



Centro de Investigación y de
Estudios Avanzados del I.P.N.

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

***K*-teoría de álgebras de Toeplitz
asociadas a grupos de Artin de
ángulo recto**

Tesis que presenta
Jonatan Edgar Trejo Hernández

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias
en la especialidad de Matemáticas

Director de Tesis
Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino, por haber dedicado su tiempo a la revisión de este trabajo y por compartirme un poco de sus conocimientos, indudablemente me hicieron mejorar como matemático. Asimismo agradezco a la Dra. Maribel Loaiza Leyva y al Dr. Bruno Aarón Cisneros de la Cruz, por todos sus consejos y sugerencias que fueron de gran ayuda.

Finalmente me gustaría dar las gracias al CONACYT por el apoyo económico brindado y al CINVESTAV del IPN por proporcionarme las mejores condiciones para mi desarrollo a lo largo de estos años.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VII
Abstract	VII
Introducción	1
1. Álgebras C^*	5
1.1. Álgebras de Banach	5
1.2. Funcionales lineales multiplicativos	6
1.3. Álgebras C^*	9
1.4. Unitalización	12
1.5. Producto tensorial	14
1.6. Producto cruzado	17
2. K-teoría de álgebras C^*	21
2.1. El grupo K_0 de un álgebra C^* con identidad	21
2.2. El funtor K_0	29
2.3. Límites inductivos de álgebras C^*	31
2.4. El funtor K_1	35
2.5. Funtores K_n	38
2.6. La sucesión exacta de seis términos	40
3. Álgebras de Toeplitz de grupos gráficos	43
3.1. Producto gráfico de grupos	43
3.2. Cuasi-retículas ordenadas	47
3.3. Promediabilidad de cuasi-retículas ordenadas	52
3.4. El álgebra C^* de un grupo de Artin de ángulo recto	62

ÍNDICE GENERAL	VI
4. K-teoría de álgebras de Toeplitz de grupos gráficos	67
4.1. El álgebra $C_Q^*(\Gamma)$	67
4.2. Construcción del producto cruzado	72
4.3. La característica de Euler	75
4.4. La K -teoría de $C_Q^*(G)$ y $C^*(G)$	81
4.5. Algunas aplicaciones y ejemplos	91
A. Grupos de Artin	97
A.1. Grupos de trenzas	97
A.2. Grupos de Artin	99
A.3. Grupos de Artin de ángulo recto	100
Bibliografía	103

Resumen

En este trabajo proporcionamos los resultados básicos tanto de las álgebras C^* como de la K -teoría para álgebras C^* . Estudiamos el producto gráfico de una familia de grupos parcialmente ordenados; mostramos que el producto gráfico de cuasi-retículas ordenadas es una cuasi-retícula ordenada y que cuando los grupos subyacentes son promediables, entonces el producto gráfico es promediable en el sentido de Nica. Vemos que los grupos de Artin de ángulo recto son promediables y damos una condición suficiente que garantiza la unicidad de un álgebra C^* generada por una colección de isometrías satisfaciendo las mismas relaciones de conmutación que el grupo de Artin de ángulo recto. Calculamos la K -teoría de las álgebras C^* que surgen cuando tal condición se cumple. Finalmente probamos que estas álgebras C^* universales son isomorfas a productos tensoriales de extensiones de álgebras de Cuntz $E_{1+|n|}^{sgn(n)}$, con tantos factores como componentes conexas tenga el grafo opuesto asociado.

Abstract

In this work we provide the basic facts of both the C^* -algebras and the K -theory for C^* -algebras. We study the graph product of a family of partially ordered groups; we show that the graph product of quasi-lattice ordered groups is a quasi-lattice ordered group, and that when the underlying groups are amenable, then the graph product is amenable in the sense of Nica. We see that right-angled Artin groups are amenable, and we give a sufficient condition which guarantees the uniqueness of a C^* -algebra generated by a collection of isometries satisfying the same commutation relations as the right-angled Artin group. We compute the K -theory of the C^* -algebras that arise when such a condition is fulfilled. Finally we prove that these universal C^* -algebras are isomorphic to tensor products of extensions of Cuntz algebras $E_{1+|n|}^{sgn(n)}$, with as many factors as connected components has the associated opposite graph.

Introducción

Un álgebra C^* es un álgebra de Banach con una involución satisfaciendo

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A \quad (1)$$

Para cualquier espacio de Hilbert \mathcal{H} , el álgebra de operadores acotados $B(\mathcal{H})$ con la norma y adjunto usuales obedece (1). Esta ecuación es extremadamente restrictiva; en efecto, una función entre álgebras C^* con identidad que preserva sumas, multiplicación por escalares, producto y adjuntos es continua y de norma 1 (ver Proposición 1.34). Además un álgebra C^* no puede ser un álgebra C^* más que con una norma, un comportamiento muy exclusivo en comparación con las álgebras de Banach. Por tanto si completamos un álgebra- $*$ con dos normas distintas ambas cumpliendo (1), obtendremos dos álgebras C^* distintas.

El así llamado teorema de Gelfand, afirma que toda álgebra C^* conmutativa con identidad es isomorfa a $C(X)$ para algún espacio Hausdorff compacto X , bajo la transformada de Gelfand. Desde otro punto de vista, esto significa que la categoría opuesta de las álgebras C^* conmutativas con identidad es equivalente a la categoría de espacios Hausdorff compactos. Esta dualidad es conocida como topología no conmutativa; cada propiedad con respecto a un espacio Hausdorff compacto X puede ser establecida en términos de una propiedad del álgebra $C(X)$. La idea es que como un isomorfismo de álgebras entre $C(X)$ y $C(Y)$ induce un homeomorfismo de X con Y y viceversa, toda la información sobre X es almacenada algebraicamente en $C(X)$.

Uno de los mayores éxitos de la topología no conmutativa es la generalización de la K -teoría topológica desarrollada por Atiyah y Hirzebruch en [1], basados en el trabajo de A. Grothendieck en su formulación del teorema de Riemann-Roch [4]. Fue introducida como una herramienta en la teoría de álgebras de operadores a principios de la década de los 70 a través de algunas aplicaciones específicas.

A grosso modo, la K -teoría para álgebras C^* es un par de funtores covariantes K_0 y K_1 de la categoría de álgebras C^* a la categoría de grupos abelianos, con la peculiaridad de que el grupo conmutativo $K_0(A)$ de un álgebra C^* establemente finita A , es ordenado.

Entre las propiedades más sobresalientes que goza la K -teoría están:

- **Continuidad.** Para toda sucesión inductiva

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

de álgebras C^* , se tiene $K_0\left(\varinjlim A_n\right) \cong \varinjlim K_0(A_n)$ y $K_1\left(\varinjlim A_n\right) \cong \varinjlim K_1(A_n)$.

- **Fórmula de Künneth.** Dadas álgebras C^* A y B con $A \in \mathfrak{N}$, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K_*(A) \otimes K_*(B) \longrightarrow K_*(A \otimes B) \longrightarrow \text{Tor}(K_*(A), K_*(B)) \longrightarrow 0$$

- **Sucesión exacta de seis términos.** Para toda sucesión exacta corta de álgebras C^*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

existen mapeos δ_0 y δ_1 tales que

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(B) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\varphi)} & K_1(I) \end{array}$$

es una sucesión exacta.

Estos hechos constituyen maquinaria poderosa que hace posible calcular la K -teoría de muchas álgebras C^* . Es por esto que la K -teoría es el instrumento más conveniente para extraer información de tales objetos. En la actualidad la K -teoría juega un papel importante en la clasificación de álgebras C^* , un tema que ha tenido enormes avances recientemente; ejemplo de esto son las álgebras AF que fueron clasificadas por G. Elliott en [20] por medio de sus grupos ordenados K_0 (el grupo K_1 de un álgebra AF siempre es cero), y la clasificación de Kirchberg-Phillips [36, 29] de álgebras C^* simples, nucleares, puramente infinitas y separables. Otro caso que exhibe la trascendencia de la K -teoría, es el de la íntima relación que mantiene con los operadores de Fredholm, tal como lo muestra el teorema de Atiyah-Jänich, el cual identifica el grupo $K_0(C(X))$ con el conjunto de clases de homotopía de familias de operadores de Fredholm sobre X .

Varios resultados célebres en la teoría de álgebras C^* aseveran que el álgebra C^* generada por un semigrupo de isometrías no depende de las isometrías especificadas,

siempre que satisfagan una condición apropiada. Como ejemplos tenemos el teorema de Coburn sobre el álgebra C^* generada por una sola isometría [8], y el teorema de Douglas sobre el álgebra C^* de un semigrupo uniparamétrico de isometrías [17]; en ambos casos la condición apropiada dice que las isometrías no son unitarias.

Nica [34] consideró una clase de grupos parcialmente ordenados (G, P) que llamó cuasi-retículas ordenadas y les asoció el álgebra C^* de Toeplitz $\mathcal{T}(G, P)$ generada por la representación regular izquierda del cono positivo P . Inspirado por lo que pasa con dicha representación, aisló una condición de covarianza, la cual es automática para un orden total. En [30] un estudio más a fondo de $\mathcal{T}(G, P)$ fue llevado a cabo en términos de una propiedad universal característica de representaciones isométricas covariantes. En el caso de grupos de Artin de ángulo recto (A, A^+) , las álgebras C^* de Toeplitz $\mathcal{T}(A, A^+)$ tienen tal propiedad universal y satisfacen un teorema de unicidad (Teorema 3.47), que generaliza los resultados de Coburn [8], Douglas [17] y Cuntz [13]. Una característica clave de este resultado de unicidad es que solo las representaciones isométricas del monoide de Artin que satisfacen una condición apropiada, dan lugar a representaciones fieles del álgebra de Toeplitz.

En esta tesis nos abocamos a calcular la K -teoría de estas álgebras C^* universales asociadas a ciertos grupos de Artin de ángulo recto con centro trivial, la importancia de las cuales es señalada por los hechos bien conocidos que en la situación de Coburn se obtiene el álgebra \mathcal{T} , y en la situación de Cuntz se obtienen las álgebras \mathcal{E}_n de [13].

En el Capítulo 1 damos un breve repaso de la teoría de álgebras C^* . Iniciamos discutiendo los aspectos elementales sobre álgebras de Banach con identidad, enfatizando la trascendencia de la transformada de Gelfand. Continuamos con las álgebras C^* ; exploramos diferentes construcciones que ocupamos en lo sucesivo, incluimos la unitalización, el producto tensorial y el producto cruzado.

En el capítulo 2 estudiamos la K -teoría para álgebras C^* . Definimos el grupo $K_0(A)$ de un álgebra C^* A con identidad vía la construcción de Grothendieck y lo extendemos a la categoría de todas las álgebras C^* . Enseguida introducimos $K_n(A)$ para todo $n \geq 1$; damos ejemplos concretos y ponemos de manifiesto la funtorialidad e invariancia homotópica. También enunciamos la continuidad, periodicidad de Bott y la sucesión exacta de seis términos, que conforman los pilares de la K -teoría.

En el capítulo 3 presentamos el concepto de producto gráfico. Caracterizamos e ilustramos con varios ejemplos a las cuasi-retículas ordenadas (G, P) . Construimos el álgebra C^* universal $C^*(G, P)$ examinada por Nica y decimos qué entendemos por promediabilidad. Nuestros principales resultados técnicos son el Teorema 3.18, el cual muestra que el producto gráfico de cuasi-retículas ordenados es una cuasi-retícula ordenada y el Teorema 3.39, el cual da una condición suficiente para su promediabilidad. Una clase interesante de cuasi-retículas promediabiles es la de los

grupos gráficos. En el Teorema 3.47 probamos que las correspondientes álgebras C^* de Toeplitz $\mathcal{T}(A, A^+)$ son universales y únicas.

En el capítulo 4 calculamos la K -teoría de los cocientes de las álgebras C^* de Toeplitz $\mathcal{T}(A, A^+)$, asociadas a grafos Γ cuyos grafos opuestos Γ^{opp} son conexos (por definición, Γ^{opp} tiene el mismo conjunto de vértices que Γ y aristas uniendo los vértices que no están en Γ). La demostración es hecha por inducción sobre el número de vértices de Γ y utilizando la sucesión exacta de Pimsner-Voiculescu [37]. La respuesta final es proporcionada en términos de la característica de Euler del grafo Γ visto como complejo simplicial. Con ayuda del teorema de Kirchber-Phillips somos capaces de clasificar estas álgebras C^* .

Concluimos con un apéndice dedicado a grupos de Artin, que por sí mismo es un tema muy importante en teoría geométrica de grupos. Hacemos hincapié en las propiedades algebraicas y geométricas de los grupos de Artin de ángulo recto debido a su significativo rol que desempeñan a lo largo de la tesis.

Capítulo 1

Álgebras C^*

Este capítulo contiene hechos básicos sobre la teoría de álgebras C^* . Comenzamos introduciendo las álgebras de Banach y algunas de sus propiedades, destacando la importancia de la transformada de Gelfand. Continuamos abordando aspectos relevantes sobre álgebras C^* , incluimos el producto tensorial y el producto cruzado. La mayoría de las demostraciones son omitidas y pueden ser encontradas en [41, 3, 40].

1.1. Álgebras de Banach

En esta y en las próximas dos secciones asumiremos que las álgebras tienen identidad a menos que se diga lo contrario.

Definición 1.1. *Un álgebra de Banach \mathcal{A} compleja, es un álgebra con identidad junto con una norma $\|\cdot\|$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. \mathcal{A} es completa con respecto a la norma $\|\cdot\|$.
2. $\|\mathbf{1}\| = 1$.
3. $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

El ejemplo más simple de un álgebra de Banach es el campo complejo \mathbb{C} con norma igual al módulo.

Ejemplo 1.2. *Si K es un espacio compacto, entonces $C(K)$ es un álgebra de Banach con la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$. La función constante 1 es la identidad multiplicativa.*

Ejemplo 1.3. Para un espacio de Hilbert \mathcal{H} denotamos por $B(\mathcal{H})$ al espacio de los operadores acotados. $B(\mathcal{H})$ es un álgebra con la estructura lineal obvia y composición como multiplicación. $B(\mathcal{H})$ también es un álgebra de Banach con la norma

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}, \quad T \in B(\mathcal{H}).$$

Ejemplo 1.4. Si \mathcal{A} es un álgebra de Banach e \mathcal{I} es un ideal cerrado de \mathcal{A} , entonces el álgebra cociente \mathcal{A}/\mathcal{I} es un álgebra de Banach con la siguiente norma cociente:

$$\|[x]\| = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathcal{I}\} \quad [x] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}. \quad (1.1)$$

En particular si \mathcal{K} denota al conjunto de todos los operadores compactos en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , entonces \mathcal{K} es un ideal cerrado de $B(\mathcal{H})$ y el cociente $Q(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H})/\mathcal{K}$ es un álgebra de Banach, conocida como el álgebra de Calkin.

Definición 1.5. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. El espectro de x , denotado por $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ o simplemente por $\sigma(x)$, es el conjunto de todos los números complejos λ tales que $\lambda\mathbf{1} - x$ no es invertible.

Ejemplo 1.6. Sea $\mathcal{A} = C(K)$ con K compacto. Entonces $f \in \mathcal{A}$ es invertible si y solo si $0 \notin f(K)$, así $\sigma(f) = f(K)$.

Ejemplo 1.7. Sea $\mathcal{A} = B(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C})$. Entonces para todo $T \in \mathcal{A}$ el espectro $\sigma(T)$ consiste de todos los eigenvalores de la matriz T .

Si consideramos matrices reales, el espectro puede ser un conjunto sin elementos. Sin embargo esto no puede suceder para álgebras complejas.

Teorema 1.8 ([41], Theorem 3.1). Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Entonces $\sigma(x)$ es no vacío.

Notemos que en los dos ejemplos anteriores el espectro es compacto. En general esto siempre es verdadero.

Teorema 1.9 ([41], Theorem 3.3). Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Entonces $\sigma(x)$ es compacto en \mathbb{C} y está contenido en el disco cerrado $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$.

1.2. Funcionales lineales multiplicativos

En esta sección examinamos los funcionales lineales multiplicativos en un álgebra de Banach e introducimos la transformada de Gelfand.

Definición 1.10. *Un funcional lineal φ en un álgebra de Banach \mathcal{A} es multiplicativo si φ es no trivial y $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Denotamos por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ al conjunto de funcionales lineales multiplicativos sobre \mathcal{A} . $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ se conoce como el espacio de ideales maximales de \mathcal{A} .*

Ejemplo 1.11. *Si $\mathcal{A} = C(K)$ para algún espacio compacto K , entonces toda evaluación en un punto de K es un funcional lineal multiplicativo en \mathcal{A} .*

Sea $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, es fácil ver que $\varphi(\mathbf{1}) = 1$. En particular $\|\varphi\| \geq 1$. De hecho tenemos la igualdad:

Proposición 1.12 ([41], Proposition 4.1). *Sea φ un funcional lineal multiplicativo en un álgebra de Banach \mathcal{A} . Entonces $\|\varphi\| = 1$.*

El espacio de ideales maximales de \mathcal{A} siempre está contenido en la bola unitaria cerrada del espacio dual \mathcal{A}^* . Dotamos a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ de una topología usando la topología débil-estrella heredada del dual de Banach de \mathcal{A} , la cual está definida como la topología más pequeña sobre \mathcal{A}^* que hace a toda evaluación puntual continua.

Proposición 1.13 ([41], Proposition 4.2). *$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es un espacio Hausdorff compacto con la topología débil-estrella.*

Ejemplo 1.14. *Denotamos por $A(\mathbb{D})$ al álgebra de funciones continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ que son analíticas en \mathbb{D} . El mapeo $z \mapsto \varphi_z$ donde $\varphi_z(f) = f(z)$ para todo $f \in A(\mathbb{D})$, es un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ sobre el espacio de ideales maximales del algebra $A(\mathbb{D})$ (ver [41, Theorem 6.1]).*

Ejemplo 1.15. *Sea K un espacio Hausdorff compacto. Para todo $x \in K$, sea $\varphi_x \in \mathcal{M}_{C(K)}$ la evaluación en x . Entonces el mapeo $x \mapsto \varphi_x$ es un homeomorfismo de K en $\mathcal{M}_{C(K)}$ (ver [41, Theorem 6.2]).*

Cuando el álgebra es conmutativa, el espacio de funcionales lineales multiplicativos se puede identificar con el conjunto de ideales maximales del álgebra.

Teorema 1.16 ([41], Theorem 4.3). *Si \mathcal{A} es un álgebra de Banach conmutativa, entonces $\varphi \mapsto \text{Ker}(\varphi)$ define una biyección entre $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ y el espacio de ideales maximales (propios) de \mathcal{A} .*

Gleason, Kahane y Zelazko caracterizaron a los funcionales lineales multiplicativos tal y como se muestra a continuación.

Teorema 1.17 ([41], Theorem 4.5). *Un funcional lineal φ en un álgebra de Banach \mathcal{A} es multiplicativo si y solo si $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ y $\varphi(x) \neq 0$ cuando x es invertible.*

La transformada de Gelfand

Definición 1.18. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach. La transformada de Gelfand es el mapeo $\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ definido por

$$\Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{A}, \varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$$

Es fácil ver que la transformada de Gelfand es un homomorfismo con norma $\|\Gamma\| \leq 1$. En general Γ no es ni inyectiva ni suprayectiva; el espacio de ideales maximales incluso puede ser vacío. Sin embargo, si el álgebra de Banach \mathcal{A} es conmutativa, la transformada de Gelfand distingue elementos invertibles.

Proposición 1.19 ([41], Proposition 5.1). Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach conmutativa y $x \in \mathcal{A}$. Entonces x es invertible en \mathcal{A} si y solo si $\Gamma(x)$ es invertible en $C(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$.

Definición 1.20. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Definimos el radio espectral de x como $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Proposición 1.21. Si x está en un álgebra de Banach conmutativa \mathcal{A} , entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{C(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})}(\Gamma(x)) = \text{Im}(\Gamma(x)) \quad \text{y} \quad r(x) = \|\Gamma(x)\|_{\infty} = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}\}.$$

Demostración. Es inmediato del Ejemplo 1.6 y de la Proposición 1.19 □

Como el espectro está definido en una manera puramente algebraica, el radio espectral es una cantidad dependiendo solamente de la estructura algebraica del álgebra de Banach. Sin embargo, el radio espectral también puede ser definido en términos puramente topológicos.

Teorema 1.22 (La fórmula del radio espectral) ([41], Theorem 5.5). Para todo elemento x en un álgebra de Banach \mathcal{A} tenemos

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Observación 1.23. Supongamos que \mathcal{A} es un álgebra de Banach y \mathcal{B} es una subálgebra cerrada conteniendo la identidad. Si $x \in \mathcal{B}$, entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \neq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ en general. Así el espectro de un elemento depende del álgebra que lo contiene. Sin embargo, la fórmula del radio espectral muestra que el radio espectral de un elemento es independiente del álgebra de Banach que lo contiene.

1.3. Álgebras C^*

Definición 1.24. Un álgebra C^* es un álgebra de Banach \mathcal{A} junto con un mapeo $x \mapsto x^*$ en \mathcal{A} satisfaciendo las siguientes condiciones:

- (1) $(x^*)^* = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$
- (2) $(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ y $a, b \in \mathbb{C}$.
- (3) $(xy)^* = y^*x^*$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.
- (4) $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Cualquier mapeo $x \mapsto x^*$ en un álgebra satisfaciendo (1), (2) y (3) se conoce como involución. El elemento x^* usualmente es llamado el adjunto de x .

Ejemplo 1.25. Dado K compacto $\mathcal{A} = C(K)$ con $f^* = \bar{f}$ es un álgebra C^* conmutativa. Notemos que si K consiste de n puntos distintos, entonces $C(K) \cong \mathbb{C}^n$. Así existen álgebras C^* de cualquier dimensión.

Ejemplo 1.26. $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ con la operación adjunto usual como involución es un álgebra C^* . Si \mathcal{H} tiene dimensión n , entonces $B(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$ es el álgebra de todas las matrices complejas $n \times n$ y el adjunto de una matriz es su transpuesta conjugada.

Ejemplo 1.27. Supongamos que \mathcal{A} es un álgebra C^* y \mathcal{B} es una subálgebra cerrada de \mathcal{A} que es cerrada bajo la involución. Entonces \mathcal{B} es un álgebra C^* con la norma, involución y estructura algebraica heredada de \mathcal{A} . Llamamos a tal \mathcal{B} una subálgebra C^* de \mathcal{A} .

Ejemplo 1.28. Si $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ son álgebras C^* , la suma directa $\mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$ es un álgebra C^* con las operaciones algebraicas componente a componente y con la norma $\|(a_1, \dots, a_n)\| = \sup \|a_i\|$.

Teorema 1.29 ([41], Theorem 15.7). Sea \mathcal{A} un álgebra C^* e \mathcal{I} un ideal cerrado en \mathcal{A} . Entonces \mathcal{A}/\mathcal{I} , dotado con la estructura algebraica natural y la norma cociente (1.1), es un álgebra C^* .

Ahora definimos algunos elementos especiales que frecuentemente se encuentran en las álgebras C^* .

Definición 1.30. Sea \mathcal{A} un álgebra C^* y $x \in \mathcal{A}$.

1. Decimos que x es autoadjunto si $x^* = x$.
2. Decimos que x es unitario si $x^*x = xx^* = \mathbf{1}$.
3. Decimos que x es normal si $x^*x = xx^*$.
4. Decimos que x es positivo si existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $x = y^*y$.
5. Decimos que x es una proyección si $x^* = x = x^2$.

Es claro que los elementos autoadjuntos y unitarios son normales. Escribimos $x \geq 0$ si x es positivo.

Teorema 1.31 ([41], Theorem 8.1). *Si x es normal en un álgebra C^* \mathcal{A} , entonces $r(x) = \|x\|$.*

Como una consecuencia del teorema anterior, es que hay a lo más una norma haciendo de \mathcal{A} un álgebra C^* . De hecho, si $\|\cdot\|$ hace de \mathcal{A} un álgebra C^* , entonces

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = r(x^*x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x^*x)\}.$$

Así la norma está unívocamente determinada por la estructura algebraica de \mathcal{A} y por la involución usada.

Proposición 1.32 ([41], Proposition 8.2). *Sea \mathcal{A} un álgebra C^* y $x \in \mathcal{A}$.*

1. Si x es autoadjunto, entonces $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.
2. Si x es unitario, entonces $\sigma(x) \subset \mathbb{S}^1$.

Definición 1.33. *Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} álgebras C^* . Un mapeo $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un homomorfismo C^* si*

1. $\Phi(ax + by) = a\Phi(x) + b\Phi(y)$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathcal{A}$.
2. $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.
3. $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$.
4. Φ mapea la identidad de \mathcal{A} a la identidad de \mathcal{B} .

Si además Φ es biyectivo, decimos que Φ es un isomorfismo C^* .

Los homomorfismos C^* tienen la cualidad de que siempre son continuos. Además todo homomorfismo C^* inyectivo es una isometría (ver [41, Theorem 10.7]).

Proposición 1.34. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} álgebras C^* y $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un homomorfismo C^* . Para todo $x \in \mathcal{A}$ tenemos $\sigma(\Phi(x)) \subset \sigma(x)$ y $\|\Phi(x)\| \leq \|x\|$.

Demostración. La contención $\sigma(\Phi(x)) \subset \sigma(x)$ es clara. Esta contención, junto con la fórmula de radio espectral para elementos normales también da

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = r(x^*x) \geq r(\Phi(x^*x)) = r(\Phi(x)^*\Phi(x)) = \|\Phi(x)^*\Phi(x)\| = \|\Phi(x)\|^2$$

□

Corolario 1.35. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} álgebras C^* y $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un isomorfismo C^* . Entonces $\sigma(\Phi(x)) = \sigma(x)$ y $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

El siguiente teorema muestra que las únicas álgebras C^* conmutativas con identidad son las álgebras de funciones continuas $C(K)$ para algún espacio Hausdorff compacto K .

Teorema 1.36 ([41], Theorem 9.4). Para un álgebra C^* conmutativa \mathcal{A} , la transformada de Gelfand es un isomorfismo C^* de \mathcal{A} en $C(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$.

Supongamos ahora que \mathcal{A} es un álgebra C^* y $F \subset \mathcal{A}$. La subálgebra C^* de \mathcal{A} generada por F , denotada por $C^*(F)$, es la intersección de todas las subálgebras C^* de \mathcal{A} que contienen a F . El álgebra $C^*(F)$ puede ser descrita como sigue. Para todo número natural n definimos $W_n = \{x_1 \dots x_n : x_j \in F \cup F^*\}$ y $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Usando que $W = W^*$ es cerrado bajo multiplicación, vemos que el generado lineal cerrado de W es una subálgebra- $*$ de \mathcal{A} . Se sigue que

$$C^*(F) = \overline{\text{span } W}.$$

Ejemplo 1.37. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal para \mathcal{H} . Consideremos el operador $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por

$$S(e_n) = e_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ entonces } S^*(e_n) = \begin{cases} e_{n-1}, & n > 1, \\ 0, & n = 1, \end{cases} \text{ y } S^*S = I \neq SS^*.$$

Coburn mostró en [8] que el álgebra C^* generada por S es universal, en el sentido que si \mathcal{A} es un álgebra C^* con identidad y V es una isometría no unitaria en \mathcal{A} , entonces $C^*(S) \cong C^*(V)$.

Ejemplo 1.38. Sea $n \geq 2$ y \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Si $s_1, \dots, s_n \in B(\mathcal{H})$ satisfacen

$$s_1^*s_1 = \dots = s_n^*s_n = 1 = s_1s_1^* + \dots + s_ns_n^*$$

entonces $C^*(s_1, \dots, s_n)$ se conoce como el álgebra de Cuntz y es denotada por \mathcal{O}_n . Fue introducida por J. Cuntz en [12], donde él prueba que \mathcal{O}_n tiene la siguiente propiedad universal: si \mathcal{A} es un álgebra C^* conteniendo elementos t_1, \dots, t_n satisfaciendo $t_j^*t_j = 1 = t_1t_1^* + \dots + t_nt_n^*$, entonces $C^*(t_1, \dots, t_n) \cong \mathcal{O}_n$. También existe una contraparte \mathcal{O}_∞ , el álgebra C^* universal generada por una sucesión de isometrías $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con rangos mutuamente ortogonales.

Gelfand y Naimark se dieron cuenta que toda álgebra C^* se puede realizar como un álgebra de operadores en un espacio de Hilbert. La construcción es como sigue.

Definición 1.39. Una representación de un álgebra C^* \mathcal{A} es una pareja (\mathcal{H}, π) consistiendo de un espacio de Hilbert \mathcal{H} y un homomorfismo C^* $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$. Decimos que la representación (\mathcal{H}, π) es fiel si π es inyectiva y que es no degenerada si $\pi(x)\xi = 0$ para toda $x \in \mathcal{A}$ implica $\xi = 0$.

Definición 1.40. Sea \mathcal{A} un álgebra C^* y φ un funcional lineal en \mathcal{A} . Decimos que φ es un estado si $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$ y $\varphi(\mathbf{1}) = 1$. Denotamos por $S(\mathcal{A})$ al espacio de los estados en \mathcal{A} .

Proposición 1.41 ([41], Proposition 14.1). Si φ es un estado en un álgebra C^* \mathcal{A} , entonces $\mathcal{L}_\varphi := \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 0\}$ es un ideal izquierdo cerrado en \mathcal{A} . Además $\varphi(y^*x) = 0$ cuando x o y están en \mathcal{L}_φ .

Dado un estado φ en un álgebra C^* \mathcal{A} , sea $H_\varphi^0 = \mathcal{A}/\mathcal{L}_\varphi$. Denotamos por $[x]$ a las clases de equivalencia en el cociente. Es claro que H_φ^0 es un espacio pre-Hilbertiano con el producto interno $\langle [x], [y] \rangle := \varphi(y^*x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Denotamos por H_φ a la completación de H_φ^0 con respecto a este producto interno.

Teorema 1.42 (Construcción GNS ([41], Theorem 14.4)). *Sea \mathcal{A} un álgebra C^* , entonces existe un homomorfismo C^* inyectivo $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B\left(\bigoplus_{\varphi \in S(\mathcal{A})} H_\varphi\right)$. Más aún, $(\bigoplus_{\varphi \in S(\mathcal{A})} H_\varphi, \pi)$ es una representación no degenerada.*

1.4. Unitalización

Para algunas aplicaciones puede ser necesario considerar álgebras sin identidad. El siguiente argumento muestra que toda álgebra de Banach (sin identidad) se puede pensar como una subálgebra cerrada de un álgebra de Banach con identidad.

Sea \mathcal{A} un álgebra (posiblemente sin identidad) equipada con una norma completa $\|\cdot\|$ satisfaciendo $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Sea

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(x, a) : x \in \mathcal{A}, a \in \mathbb{C}\}$$

Es claro que $\tilde{\mathcal{A}}$ es un espacio vectorial con las operaciones lineales definidas componente a componente. También $\tilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra si definimos una multiplicación por $(x, a)(y, b) = (xy + ay + bx, ab)$ y definimos una norma en $\tilde{\mathcal{A}}$ por

$$\|(x, a)\| = \|x\| + |a|. \quad (1.2)$$

Entonces es fácil checar que $\tilde{\mathcal{A}}$ se vuelve un álgebra de Banach con identidad $\mathbf{1} = (0, 1)$. Es obvio que el mapeo $x \mapsto (x, 0)$ es un isomorfismo isométrico de \mathcal{A} sobre un ideal cerrado de $\tilde{\mathcal{A}}$. Al álgebra $\tilde{\mathcal{A}}$ se le conoce como la unitalización de \mathcal{A} .

Si adicionalmente \mathcal{A} es un álgebra C^* , la función $(x, a) \mapsto (x^*, \bar{a})$ es una involución en $\tilde{\mathcal{A}}$. Sin embargo, la norma (1.2) no es compatible con esta involución cuando se intenta hacer a $\tilde{\mathcal{A}}$ un álgebra C^* . No obstante, siempre es posible extender la norma de \mathcal{A} a una sobre $\tilde{\mathcal{A}}$ que hace de $\tilde{\mathcal{A}}$ un álgebra C^* .

Teorema 1.43 ([41], Theorem 15.1). *Sea \mathcal{A} un álgebra C^* sin identidad, entonces*

$$\|(x, a)\| = \sup\{\|xy + ay\| : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leq 1\} \quad (1.3)$$

es una norma sobre $\tilde{\mathcal{A}}$ que hace de $\tilde{\mathcal{A}}$ un álgebra C^ y $\|(x, 0)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$.*

Observación 1.44. *Supongamos que \mathcal{A} es un álgebra C^* con identidad, en este caso la función $(x, a) \mapsto (x + a\mathbf{1}, a)$ define un isomorfismo-* de $\tilde{\mathcal{A}}$ en $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Por tanto $\|(x, a)\| := \sup\{\|x + a\mathbf{1}\|, |a|\}$ es una norma en $\tilde{\mathcal{A}}$ haciéndola un álgebra C^* .*

Ejemplo 1.45. *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto (pero no compacto). Sea $C_0(X)$ el espacio de las funciones continuas sobre X que se anulan en ∞ , i.e. una función continua f pertenece a $C_0(X)$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto K_ϵ en X tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X \setminus K_\epsilon$. Si $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ es la compactificación unipuntual de X , entonces una función $f \in C(X_\infty)$ pertenece a $C_0(X)$ si y solo si $f(\infty) = 0$. El espacio $C_0(X)$ es un álgebra C^* conmutativa sin identidad cuando es dotada de la norma del supremo y las operaciones algebraicas obvias.*

Consideremos la unitalización $\widetilde{C_0(X)}$ con la norma (1.3) y definamos la función $\rho : \widetilde{C_0(X)} \rightarrow C(X_\infty)$ mediante $\rho(f, \lambda) = \tilde{f} + \lambda$ donde $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \infty, \\ 0, & x = \infty. \end{cases}$ Afirmamos que ρ es un isomorfismo C^ .*

- *Para ver la inyectividad supongamos que $\tilde{f}_1 + \lambda_1 = \tilde{f}_2 + \lambda_2$, evaluando en ∞ tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2$ y por tanto $f_1 = f_2$.*

- La suprayectividad es inmediata de la igualdad $\rho(f - f(\infty), f(\infty)) = f$ para $f \in C(X_\infty)$.
- Para verificar que es homomorfismo tomamos $f_1, f_2 \in C_0(X)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \rho((f_1, \lambda_1)(f_2, \lambda_2)) &= \rho(f_1 f_2 + \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_1, \lambda_1 \lambda_2) \\ &= \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 + \lambda_2 \tilde{f}_1 + \lambda_1 \tilde{f}_1 + \lambda_1 \lambda_2 \\ &= (\tilde{f}_1 + \lambda_1)(\tilde{f}_2 + \lambda_2) = \rho(f_1, \lambda_1) \rho(f_2, \lambda_2) \end{aligned}$$

- Evidentemente ρ preserva involuciones y $\rho(0, 1) = 1$.

En particular $\widetilde{C_0(\mathbb{R}^n)} \cong C(\mathbb{S}^n)$ y $\widetilde{C_0([0, 1])} \cong C([0, 1])$.

Un resultado análogo al Teorema 1.36 se puede obtener para álgebras C^* conmutativas sin identidad.

Teorema 1.46 ([41], Theorem 15.9). *Supongamos que \mathcal{A} es un álgebra C^* conmutativa sin identidad y \mathcal{M} es el espacio de ideales maximales de \mathcal{A} . Entonces la transformada de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow C_0(\mathcal{M})$ es un isomorfismo C^* .*

1.5. Producto tensorial

Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son álgebras C^* , podemos formar su producto tensorial algebraico $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ sobre \mathbb{C} . $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ tiene una estructura natural como un álgebra- $*$ con multiplicación $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ e involución $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$. Si existe una norma C^* γ en $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, escribiremos $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$ para la completación.

Ejemplo 1.47. *Si \mathcal{A} es un álgebra con involución, entonces $\mathcal{A} \odot \mathbb{C} \cong \mathcal{A}$. En efecto, consideramos el mapeo bilineal $(a, \lambda) \mapsto \lambda a$ y lo extendemos a un mapeo lineal suprayectivo $\sum a_i \otimes \lambda_i \mapsto \sum \lambda_i a_i$ de $\mathcal{A} \odot \mathbb{C}$ sobre \mathcal{A} . Para ver la inyectividad basta notar que $\sum a_i \otimes \lambda_i = (\sum \lambda_i a_i) \otimes 1$. El mapeo claramente es multiplicativo y preserva involución.*

$\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ tiene la propiedad universal que cuando $\pi_{\mathcal{A}}$ y $\pi_{\mathcal{B}}$ son homomorfismos- $*$ de \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente, a un álgebra- $*$ \mathcal{C} , tales que $\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ y $\pi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$ conmutan, entonces existe un único homomorfismo $\pi : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\pi(a \otimes b) = \pi_{\mathcal{A}}(a)\pi_{\mathcal{B}}(b)$ para todo $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Tomando $\mathcal{C} = B(\mathcal{H})$, obtenemos representaciones de $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ y por tanto seminormas C^* inducidas.

Una manera estándar de generar tales representaciones es vía producto tensorial de espacios de Hilbert: si $(\mathcal{H}_1, \pi_{\mathcal{A}})$ y $(\mathcal{H}_2, \pi_{\mathcal{B}})$ son representaciones de \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente, podemos formar la representación $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \pi = \pi_{\mathcal{A}} \otimes \pi_{\mathcal{B}})$ de $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ por $\pi(a \otimes b) = \pi_{\mathcal{A}}(a) \otimes \pi_{\mathcal{B}}(b)$. Si $\pi_{\mathcal{A}}$ y $\pi_{\mathcal{B}}$ son fieles, entonces no es difícil mostrar que $\pi_{\mathcal{A}} \otimes \pi_{\mathcal{B}}$ es fiel, así $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ tiene al menos una norma C^* . También, para cualquier $\pi_{\mathcal{A}}$ y $\pi_{\mathcal{B}}$ tenemos $\|(\pi_{\mathcal{A}} \otimes \pi_{\mathcal{B}})(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|a_i\| \|b_i\|$, así la norma

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right\|_{\min} := \sup \left\| (\pi_{\mathcal{A}} \otimes \pi_{\mathcal{B}}) \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) \right\|$$

(sobre todas las representaciones $\pi_{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} y $\pi_{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B}) es finita y por tanto una norma C^* , llamada la norma espacial sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$; también se conoce como la norma minimal porque en efecto resulta ser la norma C^* más pequeña sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. (Una consecuencia de la minimalidad de $\|\cdot\|_{\min}$ es que si $\pi_{\mathcal{A}}$ y $\pi_{\mathcal{B}}$ son cualesquiera representaciones fieles de \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente, y $x \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, entonces $\|(\pi_{\mathcal{A}} \otimes \pi_{\mathcal{B}})(x)\| = \|x\|_{\min}$, i.e. la norma espacial es independiente de las representaciones fieles elegidas). La completación de $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ con respecto a esta norma es escrita $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$ y es conocido como el producto tensorial espacial o minimal de \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Proposición 1.48. Sean \mathcal{A}, \mathcal{B} y \mathcal{C} álgebras C^* y sean $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ y $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ homomorfismos C^* inyectivos tales que $\varphi(\mathcal{A})$ conmuta con $\psi(\mathcal{B})$. Entonces existe un único homomorfismo C^* inyectivo $\varphi \otimes \psi : \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\varphi \otimes \psi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$.

Demostración. Puesto que $\varphi(\mathcal{A})$ y $\psi(\mathcal{B})$ conmutan, existe un único homomorfismo $\varphi \otimes \psi : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\varphi \otimes \psi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$. Sea ahora $(\mathcal{H}, \pi_{\mathcal{C}})$ una representación fiel de \mathcal{C} , entonces $(\mathcal{H}, \pi_{\mathcal{C}} \circ \varphi)$ y $(\mathcal{H}, \pi_{\mathcal{C}} \circ \psi)$ son representaciones fieles de \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente. Así, dado $x = \sum_k a_k \otimes b_k \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|x\|_{\min} &= \|(\pi_{\mathcal{C}} \circ \varphi) \otimes (\pi_{\mathcal{C}} \circ \psi) \left(\sum_k a_k \otimes b_k \right)\| = \|\pi_{\mathcal{C}} \left(\sum_k \varphi(a_k)\psi(b_k) \right)\| \\ &= \left\| \sum_k \varphi(a_k)\psi(b_k) \right\| = \|\varphi \otimes \psi \left(\sum_k a_k \otimes b_k \right)\| = \|\varphi \otimes \psi(x)\|. \end{aligned}$$

Por tanto $\varphi \otimes \psi$ se extiende a una isometría sobre todo $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$. \square

También existe una norma C^* maximal en $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. En efecto, toda representación de $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ viene de un par de representaciones que conmutan de \mathcal{A} y \mathcal{B} :

Teorema 1.49 ([3], II.9.2.1). Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} álgebras C^* y (\mathcal{H}, π) una representación no degenerada de $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Entonces existen representaciones no degeneradas $(\mathcal{H}, \pi_{\mathcal{A}})$ de \mathcal{A} y $(\mathcal{H}, \pi_{\mathcal{B}})$ de \mathcal{B} tales que $\pi(a \otimes b) = \pi_{\mathcal{A}}(a)\pi_{\mathcal{B}}(b) = \pi_{\mathcal{B}}(b)\pi_{\mathcal{A}}(a)$ para todo a, b .

Corolario 1.50. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} álgebras C^* . Entonces toda seminorma C^* γ en $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ satisface $\gamma(a \otimes b) \leq \|a\| \|b\|$ para todo a, b y se extiende a una seminorma C^* de $\tilde{\mathcal{A}} \odot \tilde{\mathcal{B}}$.

Demostración. Sea $\alpha := \max\{\gamma, \|\cdot\|_{\min}\}$, entonces α es una norma C^* en $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Sea (\mathcal{H}, π) una representación fiel no degenerada de $\mathcal{A} \otimes_{\alpha} \mathcal{B}$, por el Teorema 1.49 existen representaciones no degeneradas $(\mathcal{H}, \pi_{\mathcal{A}})$ y $(\mathcal{H}, \pi_{\mathcal{B}})$ tales que $\pi(a \otimes b) = \pi_{\mathcal{A}}(a)\pi_{\mathcal{B}}(b) = \pi_{\mathcal{B}}(b)\pi_{\mathcal{A}}(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$. Por tanto

$$\gamma(a \otimes b) \leq \alpha(a \otimes b) = \|\pi(a \otimes b)\| \leq \|\pi_{\mathcal{A}}(a)\| \|\pi_{\mathcal{B}}(b)\| \leq \|a\| \|b\|$$

El resto de la demostración puede consultarse en [33, 6.4.10 Theorem] □

Así $\|\pi(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|a_i\| \|b_i\|$ para cualquier representación π de $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ y por tanto

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right\|_{\max} := \sup \left\| \pi \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) \right\|$$

donde el supremo es tomado sobre todas las representaciones, es una norma C^* (finita) sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. La completación es denotada por $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$, y se conoce como el producto tensorial maximal de \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Las notaciones $\|\cdot\|_{\min}$ y $\|\cdot\|_{\max}$ están justificadas por el siguiente hecho:

Proposición 1.51 ([3], II.9.5.2). Supongamos que \mathcal{A} y \mathcal{B} son álgebras C^* . Para toda norma C^* γ en $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ se tiene $\|\cdot\|_{\min} \leq \gamma \leq \|\cdot\|_{\max}$ y γ satisface

$$\gamma(a \otimes b) = \|a\| \|b\| \quad \forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}.$$

Definición 1.52. Un álgebra C^* \mathcal{A} se dice que es nuclear, si para toda álgebra C^* \mathcal{B} , existe una única norma C^* sobre $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Si \mathcal{A} es nuclear, escribimos $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ para $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$.

Por la Proposición 1.51, un álgebra C^* \mathcal{A} es nuclear si y solo para toda álgebra C^* \mathcal{B} , la norma espacial $\|\cdot\|_{\min}$ y la norma maximal $\|\cdot\|_{\max}$ en $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ coinciden.

Ejemplo 1.53. Sea \mathcal{A} un álgebra C^* y $\{e_{ij}\}$ la base canónica para $M_n(\mathbb{C})$. Todo elemento en $t \in \mathcal{A} \odot M_n(\mathbb{C})$ puede ser escrito $t = \sum a_{ij} \otimes e_{ij}$ donde los a_{ij} son únicos (ver [40, T.2.8]). El mapeo

$$\psi : \mathcal{A} \odot M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathcal{A}), \quad \sum a_{ij} \otimes e_{ij} \mapsto (a_{ij}),$$

es lineal, multiplicativo ($e_{ij}e_{km} = \delta_{jk}e_{im}$), preservando la involución ($e_{ij}^* = e_{ji}$), y claramente biyectivo. Como $M_n(\mathcal{A})$ es un álgebra C^* (ver [3, II.6.6.2]), $\mathcal{A} \odot M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra C^* con la norma inducida por ψ . Así $M_n(\mathbb{C})$ es nuclear.

Ejemplo 1.54. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es nuclear (ver [33, 6.3.2. Example]). Además, dado que $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ también es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, se tiene que $\mathcal{H} \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ y por tanto $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Otro ejemplo importante es:

Teorema 1.55 ([40], Corollary T.6.17). Sea X un espacio Hausdorff compacto, \mathcal{B} un álgebra C^* con identidad y α una norma C^* sobre $C(X) \odot \mathcal{B}$. Entonces $\alpha = \|\cdot\|_{\min}$ y $C(X) \otimes \mathcal{B}$ puede ser identificado con $C(X, \mathcal{B})$ bajo el mapeo $f \otimes b \mapsto (x \mapsto f(x)b)$. En particular, si $\mathcal{B} = C(Y)$ entonces $C(X) \otimes C(Y) \cong C(X, C(Y)) \cong C(X \times Y)$.

Teorema 1.56. Toda álgebra C^* \mathcal{A} conmutativa es nuclear.

Demostración. Es suficiente mostrar el caso donde $\mathcal{A} = C_0(X)$ para X un espacio Hausdorff localmente compacto. Sea \mathcal{B} un álgebra C^* arbitraria (con o sin identidad), y considere una norma C^* γ en $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. De acuerdo al Corolario 1.50 podemos extender γ a una norma C^* $\tilde{\gamma}$ sobre $\tilde{\mathcal{A}} \odot \tilde{\mathcal{B}}$ y como $\tilde{\mathcal{A}} \cong C(X_\infty)$, $\tilde{\gamma}$ debe ser la norma espacial en $\tilde{\mathcal{A}} \odot \tilde{\mathcal{B}}$. Pero entonces γ , siendo la restricción de $\tilde{\gamma}$ a $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, es la norma espacial. \square

La extensión a productos tensoriales infinitos se da en la sección 2.3. Más resultados sobre productos tensoriales pueden ser hallados en [3, 40, 33].

1.6. Producto cruzado

Si X es un espacio localmente compacto, denotamos por $C_c(X)$ al conjunto de todas las funciones continuas con soporte compacto en X . Una integral positiva en $C_c(X)$ es un funcional lineal $\int : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\int_X f(x)dx := \int(f) \geq 0$ si $f \geq 0$. Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y $F : X \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una función débilmente continua

(i.e., $x \mapsto \langle F(x)\xi, \eta \rangle$ es continua para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$) con soporte compacto, entonces existe un único operador $\int_X F(x)dx \in B(\mathcal{H})$ tal que

$$\left\langle \left(\int_X F(x)dx \right) \xi, \eta \right\rangle = \int_X \langle F(x)\xi, \eta \rangle dx \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Si G es un grupo localmente compacto, entonces existe una integral positiva distinta de cero $\int : C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$, conocida como la integral de Haar sobre $C_c(G)$, tal que $\int_G f(gx)dx = \int_G f(x)dx$ para todo $f \in C_c(G)$ y $g \in G$. La integral de Haar es única salvo multiplicación por un número positivo, lo cual implica que para todo $g \in G$ existe $\Delta(g) \in \mathbb{R}^+$ tal que $\int_G f(x)dx = \Delta(g) \int f(xg)dx$ para todo $f \in C_c(G)$ (pues el lado derecho de la ecuación define una nueva integral de Haar). La función $\Delta : G \rightarrow (0, \infty)$ es un homomorfismo de grupos continuo. Un grupo G es llamado unimodular si $\Delta(g) = 1$ para todo $g \in G$. Todos los grupos discretos, compactos y abelianos son unimodulares. Como una referencia general a la integral de Haar vea [16].

Definición 1.57. Una acción de un grupo localmente compacto G en un álgebra C^* \mathcal{A} es un homomorfismo $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$; $s \mapsto \alpha_s$ de G en el grupo $\text{Aut}(\mathcal{A})$ de automorfismos C^* de \mathcal{A} tal que $s \mapsto \alpha_s(a)$ es continuo para todo $a \in \mathcal{A}$. La terna (\mathcal{A}, G, α) se conoce como sistema dinámico C^* (o sistema covariante).

Ejemplo 1.58. Si $G \times X \rightarrow X$; $(s, x) \mapsto s \cdot x$ es una acción continua de G sobre un espacio Hausdorff localmente compacto X , entonces G actúa en $C_0(X)$ por $(\alpha_s(f))(x) := f(s^{-1} \cdot x)$.

Si (\mathcal{A}, G, α) es un sistema dinámico C^* , entonces $C_c(G, \mathcal{A})$ se vuelve un álgebra- $*$ con respecto al producto e involución definidos por

$$f * g(s) = \int_G f(t)\alpha_t(g(t^{-1}s))dt, \quad f^*(s) = \Delta(s^{-1})\alpha_s(f(s^{-1}))^*,$$

Una representación covariante de (\mathcal{A}, G, α) en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un par (π, U) , donde $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $U : G \rightarrow \mathcal{U}(B(\mathcal{H}))$ es un homomorfismo fuertemente continuo¹ satisfaciendo

$$\pi(\alpha_s(a)) = U_s \pi(a) U_s^{-1} \quad \forall s \in G.$$

¹Esto significa que para todo $\xi \in \mathcal{H}$, el mapeo $g \mapsto U_g(\xi)$ es continuo.

Si (π, U) es una representación covariante, su forma integrada $\pi \times U : C_c(G, \mathcal{A}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ está dada por

$$(\pi \times U)(f) := \int_G \pi(f(s))U_s ds \in B(\mathcal{H}).$$

Es sencillo checar que $\pi \times U$ es un homomorfismo-*

Las representaciones covariantes existen. En efecto, si $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ es cualquier representación, entonces podemos construir una representación covariante como sigue: Sea $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \rightarrow B(L^2(G, \mathcal{H}))$ dada por $(\tilde{\pi}(x)\xi)(s) := \pi(\alpha_s^{-1}(x))(\xi(s))$ para todo $x \in \mathcal{A}$, $\xi \in L^2(G, \mathcal{H})$ y $s \in G$. También considere $U : G \rightarrow \mathcal{U}(B(L^2(G, \mathcal{H})))$ dada por $(U_t\xi)(s) = \xi(t^{-1}s)$ para todo $t, s \in G$ y $\xi \in L^2(G, \mathcal{H})$. Es fácil verificar que $\tilde{\pi}$ es una representación C^* de \mathcal{A} y U una representación unitaria de G . Verifiquemos la condición de covarianza

$$\begin{aligned} (U_t\tilde{\pi}(x)U_t^*\xi)(s) &= (\tilde{\pi}(x)U_t^*\xi)(t^{-1}s) = \pi(\alpha_{t^{-1}s}^{-1}(x))(U_t^*\xi(t^{-1}s)) \\ &= \pi(\alpha_s^{-1}\alpha_t(x))\xi(s) = (\tilde{\pi}(\alpha_t(x))\xi)(s) \end{aligned}$$

Definición 1.59. Sea (\mathcal{A}, G, α) un sistema dinámico C^* . El producto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ (o solo $\mathcal{A} \rtimes G$ si α es entendido) es la completación de $C_c(G, \mathcal{A})$ con respecto a

$$\|f\| := \sup \|(\pi \times U)(f)\|$$

donde (π, U) varía en todas las representaciones covariantes de (\mathcal{A}, G, α) . Otras notaciones también son usadas para el producto cruzado, tales como $C^*(\mathcal{A}, \alpha)$, $G \ltimes_\alpha \mathcal{A}$.

Observación 1.60. Si G es discreto, entonces \mathcal{A} se encaja en $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ vía $\iota : a \mapsto \delta_e \otimes a \in C_c(G, \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Si en adición \mathcal{A} tiene identidad, entonces G también se encaja en $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ vía $j : g \mapsto \delta_g \otimes \mathbf{1}_\mathcal{A}$. Tenemos las relaciones

$$j(g) * \iota(a) = \iota(\alpha_g(a)) * j(g) \text{ para todo } a \in \mathcal{A} \text{ y } g \in G \quad (1.4)$$

Además $f = \sum_{x \in G} \delta_x \otimes f(x) = \sum_{x \in G} (\delta_e \otimes f(x)) * (\delta_x \otimes \mathbf{1}_\mathcal{A}) = \sum_{x \in G} \iota(f(x)) * j(x)$ para todo $f \in C_c(G, \mathcal{A})$. El producto cruzado es entonces el álgebra C^* generada por $\iota(\mathcal{A})$ y $j(G)$ sujeta a la relación (1.4).

Ejemplo 1.61. El álgebra de rotación irracional \mathcal{A}_θ es el álgebra C^* universal generada por dos elementos unitarios satisfaciendo la relación $uv = e^{2\pi i\theta}vu$ con $\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Si \mathbb{Z} actúa en \mathbb{S}^1 vía $n \cdot z = e^{i2\pi n}z$, entonces $\mathcal{A}_\theta \cong C(\mathbb{S}^1) \rtimes \mathbb{Z}$. En efecto, como \mathbb{Z} es discreto y $C(\mathbb{S}^1)$ tiene identidad, tenemos encajes canónicos de $C(\mathbb{S}^1)$ y \mathbb{Z} en $C(\mathbb{S}^1) \rtimes \mathbb{Z}$.

Si denotamos $v = \iota(id_{\mathbb{S}^1})$ y $u = j(1)$, entonces u, v son elementos unitarios y la relación (1.4) muestra que $uv = e^{2\pi i\theta}vu$ y por lo tanto

$$\mathcal{A}_\theta \cong C^*(u, v) = C^*(\iota(C(\mathbb{S}^1)), j(\mathbb{Z})) = C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z}.$$

Observación 1.62. Cuando \mathcal{A} tiene identidad, un producto cruzado de la forma $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ es el álgebra C^* generada por una copia de \mathcal{A} junto con un unitario u satisfaciendo $\alpha_1(a) = uau^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

El lector interesado en más detalles del producto cruzado puede consultar [3, 14, 35].

Capítulo 2

K-teoría de álgebras C^*

A grandes rasgos la K -teoría de álgebras C^* consiste de un par de funtores covariantes, conocidos como K_0 y K_1 , que a toda álgebra C^* \mathcal{A} le asocian dos grupos abelianos $K_0(\mathcal{A})$ y $K_1(\mathcal{A})$. Estos funtores son invariantes homotópicos, lo que permite sustituir objetos exóticos por otros mejor conocidos. La K -teoría revela propiedades del álgebra C^* en cuestión, e incluso en circunstancias favorables, clasifica las álgebras C^* . En este capítulo describimos la K -teoría para álgebras C^* ; enunciamos los resultados fundamentales y exploramos herramientas para el cálculo de la K -teoría.

2.1. El grupo K_0 de un álgebra C^* con identidad

La K -teoría de un álgebra C^* está definida en términos de clases de equivalencia de sus proyecciones y elementos unitarios. En esta sección damos los resultados necesarios sobre estos elementos y definimos K_0 para un álgebra C^* con identidad.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que dos puntos $a, b \in X$ son homotópicos en X , escrito $a \sim_h b$, si existe una función continua $v : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $v(0) = a$ y $v(1) = b$. La relación \sim_h es una relación de equivalencia sobre X .*

Denotamos por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de todas las proyecciones de un álgebra C^* A .

Definición 2.2. *Definimos dos relaciones de equivalencia sobre $\mathcal{P}(A)$:*

- $p \sim q$ si existe $v \in A$ con $p = v^*v$ y $q = vv^*$ (equivalencia Murray-von Neumann),
- $p \sim_u q$ si existe $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ con $q = upu^*$ (equivalencia unitaria).

Tenemos tres relaciones de equivalencia \sim_h, \sim_u y \sim en el conjunto de proyecciones en un álgebra C^* . La Proposición 2.4 dice que homotopía es más fuerte que la equivalencia unitaria la cual es más fuerte que la equivalencia Murray-von Neumann.

Proposición 2.3 ([38], Proposition 2.2.2). *Sea A un álgebra C^* con identidad y sean $p, q \in \mathcal{P}(A)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $p \sim_u q$,
2. $q = upu^*$ para algún $u \in \mathcal{U}(A)$,
3. $p \sim q$ y $1_A - p \sim 1_A - q$.

Proposición 2.4 ([38], Proposition 2.2.7). *Sean $p, q \in \mathcal{P}(A)$. Entonces*

$$p \sim_h q \implies p \sim_u q \implies p \sim q.$$

Ninguna de las implicaciones $p \sim q \implies p \sim_u q$ y $p \sim_u q \implies p \sim_h q$ se cumple en general.

Ejemplo 2.5. *Sea $S : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ el operador dado por $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $S^*S = I \neq SS^*$. Notemos que $0 = I - S^*S \not\sim I - SS^*$, porque de lo contrario $V^*V = 0$ y $VV^* = I - SS^*$ para algún $V \in \mathcal{U}(\ell^2(\mathbb{N}))$, así $V = 0$ y por tanto $I - SS^* = 0$ lo cual es absurdo. Por la Proposición 2.3 concluimos que $S^*S \not\sim_u SS^*$.*

Aunque las relaciones no son equivalentes, sí son iguales módulo álgebras matriciales.

Proposición 2.6 ([38], Proposition 2.2.8). *Sean $p, q \in \mathcal{P}(A)$. Entonces*

1. Si $p \sim q \implies \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $M_2(A)$.
2. Si $p \sim_u q \implies \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $M_2(A)$.

Definición 2.7. *Sea A un álgebra C^* , definimos*

$$\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(M_n(A)) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$$

*Definimos una relación sobre $\mathcal{P}_\infty(A)$. Si $p \in \mathcal{P}_n(A)$ y $q \in \mathcal{P}_m(A)$ entonces $p \sim_0 q$ si existe $v \in M_{m \times n}(A)$ tal que $p = v^*v$ y $q = vv^*$. Definimos una operación binaria por*

$$p \oplus q = \text{diag}(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_{n+m}(A).$$

La relación \sim_0 es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}_\infty(A)$. Combina la relación de equivalencia Murray-von Neumann \sim con una identificación de proyecciones en álgebras matriciales de diferentes tamaños sobre A .

Proposición 2.8. *Sean $p, q, r, p', q' \in \mathcal{P}(A)$ para un álgebra C^* A .*

1. $p \sim_0 p \oplus 0_n \forall n \in \mathbb{N}$,
2. si $p \sim_0 p'$ y $q \sim_0 q'$ entonces $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$,
3. $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$,
4. $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$.

Demostración. 1. $p = (p^* \ 0) \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \sim_0 \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} (p^* \ 0) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = p \oplus 0_n$

2. Si $p \sim_0 p'$ y $q \sim_0 q'$, entonces existen v, w tales que

$$p = v^*v, \quad p' = vv^*, \quad q = w^*w, \quad q' = ww^*$$

Sea $u_2 = \text{diag}(v, w)$. Entonces $p \oplus q = u_2^*u_2 \sim_0 u_2u_2^* = p' \oplus q'$.

3. $p \oplus q = \begin{pmatrix} 0 & p^* \\ q^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix} \sim_0 \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p^* \\ q^* & 0 \end{pmatrix} = q \oplus p$

4. Es trivial. □

Definición 2.9 (El semigrupo $\mathcal{D}(A)$). *Sea A un álgebra C^* con identidad. Definimos*

$$\mathcal{D}(A) := \mathcal{P}_\infty(A) / \sim_0$$

Para todo $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ denotamos $[p]_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}(A)$. Definimos una suma en $\mathcal{D}(A)$ por $[p]_{\mathcal{D}} + [q]_{\mathcal{D}} = [p \oplus q]_{\mathcal{D}}$ para $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Se sigue de la Proposición 2.8 que esta operación está bien definida y $(\mathcal{D}(A), +)$ es un semigrupo abeliano. A este semigrupo le asociamos un grupo abeliano vía la construcción de Grothendieck:

Definición 2.10. Sea $(S, +)$ un semigrupo abeliano. Definimos una relación de equivalencia en $S \times S$ por $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ si existe $z \in S$ tal que $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$.

Denotamos por $G(S) = (S \times S)/R$ y $\langle x, y \rangle$ a la clase de equivalencia de $(x, y) \in S \times S$. La operación $\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$ está bien definida y hace de $(G(S), +)$ un grupo abeliano. Al grupo $G(S)$ se le conoce como el grupo de Grothendieck de S .

Dado $z \in S$ fijo, la función $\gamma_S : S \rightarrow G(S)$ definida por $\gamma_S(x) = \langle x + z, z \rangle$ es independiente de la elección de z y es aditiva. Se conoce como la función de Grothendieck.

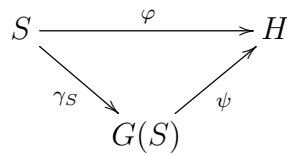
Ejemplo 2.11. 1. El grupo de Grothendieck del semigrupo abeliano $(\mathbb{Z}^+, +)$ es $(\mathbb{Z}, +)$.

2. El grupo de Grothendieck del semigrupo abeliano $(\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}, +)$ es isomorfo a $\{0\}$ pues

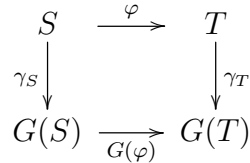
$$n_1 + m_2 + \infty = \infty = m_1 + n_2 + \infty \quad \forall n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Presentamos algunas propiedades del grupo de Grothendieck.

Proposición 2.12. 1. **Propiedad universal.** Si H es un grupo abeliano y $\varphi : S \rightarrow H$ es un mapeo aditivo, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\psi : G(S) \rightarrow H$ tal que $\psi \circ \gamma_S = \varphi$.



2. **Funtorialidad.** Para todo homomorfismo de semigrupos $\varphi : S \rightarrow T$ existe un único homomorfismo de grupos $G(\varphi) : G(S) \rightarrow G(T)$ haciendo el siguiente diagrama conmutativo.



3. $G(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x, y \in S\}$.

4. Sean $x, y \in S$. Entonces $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$ si y solo si $x + z = y + z$ para algún $z \in S$.

Definición 2.13 (El grupo K_0 para un álgebra C^* con identidad). Sea A un álgebra C^* con identidad. Definimos $K_0(A)$ como el grupo de Grothendieck de $\mathcal{D}(A)$, es decir $K_0(A) := G(\mathcal{D}(A))$. Definimos

$$[\cdot]_0 : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow K_0(A), \quad [p]_0 = \gamma([p]_{\mathcal{D}}) \in K_0(A)$$

con $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ y $\gamma : \mathcal{D}(A) \longrightarrow K_0(A)$ la función de Grothendieck.

Observación 2.14. La definición de $K_0(A)$ dada arriba también tiene sentido para álgebras C^* sin identidad. Denotamos por $K_{00}(A)$ al grupo de Grothendieck del semigrupo $\mathcal{D}(A)$ para toda álgebra C^* A (con o sin identidad).

Las dos proposiciones de abajo dan una descripción concreta y útil del grupo K_0 de un álgebra C^* con identidad.

Proposición 2.15 ([38], Proposition 3.1.7). Sea A un álgebra C^* con identidad. Entonces

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\} = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_n(A), n \in \mathbb{N}\}.$$

Además,

1. Si $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$, entonces $[p]_0 = [q]_0$.
2. Si p, q son proyecciones mutuamente ortogonales en $\mathcal{P}_n(A)$, entonces $[p + q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.

Proposición 2.16 (Propiedad universal de K_0) ([38], Proposition 3.1.8). Sea A un álgebra C^* con identidad, sea G un grupo abeliano, y supongamos que $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow G$ satisface:

- (1) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$ para todas las proyecciones $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$,
- (2) $\nu(0_A) = 0$,
- (3) Si $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $p \sim_h q$ en $\mathcal{P}_n(A)$, entonces $\nu(p) = \nu(q)$.

Entonces existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(A) \longrightarrow G$ que hace el diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_\infty(A) & & \\ \downarrow [\cdot]_0 & \searrow \nu & \\ K_0(A) & \xrightarrow{\alpha} & G \end{array}$$

Sean A y B álgebras C^* con identidad, y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorfismo C^* . Le asociamos a φ un homomorfismo de grupos $K_0(\varphi) : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ como sigue. Extendemos φ a un homomorfismo C^*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \cdots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{n1}) & \cdots & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

Un homomorfismo C^* mapea proyecciones a proyecciones, y así φ mapea $\mathcal{P}_\infty(A)$ en $\mathcal{P}_\infty(B)$. Definimos $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \longrightarrow K_0(B)$ por $\nu(p) = [\varphi(p)]_0$ para $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Entonces ν satisface (1), (2) y (3) de la Proposición 2.16, y por tanto ν se factoriza unívocamente a través de un homomorfismo de grupos $K_0(\varphi) : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ dado por $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0$.

Proposición 2.17 (Funtorialidad de K_0) ([38], Proposition 3.2.4). *1. Para toda álgebra C^* con identidad A , $K_0(id_A) = id_{K_0(A)}$.*

2. Si A, B y C son álgebras C^ con identidad, y si $\varphi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow C$ son homomorfismos C^* , entonces $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.*

Definición 2.18. Sean A y B álgebras C^* . Dos homomorfismos C^* $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ son homotópicos si existe un homomorfismo C^* $F : A \rightarrow C([0, 1], B)$ tal que $F(a)(0) = \varphi(a)$ y $F(a)(1) = \psi(a) \forall a \in A$.

A y B son homotópicamente equivalentes, en símbolos $A \simeq B$, si existen homomorfismos C^* $\rho : A \rightarrow B$ y $\sigma : B \rightarrow A$ tales que $\sigma \circ \rho$ es homotópico a id_A y $\rho \circ \sigma$ es homotópico a id_B .

Proposición 2.19 (Invariancia homotópica) ([38], Proposition 3.2.6). *Sean A y B álgebras C^* con identidad.*

1. Si $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ son homomorfismos C^ homotópicos, entonces $K_0(\varphi) = K_0(\psi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$.*

2. Si $A \simeq B$ entonces $K_0(A) \cong K_0(B)$.

Ahora introducimos el concepto de sucesión exacta, el cual juega un papel protagonista en la K -teoría.

Definición 2.20. Una sucesión (finita o infinita) de objetos en una categoría \mathbf{C} y de morfismos

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

es exacta si $\text{Im}(\varphi_n) = \text{ker}(\varphi_{n+1}) \forall n$. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

se conoce como sucesión exacta corta (S.E.C.). Si existe un morfismo $\lambda : B \rightarrow A$ tal que $\psi \circ \lambda = \text{id}_B$, se dice que la S.E.C. se escinde.

Ejemplo 2.21. 1. Sea A un álgebra C^* , $\pi : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ la proyección sobre la segunda coordenada y $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{A}$ definido por $\lambda(\alpha) = (0, \alpha)$. Entonces

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

$\xleftarrow{\lambda}$

es una sucesión exacta corta que se escinde.

2. Sean H, G y N grupos abelianos. Supongamos que tenemos una S.E.C.

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \quad (2.2)$$

- Si N es libre, entonces (2.2) se escinde.
- Si $h : N \rightarrow G$ es un homomorfismo tal que $g \circ h = \text{id}_N$, entonces $G = f(H) \oplus h(N) \cong N \oplus H$.

Proposición 2.22 ([38], Lemma 3.2.8). Para toda álgebra C^* con identidad A , la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

$\xleftarrow{\lambda}$

induce una sucesión exacta corta que se escinde

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

$\xleftarrow{K_0(\lambda)}$

Ejemplo 2.23 (Cálculo de $K_0(M_n(\mathbb{C}))$). Sea $p \in M_n(\mathbb{C})$ una proyección. Elegimos bases ortonormales $\{v_i\}_{i=1}^k$ y $\{w_j\}_{j=1}^{n-k}$ para $\ker(p)$ y $(\ker(p))^\perp$ respectivamente. Entonces $\{v_i\}_{i=1}^k \cup \{w_j\}_{j=1}^{n-k}$ es una base ortonormal para \mathbb{C}^n . Así

$$\begin{aligned} \text{Tr}(p) &= \sum_{i=1}^k \langle p(v_i), v_i \rangle + \sum_{j=1}^{n-k} \langle p(w_j), w_j \rangle = \sum_{j=1}^{n-k} \langle p(w_j), w_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} (\langle p(w_j) - w_j, w_j \rangle + \langle w_j, w_j \rangle) = \sum_{j=1}^{n-k} \|w_j\|^2 \\ &= n - k = \dim(\mathbb{C}^n) - \dim(\ker(p)) = \dim(\text{Im}(p)) \end{aligned}$$

Ahora sea $q \in M_n(\mathbb{C})$ proyección tal que $\dim(\text{Im}(p)) = \dim(\text{Im}(q))$, seleccionamos bases ortonormales $\{e_i\}$ y $\{f_i\}$ para $\text{Im}(p)$ e $\text{Im}(q)$ respectivamente. Definimos $U : \text{Im}(p) \rightarrow \text{Im}(q)$ por $U(e_i) = f_i \forall i$ y consideramos el operador $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dado por

$$L(x) = \begin{cases} U(x) & x \in \text{Im}(p) \\ 0 & x \in \text{Im}(1-p) \end{cases}$$

Entonces $q = LL^* \sim L^*L = p$. Recíprocamente si $r, s \in M_n(\mathbb{C})$ son proyecciones con $r \sim s$ es evidente que $\text{Tr}(r) = \text{Tr}(s)$.

De todo esto resulta que

$$K_0(\text{Tr}) : K_0(M_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [p]_0 - [q]_0 \mapsto \text{Tr}(p) - \text{Tr}(q)$$

es un monomorfismo. Más aún, es suprayectivo pues $1 = K_0(\text{Tr})([E^{11}]_0)$ donde E^{11} es una proyección en $M_n(\mathbb{C})$ con rango uno. Por tanto $K_0(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.24. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Para cualesquiera dos proyecciones $p, q \in B(H)$, $p \sim q$ si y solo si $\dim(p(H)) = \dim(q(H))$. En efecto, suponemos que existe $v \in B(H)$ tal que $p = v^*v$ y $q = vv^*$, entonces $v^* : q(H) \rightarrow p(H)$ es un isomorfismo isométrico, así $\dim(p(H)) = \dim(q(H))$. Para el recíproco se puede proceder como en el ejemplo anterior.

En conclusión la función

$$\mathcal{D}(B(H)) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, \quad [p]_{\mathcal{D}} \mapsto \dim(p(H))$$

es un isomorfismo de semigrupos y por lo tanto $K_0(B(H)) \cong \{0\}$.

Ejemplo 2.25. $K_0(C(X)) \cong \mathbb{Z}$ cuando X es un espacio Hausdorff, compacto y contraíble. En efecto, como X es contraíble existe $x_0 \in X$ tal que $X \simeq \{x_0\}$ de aquí que $C(X) \simeq C(\{x_0\}) \cong \mathbb{C}$, en consecuencia $K_0(C(X)) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

2.2. El funtor K_0

Como lo muestra [38, Ejemplo 3.3.9], el funtor K_{00} no es exacto en medio, de modo que perdemos mucha información sobre la K -teoría de un álgebra C^* sin identidad con la Definición 2.13. Por eso optamos por una construcción alternativa que extienda el concepto a la categoría de álgebras C^* sin identidad y resuelva este problema.

Definición 2.26. *Sea A un álgebra C^* sin identidad. Definimos $K_0(A) := \ker(K_0(\pi))$ donde $\pi : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ está dado por $\pi(x, \alpha) = \alpha$.*

Observación 2.27. *Si A es un álgebra C^* con identidad tenemos una S.E.C.*

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

$\longleftarrow \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{K_0(\lambda)}$

luego $K_0(A) \cong \text{Im}(K_0(\iota)) = \ker(K_0(\pi))$.

Definición 2.28. *Sea $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorfismo C^* y sea $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ el homomorfismo C^* definido por $\tilde{\varphi}(x, \alpha) = (\varphi(x), \alpha)$. El diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\iota_A} & \tilde{A} & \xrightarrow{\pi_A} & \mathbb{C} \\ \varphi \downarrow & & \tilde{\varphi} \downarrow & & \parallel \\ B & \xrightarrow{\iota_B} & \tilde{B} & \xrightarrow{\pi_B} & \mathbb{C} \end{array}$$

induce por functorialidad de K_0 para álgebras C^* con identidad el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \longrightarrow & K_0(\tilde{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi_A)} & K_0(\mathbb{C}) \\ K_0(\varphi) \downarrow & & K_0(\tilde{\varphi}) \downarrow & & \parallel \\ K_0(B) & \longrightarrow & K_0(\tilde{B}) & \xrightarrow{K_0(\pi_B)} & K_0(\mathbb{C}) \end{array}$$

Definimos $K_0(\varphi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ como el único homomorfismo de grupos que hace el diagrama conmutativo.

En analogía con la Proposición 2.17, la siguiente proposición muestra que K_0 es un funtor covariante de la categoría de álgebras C^* a la categoría de grupos abelianos.

Proposición 2.29 ([38], Proposition 4.1.3). *Sean A, B y C álgebras C^* .*

1. $K_0(id_A) = id_{K_0(A)}$.
2. Si $\varphi : A \rightarrow B$ y $\psi : B \rightarrow C$ son homomorfismos C^* , entonces $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.
3. $K_0(\{0\}) = \{0\}$.

Proposición 2.30 ([38], Proposition 4.1.4). *Sean A y B álgebras C^* .*

1. Si $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ son homomorfismos C^* homotópicos, entonces $K_0(\varphi) = K_0(\psi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$.
2. Si $A \simeq B$ entonces $K_0(A) \cong K_0(B)$.

La Proposición 2.32 da una descripción práctica de cómo lucen los elementos en $K_0(A)$.

Definición 2.31. *Definimos el mapeo escalar $s : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ por $s(a, \alpha) = (0, \alpha)$ y denotamos por $s_n : M_n(\tilde{A}) \rightarrow M_n(\tilde{A})$ a la función dada por $s_n((a_{ij})_{i,j}) = (s(a_{ij}))_{i,j}$. Omitiremos el subíndice y escribiremos s en lugar de s_n .*

Proposición 2.32 ([38], Proposition 4.2.2). *Para toda álgebra C^* A sin identidad se tiene*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})\}.$$

Además si $\varphi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo C^* , entonces

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\tilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\tilde{\varphi}(p))]_0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A}).$$

Proposición 2.33 ([38], Proposition 4.3.2). *Toda S.E.C. de álgebras C^**

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

induce una sucesión exacta de grupos abelianos

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B) \tag{2.4}$$

Más aún, si (2.3) se escinde entonces (2.4) también se escinde.

Ejemplo 2.34. *La sucesión exacta corta (2.1) da lugar a la S.E.C.*

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

\longleftarrow
 $K_0(\lambda)$

$\therefore K_0(\tilde{A}) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$ para toda álgebra C^* A .

Proposición 2.35 ([38], Proposition 4.3.4). *Para todo par de álgebras C^* A y B , tenemos*

$$K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B).$$

Ejemplo 2.36. *Consideremos la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow C_0((0, 1)) \xrightarrow{\iota} C([0, 1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0 \quad (2.5)$$

donde $\psi(f) = (f(0), f(1))$.

Afirmamos que (2.5) no se escinde. En efecto, suponemos que $\psi \circ \lambda = id_{\mathbb{C}^2}$ para algún homomorfismo C^* $\lambda : \mathbb{C}^2 \rightarrow C([0, 1])$, entonces $\lambda \circ \psi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ es un homomorfismo C^* , por lo cual existe una función continua $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f \circ \varphi = \lambda(\psi(f)) = \lambda(f(0), f(1))$ para toda $f \in C([0, 1])$ (ver [3, II.2.2.5]), en particular $\varphi = \lambda(0, 1) = \varphi^2$. Por otra parte

$$(f(\varphi(0)), f(\varphi(1))) = \psi(f \circ \varphi) = \psi(\lambda(f(0), f(1))) = (f(0), f(1))$$

para toda $f \in C([0, 1])$, en particular $(\varphi(0), \varphi(1)) = (0, 1)$. Por tanto $\varphi([0, 1]) = \{0, 1\}$ lo cual es absurdo porque φ es continua.

Notemos que $K_0(\psi)$ no puede ser suprayectivo porque $\mathbb{Z} \cong K_0(C([0, 1]))$ ($[0, 1]$ es Hausdorff, compacto y contraíble) y $K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \cong K_0(\mathbb{C}) \oplus K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}^2$.

2.3. Límites inductivos de álgebras C^*

En esta sección definimos límites inductivos de álgebras C^* y de grupos. El resultado principal dice que formar límites inductivos conmuta con el funtor K_0 .

Definición 2.37. *Sea Ω un conjunto dirigido. Un sistema inductivo en una categoría \mathcal{C} , es una pareja ordenada $((A_i)_{i \in \Omega}, (\phi_{ji})_{i \leq j})$, abreviada $\{A_i, \phi_{ji}\}$, donde $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ son objetos en \mathcal{C} , y $\{\phi_{ji} : A_i \rightarrow A_j\}_{i \leq j}$ son morfismos con $\phi_{ii} = id_{A_i}$ y $\phi_{ki} = \phi_{kj} \circ \phi_{ji}$ para $i \leq j \leq k$.*

Dado un sistema inductivo $\{A_i, \phi_{ij}\}$ de álgebras C^* , consideramos el conjunto

$$A_\infty = \left\{ a = (a_i)_{i \in \Omega} \in \prod_{i \in \Omega} A_i \mid \exists i_0 \in \Omega \text{ tal que } a_k = \phi_{ki_0}(a_{i_0}) \forall k \geq i_0 \right\}.$$

A_∞ es un álgebra con las operaciones componente a componente. Observemos que $\|a_k\| = \|\phi_{kj}(a_j)\| \leq \|a_j\|$ si $i_0 \leq j \leq k$, así $\{\|a_i\|\}_{i \in \Omega}$ es eventualmente decreciente y por tanto converge. La función $p(a) = \lim_i \|a_i\|$ para todo $a = (a_i)_{i \in \Omega} \in A_\infty$, es una seminorma C^* sobre A_∞ , el conjunto $N := p^{-1}(0)$ es un ideal autoadjunto de A_∞ y A_∞/N es un álgebra- $*$.

Definición 2.38. Sea $\{A_i, \phi_{ji}\}$ un sistema inductivo de álgebras C^* . El límite inductivo (a veces llamado límite directo) $\varinjlim (A_i, \phi_{ji})$ o solo $\varinjlim A_i$ si los ϕ_{ji} son entendidos, es la completación de A_∞/N con respecto a la norma $\|a + N\| = p(a)$.

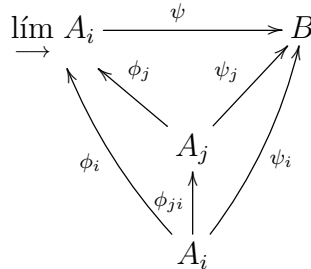
Teorema 2.39. Sea $\{A_i, \phi_{ji}\}$ un sistema inductivo de álgebras C^* .

1. Para todo $i \in \Omega$, la función

$$\phi_i : A_i \longrightarrow \varinjlim A_i \\ x \longmapsto (a_k)_{k \in \Omega} + N, \quad \text{donde } a_k = \begin{cases} 0, & k \not\geq i, \\ \phi_{ki}(x), & k \geq i, \end{cases}$$

es un homomorfismo C^* tal que $\phi_j \circ \phi_{ji} = \phi_i$ cuando $i \leq j$.

2. Sea B un álgebra C^* y $\psi_i : A_i \rightarrow B$ un homomorfismo C^* tal que $\psi_j \circ \phi_{ji} = \psi_i$ cuando $i \leq j$, entonces existe un único homomorfismo C^* $\psi : \varinjlim A_i \rightarrow B$ tal que $\psi \circ \phi_i = \psi_i$ para todo $i \in \Omega$.



Además se satisface lo siguiente:

a) $\varinjlim A_i = \overline{\bigcup_{i \in \Omega} \phi_i(A_i)}$;

- b) ψ es inyectivo si y solo si $\text{Ker}(\psi_i) \subseteq \text{Ker}(\phi_i)$ para todo $i \in \Omega$.
 c) ψ es suprayectivo si y solo si $B = \overline{\bigcup_{i \in \Omega} \psi_i(A_i)}$.

Observación 2.40. Supongamos que $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de objetos en una categoría \mathbf{C} y $\{\varphi_n : A_n \rightarrow A_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de morfismos en \mathbf{C} . Para $m > n$ consideremos la composición de morfismos

$$\varphi_{mn} := \varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \cdots \circ \varphi_n : A_n \rightarrow A_m.$$

Así la colección $\{A_n, \varphi_{mn}\}$ es un sistema inductivo en \mathbf{C} .

Ejemplo 2.41. Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos el homomorfismo C^*

$$\varphi_n : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{C}), \quad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El límite directo del sistema inductivo $\{(M_n(\mathbb{C}), \varphi_{mn}) : m, n \in \mathbb{N}, n < m\}$ es isomorfo a \mathcal{K} , el álgebra de operadores compactos en un espacio de Hilbert \mathcal{H} separable de dimensión infinita. En efecto, sea $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal en \mathcal{H} , para $i, j \in \mathbb{N}$ sea E_{ij} el operador dado por $E_{ij}(x) = \langle x, e_j \rangle e_i$ y sea $F_n = \overline{\sum_{j=1}^n E_{jj}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n B(\mathcal{H}) F_n = \text{span}\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ y $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^\infty F_n B(\mathcal{H}) F_n$. Si $\iota_n : M_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{K}$ es el encaje obvio, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi_{mn}} & M_m(\mathbb{C}) \\ & \searrow \iota_n & \downarrow \iota_m \\ & & \mathcal{K} \end{array}$$

El homomorfismo inducido $\lim_{\rightarrow} M_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{K}$ es inyectivo porque cada ι_n es inyectivo. También es suprayectivo pues $\bigcup_{n=1}^\infty \iota_n(M_n(\mathbb{C}))$ es denso en \mathcal{K} .

Definición 2.42. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión de álgebras C^* con identidad. Consideremos el conjunto dirigido $\Omega := \{\mathcal{G} \subset \mathbb{Z}^+ : |\mathcal{G}| < \infty\}$. Para todo conjunto finito $\mathcal{G} = \{i_1, \dots, i_n\} \in \Omega$, definimos el álgebra C^*

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{G}} := A_{i_1} \otimes_{\min} \cdots \otimes_{\min} A_{i_n}.$$

Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathfrak{A}_{\mathcal{G}} \cong \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \otimes_{\min} \mathfrak{A}_{\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}}$. Hay una inclusión natural $\phi_{\mathcal{G}\mathcal{F}} : \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathfrak{A}_{\mathcal{G}}$ dada por $x \mapsto x \otimes 1_{\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}}$. Así la colección $\{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}, \phi_{\mathcal{G}\mathcal{F}}\}$ forma un sistema inductivo. El límite $\lim_{\rightarrow} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ denotado por $\bigotimes_{n \in \mathbb{Z}}^{\min} A_n$ se conoce como el producto tensorial infinito.

Ahora introducimos límites inductivos de grupos.

Definición 2.43. Sea $\{G_i, \varphi_{ij}\}$ un sistema inductivo de grupos, consideremos los conjuntos

$$G_\infty := \left\{ g = (g_i)_{i \in \Omega} \in \prod_{i \in \Omega} G_i \mid \exists i_0 \in \Omega \text{ tal que } g_k = \varphi_{ki_0}(g_{i_0}) \forall k \geq i_0 \right\},$$

$$\bigoplus_{i \in \Omega} G_i := \left\{ (g_i)_{i \in \Omega} \in \prod_{i \in \Omega} G_i \mid \exists i_0 \in \Omega \text{ tal que } g_k = 1 \forall k \geq i_0 \right\}.$$

G_∞ es un grupo con las operaciones componente a componente y $\bigoplus_i G_i$ es un subgrupo normal de G_∞ . Definimos el límite inductivo $\varinjlim G_i := G_\infty / \bigoplus_i G_i$.

Proposición 2.44. Sea $\{G_i, \varphi_{ji}\}$ un sistema inductivo de grupos.

1. Para todo $i \in \Omega$ existe un homomorfismo $\varphi_i : G_i \rightarrow \varinjlim G_i$ tal que $\varphi_j \circ \varphi_{ji} = \varphi_i$ cuando $i \leq j$.
2. Sea H un grupo y $\psi_i : G_i \rightarrow H$ un homomorfismo tal que $\psi_j \circ \varphi_{ji} = \psi_i$ cuando $i \leq j$, entonces existe un único homomorfismo $\psi : \varinjlim G_i \rightarrow H$ tal que $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$ para todo $i \in \Omega$.

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim G_i & \xrightarrow{\psi} & H \\
 \varphi_j \swarrow & & \nearrow \psi_j \\
 & G_j & \\
 \varphi_i \swarrow & \nearrow \varphi_{ji} & \nearrow \psi_j \\
 & G_i &
 \end{array}$$

Más aún, se cumple lo siguiente:

- a) $\varinjlim G_i = \bigcup_{i \in \Omega} \varphi_i(G_i)$.
- b) ψ es inyectivo si y solo si $\text{Ker}(\psi_i) \subseteq \text{Ker}(\varphi_i)$ para todo $i \in \Omega$.
- c) ψ es suprayectivo si y solo si $H = \bigcup_{i \in \Omega} \psi_i(G_i)$.

Teorema 2.45 (Continuidad de K_0) ([40], Proposition 6.2.9). Si A es el límite directo del sistema inductivo de álgebras C^* $\{A_i, \phi_{ji}\}$, entonces $\{K_0(A_i), K_0(\phi_{ji})\}$ es un sistema inductivo de grupos abelianos y

$$K_0(A) = K_0\left(\varinjlim A_i\right) \cong \varinjlim K_0(A_i).$$

Ejemplo 2.46. Por el Ejemplo 2.41 el sistema inductivo $\{M_n(\mathbb{C}), \varphi_{mn}\}$ donde $\varphi_n : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{C})$ definido por $\varphi_n(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tiene límite inductivo isomorfo a \mathcal{K} , luego

$$K_0(\mathcal{K}) \cong K_0\left(\varinjlim M_n(\mathbb{C})\right) \cong \varinjlim K_0(M_n(\mathbb{C}))$$

Por otro lado, tenemos un diagrama conmutativo para todo $m > n$:

$$\begin{array}{ccc} K_0(M_n(\mathbb{C})) & \xrightarrow{K_0(\varphi_{m,n})} & K_0(M_m(\mathbb{C})) \\ & \searrow K_0(\text{Tr}) & \swarrow K_0(\text{Tr}) \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Así existe un homomorfismo $\psi : \varinjlim K_0(M_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}$ el cual es biyectivo porque $\text{Ker}(K_0(\text{Tr})) = \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_0(\text{Tr})(K_0(M_n(\mathbb{C})))$. Por tanto $K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$.

2.4. El funtor K_1

En esta sección construimos el otro grupo $K_1(A)$, a partir de los elementos unitarios de $M_n(A)$. Vamos a ver que K_1 se parece en una manera funtorial a K_0 . En particular K_1 respeta sucesiones exactas y es insensible a deformaciones continuas.

Definición 2.47. Sea A un álgebra C^* con identidad, ponemos

$$\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(M_n(A)), \quad \mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(A)$$

Definimos una operación binaria en $\mathcal{U}_\infty(A)$ por

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{n+m}(A), \quad u \in \mathcal{U}_n(A), v \in \mathcal{U}_m(A).$$

Definimos una relación \sim_1 en $\mathcal{U}_\infty(A)$. Para $u \in \mathcal{U}_n(A)$ y $v \in \mathcal{U}_m(A)$, $u \sim_1 v$ si existe un número natural $k \geq \max\{m, n\}$ tal que $u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}$ en $\mathcal{U}_k(A)$ (con la convención de que $w \oplus 1_0 = w \forall w \in \mathcal{U}_\infty$).

Lema 2.48 ([38], Lemma 8.1.2). Sea A un álgebra C^* con identidad. Entonces

1. \sim_1 es una relación de equivalencia en $\mathcal{U}_\infty(A)$,
2. $u \sim_1 u \oplus 1_n \forall u \in \mathcal{U}_\infty(A)$ y $n \in \mathbb{N}$,
3. $u \oplus v \sim_1 v \oplus u \forall u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$,
4. si $u, u', v, v' \in \mathcal{U}_\infty(A)$, $u \sim_1 u'$ y $v \sim_1 v'$ entonces $u \oplus v \sim_1 u' \oplus v'$,
5. si $u, v \in \mathcal{U}_n(A)$ para algún n , entonces $uv \sim_1 vu \sim_1 u \oplus v$,
6. $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$.

Definición 2.49 (El grupo K_1). Para toda álgebra C^* A definimos

$$K_1(A) := \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) / \sim_1$$

Denotamos por $[u]_1 \in K_1(A)$ la clase de equivalencia conteniendo a $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$. Definimos una operación binaria $+$ en $K_1(A)$ por $[u]_1 + [v]_1 := [u \oplus v]_1$.

El Lema 2.48 muestra que $(K_1(A), +)$ es un grupo abeliano con elemento identidad $[1]_1 (= [1_n]_1)$ y $-[u]_1 = [u^*]_1$ para todo $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$.

Sería natural definir $K_1(A)$ de un álgebra C^* con identidad por $\mathcal{U}_\infty(A) / \sim_1$ y, en efecto, esto es consistente con la Definición 2.49.

Proposición 2.50 ([38], Proposition 8.1.6). Sea A un álgebra C^* con identidad. Entonces $K_1(A) \cong \mathcal{U}_\infty(A) / \sim_1$. Por tanto $K_1(A) \cong K_1(\tilde{A})$ para toda álgebra C^* A .

Proposición 2.51 (Propiedad universal de K_1) ([38], Proposition 8.1.5). Sea A un álgebra C^* , sea G un grupo abeliano y $\nu : \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \rightarrow G$ una función con las siguientes propiedades:

1. $\nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v)$,
2. $\nu(1) = 0$,
3. si $u, v \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$ y $u \sim_h v$, entonces $\nu(u) = \nu(v)$.

Entonces existe un único homomorfismo de grupos $\alpha : K_1(A) \rightarrow G$ haciendo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) & & \\ \downarrow [\cdot]_1 & \searrow \nu & \\ K_1(A) & \xrightarrow{\alpha} & G \end{array}$$

conmutativo.

Definición 2.52. Sean A y B álgebras C^* y $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorfismo C^* . Definimos $\nu : \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \rightarrow K_1(B)$ por $\nu(u) = [\tilde{\varphi}(u)]_1$ para todo $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$. Es sencillo verificar que ν satisface 1., 2. y 3. en la Proposición 2.51, y por tanto se factoriza a través de un único homomorfismo de grupos $K_1(\varphi) : K_1(A) \rightarrow K_1(B)$ con la propiedad $K_1(\varphi)([u]_1) = [\tilde{\varphi}(u)]_1$.

Si A y B son álgebras C^* con identidad y $\varphi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo C^* , entonces $K_1(\varphi)([u]_1) = [\varphi(u)]_1$.

Ejemplo 2.53. $K_1(M_n(\mathbb{C})) = \{0\}$. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathcal{U}_k(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathcal{U}(M_{kn}(\mathbb{C}))$. Definimos $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(M_{kn}(\mathbb{C}))$ por $\gamma(t) = e^{t \text{Log}(U)}$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces $I_{kn} = \gamma(0) \sim_h \gamma(1) = e^{\text{Log}(U)} = U$. Esto muestra que $\mathcal{U}_\infty(M_n(\mathbb{C})) / \sim_1 = \{0\}$.

Ejemplo 2.54. Más generalmente $K_1(B(H)) = \{0\}$ para todo espacio de Hilbert H de dimensión infinita (ver [38, Example 8.1.8]).

La proposición de abajo muestra que K_1 es un funtor covariante que preserva objetos cero y es invariante homotópico.

Proposición 2.55 ([38], Proposition 8.2.2). Sean A y B álgebras C^* . Entonces

1. $K_1(\text{id}_A) = \text{id}_{K_1(A)}$.
2. $K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi)$.
3. $K_1(\{0\}) = \{0\}$.
4. Si $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ son homomorfismos C^* homotópicos, entonces $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$.
5. Si $A \simeq B$, entonces $K_1(A) \cong K_1(B)$.

Proposición 2.56 ([38], Proposition 8.2.4). Sea

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \quad (2.6)$$

una sucesión exacta corta de álgebras C^* . Entonces la sucesión

$$K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B) \quad (2.7)$$

es exacta, esto es, $\text{Im}(K_1(\varphi)) = \text{Ker}(K_1(\psi))$. Además si (2.6) se escinde, entonces (2.7) también se escinde.

Proposición 2.57. Sean A y B álgebras C^* . Entonces

$$K_1(A \oplus B) \cong K_1(A) \oplus K_1(B).$$

Teorema 2.58 (Continuidad de K_1 ([40], Proposition 7.1.7)). Si A es el límite directo del sistema inductivo $\{A_i, \phi_{ji}\}$ de álgebras C^* , entonces $\{K_1(A_i), K_1(\phi_{ji})\}$ es un sistema inductivo de grupos abelianos y

$$K_1(A) = K_1\left(\varinjlim A_i\right) \cong \varinjlim K_1(A_i).$$

Ejemplo 2.59. Por el Ejemplo 2.53 tenemos

$$K_1(\mathcal{K}) \cong K_1\left(\varinjlim M_n(\mathbb{C})\right) \cong \varinjlim K_1(M_n(\mathbb{C})) = \{0\}$$

2.5. Funtores K_n

En esta sección definimos los funtores K_n , para todo $n \geq 2$. Enunciamos el teorema de periodicidad de Bott el cual nos dice que $K_n \cong K_{n+2}$ y estudiamos algunas de sus aplicaciones.

Definición 2.60. La suspensión, SA , de un álgebra C^* A está definida por

$$SA = \{f \in C([0, 1], A) \mid f(0) = f(1) = 0\} = C_0((0, 1), A)$$

A todo homomorfismo C^* $\varphi : A \rightarrow B$ entre álgebras C^* A y B , le asociamos un homomorfismo C^* $S\varphi : SA \rightarrow SB$ dado por $S\varphi(f) = \varphi \circ f$. De esta manera S se vuelve un functor covariante que es exacto (ver [38, Proposition 10.1.2]).

Teorema 2.61 ([38], Theorem 10.1.3). Los grupos $K_1(A)$ y $K_0(SA)$ son isomorfos para toda álgebra C^* A .

El Teorema 2.61 por supuesto puede ser tomado como una definición de K_1 cuando K_0 es conocido. Motivados por esto hacemos la siguiente

Definición 2.62. Para todo $n \geq 2$ definimos inductivamente $K_n(A) := K_{n-1}(SA)$ y para todo homomorfismo C^* $\varphi : A \rightarrow B$ entre álgebras C^* A y B , definimos $K_n(\varphi) = K_{n-1}(S\varphi) = K_1(S^{n-1}\varphi) : K_n(A) \rightarrow K_n(B)$.

Observación 2.63. K_n es un functor covariante al ser la composición de dos funtores covariantes.

Proposición 2.64 (La sucesión exacta larga en \mathbf{K} -teoría ([38], Proposition 10.2.4)). *Para toda sucesión exacta corta de álgebras C^**

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

existe una sucesión de homomorfismos $\{\delta_n : K_n(B) \longrightarrow K_{n-1}(I)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que la sucesión

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{K_{n+1}(\psi)} K_{n+1}(B) \xrightarrow{\delta_{n+1}} K_n(I) \xrightarrow{K_n(\varphi)} K_n(A) \xrightarrow{K_n(\psi)} K_n(B) \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1}(I) \xrightarrow{K_{n-1}(\varphi)} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\delta_1} K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B) \end{aligned}$$

es exacta.

El homomorfismo δ_1 de la Proposición 2.64 es de particular importancia y se conoce como el mapeo índice. En el caso de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0$$

con H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $\pi : B(H) \longrightarrow \mathcal{Q}(H)$ el mapeo cociente, δ_1 generaliza el índice de Fredholm:

Proposición 2.65 ([38], Proposition 9.4.2). *Para todo operador de Fredholm T en H ,*

$$\dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\text{Ker}(T^*)) = (K_0(\text{Dim}) \circ \delta_1)([\pi(T)]_1),$$

donde $K_0(\text{Dim}) : K_0(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ está definido por $K_0(\text{Dim})([E]_0) = \dim(E(H))$.

El siguiente teorema conocido como periodicidad de Bott, dice que en realidad hay solamente dos K -funtores para álgebras complejas, a diferencia del fenómeno que sucede para álgebras reales donde existe un isomorfismo de K_n con K_{n+8} .

Teorema 2.66 (Periodicidad de Bott ([38], Theorem 11.1.2)). *Para toda álgebra C^* A , los grupos $K_0(A)$ y $K_1(SA)$ son isomorfos.*

Corolario 2.67. *Para toda álgebra C^* A y $n \geq 0$, $K_{n+2}(A) \cong K_n(A)$.*

Demostración. Aplicamos inducción. El caso $n = 0$ es precisamente el contenido del Teorema 2.66. Supongamos que el resultado se cumple para algún $n > 0$, entonces

$$K_{n+2}(A) = K_{n+1}(SA) \cong K_{n-1}(SA) = K_n(A)$$

□

Ejemplo 2.68. *Notemos que $SA \cong C_0(\mathbb{R}, A)$. También $C_0(X, C_0(Y)) \cong C_0(X \times Y)$, luego $S^n\mathbb{C} \cong C_0(\mathbb{R}^n)$ y por tanto*

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong K_0(S^n\mathbb{C}) \cong K_n(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, & n \text{ par}, \\ K_1(\mathbb{C}) = \{0\}, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Similarmente tenemos

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong K_{n+1}(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, & n \text{ impar}, \\ K_1(\mathbb{C}) = \{0\}, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Ejemplo 2.69. *Como $\widetilde{C_0(\mathbb{R}^n)} \cong C(S^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se sigue que*

$$K_0(C(S^n)) \cong K_0(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^n)}) \cong K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \oplus \mathbb{Z} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n \text{ par}, \\ \mathbb{Z}, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

$$K_1(C(S^n)) \cong K_1(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^n)}) \cong K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \text{ impar}, \\ \{0\}, & n \text{ par}. \end{cases}$$

2.6. La sucesión exacta de seis términos

Combinando la periodicidad de Bott con la sucesión exacta larga en K-teoría, obtenemos la sucesión exacta de seis términos la cual será la culminación de esta introducción de K-teoría para álgebras C^* .

Teorema 2.70 (La sucesión exacta de seis términos ([38], Theorem 12.1.2)).
*Para toda sucesión exacta corta de álgebras C^**

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

existe un homomorfismo $\delta_0 : K_0(B) \longrightarrow K_1(I)$ tal que la siguiente sucesión de seis términos

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(B) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\varphi)} & K_1(I) \end{array} \quad (2.8)$$

es exacta.

Además δ_0 y δ_1 son transformaciones naturales en el siguiente sentido. Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\psi} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\varphi'} & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con renglones exactos de álgebras C^* , los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} K_0(B) \xrightarrow{\delta_0} K_1(I) & & K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_0(I) \\ K_0(\beta) \downarrow & & \downarrow K_1(\beta) \\ K_0(B') \xrightarrow{\delta'_0} K_1(I') & & K_1(B') \xrightarrow{\delta'_1} K_0(I') \\ & & \downarrow K_0(\gamma) \end{array}$$

Ejemplo 2.71. Dado un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita H , tenemos una S.E.C.

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0$$

la cual da lugar a la sucesión exacta de seis términos

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(B(H)) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathcal{Q}(H)) \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(B(H)) & \xleftarrow{K_1(\iota)} & K_1(\mathcal{K}) \end{array}$$

Como $K_0(B(H)) = K_1(B(H)) = 0$ se sigue que δ_0 y δ_1 son isomorfismos y consecuentemente $K_0(\mathcal{Q}(H)) \cong K_1(\mathcal{K}) = 0$ y $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$.

Abajo señalamos muy brevemente cómo puede ser calculada la K-teoría de álgebras C^* involucrando productos cruzados por \mathbb{Z} . La herramienta es la así llamada sucesión PV, cuya demostración puede ser encontrada en [37].

La K-teoría para productos cruzados por \mathbb{Z} : La **sucesión PV** (Pimsner-Voiculescu) establece para toda álgebra C^* con identidad A y todo automorfismo α de A , una sucesión exacta de seis términos:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{id_* - \alpha_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(A) & \xleftarrow{id_* - \alpha_*} & K_1(A) \end{array}$$

Ejemplo 2.72. Sea $\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ y \mathcal{A}_θ el álgebra de rotación. El Ejemplo 1.61 muestra que $\mathcal{A}_\theta \cong C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ donde $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(C(\mathbb{S}^1))$ es el homomorfismo dado por $\alpha_n(f)(z) = f(-n \cdot z) = f(e^{-2\pi i n \theta} z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$ y $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que si $R_\theta(z) = e^{-2\pi i \theta} z$, entonces $\alpha_n(f) = f \circ R_\theta^n = C(R_\theta^n)(f) = C(R_\theta)^n(f)$ para todo $f \in C(\mathbb{S}^1)$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Ahora sea $f \in C(\mathbb{S}^1)$, definimos

$$\begin{aligned} F(f) : [0, 1] &\longrightarrow C(\mathbb{S}^1) \\ t &\longmapsto (z \mapsto f(e^{-2\pi i t \theta} z)) \end{aligned}$$

entonces $F : C(\mathbb{S}^1) \rightarrow C([0, 1], C(\mathbb{S}^1))$ es un homomorfismo C^* tal que $F(f)(0) = f$ y $F(f)(1) = f \circ R_\theta = \alpha_1(f)$ para toda $f \in C(\mathbb{S}^1)$. Por tanto $K_j(\alpha_1) = K_j(\text{id}) = \text{id}_{K_j(C(\mathbb{S}^1))}$ para $j = 0, 1$.

Por la sucesión PV tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(\mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{\text{cero}} & K_0(C(\mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathcal{A}_\theta) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\mathcal{A}_\theta) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C(\mathbb{S}^1)) & \xleftarrow{\text{cero}} & K_1(C(\mathbb{S}^1)) \end{array}$$

Así

$$0 \longrightarrow K_0(C(\mathbb{S}^1)) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(\mathcal{A}_\theta) \longrightarrow K_1(C(\mathbb{S}^1)) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow K_1(C(\mathbb{S}^1)) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow K_1(\mathcal{A}_\theta) \longrightarrow K_0(C(\mathbb{S}^1)) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

En consecuencia $K_0(\mathcal{A}_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ y $K_1(\mathcal{A}_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$.

Capítulo 3

Álgebras de Toeplitz de grupos gráficos

El producto gráfico de una colección de grupos generaliza su producto directo y producto libre. En este capítulo mostramos que el producto gráfico de cuasi-retículas ordenadas es una cuasi-retícula ordenada y cuando los grupos subyacentes son promediabiles, entonces su producto gráfico satisface la condición de promediabilidad de Nica. Las álgebras de Toeplitz asociadas tienen una propiedad universal y sus representaciones son fieles si las isometrías generadoras satisfacen una condición apropiada. Cuando es aplicado a grupos de Artin de ángulo recto esto produce un teorema de unicidad para las álgebras C^* generadas por una colección de isometrías tales que cualesquiera dos de ellas conmutan- $*$ ó bien tienen rangos ortogonales.

3.1. Producto gráfico de grupos

Los productos gráficos de grupos fueron definidos en la tesis de Green [25] y han sido estudiados de manera subsecuente por varios otros autores. Denotamos por Γ a un grafo (no orientado) con conjunto de vértices Λ y conjunto de aristas $E(\Gamma) \subset \{(I, J) : I, J \in \Lambda \text{ y } I \neq J\}$ i.e. ninguna arista une un vértice consigo mismo. Decimos que los vértices I y J son adyacentes en Γ si hay una arista $(I, J) \in E(\Gamma)$.

Definición 3.1. *Sea Γ un grafo con conjunto de vértices Λ . Dada una familia $\{G_I\}_{I \in \Lambda}$ de grupos, definimos el producto gráfico $\Gamma_{I \in \Lambda} G_I$ como el cociente del producto libre $*_{\Lambda} G_I$ por el subgrupo normal generado por los elementos $x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \forall x_1 \in G_I, x_2 \in G_J$, donde I y J son adyacentes en Γ . Cuando todos los G_I son isomorfos a \mathbb{Z} , el producto gráfico se conoce como grupo gráfico o grupo de Artin de ángulo recto.*

Ejemplo 3.2. Como casos extremos tenemos a un grafo que tiene todos sus vértices aislados y a un grafo cuyos vértices están todos conectados entre sí por una arista, ver Figura 3.1. El producto gráfico de grupos es el producto libre y el producto directo, respectivamente.

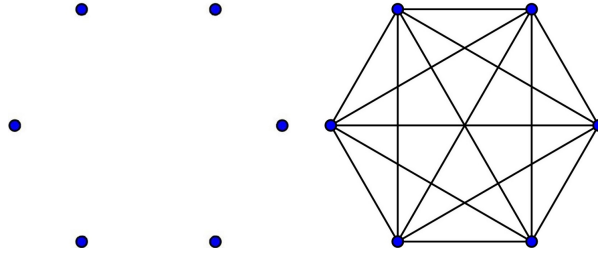


Figura 3.1: Grafo con todos sus vértices aislados a la izquierda y grafo completo a la derecha.

Durante el resto de la sección supondremos dado un grafo Γ como antes y grupos $\{G_I\}_{I \in \Lambda}$. Denotamos por $G = \Gamma_{I \in \Lambda} G_I$ al producto gráfico.

Como conjunto de generadores para G podemos tomar al conjunto

$$\mathbb{G} = \coprod_{I \in \Lambda} G_I \setminus \{1\}.$$

Asimismo implementaremos las siguientes convenciones y notaciones:

- Dado $x \in \mathbb{G}$ escribimos $I(x)$ para el único vértice I tal que $x \in G_I$. Decimos que x pertenece a $I(x)$.
- Por una *expresión* X para un elemento $x \in G$ nos referimos a una palabra en los generadores \mathbb{G} representando x .
- Dada una expresión $X = x_1 x_2 \cdots x_l$, los elementos x_i son llamados sílabas de X y el número l es llamado la longitud de X , escrito $l = \ell(X)$.
- Diremos que $I \in \Lambda$ es un vértice de X si $I = I(x_i)$ para una sílaba x_i de X .

Dada una expresión $X = x_1 x_2 \cdots x_l$ para $x \in G$, las relaciones del producto gráfico permiten modificar a X para obtener una expresión diferente de x al reemplazar una subexpresión $x_i x_{i+1}$ con $x_{i+1} x_i$ si $I(x_i)$ es adyacente a $I(x_{i+1})$. Tal sustitución se conoce como *intercambio*, y decimos que dos expresiones son *equivalentes por intercambios*

si una puede ser obtenida de la otra vía una sucesión finita de intercambios. Si la expresión contiene una subexpresión de la forma $x_i x_{i+1}$ con $I(x_i) = I(x_{i+1})$, entonces podemos dar una expresión más corta para x por reducción, esto es, al eliminar $x_i x_{i+1}$ en el caso que $x_{i+1} = x_i^{-1}$ o de lo contrario al reemplazar las dos sílabas x_i, x_{i+1} por su producto en $G_{I(x_i)}$.

Decimos que una expresión es *reducida* si no es equivalente por intercambios a alguna expresión que admita una reducción.

Lema 3.3 ([10], Lemma 1). *Dada una expresión $X = x_1 x_2 \cdots x_l$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. X es reducida
2. para todo $i < j$ tal que $I(x_i) = I(x_j)$ existe k con $i < k < j$ tal que $I(x_k)$ no es adyacente a $I(x_i)$.

Dada una expresión $X = x_1 x_2 \cdots x_l$ para $x \in G$ fácilmente podemos producir una expresión reducida para x . Si X no satisface la condición 2 del Lema 3.3, es decir, existe $i < j$ tal que $I(x_i) = I(x_j)$ y x_i conmuta con x_k para todo $i < k < j$, entonces una sucesión obvia de intercambios permitirá que las sílabas x_i y x_j sean multiplicadas, reduciendo la longitud de X . Uno puede continuar reduciendo la longitud de esta manera hasta que la condición 2 se satisfaga.

El siguiente teorema, debido a Green [25], reduce la solución al problema de la palabra en un producto gráfico a la solución del problema de la palabra en cada uno de los grupos componentes.

Teorema 3.4 (Green [25]). *Cualesquiera dos expresiones reducidas para el mismo elemento de G son equivalentes por intercambios.*

Como consecuencia del Teorema 3.4 podemos definir la longitud $\ell(x)$ de un elemento $x \in G$ como la longitud de cualquier expresión reducida para x . Notemos que $\ell(x)$ es la longitud minimal de cualquier expresión para x . Si X es una expresión reducida para x , nos referiremos a una sílaba o a un vértice de x como una sílaba de X o un vértice de X , respectivamente.

Sea $X = x_1 x_2 \cdots x_l$ una expresión reducida, y x_i cualquier sílaba de X . Si $I(x_i)$ es adyacente a $I(x_j)$ para todo $j < i$ entonces decimos que x_i es una sílaba inicial de X , y que $I(x_i)$ es un vértice inicial de X . Escribimos $\Delta(X)$ para el conjunto de todos los vértices iniciales de X .

Los siguientes hechos son fácilmente verificados.

Lema 3.5 ([10], Lemma 3). *Sea $X = x_1 x_2 \cdots x_l$ una expresión reducida.*

(i) Si x_i es una sílaba inicial de X , entonces X es equivalente por intercambios a la expresión

$$x_i x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_l$$

(ii) Los vértices iniciales de X son adyacentes por pares.

(iii) Para todo $I \in \Delta(X)$ existe una única sílaba inicial de X perteneciendo a I . Definimos la función $\delta_X : \Delta(X) \rightarrow \mathbb{G}$ tal que $\delta_X(I)$ es igual a la sílaba inicial de X perteneciendo a I .

(iv) Si X' es otra expresión que es equivalente por intercambios a X , entonces $\Delta(X') = \Delta(X)$ y $\delta_{X'} = \delta_X$.

En virtud del Lema 3.5 y el Teorema 3.4 podemos hacer las siguientes definiciones.

Definición 3.6. Sea $x \in G$. Definimos el conjunto de vértices iniciales de x como el conjunto $\Delta(x) = \Delta(X)$ donde X es cualquier expresión reducida para x . También definimos, para todo $I \in \Lambda$, el elemento x_I como la sílaba inicial de x que pertenece a I si I es un vértice inicial de x , y 1 si no; esto es,

$$x_I := \begin{cases} \delta_X(I), & I \in \Delta(x), \\ 1, & I \notin \Delta(x). \end{cases}$$

Dada una expresión $X = x_1 x_2 \cdots x_l$ denotemos por $\text{rev}(X)$ a la expresión $x_l x_{l-1} \cdots x_1$. Esto nos permite definir el conjunto de vértices finales de $x \in G$ como el conjunto $\Delta^r(x) = \Delta(\text{rev}(X))$, donde X es cualquier expresión reducida para x . Similarmente, para todo $I \in \Lambda$, definimos el elemento

$$x_I^r := \begin{cases} \delta_{\text{rev}(X)}(I), & I \in \Delta^r(x), \\ 1, & I \notin \Delta^r(x), \end{cases}$$

donde X es cualquier expresión reducida para x .

Observación 3.7. Usando el Lema 3.5 (i) y (ii) se puede encontrar para cualquier elemento $x \in G$, una expresión reducida que comience con el producto, en cualquier orden, de los x_I para $I \in \Delta(x)$. Igualmente, uno siempre puede encontrar una expresión reducida para x que termine con el producto, en cualquier orden, de los x_I^r para $I \in \Delta^r(x)$.

3.2. Cuasi-retículas ordenadas

Sea G un grupo y P un submonoide de G tal que $P \cap P^{-1} = \{1\}$. Entonces podemos definir un orden parcial invariante por multiplicación por la izquierda en G como sigue: $x \leq y$ cuando $x^{-1}y \in P$. Notemos que $x \in P$ si y sólo si $1 \leq x$. Recíprocamente si \leq es un orden parcial invariante por la izquierda en G , definimos $P := \{x \in G \mid 1 \leq x\}$ el cual es un submonoide de G tal que $P \cap P^{-1} = \{1\}$. Decimos que (G, P) es un grupo parcialmente ordenado con cono positivo P .

Definición 3.8. *Un grupo parcialmente ordenado (G, P) es una retícula ordenada si para toda pareja de elementos $x, y \in G$ existe una mínima cota superior en común, la cual denotamos por $x \vee y$. Por invariancia izquierda, una condición equivalente es que todo elemento $x \in G$ tiene una mínima cota superior en P .*

Dado un grupo G con cono positivo P igualmente podemos definir un orden parcial invariante por multiplicación por la derecha en G : $x \leq_r y$ cuando $yx^{-1} \in P$. Denotamos por $x \wedge_r y$ a la máxima cota inferior de x y y con respecto a \leq_r . Claramente tenemos

$$x \leq_r y \iff y^{-1} \leq x^{-1} \quad y \quad x \wedge_r y = (x^{-1} \vee y^{-1})^{-1}.$$

Ejemplo 3.9. *Sea X un espacio topológico compacto y $C(X, \mathbb{R})$ el grupo aditivo de funciones continuas real valuadas. Consideramos el orden usual: $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X$. Como este orden es parcial e invariante por la izquierda, $(C(X, \mathbb{R}), P)$ es un grupo parcialmente ordenado con cono positivo $P := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f(x) \geq 0, \forall x \in X\}$. Además si $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ entonces su máximo está dado por la función continua $\frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$. Por tanto $(C(X, \mathbb{R}), P)$ es una retícula ordenada.*

Definición 3.10. *Un grupo parcialmente ordenado (G, P) es una cuasi-retícula ordenada si todo conjunto finito en G con una cota superior en G tiene una mínima cota superior (necesariamente única). Equivalentemente, cada pareja x, y de elementos de G con una cota superior en común en G tiene una mínima cota superior. Si x y y no tienen cota superior en común en G , entonces por convención $x \vee y = \infty$.*

Lema 3.11 ([10], Lema 7). *Para un grupo parcialmente ordenado (G, P) los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (i) (G, P) es una cuasi-retícula ordenada.
- (ii) Todo conjunto finito en G con una cota superior en común en P tiene una mínima cota superior en P .

- (iii) Todo elemento x de G teniendo una cota superior en P tiene una mínima cota superior en P .
- (iv) Si $x \in PP^{-1}$, entonces existe un par de elementos $a, b \in P$ con $x = ab^{-1}$ y tal que para cualesquiera $u, v \in P$ con $ab^{-1} = uv^{-1}$, se tiene $a \leq u$ y $b \leq v$. (La pareja a, b es claramente única).
- (v) Cualquier pareja $u, v \in P$ tiene una máxima cota inferior $u \wedge_r v$ con respecto al orden parcial invariante por la derecha sobre G .
- (vi) Si $x \in PP^{-1}$, entonces existe un par de elementos $a, b \in P$ con $x = ab^{-1}$ y tal que $a \wedge_r b = 1$.

Suponiendo que (i) – (vi) se cumplen, y dado $x \in PP^{-1}$, existe una única pareja $a, b \in P$ satisfaciendo (vi), siendo precisamente la pareja a, b del enunciado (iv).

Observación 3.12. Mientras los enunciados (v) y (vi) del Lema 3.11 pueden aparentar ser condiciones solamente en el monoide P , de hecho no lo son, porque uno debe tener que $w \leq_r u \wedge_r v$ no solo para toda cota inferior en común $w \in P$ sino también para toda cota inferior en común $w \in G$.

Ejemplo 3.13. Cualquier grupo totalmente ordenado es claramente una cuasi-retícula ordenada. En particular, si G es un subgrupo de \mathbb{R} y $P = G \cap [0, \infty)$, entonces (G, P) es una cuasi-retícula ordenada. De hecho cualquier grupo Arquimediano totalmente ordenado puede ser puesto en esta forma (ver [23]).

Ejemplo 3.14. Si $\{(G_j, P_j)\}_{j \in \Lambda}$ es una colección de cuasi-retículas ordenadas, entonces también lo es $(\prod_{j \in \Lambda} G_j, \prod_{j \in \Lambda} P_j)$ con el orden del producto. En efecto, sea $x = (x_j)_j \in \prod_{j \in \Lambda} G_j$, supongamos que existe $p = (p_j)_j \in \prod_{j \in \Lambda} P_j$ tal que $x \leq p$, entonces $x_i \leq p_i$ para todo $i \in \Lambda$. Como cada (G_i, P_i) es una cuasi-retícula ordenada, existe una mínima cota superior $y_i \in P_i$ para x_i . Así $(y_j)_j \in \prod_{j \in \Lambda} P_j$ es la mínima cota superior de x . Por tanto $(\prod_{j \in \Lambda} G_j, \prod_{j \in \Lambda} P_j)$ es una cuasi-retícula ordenada. En particular, si $\{G_j | 1 \leq j \leq n\}$ son subgrupos de \mathbb{R} y si ponemos $G := G_1 \times \dots \times G_n$, $P := G \cap [0, \infty)^n$, entonces (G, P) es una cuasi-retícula ordenada.

Ejemplo 3.15. Sean (G, P) y (H, R) cuasi-retículas ordenadas tales que G tiene una acción Φ por automorfismos sobre H , y tal que R es Φ -invariante, es decir $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ es homomorfismo tal que $\Phi_x(R) \subseteq R$ para todo $x \in G$. Afirmamos que $(H \rtimes_\Phi G, R \times P)$ es cuasi-retícula ordenada. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times P$, entonces $y_1 \cdot x_2 = \Phi_{y_1}(x_2) \in \Phi_{y_1}(R) \subseteq R$ luego $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1(y_1 \cdot x_2), y_1 y_2) \in R \times P$. Así $R \times P \subset H \rtimes_\Phi G$ es un monoide. Además claramente $(R \times P) \cap (R \times P)^{-1} = \{(1, 1)\}$.

Por otro lado $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff (y_1^{-1} \cdot (x_1^{-1}x_2), y_1^{-1}y_2) = (x_1, y_1)^{-1}(x_2, y_2) \in R \times P \iff y_1^{-1} \cdot (x_1^{-1}x_2) \in R$ y $y_1^{-1}y_2 \in P \iff x_1^{-1}x_2 \in R$ y $y_1^{-1}y_2 \in P$, la última equivalencia se obtiene de $x_1^{-1}x_2 = \Phi_{y_1}(y_1^{-1} \cdot x_1^{-1}x_2) \in \Phi_{y_1}(R) \subseteq R$. En consecuencia $H \rtimes_{\Phi} G$ tiene el orden del producto; esto implica que $(H \rtimes_{\Phi} G, R \times P)$ es una cuasi-retícula ordenada.

Las retículas ordenadas son casos especiales de las cuasi-retículas ordenadas; de hecho tenemos la siguiente caracterización.

Proposición 3.16 ([10], Lema 27). *Los siguientes enunciados son equivalentes para un grupo parcialmente ordenado (G, P) :*

1. (G, P) es una retícula ordenada.
2. (G, P) es una cuasi-retícula ordenada y $G = PP^{-1}$.
3. (G, P) es una cuasi-retícula ordenada, P genera a G , y $aP \cap bP \neq \emptyset$ para todo $a, b \in P$.

Supongamos ahora que $G = \Gamma_{I \in \Lambda} G_I$ es un producto gráfico en el cual todo grupo G_I , para $I \in \Lambda$, es parcialmente ordenado con cono positivo P_I . Decimos que una expresión reducida $X = x_1x_2 \cdots x_l$ es *positiva* si $x_i \in P_{I(x_i)}$ para todo $i = 1, 2, \dots, l$. Notemos que esta propiedad es invariante bajo equivalencia por intercambios. Decimos que un elemento $x \in G$ es *positivo* si tiene una expresión reducida positiva. Se sigue, por el Teorema 3.4, que toda expresión reducida para un elemento positivo es positiva. Denotemos por P el submonoide de G consistiendo de todos los elementos positivos i.e. el submonoide generado por la unión de los P_I para $I \in \Lambda$. Más aún, dos elementos positivos son iguales en P si y solamente si sus expresiones reducidas son equivalentes por intercambios. Así P puede ser presentado como el producto gráfico $\Gamma_{I \in \Lambda} P_I$, este es el monoide obtenido del producto libre $*_{I \in \Lambda} P_I$ al introducir las relaciones $xy = yx$ para todo $x \in P_I$ y $y \in P_J$ con I adyacente a J en Λ .

Es fácilmente visto que $P \cap P^{-1} = \{1\}$ y por tanto (G, P) es un grupo parcialmente ordenado. Nos referimos a (G, P) como el producto gráfico sobre Γ de los grupos parcialmente ordenados $\{(G_I, P_I)\}_{I \in \Lambda}$, y escribimos $(G, P) = \Gamma_{I \in \Lambda}(G_I, P_I)$. Notemos que cada (G_I, P_I) es un subgrupo parcialmente ordenado de (G, P) . Esto es, el mapeo inclusión preserva el orden.

Lema 3.17 ([10], Lema 9). *Supongamos que $(G, P) = \Gamma_{I \in \Lambda}(G_I, P_I)$ es un producto gráfico de cuasi-retículas ordenadas y denotemos por $\Delta^r(x, y)$ a la intersección $\Delta^r(x) \cap \Delta^r(y)$ de los conjuntos de vértices finales de los elementos x y y en G . Para cualquier pareja $u, v \in P$, existen $a, b \in P$ satisfaciendo las siguientes condiciones.*

1. $ab^{-1} = uv^{-1}$, con $a \leq u$, $b \leq v$ y $a_I^r \wedge b_I^r = 1$ para todo $I \in \Delta^r(a, b)$.
2. Escribiendo expresiones reducidas $A(\prod_{\Delta^r(a,b)} a_I^r)$ y $(\prod_{\Delta^r(a,b)} (b_I^r)^{-1})B$ para a y b^{-1} respectivamente, se tiene que

$$A \left[\prod_{\Delta^r(a,b)} (a_I^r (b_I^r)^{-1}) \right] B \quad (3.1)$$

es una expresión reducida para ab^{-1} .

Teorema 3.18. *Un producto gráfico $(G, P) = \Gamma_{\in \Lambda}(G_I, P_I)$ de cuasi-retículas ordenadas es una cuasi-retícula ordenada.*

Demostración. Probamos que (G, P) satisface la condición (iv) del Lema 3.11

Dado $x \in PP^{-1}$, el Lema 3.17 implica que x tiene una expresión reducida $X = x_1 x_2 \cdots x_m$ en la cual cada sílaba x_i pertenece a $P_{I(x_i)} P_{I(x_i)}^{-1}$. (Más específicamente, X puede tomar la forma de (3.1), con las sílabas estrictamente positivas apareciendo primero y las sílabas estrictamente negativa apareciendo al último). Como cada (G_I, P_I) es una cuasi-retícula ordenada podemos, en vista del Lema 3.11 (vi), escribir cada x_i unívocamente como $a_i b_i^{-1}$ con $a_i \wedge_r b_i = 1$. Definimos elementos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P$ por $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots a_m$ y $\mathbf{b} = b_m b_{m-1} \cdots b_1$. Como cualquier intercambio de las sílabas x_1, x_2, \dots, x_m induce un intercambio de los a_i 's no triviales (respectivamente de los b_i 's no triviales) se sigue del Teorema 3.4 que el par de elementos \mathbf{a}, \mathbf{b} está unívocamente determinado por x (independientemente de la elección de la expresión reducida).

Dada cualquier pareja $u, v \in P$ con $uv^{-1} = x$, sean $a, b \in P$ cualquier pareja como en el Lema 3.17. La única pareja \mathbf{a}, \mathbf{b} que acabamos de definir puede ser calculada de cualquier expresión reducida para x , en particular de la expresión (3.1) del Lema 3.17. Se sigue que $\mathbf{a} = a$ y $\mathbf{b} = b$. Esto muestra que $x = \mathbf{a}\mathbf{b}^{-1}$ y que $\mathbf{a} \leq u$ y $\mathbf{b} \leq v$ para todo $u, v \in P$ tales que $x = uv^{-1}$, como es requerido por el Lema 3.11 (iv). \square

Lema 3.19 ([10], Lema 11). *Supongamos que (G, P) es un producto gráfico de grupos parcialmente ordenados (G_I, P_I) para $I \in \Lambda$. Sean $x, z \in P$ tales que $x \leq z$. Entonces, para todo $I \in \Lambda$,*

1. $x_I \leq z_I$, y
2. escribiendo $x = x_I x'$, entonces $x_I = z_I$ o bien I es adyacente a todo vértice de x' .

Definición 3.20. Consideramos un producto gráfico de cuasi-retículas ordenadas $(G, P) = \Gamma_{J \in \Lambda}(G_J, P_J)$, y elegimos $I \in \Lambda$. Dados elementos $x, y \in P$, escribimos $x = x_I x'$ y $y = y_I y'$. Decimos que los elementos $x, y \in P$ son I -adyacentes si las siguientes tres condiciones se satisfacen:

- (a) x_I y y_I tienen una cota superior en común;
- (b) $x_I = x_I \vee y_I$ o bien I es adyacente a todo vértice de x' ;
- (c) $y_I = x_I \vee y_I$ o bien I es adyacente a todo vértice de y' .

Esta definición nos permite dar un algoritmo inductivo para decidir si dos elementos $x, y \in P$ tienen una cota superior en común, y para calcular $x \vee y$ cuando exista. Notemos primero que si $x \in G_I$ y $y \in G_J$, entonces la mínima cota superior de x y y en (G, P) está dada por

$$x \vee y = \begin{cases} x \vee_I y & \text{si } I = J; \\ xy & \text{I y J son adyacentes;} \\ \infty & \text{I y J no son adyacentes.} \end{cases}$$

Proposición 3.21. Supongamos que $(G, P) = \Gamma_{J \in \Lambda}(G_J, P_J)$ es un producto gráfico de cuasi-retículas ordenadas. Sean $x, y \in P$ y, para una elección arbitraria de $I \in \Lambda$, escribimos $x = x_I x'$ y $y = y_I y'$. Entonces tenemos lo siguiente.

1. Los elementos $x, y \in P$ tienen una cota superior en común si y solamente si son I -adyacentes y $x' \vee y' \neq \infty$
2. Supongamos que los elementos $x, y \in P$ tiene una cota superior en común. Entonces

$$x \vee y = (x_I \vee y_I)(x' \vee y').$$

Notemos que las condiciones (b) y (c) de la Definición 3.20 aplican a esta expresión.

Demostración. Supongamos inicialmente que los elementos x y y son I -adyacentes y, por la condición (a) de la Definición 3.20, escribimos $x_I \vee y_I = x_I u = y_I v$ para algunos $u, v \in P_I$. Entonces, por la condición (b), $u = 1$ ó I es adyacente a todo vértice de x' , en cuyo caso x' no tiene componente en I . En cualquier caso se tiene que $ux' = x'u = u \vee x'$. Similarmente, por la condición (c), tenemos $vy' = y'v = v \vee y'$. Por tanto, suponiendo adicionalmente que $x' \vee y' \neq \infty$ tenemos:

$$(x_I \vee y_I)(x' \vee y') = (x_I \vee y_I)x' \vee (x_I \vee y_I)y' = x_I u x' \vee y_I v y'$$

pero $x_I u x' = x_I(u \vee x') = x_I u \vee x_I x' = (x_I \vee y_I) \vee x$ y de manera análoga obtenemos $y_I v y' = (x_I \vee y_I) \vee y$, luego

$$\begin{aligned} (x_I \vee y_I)(x' \vee y') &= x_I u x' \vee y_I v y' \\ &= [(x_I \vee y_I) \vee x] \vee [(x_I \vee y_I) \vee y] \\ &= (x_I \vee y_I) \vee x \vee y = x \vee y \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se sigue que x y y tienen una cota superior en común y $x \vee y$ está dada por la ecuación de arriba.

Por otro lado, supongamos que $z = x \vee y \neq \infty$. Primero observamos que x y y son I -adyacentes. Claramente $x_I \vee y_I \leq z$, justificando (a), y las condiciones (b) y (c) se siguen directamente del Lema 3.19. Finalmente, como $x \vee y \neq \infty$, las igualdades de (3.2) pueden ser leídas en orden inverso para mostrar que $x' \vee y' \neq \infty$ \square

Observación 3.22. *Para ver que la Proposición 3.21 conduce a un algoritmo efectivo, notamos que al escoger siempre $I \in \Delta(x) \cup \Delta(y)$ aseguramos que $\ell(x') + \ell(y')$ siempre es estrictamente menor que $\ell(x) + \ell(y)$.*

Ejemplo 3.23. *Consideremos el grafo Γ de la Figura 3.2. Sean $G_1 = \mathbb{Z}\langle a \rangle$, $G_2 = \mathbb{Z}\langle b \rangle$, $G_3 = \mathbb{Z}\langle c \rangle$ y $G_4 = \mathbb{Z}\langle d \rangle$. Consideremos los elementos $x = c^2 b d$ y $y = c a b d^2$, entonces $x_2 = b = y_2$, $x' = c^2 d$ y $y' = c a d^2$, luego $x \vee y = b(x' \vee y')$. Ahora notemos que $x'_4 = d$, $y'_4 = d^2$, $x'' = c^2$ y $y'' = c a$ por lo cual $x' \vee y' = (d \vee d^2)(c^2 \vee c a) = d^2 c(c \vee a) = \infty$ y en consecuencia $x \vee y = \infty$.*

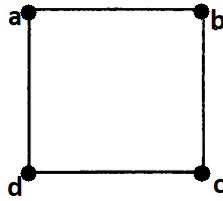


Figura 3.2: Grafo Γ

3.3. Promediabilidad de cuasi-retículas ordenadas

Desde el punto de vista de las álgebras C^* , promediabilidad significa la coincidencia de dos álgebras C^* , una de ellas siendo universal y la otra siendo el álgebra C^* de Toeplitz.

Definición 3.24. Sea (G, P) una cuasi-retícula ordenada y sea $V : P \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ una representación isométrica en un espacio de Hilbert \mathcal{H} ($V_x^*V_x = I$, $V_xV_y = V_{xy}$ y $V_1 = I \forall x, y \in P$). V se dice covariante si para todo $x, y \in P$

$$V_xV_x^*V_yV_y^* = V_{x \vee y}V_{x \vee y}^*$$

Esta definición incluye la convención $V_\infty = 0$. Así ser covariante implica $V_xV_x^*V_yV_y^* = 0$ si x y y no tienen una cota superior en común.

El ejemplo principal de una representación covariante es la *representación de Toeplitz* $T : P \rightarrow \text{Isom}(\ell^2(P))$ definida por $T_x\varepsilon_y = \varepsilon_{xy}$ con adjunto $T_x^*\varepsilon_z = \begin{cases} \varepsilon_{x^{-1}z}, & x \leq z, \\ 0, & x \not\leq z, \end{cases}$ donde $\ell^2(P) = \left\{ f : P \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{p \in P} |f(p)|^2 < \infty \right\}$ y ε_x denota al vector correspondiente a x en la base canónica ortonormal de $\ell^2(P)$.

Definición 3.25. El álgebra C^* generada por los T_x se conoce como el álgebra C^* de Toeplitz de la cuasi-retícula ordenada (G, P) y es denotada $\mathcal{T}(G, P)$.

Ejemplo 3.26. Cualquier representación isométrica $V : P \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ de un grupo totalmente ordenado (G, P) , es covariante. En efecto, sean $p, q \in P$, sin pérdida de generalidad suponemos que $p \leq q$, entonces $p^{-1}q \in P$ y $p \vee q = q$. Así

$$V_pV_p^*V_qV_q^* = V_pV_p^*V_pV_{p^{-1}q}V_q^* = V_pV_{p^{-1}q}V_q^* = V_qV_q^* = V_{p \vee q}V_{p \vee q}^*.$$

Observación 3.27. Si $V : P \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ es una representación isométrica covariante de la cuasi-retícula ordenada (G, P) y si $p, q \in P$ no tienen cota superior común en P , entonces $V_pV_p^*V_qV_q^* = 0$ y por tanto

$$0 = (V_p^*V_p)V_p^*V_q(V_q^*V_q) = V_p^*V_q.$$

Ahora bien, si p, q tienen una cota superior en común en P , entonces

$$\begin{aligned} V_p^*V_q &= (V_p^*V_p)V_p^*V_q(V_q^*V_q) = V_p^*V_{p \vee q}V_{p \vee q}^*V_q \\ &= V_p^*(V_pV_{p^{-1}(p \vee q)}V_{q^{-1}(p \vee q)}^*)V_q = V_{p^{-1}(p \vee q)}V_{q^{-1}(p \vee q)}^*. \end{aligned}$$

Esto implica que el conjunto de productos $V_pV_q^*$ es cerrado bajo multiplicación y adjuntos:

$$(V_xV_y^*)(V_pV_q^*) = \begin{cases} V_{xy^{-1}(y \vee p)}V_{qp^{-1}(y \vee p)}^*, & y \vee p \neq \infty, \\ 0, & y \vee p = \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

Proposición 3.28. *Para cualquier cuasi-retícula ordenada (G, P) , los operadores $\{T_x T_y^* \mid x, y \in P\}$ son linealmente independientes y su espacio lineal generado es una subálgebra- $*$ densa de $\mathcal{T}(G, P)$.*

Demostración. Suponemos que $\{T_x T_y^* \mid x, y \in P\}$ son linealmente dependientes. Entonces podemos encontrar $\{\lambda_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\{(x_j, y_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$ con $(x_j, y_j) \neq (x_k, y_k)$ para $j \neq k$, tales que $\sum_{j=1}^n \lambda_j T_{x_j} T_{y_j}^* = 0$. Por supuesto $n \geq 2$, porque $T_x T_y^*$ nunca puede ser cero ($T_x T_y^* \varepsilon_y = \varepsilon_x$). El conjunto finito $\{y_1, \dots, y_n\}$ debe contener un elemento y_k que es minimal, en el sentido que para cualquier

$1 \leq j \leq n$, $y_j \leq y_k$ implica $y_k = y_j$. Ahora recordemos que $T_x^* \varepsilon_z = \begin{cases} \varepsilon_{x^{-1}z}, & x \leq z, \\ 0, & x \not\leq z, \end{cases}$

luego

$$0 = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j T_{x_j} T_{y_j}^* \right) \varepsilon_{y_k} = \lambda_k \varepsilon_{x_k} + \sum_{\{j \neq k : y_j \leq y_k\}} \lambda_j \varepsilon_{x_j y_j^{-1} y_k}$$

implica que existe al menos un $j \neq k$ tal que $y_j \leq y_k$ y $x_j y_j^{-1} y_k = x_k$; para tal j claramente obtenemos $y_j = y_k$ y $x_j = x_k$ lo cual es absurdo.

El resto de la demostración se sigue de la Observación 3.27 □

Notemos que $\text{span}\{T_x T_y^* \mid x, y \in P\}$ tiene una identificación obvia con $C_c(P \times P) = \text{span}\{\chi_{(x,y)} \mid x, y \in P\}$, el espacio de funciones complejas con soporte finito definidas en $P \times P$. Bajo esta identificación obtenemos una estructura de álgebra- $*$ sobre $C_c(P \times P)$, determinada por las relaciones:

$$\chi_{(x,y)} \chi_{(p,q)} = \begin{cases} \chi_{(xy^{-1}(y \vee p), qp^{-1}(y \vee p))}, & y \vee p \neq \infty, \\ 0, & y \vee p = \infty, \end{cases}$$

y $\chi_{(x,y)}^* = \chi_{(y,x)}$. En particular

$$\chi_{(x,x)} \chi_{(p,p)} = \begin{cases} \chi_{(x \vee p, x \vee p)}, & x \vee p \neq \infty, \\ 0, & x \vee p = \infty. \end{cases}$$

La identidad de $C_c(P \times P)$ es $\chi_{(1,1)}$.

Proposición 3.29. *Dada una cuasi-retícula ordenada (G, P) , existe una biyección canónica entre las representaciones- $*$ de $C_c(P \times P)$ sobre un espacio de Hilbert dado y las representaciones isométricas covariantes de P en el mismo espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Sea $V : P \rightarrow Isom(\mathcal{H})$ una representación isométrica covariante, definimos $\pi_V : C_c(P \times P) \rightarrow B(\mathcal{H})$ por $\pi_V(\chi_{(x,y)}) = V_x V_y^*$ para todo $x, y \in P$ y lo extendemos por linealidad. Se tiene:

$$\begin{aligned} \pi_V(\chi_{(x,y)}\chi_{(p,q)}) &= \pi_V(\chi_{(xy^{-1}(y \vee p), qp^{-1}(y \vee p))}) \\ &= \begin{cases} V_{xy^{-1}(y \vee p)} V_{qp^{-1}(y \vee p)}^*, & y \vee p \neq \infty, \\ 0, & y \vee p = \infty, \end{cases} \\ &= \begin{cases} V_x V_{y^{-1}(y \vee p)} V_{p^{-1}(y \vee p)}^* V_q^*, & y \vee p \neq \infty, \\ 0, & y \vee p = \infty, \end{cases} \\ &= V_x V_y^* V_p V_q^* = \pi_V(\chi_{(x,y)}) \pi_V(\chi_{(p,q)}). \end{aligned}$$

Adicionalmente $\pi_V(\chi_{(x,y)}^*) = \pi_V(\chi_{(y,x)}) = V_y V_x^* = (V_x V_y^*)^* = \pi_V(\chi_{(x,y)})^*$ y $\pi_V(\chi_{(1,1)}) = V_1 V_1^* = I$. Por tanto π_V es una representación-* de $C_c(P \times P)$.

Por otro lado sea $L : C_c(P \times P) \rightarrow B(\mathcal{H})$ una representación-*. Consideramos $\rho_L : P \rightarrow B(\mathcal{H})$ dada por $\rho_L(p) = L(\chi_{(p,1)})$ para todo $p \in P$, entonces

$$\rho_L(p_1 p_2) = L(\chi_{(p_1 p_2, 1)}) = L(\chi_{(p_1, 1)} \chi_{(p_2, 1)}) = L(\chi_{(p_1, 1)}) L(\chi_{(p_2, 1)}) = \rho_L(p_1) \rho_L(p_2).$$

Además $\rho_L^*(p) \rho_L(p) = L(\chi_{(p,1)})^* L(\chi_{(p,1)}) = L(\chi_{(1,p)} \chi_{(p,1)}) = L(\chi_{(1,1)}) = I$ y

$$\begin{aligned} \rho_L(p_1) \rho_L(p_1)^* \rho_L(p_2) \rho_L(p_2)^* &= L(\chi_{(p_1,1)} \chi_{(1,p_1)} \chi_{(p_2,1)} \chi_{(1,p_2)}) = L(\chi_{(p_1, p_1)} \chi_{(p_2, p_2)}) \\ &= \begin{cases} L(\chi_{(p_1 \vee p_2, p_1 \vee p_2)}), & p_1 \vee p_2 < \infty, \\ 0, & p_1 \vee p_2 = \infty, \end{cases} = \begin{cases} \rho_L(p_1 \vee p_2) \rho_L(p_1 \vee p_2)^*, & p_1 \vee p_2 < \infty, \\ 0, & p_1 \vee p_2 = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto $\rho_L : P \rightarrow Isom(\mathcal{H})$ es una representación covariante.

Finalmente observemos que $\rho_{\pi_V}(p) = \pi_V(\chi_{(p,1)}) = V_p V_1^* = V_p$ para todo $p \in P$ y $\pi_{\rho_L}(\chi_{(x,y)}) = \rho_L(x) \rho_L(y)^* = L(\chi_{(x,1)} \chi_{(1,y)}) = L(\chi_{(x,y)})$ con $x, y \in P$. \square

Ahora definimos para cualquier $f \in C_c(P \times P)$:

$$\|f\| := \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \text{ es una representación } * \text{ de } C_c(P \times P)\}. \quad (3.4)$$

Observemos que $\|f\| \leq \sum_{x,y \in P} |f(x,y)|$, porque $f = \sum_{x,y \in P} f(x,y) \chi_{(x,y)}$ y cada $\chi_{(x,y)}$ es una isometría parcial. Por otra parte, la representación de Toeplitz $T : P \rightarrow Isom(\ell^2(P))$ induce, de acuerdo a la Proposición 3.29, una representación-* $\pi_T : C_c(P \times P) \rightarrow B(\ell^2(P))$ tal que $\pi_T(\chi_{(x,y)}) = T_x T_y^*$ para todo $x, y \in P$. Más aún, π_T es inyectiva pues $\{T_x T_y^* | x, y \in P\}$ es linealmente independiente. Por tanto $\|f\| \geq \|\pi_T(f)\| > 0$ para $f \neq 0$. De esto resulta inmediatamente que $\|\cdot\|$ es una norma C^* sobre $C_c(P \times P)$.

Definición 3.30. La completación de $C_c(P \times P)$ con respecto a la norma (3.4) es denotada por $C^*(G, P)$ y se conoce como el álgebra C^* universal de (G, P) .

Observación 3.31. 1. Consideremos el mapeo $\iota : P \rightarrow C^*(G, P)$ dado por $\iota(x) = \chi_{(x,1)}$. Entonces $\iota(x)^*\iota(x) = \chi_{(1,1)}$ e $\iota(x)\iota(x)^*\iota(y)\iota(y)^* = \iota(x \vee y)\iota(x \vee y)^*$. Además $C^*(\{\chi_{(x,1)} : x \in P\}) = \overline{\text{span}}\{\chi_{(x,1)}\chi_{(y,1)}^* : x, y \in P\} = C^*(G, P)$.

2. El álgebra $C^*(G, P)$ tiene la siguiente propiedad universal: para toda representación isométrica covariante $V : P \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$, existe un único homomorfismo $C^* \hat{V} : C^*(G, P) \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $\hat{V} \circ \iota = V$.

$$\begin{array}{ccc} C^*(G, P) & & \\ \uparrow \iota & \searrow \hat{V} & \\ P & \xrightarrow{V} & B(\mathcal{H}) \end{array}$$

Por la observación anterior, la representación de Toeplitz $T : P \rightarrow \text{Isom}(\ell^2(P))$ se extiende a una representación $C^* \hat{T} : C^*(G, P) \rightarrow B(\ell^2(P))$ tal que $\hat{T}(\chi_{(x,y)}) = T_x T_y^* \forall x, y \in P$.

Definición 3.32. Cuando $\hat{T} : C^*(G, P) \rightarrow B(\ell^2(P))$ es inyectiva decimos que la cuasi-retícula ordenada (G, P) es promediable.

Es obvio que la imagen de \hat{T} es $\mathcal{T}(G, P)$. Así, cuando (G, P) es promediable, $\hat{T} : C^*(G, P) \rightarrow \mathcal{T}(G, P)$ establece un isomorfismo. También es obvio que tenemos una reformulación equivalente:

Proposición 3.33. (G, P) es promediable \iff para toda representación isométrica covariante $V : P \rightarrow B(\mathcal{H})$ existe una única representación $C^* \pi : \mathcal{T}(G, P) \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $\pi \circ T = V$.

Observación 3.34. Por el Ejemplo 3.36, se tiene que si (G, P) es una cuasi-retícula ordenada tal que G es promediable,¹ entonces (G, P) es promediable. Resulta que para retículas ordenadas el recíproco también se cumple (ver [10, Proposition 28]).

¹Un grupo discreto G es promediable si existe un estado $\mu : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\mu(\lambda_s f) = \mu(f)$, donde $\lambda_s f(x) := f(s^{-1}x)$ para todo $s, x \in G$.

Todos los grupos finitos, abelianos y nilpotentes son promediables, por mencionar algunos. Los grupos que contienen subgrupos isomorfos a \mathbb{F}_2 , no son promediables.

Otras formulaciones del concepto de promediabilidad para cuasi-retículas ordenadas pueden ser encontradas en [34].

Existe un sistema dinámico de semigrupos (B_P, P, α) canónicamente asociado al semigrupo P , en la cual B_P es la subálgebra C^* de $\ell^\infty(P)$ generada por las funciones características 1_y de los intervalos semi-infinitos $[y, \infty)$ para $y \in P$; el endomorfismo α_x correspondiente a $x \in P$ está definido por $\alpha_x(1_y) = 1_{xy}$. Las representaciones isométricas covariantes de P están en correspondencia biyectiva con representaciones covariantes del sistema dinámico (B_P, P, α) y esto lleva a la realización de $C^*(G, P)$ como un producto cruzado, ver [31, Section 2] para los detalles. Existe una esperanza condicional canónica de $B_P \rtimes_\alpha P$ sobre B_P , la cual es fiel si y solo si (G, P) es promediable [34, Section 4.3]. Esta propiedad, tomada como la definición de promediabilidad de (G, P) en [31], es instrumental en la demostración directa de la promediabilidad para productos libres, la cual generalizamos en esta sección.

Ahora necesitaremos reformular la Proposición 6.6 de [31].

Proposición 3.35 (Laca, Raeburn [31]). *Supongamos que $\phi : (G, P) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{P})$ es un homomorfismo de cuasi-retículas ordenadas preservando el orden tal que, cuando $x, y \in P$ tienen una cota superior en común en P ,*

- (a) $\phi(x) = \phi(y)$ solo si $x = y$ y
- (b) $\phi(x) \vee \phi(y) = \phi(x \vee y)$.

Si \mathcal{G} es un grupo promediable, entonces (G, P) es una cuasi-retícula promediable.

Ejemplo 3.36. *Sea (G, P) una cuasi-retícula ordenada y G un grupo promediable. El homomorfismo identidad $id : G \longrightarrow G$ preserva el orden y satisface los incisos (a) y (b) de la Proposición 3.35. Por tanto (G, P) es promediable.*

Supongamos ahora que $(G, P) = \Gamma_{I \in \Lambda}(G_I, P_I)$ es un producto gráfico de cuasi-retículas ordenadas. Definimos el homomorfismo de grupos

$$\phi : (G, P) \longrightarrow \bigoplus_{I \in \Lambda} (G_I, P_I)$$

tal que cada factor (G_I, P_I) de (G, P) es mapeado al correspondiente factor en $\bigoplus_{I \in \Lambda} (G_I, P_I)$ vía la identidad en G_I . En lo que sigue escribiremos por simplicidad $\phi(u)$ como u cuando $u \in G_I$ para algún $I \in \Lambda$.

Vemos a la suma directa $\bigoplus_{I \in \Lambda} (G_I, P_I)$ como un producto gráfico de grupos (sobre el grafo completo en Λ). Sea $x \in G$ y sea X cualquier expresión reducida para

x . Entonces, eligiendo un vértice $I \in \Lambda$, observamos que $\phi(x)_I$ es simplemente el producto de todas las sílabas de X que pertenecen al vértice I , tomado en el orden en que aparecen. En particular, si $x = x_I x'$ entonces $\phi(x)_I = x_I \phi(x')_I$. Por otro lado, $\phi(x)_J = \phi(x')_J$ para todo $J \neq I$.

Lema 3.37. *Sea ϕ el mapeo definido arriba. Supongamos que $x, y \in P$ satisfacen $x \vee y \neq \infty$ y para una elección arbitraria de $I \in \Lambda$, escribimos $x = x_I x'$ y $y = y_I y'$. Entonces*

$$\phi(x)_I \vee \phi(y)_I = (x_I \vee y_I) \cdot (\phi(x')_I \vee \phi(y')_I). \quad (3.5)$$

Demostración. Como los elementos $x, y \in P$ tiene una cota superior común, por la Proposición 3.21 x y y son I -adyacentes, en particular $y_I \leq x_I \vee y_I = x_I$ o bien I es adyacente a cada vértice de x' . La última condición implica que $\phi(x)_I = x_I$ y $\phi(x')_I = 1$. Un enunciado similar también se cumple con respecto a y' . Así tenemos los siguientes casos a considerar:

Caso 1. $\phi(x)_I = x_I$ y $\phi(y)_I = y_I$. Como en este caso $\phi(x')_I$ y $\phi(y')_I$ ambos son triviales, (3.5) es evidente.

Caso 2. $\phi(x)_I = x_I$ y $x_I \leq x_I \vee y_I = y_I$. En este caso $\phi(x)_I \leq y_I \leq \phi(y)_I$. También $\phi(x')_I = 1$ y $x_I \vee y_I = y_I$. Así (3.5) se reduce a $\phi(y)_I = y_I \phi(y')_I$

Caso 3. $y_I \leq x_I \vee y_I = x_I$ y $\phi(y)_I = y_I$. Este caso es similar al anterior.

Caso 4. Si $x_I = y_I = x_I \vee y_I$; (3.5) se sigue en este caso por invariancia izquierda. \square

Proposición 3.38. *Sea $(G, P) = \Gamma_{I \in \Lambda}(G_I, P_I)$ un producto gráfico de grupos cuasi-réticas ordenadas. Entonces el mapeo $\phi : (G, P) \rightarrow \bigoplus_{I \in \Lambda}(G_I, P_I)$ (definido por la identidad sobre cada factor) es un homomorfismo preservando el orden tal que, $\forall x, y \in P$ con una cota superior en común en P , lo siguiente se cumple:*

(a) $\phi(x) = \phi(y)$ solo si $x = y$, y

(b) $\phi(x) \vee \phi(y) = \phi(x \vee y)$.

Demostración. El mapeo claramente es un homomorfismo preservando el orden.

Sean ahora $x, y \in P$ tales que $x \vee y \neq \infty$. Primero probamos la condición (a) asumiendo que (b) se cumple: Observemos que si $u \in P$ entonces $u_I \leq \phi(u)_I$ para todo I . Así $\phi(u) = 1$ implica $u = 1$. Supongamos que $\phi(x) = \phi(y)$. Entonces, por la condición (b), tenemos

$$\phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y) = \phi(x) = \phi(y)$$

Escribiendo $x \vee y = xu = yv$ para $u, v \in P$, se sigue que $\phi(u) = \phi(v) = 1$. Pero por la observación precedente debemos tener $u = v = 1$ y por tanto $x = y$.

Ahora probamos la condición (b): Elegimos $I \in \Lambda$ tal que $x_I \neq 1$ o $y_I \neq 1$, y escribimos $x = x_I x'$ y $y = y_I y'$. Por la Proposición 3.21 podemos escribir $x \vee y = (x_I \vee y_I)(x' \vee y')$, y por tanto

$$\phi(x \vee y) = (x_I \vee y_I)\phi(x' \vee y')$$

Por inducción sobre $\ell(x) + \ell(y)$ tenemos que $\phi(x' \vee y') = \phi(x') \vee \phi(y')$. Así queda por mostrar que

$$\phi(x) \vee \phi(y) = (x_I \vee y_I) \cdot (\phi(x') \vee \phi(y')) \quad (3.6)$$

Notemos que en la suma directa $\bigoplus_{J \in \Lambda} (G_J, P_J)$ todo elemento ξ puede ser escrito $\xi = \prod_{J \in \Lambda} \xi_J$. Combinando esto con la Proposición 3.21 tenemos:

$$\begin{aligned} \phi(x) \vee \phi(y) &= (\phi(x)_I \vee \phi(y)_I) \prod_{J \in \Lambda: J \neq I} (\phi(x)_J \vee \phi(y)_J) \\ \phi(x') \vee \phi(y') &= (\phi(x')_I \vee \phi(y')_I) \prod_{J \in \Lambda: J \neq I} (\phi(x')_J \vee \phi(y')_J) \end{aligned}$$

Recordando que $\phi(x)_J = \phi(x')_J$ y $\phi(y)_J = \phi(y')_J$ para todo $J \neq I$ se sigue

$$\phi(x) \vee \phi(y) = (x_I \vee y_I)(\phi(x')_I \vee \phi(y')_I) \prod_{J \in \Lambda: J \neq I} (\phi(x')_J \vee \phi(y')_J) = (x_I \vee y_I)(\phi(x') \vee \phi(y'))$$

□

Ahora podemos extender el Teorema 6.7 de [31] al producto gráfico de grupos promediabiles.

Teorema 3.39. *Cualquier producto gráfico de una familia de cuasi-retículas ordenadas en donde los grupos subyacentes son promediabiles, es una cuasi-retícula promediable (esto es, la representación de Toeplitz es fiel).*

Demostración. Denotemos por (G, P) al producto gráfico de la familia $\{(G_I, P_I)\}_{I \in \Lambda}$ de cuasi-retículas ordenadas, y denotemos por $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ a su suma directa $\bigoplus_{I \in \Lambda} (G_I, P_I)$. Por la Proposición 3.38, el mapeo $\phi : (G, P) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{P})$ inducido por la identidad en cada factor satisface la hipótesis de la Proposición 3.35. Si cada G_I es promediable como grupo, entonces también lo es \mathcal{G} . Se sigue entonces, por la Proposición 3.35, que (G, P) es promediable. □

Como una aplicación del Teorema 3.39, obtenemos la siguiente caracterización de fidelidad de representaciones de $C^*(G, P)$, y el resultado correspondiente sobre unicidad del álgebra C^* generada por una representación isométrica covariante de P .

Definición 3.40. *Dos representaciones (de monoides) $V : P \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ y $W : Q \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ conmutan-* si*

$$V_x W_y = W_y V_x, \quad V_x^* W_y = W_y V_x^* \quad \forall x \in P, y \in Q,$$

y son ortogonales si $V_x^* W_y = 0$ para todo $x \in P$ y $y \in Q$.

Teorema 3.41. *Sea (G, P) el producto gráfico de una familia de cuasi-retículas ordenadas $\{(G_I, P_I)\}_{I \in \Lambda}$.*

- (i) *Si $\{V_I : P_I \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})\}_{I \in \Lambda}$ es una familia de representaciones isométricas covariantes tal que V_I conmuta-* con V_J cuando I y J son adyacentes en Γ y V_I es ortogonal a V_J cuando I y J no son adyacentes en Γ , entonces existe una (única) representación isométrica covariante $V : P \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ tal que $V|_{P_I} = V_I$. Todas las representaciones covariantes de P surgen de esta manera.*

Supongamos que G_I es un grupo promediable para todo $I \in \Lambda$. Entonces también tenemos lo siguiente:

- (ii) *La representación del álgebra universal $C^*(G, P)$ asociada a V es fiel si y solamente si*

$$\prod_{x \in F} (1 - V_x V_x^*) \neq 0 \text{ para todo subconjunto finito } F \subset \bigcup_{I \in \Lambda} (P_I \setminus \{1\}) \quad (3.7)$$

- (iii) *Si $\{V_I\}$ y $\{W_I\}$ son dos familias de representaciones isométricas covariantes como en la parte (i) satisfaciendo (3.7), entonces el mapeo canónico $V_I(x) \mapsto W_I(x)$ se extiende a un isomorfismo de $C^*(V_x : x \in P)$ sobre $C^*(W_x : x \in P)$.*

Demostración. Las isometrías satisfacen las relaciones de conmutación que definen a P como producto gráfico de monoides. Por tanto los mapeos $s \in P_I \mapsto V_I(s)$ se extienden a una representación isométrica V del monoide $P = \Gamma_{I \in \Lambda} P_I$.

Necesitamos mostrar que esta representación es covariante, esto es, necesitamos mostrar que $V_{x \vee y} V_{x \vee y}^* = V_x V_x^* V_y V_y^*$ para todo $x, y \in P$.

Procedemos por inducción sobre $\ell(x) + \ell(y)$. Seleccionemos $I \in \Delta(x) \cup \Delta(y)$ y escribamos $x = x_I x'$ y $y = y_I y'$. Como x_I y y_I no pueden ser ambos triviales, esto asegura que $\ell(x') + \ell(y') < \ell(x) + \ell(y)$.

Supongamos primero que $x \vee y < \infty$. Por la Proposición 3.21 y la hipótesis de inducción, tenemos

$$V_{x \vee y} V_{x \vee y}^* = V_z V_{x'} V_{x'}^* V_{y'} V_{y'}^* V_z^*, \quad (3.8)$$

donde $z = x_I \vee y_I \in P_I$. Más aún, x y y son I -adyacentes, y de la Definición 3.20 tenemos cuatro casos a considerar:

Caso 1. El vértice I es adyacente a todos los vértices de x' y a los de y' . Entonces V_I conmuta-* con $V_{x'}$ y con $V_{y'}$, así que (3.8) se vuelve

$$\begin{aligned} V_{x \vee y} V_{x \vee y}^* &= V_{x'} V_{x'}^* V_z V_z^* V_{y'} V_{y'}^* \\ &= V_{x'} V_{x'}^* V_{x_I} V_{x_I}^* V_{y_I} V_{y_I}^* V_{y'} V_{y'}^* \\ &= V_{x_I} V_{x'} V_{x'}^* V_{x_I}^* V_{y_I} V_{y'} V_{y'}^* V_{y_I}^* = V_x V_x^* V_y V_y^* \end{aligned}$$

Caso 2. $z = x_I$ e I es adyacente a todos los vértices de y' . Escribimos $z = y_I v$ con $v \in P_I$; entonces $V_{y'} V_{y'}^* V_z^* = V_v^* V_{y'} V_{y'}^* V_{y_I}^* = V_z^* V_y V_y^*$. Así (3.8) se vuelve

$$V_{x \vee y} V_{x \vee y}^* = V_z V_{x'} V_{x'}^* V_z^* V_y V_y^* = V_x V_x^* V_y V_y^*$$

Caso 3. $z = y_I$ e I es adyacente a todos los vértices de x' . (Esto es análogo al Caso 2).

Caso 4. $z = x_I = y_I$. Insertando $V_z^* V_z$ en el medio del lado derecho de (3.8) obtenemos $V_{x \vee y} V_{x \vee y}^* = V_x V_x^* V_y V_y^*$.

Supongamos ahora que $x \vee y = \infty$. Entonces por convención $V_{x \vee y} V_{x \vee y}^* = 0$ y es suficiente mostrar que $V_x^* V_y = 0$. Claramente si $x_I \vee y_I = \infty$ entonces, por covarianza de V_I , tenemos $V_{x_I}^* V_{y_I} = 0$, así $V_x^* V_y = 0$. Así, podemos suponer que $x_I \vee y_I \neq \infty$, escribimos $x_I \vee y_I = x_I u = y_I v$ donde $u, v \in P_I$ luego

$$V_{x_I} V_{x_I}^* V_{y_I} V_{y_I}^* = V_{x_I \vee y_I} V_{x_I \vee y_I}^* = V_{x_I} V_u V_v^* V_{y_I}^* \quad (3.9)$$

multiplicando (3.9) a la derecha por $V_{x_I}^*$ y a la izquierda por V_{y_I} se consigue $V_{x_I}^* V_{y_I} = V_u V_v^*$. Así

$$V_x^* V_y = V_{x'}^* V_u V_v^* V_{y'}.$$

Sea $A = a_1 a_2 \cdots a_k$ una expresión reducida para y' . Supongamos que $v \neq 1$ y A tiene una sílaba con vértice no adyacente a I , sea a_i la primera sílaba de A para la cual $I(a_i)$ no es adyacente a I . Notemos que $I(a_i) \neq I$ porque y' no puede tener vértice inicial I . Escribimos $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_{i-1}$ y $\beta = a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_k$. Ahora tenemos

$$V_v^* V_{y'} = V_v^* V_\alpha V_{a_i} V_\beta = V_\alpha V_v^* V_{a_i} V_\beta = 0$$

usando el hecho que $V_v^* V_{a_i} = 0$ por ortogonalidad.

Así podemos suponer que la condición (c) de la Definición 3.20 se cumple, en cuyo caso $V_v^*V_{y'} = V_{y'}V_v^*$. Por un argumento similar podemos suponer que también la condición (b) se cumple y que $V_{x'}^*V_u = V_uV_{x'}^*$. Ya hemos asumido que $x_I \vee y_I \neq \infty$ (parte (a) de la Definición 3.20). Todas estas condiciones implican que x y y son I -adyacentes y que

$$V_xV_y = V_uV_{x'}^*V_{y'}V_v^*$$

Por la Proposición 3.21 ahora tenemos $x' \vee y' = \infty$ (pues $x \vee y = \infty$ y x es I -adyacente a y), y aplicando la hipótesis de inducción a x' y y' completa la prueba de que V es covariante.

Para probar (ii) notemos primero que de [31, Theorem 3.7], se sigue que una representación es fiel si y solo si

$$\prod_{x \in F} (1 - V_xV_x^*) \neq 0 \text{ para todo subconjunto finito } F \subset P.$$

Esto es equivalente a considerar solo productos de la forma enunciada, porque reemplazando cada $x \in F$ por una de sus sílabas iniciales tiene el efecto de reemplazar cada factor $(1 - V_xV_x^*)$ por uno más pequeño. La parte (iii) se sigue del Teorema 3.39 y del Corolario 3.9 de [31]. \square

Observación 3.42. *En algunos casos la condición (3.7) es automáticamente satisfecha por todas las representaciones covariantes, en cuyo caso el álgebra C^* de Toeplitz es simple y puramente infinita por [31, Theorem 5.4]. El ejemplo mejor conocido de esto es \mathcal{O}_∞ [12]. Ver [30, Corollary 5.2 & Corollary 5.3] y [15, Theorem 2.4] para más ejemplos involucrando productos libres.*

3.4. El álgebra C^* de un grupo de Artin de ángulo recto

Sea Λ un conjunto (usualmente tomado finito, aunque no haremos esta restricción aquí). Una matriz $M = (m_{s,t})_{s,t \in \Lambda}$ es una matriz de Coxeter si $m_{s,t} = m_{t,s} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ para $s \neq t$ y $m_{s,s} = 1$. Denotamos por $\langle st \rangle^m$ a la palabra $sts \dots$, comenzando con s y teniendo longitud m , en la cual las letras s y t se alternan.

Ejemplo 3.43. *Sea $M \in M_n(\mathbb{N})$ dada por $m_{i,i+1} = 3 \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $m_{i,j} = 2$ si $|i-j| > 1$ y $m_{i,i} = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces M es una matriz de Coxeter. Por*

ejemplo, cuando $n = 4$, la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es de Coxeter.

El grupo de Artin A_M asociado a M es el grupo con presentación

$$\langle \Lambda | \langle st \rangle^{m_{s,t}} = \langle ts \rangle^{m_{s,t}} \forall s, t \in \Lambda \rangle,$$

en la cual una relación de la forma $\langle st \rangle^\infty = \langle ts \rangle^\infty$ es interpretada como vacía. El monoide de Artin A_M^+ está definido vía la misma presentación, tomada en la categoría de monoïdes (semigrupos con identidad). Podemos ver a A_M como un grupo parcialmente ordenado con cono positivo P_M generado por Λ .

Añadiendo las relaciones $s^2 = 1$ para $s \in \Lambda$ a las de arriba produce una presentación un tanto inusual del grupo de Coxeter W_M asociado con M , el cual es usualmente presentado vía las relaciones $\langle st \rangle^{m_{s,t}} = 1$.

Un grupo de Coxeter y su grupo de Artin A_M se dicen de ángulo recto si cada entrada no diagonal de la matriz de Coxeter M es 2 ó ∞ . (Por abuso de notación también nos referimos a la matriz como de ángulo recto).

Definición 3.44. Si el grupo de Coxeter W_M es finito, el grupo de Artin asociado se dice de tipo finito o esférico.

Ejemplo 3.45. Sea $M \in M_n(\mathbb{N})$ la matriz del Ejemplo 3.43. El grupo de Artin asociado

$$A_M = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} | \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{para } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{para } i = 1, \dots, n - 2 \end{array} \rangle$$

es el grupo de trenzas de Artin B_n con n cuerdas. Su grupo de Coxeter

$$W_M = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} | \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{para } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{para } i = 1, \dots, n - 2 \\ \sigma_i^2 = 1 & \text{para } i = 1, \dots, n - 1 \end{array} \rangle$$

es el grupo simétrico Σ_n , el cual tiene $n!$ elementos y por tanto A_M es esférico.

Toda matriz de Coxeter de ángulo recto M sobre Λ determina y está determinada por un grafo Γ con conjunto de vértices Λ teniendo una arista uniendo s y t cuando $m_{s,t} = 2$. Las únicas relaciones en la presentación de A_M dicen que dos generadores conmutan si están unidos por una arista, por tanto A_M es precisamente el producto gráfico $\Gamma_{I \in \Lambda} \mathbb{Z}$ de copias de \mathbb{Z} . Los grupos de Artin de ángulo recto también se conocen como *grupos gráficos*.

Ejemplo 3.46. Consideremos la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & \infty & \infty & 2 & 2 & 2 \\ \infty & 1 & \infty & 2 & 2 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & 2 & 2 & \infty & 1 & \infty \\ 2 & 2 & 2 & \infty & \infty & 1 \end{pmatrix}$. El grafo determinado por M , es el grafo bipartita mostrado en la Figura 3.3.

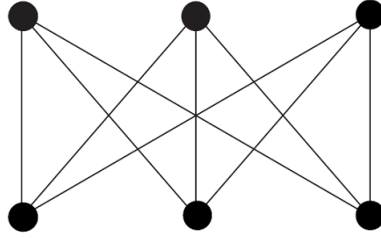


Figura 3.3: Grafo asociado a M .

En este caso el grupo de Artin de ángulo recto es $A_M \cong \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$.

Por [5, Proposition 5.5] y [5, Theorem 5.6], si A_M es de tipo finito entonces el semigrupo de Artin A_M^+ se encaja como un subsemigrupo de A_M y la pareja (A_M, A_M^+) es una retícula ordenada.

En virtud del Teorema 3.4 el monoide de Artin de ángulo recto A_M^+ puede ser identificado con el cono positivo del correspondiente grupo de Artin y (A_M, A_M^+) es una cuasi-retícula ordenada por el Teorema 3.18. Aplicando el Teorema 3.39 vemos que esta cuasi-retícula ordenada es promediable.

Teorema 3.47. Sea Γ un grafo con conjunto de vértices Λ y supongamos que $\{V_s : s \in \Lambda\}$ es una colección de isometrías en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , tal que para todo par de vértices distintos s y t se tiene

$$V_s V_t = V_t V_s \quad \text{y} \quad V_s^* V_t = V_t V_s^* \quad \text{si } s \text{ y } t \text{ son adyacentes en } \Gamma$$

$$V_s^* V_t = 0 \quad \text{si } s \text{ y } t \text{ no son adyacentes en } \Gamma$$

Sea $A_M = \Gamma_{s \in \Lambda} \mathbb{Z}\langle s \rangle$ el grupo de Artin de ángulo recto asociado a Γ . Entonces

1. los mapeos $\begin{matrix} \mathbb{N}\langle s \rangle & \longrightarrow & \text{Isom}(\mathcal{H}) \\ s^n & \longmapsto & V_s^n \end{matrix}$, para $s \in \Lambda$, se extienden a una representación isométrica covariante V del semigrupo de Artin de ángulo recto A_M^+ ,

2. la correspondiente representación de $C^*(A_M, A_M^+)$ es fiel si y solamente si

$$\prod_{s \in F} (I - V_s V_s^*) \neq 0 \quad \text{para todo conjunto finito } F \subseteq \Lambda \quad (3.10)$$

3. si $\{W_s : s \in \Lambda\}$ es otra colección de isometrías satisfaciendo las mismas relaciones y la condición (3.10), entonces el mapeo $V_s \mapsto W_s$ se extiende a un isomorfismo de álgebras C^* de $C^*(V_s : s \in \Lambda)$ a $C^*(W_s : s \in \Lambda)$.

Demostración. Como los generadores V_s satisfacen las relaciones enunciadas, la colección de representaciones isométricas $\{s^n \mapsto V_s^n\}_{s \in \Lambda}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.41 y así se extienden a una representación isométrica del semigrupo A_M^+ , dando 1. La hipótesis de promediabilidad se satisface porque en este caso cada factor en el producto gráfico es isomorfo a \mathbb{Z} , así 2 y 3 se siguen directamente del Teorema 3.41. \square

Observación 3.48. Si el conjunto Λ de generadores es finito, la proyección $\prod_{s \in \Lambda} (I - T_s T_s^*)$ pertenece al álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(A_M, A_M^+) = \overline{\text{span}}\{T_x T_y^* | x, y \in A_M^+\}$. Como $T_x \prod_{s \in \Lambda} (I - T_s T_s^*) T_y^* = \langle \cdot, \varepsilon_y \rangle \varepsilon_x \quad \forall x, y \in A_M^+$, se sigue que $\mathcal{K} = \langle \prod_{s \in \Lambda} (I - T_s T_s^*) \rangle$. Es fácil ver que (3.10) se cumple si y solo si se cumple para $F = \Lambda$, así este ideal es minimal.

Observación 3.49. Notemos que la representación de Toeplitz $T : A_\Gamma^+ \rightarrow B(\ell^2(A_\Gamma^+))$ da lugar a una colección de isometrías $\{T_s : s \in \Lambda\}$ tales que $\prod_{s \in F} (I - T_s T_s^*) \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \neq 0$ si $F \subseteq \Lambda$ finito y

$$\begin{aligned} T_{s_i}^* T_{s_j} &= (T_{s_i}^* T_{s_i}) T_{s_i}^* T_{s_j} (T_{s_j}^* T_{s_j}) = \begin{cases} T_{s_i}^* T_{s_i s_j} T_{s_i s_j}^* T_{s_j}, & (s_i, s_j) \in E(\Gamma), \\ 0, & (s_i, s_j) \notin E(\Gamma), \end{cases} \\ &= \begin{cases} T_{s_j} T_{s_j}^* T_{s_i} T_{s_j}, & (s_i, s_j) \in E(\Gamma), \\ 0, & (s_i, s_j) \notin E(\Gamma), \end{cases} = \begin{cases} T_{s_j} T_{s_i}^*, & (s_i, s_j) \in E(\Gamma), \\ 0, & (s_i, s_j) \notin E(\Gamma). \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.50. Sea Γ un grafo con n vértices aislados, entonces $T_{s_i}^* T_{s_j} = 0 \quad \forall i \neq j$ y $I - \sum_{i=1}^n T_{s_i} T_{s_i}^* = \prod_{i=1}^n (I - T_{s_i} T_{s_i}^*) \neq 0$. El álgebra $\mathcal{T}(\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n^+)$ se conoce como el **álgebra de Toeplitz-Cuntz** y es denotada por $\mathcal{E}_n := \mathcal{T}(\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n^+)$.

Por el Ejemplo 1.38 se tiene que $\mathcal{E}_n / \langle I - \sum_{i=1}^n T_{s_i} T_{s_i}^* \rangle \cong \mathcal{O}_n$.

Laca y Li completaron la clasificación de los grupos de Artin promediables al mostrar en [32, Theorem 4.2] que solo los grupos de Artin de ángulo recto satisfacen la condición de promediabilidad.

Teorema 3.51. *Sea A_M un grupo de Artin. Entonces (A_M, A_M^+) es promediable $\iff A_M$ es de ángulo recto.*

Como una consecuencia del Teorema 3.51, el análogo del Teorema 3.41 (ii) falla para grupos de Artin que no son de ángulo recto, en su lugar tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.52 ([10], Theorem 30). *Sea A_M un grupo de Artin que no es de ángulo recto. Supongamos que $\{V_s : s \in \Lambda\}$ es una colección de isometrías satisfaciendo las relaciones de Artin relativas a M :*

$$\langle V_s V_t \rangle^{m_{s,t}} = \langle V_t V_s \rangle^{m_{s,t}} \quad s, t \in \Lambda. \quad (3.11)$$

Entonces el mapeo $s \mapsto V_s$ se extiende a una representación isométrica, denotada también por V , del semigrupo de Artin A_M^+ . La representación V es covariante siempre que

$$V_s V_s^* V_t V_t^* = V_{s \vee t} V_{s \vee t}^* \quad s, t \in \Lambda. \quad (3.12)$$

Observación 3.53. *La representación de Toeplitz T en $\ell^2(A_M^+)$ satisface (3.11) y (3.12) y además la proyección $\prod_{\Lambda} (1 - T_s T_s^*)$ no se anula. Sin embargo, la representación de Toeplitz de $C^*(A_M, A_M^+)$ no es fiel; en particular el álgebra C^* generada por una colección $\{V_s : s \in \Lambda\}$ como arriba no es canónicamente única, incluso si suponemos que $\prod_{\Lambda} (1 - V_s V_s^*) \neq 0$, esto gracias a [30, Corollary 3.9].*

Capítulo 4

K -teoría de álgebras de Toeplitz de grupos gráficos

En este capítulo estudiamos los cocientes $C_Q^*(\Gamma)$ de las álgebras C^* de Toeplitz de grupos gráficos (con centro trivial) módulo sus ideales cerrados. Para cierta clase de grafos finitos Γ , calculamos $K_*(C_Q^*(\Gamma))$. Usamos inducción sobre el número de vértices de Γ y la sucesión exacta de Pimsner-Voiculescu para encontrar la K -teoría de $C_Q^*(\Gamma)$, la cual es presentada en términos de la característica de Euler del grafo Γ visto como complejo simplicial. Finalmente aplicamos el teorema de clasificación de Kirchberg-Phillips para mostrar que estas álgebras C^* son isomorfas a productos tensoriales de \mathcal{O}_n con $1 \leq n \leq \infty$.

4.1. El álgebra $C_Q^*(\Gamma)$

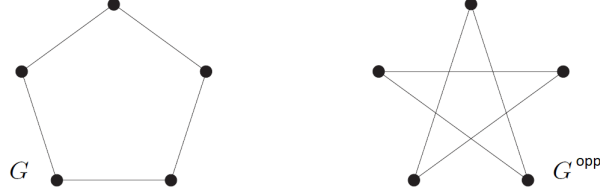
Definición 4.1. *Dado un grafo Γ con conjunto de vértices Λ , el grafo opuesto o complementario Γ^{opp} , es el grafo con conjunto de vértices Λ y con aristas*

$$E(\Gamma^{opp}) = \{(v, w) | u, w \in \Lambda, (u, w) \notin E(\Gamma)\}.$$

La Figura 4.1 muestra a un grafo G y su grafo opuesto G^{opp} . Notemos que un grupo gráfico A_Γ tiene centro trivial si y solo si Γ^{opp} no tiene vértices aislados.

Ahora enunciamos [11, Theorem 6.7] y [10, Corollary 8.5] que usaremos a lo largo del capítulo.

Teorema 4.2 ([11], Theorem 6.7). *Sea Γ un grafo con un conjunto de vértices Λ tal que Γ^{opp} no tiene vértices aislados. Supongamos que $\{V_s | s \in \Lambda\}$ es una colección de isometrías sujetas a las relaciones:*


 Figura 4.1: Grafo G y su grafo opuesto G^{opp} .

- (1) $V_s V_t = V_t V_s$ y $V_s^* V_t = V_t V_s^*$ si s y t son adyacentes en Γ ;
- (2) $V_s^* V_t = 0$ si s y t son distintos y no son adyacentes en Γ ;
- (3) $\prod_{s \in S_i} (I - V_s V_s^*) = 0$ donde $S_i \subset \Lambda$ es el conjunto de vértices de una componente conexa finita arbitraria de Γ^{opp} .

Entonces el álgebra C^* universal generada por $\{V_s | s \in \Lambda\}$ es puramente infinita y simple.

Denotaremos al álgebra C^* de este teorema por $C_Q^*(\Gamma)$, donde Q hace alusión a «quotient». Esta notación está justificada por el siguiente hecho.

Teorema 4.3 ([10], Corollary 8.5). *Sea Γ un grafo con un conjunto de vértices Λ tal que Γ^{opp} no tiene vértices aislados. Denotemos por $C^*(\Gamma)$ el álgebra C^* universal generada por una colección de isometrías $\{V_s | s \in \Lambda\}$ sujetas a la relaciones:*

- (1) $V_s V_t = V_t V_s$ y $V_s^* V_t = V_t V_s^*$ si s y t son adyacentes en Γ ;
- (2) $V_s^* V_t = 0$ si s y t son distintos y no son adyacentes en Γ .

Entonces cualquier cociente de $C^*(\Gamma)$ se obtiene al imponer relaciones adicionales de la forma

(R) $\prod_{s \in S_i} (I - V_s V_s^*) = 0$ donde $S_i \subset \Lambda$ es el conjunto de vértices de una unión finita arbitraria de componentes conexas de Γ^{opp} .

Más aún, siempre podemos reducir la presentación de arriba a una en la cual ninguno de los conjuntos S_i y S_j estén contenidos uno en el otro.

Notemos que el Teorema 4.3 implícitamente está asumiendo la unicidad establecida por el Teorema 3.47.

Ejemplo 4.4. *Consideremos el grafo Γ de la Figura 4.2. En este caso los únicos cocientes no triviales son: $C^*(\Gamma)/\langle \prod_{i=1}^3 (I - V_i V_i^*) \rangle$, $C^*(\Gamma)/\langle \prod_{i=4}^6 (I - V_i V_i^*) \rangle$, $C^*(\Gamma)/\langle \prod_{i=1}^6 (I - V_i V_i^*) \rangle$ y $C^*(\Gamma)/\langle \prod_{i=1}^3 (I - V_i V_i^*), \prod_{i=4}^6 (I - V_i V_i^*) \rangle \cong C_Q^*(\Gamma)$.*

Cuando Γ es un grafo finito con más de un vértice y tal que el grafo opuesto Γ^{opp} es conexo, $C_Q^*(\Gamma)$ es el cociente de $C^*(\Gamma)$ módulo el ideal generado por $\prod_{s \in V(\Gamma)} (I - V_s V_s^*)$.

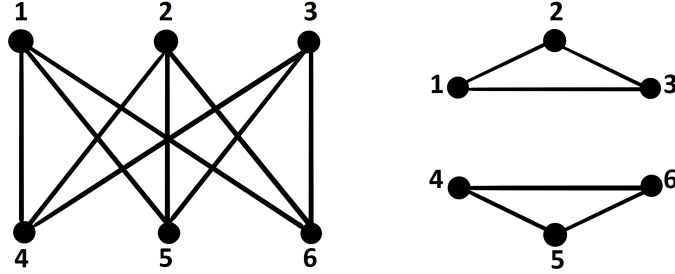


Figura 4.2: Grafo Γ a la izquierda y su grafo opuesto Γ^{opp} a la derecha.

Denotamos por $I_\Gamma : \langle \prod_{s \in V(\Gamma)} (I - V_s V_s^*) \rangle \rightarrow C^*(\Gamma)$ al mapeo inclusión y $Q_\Gamma : C^*(\Gamma) \rightarrow C_Q^*(\Gamma)$ al mapeo cociente.

Ejemplo 4.5. Si Γ tiene dos vértices y sin aristas, entonces de la construcción de $C^*(\Gamma)$ es claro que $C^*(\Gamma)$ está generada por isometrías V_1 y V_2 con rangos ortogonales y tales que $V_1 V_1^* + V_2 V_2^* < I$. Por el Ejemplo 3.50 $C_Q^*(\Gamma) \cong \mathcal{E}_2 / \langle I - \sum_{i=1}^2 V_i V_i^* \rangle \cong \mathcal{O}_2$.

Fijemos ahora un grafo Γ con conjunto de vértices Λ tal que $2 < |\Lambda| < \infty$ y supongamos que Γ^{opp} es conexo. Como Γ^{opp} es conexo si no es un árbol, podemos quitar una arista arbitraria de su ciclo arbitrario y el grafo obtenido de esta manera (lo denotamos por Γ_1^{opp}) seguirá siendo conexo. Continuando de esta forma en un número finito de pasos llegaremos a Γ_l^{opp} , el cual será un árbol. Sea $s \in \Lambda$ una hoja (vértice de grado uno) para Γ_l^{opp} . Quitando s y la arista que salen de s no alterará la conexidad. Todo esto muestra que si Γ' es el grafo obtenido de Γ al quitar el vértice s y todas las aristas que salen de s , entonces su grafo opuesto $(\Gamma')^{opp}$ será conexo.

Sea $\Lambda' \subset \Lambda$ el conjunto de vértices de Γ' . Podemos suponer que $\Lambda = \{1, \dots, n, n+1\}$ y que $\Lambda' = \{1, \dots, n\}$ para algún $n \geq 2$.

Lema 4.6 ([28], Lema 2.1). Toda palabra en las letras $\{V_1, \dots, V_{n+1}, V_1^*, \dots, V_{n+1}^*\}$ puede ser escrita en la forma $w_1 w_2^*$ donde w_1, w_2 son palabras en $\{V_1, \dots, V_{n+1}\}$.

Denotemos por V a la isometría $V_{n+1} \in C_Q^*(\Gamma)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $V^* V_i = 0$ para $k < i \leq n$. Si $k > 0$, entonces V también conmuta-* con V_1, \dots, V_k (notemos que $k < n$ porque si $k = n$ entonces el vértice $n+1$ estaría conectado con todos los vértices, contradiciendo la conexidad de Γ^{opp}).

Sea $T_0 := C^*(V_1, \dots, V_n)$. Entonces del Teorema 4.3 es fácil ver que $T_0 \cong C^*(\Gamma')$. Definimos por inducción a T_m como el generado lineal cerrado de elementos de la forma $w V t_{m-1} V^*(w')^*$, donde w, w' son palabras en las letras $\{V_1, \dots, V_n\}$ y $t_{m-1} \in T_{m-1}$. El siguiente lema caracteriza los conjuntos T_m .

Lema 4.7. T_m es una subálgebra C^* de $C^*(\Gamma)$, isomorfa a $\mathcal{K}^{\otimes m} \otimes T_0$ ($\cong \mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma')$).

Demostración. Denotemos por Ω al conjunto de todas las palabras w en las letras $\{V_1, \dots, V_n\}$ tales que las letras de la palabra wV no pueden ser conmutadas más allá de V ; i.e., $wV = w_1Vw_2$ para algunas palabras w_1, w_2 en las letras $\{V_1, \dots, V_n\}$ implica $w_2 = I$. Es fácil ver que de la conexidad de Γ^{opp} se sigue que Ω es un conjunto infinito numerable. Por tanto podemos enumerar sus elementos: $\Omega = \{w_n\}_{n \geq 0}$ donde $w_0 = I$. Asumimos que las palabras en Ω no se repiten, es decir, $w_p \neq w_q$ para $p \neq q$ después de usar las relaciones de conmutación. Supongamos por inducción que $T_{m-1} \cong \mathcal{K}^{\otimes(m-1)} \otimes T_0$ para algún $m \geq 1$. Claramente $\{w_p V t_{m-1} V^* w_q^* | p, q \in \mathbb{N}_0\}$ es un conjunto cerrado-*. Es fácil ver que cada elemento $w' V t_{m-1} V^* w^*$ de T_m , después de aplicar las relaciones de conmutación puede ser escrito en la forma $w_p V t'_{m-1} V^* w_q^*$ para algunos $p, q \in \mathbb{N}_0$ y algún $t'_{m-1} \in T_{m-1}$. Por lo tanto $\{w_p V t_{m-1} V^* w_q^* | p, q \in \mathbb{N}_0, t_{m-1} \in T_{m-1}\}$ genera un subconjunto denso de T_m . Concluimos que T_m es cerrado-*.

Por [28, Lemma 2.2] tenemos que $V^* w_q^* w_p V = \delta_{p,q} I$ para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$. Así T_m es cerrado bajo multiplicación y por lo tanto es un álgebra C^* . La ecuación $V^* w_q^* w_p V = \delta_{p,q} I$ también implica que

$$C^*(\{w_p V V^* w_q^* | 0 \leq p, q \leq l-1\}) \cong M_l(\mathbb{C})$$

Es claro que $V T_{m-1} V^*$ es un álgebra C^* , isomorfa a T_{m-1} . Por tanto

$$\begin{aligned} & C^*(\{w_p V t_{m-1} V^* w_q^* | 0 \leq p, q \leq l-1, t_{m-1} \in T_{m-1}\}) \\ & \cong C^*(\{\sum_{i=0}^{l-1} (w_i V t_{m-1} V^* w_i^*) | t_{m-1} \in T_{m-1}\}) \otimes C^*(\{w_p V V^* w_q^* | 0 \leq p, q \leq l-1\}) \\ & \cong T_{m-1} \otimes M_l(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

pues $\sum_{i=0}^{l-1} (w_i V t_{m-1} V^* w_i^*)$ conmuta con $w_p V V^* w_q^*$ para todo $0 \leq p, q \leq l-1$ y para todo $t_{m-1} \in T_{m-1}$. Finalmente del Ejemplo 2.41 concluimos que

$$T_{m-1} \otimes \mathcal{K} \cong \lim_{l \rightarrow \infty} (T_{m-1} \otimes M_l(\mathbb{C})) \cong C^*(\{w_p V t_{m-1} V^* w_q^* | p, q \in \mathbb{N}_0, t_{m-1} \in T_{m-1}\}) = T_m$$

□

De la demostración de este lema fácilmente se sigue T_m es el generado lineal cerrado de

$$\{w_{p_m} V \cdots V w_{p_1} V t_0 V^* w_{q_1}^* V^* \cdots V^* w_{q_m}^* | w_{p_1}, \dots, w_{p_m}, w_{q_1}, \dots, w_{q_m} \in \Omega, t_0 \in T_0\}.$$

Esto implica que $T_m \cdot T_l \subset T_m$ y $T_l \cdot T_m \subset T_m$ para todo $m \geq l \geq 0$.

Ahora introducimos las siguientes subálgebras C^* de $C_Q^*(\Gamma)$: definimos $B_0 := T_0$ y $B_m := C^*(B_{m-1} \cup T_m) = C^*(T_0 \cup \dots \cup T_m)$. De lo que dijimos arriba es claro que T_m es un ideal de B_m . Por tanto tenemos una extensión

$$0 \longrightarrow T_m \xrightarrow{i_m} B_m \xrightarrow{p_m} B_m/T_m \longrightarrow 0 \quad (4.1)$$

donde $i_m : T_m \rightarrow B_m$ es el mapeo inclusión y $p_m : B_m \rightarrow B_m/T_m$ es el mapeo cociente.

De [33, Theorem 3.1.7] se sigue que $B_m = B_{m-1} + T_m$ como espacio lineal. De [33, Remark 3.1.3] se sigue que el mapeo $\pi_m : B_{m-1}/(B_{m-1} \cap T_m) \rightarrow B_m/T_m$ dado por $b_{m-1} + B_{m-1} \cap T_m \mapsto b_{m-1} + T_m$ es un isomorfismo ($b_{m-1} \in B_{m-1}$).

Definimos $\mathcal{I}_m := \langle V^m [\prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*)] (V^*)^m \rangle_{T_m}$. Por el Teorema 4.3, \mathcal{I}_0 es el único ideal no trivial de T_0 . Además como el mapeo $V_s \mapsto T_s$ se extiende a un isomorfismo de T_0 en $\mathcal{T}(A_{\Gamma^v}, A_{\Gamma^v}^+)$, se sigue de la Observación 3.48 que I_0 es isomorfo a \mathcal{K} . Entonces del Lema 4.7 se sigue que \mathcal{I}_m es el único ideal no trivial de T_m y es isomorfo a $\mathcal{K}^{\otimes m} \otimes \mathcal{K}$.

Por definición de $C_Q^*(\Gamma)$ tenemos $(I - VV^*) \prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*) = 0$ o $\prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*) = VV^* \prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*)$. Por tanto usando las relaciones (1) y (2) del Teorema 4.2 obtenemos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*) &= VV^* \prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*) \\ &= V \prod_{i=1}^k (I - V_i V_i^*) V^* \prod_{i=k+1}^n (I - V_i V_i^*) = V \prod_{i=1}^k (I - V_i V_i^*) V^* \in T_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se sigue que $V^m [V \prod_{i=1}^k (I - V_i V_i^*) V^*] (V^*)^m \in V^m T_1 (V^*)^m \subset T_{m+1}$. En virtud de que $T_m \cdot T_{m+1} \subset T_{m+1}$ y $T_{m+1} \cdot T_m \subset T_{m+1}$ tenemos que $T_m \cap T_{m+1}$ es un ideal de T_m , luego $\mathcal{I}_m \subseteq T_m \cap T_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. La inclusión inversa también se cumple:

Lema 4.8. $B_m \cap T_{m+1} = T_m \cap T_{m+1} = \mathcal{I}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$

Demostración. Como \mathcal{I}_0 es el único ideal no trivial de T_0 y como $T_0 \cap T_1$ es un ideal de T_0 , entonces si suponemos que $\mathcal{I}_0 \subsetneq T_0 \cap T_1$ se seguirá que $T_0 = T_0 \cap T_1$. Entonces $I = 1_{T_0} \in T_0 \subset T_1$. Esto implicará que $T_1 \cong \mathcal{K} \otimes T_0$ es un álgebra C^* con identidad, lo cual es una contradicción. Por tanto $\mathcal{I}_0 = T_0 \cap T_1$.

Si suponemos que $T_m = T_m \cap T_{m+1}$, entonces $T_0 = (V^*)^m T_m V^m \subset (V^*)^m T_{m+1} V^m = T_1$. Esta es una contradicción con lo que probamos en el último párrafo. Por tanto $T_m \cap T_{m+1} \subsetneq T_m$ y así $T_m \cap T_{m+1} = \mathcal{I}_m$

La segunda parte del lema puede consultarse en [28, Lemma 2.3]. \square

Este lema muestra que tenemos una extensión

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{m-1} \xrightarrow{i'_m} B_{m-1} \xrightarrow{p'_m} B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1} \longrightarrow 0 \quad (4.3)$$

donde $i'_m : \mathcal{I}_{m-1} \rightarrow B_{m-1}$ es el mapeo inclusión y $p'_m : B_{m-1} \rightarrow B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1}$ es el mapeo cociente.

De las ecuaciones (4.1) y (4.3) tenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{m-1} & \xrightarrow{i'_m} & B_{m-1} & \xrightarrow{p'_m} & B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow I'_m & & \downarrow I_m & & \cong \downarrow \pi_m & & \\ 0 & \longrightarrow & T_m & \xrightarrow{i_m} & B_m & \xrightarrow{p_m} & B_m/T_m & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.4)$$

donde $I'_m : \mathcal{I}_{m-1} \rightarrow T_m$ e $I_m : B_{m-1} \rightarrow B_m$ son los mapeos inclusión.

4.2. Construcción del producto cruzado

En esta sección vemos que $C_Q^*(\Gamma)$ tiene K -teoría isomorfa a un producto cruzado por \mathbb{Z} . Esto nos permitirá utilizar métodos K -teóricos (la sucesión exacta de Pimsner-Voiculescu) para el cálculo de $K_*(C_Q^*(\Gamma))$.

Definimos $B := \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i} \cong \varinjlim (B_m, I_m) \subset C^*(\Gamma)$. Denotamos por $\beta : B \rightarrow B$ al endomorfismo inyectivo dado por $b \mapsto VbV^*$.

Similarmente a la construcción de Cuntz de [12] definimos $\tilde{B} := \varinjlim (B^m, \alpha_m)$ como el límite de la sucesión

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\alpha_{-m-1}} & B^{-m} & \xrightarrow{\alpha_{-m}} & \dots & \xrightarrow{\alpha_{-1}} & B^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & B^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \dots & \xrightarrow{\alpha_{m-1}} & B^m & \xrightarrow{\alpha_m} & \dots \\ & & \downarrow j_{-m} \cong & & & & \downarrow j_0 \cong & & \downarrow j_1 \cong & & & & \downarrow j_m \cong & & \\ \dots & \xrightarrow{\beta} & B & \xrightarrow{\beta} & \dots & \xrightarrow{\beta} & B & \xrightarrow{\beta} & B & \xrightarrow{\beta} & \dots & \xrightarrow{\beta} & B & \xrightarrow{\beta} & \dots, \end{array} \quad (4.5)$$

donde $j_m : B^m \rightarrow B$ son isomorfismos C^* . Como \tilde{B} es un límite directo tenemos homomorfismos $C^* \alpha^m : B^m \rightarrow \tilde{B}$ tales que $\alpha^m = \alpha^{m+1} \circ \alpha_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Ahora definimos un homomorfismo $C^* \Phi$ de \tilde{B} a sí mismo, que está inducido por «desplazamiento a la izquierda» sobre (4.5). En otras palabras, si tenemos una sucesión estabilizadora $(b^m)_{m \in \mathbb{Z}}$ donde $b^m \in B^m$ para todo m , entonces $\Phi((b^m)_{m \in \mathbb{Z}}) = (j_m^{-1} \circ j_{m+1}(b^{m+1}))_{m \in \mathbb{Z}}$. En particular para $b \in B$ el elemento $\alpha^m \circ j_m^{-1}(b)$ puede ser representado como la sucesión $(0, 0, \dots, 0, j_m^{-1}(b), \alpha_m \circ j_m^{-1}(b), \alpha_{m+1} \circ \alpha_m \circ j_m^{-1}(b), \dots) =$

$(0, \dots, 0, 0, j_m^{-1}(b), j_{m+1}^{-1} \circ \beta(b), j_{m+2}^{-1} \circ \beta^2(b), \dots)$. Por tanto $\Phi(\alpha^m \circ j_m^{-1}(b))$ puede ser representado como la sucesión $(0, \dots, 0, 0, j_{m-1}^{-1}(b), j_m^{-1} \circ \beta(b), j_{m+1}^{-1} \circ \beta^2(b), \dots)$. Esto muestra que $\Phi(\alpha^m \circ j_m^{-1}(b)) = \alpha^m \circ j_m^{-1} \circ \beta(b)$. La extensión de este mapeo a \tilde{B} (también lo llamamos Φ) es un isomorfismo C^* , porque Φ es una isometría en el conjunto denso de todas las sucesiones estabilizadoras. Ahora sea $\tilde{A} := \tilde{B} \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}$. Por la Observación 1.62, esta álgebra contiene un elemento unitario U tal que $\Phi(b) = UbU^*$ para $b \in \tilde{B}$ y $\tilde{A} = C^*(\tilde{B} \cup \{U\})$. Cada elemento de \tilde{A} es un límite de la forma $\tilde{a} = \sum_{i=-N}^N b_i U^i = \sum_{i=-N}^{-1} U^i \bar{b}_i + b_0 + \sum_{i=1}^N b_i U^i$, con $b_i \in \tilde{B}$, donde $\bar{b}_i = U^{-i} b_i U^i \in \tilde{B}$ para $i = -N, \dots, -1$. Por tanto el conjunto de elementos de \tilde{A} de la forma de arriba es denso en \tilde{A} .

Definimos $\tilde{P}_m := \alpha^m(1_{B_m}) \in \tilde{B}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Notemos que $\alpha^m(1_{B_m}) = \alpha^m \circ j_m^{-1}(I) = \alpha^{m+1} \circ \alpha_m \circ j_m^{-1}(I) = \alpha^{m+1} \circ j_{m+1}^{-1}(\beta(I))$. Por tanto $\tilde{P}_m = \Phi^{-m}(\tilde{P}_0)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Consideremos el álgebra $C^* A := \tilde{P}_0 \tilde{A} \tilde{P}_0$. Claramente $\tilde{P}_0 \tilde{B} \tilde{P}_0 \subset \tilde{P}_0 \tilde{A} \tilde{P}_0$. Como los elementos de la forma $\tilde{a} = \sum_{i=-N}^{-1} U^i b_i + b_0 + \sum_{i=1}^N b_i U^i$ son densos en \tilde{A} , entonces los elementos de la forma $\tilde{P}_0 \tilde{a} \tilde{P}_0 = \sum_{i=-N}^{-1} \tilde{P}_0 U^i b_i \tilde{P}_0 + \tilde{P}_0 b_0 \tilde{P}_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{P}_0 b_i U^i \tilde{P}_0$ son densos en $\tilde{P}_0 \tilde{A} \tilde{P}_0$. Por otro lado tenemos

$$\tilde{P}_0 \Phi(\tilde{P}_0) = (\alpha^0 \circ j_0^{-1}(I))(\alpha^0 \circ j_0^{-1}(\beta(I))) = \alpha^0 \circ j_0^{-1}(\beta(I)) = \Phi(\tilde{P}_0)$$

así $\tilde{P}_0 U \tilde{P}_0 U^* = \tilde{P}_0 \Phi(\tilde{P}_0) = \Phi(\tilde{P}_0) = U \tilde{P}_0 U^*$ de donde $\tilde{P}_0 U \tilde{P}_0 = U \tilde{P}_0$. Así

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 \tilde{a} \tilde{P}_0 &= \sum_{i=-N}^{-1} \tilde{P}_0 U^i b_i \tilde{P}_0 + \tilde{P}_0 b_0 \tilde{P}_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{P}_0 b_i U^i \tilde{P}_0 \\ &= \sum_{i=-N}^{-1} (\tilde{P}_0 U^i)(\tilde{P}_0 b_i \tilde{P}_0) + \tilde{P}_0 b_0 \tilde{P}_0 + \sum_{i=1}^N (\tilde{P}_0 b_i \tilde{P}_0)(U^i \tilde{P}_0) \end{aligned}$$

Esto muestra que si ponemos $S := U \tilde{P}_0$, entonces $\tilde{P}_0 \tilde{A} \tilde{P}_0 = C^*(\tilde{P}_0 \tilde{B} \tilde{P}_0 \cup \{S\})$. También denotamos $S_i := \alpha^0(j_0^{-1}(V_i))$ $i = 1, \dots, n$.

Como $Span(\bigcup_{l \geq 0} T_l)$ es denso en B se sigue que $Span(\bigcup_{i \geq 0} \alpha^i \circ j_i^{-1}(\bigcup_{l \geq 0} T_l))$ es denso en \tilde{B} . Por tanto $\tilde{P}_0 Span(\bigcup_{i \geq 0} \alpha^i \circ j_i^{-1}(\bigcup_{l \geq 0} T_l)) \tilde{P}_0 = Span(\tilde{P}_0 \bigcup_{i \geq 0} \alpha^i \circ j_i^{-1}(\bigcup_{l \geq 0} T_l) \tilde{P}_0)$ es denso en $\tilde{P}_0 \tilde{B} \tilde{P}_0$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 \alpha^i \circ j_i^{-1}(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l) \tilde{P}_0 &= \alpha^i \circ j_i^{-1}(\beta^i(I)) \alpha^i \circ j_i^{-1}(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l) \alpha^i \circ j_i^{-1}(\beta^i(I)) \\ &= \alpha^i \circ j_i^{-1}(\beta^i(I) (\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l) \beta^i(I)) = \alpha^i \circ j_i^{-1}(V^i (V^*)^i (\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l) V^i (V^*)^i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha^i \circ j_i^{-1}((V^i(V^*)^i)^2(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l)(V^i(V^*)^i)^2) \subset \alpha^i \circ j_i^{-1}((V^i(V^*)^i T_i)(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l)(T_i V^i(V^*)^i)) \\
 &\subset \alpha^i \circ j_i^{-1}(V^i(V^*)^i(\bigcup_{l=i}^{\infty} T_l)V^i(V^*)^i) = \alpha^i \circ j_i^{-1}(V^i(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l)(V^*)^i) = \alpha^i \circ j_i^{-1}(\beta^i(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l)) \\
 &= \alpha^i \circ \alpha_{i-1} \circ \cdots \circ \alpha_1 \circ \alpha_0 \circ j_0^{-1}(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l) = \alpha^0 \circ j_0^{-1}(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l)
 \end{aligned}$$

De esto se sigue que $\alpha^0 \circ j_0^{-1}(\text{Span}(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l))$ es denso en $\tilde{P}_0 \tilde{B} \tilde{P}_0$. Esto muestra que $\tilde{P}_0 \tilde{A} \tilde{P}_0 = C^*(\alpha^0 \circ j_0^{-1}(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l) \cup \{S\})$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
 S\alpha^0 \circ j_0^{-1}(b)S^* &= U\tilde{P}_0\alpha^0 \circ j_0^{-1}(b)\tilde{P}_0U^* = U\alpha^0 \circ j_0^{-1}(b)U^* \\
 &= \Phi(\alpha^0 \circ j_0^{-1}(b)) = \alpha^0 \circ j_0^{-1} \circ \beta(b) = \alpha^0 \circ j_0^{-1}(VbV^*)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Puesto que para todo $m > 0$, T_m puede ser construido de T_0 , la ecuación de arriba muestra que

$$\tilde{P}_0 \tilde{A} \tilde{P}_0 = C^*(\alpha^0 \circ j_0^{-1}(\bigcup_{l=0}^{\infty} T_l) \cup \{S\}) = C^*(\alpha^0 \circ j_0^{-1}(T_0) \cup \{S\}) = C^*(S_1, \dots, S_n, S)$$

Ahora queremos aplicar el Teorema 4.2 al álgebra $C^* A = \tilde{P}_0 \tilde{A} \tilde{P}_0$. $S_i = \alpha^0 \circ j_0^{-1}(V_i)$ son claramente isometrías ($i = 1, \dots, n$). $S^*S = \tilde{P}_0 U^* U \tilde{P}_0 = \tilde{P}_0$ y por tanto S también es una isometría.

Es claro de (4.6) que $SS^* = \alpha^0 \circ j_0^{-1}(VV^*)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
 0 &= \alpha^0 \circ j_0^{-1}(0) = \alpha^0 \circ j_0^{-1}((I - VV^*) \prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*)) \\
 &= (\tilde{P}_0 - \alpha^0 \circ j_0^{-1}(VV^*)) \prod_{i=1}^n (\tilde{P}_0 - \alpha^0 \circ j_0^{-1}(V_i V_i^*)) = (\tilde{P}_0 - SS^*) \prod_{i=1}^n (\tilde{P}_0 - S_i S_i^*)
 \end{aligned}$$

Esto prueba que la condición (3) se satisface.

Las condiciones (1) y (2) obviamente se cumplen para todas las parejas de isometrías de $\{S_1, \dots, S_n\}$. Si $n \geq i > k$, entonces $S_i^* S = \alpha^0 \circ j_0^{-1}(V_i^* V) = 0$, así la

condición (2) se cumple para todas las parejas (S_i, S) con $k < i \leq n$. Para $1 \leq i \leq k$ se tiene

$$\begin{aligned} SS_i &= S\alpha^0 \circ j_0^{-1}(V_i) = S\alpha^0 \circ j_0^{-1}(V_i)S^*S = \Phi(\alpha^0 \circ j_0^{-1}(V_i))S = \alpha^0 \circ j_0^{-1}(VV_iV^*)S \\ &= \alpha^0 \circ j_0^{-1}(V_iVV^*)S = \alpha^0 \circ j_0^{-1}(V_i)\alpha^0 \circ j_0^{-1}(VV^*)S = S_iSS^*S = S_iS \end{aligned}$$

Del mismo modo podemos mostrar $SS_i^* = S_i^*S$. Por tanto las condiciones (1) y (2) se cumplen para todas las parejas (S, S_i) con $1 \leq i \leq k$. Aplicando el Teorema 4.2 obtenemos $A \cong C_Q^*(\Gamma)$.

Recordamos aquí (ver [3, IV.3.1]) que toda álgebra C^* en la clase \mathfrak{N} satisface el Teorema de Coeficientes Universales. La clase o (categoría) *small bootstrap* \mathfrak{N} es la clase más pequeña de álgebras C^* separables, nucleares con las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbb{C} \in \mathfrak{N}$.
- (ii) \mathfrak{N} es cerrado bajo isomorfismo estable.
- (iii) \mathfrak{N} es cerrado bajo límites inductivos.
- (iv) \mathfrak{N} es cerrado bajo productos cruzados por \mathbb{Z} .
- (v) Si $0 \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}/\mathfrak{J} \rightarrow 0$ es una sucesión exacta, y dos de $\mathfrak{J}, \mathfrak{U}, \mathfrak{U}/\mathfrak{J}$ están en \mathfrak{N} , entonces también el tercero.

Teorema 4.9 ([28], Theorem 2.4). *Ambas álgebras C^* $A \cong C_Q^*(\Gamma)$ y $\tilde{A} = \tilde{B} \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}$ pertenecen a \mathfrak{N} y $K_*(\tilde{A}) = K_*(A)$. También si suponemos que $[\tilde{P}_0]_0$ genera $K_0(\tilde{A})$, entonces se sigue que $[\tilde{P}_0]_0$ genera $K_0(A)$.*

Notemos que $C^*(\Gamma) \in \mathfrak{N}$ porque $\mathcal{K}, C_Q^*(\Gamma) \in \mathfrak{N}$ y $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow C^*(\Gamma) \rightarrow C_Q^*(\Gamma)$ es una sucesión exacta corta.

4.3. La característica de Euler

En esta sección introducimos la característica de Euler de un grafo finito G . La definición se basa en considerar a G como el 1-esqueleto del complejo de banderas que determina, el cual contiene un n -simplejo para todo subgrafo completo de G con $n + 1$ vértices, ver Figura 4.3.

Definición 4.10. *Sea G un grafo finito con conjunto de vértices V y conjunto de aristas $E(G)$, definimos $\mathfrak{K}_0(G) = V$ y para todo $m \geq 1$*

$$\mathfrak{K}_m(G) := \{ \{v_{i_0}, \dots, v_{i_m}\} \subseteq V : (v_{i_l}, v_{i_t}) \in E(G) \text{ para todo } l, t \in \{0, \dots, m\}, l \neq t \}.$$

Entonces la característica de Euler de G está definida como

$$\chi(G) := 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m |\mathfrak{K}_m(G)|.$$

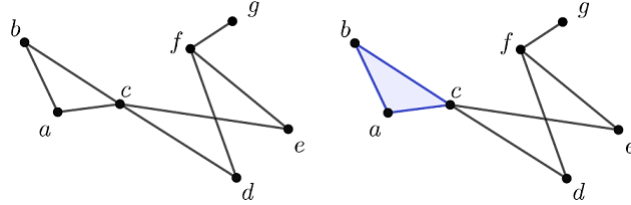


Figura 4.3: Complejo de banderas asociado al grafo de la izquierda.

Ejemplo 4.11. Sea G el grafo de la Figura 4.4. En este caso $\mathfrak{K}_2(G) = \{\{2, 3, 4\}\}$, $\mathfrak{K}_1(G) = \{\{3, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$, $\mathfrak{K}_0(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathfrak{K}_m(G) = \emptyset$ para $m \geq 3$. Por tanto $\chi(G) = 1 - (4 - 4 + 1) = 0$.

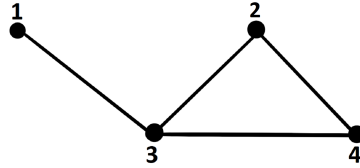


Figura 4.4: Grafo G

Ejemplo 4.12. Si G es el grafo bipartita con $2m + 2$ vértices y una arista borrada, claramente se tiene $\chi(G) = 1 - [2m + 2 - ((m + 1)^2 - 1)] = m^2 - 1$. Por tanto existen grafos con característica de Euler arbitrariamente grande. Aumentando un número finito de vértices aislados a G , podemos disminuir el valor de $\chi(G)$.

Recordemos que el vértice $n + 1$ de Γ , está conectado con los vértices $1, \dots, k$ y ningún otro. También recordemos que Γ' es un subgrafo de Γ tal que $(\Gamma')^{opp}$ es conexo.

De aquí en adelante denotaremos $Q := \prod_{i=1}^k (I - V_i V_i^*)$ y $P_m := V^m (V^*)^m$ con $m \in \mathbb{N}_0$. Definimos el grafo Γ_k con conjunto de aristas $\{(i, j) \in E(\Gamma') : 1 \leq i, j \leq k\}$.

Observación 4.13. Dado $m \geq 1$ ponemos

$$\Delta_m(\Gamma) := \{\{n + 1, j_1, \dots, j_m\} : (j_l, j_t) \in E(\Gamma) \forall l \neq t \text{ y } (n + 1, j_l) \in E(\Gamma) \forall l\},$$

entonces $\mathfrak{K}_m(\Gamma) = \mathfrak{K}_m(\Gamma') \sqcup \Delta_m(\Gamma) \forall m \geq 1$ y $\mathfrak{K}_0(\Gamma) = \{n + 1\} \cup \mathfrak{K}_0(\Gamma')$. Es claro que $\{j_1, \dots, j_m\} \in \mathfrak{K}_{m-1}(\Gamma_k)$ si y solo si $\{n + 1, j_1, \dots, j_m\} \in \Delta_m(\Gamma) \forall m \geq 1$, luego

$|\Delta_m(\Gamma)| = |\mathfrak{K}_{m-1}(\Gamma_k)| \forall m \geq 1$. Así $|\mathfrak{K}_m(\Gamma)| = |\mathfrak{K}_m(\Gamma')| + |\mathfrak{K}_{m-1}(\Gamma_k)|$ para todo $m \geq 1$ y $|\mathfrak{K}_0(\Gamma)| = |\mathfrak{K}_0(\Gamma')| + 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \chi(\Gamma) &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m |\mathfrak{K}_m(\Gamma)| \\ &= 1 - \left(|\mathfrak{K}_0(\Gamma')| + 1 + \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m |\mathfrak{K}_m(\Gamma')| + \sum_{m=1}^k (-1)^m |\mathfrak{K}_{m-1}(\Gamma_k)| \right) \\ &= 1 - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m |\mathfrak{K}_m(\Gamma')| - \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j |\mathfrak{K}_j(\Gamma_k)| \right) \\ &= \chi(\Gamma') - \chi(\Gamma_k) \end{aligned}$$

Lema 4.14. Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_m (para $m \in \mathbb{N}_0$) tenemos

$$\chi(\Gamma')[P_m]_0 = [P_{m+1}Q]_0 \text{ (en } K_0(E)). \quad (4.7)$$

Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_m y T_{m+1} (para $m \in \mathbb{N}_0$) tenemos

$$\chi(\Gamma')[P_m]_0 = \chi(\Gamma_k)[P_{m+1}]_0 \text{ (en } K_0(E)). \quad (4.8)$$

Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_{m+1} (para $m \in \mathbb{N}_0$) tenemos

$$[P_{m+1}Q]_0 = \chi(\Gamma_k)[P_{m+1}]_0 \text{ (en } K_0(E)). \quad (4.9)$$

Demostración. En la sección 4.1 mostramos que

$$\prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*) = V \prod_{i=1}^k (I - V_i V_i^*) V^* \quad (4.10)$$

Como $V^m \prod_{i=1}^n (I - V_i V_i^*) (V^*)^m = \prod_{i=1}^n (V^m (V^*)^m - V^m V_i V_i^* (V^*)^m)$, entonces multiplicando la ecuación (4.10) por V^m a la izquierda y por $(V^*)^m$ a la derecha obtenemos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (V^m (V^*)^m - V^m V_i V_i^* (V^*)^m) &= V^{m+1} \prod_{i=1}^k (I - V_i V_i^*) (V^*)^{m+1} \\ &= V^{m+1} (V^*)^{m+1} Q. \end{aligned}$$

Esto implica lo siguiente:

Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_m (para $m \in \mathbb{N}_0$) tenemos

$$\prod_{i=1}^n (V^m (V^*)^m - V^m V_i V_i^* (V^*)^m) = V^{m+1} (V^*)^{m+1} Q \quad (4.11)$$

Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_{m+1} (para $m \in \mathbb{N}_0$) tenemos

$$V^{m+1} \prod_{i=1}^k (I - V_i V_i^*) (V^*)^{m+1} = V^{m+1} (V^*)^{m+1} Q \quad (4.12)$$

Notemos que si E es una subálgebra C^* apropiada de B , entonces para toda proyección P que conmute con $V_1 V_1^*$ tenemos $[V^m P (V^*)^m - V^m P V_1 V_1^* (V^*)^m]_0 = [V^m P (V^*)^m]_0 - [V^m P V_1 V_1^* (V^*)^m]_0$ pues $V^m P (V^*)^m - V^m P V_1 V_1^* (V^*)^m$ es ortogonal a $V^m P V_1 V_1^* (V^*)^m$. Supongamos por inducción que para algún $n > l \geq 1$, si P es una proyección que conmuta con $V_1 V_1^*, \dots, V_l V_l^*$ tenemos

$$\begin{aligned} [V^m \prod_{i=1}^l (P - P V_i V_i^*) (V^*)^m]_0 &= [V^m P (V^*)^m]_0 - \sum_{i=1}^l [V^m P V_i V_i^* (V^*)^m]_0 \\ &+ \sum_{j=2}^l (-1)^j \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq l \\ (i_s, i_t) \in \Gamma', 1 \leq s < t \leq j}} [V^m P V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^m]_0 \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sabemos que $V_{l+1} V_{l+1}^*$ conmuta con cada una de $V_1 V_1^*, \dots, V_l V_l^*$. Si P conmuta con $V_1 V_1^*, \dots, V_{l+1} V_{l+1}^*$, entonces podemos aplicar (4.13) a la proyección $P V_{l+1} V_{l+1}^*$ y a la familia $V_1 V_1^*, \dots, V_l V_l^*$ para obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} [V^m V_{l+1} V_{l+1}^* \prod_{i=1}^l (P - P V_i V_i^*) (V^*)^m]_0 &= [V^m \prod_{i=1}^l (P V_{l+1} V_{l+1}^* - P V_{l+1} V_{l+1}^* V_i V_i^*) (V^*)^m]_0 \\ &= [V^m P V_{l+1} V_{l+1}^* (V^*)^m]_0 - \sum_{i=1}^l [V^m P V_{l+1} V_{l+1}^* V_i V_i^* (V^*)^m]_0 \\ &+ \sum_{j=2}^l (-1)^j \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq l \\ (i_s, i_t) \in \Gamma', 1 \leq s < t \leq j}} [V^m P V_{l+1} V_{l+1}^* V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^m]_0 \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como $V^m V_{l+1} V_{l+1}^* \prod_{i=1}^l (P - P V_i V_i^*) (V^*)^m < V^m \prod_{i=1}^l (P - P V_i V_i^*) (V^*)^m$ tenemos

$$\begin{aligned} [V^m (P - P V_{l+1} V_{l+1}^*) \prod_{i=1}^l (P - P V_i V_i^*) (V^*)^m]_0 \\ = [V^m \prod_{i=1}^l (P - P V_i V_i^*) (V^*)^m - V^m V_{l+1} V_{l+1}^* \prod_{i=1}^l (P - P V_i V_i^*) (V^*)^m]_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [V^m \prod_{i=1}^l (P - PV_i V_i^*) (V^*)^m]_0 - [V^m V_{l+1} V_{l+1}^* \prod_{i=1}^l (P - PV_i V_i^*) (V^*)^m]_0 \\
&= [V^m P (V^*)^m]_0 - \sum_{i=1}^l [V^m P V_i V_i^* (V^*)^m]_0 \\
&+ \sum_{j=2}^l (-1)^j \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq l \\ (i_s, i_t) \in \Gamma', 1 \leq s < t \leq j}} [V^m P V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^m]_0 \\
&- [V^m P V_{l+1} V_{l+1}^* (V^*)^m]_0 + \sum_{i=1}^l [V^m P V_{l+1} V_{l+1}^* V_i V_i^* (V^*)^m]_0 \\
&- \sum_{j=2}^l (-1)^j \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq l \\ (i_s, i_t) \in \Gamma', 1 \leq s < t \leq j}} [V^m P V_{l+1} V_{l+1}^* V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^m]_0 \\
&= [V^m P (V^*)^m]_0 - \sum_{i=1}^{l+1} [V^m P V_i V_i^* (V^*)^m]_0 \\
&+ \sum_{j=2}^{l+1} (-1)^j \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq l+1 \\ (i_s, i_t) \in \Gamma', 1 \leq s < t \leq j}} [V^m P V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^m]_0
\end{aligned}$$

Entonces para $P = I$ obtenemos por inducción

$$\begin{aligned}
[\prod_{i=1}^l (V^m (V^*)^m - V^m V_i V_i^* (V^*)^m)]_0 &= [V^m (V^*)^m]_0 - \sum_{i=1}^l [V^m V_i V_i^* (V^*)^m]_0 \\
&+ \sum_{j=2}^l (-1)^j \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq l \\ (i_s, i_t) \in \Gamma', 1 \leq s < t \leq j}} [V^m V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^m]_0.
\end{aligned}$$

Combinando la última ecuación con las ecuaciones (4.11) y (4.12) obtenemos las siguientes ecuaciones:

Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_m para $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
 & [V^m(V^*)^m]_0 - \sum_{i=1}^n [V^m V_i V_i^* (V^*)^m]_0 \\
 & + \sum_{j=2}^n (-1)^j \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n \\ (i_s, i_t) \in \Gamma', 1 \leq s < t \leq j}} [V^m V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^m]_0 \right) \\
 & = [V^{m+1}(V^*)^{m+1}Q]_0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_{m+1} para $m \in \mathbb{N}_0$, tomando $P = VV^*$ y $l = k$ tenemos

$$\begin{aligned}
 & [V^{m+1}(V^*)^{m+1}]_0 - \sum_{i=1}^k [V^{m+1} V_i V_i^* (V^*)^{m+1}]_0 \\
 & + \sum_{j=2}^k (-1)^j \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k \\ (i_s, i_t) \in \Gamma_k, 1 \leq s < t \leq j}} [V^{m+1} V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^{m+1}]_0 \right) \\
 & = [V^{m+1}(V^*)^{m+1}Q]_0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

En cada subálgebra C^* de B que contiene T_m la proyección $V^m V_{i_1} \dots V_{i_j} V_{i_j}^* \dots V_{i_1}^* (V^*)^m$ es Murray-von Neumann equivalente a $V^m (V^*)^m$ vía $V^m V_{i_1} \dots V_{i_j} (V^*)^m \in T_m$ donde $\{i_1, \dots, i_j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Esta observación junto con las ecuaciones (4.15) y (4.16) dan:

Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_m tenemos

$$[P_{m+1}Q]_0 = [P_m]_0 - \sum_{i=1}^n [P_m]_0 + \sum_{j=2}^n (-1)^j \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n \\ (i_s, i_t) \in \Gamma', 1 \leq s < t \leq j}} [P_m]_0 \right) = \chi(\Gamma') [P_m]_0$$

Si E es una subálgebra C^* de B que contiene T_{m+1} tenemos

$$[P_{m+1}Q]_0 = [P_{m+1}]_0 - \sum_{i=1}^k [P_{m+1}]_0 + \sum_{j=2}^k (-1)^j \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k \\ (i_s, i_t) \in \Gamma_k, 1 \leq s < t \leq j}} [P_{m+1}]_0 \right) = \chi(\Gamma_k) [P_{m+1}]_0$$

La fórmula (4.8) se sigue de (4.7) y (4.9). \square

Observación 4.15. *También se sigue de la demostración de este lema que si denotamos a las isometrías que generan $C^*(\Gamma)$ por $\tilde{V}, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n$, entonces*

$$[(I - \tilde{V}\tilde{V}^*) \prod_{i=1}^n (I - \tilde{V}_i\tilde{V}_i^*)]_0 = \chi(\Gamma)[I]_0 \text{ en } K_0(C^*(\Gamma))$$

Por tanto en la extensión

$$0 \longrightarrow \langle (I - \tilde{V}\tilde{V}^*) \prod_{i=1}^n (I - \tilde{V}_i\tilde{V}_i^*) \rangle \xrightarrow{I_\Gamma} C^*(\Gamma) \xrightarrow{Q_\Gamma} C_Q^*(\Gamma) \longrightarrow 0 \quad (4.17)$$

el mapeo I_{Γ^*} en K_0 está dado por

$$[(I - \tilde{V}\tilde{V}^*) \prod_{i=1}^n (I - \tilde{V}_i\tilde{V}_i^*)]_0 \longmapsto \chi(\Gamma)[I]_0.$$

4.4. La K -teoría de $C_Q^*(G)$ y $C^*(G)$

El objetivo de esta sección es calcular la K -teoría de $C_Q^*(\Gamma)$ y $C^*(\Gamma)$ para un grafo finito Γ con al menos dos vértices y Γ^{opp} conexo. Usaremos inducción sobre el número de vértices de Γ . Cuando Γ tiene dos vértices el resultado es inmediato del Ejemplo 4.5. Mientras que por el Lema 4.14 tenemos que $K_0(I'_m)$ y $K_0(i'_m)$ están dados por multiplicación por $\chi(\Gamma_k)$ y $\chi(\Gamma')$, respectivamente. El paso inductivo es probado al investigar los diferentes casos que se presentan, dependiendo de $\chi(\Gamma_k)$ y $\chi(\Gamma')$.

Teorema 4.16. *Supongamos que G es un grafo finito con al menos dos vértices y supongamos que G^{opp} es conexo. Entonces*

$$K_0(C_Q^*(G)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{|\chi(G)|}, & \text{si } \chi(G) \neq 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } \chi(G) = 0, \end{cases} \quad K_1(C_Q^*(G)) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } \chi(G) \neq 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } \chi(G) = 0, \end{cases} \quad (4.18)$$

y $[1_{C_Q^*(G)}]_0$ genera $K_0(C_Q^*(G))$ en todos los casos.

Además $K_0(C^*(G)) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(C^*(G)) = 0$ y $[1_{C^*(G)}]_0$ genera $K_0(C^*(G))$.

Demostración. Si G tiene dos vértices (sin arista porque G^{opp} es conexo), entonces $C_Q^*(G) \cong \mathcal{O}_2$ y $C^*(G) \cong \mathcal{E}_2$ y en este caso ciertamente el enunciado es verdadero. Supongamos que el enunciado es verdadero para todos los grafos G con a lo más $n \geq 2$ vértices y con G^{opp} conexo. El grafo Γ considerado en la sección 4.1 página 69

fue un grafo aleatoriamente elegido con $n + 1$ vértices y con la propiedad de que Γ^{opp} es conexo. Si mostramos que el enunciado se cumple para Γ , entonces probaremos el enunciado por inducción.

Supongamos que $K_0(T_{m-1}) = \mathbb{Z}[P_{m-1}]_0$ para algún $m > 1$, esto es cierto para $m = 1$. Del Lema 4.7 tenemos $K_0(T_m) \cong K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma')) \cong K_0(C^*(\Gamma')) \cong \mathbb{Z}$. Además

$$\begin{array}{ccc} T_m & \xrightarrow{\cong} & T_{m-1} \otimes \mathcal{K} \\ w_i V t_{m-1} V^* w_j^* & \mapsto & t_{m-1} \otimes S^i (I - SS^*) (S^*)^j, \end{array}$$

donde S es el operador de desplazamiento. Como el homomorfismo $T_{m-1} \rightarrow T_{m-1} \otimes \mathcal{K}$ mapeando $a \mapsto a \otimes (I - SS^*)$, induce un isomorfismo $K_0(T_{m-1}) \cong K_0(T_{m-1} \otimes \mathcal{K})$ (ver [40, Corollary 6.2.11]), se sigue que

$$\begin{array}{ccccc} K_0(T_m) & \xrightarrow{\cong} & K_0(T_{m-1} \otimes \mathcal{K}) & \xrightarrow{\cong} & K_0(T_{m-1}) \\ [P_m]_0 & \mapsto & [P_{m-1} \otimes (I - SS^*)]_0 & \mapsto & [P_{m-1}]_0 \end{array}$$

y por tanto $K_0(T_m) = \mathbb{Z}[P_m]_0$. Por otro lado, de acuerdo con [40, Corollary 7.1.9] $K_1(T_m) \cong K_1(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma')) \cong K_1(C^*(\Gamma')) = 0$.

También como $\mathcal{I}_m \cong \mathcal{K}$ tenemos $K_0(\mathcal{I}_m) = \mathbb{Z}[P_{m+1}Q]_0$ y $K_1(\mathcal{I}_m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Finalmente recordamos que π_m es un isomorfismo para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

De la sucesión exacta de seis términos en K -teoría para los dos renglones exactos de (4.4) tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{I}_{m-1}) & \xrightarrow{i'_{m*}} & K_0(B_{m-1}) & \xrightarrow{p'_{m*}} & K_0\left(\frac{B_{m-1}}{\mathcal{I}_{m-1}}\right) & (4.19) \\ & \searrow I'_{m*} & \downarrow I_{m*} & & \swarrow \cong \pi_{m*} \\ & & K_0(T_m) & \xrightarrow{i_{m*}} & K_0(B_m) & \xrightarrow{p_{m*}} & K_0\left(\frac{B_m}{T_m}\right) \\ & & \uparrow \delta_m^{ind} & & \downarrow & & \downarrow \\ & & K_1\left(\frac{B_m}{T_m}\right) & \xleftarrow{p_{m*}} & K_1(B_m) & \leftarrow & 0 \\ & \swarrow \cong \pi_{m*} & & & \uparrow I_{m*} & & \swarrow \\ K_1\left(\frac{B_{m-1}}{\mathcal{I}_{m-1}}\right) & \xleftarrow{p'_{m*}} & K_1(B_{m-1}) & \leftarrow & 0 & & \downarrow \end{array}$$

donde γ_m^{ind} y δ_m^{ind} son los mapeos índices para las correspondientes sucesiones exactas de seis términos.

Como \mathcal{I}_{m-1} está generado por $P_m Q$, del Lema 4.14 se sigue que el mapeo $i'_{m*} : K_0(\mathcal{I}_{m-1}) \rightarrow K_0(B_{m-1})$ está inducido por $[P_m Q]_0 \mapsto \chi(\Gamma')[P_{m-1}]_0$. También el mapeo $I'_{m*} : K_0(\mathcal{I}_{m-1}) \rightarrow K_0(T_m)$ está inducido por $[P_m Q]_0 \mapsto \chi(\Gamma_k)[P_m]_0$.

Ahora podemos empezar a examinar los cinco casos diferentes dependiendo de $\chi(\Gamma')$ y $\chi(\Gamma_k)$:

(caso **I**): $\chi(\Gamma') = \chi(\Gamma_k) = 0$

Por suposición $i'_{m*} = 0 = I'_{m*}$ luego $\delta_m^{ind} = I'_{m*} \circ \gamma_m^{ind} \circ \pi_{m*}^{-1} = 0$. Por tanto (4.19) se descompone en dos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{i'_{m*}=0} & K_0(B_{m-1}) & \xrightarrow[p'_{m*}]{\cong} & K_0\left(\frac{B_{m-1}}{\mathcal{I}_{m-1}}\right) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow I_{m*} & & \downarrow \pi_{m*} \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & K_0(T_m) & \xrightarrow{i_{m*}} & K_0(B_m) & \xrightarrow{p_{m*}} & K_0\left(\frac{B_m}{T_m}\right) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (4.20)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_1(B_{m-1}) & \xrightarrow{p'_{m*}} & K_1\left(\frac{B_{m-1}}{\mathcal{I}_{m-1}}\right) & \xrightarrow{\gamma_m^{ind}} & K_0(\mathcal{I}_{m-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow I_{m*} & & \downarrow \pi_{m*} \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & K_1(B_m) & \xrightarrow[p_{m*}]{\cong} & K_1\left(\frac{B_m}{T_m}\right) & \xrightarrow{\delta_m^{ind}=0} & \cdots \end{array} \quad (4.21)$$

Por suposición tenemos $K_0(B_0) = \mathbb{Z}[P_0]_0$ y $K_1(B_0) = 0$. Supongamos por inducción que $K_0(B_{m-1}) = \mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[P_{m-1}]_0$. Entonces de (4.20) se sigue que

$$\begin{aligned} K_0(B_m) &= i_{m*}(K_0(T_m)) \oplus I_{m*} \circ (p'_{m*})^{-1} \circ (\pi_{m*})^{-1}(K_0(B_m/T_m)) \\ &= i_{m*}(K_0(T_m)) \oplus I_{m*}(K_0(B_{m-1})) \\ &= \mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[P_m]_0 \quad (I_{m*} \text{ es inyectivo}) \end{aligned}$$

Notemos que $\beta_*([P_i]_0) = [\beta(P_i)]_0 = [VP_iV^*]_0 = [P_{i+1}]_0$ para todo $i = 0, \dots, m-1$ por lo cual $\beta_*^i([P_0]_0) = [P_i]_0$ para todo i , así que podemos escribir

$$K_0(B_m) = \mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \mathbb{Z}\beta_*([P_0]_0) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\beta_*^m([P_0]_0).$$

Como $K_0(\mathcal{I}_{m-1}) = \mathbb{Z}[P_m Q]_0$ es libre, existe $\sigma_m : K_0(\mathcal{I}_{m-1}) \rightarrow K_1(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1})$ homomorfismo tal que $\gamma_m^{ind} \circ \sigma_m = id_{K_0(\mathcal{I}_{m-1})}$. Supongamos por inducción que

$$\begin{aligned} K_1(B_{m-1}) &= \mathbb{Z}(p_{1*})^{-1} \circ \pi_{1*} \circ \sigma_1([P_1 Q]_0) \oplus \cdots \\ &\quad \cdots \oplus \mathbb{Z}(p_{m-1*})^{-1} \circ \pi_{m-1*} \circ \sigma_{m-1}([P_{m-1} Q]_0) \end{aligned}$$

Esto es cierto para $m = 1$ por suposición. De (4.21) vemos que $K_1(B_m) = (p_{m*})^{-1} \circ \pi_{m*}(K_1(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1}))$ y que $K_1(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1}) = p'_{m*}(K_1(B_{m-1})) \oplus \sigma_m(K_0(\mathcal{I}_{m-1}))$. Así

$$\begin{aligned} K_1(B_m) &= (p_{m*})^{-1} \circ \pi_{m*} \circ p'_{m*}(K_1(B_{m-1})) \oplus (p_{m*})^{-1} \circ \pi_{m*} \circ \sigma_m(K_0(\mathcal{I}_{m-1})) \\ &= I_{m*}(K_1(B_{m-1})) \oplus \mathbb{Z}(p_{m*})^{-1} \circ \pi_{m*} \circ \sigma_m([P_m Q]_0) \\ &= \mathbb{Z}(p_{1*})^{-1} \circ \pi_{1*} \circ \sigma_1([P_1 Q]_0) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(p_{m*})^{-1} \circ \pi_{m*} \circ \sigma_m([P_m Q]_0) \end{aligned}$$

Esto concluye la inducción. Por otra parte los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{m-1} & \xrightarrow{i'_m} & B_{m-1} & \xrightarrow{p'_m} & B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1} \longrightarrow 0 \\ & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_m & \xrightarrow{i'_{m+1}} & B_m & \xrightarrow{p'_{m+1}} & B_m/\mathcal{I}_m \longrightarrow 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_m & \xrightarrow{i_m} & B_m & \xrightarrow{p_m} & B_m/T_m \longrightarrow 0 \\ & & \beta \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\ 0 & \longrightarrow & T_{m+1} & \xrightarrow{i_{m+1}} & B_{m+1} & \xrightarrow{p_{m+1}} & B_{m+1}/T_{m+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $\bar{\beta}$ y $\bar{\beta}$ son los mapeos obvios inducidos por β , dan lugar a

$$\begin{aligned} (p_{m*})^{-1} \circ \pi_{m*} \circ \sigma_m([P_m Q]_0) &= (p_{m*})^{-1} \circ \pi_{m*} \circ \sigma_m \circ \beta_*([P_{m-1} Q]_0) \\ &= \beta_* \circ (p_{m-1*})^{-1} \circ \pi_{m-1*} \circ \sigma_{m-1}([P_{m-1} Q]_0). \end{aligned}$$

Así, si $u \in B_1$ es un unitario con $[u]_1 = (p_{1*})^{-1} \circ \pi_{1*} \circ \sigma_1([P_1 Q]_0)$ podemos escribir

$$K_1(B_m) = \mathbb{Z}[u]_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\beta_*^{m-2}([u]_1) \oplus \mathbb{Z}\beta_*^{m-1}([u]_1).$$

De esto obtenemos $K_0(B) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}\beta_*^i([I]_0)$ y $K_1(B) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}\beta_*^{i-1}([u]_1)$.

Sea $\tilde{u} = \alpha^0 \circ j_0(u) \in \tilde{B}$. Entonces es fácil ver que $K_1(\tilde{B}) = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^{i-1}([\tilde{u}]_1)$ y $K_0(\tilde{B}) = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0)$.

La sucesión exacta de Pimsner-Voiculescu da

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) & \xrightarrow{id_* - \Phi_*} & \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\tilde{A}) \\ \uparrow \gamma_1 & & & & \downarrow \gamma_0 \\ K_1(\tilde{A}) & \xleftarrow{\iota_*} & \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^{i-1}([\tilde{u}]_1) & \xleftarrow{id_* - \Phi_*} & \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^{i-1}([\tilde{u}]_1) \end{array}$$

Notemos que si $\sum_{i=-j}^j t_i \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) \in \text{Ker}(id_* - \Phi_*)$, donde $t_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = -j, \dots, j$, entonces

$$0 = t_{-j} \Phi_*^{-j}([\tilde{P}_0]_0) + \sum_{i=-j+1}^j (t_i - t_{i-1}) \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - t_j \Phi_*^{j+1}([\tilde{P}_0]_0)$$

luego $t_j = 0$, $t_{-j} = 0$ y $t_i - t_{i-1} = 0$ para todo $i = -j+1, \dots, j$. Así $t_i = 0$ para todo $i = -j, \dots, j$, es decir $K_0(id) - K_0(\Phi)$ es inyectivo. Similarmente se muestra que $K_1(id) - K_1(\Phi)$ es uno a uno. De aquí que $\text{Im}(\gamma_1) = \text{Ker}(id_* - \Phi_*) = 0$ e $\text{Im}(\gamma_0) = \text{Ker}(id_* - \Phi_*) = 0$ por lo que $\gamma_0 = 0$ y $\gamma_1 = 0$. Esto a su vez significa que $K_0(\iota)$ y $K_1(\iota)$ son suprayectivos, en consecuencia

$$K_0(\tilde{A}) = \left\{ \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z} \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) \mid \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - \Phi_*^{i+1}([\tilde{P}_0]_0) = 0, i \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}[\tilde{P}_0]_0$$

y de forma análoga $K_1(\tilde{A}) \cong \mathbb{Z}$.

Del Teorema 4.9 se sigue que $K_1(\tilde{A}) \cong K_1(C_Q^*(\Gamma)) \cong \mathbb{Z}$ y $K_0(\tilde{A}) \cong K_0(C_Q^*(\Gamma)) \cong \mathbb{Z}$ y que $[1_{C_Q^*(\Gamma)}]_0$ genera $K_0(C_Q^*(\Gamma))$.

De la Observación 4.15 se sigue que el mapeo I_{Γ^*} en K_0 es cero, obteniendo así la siguiente sucesión exacta de seis términos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{I_{\Gamma^*=0}} & K_0(C^*(\Gamma)) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1_{C_Q^*(\Gamma)}]_0 \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & K_1(C^*(\Gamma)) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Esto muestra que $K_0(C^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}[1_{C^*(\Gamma)}]_0$ y $K_1(C^*(\Gamma)) = 0$.

(caso **II**): $\chi(\Gamma') \neq 0$ y $\chi(\Gamma_k) = 0$.

Por suposición $K_0(B_0) = \mathbb{Z}[P_0]_0$, $K_1(B_0) = 0$, $K_0(B_0/\mathcal{I}_0) = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} p'_{1*}([P_0]_0)$ y $K_1(B_0/\mathcal{I}_0) = 0$. Supongamos por inducción que

$$\begin{aligned} K_0(B_{m-1}) &= \mathbb{Z}[P_{m-1}]_0 \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} [P_{m-2}]_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} [P_0]_0, \\ K_0(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1}) &= \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} p'_{m*}([P_{m-1}]_0) \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} p'_{m*}([P_{m-2}]_0) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} p'_{m*}([P_0]_0), \\ K_1(B_{m-1}) &= K_1(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1}) = 0 \end{aligned}$$

Entonces del diagrama (4.19), se sigue que $K_1(B_m/T_m) = 0$ y $K_1(B_m) = 0$. Así (4.19)

se reduce al siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K_0(\mathcal{I}_{m-1}) & \xrightarrow{i'_{m*}} & K_0(B_{m-1}) & \xrightarrow{p'_{m*}} & K_0\left(\frac{B_{m-1}}{\mathcal{I}_{m-1}}\right) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow I'_{m*}=0 & & \downarrow I_{m*} & & \cong \downarrow \pi_{m*} \\
 0 & \longrightarrow & K_0(\mathcal{I}_m) & \xrightarrow{i_{m*}} & K_0(B_m) & \xrightarrow{p_{m*}} & K_0\left(\frac{B_m}{\mathcal{I}_m}\right) \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (4.22)$$

Ahora sea $\mathcal{G} = \langle [P_0]_0, \dots, [P_{m-1}]_0 \rangle_{K_0(B_m)}$ y $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i [P_i]_0 \in \text{Ker}(p_{m*})$. Como $I_{m*}([P_i]_0) = [I_m(P_i)]_0 = [P_i]_0$ para todo $i = 0, \dots, m-1$ se sigue que

$$0 = p_{m*} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i [P_i]_0 \right) = p_{m*} \circ I_{m*} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i [P_i]_0 \right) = \pi_{m*} \circ p'_{m*} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i [P_i]_0 \right),$$

de la inyectividad de π_{m*} tenemos $p'_{m*}(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i [P_i]_0) = 0$ de manera que existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i [P_i]_0 = i'_{m*}(l[P_m Q]_0) = l\chi(\Gamma')[P_{m-1}]_0$, de donde

$$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i [P_i]_0 = I_{m*} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i [P_i]_0 \right) = I_{m*}(l\chi(\Gamma')[P_{m-1}]_0) = l\chi(\Gamma_k)[P_m]_0 = 0$$

Así p_{m*} restringido a \mathcal{G} es un isomorfismo. Este hecho también implica que no hay relaciones entre $[P_m]_0$ y \mathcal{G} pues $[P_m]_0 \in \text{Im}(i_{m*}) = \text{Ker}(p_{m*})$ y en caso de tener $[P_m]_0 \in \mathcal{G}$, necesariamente $[P_m]_0 = 0$ lo cual es absurdo. Como $[P_m]_0$ es de orden infinito en $K_0(\mathcal{I}_m)$ e i_{m*} es inyectivo, entonces $[P_m]_0$ es de orden infinito en $K_0(B_m)$. Claramente $K_0(B_m)$ está generado por $[P_m]_0$ y \mathcal{G} . Puesto que $\chi(\Gamma')[P_l]_0 = 0$ en $K_0(B_m)$ para todo $l = 0, \dots, m-1$ concluimos que

$$K_0(B_m) = \mathbb{Z}[P_m]_0 \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|}[P_{m-1}]_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|}[P_0]_0$$

De la siguiente sucesión exacta de seis términos

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(\mathcal{I}_m) & \xrightarrow{i'_{m+1*}} & K_0(B_m) & \xrightarrow{p'_{m+1*}} & K_0\left(\frac{B_m}{\mathcal{I}_m}\right) \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 K_1\left(\frac{B_m}{\mathcal{I}_m}\right) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0
 \end{array}$$

y el hecho que i'_{m+1*} está dado por $[P_{m+1}Q]_0 \mapsto \chi(\Gamma')[P_m]_0$ obtenemos que el orden de $p_{m+1*}([P_m]_0)$ en $K_0(B_m/\mathcal{I}_m)$ es $|\chi(\Gamma')|$ (pues $\chi(\Gamma')[P_m]_0 \in \text{Im}(i'_{m+1*}) = \text{Ker}(p_{m+1*})$), en consecuencia

$$K_0(B_m/\mathcal{I}_m) = p'_{m+1*}(K_0(B_m)) = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} p'_{m+1*}([P_m]_0) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} p'_{m+1*}([P_0]_0)$$

Además $K_1(B_m/\mathcal{I}_m) \cong \text{Ker}(i'_{m+1*}) = 0$. Esto completa la inducción.

Tenemos $K_0(B) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} [P_i]_0 = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} \beta_*^i([P_0]_0)$ y $K_1(B) = 0$. Por tanto $K_0(\tilde{B}) = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0)$ y $K_1(\tilde{B}) = 0$.

La sucesión exacta de Pimsner-Voiculescu da:

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) & \xrightarrow{id_* - \Phi_*} & \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\tilde{A}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\tilde{A}) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Por tanto

$$K_0(\tilde{A}) = \left\{ \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) \mid \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - \Phi_*^{i+1}([\tilde{P}_0]_0) = 0, i \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} [\tilde{P}_0]_0.$$

Por otra parte si $\sum_{i=-j}^j t_i \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) \in \text{Ker}(id_* - \Phi_*)$, donde $t_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = -j, \dots, j$, entonces

$$0 = t_{-j} \Phi_*^{-j}([\tilde{P}_0]_0) + \sum_{i=-j+1}^j (t_i - t_{i-1}) \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - t_j \Phi_*^{j+1}([\tilde{P}_0]_0)$$

por lo cual $\chi(\Gamma')|t_i$ para todo $i = -j, \dots, j$, de manera que existe $s_i \in \mathbb{Z}$ tal que $t_i = s_i \chi(\Gamma')$ para todo i , luego $\sum_{i=-j}^j t_i \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) = \sum_{i=-j}^j s_i \chi(\Gamma') \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) = 0$. Así $0 = \text{ker}(id_* - \Phi_*) \cong K_1(\tilde{A})$. Del Teorema 4.9 obtenemos $K_1(C_Q^*(\Gamma)) = 0$ y $K_0(C_Q^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma)|} [1_{C_Q^*(\Gamma)}]_0$ (notemos que $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma') - 0$).

De la Observación 4.15 concluimos que el mapeo I_{Γ_*} es «multiplicación por $\chi(\Gamma')$ », así $K_0(C^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}[1_{C^*(\Gamma)}]_0$ y $K_1(C^*(\Gamma)) = 0$.

(caso **III**): $\chi(\Gamma') = 0$ y $\chi(\Gamma_k) \neq 0$

Por suposición tenemos que $K_0(B_0) = \mathbb{Z}[P_0]_0$, $K_0(B_0/\mathcal{I}_0) = \mathbb{Z}p'_{1*}([P_0]_0)$, $K_1(B_0) = 0$ y $K_1(B_0/\mathcal{I}_0) = \mathbb{Z}$. Supongamos por inducción que

$$K_0(B_{m-1}) = \mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|} [P_1]_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|} [P_{m-1}]_0$$

y que $K_1(B_{m-1}) = 0$. Entonces del diagrama (4.19) y en virtud de $i'_{m*} = 0$ vemos que los mapeos γ_m^{ind} y $p'_{m*} : K_0(B_{m-1}) \rightarrow K_0(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1})$ son isomorfismos.

También como π_{m*} es un isomorfismo esto implica que $I_{m*} : K_0(B_{m-1}) \rightarrow K_0(B_m)$ es inyectivo y que p_{m*} restringido a $\mathcal{G} = \langle [P_0]_0, \dots, [P_{m-1}]_0 \rangle_{K_0(B_m)}$ es un isomorfismo. De esto se sigue que no existe relación entre $[P_m]_0$ y \mathcal{G} .

La conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} K_1\left(\frac{B_{m-1}}{\mathcal{I}_{m-1}}\right) & \xrightarrow[\cong]{\gamma_m^{ind}} & K_0(\mathcal{I}_{m-1}) \\ \pi_{m*} \downarrow \cong & & \downarrow I'_{m*} (= \times \chi(\Gamma_k)) \\ K_1\left(\frac{B_m}{T_m}\right) & \xrightarrow{\delta_m^{ind}} & K_0(T_m) \end{array}$$

implica que $\chi(\Gamma_k)\mathbb{Z}[P_m]_0 = Im(\delta_m^{ind}) = Ker(i_{m*})$. Así $[P_m]_0$ tiene orden $\chi(\Gamma_k)$ en $K_0(B_m)$. Por tanto

$$K_0(B_m) = \mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|}[P_1]_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|}[P_m]_0$$

También δ_m^{ind} es inyectivo y por tanto $K_1(B_m) \cong Im(p_{m*}) = Ker(\delta_m^{ind}) = 0$.

Ahora fácilmente obtenemos $K_0(B) = \mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|} \beta_*^i([P_0]_0)$ y $K_1(B) = 0$. De esto se sigue que $K_0(\tilde{B}) = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|} \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0)$ y $K_1(\tilde{B}) = 0$. La sucesión exacta de Pimsner-Voiculescu da

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|} \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) & \xrightarrow{id_* - \Phi_*} & \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|} \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\tilde{A}) \\ \uparrow & & \leftarrow & & \downarrow \\ K_1(\tilde{A}) & & 0 & & 0 \end{array}$$

Concluimos que $K_0(\tilde{A}) = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma_k)|}[\tilde{P}_0]_0$ y $K_1(\tilde{A}) = 0$. Del Teorema 4.9 obtenemos $K_0(C_Q^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma)|}[1_{C_Q^*(\Gamma)}]_0$ y $K_1(C_Q^*(\Gamma)) = 0$ (notemos que $\chi(\Gamma) = 0 - \chi(\Gamma_k)$).

De la observación 4.15 se sigue que I_{Γ^*} es «multiplicación por $\chi(\Gamma)$ » así $K_0(C^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}[1_{C^*(\Gamma)}]_0$ y $K_1(C^*(\Gamma)) = 0$.

(casos **IV** y **V**): $\chi(\Gamma') \neq 0$, $\chi(\Gamma_k) \neq 0$.

Por suposición tenemos que $K_0(B_0) = \mathbb{Z}[P_0]_0$, $K_1(B_0/\mathcal{I}_0) = 0$, $K_1(B_0) = 0$ y $K_0(B_0/\mathcal{I}_0) = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma')|} p'_{1*}([P_0]_0)$.

Entonces $0 = K_1(B_0/\mathcal{I}_0) \cong K_1(B_1/T_1)$ lo cual implica $K_1(B_1) = 0$ y $Ker(i_{1*}) = 0$. De la inyectividad de i_{1*} en K_0 y del diagrama (4.19) para $m = 1$, se sigue que $K_0(B_1) = \{\mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \mathbb{Z}[P_1]_0 | \chi(\Gamma')[P_0] - \chi(\Gamma_k)[P_1]_0 = 0\}$ es un grupo infinito.

Supongamos por inducción que para $m \geq 2$, $K_1(B_{m-1}) = 0$ y que

$$K_0(B_{m-1}) = \{\mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[P_{m-1}]_0 | \chi(\Gamma')[P_0] - \chi(\Gamma_k)[P_1]_0 = 0, \dots, \chi(\Gamma')[P_{m-2}]_0 - \chi(\Gamma_k)[P_{m-1}]_0 = 0\}$$

De la hipótesis de inducción se sigue que $[P_{m-1}]_0$ es de orden infinito en $K_0(B_{m-1})$ y por tanto $i'_{m*} : K_0(\mathcal{I}_{m-1}) \rightarrow K_0(B_{m-1})$ es inyectivo, luego $K_1(B_m/T_m) \cong K_1(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1}) \cong \text{Ker}(i'_{m*}) = 0$. Esto muestra que $K_1(B_m) = 0$ y que (4.19) se reduce a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_0(\mathcal{I}_{m-1}) & \xrightarrow{i'_{m*}} & K_0(B_{m-1}) & \xrightarrow{p'_{m*}} & K_0(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow I'_{m*} & & \downarrow I_{m*} & & \cong \downarrow \pi_{m*} \\ 0 & \longrightarrow & K_0(T_m) & \xrightarrow{i_{m*}} & K_0(B_m) & \xrightarrow{p_{m*}} & K_0(B_m/T_m) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} K_0(B_{m-1}/\mathcal{I}_{m-1}) &= \{\mathbb{Z}p'_{m*}([P_0]_0) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}p'_{m*}([P_{m-1}]_0) \mid \chi(\Gamma')p'_{m*}([P_{m-1}]_0) = 0, \\ &\quad \chi(\Gamma')p'_{m*}([P_i]_0) - \chi(\Gamma_k)p'_{m*}([P_{i+1}]_0) = 0 \forall i = 0, \dots, m-2\} \end{aligned}$$

Como $I'_{m*} : K_0(\mathcal{I}_{m-1}) \rightarrow K_0(T_m)$ está determinado por $[P_m Q]_0 \mapsto \chi(\Gamma_k)[P_m]_0$, es inyectivo y por el Lema del Quinto se sigue que I_{m*} también es inyectivo. Por tanto $K_0(B_m) = \langle [P_m]_0, I_{m*}(K_0(B_{m-1})) \rangle$. Una relación obvia en $K_0(B_m)$ además de las relaciones que vienen de $K_0(B_{m-1})$, es $\chi(\Gamma')[P_{m-1}]_0 - \chi(\Gamma_k)[P_m]_0 = 0$ y esta relación es consecuencia del Lema 4.14.

Por tanto $K_0(B_m)$ es un cociente del grupo

$$F = \{\mathbb{Z}\rho_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\rho_m \mid \chi(\Gamma')\rho_{m-1} - \chi(\Gamma_k)\rho_m = 0, \dots, \chi(\Gamma')\rho_0 - \chi(\Gamma_k)\rho_1 = 0\}$$

donde el mapeo cociente $f : F \rightarrow K_0(B_m)$ está definido en los generadores como $\rho_l \mapsto [P_l]_0$ para todo $l = 0, \dots, m$. Entonces si $F' = \mathbb{Z}\rho_m$, el cociente $F_q = F/F'$ es isomorfo a

$$\begin{aligned} F_q &= \{\mathbb{Z}\rho_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\rho_{m-1} \mid \chi(\Gamma')\rho_{m-2} - \chi(\Gamma_k)\rho_{m-1} = 0, \dots, \\ &\quad \chi(\Gamma')\rho_0 - \chi(\Gamma_k)\rho_1 = 0, \chi(\Gamma')\rho_{m-1} = 0\} \end{aligned}$$

Obviamente tenemos el diagrama conmutativo de grupos abelianos con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F_q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f_q \\ 0 & \longrightarrow & K_0(T_m) & \xrightarrow{i_{m*}} & K_0(B_m) & \xrightarrow{p_{m*}} & K_0(B_m/T_m) \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde f_q es el homomorfismo inducido por f , y f' es la restricción de f a F' . Entonces obviamente f' y f_q son isomorfismos (pues π_{m*} es un isomorfismo). Por tanto por el

Lema del Quinto se sigue que f también es un isomorfismo. Esto muestra que

$$K_0(B_m) = \{\mathbb{Z}[P_0]_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[P_m]_0 | \chi(\Gamma')[P_0]_0 - \chi(\Gamma_k)[P_1]_0 = 0, \dots, \chi(\Gamma')[P_{m-1}]_0 - \chi(\Gamma_k)[P_m]_0 = 0\}.$$

Esto concluye la inducción. Así $K_1(B) = 0$ y

$$K_0(B) = \{\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}\beta_*^i([P_0]_0) | \chi(\Gamma')\beta_*^i([P_0]_0) - \chi(\Gamma_k)\beta_*^{i+1}([P_0]_0) = 0, i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Entonces $K_1(\tilde{B}) = 0$ y

$$K_0(\tilde{B}) = \{\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) | \chi(\Gamma')\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - \chi(\Gamma_k)\Phi_*^{i+1}([\tilde{P}_0]_0) = 0, i \in \mathbb{Z}\}.$$

La sucesión exacta de Pimsner-Voiculescu da

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\tilde{B}) & \xrightarrow{id_* - \Phi_*} & K_0(\tilde{B}) & \longrightarrow & K_0(\tilde{A}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\tilde{A}) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

(Caso **IV**): $\chi(\Gamma') \neq 0$, $\chi(\Gamma_k) \neq 0$ y $\chi(\Gamma') = \chi(\Gamma_k)$.

En este caso

$$K_0(\tilde{A}) = \{\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) | \chi(\Gamma')\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - \chi(\Gamma')\Phi_*^{i+1}([\tilde{P}_0]_0) = 0, \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - \Phi_*^{i+1}([\tilde{P}_0]_0) = 0, i \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[\tilde{P}_0]_0$$

Para examinar $Ker(id_* - \Phi_*)$ tomemos $\omega = \sum_{i=-j}^j t_i \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) \in Ker(id_* - \Phi_*)$, donde $t_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = -j, \dots, j$. Entonces

$$0 = t_{-j} \Phi_*^{-j}([\tilde{P}_0]_0) + \sum_{i=-j+1}^j (t_i - t_{i-1}) \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - t_j \Phi_*^{j+1}([\tilde{P}_0]_0).$$

Por tanto $t_i = s_i \chi(\Gamma')$ para algunos enteros s_i , $i = -j, \dots, j$. De esto se sigue que $\omega = \sum_{i=-j}^j s_i \chi(\Gamma') \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) = \sum_{i=-j}^j s_i \chi(\Gamma') [\tilde{P}_0]_0$. Así $Ker(id_* - \Phi_*) = |\chi(\Gamma')| \mathbb{Z}[\tilde{P}_0]_0$. Esto muestra que $K_1(\tilde{A}) \cong \mathbb{Z}$.

Del Teorema 4.9 obtenemos $K_0(\tilde{A}) \cong K_0(C_Q^*(\Gamma)) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(\tilde{A}) \cong K_1(C_Q^*(\Gamma)) \cong \mathbb{Z}$ y que $[1_{C_Q^*(\Gamma)}]_0$ genera a $K_0(C_Q^*(\Gamma))$.

De la Observación 4.15 concluimos que la función I_{Γ^*} en K_0 es cero (ya que $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma') - \chi(\Gamma_k) = 0$). Por tanto $K_1(C^*(\Gamma)) = 0$ y $K_0(C^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}[1_{C^*(\Gamma)}]_0$.

(Caso **V**): $\chi(\Gamma') \neq 0$, $\chi(\Gamma_k) \neq 0$ y $\chi(\Gamma') \neq \chi(\Gamma_k)$.

En este caso

$$\begin{aligned} K_0(\tilde{A}) &= \left\{ \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) \mid \chi(\Gamma')\Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - \chi(\Gamma_k)\Phi_*^{i+1}([\tilde{P}_0]_0) = 0, \right. \\ &\quad \left. \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - \Phi_*^{i+1}([\tilde{P}_0]_0) = 0, i \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \{ \mathbb{Z}[\tilde{P}_0]_0 \mid \chi(\Gamma')[\tilde{P}_0]_0 - \chi(\Gamma_k)[\tilde{P}_0]_0 = 0 \} = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma') - \chi(\Gamma_k)|}[\tilde{P}_0]_0 = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma)|}[\tilde{P}_0]_0 \end{aligned}$$

Ahora sea $\omega = \sum_{i=-j}^j t_j \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0)$, $t_i \in \mathbb{Z}$ y supongamos que $(id_* - \Phi_*)(\omega) = 0$. Entonces

$$0 = t_{-j} \Phi_*^{-j}([\tilde{P}_0]_0) + \sum_{i=-j+1}^j (t_i - t_{i-1}) \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - t_j \Phi_*^{j+1}([\tilde{P}_0]_0).$$

Si $\chi(\Gamma')$ no divide t_{-j} , entonces $-t_{-j} \Phi_*^{-j}([\tilde{P}_0]_0) = \sum_{i=-j+1}^j (t_i - t_{i-1}) \Phi_*^i([\tilde{P}_0]_0) - t_j \Phi_*^{j+1}([\tilde{P}_0]_0)$ es imposible. Si $\chi(\Gamma')$ divide t_{-j} , entonces ω puede ser expresado en términos de $\Phi_*^{-j+1}([\tilde{P}_0]_0), \dots, \Phi_*^j([\tilde{P}_0]_0)$. Por inducción podemos escribir $\omega = t[\tilde{P}_0]_0$ para algún $t \in \mathbb{Z}$. Pero entonces claramente $(id_* - \Phi_*)(\omega) = 0$ es posible si y solo si $t = 0$. Esto muestra que $id_* - \Phi_*$ es inyectivo y por tanto que $K_1(\tilde{A}) = 0$.

Del Teorema 4.9 obtenemos $K_0(C_Q^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}_{|\chi(\Gamma)|}[1_{C_Q^*(\Gamma)}]_0$ y $K_1(C_Q^*(\Gamma)) = 0$. De la Observación 4.15 se sigue que I_{Γ^*} es multiplicación por $\chi(\Gamma)$, así $K_0(C^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}[1_{C^*(\Gamma)}]_0$ y $K_1(C^*(\Gamma)) = 0$. \square

4.5. Algunas aplicaciones y ejemplos

Ahora mostramos cómo las álgebras $C_Q^*(G)$ y $C^*(G)$ asociadas a un grafo G tal que G^{opp} no tiene vértices aislados, son isomorfas a productos tensoriales de álgebras Cuntz y de extensiones de álgebras de Cuntz, respectivamente.

Enunciamos un teorema de clasificación probado independientemente por Eberhard Kirchberg [29] y por Christopher Phillips [36].

Teorema 4.17. *Sean A y B álgebras C^* separables, nucleares, simples y puramente infinitas que satisfacen el Teorema de Coeficientes Universales. Supongamos que A y*

B tienen identidad. Si $K_1(A) \cong K_1(B)$ y existe un isomorfismo $\alpha : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ tal que $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$, entonces existe un isomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ con $K_0(\varphi) = \alpha$.

Un álgebra C^* que cumple todas las hipótesis del Teorema 4.17 y satisface el Teorema de Coeficientes Universales, se conoce como álgebra de Kirchberg. Denotamos por \mathcal{O}_1 un álgebra de Kirchberg con identidad tal que $K_0(\mathcal{O}_1) = \mathbb{Z}[1_{\mathcal{O}_1}]_0$ y $K_1(\mathcal{O}_1) \cong \mathbb{Z}$.

Corolario 4.18. *Sea G un grafo finito tal que G^{opp} es conexo y con al menos dos vértices, entonces $C_Q^*(G) \cong \mathcal{O}_{1+|\chi(G)|}$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 4.2, Teorema 4.9, Teorema 4.16 y Teorema 4.17. □

Ejemplo 4.19. *Consideremos los grafos G_1 y G_2 mostrados en la Figura 4.5 junto con sus grafos opuestos. Como $\chi(G_2) = 1 - (4 - 2) = -1$ y $\chi(G_1) = 1 - (4 - 3 + 1) = -1$, obtenemos de la conexidad de G_1^{opp} y G_2^{opp} que $C_Q^*(G_1) \cong C_Q^*(G_2) \cong \mathcal{O}_2$.*

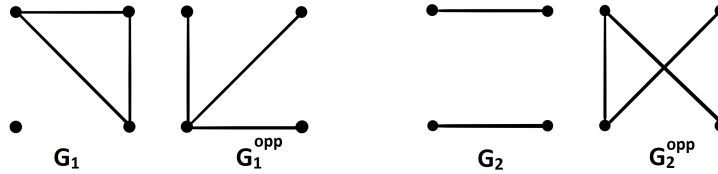


Figura 4.5: Grafos G_1 y G_2 con sus respectivos grafos opuestos.

Ejemplo 4.20. *Consideremos los grafos G_3 y G_4 mostrados en la Figura 4.6 junto con sus grafos opuestos. Como $\chi(G_3) = 1 - (4 - 1) = -2$, $\chi(G_4) = 1 - (4 - 3) = 0$ y G_3^{opp} , G_4^{opp} son conexos, se sigue que $C_Q^*(G_3) \not\cong C_Q^*(G_4)$.*

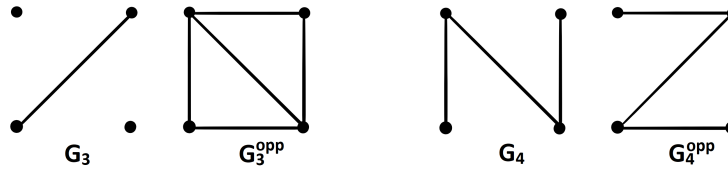


Figura 4.6: Grafos G_3 y G_4 con sus correspondientes grafos opuestos.

Un resultado análogo al Teorema 4.16 se puede conseguir para grafos infinitos.

Proposición 4.21. *Sea G un grafo infinito con una cantidad numerable de vértices y tal que G^{opp} es conexo. Entonces $C^*(G) = C_Q^*(G)$ pertenece a la clase \mathfrak{N} . Además $K_0(C^*(G)) = \mathbb{Z}[1_{C^*(G)}]_0$ y $K_1(C^*(G)) = 0$.*

Demostración. Por inducción encontraremos una sucesión creciente G_n de subgrafos de G con n vértices, $n \geq 2$, tales que G_n^{opp} son conexos para $n \geq 2$ y $G_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G$. Obviamente podemos encontrar dos vértices v_1 y v_2 que no están conectados (pues G^{opp} es conexo). Entonces elegimos G_2 al grafo con vértices v_1 y v_2 sin aristas. Supongamos que hemos definido el subgrafo G_n para algún $n \geq 2$. Sean v_1, \dots, v_n los vértices de G_n . Como G^{opp} es conexo podemos encontrar un vértice v_{n+1} de G diferente de v_1, \dots, v_n tal que v_{n+1} no está conectado con todos los vértices v_1, \dots, v_n . Entonces obviamente el subgrafo G_{n+1} de G con vértices v_1, \dots, v_{n+1} y aristas viniendo de G es tal que G_{n+1}^{opp} es conexo. Esto completa la inducción.

Así tenemos $K_0(C^*(G_n)) = \mathbb{Z}[1_{C^*(G_n)}]_0$ y $K_1(C^*(G_n)) = 0$. Es fácil ver que $C^*(G) = \varinjlim C^*(G_n)$. Por tanto $C_Q^*(G)$ pertenece a la categoría \mathfrak{N} . También $K_0(C^*(G)) = \varinjlim K_0(C^*(G_n)) = \mathbb{Z}[1_{C^*(G)}]_0$ y $K_1(C^*(G)) = \varinjlim K_1(C^*(G_n)) = 0$. \square

Del Teorema 4.2 sabemos que $C^*(G) = C_Q^*(G)$ es puramente infinita y simple. De nuevo usando el Teorema 4.17 obtenemos que si G es un grafo infinito con una cantidad numerable de vértices tal que G^{opp} es conexo, entonces $C^*(G) = C_Q^*(G) \cong \mathcal{O}_\infty$. Si definimos $\chi(G) := \infty$ para un grafo infinito numerable G con G^{opp} conexo, entonces una vez más obtenemos $C_Q^*(G) \cong \mathcal{O}_{1+|\chi(G)|}$.

Observación 4.22. *Sean G_1 y G_2 dos grafos disjuntos. Entonces por $G_1 * G_2$ denotamos a su join, el cual es el grafo obtenido a partir de G_1 y G_2 al conectar todos los vértices de G_1 con todos los vértice de G_2 , ver Figura 4.7.*

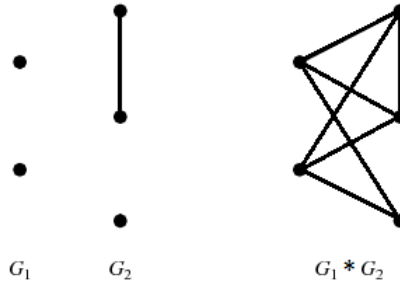


Figura 4.7: Join de G_1 y G_2 .

Si iniciamos con un grafo G con a lo más una cantidad numerable de vértices tal que G^{opp} no tiene vértices aislados, entonces existe una sucesión de subgrafos $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ algunos de los cuales pueden tener cero vértices, tales que G_n^{opp} son todos conexos y $G = \bigstar_{n=1}^{\infty} G_n$ (tal sucesión se puede encontrar al mirar las componentes conexas de G^{opp}). Para un grafo F con cero vértices escribimos $C_Q^*(F) = C^*(F) = \mathbb{C}$.

Ejemplo 4.23. En la Figura 4.8 se muestra un grafo conexo G . Su grafo opuesto G^{opp} tiene 3 componentes conexas G_1^{opp} , G_2^{opp} y G_3^{opp} . Al tomar el join de G_1 , G_2 y G_3 recobramos a G . Por tanto $G = \bigstar_{n=1}^{\infty} G_n$, donde G_n es un grafo vacío para todo $n \geq 4$.

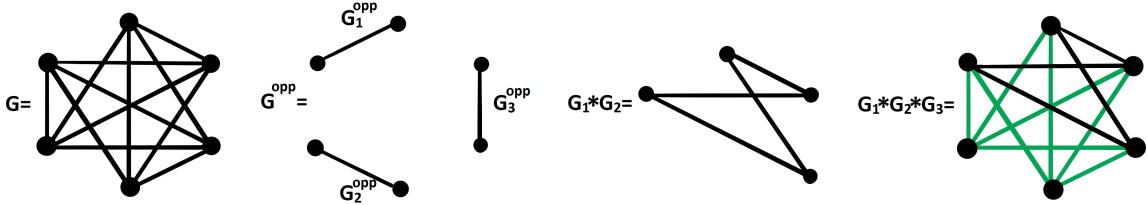


Figura 4.8: Descomposición de G como join de grafos disjuntos.

Del Teorema 4.2 fácilmente obtenemos que $C_Q^*(G) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} C_Q^*(G_n)$.

Teorema 4.24. Sea G un grafo con al menos dos vértices y a lo más una cantidad numerable de vértices tal que G^{opp} no tiene vértices aislados. Escribimos $G = \bigstar_{n=1}^{\infty} G_n$ como en la Observación 4.22 donde G_n es un subgrafo de G tal que G_n^{opp} es conexo. Entonces

$$C_Q^*(G) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} C_Q^*(G_n) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{1+|\chi(G_n)|}.$$

Ejemplo 4.25. Sea G_n un grafo con dos vértices sin aristas para todo $n \in \mathbb{N}$, escribimos $G = \bigstar_{n=1}^{\infty} G_n$. Entonces G^{opp} no tiene vértices aislados y G_n^{opp} es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $C_Q^*(G) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2$ (ver [39, Corollary 5.2.4]).

Ejemplo 4.26. Sea G_n un grafo con una cantidad numerable de vértices sin aristas para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_Q^*\left(\bigstar_{n=1}^{\infty} G_n\right) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{\infty} \cong \mathcal{O}_{\infty}$ (ver [39, Theorem 7.2.6]).

Solo resta ver cómo se comportan las álgebras $C^*(G)$. El Corolario 4.29 da una respuesta parcial a esta incógnita.

Teorema 4.27 ([19], Theorem 3.1). *Consideremos las siguientes propiedades para un álgebra C^* con identidad A :*

(1) *A contiene a \mathcal{K} como un ideal, y A/\mathcal{K} es un álgebra de Kirchberg satisfaciendo el Teorema de Coeficientes Universales,*

(2) $K_0(A) = \mathbb{Z}[1_A]_0$.

Para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existe una única álgebra C^ satisfaciendo (1), (2) y*

(3) *La sucesión exacta de seis términos para \mathcal{K} y A está dada por*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{k} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_k \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

También existe una única álgebra C^ satisfaciendo (1), (2) y*

(3') *La sucesión exacta de seis términos para \mathcal{K} y A está dada por*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z} \\ \parallel & & & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Seguimos la nomenclatura de [21] para denotar $E_{1+|k|}^{sgn(k)}$ a las únicas álgebras C^* (salvo isomorfismo) satisfaciendo (1), (2) y (3) del Teorema 4.27. Asimismo denotamos E_1^0 a la única álgebra C^* satisfaciendo (1), (2) y (3').

Observación 4.28. *Cuando $k < 0$, $E_{1+|k|}^{sgn(k)} = E_{1-k}^{-1} = \mathcal{E}_{1-k}$ es el álgebra de Toeplitz-Cuntz.*

Corolario 4.29. *Sea G un grafo finito con al menos dos vértices tal que G^{opp} es conexo, entonces $C^*(G) \cong E_{1+|\chi(G)|}^{sgn(\chi(G))}$.*

Demostración. Directo del Teorema 4.16, Teorema 4.27 y [21, Teorema 3.1]. □

La Observación 4.22 nos permite quitar la restricción sobre G^{opp} y obtener el siguiente resultado general.

Corolario 4.30. *Sea G un grafo con conjunto de vértices Λ tal que G^{opp} no tiene vértices aislados. Escribimos $G = \bigstar_{n=1}^{\infty} G_n$ como en la Observación 4.22 donde G_n es un subgrafo de G tal que G_n^{opp} es conexo. Entonces*

$$C^*(G) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty} C^*(G_n) \cong \bigotimes_{n=1}^{\infty} E_{1+|\chi(G_n)|}^{sgn(\chi(G_n))},$$

en donde ponemos $E_{1+|\chi(G_n)|}^{sgn(\chi(G_n))} := \mathcal{O}_{\infty}$ si G_n es infinito.

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{j_1, \dots, j_n\} \subset \mathbb{Z}^+$ y consideremos las inclusiones canónicas $\psi_{j_k} : C^*(G_{j_k}) \rightarrow C^*(G)$ para todo $k = 1, \dots, n$. Las relaciones del Teorema 4.3 implican que $\psi_{j_k}(C^*(G_{j_k}))$ y $\psi_{j_l}(C^*(G_{j_l}))$ conmutan para todo $k \neq l$. Por la Proposición 1.48, existe un único homomorfismo C^* inyectivo $\psi_{\mathcal{G}} : C^*(G_{j_1}) \otimes \dots \otimes C^*(G_{j_n}) \rightarrow C^*(G)$ tal que $\psi_{\mathcal{G}}(x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_n}) = \psi_{j_1}(x_{j_1}) \dots \psi_{j_n}(x_{j_n}) = x_{j_1} \dots x_{j_n}$ para todo $x_{j_k} \in C^*(G_{j_k})$ con $k = 1, \dots, n$. Sea ahora $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, si $\sum_i x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_{|\mathcal{F}|}} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} = \bigotimes_{k \in \mathcal{F}} C^*(G_k)$ entonces

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{G}}(\phi_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(\sum_i x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_{|\mathcal{F}|}})) &= \psi_{\mathcal{G}}(\sum_i x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_{|\mathcal{F}|}} \otimes 1^{\otimes |\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}|}) \\ &= \sum_i x_{i_1} \dots x_{i_{|\mathcal{F}|}} = \psi_{\mathcal{F}}(\sum_i x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_{|\mathcal{F}|}}). \end{aligned}$$

Por tanto existe un único homomorfismo C^* $\psi : \varinjlim (\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}, \phi_{\mathcal{G}\mathcal{F}}) \rightarrow C^*(G)$ el cual es inyectivo porque cada $\psi_{\mathcal{F}}$ es inyectivo. Además $V_s = \psi_s(V_s) \in \overline{\bigcup_{|\mathcal{F}| < \infty} \psi_{\mathcal{F}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})}$ para todo $s \in \Lambda$, de manera que $C^*(G) = C^*(\{V_s : s \in \Lambda\}) = \overline{\bigcup_{|\mathcal{F}| < \infty} \psi_{\mathcal{F}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})}$. Así ψ es suprayectivo, esto es, $\bigotimes_{n=1}^{\infty} C^*(G_n) := \varinjlim \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \cong C^*(G)$. \square

Ejemplo 4.31. *Sea $G = G_1 * G_2$ el grafo de la Figura 4.6. Como G^{opp} no tiene vértices aislados y G_1^{opp}, G_2^{opp} son conexos, se sigue que $C^*(G) \cong C^*(G_1) \otimes C^*(G_2) \cong \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_2$ y $C_Q^*(G) \cong \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2$ (ver [39, Theorem 5.2.1]).*

Apéndice A

Grupos de Artin

Los grupos de Artin de ángulo recto resultan tener una sorprendente riqueza y flexibilidad que llevan a algunas aplicaciones notables. En este apéndice introducimos los grupos de Artin en general y damos las propiedades esenciales de los grupos de Artin de ángulo recto. Un resumen con más propiedades algebraicas y geométricas se señalan en [7].

A.1. Grupos de trenzas

Empezamos nuestra discusión con el grupo de trenzas clásico, definido rigurosamente por Artin en 1925.

Sean p_1, \dots, p_n puntos distintos en \mathbb{C} . Una trenza consta de una colección de n caminos $b_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ conocidos como cuerdas y de una permutación $\sigma_b \in \Sigma_n$ tales que

- $b_i(t) \in \mathbb{C} \times \{t\}$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $t \in [0, 1]$.
- $b_i(0) = (p_i, 0)$ y $b_i(1) = (p_{\sigma_b(i)}, 1)$ para todo $1 \leq i \leq n$.
- las cuerdas $b_i([0, 1])$ son disjuntas, i.e. $b_i(t) \neq b_j(t)$ para todo $i \neq j$ y todo $t \in [0, 1]$.

Ver el lado izquierdo de la Figura A.1 para un ejemplo típico de una trenza en tres cuerdas.

El grupo de trenzas en n cuerdas, denotado \mathcal{B}_n , es el grupo de clases de isotopía de trenzas. La multiplicación está dada por concatenación de trenzas, una debajo de la otra. Ver el lado derecho de la Figura A.1 para un ejemplo de multiplicación de

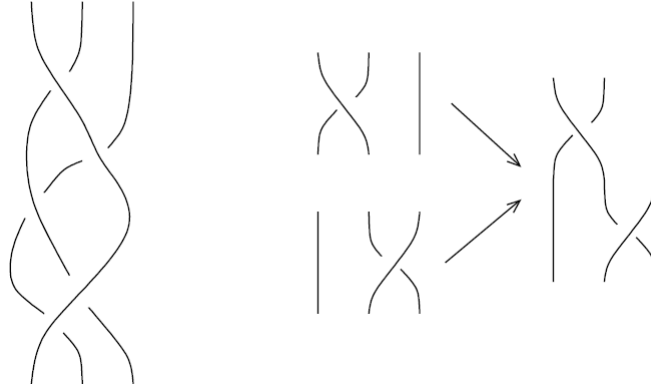


Figura A.1: Izquierda: una muestra de una 3-trenza. Derecha: el producto de dos 3-trenzas.

trenzas. El inverso de una trenza es obtenido al tomar su reflexión ya sea a través del plano $\mathbb{C} \times \{0\}$ o bien a través del plano $\mathbb{C} \times \{1\}$.

El grupo de trenzas \mathcal{B}_n está generado por $n - 1$ elementos $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, donde σ_i es la trenza que cruza la i -ésima cuerda sobre la $(i + 1)$ -ésima cuerda. Esto da lugar a una presentación bien conocida

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{para } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{para } i = 1, \dots, n - 2 \end{array} \rangle$$

Si añadimos las relaciones $\sigma_i = \sigma_i^{-1}$ a esta presentación, entonces el grupo se reduce al grupo simétrico Σ_n . Así existe un epimorfismo de grupos $\mathcal{B}_n \rightarrow \Sigma_n$.

Si pensamos en una trenza colocada dentro de un cilindro sólido, entonces al tomar rebanadas horizontales del cilindro da una descripción de una trenza como un conjunto de n puntos moviéndose en el disco, o equivalentemente en el plano complejo. Podemos ver esto como un camino en el espacio de configuraciones

$$C^{ord}(\mathbb{C}, n) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq z_j \forall i \neq j\}.$$

Salvo permutación, los n puntos comienzan y terminan en la misma posición, así este camino forma un lazo en $C^{ord}(\mathbb{C}, n)/\Sigma_n$, donde Σ_n actúa en \mathbb{C}^n al permutar coordenadas. Fue mostrado por Fox y Neuwirth [22] que esta correspondencia da un isomorfismo

$$\mathcal{B}_n \cong \pi_1(C^{ord}(\mathbb{C}, n)/\Sigma_n).$$

A.2. Grupos de Artin

Los grupos de Artin surgieron como generalizaciones naturales de los grupos de trenzas. Un grupo de Artin A es un grupo con presentación de la forma

$$A = \langle s_1, \dots, s_n : \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij}} \ \forall i \neq j \rangle,$$

donde $m_{ij} = m_{ji} \in \{2, 3, \dots\}$ ó $m_{ij} = \infty$ en cuyo caso omitimos la relación entre s_i y s_j . Si añadimos a esta presentación las relaciones $s_i = s_i^{-1}$ para todo $i = 1, \dots, n$, obtenemos un *grupo de Coxeter*

$$W = \langle s_1, \dots, s_n : (s_i)^2 = 1, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \ \forall i \neq j \rangle.$$

Notemos que $(s_i s_i)^1 = s_i^2 = 1$. Por esta razón definimos $m_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Ejemplo A.1. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ con $2 \leq k < \infty$. Entonces el grupo de Coxeter está dado por

$$W = \langle r_1, r_2 | (r_1 r_2)^k = 1, r_1^2 = r_2^2 = 1 \rangle \cong \langle s_1, s_2 | s_1^k = s_2^k = (s_1 s_2)^2 = 1 \rangle = D_{2k}$$

el grupo diédrico de orden $2k$. En particular W es lineal.

En general es cierto que si $\{H_1, \dots, H_n\}$ es una configuración de hiperplanos (que pasan por el origen) con H_i intersectando a H_j en un ángulo de $\frac{\pi}{m_{ij}}$, entonces el grupo generado por las reflexiones en estos hiperplanos es isomorfo al grupo de Coxeter.

Decimos que un grupo de Artin es de tipo finito si el grupo de Coxeter asociado es finito. Notemos que un grupo de Artin nunca es finito; en efecto, los grupos de Artin de tipo finito son libres de torsión [5] (los grupos de Artin que no son de tipo finito se conjetura que son libres de torsión). Los grupos de Artin de tipo finito se comportan muy parecido a los grupos de trenzas y sabemos bastante sobre ellos. En contraste, conocemos muy poco sobre los grupos de Artin que no son de tipo finito excepto en algunos casos especiales. Por ejemplo, los grupos de Artin de tipo finito se sabe que tienen las siguientes propiedades.

- (1) Existen espacios $K(A, 1)$ finitos [6].
- (2) El centro de A es cíclico infinito [5].
- (3) A es libre de torsión [5].
- (4) A tiene problemas de la palabra y de conjugación solubles [5].

En contraste, ninguna de la propiedades de arriba se sabe que se cumplan en general.

A.3. Grupos de Artin de ángulo recto

Un grupo de Coxeter y su grupo de Artin se dicen de ángulo recto si $m_{ij} \in \{2, \infty\}$ para todo $i \neq j$. La manera más fácil de especificar un grupo de Artin de ángulo recto ó grupo de Coxeter de ángulo recto es por medio del grafo Γ que define. Este es el grafo con conjunto de vértices $\Lambda = \{s_1, \dots, s_n\}$ teniendo una arista uniendo s_i y s_j cuando $m_{ij} = 2$. Los grupos determinados por Γ los denotamos por A_Γ y W_Γ . Es demostrado en [18] que para cualesquiera dos grafos finitos G y Γ , $A_G \cong A_\Gamma$ si y solo si $G \cong \Gamma$.

La terminología está motivada al notar que el grupo de Coxeter W_Γ es isomorfo a un grupo generado por reflexiones cuyos hiperplanos son paralelos ó se intersectan en un ángulo recto, donde las aristas de Γ dan lugar a intersecciones ortogonales entre los hiperplanos.

Ejemplo A.2. *En un extremo, tenemos un grafo Γ sin aristas, en cuyo caso $A_\Gamma = \mathbb{F}_n$, el grupo libre en n generadores. En el otro extremo está el caso de un grafo completo Γ , en cuyo caso $A_\Gamma = \mathbb{Z}^n$ y $W_\Gamma = \mathbb{Z}_2^n$.*

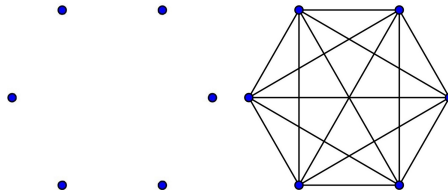


Figura A.2: Grafo sin aristas a la izquierda y grafo completo a la derecha.

Entre estos hay muchas posibilidades. Por ejemplo, si Γ es un cuadrado como en la Figura A.3 entonces A_Γ se descompone como un producto directo de dos grupos libres $A_\Gamma = \mathbb{F}[a, d] \times \mathbb{F}[b, c]$. Notemos que el único caso en el cual un grupo de Artin de ángulo recto es de tipo finito, es cuando Γ es un grafo completo.

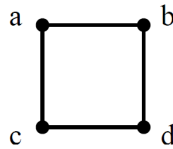


Figura A.3: $A_\Gamma = \mathbb{F}[a, d] \times \mathbb{F}[b, c]$

Los grupos de Artin de ángulo recto también surgen como subgrupos de grupos de Artin arbitrarios. Fue conjeturado por Tits y probado por Crisp y Paris [9] que para cualquier grupo de Artin A , el subgrupo generado por los cuadrados de los generadores s_1^2, \dots, s_n^2 es un grupo de Artin de ángulo recto; las únicas relaciones son conmutadores entre los cuadrados de los generadores que conmutan en el grupo original A .

El complejo de Salvetti

Asociado a un grupo de Artin de ángulo recto A_Γ está un complejo cúbico (el análogo cúbico de un complejo simplicial) $\tilde{\mathcal{S}}_\Gamma$ construido como sigue. Comenzamos con un wedge de círculos unidos a un punto x_0 y etiquetados por los generadores s_1, \dots, s_n . Para toda arista, digamos de s_i a s_j en Γ , adjuntamos un 2-toro con frontera etiquetada por la relación $s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}$. Para todo triángulo en Γ conectando tres vértices, adjuntamos un 3-toro con caras correspondiendo a los toros para las tres aristas del triángulo. Continuando con este proceso, adjuntamos un k -toro para todo conjunto de k generadores que conmuten mutuamente (i.e. vértices generando un subgrafo completo en Γ). El espacio resultante, \mathcal{S}_Γ , se conoce como el *complejo de Salvetti* para A_Γ . Es claro, por construcción, que el grupo fundamental de \mathcal{S}_Γ es A_Γ .¹

Por ejemplo, el complejo de Salvetti para un pentágono está constituido de cinco 2-toros, cada uno pegado al siguiente a lo largo de una curva, mientras que el complejo de Salvetti para el grafo Γ en la Figura A.4 es un wedge de un círculo con un 2-toro y $\pi_1(\mathcal{S}_\Gamma) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{T}^2) = \pi_1(\mathbb{S}^1) * \pi_1(\mathbb{T}^2) = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_2 s_3 s_2^{-1} s_3^{-1} = 1 \rangle = A_\Gamma$.

Teorema A.3 ([7], Theorem 2.6). *El recubrimiento universal del complejo de Salvetti, $\tilde{\mathcal{S}}_\Gamma$, es contraíble. Por tanto \mathcal{S}_Γ es un espacio $K(A_\Gamma, 1)$.*

Se sigue del teorema que A_Γ tiene un espacio $K(\pi, 1)$ finito y por tanto es libre de torsión (ver [26, Proposition 2.45]). También obtenemos del trabajo de Niblo y Reeves que A_Γ tiene problema de la palabra y de conjugación soluble.



Figura A.4: Grafo Γ y su complejo de Salvetti.

¹El término complejo de Salvetti a menudo es usado para denotar el recubrimiento de \mathcal{S}_Γ . Abusaremos de la terminología y llamaremos a \mathcal{S}_Γ el complejo de Salvetti.

Bibliografía

- [1] M. Atiyah, F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. Symposium in Pure Maths, Amer. Math. Soc. 3, 7-38 (1961).
- [2] B. Blackadar, *K*-theory for Operator Algebras. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] B. Blackadar, Operator Algebras, Enc. of Math. Sci., vol. 122, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [4] A. Borel, J. P. Serre, Le theoreme de Riemann-Roch (d'apres Grothendieck). Bull. Soc. Math. France 86, 97-136A958).
- [5] E. Brieskorn and K. Saito, Artin-gruppen und Coxeter-gruppen, Invent. Math. 17 (1972), 245-271.
- [6] R. Charney and M. Davis, Finite $K(\pi, 1)$'s for Artin groups, In: F. Quinn (ed.), Prospects in Topology, Ann. of Math. Stud. 138, Princeton Univ. Press, Princeton, 1995, pp. 110–124.
- [7] R. Charney, An introduction to right-angled Artin groups, Geom. Dedicata, 125:141-158, 2007.
- [8] L. A. Coburn, The C^* -algebra generated by an isometry, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 722–726.
- [9] J. Crisp and L. Paris, The solution to a conjecture of Tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an Artin group, Invent. Math. 145 (2001), 19-36.
- [10] J. Crisp and M. Laca, On the Toeplitz algebras of right-angled and finite-type Artin groups, J. Austral. Math. Soc. 72 (2002), 223-245.

- [11] J. Crisp, M. Laca, Boundary Quotients and Ideals of Toeplitz C^* -Algebras of Artin Groups, *J. Funct. Anal.* 242, (2007), 127-156.
- [12] J. Cuntz, Simple C^* -Algebras Generated by Isometries, *Communications in Mathematical Physics*, 57, 1977, 173-185.
- [13] J. Cuntz, K -theory for certain C^* -algebras, *Ann. Math.* 113 (1981), 181-197.
- [14] K. R. Davidson, C^* -Algebras by Example, Amer. Math. Soc., Providence, 1996.
- [15] K. R. Davidson and G. Popescu, Noncommutative disc algebras for semigroups, *Canad. J. Math.* 50 (1998), 290-311.
- [16] A. Deitmar, S. Echterhoff, Principles of harmonic analysis, Second edition, Universitext, Springer, Cham, 2014.
- [17] R. G. Douglas, On the C^* -algebra of a one-parameter semigroup of isometries, *Ada Math.* 128 (1972), 143-152.
- [18] C. Droms. Isomorphisms of graph groups. *Proc. of the Amer. Math. Soc.* 100 (1987). No 3.
- [19] S. Eilers, X. Li and E. Ruiz, The isomorphism problem for semigroup C^* -algebras of right-angled Artin monoids, *Documenta Mathematica*, 21 (2016), 309-343.
- [20] G. A. Elliott, On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras, *J. Algebra* 38, 1976.
- [21] X. Fang and S. Liu, Extension algebras of Cuntz algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 329 (2007), 655-663.
- [22] R. Fox and L. Neuwirth, The braid groups, *Math. Scand.* 10 1962 119–126.
- [23] L. Fuchs, Partially ordered algebraic systems, Addison-Wesley, Reading Mass, 1963.
- [24] J. Glimm, On a certain class of operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 95 (1960), 318-340.
- [25] E. R. Green, Graph products of groups (PhD Thesis, The University of Leeds, 1990).
- [26] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [27] T. Hsu and D. Wise, Separating quasiconvex subgroups of right-angled Artin groups, *Math. Z.* 240 (2002), no. 3, 521–548.
- [28] N. A. Ivanov, The K -Theory of Toeplitz C^* -algebras of right-angled Artin groups, *Transactions of American Mathematical Society* (2010), 6003-6027.
- [29] E. Kirchberg, The classification purely infinite of C^* -algebras using kasparov's theory, preprint (1994).
- [30] M. Laca and I. Raeburn, Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups, *J. Funct. Anal.* 139 (1996), 415-440.
- [31] M. Laca, Purely infinite simple Toeplitz algebras, *J. Operator Theory* 41 (1999), 421-435.
- [32] M. Laca and B. Li, Amenability and functoriality of right-LCM semigroup C^* -algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society* (2020), 5209–5224.
- [33] G. Murphy, C^* -Algebras and Operator Theory, Academic Press, 1990.
- [34] A. Nica, C^* -algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators, *J. Operator Theory* 27 (1992), 17-52.
- [35] G. K. Pedersen, C^* -Algebras and Their Automorphism Groups, Academic Press, London, 1979.
- [36] N. C. Phillips, A Classification Theorem for Nuclear Simple C^* -Algebras, *Documenta Mathematica*, 5 (2000), 49-114.
- [37] M. Pimsner, D. Voiculescu, Exact Sequences for K -Groups and Ext-Groups of Certain Crossproduct C^* -Algebras, *J. Operator Theory*, 4 (1980), 93-118.
- [38] M. Rørdam, F. Larsen, N. Lausten, An Introduction to K -Theory for C^* -Algebras, Cambridge University Press, 2000.
- [39] M. Rørdam, Classification of nuclear, simple C^* -algebras. Entropy in operator algebras, *Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. 126, Springer, Berlin, 2002, pp. 1–145.
- [40] N.E. Wegge-Olsen, K -Theory and C^* -Algebras, Oxford University Press, New York, 1993.
- [41] K. Zhu, An Introduction to Operator Algebras (Studies in Advanced Mathematics), CRC Press, Florida, 1993.