

CT- 772-SS1

Don- 2014



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Control Robusto de Fuerza y Posición para Manipuladores Robóticos

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
LIBROS**

Tesis que presenta:
Antonio Ortega Ordaz

para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

en la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis
Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

CLASIF..	CT00676
ADQUIS..	CT-772-SS1
FECHA:	24-06-2014
PROCED..	DON-2014
\$	

xy(213869.1)

Control Robusto de Fuerza y Posición para Manipuladores Robóticos

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Antonio Ortega Ordaz

Ingeniero en Mecatrónica

Instituto Tecnológico de Durango 2005-2009

Becario de CONACyT, expediente no. 263551

Director de Tesis

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

Resumen

Muchas aplicaciones importantes dentro de la robótica involucran la interacción entre el manipulador y el ambiente. En el presente trabajo se proponen dos enfoques distintos para controlar la posición y la fuerza de contacto entre el efector final y el ambiente en manipuladores robóticos, en el cual se diseñan controladores basados en el algoritmo de super twisting (STA) para ambos casos.

En el primer enfoque se realiza un modelado matemático considerando que el manipulador no se encuentra bajo ninguna restricción referente a su movimiento y el objetivo de control es lograr el seguimiento de la referencia en cualquier dirección y regular la fuerza de contacto a un valor deseado. En este enfoque los cambios en la geometría del ambiente son considerados en el diseño de control.

En el segundo enfoque se realiza un modelado matemático incluyendo restricciones de tipo holonómicas al sistema, las cuales originan una reducción de los grados de libertad, y como consecuencia una reducción en el movimiento del sistema. Esto ocurre en el punto de contacto con el entorno. Este modelo dinámico se desarrolla mediante una transformación no lineal particionada en control de posición y control de fuerza. El objetivo de este enfoque consiste en desacoplar la ley de control en dos partes, una para posición y otra para fuerza.

Análisis detallados de estabilidad y convergencia de los controladores propuestos han sido desarrollados mediante funciones de Lyapunov. Se lleva a cabo un estudio de simulación, donde se consideran perturbaciones externas y variaciones paramétricas para mostrar el desempeño de los controladores propuestos en ambos enfoques.

Abstract

Many important applications in robotics involve interaction between the manipulator and environment. In this master thesis two different approaches able to control the position and to regulate the contact force between the end effector and the environment are proposed. The proposed controllers are based on super twisting control algorithm (STA) for both approaches.

In the first approach, it is carried out a mathematical modelling considering that the manipulator is not under any restriction concerning their movement. The control objective is to track a motion trajectory in unconstrained directions and to regulate the contact force between the end effector and the environment at a desired value. The controller was designed taking into account changing environment constraints.

In the second approach, it is performed a mathematical modelling including holonomic constraints to the system, which causes a reduction of degrees of freedom, and consequently a reduction in the movement of the system. This occurs at the point of contact with the environment. The dynamic model is split by using a nonlinear transformation, so that the control is decoupled in two: one for position and the other for force.

The stability and convergence of the proposed controllers has been proven by using Lyapunov functions. A simulation study that considers external disturbances and parametric uncertainties is carried out in order to show the performance of the proposed controllers.

Agradecimientos

A Dios quién supo guiarme por el buen camino, darme fuerzas para seguir adelante y no sucumbir ante los problemas que se presentaban.

A mis padres, Carmen de Lourdes Ordaz Espinosa y Antonio Ortega García, por su cariño y apoyo que siempre me han brindado, siendo para mi un ejemplo en mi vida.

A mi hermano Alfredo Adolfo Ortega Ordaz por estar siempre presente, por ser el mejor hermano y amigo que alguien pudiera tener.

A mi novia Alejandra Bacio Najera por toda la paciencia, amor, comprensión y motivación brindado antes y durante el curso de mis estudios en el Cinvestav. Gracias por todo, por aparecer! Te amo chiquita!.

Agradezco al Prof. Eduardo Bayro Corrochano por brindarme su tiempo y conocimiento durante el desarrollo de esta tesis.

Agradezco al Dr. José Javier Ruiz León y al Dr. Luis Enrique González Jiménez por sus conocimientos compartidos y el apoyo brindado en la revisión de esa tesis.

Agradezco a mis compañeros y amigos del CINVESTAV: Markimba M. Williams, Antonio Serrano Espinosa, Edgar Cruz Valeriano, J. Miguel Ramírez Gutiérrez, Víctor F. Garay Monroy, Víctor G. López Mejía, Manuel Navarro Gutiérrez por su amistad y los excelentes momentos compartidos.

Agradezco a todas aquellas personas que no he mencionado aquí pero que de alguna u otra forma han influido para que pueda alcanzar esta meta.

Agradezco a CONACyT por apoyo económico necesario durante mis estudios de maestría.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Estructura de la tesis	4
2. Fundamentos matemáticos	5
2.1. Modelado Matemático de Manipuladores Robóticos	5
2.1.1. Modelo Cinemático	6
2.1.2. Modelo Dinámico	10
2.2. Control por Modos Deslizantes (MD)	15
2.2.1. Planteamiento del Problema	16
2.2.2. Existencia del Modo Deslizante	17
2.2.3. Control Equivalente	19
2.2.4. Diseño de Controlador por MD	20
2.2.5. Control de Sistemas No Lineales basado en MD	21
2.2.6. Chattering	23
2.3. Modos Deslizantes de Alto Orden	23
2.3.1. Orden Deslizante y Conjunto Deslizante	24
2.3.2. Modos Deslizantes de Segundo Orden	24
2.3.3. Planteamiento del Problema	25
2.3.4. El Controlador Super Twisting	28

3. Modelado del sistema	29
3.1. Modelado Matemático: Enfoque No Restringido	29
3.2. Modelado Matemático: Enfoque Restringido	32
4. Control Robusto de Fuerza y Posición por STA	37
4.1. Estructura del Controlador: Enfoque No Restringido	37
4.2. Diseño de controlador: Enfoque No Restringido	38
4.2.1. Controlador de Posición por STA	38
4.2.2. Analisis de Estabilidad: Controlador de Posición por STA	40
4.2.3. Controlador de Fuerza por STA	41
4.2.4. Analisis de Estabilidad: Controlador de Fuerza por STA	43
4.3. Estructura del Controlador: Enfoque Restringido	45
4.4. Diseño del Controlador: Enfoque Restringido	46
4.4.1. Controlador de Posición por STA	46
4.4.2. Analisis de Estabilidad: Controlador de Posición por STA	47
4.4.3. Controlador de Fuerza por STA	48
4.4.4. Análisis de Estabilidad: Controlador de Fuerza por STA	49
5. Resultados de Simulación	51
5.1. Simulaciones: Enfoque No Restringido	51
5.1.1. Control por STA: Escenario 1	52
5.1.2. Control por STA: Escenario 2	55
5.2. Simulaciones: Enfoque Restringido	58
5.2.1. Control por STA: Escenario Restringido	59
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	63
6.1. Conclusiones Generales	63
6.2. Trabajo futuro	64
A. Modelo Matemático: Robot de 2 DOF	65
A.1. Modelo Cinemático	65

ÍNDICE GENERAL	III
A.1.1. Cinemática Directa	65
A.1.2. Cinemática Inversa	66
A.2. Modelo Dinámico	66
A.3. Parámetros del Robot	67
A.4. Propiedades de Robots Manipuladores	68
A.5. Forma No-Lineal Controlable por Bloques	69
B.	71
B.0.1. Teorema de la función Implícita	71
B.0.2. Principio de ortogonalización	71
B.0.3. Suposiciones del sistema	72
Bibliografía	73

Índice de figuras

2.1. Unión Prismática	6
2.2. Unión Rotativa	6
2.3. Representación típica de una articulación.	6
2.4. Espacio de trabajo de un robot manipulador.	7
2.5. Caracterización del i -ésimo eslabón para las ecuaciones de Newton Euler	13
2.6. Operación en modo deslizante ideal.	15
2.7. Condición para la existencia de régimen deslizante sobre S .	17
2.8. Conmutación a frecuencia finita.	17
2.9. Trayectoria de controlador STA en el retrado de fase.	28
3.1. Configuración del manipulador.	30
3.2. Configuración del manipulador en contacto con el ambiente.	32
4.1. Controlador de posición.	37
4.2. Controlador de fuerza y posición.	38
4.3. Controlador de posición y fuerza.	45
5.1. Escenario 1	51
5.2. Escenario 2	52
5.3. Seguimiento en el eje x	53
5.4. Seguimiento en el eje y	53
5.5. Error de seguimiento en el eje x	53
5.6. Error de seguimiento en el eje y	54

5.7. Uniones	54
5.8. Torque en unión 1	54
5.9. Torque en unión 2	55
5.10. Seguimiento en el eje x	55
5.11. Seguimiento en el eje y	56
5.12. Error de seguimiento en el eje x	56
5.13. Error de seguimiento en el eje y	56
5.14. Uniones	57
5.15. Torque en unión 1	57
5.16. Torque en unión 2	57
5.17. Fuerza de Contacto	58
5.18. Configuración Restringida del Robot	58
5.19. Seguimiento Angular de Unión 1	59
5.20. Error de Seguimiento Angular de Unión 1	59
5.21. Posición del Efecto Final	60
5.22. Torque en unión 1	60
5.23. Torque en unión 2	60
5.24. Fuerza de Contacto Aplicada	61

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se describen los objetivos y problemática a resolver. Se mencionan algunos trabajos previos en el control de fuerza y posición. Finalmente se detalla la estructura de la tesis.

1.1. Preliminares

El uso de manipuladores robóticos en la industria permite automatizar muchas actividades normalmente realizadas por el hombre. Estas actividades dependen en gran medida de las características del manipulador a utilizar como: grados de libertad (GDL), número de actuadores, dimensiones de los eslabones y el tipo de efector final que pueda manejar.

Gran variedad de aplicaciones de los robots manipuladores hoy en día están basados en controles de posición, sin embargo cuando el robot manipulador entra en contacto o interactúa con su entorno, el control de posición resulta insuficiente, por lo que es necesario incluir la variable fuerza en la estrategia de control.

Las estrategias de control de posición son adecuadas para tareas, donde el manipulador no está interactuando significativamente con el ambiente como: el transporte de diversos materiales, soldadura de puntos o tareas de pintura, sin embargo tareas como ensambles, agarres, desvastado involucran un contacto excesivo con el ambiente generando fuerzas de contacto que deben de ser controladas para evitar daños (ej. daños al efector final, estructura del manipulador o el ambiente) y efectuar satisfactoriamente dichas tareas. 8 10 24

La principal problemática para lograr controlar la fuerza y posición son:

- I Conmutar las ordenes de fuerza-posición y posición-fuerza.
- II Seguimiento de trayectoria y regulación de fuerza deben ocurrir en presencia de variacio-

nes paramétricas, perturbaciones externas y no linealidades provenientes de la fricción en las uniones del manipulador.

III El controlador debe ser capaz de manejar cambios en las restricciones geométricas (*fenómeno de colisión*), ya que el ambiente puede modificarse de un momento a otro.

Con el fin de cumplir los requisitos para lograr el control de la posición y la fuerza de contacto entre el efector final y el ambiente, una extensa variedad de trabajos se han propuesto. Entre ellos podemos encontrar la técnica *passive compliance*, donde un dispositivo flexible compuesto de resortes y amortiguadores es insertado cerca del efector final, el cual se deforma en respuesta a las fuerzas causadas por deslizamiento, mostrándose que puede llevarse a un comportamiento estable en ambientes rígidos. Sin embargo, el inconveniente de estos dispositivos se encuentra en su limitada aplicación a tareas muy específicas [39] [40]. El dispositivo *passive compliance* más famoso es el *Remote Center of Compliance* [7], además existen diferentes versiones como en [30],[27]. Otra estrategia de control de fuerza es *active compliance* con la cual el robot modifica su comportamiento basándose en la salida de un sensor de fuerza como el control por impedancia [10, 5]. Este esquema de control está basado en el control de dinámica inversa [10]. La desventaja es que aplicaciones típicas de este esquema requieren un conocimiento exacto de la planta. Para mejorar el desempeño de esta técnica varias modificaciones (ej.[23, 26, 7]) fueron propuestas usando control adaptable. El esquema de control por impedancia logra controlar la fuerza de manera indirecta, en otras palabras, no es posible especificar una fuerza de contacto deseada [10]. Otro esquema propuesto de control fue el control híbrido [8] el cual se basa en controlar la fuerza en cierta dirección mientras se controla la posición en direcciones restantes. Varias mejoras del control híbrido han sido propuestas (ej. [4, 9, 20, 33, 45]), donde algunas de ellas utilizan combinaciones de control adaptable con modos deslizantes.

La mayoría de los esquemas mencionados han sido aplicados en el espacio operacional. La razón fundamental del control de fuerza y posición en el espacio operacional es la geometría del mundo externo definido como un conjunto de coordenadas que pueden ser particionadas en variables de posición y variables de fuerza por lo que el control se formula en términos de esas variables, necesitando transformaciones a variables de uniones. Otros trabajos tratan sobre modificaciones de los controladores híbridos y transformaciones en el espacio operacional donde existen inestabilidades cinemáticas, recientemente explicadas en [13]. Dadas estas inestabilidades cinemáticas surgieron trabajos basados en la aplicación de restricciones holonómicas reduciendo los grados de libertad del manipulador y transformando el sistema en subsistemas como [28] ó [29] aplicando la técnica de control basada en linealización por retroalimentación. Más recientemente desarrollaron controladores basados en modos deslizantes como en [46, 25, 42] o como en [34] que emplea una combinación de control adaptable y modos deslizantes. Sin embargo, bajo este esquema el efector final debe de estar en contacto con una superficie infinitamente rígida, además no debe de perder contacto y en algunos casos

o aplicaciones esto no sucede. En aplicaciones como agarres en manos robóticas [1] o robots cooperativos se utiliza este esquema de control, por lo que en esta tesis también se contempla este esquema. En esta tesis se eligió utilizar controladores basados en modos deslizantes ya que es un candidato natural para resolver este problema debido a ya que esta técnica provee al sistema robustez ante variaciones paramétricas y perturbaciones. Esencialmente, este tipo de controladores utilizan un ley de control discontinua que lleva el estado del sistema a una variedad específica en el espacio de estados y mantener el estado del sistema en esa variedad en todo tiempo. Las principales ventajas de este enfoque son dos

- I El sistema en la superficie deslizante se comporta como un sistema de orden reducido con respecto a la planta original
- II La dinámica del sistema mientras esté en la variedad deslizante es insensible a incertidumbre y perturbaciones.

Sin embargo, a pesar de estas propiedades descritas de robustez, en la implementación presenta su mayor inconveniente producido un efecto de cascabeleo (*chattering*) lo cual genera vibraciones en alta frecuencia del sistema controlado. Estos inconvenientes son mucho más evidentes cuando se tratan sistemas electromecánicos, ya que los cambios rápidos de control introducen deformación y desgaste en las partes mecánicas y el sistema rápidamente podría dañarse. En [21] se propuso un esquema diferente de control de fuerza y posición basado en la combinación de control adaptable y modos deslizantes proporcionando al sistema robustez ante incertidumbre en el modelo. Sin embargo con el fin de evitar el *chattering* se propuso aplicar una aproximación continua de los modos deslizantes de primer orden. Un consecuencia de este método es que la propiedad de invarianza se pierde. Se señaló en [40] que esta metodología es altamente sensible a dinámica no modelada provocando bajo desempeño. Recientes algoritmos surgieron para evitar estos problemas y se propusieron modos deslizantes de alto orden, cuya idea principal fue cambiar la dinámica a una pequeña vecindad de la superficie discontinua para evitar la discontinuidad real, al mismo tiempo preservar propiedades principales de todo el sistema. En este trabajo se presentan controladores de posición y fuerza basados en el algoritmo super-twisting (STA) brindando robustez al sistema en lazo cerrado mientras se reduce el efecto *chattering* [14], generando una ley de control totalmente continua [36] y asegurando convergencia en tiempo finito.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis consiste en la aplicación de un controlador basado en STA que permita lograr el seguimiento de la referencia de posición y de regular la fuerza de contacto entre el efector final y el ambiente a un valor deseado en presencia de variaciones

paramétricas y perturbaciones externas. Para lograr el objetivo principal de esta tesis, se plantean dos metodologías diferentes enfocándose en restricciones referente al movimiento del manipulador.

En el primer enfoque planteado no se incluye ninguna restricción en el movimiento del manipulador (Enfoque: No Restringido), en el cual además de lograr el objetivo principal se plantean diferentes objetivos específicos para este enfoque:

- I Desarrollar un modelado matemático adecuado para controlar la fuerza y posición.
- II Desarrollar un controlador capaz de manejar cambios en las restricciones geométricas.
- III Lograr que el controlador conmute de fuerza-posición y de posición-fuerza.
- IV Desarrollar los análisis de estabilidad para el controlador propuesto en lazo cerrado, utilizando el enfoque de Lyapunov.

En el segundo enfoque planteado se incluyen restricciones de tipo holónomica reduciendo los grados de libertad del manipulador y consecuentemente la dinámica del sistema (Enfoque: Restringido), en el cual se plantean diferentes objetivos específicos para este enfoque:

- I Convertir el modelado matemático del sistema en dos subsistemas reducidos matemáticamente tratables.
- II Desarrollar un controlador basado en STA para cada subsistema.
- III Desarrollar los análisis de estabilidad para el controlador propuesto en lazo cerrado, utilizando el enfoque de Lyapunov.

1.3. Estructura de la tesis

El contenido y desarrollo de los principales temas de esta tesis se encuentra distribuido de la siguiente manera: en el *capítulo 2* se presentan los fundamentos matemáticos necesarios para la comprensión del modelado matemático en robots manipuladores y los fundamentos de las técnicas de control empleadas para lograr los objetivos planteados. En el *capítulo 3* se presentan los diferentes enfoques para el modelado matemático adecuados para controlar la fuerza y la posición. El desarrollo de los controladores y las demostraciones de estabilidad y robustez son presentados en el *capítulo 4*. En el *capítulo 5* se presentan los resultados de simulación de ambos esquemas de control. Las conclusiones de este trabajo y el trabajo futuro son mostrados en el *capítulo 6*. En el *Apéndice* se incluyen datos numéricos y propiedades de los modelos del manipulador, además de definiciones y suposiciones utilizadas a lo largo del diseño de los esquemas de control.

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos

En este capítulo se presentan fundamentos matemáticos del modelado de robots manipuladores con el fin de facilitar la comprensión de los modelos construidos en el capítulo 3. En la segunda sección se abordan conceptos sobre el control basado en modos deslizantes. Inicialmente, se introducen los conceptos correspondientes al control por modos deslizantes de primer orden, para posteriormente abordar los de orden superior.

2.1. Modelado Matemático de Manipuladores Robóticos

Dos características importantes que se pueden modelar de un manipulador son su cinemática y su dinámica. Una manera de modelar la cinemática de un manipulador es utilizando el concepto de cadena cinemática. Una cadena cinemática es una serie de cuerpos rígidos, también llamados eslabones, interconectados por pares cinemáticos. Un par cinemático, unión o articulación es el acoplamiento de dos cuerpos rígidos de tal forma que delimita su movimiento relativo. Un robot manipulador no redundante consiste en una cadena cinemática de $n + 1$ eslabones conectados por n uniones. Existen muchos tipos de pares cinemáticos, pero la mayoría se pueden modelar como una combinación del par de rotación o revolutivo y el par de deslizamiento o prismático, los cuales se consideran los pares básicos. En la Fig. 2.3 se muestran estos tipos de pares cinemáticos o uniones.

Al primer eslabón de una cadena cinemática se le suele llamar base y al último se le denomina efector final que es el destinado a colocar la herramienta para la aplicación específica.

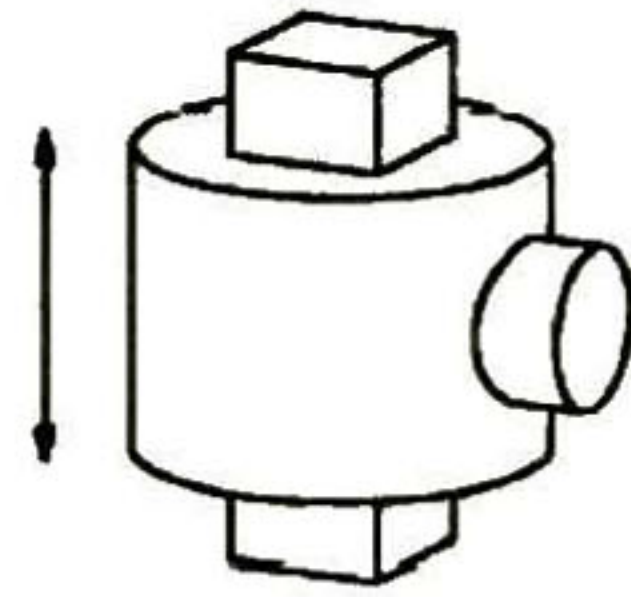


Figura 2.1: Unión Prismática

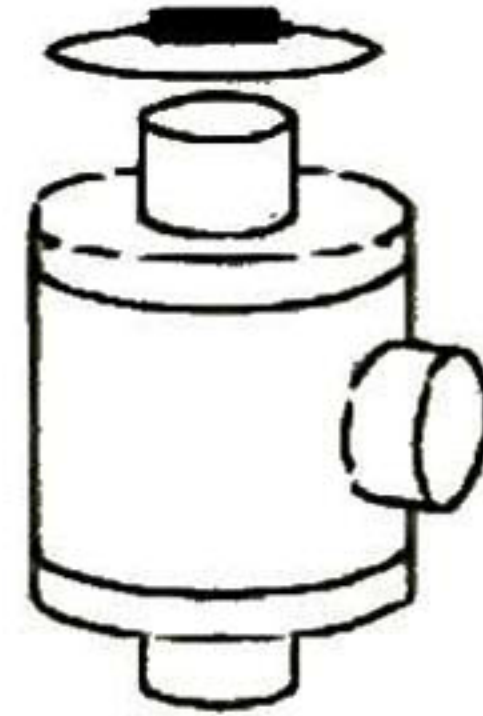


Figura 2.2: Unión Rotativa

Figura 2.3: Representación típica de una articulación.

2.1.1. Modelo Cinemático

Este tipo de modelado se refiere a la descripción del movimiento del manipulador con respecto a un sistema de referencia fijo, sin considerar las fuerzas y momentos que generan dicho movimiento. En pocas palabras, a la cinemática solo le concierne la geometría del sistema. En el modelado de manipuladores se pueden distinguir tres tipos de cinemática: la cinemática directa, la cinemática inversa y la diferencial.

Cinemática Directa

La cinemática directa de un manipulador consiste en determinar el mapeo entre las variables de las uniones (posiciones angulares o lineales) y la pose (posición y orientación) del elemento o efector final, con respecto a algún sistema de referencia. De la mecánica clásica de los cuerpos rígidos, se puede expresar la cinemática directa de un manipulador por medio de la matriz de transformación homogénea de dimensiones 4×4 que se muestra a continuación:

$${}^bT_e(q) = \begin{pmatrix} & {}^bR_e(q) & & {}^b p_e(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Donde q es el vector de las variables de uniones o articulaciones con dimensiones $(n \times 1)$, ${}^b p_e(q)$ es el vector de la posición del elemento actuador final de dimensiones (3×1) y ${}^b R_e(q) = \begin{pmatrix} {}^b n_e & {}^b s_e & {}^b a_e \end{pmatrix}$ es la matriz de (3×3) de rotación del marco de referencia del elemento actuador final e con respecto al marco de referencia base b . El superíndice que precede a una

variable que denota el marco de referencia en el que esta expresada. Nótese que la matriz ${}^bR_e(q)$ es ortogonal y sus columnas bn_e , bs_e , ba_e son vectores unitarios de los ejes de referencia del elemento actuador final. Uno de los procedimientos más efectivos y utilizados para obtener la cinemática directa de un manipulador, es la notación de Denavit-Hartenberg, ver [10] para más detalles. De una manera más formal la cinemática directa es una función vectorial que relaciona las coordenadas articulares $q \in \mathbb{R}^n$ con las coordenadas cartesianas asociadas al efector final $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ del robot representando la posición y $\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R}^n$ los ángulos de Euler o RPY (Roll,pitch,yaw) [41], que describe una representación mínima [10, 41] de la orientación del efector final con respecto al sistema de referencia fijo en la base del robot. Formando un vector de $(m \times 1)$

$$X = [x \ y \ z \ \theta \ \phi \ \psi]^T \quad (2.2)$$

Esta representación de la posición y orientación permite la descripción del efector final con un número de parámetros inherentemente independientes. El vector X esta definido en un espacio llamado espacio cartesiano, operacional o *task space*. La dimensión en el espacio cartesiano a lo mas es $m = 6$, donde 3 coordenadas especifican posición y 3 ángulos especifican orientación. Por otro lado el espacio angular o espacio de configuración es el espacio donde está definido el vector q . La noción del espacio operacional y el espacio articular permite introducir el concepto de espacio de trabajo o *workspace*. El espacio de trabajo es la región descrita por el origen del marco de referencia del efector final cuando todas las articulaciones del manipulador ejecutan todos los movimientos posibles como se muestra en la Fig. 2.4.

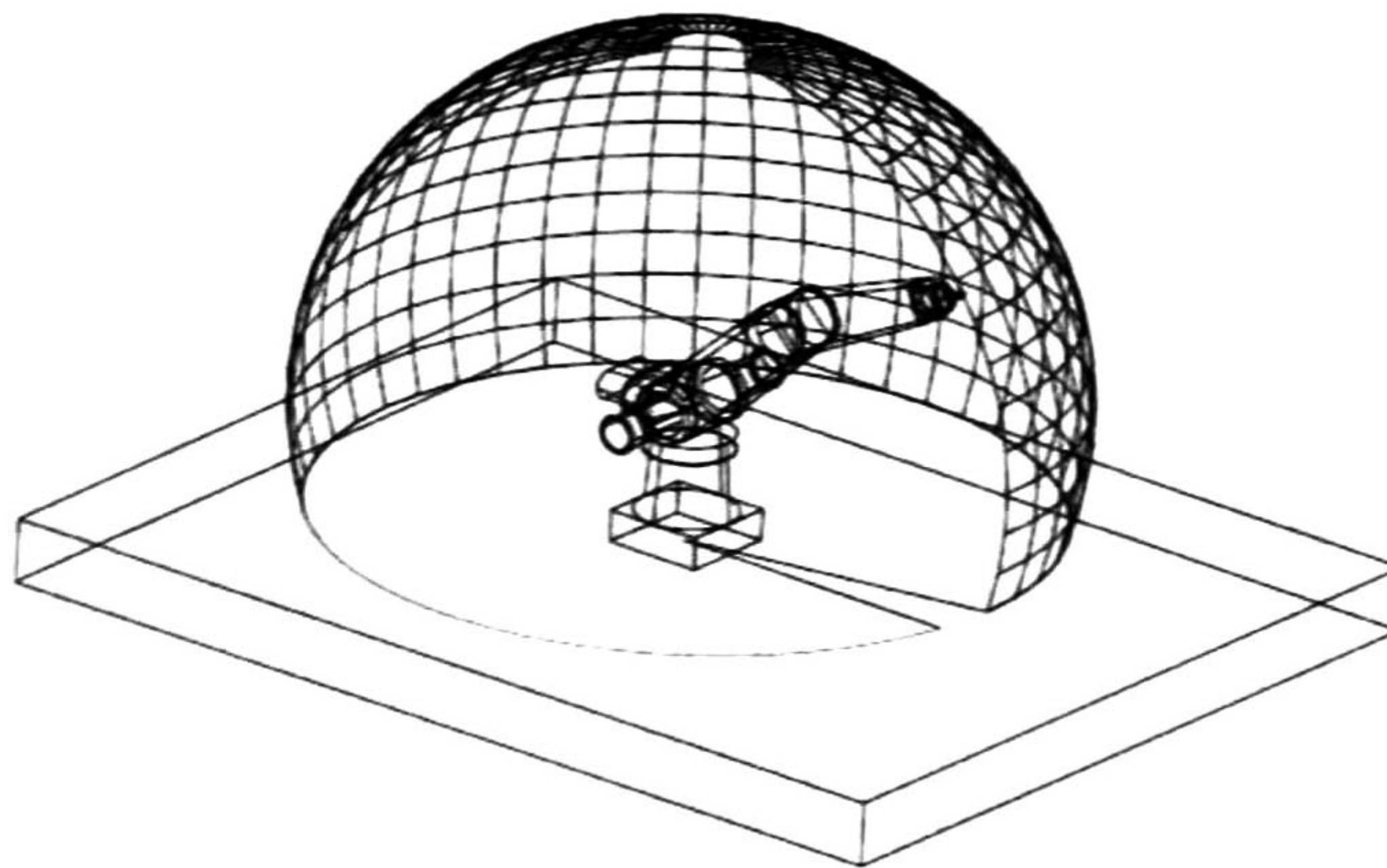


Figura 2.4: Espacio de trabajo de un robot manipulador.

El espacio de trabajo se caracteriza por la geometría del manipulador y por los límites articulares mecánicos.

Cinemática Inversa

A diferencia de la cinemática directa, que obtiene la posición y orientación del elemento actuador final en base a las variables de las uniones, la cinemática inversa determina los valores de las variables de las uniones a partir de una posición p_e y orientación R_e dadas para el elemento actuador final. Este problema es muy importante, ya que las tareas a realizar están definidas en base a posiciones y orientaciones del elemento actuador final. Entonces para que el manipulador las ejecute correctamente se debe traducir esta información en valores de las variables de uniones q . En cuanto a la cinemática directa se refiere, una vez que se tiene la información de las variables de uniones, la posición y orientación del elemento actuador final está definida de forma única. En general, esto no sucede para la cinemática inversa, lo que hace a este problema mucho más complejo. Esta complejidad se debe a las siguientes razones [10]:

1. Las ecuaciones a resolver son, en general, no lineales: para las cuales no siempre es posible encontrar soluciones en forma cerrada.
2. Pueden existir múltiples o hasta infinitas soluciones (en el caso de manipuladores redundantes).
3. Puede no existir solución, debido a la estructura cinemática del manipulador.

La existencia de solución se puede garantizar solo si la posición y orientación del elemento actuador final pertenecen al espacio de trabajo del manipulador. En [40, 41, 10, 8] se encuentran diferentes procedimientos para resolver la cinemática inversa.

Cinemática Diferencial

Este tipo de cinemática se requiere al mapeo entre el vector de velocidades de uniones \dot{q} $n \times 1$ y el vector de velocidad del elemento actuador final v . Dicha relación se puede observar en la ecuación siguiente

$$v = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{pmatrix} = J(q)\dot{q} \quad (2.3)$$

donde \dot{p} es el vector de velocidad lineal de dimensión 3×1 , ω es el vector de velocidad angular de dimensión 3×1 , y $J(q)$ es lo que se conoce como matriz jacobiana o jacobiano. Existen dos formas para calcular el jacobiano de un sistema mecánico: el jacobiano geométrico y el jacobiano analítico. El jacobiano geométrico se obtiene mediante un procedimiento geométrico, basado en el cálculo de lo que contribuye cada velocidad de unión a la velocidad lineal y angular del elemento actuador final. Estas contribuciones están dadas por la siguiente

relación:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 a_1 + \bar{\xi}_1 (a_1 \times p_{1n}) & \dots & \xi_n a_n + \bar{\xi}_n (a_n \times p_{nn}) \\ \bar{\xi}_1 a_1 & \dots & \bar{\xi}_n a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = J_n(q) \dot{q} \quad (2.4)$$

Definiendo Z_k como el eje de rotación de la unión k , donde a_k es el vector unitario de Z_k y p_{kn} denota el vector definido desde el origen del marco de referencia k al origen del marco de referencia n . Los términos ξ_i y $\bar{\xi}_i$ definen las características del tipo de unión de la siguiente manera:

$$\bar{\xi}_i = 1 - \xi_i$$

$\xi_i = 0$ si la unión i es rotativa.

$\xi_i = 1$ si la unión i es prismática.

Tenga en cuenta que J_n es una función de q a través de los vectores a_k y p_{kn} , los cuales pueden ser obtenidos sobre la base de la cinemática directa. El jacobiano analítico suele utilizarse si la orientación y posición del elemento actuador final están especificados en términos de un número mínimo de parámetros en el espacio cartesiano del manipulador. Es posible calcular el jacobiano por diferenciación de la cinemática directa es decir

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\phi}_e \end{pmatrix} = J_a(q) \dot{q} \quad (2.5)$$

donde p_e es el vector de posición y ϕ_e el de orientación y la matrix J_a es el jacobiano analítico. Existe una relación entre los dos tipos de jacobianos, determinada por:

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi_e) \end{pmatrix} = T_a(\phi_e) J_a \quad (2.6)$$

donde $T(\phi_e)$ es una matriz de transformación que depende de los parámetros usados para representar la orientación del elemento actuador final. Cabe mencionar que siempre se puede encontrar una matriz de mapeo entre el jacobiano analítico y el geométrico si $T(\phi_e)$ tiene rango pleno. En general, cuando el jacobiano no posee rango completo presenta singularidades cinemáticas y estas se pueden clasificar como:

1. Singularidades de contorno. Ocurren cuando el manipulador se extiende o se contrae. Esto resulta cuando el extremo del manipulador llega a la frontera de su espacio alcanzable.
2. Singularidades internas. Ocurren dentro del espacio alcanzable y son generalmente causadas por el alineamiento de dos o más ejes de movimiento o por la configuración del efector final. Al contrario de la anterior, estas singularidades constituyen un problema debido a que se pueden dar en cualquier punto dentro del espacio alcanzable.

2.1.2. Modelo Dinámico

El modelado dinámico de un robot manipulador consiste en encontrar el mapeo entre las fuerzas ejercidas sobre la estructura del manipulador y las posiciones, velocidades y aceleraciones de las uniones. Las formas más usadas para calcular dicho modelo son: las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones de Newton-Euler. La primera es más simple y sistemática, la segunda más eficiente desde un punto de vista computacional. En el resto de esta sección se explicarán los fundamentos de estos dos procedimientos de modelado dinámico.

Ecuaciones de Lagrange

Si tomamos en cuenta que las variables de las uniones q_i constituyen un conjunto de coordenadas generalizadas del sistema, el modelo dinámico del manipulador puede ser inferido por las ecuaciones de Lagrange como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

donde

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (2.8)$$

donde τ_i es el vector de fuerzas y pares generados por los actuadores en las uniones, un esfuerzo torsión para una unión rotativa y una fuerza lineal para una unión prismática, y L es un término conocido como el Lagrangiano, donde K es la energía cinética del sistema y U es la energía potencial. Nótese que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como grados de libertad tenga el robot manipulador. El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de manipuladores se reduce a cuatro etapas:

1. Cálculo de la energía Cinética: $K(q, \dot{q})$
2. Cálculo de la energía Potencial: $U(q)$
3. Cálculo del Lagrangiano: $L(q, \dot{q})$
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange

La energía cinética $K(q, \dot{q})$ de un robot manipulador de n grados de libertad formado por eslabones rígidos puede expresarse siempre como:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \quad (2.9)$$

donde $H(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ denominada matriz de inercia. La energía potencial $U(q)$ no tiene una forma específica como el caso de la energía cinética,

pero se sabe que depende del vector de posiciones articulares q . El lagrangiano $L(q, \dot{q})$ dado por la Ec. (2.8), es en este caso:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} - U(q) \quad (2.10)$$

Con esta forma para el lagrangiano, la Ec. (2.7) puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = \tau \quad (2.11)$$

Por otra lado, puede verificarse que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right] &= H(q) \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right] \right] &= H(q) \ddot{q} + \dot{H}(q) \dot{q} \end{aligned}$$

Considerando las expresiones anteriores, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$H(q) \ddot{q} + \dot{H}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T H(q) \dot{q}] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = \tau$$

o de modo compacto

$$H(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} C(q, \dot{q}) \dot{q} &= \dot{H}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T H(q) \dot{q}] \\ g(q) &= \frac{\partial U(q)}{\partial q} \end{aligned}$$

La Ec. (2.12) es la ecuación dinámica para robots de n grados de libertad. Notese que la Ec. (2.12) es una ecuación diferencial vectorial no lineal de segundo orden acoplada, que relaciona las posiciones, velocidades y aceleraciones de las uniones con los momentos de fuerza de las mismas. El término $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ es un vector de $n \times 1$ llamado vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis¹, $g(q)$ es un vector de $n \times 1$ de fuerzas o pares gravitacionales y τ es un vector de $n \times 1$ llamado vector de fuerzas torques, siendo generalmente los pares y fuerzas aplicadas por los actuadores en las articulaciones.

La matriz $C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ puede no ser única, pero el vector $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ si lo es. Una manera de obtener $C(q, \dot{q})$ es a través de los coeficientes o símbolos de Christoffel $c_{ijk}(q)$ definidos como:

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial H_{ki}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial H_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \quad (2.13)$$

¹ Es la fuerza que experimenta un cuerpo con masa que se desplaza sobre otro objeto en rotación.

Los elementos $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ son funciones de los parámetros cinemáticos y dinámicos de los eslabones, y se pueden obtener expresando la energía cinética y potencial en términos de la posición y velocidad de las uniones. La energía cinética está dada por la sumatoria de las energías cinéticas de cada eslabón del manipulador, es decir,

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (2.14)$$

donde K_i denota la energía cinética del eslabón i . Esto puede ser calculado haciendo referencia a todas las cantidades al marco de referencia del eslabón i como:

$$K_i = \frac{1}{2} ({}^i\omega_i^T I_i \omega_i + m_i \dot{p}_i^T \dot{p}_i + 2m_i r_i^T (\dot{p}_i \times \omega_i)) \quad (2.15)$$

En la Ec. (2.15), m_i es la masa del eslabón i , iI_i es el tensor de inercia del eslabón i con respecto al marco de referencia del origen i

$${}^iI_i = \begin{pmatrix} I_{ixx} & I_{ixy} & I_{ixz} \\ I_{ixy} & I_{iyy} & I_{iyz} \\ I_{ixz} & I_{iyz} & I_{izz} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

y $m_i r_i$ es el primer momento de inercia con respecto al marco de referencia del origen i

$$m_i r_i = (m_i r_{ix} \quad m_i r_{iy} \quad m_i r_{iz})^T \quad (2.17)$$

siendo $r_i = p_{ci} - p_i$, donde p_{ci} que es el vector de posición del centro de masa del eslabón i y p_i es el vector de posición del marco de referencia del eslabón origen i . Procediendo como la energía cinética, la energía potencial esta dada por

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (2.18)$$

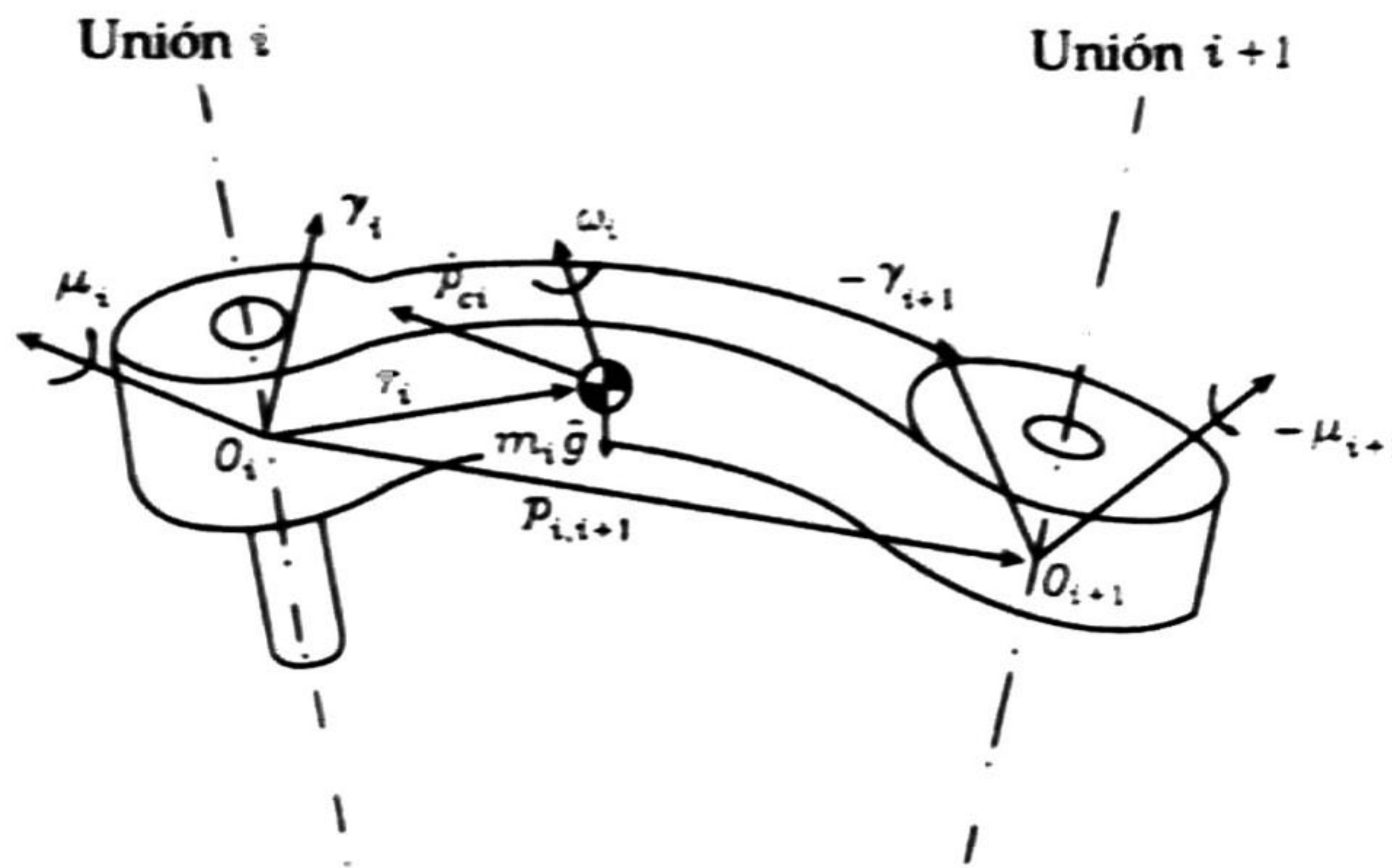
Donde U_i denota la energía potencial del eslabón i

$$U_i = -m_i^0 g^{T_0} p_{ci} \quad (2.19)$$

siendo g es el vector de gravedad.

Ecuaciones de Newton-Euler

Este tipo de formulación permite obtener la dinámica de un manipulador rígido sin derivar las expresiones explícitas de los terminos H , C y g . Las ecuaciones son obtenidas como resultado de dos cálculos recursivos; nombrados recursivo hacia adelante, para calcular las


 Figura 2.5: Caracterización del i -ésimo eslabón para las ecuaciones de Newton Euler.

velocidades y aceleraciones de los eslabones del eslabón 0 al n ; y recursivo hacia atrás, para calcular las fuerzas y momentos de los eslabones desde eslabón n al 0. Si definimos a p_i como el vector de posición del origen del marco de referencia del eslabón i . Entonces la velocidad lineal del origen del marco de referencia del eslabón i está dada por:

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \omega_{i-1} \times p_{i-1} + \xi_i \dot{q}_i a_i \quad (2.20)$$

donde la velocidad angular del eslabón i está dada por

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \bar{\xi}_i \dot{q}_i a_i \quad (2.21)$$

Derivando la Ec. (2.20) y la Ec. (2.21) se obtiene

$$\ddot{p}_i = \ddot{p}_{i-1} + \dot{\omega}_{i-1} \times p_{i-1} + \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times p_{i-1}) + \xi_i (\ddot{q}_i a_i + 2\omega_{i-1} \times \dot{q}_i a_i) \quad (2.22)$$

y

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \bar{\xi}_i (\ddot{q}_i a_i + \omega_{i-1} \times \dot{q}_i a_i) \quad (2.23)$$

Además, si se define p_{ci} como el centro de masas del eslabón i , su aceleración estaría dada por

$$\ddot{p}_{ci} = \ddot{p}_i + \dot{\omega}_i \times r_i + \omega_i \times (\omega_i \times r_i) \quad (2.24)$$

Con referencia a la Fig. 2.5 donde definimos a O_i como el origen del marco de referencia del i -ésimo eslabón, las ecuaciones de Newton definen un balance de fuerzas actuando sobre el eslabón i en la forma de

$$\gamma_i = m_i \ddot{p}_{ci} - m_i g + \gamma_{i+1} \quad (2.25)$$

donde γ_i denota la fuerza ejercida por el eslabón $i - 1$ sobre el eslabón i en el origen del marco de referencia del eslabón i . Sustituyendo la Ec. (2.24) en la Ec. (2.25) quedando

$$\gamma_i = m_i \ddot{p}_i + \dot{\omega}_i \times m_i r_i + \omega_i \times (\omega_i \times m_i r_i) + \gamma_{i+1} \quad (2.26)$$

El efecto de $m_i g$ será automáticamente introducido tomando $\ddot{p}_0 = -g$. Las ecuaciones de Euler también ofrecen un equilibrio de momentos actuando sobre el eslabón i (referido al centro de masas) en la forma de

$$\mu_i = \hat{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\hat{I}_i \omega_i) + r_i \times \gamma_i + \mu_{i+1} + p_{ci,i+1} \times \gamma_{i+1} \quad (2.27)$$

donde \hat{I}_i es el tensor de inercia del eslabón i con respecto de su centro de masas. Aplicando el teorema de Steiner [32, 10], el tensor de inercia respecto al origen del marco de referencia i , está dado por

$$I_i = \hat{I}_i + m_i S^T(r_i) S(r_i) \quad (2.28)$$

entonces la Ec. (2.27) via la Ec. (2.24) puede ser reescrita como

$$\mu_i = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i) + m_i r_i \times \ddot{p}_i + \mu_{i+1} + p_{ci,i+1} \times \gamma_{i+1} \quad (2.29)$$

El momento de fuerza del i -ésimo eslabón u_i puede ser obtenido proyectando $\gamma_i(\mu_i)$ sobre el eje Z_i , es decir

$$u_i = (\xi_i \gamma_i + \bar{\xi}_i \mu_i)^T a_i + I_{mi} \ddot{q}_i + F_{si} \text{sign}(\dot{q}_i) + F_{vi} \dot{q}_i \quad (2.30)$$

donde las contribuciones del motor de inercia y la fricción de las uniones se han agregado. Para mayor información de este método referirse a [10].

Dinámica Directa e Inversa

Las dinámicas directas del manipulador necesarias para que un conjunto conocido de momentos de fuerza de unión u_i , se obtengan las posiciones, velocidades y aceleraciones resultantes. Para lo segundo, nos conciernen las dinámicas inversas del manipulador que, contrario a las dinámicas directas, de un conjunto conocido de posiciones, velocidades y aceleraciones de las uniones se obtienen los momentos de fuerza de uniones resultantes. El cálculo para la dinámica directa es, en general, mayor que el necesario para obtener la dinámica inversa de un manipulador. Esto es, porque el modelado dinámico da naturalmente el mapeo de posiciones, velocidades y aceleraciones de unión a los momentos de fuerza de unión, como se muestra en la Ec. (2.12). En cambio para la dinámica inversa suele procederse a través de la Ec. (2.12) se obtiene

$$\ddot{q} = H^{-1}(q)(u - h(q, \dot{q})) \quad (2.31)$$

donde $h(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + \phi$ y ϕ representa dinámica no modelada, términos de fricción, perturbación externa, etc. De esta ecuación podemos obtener una representación en espacio de estados como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -H^{-1}(q)h(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1}(q)u \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Donde $x_1 = q$ es el vector de posiciones angulares ($n \times 1$) de las uniones y $x_2 = \dot{q}$ es el vector de velocidades angulares ($n \times 1$), esta representación nos provee de $2n$ ecuaciones diferenciales

ordinarias, las cuales pueden ser integradas en el tiempo bajo condiciones iniciales conocidas para obtener los estados x_1 y x_2 . Cabe destacar que la representación (2.32) está en la forma No-Linear Controlable por Bloques (NLCB) véase (A.1). Los términos H y h pueden ser obtenidos por medio de las ecuaciones de Lagrange, pero un método más eficiente consiste en usar las ecuaciones de Newton-Euler de la siguiente manera: los vectores $C(x_1, x_2)$ y $g(x_1)$ se obtienen de computar u con $\ddot{x}_1 = 0$ de la Ec. (2.32). Entonces, las columnas H_i de la matriz $H(x_1)$ se obtienen como el momento de fuerza u con $g = 0$, $x_2 = 0$, $\dot{q}_i = 1$ y $\dot{q}_j = 0$ para $j \neq i$. Iterando este procedimiento para $i = 1, \dots, n$ podemos obtener toda la matriz de inercia.

2.2. Control por Modos Deslizantes (MD)

Esencialmente, el control basado en modos deslizantes utiliza leyes de control discontinuas, las cuales forzan a las trayectorias del sistema a evolucionar sobre la variedad² determinada por la restricción planteada, en el espacio de estados. A este modo de funcionamiento, ilustrado en la Fig. 2.6 se lo denomina operación por modos deslizantes (MD). Se caracteriza por ser altamente robusto o invariante ante cierto tipo de perturbaciones externas y variaciones en los parámetros del sistema. Además, la operación en modo deslizante es de orden reducido, quedando fijada tal dinámica por la función de restricción diseñada.

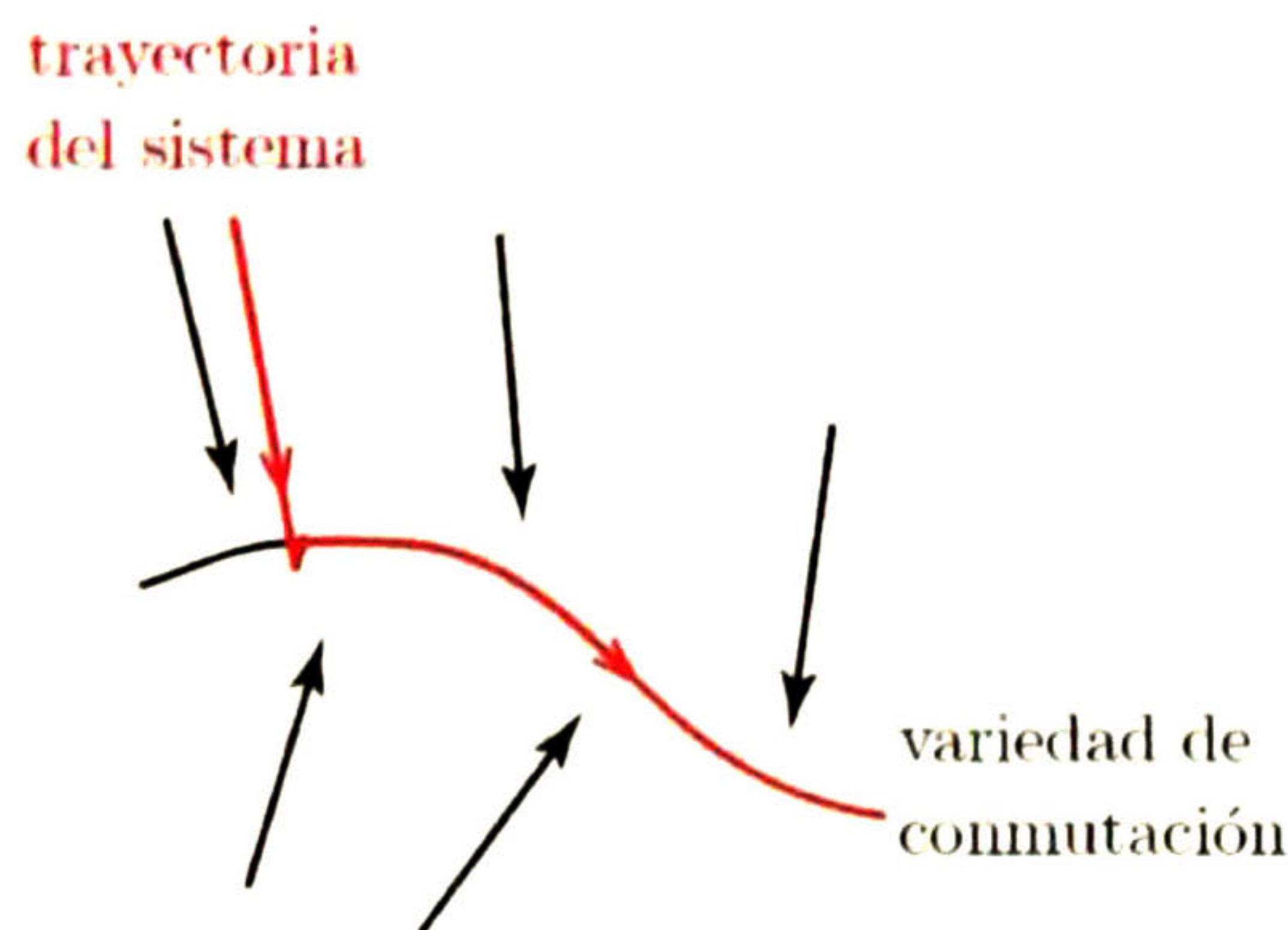


Figura 2.6: Operación en modo deslizante ideal.

² Una variedad es una generalización del concepto intuitivo de superficie, cuando se trabaja en espacios de cualquier dimensión. Algo más formalmente, una variedad n -dimensional es un espacio topológico localmente Euclídeo, es decir que cada punto de la variedad tiene un entorno topológicamente igual a un conjunto abierto en \mathcal{R}^n .

2.2.1. Planteamiento del Problema

Se considera el siguiente sistema no lineal con control afín

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + g(t, x)u(t) \quad (2.33)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $f(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $g(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. El cual se puede describir de manera más general como $\dot{x} = F(x, u)$. Luego, se define una función suave de los estados compatible con algún objetivo de control deseado, a partir de la cual queda determinado el conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_i(x) = 0\}$$

que representa la i -ésima superficie o variedad de conmutación en el espacio de estados n -dimensional

$$\sigma(x) = [\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_m(x)]^T = 0$$

La ley de control más sencilla que puede plantearse, con la idea de lograr que el sistema opere sobre la superficie de conmutación, consiste en alternar los valores de u entre dos valores posibles, según el signo de $\sigma(x)$:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(t, x), & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(t, x), & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

donde los niveles de u_i son funciones suaves de los estados. En estas condiciones, el sistema de la Ec. (2.33) controlado podrá expresarse a través de dos subsistemas continuos, dependiendo del signo de $\sigma(x)$:

$$\dot{x} = F(x, u) = \begin{cases} F(x, u^+) = F^+(x), & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ F(x, u^-) = F^-(x), & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Se dice que existe un régimen deslizante sobre la variedad S , cuando la aplicación de la ley de conmutación de la Ec. (2.34) resulta en que las trayectorias alcanzan tal variedad y se mantienen localmente en su entorno. Para que esto suceda, los campos vectoriales controlados de los dos subsistemas continuos, $F^+(x)$ y $F^-(x)$, deben apuntar localmente a S , como se muestra en la Fig. 2.7. Para que esto ocurra, es necesario que en el sistema controlado se satisfagan las siguientes desigualdades en las proximidades de S

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(x) < 0, & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ \dot{\sigma}(x) > 0, & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

es decir, que si $\sigma_i(x) > 0$, se debe decrecer $\dot{\sigma}(x) < 0$ y viceversa. Estas condiciones son las necesarias para garantizar la convergencia a la variedad de deslizamiento y la permanencia

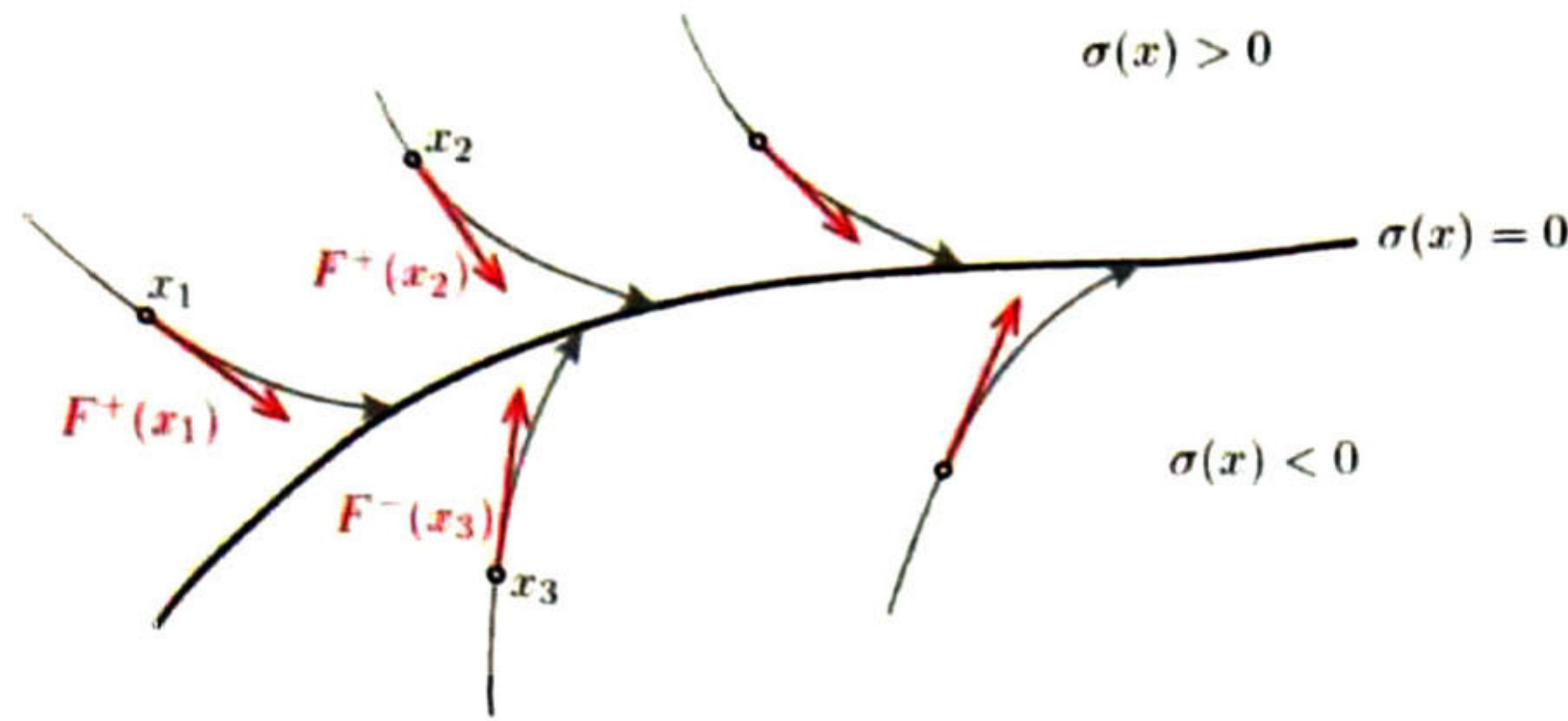


Figura 2.7: Condición para la existencia de régimen deslizante sobre S .

en una vecindad de la misma, es decir, para la existencia de un régimen deslizante. Las desigualdades anteriores pueden condensarse en una única desigualdad:

$$\dot{\sigma}(x)\sigma(x) < 0$$

que deben cumplirse al menos en las vecindades de S . Cuando la frecuencia de conmutación no es infinita, como sucede en cualquier implementación práctica, o en caso de que existan dinámicas no modeladas, las conmutaciones generan oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre la variedad de deslizamiento. A este fenómeno se lo denomina efecto *chattering* y constituye el principal defecto de los modos deslizantes. Una idea esquemática de esta situación puede observarse en la Fig. 2.8.

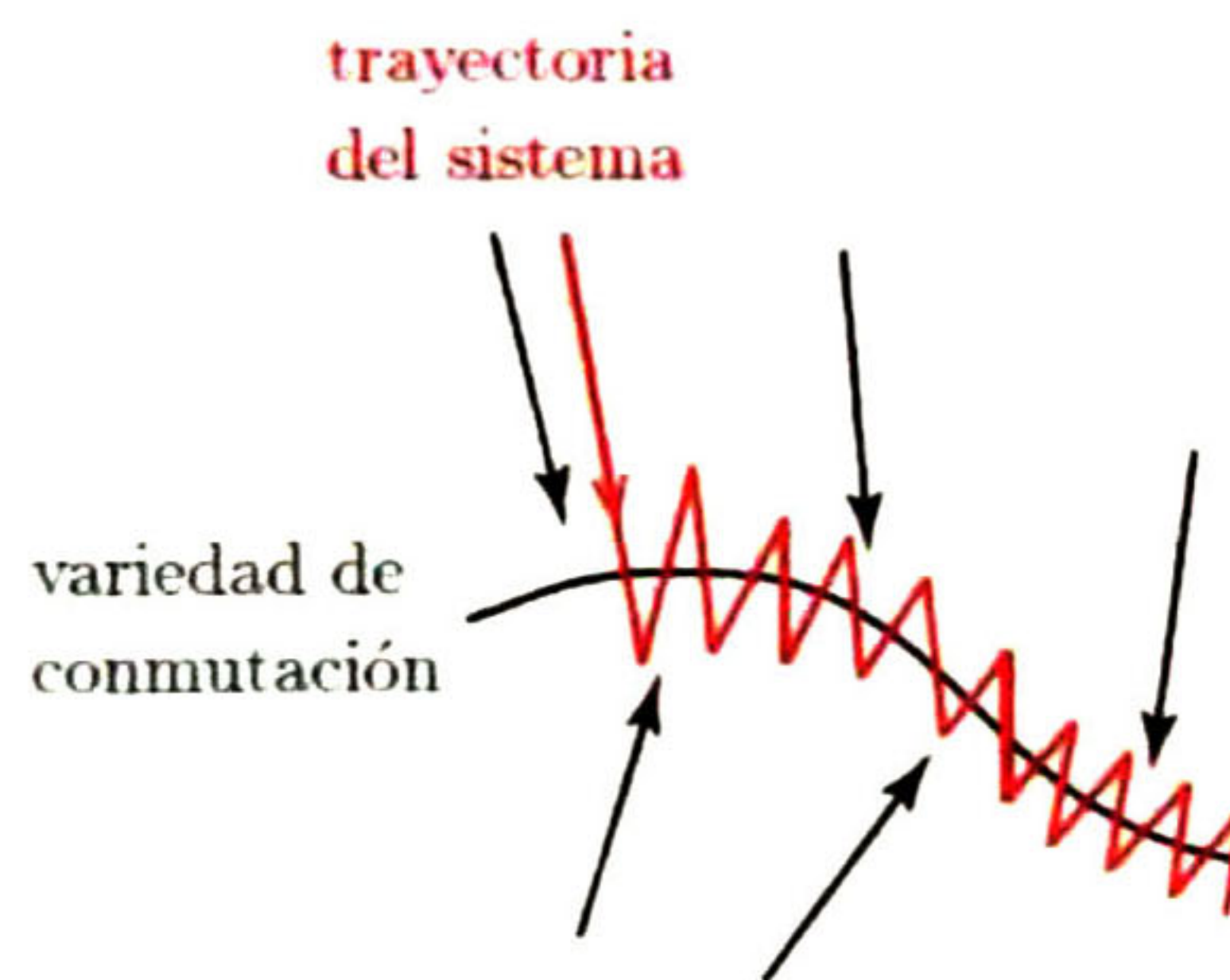


Figura 2.8: Conmutación a frecuencia finita.

2.2.2. Existencia del Modo Deslizante

El problema de la existencia puede ser visto como un problema de estabilidad generalizada, por lo tanto, el método de Lyapunov proporciona un entorno natural para el análisis.

Específicamente, la estabilidad en la superficie deslizante requiere seleccionar una función Lyapunov generalizada $V(t, x)$ que es definida positiva y tiene una derivada temporal negativa en la región de la atracción. Definiendo formalmente como:

Teorema 1.1 *Un dominio $D \subset S$ sea el dominio del modo deslizante, es suficiente que en alguna región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ donde $\Omega \supset D$ existe una función $V(t, x, \sigma)$ continuamente diferenciable con respecto a la totalidad de sus argumentos, satisfaciendo las condiciones siguientes:*

1. $V(t, x, \sigma)$ es definida positiva con respecto a σ , es decir, $V(t, x, \sigma) > 0$, si $\sigma \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, y en la esfera $\|\sigma\| = \rho$, para todo $x \in \Omega$.

$$\inf_{\|\sigma\|=\rho} V(t, x, \sigma) = h_p \text{ and } h_p > 0 \text{ para } p \neq 0 \quad (2.37)$$

$$\sup_{\|\sigma\|=p} V(t, x, \sigma) = H_p \quad H_p > 0 \quad (2.38)$$

donde h_p , y H_p , depende de p .

2. *La derivada temporal total de $V(t, x, \sigma)$ tiene un supremo negativo para todo $x \in \Omega$ excepto en puntos en la superficie deslizante donde las entradas de control están indefinidas, y por lo tanto la derivada de $V(t, x, \sigma)$ no existe [12].*

La estructura de la función $V(t, x, \sigma)$ determina la facilidad con la que se calculan las ganancias de realimentación implementando un diseño de control basado en modos deslizantes. Desafortunadamente, no existen métodos estándares para encontrar funciones de Lyapunov para sistemas no lineales.

Tenga en cuenta que, para sistemas de una entrada una función de Lyapunov muy usada es

$$V(t, x, \sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)$$

la cual es globalmente positiva definida. En control con modos deslizantes, $\dot{\sigma}$ dependerá del control y por lo tanto las ganancias de realimentación pueden ser elegidas de modo que

$$\dot{V}(t, x, \sigma) = \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0 \quad (2.39)$$

En el dominio de atracción, a continuación, la trayectoria de estado converge a la superficie y está restringida a la superficie por todo el tiempo posterior. Esta última condición se denomina condición de alcance o de alcanzabilidad y se asegura de que la variedad deslizante se alcanza asintóticamente. La condición (2.39) a menudo se sustituye por la llamada η -condición de alcanzabilidad (η -reachability condition) [43]

$$\dot{V}(t, x, \sigma) = \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \leq -\eta|\sigma| < 0 \quad (2.40)$$

la cual asegura convergencia en tiempo finito a $\sigma(x) = 0$, ya que por la integración de (2.40) se tiene

$$|\sigma[x(t)]| - |\sigma[x(0)]| \leq -\eta t$$

mostrando que el tiempo requerido para alcanzar la superficie, a partir de la condición inicial $\sigma[x(0)]$ esta acotada por

$$t_s = \frac{|\sigma[x(0)]|}{\eta}$$

2.2.3. Control Equivalente

El método de Filippov es una técnica posible para determinar el movimiento del sistema en modo de deslizamiento, para más detalles [43, 36, 38]. Una técnica más fácilmente aplicable a sistemas multi-entrada es el método de control equivalente, como se propone en [43]. Se ha demostrado que el método de control equivalente produce la misma solución de el método de Filippov si el sistema controlado es afín en la entrada de control. El método de control equivalente puede ser utilizado para determinar el movimiento en modo de deslizamiento.

Considere el sistema de la Ec. (2.33), el primer paso de la estrategia de control equivalente es encontrar la entrada u_{eq} tal que la trayectoria de estado permanezca en la variedad deslizante $\sigma(x) = 0$. La existencia del modo deslizante implica que $\sigma(x) = 0$ para todo $t \geq t_0$ y $\dot{\sigma}(x) = 0$

Al diferenciar $\sigma(x)$ con respecto al tiempo se tiene que

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x}(t) = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] [f(t, x) + g(t, x)u_{eq}] = 0 \quad (2.41)$$

donde u_{eq} es llamada control equivalente. Tener en cuenta que, bajo la acción del control equivalente u_{eq} cualquier trayectoria que inicie en la variedad $\sigma(x) = 0$ permanece a ella, ya que $\dot{\sigma}(x) = 0$. Para calcular u_{eq} , se asume que el producto de matrices $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(t, x)$ son no singulares para todo t y x . Entonces

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) \quad (2.42)$$

Por lo tanto, dado $\sigma[x(t_0)] = 0$, la dinámica de el sistema en la superficie deslizante para $t \geq t_0$, se obtiene sustituyendo la Ec. (2.42) en la Ec. (2.33), es decir,

$$\dot{x}(t) = \left[I - g(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(t, x) \quad (2.43)$$

Esta estructura puede ser ventajosa en el diseño de la superficie deslizante. Tenga en cuenta que Ec. (2.43) con la restricción de $\sigma(x) = 0$ determina el comportamiento del sistema en la superficie deslizante.

El sistema equivalente debe satisfacer no solo las n -dimensionales dinámicas de estado de la Ec. (2.43), sino también las m ecuaciones algebraicas dadas por $\sigma(x) = 0$. El uso de ambas restricciones reduce la dinámica del sistema a partir de un n -ésimo orden a un $(n - m)$ -ésimo orden.

2.2.4. Diseño de Controlador por MD

El diseño del controlador es la segunda fase del procedimiento de diseño de control basado en modos deslizantes. El problema es elegir las ganancias capaces de forzar la trayectoria del sistema a la superficie deslizante manteniendo una condición de modo deslizante. La suposición es que la superficie deslizante ya ha sido diseñada.

En el diseño de control existe un enfoque denominado método de diagonalización y la característica esencial de este método es la conversión de un problema de múltiples entradas en m entradas simples. Este método se basa en la construcción de un nuevo vector de control u^* a través de una transformación no singular del control original definido como

$$u^*(t) = -Q^{-1}(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(t, x) u(t) \quad (2.44)$$

Donde $Q(t, x)$ es una arbitraria $m \times m$ matriz diagonal con elementos $q_i(t, x)$, $i = 1, \dots, m$, tal que $|q_i(t, x)| > 0$ para todo $t \geq 0$. En términos de u^* el estado dinámico se convierte en

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + g(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right]^{-1} Q(t, x) u^*(t) \quad (2.45)$$

A pesar de que esta nueva estructura de control parece más complicada, la estructura de $\dot{\sigma}(x) = 0$ permite de forma independiente elegir las m -entradas de u^* para satisfacer las condiciones suficientes de existencia y alcanzabilidad de un modo deslizante. Una vez u^* es conocido, es posible invertir la transformación para producir la u necesaria. Como ya se mencionó que para la existencia y alcanzabilidad de un modo deslizante es suficiente satisfacer la condición $\sigma(x)\dot{\sigma}(x) < 0$. En términos de u^*

$$\dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) + Q(t, x) u^*(t) \quad (2.46)$$

De esta manera, si las entradas u_i^{*+} y u_i^{*-} se eligen de tal forma que satisfacen

$$q_j(t, x) u_i^{*+} < - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} f_j(t, x) \text{ cuando } \sigma_j(x) > 0 \quad (2.47)$$

$$q_j(t, x)u_i^* > - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} f_j(t, x) \text{ cuando } \sigma_j(x) < 0 \quad (2.48)$$

Entonces las condiciones suficientes para la existencia y alcanzabilidad, en particular las condiciones (2.47) y (2.48) obligan a cada término en la sumatoria de $\sigma^T \dot{\sigma}$ ser definida negativa.

Además del método de diagonalización, diferentes enfoques han sido propuestos en la literatura ver [36, 43]. Una posible estructura de control para la Ec. (2.34) es

$$u_i = u_{ieq} + u_{iN} \quad (2.49)$$

donde u_{ieq} es la i -ésima componente del control equivalente (cual es continuo) y donde u_{iN} es un término discontinuo de la Ec. (2.34). Para controladores que poseen la estructura (2.49), resulta que

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(x) &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(t, x) + g(t, x)(u_{eq} + u_N)] \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(t, x) + g(t, x)u_{eq}] + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x)u_N \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x)u_N \end{aligned}$$

Por simplicidad, se asume que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) = I$. Entonces $\dot{\sigma}(x) = u_N$, entonces lo cual permite una fácil comprobación de condiciones de existencia y alcanzabilidad de el modo deslizante, es decir, la condición $\sigma_i(x)\dot{\sigma}_i(x) < 0$ cuando $\sigma_i(x) \neq 0$. Se muestran algunas diferentes posibles estructuras de control para u_N

$$u_{iN} = -\alpha \text{sign}(\sigma(x)) \quad \alpha > 0$$

$$u_N = -L\sigma(x) \quad L \in \mathfrak{R}^{m \times m} \text{ y } L > 0$$

$$u_N = -\frac{\sigma(x)}{\|\sigma(x)\|} \rho \quad \rho > 0$$

2.2.5. Control de Sistemas No Lineales basado en MD

La motivación para la exploración de los sistemas con incertidumbre es el hecho de que la identificación del modelo de sistemas del mundo real introduce errores de parámetros. Por lo tanto, los modelos contienen parámetros inciertos que a menudo se sabe que se encuentran dentro de ciertos límites. Para representar las incertidumbres en la planta debido a las variaciones paramétricas considerando la dinámica

$$\dot{x}(t) = [f(t, x) + \Delta f(t, x, r)] + [g(t, x) + \Delta g(t, x, r)] u(t) \quad (2.50)$$

donde $r(t)$ es una función vectorial de parámetros inciertos cuyos valores pertenecen a un conjunto cerrado y acotado. Las incertidumbres de la planta Δf y Δg se requiere que estén en la imagen de $g(t, x)$ para todos los valores de t y x . Este requisito es llamado condición vinculante³ Asumiendo que las condiciones *matching condition* se satisfacen, es posible agrupar a la incertidumbre total de la planta en un solo vector $e(t, x(t), r(t), u(t))$ y representa la incertidumbre de la planta como

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + g(t, x)u(t) + g(t, x)e(t, x(t), r(t), u(t)) \quad (2.51)$$

con condición inicial $x(t_0) = x_0$.

La estructura de control basado en modos deslizantes para el sistema (2.33) será

$$u = u_{eq} + u_N \quad (2.52)$$

donde u_{eq} es el control equivalente para la Ec. (2.33) asumiendo que todas las incertidumbres $e(t, x, r, u)$ son cero y u_N debe ser diseñado para tener en cuenta las incertidumbres diferentes de cero. Considerando la superficie deslizante $\sigma(t, x) = 0$, se puede calcular que

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} g \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f \right] \quad (2.53)$$

asumiendo que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g$ es no singular y que $e(t, x, r, u) = 0$. Es necesario tomar en cuenta las incertidumbres y desarrollar una expresión para u_N .

Se supone que

$$\| e(t, x, r, u) \|_2 \leq \rho(t, x)$$

donde $\rho(t, x)$ es una función escalar no negativa.

Antes de especificar la estructura de control, se elige la función de Lyapunov generalizada como sigue

$$V(t, x) = \frac{1}{2} \sigma^T(t, x) \sigma(t, x) \quad (2.54)$$

Con el fin de asegurar la existencia de un modo deslizante y sea atractivo a la superficie, la condición de alcanzabilidad

$$\frac{dV}{dt}(t, x) = \dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} < 0$$

³ Condición vinculante (en inglés *matching condition*), significa que tal perturbación es colineal con el vector de campo de control $g(t, x)$.

debe satisfacerse cuando $\sigma(t, x) \neq 0$ donde

$$\dot{\sigma}(t, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \dot{x}$$

de forma del controlador de la Ec. (2.49), el término u_N puede ser elegido como se mostró en el apartado anterior, verificando que $\dot{V}(t, x)$ sea definida negativa.

2.2.6. Chattering

En aplicaciones reales, no es razonable suponer que la señal de control que evoluciona en el tiempo puede conmutar a frecuencia infinita. La frecuencia de oscilación de control resulta ser no solo finita sino también casi impredecible. La principal consecuencia es que el modo deslizante tiene lugar en una pequeña vecindad de la variedad deslizante, cuya dimensión es inversamente proporcional a la frecuencia de conmutación del control [43, 36].

Un enfoque basado en el uso de aproximaciones continuas de la función $\text{sign}(\cdot)$ (como la función $\text{sat}(\cdot)$, la función $\text{tanh}(\cdot)$ y así sucesivamente) en la aplicación de la ley de control. Una consecuencia de este método es que la propiedad de invariancia se pierde. El sistema posee robustez que es una función de la anchura de la capa límite. Se señaló en [40] que esta metodología es altamente sensible a la dinámica rápida no modelada, y en algunos casos puede conducir a un rendimiento inaceptable. En conclusión, los enfoques de aproximaciones continuas que eliminan el *chattering*, se paga el precio de perder la propiedad de invariancia. Un enfoque más reciente e interesante para la atenuación del *chattering* consiste en los denominados modos deslizantes de alto orden. Estos restringen aún más el movimiento del sistema sobre la variedad de deslizamiento, estableciendo condiciones de mayor suavidad al mismo.

2.3. Modos Deslizantes de Alto Orden

Los modos deslizantes de orden superior generalizan la idea básica de modo deslizante que actúan directamente sobre las derivadas temporales de orden superior de la variable de deslizamiento en lugar de influir en su primera derivada temporal como ocurre en modos deslizantes estándar. Manteniendo las principales ventajas del enfoque original, al mismo tiempo disminuyen el efecto *chattering* y proporcionan una precisión aún mayor en la práctica. El principal problema en la implementación de los modos deslizantes de orden superior es la demanda creciente de información. En términos generales, cualquier controlador basado en modos deslizantes de r -ésimo orden requiere el conocimiento de las derivadas temporales de la variable deslizante hasta el $(r - 1)$ -ésimo orden. Las únicas excepciones son los algoritmos de control basados en modos deslizantes de segundo orden.

Por esta razón, estos controladores basados en modos deslizantes de segundo orden son los más utilizados en la práctica entre los controladores de orden superior debido a su simplicidad y de su baja demanda de información.

2.3.1. Orden Deslizante y Conjunto Deslizante

El orden del modo deslizante define el grado de suavidad de la dinámica del sistema en las proximidades de la variedad de deslizamiento. Más concretamente, es el número de derivadas totales de σ que son continuas en las cercanías de la variedad (incluyendo la derivada cero, es decir σ misma).

Matemáticamente, r -MD está caracterizado por que las primeras derivadas r derivadas de σ , $r = 0, 1, \dots, (r - 1)$ son continuas, la r -ésima es discontinua y se verifica:

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (2.55)$$

ecuación que resulta en una condición de dimensión r en el estado del sistema dinámico. Así, el modo deslizante original 1-MD, ya que su primera derivada resulta discontinua. Supóngase una restricción dada por $\sigma(x) = 0$, donde es suficientemente suave y sus derivadas temporales $\dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)}$ existen y son funciones que toman un único valor para cada x y son continuas. Es decir, la discontinuidad no aparece ni en σ ni en sus primeras $(r - 1)$ derivadas.

En estas condiciones, el conjunto de igualdades dado por la Ec. (2.55) define unívocamente el conjunto de deslizamiento de orden r . Si este conjunto no vacío y localmente integrable en el sentido de Filippov, entonces el movimiento restringido a este conjunto se denomina r -MD o modo deslizante de orden r con respecto a la función de restricción σ .

2.3.2. Modos Deslizantes de Segundo Orden

Entre las razones que han motivado la actividad de desarrollo de los 2-MD corresponde a la atenuación del *chattering* característico del 1-MD, mientras que la segunda tiene que ver con disponer de métodos de control robustos para sistemas con salidas de grado relativo 2, perturbados y con incertidumbre.

En sistemas de grado relativo 1, los algoritmos 2-MD pueden emplearse como mejora del MD estándar (1-MD) reduciendo el *chattering*. Para ello puede utilizarse una ley por 2-MD en la derivada de la acción de control en vez de en la acción misma. De este modo, la entrada de control del sistema es la integral de la ley discontinua por 2-MD, que es continua y permite lidiar en forma robusta con la incertidumbre y las perturbaciones pero reduciendo el efecto de *chattering*. Otra posibilidad es emplear un algoritmo 2-MD desarrollado específicamente para

atacar este problema, como el STA o variantes del mismo. El precio a pagar consiste en una disminución de la robustez, ya que no puede garantizarse la precisión frente a perturbaciones discontinuas, es decir, la continuidad de la acción de control tiene como desventaja el no poder compensar inmediatamente variaciones abruptas.

2.3.3. Planteamiento del Problema

Considerese un sistema dinámico con una entrada de la forma

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u \quad (2.56)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ son los estados del sistema, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control, y $a(t, x)$ and $b(t, x)$ son campos vectores que representan incertidumbre. Sea $\sigma(t, x) = 0$ la variedad deslizante elegida, entonces el objetivo de control es forzar el modo deslizante de segundo orden en la variedad deslizante $\sigma(t, x) = 0$, es decir,

$$\sigma(t, x) = \dot{\sigma}(t, x) = 0 \quad (2.57)$$

en tiempo finito. Dependiendo de el grado relativo⁴ del sistema, dos casos diferentes deben de considerarse, es decir,

A: Grado Relativo $r = 1$, i.e., $\frac{\partial}{\partial u}\dot{\sigma} \neq 0$

B: Grado Relativo $r = 2$, i.e., $\frac{\partial}{\partial u}\dot{\sigma} = 0$, $\frac{\partial}{\partial u}\ddot{\sigma} \neq 0$

Caso A: En este caso, el problema de control se puede resolver basándose en el control por modos deslizantes de primer orden, sin embargo, el control por modos deslizantes de segundo orden también se puede utilizar con el fin de evitar el efecto *chattering*. Para este propósito u se considera como una salida de algún sistema dinámico de primer orden y la derivada temporal de la planta de control \dot{u} es considerado como una variable de control auxiliar [36].

Un control discontinuo $\dot{u}(t)$ conduce la variable de deslizamiento σ a cero, manteniendo $\sigma = 0$ en el modo de deslizamiento de segundo orden, de modo que el control de la planta u es continua y el efecto *chattering* se evita. La primera y segunda derivada temporal de la variable de deslizamiento están dadas por

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t}\sigma(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}\sigma(t, x) [a(t, x) + b(t, x)u(t)] \quad (2.58)$$

$$\ddot{\sigma} = \varphi_A(t, x, u) + \gamma_A(t, x)\dot{u}(t) \quad (2.59)$$

⁴ El grado relativo de una función de los estados de un sistema o de una salida de un sistema, es igual a la cantidad de veces que es necesario derivar aquella respecto del tiempo para que aparezca la entrada del control en forma explícita.

donde

$$\varphi_A(t, x, u) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma}(t, x, u) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(t, x, u) [a(t, x) + b(t, x)u(t)] \quad (2.60)$$

$$\gamma_A(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \sigma(t, x) b(t, x) \quad (2.61)$$

La entrada de control u es entendida como una perturbación desconocida que afecta al término $\varphi_A(t, x, u)$. La derivada del control \dot{u} se utiliza como una variable auxiliar de control que es diseñado con el fin de satisfacer el objetivo de control de conducir σ y $\dot{\sigma}$ a cero. La derivada con respecto al tiempo del control \dot{u} afecta a la dinamica $\ddot{\sigma}$.

Caso B: El control no afecta directamente la dinámica de $\dot{\sigma}$ pero afecta directamente $\ddot{\sigma}$, es decir,

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \sigma(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma(t, x) a(t, x) \quad (2.62)$$

$$\ddot{\sigma} = \varphi_B(t, x, u) + \gamma_B(t, x) u(t) \quad (2.63)$$

donde

$$\varphi_B(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma}(t, x, u) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(t, x, u) a(t, x) \quad (2.64)$$

$$\gamma_B(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(t, x, u) b(t, x) \quad (2.65)$$

Debe asumirse que

$$\gamma_B(t, x) \neq 0 \quad (2.66)$$

lo que significa que la variable de deslizamiento, entendida como una salida del sistema, deberá tener el grado relativo dos. En este caso el control actual u es discontinuo. Ambos casos A y B pueden ser tratados como un tratamiento unificado, como la estructura del sistema que ha de estabilizarse es exactamente igual, es decir, un sistema de segundo orden con incertidumbres con dependencia afín en la señal de control correspondiente (la derivada del control \dot{u} en el caso A, el control actual u en el caso B). Por esta razón será abordado y resuelto el problema de la estabilización del sistema

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sigma(t, x) \\ \dot{y}_1(t) &= y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= \varphi(\cdot) + \gamma(t, x)v(t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Los términos $\varphi(\cdot)$, y $v(t)$ tienen diferentes significados y estructuras en el caso A y B. Más precisamente:

Caso A:

$$\varphi(\cdot) = \varphi_A(t, x, u) \quad (2.68)$$

$$v(t) = \dot{u}(t) \quad (2.69)$$

Caso B:

$$\varphi(\cdot) = \varphi_B(t, x, u) \quad (2.70)$$

$$v(t) = u(t) \quad (2.71)$$

Como se expuso anteriormente, en el caso A, llamado el caso *antichattering*, el enfoque basado en modo deslizante de segundo orden alcanza el objetivo de control por medio de una entrada de control continuo. De hecho, la señal de control actual discontinua $v(t)$ es la derivada de la entrada de la planta u , la cual, obtenido mediante la integración de la derivada discontinua, resulta ser continua. En el caso B, que es el grado relativo dos, el control actual $u(t)$ es discontinuo.

El problema de la estabilización se resuelve bajo el supuesto de que $\dot{\sigma}$ no está disponible para las mediciones. Este hecho, junto con la presencia de incertidumbres, hace que el problema no sea fácil solucionarse. La existencia de una solución es, obviamente, una relación estrecha en la hipótesis pertinentes sobre la dinámica incierta. La suposición de acotación global de la incertidumbre, es decir, los términos inciertos están delimitadas por términos conocidos constantes positivos según

$$|\varphi(\cdot)| \leq \Phi \quad (2.72)$$

$$0 < G_1 \leq \gamma(t, x) \leq G_2 \quad (2.73)$$

En resumen, el problema de control por modos deslizantes de segundo orden para sistemas de n -ésimo orden de tipo

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u \quad \sigma = \sigma(t, x) \quad (2.74)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ estado del sistema, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control, y $a(t, x)$ y $b(t, x)$ campos vectores inciertos, puede ser reducido a un problema de estabilización de sistemas con incertidumbres de segundo orden, es decir,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_2(t) \\ \dot{y}_2 &= \varphi(\cdot) + \gamma(t, x)v(t) \end{aligned} \quad (2.75)$$

donde y_1 y y_2 representan la variable deslizante actual y sus derivadas, respectivamente, y_2 no está disponible para medición, y los términos inciertos φ y γ son tales que

$$|\varphi(\cdot)| \leq \Phi \quad (2.76)$$

$$0 < G_1 \leq \gamma(t, x) \leq G_2 \quad (2.77)$$

2.3.4. El Controlador Super Twisting

Este algoritmo de control ha sido desarrollado para el control de sistemas con un grado relativo uno con el fin de evitar el efecto *chattering* además de brindar una ley de control totalmente continua, permitiendo compensar exactamente perturbaciones Lipshitz y asegurando convergencia en tiempo finito. Su nombre proviene de las trayectorias en el plano *2-deslizante* que se caracterizan por un simular un *twisting* sobre el origen, para más detalles referase a [43]. La ley de control continua está constituida por dos términos; uno se define por la derivada de un término discontinuo y el otro es una función continua de la variable deslizante conocida como se muestra en la Fig. 2.9

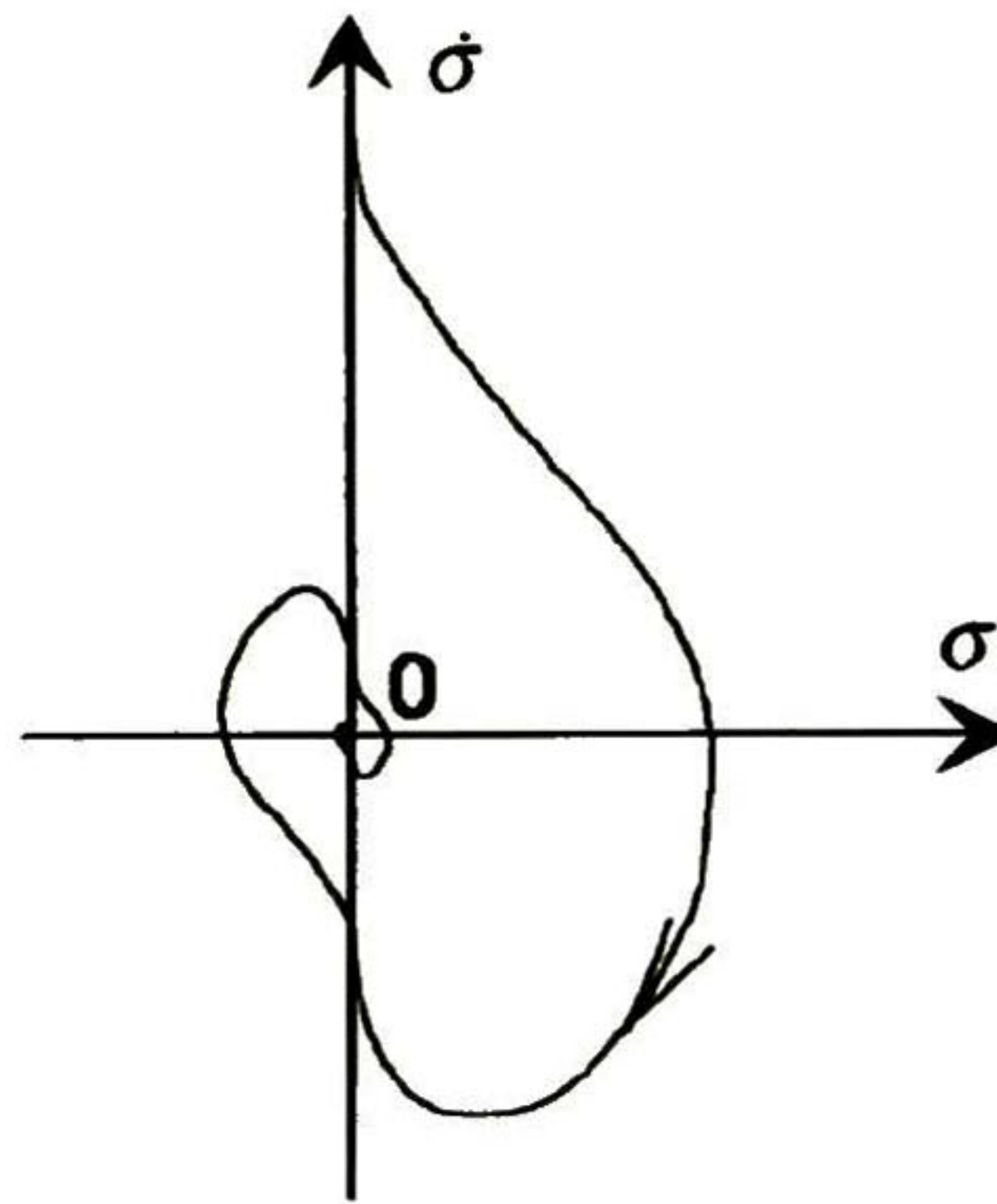


Figura 2.9: Trayectoria de controlador STA en el retrado de fase.

Considere el sistema de la Ec. (2.75) con incertidumbre que satisface la Ec. (2.76) y la Ec. (2.77), y_2 no esta disponible para mediciones, y asumimos que el grado relativo de el sistema es uno. Entonces, el algoritmo de control está definido como

$$\begin{aligned} u(t) &= -\lambda|y_1|^\rho \text{sign}(y_1) + u_1 \\ \dot{u}_1 &= \alpha \text{sign}(y_1) \end{aligned} \quad (2.78)$$

con las restricciones

$$\alpha > \frac{\Phi}{G_1} \quad (2.79)$$

$$\lambda^2 > \frac{4\Phi G_2(\alpha + \Phi)}{G_1^2 G_1(\alpha - \Phi)} \quad (2.80)$$

$$0 < \rho \leq 0.5 \quad (2.81)$$

es capaz de forzar el modo deslizante de segundo orden a la variedad deslizante $\sigma(t, x) = \dot{\sigma}(t, x) = 0$ en tiempo finito. Tenga en cuenta que el STA no necesita ninguna información sobre la derivada temporal de la variable de deslizamiento.

Capítulo 3

Modelado del sistema

En este capítulo se presenta la construcción de modelos matemáticos adecuados para controlar la fuerza y la posición en robots manipuladores de n grados de libertad. En la primera sección se fórmula un modelado matemático (Enfoque: No Restringido) que no toma en cuenta ninguna restricción referente a su movimiento. En la sección final del capítulo se presenta un modelado matemático (Enfoque: Restringido) el cual incorpora restricciones de tipo holonómicas al sistema.

3.1. Modelado Matemático: Enfoque No Restringido

El modelo matemático del manipulador robótico está dado por la Ec. (2.12) pero considerando la fuerza externa generada por el ambiente está dado de la siguiente manera como en [32]:

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + \lambda_p = \tau + J_o^T F_o \quad (3.1)$$

donde $q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de variables de uniones; $\tau \in \mathfrak{R}^n$ el vector de los pares generados por los actuadores en las uniones; $H \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es matriz de inercia y $h \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ representa los términos no lineales concerniente a los efectos de fuerzas de Coriolis, centrípetas, gravitacionales y de fricción, el término λ_p corresponde a perturbaciones y variaciones paramétricas y el término F_o es la fuerza de contacto con respecto al marco de referencia de la base del sistema y J_o^T denota la matriz jacobiana o jacobiano del manipulador.

También, sea oR_c una matriz de rotación la cual transforma vectores expresados con respecto al marco de referencia del ambiente en el espacio cartesiano a vectores expresados con respecto al marco de referencia de la base del sistema quedando como

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + \lambda_p = \tau + J_o^T ({}^oR_c F) \quad (3.2)$$

donde F es medido en el espacio cartesiano ilustrado en la Fig. 3.1.

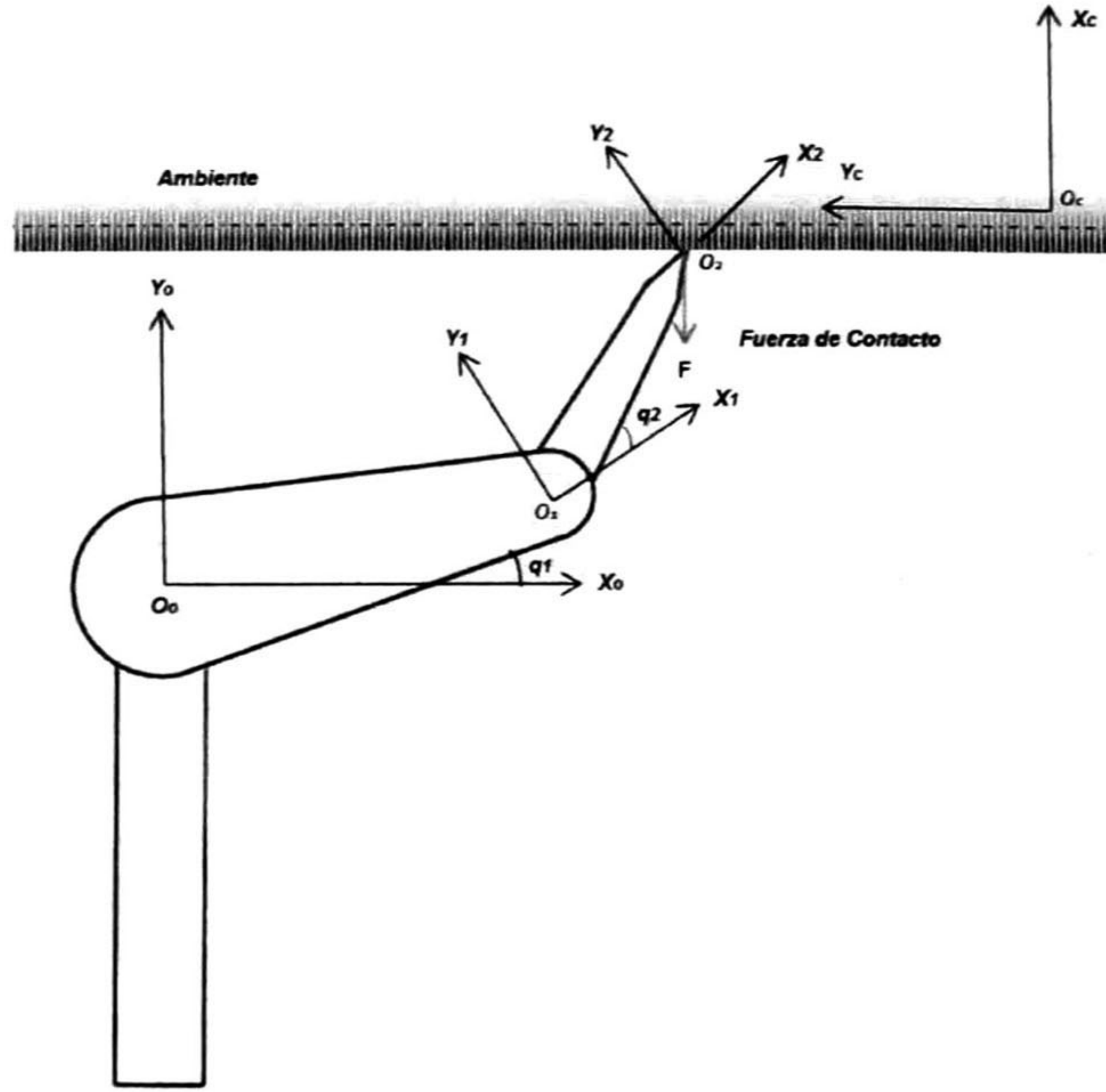


Figura 3.1: Configuración del manipulador.

Se tiene que $J^T(q) = J_o^T(q) \circ R_c$ tal que

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + \lambda_p = \tau + J^T(q)F \quad (3.3)$$

Ahora sea x un vector de posición del efector final y $T(\cdot)$ sea un mapeo que transforma del espacio de uniones *joint space* al espacio cartesiano *task space*. Se presentan los mapeos cinemáticos abordados en el capítulo 2 necesarios para la construcción del modelo matemático.

$$\begin{aligned} x &= T(q) \implies q = T(x)^{-1} \\ \dot{x} &= J(q)\dot{q} \implies \dot{q} = J(q)^{-1}\dot{x} \\ \ddot{x} &= J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q} \implies \ddot{q} = J(q)^{-1}(\ddot{x} - \dot{J}(q)\dot{q}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se asume que el manipulador no pasa por ninguna singularidad, esto es necesario para que las transformaciones sean invertibles.

Se definen las variables de estado $v_1 = q$ y $v_2 = \dot{q}$, con las cuales se puede obtener una representación en variables de estado como en (2.32)

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ H^{-1}(v_1)(\tau + J^T(q)F - h(v_1, v_1)) + \lambda(v_1, v_2, t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

De la Ec. (3.3) se sustituye la Ec. (3.4) como:

$$H(q)(J(q)^{-1}(\ddot{x} - \dot{J}(q)\dot{q})) + \lambda_p + h(q, \dot{q}) = \tau + J^T(q)F \quad (3.6)$$

En este punto se procede a obtener la dinámica del manipulador en el espacio cartesiano en la forma

$$H^* \ddot{x} + h^*(x, \dot{x}) + \lambda_p^* = Q^* + F$$

donde Q^* representa las entradas de fuerza generalizada en el espacio cartesiano, sin embargo esta representación es inconveniente debido a que la entrada física actual está en τ y no en Q^* . Por lo que es apropiado utilizar la dinámica inversa. Se aplica una retroalimentación parcial como en [41]

$$\tau = \hat{H}(q)\hat{J}(q)^{-1}(u - \dot{\hat{J}}(q)\dot{q}) + \hat{h}(q, \dot{q}) - \hat{J}^T(q)F \quad (3.7)$$

donde $\hat{H}(q)$, $\hat{h}(q, \dot{q})$, $\hat{J}(q)$ son los valores nominales de $H(q)$, $h(q, \dot{q})$, $J(q)$ respectivamente y u representa una nueva entrada al sistema. Sustituyendo la Ec. (3.7) en la Ec. (3.6) se obtiene que

$$H(q)(J(q)^{-1}(\ddot{x} - \dot{J}(q)\dot{q})) + h(q, \dot{q}) + \lambda_p = \hat{H}(q)\hat{J}(q)^{-1}(u - \dot{\hat{J}}(q)\dot{q}) + \hat{h}(q, \dot{q}) - \hat{J}^T(q)F + J^T(q)F \quad (3.8)$$

Reordenando la Ec. (3.8) para obtener \ddot{x}

$$\ddot{x} = J(q)H(q)^{-1}\hat{H}(q)\hat{J}(q)^{-1}u + J(q)H(q)^{-1}\{(H(q)J(q)^{-1}\dot{J}(q) - \hat{H}(q)\hat{J}(q)^{-1}\dot{\hat{J}}(q))\dot{q} + \hat{h}(q, \dot{q}) - h(q, \dot{q}) - \lambda_p\} + J(q)H(q)^{-1}(J^T(q) - \hat{J}^T(q))F \quad (3.9)$$

Se define

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= J(q)H(q)^{-1}\hat{H}(q)\hat{J}(q)^{-1} \\ \xi(X) &= J(q)H(q)^{-1}\{(H(q)J(q)^{-1}\dot{J}(q) - \hat{H}(q)\hat{J}(q)^{-1}\dot{\hat{J}}(q))\dot{q} + \hat{h}(q, \dot{q}) - h(q, \dot{q}) - \lambda_p\} \\ \psi(X) &= J(q)H(q)^{-1}(J^T(q) - \hat{J}^T(q)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $X = (x, \dot{x})^T$ entonces la Ec. (3.9) se reescribe como:

$$\ddot{x} = \varphi(X)u + \xi(X) + \psi(X)F \quad (3.11)$$

Nótese que si se conoce la dinámica de manera exacta del robot manipulador y además no existe ninguna perturbación externa, entonces $\varphi(X) = I$, $\xi(X) = 0$ y $\psi(X) = 0$ llevando a una simple ecuación dinámica no acoplada $\ddot{x} = u$. Para más información sobre esta ecuación ver [10],[24].

3.2. Modelado Matemático: Enfoque Restringido

Como se mostró en el modelado anterior, el manipulador no estaba sujeto bajo ninguna restricción en lo que su movimiento concierne. Un enfoque diferente se presentará en esta sección cuando el efector final del manipulador se considera que se encuentra en contacto con el ambiente, por ejemplo como se muestra en la Fig. 3.2, esto origina una reducción de los grados de libertad del sistema, y como consecuencia una reducción en el movimiento del sistema. De esta manera, los grados de libertad de movimiento perdidos, se convierten en fuerzas de contacto, los cuales deben ser incluidas en la dinámica del sistema.

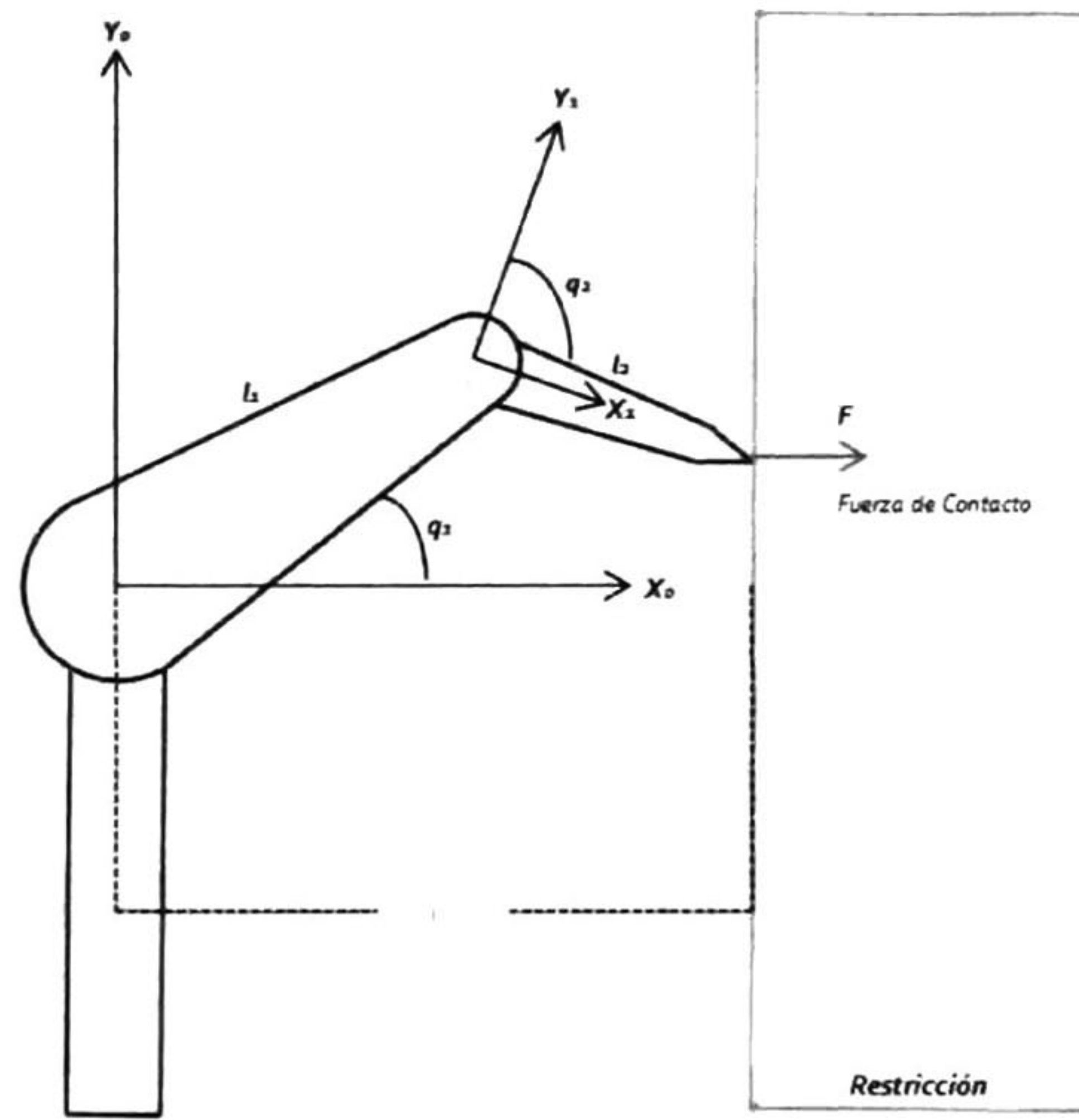


Figura 3.2: Configuración del manipulador en contacto con el ambiente.

El modelo dinámico del robot manipulador con movimiento restringido se obtiene empleando la formulación de Lagrange como en [34]:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) = \tau + J_{\Phi}^T(q)\lambda \quad (3.12)$$

donde q es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones, $H(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es el vector de pares centrífugos y de Coriolis, $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales, D es la matriz diagonal positiva semidefinida que considera los coeficientes de fricción de las articulaciones, τ es el vector de pares actuando en las articulaciones y $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es el vector de multiplicadores de Lagrange; físicamente representan la fuerza aplicada en el punto de contacto. $J_{\Phi}(q) = \nabla\Phi(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz ortogonal, que en esta tesis su rango se supone completo debido a que se considera que todas las restricciones son independientes. $\nabla\Phi(q)$ denota el gradiente de la superficie del objeto $\Phi(q) \in \mathbb{R}^m$ que mapea un vector sobre el plano normal al plano tangente en el punto de contacto.

Las ecuaciones que describen la dinámica de un robot manipulador que incorporan un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acoplado a un conjunto de restricciones holónomas impuestas a nivel dinámico se conocen como sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas o sistema singular de ecuaciones diferenciales [28]. En este trabajo se consideran robots manipuladores de n grados de libertad y m restricciones independientes originadas por la interacción con el ambiente.

El ambiente a ser manipulado por el sistema es modelado mediante un conjunto de restricciones holónomas (véase en (B.3)) que restringen el movimiento del robot manipulador en cada punto de contacto. Con ello, la dinámica del objeto o ambiente no tiene que ser calculada explícitamente para controlar el sistema robótico, es decir; la función de una restricción es relacionar la configuración de la cinemática del robot con el entorno. En este trabajo, se considera que restricciones de tipo holónimo se satisfacen en todo instante y se utilizan únicamente para fines de análisis durante todo el análisis matemático.

Dado que restricciones impuestas son holónomicas expresadas directamente en el espacio de uniones como:

$$\Phi(q) = 0 \quad (3.13)$$

El mapeo $\Phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ se asume que es dos veces diferenciable. Diferenciando la Ec. (3.13) se tiene que

$$J_{\Phi} \dot{q} = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (3.14)$$

Utilizando el teorema de la función implícita (véase en B.2) siempre es posible particionar el vector q en dos vectores $q^T = [q_1^T, q_2^T]$, $q_1 \in \mathfrak{R}^{n-m}$, $q_2 \in \mathfrak{R}^m$. Para mayor información véase (B.1). Asumiendo que la ecuación de restricción puede ser expresada como [10]:

$$\Phi(q_1, \Omega(q_1)) = 0 \quad (3.15)$$

donde $q_2 = \Omega(q_1)$. El vector en el espacio de uniones puede ser expresado como:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \Omega(q_1) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La derivada de la Ec. (3.16) es:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ \frac{\partial \Omega(q_1)}{\partial (q_1)} \end{bmatrix} \dot{q}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ \frac{\partial \Omega(q_1)}{\partial (q_1)} & I_m \end{bmatrix}}_{T_x} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

T_x es no singular. Se tiene que

$$\dot{q} = T_x \dot{\chi} \quad (3.18)$$

Diferenciando la Ec. (3.18)

$$\ddot{q} = T_x \ddot{\chi} + \dot{T}_x \dot{\chi} \quad (3.19)$$

donde $\chi = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Entonces el sistema dinámico del robot manipulador de la Ec. (3.12) puede ser transformado utilizando la Ec. (3.18) y la Ec. (3.19) como:

$$T_x^T H(\chi) T_x \ddot{\chi} + T_x^T (C(\chi, \dot{\chi}) T_x + H(\chi) \dot{T}_x) \dot{\chi} + T_x^T G(\chi) + T_x^T D(\dot{\chi}) = T_x^T \tau + T_x^T J_\Phi^T(q) \lambda \quad (3.20)$$

La ecuación dinámica puede ser reescrita como:

$$A \ddot{\chi} + R \dot{\chi} + B + N + \Psi = T_x^T \tau + T_x^T J_\Phi^T(q) \lambda \quad (3.21)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= T_x^T H(\chi) T_x \\ R &= T_x^T (C(\chi, \dot{\chi}) T_x + H(\chi) \dot{T}_x) \\ B &= T_x^T G(\chi) \\ N &= T_x^T D(\dot{\chi}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

los términos A, R, B, N denotan los valores nominales de robot; Ψ representan variaciones paramétricas y perturbaciones externas las cuales se asumen como acotadas. Analizando las primeras $n - m$ y las últimas m ecuaciones. Se introduce la siguiente matriz

$$I_n = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

donde las matrices identidad por bloques tiene las dimensiones de $E_1 \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times n}$, $E_2 \in \mathfrak{R}^{(m \times n)}$ Entonces χ puede ser expresada como $\chi = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = E_1^T q_1$. La Ec. (3.21) queda en forma reducida como:

$$A E_1^T \ddot{\chi} + R E_1^T \dot{\chi} + B + N + \Psi = T_x^T \tau + T_x^T J_\Phi^T(q) \lambda \quad (3.24)$$

La Ec. (3.24) se separa premultiplicando por la Ec. (3.23) obteniendose

$$E_1 A E_1^T \ddot{q}_1 + E_1 R E_1^T \dot{q}_1 + E_1 B + E_1 N + E_1 \Psi = E_1 T_x^T U \quad (3.25)$$

$$E_2 A E_1^T \ddot{q}_1 + E_2 R E_1^T \dot{q}_1 + E_2 B + E_2 N + E_2 \Psi = E_2 T_x^T U + E_2 T_x^T J_\Phi^T(q) \lambda \quad (3.26)$$

Se destaca que el término $E_1 T_x^T J_\Phi^T \lambda = 0$. Para probar esto se deriva la Ec. (3.15)

$$\dot{\Phi}(q_1, \Omega(q_1)) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \frac{\partial \Omega(q_1)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) \begin{pmatrix} I \\ \frac{\partial \Omega(q_1)}{\partial q_1} \end{pmatrix} \dot{q}_1 = J_\Phi T_x E_1^T \dot{q}_1 = 0 \quad (3.27)$$

Se tiene en cuenta que q_1 es coordenada independiente en el espacio de uniones, por lo que:

$$J_\Phi T_x E_1^T = E_1 T_x^T J_\Phi^T = E_1 T^T J_\Phi^T \lambda = 0 \quad (3.28)$$

Entonces la Ec. (3.25) se descarta para obtener el valor actual del multiplicador λ .

Propiedad 1

$$\begin{aligned} E_1 E_1^T &= I_{n-m} & E_2 E_1^T &= 0 \\ E_2 E_2^T &= I_m & E_1 E_2^T &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Propiedad 2

Los términos A y R de la Ec. (3.24)

$$M = E_1 A E_1^T \quad L = E_1 R E_1^T \quad (3.30)$$

$\dot{M} - 2L$ es una matriz antisimétrica.

Demostración

$$\begin{aligned} M &= E_1 (T_x^T H T_x) E_1^T \\ \dot{M} &= E_1 (\dot{T}_x^T H T_x + T_x^T \dot{H} T_x + T_x^T H \dot{T}_x) E_1^T \\ \dot{M} - 2L &= E_1 (\dot{T}_x^T H T_x + T_x^T \dot{H} T_x + T_x^T H \dot{T}_x - 2(T_x^T C T_x + T_x^T H \dot{T}_x)) E_1^T \\ \dot{M} - 2L &= E_1 \left(T_x^T (\dot{H} - 2C) T_x + \dot{T}_x H T_x - (\dot{T}_x H T_x)^T \right) E_1^T \end{aligned}$$

por lo que $\dot{H} - 2C$ es antisimétrica, entonces $\dot{M} - 2L$ es una matriz antisimétrica. Para obtener la solución del multiplicador de la Ec. (3.25) se despeja \bar{q}_1 obteniendose

$$\bar{q}_1 = (E_1 A E_1^T)^{-1} E_1 (T_x^T U - n_1) \quad (3.31)$$

los términos por simplicidad se agrupan $n_1 = R E_1^T \bar{q}_1 + B + N + \Psi$. La Ec. (3.31) se sustituye en Ec. (3.26) quedando

$$E_2 A E_1^T (E_1 A E_1^T)^{-1} E_1 (T_x^T U - n_1) + E_2 n_1 = E_2 T_x^T U + E_2 T_x^T J_\Phi^T \lambda \quad (3.32)$$

$$\lambda = (E_2 T_x^T J_\Phi^T)^{-1} (E_2 - E_2 A E_1^T M^{-1} E_1) (n_1 - T_x^T U) \quad (3.33)$$

Capítulo 4

Control Robusto de Fuerza y Posición por STA

En este capítulo se presentan los esquemas de control de fuerza y posición basados en STA para los modelos desarrollados en el capítulo anterior. En este capítulo también se muestran detallados análisis de estabilidad y robustez para cada controlador propuesto.

4.1. Estructura del Controlador: Enfoque No Restringido

El problema de seguimiento de la trayectoria del efector final puede resolverse incluyendo el controlador de la forma en que se muestra en la Fig. 4.1, donde x_r representa la referencia deseada expresada en espacio operacional y \tilde{x} es la señal de error entre la posición deseada y la actual.

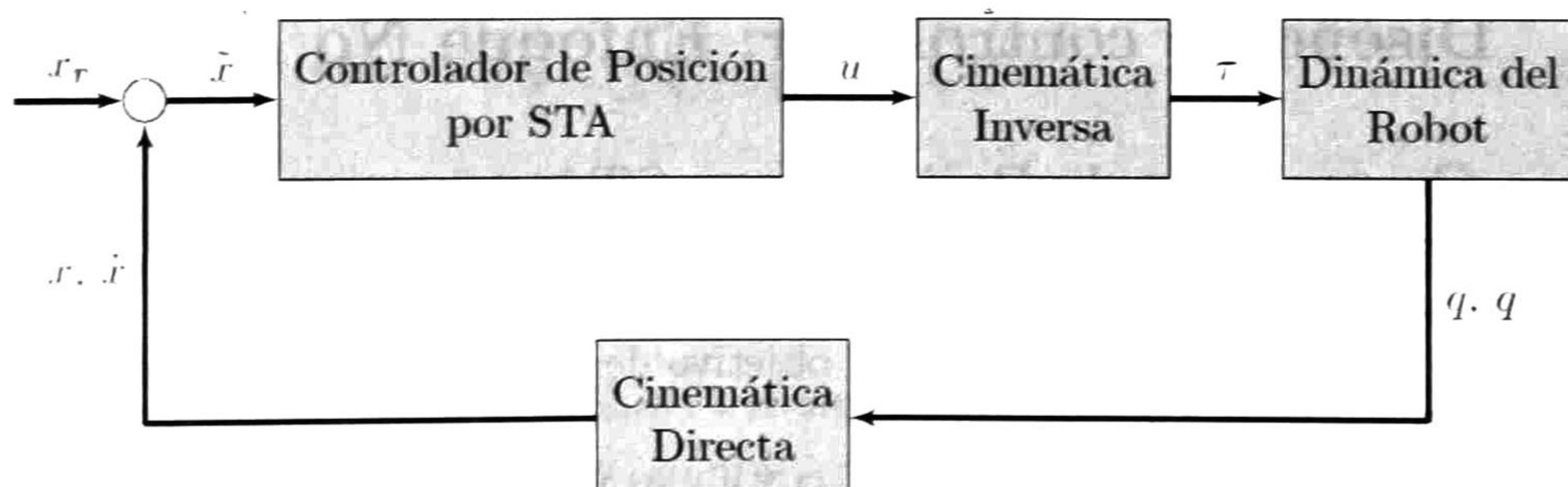


Figura 4.1: Controlador de posición.

Para lograr controlar la fuerza y la posición, se plantea el esquema que se muestra en

la Fig. 4.2, en donde α es una señal de control interno. Si $\alpha \neq 0$ significa que el sistema está controlando la fuerza, de lo contrario la posición.

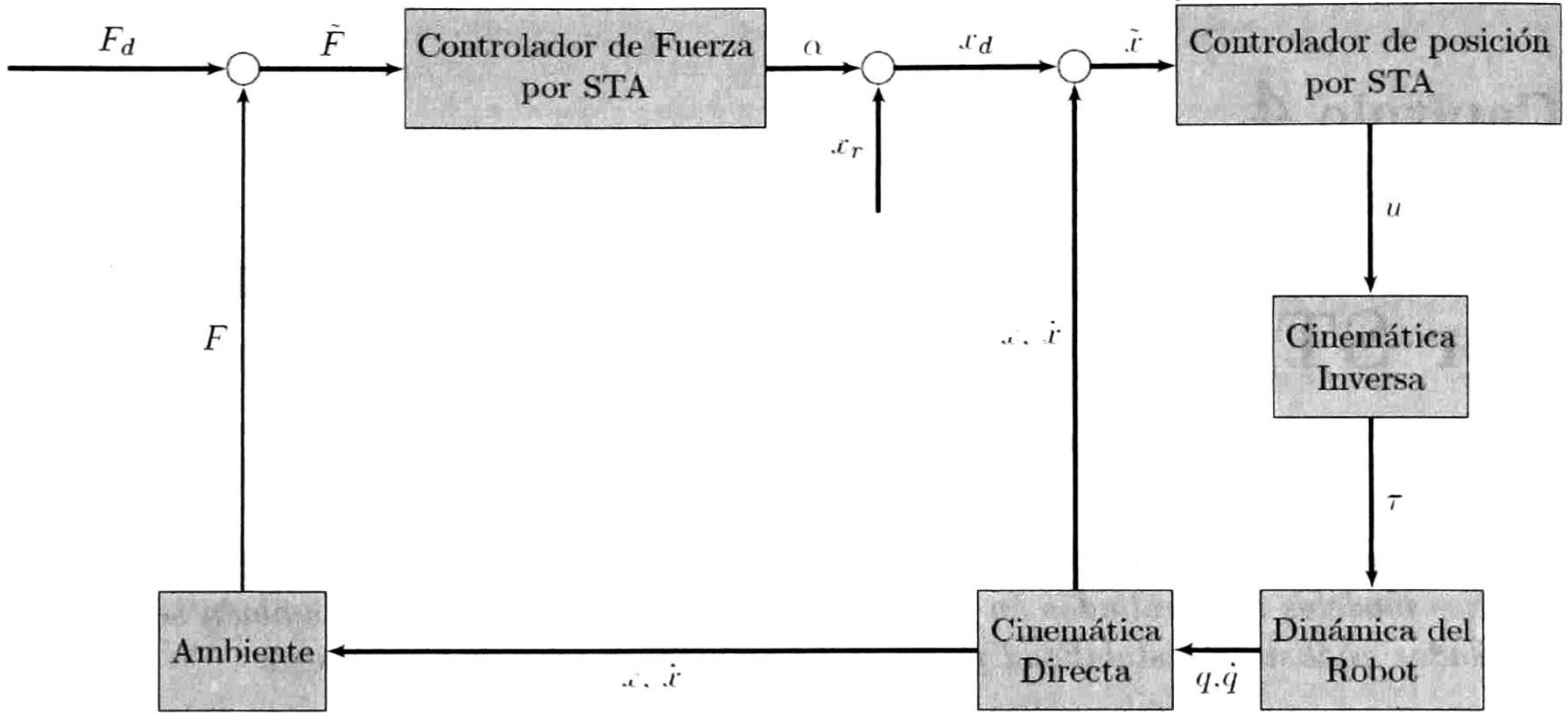


Figura 4.2: Controlador de fuerza y posición.

Es importante señalar que el control de fuerza no se logra a través de la posición como en el caso del control de impedancia. En este caso ambos controladores tanto el de fuerza como el de la posición comparten términos, por lo que ambos controladores interactúan y no son entidades separadas como en el caso del controlador híbrido.

4.2. Diseño de controlador: Enfoque No Restringido

4.2.1. Controlador de Posición por STA

En esta sección se considera como la identidad el término no lineal que multiplica a la entrada de control de la Ec. (3.11) con el objetivo de ilustrar la aplicación del controlador, quedando como:

$$\ddot{x} = u + \xi(X) + \psi(X)F \quad (4.1)$$

La variable u es la entrada de control y F representa la fuerza de reacción ejercida por el ambiente. Se considera que los errores de modelado están acotados y esto es debido a las propiedades expuestas en (A.4). Formalmente, la variable de interés es $\int^{\infty} \tilde{x} dT$ y se define

una superficie variante en el tiempo $s(t)$ en el espacio de estados (ver [2, 40]) como:

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{r-1} \int^t \tilde{x} dT \quad (4.2)$$

Sea λ un parámetro de diseño y se define $\tilde{x} = x - x_d$ como el error entre la posición actual y el término x_d . El término x_d se obtiene restando la posición deseada y la señal de control interno $\alpha(t)$ como $x_d = x_r - \alpha(t)$.

La superficie deslizante definida en la Ec. (4.2) ayuda a eliminar la fase de llegada o *reaching phase* [43] y asegura insensibilidad en la planta con respecto a perturbaciones externas y incertidumbres en el modelo desde el inicio del proceso de control [3]. En este trabajo, $r = 3$ como en [40] lo que conduce a

$$s = \dot{\tilde{x}} + 2\lambda\tilde{x} + \lambda^2 \int^t \tilde{x} dT - \underbrace{\dot{\tilde{x}}(0) + 2\lambda\tilde{x}(0)}_{s=0 \text{ at } t=0} \quad (4.3)$$

Derivando la Ec. (4.3)

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{\tilde{x}} + 2\lambda\dot{\tilde{x}} + \lambda^2\tilde{x} \\ \dot{s} &= \ddot{x} - \ddot{x}_d + 2\lambda\dot{\tilde{x}} + \lambda^2\tilde{x} \\ \dot{s} &= u + \xi(X) + \psi(X)F - \ddot{x}_d + 2\lambda\dot{\tilde{x}} + \lambda^2\tilde{x} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora se diseña la ley de control aplicando STA

$$\begin{aligned} U &= -K_1 \sqrt{|s|} \text{sign}(s) + v \\ \dot{v} &= -K_3 \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$u = \ddot{x}_d - 2\lambda\dot{\tilde{x}} - \lambda^2\tilde{x} + U \quad (4.6)$$

Sustituyendo la ley de control de la Ec. (4.6) en la Ec. (4.4)

$$\dot{s} = \xi(X) + \psi(X)F + U \quad (4.7)$$

En el caso del control de posición $F = 0$, debido a que el efector final no se encuentra en contacto con el ambiente, por lo que se tiene que $\phi = |\xi(X)|$ y sustituyendo en la Ec. (4.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -K_1 \sqrt{|s|} \text{sign}(s) + v + \phi \\ \dot{v} &= -K_3 \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para establecer la condición de estabilidad del modo deslizante, la siguiente suposición se introduce. Se asume que

$$|\dot{\phi}(t)| \leq \rho \quad \forall t \geq 0 \quad (4.9)$$

con cierta constante ρ . Por medio de la transformación

$$\omega = \phi - K_3 \int_0^t \text{sign}(s)$$

el sistema original de la Ec. (4.8) puede también ser reordenada como [37]

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -K_1 \sqrt{|s|} \text{sign}(s) + \omega \\ \dot{\omega} &= -K_3 \text{sign}(s) + \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se establecen las desigualdades que definen los parámetros de control con la forma

$$K_1 > 0 \quad K_3 > 3\rho + 2(\rho/K_1)^2 \quad (4.11)$$

Estos valores se definieron para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, bajo la suposición (4.9) el origen $s = 0$ es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema (4.10), por lo que todas las trayectorias convergen en tiempo finito al origen.

De la síntesis anterior, la ley de control u hará que x siga a x_r , es decir el control de posición se lleva a cabo. La obtención de los valores 4.11 se explicará en detalle a continuación.

4.2.2. Análisis de Estabilidad: Controlador de Posición por STA

La función de Lyapunov propuesta basados en el desarrollo propuesto [31] puede ser escrita de forma cuadrática como $V_1(s) = \zeta_1^T P_1 \zeta_1$ donde $\zeta_1^T = [|s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s), \omega]$,

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4K_3 + K_1^2 & -K_1 \\ -K_1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nótese que $V_1(s)$ es continua pero no diferenciable en $s = 0$. Es positiva y radialmente no acotada si $K_3 > 0$, es decir

$$\lambda_{\min} P_1 \|\zeta_1\|_2^2 \leq V_1(s) \leq \lambda_{\max} P_1 \|\zeta_1\|_2^2 \quad (4.12)$$

donde $\|\zeta_1\|_2^2 = |s| + \omega^2$ es la norma Euclídeana de ζ_1 . Su derivada temporal a lo largo de las soluciones del sistema (4.10) es

$$\dot{V}_1(s) = -\frac{1}{|s|^{1/2}} \zeta_1^T Q_1 \zeta_1 + \rho \gamma_1^T \zeta_1 \quad (4.13)$$

donde $\gamma_1^T = [-K_1 \quad 2]$ y $Q_1 = \frac{K_1}{2} \begin{bmatrix} 2K_3 + K_1^2 & -K_1 \\ -K_1 & 1 \end{bmatrix}$. Teniendo en cuenta la cota de la perturbación en (4.9) se puede demostrar que

$$\dot{V}_1(s) \leq -\frac{1}{|s|^{1/2}} \zeta_1^T \hat{Q}_1 \zeta_1$$

donde

$$\hat{Q}_1 = \frac{K_1}{2} \begin{bmatrix} 2K_3 + K_1^2 - 2\varrho & \star \\ -(K_1 + \frac{2\varrho}{K_1}) & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que \dot{V}_1 es definida negativa si $\hat{Q}_1 > 0$. Si las ganancias K_1 y K_3 se definen como en (4.11) el estado converge a cero en un tiempo finito. Por lo tanto, se puede concluir que el origen del sistema de error es un punto de equilibrio, y que es globalmente asintóticamente estable [31].

4.2.3. Controlador de Fuerza por STA

En este punto, el control de posición está resuelto. Cuando $\alpha \neq 0$ la entrada de control u hará que x siga a $x_r - \alpha$. Entonces el control de fuerza se logra, si el término α varia de tal manera que F llegue a la fuerza de contacto deseada F_d cuando el sistema se encuentra en contacto con el ambiente. El término F se presenta como en [2, 10, 24] y colocado en $x = 0$. Durante el contacto

$$\begin{aligned} F &= kx & \tilde{F} &= F - F_d \\ \dot{F} &= k\dot{x} & \dot{\tilde{F}} &= k\dot{x} - \dot{F}_d \\ \ddot{F} &= k\ddot{x} & \ddot{\tilde{F}} &= k\ddot{x} - \ddot{F}_d \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde k es la rigidez del ambiente y se asume como conocida. Además, las medidas de fuerza son a menudo ruidosa sobre todo debido a la fricción y otras imperfecciones. Aunque está basado en una aproximación, $\dot{F} = k\dot{x}$ generalmente conduce a una mejor estimación de F que las que se obtendría de diferenciar una señal de fuerza ruidosa [2].

Formalmente, la variable de interes es $\int_0^\infty \frac{\tilde{F}}{k} dT$ y se define una superficie deslizante variante en el tiempo $p(t)$ en el espacio de estados

$$p = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{r-1} \int \frac{\tilde{F}}{k} dT \quad (4.15)$$

entonces

$$kp = \dot{\tilde{F}} + 2\lambda\tilde{F} + \lambda^2 \int \tilde{F} dT - \underbrace{\tilde{F}(0) - 2\lambda\tilde{F}(0)}_{s=0 \text{ at } t=0} \quad (4.16)$$

Derivando la Ec. (4.16)

$$\dot{p} = \frac{1}{k} (\ddot{\tilde{F}} + 2\lambda\dot{\tilde{F}} + \lambda^2\tilde{F}) \quad (4.17)$$

Por consiguiente, desarrollando la Ec. (4.17) y empleando (4.14)

$$\ddot{\tilde{F}} + 2\lambda\dot{\tilde{F}} + \lambda^2\tilde{F} = -\lambda^2 F_d - 2\lambda\dot{F}_d - \ddot{F}_d + k\{(\ddot{x}_r + 2\lambda\dot{x}_r + \lambda^2 x_r) - (\ddot{\alpha} + 2\lambda\dot{\alpha} + \lambda^2 \alpha) + \xi(X) + \psi(X)F + U\} \quad (4.18)$$

Sustituyendo la Ec. (4.18) en la Ec. (4.17)

$$\dot{p} = -\frac{\lambda^2 F_d + 2\lambda\dot{F}_d + \ddot{F}_d}{k} + (\ddot{x}_r + 2\lambda\dot{x}_r + \lambda^2 x_r) - (\ddot{\alpha} + 2\lambda\dot{\alpha} + \lambda^2 \alpha) + \xi(X) + \psi(X)F + U \quad (4.19)$$

Entonces, eligiendo el control interno como

$$\ddot{\alpha} + 2\lambda\dot{\alpha} + \lambda^2 \alpha = -\frac{\lambda^2 F_d + 2\lambda\dot{F}_d + \ddot{F}_d}{k} + (\ddot{x}_r + 2\lambda\dot{x}_r + \lambda^2 x_r) + U - U_2 \quad (4.20)$$

y aplicando el control interno (4.20) en la Ec. (4.19) se obtiene

$$\dot{p} = \xi(X) + \psi(X)F + U_2 \quad (4.21)$$

donde U_2 se define usando el STA como

$$\begin{aligned} U_2 &= -C_1 \sqrt{|p|} \text{sign}(p) + v_2 \\ \dot{v}_2 &= -C_3 \text{sign}(p) \end{aligned} \quad (4.22)$$

entonces, definiendo $\phi_2 = |\xi(X) + \psi(X)F|$ y sustituyendo en la Ec. (4.21)

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -C_1 \sqrt{|p|} \text{sign}(p) + v_2 + \phi_2 \\ \dot{v}_2 &= -C_3 \text{sign}(p) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para establecer la condición de estabilidad del modo deslizante, la siguiente suposición se introduce. Se asume que

$$|\dot{\phi}_2(t)| \leq \varrho_2 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.24)$$

con cierta constante ϱ_2 . Por medio de la transformación

$$\omega_2 = \phi_2 - C_3 \int_0^t \text{sign}(p)$$

el sistema original de la Ec. (4.23) puede también ser reordenada como [37]

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -C_1 \sqrt{|p|} \text{sign}(p) + \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= -C_3 \text{sign}(p) + \dot{\phi}_2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Se establecen las desigualdades que definen los parámetros de control con la forma

$$C_1 > 0 \quad C_3 > 3\varrho_2 + 2(\varrho_2/C_1)^2 \quad (4.26)$$

Estos valores se definieron para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, bajo la suposición (4.24) el origen $p = 0$ es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema (4.25), por lo que todas las trayectorias convergen en tiempo finito al origen. De la síntesis anterior, la ley de control u hará que x siga a $x_r - \alpha$, es decir el control de fuerza se lleva a cabo. La obtención de los valores (4.26) se explicará en detalle a continuación.

4.2.4. Análisis de Estabilidad: Controlador de Fuerza por STA

La función de Lyapunov propuesta basados en el desarrollo propuesto [31] puede ser escrita de forma cuadrática como $V_2(p) = \zeta_2^T P_2 \zeta_2$ si $\zeta_2^T = [|p|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(p), \omega_2]$,

$$P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4C_3 + C_1^2 & -C_1 \\ -C_1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nótese que $V_2(p)$ es continua pero no diferenciable en $p = 0$. Es positiva y radialmente no acotada si $C_3 > 0$, es decir

$$\lambda_{\min} P_2 \|\zeta_2\|_2^2 \leq V_2(p) \leq \lambda_{\max} P_2 \|\zeta_2\|_2^2 \quad (4.27)$$

donde $\|\zeta_2\|_2^2 = |p| + \omega_2^2$ es la norma Euclídeana de ζ_2 . Su derivada temporal a lo largo de las soluciones del sistema (4.25) es

$$\dot{V}_2(p) = -\frac{1}{|p|^{1/2}} \zeta_2^T Q_2 \zeta_2 + \varrho_2 \gamma_2^T \zeta_2 \quad (4.28)$$

donde $\gamma_2^T = [-C_1, 2]$ y $Q_2 = \frac{C_1}{2} \begin{bmatrix} 2C_3 + C_1^2 & -C_1 \\ -C_1 & 1 \end{bmatrix}$. Teniendo en cuenta la cota de la perturbación en (4.24) se puede demostrar que

$$\dot{V}_2(p) \leq -\frac{1}{|p|^{1/2}} \zeta_2^T \hat{Q}_2 \zeta_2$$

donde

$$\hat{Q}_2 = \frac{C_1}{2} \begin{bmatrix} 2C_3 + C_1^2 - 2\varrho_2 & \star \\ -(C_1 + \frac{2\varrho_2}{C_1}) & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que \dot{V}_2 es definida negativa si $\hat{Q}_2 > 0$. Si las ganancias C_1 y C_3 se definen como en (4.26) el estado converge a cero en un tiempo finito. Por lo tanto, se puede

concluir que el origen del sistema de error es un punto de equilibrio, y que es globalmente asintóticamente estable [31].

Sin embargo, si se aplican las dos leyes de control diferentes y conmutar entre ellas cuando el sistema entre o salga de contacto es difícil probar que el sistema es estable en lazo cerrado. Para resolver esta problemática se propone aplicar una ley de control como

$$u = \ddot{x}_d - 2\lambda\dot{\tilde{x}} - \lambda^2\tilde{x} + U \quad (4.29)$$

Para probar la Ec. (4.29) en modo de control de posición se sustituye en la Ec. (4.1) como

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d - 2\lambda\dot{\tilde{x}} - \lambda^2\tilde{x} + U + \xi(X) + \psi(X)F$$

la cual resulta como la Ec. (4.7). Para probar la Ec. (4.29) en modo de control de fuerza se considera $\alpha \neq 0$ y se sustituye en Ec. (4.1)

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \ddot{x}_r + 2\lambda\dot{x}_r + \lambda^2x_r - (\ddot{\alpha} + 2\lambda\dot{\alpha} + \lambda^2\alpha) \\ & - 2\lambda\dot{x} - \lambda^2x + U + \xi(X) + \psi(X)F \end{aligned} \quad (4.30)$$

Utilizando la Ec. (4.30) y la Ec. (4.20) resulta

$$\ddot{x} = \frac{\lambda^2 F_d + 2\lambda\dot{F}_d + \ddot{F}_d}{k} + \xi(X) + \psi(X)F + U_2 - 2\lambda\dot{x} - \lambda^2x \quad (4.31)$$

aplicando la Ec. (4.14) a la Ec. (4.31) resultando la Ec. (4.21). La cual demuestra que la ley de control (4.29) logra el control de fuerza y posición.

4.3. Estructura del Controlador: Enfoque Restringido

Como ya se mencionó anteriormente el efector final está restringido por un entorno rígido. En el capítulo anterior se mostró el modelado para convertir un sistema restringido a dos subsistemas reducidos matemáticamente tratables. El objetivo es diseñar un algoritmo de control para los subsistemas de la Ec. (3.25) y la Ec. (3.26), tal que el sistema en lazo cerrado permita el seguimiento de la posición y de la fuerza.

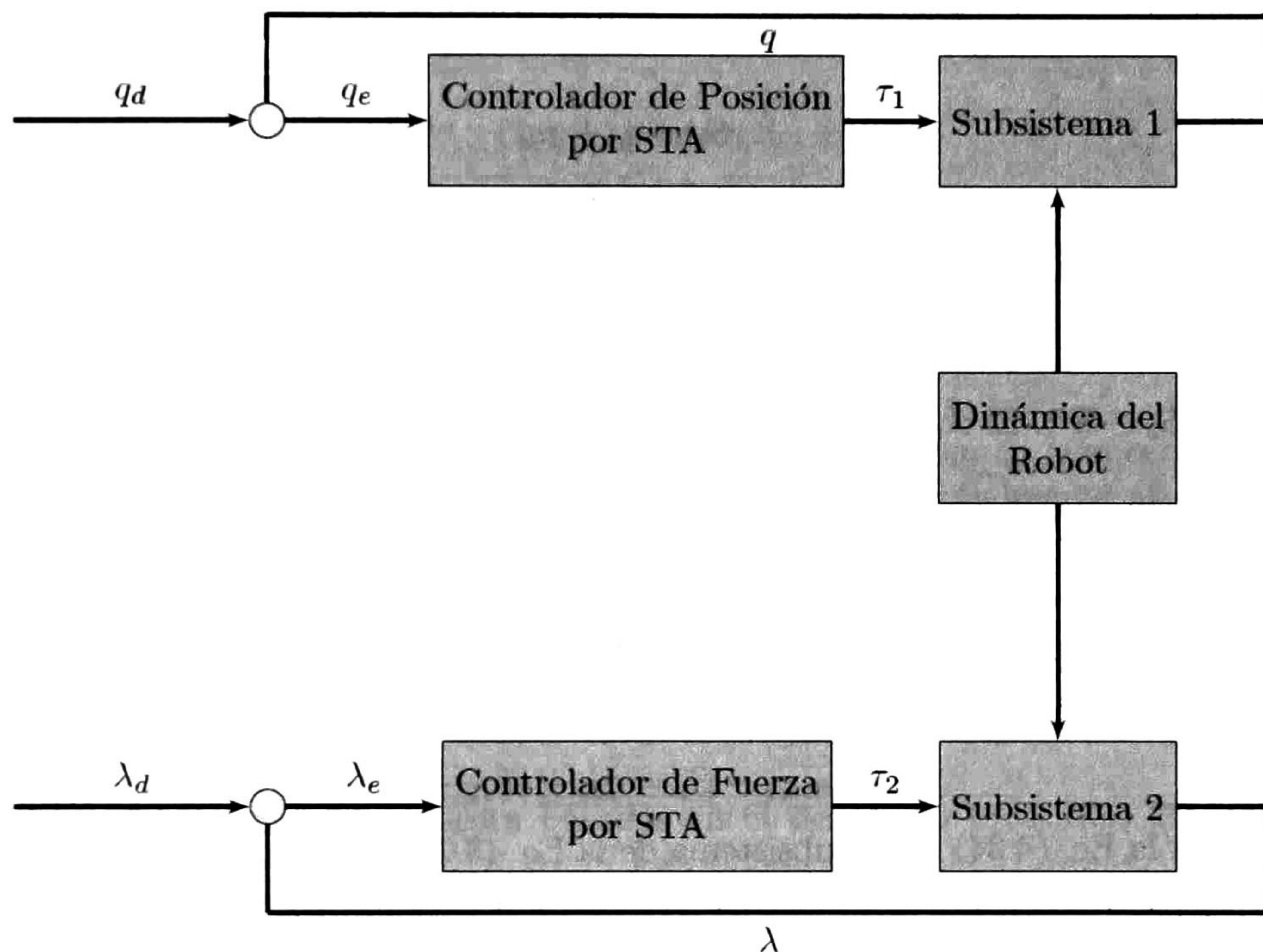


Figura 4.3: Controlador de posición y fuerza.

En la Fig. 4.3 se muestra el esquema de control donde $q_e = q_1 - q_{1d}$ representa el error en la posición en el espacio articular y $\lambda_e = \lambda_d - \lambda$ representa el error de la fuerza de contacto.

4.4. Diseño del Controlador: Enfoque Restringido

4.4.1. Controlador de Posición por STA

Para lograr el seguimiento de la posición como de la fuerza, se emplean dos superficies deslizantes. En el cual una de las superficies es selecciona con el fin de garantizar el seguimiento de la posición y la otra para asegurar seguimiento de la fuerza.

Las superficies deslizantes son:

$$S_1 = \dot{q}_e + \varepsilon q_e \quad (4.32)$$

$$S_2 = \int E_2 T_x^T J^T (\lambda_e) dt \quad (4.33)$$

donde $\varepsilon = \text{diag}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-m}]$

$$\varepsilon_i > 0$$

$S_1 \in \mathfrak{R}^{n-m}$, $S_2 \in \mathfrak{R}^m$. El control propuesto es:

$$T_x^T U = fe + F + E_1^T U_1 + E_2^T U_2 \quad (4.34)$$

donde:

$$fe = -T_x^T J^T \lambda_d$$

$$F = AE_1^T \ddot{q}_{s1} + RE_1^T \dot{q}_1 + B + N$$

$$\dot{q}_{s1} = \dot{q}_1 - S_1 = \dot{q}_{1d} - \varepsilon(q_1 - q_{1d})$$

Sustituyendo la Ec. (4.34) en el subsistema de la Ec. (3.25)

$$E_1 AE_1^T \ddot{q}_1 + E_1 RE_1^T \dot{q}_1 + E_1 B + E_1 N + E_1 \Psi = E_1 (fe + F + E_1^T U_1 + E_2^T U_2) \quad (4.35)$$

Considerando la Ec. (4.35) y aplicando las propiedades mostradas en (3.29)

$$E_1 AE_1^T (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_{s1}) + E_1 \Psi = U_1 \quad (4.36)$$

Tenga en cuenta que $\dot{S}_1 = (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_{s1})$ y $S_1 = (\dot{q}_1 - \dot{q}_{s1})$ por lo que se tiene

$$\dot{S}_1 = (E_1 AE_1^T)^{-1} (U_1 - E_1 \Psi) \quad (4.37)$$

Se considera que $\eta = |E_1 \Psi|$ y U_1 es el STA obteniéndose

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -G_1 \sqrt{|S_1|} \text{sign}(S_1) + \mu + \eta \\ \dot{\mu} &= -G_3 \text{sign}(S_1) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para establecer la condición de estabilidad del modo deslizante, la siguiente suposición se introduce. Se asume que

$$|\dot{\eta}(t)| \leq \rho \quad \forall t \geq 0 \quad (4.39)$$

con cierta constante ρ . Por medio de la transformación

$$\nu = \eta - G_3 \int_0^t \text{sign}(S_1)$$

el sistema original de la Ec. (4.38) puede también ser reordenado como [37]

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -G_1 \sqrt{|S_1|} \text{sign}(S_1) + \nu \\ \dot{\nu} &= -G_3 \text{sign}(S_1) + \dot{\eta} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Se establecen las desigualdades que definen los parámetros de control con la forma

$$G_1 > 0 \quad G_3 > 3\rho + 2(\rho/G_1)^2 \quad (4.41)$$

Estos valores se definieron para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, bajo la suposición (4.39) el origen $S_1 = 0$ es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema (4.40), por lo que todas las trayectorias convergen en tiempo finito al origen. La obtención de los valores (4.41) se explicará en detalle a continuación.

4.4.2. Análisis de Estabilidad: Controlador de Posición por STA

La función de Lyapunov propuesta basados en el desarrollo propuesto [31] puede ser escrita de forma cuadrática como $V_1(S_1) = \zeta_1^T P_1 \zeta_1$ donde $\zeta_1^T = [|S_1|^{1/2} \text{sign}(S_1), \nu]$,

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4G_3 + G_1^2 & -G_1 \\ -G_1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nótese que $V_1(s)$ es continua pero no diferenciable en $S_1 = 0$. Es positiva y radialmente no acotada si $G_3 > 0$, es decir

$$\lambda_{\min} P_1 \| \zeta_1 \|_2^2 \leq V_1(S_1) \leq \lambda_{\max} P_1 \| \zeta_1 \|_2^2 \quad (4.42)$$

donde $\| \zeta_1 \|_2^2 = |S_1| + \nu^2$ es la norma Euclídeana de ζ_1 . Su derivada temporal a lo largo de las soluciones del sistema (4.40) es

$$\dot{V}_1(S_1) = -\frac{1}{|S_1|^{1/2}} \zeta_1^T Q_1 \zeta_1 + \rho \gamma_1^T \zeta_1 \quad (4.43)$$

donde $\gamma_1^T = [-G_1 \ 2]$ y $Q_1 = \frac{G_1}{2} \begin{bmatrix} 2G_3 + G_1^2 & -G_1 \\ -G_1 & 1 \end{bmatrix}$. Teniendo en cuenta la cota de la perturbación en (4.39) se puede demostrar que

$$\dot{V}_1(S_1) \leq -\frac{1}{|S_1|^{1/2}} \zeta_1^T \hat{Q}_1 \zeta_1$$

donde

$$\hat{Q}_1 = \frac{G_1}{2} \begin{bmatrix} 2G_3 + G_1^2 - 2\rho & \star \\ -(G_1 + \frac{2\rho}{G_1}) & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que \dot{V}_1 es definida negativa si $\hat{Q}_1 > 0$. Si las ganancias G_1 y G_3 se definen como en (4.41) el estado converge a cero en un tiempo finito. Por lo tanto, se puede concluir que el origen del sistema de error es un punto de equilibrio, y que es globalmente asintóticamente estable [31].

4.4.3. Controlador de Fuerza por STA

En este punto, el control de posición está resuelto. Ahora se aplica la Ec. (4.34) en la Ec. (3.26) para el segundo subsistema y poder así controlar la fuerza

$$E_2 A E_1^T \ddot{q}_1 + E_2 R E_1^T \dot{q}_1 + E_2 B + E_2 N + E_2 \Psi = E_2 (f e + F + E_1^T U_1 + E_2^T U_2) + E_2 T_x^T J^T \lambda \quad (4.44)$$

Considerando la Ec. (4.44) y aplicando las propiedades mostradas en (3.29)

$$E_2 A E_1^T (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_{s1}) + E_2 \Psi = U_2 + E_2 T_x^T J^T (\lambda - \lambda_d) \quad (4.45)$$

Por lo tanto se tiene que

$$E_2 A E_1^T (\dot{S}_1) + E_2 \Psi = U_2 + E_2 T_x^T J^T (\lambda - \lambda_d) \quad (4.46)$$

Para poder mostrar estabilidad en el subsistema 2 la superficie S_1 debe estar en modo de deslizamiento, es decir \dot{S}_1 . La posición debe ser controlada inicialmente antes de controlar la fuerza. La Ec. (4.46) se reduce a

$$\dot{S}_2 = U_2 - E_2 \Psi \quad (4.47)$$

Se considera que $\eta_2 = |E_2 \Psi|$ y U_2 es el STA obteniéndose

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 &= -L_1 \sqrt{|S_2|} \text{sign}(S_2) + \mu_2 + \eta_2 \\ \dot{\mu}_2 &= -L_3 \text{sign}(S_2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para establecer la condición de estabilidad del modo deslizante, la siguiente suposición se introduce. Se asume que

$$|\dot{\eta}_2(t)| \leq \rho_2 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.49)$$

con cierta constante ρ_2 . Por medio de la transformación

$$\nu_2 = \eta_2 - L_3 \int_0^t \text{sign}(S_2)$$

el sistema original de la Ec. (4.48) puede también ser reordenado como [37]

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 &= -L_1 \sqrt{|S_2|} \text{sign}(S_2) + \nu_2 \\ \dot{\nu}_2 &= -L_3 \text{sign}(S_2) + \dot{\eta}_2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Se establecen las desigualdades que definen los parámetros de control con la forma

$$L_1 > 0 \quad L_3 > 3\rho_2 + 2(\rho_2/L_1)^2 \quad (4.51)$$

Estos valores se definieron para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, bajo la suposición (4.49) el origen $S_2 = 0$ es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema (4.50), por lo que todas las trayectorias convergen en tiempo finito al origen. La obtención de los valores 4.51 se explicará en detalle a continuación.

4.4.4. Análisis de Estabilidad: Controlador de Fuerza por STA

La función de Lyapunov propuesta basados en el desarrollo propuesto [31] puede ser escrita de forma cuadrática como $V_2(S_2) = \zeta_2^T P_2 \zeta_2$ donde $\zeta_2^T = [|S_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S_2), \nu_2]$,

$$P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4L_3 + L_1^2 & -L_1 \\ -L_1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nótese que $V_2(S_2)$ es continua pero no diferenciable en $S_2 = 0$. Es positiva y radialmente no acotada si $L_3 > 0$, es decir

$$\lambda_{\min} P_2 \|\zeta_2\|_2^2 \leq V_2(S_2) \leq \lambda_{\max} P_2 \|\zeta_2\|_2^2 \quad (4.52)$$

donde $\|\zeta_2\|_2^2 = |S_2| + \nu_2^2$ es la norma Euclidea de ζ_2 . Su derivada temporal a lo largo de las soluciones del sistema (4.50) es

$$\dot{V}_2(S_2) = -\frac{1}{|S_2|^{1/2}} \zeta_2^T Q_2 \zeta_2 + \rho_2 \gamma_2^T \zeta_2 \quad (4.53)$$

donde $\gamma_2^T = [-L_1 \quad 2]$ y $Q_2 = \frac{\nu_1}{2} \begin{bmatrix} 2L_3 + L_1^2 & -L_1 \\ -L_1 & 1 \end{bmatrix}$. Teniendo en cuenta la cota de la perturbación en (4.49) se puede demostrar que

$$\dot{V}_2(S_2) \leq -\frac{1}{|S_2|^{1/2}} \zeta_2^T \hat{Q}_2 \zeta_2$$

donde

$$\hat{Q}_2 = \frac{L_1}{2} \begin{bmatrix} 2L_3 + L_1^2 - 2\rho_2 & \star \\ -(L_1 + \frac{2\rho_2}{L_1}) & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que \dot{V}_2 es definida negativa si $\hat{Q}_2 > 0$. Si las ganancias L_1 y L_3 se definen como en (4.51) el estado converge a cero en un tiempo finito. Por lo tanto, se puede concluir que el origen del sistema de error es un punto de equilibrio, y que es globalmente asintóticamente estable [31].

Con el análisis anterior se demuestra que los objetivos de control tanto de la posición como de la fuerza se satisfacen.

Capítulo 5

Resultados de Simulación

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en simulación de los algoritmos descritos.

5.1. Simulaciones: Enfoque No Restringido

En el primer escenario consiste en que el efector final trace una trayectoria deseada en el cual no existe ningún obstáculo, es decir posición pura como se muestra en la Fig. 5.1.

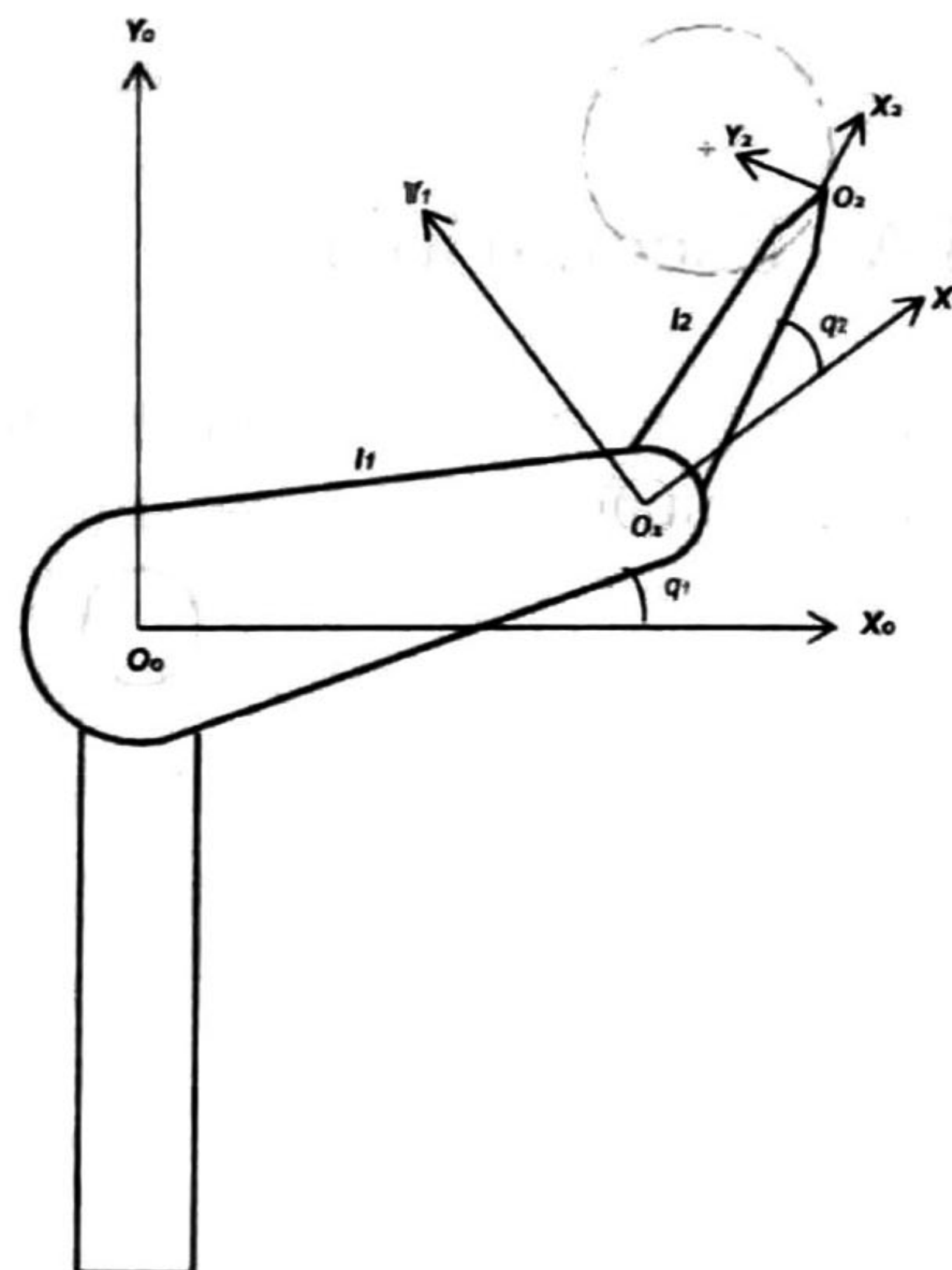


Figura 5.1: Escenario 1

En el segundo escenario consiste que el efector final trace una trayectoria deseada, en el cual existe un ambiente que se interpone entre la trayectoria y el efector final como se muestra en la Fig. 5.2.

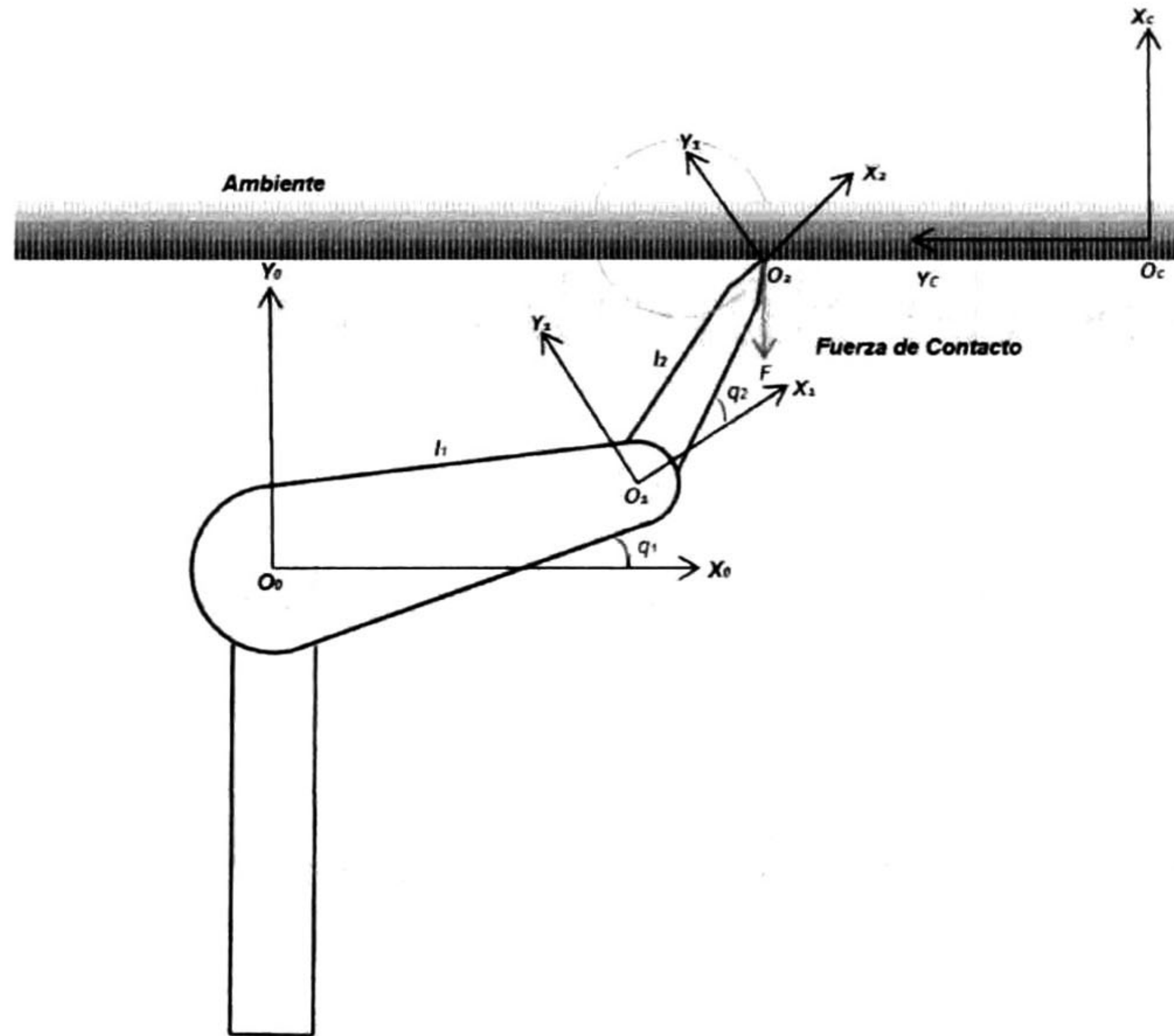
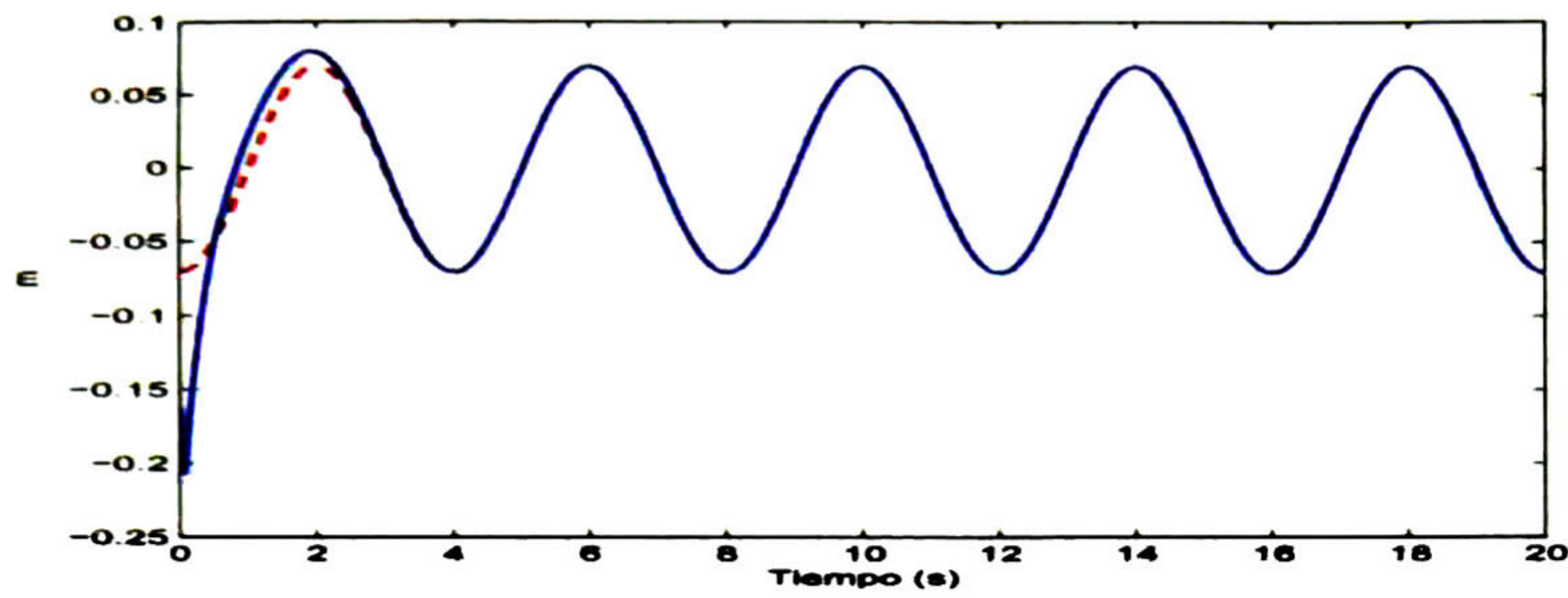
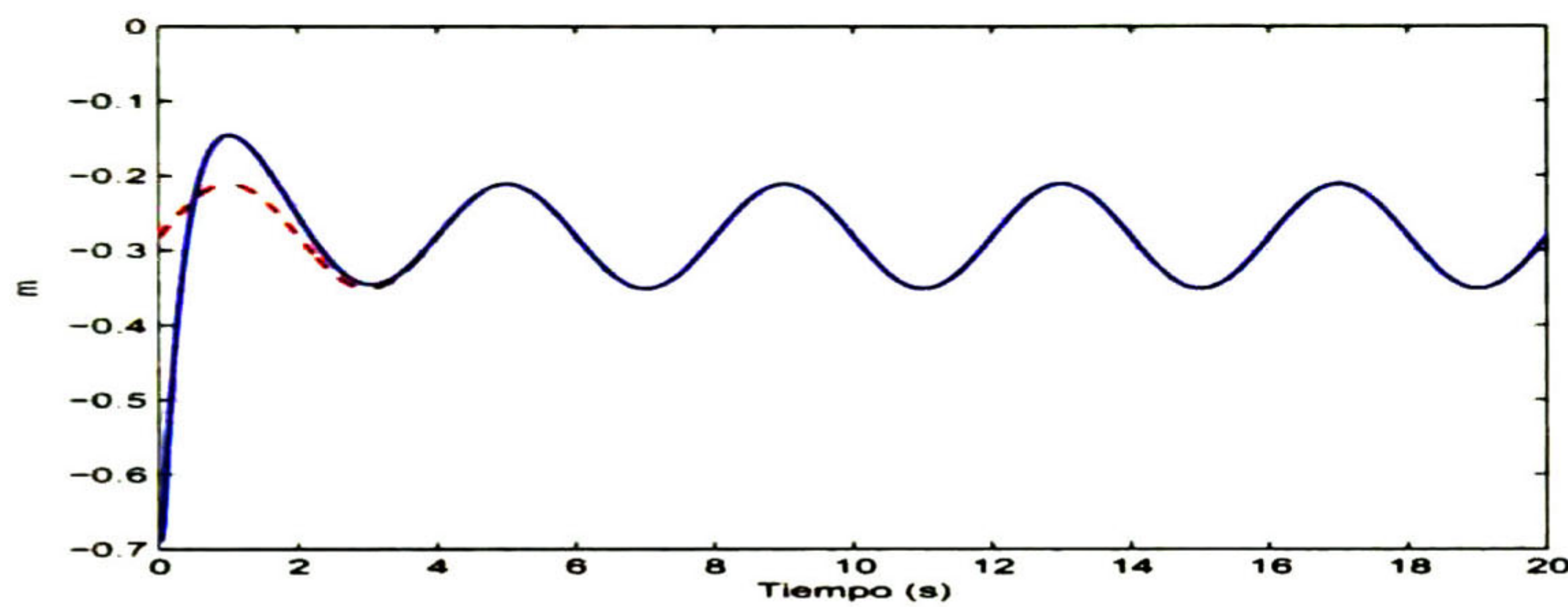


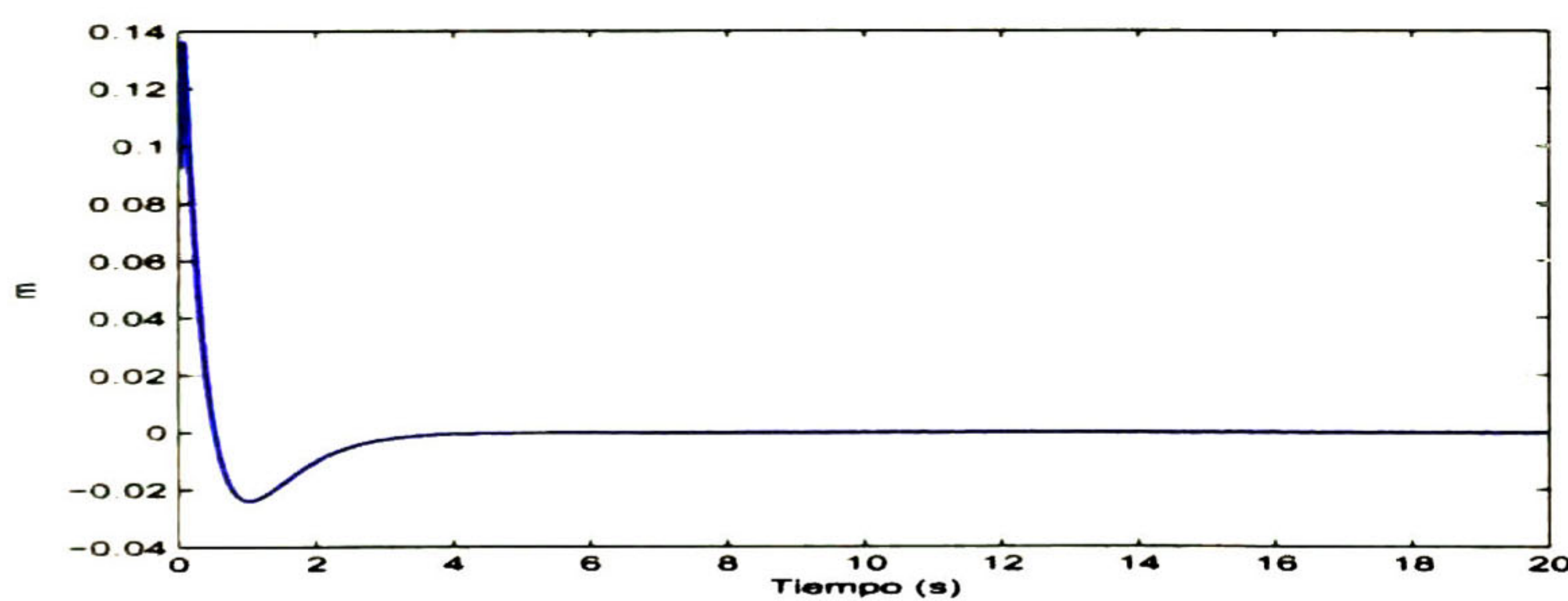
Figura 5.2: Escenario 2

5.1.1. Control por STA: Escenario 1

Se aplica el modelo de la planta y el modelo nominal descrito en el (A.1) que corresponde entre 15-20% de variación paramétrica. Los parámetros utilizados en la ley de control son: $K_1 = 20$, $K_3 = 30$, $C_1 = 55$, $C_3 = 6$. Se aplica una perturbación de $\lambda_r = [2\text{sen}(t) + 1.5\text{cos}(t)\text{sen}(t) + 0.5\text{cos}(5t) \quad 2 + \text{sin}(t)]^T$. La constante del ambiente $k = 1 \times 10^4 \text{N/m}$ y la posición de referencia $x_r = [-0.07\text{cos}(0.5\pi t) \quad -0.28 + 0.07\text{sin}(0.5\pi t)]^T$. En la Fig. 5.3 y Fig. 5.4 se muestra el seguimiento en el eje x y en el eje y respectivamente.

Figura 5.3: Seguimiento en el eje x Figura 5.4: Seguimiento en el eje y

En la Fig. 5.5 y Fig. 5.6 se muestra el error de seguimiento en el eje x y en el eje y respectivamente.

Figura 5.5: Error de seguimiento en el eje x

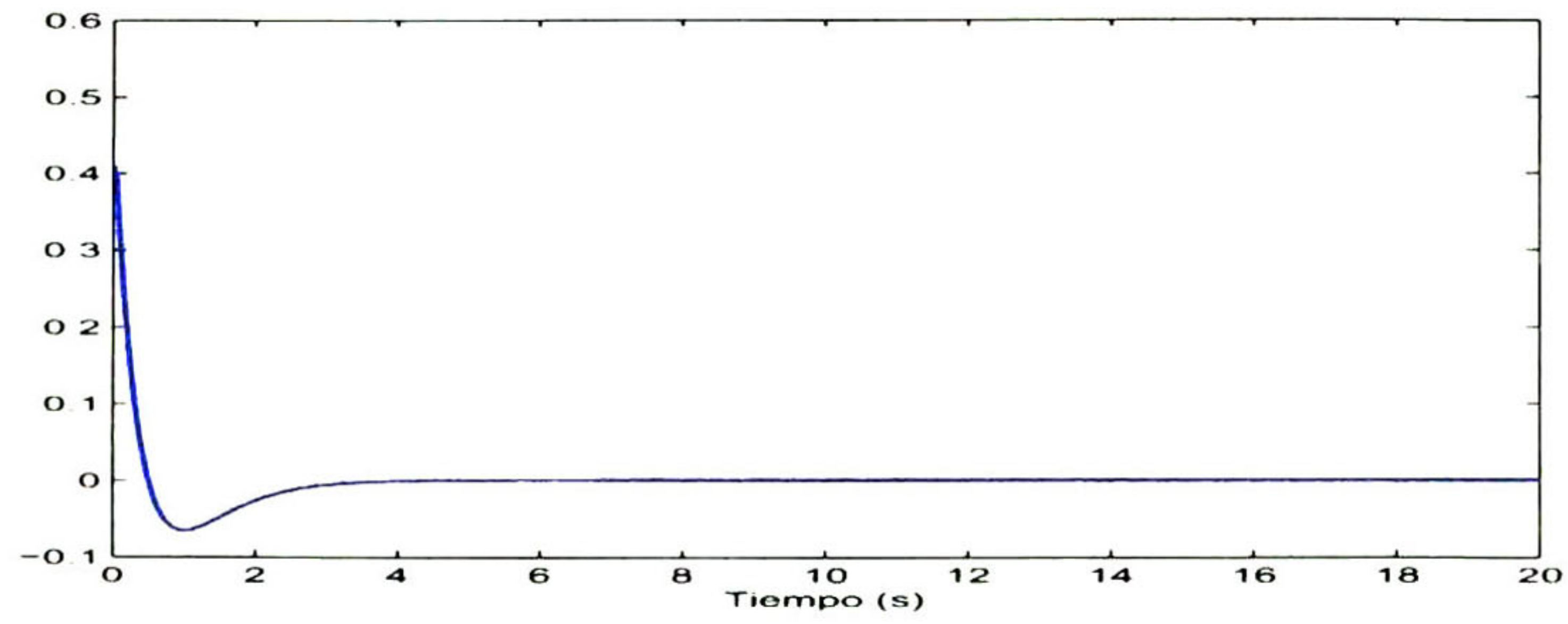


Figura 5.6: Error de seguimiento en el eje y

En la Fig. 5.7 se muestra la posición angular de las uniones. En la Fig. 5.8 y 5.9 se muestra el par en las respectivas uniones.

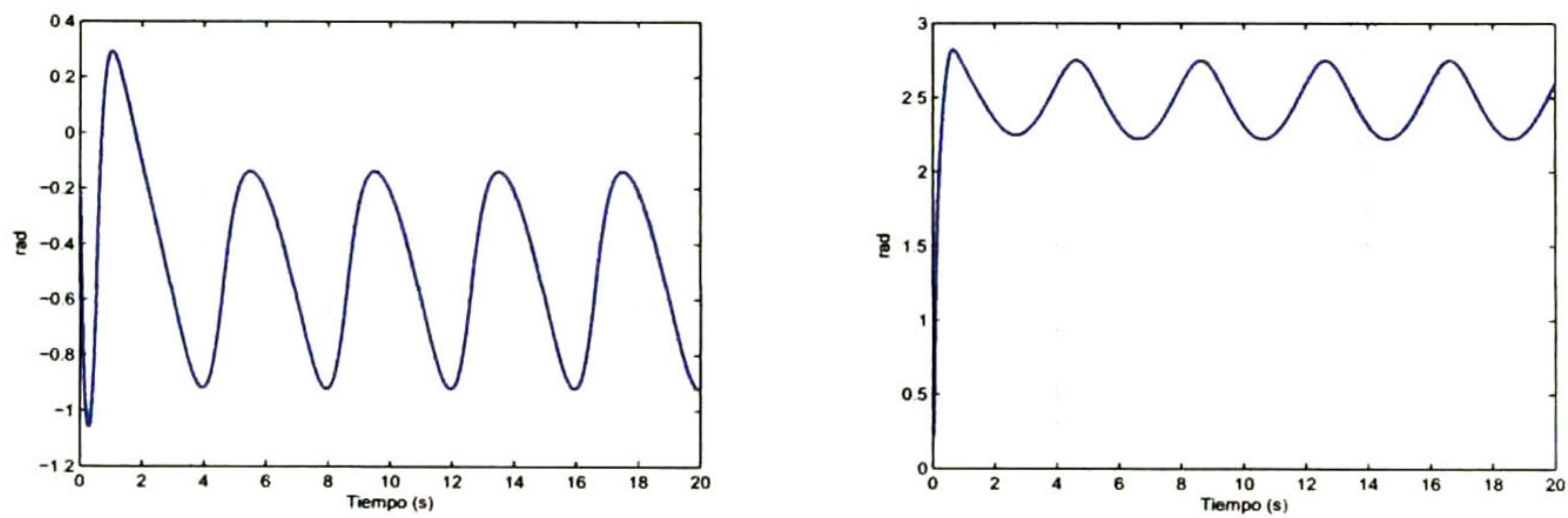


Figura 5.7: Uniones

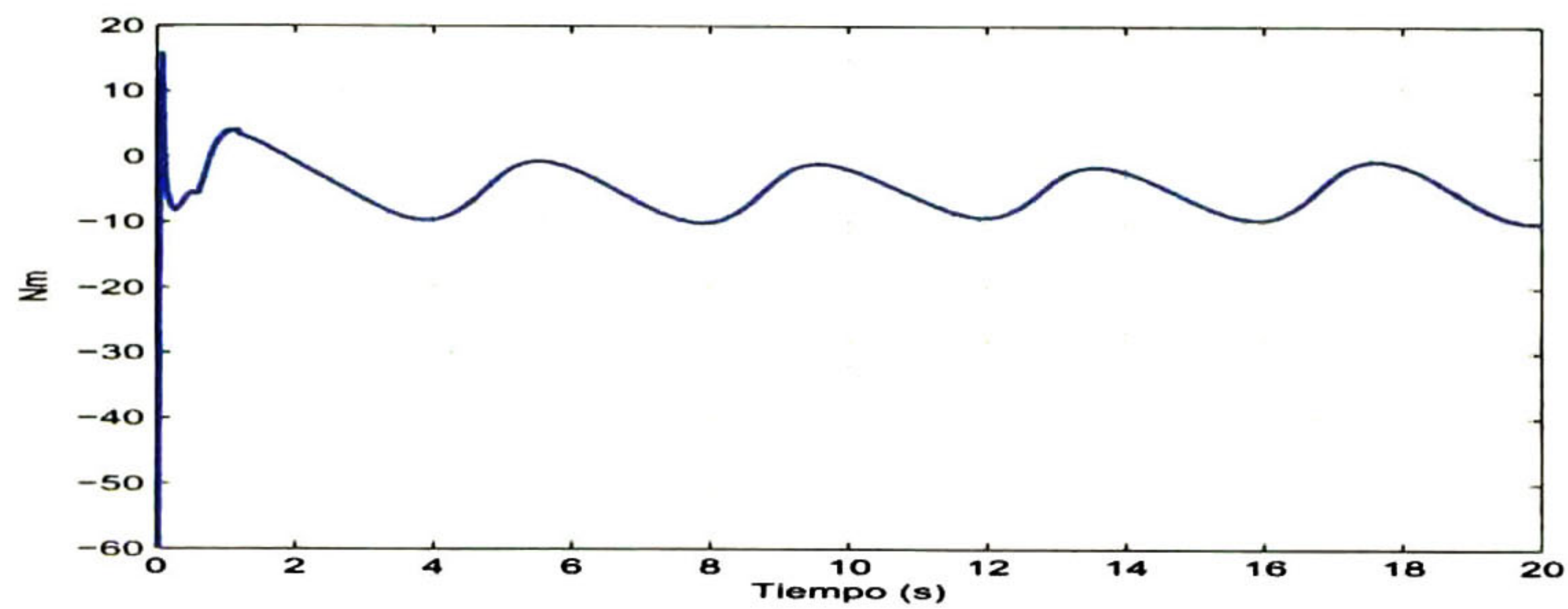


Figura 5.8: Torque en unión 1

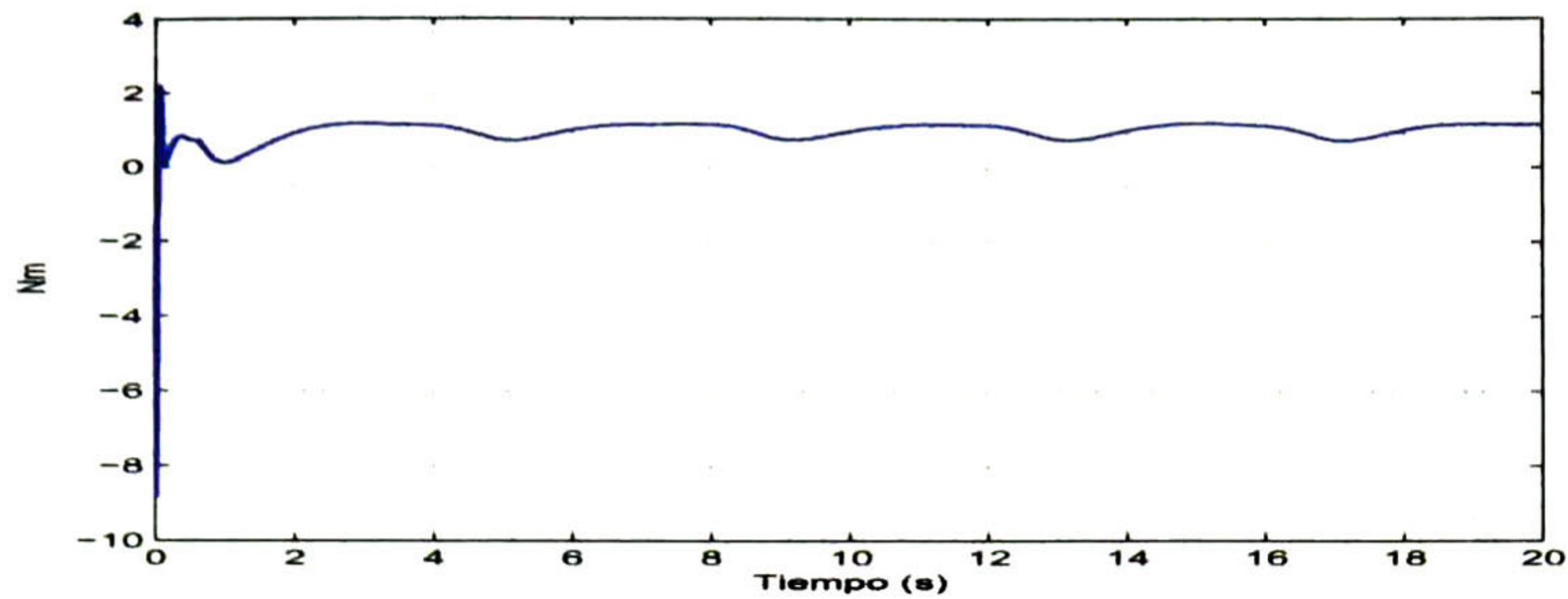
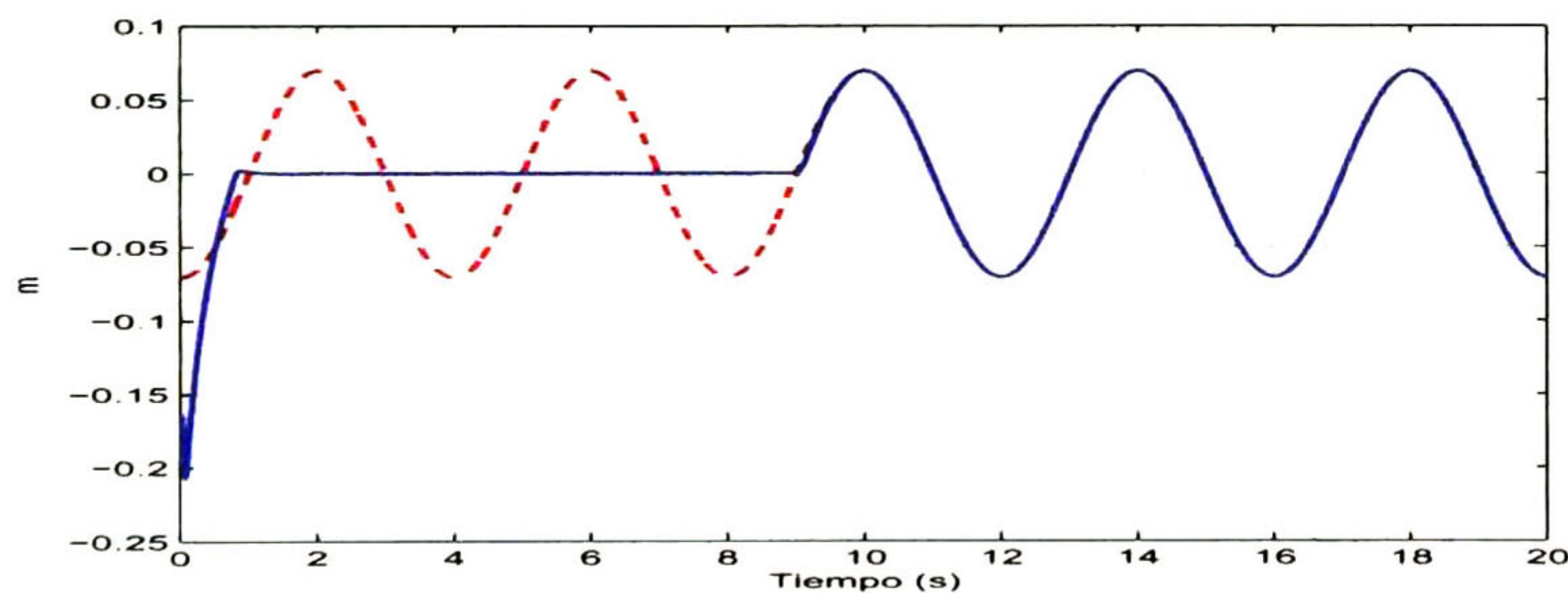


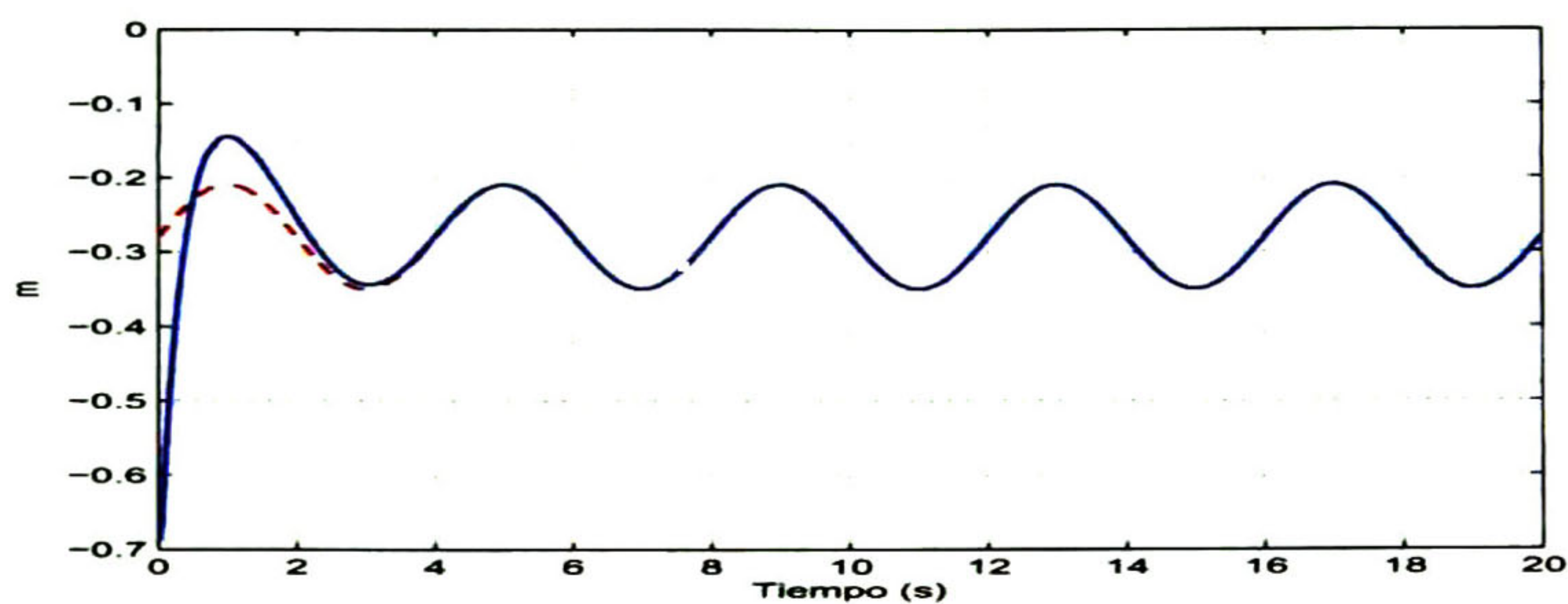
Figura 5.9: Torque en unión 2

La simulación presentada muestra un buen desempeño ante variaciones paramétricas y perturbaciones externas logrando satisfactoriamente el control de posición.

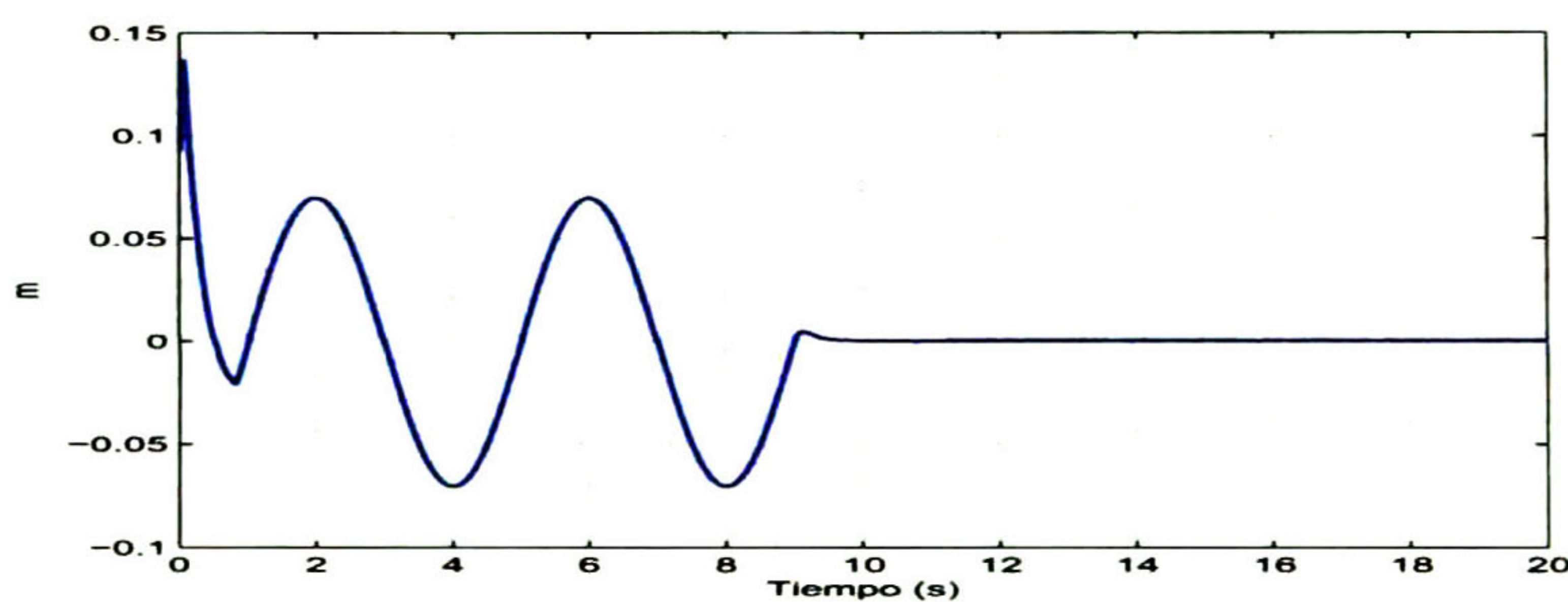
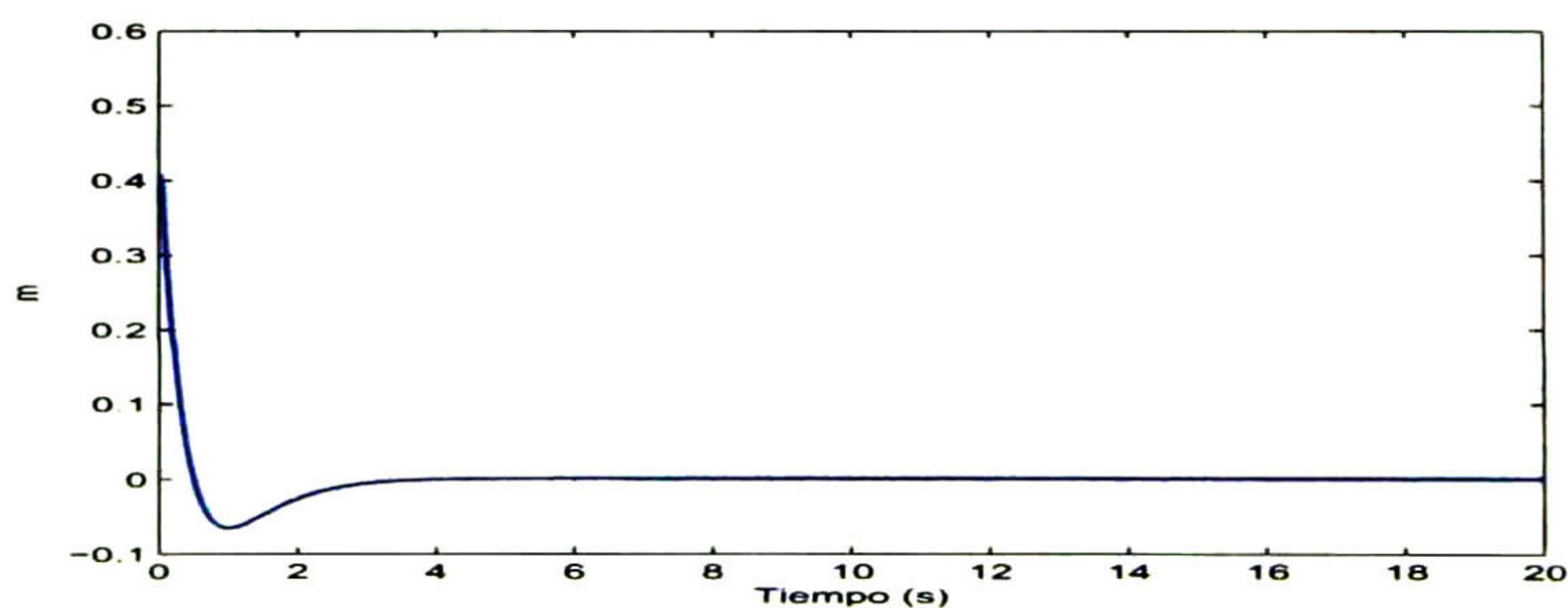
5.1.2. Control por STA: Escenario 2

El segundo escenario consiste en que el efector final trace una trayectoria deseada, en el cual se interpone el ambiente en el eje x que se interpone entre la trayectoria y el efector final. El controlador debe ser capaz de manejar el impacto entre el efector final y el ambiente y llegar a la fuerza deseada, en este caso $5N$. En el eje y no existe ningún ambiente por lo que el sistema debe de alcanzar la trayectoria planteada. En la simulación se muestra el impacto en el ambiente, después de algún tiempo las condiciones del ambiente se modifican, desapareciendo del espacio operacional y permitiendo al efector final moverse libremente a la referencia deseada. Esto se muestra en la Fig. 5.10 y 5.11.

Figura 5.10: Seguimiento en el eje x

Figura 5.11: Seguimiento en el eje y

En la Fig. 5.12 y 5.13 se muestra el error de seguimiento en el eje x y en el eje y respectivamente.

Figura 5.12: Error de seguimiento en el eje x Figura 5.13: Error de seguimiento en el eje y

En la Fig. 5.14 se muestra la posición angular de las uniones. En la Fig. 5.15 y 5.16 se muestra el torque en las respectivas uniones.

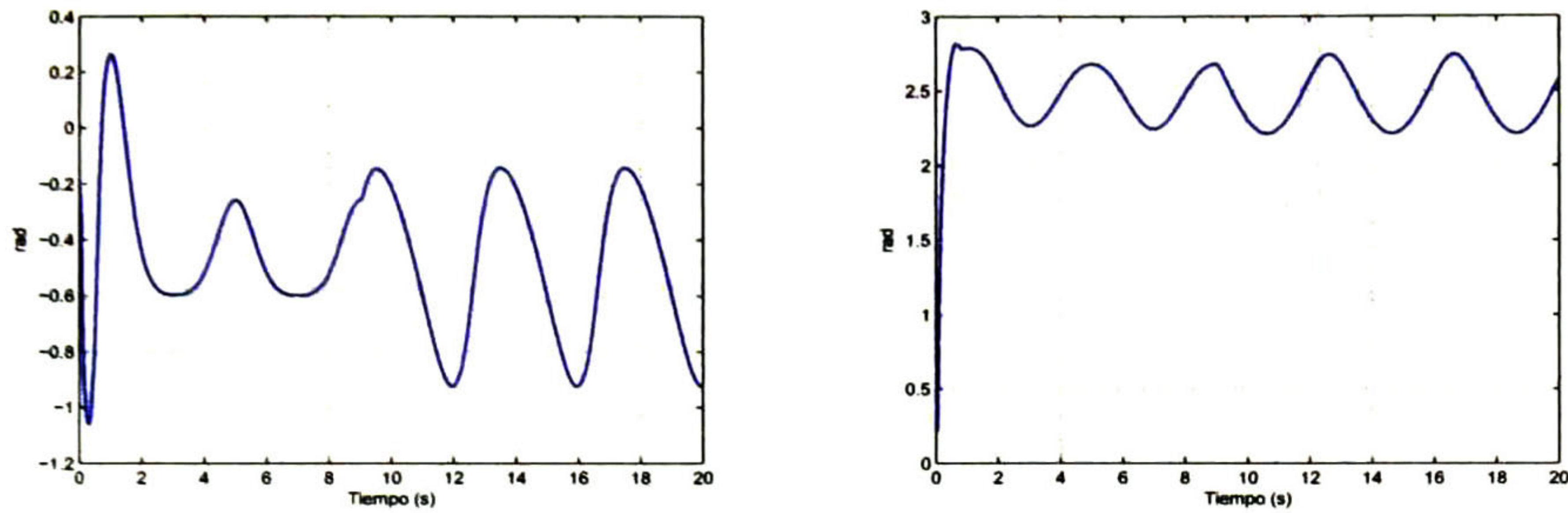


Figura 5.14: Uniones

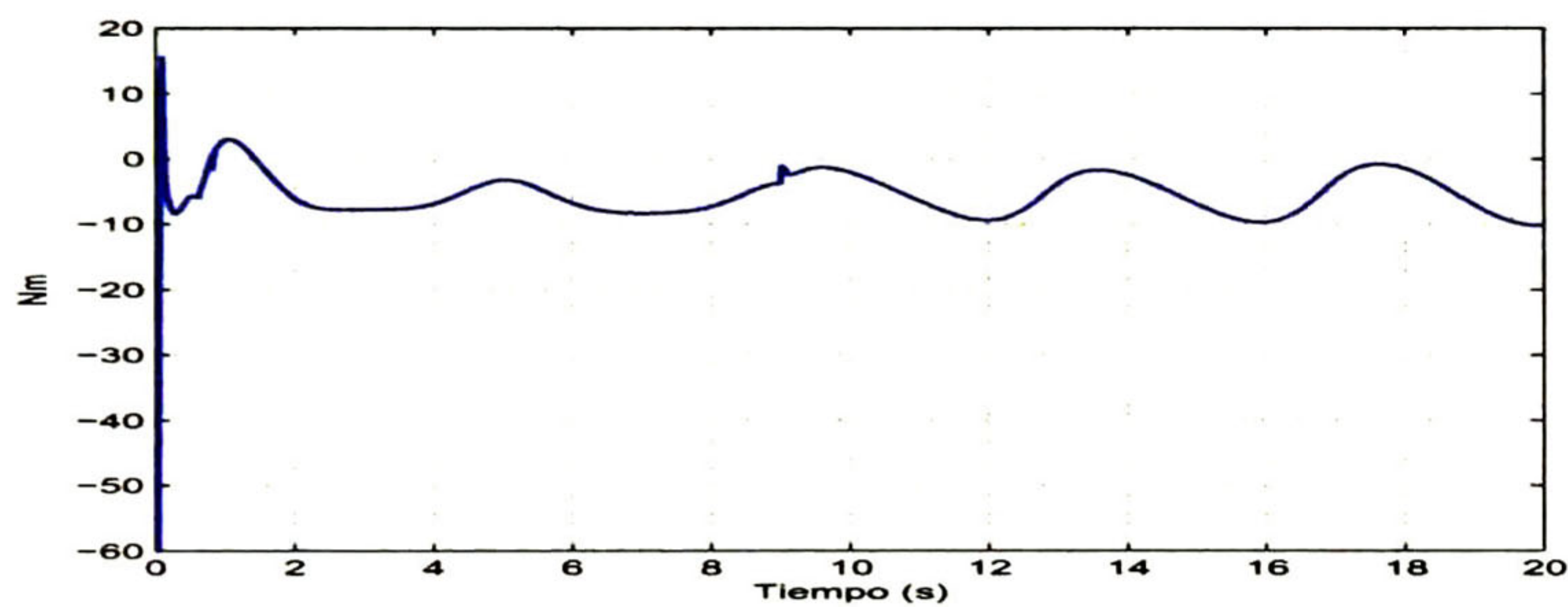


Figura 5.15: Torque en unión 1

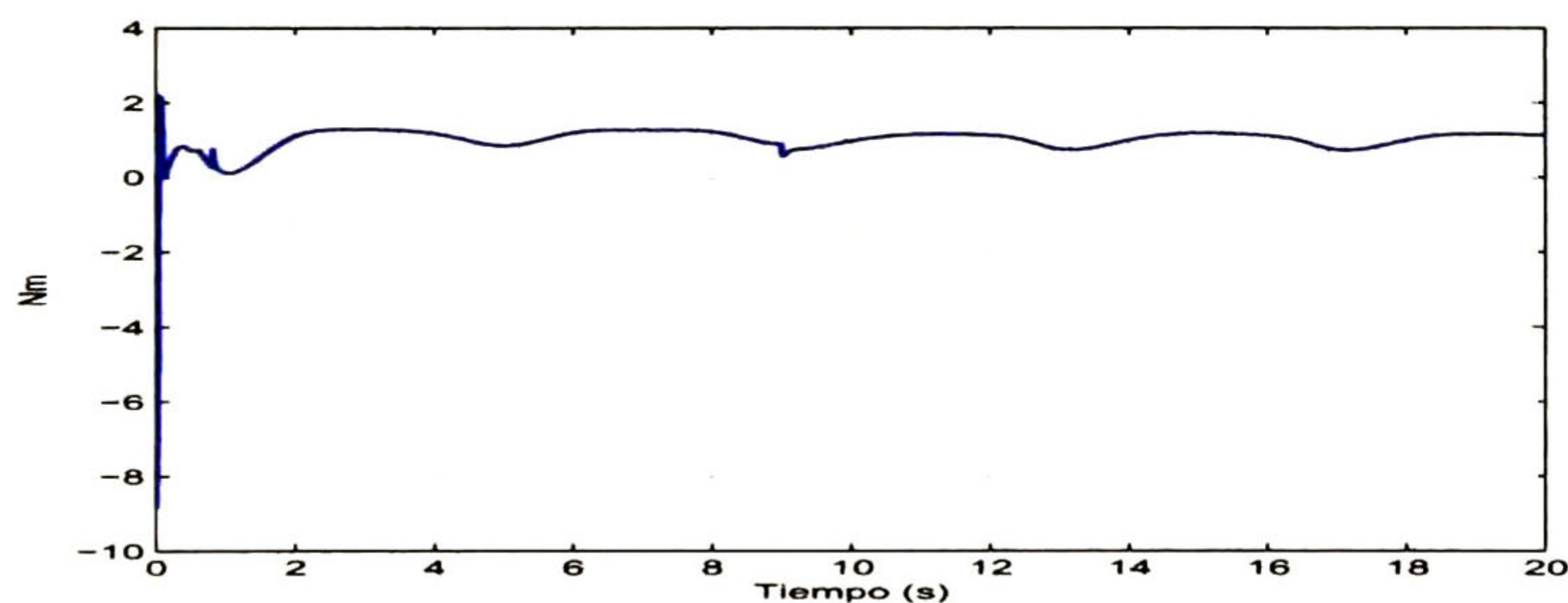


Figura 5.16: Torque en unión 2

En la Fig. 5.17 muestra la fuerza de contacto entre el efector final y el entorno, el cual se puede apreciar que al cambiar las restricciones del ambiente y desaparecer del contacto del manipulador, la fuerza de contacto se vuelve cero.

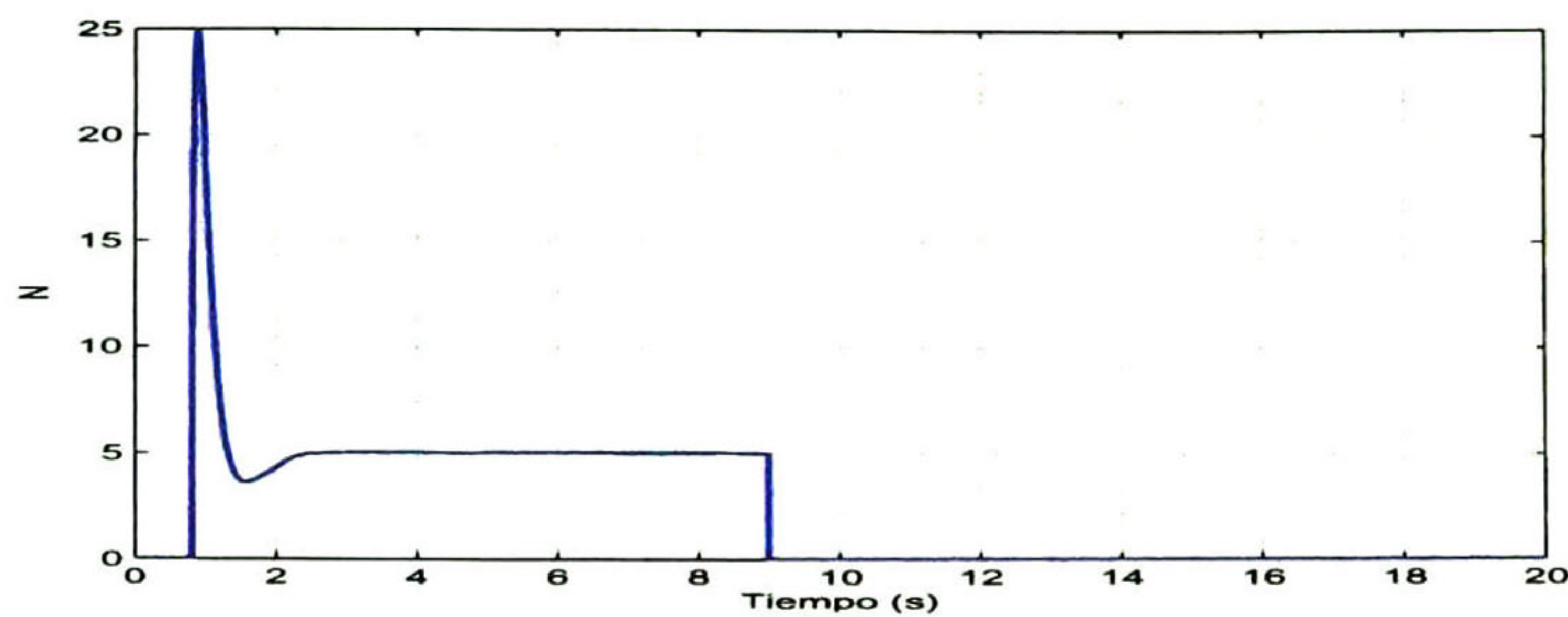


Figura 5.17: Fuerza de Contacto

La simulación presentada muestra un buen desempeño ante variaciones paramétricas y perturbaciones externas logrando satisfactoriamente ambos objetivos de control, incluso cuando la restricciones del ambiente cambian. Además el controlador mostró una reacción favorable cuando el efector final impacta con el ambiente.

5.2. Simulaciones: Enfoque Restringido

En este caso el robot manipulador está restringido de la forma en que se muestra en la Fig. 5.18. El efector final se mueve a lo largo de una superficie vertical, es decir esta restringida en el espacio operacional $x = d$.

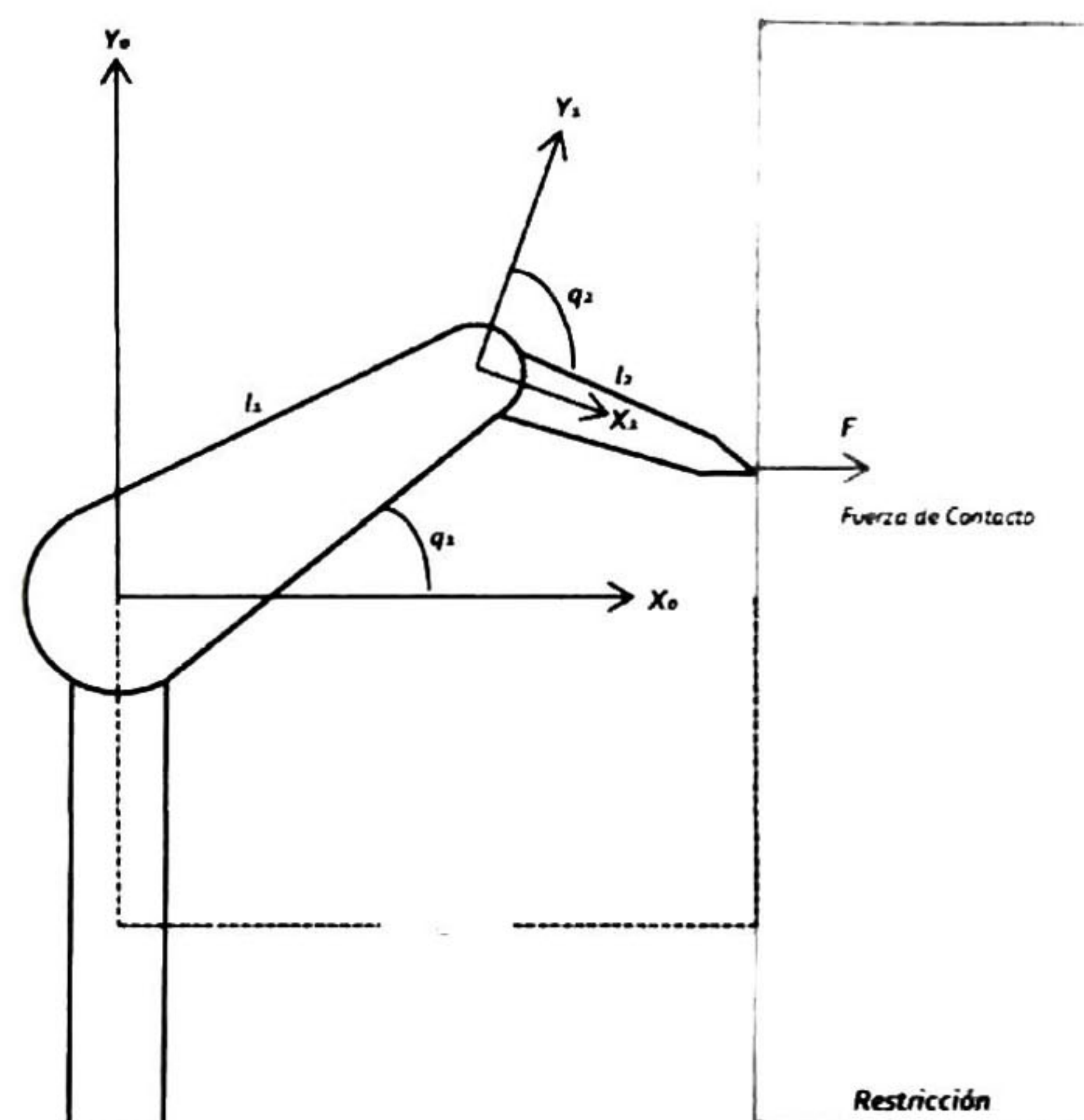


Figura 5.18: Configuración Restringida del Robot

5.2.1. Control por STA: Escenario Restringido

Se aplica el modelo de la planta y el modelo nominal descrito en el (A.1) solo que l_1 y l_2 son iguales a 1. Los parámetros utilizados en la ley de control son: $G_1 = 7$, $G_2 = 15$, $L_1 = 6$, $L_2 = 20$. Se aplica una perturbación de $\lambda_r = [2\text{sen}(t) + 1.5\text{cos}(t)\text{sen}(t) + 0.5\text{cos}(5t) \quad 2 + \text{sin}(t)]^T$. El término $d = 0.2m$, la posición deseada es $q_d = 0.25\text{cos}(0.5t)$, la fuerza deseada es $5N$. La unión 2 se tiene como $q_2 = \text{acos}((d - l_1\text{cos}(q_1))/l_2) - q_1$. En la Fig. 5.19 se muestra el seguimiento angular 1 y en la Fig. 5.20 muestra su error correspondiente.

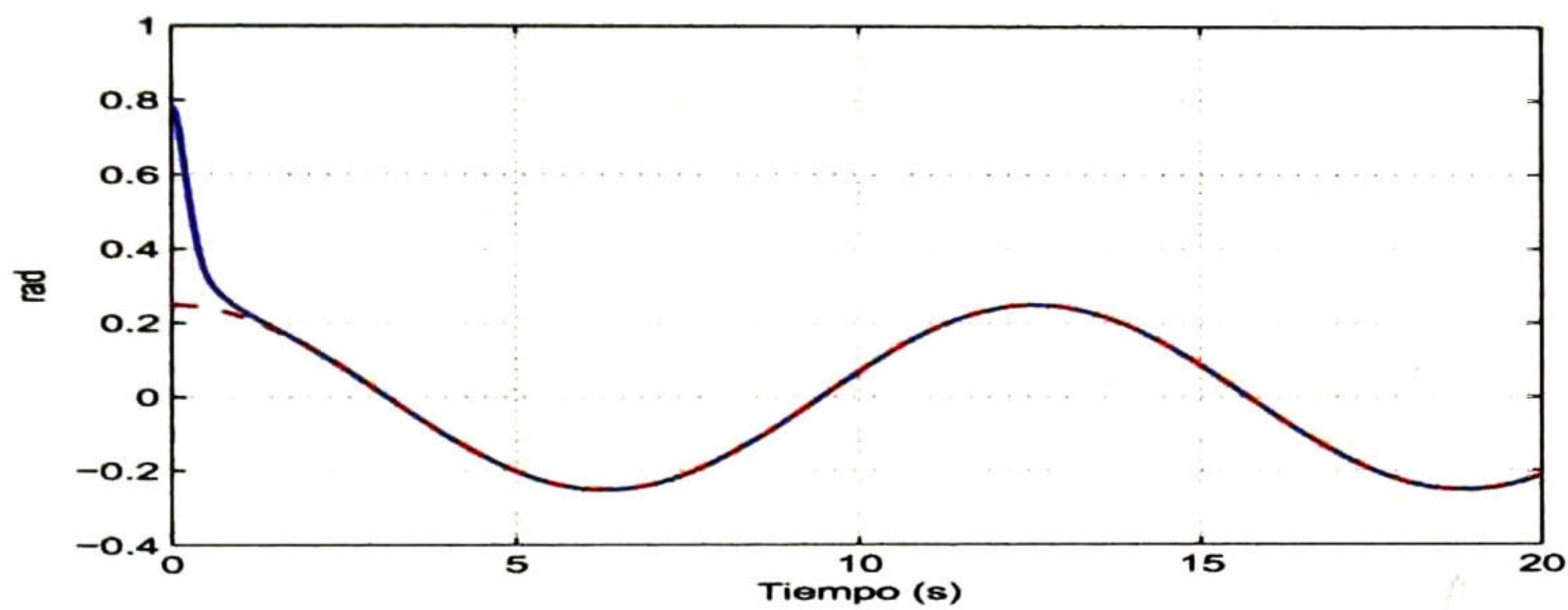


Figura 5.19: Seguimiento Angular de Unión 1

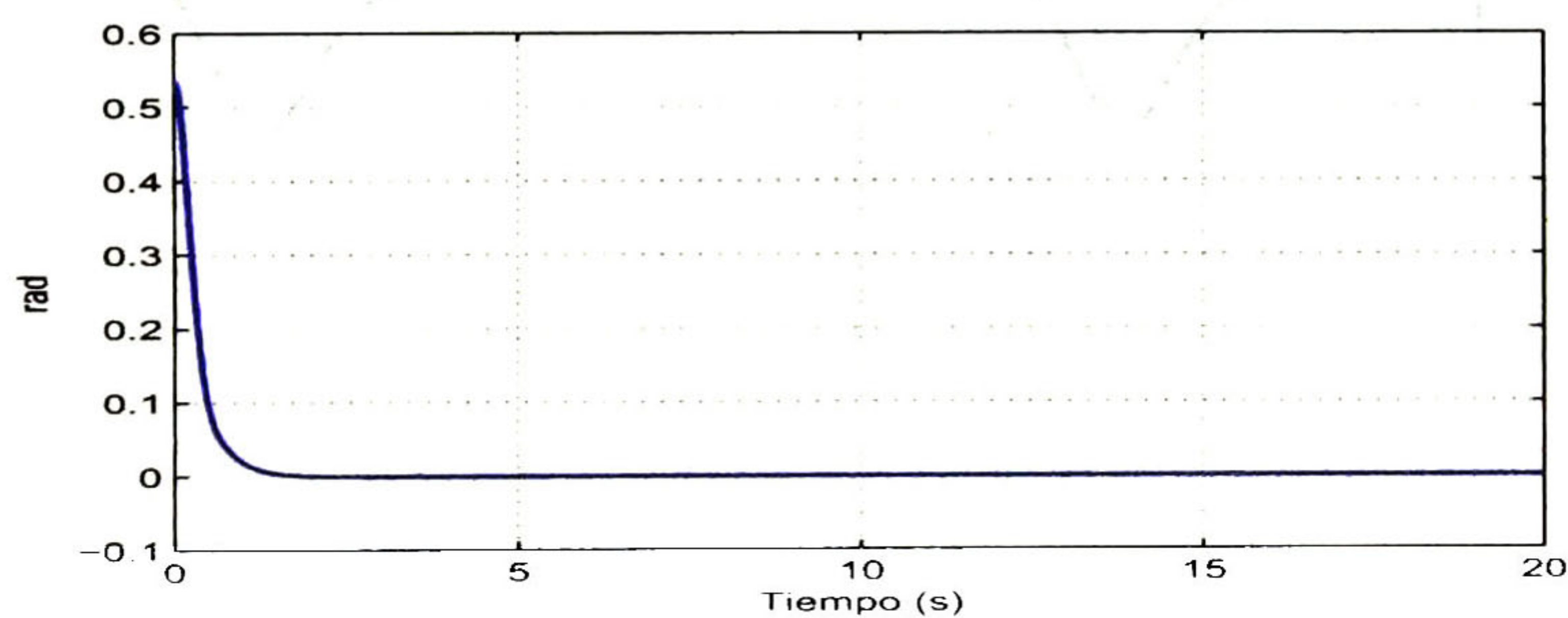


Figura 5.20: Error de Seguimiento Angular de Unión 1

En la Fig. 5.21 muestra la posición del efector final en el espacio operacional.

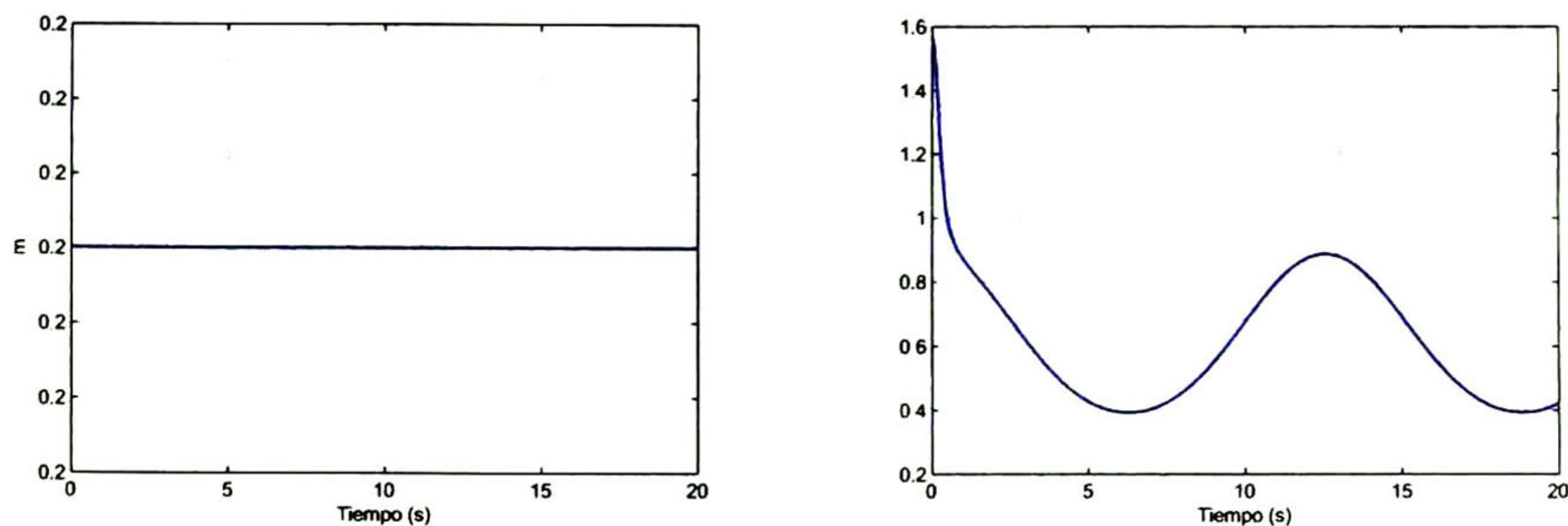


Figura 5.21: Posición del Efector Final

En la Fig. 5.22 y 5.23 muestra los pares en las respectivas uniones.

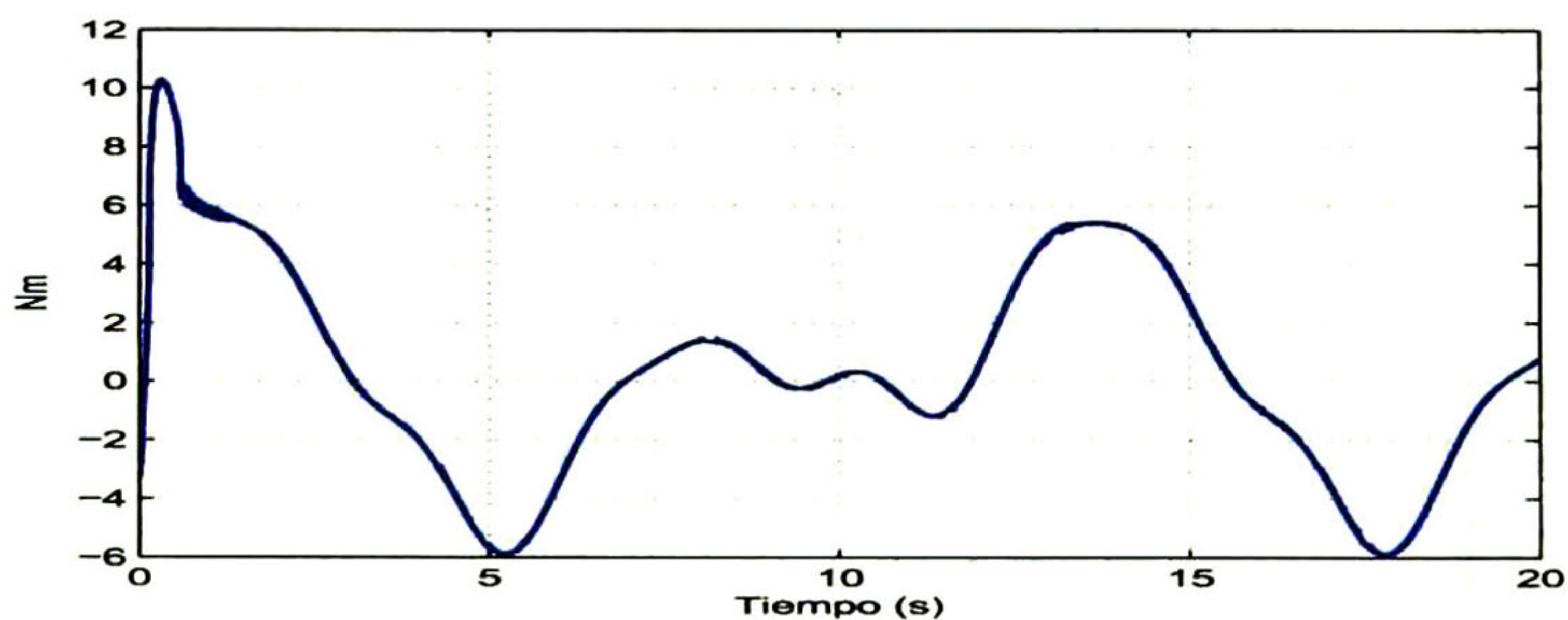


Figura 5.22: Torque en unión 1

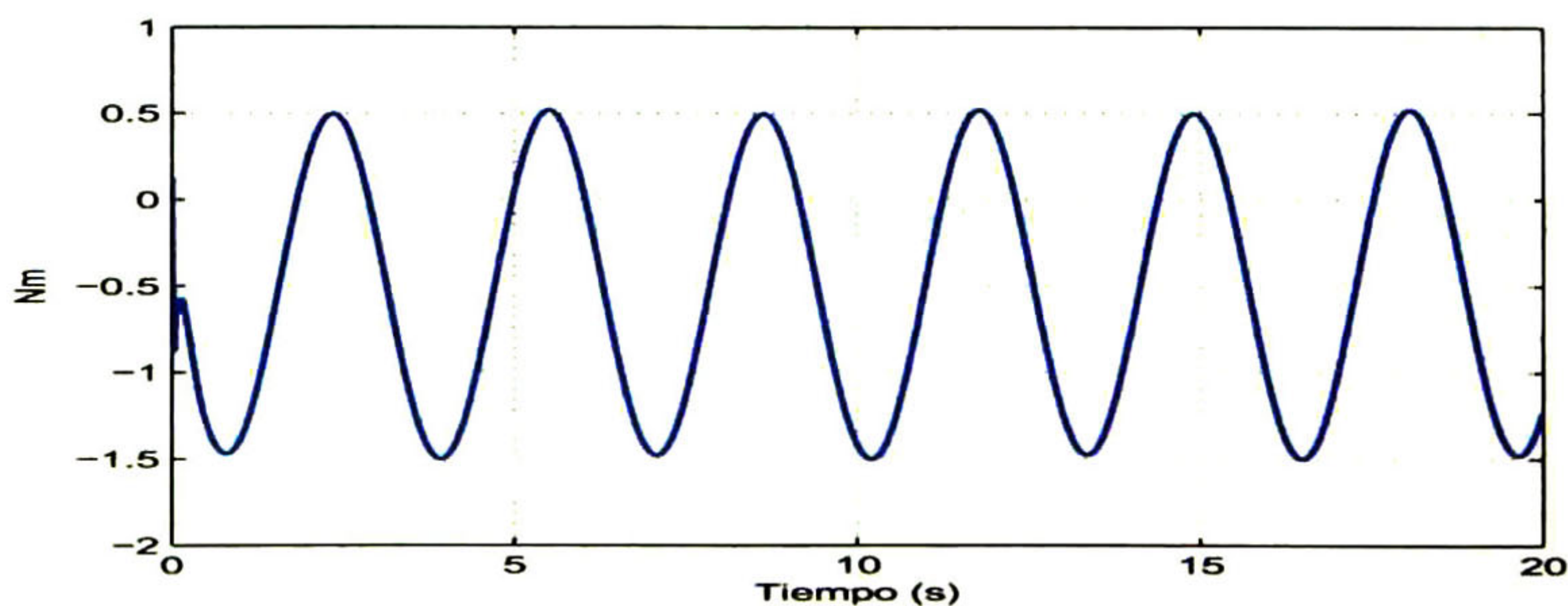


Figura 5.23: Torque en unión 2

En la Fig. 5.24 se muestra la fuerza de contacto aplicada.

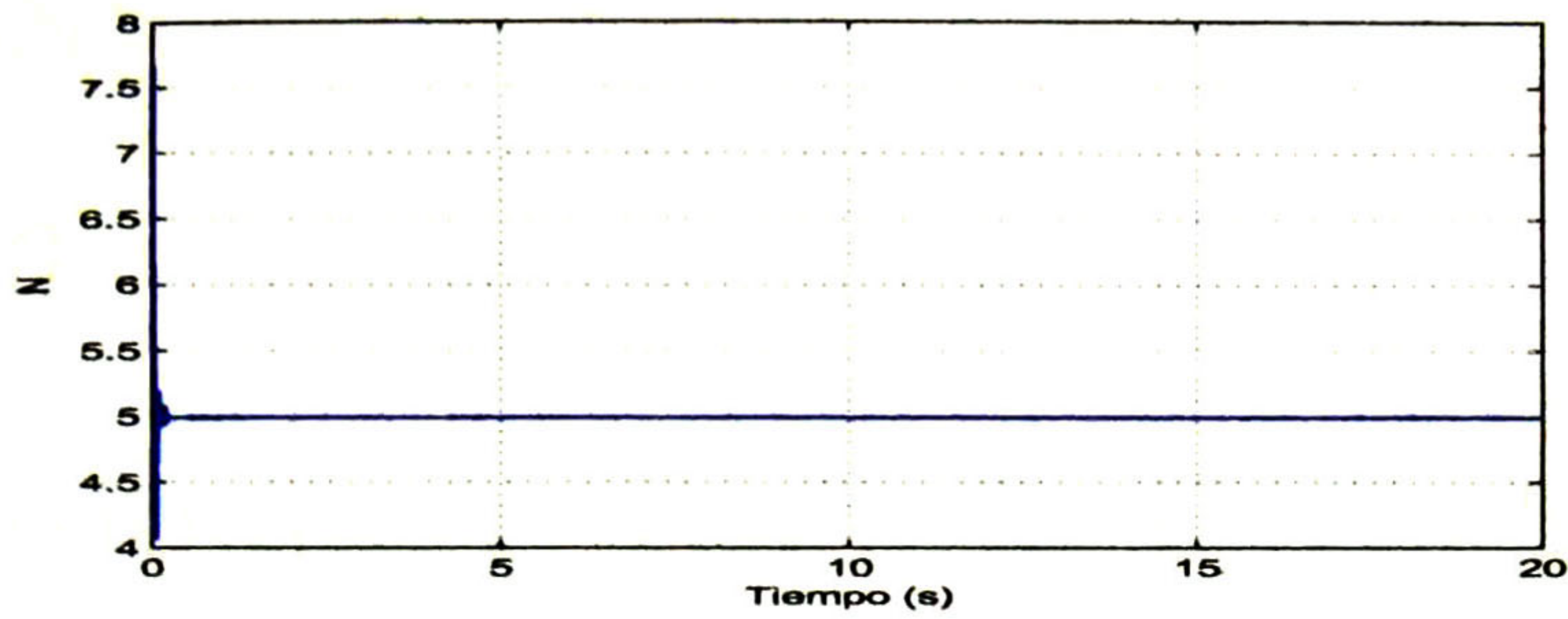


Figura 5.24: Fuerza de Contacto Aplicada

La simulación presentada muestra un buen desempeño ante variaciones paramétricas y perturbaciones externas logrando satisfactoriamente ambos objetivos de control. En este esquema la superficie de fuerza depende de la convergencia de la superficie de posición. Es decir, para poder lograr el control de fuerza es necesario que la posición sea controlada primero.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

6.1. Conclusiones Generales

Durante el desarrollo de esta tesis se propuso resolver el problema de controlar la fuerza y posición en manipuladores robóticos. Para resolver este problema, se presentan dos enfoques diferentes. El primero de ellos llamado en esta tesis enfoque no restringido considera que el manipulador no se encuentra bajo ninguna restricción referente a su movimiento llamado en la literatura *free motion*. El otro enfoque presentado en esta tesis llamado enfoque restringido se incluyen restricciones de tipo holonómicas las cuales originan una reducción de los grados de libertad del sistema, y como consecuencia una reducción en el movimiento del sistema. De esta manera, los grados de libertad de movimiento perdidos, se convierten en fuerzas de contacto. La principal contribución de esta tesis es la aplicación del STA a los enfoques mencionados permitiendo brindar al sistema robustez en lazo cerrado ante variaciones paramétricas y perturbaciones externas, asegurado convergencia en tiempo finito logrando así los objetivos de control tanto de la posición como la de fuerza de contacto evitando los problemas que presentan los controladores basados en modos deslizantes de primer orden generando una señal de control continua y reduciendo el dañino efecto *chattering*.

En el enfoque no restringido, el controlador desarrollado mostró ser capaz de mantener un buen desempeño ante el fenómeno de impacto, además un aspecto deseable a resaltar, es la aplicación de una ley de control para ambos objetivos permitiendo así asegurar estabilidad en lazo cerrado de manera más sencilla cuando las restricciones geométricas del ambiente cambian. El controlador planteado no es capaz de desacelerar antes de entrar en contacto con el ambiente generando un sobresalto en el esquema de fuerza como muestra en las simulaciones presentadas, pero es posible combinar esta técnica con visión computacional teniendo un conocimiento estimado del ambiente y del efector final con el fin desarrollar algoritmos que permitan desacelerar antes de entrar en contacto con el ambiente, disminuyendo la fuerza de impacto, pero eso se propone como trabajo futuro.

Al aplicar el controlador basado en STA en el enfoque restringido mostró un buen desempeño logrando los objetivos de control satisfactoriamente. Sin embargo, al desarrollar el modelado matemático bajo este enfoque aplicado a manipuladores robóticos de muchos grados libertad, se convierte en un problema muy complejo debido a la cantidad de transformaciones requeridas. Este enfoque puede ser muy útil en el control de manos robóticas o robots cooperativos. Basado en el trabajo realizado en esta tesis se puede concluir que el STA es un buen candidato para resolver la problemática planteada en el capítulo 1, pero es posible combinar esta técnica con otras más, con el fin de lograr un enfoque más realista e implementar tareas más complejas como son agarres en manos robóticas, tareas cooperativas, sistemas hápticos etc.

6.2. Trabajo futuro

Los resultados planteados en esta tesis pueden mejorarse, estos pueden extenderse a modelos matemáticos más reales y pueden implementarse combinándolos con otros métodos de control. Para este trabajo se pueden mencionar los siguientes:

- En esta tesis se toma como suposición que k que es referente a la rigidez del ambiente es conocida, pero en la realidad esto no sucede, por lo que se sugiere aplicar alguna técnica de adaptación.
- Aplicar a robots manipuladores con eslabones y uniones flexibles.
- Desarrollar controladores capaces de eliminar perturbaciones *unmatched*.
- Extender los controladores propuestos en robots manipuladores redundantes.
- Combinar con técnicas de visión computacional.
- Implementación en tiempo real

Apéndice A

Modelo Matemático: Robot de 2 DOF

A.1. Modelo Cinemático

A.1.1. Cinemática Directa

Parámetros de Denavit-Hartenberg

Eslabón	l_i	ϑ_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	q_1
2	l_2	0	0	q_2

Matrices de transformación homogénea

$$H_0^1 = H_{R_{z_0}}(q_1)H_{T_{z_0}}(0)H_{T_{x_0}}(l_1)H_{R_{x_0}}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1^2 = H_{R_{z_1}}(q_2)H_{T_{z_1}}(0)H_{T_{x_1}}(l_2)H_{R_{x_1}}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0^2 = H_0^1 H_1^2$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\text{sen}(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \text{sen}(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La cinemática directa de las coordenadas cartesianas del efector final del robot esta dada por:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

A.1.2. Cinemática Inversa

$$q_1 = \text{atan} \left(\frac{y_0}{x_0} \right) - \text{atan} \left(\frac{l_2 \text{sen}(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)} \right)$$

$$q_2 = \text{acos} \left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right)$$

A.2. Modelo Dinámico

El modelo dinámico del manipulador está dado por

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + fc(\dot{q})$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}}_{M(q)} \ddot{q}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q})} \dot{q} +$$

$$g \underbrace{\begin{bmatrix} l_{c1} m_1 \text{sen}(q_1) + m_2 l_1 \text{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix}}_{g(q)} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}}_{fc(\dot{q})}$$

A.3. Parámetros del Robot

Terminología y significado de los parámetros de la planta

Significado	Notación	Valor
Masa del eslabón 1	m_1	8kg
Longitud del eslabón 1	l_1	0.30m
Inercia del eslabón 1	I_1	0.02Nmseg ² /rad
Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}	0.15m
Coefficiente de fricción viscosa	b_1	0.01Nmseg/rad
Coefficiente de fricción de Couloumb	f_{c1}	0.05Nm
Masa del eslabón 2	m_2	1kg
Longitud del eslabón 2	l_2	0.27m
Inercia del eslabón 2	I_2	0.004Nmseg ² /rad
Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}	0.130m
Coefficiente de fricción viscosa	b_2	0.5Nm
Coefficiente de fricción de Couloumb	f_{c2}	0.003Nm
Gravedad	g	9.81m/seg ²

Parámetros nominales utilizados en simulación

Significado	Notación	Valor
Masa del eslabón 1	m_1	6.8kg
Longitud del eslabón 1	l_1	0.256m
Inercia del eslabón 1	I_1	0.017Nmseg ² /rad
Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}	0.17m
Coefficiente de fricción viscosa	b_1	0Nmseg/rad
Coefficiente de fricción de Couloumb	f_{c1}	0Nm
Masa del eslabón 2	m_2	0.85kg
Longitud del eslabón 2	l_2	0.2295m
Inercia del eslabón 2	I_2	0.0034Nmseg ² /rad
Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}	0.10m
Coefficiente de fricción viscosa	b_2	0Nm
Coefficiente de fricción de Couloumb	f_{c2}	0Nm
Gravedad	g	9.81m/seg ²

A.4. Propiedades de Robots Manipuladores

La matriz de inercia $H(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, $H(q) = H(q)^T$ definida positiva $H(q) > 0$. La matriz inversa $H(q)^{-1} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ también es una matriz simétrica, $H(q)^{-1} = H(q)^{-T}$ y definida positiva $H(q)^{-1} > 0$.

La matriz de inercia $H(q)$ satisface que

$$\lambda_{H(q)}^{\min} I \leq H(q) \leq \lambda_{H(q)}^{\max} I \quad (\text{A.1})$$

donde I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$. Los términos $\lambda_{H(q)}^{\min}$ y $\lambda_{H(q)}^{\max}$ representa los valores propios mínimo y máximo de la matriz de inercia, respectivamente.

El fenomeno inercial de un robot satisface que $\|H(q)\ddot{q}\| \leq \lambda_{H(q)}^{\max} \|\ddot{q}\| \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n$; donde $\lambda_{H(q)}^{\max}$ representa el valor propio maximo de la matriz de inercia.

La matriz $C(q, \dot{q})$ definida en (2.12) esta relacionada con la matriz de inercia $H(q)$ por la expresión:

$$x^T \left[\frac{1}{2} \dot{H}(q) - C(q, \dot{q}) \right] x = 0 \quad q, \dot{q}, x \in \mathfrak{R}^n \quad (\text{A.2})$$

donde $\frac{1}{2} \dot{H}(q) - C(q, \dot{q})$ es una matriz antisimétrica. En forma analoga la matriz $\dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es antisimétrica y tambien resulta cierto que

$$\dot{H}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T \quad (\text{A.3})$$

La matriz $C(q, \dot{q})\dot{q}$ se puede verificar que

$$\|C(q, \dot{q})\dot{q}\| \leq C_0 \|\dot{q}\|^2 \quad (\text{A.4})$$

La matriz $C(q, \dot{q})$ se puede verificar que

$$\|C(q, \dot{q})\| \leq kc \|\dot{q}\| \quad (\text{A.5})$$

donde son constantes $C_0, kc > 0$

El vector de pares gravitacionales $g(q)$

$$\|g(q)\| \leq g_o \|\dot{q}\| \quad (\text{A.6})$$

El vector de fricción $f(\dot{q})$

$$\|f(\dot{q})\| \leq f_o \|\dot{q}\| \quad (\text{A.7})$$

Se considera que el vector λ_r asociado a perturbación se encuentra acotado de la siguiente manera

$$\|\lambda_r\| \leq \beta \quad (\text{A.8})$$

donde $g_o, f_o, \beta > 0$ son constantes. Para ver las demostraciones de las propiedades presentadas ver [18].

A.5. Forma No-Linear Controlable por Bloques

La mayoría de los sistemas robóticos, se encuentra en una forma conocida como Forma No-Linear Controlable por Bloques. Para un sistema MIMO (Multi Input-Multi Output) no lineal perturbado en la forma No-Linear Controlable por Bloques (NLCB) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + b_1(x_1)x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{r-1} &= f_{r-1}(\bar{x}_{r-1}) + b_{r-1}(\bar{x}_{r-1})x_r \\ \dot{x}_r &= f_r(\bar{x}_r) + b_r(\bar{x}_r)u + \lambda_r(\bar{x}_r, t) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)$, $x_i \in X_i \subset \mathfrak{R}^n$ La salida del sistema es $y = h(X)$, las funciones $f_i(\cdot)$ y $b_i(\cdot)$ son campos de vectores suaves definidos en X_i ; y λ_r es el término de perturbaciones generados por variaciones paramétricas e incertidumbre en el modelo de la planta. El vector λ_r es denominado comunmente como perturbación *matched* debido a que se encuentra dentro del subespacio de control. El subespacio de control es el generado por las columnas de $b_r(\cdot)$, y se denomina a una perturbación *matched*, si el vector de control u puede afectar a todos los componentes de la perturbación.

Apéndice B

B.0.1. Teorema de la función Implícita

Dada un función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es continuamente diferenciable en cada punto (x, y) en un conjunto abierto $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, si existe un punto (x_0, y_0) en S donde

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{B.1})$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \quad (\text{B.2})$$

entonces existen vecindades $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ de x_0 y y_0 , respectivamente, tal que para todo $y \in V$ la expresión en B.1 tenga una solución única $x \in U$. Esta solución única puede ser escrita como $x = g(y)$ donde g es una función continuamente diferenciable en $y = y_0$. Este teorema es conocido como teorema de la función implícita.

B.0.2. Principio de ortogonalización

Considere la posibilidad de una partición del espacio articular q como:

$$q = [q_1^T, q_2^T] \quad (\text{B.3})$$

donde $q_1 \in \mathbb{R}^m$ y $q_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Debido a las restricciones cinemáticas $\varphi \in \mathbb{R}^m$ hay m coordenadas dependientes. Se tiene que al derivar la restricción de la superficie $\varphi(q) = 0$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} \dot{q} = J_\varphi(q) \dot{q} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Al aplicar la Eq. B.3 en la Eq. B.4 se tiene que

$$J_\varphi(q) \dot{q} = J_{\varphi_1}(q) \dot{q}_1 + J_{\varphi_2}(q) \dot{q}_2 \quad (\text{B.5})$$

donde $J_{\varphi_1}(q) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ y $J_{\varphi_2}(q) \in \mathfrak{R}^{m \times n-m}$ Para obtener \dot{q}_1 se tiene que

$$\dot{q}_1 = \Omega(q)\dot{q}_2 \quad \Omega(q) = -(J_{\varphi_1}(q))^{-1}J_{\varphi_2}(q) \quad (\text{B.6})$$

donde $\Omega(q) : \mathfrak{R}^{n-m} \rightarrow \mathfrak{R}^m$. Tomando en cuenta la Eq. (B.3) y la Eq. B.6 la velocidad generalizada puede ser escrita como

$$\dot{q} = Q\dot{q}_2 \quad (\text{B.7})$$

donde $Q \in \mathfrak{R}^{n \times (n-m)}$ esta dada por

$$Q = \begin{bmatrix} \Omega \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Entonces $J_{\varphi}(q)Q = 0_m$, la imagen de $J_{\varphi}(q)$ yace en el espacio nulo de Q . En otras palabras, el principio de ortogonalización permite que \dot{q} pueda ser descompuesto en dos subespacios ortogonales y que puede ser escrito como la suma directa de Q y de $J_{\varphi}(q)$.

B.0.3. Suposiciones del sistema

Suposición 1. *Los eslabones del manipulador son rígidos.*

Suposición 2. *El manipulador no entra en configuraciones singulares.*

Suposición 3. *El manipulador se considera no redundante.*

Suposición 4. *Desde el punto de vista práctico, las fuerzas de restricción serán sujetas a superficies del ambiente que están bajo efectos de fricción, esos efectos pueden ser simplemente tratados como perturbaciones [11].*

Suposición 5. *En el enfoque restringido. El ambiente es rígido y no sufre deformaciones cuando está en contacto.*

Suposición 6. *En el enfoque restringido. El manipulador no pierde contacto con el ambiente.*

Suposición 7 *Las restricciones de movimiento impuestas sobre el sistema son holónomas. Una restricción holónoma se define como aquella ecuación algebraica que aparece en un sistema a nivel cinemático.*

Bibliografía

- [1] S. Arimoto. *Control Theory of Multi-fingered Hands: A Modelling and Analytical-Mechanics Approach for Dexterity and Intelligence*. Springer., 2008.
- [2] H. Asada and J.-J. E. Slotine. *Robot Analysis and Control*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [3] A. Bartoszewicz and A. Nowacka-Leverton. *Time-Varying Sliding Modes for Second and Third Order Systems*. Springer: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2009.
- [4] E. Bassi, F. Benzi, L.M. Capisani, D. Cuppone, and A. Ferrara. Hybrid position/force sliding mode control of a class of robotic manipulators. *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2966–2971, 2009.
- [5] L. Biagiotti, H. Liu, G. Hirzinger, and C. Melchiorri. Cartesian impedance control for dexterous manipulation. *Proceedings. 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 4:3270–3275, 2003.
- [6] Ch.-Y. and Y. Stepanenko. Robust motion/force control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:609–614. 1994.
- [7] S. Chiaverini, B. Siciliano, and L. Villani. Force and position tracking: parallel control with stiffness adaptation. *IEEE Control Systems*, 18:27–33, 1998.
- [8] J. Craig. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.
- [9] A. De Luca and R. Mattone. Sensorless robot collision detection and hybrid force/motion control. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotic and Automation*, pages 999–1004, 2005.
- [10] C. Canudas de Wit, G. Bastin, and B. Siciliano. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, 1996.

- [11] W.E. Dixon, D.M. Dawson, A. Behal, and S.P. Nagarkatti. *Nonlinear Control of Engineering Systems*. Birkh
- [12] C. Edwards and S. K. Spurgeon. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor & Francis: Series in Systems and Control Series, 1998.
- [13] W.D Fisher and M. S. Mujtaba. Hybrid position/force control: A correct formulation. *International Journal of Robotics Research*, pages 299–311, 1991.
- [14] L. Fridman J. Davila and A. Levant. Second order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50:1785–1789, 2005.
- [15] L.E Gonzáles Jiménez. *Control Robusto de Mecanismos Roboticos Guiados por Vision*. PhD thesis, Cinvestav, Unidad Guadalajara, 2011.
- [16] S. Jung and T. C. Hsia. Neural networks impedance force control of robot manipulator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics.*, 45:451–461, 1998.
- [17] R. Kelly, R. Carelli, M. Amestegui, and R. Ortega. On adaptive impedance control of robot manipulators. *Proceedings of the 1989 IEEE International Conference on Robotic Automation*, (1):572–577, 1989.
- [18] R. Kelly, V.S. Davila, V. Santibããñez, and A. Lorãia. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag London Limited: Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, 2005.
- [19] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Macmillan Pub. Co., 1992.
- [20] C.-M. Kwan. Hybrid force/position control for manipulators with motor dynamics using a sliding-adaptive approach. *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, 1:365–369, 1995.
- [21] A. Lanzon and R. J. Richards. Trajectory/force control for robotic manipulators using sliding-mode and adaptive control. *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, 3:1940–1944, 1999.
- [22] T. A. Lasky and T.C. Hsia. On force-tracking impedance control of robot manipulators. *IEEE International Conference on Robotic and Automation*, pages 274–280, 1991.
- [23] K.-K. Lee. Force tracking impedance control with variable target stiffness. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 7:6751–6756, 2008.
- [24] F.L. Lewis, D.M. Dawson, and C.T. Abdallah. *Robot Manipulator Control: Theory and Practice*. Taylor & Francis., 2003.

- [25] K.-Y. Lian and Ch.-R. Lin. Sliding-mode motion/force control of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:1101–1103, 1998.
- [26] W. S Lu and Q.-H Meng. Impedance control with adaptation for robotic manipulations. *IEEE Transactions on Robotic and Automation*, 7(3):408–415, 1991.
- [27] M. T. Mason. Compliance and force control for computer controlled manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 11:418–432, 1981.
- [28] N.H. McClamroch and D. Wang. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(5):419–426, 1998.
- [29] J. K. Mills and A. A. Goldenberg. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. *IEEE Transactions on Robotic and Automation*, 5(1):30–47, 1989.
- [30] J.K. Mills. Dynamic modelling of robotic manipulators with force-torque sensor during compliant motion. *Proceedings., 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (3):1672–1677, 1989.
- [31] J. A. Moreno and M. Osorio. A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. *47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2856–2861, 2008.
- [32] R.M. Murray, Z. Li, S.S. Sastry, and S.S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC PressINC, 1994.
- [33] C. Natale, B. Siciliano, and L. Villani. Hybrid force/position control with experiments on an industrial robot. *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 956–960, 1999.
- [34] V. Parra-Vega and S. Arimoto. A passivity-based adaptive sliding mode position-force control for robot manipulators. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, 10:365–377, 1996.
- [35] C. Pei-Chieh and K.J. Waldron. Hybrid velocity/force control of manipulators using pid controller and feedforward compensation. *Second IEEE Conference on Control Applications*, 1:403–408, 1993.
- [36] W. Perruquetti. *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [37] A. E. Polyakov and A. S. Poznyak. Method of lyapunov functions for systems with higher order sliding modes. *Automation and Remote Control*, 72:944–963,, 2011.
- [38] A. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*. Elsevier Science, 2010.

- [39] B. Siciliano and L. Sciavicco. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer: Advanced Textbooks in Control and Signal Processing., 2009.
- [40] J. J. E. Slotine and W. A. LI. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [41] M. W. Spong and Vidyasagar M. *Robot Dynamics and Control*. Wiley India Pvt. Limited, 2008.
- [42] Ch.-Y. Su, T. P. Leung, and Q.-J. Zhou. Force/motion control of constrained robots using sliding mode. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 5(37):668–672, 1992.
- [43] V.I. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. Automation and Control Engineering Series, Taylor & Francis Group, 1999.
- [44] B. Yao and M. Tomizuka. Robust adaptive motion and force control of robot manipulators in unknown stiffness environments. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 142–147, 1993.
- [45] T. Yoshikawa, T. Sugie, and M. Tanaka. Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators-controller design and experiment. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4:699–706, 1998.
- [46] R. R. Y. Zhen and A. A. Goldenberg. Robust position and force control of robots using sliding mode. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 623–628, 1994.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Control Robusto de Fuerza y Posición para Manipuladores Robóticos

del (la) C.

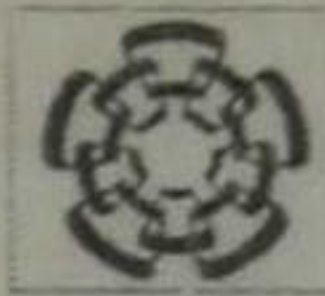
Antonio ORTEGA ORDAZ

el día 13 de Septiembre de 2013.

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano
Investigador CINVESTAV 3D
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Luis Enrique González Jiménez
Profesor Investigador
ITESO



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0011909