términos y símbolos como los grados centígrados y los números negativos, pero se apropiaron de ellos en el contexto del problema y los incluyeron adecuadamente al expresar su regla de generalización.

*Tabla 6-5*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el Problema 6, Bloque IV.

| |
|---|
| **Categoría 2** |
| E1. Lo fui aumentando de 500 en 500 y disminuyendo también<br>E6. Cuando subes un grado debes de restar y cuando bajas un grado, cuando es más frío le sumas los metros/ Debes saber si bajas de temperatura son mas metros y si subes son menos<br>E11. $1°C = \begin{array}{r} 5500 \\ +2000 \\ \hline 7500 \end{array}$<br>E12. Vamos disminuyendo o subiendo la cantidad de numeros<br>E13. Cada vez que sube la temperatura va disminuyendo la profundidad en metros y cada vez que baja la temperatura la profundidad en metros va subiendo de 500 en 500<br>E15. Le voy subiendo el 500. Si es que se esta subiendo<br>E17. Que cuando esta en menos grados centígrados va aumentar los metros. Cuando esta después del cero esta disminulle los metros de la profundidad<br>E20. Ir sumando metros o ir disminuyendo metros<br>E25. Fui aumentando 500 y asi fui llendo al resultado |
| **Categoría 3** |
| E3. Cuando es -1°C o -2°C ba aumentando 500 y cuando es 1°C o 2°C va disminuyendo 500 |
| **Categoría 4** |
| E5. Que si subes o bajas siempre 500m se va quitando o va aumentando la temperatura (1°C)<br>E7. Restarle y sumarle 500 mientras va subiendo y bajando la temperatura<br>E8. Si es bajo grados centigrados se le aumenta 500 metros, ya si es grados centígrados se le resta 500<br>E9. Si es menos (temperatura) va a ser 500 (metros) más y si es de más (temperatura) va a ser menos 500 (metros)<br>E14. Restarle 500 a las temperaturas después del 0. Sumarle 500 a las temperaturas bajo 0<br>E16. Que cuando la temperatura disminuye ba aumentando de 500 y si la temperatura ba aumentando que le quita 500 a la profundidad<br>E18. Si va subiendo la temperatura es menos 500 metros y si es mas fría es mas 500 metros<br>E19. Cuando es negativo (los grados sentigrados) la profundida haumenta 500. Cuando es positiva (los grados centígrados) la profundidad disminuye 500<br>E21. Cuando la temperatura baje vas a ir sumando 500 – cuando suba la temperatura voy a ir restando 500<br>E23. Le fui sumando 500 cuando la temperatura baja y restandole 500 cuando la temperatura sube<br>E24. Devo de sumar 500 cuando la temperatura disminuye y cuando la temperatura este subiendo devo de restar 500 |
| **Categoría 5** |
| E10. Multiplicas el grado por 500 y después restas la respuesta a 5000 metros<br>E22. Primero es multiplicar el centígrado por 500 y el resultado lo restas por 5000 |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

Se puede concluir de los Bloques III y IV que la mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultades para trabajar con problemas en contexto; pudieron interpretar y resolver las situaciones planteadas y algunos lograron expresar las reglas de generalización algebraica correspondientes a cada problema del Bloque IV.

Carraher, Schielmann y Brizuela (2000) refieren que los contextos, especialmente los cotidianos, suelen proporcionar referentes significativos en la resolución de problemas. Compartiendo la perspectiva de los autores, se opina que los referentes significativos permiten a algunos estudiantes brindar argumentos de sus procedimientos, utilizando un lenguaje peculiar, mediados por la interpretación del planteamiento del problema. Por ejemplo, ante el cuestionamiento del Problema 4 "¿Cuál será el número de bacterias al minuto 4? ¿Por qué?" E14 responde "16, cada bacteria dio a luz a dos bacterias más".

Se opina también, en el marco del trabajo de investigación, que los referentes significativos que suelen proporcionar los contextos en edades tempranas promueven el alcance de la generalización, es decir, permiten identificar un conjunto de valores diferentes que puede tomar la variable e incluso reconocer aquellos que no pertenecen al conjunto solución. Por ejemplo, en el Problema 5 (Figura 6-26) al preguntar ¿Para qué otros valores de tiempo podemos encontrar la cantidad de panuchos que le falta freír a Doña Soco? Al término de algunos valores proporcionados por los estudiantes, el investigador cuestiona sobre el valor 200 minutos, E6 responde que no se puede "porque solo fríe 150", E18 expresa "no porque acá [apuntando el valor en la tabla] te está dando unas 150, ya si tú quieres pedir… si es que Doña Soco tiene hecho más, ya puedes pedir más, pero si no, cómo… en dónde va a agarrar las tortillas, no se puede", E22 sonríe y dice "ya se gastó porque 150 hizo".

Los sábados acostumbro comprar panuchos con Doña Soco. Ella me comenta que en la mañana prepara 150 tortillas y las rellena de una vez con su frijol. En la tarde cuando empiezan a llegar los clientes, ella empieza a freir los panuchos para que los sirva calientitos.

En la siguiente tabla aparece la cantidad de tortillas que le falta freir.

| Tiempo que transcurre en minutos | Cantidad de tortillas de panucho que le faltan freír |
|---|---|
| 0 minutos | 150 tortillas |
| 1 minuto | 149 tortillas |
| 2 minutos | 148 tortillas |
| 3 minutos | 147 tortillas |
| 4 minutos | 146 tortillas |
| … | … |

*Figura 6-26.* Planteamiento del Problema 5, Bloque IV.

Una cualidad de los casos particulares en los problemas en contexto es que no son solamente números de una secuencia, sino que esos números se reconocen directamente asociados a las variables, lo que conlleva a que varios estudiantes tiendan a hacer referencia a las variables en sus expresiones de generalización.

Los contextos suelen ser más fructíferos aún, cuando los estudiantes poseen un repertorio de conocimientos que les permitan, no sólo interpretar la situación que se plantea, sino también extraer la información relevante en el marco del problema. Igualmente, es valioso el dominio de los algoritmos de las operaciones básicas, dominio de las tablas de multiplicar, así como la lectura y reconocimiento de diferentes cantidades que permita a los estudiantes conectar la información involucrada para resolver adecuadamente un problema. Cuando alguno de estos factores no es robusto, los estudiantes pueden vencer los obstáculos, pero es necesario identificar las dificultades para poder ayudarlos.

Mediante las entrevistas, se destaca la etapa “decir”. Esta etapa se caracteriza en que se comunica primero aquello que se identifica en los casos particulares antes de decir la generalidad que se reconoce. Cuando los estudiantes a partir de lo que observan empiezan a formular conjeturas, decir en voz alta y en interacción con otros individuos ayuda a clarificar lo que se quiere expresar. En esta etapa juegan un papel importante la interacción y la intervención, en este caso del investigador, quien promueve cambios de atención que permiten estimular o potenciar la capacidad de generalizar por parte del estudiante. Asimismo, cuando la resolución resulta difícil y las conjeturas erróneas, el investigador promueve la especialización, es decir, promueve el regreso a la acción manipular para que los estudiantes puedan, en determinado caso, ascender en la espiral.

Para finalizar este capítulo, respecto a las expresiones de generalización, ciertamente, como refieren Mason et al. (1999), hay estudiantes que no están acostumbrados a explicar, por lo que, cuando manifiestan lo que observan o exponen aquello que se solicita, no incluyen todas las palabras o características necesarias para comunicar aquello que se desea escuchar y por ello es recomendable invertir mayor tiempo en la etapa decir, para ayudar a que los estudiantes formulen adecuadamente sus ideas.

# Capítulo VII

## Conclusiones y reflexiones finales

Los aspectos de interés que orientaron esta investigación son: el proceso de generalización y las expresiones de generalización algebraica producidas por estudiantes en edades tempranas durante la resolución de tareas matemáticas que promueven generalización.

Los estudiantes participantes en esta investigación, quienes no tienen entrenamiento previo en tareas de generalización, evidencian en primer lugar su capacidad de generalizar a partir de casos particulares. Se identificó que la mayoría de los estudiantes pueden proporcionar términos cercanos, incluso lejanos a partir de los términos dados, lo que da cuenta en ellos de su capacidad de reconocer el comportamiento de las variables y en algunos casos la capacidad de formular la relación de correspondencia que se define en cada tarea matemática.

Para establecer la relación de correspondencia en las tareas matemáticas, de acuerdo con Mason (1996), los estudiantes llevan a cabo un proceso de generalización que concierne a una espiral de acciones continuas: manipular, obtener sentido y articular. Se encontró que todos los estudiantes participantes pueden llevar a cabo la acción manipular, hecho que se verifica cuando los estudiantes interpretan los registros tabulares o construyen los términos inmediatos o muy cercanos, a partir de los casos particulares proporcionados en cada tarea matemática. Además, se identificó que la manipulación de los casos particulares permite a la mayoría de los estudiantes reconocer peculiaridades que los conducen a obtener sentido y a articular las generalidades encontradas.

Cuando se hace referencia a la obtención de sentido y a articular, se ha mencionado con anterioridad que, estas acciones no ocurren en un momento concreto que permita determinar cuándo suceden, debido a la exigencia cognitiva de tales acciones. Sin embargo, son acciones reconocibles durante la resolución de las tareas matemáticas. En algunos estudiantes estas acciones se identificaron tempranamente, es decir, inmediatamente de la manipulación de los primeros casos particulares proporcionados. En otros estudiantes fue necesario llevar a cabo la acción especialización, es decir, la manipulación de nuevos casos particulares para que lograran transitar hacia dichas acciones y en unos cuantos estudiantes no fue posible dicho tránsito, permanecieron en la acción manipular.

Con relación a los estudiantes que lograron la acción articular, se reconoció que algunos hacen un uso implícito de una regla de generalización y otros un uso explícito. Las producciones explícitas de forma verbal o escrita son de gran importancia en este proyecto de investigación, porque permiten dar cuenta de la generalización algebraica que pueden expresar los estudiantes desde edades tempranas, en particular estudiantes sin experiencias previas en tareas matemáticas de generalización.

Los resultados de esta investigación no sólo dan cuenta de la capacidad de generalización que poseen los estudiantes sino también de la facultad que tienen para producir expresiones precisas de generalización algebraica. Las expresiones proporcionadas, clasificadas en cinco categorías descritas con anterioridad, permiten identificar rasgos que caracterizan las formas de comunicar las generalidades, reconociéndose en ellas el alcance de la generalidad que manifiestan los estudiantes. Debido a la evidencia de referentes algebraicos que están por manifestarse o ya se manifestaron en las expresiones producidas por los estudiantes se destacan las categorías 3, 4, y 5.

- En la Categoría 3 se clasificaron aquellas expresiones que denotan claramente la relación de correspondencia, pero sólo para uno o algunos casos particulares, es decir, se expresa la regla de generalización, pero aplicada a los números solicitados u otros números al ejemplificar. Lo que se expresa en dichos casos es una relación matemática local entre números y operaciones. Desde el punto de vista de Venkat et al. (2019) se evidencia la presencia de una estructura emergente, debido a que las propiedades generales, de acuerdo con dichos autores, están por manifestarse.

- En la Categoría 4 se incluyeron aquellas expresiones que dan cuenta de lo que ocurre de manera general con la relación entre las dos variables. Se identificaron en las expresiones, referentes generales a partir de los casos particulares. Aunque la mayoría de las expresiones proporcionadas por los estudiantes, en las diferentes tareas, no son precisas en un sentido gramatical, se reconoce que tienen un referente general. Mason et al. (1999) hacen notar que cuando los estudiantes expresan la generalidad que perciben es referencia de su álgebra aún incipiente. Los registros verbales o escritos pueden pasar por diferentes borradores antes de convertirse en concisos y formales.

- En la Categoría 5 se clasificaron aquellas expresiones concisas y precisas que evocan un término cualquiera.

De acuerdo con Rivera (2015), los niños suelen comunicar las generalizaciones identificadas en forma y contenido mediante expresiones idiosincrásicas y aproximadas (como las encontradas en la Categoría 4); pero también pueden expresarlas exactas y sofisticadas como aquellas clasificadas en la Categoría 5. Desde la perspectiva sociocultural de Radford (2010a) la generalidad algebraica se compone de diferentes capas, algunas más profundas que otras y la expresión de generalidad está vinculada a la forma de razonar y expresar lo general, destacando que hay muchas formas semióticas (además de la simbólica) para expresar las ideas algebraicas. Estas formas semióticas incluyen acciones corporales o el lenguaje natural.

Las expresiones de las categorías 4 y 5 se distinguen porque se reconoce en ellas evidencia de estructura matemática. La cualidad principal de una expresión que posee estructura matemática es el referente general que se manifiesta en ella, en la que se muestran las propiedades de la relación matemática entre los elementos. Es evidente que las características generales no suelen expresarse con ejemplos particulares. Por lo tanto, se asume de acuerdo con Mason, et al. (2009), que los estudiantes identifican propiedades generales que reconocen de los casos particulares y son capaces de poder expresarlas.

Adicionalmente, las expresiones de las categorías 4 y 5 se clasifican como generalizaciones algebraicas, porque la generalización algebraica se basa en percibir algo común en lo particular, que posteriormente se generaliza y sirve como referente para construir nuevos elementos que se encuentran fuera del campo perceptivo (Radford, 2010a).

Bajo la postura de Rivera (2013) se puede decir que aquellos estudiantes que formularon las expresiones clasificadas en las categorías 4 y 5 emitieron fuertes abducciones. De acuerdo con este autor, la abducción es la fuente de ideas originales y, a menudo, está influenciada por conocimientos y experiencias previas. Las abducciones fuertes se caracterizan por ser simples, integradoras y de gran comprensión, es decir, son algebraicamente útiles porque se emiten mediante una expresión directa o fórmula concreta.

Se concluye entonces, que los estudiantes no sólo poseen la capacidad para generalizar, sino también son capaces de expresar generalizaciones algebraicas aún sin contar con experiencias previas en tareas de generalización matemática. Se infiere, con base en los resultados, que es factible desarrollar el pensamiento algebraico y promover el desarrollo del lenguaje algebraico desde edades tempranas. La formulación de una regla matemática, aun con palabras, da cuenta del potencial matemático que poseen los estudiantes porque como menciona Radford (2008a), no son las notaciones simbólicas las que hacen que el pensamiento sea algebraico, sino la forma en que se piensa respecto a lo general. Se especula que, en la medida que se desarrolla el pensamiento algebraico, la notación formal introducida gradualmente cobrará significado y los estudiantes reconocerán, como refiere Mason (1999), que los símbolos se usan para expresar generalidades y podrán hacer uso de ellos en forma exitosa cuando estén listos para hacerlo y cuando perciban una necesidad de hacerlo.

Es importante destacar que algunos estudiantes requieren superar las dificultades que obstaculizan el desarrollo del pensamiento matemático y por tanto el desarrollo del pensamiento algebraico. Las dificultades, por parte de algunos estudiantes identificadas en esta investigación, que obstaculizaron el tránsito hacia las acciones obtención de sentido y articular o para expresar una regla concisa de generalización en determinadas tareas matemáticas son las siguientes:

▪ **Falta de dominio de las tablas de multiplicar.** Varias de las tareas diseñadas involucran relaciones multiplicativas de la forma $f(x) = ax$ (p. ej. las secuencias 2, 5, 7, y 9), incluso, la Secuencia 4 y el Problema 7 que corresponden a una relación cuadrática requieren conocimiento de las tablas de multiplicar para resolverse, al igual que el Problema 4 que compete a una relación exponencial.

Se encontró, indudablemente, que aquellos estudiantes que no tienen dominio de las tablas de multiplicar tienen dificultades para detectar las variaciones asociadas a la multiplicación que caracterizan a los casos particulares, por lo tanto, presentan obstáculos cognitivos que interfieren para transitar hacia la obtención de sentido y por ende articular una regla de generalización, porque no hay o no es robusto en su repertorio de conocimientos previos ese contenido medular que les permita la conexión hacia el conocimiento deseado. Esto no implica que no tengan la capacidad para generalizar o que no muestren evidencia para generalizar, pero es necesario propiciar los cambios de atención en ellos y en ocasiones ayudarlos a resolver las multiplicaciones para que logren realizar el tránsito hacia la obtención de sentido y la articulación de una regla de generalización.

Para ejemplificar esta dificultad, se comparte un extracto de la resolución del Problema 4, que trata sobre bacterias, realizada por E24. En la pregunta 1d) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 4? E24 responde:

| | |
|---|---|
| E24: | Si acá fueron ocho, estas ocho van a dar hijas... [escribe del 1 al 8 (Figura 7-1) y dice refiriéndose a cada número] está la primera bacteria, segunda, tercera … octava. De acá [dirigiéndose al número 1] salen una bacteria [corrige, salen dos y dibuja dos palitos para representar a las bacterias], acá otros dos [dirigiéndose al número 2 y dibuja otros dos |

palitos. Continúa así hasta llegar al número 8. Finalmente cuenta los palitos y dice] 16 bacterias

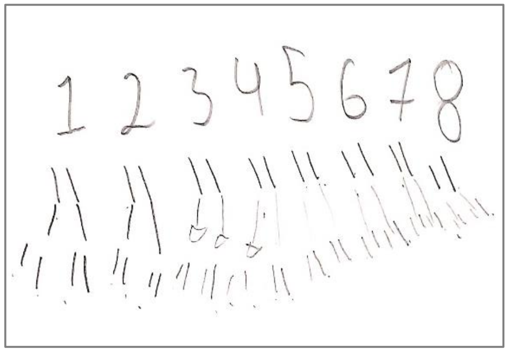



*Figura 7-1*. Respuesta de E24 en la pregunta 1d) del Problema 4.

Enseguida, E24 encuentra el número de bacterias al minuto 5 y procede de manera análoga que en el inciso anterior. Dibuja dos palitos para cada una de las 16 bacterias obtenidas con anterioridad, cuenta el total de bacterias y escribe en su hoja de respuestas el número 32. Realizado esto, el entrevistador le pregunta:

| | |
|---|---|
| Investigador: | ¿No crees que habrá una manera más fácil para resolver? Si yo te pregunto a los 10 minutos, a los 20 minutos, ¿crees que sería adecuado que pongamos muchos palitos? |
| E24: | No |
| Investigador: | ¿Cómo podemos encontrar la respuesta de forma más rápida? |
| E24: | [Pensativo] |
| Investigador: | [El entrevistador interviene] fíjate, aquí fue dos, dos, dos, dos … [le muestra la hoja en donde dibujó las bacterias para 4 minutos, apuntando del 1 al 8], … ¿Cuántas bacterias hay aquí? |
| E24: | 8 |
| Investigador: | Cada una da a dos… |
| E24: | A dos [al mismo tiempo que el investigador dice dos] |
| Investigador: | Para que me dé 16, si yo tengo 8 bacterias y nacen 2… ¿qué hago para que me dé 16? |
| E24: | ¿8 por 2? |
| Investigador: | 8 por 2 [afirma] ¿cuánto es? |
| E24: | 16 |
| Investigador: | y tú sabes que cada una de ellas va a dar… |
| E24: | [Completa la información] nacen 2 … ah ya vi como… |
| Investigador: | ¿Cómo llegamos a los 32? |
| E24: | Ya vi como… ¿16 por 2? [toma la hoja y escribe la multiplicación 16 × 2, resuelve con cierta dificultad] 2 por 6 son [pausa] …dieci…seis |
| Investigador: | 2 por 6 ¿cuánto es? O 6 por 2 |
| E24: | ¿6 veces 2? |
| Investigador: | 6 veces 2 o 2 por 6, 2 veces 6 |
| E24: | 6 [y moviendo cada dedo de su mano izquierda prosigue] 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 |

| | |
|---|---|
| Investigador: | 12 [le interrumpe el investigador], 12 [le confirma], 2 por 6, 12 |
| E24: | [Continúa con el algoritmo de la multiplicación] 2, llevo 1, 2 por 1, 2 más 1, 3, 32 [respuesta final] |

Se considera que debido a la intervención del investigador E24 logra transitar hacia las acciones obtención de sentido y articular. Incluso, expresa la siguiente regla de generalización: “Multiplicando el numero de vacterias que hay $\times$ 2” como se muestra en la Tabla 6-3.

Se identifica que la falta de dominio de las tablas de multiplicar generó dificultades en E24 para articular, sin ayuda, la regla de generalización. Se observó que en todas las secuencias figurales-numéricas y numéricas que involucran una relación multiplicativa, las cuales se aplicaron sin llevar a cabo entrevistas, E24 no transitó a las acciones obtención de sentido ni articular. Tampoco lo logró en la resolución del Problema 7 que corresponde al área de cuadrados, aun con la entrevista, ya que en este problema no era posible realizar dibujos de apoyo para encontrar la solución como en el caso del problema de las bacterias, sino que era necesario reconocer las multiplicaciones de la forma $n \times n$. Aunque el entrevistador incluyó más casos particulares, simplemente E24 no logró reconocer dichas multiplicaciones.

| | |
|---|---|
| Investigador: | [Mencionando los ejemplos de la tabla del Problema 7] Si vale 1.7 cm su lado, su área es 2.89; si vale 2 el lado, 4 de área; si vale 5 cm, 25 centímetros cuadrados; si vale 8, 64… |
| Investigador: | [Mencionando otros ejemplos que no están en la tabla] si vale 3… |
| E24: | 46 |
| Investigador: | Si vale 3, su área sería 9 centímetros cuadrados. Si vale 6 |
| E24: | 36 |
| Investigador: | Su área sería 36 [confirma], si vale 10 su área sería 100 centímetros cuadrados, si vale 12 su área sería 144… ¿cuál es la regla que está detrás de ello? |
| E24: | [Pensativo] |
| Investigador: | ¿Cómo encontramos este 2.89, 4, 25, 64, 9, 36, 100, 144? ¿Qué crees que se hizo? |
| E24: | [Pensativo] |
| Investigador: | Si vale 5 de lado ¿cuánto vale su área? |
| E24: | [Pensativo] |
| Investigador: | Checa la tabla |
| E24: | 25 |
| Investigador: | Si vale 8 |
| E24: | 64 |
| Investigador: | ¿Qué crees que se hizo para encontrar esos resultados? ¿Cuál es la regla que está allá? |
| E24: | [Pensativo] |

| | |
|---|---|
| Investigador: | ¿Cómo encuentro ese resultado? ¿Cómo encuentro el 25? ¿64? … ¿Qué tuve que hacer para encontrarlos?... |
| E24: | [Pensativo] |
| Investigador: | ¿Cómo encuentro el área? |
| E24: | Contando lo de adentro… |
| Investigador: | Así es, pero cómo lo encuentro… ¿cómo dio el 25? |
| E24: | [Pensativo] Sonríe [El entrevistador no insiste] |

Cuando E24 contesta 36, se tiene la expectativa de que ha percibido la multiplicación de la forma $n \times n$ para el 2, 3, 5 y 6 pero no es así. Se concluye que el obstáculo que impide que E24 transite hacia la obtención de sentido y articulación de una regla de generalización es la falta de dominio de las tablas de multiplicar porque no puede relacionar, por ejemplo, 8×8 con 64 o 5×5 con 25.

▪ **Falta de reconocimiento de números grandes y de operar con ellos.** Los números forman parte en la resolución de tareas matemáticas. A través de ellos se pueden calcular resultados cuyo conteo en diversas ocasiones no se puede realizar directamente sobre los objetos. Cuando los estudiantes aún están en etapa de conteo suelen representar la cantidad de objetos y contarlos, o bien proceder por *percepción global*, lo cual significa determinar el cardinal de una colección sin recurrir al conteo (González y Weinstein, 1998).

Adicionalmente, cuando se trabaja con números grandes dichos autores refieren que el dominio de estos números juega un rol mítico para el niño, ya que no es frecuente que el niño pueda acceder a este tipo de números mediante conteo, por lo general se enseña a designarlos oralmente o a reconocer su escritura. Por tal motivo, opinan que es necesario que los niños resuelvan diversas tareas en las que los números jueguen diferentes usos y adopten diferentes concepciones para que logren apropiarse de ellos.

Los números más grandes que se involucraron en las tareas fueron los millares, en particular en los Problemas 4 y 6. En el Problema 4 se solicitó encontrar el número de bacterias al minuto 10 y la respuesta encontrada, 1024, resultó difícil leer para unos estudiantes, se puede interpretar que tuvieron dificultad para reconocer la escritura de dicho número.

El Problema 6 involucra millares en los datos y para hallar respuesta a las preguntas planteadas es necesario operar con dichos números. Se comparte el siguiente ejemplo para dar cuenta de la dificultad de trabajar con números grandes que manifestó E12.

La pregunta 1d) del Problema 6 plantea ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 3°C? ¿Cómo encontraste la respuesta? E12 responde correctamente 3500 y escribe “Por que en el 3°C fui restando los números anteriores” (Figura 7-2).

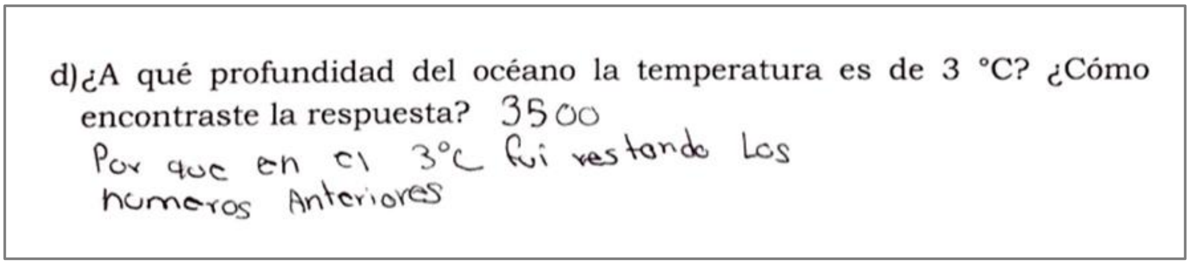

d)¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 3 °C? ¿Cómo encontraste la respuesta? 3500
Por que en el 3°C fui restando Los humeros Anteriores

*Figura 7-2*. Respuesta de E12 en la pregunta 1d) del Problema 6.

Para obtener más información respecto a los números involucrados en la resta, el investigador le pregunta:

| | |
|---|---|
| Investigador: | ¿Y cuánto en particular restaste? |
| E12: | Fui restándole lo de 400 metros [lee 400 en lugar de 4000] y fui mediendo [se interpreta que quiere decir metiendo] el qui… el cinco y los ceros |
| Investigador: | [El investigador aún sin entender el procedimiento de E11 comenta] o sea restaste por ejemplo ¿4500 menos 4000? ¿Cómo le hiciste? Porque acá [señalando lo que escribió el estudiante en su hoja de respuestas] ya me dijiste que fuiste restando, pero ¿cómo fue tu resta? |
| E12: | [Pensativo] |
| Investigador: | Esta respuesta es correcta [apuntando los 3500]… qué… ¿cómo restaste? O ¿qué hiciste para que llegues allá? |
| E12: | [Pensativo] |
| Investigador: | De hecho, aquí [apuntando su hoja de respuesta] me dijiste que fuiste restando, pero quiero saber ¿qué restaste con quién?… o ¿cómo hiciste tu resta para que llegues a esa respuesta? |
| E12: | [Pensativo] |
| Investigador: | ¿Qué hiciste para que llegues? Es correcto, nada más que aquí no me queda muy claro, porque me dices que restaste ... ¿Qué hiciste? |
| E12: | Em, sólo me vino la idea de que …estén… 400 metros [lee 400 en lugar de 4000] estén… no, a 400 … |
| Investigador: | 4000 [corrige sin identificar la dificultad de E12 para leer dichos números] |
| E12: | En 4000 le restaría…esten… 1 para que yo llegue a 300 |

| | |
|---|---|
| Investigador: | A 3000 [corrige nuevamente] |
| E12: | 3000 [repite]… y quise meter los 500 |
| Investigador: | Ok. |

Primero se interpretó que E12 realizó operaciones con los millares y centenas desglosando 4500 en 4000 + 500, restando 1000 a 4000 y agregando al resultado 500 para obtener los 3500. Sin embargo, conforme fue resolviendo el problema se observó que E12 tiene dificultades para la lectura de millares, así como para operar con esos números, porque dio respuestas como seiscientos o seiscientos cincuenta en lugar de seis mil o seis mil quinientos y no evidenció durante la resolución realizar las sumas o restas correspondientes que se requieren en la resolución del problema. De manera que, finalmente, se infiere que E12 consideró a los millares como un conjunto de 4 dígitos, por lo que se interpreta que el patrón que reconoció cuando la temperatura incrementa es el que se muestra en la Figura 7-3 y de modo análogo se considera que procedió cuando la temperatura disminuye. La regla que otorgó E12 proporciona referentes de la generalización que realizó: "bamos disminuyendo o subiendo la cantidad de numeros".

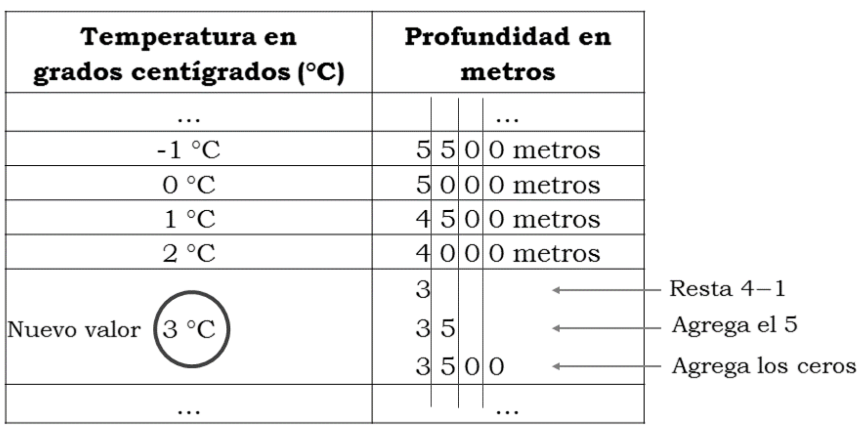



*Figura 7-3*. Patrón que identifica E12 para responder correctamente a la pregunta 1d) del Problema 6.

Es deseable que los estudiantes tengan referentes significativos de los números grandes y desarrollen habilidades para reconocerlos, leerlos y operar con ellos.

▪ **Predominio de la operación suma sobre la resta.** Cuando los estudiantes resuelven problemas suelen realizar diferentes estrategias de resolución y aunque resultan ser correctas, en ocasiones no son las más sofisticadas. En los problemas de generalización, la regla que se produce se espera que sea precisa y concisa lo que implica, en ocasiones, que la estrategia de resolución deba ser la estrategia sofisticada. A continuación, el siguiente ejemplo muestra la estrategia de resolución propuesta por E23 en el Problema 5.

La relación involucrada en el Problema 5 es de la forma $f(x) = 150 - x$. E23 encuentra la cantidad de panuchos que le falta freír a Doña Soco a los 10 minutos de la siguiente forma:

| | |
|---|---|
| Investigador: | Si pasan 10 minutos ¿cuántas ya frio? |
| E23: | 10 |
| Investigador: | ¿Cuántas le faltan? ¿Qué debo de hacer? |
| E23: | [Pensando] |
| Investigador: | ¿Con cuántas tortillas inicia ella [Doña Soco]? |
| E23: | Con 150 |
| Investigador: | Con 150 [confirmando], si pasan 10 minutos ¿cuántas ya tiene listas? |
| E23: | 10 |
| Investigador: | ¿Qué debo hacer para encontrar lo que le falta? |
| E23: | Sumar |
| Investigador: | ¿A quién le voy a sumar? |
| E23: | Al 10 |
| Investigador: | ¿A 10 qué le voy a sumar? |
| E23: | Lo que falta |
| Investigador: | ¿Cuánto le falta? |
| E23: | [Pensando] 130 |
| Investigador: | ¿130 y 10? |
| E23: | 140 |
| Investigador: | ¿Está completo? |
| E23: | [Mueve la cabeza indicando que no y dice] 140 |
| Investigador: | ¿10 y 140? |
| E23: | 150 |
| Investigador: | ¿Está completo? |
| E23: | [Mueve la cabeza afirmativamente] |

Se puede apreciar que el planteamiento de E23 para el valor de 10 es de la forma:

$$10 + \text{lo que falta} = 150$$

El investigador le pregunta por la cantidad de panuchos a los 20 minutos y procede de forma similar. Por tanteo encuentra la respuesta correcta mediante la validación del investigador. Seguidamente el investigador motiva a E23 a usar otra estrategia, que evite el tanteo, y a través del andamiaje E23 plantea la operación resta.

El predomino de la suma sobre la resta puede deberse a la falta de experiencia de trabajar con números grandes; y a la falta de discusión escolar acerca de los diferentes procedimientos para resolver problemas en los cuales se analice la utilidad de la resta, como procedimiento económico respecto a la suma. Broitman (2010) menciona que cuando se trabajan problemas con números pequeños, en lugar de usar la operación resta se suele proceder por conteo, por ejemplo, en el problema: "Juan y Pedro tienen juntos 17 canicas. Si Juan tiene 12 canicas ¿cuántas tiene Pedro?" Para resolver por conteo se parte de 12 y se cuenta 13, 14, 15, 16, 17.

Si el problema se planteara con números grandes, por ejemplo, "Juan y Pedro tienen juntos 147 canicas. Si Juan tiene 63 canicas ¿cuántas tiene Pedro?", se dificulta el procedimiento de ir contando de uno en uno, incluso de probar números hasta encontrar el correcto, lo cual privilegia el uso de la resta como procedimiento adecuado respecto a los otros procedimientos.

Se considera que E23 no cuenta con experiencia en resolución de problemas que exigen el uso de la resta. Broitman (2010) menciona que trabajar con operaciones básicas incluyen tanto el dominio de diversas estrategias de cálculo, como el reconocimiento de diferentes problemas que se resuelven con dichas operaciones. No es suficiente que los estudiantes puedan resolver el algoritmo de las operaciones para encontrarse preparados respecto a cuándo y cómo usar dichas operaciones.

Las diferentes dificultades identificadas en los estudiantes permiten reflexionar sobre el diseño de nuevas tareas matemáticas que contribuyan a promover la generalización algebraica a pesar de las dificultades. Y en la medida que los estudiantes refuercen sus habilidades matemáticas, plantearles tareas de generalización cada vez más desafiantes. Cuando una tarea matemática no se resuelve con los conocimientos matemáticos que se requieren se deben indagar las causas de ello, cuestionando por qué los detalles que son evidentes para algunos estudiantes, no los son para otros.

Además de tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, dos aspectos esenciales que se deben considerar en el diseño de tareas de generalización matemática son:

(1) el carácter algebraico que susciten la construcción de reglas o fórmulas de generalización algebraica y (2) la adecuada orientación de la atención hacia la estructura matemática, esto puede ser a través del patrón figural, el número suficiente de términos cercanos y lejanos, así como la factibilidad de poder predecir algún término.

Adicionalmente, desde un punto de vista didáctico, el rol del docente de educación básica es imprescindible para contribuir en el desarrollo de la generalización matemática desde edades tempranas y sus aportaciones pueden ser diversas. Se reconoce que no es una labor fácil y que se requiere un trabajo conjunto con otros docentes e investigadores para obtener resultados satisfactorios en pro de la formación de los estudiantes.

Finalmente, los resultados obtenidos y la experiencia de haber llevado a cabo el proyecto de investigación permiten plantear propuestas de investigaciones futuras. Una línea de gran interés es acerca del lenguaje oral y escrito, ya que hablar y escribir son diferentes formas de representación mental. Asimismo, se reconoce que existe un proceso de transformación del lenguaje oral al escrito y del lenguaje de palabras hacia los signos matemáticos. La escritura aritmética y la algebraica son sistemas de simbolización que contribuyen a expresar la generalización algebraica, pero es necesario realizar investigaciones como la expuesta en este trabajo que permitan reconocer los sistemas simbólicos que les preceden.

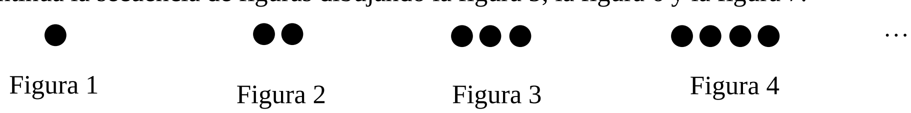
# Anexo A

## Análisis de las tareas del Bloque I

En este anexo se presenta el resumen de análisis de las secuencias del Bloque I. Se incluyen las secuencias para proporcionar al lector mayor referente.

### A.1. Secuencia 1

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.




La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

$$1, 2, 3, 4, \ \ldots$$

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

$$1, 2, 3, 4, \boxed{\phantom{00}}, \boxed{\phantom{00}}, \boxed{\phantom{00}}, \ldots$$

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10?

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25?

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 70? Explica cómo lo has hecho.

*Figura A-1.* Secuencia figural-numérica definida por $f(x) = x$.

En la Tabla A-1 se presenta el tránsito entre las acciones de manipular, obtener sentido y articular la regla de generalización que se evidenció en los estudiantes al resolver los incisos de la Secuencia 1.

*Tabla A-1*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 1, Bloque I.

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | | OS | A |
| E2 | M | M | M | | OS | |
| E3 | M | M | M | | OS | A |
| E4 | M | M | M | | OS | |
| E5 | M | M | M | | OS | A |
| E6 | M | M | M | | OS | A |
| E7 | M | M | M | | OS | A |
| E8 | M | M | M | | OS | A |

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|
| E9 | M | M | M | OS | A |
| E10 | M | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | M | OS | A |
| E12 | M | M | M | OS | A |
| E13 | M | M | M | OS | A |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | M | M | M | OS | A |
| E16 | M | M | M | OS | A |
| E17 | M | M | M | OS | A |

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|
| E18 | M | M | M | OS | A |
| E19 | M | M | M | OS | A |
| E20 | M | M | M | OS | A |
| E21 | M | M | M | OS | A |
| E22 | M | M | M | OS | A |
| E23 | M | M | M | OS | A |
| E24 | M | M | M | OS | A |
| E25 | M | M | M | OS | A |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

Las expresiones de generalización que proporcionaron los estudiantes para explicar cómo hallaron el número de puntos que tiene la figura 70 se pueden apreciar en la Tabla A-2.

*Tabla A-2*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso e), Secuencia 1, Bloque I.

| **Categoría 1** |
|---|
| E1. 70 puntos lo hice contando los numeros en mi mente y leyendo muy bien las preguntas<br>E7. 70 multiplicando y sumando<br>E12. 70 pensando cuantos puntos tendría si fuera dibujando<br>E15. con 70 puntos o otra figuras mas<br>E18. 70 puntos yo lo he hecho como me lo valla explicando la pregunta.<br>E19. viendo figuras y lo conte y me dio 70<br>E21. tiene 70 me apoye en el ejemplo<br>E23. sume de 10 en 10 asta que llege a 70, 10+10+10+10+10+10+10=70<br>E25. primero deberiamo escribir 70 bolitas y ya sabras el resultado |
| **Categoría 2** |
| E3. 70 porque las figuras ban de 1 en 1<br>E9. tiene 70 porque es de un puntito por ejemplo si pongo 10 siempre va a ser 10<br>E11. 70 porque el numero 70 que te muestra es esa cantidad que es<br>E16. 70 va aumentando de 1 en 1<br>E17. 70. boy siguiendo por los números o por los puntos.<br>E20. 70 porque es lo mismo<br>E24. 70 porque me fije de los puntos y números |
| **Categoría 3** |
| E5. R=70 ¿porque? porque aumenta de 1 en 1 y si es 70=70x1=70<br>E13. 70 puntos. En las figuras se puede ver que avanza de uno en uno así que si la figura 1 tiene un punto la figura 2 tendrá 2 puntos.<br>E22. 70 puntos yo busque su patron la figura 1 tiene 1 punto y la figura 2 tiene 2 puntos y asi lo estube haciendo |

| **Categoría 4** |
|---|
| E6. 70 puntitos cada figura tiene los mismos puntitos. ejemplo: figura 1 = 1 puntito<br>E14. 70 puntos porque cada punto tiene el mismo numero que el de las figuras |
| **Categoría 5** |
| E8. 70, porque el numero de figuras es lo mismo que el de puntos, ejemplo: si el numero de figura es 100 igual los puntos seran 100<br>E10. 70 puntos el número de la figura es el mismo que el de los puntos |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

## A.2. Secuencia 2

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

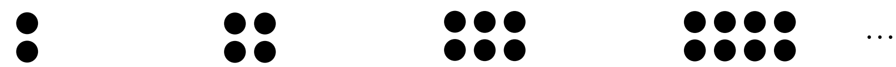


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

2, 4, 6, 8, …

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

2, 4, 6, 8, $\boxed{\phantom{00}}$ , $\boxed{\phantom{00}}$ , $\boxed{\phantom{00}}$ ,

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10?
d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25?
e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 100? Explica cómo lo has hecho.

*Figura A-2.* Secuencia figural-numérica definida por $f(x) = 2x$.

En la Tabla A-3 se reportan cómo transitaron los estudiantes respecto a la espiral de acciones. Las expresiones de generalización de los estudiantes se presentan en la Tabla A-4.

*Tabla A-3.* Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 2, Bloque I.

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | OS | A |
| E2 | M | | | | |
| E3 | M | M | M | OS | A |
| E4 | | | | | |
| E5 | M | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | M | OS | A |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | M | OS | A |

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E9 | M | M | M | OS | A |
| E10 | M | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | M | OS | A |
| E12 | M | M | M | OS | A |
| E13 | M | M | M | OS | A |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | M | M | M | M | NC |
| E16 | M | M | M | OS | A |
| E17 | M | M | M | OS | A |

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E18 | M | M | M | OS | A |
| E19 | M | M | | | |
| E20 | M | M | | | |
| E21 | M | M | M | OS | A |
| E22 | M | M | M | OS | A |
| E23 | M | M | M | OS | A |
| E24 | M | M | | | |
| E25 | M | M | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

*Tabla A-4*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso e), Secuencia 2, Bloque I.

| |
|---|
| **Categoría 1** |
| E7. 200 multiplicando y sumando<br>E18. 200 puntos yo todo lo que me pedía lo multiplicaba<br>E21. tendría 200 apoyandome con los que hice |
| **Categoría 2** |
| E9. 200 porque va llendo de 2 en dos<br>E13. 200 puntos. En las figuras conte de cuanto en cuanto va avanzando, avanza de 2 en 2<br>E22. 200 puntos. En el insiso a encontré su patron que ba ambansado de 2 |
| **Categoría 3** |
| E3. 200 porque si te das cuenta que la secuencia ba de 2 en 2 y 100 lo puedes multiplicar por 2 y así te da 200<br>E5. 200 ¿Porque? Porque aumenta de 2 por ejemplo: 2x100=200<br>E11. 200 por que el doble de 100 es = 200<br>E17. 200 es que ba en dos y el doble de cien es docientos<br>E23. Sumándolo 100+100=200 |
| **Categoría 4** |
| E14. 200, por que cada punto o numero hay que multiplicarlo por 2<br>E16. 200 multiplicando entre 2 y para saber si esta bien lo divido |
| **Categoría 5** |
| E6. 100 + 100 = 200 = 100 x 2 = 200 el numero de la figura multiplicado x 2<br>E8. 200, por que yo pienso que el numero de figura es multiplica en 2 y da el resultado<br>E10. 200 puntos multiplicas el numero de la figura por dos |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

## A.3. Secuencia 3

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

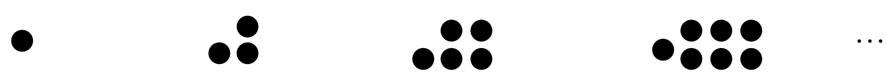


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 …

La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

1, 3, 5, 7, …

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

1, 3, 5, 7, $\boxed{\phantom{00}}$, $\boxed{\phantom{00}}$, $\boxed{\phantom{00}}$, ...

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10?

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 50? Explica cómo lo has hecho.

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 200?

*Figura A-3.* Secuencia figural-numérica definida por $f(x) = 2x - 1$.

En la Tabla A-5 se muestra cómo transitaron los estudiantes respecto a la espiral de acciones. Se puede observar que la resolución de la secuencia resultó difícil para la mayoría de los estudiantes, aunque 24 de ellos pudieron identificar cómo variaban los términos no todos pudieron obtener sentido ni articular la regla de generalización. Varios estudiantes encontraron el número de puntos para términos cercanos consecutivos y no consecutivos por recursión. Sin embargo, para los incisos d) y e) en los cuales se solicita el número de puntos para las figuras 50 y 200 respectivamente, algunos estudiantes no pudieron articular una regla de generalización que los llevara a una respuesta o procedimiento correcto.

*Tabla A-5*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 3, Bloque I.

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | | |
| E2 | M | | | | |
| E3 | M | M | M | OS | A |
| E4 | | | | | |
| E5 | M | M | M | OS | A |
| E6 | NC | M | M | OS | A |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | M | OS | A |

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E9 | M | M | | | |
| E10 | M | M | | | |
| E11 | M | M | M | OS | A |
| E12 | M | M | M | | |
| E13 | M | M | M | | |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | M | M | | | |
| E16 | M | M | | | |
| E17 | M | M | | | |

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E18 | M | M | M | OS | |
| E19 | M | M | | | |
| E20 | NC | | | | |
| E21 | M | M | M | | |
| E22 | M | M | M | | |
| E23 | M | M | M | | |
| E24 | | | | | |
| E25 | | | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

Como comentario particular, E6 no continuó la secuencia figural del inciso a) dibujando los puntos para las figuras 5, 6, y 7, sino que resolvió directo el inciso b) para completar numéricamente la secuencia. Las expresiones de generalización se clasifican en la Tabla A-6.

*Tabla A-6*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso d) o e), Secuencia 3, Bloque I.

| **Categoría 1** |
|---|
| E7. 99 multiplicando<br>E18. 99 a todo lo que e hecho le resto uno y lo sumo |
| **Categoría 3** |
| E5. 399 ¿Porque? Porque 200+200=400-1 =399<br>E6. 399 puntitos 200-1=199+200=399<br>E11. 99 porque 50 mas 49 que es lo de arriba me da 49 y 49+50=99<br>E14. 99 porque esta respuesta debería ser 100 pero menos uno es 99 |
| **Categoría 4** |
| E3. 399 porque lo multipliqué x 2 y lo reste menos 1 |
| **Categoría 5** |
| E8. R=99, Yo lo hice pensando que el numero de figura se multiplica en 2 y se resta 1 |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente. El número 99 corresponde al inciso d) y 399 al inciso e).*

## A.4. Secuencia 4

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

La secuencia de figuras se puede escribir como una secuencia numérica escribiendo el número de puntos que tiene cada figura. Así podríamos escribir los números:

1, 4, 9, 16, …

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5, 6 y 7 que dibujaste con anterioridad.

1, 4, 9, 16, $\square$, $\square$, $\square$, ...

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10?

d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 15? Explica cómo lo has hecho.

e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 30?

*Figura A-4.* Secuencia figural-numérica definida por $f(x) = x^2$.

En la Tabla A-7 se presenta el resumen de las acciones manipular, obtener sentido y articular que se observaron en los estudiantes al resolver esta secuencia y en la Tabla A-8 se muestran las expresiones de generalización producidas.

*Tabla A-7.* Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 4, Bloque I.

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | | | |
| E2 | M | | | | |
| E3 | M | | | | |
| E4 | | | | | |
| E5 | M | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | M | OS | |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | M | OS | A |

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E9 | | | | | |
| E10 | M | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | M | OS | A |
| E12 | M | M | M | OS | A |
| E13 | M | M | M | | |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | | | | | |
| E16 | M | M | M | OS | A |
| E17 | M | M | M | OS | A |

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E18 | M | M | M | | |
| E19 | M | | | | |
| E20 | NC | | | | |
| E21 | | | | | |
| E22 | | | | | |
| E23 | | | | | |
| E24 | | | | | |
| E25 | | | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

*Tabla A-8.* Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso d) o e), Secuencia 4, Bloque I.

| **Categoría 2** |
|---|
| E8. 225 multiplicando |
| E16. 30 fijarme las partes de afuera como una ele ∟ multiplico ∟ y me da el resultado |

| **Categoría 3** |
|---|
| E5. 75 porque 15x15=75 |
| E6. 150 puntitos 15x15=150 |
| E7. 30x30=900 |
| E11. multiplicando el numero 15x15=205 |
| E12. 15x15=75 |
| **Categoría 4** |
| E10. Lo multiplicas por su mismo numero (15x15=90) |
| E14. 225 porque el numero de la figura multiplicalo, por ejemplo, 15x15 es 225 |
| E17. 225 multiplicar lo mismo y te dara el resultado |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente. Las respuestas de E16 y E7 corresponden al inciso e), la respuesta de los otros estudiantes al inciso d).*

## A.5. Secuencia 5

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5 y la figura 6.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5 y 6 que dibujaste con anterioridad.

3, 6, 9, 12, $\square$, $\square$, ...

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10? Explica cómo lo has hecho.
d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25? Explica cómo lo has hecho.
e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 80? Explica cómo lo has hecho.

*Figura A-5*. Secuencia figural-numérica definida por $f(x) = 3x$.

En la Tabla A-9 se reportan cómo transitaron los estudiantes respecto a la espiral de acciones.

*Tabla A-9*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 5, Bloque I.

| E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | OS | A |
| E2 | M | M | | | |
| E3 | M | M | M | OS | A |
| E4 | | | | | |
| E5 | M | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | M | OS | A |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | M | OS | A |
| E9 | M | M | M | OS | A |
| E10 | M | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | M | OS | A |
| E12 | M | M | M | | |
| E13 | M | M | M | M | |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | M | M | M | OS | A |
| E16 | M | M | M | OS | A |
| E17 | M | M | M | M | |
| E18 | M | M | M | M | |
| E19 | M | M | | | |
| E20 | M | M | M | OS | A |
| E21 | M | M | M | M | NC |
| E22 | M | M | M | OS | A |
| E23 | | | | | |
| E24 | M | M | | | |
| E25 | M | M | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

Se puede apreciar que la mayoría no presenta dificultades para articular una regla implícita de generalización. En la Tabla A-10 se presentan las expresiones de generalización que emitieron los estudiantes.

*Tabla A-10*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso e), Secuencia 5, Bloque I.

| |
|---|
| **Categoría 2** |
| E15. 240 punto lo multiplique |
| **Categoría 3** |
| E1. 240 puntos multiplicando 80x3=240<br>E3. 240 lo hise multiplicando 80x3=240<br>E5. 240 puntos. Porque al multiplicar 80x3 da 240 puntos<br>E6. 3x80=240<br>E9. 160 porque va de tres en tres y si multiplicas 80x3=160<br>E10. 204 puntos lo multipliqué por 3<br>E11. 280 porque 80 de abajo y de lado 3 asi que es 80x3=280<br>E14. “240” porque es multiplicar “3x80”<br>E15. 240 punto lo multiplique<br>E22. 240 puntos multipliqué 80x3=240 |
| **Categoría 4** |
| E7. Multiplicando 80x3=240 ← numero de puntos de la figura 80<br>E8. 240, poniendo la cantidad y después multiplicarlo x 3 |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

## A.6. Secuencia 6

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5, la figura 6 y la figura 7.

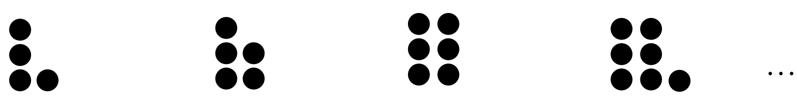


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5 y 6 que dibujaste con anterioridad.

4, 5, 6, 7, $\boxed{\phantom{00}}$, $\boxed{\phantom{00}}$, ...

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10? Explica cómo lo has hecho.
d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25? Explica cómo lo has hecho.
e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 80? Explica cómo lo has hecho.

*Figura A-6.* Secuencia figural-numérica definida por $f(x) = x + 3$.

Las acciones manipular, obtener sentido y articular se reportan en la Tabla A-11. En comparación con la Secuencia 5, esta secuencia resultó más complicada de resolver para los estudiantes.

*Tabla A-11*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 6, Bloque I.

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | M | |
| E2 | M | | | | |
| E3 | M | M | M | M | |
| E4 | | | | | |
| E5 | M | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | M | OS | A |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | M | OS | A |

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|
| E9 | M | M | M | | |
| E10 | M | M | | | |
| E11 | M | M | M | NC | NC |
| E12 | M | M | M | OS | A |
| E13 | M | M | M | M | |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | M | M | M | M | |
| E16 | M | M | M | | |
| E17 | M | M | M | M | |

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|
| E18 | M | M | M | OS | A |
| E19 | M | M | | | |
| E20 | M | M | M | | |
| E21 | M | M | M | M | NC |
| E22 | M | M | M | M | |
| E23 | M | M | M | M | |
| E24 | | | | | |
| E25 | M | M | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

Los estudiantes pudieron identificar la variación entre término y término, pero resultó difícil para varios de ellos articular una regla de generalización que les permitiera escribir la respuesta o procedimiento correcto para el inciso e). En la Tabla A-12 se presentan las expresiones de generalización que emitieron algunos estudiantes.

*Tabla A-12*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso d) o e), Secuencia 6, Bloque I.

| **Categoría 1** |
|---|
| E18. 83 lo fui sumando y observando porque los 3 que me sobra que tienes que poner lo sume con los 80 y me dio 83 |
| **Categoría 3** |
| E6. Figura 25+3=28<br>E7. Sumando 80+3=83← numero de puntos de la figura 80<br>E12. 83 si en la figura ochenta tengo 80 puntos le sumo 3 y me da el resultado<br>E14. 83 por que le sume 3 al 80 |
| **Categoría 4** |
| E5. Porque solo aumenta 3 mas y da 83<br>E8. 83, sumandole 3 más |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente. La respuesta de E6 corresponde al inciso d), la respuesta de los otros estudiantes al inciso e).*

## A.7. Secuencia 7

En la Tabla A-13 se tiene el resumen de las acciones manipular, obtener sentido y articular que presentaron los estudiantes durante la resolución de la secuencia. Como se puede apreciar, al igual que la Secuencia 5 que competen a relaciones multiplicativas, la mayoría articula una regla de generalización para responder correctamente a todos los incisos de la tarea.

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5 y la figura 6.

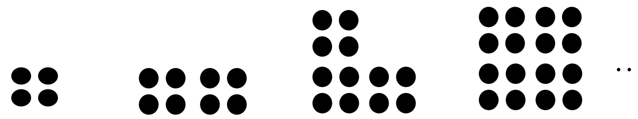


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5 y 6 que dibujaste con anterioridad.

4, 8, 12, 16, $\boxed{\phantom{00}}$, $\boxed{\phantom{00}}$, ...

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10? Explica cómo lo has hecho.
d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25? Explica cómo lo has hecho.
e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 80? Explica cómo lo has hecho.

*Figura A-7*. Secuencia figural-numérica definida por $f(x) = 4x$.

*Tabla A-13*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 7, Bloque I.

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | OS | |
| E2 | M | M | | | |
| E3 | M | M | M | OS | A |
| E4 | M | M | | | |
| E5 | M | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | M | OS | A |
| E7 | M | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | M | OS | A |

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|
| E9 | M | M | M | OS | |
| E10 | M | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | M | OS | A |
| E12 | M | M | M | | NC |
| E13 | M | M | M | OS | A |
| E14 | M | M | M | OS | A |
| E15 | M | M | M | OS | A |
| E16 | M | M | M | OS | A |
| E17 | M | M | M | OS | A |

| **E** | **a)** | **b)** | **c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|---|---|
| E18 | M | M | M | OS | A |
| E19 | M | M | M | OS | A |
| E20 | M | M | M | OS | A |
| E21 | M | M | M | M | |
| E22 | M | M | M | | |
| E23 | M | M | | | |
| E24 | M | M | | | |
| E25 | M | M | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

En la Tabla A-14 se muestran las expresiones de generalización que proporcionaron los estudiantes en el inciso e).

*Tabla A-14*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso e), Secuencia 7, Bloque I.

| **Categoría 1** |
|---|
| E15. Son 320 puntos que tiene lo hice multiplicando<br>E16. Multiplicando =320<br>E17. 320 multiplicando y contando<br>E19. 320 porque 200+80+40=320 |
| **Categoría 3** |
| E3. 320 multiplique 80x4=320 así me dio<br>E5. 320 porque 80x4=320 |

| |
|---|
| **Categoría 3** |
| E10. 220 puntos multiplique 4x80=220<br>E13. 320 porque 4x80 es 320<br>E14. “320” porque le multiplique 4 a la figura 80<br>E18. 320 sume el 80 4 veces<br>E20. 160 multiplique 4 bese 80 |
| **Categoría 4** |
| E8. 320, poniendo el numero después multiplicarlo x 4 |
| **Categoría 5** |
| E7. 320 porque supe que la figura se multiplica por 4 |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

## A.8. Secuencia 8

a) Continúa la secuencia de figuras dibujando la figura 5 y la figura 6.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) Completa en cada cuadro la secuencia numérica que corresponde al número de puntos de las figuras 5 y 6 que dibujaste con anterioridad.

5, 6, 7, 8, $\boxed{\phantom{00}}$, $\boxed{\phantom{00}}$, ...

c) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 10? Explica cómo lo has hecho.
d) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 25? Explica cómo lo has hecho.
e) Sin dibujar alguna figura ¿Cuál es el número de puntos que tiene la figura 80? Explica cómo lo has hecho.

*Figura A-8.* Secuencia figural-numérica definida por $f(x) = x + 4$.

El tránsito entre las acciones de la espiral se presenta en la Tabla A-15. Esta secuencia también resultó difícil de resolver de igual manera que la Secuencia 6. Los estudiantes identifican la variación entre términos, pero resulta difícil para ellos encontrar la regla de generalización.

En la Tabla A-16 se encuentran las expresiones de generalización que competen a esta secuencia, algunos estudiantes sí identifican que para encontrar los términos solicitados en los incisos d) y e) requieren sumar 4.

*Tabla A-15*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 8, Bloque I.

| E | a) | b) | c) | d) | e) | E | a) | b) | c) | d) | e) | E | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | | | E9 | M | M | M | OS | A | E18 | M | M | M | OS | |
| E2 | | | | | | E10 | M | M | | | | E19 | M | M | M | | |
| E3 | M | M | M | OS | A | E11 | M | M | | | | E20 | M | M | | | |
| E4 | M | M | | | | E12 | M | M | M | OS | A | E21 | M | M | M | | |
| E5 | M | M | M | | | E13 | M | M | M | M | | E22 | M | M | M | M | |
| E6 | M | M | | | | E14 | M | M | M | OS | A | E23 | M | M | M | M | |
| E7 | M | M | M | OS | A | E15 | M | M | M | M | | E24 | M | M | | | |
| E8 | M | M | OS | OS | A | E16 | M | M | M | | | E25 | M | M | | | |
| | | | | | | E17 | M | M | M | M | | | | | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

*Tabla A-16*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso c) o e), Secuencia 8, Bloque I.

| **Categoría 1** |
|---|
| E9. 84 puntos tiene la figura 80 lo ise mentalmente sumando y multiplicando |
| **Categoría 2** |
| E7. (llendo de 1 en 1) llendo sumando 4 |
| **Categoría 3** |
| E3. 84 observando la figura porque me dio una idea cuando fui sumando 4 y yo le sume 4 al 80 asi me dio el resultado de 84<br>E12. 84 a 80 le sumo 4 y me da el resultado<br>E14. “84” porque le sume 4 a la figura 80 |
| **Categoría 4** |
| E8. 14 Poniendo el numero 4 y después sumarle este numero [indica con una flecha el numero de la Figura]. |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente. La respuesta de E8 corresponde al inciso c), la respuesta de los otros estudiantes al inciso e).*

# Anexo B

## Análisis de las tareas del Bloque II

Este anexo incluye el resumen de análisis de las secuencias del Bloque II.

### B.1. Secuencia 9

Observa la siguiente secuencia numérica:

| **Número** de la secuencia | **2,** | **4,** | **6,** | **8,** | **10,** | **12,** | **14,** | **…** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Término** de la secuencia | Término **1** | Término **2** | Término **3** | Término **4** | Término **5** | Término **6** | Término **7** | Término **aún no conocido** de la secuencia |

a) ¿Qué número le corresponde al término 9 de la secuencia? Explica cómo lo has encontrado.

b) Explica con tus palabras cómo se obtiene cada uno de los números de esta secuencia numérica.

c) Escribe una regla precisa que permita a otros niños encontrar cualquier número de esta secuencia numérica.

d) Ahora usemos la regla que has proporcionado y encontremos un número de la secuencia. Por ejemplo, ¿Qué número le corresponde al término 500 de la secuencia numérica? Escribe tu procedimiento obedeciendo la regla que diste.

e) Usemos nuevamente la regla que has proporcionado, pero tú escoge qué término de la secuencia quieres. Ahora completa la información:

El término _________ de la secuencia numérica, es el número __________.

*Figura B-1.* Secuencia numérica definida por $f(x) = 2x$.

En la Tabla B-1 se presenta el tránsito entre las acciones de la espiral de Mason que se reconocieron en los estudiantes al resolver los incisos de la Secuencia 9.

*Tabla B-1*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 9, Bloque II.

| E | a), b), c) | d) | e) |
|---|---|---|---|
| E1 | M-M | M-OS-A | GC1 |
| E2 | M-OS-A | M-OS-A | |
| E3 | M-OS-A | M-OS-A | GC2 |
| E4 | | NC | |
| E5 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E6 | M-OS-A | M-OS-A | |
| E7 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E8 | M-OS-A | M-OS-A | GC1 |
| E9 | M-M-M | M-OS-A | |
| E10 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E11 | M | NC | |
| E12 | M-M-M | M-OS-A | GC1 |
| E13 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E14 | M-OS-A | M-OS-A | GC1 |
| E15 | M | M-OS-A | |
| E16 | M | M-OS-A | GC1 |
| E17 | M-OS-A | M-OS-A | GC1 |
| E18 | M-OS-A | M-OS-A | GC2 |
| E19 | M-OS | M-OS-A | GC1 |
| E20 | M-M | NC | NC |
| E21 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E22 | M | M-OS-A | |
| E23 | M | | |
| E24 | M | | |
| E25 | M | NC | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; GC1=Generalización Cercana Tipo 1 (valores entre 6 y 13); GC2=Generalización Cercana Tipo 2 (valores 30 y 47); GL=Generalización Lejana (valores entre 100 y 1000). Espacio en blanco=Se interpreta que el estudiante no logra alguna de las acciones M, OS, A o no proporciona correctamente un valor en el inciso e). NC=No contestó.*

En la Tabla B-2 se organizan las expresiones de generalización que proporcionaron los estudiantes ya sea en el inciso a), b) o c) correspondiente a esta Secuencia 9.

*Tabla B-2*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso a), b) o c), Secuencia 9, Bloque II.

| |
|---|
| **Categoría 1** |
| E16. a) Fijándome en la secuencia<br>E25. b) Fui contando |
| **Categoría 2** |
| E1. b) si hay 2 y 4 es fácil sabras que de 2 en 2 va / c) podrían contar de cuanto en cuanto va y el ultimo te dara<br>E9. b) va abansando de 2 en 2<br>E11. b) la secuencia de dos en dos<br>E12. c) contando de 2 en 2<br>E15. a) abansa de 2 en 2<br>E19) b) multiplicando o a vese sumando<br>E20. b) los números ban abansando de 2 en 2<br>E22. a) avansa en 2 en 2<br>E23. a) avansa de 2 en 2 / b) sumando lo que se pide<br>E24. b) esta secuencia avansa de 2 en 2 |
| **Categoría 3** |
| E6. c) multiplicar 2 x 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 |
| **Categoría 4** |
| E2. b) multiplicado por 2<br>E3. b) multiplicando x 2 |

| **Categoría 4** |
|---|
| E5. b) multiplicando de la tabla del 2<br>E18. c) multiplicar por 2 lo que te piden<br>E21. b) de la secuencia numérica el 8 es 16 el 9 es 18 es el doble de los números |
| **Categoría 5** |
| E7. c) multiplicar el término por dos<br>E8. c) Multiplicando por 2 el término, por ejemplo, si el termino es 10, la secuencia es 20<br>E10. b) multiplicando 2 al numero / c) solo ve el numero que este y multiplicalo por 2<br>E13. c) Multiplicando por 2 el termino que tiene<br>E14. c) Multiplicar por 2 el número que te dan<br>E17. c) Es multiplicar el numero del termino por dos |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

## B.2. Secuencia 10

Observa la siguiente secuencia numérica:

| **Número** de la secuencia | **3,** | **4,** | **5,** | **6,** | **7,** | **8,** | **9,** | **…** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Término** de la secuencia | Término 1 | Término **2** | Término **3** | Término **4** | Término **5** | Término **6** | Término **7** | Término **aún no conocido** de la secuencia |

a) ¿Qué número le corresponde al término 9 de la secuencia? Explica cómo lo has encontrado.

b) Explica con tus palabras cómo se obtiene cada uno de los números de esta secuencia numérica.

c) Escribe una regla precisa que permita a otros niños encontrar cualquier número de esta secuencia numérica.

d) Ahora usemos la regla que has proporcionado y encontremos un número de la secuencia. Por ejemplo, ¿Qué número le corresponde al término 500 de la secuencia numérica? Escribe tu procedimiento obedeciendo la regla que diste.

e) Usemos nuevamente la regla que has proporcionado, pero tú escoge qué término de la secuencia quieres. Ahora completa la información:

El término __________ de la secuencia numérica, es el número ___________.

*Figura B-2.* Secuencia numérica definida por $f(x) = x + 2$.

En la Tabla B-3 se pueden observar cómo los estudiantes transitan en los dos ciclos de acciones de la espiral de Mason. A diferencia de la Secuencia 9 esta secuencia resultó difícil de resolver para varios estudiantes. Se identifica desde las secuencias del Bloque I que las relaciones aditivas suelen ser de mayor complejidad para los estudiantes. En la Tabla B-4 se muestran las expresiones de generalización proporcionadas por los estudiantes.

*Tabla B-3*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en la Secuencia 10, Bloque II.

| **E** | **a), b), c)** | **d)** | **e)** |
|---|---|---|---|
| E1 | M | | |
| E2 | | | |
| E3 | M | M-OS-A | GC1 |
| E4 | NC | | |
| E5 | M-OS | M-OS-A | |
| E6 | M | M-OS | |
| E7 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E8 | M-OS-A | M-OS-A | GC2 |
| E9 | M-M-M | M-OS | |
| E10 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E11 | M | NC | |
| E12 | M-M-M | M-OS-A | GC1 |
| E13 | M-OS-A | M-OS-A | GL |
| E14 | M-OS-A | M-OS-A | GC1 |
| E15 | M | | |
| E16 | M | | |
| E17 | M-OS-A | M-OS-A | GC1 |
| E18 | M | M-OS | GC1 |
| E19 | | | |
| E20 | NC | | |
| E21 | M | | GC1 |
| E22 | M | | |
| E23 | M | | |
| E24 | | | |
| E25 | | NC | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; GC1=Generalización Cercana Tipo 1 (valores entre 7 y 13); GC2=Generalización Cercana Tipo 2 (valor 26); GL=Generalización Lejana (valores 501, 700 y 10 000). Espacio en blanco=Se interpreta que el estudiante no logra alguna de las acciones M, OS, A o no proporciona una respuesta correcta en el inciso e). NC=No contestó.*

*Tabla B-4*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el inciso a), b), c) o d), Secuencia 10, Bloque II.

| **Categoría 3** |
|---|
| E5. d) Si al nueve le sumamos 3 para que sea 11 entonces el 500 le sumamos 3 y da 503. |
| **Categoría 4** |
| E3. d) 502 porque si te das cuenta a los términos le bas sumando 2 te da el resultado<br>E6. d) Porque le sumas 2 al num del termino y te da el de arriba<br>E10. c) Al numero de abajo ve sumándole 2 [el número de abajo corresponde al término de la secuencia]<br>E17. c) Multiplicas por 1 y le sumas 3 [debería sumar 2 en lugar de 3] |
| **Categoría 5** |
| E7. c) sumándole al termino 2<br>E8. c) sumar 2 a cada termino<br>E13. c) Sumando 2 al termino<br>E14. c) Siempre sumar 2 al término que se muestra |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

# Anexo C

## Análisis de las tareas del Bloque III

Este anexo incluye el resumen de análisis de los problemas del Bloque III. Estos problemas se diseñaron para llevar a cabo el tránsito gradual de las secuencias hacia los problemas y no se solicitan explicaciones, por lo tanto, no hay producción de expresiones de generalización.

### C.1. Problema 1

Laura trabaja en una papelería y tiene una tabla incompleta de los precios que debe cobrar, relacionado con el número de copias a color que debe imprimir.

Ayuda a Laura a completar la tabla poniendo el número faltante en los espacios sombreados.

| **Precio** | \$2 | \$4 | | … | | \$22 | … | \$50 | … | | … | \$400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de copias** | 1 | 2 | 3 | … | 10 | | … | | … | 150 | … | |

*Figura C-1.* Problema 1 definido por $f(x) = 2x$.

La transición entre las acciones de manipular, obtener sentido y articular para esta tarea se proporcionan en la Tabla B-1. Los valores correctos V1 y V2 corresponden a la acción manipular, los valores V3 y V4 a la acción obtención de sentido y los valores V5 y V6 a la acción articular.

*Tabla C-1*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 1, Bloque III.

| E | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | | | | |
| E2 | M | M | OS | OS | NC | A |
| E3 | M | M | OS | OS | A | A |
| E4 | M | M | OS | OS | | A |
| E5 | M | M | OS | OS | A | A |
| E6 | M | M | OS | OS | A | A |
| E7 | M | M | OS | OS | A | A |
| E8 | M | M | OS | OS | A | A |
| E9 | M | | | | | |
| E10 | M | M | OS | OS | A | A |
| E11 | M | M | OS | OS | A | A |
| E12 | M | M | OS | | OS | |
| E13 | M | M | OS | OS | A | A |

| E | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E14 | M | M | OS | OS | A | A |
| E15 | M | M | OS | OS | | A |
| E16 | M | M | OS | OS | A | A |
| E17 | M | M | OS | OS | A | A |
| E18 | M | M | OS | OS | A | A |
| E19 | M | M | OS | OS | A | A |
| E20 | M | M | | | | M |
| E21 | M | M | OS | OS | A | A |
| E22 | M | M | OS | OS | A | A |
| E23 | M | | OS | OS | | OS |
| E24 | M | M | OS | OS | | A |
| E25 | M | | | | OS | OS |

*Nota: E=Estudiante; V1-V6 representan los seis valores solicitados en el Problema 1, ordenados de izquierda a derecha en el registro tabular; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

En el caso del estudiante E20, a pesar de que proporciona correctamente el valor V6, los valores incorrectos otorgados para V3, V4 y V5 determinan que permanece en la acción manipular. En el caso de E23, los valores correctos e incorrectos otorgados indican que transita entre las acciones manipular y obtención de sentido, pero no articular, aunque también haya otorgado correctamente el valor V6.

## C.2. Problema 2

En la pastelería "El Retorno" se tiene un registro de la cantidad de pasteles que se elaboran en determinando número de horas. Completa el siguiente registro poniendo el número faltante en los espacios sombreados.

| **Horas para su elaboración** | 3 horas | 4 horas | 5 horas | 6 horas | … | | … | | … | 50 horas | … | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de pasteles** | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 10 | … | 15 | … | | … | 150 |

*Figura C-2.* Problema 2 definido por $f(x) = x + 2$.

La transición entre las acciones de la espiral de Mason se muestra en la Tabla C-2. Los valores correctos V1 y V2 corresponden a la acción manipular, el valor V3 a la acción obtención de sentido y el valor V4 a la acción articular.

*Tabla C-2*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 2, Bloque III.

| E | V1 | V2 | V3 | V4 |
|---|---|---|---|---|
| E1 | | | | |
| E2 | | | | |
| E3 | M | M | OS | A |
| E4 | M | M | NC | |
| E5 | M | M | OS | A |
| E6 | M | M | OS | A |
| E7 | M | M | OS | A |
| E8 | M | M | OS | A |
| E9 | | | | |
| E10 | M | M | OS | A |
| E11 | M | M | OS | |
| E12 | | | | |
| E13 | M | M | OS | A |
| E14 | M | M | OS | A |
| E15 | | | | |
| E16 | | | | |
| E17 | M | M | OS | A |
| E18 | M | M | OS | A |
| E19 | M | M | OS | A |
| E20 | M | M | | |
| E21 | M | M | | |
| E22 | | | | |
| E23 | M | M | OS | |
| E24 | | | | |
| E25 | M | M | | |

*Nota: E=Estudiante; V1-V4 representan los cuatro valores solicitados en el Problema 2, ordenados de izquierda a derecha en el registro tabular; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

## C.3. Problema 3

Don Pepe es distribuidor de frutas en el mercado de Tekit. En esta temporada de mangos requiere dejar una gran cantidad de kilos en diversos puestos del mercado. Completa la siguiente tabla de Don Pepe.

| Cantidad | Costo |
|---|---|
| 1 kg | 4 pesos |
| 2 kg | 8 pesos |
| 3 kg | 12 pesos |
| 4 kg | |
| … | … |
| 20 kg | |
| … | … |
| | 200 pesos |

*Figura C-3.* Problema 3 definido por $f(x) = 4x$.

En la Tabla C-3 se pueden observar las acciones de manipular, obtener sentido y articular en las que se sitúa a cada estudiante. En esta tabla se solicitan solamente tres valores. El valor correcto V1 corresponde a la acción manipular, el valor V2 a la acción obtención de sentido y el valor V3 a la acción articular.

*Tabla C-3*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 3, Bloque III.

| **E** | **V1** | **V2** | **V3** |
|---|---|---|---|
| E1 | | | NC |
| E2 | M | OS | A |
| E3 | M | OS | A |
| E4 | M | | OS |
| E5 | M | OS | A |
| E6 | M | OS | A |
| E7 | M | OS | A |
| E8 | M | OS | A |

| **E** | **V1** | **V2** | **V3** |
|---|---|---|---|
| E9 | M | OS | |
| E10 | M | OS | A |
| E11 | M | OS | A |
| E12 | M | | |
| E13 | M | OS | A |
| E14 | M | OS | A |
| E15 | | | |
| E16 | M | OS | A |
| E17 | M | OS | A |

| **E** | **V1** | **V2** | **V3** |
|---|---|---|---|
| E18 | M | | OS |
| E19 | M | | OS |
| E20 | M | | OS |
| E21 | | | |
| E22 | M | OS | A |
| E23 | M | | |
| E24 | M | | OS |
| E25 | M | | OS |

*Nota: E=Estudiante; V1-V3 representan los tres valores solicitados en el Problema 3, ordenados de arriba hacia abajo en el registro tabular; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.*

# Anexo D

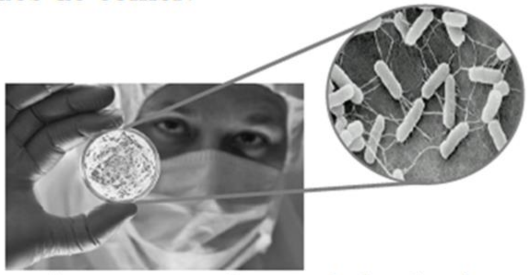
## Análisis de las tareas del Bloque IV

En este anexo se incluye el resumen del análisis de los cuatro problemas de texto extenso que conforman el Bloque IV. Se presenta cada problema y en cada uno, se muestran aquellas preguntas en las cuáles se concretan las acciones manipular, obtención de sentido y articular. Posteriormente se comparte el resumen de acciones y las expresiones de generalización producidas por los 25 estudiantes.

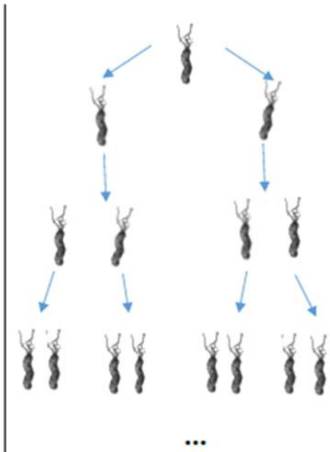
### D.1. Problema 4

El Problema 4 corresponde a la relación definida por $f(x) = 2^x$. En las figuras D-1 y D-2 se presentan el planteamiento del problema y el tránsito en la espiral de acciones mediante las preguntas planteadas. Se incluye en el planteamiento un diagrama para mostrar la reproducción de las bacterias y un registro tabular que presenta la relación entre la cantidad de bacterias que nacen por minuto. Las preguntas 1a) - 1d) promueven principalmente la acción manipular, aunque las dos últimas además impulsan el tránsito hacia la obtención de sentido y articulación de una regla, acciones que se reforzarán con las preguntas 2, 3 y 4. La pregunta 5 permite apreciar el alcance de la generalización que manifiesta el estudiante en el contexto del problema.

¿Sabes qué son las bacterias? Las bacterias son unos organismos vivos muy pequeños, no visibles a simple vista, suelen moverse y son de diversas formas. Existen bacterias que pueden causarnos enfermedades por eso es importante seguir ciertas recomendaciones, como lavarnos las manos antes y después de comer.



Las bacterias se reproducen de la siguiente forma. De una bacteria surgen 2 bacterias hijas, cada bacteria hija genera otras 2 bacterias y así sucesivamente. Según el tipo de bacteria esta reproducción ocurre cada cierto número de minutos. Analicemos el caso de una bacteria que se reproduce cada minuto.



| Tiempo en minutos | Cantidad de bacterias |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| ... | ... |

*Figura D-1.* Planteamiento del Problema 4, Bloque IV.

1. De acuerdo con la información contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 1?
b) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 2?
c) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 3?
d) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 4? ¿Por qué?
e) ¿Cuál será el número de bacterias al minuto 5? ¿Por qué?

Casos particulares.
Se promueve la acción manipular.

Se promueve la acción obtención de sentido.

2. ¿Qué pasa con la cantidad de bacterias conforme pasan los minutos?
3. Escribe la regla que permita encontrar la cantidad de bacterias por minuto.

Se promueve la articulación y expresión de la regla de generalización.

4. Usando la regla que has proporcionado encontremos la cantidad de bacterias a los 10 minutos.
5. Observa los valores que corresponden al tiempo.
¿Habrá otros valores de tiempo para determinar la cantidad de bacterias correspondiente?

| Tiempo en minutos | Cantidad de bacterias |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| ... | ... |

Se promueve el alcance de la generalización.

*Figura D-2.* Preguntas que guían la resolución del Problema 4, Bloque IV.

En la Tabla D-1 se puede observar el tránsito en la espiral de acciones de los 25 estudiantes. La última columna corresponde a las respuestas de la pregunta 5, se etiqueta con S si los estudiantes interpretan adecuadamente la pregunta y además proporcionan otros valores; también, si pueden explicar o encontrar el número de bacterias para alguno de los valores que han otorgado. En caso de tener dificultades para dar algún valor o interpretar los valores que hayan mencionado se etiqueta con NS.

*Tabla D-1*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 4, Bloque IV.

| **E** | **1a)** | **1b)** | **1c)** | **1d)** | **1e)** | **2,3,4** | **5** | **E** | **1a)** | **1b)** | **1c)** | **1d)** | **1e)** | **2,3,4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | **M** | M | OS-**A** | S | E14 | M | M | M | **M** | M | OS-A | S |
| E2 | M | M | M | | | | NS | E15 | M | M | M | **M** | **M** | **OS-A** | S |
| E3 | M | M | M | M | M | OS-**A** | S | E16 | M | M | M | **M** | M | OS-**A** | S |
| E4 | M | M | M | **M** | | | NS | E17 | M | M | M | M | M | OS-**A** | NS |
| E5 | M | M | M | M | M | OS-**A** | **S** | E18 | M | M | M | M | M | OS-**A** | **S** |
| E6 | M | M | M | M | M | OS-**A** | S | E19 | M | M | **M** | **M** | M | OS-A | S |
| E7 | M | M | M | M | M | OS-**A** | S | E20 | M | M | **M** | **M** | M | OS-**A** | S |
| E8 | M | M | M | M | M | OS-**A** | S | E21 | M | M | **M** | **M** | **M** | **OS-A** | S |
| E9 | M | M | M | **M** | **M** | OS-A | **S** | E22 | M | M | M | **M** | M | OS-**A** | S |
| E10 | M | M | M | M | M | OS-A | S | E23 | M | M | M | **M** | **M** | OS-A | S |
| E11 | **M** | M | **M** | **M** | M | **OS-A** | S | E24 | M | M | M | M | M | **OS**-A | S |
| E12 | M | M | M | **M** | **M** | | NS | E25 | M | M | M | M | | | NS |
| E13 | M | M | M | M | M | OS-A | S | | | | | | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; S= Sí, NS=No Sabe, Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A. La letra en negrilla indica intervención por parte del investigador.*

En la Tabla D-2 se presentan las expresiones de generalización que proporcionaron los estudiantes.

*Tabla D-2*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el Problema 4, Bloque IV.

| **Categoría 1** |
|---|
| E9. Observar y contarlos las bacterias, ejemplo en el minuto 1=2=4=8=16=32=64<br>E10. De cada bacteria en 1mn. salen 2 y asi se ban multiplicando<br>E22. Depende del numero de las bacterias |
| **Categoría 2** |
| E3. Multiplicando los minutos por las bacterias y observando/Para 50 minutos multiplicaríamos el resultado del número 49 x 2 (Categoría 3)<br>E5. Multiplicando/x 2/ a la cantidad de bacterias (Categoría 4)/del minuto al que este atras (Categoría 5)<br>E17. Multiplicar el número de un minuto y ba a dar dos y así bas llendo multiplicando por dos<br>E18. Multiplicar la bacteria en dos la mamá en dos y cada mama se tiene que ir multiplicando en dos<br>E20. Le voy sumándole dos y luego otros dos |

| **Categoría 4** |
|---|
| E1. Multiplicando x 2 conforme van las bacterias<br>E6. Al anterior lo multiplicas x 2 y te da el siguiente<br>E7. Para llegar al resultado multiplicarlo por x 2/el numero de la respuesta anterior (Categoría 5)<br>E8. Multiplicando la cantidad de bacterias del minuto anterior/ Multiplicando la cantidad de bacterias con el numero que se obtuvo anteriormente, multiplicandolo x 2 (Categoría 5)<br>E11. Debo de contar todas las bacterias y multiplicar por dos<br>E13. El doble de la cantidad de las bacterias |
| **Categoría 5** |
| E14. Multiplicar el número de bacterias que da por 2/ Multiplicaría lo que me dio en 49 minutos por 2 (Categoría 3)<br>E15. Multiplicar el número 2 por las bacterias y en la cantidad<br>E16. Multiplicar por 2 a las bacterias<br>E19. Multiplicando las bacterias x 2<br>E21. Duplicar las bacterias<br>E23. Multiplicar el numero de bacterias por 2<br>E24. Multiplicando el numero de vacterias que hay x 2 |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente.*

## D.2. Problema 5

El Problema 5 corresponde a la relación definida por $f(x) = 150 - x$. En la Figura D-3 se presenta el planteamiento del problema.

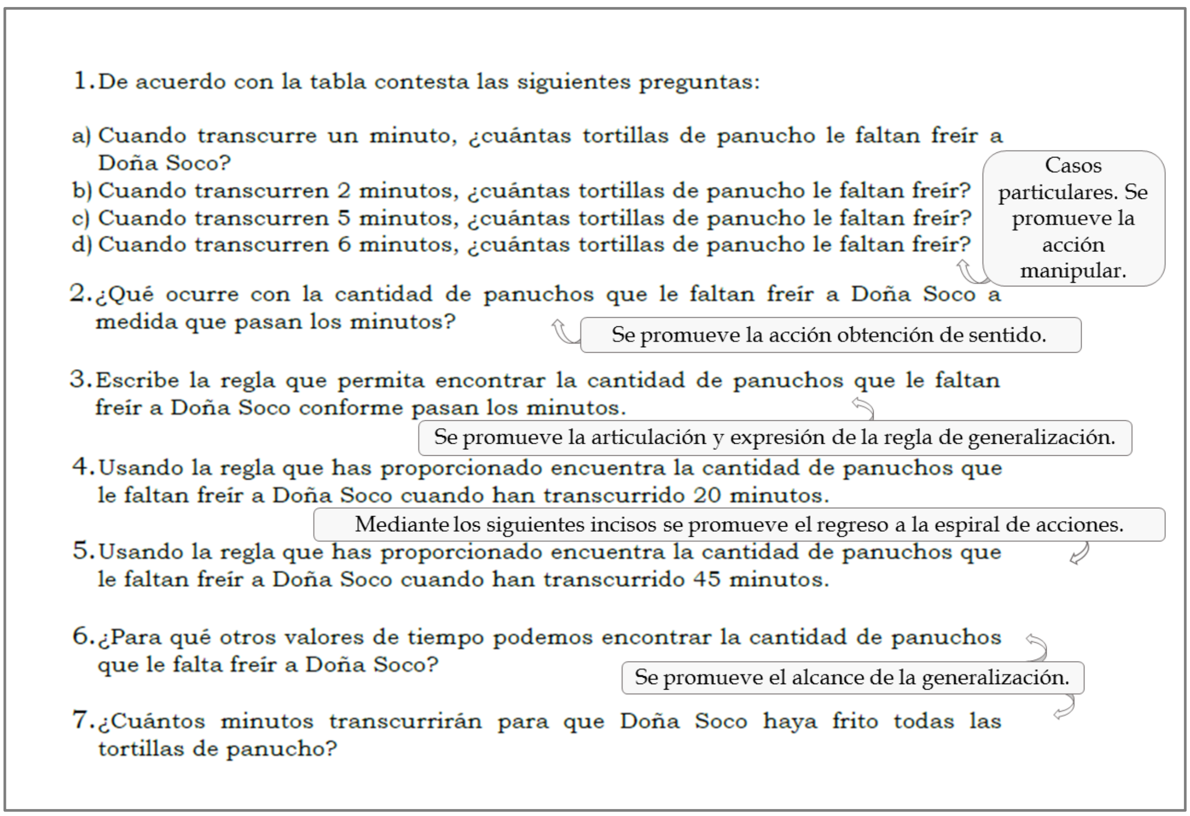
Los sábados acostumbro comprar panuchos con Doña Soco. Ella me comenta que en la mañana prepara 150 tortillas y las rellena de una vez con su frijol. En la tarde cuando empiezan a llegar los clientes, ella empieza a freir los panuchos para que los sirva calientitos.

En la siguiente tabla aparece la cantidad de tortillas que le falta freir.

| **Tiempo que transcurre en minutos** | **Cantidad de tortillas de panucho que le faltan freír** |
|---|---|
| 0 minutos | 150 tortillas |
| 1 minuto | 149 tortillas |
| 2 minutos | 148 tortillas |
| 3 minutos | 147 tortillas |
| 4 minutos | 146 tortillas |
| ... | ... |

*Figura D-3.* Planteamiento del Problema 5, Bloque IV.

En la Figura D-4 se presenta el tránsito en la espiral de acciones mediante las preguntas planteadas. Las preguntas 1a) - 1d) promueven la acción manipular y las dos últimas además impulsan el tránsito hacia la obtención de sentido y articulación de una regla porque son valores que no se encuentran proporcionadas en el registro tabular. Las acciones obtención de sentido y articular se refuerzan con las siguientes preguntas del problema, principalmente de la pregunta 2 hasta la 5. Aunque las preguntas 4 y 5 tienen como intención promover la especialización, suscitando el regreso a la acción manipular para poder ascender en la espiral en caso de que no se haya logrado mediante las preguntas anteriores. Las preguntas 6 y 7 permiten apreciar el alcance de la generalización, especialmente el de reconocer el máximo valor que puede tomar la variable independiente o el máximo valor del conjunto dominio solución.



1. De acuerdo con la tabla contesta las siguientes preguntas:

a) Cuando transcurre un minuto, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír a Doña Soco?
b) Cuando transcurren 2 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?
c) Cuando transcurren 5 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?
d) Cuando transcurren 6 minutos, ¿cuántas tortillas de panucho le faltan freír?



2. ¿Qué ocurre con la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco a medida que pasan los minutos?



3. Escribe la regla que permita encontrar la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco conforme pasan los minutos.



4. Usando la regla que has proporcionado encuentra la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco cuando han transcurrido 20 minutos.



5. Usando la regla que has proporcionado encuentra la cantidad de panuchos que le faltan freír a Doña Soco cuando han transcurrido 45 minutos.

6. ¿Para qué otros valores de tiempo podemos encontrar la cantidad de panuchos que le falta freír a Doña Soco?



7. ¿Cuántos minutos transcurrirán para que Doña Soco haya frito todas las tortillas de panucho?

*Figura D-4.* Preguntas que guían la resolución del Problema 5, Bloque IV.

La mayoría de los estudiantes no presentaron dificultades para resolver el Problema 5. En la Tabla D-3 se puede observar el tránsito en la espiral de acciones de los 25 estudiantes y en la Tabla D-4 la clasificación de las expresiones de generalización que proporcionaron.

*Tabla D-3.* Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 5, Bloque IV.

| E | 1a) | 1b) | 1c) | 1d) | 2,3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | **M** | M | M | M | **OS**-A | **M-OS-A** | **M**-OS-A | **V** | I |
| E2 | **M** | M | M | | | | | NV | I |
| E3 | M | M | M | M | OS-A | M | M-**OS-A** | V | **C** |
| E4 | M | M | M | M | | | | NV | C |
| E5 | M | M | M | M | **OS**-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E6 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E7 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | **V** | C |
| E8 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E9 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | **V** | C |
| E10 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E11 | M | M | M | M | **OS**-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E12 | M | M | M | M | | **M** | **M** | **V** | I |
| E13 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E14 | M | M | M | M | **OS-A** | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E15 | **M** | **M** | M | M | OS | M | **M-OS-A** | V | C |
| E16 | **M** | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E17 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E18 | **M** | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | V | C |
| E19 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | **V** | C |
| E20 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | **V** | C |
| E21 | M | M | M | M | OS-A | M-OS-A | M-OS-A | **V** | C |
| E22 | M | M | M | M | OS-**A** | M-OS-A | M-OS-A | **V** | C |
| E23 | M | M | M | M | **OS**-A | M | **M-OS-A** | **V** | I |
| E24 | **M** | M | M | M | OS-**A** | M-**OS-A** | M-OS-**A** | V | C |
| E25 | **M** | M | M | M | **OS-A** | M | | **V** | I |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; V=Proporciona valores, NV=No proporciona valores, I=Incorrecto, C=Correcto, Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A. La letra en negrilla indica intervención por parte del investigador.*

*Tabla D-4.* Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el Problema 5, Bloque IV.

| **Categoría 1** |
|---|
| E2. Todavía le faltan freír más |
| **Categoría 2** |
| E1. Rebisar la tabla y checar los minutos e hir disminuyendo y te dara la cantidad<br>E3. Que ballan quitando 1 tortilla/ Cada vez que pasa un minuto se le va quitando una tortilla (V)/Restando el número total de tortillas por los minutos<br>E4. Dismillendo la cantidad de los minutos<br>E5. A medida que pasan los minutos va disminuyendo 1/si restamos 50 menos… menos 50 de tortillas da 100 porque son 150 (V, Categoría 3).<br>E7. Va disminuyendo en un minuto 1 tortilla/Restar la cantidad de minutos que te den al 150 (V, Categoría 5)<br>E13. Por cada minuto que pasa se le va restando 1/por ejemplo para 10 minutos todavía le faltaran 140 (Categoría 3)/Restarle la cantidad de minutos que quieres saber a 150 tortillas ejemplo 40 minutos 150-40=110 (Categoría 4)<br>E15. Que cuando esten contando los números la van a quitar un 1 pera que el numero se baya disminuyendo<br>E18. Ir disminuyendo con forme pasan los minutos<br>E23. Debo de restarle uno en uno a la cantidad que sigue/Restar 150 con lo que ya frio (Categoría 5)<br>E24. Contar las tortillas que le faltan freir<br>E25. Yo le fui quitando 1 tortia a cada minuto que pasa |

| **Categoría 3** |
|---|
| E9. En un minuto va friendo uno, ya pasaron 10 minutos 10 panuchos ya frio y resto 150 menos 10 son 140 (V, Ejemplo descrito para 10 minutos)<br>E10. (Ejemplo descrito para 10 minutos) Restarle 10 a 150 (V)/ (Ejemplo descrito para 60 minutos) 60 ya frio, 90 le faltan, le reste 60 a 150 (V)/ Del minuto que tenga es la cantidad de tortillas que vas a restar a la cantidad con que empeso (150) (Categoría 5)<br>E11. Le faltan freír 140 porque a 150 le quitas 10 (V, Ejemplo descrito para 10 minutos)<br>E20. Por ejemplo si ya frio 5 a 150 le quitas 5 y te da 145<br>E21. La regla es bajandole 1/Restar las tortillas le debo quitar a 150 50 |
| **Categoría 4** |
| E14. Quitarle los minutos a las tortillas que le falta freir<br>E19. La cantidad de panuchos es igual a los 150 pero como lo resto los minutos me da otra cantidad |
| **Categoría 5** |
| E6. Primero debes saber los minutos y después restarlo a 150 tortillas<br>E8. Restarle el numero de minutos a 150 tortillas<br>E16. Le vamos a quitar lo de 150 las tortillas que lla frio en el minuto pedido<br>E17. A 150 le restas los minutos transcurridos<br>E22. A 150 panuchos le resto la cantidad que me pidan de los minutos |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente. V=Respuesta Verbal.*

## D.3. Problema 6

El Problema 6 involucra a la relación $f(x) = 5500 - 500x$. En la Figura D-5 se presenta el planteamiento del problema.


En nuestro planeta existen cinco océanos: el Atlántico, Índico, Pacífico, Ártico y Antártico. Las temperaturas de sus aguas son diferentes, por ejemplo, el océano Pacífico en su superficie es de aguas más calientes que las aguas de la superficie del océano Antártico, sin embargo, en las profundidades de todos los océanos la temperatura es fría.

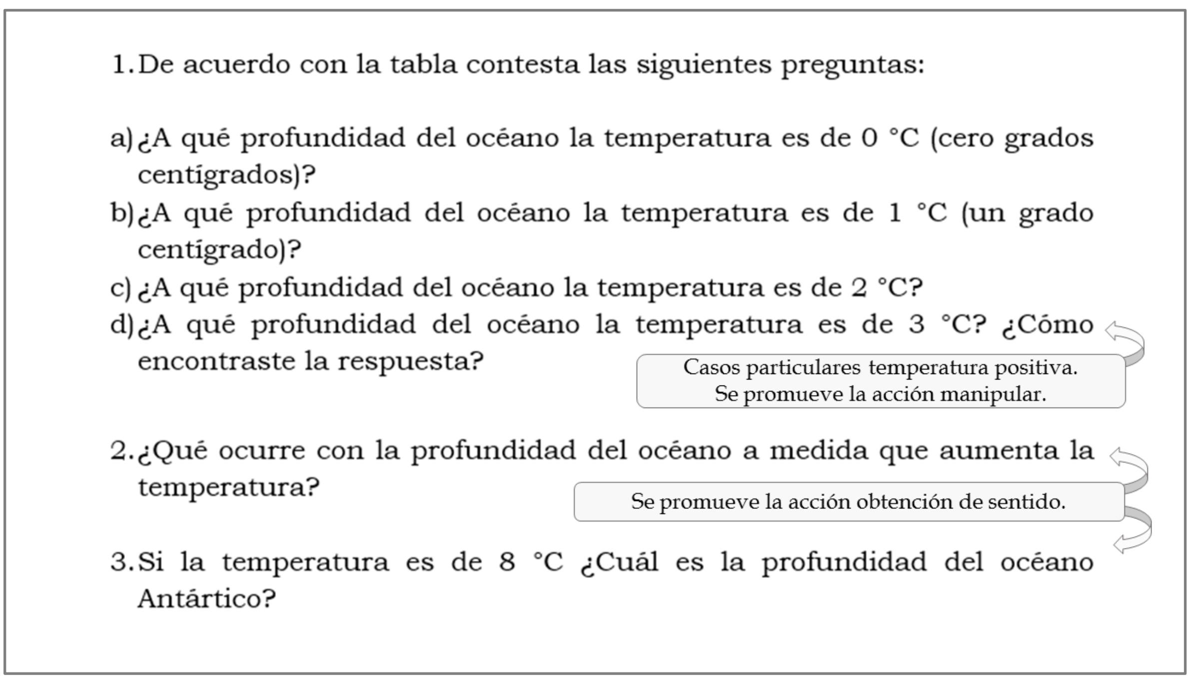
La profundidad del océano Antártico es de aproximadamente 7236 metros. Observemos los datos de la tabla y prestemos atención a diferentes profundidades del océano Antártico y sus respectivas temperaturas.

| Temperatura en grados centígrados (°C) | Profundidad en metros |
|---|---|
| ... | ... |
| -1 °C | 5500 metros |
| 0 °C | 5000 metros |
| 1 °C | 4500 metros |
| 2 °C | 4000 metros |
| ... | ... |


*Figura D-5.* Planteamiento del Problema 6, Bloque IV.

Las figuras D-6 y D-7 muestran el tránsito en la espiral de acciones mediante las preguntas planteadas. Este problema incluye números negativos, el diseño promueve en primer lugar que los estudiantes identifiquen la profundidad del océano cuando la temperatura toma valores positivos y seguidamente lo que ocurre cuando la temperatura toma valores negativos. Desde la pregunta 1 hasta la 7 se promueve un primer ciclo de acciones y mediante las preguntas 8 a 10 se promueve un segundo ciclo.

Para el primer ciclo de acciones las preguntas 1a)-1c) promueven la acción manipular. La pregunta 1d) junto con las preguntas 2 y 3 impulsan las acciones obtener sentido y articular para los valores positivos de temperatura (Figura D-6). Las preguntas 4 a 6 para valores negativos de temperatura también impulsan las acciones obtener sentido y articular en el primer ciclo de acciones, el cual se espera que se concrete con la articulación y expresión de una regla de generalización en la pregunta 7 (Figura D-7). Finalmente, las preguntas 8 a 10 tienen como intención promover la especialización, suscitando el regreso a la acción manipular para poder ascender en la espiral en caso de que no se haya logrado mediante las preguntas anteriores. También permite verificar el uso de la regla en caso de que ésta se haya articular en el primer ciclo de acciones.



1. De acuerdo con la tabla contesta las siguientes preguntas:

a) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 0 °C (cero grados centígrados)?
b) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 1 °C (un grado centígrado)?
c) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 2 °C?
d) ¿A qué profundidad del océano la temperatura es de 3 °C? ¿Cómo encontraste la respuesta?

Casos particulares temperatura positiva.
Se promueve la acción manipular.

2. ¿Qué ocurre con la profundidad del océano a medida que aumenta la temperatura?

Se promueve la acción obtención de sentido.

3. Si la temperatura es de 8 °C ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico?

*Figura D-6.* Preguntas que guían la resolución del Problema 6 para valores positivos de temperatura.

4. Observa la tabla de datos, si la temperatura es de -1 °C (menos un grado centígrado o un grado bajo cero) ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico?

Casos particulares temperatura negativa.
Se promueve la acción manipular.

5. Si la temperatura es de -2 °C (menos 2 grados centígrados o 2 centígrados bajo cero) ¿Cuál es la profundidad del océano Antártico?

Se promueve la acción obtención de sentido.

6. ¿Qué ocurre con la profundidad del océano a medida que disminuye la temperatura?

Se promueve la articulación y expresión de la regla de generalización.

7. Escribe la regla que permita encontrar la profundidad del océano Antártico si conocemos la temperatura.

Mediante los siguientes incisos se promueve el regreso a la espiral de acciones.

8. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea 9 °C.

9. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea 10 °C.

10. Usando la regla que has proporcionado encuentra la profundidad del océano cuando la temperatura sea -3 °C.

*Figura D-7.* Preguntas que guían la resolución del Problema 6 para valores negativos de temperatura.

En la Tabla D-5 se presenta el resumen de acciones de los 25 estudiantes. Para varios estudiantes el problema implicó conocer e interpretar nuevos términos y símbolos como los grados centígrados y los números negativos, pero se apropiaron de ellos en el contexto del problema y pudieron transitar en la espiral de acciones.

En la Tabla D-6 se presentan las expresiones de generalización clasificadas en las categorías correspondientes. La mayoría de los estudiantes formularon la regla de forma recursiva expresando lo que acontece con la profundidad cuando la temperatura aumenta o disminuye y considerando la regla en dos partes.

La expresión de una regla de generalización algebraica fue formulada por dos estudiantes. Dichos estudiantes plantearon la multiplicación de los minutos transcurridos por 500 metros, pero la dificultad estuvo en interpretar ese resultado para poder realizar el siguiente paso, motivo por el cual fue necesario la intervención del investigador para apoyar la interpretación del resultado y propiciar un andamiaje en los estudiantes.

*Tabla D-5*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 6, Bloque IV.

| **E** | **1a)** | **1b)** | **1c)** | **1d)** | **2,3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | M | OS-M | **M** | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E2 | M | M | M | | | M | | | | | | |
| E3 | M | M | M | M | OS-M | M | **M** | OS | A | **M**-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E4 | M | M | M | | | M | | | | | | |
| E5 | M | M | M | M | OS-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E6 | **M** | M | M | M | OS-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E7 | M | M | M | M | OS-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E8 | M | M | M | M | OS-M | M | M | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E9 | M | M | M | M | OS-M | **M** | M | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E10 | M | M | M | M | OS-**A** | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E11 | M | M | M | M | OS-M | M | **M** | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E12 | M | | M | M | | | | | | | | |
| E13 | M | M | M | M | OS-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E14 | M | M | M | M | OS-M | **M** | **M** | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E15 | M | M | M | M | **OS**-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E16 | M | M | M | M | OS-M | M | M | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E17 | M | M | M | M | **OS-M** | M | **M** | **OS** | A | M-**OS-A** | M-**OS-A** | M-OS-A |
| E18 | M | M | M | M | OS-M | M | **M** | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E19 | M | M | M | M | **OS**-M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E20 | **M** | M | M | **M** | **OS-M** | M | **M** | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E21 | M | **M** | M | **M** | **OS**-M | M | **M** | **OS** | **A** | **M**-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E22 | **M** | **M** | M | M | **OS-A** | M | M | **OS** | A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E23 | M | **M** | M | M | **OS**-M | M | **M** | **OS** | **A** | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E24 | M | M | M | **M** | OS-M | M | **M** | **OS** | **A** | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A |
| E25 | **M** | M | M | **M** | OS-M | M | **M** | OS | A | **M-OS-A** | **M-OS-A** | **M-OS-A** |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A. La letra en negrilla indica intervención por parte del investigador.*

*Tabla D-6*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el Problema 6, Bloque IV.

| **Categoría 2** |
|---|
| E1. Lo fui aumentando de 500 en 500 y disminuyendo también<br>E6. Cuando subes un grado debes de restar y cuando bajas un grado, cuando es más frío le sumas los metros (V)/ Debes saber si bajas de temperatura son mas metros y si subes son menos<br>E11. $1°C = \frac{\begin{array}{r}5500\\+2000\end{array}}{7500}$<br>E13. Cada vez que sube la temperatura va disminuyendo la profundidad en metros y cada vez que baja la temperatura la profundidad en metros va subiendo de 500 en 500<br>E15. Le voy subiendo el 500. Si es que se esta subiendo<br>E17. Que cuando esta en menos grados centígrados va aumentar los metros. Cuando esta después del cero esta disminulle los metros de la profundidad<br>E20. Ir sumando metros o ir disminuyendo metros<br>E25. Fui aumentando 500 y asi fui llendo al resultado |
| **Categoría 3** |
| E3. Cuando es -1°C o -2°C ba aumentando 500 y cuando es 1°C o 2°C va disminuyendo 500 |
| **Categoría 4** |
| E5. Que si subes o bajas siempre 500m se va quitando o va aumentando la temperatura (1°C)<br>E7. Restarle y sumarle 500 mientras va subiendo y bajando la temperatura<br>E8. Si es bajo grados centigrados se le aumenta 500 metros, ya si es grados centígrados se le resta 500 |

| **Categoría 4** |
|---|
| E9. Si es menos (temperatura) va a ser 500 (metros) más y si es de más (temperatura) va a ser menos 500 (metros) |
| E14. Restarle 500 a las temperaturas después del 0. Sumarle 500 a las temperaturas bajo 0 |
| E16. Que cuando la temperatura disminuye ba aumentando de 500 y si la temperatura ba aumentando que le quita 500 a la profundidad |
| E18. Si va subiendo la temperatura es menos 500 metros y si es mas fría es mas 500 metros |
| E19. Cuando es negativo (los grados sentigrados) la profundida haumenta 500. Cuando es positiva (los grados centígrados) la profundidad disminuye 500 |
| E21. Cuando la temperatura baje vas a ir sumando 500 – cuando suba la temperatura voy a ir restando 500 |
| E23. Le fui sumando 500 cuando la temperatura baja y restandole 500 cuando la temperatura sube |
| E24. Devo de sumar 500 cuando la temperatura disminuye y cuando la temperatura este subiendo devo de restar 500 |
| **Categoría 5** |
| E10. Multiplicas el grado por 500 y después restas la respuesta a 5000 metros |
| E22. Primero es multiplicar el centígrado por 500 y el resultado lo restas por 5000 |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente*.

## D.4. Problema 7

El Problema 7 involucra la relación $f(x) = x^2$. En la Figura D-8 se presenta el planteamiento del problema.

La semana pasada le tomé una foto al Palacio Municipal de Tekit, escogí una para poner en mi perfil del celular (que sólo me permite poner fotos cuadradas). La misma foto quiero imprimirla en mayor tamaño para ponerla en un marco cuadrado. Ayúdame a encontrar las áreas adecuadas para mis fotografías. En la tabla que se encuentra a la derecha se tiene ya el registro de algunos datos.

| **Medida del lado** (en centímetros) | **Área** |
|---|---|
| ... | ... |
| 0.5 | 0.25 |
| ... | ... |
| 1 | 1 |
| ... | ... |
| 1.7 | 2.89 |
| ... | ... |
| 2 | 4 |
| ... | ... |
| 5 | 25 |
| ... | ... |
| 7.4 | 54.76 |
| ... | ... |
| 8 | 64 |
| ... | ... |
| 12 | 144 |
| ... | ... |
| 20 | 400 |
| ... | ... |

*Figura D-8.* Planteamiento del Problema 7, Bloque IV.

.

En la Figura D-9 se presenta el tránsito en la espiral de acciones mediante las preguntas planteadas. Las preguntas 1 y 2 promueven la acción manipular, la pregunta 3 promueve la acción obtención de sentido y la pregunta 4 la articulación de una regla de generalización. Las preguntas 5 y 6 promueven el regreso a la acción manipular para ascender en la espiral en caso de que no se haya logrado mediante las preguntas anteriores.

1. Apoyándote en la tabla contesta las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál es el área que le corresponde al lado de medida 1.7 centímetros?
   b) ¿Cuál es el área que le corresponde al lado de medida 2 centímetros?
   c) ¿Cuál es el área que le corresponde al lado de medida 5 centímetros?
   d) ¿Cuál es el área que le corresponde al lado de medida 8 centímetros?

Casos particulares. Se promueve la acción manipular.

2. ¿Qué otros valores para la medida del lado podríamos proporcionar, diferentes a los que se encuentran en la tabla?

Se promueve la acción obtención de sentido.

3. Me gustaría imprimir un poster para la pared de mi cuarto, ¿de qué tamaño me sugieres que sea la medida de los lados del póster?

Se promueve la articulación y expresión de la regla de generalización.

4. Escribe una regla que permita encontrar el área de cualquier fotografía cuadrada conociendo la medida del lado.

Mediante los siguientes incisos se promueve el regreso a la espiral de acciones.

5. Usando la regla que has proporcionado encuentra el área de una fotografía cuadrada que mida 25 centímetros de lado.

6. Usando la regla que has proporcionado encuentra el área de una fotografía cuadrada que mida 0.75 centímetros de lado.

*Figura D-9.* Preguntas que guían la resolución del Problema 7, Bloque IV.

En la Tabla D-7 se presenta el resumen de acciones de los 25 estudiantes. La mayoría de los estudiantes transitaron sin dificultades en la espiral de acciones.

Las expresiones de generalización clasificadas en las categorías correspondientes se muestran en la Tabla D-8. La mayoría de los estudiantes articuló la regla de generalización intentando comunicar la multiplicación lado por lado. Debido a que los estudiantes conocen fórmulas de áreas, el investigador motivó a algunos estudiantes a escribir una fórmula matemática para expresar la relación “lado por lado” previamente manifestadas en palabras, obteniéndose satisfactoriamente expresiones alfanuméricas como se aprecian en la Tabla D-8.

*Tabla D-7*. Acciones que se identificaron en los 25 estudiantes en el Problema 7, Bloque IV.

| E | 1a) | 1b) | 1c) | 1d) | 2,3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | M | M | M | M | OS | A | M-OS | M-OS |
| E2 | M | M | M | M | | | | |
| E3 | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A | M-OS-A | OS | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E4 | M | M | M | M | | | | |
| E5 | M | M | M | M | OS-A | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E6 | M | M | M | M | OS-A | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E7 | M | M | M | M | OS-A | A | M-OS-A | M-OS-A |
| E8 | M | M | M | M | OS-A | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E9 | M | M | M | M | OS | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E10 | M | M | M | M | OS-**A** | A | M-OS-A | M-OS-A |
| E11 | M | M | M | M | **M** | A | **M-OS-A** | M-OS-A |
| E12 | M | M | M | M | M-**OS** | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E13 | M | M | M | M | OS-A | A | M-OS-A | M-OS-A |
| E14 | M | M | M | M | OS-**A** | A | M-OS-A | M-OS-A |
| E15 | M | M | M | M | M-OS | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E16 | M | M | M | M | OS | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E17 | M | M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A |
| E18 | M | M | M | M | OS-A | A | M-OS-A | M-OS-A |
| E19 | **M** | M | M | M | OS | A | M-OS-A | M-OS-A |
| E20 | M | M | M | M | OS | A | **M-OS-A** | M-OS-A |
| E21 | M | M | M | M | | | | |
| E22 | M | M | M | M | OS | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E23 | M | M | M | M | OS | **A** | M-OS-A | M-OS-A |
| E24 | M | M | M | M | | | | |
| E25 | **M** | M | M | M | | | | |

*Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; V=Proporciona valores, NV=No proporciona valores, I=Incorrecto, C=Correcto, Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A. La letra en negrilla indica intervención por parte del investigador.*

*Tabla D-8*. Expresiones de generalización registradas por los estudiantes en el Problema 7, Bloque IV.

| **Categoría 1** |
|---|
| E11. Medirlo primero el espacio y pegar la foto |
| **Categoría 2** |
| E7. Multiplicar por el lado de centímetros<br>E12. Multiplicación de las áreas (V)/ multiplicar el lado del lado y me da el Area (Categoría 5) |
| **Categoría 3** |
| E1. Multiplicando los números de los lados<br>E5. Que siempre debe multiplicar por el mismo número, como 1 por 1 me da el área 1, 2 por 2 me da el área 4, 5 por 5 me da el área 25, 8 por 8 me da el 64, 12 por 12, 144 y 20 por 20, 400 y 50 por 50, 2500 (V). Por el mismo numero que vas a multiplicar lo multiplico y me da el resultado (Categoría 4)/$LxL = A$ (Categoría 5) |

| **Categoría 4** |
|---|
| E10. Multiplicarlo por el mismo numero de la medida/ del lado/ $MXM = A$ (Categoría 5)<br>E15. Multiplicar la medida del lado y volver a multiplicar por la medida del lado<br>E16. Multiplicar la medida del lado por otra vez<br>E17. Multiplicandolo al mismo numero<br>E18. Multiplicar la cantidad que tu quieres que sea tu fotografía por la misma cantidad. Por ejemplo: 78 y los vas a multiplicar por dos esa cantidad (78x78) y te va a dar R=6048<br>E19. Multiplicar la medida de los lados/ multiplicar la medida de lado x la medida del lado (Categoría 5)<br>E20. Bas multiplicando los lados del cuadrado y bes el aria<br>E22. Multiplicar la cantidad que te de de los lados |
| **Categoría 5** |
| E3. Multiplicar la medida del lado por el otro lado/ $LxL = A$<br>E6. Debes de multiplicar la medida del lado por la otra medida del lado<br>E8. $A = LxL$<br>E9. Ay que multiplicar el lado por el lado<br>E13. Multiplicando el lado por lado<br>E14. Multiplicando el lado por su mismo lado<br>E23. Multiplicar el lado por el lado |

*Nota. Las respuestas de los estudiantes se copiaron textualmente. V=Respuesta Verbal.*

# Publicaciones de los avances del trabajo de investigación

Uicab, G., Filloy, E. y García, M. (2018). La transición de la noción de variable del fin de la aritmética escolar a la utilizada en álgebra temprana. Los procesos de iteración, recursión, inducción, abstracción y generalización. *51 Congreso Nacional Sociedad Matemática Mexicana* (pp. 84-85). Villahermosa, Tabasco: SMM.

Uicab, G. y García, M. (2019). Pensamiento funcional en estudiantes de quinto grado de primaria cuando resuelven actividades con patrones numéricos. En Y. Morales, y A. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2019. Comité Interamericano de Educación Matemática* (pp. 2037-2044). Medellín, Colombia: CIAEM-IACME.

Uicab, G., Rojano, T. y García, M. (2019). Manifestaciones de generalización matemática en niños de 10-12 años. En A. M. Ojeda, L. E. Moreno, A. Gómez, L. A. López, C. N Morgado, J. C. Orozco, F. W. Romero y G. B. Salinas (Eds.), *5° Coloquio de Doctorado en Matemática Educativa* (pp. 139-147). Ciudad de México, México: Cinvestav.

Uicab, G., Rojano, T. y García, M. (2020). Expressions of mathematical generalization among children in grade five of primary school. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala & P. M. Ruiz-Arias, (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 347-355). Mazatlán, México: PME-NA.

Uicab, G. Rojano, T y García, M. (En trámite). Expresiones de generalización en escolares de 10 a 12 años durante la resolución de secuencias numéricas. *Revista Educación Matemática*.

# Referencias bibliográficas


Barrera, F. y Santos, L. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. En Castiblanco, A. et al. (Eds.), *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia* (pp. 166-185). Colombia: Enlace Editores LTDA.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*, 181-202.

Blanton, M. & Kaput, J. (2002). Designs principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classroom. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26 Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 105–112). Norwich, UK: University of East Anglia.

Blanton, M. & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen: Bergen University College.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds). *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5-23). Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Blasco, T. y Otero, L. (2008). Técnicas conversacionales para la recogida de datos en investigación cualitativa: la entrevista (I). *Nure Investigación*, 33 [http://www.nure investigacion.es/ OJS/index.php/nure/article/view/407].

Booth, L. R. (1981). Child-Methods in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 29-41.

Booth, L. R. (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School*, *11*(3), 5-6.

Booth, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Böttinger, C. & Söbbeke, E. (2009). Growing patterns as examples for developing a new view onto algebra and arithmetic. Working Group 4. *Sixth Proceedings of Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)* [http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg4-24-bottinger-sobbeke.pdf.]

Broitman, C. (2010). *Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula*. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Burke, M. (2007). A Mathematician's Proposal [https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED498954.pdf.]

Cai, J. & Knuth, E. (2011). Introduction. In J. Cai & E. Knuth (Eds). *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Cañadas, M., Brizuela, B. & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior*, (41), 87-103. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Carraher, D., Martinez, M. & Schielman, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, (40), 3-22.

Carraher, D., Schliemann, A. & Brizuela, B. (2000). Treating operations as functions. Plenary Presentation, *XXII Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*. Tucson, AZ.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Jaén: SEIEM.

Cohen, L. Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6ª ed.). EE. UU.: Routledge (ed. orig.: 1980).

Cooper, T. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 187-214). Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Cortés, J.C., Hitt, F. y Saboya, M. (2014). De la Aritmética al Álgebra: Números Triangulares, Tecnología y ACODESA. *REDIMAT*, *3*(3), 220-252.

Cortés, J.C., Hitt, F. y Saboya, M. (2016). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. *Bolema, 30*(54), 240-264.

Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K. & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving words problems. *Cognitive Psychology*, *20*, 405-438

Esquinas, A. M. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente*. Tesis doctoral publicada. Madrid: Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Educación.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de la literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación, 14*(2), 1-23.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(3), pp. 327-342.

Filloy, E. & Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In J. Moser (Ed.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, WI.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 12-25.

Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: a review of the literature. *Studies in Science Education*, *47*(2), 183-210.

González, A. y Weinstein, E. (1998). *¿Cómo enseñar matemática en el jardín?* Número - Medida - Espacio. Buenos Aires: Colihue

Grimaldi, V. e Itzcovich, H. (2013). Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática. En Broitman, C. (Comp.), *Matemáticas en la escuela primaria: saberes y conocimientos de niños y adolescentes* (pp. 69-93). Buenos Aires: Paidós.

Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, *73*(8), 572-580.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Hitt, F., Saboya, M. & Cortés C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

Hitt, F. (2020). Construction of arithmetic-algebraic thinking in a socio-cultural instructional approach. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala & P. M. Ruiz-Arias, (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 120-142). Mazatlán, México: PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Kaput, J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of PME-NA* (Vol. 1, pp. 71-94). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Earlbaum.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2014). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (2ª ed.) (pp. 5-17). EE. UU.: Routledge (ed. orig.: 2008).

Kaput, J. & Blanton, M. (2000). *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: making it implementable on a massive scale*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (2014). Skeptic's Guide to Algebra in the Early Grades. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (2[a] ed.) (pp. 5-17). EE. UU.: Routledge (ed. orig.: 2008).

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 341-361). EE. UU.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades. What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2018). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. In: Kieran C. (Ed.) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In T. D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*. New York: Macmillan.

Kieran, C., Pang, J. Schifter, D. & Fong Ng, S. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. ICME-13 Topical Surveys. Switzerland: Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Kieran, C. & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(1), 1-17.

Lee, L. & Freiman, V. (2006). Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(9), 428-433.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra. En J. P. Ponte y J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 176-183). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Lodholz, R. (1990). The Transition from Arithmetic to Algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 52-58). EE. UU.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Mason, J, (1980). When is a symbol symbolic? *For the Learning of Mathematics 1*(2), 8-13.

Mason, J. (1982). Attention. *For the Learning of Mathematics, 2*(3), 21-23.

Mason, J. (1989). Mathematical Abstraction Seen as a Delicate Shift of Attention. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 2-8.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Mason, J. (1999). La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA, 4*(3), 232-247.

Mason, J. (2003). Structure of Attention in the Learning of Mathematics. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching* (pp. 9-16). Prague: Charles University.

Mason, J. (2004). *Doing ≠ Construing and Doing + Discussing ≠ Learning: The importance of the Structure of Attention*. Regular lecture at the 10th International Congress of Mathematics Education, Copenhagen. [http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/ICME%2010%20Lecture%20Expanded.pdf].

Mason, J. (2014). Making Use of Children's Power to Produce Algebraic Thinking. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (2ª ed.) (pp. 57-94). EE. UU.: Routledge (ed. orig.: 2008).

Mason J. (2018). How Early Is Too Early for Thinking Algebraically? In: Kieran C. (Ed.) *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 329-350). New York: Springer.

Mason, J. (2019). Evolution of a task domain. *Digital Experiences in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s40751-018-0046-3

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2ª ed.). Great Britain: Pearson Education (ed. orig.: 1982).

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. Great Britain: The Open University.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Rutas hacia, raíces del Álgebra* (Agudillo, C. Trad.) Colombia: Universidad Pedagógica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985).

Mason, J., Stephens, M. & Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *The Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93–166.

Miles, M. & Huberman, A. M. (1994). Qualitative Data Analysis (2ª ed.). EE. UU.: SAGE Publications. (ed. orig.: 1983).

Queensland Studies Authority (2005). [https://www.qcaa.qld.edu.au/downloads/p_10/kla_maths_info_pattern.pdf].

Radford, L. (1996). Some Reflections on Teaching Algebra Through Generalization. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 107-111). Dordrecht /Boston/ London: Kluwer.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*, *11*(3), 25-53.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., y Méndez, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2008b). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp.215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2010b). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. XXXIII-LIII). Université Claude Bernard, Lyon, France.

Radford, L. (2010c). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Radford, L. (2012). On the development of algebraic thinking. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 64*(1), 117-133.

Radford, L. (2014a). *La enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva histórico-cultural: la teoría de la objetivación*. Ciclo de conferencias en Educación Matemática – GEMAD. Bogotá, Colombia. [http://www.luisradford.ca/pub/video_gemad_Oct18_2014.html

Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). New York: Springer.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E., McLean, L. & McEldoon, K. (2013). Emerging Understanding of Patterning in 4-Year-Olds. *Journal of Cognition and Development*, *14*(3), 375-395. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rivera, F. (2008). On the pitfalls of abduction: Complicities and complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 17-25.

Rivera, F. (2010). Visual Templates in Pattern Generalization Activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics. Psychological and Pedagogical Considerations*. New York: Springer.

Rivera, F. (2015). The distributed nature of pattern generalization. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática 9*(3), 165-191.

Rivera, F. (2018). Pattern generalization processing of elementary students: cognitive factors affecting the development of exact mathematical structures. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(9), online publication. https://doi.org/10.29333/ejmste/92554

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(4), 212-221

Rivera, F., Knott, L. & Evitts, T. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: understanding figural generalization. *The Mathematics Teacher, 101*(1), 69-75.

Roig, A. y Llinares, S. (2008). Fases en la abstracción de patrones lineales. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp.195-204). Badajoz: SEIEM.

Schielmann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula* (Biekofsky, R. Trad.) Buenos Aires: Paidós. (Trabajo original publicado en 2007).

Sims-Knight, J. E., & Kaput, J. J. (1983). Misconceptions of algebraic symbols: Representations and component processes. In H. Helm & J. D. Novak (Eds.), *Proceedings of the international seminar: Misconceptions in science and mathematics* (pp. 477-488). Ithaca, NY: Cornell University.

Secretaría de Educación Pública (2016). Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado. México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. México: Secretaría de Educación Pública.

Tanişli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 206-223.

Thorpe, J. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it? In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 31-39). EE. UU.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should, and must be an eighth-grade course for average students. *Mathematics Teachers*, 80, 428-438.

Vygotsky, L. S. (1999). Collected works. Vol. 6. (Eds. R. W. Rieber & A. S. Carton). New Work, NY: Plenum.

Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación. *Revista TecnoLógicas*, (16), 139-151.

Venkat, H., Askew, M., Watson, A. & Mason, J. (2019). Architecture of Mathematical Structure. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 13-17.

Wagner, S. (1983). What Are These Things Called Variables? *The Mathematics Teacher*, *76*(7), pp. 474-479.

Warren, E. (2005a). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice. Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, MERGA-28* (Vol. 2, pp. 759-766). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Warren, E. (2005b). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: PME.

Warren, E. (2009). Patterns and relationships in the elementary classroom. In I. Vale y A. Barbosa (Org.), *Multiple Perspectives and Contexts in Mathematics Education* (pp. 29-47). Portugal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Warren, E. & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9–14.

Wilkie, K. (2014). Learning to like algebra through looking. Developing upper primary students' functional thinking with visualisations of growing patterns. *Australian Primary Mathematics Classroom, 19*(4), 24-33.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 97*, 51-67.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002a). Arithmetic Sequence as a Bridge between Conceptual Fields. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 92-120.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002b). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics 49*, 379-402.