Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

Integración estocástica con respecto al movimiento browniano fraccionario

TESIS

que presenta

Jorge Alberto Lozada Murguía

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Control Automático

Director de Tesis:

Dr. Jorge Alberto León Vázquez

Ciudad de México Diciembre, 2021

Agradecimientos

Al Dr. León por su paciencia, su amplio conocimiento, sus buenos consejos, su facilidad para explicar y todas las pláticas que hemos tenido, sin las cuales este trabajo no se podría haber realizado.

A Laura, Gerardo, Jessica, Luis y Ellis, por todas las bendiciones que le han dado a mi vida. A mis amigos, por todas las experiencias habidas y por haber. A Lila, Maru, Ricardo, Rubén y demás tíos y tías por su apoyo y confianza.

A todos los excelentes profesores que me dieron clase en el CINVESTAV, gracias a los cuales he podido expandir mis horizontes.

Al CONACYT por el apoyo otorgado para poder concluir estos estudios.

Índice

1. El movimiento browniano fraccionario **1**
- 1.1. Breve historia del movimiento browniano fraccionario 1
- 1.2. Conceptos preliminares de análisis 2
- 1.3. Propiedades del movimiento browniano fraccionario 5
- 1.4. Algunos resultados del cálculo fraccionario 11

2. Operadores y producto tensorial **19**
- 2.1. Algunas propiedades de espacios de Hilbert 20
- 2.2. Operadores continuos 22
- 2.3. Operadores cerrados y cerrables 24
- 2.4. Producto tensorial de espacios de Hilbert 27
- 2.5. Producto tensorial de operadores 31
- 2.6. Producto tensorial simétrico 34

3. Integración estocástica y cálculo de Malliavin **37**
- 3.1. El cálculo estocástico clásico: la integral de Itô y la fórmula de Itô . . 38
- 3.2. Espacios gaussianos y caos de Wiener 49
- 3.3. Los operadores derivada y divergencia 57

4. Operadores de divergencia y derivada extendidos **62**
- 4.1. Preliminares 63
- 4.2. El operador derivada extendido 64
- 4.3. El operador divergencia extendido 67
- 4.4. Aplicación al movimiento browniano fraccionario 72

5. La integral de Stratonovich extendida **75**
- 5.1. Preliminares 75
- 5.2. Definición y algunos resultados 76
- 5.3. Una fórmula de Itô 79
- 5.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Stratonovich 86

1. El movimiento browniano fraccionario

Los requisitos previos para leer este trabajo son conocimientos sobre análisis (Rudin [43, 44, 45]), teoría de la medida (Folland [12]; Royden [42]), probabilidad básica (Ross [40]; Ross y Peköz [41]) y, más específicamente, cálculo estocástico, movimiento browniano y temas relacionados (Karatzas y Shreve [22]).

En este capítulo se define el movimiento browniano fraccionario y se da un recuento de sus propiedades más importantes. Además, se da una sinopsis breve sobre resultados básicos de análisis que serán fundamentales para entender el resto del trabajo.

1.1. Breve historia del movimiento browniano fraccionario

La primera mención de un ejemplo de movimiento browniano fraccionario fue dado por Kolmogorov [23] en su artículo de 1940 sobre curvas espirales en espacios de Hilbert. Le llamó *hélice de Wiener*. Sin embargo, no profundizó en el estudio de estos procesos, y no se volvió a estudiar el tema hasta algunos años más tarde.

En 1951, el hidrólogo británico Harold Hurst publicó su artículo *Long term storage capacity of reservoirs* [18], donde entre otras cosas realiza un estudio sobre la variación anual de los niveles del río Nilo de Egipto. Su método de estudio fue la estadística R/S, donde R es el rango de sumas parciales de los datos, y S es la desviación estándar de la muestra (Taqqu [50]). Bajo las suposiciones de varianza finita y observaciones independientes e idénticamente distribuidas, esta estadística debería de crecer como $n^{1/2}$. Sin embargo, el análisis estadístico arrojó un crecimiento de n^H, donde $H \in (1/2, 1)$.

Unos años más tarde, el matemático Benoit Mandelbrot sospechó que un proceso estocástico, generalización del movimiento browniano pero con diferente desviación estándar al tiempo t (t^H en lugar de $t^{1/2}$), podía describir adecuadamente el tipo de crecimiento de la estadística usada por Hurst. Mandelbrot publicó un artículo en 1965 [27] donde aplica este tipo de movimiento browniano generalizado a los estudios hidrológicos egipcios. Por otra parte, Yaglom [51] había tocado superficialmente estos procesos en su artículo de 1955 sobre procesos con incrementos estacionarios de n-ésimo orden. Pero no fue hasta el artículo de Mandelbrot y Van Ness de 1968 [28] donde comenzó el estudio riguroso del movimiento browniano fraccionario desde un punto de vista matemático. Es aquí donde se acuña el término "movimiento browniano fraccionario" por primera vez; además, en honor al hidrólogo se denomina "índice de Hurst" al parámetro $H \in (0, 1)$ que indica el tipo de proceso estocástico. Es claro que el movimiento browniano normal es un movimiento browniano fraccionario con $H = 1/2$.

1.2. Conceptos preliminares de análisis

Los siguientes términos son básicos en análisis moderno ([44]; Reed y Simon [39]):

1. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico D es *de Cauchy* si dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Aquí d es la métrica de D.

2. Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado y *completo*; es decir, toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio.

3. Dado un espacio vectorial métrico V, la *completación* de V es el espacio completo más pequeño que contiene a V. Un método para completarlo es el siguiente ([43]): dadas dos sucesiones de Cauchy en V, $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se define la distancia entre los dos como (d es la métrica en V):

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

   el cual existe al ser los reales completos. Sea $\tilde{V}$ el espacio cociente formado al tomar las clases de equivalencia de todas las sucesiones de Cauchy con distancia cero. $\tilde{V}$ es un espacio métrico completo que contiene a un subespacio isométrico a V, por lo que se puede decir que $\tilde{V}$ es la completación de V.

4. Un *espacio de Hilbert* es un espacio de Banach donde se puede definir un producto interno, y de aquí una norma.

5. Un espacio topológico es *separable* si contiene un conjunto denso numerable.

Un concepto prevalente en todo el análisis es el de los espacios L^p:

Definición 1.1. Si se tiene un espacio de medida $(S, \mathcal{F}_1, \mu)$ y un espacio normado $(R, \mathcal{F}_2)$, se define el espacio $L^p(S, \mu; R)$ como el conjunto de funciones medibles $f : S \to R$ tales que:

$$\|f\|_{L^p(S,\mu;R)} := \left(\int \|f\|_R^p \quad d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

si $p \in [1, \infty)$, y como el conjunto de funciones medibles tales que:

$$\|f\|_{L^\infty(S,\mu;R)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S} \|f(x)\|_R < \infty$$

si $p = \infty$.

Se puede ver que $\|f\|_{L^p(S,\mu;R)}$ define una norma en $L^p(S; R)$ si se identifican las funciones que son idénticas entre sí casi-seguramente. Si $R = S = \mathbb{R}$ y μ es la medida de Lebesgue, se puede denotar la norma simplemente como $\|f\|_p$.

Las siguientes desigualdades son bien conocidas e importantes (se puede consultar [44] para sus demostraciones):

- Desigualdad del triángulo: Sean x, y elementos de un espacio normado $\|\cdot\|$. Entonces:
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Sean x, y elementos de un espacio de Hilbert. Luego, se cumple:
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

- Desigualdad de Young: Sean $a, b \geq 0$, y $p, q \in (1, \infty)$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Entonces:
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

- Desigualdad de Hölder: Sea $(S, \mathcal{F}_1, \mu)$ un espacio de medida y $p, q \in [1, \infty]$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Si $f \in L^p(S, \mu; \mathbb{R})$ y $g \in L^q(S, \mu; \mathbb{R})$, entonces:
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

- Desigualdad de Jensen: Sea $(S, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad, y ϕ una función convexa; es decir, si $\alpha \in (0, 1)$, la siguiente desigualdad:
$$\phi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1-\alpha)\phi(y)$$
se cumple para todo $x,\ y \in \mathbb{R}$. En este caso, para cualquier $g : S \to \mathbb{R}$ integrable, se tiene:
$$\phi\left(\int_S g\, d\mu\right) \leq \int_S \phi(g)\, d\mu$$
En particular:
$$\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$$
y si $S = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo:
$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\, dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(g(t))\, dt$$

Un *isomorfismo* entre dos espacios A, B es un mapeo biyectivo que preserva la estructura de los mismos. Entre espacios métricos, la estructura a preservar es la métrica, y al mapeo se le conoce como *isometría*:

Definición 1.2. Sean A, B espacios métricos. Una función biyectiva $f : A \to B$ es una isometría si para cualquier $a, b \in A$ se cumple:
$$d_B(f(a), f(b)) = d_A(a, b)$$

En este caso, A y B son *isométricos*, y se representa como $A \simeq B$.

En el caso particular donde A y B son espacios normados, una *isometría lineal* f cumple la propiedad:

$$\|f(u)\|_B = \|u\|_A$$

para todo $u \in A$. Además, gracias a la identidad:

$$\langle u, v\rangle_A = \frac{1}{4}(\|u+v\|_A^2 - \|u-v\|_A^2),$$

se tiene que las isometrías lineales preservan productos internos, es decir:

$$\langle u, v\rangle_A = \langle f(u), f(v)\rangle_B$$

La siguiente terminología será utilizada en el resto del trabajo. Los términos son estándares en el área ([41], [22]).

1. Un *proceso estocástico* $\{X(h,\omega)|\, h \in \mathcal{H}, \omega \in \Omega\}$ es una colección de variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indexadas por el espacio $\mathcal{H}$. Este espacio índice es normalmente topológico, en cuyo caso se le proveerá de una $\sigma-$álgebra de Borel. En este trabajo se considera $\mathcal{H}$ como un espacio de Hilbert. Usualmente $\mathcal{H}$ es un subintervalo I de la recta real positiva con inicio en cero; es decir, $I = [0, T]$ con $T > 0$, ó $I = [0, \infty)$.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una *filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{H}}$ sobre Ω es una familia de sub-σ-álgebras tal que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ para todo $t \in I$, y $s \leq t$ implica que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

3. Una *trayectoria* de un proceso estocástico es un mapeo de la forma $h \mapsto X_\omega(h)$; es decir, es la función $X(\cdot, \omega)$ resultante de fijar $\omega \in \Omega$ en el proceso estocástico.

4. Un proceso estocástico X es *centrado* si $E[X(h)] = 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

5. Un proceso estocástico X es *gaussiano* si dada cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier colección $\{h_1, \ldots, h_n\} \subseteq \mathcal{H}$, la variable aleatoria $(X_{h_1}, \ldots, X_{h_n})$ tiene distribución normal multivariada.

6. Dos procesos estocásticos $\{X(h), h \in \mathcal{H}\}$ y $\{Y(h), h \in \mathcal{H}\}$ son *independientes* si dada cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier colección $\{h_1, \ldots, h_n\} \subseteq \mathcal{H}$, los vectores aleatorios $(X_{h_1}, \ldots, X_{h_n})$, $(Y_{h_1}, \ldots, Y_{h_n})$ son independientes.

7. Un proceso estocástico $\tilde{X}$ es una *modificación* de X si para todo $h \in \mathcal{H}$, $P([X(h) = \tilde{X}(h)]) = 1$.

8. Un proceso estocástico se denominará *continuo* si tiene trayectorias continuas para casi todo ω (es decir, P-casi seguramente).

9. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{H}}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Un *tiempo de paro* τ es una variable aleatoria tal que $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in I$.

1.3. Propiedades del movimiento browniano fraccionario

Es posible ahora definir formalmente al movimiento browniano fraccionario:

Definición 1.3. Sea $H \in (0,1)$. Un proceso estocástico centrado y gaussiano $\{B_t^H,\, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano fraccionario con parámetro H si su función de covariancia es:

$$R_H(t,s) = E\left[B_t B_s\right] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \tag{1}$$

En el Capítulo 3 se construye un proceso estocástico que cumple con las condiciones anteriores; esto prueba la existencia del movimiento browniano fraccionario. Como consecuencia de la definición, algunas propiedades de este proceso son las siguientes (Biagini et al. [3]):

1. $B^H(0) = 0$.
2. Incrementos estacionarios: $B^H(t) - B^H(s) \overset{d}{=} B^H(t-s)$ para todo $t \geq s \geq 0$ (la igualdad es en distribución).
3. $E[(B_t^H)^2] = t^{2H}$ para todo $t \geq 0$.
4. Auto-similar con parámetro H: $B^H(at) \overset{d}{=} a^H\, B^H(t)$ para $a > 0$.

Otra forma de definir el movimiento browniano fraccionario es al revés: como un proceso estocástico con ciertas propiedades, y derivando de ahí la fórmula de covariancia. Es decir:

Lema 1.1. *Sea $H \in (0,1)$. Un proceso estocástico $\{Z(t),\, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano fraccionario con parámetro H si se cumplen las siguientes tres propiedades:*

1. *El proceso es gaussiano y centrado, con $E[Z^2(1)] = 1$.*
2. *Tiene incrementos estacionarios.*
3. *Es auto-similar con parámetro H.*

Demostración. Sea $t \geq s$. Por una parte se tiene:

$$E[Z^2(t-s)] = (t-s)^{2H} E[Z^2(1)] = (t-s)^{2H}$$

Por otra parte:

$$E[Z^2(t-s)] = E\left[\left(Z(t) - Z(s)\right)^2\right] = t^{2H} E[Z^2(1)] + s^{2H} E[Z^2(1)] - 2E[Z(t)\, Z(s)]$$

Igualando ambas ecuaciones y despejando, se llega a la relación:

$$E[Z(t)\, Z(s)] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - (t-s)^{2H}\right)$$

El caso $t < s$ es similar. Al cumplirse los requerimientos de la Definición 1.3, se sigue el resultado. □

Otro aspecto importante de estudio es la continuidad de las trayectorias. Para ello, se necesita primero enunciar el concepto de continuidad de Hölder y el teorema de continuidad de Kolmogorov:

Definición 1.4. Una función $f : [0, T] \to \mathbb{R}$, $T > 0$, es Hölder-continua de orden γ si $0 < \gamma \leq 1$ y existe $M > 0$ tal que:

$$|f(t) - f(s)| \leq M|t - s|^{\gamma}$$

para todo s, $t \in [0, T]$.

Teorema 1.1. *Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico. Si para cada $T > 0$ existen constantes $\alpha \geq 1, K \geq 0, \beta > 0$ tales que, para cualquier $s, t \in [0, T]$, el siguiente estimado se cumple:*

$$E\left[|X(t) - X(s)|^{\alpha}\right] \leq K|t - s|^{1+\beta},$$

entonces el proceso X admite una modificación continua. Además, esta modificación tiene trayectorias $\gamma-$Hölder continuas con $0 < \gamma < \beta/\alpha$.

Demostración. ([22], Teorema 2.8). □

Con estos preliminares, el siguiente lema caracteriza la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano fraccionario:

Lema 1.2. *Sea $\{B_t^H, t \geq 0\}$ un movimiento browniano fraccionario como en la Definición 1.3. Entonces existe una modificación de B^H con trayectorias Hölder-continuas casi seguramente para cualquier orden $\gamma < H$.*

Demostración. ([3], Teorema 1.6.1).

Sea $\kappa > 0$. Dada la igualdad en distribución y las Propiedades 2 y 4, las siguientes igualdades se cumplen:

$$E[|B^H(t) - B^H(s)|^{\kappa}] = E[|B^H(t - s)|^{\kappa}]$$
$$= E[|(t - s)^H B^H(1)|^{\kappa}] = (t - s)^{\kappa H} E[|B^H(1)|^{\kappa}]$$

Aplicando el teorema de continuidad de Komolgorov y notando que $\gamma < (\kappa H - 1)/\kappa = H - 1/\kappa$, se llega al resultado. □

Es un resultado conocido (ej. [22]) el hecho que el movimiento browniano tiene incrementos independientes. Sin embargo, esto no es cierto para movimientos brownianos fraccionarios con otros valores de H:

Lema 1.3. *Sea* $\{B^H(t),\, t \in [0,T]\}$ *un movimiento browniano fraccionario con parámetro* H. *Sean* $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq T$. *Entonces la correlación entre los incrementos,* $\operatorname{corr}((B^H(t_2) - B^H(t_1))(B^H(t_4) - B^H(t_3)))$, *es negativa si* $H < 1/2$, *positiva si* $H > 1/2$, *y* 0 *si* $H = 1/2$.

Demostración. Usando la definición de correlación de dos variables aleatorias y la función de covariancia, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{corr}((B^H(t_2) - B^H(t_1))(B^H(t_4) - B^H(t_3))) \\
&= \frac{(t_3 - t_2)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H} + (t_4 - t_1)^{2H} - (t_4 - t_2)^{2H}}{2\,(t_4 - t_3)^H (t_2 - t_1)^H} \\
&= \frac{H}{(t_4 - t_3)^H (t_2 - t_1)^H} \left(\int_{t_4 - t_2}^{t_4 - t_1} x^{2H-1} dx - \int_{t_3 - t_2}^{t_3 - t_1} x^{2H-1} dx \right)
\end{aligned}$$

El resultado se sigue al ser x^a monotónicamente creciente para $a > 0$ en $(0, \infty)$, y monotónicamente decreciente para $a < 0$. □

Sea $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ una partición π_n de $[0,T]$. Se define la función $\operatorname{mesh}(\pi_n) = \sup_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$. Por simplicidad, se usará la notación $\operatorname{mesh}(\pi) = |\pi|$.

Definición 1.5. Sea π_n una partición de $[0,T]$, y $f : [0,T] \to \mathbb{R}$. Se define:

$$\mathcal{S}_p(f, \pi_n) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$$

La p-variación de f, con $p > 0$, es entonces:

$$\mathcal{V}_p(f, [0,T]) := \sup_{\pi_n} \mathcal{S}_p(f, \pi_n)$$

Sea X_t proceso estocástico. Entonces se dice que X tiene p-variación finita si para casi todo $\omega \in \Omega$, $\mathcal{V}_p(X(\cdot, \omega), [0,T]) < \infty$; esto es, sus trayectorias tienen p-variación finita casi seguramente.

El siguiente lema muestra que el movimiento browniano fraccionario nunca es de 1-variación acotada, lo cual tiene consecuencias para definir la integral estocástica en el Capítulo 3:

Lema 1.4. *Para casi todo* $\omega \in \Omega$, *el número real* $\inf\{p > 0 |\, \mathcal{V}_p(B^H(\cdot, \omega), [0,T]) < \infty\}$ *es igual a* $1/H$.

Demostración. ([3], Sección 1.8).

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar particiones π_n definidas como $t_i = Ti/n$ para $0 \leq i \leq n$. Considere el proceso:

$$Y_{n,p} = n^{pH-1} \sum_{i=1}^{n} \left| B^H\left(\frac{Ti}{n}\right) - B^H\left(\frac{T(i-1)}{n}\right) \right|^p$$

Por las Propiedades 2 y 4, este proceso es idéntico en distribución a:

$$V_{n,p} = T^{pH}\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left| B^H(i) - B^H(i-1) \right|^p$$

Luego $Y_{n,p} - V_{n,p}$ converge en distribución a 0. Al ser el límite constante, se sigue que $Y_{n,p} - V_{n,p}$ converge a 0 en probabilidad. Una consecuencia del teorema ergódico (DaPrato y Jabczyk [9], Teorema 1.2.3) es que $V_{n,p}$ converge casi seguramente (y por tanto en probabilidad) a $T^{pH} E\left[|B^H(1)|^p\right]$ cuando $n \to \infty$. Por las consideraciones anteriores, esto implica que $Y_{n,p}$ también converge en probabilidad a $T^{pH} E\left[|B^H(1)|^p\right]$.

Sea ahora la variable aleatoria:

$$\mathcal{V}_p = \underset{n\to\infty}{P\text{-}\lim}\; n^{1-pH} Y_{n,p}$$

Si $p > 1/H$, este límite en probabilidad es cero; y si $p < 1/H$, el límite es infinito. Norvaiša [30] muestra que este límite es, en realidad, de forma casi segura. Esto prueba la proposición. □

Al igual que en el caso clásico $H = 1/2$, es posible demostrar que las trayectorias de un movimiento browniano fraccionario no son diferenciables en ningún punto, con probabilidad 1:

Lema 1.5. *Para cualquier $s \in [0, T]$, la siguiente igualdad:*

$$\limsup_{t\to s} \left| \frac{B^H(t) - B^H(s)}{t - s} \right| = \infty$$

es cierta P-casi seguramente.

Demostración. ([3], Sección 1.7).

Sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente que converge a 0. Para cada $r \in [0, T]$ y $d > 0$ arbritrario, sea $A(r; d) \subseteq \Omega$ definido como:

$$A(r; d) = \left[\sup_{0\leq h\leq r} \left| \frac{B^H(h)}{h} \right| \geq d \right]$$

Es claro que $A(t_{n+1}; d) \subseteq A(t_n; d)$. Además:

$$\lim_{n\to\infty} A(t_n; d) = \left[\limsup_{r\to 0} \left|\frac{B^H(r)}{r}\right| \geq d\right]$$

y:

$$\left[\left|\frac{B^H(t_n)}{t_n}\right| \geq d\right] \subseteq A(t_n; d)$$

Propiedades 2 y 4 de la Definición 1.3 implican:

$$P\left(\left[|B^H(1)| \geq t_n^{1-H}\, d\right]\right) = P\left(\left[\left|\frac{B^H(t_n)}{t_n}\right| \geq d\right]\right)$$

Como se cumple:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left[|B^H(1)| \geq t_n^{1-H}\, d\right]\right) = 1,$$

entonces:

$$P\left(\left[\limsup_{r\to 0}\left|\frac{B^H(r)}{r}\right| \geq d\right]\right) = P\left(\left[\limsup_{t\to s}\left|\frac{B^H(t) - B^H(s)}{t-s}\right| \geq d\right]\right) = 1$$

□

Para cualquier $t \geq 0$, $B^H(t)$ tiene momentos de todos los órdenes por ser una variable aleatoria gaussiana. La variable aleatoria $\sup_{0\leq h\leq T} |B^H(h)|$ también es gaussiana si $H = 1/2$, y de distribución en general desconocida (Nourdin [31]), aunque con densidad infinitamente diferenciable (Zadi y Nualart [52]), para otros valores de H. Sin embargo, esta variable también tiene momentos de todos los órdenes:

Lema 1.6. *Sean T, $p \geq 0$. Entonces:*

$$E\left[\sup_{0\leq h\leq T} |B^H(h)|^p\right] < \infty$$

Demostración. Por la Propiedad 4 de la Definición 1.3, se tiene:

$$E\left[\sup_{0\leq h\leq T} |B^H(h)|^p\right] = E\left[\sup_{0\leq h\leq T} h^{pH}|B^H(1)|^p\right] = T^{pH} E\left[|B^H(1)|^p\right]$$

□

El siguiente resultado muestra que $\sup_{0\leq h\leq T}|B^H(h)|$ tiene momentos exponenciales de todos los órdenes:

Lema 1.7. *Sean $\theta \in \mathbb{R}$, $T \geq 0$, tal que:*

$$M_T^H = \sup_{0\leq h\leq T} |B^H(h)|$$

Entonces se cumple:

$$E\left[e^{\theta\, M_T^H}\right] < \infty$$

Demostración. Es suficiente considerar el caso $\theta > 0$ y $T = 1$ (esto último por ser el proceso auto-similar). Sea:

$$m_1^H = \sup_{0\leq h\leq 1} B^H(h)$$

Como $B_t^H \overset{d}{=} -B_t^H$, para $x \geq 0$ se concluye:

$$\begin{aligned} P\left(M_1^H \geq x\right) &\leq P\left(\sup_{u\in[0,1]} B^H(u) \geq x\right) + P\left(\sup_{u\in[0,1]} -B^H(u) \geq x\right) \\ &= 2P\left(m_1^H \geq x\right) \end{aligned}$$

A su vez, para x suficientemente grande, el siguiente resultado es cierto (Nourdin [31], Teorema 4.2):

$$\ln P\left(m_1^H \geq x\right) \leq -\frac{\left(x - E\left[m_1^H\right]\right)^2}{2}$$

Lo cual implica:

$$\ln P\left(e^{\theta\, M_T^H} \geq x\right) \leq -\frac{\left(\ln x - \theta\, E\left[m_1^H\right]\right)^2}{2\theta^2} + \ln 2$$

La función $\exp(-x^2)$ es integrable en todo $\mathbb{R}$. Esto permite ver que la siguiente integral:

$$\int_1^\infty \exp\left(-\frac{\left(\ln x - \theta\, E\left[m_1^H\right]\right)^2}{2\theta^2}\right) dx$$

es finita bajo el cambio de variable $u = \ln x - \theta\, E\left[m_1^H\right]$. De aquí se sigue el resultado. □

1.4. Algunos resultados del cálculo fraccionario

Si $D(f)$ denota a la derivada de la función f, entonces $D^n(f)$ se interpreta como la aplicación del operador derivada n veces. El cálculo fraccionario permite ampliar esta definición, tal que $D^\alpha(f)$ (y su equivalente integral $I^\alpha(f)$) tenga sentido para cualquier $\alpha > 0$. Para ello, es necesario definir primero a la función gamma:

Definición 1.6. La función gamma, $\Gamma(x)$, está definida para $x > 0$ como la integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} dt$$

Evidentemente, la integral es convergente en el dominio de definición. La función gamma se puede ver como una extensión continua de la función factorial $n!$, y comparte muchas de sus propiedades. El siguiente teorema muestra que, bajo ciertas condiciones, esta extensión es única:

Teorema 1.2. *Sea $f(x)$ una función positiva en $x > 0$, tal que posee las siguientes características:*

1. $f(x+1) = xf(x)$
2. $f(1) = 1$
3. $\ln f$ *es convexa*

Entonces $f(x) = \Gamma(x)$

Demostración. (Artin [2], Teorema 2.1). □

A continuación se resumen algunas de las identidades más importantes de la función gamma (para su demostración, ver [2], [43]):

Lema 1.8. $\Gamma(x)$ *cumple:*

1. $\Gamma(m) = (m-1)!$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$
2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(x\pi)$
4. *Para* $m \in \mathbb{N}$*:*
$$\Gamma(mx) = \frac{m^{mx-1/2}}{(2\pi)^{(m-1)/2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{m}\right)$$
5. *Para* $m \in \mathbb{N}$*:*
$$\frac{d^m}{dx^m}\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n dt$$

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *absolutamente continua* si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para cualquier secuencia finita de subintervalos disyuntos a pares $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$, la propiedad siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$

implica:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

Sea $AC([a, b])$ el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en $[a, b]$. Es un resultado conocido (ej. [42]) que $f \in AC([a, b])$ si y sólo si:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

para alguna función integrable g, la cual coincide entonces con la derivada $f'(t)$ casi seguramente. Se puede extender este concepto a un orden mayor:

Definición 1.7. Sea $n \in \mathbb{N}$. El espacio $AC^n([a, b])$ es el conjunto de todas las funciones f que tienen derivadas continuas de hasta orden $n - 1$, y además $f^{(n)} \in AC([a, b])$.

De forma análoga al caso $n = 1$, se puede demostrar (Samko et al. [48], Lema 2.4) que $f \in AC^n([a, b])$ si y sólo si existe un $g \in L^1([a, b])$ y constantes c_k tales que:

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x - t)^{n-1} g(t)\, dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x - a)^k \tag{2}$$

Con estos preliminares, es posible ahora definir las integrales y derivadas fraccionarias:

Definición 1.8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable ($f \in L^1([a, b])$). Las *integrales fraccionarias de orden* α son, para $\alpha > 0$ y $x \in [a, b]$:

1. La integral fraccionaria izquierda:

$$I_{a+}^{\alpha}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1-\alpha}}dt$$

2. La integral fraccionaria derecha:

$$I_{b-}^{\alpha}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(t - x)^{1-\alpha}}dt$$

Estas integrales están bien definidas. En efecto, por el teorema de Fubini y la integrabilidad de f se tiene:

$$\int_a^b \left| I_{a+}^{\alpha}(f)(x) \right| dx \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| dt < \infty$$

Lo cual demuestra que $I_{a+}^{\alpha}(f)(x)$ es finito para casi todo $x \in [a, b]$.

Dado f, es natural preguntarse cuándo es posible encontrar una g tal que $f = I_{a+}^{\alpha}(g)$. El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tal g en $L^1([a, b])$:

Teorema 1.3. *Para $\alpha \in (0, 1)$, la ecuación*

$$f(x) = I_{a+}^{\alpha}(g) \tag{3}$$

tiene solución única $g \in L^1([a, b])$ si y sólo si se cumplen las condiciones:

$$f_{1-\alpha}(x) \in AC([a, b]), \quad f_{1-\alpha}(a) = 0,$$

donde:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

Demostración. ([48], Teorema 2.1).

En primer lugar, se construirá la solución g explícitamente. Integrando ambas partes de la ecuación $f(x) = I_{a+}^{\alpha}(g)$, y usando la Definición 1.8, se tiene:

$$\int_a^x \left(\int_a^t \frac{g(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \right) \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

El cual, por Fubini, resulta en:

$$\int_a^x \left(\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}} \right) g(s)ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

Se puede demostrar que:

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(1-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha),$$

por lo que se concluye:

$$\int_a^x g(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

Diferenciando resulta en la siguiente igualdad:

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{4}$$

Es claro que, si la solución existe, debe ser única. Se procede ahora a demostrar el teorema principal:

$\Rightarrow$) Sea $f(x) = I^{\alpha}_{a+}(g)$ soluble en $L^1([a,b])$. Luego g tiene la forma de la Igualdad (4) y se cumple:

$$f_{1-\alpha}(x) = \int_a^x g(t)dt,$$

lo cual implica que $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y $f_{1-\alpha}(a) = 0$.

$\Leftarrow$) Como $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$, entonces $f'_{1-\alpha} \in L^1([a,b])$. Por tanto, la función definida en (4) existe casi seguramente. Sea ahora $h(x)$ definida como:

$$h(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = I^{\alpha}_{a+}(f'_{1-\alpha})(x)$$

Como $f'_{1-\alpha}$ existe y es integrable, se tiene que la ecuación anterior es soluble y, por (4), se debe cumplir:

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{h(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

Es decir, $f'_{1-\alpha} = h'_{1-\alpha}$. Por suposición, $f_{1-\alpha}$ es absolutamente continua, y $h_{1-\alpha}$ lo es por la definición de h. Luego:

$$f_{1-\alpha} - h_{1-\alpha} = c,$$

una constante, la cual es 0 por ser $f_{1-\alpha}(a) = h_{1-\alpha}(a) = 0$. Sustituyendo en la definición se tiene:

$$\int_a^x \frac{f(t) - h(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha}} = 0,$$

lo cual prueba que $f(x) = h(x)$ procediendo como al principio. Entonces $f'_{1-\alpha} \in L^1([a,b])$ es solución de la ecuación integral original. □

Se puede probar, de forma análoga, que $f(x) = I^{\alpha}_{b-}(g)$, $\alpha \in (0,1)$ es soluble en $L^1([a,b])$ si y sólo si $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$, donde:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}$$

El siguiente lema muestra que imponer condiciones a f es suficiente para que exista solución a la Ecuación (3):

Lema 1.9. *Si $f \in AC([a,b])$, entonces $f(x) = I^{\alpha}_{a+}(g)$ es soluble en $L^1([a,b])$ para $\alpha \in (0,1)$. Además, su solución se puede representar como:*

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)ds}{(x-s)^{\alpha}} \right)$$

Demostración. ([48], Lema 2.1).

Por ser absolutamente continua, f se puede representar como:

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\, ds$$

Sustituyendo en la definición de $f_{1-\alpha}$ y aplicando Fubini, se obtiene:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\int_a^t \frac{f'(s)\, ds}{(t-s)^\alpha} \right) dt$$

Como cada sumando en el lado derecho es absolutamente continuo, entonces $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ también. Por el Teorema 1.3, y el hecho que la solución g es idéntica a $f'_{1-\alpha}$ casi seguramente, se sigue el lema. □

En base a los resultados anteriores, es natural definir la derivada fraccionaria como la función g resultado de resolver la Ecuación (3).

Definición 1.9. Sea $\alpha \in (0,1)$ y f integrable. Las *derivadas fraccionarias de orden* α son, para $x \in [a,b]$:

1. La derivada fraccionaria izquierda:

$$D^\alpha_{a+}(f) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}$$

2. La derivada fraccionaria derecha:

$$D^\alpha_{b-}(f) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^\alpha}$$

Como ya se vio en el Lema 1.9, estas definiciones tienen sentido si, por ejemplo, $f \in AC([a,b])$. En este caso:

$$D^\alpha_{a+}(f) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)\, dt}{(x-t)^\alpha} \right)$$
$$D^\alpha_{b-}(f) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(b)}{(b-x)^\alpha} - \int_x^b \frac{f'(t)\, dt}{(t-x)^\alpha} \right)$$

De aquí, es posible extender el operador derivada a $\alpha > 0$ arbitraria. Para ello, se puede descomponer tal α de forma única como $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}$, donde la función piso $\lfloor \alpha \rfloor$ es el mayor entero menor a α, y $\{\alpha\}$ es la parte fraccionaria entre 0 y 1. La siguiente definición entonces tiene sentido:

Definición 1.10. Para $\alpha > 0$, las derivadas fraccionarias se definen como ($n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$):

1. Derivada fraccionaria izquierda:

$$D^{\alpha}_{a+}(f) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\lfloor \alpha \rfloor} D^{\{\alpha\}}_{a+}(f) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

2. Derivada fraccionaria derecha:

$$D^{\alpha}_{b-}(f) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\lfloor \alpha \rfloor} D^{\{\alpha\}}_{b-}(f) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

El siguiente teorema es una generalización del Lema 1.9 para cualquier $\alpha > 0$:

Teorema 1.4. *Sea $f(x) \in AC^n([a,b])$ en el sentido de la Definición 1.7, y donde $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$. Entonces $D^{\alpha}_{a+}(f)$ existe para casi todo $x \in [a,b]$, y satisface la identidad:*

$$D^{\alpha}_{a+}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

Demostración. ([48], Teorema 2.2). □

Una relación similar se puede obtener para las derivadas fraccionarias derechas.

El siguiente lema será útil para demostraciones subsecuentes:

Lema 1.10. *Sea $g \in L^1([a,b])$. Entonces, la ecuación $0 = I^{\alpha}_{a+}(g)$ solo tiene la solución trivial $g = 0$ (casi seguramente) para toda $\alpha > 0$.*

Demostración. Sea $n = \lfloor \alpha \rfloor$. Como la ecuación $0 = I^{\alpha}_{a+}(g)$ es una igualdad de funciones en un intervalo, se puede diferenciar ambos lados n veces para obtener:

$$0 = I^{\alpha-n}_{a+}(g)$$

Ahora, $\alpha - n \in [0,1)$. Por el Lema 1.9, la ecuación tiene una solución única, la cual debe ser igual a 0 casi seguramente en $[a,b]$. □

Las integrales fraccionarias cumplen la *propiedad de semigrupo*; es decir, para α, $\beta > 0$ se cumple, para una f integrable:

$$I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+}(f) = I^{\alpha+\beta}_{a+}(f), \quad I^{\alpha}_{b-} I^{\beta}_{b-}(f) = I^{\alpha+\beta}_{b-}(f) \tag{5}$$

Esta propiedad se prueba fácilmente como consecuencia del teorema de Fubini ([48], Teorema 2.5).

Definidos los operadores integrales fraccionarios, es posible estudiar los espacios $I^{\alpha}_{a+}(L^p)$ para $p \in [1, \infty)$. Estos son definidos como el conjunto de funciones de la forma $f = I^{\alpha}_{a+}(g)$, donde $g \in L^p([a, b])$. El siguiente teorema caracteriza al espacio $I^{\alpha}_{a+}(L^1)$:

Teorema 1.5. *$f \in I^{\alpha}_{a+}(L^1)$ si y sólo si se cumple (con $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$):*

$$I^{n-\alpha}_{a+}(f) \in AC^n([a, b])$$

y además:

$$\frac{d^k}{dx^k} I^{n-\alpha}_{a+}(f)(a) = 0$$

para $k = 0, \ldots, n-1$.

Demostración. ([48], Teorema 2.3).

$\Rightarrow$) Por definición, existe $g \in L^1[a, b]$ tal que $f = I^{\alpha}_{a+}(g)$. Por la propiedad de semigrupo:

$$I^{n-\alpha}_{a+}(f) = I^{n}_{a+}(g)$$

Se ve claramente que $I^{n}_{a+}(g)$ tiene la forma de la Igualdad (2), y por tanto está en $AC^n([a, b])$; además:

$$\frac{d^k}{dx^k} I^{n}_{a+}(g)(a) = 0$$

para $k = 0, \ldots, n-1$.

$\Leftarrow$) Si se cumplen las condiciones anteriores, entonces $I^{n-\alpha}_{a+}(f)$ se puede representar, por (2), como $I^{n-\alpha}_{a+}(f) = I^{n}_{a+}(g) = I^{n-\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+}(g)$ para alguna $g \in L^1[a, b]$. Esto implica que $I^{n-\alpha}_{a+}(f - I^{\alpha}_{a+}(g)) = 0$, la cual tiene la solución única $f = I^{\alpha}_{a+}(g)$ por Lema 1.10. □

Es estándar identificar a la derivada fraccionaria como el inverso de la integral fraccionaria; es decir:

$$D^{\alpha}_{a+}(f) = I^{-\alpha}_{a+}(f). \quad D^{\alpha}_{b-}(f) = I^{-\alpha}_{b-}(f)$$

Desafortunadamente, en general la propiedad de semigrupo no se cumple para el caso de derivadas; en particular, a excepción de algunos casos:

$$I^{\alpha}_{a+} D^{\alpha}_{a+}(f) = I^{\alpha}_{a+} I^{-\alpha}_{a+}(f) \neq f$$

El siguiente teorema da condiciones suficientes para que lo anterior sea cierto.

Teorema 1.6. *Para cualquier $f \in L^1([a,b])$, la siguiente igualdad es cierta:*

$$D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+}(f) = f \tag{6}$$

Mientras que, si $f \in I^{\alpha}_{a+}(L^1)$, se cumple:

$$I^{\alpha}_{a+} D^{\alpha}_{a+}(f) = f$$

Demostración. ([48], Teorema 2.4).

Para la primera parte, se tiene por definición ($n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$):

$$D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+}(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \left(\int_a^t \frac{f(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \right) \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

Usando teorema de Fubini, se obtiene:

$$D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+}(f) = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f(s)(x-s)^{n-1}\,ds = D^{n}_{a+} I^{n}_{a+}(f)$$

Como n es entero, es bien conocido que $D^n_{a+} I^n_{a+} f = f$.

Si $f \in I^{\alpha}_{a+}(L^1)$, entonces existe $g \in L^1([a,b])$ tal que $f = I^{\alpha}_{a+}(g)$. Por la primera parte de esta demostración, se tiene:

$$I^{\alpha}_{a+} D^{\alpha}_{a+}(f) = I^{\alpha}_{a+} D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+}(g) = I^{\alpha}_{a+}(g) = f$$

□

Con ciertos requisitos, el cálculo fraccionario cuenta también con una fórmula de integración por partes:

Lema 1.11. *Si $p, q \geq 1$, $1/p + 1/q \leq 1 + \{\alpha\}$, $\psi \in L^q([a,b])$ y $\varphi \in L^p([a,b])$, las siguientes integrales existen y son iguales casi seguramente:*

$$\int_a^b \varphi(x) \left(I^{\alpha}_{a+}(\psi) \right)(x)\,dx = \int_a^b \psi(x) \left(I^{\alpha}_{b-}(\varphi) \right)(x)\,dx \tag{7}$$

y paralelamente, si $f \in I^{\alpha}_{b-}(L^p)$, $g \in I^{\alpha}_{a+}(L^q)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) \left(D^{\alpha}_{a+}(g) \right)(x)\,dx = \int_a^b g(x) \left(D^{\alpha}_{b-}(f) \right)(x)\,dx \tag{8}$$

Demostración. Si las integrales existen en la Igualdad (7), entonces son iguales por teorema de Fubini, al cumplirse:

$$\int_a^b \int_a^x \frac{\varphi(x)\psi(t)\,dt\,dx}{(x-t)^{1-\alpha}} = \int_a^b \int_t^b \frac{\varphi(x)\psi(t)\,dx\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

Se verá ahora la existencia de estas integrales. Si $\alpha \in (0,1)$ y $1 \leq q < 1/\alpha$, entonces [48] (Teorema 3.5) muestra que $I^{\alpha}_{a+}(L^q([a,b])) \subseteq L^r([a,b])$, donde $r = q/(1-\alpha q)$. Para que la función $\varphi(x)\left(I^{\alpha}_{a+}(\psi)\right)(x)$ sea integrable, es suficiente que $1/p + 1/r \leq 1$, con $\varphi \in L^p([a,b])$, $p \geq 1$ y $I^{\alpha}_{a+}(\psi) \in L^r([a,b])$. Entonces, si $\psi \in L^q([a,b])$, la condición es:

$$\frac{1}{p} + \frac{1-\alpha q}{q} \leq 1 \longrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$$

Si, por otro lado, $\alpha \geq 1$, la propiedad de semigrupo sugiere que:

$$\varphi(x)\left(I^{\alpha}_{a+}(\psi)\right)(x) = \varphi(x)\left(I^{\{\alpha\}}_{a+} I^{\lfloor\alpha\rfloor}_{a+}(\psi)\right)(x)$$

Sea:

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

Si $g \in L^p([a,b])$, donde $p \geq 1$, la convexidad de x^p y la desigualdad de Jensen prueban que:

$$\int_a^b \left| \int_a^x g(t)\,dt \right|^p dx \leq (b-a)^{p-1} \int_a^b \int_a^x |g(t)|^p dt\,dx < \infty$$

Lo cual significa que $I^n_{a+}(L^p([a,b])) \subseteq L^p([a,b])$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en particular $I^{\{\alpha\}}_{a+} I^{\lfloor\alpha\rfloor}_{a+}(\psi) \in L^r([a,b])$ también. La condición

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \{\alpha\}$$

es entonces suficiente para garantizar integrabilidad, para toda $\alpha > 0$.

Finalmente, se nota que si $f \in I^{\alpha}_{b-}(L^p)$ y $g \in I^{\alpha}_{a+}(L^q)$, la aplicación del Teorema 1.6 reduce la Igualdad (8) a la Igualdad (7), por lo que las mismas condiciones aplican. □

2. Operadores y producto tensorial

El análisis funcional ha demostrado ser una herramienta muy importante para estudiar el movimiento browniano fraccionario y el cálculo estocástico en general. En particular, la teoría de espacios de Hilbert, productos tensoriales y operadores que es aquí expuesta es la base de la teoría de espacios gaussianos y del cálculo de Malliavin (Capítulo 3), así como de los resultados principales en este trabajo.

2.1. Algunas propiedades de espacios de Hilbert

Dado un espacio vectorial X sobre un campo $\mathbb{K}$, se puede definir el conjunto de todos los operadores lineales de la forma $f : X \to \mathbb{K}$, denominados *funcionales*. Este espacio es a su vez un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con importantes aplicaciones en álgebra y análisis:

Definición 2.1. El dual algebraico de X, denotado como X^*, es el conjunto de todos los funcionales $f : X \to \mathbb{K}$. Si X es además un espacio de Banach, el dual continuo de X, denotado como X', es el conjunto de todos los funcionales continuos.

Es claro que, en general, $X' \subseteq X^*$. La siguiente definición amplía el concepto de convergencia en un espacio de Banach:

Definición 2.2. Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge débilmente a x si para todo $\phi \in X'$ se cumple que $\phi(x_n) \to \phi(x)$. También se denota como $x_n \rightharpoonup x$.

Los siguientes términos serán usados específicamente para espacios de Hilbert ($\mathcal{H}$):

1. Un subconjunto T de $\mathcal{H}$ se llama *ortogonal* si dados cualesquiera $t_1, t_2 \in T$, ambos distintos, se tiene que $\langle t_1, t_2\rangle = 0$. T es además *ortonormal* si es ortogonal y $||t|| = 1$ para todo $t \in T$.

2. Una *base* B de $\mathcal{H}$, en el sentido analítico, se definirá como un subconjunto ortonormal que además cumple:

$$\overline{\text{span}}(B) = \mathcal{H}$$

   Es decir, cualquier elemento del espacio de Hilbert se puede representar como una combinación lineal infinita de elementos de B. Esto contrasta con una base algebraica, donde las combinaciones lineales deben ser finitas. Si el espacio de Hilbert es separable, entonces admite una base numerable.

3. Dado un subconjunto M de $\mathcal{H}$, el *complemento ortogonal* de M, denotado $M^\perp$, se define como:

$$M^\perp = \{x \in \mathcal{H} |\, \langle x, m\rangle = 0 \quad \forall m \in M\}$$

   Es fácil ver que $M^\perp$ es un subespacio vectorial.

Los siguientes dos resultados son importantes en demostraciones subsecuentes:

Lema 2.1. *Si M es un subconjunto de $\mathcal{H}$, entonces $M^\perp$ es cerrado.*

Demostración. ([44], Sección 4.9).

Sea $x \in M$. El conjunto $x^{\perp}$ es igual a $f^{-1}(\{0\})$, donde f es el mapeo continuo $y \mapsto \langle x, y\rangle$. Por tanto, $x^{\perp}$ es cerrado. Como:

$$M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} x^{\perp}$$

se sigue que $M^{\perp}$ también es cerrado. □

Lema 2.2. *1. Si M es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, entonces cualquier $h \in \mathcal{H}$ se puede descomponer de forma única como $h = m + m'$, donde $m \in M$ y $m' \in M^{\perp}$; es decir, $\mathcal{H} = M \bigoplus M^{\perp}$.*

2. Sea E subconjunto de $\mathcal{H}$. Entonces span (E) *es denso si y sólo si $E^{\perp} = 0$.*

Demostración. El punto 1) se demuestra en [44], (Teorema 4.11). El punto 2) es un corolario del punto 1). Primero se ve que si M es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces $M^{\perp\perp} = M$. $M \subseteq M^{\perp\perp}$ claramente; para mostrar la otra inclusión, sea $x \in M^{\perp\perp}$. Por 1), $x = m + m'$ con $m \in M, m' \in M^{\perp}$. Como:

$$0 = \langle x, m'\rangle = \langle m, m'\rangle + \langle m', m'\rangle = ||m'||^2$$

se tiene que $m' = 0$ y por tanto $x \in M$.

Por otra parte, $\overline{\text{span}}(E)$ es el espacio lineal cerrado más pequeño que contiene a E. Luego:

$$E \subseteq \overline{\text{span}}(E) \rightarrow \overline{\text{span}}(E)^{\perp} \subseteq E^{\perp} \rightarrow E^{\perp\perp} \subseteq \overline{\text{span}}(E)^{\perp\perp} = \overline{\text{span}}(E)$$

y por tanto $\overline{\text{span}}(E) = E^{\perp\perp}$. El lema queda demostrado. □

El siguiente teorema, uno de los más importantes en análisis, muestra que si X es un espacio de Hilbert, entonces X' es isométrico al propio X:

Teorema 2.1 (Representación de Riesz)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $L \in \mathcal{H}'$, entonces existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que $L(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Demostración. ([44], Teorema 4.12).

Si $L(x) = 0$ para todo x, se puede tomar $y = 0$. De otra forma, sea $M = \{x |\, L(x) = 0\}$, el cual es un subespacio vectorial cerrado. Como $M \subset \mathcal{H}$ de forma estricta, el Lema 2.2. indica que $M^{\perp} \neq \{0\}$. Sea entonces $z \in M^{\perp}, ||z|| = 1$. Defínase $u = L(x)z - L(z)x$. Como $L(u) = L(x)L(z) - L(z)L(x) = 0$, $u \in M$. Luego $\langle u, z\rangle = 0$. En consecuencia:

$$L(x) = L(x)\langle z, z\rangle = L(z)\langle x, z\rangle$$

El término $y = L(z)z$ cumple entonces, para cualquier $x \in \mathcal{H}$:

$$L(x) = \langle x, y \rangle$$

Si y no fuera único, entonces existiría y' tal que $\langle x, y - y' \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. En particular, $\langle y - y', y - y' \rangle = 0$ implica que $y = y'$. □

Como corolario de los resultados anteriores, se tiene el siguiente lema:

Lema 2.3. *Sea E un subconjunto denso de $\mathcal{H}$. Si $\langle x, e \rangle = 0$ para todo $e \in E$, entonces $x = 0$.*

Demostración. Por definición, $E \subseteq x^{\perp}$. Pero como $x^{\perp}$ es cerrado, esto significa que $x^{\perp} = \mathcal{H}$ y por tanto que $x = 0$. □

Otro corolario directo de los lemas pasados es el siguiente:

Lema 2.4. *Sea $\mathcal{H}$ separable y $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de este espacio. Entonces, para cualquier $x \in \mathcal{H}$ se cumple:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle \phi_n \tag{9}$$

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||\langle x, \phi_n \rangle||^2 \tag{10}$$

2.2. Operadores continuos

Sean V, W espacios de Banach. Se dice que un operador lineal $A : V \to W$ es *acotado* si existe una constante real M tal que, para todo $x \in V$, se cumple la desigualdad:

$$||A(x)||_W \leq M||x||_V$$

Sea $\mathcal{B}(V, W)$ el conjunto de todos los operadores lineales de V a W que cumplen la propiedad anterior. El siguiente teorema muestra que este espacio coincide exactamente con los operadores continuos de V a W:

Teorema 2.2. *Un operador lineal $A : V \to W$ es continuo si y sólo si es acotado.*

Demostración. ([45], Teorema 1.18).

$\Rightarrow$) Existe, por continuidad, un $\delta > 0$ tal que $||A(x)||_W \leq 1$ para toda x que cumpla $||x||_V \leq \delta$. Por tanto:

$$\|A(x)\|_W = \frac{\|x\|_V}{\delta} \left\| A\left(\delta \frac{x}{\|x\|_V}\right) \right\|_W \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_V$$

$\Leftarrow$) Al estar acotado, se tiene que:

$$\|A(x+h) - A(x)\|_W = \|A(h)\|_W \leq M\|h\|_V$$

El cual tiende a cero cuando h tiende a cero. □

Note que esto implica que cualquier isometría lineal es continua.

Si se tiene un operador lineal $A : V \to W$, se denota como $D(A)$ al dominio de A; es decir, al subconjunto de V donde A está definido. Es fácil ver que $D(A)$ es un subespacio lineal de V. El siguiente lema provee una forma de extender un operador A continuo si $D(A)$ es denso:

Lema 2.5. *Si A es un operador lineal acotado tal que $D(A) \subseteq V$ es denso, existe un único operador acotado A' sobre V tal que $A' = A$ en $D(A)$.*

Demostración. Para ver la unicidad, suponga que existen dos extensiones continuas de A (denotadas A_1, A_2). Entonces $A_1 - A_2$ es un operador continuo. Por densidad, para cada $x \in V$ existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ que converge a x. Para cada i, $(A_1 - A_2)(x_i) = 0$ pues ambos operadores coinciden en $D(A)$. Luego la sucesión $\{(A_1 - A_2)(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y, por continuidad, este debe ser el valor de $(A_1 - A_2)(x)$.

Para demostrar la existencia, se nota que cualquier sucesión $\{A(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ lo es, pues:

$$\|A(x_n) - A(x_m)\|_W = \|A(x_n - x_m)\|_W \leq M\|x_n - x_m\|_V$$

para todo n, $m \in \mathbb{N}$. Además, si se toman dos sucesiones diferentes que convergen a $x \in V$, las sucesiones $\{A(x_n)\}$ convergen al mismo límite. Esto sugiere que se puede definir $A'(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n)$. Este operador es lineal, y es continuo pues:

$$\|A'(x)\|_W = \lim_{n\to\infty} \|A(x_n)\|_W \leq \lim_{n\to\infty} M\,\|x_n\|_V = M\,\|x\|_V$$

□

Si tanto V como W son espacios de Hilbert, es posible aprovechar la estructura adicional del producto interno para definir un nuevo operador $A^* : W \to V$, llamado adjunta de A.

Definición 2.3. Sea $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal densamente definido entre espacios de Hilbert. Sea $D(A^*)$ el conjunto de todos los $x \in \mathcal{H}_2$ para los cuales existe un $y \in \mathcal{H}_1$ que cumpla:

$$\langle A(z), x\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle z, y\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

para cualquier $z \in D(A)$. Para cada $x \in D(A^*)$, el operador adjunto A^* se define como $A^*(x) = y$.

El operador A debe estar densamente definido para que la adjunta esté bien definida: al ser $D(A)$ denso, el Lema 2.3 garantiza que y sea único para cada $x \in D(A^*)$. El siguiente lema muestra que, bajo la topología de subespacio sobre $D(A^*)$, A^* es continuo si A también lo es.

Lema 2.6. *Si $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es un operador lineal acotado densamente definido, A^* también es acotado. Además, si M es una cota para A, también lo es para A^*.*

Demostración. Sea $x \in D(A^*)$. Por densidad, existe una sucesión $(g_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ que converge a $A^*(x)$. Por Cauchy-Schwartz y la definición de adjunta, se tiene:

$$|\langle A^*(x), g_i\rangle_{\mathcal{H}_1}| = |\langle x, A(g_i)\rangle_{\mathcal{H}_2}| \leq \|x\|_{\mathcal{H}_2} \|A(g_i)\|_{\mathcal{H}_2} \leq M \|x\|_{\mathcal{H}_2} \|g_i\|_{\mathcal{H}_1}$$

La continuidad del producto interno y la norma permiten concluir:

$$|\langle A^*(x), A^*(x)\rangle_{\mathcal{H}_1}| = \lim_{n\to\infty} |\langle A^*(x), g_n\rangle_{\mathcal{H}_1}| \leq \lim_{n\to\infty} M \|x\|_{\mathcal{H}_2} \|g_n\|_{\mathcal{H}_1} = M \|x\|_{\mathcal{H}_2} \|A^*(x)\|_{\mathcal{H}_1}$$

Lo cual implica:

$$\|A^*(x)\|_{\mathcal{H}_1} \leq M\|x\|_{\mathcal{H}_2}$$

□

2.3. Operadores cerrados y cerrables

Sean $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Definida la adjunta T^* de un operador lineal $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, es natural preguntarse bajo qué condiciones $T = T^{**}$. Desafortunadamente, en general $D(T^*)$ no es denso sobre $\mathcal{H}_2$, lo cual implica que la adjunta de segundo orden no estaría bien definida. Una forma de garantizar que este sea el caso es contar con un operador cerrable, cuya definición es la siguiente:

Definición 2.4. :

- La gráfica de un operador T, denotada por $\Gamma(T)$, es el conjunto $\{(x, T(x))|\, x \in D(T)\} \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$.
- Un operador se llama cerrado si su gráfica es un subconjunto cerrado de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$.
- De forma análoga, un operador lineal T es cerrado si dada una sucesión $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ tal que converge a h, y $\{T(h_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a k, entonces $h \in D(T)$ y $k = T(h)$.
- Un operador es cerrable si tiene una extensión cerrada.
- De forma análoga, un operador lineal T es cerrable si (y sólo si) dada una sucesión $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$ tal que converge a 0, y $\{T(h_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a k, se tiene que $k = 0$.

Es importante aclarar que en la definición anterior, se provee al producto cartesiano $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ de dos espacios de Hilbert con el siguiente producto interno:

$$\langle (h_1, g_1), (h_2, g_2)\rangle_{\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2} = \langle h_1, h_2\rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle g_1, g_2\rangle_{\mathcal{H}_2},$$

con lo cual $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ se convierte también en un espacio de Hilbert.

Sea A un operador lineal cerrable. Se denota $\overline{\Gamma(A)}$ a la cerradura topológica de la gráfica de A en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Para todo $(x, y) \in \overline{\Gamma(T)}$, se puede definir un nuevo operador A' como $A'(x) = y$. Esta extensión de A es la *cerradura* de A. Bajo la Definición 2.4, se ve que cualquier operador A continuo densamente definido es cerrable. Además, la cerradura coincide con la extensión A' del Lema 2.5.

El siguiente lema relaciona la gráfica con la cerradura:

Lema 2.7. *Si T es cerrable, entonces* $\Gamma(\bar{T}) = \overline{\Gamma(T)}$

Demostración. ([39], Sección VIII.1).

Suponga que S es una extensión cerrada de T. Entonces $\overline{\Gamma(T)} \subseteq \Gamma(S)$, por lo que $(0, x) \in \overline{\Gamma(T)}$ implica que $x = 0$. Sea R un operador con dominio $D(R) = \{z|\, (z, y) \in \overline{\Gamma(T)}\, \text{para alguna}\, y\}$, y definida de forma $R(z) = y$. Se tiene entonces que $\Gamma(R) = \overline{\Gamma(T)}$, y así R es una extensión cerrada de T. Pero al ser S extensión cerrada arbitraria, y $R \subseteq S$, debe ser que $R = \bar{T}$. □

El siguiente resultado importante da una relación entre la cerradura de un operador y la densidad del dominio de la adjunta. En primer lugar, se dice que un operador lineal $V : A \to B$ es *unitario* si es suprayectivo y si $\langle x, y\rangle_A = \langle V(x), V(y)\rangle_B$ para todo $x, y \in A$. Note que el Teorema 2.2 implica que tal operador es continuo. Con esto se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Sea T un operador lineal densamente definido. Entonces:*

1. *T^* es cerrado.*
2. *T es cerrable si y sólo si $D(T^*)$ es denso, en cuyo caso $\bar{T} = T^{**}$.*
3. *Si T es cerrable, entonces $T^* = (\bar{T})^*$.*

Demostración. ([39], Teorema VIII.1).

Defínase un operador unitario V en $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ como:

$$V((x, y)) = (-y, x)$$

Por ser unitario, V cumple que $V(E^\perp) = (V(E))^\perp$ para cualquier subespacio E de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Sea T operador y suponga que $(x, y) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1$. Entonces se tiene la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned}(x, y) \in (V(\Gamma(T)))^\perp &\leftrightarrow \langle (x, y), (-T(z), z)\rangle_{\mathcal{H}_2\times\mathcal{H}_1} = 0 \quad \forall z \in D(T) \\ &\leftrightarrow \langle x, T(z)\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle y, z\rangle_{\mathcal{H}_1} \quad \forall z \in D(T) \leftrightarrow (x, y) \in \Gamma(T^*)\end{aligned}$$

Al ser $(V(\Gamma(T)))^\perp$ siempre cerrado, esto prueba 1).

Como $\Gamma(T)$ es subespacio lineal de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, se tiene que:

$$\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T)^{\perp\perp} = V(V(\Gamma(T))^\perp)^\perp = (V(\Gamma(T^*)))^\perp$$

Por 1) y el Lema 2.7, si T^* está densamente definido, $\Gamma(\bar{T})$ es gráfica de T^{**}.

Ahora suponga que $D(T^*)$ no está densamente definido, y que $w \in D(T^*)^\perp$. Por definición, $(w, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$, por lo que $V(\Gamma(T^*))^\perp = \overline{\Gamma(T)}$ no puede ser la gráfica de un operador y así T no es cerrable.

Finalmente, si T es cerrable:

$$T^* = \overline{T^*} = T^{***} = (\bar{T})^*$$

lo cual prueba 3). □

2.4. Producto tensorial de espacios de Hilbert

El producto tensorial de dos espacios vectoriales se puede entender desde un punto de vista puramente algebraico como un "espacio linearizante" para mapeos bilineales (Ryan [47]). Es decir, dados espacios vectoriales V, W sobre un campo real o complejo $\mathbb{K}$, el estudio de mapeos bilineales de $V \times W$ en $\mathbb{K}$ se puede traducir a estudiar mapeos lineales de $V \otimes W$ en $\mathbb{K}$.

De forma más rigurosa, sea $B(V \times W)$ el conjunto de mapeos bilineales de $V \times W$ en $\mathbb{K}$. Sobre este espacio, se pueden definir funcionales denotados como $x \otimes y$ (con $x \in V, y \in W$), y que actúan de la siguiente forma sobre cualquier $A \in B(V \times W)$:

$$(x \otimes y)(A) = A(x, y)$$

El espacio $V \otimes W$ se puede definir entonces como el espacio vectorial generado por todos estos funcionales (y que claramente es subespacio del dual $B(V \times W)^*$). Un elemento a de $V \otimes W$ tiene entonces la forma $a = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i \otimes y_i$ para algunos $n \in \mathbb{N}$ y $c_i \in \mathbb{K}$. Este elemento a actúa sobre cualquier $A \in B(V \times W)$ de la siguiente manera:

$$a(A) = (\sum_{i=0}^{n} c_i x_i \otimes y_i)(A) = \sum_{i=0}^{n} c_i A(x_i, y_i) \tag{11}$$

Por las definiciones anteriores, es fácil ver que $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$, y $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$, para todos $x_1, x_2, x \in V$, $y_1, y_2, y \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dado que $V \otimes W$ es a su vez un espacio vectorial, es natural tratar de encontrar una relación entre las bases de V y W con la base de este nuevo espacio. El siguiente lema proporciona aquella relación:

Lema 2.8. *Sean V y W espacios vectoriales, y E, F subespacios linealmente independientes de V y W respectivamente. Entonces:*

1. *El conjunto $\{x \otimes y | \, x \in E, y \in F\}$ es subconjunto linealmente independiente de $V \otimes W$*
2. *Si $\{e_i\}_{i \in I}, \{k_j\}_{j \in J}$ son bases para V, W respectivamente, entonces $\{e_i \otimes k_j\}_{i,j \in I \times J}$ es base de $V \otimes W$.*

Demostración. ([47], Proposición 1.1).

Suponga que se tiene $a = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i \otimes y_i = 0$, donde $x_i \in E$, $y_i \in F$. Sean ϕ, ψ dos funcionales lineales en V, W respectivamente, y sea la forma bilineal $A(x, y) = \phi(x)\psi(y)$. Luego se tiene:

$$0 = a(A) = \sum_{i=0}^{n} c_i A(x_i, y_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi(x_i)\psi(y_i) = \psi(\sum_{i=0}^{n} c_i \phi(x_i) y_i)$$

Como esto es cierto para todo $\psi \in Y^*$, se sigue por la independencia de F que $c_i\phi(x_i) = 0$ para todo $\phi \in X^*$. La independencia de E implica que x_i es diferente de cero, con lo cual se concluye que $c_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$. Esto prueba la primera parte. Finalmente, la segunda parte es cierta pues claramente $\{e_i \otimes k_j\}_{i,j \in I \times J}$ genera a $V \otimes W$ y, por 1), es linealmente independiente. □

Una consecuencia del lema anterior es que dado un espacio vectorial X sobre un campo $\mathbb{K}$, $X \otimes \mathbb{K} \simeq X$, bajo el isomorfismo $g : x \otimes k \mapsto kx$.

El producto tensorial sirve para linearizar mapeos bilineales de la siguiente forma. Sea $A : V \times W \to \mathbb{K}$ un mapeo bilineal. Se puede definir un mapeo $\tilde{A} : V \otimes W \to \mathbb{K}$ definido como $\tilde{A}(u) = u(A)$ para $u \in V \otimes W$. Se puede ver que $\tilde{A}$ es un funcional, y por tanto miembro de $(V \otimes W)^*$.

Sea f la función que asocia A con $\tilde{A}$. Se puede ver que f es lineal e inyectiva. Sea $\phi \in (V \otimes W)^*$. Para $x \in V$, $y \in W$, defínase ahora la función A tal que $A(x, y) = \phi(x \otimes y)$. Es claro entonces que $A \in B(V \times W)$ y además que $f(A) = \phi$. Es decir, f define un isomorfismo entre espacios vectoriales tal que:

$$B(V \times W) \simeq (V \otimes W)^*$$

En el caso particular donde V y W son espacios de Hilbert, cada tensor se puede identificar directamente con un elemento de $B(V \times W)$. Para ver esto, primero se nota que existe un monomorfismo entre $V^* \otimes W^*$ y $B(V \times W)$, dado por $h : \psi \otimes \chi \to A_{\psi,\chi}$ (donde $\psi \in V^*$, $\chi \in W^*$ y $A_{\psi,\chi}$ es un mapeo bilineal definido como $A_{\psi,\chi}(x, y) = \psi(x)\chi(y)$, $x \in V, y \in W$). Como el dual continuo es un subespacio vectorial estrictamente contenido en el dual algebraico, y por el teorema de representación de Riesz, se concluye que:

$$V \otimes W \simeq V' \otimes W' \subseteq V^* \otimes W^* \subseteq B(V \times W)$$

Además, si $z, x \in V$, entonces $z(x) = \langle z, x \rangle_V$. Esto motiva a dar la siguiente definición de tensor para espacios de Hilbert:

Definición 2.5. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Para cada $h_1 \in \mathcal{H}_1$ y $h_2 \in \mathcal{H}_2$, el tensor $h_1 \otimes h_2$ es un mapeo bilineal que actúa sobre un argumento $(r_1, r_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ de la siguiente manera:

$$(h_1 \otimes h_2)(r_1, r_2) = \langle h_1, r_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle h_2, r_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} \tag{12}$$

Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los tensores anteriormente definidos. En concordancia con la presencia de estructura adicional, normalmente se define el producto tensorial de espacios de Hilbert como el producto tensorial algebraico ya visto, pero completado analíticamente en base a la topología generada por un producto interno. El siguiente lema muestra que, en efecto, se puede definir en $\mathcal{E}$ tal producto interno.

Lema 2.9. *La siguiente función, extendida de forma lineal a $\mathcal{E}$:*

$$\langle h_1 \otimes h_2, g_1 \otimes g_2 \rangle = \langle h_1, g_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle h_2, g_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} \tag{13}$$

es un producto interno.

Demostración. ([39], Proposición 1 de Sección II.4).

La operación definida anteriormente es linear en el primer argumento y simétrica conjugada (es decir, $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$ para todo a, b en $\mathcal{E}$). Note que por la definición, $\langle h, g_1 \otimes g_2 \rangle = h(g_1, g_2)$ para cualquier $h \in \mathcal{E}$ y donde la evaluación del mapeo está de acuerdo con la Definición 2.5.

Falta entonces ver que la operación está bien definida (no depende de la representación del elemento en $\mathcal{E}$), y que es positiva definida. Para la primera parte, es suficiente demostrar (por linealidad) que $\langle a, b \rangle = 0$ para todo $a \in \mathcal{E}$ y b que sea igual al 0-tensor. En efecto, dada cualquier representación de a (de la forma $a = \sum_{i=0}^{n} c_i g_i \otimes h_i$ con $c_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, g_i \in \mathcal{H}_1$ y $h_i \in \mathcal{H}_2$) en $\mathcal{E}$, se cumple:

$$\langle \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \otimes h_i, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\langle b, g_i \otimes h_i \rangle} = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \overline{b(g_i, h_i)} = 0 \tag{14}$$

Esto demuestra que está bien definido. Para mostrar que es positivo definido, sea $a = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \otimes h_i$. Sea $M_1 = \overline{\text{span}}(\{g_i\})$ y $M_2 = \overline{\text{span}}(\{h_i\})$. Luego existen dos bases ortonormales, $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_1}$ y $\{\phi_j\}_{j=1}^{N_2}$, para M_1 y M_2 respectivamente. En consecuencia,

$$a = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} \psi_i \otimes \phi_j$$

Es fácil ver, como consecuencia de la ortonormalidad de la base, que $\langle a, a \rangle = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} |c_{ij}|^2$. Esto demuestra que la operación anterior es positiva definida, y por ende es un producto interno. □

Teniendo ya un producto interno en este espacio, la siguiente definición es natural:

Definición 2.6. Se define el producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ como el espacio de Hilbert obtenido al completar $\mathcal{E}$ con el producto interno del Lema 2.9.

Note que la norma derivada del producto interno es tal que $\|h_1 \otimes h_2\| = \|h_1\|_{\mathcal{H}_1} \|h_2\|_{\mathcal{H}_2}$. El siguiente resultado da una caracterización útil de un espacio denso en el producto tensorial.

Lema 2.10. *Sean A, B subespacios densos de los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ respectivamente. En este caso, $A \otimes B := \text{span}\{\phi \otimes \psi | \, \phi \in A, \psi \in B\}$ es denso en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$*

Demostración. Sea $w \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Luego existe una sucesión $\sum_{i=1}^{n} \psi_i \otimes \phi_i$, $\psi_i \in \mathcal{H}_1$, $\phi_i \in \mathcal{H}_2$, tal que

$$w = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \psi_i \otimes \phi_i$$

A su vez, existen sucesiones $\{\psi_i'^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ y $\{\phi_i'^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tales que $\psi_i'^k \to \psi_i$ y $\phi_i'^k \to \phi_i$ para cada $1 \leq i \leq n$ cuando $k \to \infty$. Para un n fijo, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^{n} \psi_i \otimes \phi_i - \sum_{i=1}^{n} \psi_i'^k \otimes \phi_i'^k \right\|_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|\psi_i\|_{\mathcal{H}_1} \|\phi_i - \phi_i'^k\|_{\mathcal{H}_2} + \|\psi_i - \psi_i'^k\|_{\mathcal{H}_1} \|\phi_i'^k\|_{\mathcal{H}_2} \end{aligned}$$

El cual tiende a cero cuando $k \to \infty$. Enseguida se tiene:

$$\left\| w - \sum_{i=1}^{n} \psi_i'^k \otimes \phi_i'^k \right\|_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2} \leq \left\| w - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \otimes \phi_i \right\|_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2} + \left\| \sum_{i=1}^{n} \psi_i \otimes \phi_i - \sum_{i=1}^{n} \psi_i'^k \otimes \phi_i'^k \right\|_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}$$

Ya que la parte derecha de la desigualdad tiende a cero, esto implica el resultado. □

Por los Lemas 2.8 y 2.10, si tanto $\mathcal{H}_1$ como $\mathcal{H}_2$ son separables, entonces $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ también lo es. En el resto del trabajo se supondrá que los espacios de Hilbert son separables.

En algunos casos especiales, se puede identificar el producto tensorial con otros espacios más simples, como es el caso de los espacios L^2:

Teorema 2.4. *Sean (M_1, μ_1) y (M_2, μ_2) espacios de medida tales que $L^2(M_1, d\mu_1)$, $L^2(M_2, d\mu_2)$ sean separables, y sea $f \in L^2(M_1, d\mu_1)$, $g \in L^2(M_2, d\mu_2)$. Entonces:*

1. *Bajo la isometría $h_1 : f \otimes g \mapsto fg$, se tiene que $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes L^2(M_2, d\mu_2) \simeq L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$.*
2. *Si $\mathcal{G}$ es un espacio de Hilbert separable y $\phi \in \mathcal{G}$, entonces bajo la isometría $h_2 : f \otimes \phi \mapsto f\phi$, se tiene que $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes \mathcal{G} \simeq L^2(M_1, d\mu_1; \mathcal{G})$.*
3. *$L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2) \simeq L^2(M_1, d\mu_1; L^2(M_2, d\mu_2))$.*

Demostración. ([39], Teorema 11.10).

1. Sean $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ bases de $L^2(M_1), L^2(M_2)$ respectivamente. Entonces $\{\phi_k\psi_j\}_{(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal en $L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$, pues:

$$\iint_{M_1\times M_2} \phi_{k_1}(x)\phi_{k_2}(x)\psi_{j_1}(y)\psi_{j_2}(y)\, d\mu_1 d\mu_2 = \int_{M_1} \phi_{k_1}(x)\phi_{k_2}(x)\, d\mu_1 \int_{M_2} \psi_{j_1}(y)\psi_{j_2}(y)\, d\mu_2$$

El cual es igual a cero excepto cuando $k_1 = k_2$ y $j_1 = j_2$, en cuyo caso la integral es igual a 1. Para ver que es una base, sea $f \in \{\phi_k \psi_j\}^{\perp}$; es decir:

$$\iint_{M_1 \times M_2} f(x,y)\phi_k(x)\psi_j(y)\, d\mu_1 d\mu_2 = 0$$

para todo k, $j \in \mathbb{N}$. Usando Fubini se tiene:

$$\int_{M_2} \left(\int_{M_1} f(x,y)\phi_k(x)\, d\mu_1 \right) \psi_j(y)\, d\mu_2 = 0$$

Como $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de M_2, entonces

$$\left(\int_{M_1} f(x,y)\phi_k(x)\, d\mu_1 \right) = 0$$

para casi todo y μ_2-casi seguramente. Fuera de este conjunto de medida cero, $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forma una base de M_1, por lo que $f = 0$ para casi todo x μ_1-casi seguramente. Se concluye entonces que $f(x,y) = 0 \quad \mu_1 \otimes \mu_2-$casi seguramente. Esto significa que span $\{\phi_k \psi_j\}_{(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es denso en $L^2(M_1 \times M_2)$. Por su parte, el mapeo biyectivo, lineal y continuo $h_1 : \phi_k \otimes \psi_j \mapsto \phi_k \psi_j$ relaciona las bases de ambos espacios, por lo que es una isometría.

2. Se sabe (consecuencia del Lema 2.4) que si $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de $\mathcal{G}$, entonces el conjunto span $\{f\phi_k |\, k \in \mathbb{N}, f \in L^2(M_1)\}$ es denso en $L^2(M_1, d\mu_1; \mathcal{G})$. A su vez, span $\{f \otimes \phi_k |\, k \in \mathbb{N}, f \in L^2(M_1)\}$ es denso en $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes \mathcal{G}$. Por lo tanto, el mapeo lineal $h_2 : f \otimes \phi_k \mapsto f\phi_k$ se puede extender de forma única en ambos espacios a una isometría.

3. Se sigue inmediatamente de 1) y 2).

□

2.5. Producto tensorial de operadores

Si se tienen dos operadores lineales, $A : \mathcal{H}_1 \to V$ y $B : \mathcal{H}_2 \to W$, donde V, W, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert, entonces existe una forma canónica de generar un nuevo operador definido sobre $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, el cual es llamado producto tensorial de A y B ($A \otimes B$). Para asegurar la unicidad, se pedirá que ambos operadores estén densamente definidos (con dominios $D(A)$ y $D(B)$, respectivamente). Por el Lema 2.10, el conjunto $D(A) \otimes D(B) :=$ span $\{\phi \otimes \psi |\, \phi \in D(A), \psi \in D(B)\}$ es denso en $V \otimes W$. Para cualquier $\phi \otimes \psi \in D(A) \otimes D(B)$, se define $A \otimes B$ como:

$$(A \otimes B)(\phi \otimes \psi) = A(\phi) \otimes B(\phi) \tag{15}$$

y se extiende de forma lineal. Esta definición tiene sentido, como se ve en la siguiente proposición.

Lema 2.11. *El operador $A \otimes B$ está bien definido.*

Demostración. ([39], Sección VIII.10).

Sea $f \in D(A) \otimes D(B)$, con dos representaciones:

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_i \, \phi_i \otimes \psi_i = \sum_{j=1}^{n_2} d_j \, \phi'_j \otimes \psi'_j$$

Usando Gram-Schmidt, se puede encontrar una base $\{e_i\}_{i=1}^{t_1}$ para el espacio $S_1 = \text{span}\{\{\phi_i\}_{j=1}^{n_1} \bigcup \{\phi'_j\}_{j=1}^{n_2}\}$. De igual forma, sea $\{k_j\}_{j=1}^{t_2}$ una base para el espacio $S_2 = \text{span}\{\{\psi_i\}_{i=1}^{n_1} \bigcup \{\psi'_j\}_{i=1}^{n_2}\}$. Luego, se tiene que para cada i:

$$\phi_i \otimes \psi_i = \sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} \alpha^i_{m,l} \, e_m \otimes k_l, \quad \phi'_i \otimes \psi'_i = \sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} \beta^i_{m,l} \, e_m \otimes k_l$$

Lo cual implica:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} c_i \, \alpha^i_{m,l} \, e_m \otimes k_l = \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} d_i \, \beta^i_{m,l} \, e_m \otimes k_l \rightarrow$$
$$\sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} c_i \, \alpha^i_{m,l} \right) e_m \otimes k_l = \sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n_2} d_i \, \beta^i_{m,l} \right) e_m \otimes k_l$$

De la igualdad anterior se sigue que, para cada m, l:

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_i \, \alpha^i_{m,l} = \sum_{i=1}^{n_2} d_i \, \beta^i_{m,l}$$

Aplicando el operador en ambas representaciones, se llega a:

$$(A \otimes B) \left(\sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} c_i \, \alpha^i_{m,l} \right) e_m \otimes k_l \right) = \sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} c_i \, \alpha^i_{m,l} \right) A(e_m) \otimes B(k_l)$$
$$= \sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n_2} d_i \, \beta^i_{m,l} \right) A(e_m) \otimes B(k_l) = (A \otimes B) \left(\sum_{m=1}^{t_1} \sum_{l=1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n_2} d_i \, \beta^i_{m,l} \right) e_m \otimes k_l \right)$$

Lo cual prueba la proposición. □

Teniendo el operador $A \otimes B$ definido arriba, es natural investigar cuándo es posible extender su dominio. El siguiente lema muestra que es suficiente garantizarlo si tanto A como B son cerrables.

Lema 2.12. *Sean $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow V$ y $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow W$ operadores lineales cerrables densamente definidos. Entonces $A \otimes B$ también es cerrable.*

Demostración. ([39], Sección VIII.10).

El Teorema 2.3 indica que $D(A^*)$ es denso en V y $D(B^*)$ es denso en W. Por tanto, $D(A^*) \otimes D(B^*)$ es denso en $V \otimes W$. Sea $g \in D(A^*), h \in D(B^*)$. Luego, para cualquier $x \in D(A), y \in D(B)$ se cumple:

$$\langle g \otimes h, (A \otimes B)(x \otimes y)\rangle_{V\otimes W} = \langle g, A(x)\rangle_V \langle h, B(y)\rangle_W$$
$$= \langle A^*(g), x\rangle_{\mathcal{H}_1} \langle B^*(h), y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle (A^* \otimes B^*)(g \otimes h), x \otimes y\rangle_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2}$$

Por definición, esto implica que $D(A^*) \otimes D(B^*) \subseteq D((A \otimes B)^*)$, lo cual significa que $D((A \otimes B)^*)$ es denso en $V \otimes W$. De nuevo por Teorema 2.3, $A \otimes B$ debe ser cerrable. □

Normalmente se usa la misma notación $A \otimes B$ para la cerradura del operador. El siguiente lema muestra que la continuidad también se hereda a los productos tensoriales:

Lema 2.13. *Si $A : \mathcal{H}_1 \to V$ y $B : \mathcal{H}_2 \to W$ son operadores lineales acotados densamente definidos, entonces $A \otimes B$ es acotado también.*

Demostración. ([39], Sección VIII.10).

Por Lema 2.5, se puede suponer que A y B están definidos en todo $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Sean $I_{\mathcal{H}_1}$, I_W los operadores identidad en los espacios respectivos. Esto permite descomponer al operador $A \otimes B$ como $(A \otimes I_W)(I_{\mathcal{H}_1} \otimes B)$.

Sea $S = \{\phi_i \otimes \psi_j\}_{i,j\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ una base ortonormal para $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Luego span$(S)$ es denso en este espacio. Sea $g \in \text{span}(S)$ de la forma:

$$g = \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} c_{kl}\, \phi_k \otimes \psi_l$$

Entonces:

$$\|(I_{\mathcal{H}_1} \otimes B)(g)\|_{\mathcal{H}_1\otimes W} = \left\|\sum_{k=1}^{n_1} \phi_k \otimes \left(\sum_{l=1}^{n_2} c_{kl}\, B(\psi_l)\right)\right\|_{\mathcal{H}_1\otimes W}$$

Por la ortogonalidad de los términos ϕ_k, se sigue:

$$\|(I_{\mathcal{H}_1} \otimes B)(g)\|^2_{\mathcal{H}_1\otimes W} = \sum_{k=1}^{n_1}\left\|\sum_{l=1}^{n_2} c_{kl}\, B(\psi_l)\right\|^2_W = \sum_{k=1}^{n_1}\left\|B\left(\sum_{l=1}^{n_2} c_{kl}\, \psi_l\right)\right\|^2_W$$

La continuidad de B y la ortogonalidad de los términos ψ_l implican:

$$\left\|B\left(\sum_{l=1}^{n_2} c_{kl}\, \psi_l\right)\right\|^2_W \leq M^2 \left\|\sum_{l=1}^{n_2} c_{kl}\, \psi_l\right\|^2_W = M^2 \sum_{l=1}^{n_2} |c_{kl}|^2$$

para alguna constante real M. Sustituyendo en la ecuación anterior es fácil ver que:

$$\|(I_{\mathcal{H}_1} \otimes B)(g)\|^2_{\mathcal{H}_1 \otimes W} \leq M^2 \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} |c_{kl}|^2 = M^2 \|g\|^2_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$$

Por la densidad de span(S), se concluye que $I_{\mathcal{H}_1} \otimes B$ es acotado con constante M para toda $g \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Usando argumentos idénticos, se obtiene (para cualquier $h \in \mathcal{H}_1 \otimes W$):

$$\|(A \otimes I_W)(h)\|^2_{V \otimes W} \leq N^2 \|h\|^2_{\mathcal{H}_1 \otimes W}$$

Aquí, N es también una constante real. Finalmente, juntando ambas desigualdades se llega a:

$$\|(A \otimes B)(g)\|_{V \otimes W} \leq MN \|g\|_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$$

Lo cual concluye la prueba. □

Como se ve en la demostración del Lema 2.12, si $g \in D(A^*) \otimes D(B^*)$, entonces $(A^* \otimes B^*)(g) = (A \otimes B)^*(g)$. Los Lemas 2.5, 2.6 y 2.13 permiten concluir lo siguiente:

Lema 2.14. *Si A y B son operadores lineales continuos densamente definidos, entonces $(A \otimes B)^*$ también lo es. Además, en este caso se cumple $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.*

2.6. Producto tensorial simétrico

Dados f, $g \in \mathcal{H}$, en general no es cierto que $f \otimes g = g \otimes f$. A veces, sin embargo, es útil trabajar con espacios que no dependan del orden específico de los factores. Para ello se puede definir la simetrización de un producto tensorial de espacios de Hilbert, el cual contiene elementos que no dependen del orden de factorización específica que tengan. Es natural considerar entonces al grupo simétrico de orden n (S_n), definido como el conjunto de todas las permutaciones σ en un conjunto de n elementos. Es conocido que $|S_n| = n!$.

Sea $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ de la forma $f = f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n$. Sobre estos tensores, se puede definir al operador $U_{\sigma,n}$ como:

$$U_{\sigma,n}(f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n) = f_{\sigma(1)} \otimes f_{\sigma(2)} \ldots \otimes f_{\sigma(n)}$$

para algún $\sigma \in S_n$. Este operador se puede usar para definir la simetrización de f:

Definición 2.7. Sea $f = f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n$. La *simetrización de f* se denota como $\mathrm{sim}(f) = \widetilde{f} = f_1 \odot f_2 \odot \ldots \odot f_n$ y se define como:

$$\mathrm{sim}(f) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} U_{\sigma,n}(f)$$

Este operador se puede extender linealmente a R, el conjunto de combinaciones lineales de funciones de la forma $f = f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n$. Como R es denso en $\mathcal{H}^{\otimes n}$ y la simetrización acotada, $\mathrm{sim}(\cdot)$ se puede extender continuamente a todo $\mathcal{H}^{\otimes n}$ por el Lema 2.5. El siguiente lema da otra caracterización de los tensores simétricos para espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ separables:

Lema 2.15. *Sea $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$, y $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}\}_{i_1,\ldots,i_n}$ una base para $\mathcal{H}^{\otimes n}$ tal que:*

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$$

Entonces f es simétrico si y sólo si $a_{i_1,\ldots,i_n} = a_{\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}}$ para todo $\sigma \in S_n$, y donde se define: $\sigma\{i_1,\ldots,i_n\} = \{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)}\}$

Demostración. Primero se da una caracterización de la simetrización de f. Sea P el conjunto de clases de equivalencia sobre $\mathbb{N}^n$ con la relación: $i_1,\ldots,i_n \sim j_1,\ldots,j_n \leftrightarrow j_1,\ldots,j_n = \sigma\{i_1,\ldots,i_n\}$ para algún $\sigma \in S_n$. Cada clase de equivalencia se denota entonces como $[i_1,\ldots,i_n]$ para algún representante $(i_1,\ldots,i_n)$. Además, se usará la siguiente notación:

$$e^{\otimes\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}} := e_{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes e_{\sigma(i_n)}$$

Ahora, se puede reordenar la suma anteriormente definida para obtener:

$$f = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}} e^{\otimes\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}}$$

(se suma sobre todos los representantes únicos $(i_1,\ldots,i_n)$). Entonces, para cualquier suma truncada a N se tiene por linealidad:

$$\mathrm{sim}\left(\sum_{(i_1,\ldots,i_n)}^{N} \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}} e^{\otimes\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}}\right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)}^{N} \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}} \mathrm{sim}(e^{\otimes\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}})$$

Por la definición de $\mathrm{sim}(\cdot)$ es fácil ver que:

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)}^{N} \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}} \mathrm{sim}(e^{\otimes\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}}) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)}^{N} b_{(i_1,\ldots,i_n)} \sum_{\sigma\in S_n} e^{\otimes\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}}$$

y donde se define:

$$b_{(i_1,\ldots,i_n)} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}}$$

Por la continuidad de $\mathrm{sim}(\cdot)$, se tiene:

$$\mathrm{sim}(f) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} b_{(i_1,\ldots,i_n)} \sum_{\sigma\in S_n} e^{\otimes\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}}$$

Si f es simétrico, entonces $f = \mathrm{sim}(f)$, lo cual sucede si y sólo si $b_{(i_1,\ldots,i_n)} = a_{\sigma\{i_1,\ldots,i_n\}}$ para todo $\sigma \in S_n$. Esto concluye la demostración. □

El siguiente resultado será útil en capítulos posteriores:

Lema 2.16. *Sean f, $g \in \mathcal{H}^{\otimes n}$. Si f es simétrico, entonces:*

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} = \langle f, \widetilde{g}\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$$

Demostración. Por simplicidad se asume el caso $n = 2$ (los otros casos son análogos). Si $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ es una base para $\mathcal{H}^{\otimes 2}$, entonces se puede descomponer f, g tal que:

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \left\langle \sum_{i,j} a_{ij}\, e_i \otimes e_j, \sum_{k,l} b_{kl}\, e_k \otimes e_l \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \sum_{i,j}\sum_{k,l} a_{ij} b_{kl}\, \langle e_i, e_k\rangle_{\mathcal{H}} \langle e_j, e_l\rangle_{\mathcal{H}}$$

Por la ortonormalidad de la base y el Lema anterior, se concluye:

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} + \sum_{j,i} a_{ij} b_{ji}\right) = \langle f, \widetilde{g}\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}$$

□

Se llama entonces *producto tensorial simétrico* $\mathcal{H}^{\odot n}$ al conjunto de todos los elementos f en $\mathcal{H}^{\otimes n}$ tales que $\mathrm{sim}(f) = f$ (de acuerdo con Nualart y Nualart [34], Guichardet [16]; existen otras definiciones de $\mathcal{H}^{\odot n}$). También se puede definir como la completación de L, donde L es el conjunto de todas las combinaciones lineales de tensores simétricos $f = f_1 \odot f_2 \odot \ldots \odot f_n$. Es fácil ver que este espacio es a su vez de Hilbert, bajo el producto interno heredado de $\mathcal{H}^{\otimes n}$:

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{\odot n}} = n!\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$$

para todo f, $g \in \mathcal{H}^{\odot n}$. Si f, g son productos simétricos, se tiene la fórmula:

$$\langle f_1 \odot \cdots \odot f_n, g_1 \odot \cdots \odot g_n\rangle_{\mathcal{H}^{\odot n}} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} \left\langle f_i, g_{\sigma(i)}\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

La norma inducida por el producto interno es entonces:

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{\odot n}} = \sqrt{n!}\|f\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$$

Se puede construir una base en este espacio tensorial simétrico. Para ello, defínase primero al conjunto de sucesiones $\Lambda = \{(a_1, a_2, \ldots) |\, a_i \neq 0 \text{ para un número finito de } i\text{'s}\}$. Sea $a \in \Lambda$. Entonces las siguientes definiciones:

$$a! := \prod_{i=1}^{\infty} a_i! \quad |a| := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{16}$$

tienen sentido.

Lema 2.17. *Sea $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base para $\mathcal{H}$. El conjunto de todos los elementos de la forma:*

$$\frac{1}{\sqrt{a!}}\operatorname{sim}\left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} e_i^{\otimes a_i}\right),$$

donde $a \in \Lambda$ y $|a| = n$, es una base para $\mathcal{H}^{\odot n}$.

Demostración. ([16], Capítulo 2). □

Dado $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal acotado entre espacios de Hilbert, se puede a su vez definir el producto simétrico de A, denotado como $A^{\odot n}$:

Lema 2.18. *Todo operador lineal continuo $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ induce un operador continuo $A^{\odot n} : \mathcal{H}_1^{\odot n} \to \mathcal{H}_2^{\odot n}$, tal que se cumple:*

$$A^{\odot n}(f_1 \odot \cdots \odot f_n) = A(f_1) \odot \cdots \odot A(f_n)$$

Además, si M es una cota para A, M^n es una cota para $A^{\odot n}$

Demostración. En general se sigue de los resultados ya vistos en la sección anterior. Para consultar detalles, ver Janson [20], Proposición E.21. □

3. Integración estocástica y cálculo de Malliavin

El propósito de este capítulo es presentar los conceptos necesarios para generar una teoría de integración estocástica, en el caso particular donde el integrador es un movimiento browniano fraccionario B^H. En primer lugar, se discute el cálculo estocástico clásico y sus limitaciones. Posteriormente, se exponen conceptos del cálculo de Malliavin, una versión estocástica del cálculo de variaciones que ha permitido extender la teoría clásica a procesos que no sean semimartingalas, y el cual es la base para los resultados expuestos en los siguientes capítulos.

3.1. El cálculo estocástico clásico: la integral de Itô y la fórmula de Itô

En 1954, Kiyosi Itô publica su artículo *Stochastic Integral* [19], en donde da por primera vez un concepto trabajable de integral estocástica. En particular, da un significado al funcional dW, donde W es un movimiento browniano; esto permite a su vez interpretar ecuaciones diferenciales estocásticas respecto a W, y dar algunas soluciones a las mismas. Tras Itô, el concepto de integral estocástica se fue extendiendo gradualmente a una mayor clase de integradores: martingalas continuas, martingalas cuadrado integrables, y finalmente semimartingalas (Protter [38]). A continuación se dará un breve recuento de la integral de Itô y las principales dificultades en definirla.

En primer lugar, sea el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$, donde la filtración es *usual* en el sentido que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{F}_0$ incluye a los elementos P-nulos de $\mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$ para todo $t \in [0, T)$.

Es natural, como primera aproximación, tratar de definir la integral estocástica con respecto a un proceso estocástico X en el sentido de Riemann-Stieltjes; es decir, para cada $\omega \in \Omega$ y h proceso estocástico arbitrario que sea continuo por trayectorias, tratar de calcular el límite:

$$S(\omega) = \lim_{|\pi_n|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(t_k, \omega\right)\left(X\left(t_{k+1}, \omega\right) - X\left(t_k, \omega\right)\right)$$

Sin embargo, este límite no existe para casi toda ω, a menos que $X(\cdot, \omega)$ sea de 1-variación finita:

Lema 3.1. *Si S es finito para casi toda $\omega \in \Omega$ y para toda h continua por trayectorias en $[0, T]$, entonces X es de 1-variación acotada casi seguramente.*

Demostración. ([38], Teorema 56).

Sea H el espacio de Banach de todas las funciones continuas bajo la norma del supremo. Sea una colección refinante de particiones π_n de $[0, T]$ tal que $\lim_{n\to\infty} |\pi_n| = 0$, y sea el operador T_n definido para $h \in H$ como:

$$T_n(h) = \sum_{k=1}^{n} h\left(t_{k-1}\right)\left(X\left(t_k, \omega\right) - X\left(t_{k-1}, \omega\right)\right)$$

Sea $\omega \in \Omega$ tal que se cumpla:

$$\lim_{n\to\infty} |T_n(h)| < \infty$$

para cada $h \in H$. Se puede encontrar entonces un $r \in H$ tal que $r(t_{k-1}) = \operatorname{sgn}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$ y $\|r\|_H = 1$. Por consiguiente:

$$T_n(r) = \sum_{k=1}^{n} |X(t_k, \omega) - X(t_{k-1}, \omega)|$$

Por definición de la norma del operador T_n, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} |X(t_k, \omega) - X(t_{k-1}, \omega)| \leq \sup_{h \in H} \frac{|T_n(h)|}{\|h\|_H} = \|T_n\|$$

Tomando el supremo sobre n en ambas partes de la desigualdad y usando la notación de la Definición 1.5, se concluye que:

$$\mathcal{V}_1(X(\cdot, \omega)) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$$

Por la elección de ω, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(h)| < \infty$. Finalmente, el uso del Teorema de Banach-Steinhaus ([44], Teorema 5.8), permite concluir que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. □

Como muchos procesos tienen 1-variación infinita para casi todo ω (por ejemplo, el movimiento browniano fraccionario B^H), integrales estocásticas en el sentido de Riemann serían de limitada utilidad. No obstante, se puede tratar de definir un límite más débil (en probabilidad) de forma análoga a la anterior, tal que no haya tanta dependencia de las trayectorias:

$$S = \underset{|\pi_n| \to 0}{P\text{-}\lim} \sum_{k=0}^{n-1} h(t_k) (X(t_{k+1}) - X(t_k)) \tag{17}$$

Sin embargo, esto tampoco da resultado:

Lema 3.2. *Sea X proceso estocástico tal que S, el proceso definido en la Igualdad (17), sea finito casi seguramente para todo h continuo por trayectorias. Entonces $\mathcal{V}_1(X(\cdot, \omega)) < \infty$ para casi toda $\omega \in \Omega$.*

Demostración. ([38], Sección 1.8). □

El resultado anterior deja en claro que no se puede definir una integral estocástica para todo h con trayectorias continuas, si el integrador no tiene trayectorias de variación acotada. Itô resolvió el problema al limitar el integrando a procesos *no anticipantes*; en cierta forma, procesos que no pueden "ver" el futuro. Si el integrando es un movimiento browniano, esto se puede extender a todos los integrandos medibles y adaptados. Sin embargo, en general esto no es cierto para otro tipo de integradores, e históricamente fue difícil distinguir el espacio más general de integrandos donde tuviera sentido la integral estocástica (Jarrow y Protter [21]). La solución es pedir integrandos *predecibles*, cuya definición es la siguiente:

Definición 3.1. Sea X un proceso estocástico con valores reales definido sobre $[0,T]\times\Omega$. La *σ-álgebra predecible* $\mathcal{P}$ es la σ-álgebra generada por el conjunto:

$$P_T = \{(s,t]\times B \,|\, 0\le s<t\le T \text{ y } B\in\mathcal{F}_s\}\cup\{\{0\}\times C \,|\, C\in\mathcal{F}_0\}$$

Si X es $\mathcal{P}$-medible, se dice que X_t es predecible.

Se ve que $\mathcal{P}\subset\mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}$ en general. Fue Meyer quien se dio cuenta de la importancia de estos procesos, al demostrar no solo que se pueden integrar estocásticamente, sino que la integral de Riemann-Stieltjes coincide con la integral estocástica con respecto a semimartingalas, si y sólo si el integrando es predecible (para integradores con 1-variación finita) [29].

Se dice que un proceso estocástico es càdlàg si tiene trayectorias continuas a la derecha y con límites a la izquierda. De igual manera, es càglàd si tiene trayectorias continuas a la izquierda y límites a la derecha. Se denota como $\mathbb{D}$ al conjunto de procesos adaptados y càdlàg, y como $\mathbb{L}$ al conjunto de procesos adaptados y càglàd. El siguiente lema da una caracterización útil de $\mathcal{P}$:

Lema 3.3. *$\mathcal{P}$ es la σ-álgebra generada por los procesos en $\mathbb{L}$.*

Demostración. (Chung y Williams [8], Teorema 3.1).

Sea $R\in\mathbb{L}$. Se puede definir un nuevo proceso R^n como:

$$R^n_t = \begin{cases} R_0, & \text{si } t=0 \\ R_{k2^{-n}}, & \text{si } t\in(k2^{-n},(k+1)2^{-n}], k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \text{ y} \quad t<T \end{cases}$$

Sea $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Entonces:

$$(R^n)^{-1}(A) = (\{0\}\times R_0^{-1}(A))\cup(\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(k2^{-n},(k+1)2^{-n}\right]\times R^{-1}_{k2-n}(A))$$

Por la Definición 3.1, $(R^n_t)^{-1}(A)\in\mathcal{P}$. Como $t-2^{-n}\le k2^{-n}<t$, la continuidad a la izquierda implica que $\lim_{n\to\infty}R^n_t = R_t$ casi seguramente. Luego R_t es también predecible, y por consiguiente $\sigma(\mathbb{L})\subseteq\mathcal{P}$.

Finalmente, sea $(s,t]\times B\in P_T$, donde P_T tiene el concepto dado en la Definición 3.1. Entonces la indicadora $\mathbf{1}_{(s,t]\times B}$ es miembro de $\mathbb{L}$, por lo que $\mathcal{P}=\sigma(P_T)\subseteq\sigma(\mathbb{L})$. □

Se definirá ahora la integral para el caso particular de un integrador M que sea martingala en $\mathcal{F}_t$ L^2-integrable y continuo a la derecha. Muchos procesos estocásticos comunes son de este tipo; el movimiento browniano clásico es claramente un ejemplo. Se considera ahora el siguiente conjunto de procesos:

Definición 3.2. Sean $0 = T_0 < \ldots < T_{n+1} = T$, donde cada T_k es un tiempo de paro (es decir, $[T_k \leq t] \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in [0,T]$). Estas desigualdades son ciertas ω por ω. Defínase además la sub-σ-álgebra $\mathcal{F}_{T_k}$ como el conjunto:

$$\mathcal{F}_{T_k} = \{A \in \mathcal{F} |\, A \cap [T_k \leq t] \in \mathcal{F}_t, \text{ para todo } \quad t \in [0,T]\}$$

Con esto, se dice que un proceso $G : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ es *simple adaptado* si es de la forma:

$$G = G_0\, \mathbf{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{k=0}^{n} G_k\, \mathbf{1}_{(T_k, T_{k+1}]}(s),$$

y donde, para cada T_k en la partición, $G_k : \Omega \to \mathbb{R}$ es finita casi seguramente y es $\mathcal{F}_{T_k}$-medible.

Se denota como $\mathcal{S}$ al conjunto de todos los procesos simples adaptados. Por el Lema 3.3, cualquier $G \in \mathcal{S}$ es predecible. Podemos definir entonces la *integral estocástica* de G con respecto a M como:

$$I_M(G) = \int_0^T G\, dM = G_0\, M_0 + \sum_{k=0}^{n} G_{T_k}\, (M_{T_{k+1}} - M_{T_k}) \tag{18}$$

Como está definido por trayectorias, la integral es la misma sin importar la representación de G. Es claro además que este operador es lineal.

Ahora se generalizará esta integral. En primer lugar, se definirá una nueva medida μ_M sobre $\mathcal{P}$. Para ello, sea Z un proceso adaptado tal que $Z_t \in L^1(\Omega)$ para cada $t \in [0,T]$. Entonces se puede construir una función λ_Z sobre los conjuntos $(s,t] \times C \in P_T$ (el mismo conjunto usado en la Definición 3.1), tal que se cumpla:

$$\begin{aligned} \lambda_Z((s,t] \times C) &= E\left[\mathbf{1}_C (Z_t - Z_s)\right] \\ \lambda_Z(\{0\} \times C) &= 0 \end{aligned}$$

y además:

$$\lambda_Z(A \cup C) = \lambda_Z(A) + \lambda_Z(C)$$

si $A, C \in P_T$ con $A \cap C = \emptyset$. Se puede demostrar ([8], Sección 2.8) que si M es una martingala L^2-integrable y continua a la derecha, entonces $\lambda_{M^2}(S) \geq 0$ para todo $S \in P_T$. Además, en este caso λ_{M^2} se puede extender a todo $\mathcal{P}$; a esta función extendida se le denomina μ_M y es una medida σ-finita, también llamada medida de Doléans. En el caso $M = B^{1/2}$, la medida de Doléans es especialmente simple:

Lema 3.4. *Si $M = B^{1/2} = B$, entonces $\mu_M = \lambda \otimes P$.*

Demostración. ([8], Sección 2.4).

Sea $(s,t]\times F \in P_T$. Como los incrementos son independientes y $F \in \mathcal{F}_s$, se sigue:

$$\begin{aligned}\lambda_{B^2}((s,t]\times F) &= E\left[\mathbf{1}_F\left(B_t^2 - B_s^2\right)\right] = E\left[\mathbf{1}_F\left(B_t - B_s\right)^2\right] = E\left[E\left[\mathbf{1}_F\left(B_t - B_s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\right] \\ &= E\left[\mathbf{1}_F E\left[\left(B_t - B_s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\right] = E\left[\mathbf{1}_F E\left[\left(B_t - B_s\right)^2\right]\right] = (t-s)P(F) \\ &= (\lambda\otimes P)((s,t]\times F)\end{aligned}$$

Como además $\lambda_{B^2}(\{0\}\times F) = 0 = (\lambda\otimes P)(\{0\}\times F)$, el resultado se sigue por la unicidad de la extensión sobre $\mathcal{P}$. □

La medida de Doléans permite ampliar la integral estocástica a integrandos en el espacio $L^2([0,T]\times\Omega,\, \mathcal{P},\, \mu_M)$. Para ello, se define al espacio $\mathcal{E}$ como el conjunto de procesos de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\, \mathbf{1}_{A_k}, \quad c_k \in \mathbb{R},\, A_k \in P_T$$

Por la Definición 3.2, cualquier proceso en $\mathcal{E}$ es simple adaptado, y en consecuencia la integral estocástica está definida para estos procesos como en la Ecuación (18). El siguiente teorema muestra la extensión de la integral: en particular, prueba que el operador I_M es una isometría entre $L^2([0,T]\times\Omega,\, \mathcal{P},\, \mu_M)$ y un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$:

Lema 3.5 (Isometría de Itô)**.** *Sea $A \in L^2([0,T]\times\Omega,\, \mathcal{P},\, \mu_M)$. Entonces:*

$$E\left[\left(\int_0^T A\, dM\right)^2\right] = \int_{[0,T]\times\Omega} A^2\, d\mu_M$$

Demostración. ([8], Teorema 2.3).

Considere primero $A \in \mathcal{E}$. Este proceso tiene entonces la siguiente representación:

$$A = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \mathbf{1}_{A_k},$$

donde $A_k = (s_k, t_k]\times F_k \in P_T$ ó $A_k = \{0\}\times F_k$. Por la definición de integral estocástica en (18), se obtiene:

$$I_M(A) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \mathbf{1}_{F_k}\,(M_{t_k} - M_{s_k}),$$

y por tanto:

$$E\left[\left(I_M(A)\right)^2\right] = L_1 + L_2,$$

donde:

$$L_1 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \, E\left[\mathbf{1}_{F_k} \left(M_{t_k} - M_{s_k}\right)^2\right]$$
$$L_2 = 2\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} c_j c_k \, E\left[\mathbf{1}_{F_j \cap F_k} \left(M_{t_j} - M_{s_j}\right)\left(M_{t_k} - M_{s_k}\right)\right]$$

Sin pérdida de generalidad, se puede pedir que los A_k sean disyuntos a pares. Esto genera dos posibilidades:

1. $F_j \cap F_k = \emptyset$. Claramente, en este caso:

$$E\left[\mathbf{1}_{F_j \cap F_k} \left(M_{t_j} - M_{s_j}\right)\left(M_{t_k} - M_{s_k}\right)\right] = 0.$$

2. $s_j < t_j \leq s_k < t_k$, sin pérdida de generalidad. En este caso, $\mathbf{1}_{F_j \cap F_k} \left(M_{t_j} - M_{s_j}\right) \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_{s_k}, P\right)$. Por ser M martingala, $E\left[\left(M_{t_k} - M_{s_k}\right) \mid \mathcal{F}_{s_k}\right] = 0$, y en consecuencia se tiene:

$$E\left[\mathbf{1}_{F_j \cap F_k} \left(M_{t_j} - M_{s_j}\right)\left(M_{t_k} - M_{s_k}\right)\right] = E\left[E\left[\mathbf{1}_{F_j \cap F_k} \left(M_{t_j} - M_{s_j}\right)\left(M_{t_k} - M_{s_k}\right) \mid \mathcal{F}_{s_k}\right]\right]$$
$$= E\left[\mathbf{1}_{F_j \cap F_k} \left(M_{t_j} - M_{s_j}\right) E\left[\left(M_{t_k} - M_{s_k}\right) \mid \mathcal{F}_{s_k}\right]\right] = 0$$

Lo anterior permite concluir que $L_2 = 0$, y por lo tanto:

$$E\left[\left(I_M(A)\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \, E\left[\mathbf{1}_{F_k} \left(M_{t_k} - M_{s_k}\right)^2\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \, \mu_M\left((s_k, t_k] \times F_k\right) = \int_{[0,T]\times\Omega} A^2 \, d\mu_M$$

$I_M : \mathcal{E} \subset L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M) \to L^2(\Omega)$ es entonces una isometría. Como I_M es lineal, es en particular una función continua. Se puede demostrar ([8], Lema 2.4.) que $\mathcal{E}$ es denso en $L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$. En consecuencia, el Lema 2.5 garantiza la existencia de una extensión lineal y continua de I_M sobre $L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$, de forma única. □

Los procedimientos anteriores se pueden extender fácilmente a procesos definidos sobre $[0,\infty) \times \Omega$, así como a integradores que sean martingalas L^2-integrables solo localmente (ver [8], Sección 2.6). Si $\mu_M \ll \lambda \otimes P$, entonces μ_M se puede extender a todo $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}$. Denotando como $\mathcal{W}$ a la σ-álgebra generada por todos los procesos adaptados y $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}-$medibles, se puede demostrar ([8], Sección 3.3) que en este caso $L^2([0,T]\times\Omega, \mathcal{P}, \mu_M) = L^2([0,T]\times\Omega, \mathcal{W}, \mu_M)$, y por tanto la integral estocástica se puede extender a este tipo de integrandos. El Lema 3.4 permite concluir lo siguiente:

Lema 3.6. *Sea $G \in L^2([0,T]\times\Omega,\, \mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F},\, \lambda\otimes P)$ un proceso adaptado. Entonces G es integrable en el sentido de Itô con respecto al movimiento browniano B, y se cumple la igualdad:*

$$E\left[\left(\int_0^T G\,dB\right)^2\right] = E\left[\int_0^T G^2\,ds\right]$$

Cuando el integrador es el movimiento browniano B, la condición que los integrandos estén en $L^2([0,T]\times\Omega,\, \mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F},\, \lambda\otimes P)$ se puede relajar:

Lema 3.7. *Sea G un proceso adaptado, $\mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}$-medible, tal que se cumpla:*

$$\int_0^T G^2\,ds < \infty$$

de forma P-casi segura. Entonces existe una sucesión de procesos simples adaptados $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\underset{n\to\infty}{P\text{-}\lim}\int_0^T (G-G_n)^2\,ds = 0$$

Además, la integral estocástica de G con respecto a B existe como límite en probabilidad:

$$\int_0^T G\,dB = \underset{n\to\infty}{P\text{-}\lim}\int_0^T G_n\,dB$$

Demostración. (Friedman [13], Sección 4.1). □

El movimiento browniano fraccionario se puede representar también como una integral estocástica con respecto al movimiento browniano clásico. En realidad, esta fue la definición original proporcionada por Mandelbrot y Van Ness [28]. Para darle sentido a esta representación, se toman dos movimientos brownianos independientes B_t^1, B_t^2, y con ellos se define B_t como $B_t := B_t^1$ si $t \geq 0$ y $B_t := B_{-t}^2$ si $t < 0$ (Samorodnitsky y Taqqu [49]). Además, se usa la notación $f_+(x) = \max(f(x), 0)$.

Teorema 3.1. *Sea $H \in (0,1)$. La variable aleatoria (para $t \geq 0$):*

$$\begin{aligned} Z(t) &= \frac{1}{C_1(H)}\int_{\mathbb{R}}\left((t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}\right)dB_s \\ &= \frac{1}{C_1(H)}\left(\int_{-\infty}^0\left((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}\right)dB_s + \int_0^t (t-s)^{H-1/2}dB_s\right) \end{aligned} \tag{19}$$

es un movimiento browniano fraccionario con parámetro H, y donde:

$$C_1(H) = \left(\int_0^\infty\left((1+s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}}\right)^2 ds + \frac{1}{2H}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. ([3], Sección 1.2; [33], Proposición 5.1.2).

Primero se comprueba que $Z(t)$ está bien definido. Como los integrandos son deterministas, son medibles y adaptados; por lo tanto, es suficiente comprobar que los argumentos en ambas partes de la Igualdad (19) son cuadrado integrables. La parte derecha lo es pues:

$$\int_0^t (t-s)^{2H-1} ds = \frac{t^{2H}}{2H}$$

En la parte izquierda, mediante el cambio de variable $u = -s/t$, se llega a:

$$t^{2H}\left(\int_0^\infty ((1+u)^{H-1/2} - u^{H-1/2})^2 du\right)$$

el cual es finito por la cota (obtenida al aplicar el teorema del valor medio):

$$|(1+u)^{H-1/2} - u^{H-1/2}| \leq |H-1/2| u^{H-3/2}$$

Al ser $Z(t)$ integral determinista de un movimiento browniano, tiene a su vez distribución gaussiana con media cero. Falta entonces comprobar que la covariancia es adecuada. La isometría de Itô permite obtener, mediante cálculos directos y cambios de variable, las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} E[Z^2(t)] &= t^{2H} \\ E[|Z(t) - Z(s)|^2] &= |t-s|^{2H} \\ E[Z(t)Z(s)] &= -\frac{1}{2}(E[|Z(t)-Z(s)|^2] - E[Z^2(t)] - E[Z^2(s)]) \\ &= \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. □

Esta representación integral no es única. Como se ve en el siguiente lema, existe una conexión entre el movimiento browniano fraccionario y el cálculo fraccionario:

Lema 3.8. *Fije $H \in (0, 1/2)$. Sea C_H una constante definida de la siguiente manera:*

$$C_H^2 = \frac{2H\pi(H-1/2)}{\Gamma(2-2H)\sin(\pi(H-1/2))}$$

Entonces B_t^H tiene la representación integral:

$$B_t^H \overset{d}{=} C_H \int_0^T s^{1/2-H}\left(D_{T-}^{1/2-H} u^{H-1/2} \mathbf{1}_{[0,t)}(u)\right)(s)\, dB_s,$$

donde la igualdad de la izquierda es en distribución, y B_t es el movimiento browniano estándar.

Demostración. (Pipiras y Taqqu [36], Proposición 3.1).

□

Es natural preguntarse si se puede definir una integral estocástica en el sentido de Itô cuando el integrador es un movimiento browniano fraccionario B^H. Desafortunadamente, esto no es posible. Para ver la razón, es necesario definir en primer lugar el concepto de semimartingala:

Sea $\mathcal{H} = [0, T]$, $T > 0$, ó $\mathcal{H} = [0, \infty)$. Se tomará $\mathcal{S}$ como en la Definición 3.2; es decir, es el conjunto de todos los procesos simples adaptados. Este espacio se puede dotar de la métrica de convergencia uniforme:

$$d(f, g) = \sup_{(t,\omega)\in\mathcal{H}\times\Omega} |f(t, \omega) - g(t, \omega)|$$

para f, $g \in \mathcal{S}$. Sea Q el espacio de variables aleatorias sobre Ω con valores reales. Este espacio se puede dotar de la topología de convergencia en probabilidad, es decir:

$$d(X, Y) = E\left[1 \wedge |X - Y|\right]$$

para X, $Y \in Q$.

Definición 3.3. Sea I_X el operador que actúa de acuerdo a la Ecuación (18), donde X juega el papel de M. Un proceso estocástico X es una *semimartingala total* si es càdlàg, adaptado a $\mathcal{F}_t$, e $I_X : \mathcal{S} \to Q$ es continuo.

Un proceso estocástico Y es una *semimartingala* si el proceso $(Y_{s\wedge t})_{s\in\mathcal{H}}$ es una semimartingala total para cada $t \in \mathcal{H}$.

De esta forma, una semimartingala es un proceso que permite obtener un concepto "natural" de integración: es decir, un operador lineal que satisfaga algún tipo de convergencia dominada, en este caso en probabilidad. Para integrandos h suficientemente regulares (como los procesos càglàd), la integral estocástica se puede calcular como límite en probabilidad de sumas de Riemann, tal como en la Igualdad (17).

Se puede demostrar ([38], Capítulo 4) que la integral estocástica se puede generalizar a todos los procesos predecibles; es más, las semimartingalas son precisamente los procesos que actúan como "buenos integradores" de los procesos predecibles (bajo las condiciones "naturales" de integración mencionadas anteriormente), y por tanto son la clase más grande de integradores bajo la cual la integral de Itô tiene sentido. Submartingalas y supermartingalas son ambas semimartingalas. Desgraciadamente, B^H no es en general una semimartingala, para ninguna filtración:

Teorema 3.2. *El movimiento browniano fraccionario B^H no es semimartingala excepto cuando $H = 1/2$.*

Demostración. ([33], Proposición 5.1.1).

Es bien conocido que $B^{1/2}$ es martingala, y por tanto es semimartingala.

En el Lema 1.4 se muestra que $\inf\{p > 0 |\, \mathcal{V}_p(B^H(\cdot, \omega), [0, T]) < \infty\} = 1/H$. Si $H < 1/2$, se ve enseguida que $\mathcal{V}_2(B^H(\cdot, \omega), [0, T]) = \infty$. Sin embargo, una semimartingala siempre tiene $2-$variación acotada (ver [38], Sección 2.6).

Por otra parte, si $H > 1/2$, entonces $\mathcal{V}_2(B^H(\cdot,\omega),[0,T]) = 0$. Si este proceso fuera semimartingala, significaría que $\mathcal{V}_1(B^H(\cdot,\omega),[0,T]) < \infty$. Esto es una contradicción por lo mostrado en el mismo Lema 1.4. □

Por lo tanto, cualquier concepto de integral estocástica sobre B^H tendrá que renunciar a alguna de las propiedades usuales de integración mencionadas en el párrafo anterior; en particular, no se puede garantizar que se cumpla siempre la convergencia dominada. Se han generado diversas propuestas de cálculo estocástico cuando el integrador es un movimiento browniano fraccionario, como se verá en las siguientes secciones.

A continuación se enunciará la fórmula (o lema) de Itô, uno de los resultados más importantes de cálculo estocástico y que permite hacer cambios de variable. Por simplicidad, se presentará la versión unidimensional y donde el integrador es un movimiento browniano B; sin embargo, existen muchas generalizaciones (ver [38], Teorema 32, para el caso general donde el integrador es una semimartingala).

Teorema 3.3 (Fórmula de Itô)**.** *Sean $F \in C^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{H} = [0,T]$ ó $[0,\infty)$. Sea X un proceso estocástico definido como:*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t u(s)dB_s + \int_0^t v(s)ds$$

y donde u, v son procesos medibles, adaptados y cumplen: $\int_0^t u(s)^2 ds < \infty$, $\int_0^t |v(s)|ds < \infty$, ambas de forma casi segura para todo $t \in \mathcal{H}$. Entonces se cumple:

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F'(X_s)\,u(s)dB_s + \int_0^t F'(X_s)\,v(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,u^2(s)ds$$

Demostración. El resultado es sobre todo una consecuencia de la fórmula de Taylor. En particular, fijando t y para una partición π_n dada, se tiene por el teorema del valor medio:

$$\begin{aligned} F(X_t) - F(X_0) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(F\left(X_{t_{i+1}}\right) - F\left(X_{t_i}\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F'\left(X_{t_i}\right)\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} F''\left(\bar{X}_i\right)\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2, \end{aligned}$$

donde $\bar{X}_i$ es una variable aleatoria tal que, para casi toda ω, $\bar{X}_i(\omega) \in (X_{t_i}(\omega), X_{t_{i+1}}(\omega))$. Por la definición de X, el primer término se puede reescribir como:

$$\sum_{i=0}^{n-1} F'\left(X_{t_i}\right)\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} F'\left(X_{t_i}\right)u(s)dB_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'\left(X_{t_i}\right)v(s)ds\right)$$

el cual converge en L^2 a:

$$\int_0^t F'(X_s)\, u(s) dB_s + \int_0^t F'(X_s)\, v(s) ds,$$

cuando $|\pi_n| \to 0$. El segundo término converge en L^2, por argumentos técnicos (ver [33], Proposición 1.1.5 para detalles), a la expresión:

$$\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, u^2(s) ds$$

□

Note que si $u = 0$, el proceso resulta determinista y la fórmula coincide con el teorema fundamental del cálculo clásico. Sin embargo, en general aparece el término adicional $\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, u_s^2 ds$, lo cual significa que la integral de Itô no cumple con el teorema fundamental del cálculo usual. Por otra parte, si X es una semimartingala, la integral de Itô indefinida $I(X)$ también será una semimartingala.

Para terminar esta sección, definiremos la integral de Stratonovich. En primer lugar, sean H, X semimartingalas que tengan, por simplicidad, trayectorias continuas casi seguramente. Entonces se define a la integral de Stratonovich de H con respecto a X como (de acuerdo con [38], aquí expuesto de forma simplificada):

$$\int_0^t H_s \circ dX_s \equiv \frac{1}{2}\left(X_t H_t + \int_0^t H_s dX_s - \int_0^t X_s dH_s\right) \tag{20}$$

Esta integral también se puede ver como un límite de sumas de Riemann, de la siguiente manera:

$$\int_0^t H_s \circ dX_s = \underset{|\pi_n|\to 0}{P\text{-}\lim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(H(t_{k+1}) + H(t_k)\right)\left(X(t_{k+1}) - X(t_k)\right) \tag{21}$$

Es importante recalcar que, a diferencia de la integral de Itô, la integral de Stratonovich de una martingala no es en general otra martingala. Sin embargo, sí cumple una versión del teorema fundamental del cálculo, el cual constituye una de sus mayores ventajas:

Lema 3.9. *Sea X semimartingala con trayectorias continuas y $f \in C^3(\mathbb{R})$. Entonces se cumple:*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) \circ dX_s$$

Demostración. ([38], Teorema 34). □

3.2. Espacios gaussianos y caos de Wiener

Sea G una colección de variables aleatorias conjuntamente gaussianas y centradas, sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se dice entonces que span(G) es un *espacio lineal gaussiano* de $L^2(\Omega)$. A los espacios lineales gaussianos que son completos se les conoce como *espacios de Hilbert gaussianos*. $\mathcal{G} = \overline{\text{span}}(G)$ es un ejemplo de estos espacios, como se ve en el siguiente lema:

Lema 3.10. *La cerradura topológica de un espacio lineal gaussiano es un espacio de Hilbert gaussiano.*

Demostración. ([20], Teorema 1.3).

Se tiene que probar que dada una secuencia de variables aleatorias gaussianas y centradas $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a X en L^2, se tenga que X es también centrada y gaussiana. Por Cauchy-Schwartz se muestra que:

$$\lim_{n\to\infty} |E[(X_n - X)X_n]| \leq \lim_{n\to\infty} \|X_n\|_2 \|X_n - X\|_2 = 0,$$

y por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n^2 - X^2] = \lim_{n\to\infty} E[(X_n - X)X_n] + E[(X_n - X)X] = 0$$

Se sigue que $\sigma_n^2 \to \sigma^2$. Como convergencia en L^2 implica convergencia en distribución, y:

$$X_n \sim N\left(0, \sigma_n^2\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\right)$$

si $n \to \infty$, se sigue que $X \sim N(0, \sigma^2)$. □

Note que el producto interno entre F, $G \in \mathcal{G}$ es igual por definición a:

$$E[FG] = \text{cov}(F, G)$$

Es decir, los espacios de Hilbert gaussianos están caracterizados completamente por su función de covariancia.

Un espacio de Hilbert gaussiano G se llama *isonormal* si existe otro espacio de Hilbert H isométrico a G, con la isometría $I : H \to G$. En este caso, H es un índice de G y se cumple, para cualesquiera $I(h), I(g) \in G$, $h, g \in H$, la identidad: $E[I(h)I(g)] = \langle h, g\rangle_H$.

Con las condiciones anteriores, se tiene que el mapeo $h \to I(h)$ es lineal, pues:

$$E\left((W(ah + bg) - aW(h) - bW(g))^2\right) = \|ah + bg\|_H^2 + a^2\|h\|_H^2 + b^2\|g\|_H^2$$
$$- 2a\langle ah + bg, h\rangle_H - 2b\langle ah + bg, g\rangle_H + 2ab\langle h, g\rangle_H = 0$$

Ahora podemos construir espacios de Hilbert en base al movimiento browniano fraccionario:

Definición 3.4. Sea B^H un movimiento browniano fraccionario. Sea $\underline{W} = \{B_t^H | \, t \in [0,T]\}$. Entonces se define al espacio de Hilbert gaussiano $\mathcal{H}_1$ como $\overline{\text{span}}(W)$.

Sea χ el conjunto de todas las funciones indicadoras de la forma $\mathbf{1}_{[0,t]}$, donde $t \in [0,T]$. Se define entonces el espacio de Hilbert índice $\mathcal{H}$ como la cerradura de $\text{span}(\chi)$ bajo el producto interno:

$$\left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \right\rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t,s)$$

Note que $\text{span}(W)$ es un espacio lineal gaussiano, pues cualquier colección finita de elementos en W tiene distribución conjunta gaussiana. Además, es ahora natural elegir la isometría J de tal manera que se cumpla: $J(\mathbf{1}_{[0,t]}) = B_t^H$, y tal que se pueda extender linealmente. Por el Lema 2.5, esta isometría se puede extender de forma única a todo $\mathcal{H}$.

Es importante recalcar aquí que esto ya provee una forma elemental de integración estocástica con respecto al movimiento browniano fraccionario. Es natural esperar, por ejemplo, que una integral cumpla:

$$\int_0^T \mathbf{1}_{[0,t]}(r) dB_r^H = B_t^H,$$

y efectivamente se tiene esto tras mapear la indicadora con la isometría construida. Se puede entonces decir que la integral de $h \in \mathcal{H}$ con respecto a B^H es $J(h)$. Por supuesto, esl espacio $\mathcal{H}$ sólo incluye un número limitado de procesos estocásticos.

De ahora en adelante en el texto, se discutirá el movimiento browniano fraccionario solamente cuando $H \in (0, 1/2)$. En este caso, el espacio $\mathcal{H}$ tiene la siguiente representación explícita:

Lema 3.11. *Sea $\kappa = H - 1/2$. Si $H \in (0,1/2)$, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es el conjunto definido como:*

$$\mathcal{H} = \left\{ f : \exists \phi_f \in L^2([0,T]) \text{ tal que } f(u) = u^{-\kappa} \left(I_{T-}^{-\kappa} s^{\kappa} \phi_f(s) \right)(u) \right\} \tag{22}$$

Además, dados f, $g \in \mathcal{H}$, el producto interno tiene la forma:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\pi\kappa(2\kappa+1)}{\Gamma(1-2\kappa)\sin\pi\kappa} \int_0^T \phi_f(s)\phi_{\text{g}}(s)\, ds$$

Demostración. ([36], Sección 4).

Sea la función lineal $J^* : \text{span}(\chi) \to L^2(\Omega)$ definida como:

$$J^*(f) = C_H \int_0^T s^{-\kappa} \left(D_{T-}^{-\kappa} u^{\kappa} f(u) \right)(s)\, dB_s,$$

donde C_H es la constante definida en el Lema 3.8. Por este mismo lema, la siguiente ecuación se cumple:

$$J^*(\mathbf{1}_{[0,t]}) = C_H \int_0^T s^{-\kappa} \left(D_{T-}^{-\kappa} u^{\kappa} \mathbf{1}_{[0,t)}(u) \right)(s)\, dB_s = B_t^H,$$

y por tanto J^* coincide con la isometría J mencionada anteriormente sobre el conjunto $\text{span}(\chi)$.

Dado $\phi_f \in L^2([0,T])$, la integral fraccionaria $\left(I_{T-}^{-\kappa} s^{\kappa} \phi_f(s) \right)(u)$ siempre existe para $\kappa > -1/2$. Para ver esto, se elige q tal que cumpla: $k > -1/q > -1/2$. Denotando p al conjugado de q, entonces $p < 2$ y la desigualdad de Hölder indica que:

$$\|s^{\kappa}\phi_f(s)\|_1 \leq \|s^{\kappa}\|_q \|\phi_f(s)\|_p < \infty$$

y por tanto $s^{\kappa}\phi_f(s) \in L^1([0,T])$ y la integral fraccionaria está bien definida. Si $f(u) = u^{-\kappa}\left(I_{T-}^{-\kappa} s^{\kappa}\phi_f(s) \right)(u)$, entonces:

$$J^*(f) = C_H \int_0^T s^{-\kappa} \left(D_{T-}^{-\kappa} u^{\kappa} u^{-\kappa} \left(I_{T-}^{-\kappa} r^{\kappa} \phi_f(r) \right)(u) \right)(s)\, dB_s = C_H \int_0^T \phi_f(s)\, dB_s$$

Esta integral existe por el Lema 3.6, y esto sugiere que $J^*(f)$ se puede extender sin problemas al conjunto $\Lambda := \left\{ f : \exists \phi_f \in L^2([0,T]) \text{ tal que } f(u) = u^{-\kappa}\left(I_{T-}^{-\kappa} s^{\kappa}\phi_f(s) \right)(u) \right\}$. Es claro que Λ es un espacio lineal. Se puede probar ([36], Sección 8) que la función bilineal:

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle_{\Lambda} &:= E[J^*(f) J^*(g)] \\
&= C_H^2 E\left[\left(\int_0^T s^{-\kappa} \left(D_{T-}^{-\kappa} u^{\kappa} f(u) \right)(s)\, dB_s \right) \left(\int_0^T s^{-\kappa} \left(D_{T-}^{-\kappa} u^{\kappa} g(u) \right)(s)\, dB_s \right) \right] \\
&= C_H^2 \int_0^T s^{-2\kappa} \left(D_{T-}^{-\kappa} u^{\kappa} f(u) \right)(s) \left(D_{T-}^{-\kappa} u^{\kappa} g(u) \right)(s) ds \\
&= C_H^2 \int_0^T \phi_f(s)\phi_g(s) ds
\end{aligned}$$

representa un producto interno para $f, g \in \Lambda$, y adicionalmente que $\text{span}(\chi)$ es denso en Λ. Para ver finalmente que $\Lambda = \mathcal{H}$, solo resta comprobar que Λ es un espacio completo. Suponga que $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ es una secuencia de Cauchy en Λ. Luego, por definición, ϕ_{f_n} es Cauchy en $L^2([0,T])$, y ya que este espacio es completo debe existir $\phi \in L^2([0,T])$ tal que $\phi_{f_n} \to \phi$. Se concluye entonces que $f_n \to f$, donde $f(u) = u^{-\kappa}\left(I_{T-}^{-\kappa} s^{\kappa}\phi(s) \right)(u) \in \Lambda$. □

Sea ahora $W = \{W(h) | \, h \in \mathcal{H}\}$ un espacio de Hilbert gaussiano isonormal. Resulta entonces que se puede representar a cualquier $X \in L^2(\Omega)$ como una suma, tal vez infinita, de polinomios con variables en W. Estos polinomios se eligen tales que sean ortogonales a pares. A esta descomposición se le conoce como *caos de Wiener*, y los polinomios usados son los *polinomios de Hermite*.

Definición 3.5. El n-ésimo polinomio de Hermite $H_n(x)$ se define como:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}) \tag{23}$$

El primer polinomio de Hermite es $H_0(x) = 1$. Además, son los coeficientes en la expansión de Taylor en t de la función $F(x,t) = \exp(tx - t^2/2)$.

Se puede comprobar que las siguientes propiedades son ciertas:

Lema 3.12. *Los polinomios de Hermite cumplen para $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= H_{n-1}(x) \\ (n+1)H_{n+1}(x) &= xH_n(x) - H_{n-1}(x) \\ H_n(x) &= (-1)^n H_n(x) \end{aligned}$$

El siguiente lema indica que los polinomios de Hermite de diferente orden son ortogonales:

Lema 3.13. *Sean X, Y dos variables aleatorias con distribución conjunta gaussiana, tales que $E[X] = E[Y] = 0$ y $E[X^2] = E[Y^2] = 1$. Entonces, para todo $n, m \geq 0$ se cumple:*

$$E[H_n(X)H_m(Y)] = \begin{cases} 0, & si\ n \neq m \\ \frac{1}{n!}(E[XY])^n, & si\ n = m \end{cases} \tag{24}$$

Demostración. ([33], Lema 1.1.1).

Por las hipótesis, se tiene que $E[XY] = \operatorname{cov}(X,Y) = \rho$. Por tener estas variables aleatorias distribución conjunta gaussiana:

$$\begin{aligned} &E\left[\exp\left(sX - \frac{s^2}{2}\right)\exp\left(tY - \frac{t^2}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(sx - \frac{s^2}{2}\right)\exp\left(ty - \frac{t^2}{2}\right)\exp(-\frac{1}{2}s^T A^{-1} s)\, dx\, dy \end{aligned}$$

y donde:

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Defínanse $\rho^+ := \sqrt{1 + \sqrt{1-\rho^2}}$, $\rho^- := \sqrt{1 - \sqrt{1-\rho^2}}$. Bajo la transformación:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \begin{pmatrix} \rho^+ & -\rho^- \\ -\rho^- & \rho^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

la integral anterior se convierte, para todo $s, t \in \mathbb{R}$, en:

$$E\left[\exp\left(sX - \frac{s^2}{2}\right)\exp\left(tY - \frac{t^2}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-t^2 - s^2 + \sqrt{2}(s\rho^+ + t\rho^-)u + \sqrt{2}(t\rho^+ + s\rho^-)v}{2}\right)\exp\left(\frac{-u^2 - v^2}{2}\right)du\,dv$$
$$= \exp(st\rho) = \exp(stE[XY])$$

Las propiedades de los polinomios de Hermite permiten concluir, al derivar parcialmente el lado izquierdo, la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m}\, E\left[\exp\left(sX - \frac{s^2}{2}\right)\exp\left(tY - \frac{t^2}{2}\right)\right]\Bigg|_{s=t=0} = E\left[n!\, m!\, H_n(X)\, H_m(Y)\right]$$

Suponga, sin pérdida de generalidad, que $n \geq m$. Entonces, la derivada parcial en el lado derecho cumple la siguiente relación (probable mediante inducción):

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m}\exp(stE[XY]) = \exp(st\rho)\sum_{i=0}^{m}\frac{n!}{(n-m+i)!}\binom{m}{i}s^i\,\rho^{n+i}\,t^{n-m+i}$$

Si se evalúa la suma del lado derecho en $s = t = 0$, el resultado es cero (si $n \neq m$) ó $n!\,\rho^n$ (si $n = m$), con lo cual se prueba la proposición. □

Sea $\mathcal{H}_n$ el subespacio lineal generado por los polinomios de Hermite de grado n, es decir: $\mathcal{H}_n = \overline{\text{span}}\{H_n(W(h)) \,|\, h \in \mathcal{H}, \|h\| = 1\}$. A estos espacios se le denomina caos de Wiener de orden n. Por el Lema 3.13, $\mathcal{H}_n$ es ortogonal a $\mathcal{H}_m$ si $m \neq n$. El caos de Wiener se puede ver entonces como una descomposición del espacio $L^2(\Omega)$ en una suma directa de estos $\mathcal{H}_n$:

Lema 3.14. *El espacio $L^2(\Omega)$ se puede descomponer de la siguiente forma:*

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n$$

Demostración. ([33], Teorema 1.1.1).

Sea $X \in L^2(\Omega)$ tal que X sea ortogonal a $\mathcal{H}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego se tiene que $E\left(XH_n(W(h))\right) = 0$ para todo $h \in H$ con $\|h\|_H = 1$. Como x^n se puede expresar como combinación lineal de polinomios de Hermite $H_r(x), 0 \leq r \leq n$, entonces $E\left(XW^n(h)\right) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se puede probar ([33], Lema 1.1.2) que el conjunto $S = \{\exp(W(h)) |\, h \in H\}$ es total; es decir, que $\overline{\text{span}}(S)$ es igual a $L^2(\Omega)$. Se tiene que:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{c^k W^k(h)}{k!}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c^k W^k(h)|}{k!} = \exp(|cW(h)|)$$

Como $\exp(|cW(h)|) \in L^2(\Omega)$ para toda $c \in \mathbb{R}$ y todo $h \in H$ de norma unitaria, el teorema de convergencia dominada permite concluir:

$$E\left[X \exp(cW(h))\right] = E\left[X \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k W^k(h)}{k!}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[X \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k W^k(h)}{k!}\right] = 0$$

Por el Lema 2.3, se sigue que $X = 0$. □

La descomposición de Wiener aplica también a espacios de la forma $L^2(\Omega; \mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert separable. Por el Teorema 2.4, se sabe que $L^2(\Omega; \mathcal{K}) \simeq L^2(\Omega) \otimes \mathcal{K}$, y por tanto:

$$L^2(\Omega; \mathcal{K}) \simeq \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n\right) \otimes \mathcal{K} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{K}) \tag{25}$$

Sea ahora P_n^0 el espacio formado por las variables aleatorias de la forma:

$$F = p(W(h_1), \ldots, W(h_k)), k \geq 1, h_i \in \mathcal{H}$$

y donde p es un polinomio de grado menor o igual a n. El siguiente lema caracteriza estos espacios en relación a la descomposición de Wiener:

Lema 3.15. *El espacio $P_n = \overline{P_n^0}$ se puede descomponer como:*

$$P_n = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{H}_i \tag{26}$$

Demostración. ([33], Teorema 1.1.1).

De entrada, es claro que $\oplus_{i=0}^{n} \mathcal{H}_i \subseteq P_n$. Para ver que $P_n \subseteq \oplus_{i=0}^{n} \mathcal{H}_i$, se necesita ver que P_n es ortogonal a $\mathcal{H}_m$ para todo $m > n$; es decir, que $E\left[\left(p\left(W\left(h_1\right), \ldots, W\left(h_k\right)\right) H_m(W(h))\right] = 0$, donde $\|h\|_H = 1, p$ es un polinomio de grado menor o igual a n, y $m > n$. Usando Gram-Schmidt, del conjunto $\{h_1, \ldots, h_k, h\}$ se puede obtener una familia ortonormal $\{e_1, \ldots, e_j, h\}$, y por tanto $p\left(W\left(h_1\right), \ldots, W\left(h_k\right)\right)$ se puede representar como $q\left(W\left(e_1\right), \ldots, W\left(e_j\right), W(h)\right)$, donde el grado de q es menor o igual a n.

Se ve entonces que $E\left[q\left(W\left(e_1\right), \ldots, W\left(e_j\right), W\left(h\right)\right) H_m(W(h))\right]$ está formada por una suma de términos de la forma:

$$cE\left[W^{r_1}(e_1) \ldots W^{r_j}(e_j) W^{r_h}(h) H_m(W(h))\right],$$

donde $r_1, \ldots, r_j, r_h$ son enteros mayores o iguales a 0 y menores o iguales a n. Se sabe que el conjunto $\{W(e_1), \ldots, W(e_j), W(h)\}$ contiene variables conjuntamente gaussianas y no correlacionadas (al ser los índices ortogonales), y por tanto son independientes. Ya que los polinomios son funciones medibles, el término anterior se convierte en:

$$cE\left[W^{r_1}(e_1)\right] \ldots E\left[W^{r_j}(e_j)\right] E\left[W^{r_h}(h) H_m(W(h))\right]$$

Solo resta ver que $E\left[W^r(h) H_m(W(h))\right] = 0$ para todo entero $0 \leq r \leq n < m$. Ya que x^r se puede descomponer en una suma de polinomios de Hermite $H_q(x), 0 \leq q \leq r$, el resultado es cierto. □

Se usará, de ahora en adelante, la notación introducida en la Ecuación 16. Sean $a \in \Lambda$ y $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base para $\mathcal{H}$. Entonces la siguiente variable aleatoria está bien definida:

$$\Phi_a = \sqrt{a!}\prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}\left(W\left(e_i\right)\right)$$

Se ve ahora que el espacio $\mathcal{H}_n$ tiene una base explícita formada por estas variables aleatorias:

Lema 3.16. *La familia de variables aleatorias:*

$$\{\Phi_a, a \in \Lambda, |a| = n\}$$

forma una base de $\mathcal{H}_n$ para cualquier $n \geq 1$.

Demostración. ([33], Proposición 1.1.1).

Primero veamos que este sistema es ortonormal. Sean a, $b \in \Lambda$. Por la independencia de $f(W(h_1))$, $g(W(h_2))$ si h_1, $h_2 \in \mathcal{H}$ son ortogonales y f, g medibles, se tiene:

$$\begin{aligned} E\left[\Phi_a\Phi_b\right] &= a!E\left[\prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}\left(W\left(e_i\right)\right) H_{b_i}\left(W\left(e_i\right)\right)\right] \\ &= a!\prod_{i=1}^{\infty} E\left[H_{a_i}\left(W\left(e_i\right)\right) H_{b_i}\left(W\left(e_i\right)\right)\right] \qquad (27) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases} \end{aligned}$$

Se procede ahora por inducción. Claramente la aserción es cierta si $k = 1$. Suponga ahora que es cierta para $k \leq n$. Se tiene que el conjunto $V = \{\Phi_a, a \in \Lambda, |a| \leq n+1\}$ está contenido en P_{n+1} y es ortonormal en él. Además, cualquier polinomio $p\left(W\left(h_1\right), \ldots, W\left(h_k\right)\right) \in P_{n+1}$ se puede aproximar mediante polinomios en $W(e_i)$, al ser ésta base de $\mathcal{H}$. En particular se puede aproximar por miembros de V, al ser las potencias x^r suma de polinomios de Hermite. Por lo tanto, V es base de $P_{n+1} = P_n \oplus \mathcal{H}_{n+1}$. Por la suposición, el conjunto $\{\Phi_a, a \in \Lambda, |a| \leq n\}$ es base de P_n, y se sigue que $\{\Phi_a, a \in \Lambda, |a| = n+1\}$ debe ser base de $\mathcal{H}_{n+1}$. □

Sea $\mathcal{H}^{\odot n}$ el producto tensorial simétrico de orden n de $\mathcal{H}$. El siguiente lema muestra que el caos de Wiener es isométrico a la suma directa de estos espacios:

Lema 3.17. *Sea $\mathcal{K}$ espacio de Hilbert separable. El espacio $L^2(\Omega;\mathcal{K})$ es isométrico al espacio:*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty}\left(\mathcal{H}^{\odot n}\otimes\mathcal{K}\right)$$

Demostración. Sea $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ base de $\mathcal{K}$ y $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base del espacio $\mathcal{H}^{\odot n}$ con la forma mencionada en el Lema 2.17. Se propone la función biyectiva $I_n : C \subseteq \mathcal{H}^{\odot n} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{K}$, definida de la siguiente manera:

$$I_n\left(\text{sim}\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} e_i^{\otimes a_i}\right) \otimes k_j\right) = \sqrt{a!}\Phi_a k_j$$

y donde C es la colección $\{b_i \otimes k_j\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Esta función se puede extender linealmente. Note que se mapean miembros de la base C a miembros de la base de $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{K}$. Por la Ecuación 27 se sabe que:

$$\left\|\sqrt{a!}\Phi_a k_j\right\|^2_{L^2(\Omega;\mathcal{K})} = a! \left\|\Phi_a\right\|_2^2 \left\|k_j\right\|_{\mathcal{K}}^2 = a!$$

Por otro lado, y usando de nuevo el Lema 2.17:

$$\begin{aligned} &\left\|\text{sim}\left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} e_i^{\otimes a_i}\right) \otimes k_j\right\|^2_{\mathcal{H}^{\odot n}\otimes\mathcal{K}} \\ &= \left\|\text{sim}\left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} e_i^{\otimes a_i}\right)\right\|^2_{\mathcal{H}^{\odot n}} \left\|k_j\right\|_{\mathcal{K}}^2 = a! \end{aligned}$$

Finalmente, el Lema 2.5 garantiza que se puede ampliar I_n de forma única a todo $\mathcal{H}^{\odot n} \otimes \mathcal{K}$, constituyendo así una isometría entre los dos espacios antes mencionados. □

Como consecuencia directa de lo anterior se tiene la siguiente proposición:

Lema 3.18. *Sean $f_m \in \mathcal{H}^{\odot m} \otimes \mathcal{K}$, $g_n \in \mathcal{H}^{\odot n} \otimes \mathcal{K}$. Entonces se cumple:*

$$E\left[\langle I_m(f_m), I_n(g_n)\rangle_{\mathcal{K}}\right] = \begin{cases} n!\langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}\otimes\mathcal{K}} & si\ m = n \\ 0 & si\ m \neq n \end{cases}$$

Demostración. Note que $I_j(f_j) \in \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{K}$. Si $m \neq n$, la ortogonalidad de estos subespacios permite deducir que:

$$\langle I_m(f_m), I_n(g_n)\rangle_{L^2(\Omega;\mathcal{K})} = E\left[\langle I_m(f_m), I_n(g_n)\rangle_{\mathcal{K}}\right] = 0$$

Por otra parte, si $m = n$, se concluye por la propiedad de isometría de I_n:

$$\langle I_n(f_n), I_n(g_n)\rangle_{L^2(\Omega;\mathcal{K})} = \langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}^{\odot n}\otimes\mathcal{K}} = n!\langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}\otimes\mathcal{K}}$$

□

Por la isometría, es entonces fácil ver que cualquier $F \in L^2(\Omega;\mathcal{K})$ cuenta con una descomposición en caos de forma única:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n F$$

donde, como se espera, $J_n F$ denota el n-ésimo caos de Wiener de F, y es igual a $I_n(f_n)$ para algún f_n.

A veces se usa una extensión de la función I_n. Si $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ y $k \in \mathcal{K}$, se puede definir $I_n(f \otimes k) := I_n(\mathrm{sim}(f) \otimes k)$. Note que, en este sentido, $I_n : \mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{K} \to L^2(\Omega;\mathcal{K})$ no constituye una isometría.

Sea el espacio de Hilbert índice $\mathcal{H}$ de la forma $L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, donde $(T, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida y μ no tiene átomos y es σ-finita. Se puede ver, en este caso, a $I_n(f)$ como la n-ésima integral múltiple de $f(t_1, \ldots, t_n)$ con respecto a la medida de ruido blanco asociada al proceso gaussiano isonormal W (ver [33], Seccion 1.1.2 para detalles).

3.3. Los operadores derivada y divergencia

En 1978, Paul Malliavin publica un artículo donde usa resultados de ecuaciones diferenciales parciales para estudiar cuándo una variable aleatoria tiene densidad [26]. Esto sería el origen del cálculo de Malliavin, el cual se puede ver como una generalización del cálculo de variaciones clásico para aplicaciones en probabilidad.

Como Ω no es en general un espacio topológico, no se puede hablar de la derivada de una variable aleatoria en el sentido usual. Sin embargo, si la variable aleatoria es parte de un proceso isonormal W asociado a un espacio de Hilbert índice $\mathcal{H}$, se puede aprovechar esta estructura para poder tener diferenciación en sentido débil. En primer lugar, se delimitará un espacio adecuado de funciones en donde definir la derivada:

Definición 3.6. Sea $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de funciones infinitamente diferenciables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que f y todas sus derivadas parciales tienen crecimiento polinomial (es decir, su norma está acotada por un polinomio en $\mathbb{R}^n$).

De igual manera, sea $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de funciones en $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ acotadas por una constante c, y sea $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de funciones en $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto.

Sea ahora $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert separable, en donde tomarán valores las funciones sobre W. El operador derivada en el sentido del cálculo de Malliavin clásico es una función $D : L^2(\Omega;\mathcal{K}) \to L^2(\Omega;\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, definida de la siguiente manera sobre las funciones mencionadas previamente:

Definición 3.7. Sea $S(\mathcal{K})$ el conjunto de variables aleatorias de la forma $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))k$, donde $h_i \in \mathcal{H}$, $k \in \mathcal{K}$ y $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $F \in S(\mathcal{K})$, entonces DF se define como:

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(h_1), \ldots, W(h_n))h_i \otimes k \tag{28}$$

Por la definición, es fácil ver que D es lineal. Suponga que $k \in \mathcal{K}$. Sea $S_b(\mathcal{K})$ el conjunto de variables aleatorias $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))k$ tales que $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, y sea $S_0(\mathcal{K})$ el conjunto de variables aleatorias $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))k$ tales que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. $S_0(\mathcal{K})$ es denso en $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ [33], por lo que $S(\mathcal{K})$ y $S_b(\mathcal{K})$ también lo son.

El siguiente lema permitirá calcular una versión de integración por partes:

Lema 3.19. *Sean $F \in S(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{H}$. Entonces:*

$$E[\langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}}] = E[FW(h)] \tag{29}$$

Demostración. ([33], Lema 1.2.1).

Se pide $||h|| = 1$. Usando Gram-Schmidt, se pueden obtener elementos ortonormales de $\mathcal{H}, e_1, \ldots, e_n$, tales que $h = e_1$ y F sea una variable aleatoria suave de la forma:

$$F = f\left(W\left(e_1\right), \ldots, W\left(e_n\right)\right)$$

con f en $C_p^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$. Se puede ver que se cumple:

$$\begin{aligned}
\langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(e_1), \ldots, W(e_n))e_i, h \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(e_1), \ldots, W(e_n))\langle e_i, h\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \partial_1 f(W(e_1), \ldots, W(e_n))
\end{aligned}$$

Sea $\phi(x)$ la función de densidad de la distribución normal en $\mathbb{R}^n$; esto es:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Los elementos de W son conjuntamente gaussianos. Integrando por partes, se tiene:

$$\begin{aligned}
E\left[\langle DF, h\rangle_H\right] &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 f(x)\phi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)x_1 dx \\
&= E\left[FW\left(e_1\right)\right] = E[FW(h)],
\end{aligned}$$

lo cual demuestra el lema. □

Sean F, $G \in S(\mathbb{R})$. Entonces FG tiene la forma:

$$f(W(h_1), \ldots, W(h_n))g(W(h_{n+1}), \ldots, W(h_k))$$

donde $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_p^\infty\left(\mathbb{R}^{k-n}\right)$. Por la definición de derivada, se tiene:

$$\begin{aligned} D(FG) &= \sum_{i=1}^{k} \partial_i \left(f(W(h_1), \ldots, W(h_n))g(W(h_{n+1}), \ldots, W(h_k))\right) h_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} F\, \partial_i g(W(h_{n+1}), \ldots, W(h_k))h_i + G\, \partial_i f(W(h_1), \ldots, W(h_n))h_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} G\, \partial_i f(W(h_1), \ldots, W(h_n))h_i + \sum_{i=n+1}^{k} F\, \partial_i g(W(h_{n+1}), \ldots, W(h_k))h_i \\ &= F\, DG + G\, DF \end{aligned}$$

Por lo que el operador derivada respeta en este caso la regla de la cadena. Esta observación, junto con la aplicación del lema anterior al producto FG, permite obtener lo siguiente:

Lema 3.20. *Sean $F, G \in S(\mathbb{R}), h \in \mathcal{H}$. Entonces:*

$$E[G\langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}}] = E[-F\langle DG, h\rangle_{\mathcal{H}} + FGW(h)]$$

El siguiente resultado permite extender de forma natural al operador derivada:

Lema 3.21. *El operador D es cerrable de $L^p(\Omega; \mathcal{K})$ a $L^p(\Omega; \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, para cualquier $p \geq 1$.*

Demostración. ([33], Lema 1.2.2).

Sea $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ una secuencia de variables aleatorias de la forma $F_n = f_n k_n$, donde $f_n \in S(\mathbb{R})$, $k_n \in \mathcal{K}$. Suponga que esta secuencia converge a 0 en $L^p(\Omega; \mathcal{K})$ y que la secuencia DF_n converge a η en $L^p(\Omega; \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Sean $k \in \mathcal{K}$, $h \in \mathcal{H}$ arbitrarios y $F \in \mathcal{S}_b(\mathbb{R})$ tal que $FW(h)$ esté acotado. Como consecuencia del lema anterior se tiene:

$$\begin{aligned} E\left[\langle \eta, h \otimes k\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}} F\right] &= \lim_{n\to\infty} E\left[\langle Df_n k_n, h \otimes k\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}} F\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\langle Df_n, h\rangle_{\mathcal{H}} \langle k_n, k\rangle_{\mathcal{K}} F\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[-\langle DF, h\rangle_{\mathcal{H}} \langle F_n, k\rangle_{\mathcal{K}} + \langle F_n, k\rangle_{\mathcal{K}} FW(h)\right] \end{aligned}$$

y esto converge a cero por el límite de F_n en $L^p(\Omega; \mathcal{K})$ y por estar acotadas las variables aleatorias $\langle DF, h\rangle_H$ y $FW(h)$. Se concluye, por densidad, que $\langle \eta, h \otimes k\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}$ es igual a cero casi seguramente. Al ser esto cierto para h, k arbitrarias, el Lema 2.3 indica que $\eta = 0$. □

Para $p \geq 1$, se denota al dominio de la cerradura del operador D en $L^p(\Omega;\mathcal{K})$ como $\mathbb{D}^{1,p}(\mathcal{K})$; es decir, este conjunto es la cerradura de $S(\mathcal{K})$ con respecto a la norma:

$$\|F\|_{1,p}^p = E\left[\|F\|_{\mathcal{K}}^p + \|DF\|_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}^p\right] \tag{30}$$

De igual manera, se pueden definir los espacios $\mathbb{D}^{k,p}(\mathcal{K})$ de forma iterativa; el operador D^k toma entonces valores en $L^p(\Omega;\mathcal{H}^{\otimes k}\otimes\mathcal{K})$. Para $p=2$, $\mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{K})$ es de Hilbert, con el producto interno:

$$\langle F, G\rangle = E[\langle F, G\rangle_{\mathcal{K}}] + E[\langle DF, DG\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}]$$

El siguiente resultado provee una relación entre el operador derivada y el caos de Wiener:

Lema 3.22. *Sea $F \in L^2(\Omega;\mathcal{K})$ con la descomposición en caos $F = \sum_{n=0}^{\infty} J_n F$. Entonces $F \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{K})$ si y solamente si:*

$$E\left[\|DF\|_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\|J_n F\|_{L^2(\Omega;\mathcal{K})}^2 < \infty$$

Si esto es cierto, además, se cumple para todo $n \geq 1$ que $D\left(J_n F\right) = J_{n-1}(DF)$.

Demostración. ([33], Proposición 1.2.2). □

Así como existe un concepto de derivada para procesos isonormales, de igual manera existe un concepto de integración. Esta operación será realizada por la adjunta del operador derivada, llamada divergencia. Además, si el espacio de Hilbert índice $\mathcal{H}$ es de la forma $L^2(T,\mathcal{B},\mu)$, donde $(T,\mathcal{B},\mu)$ es un espacio de medida, entonces este operador puede ser interpretado como una integral estocástica. Esta integral es una verdadera generalización de la integral de Itô, incluidos procesos no necesariamente adaptados.

Definición 3.8. La adjunta del operador D se denota como $\delta : L^2(\Omega;\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}) \to L^2(\Omega;\mathcal{K})$, el operador de divergencia. Por tanto, se cumple la *relación de dualidad*:

$$E\left[\langle F,\, \delta(u)\rangle_{\mathcal{K}}\right] = E\left[\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}\right] \quad \forall F \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{K}) \quad \forall u \in \mathrm{Dom}(\delta) \tag{31}$$

Claramente δ es lineal, y con $F = 1$, se ve que $E[\delta(u)] = 0$. Como $\mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{K})$ es denso en $L^2(\Omega;\mathcal{K})$, el operador de divergencia está bien definido. Por el Teorema 2.3, este operador es cerrado y su dominio es denso en $L^2(\Omega;\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$.

También se puede ver al dominio de la divergencia, denotado por $\mathrm{Dom}(\delta)$, como el conjunto de variables aleatorias $u \in L^2(\Omega;\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ tales que:

$$\left|E\left[\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}\right]\right| \leq c\|F\|_{L^2(\Omega;\mathcal{K})}$$

para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{K})$, y donde c es una constante que depende de u.

El siguiente lema provee una fórmula para introducir variables aleatorias en el argumento del operador:

Lema 3.23. *Sea $F \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathbb{R}), u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ y $Fu \in L^2(\Omega;\mathcal{H})$. Entonces $Fu \in \mathrm{Dom}(\delta)$ y se cumple la igualdad:*

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}$$

con tal que el lado derecho sea cuadrado integrable.

Demostración. ([33], Proposición 1.3.3).

Para cualquier variable aleatoria suave $G \in \mathcal{S}_0((R))$, se tiene:

$$\begin{aligned} E\left[\langle DG, Fu\rangle_H\right] &= E\left[\langle FDG, u\rangle_H\right] \\ &= E\left[\langle u, D(FG) - GDF\rangle_H\right] \\ &= E\left[\left(\delta(u)F - \langle u, DF\rangle_H\right)G\right] \end{aligned}$$

Como $E\left[\langle DG, Fu\rangle_H\right] = E\left[G\delta(Fu)\right]$, y $\mathcal{S}_0((R))$ es denso en $L^2(\Omega)$, la proposición se sigue por el Lema 2.3. □

Suponga ahora que $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, con las suposiciones antes mencionadas. En este caso, $\mathrm{Dom}(\delta) \subseteq L^2(T \times \Omega)$, y se usará la notación:

$$\delta(u) = \int_T u_t \, dW_t \tag{32}$$

Esta integral es llamada *integral de Skorohod*. En este espacio, el siguiente lema permite caracterizar a $\delta(u)$:

Lema 3.24. *Sea $u \in L^2(T\times\Omega)$ con la descomposición en caos $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$. Entonces $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ si y solo si*

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\widetilde{f_n}) \tag{33}$$

converge en $L^2(\Omega)$, y donde $\widetilde{f_n}$ es la simetrización de f_n.

Demostración. ([33], Proposición 1.3.7).

□

El siguiente resultado muestra que la integral de Skorohod es una extensión de la integral de Itô clásica. En este caso $T = L^2([0,T])$:

Lema 3.25. *Sea L_a^2 el conjunto de procesos adaptados en $L^2([0,T]\times\Omega)$ con la filtración y medida usuales. Entonces $L_a^2 \subset \mathrm{Dom}(\delta)$, y se cumple:*

$$\delta(u) = \int_0^T u_t dW_t$$

Demostración. ([33], Proposición 1.3.11).

Suponga u es un proceso adaptado simple, como en la Definición 3.2, es decir:

$$u_t^n = \sum_{j=1}^{n} F_j \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

En [33], Lema 1.3.2 se muestra que si $A \in \mathcal{F}$ y G es una variable aleatoria cuadrado integrable medible respecto a la filtración $\mathcal{F}_{A^c}$, entonces se cumple $\delta(G\mathbf{1}_A) = GW(A)$, donde $W(\cdot)$ es la medida de Wiener. Es conocido que $W(\mathbf{1}_{[0,r)}) = W_r$, y por lo tanto $u^n \in \mathrm{Dom}(\delta)$, cumpliéndonse por linealidad:

$$\delta(u^n) = \sum_{j=1}^{n} F_j \left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right) = I(u^n)$$

Aquí $I(\cdot)$ es la integral de Itô. Sea ahora $u \in L_a^2$. El Lema 3.6 muestra que se puede aproximar a u por procesos simples adaptados, con convergencia en el sentido de $L^2([0,T] \times \Omega)$. Como la divergencia es un operador cerrado, $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ también y las dos integrales coinciden. □

La principal ventaja del operador de divergencia es claramente la ampliación de la clase de procesos que se pueden "integrar". Sin embargo, la divergencia usual no es suficiente para estudiar muchos integrandos interesantes cuando el integrador es un movimiento browniano fraccionario, como se verá en el siguiente capítulo.

4. Operadores de divergencia y derivada extendidos

Este capítulo y el siguiente constituyen los resultados principales de este trabajo. Como se vio en el capítulo anterior, el operador de divergencia provee un concepto de integración estocástica que permite estudiar integrandos que no tienen integral de Itô. Desafortunadamente, el movimiento browniano fraccionario representa uno de los casos limitantes del cálculo de Malliavin clásico. En particular, la siguiente integral:

$$\int_0^T B_s^H dB_s^H,$$

una de las expresiones más "básicas" que se pudiera querer integrar, no existe para $H \leq 1/4$, ni siquiera con el operador de divergencia. El propósito de este capítulo es proponer operadores de derivada y divergencia extendidos, que puedan permitir trabajar con una clase aún más grande de integrandos, incluido el movimiento browniano fraccionario para todo $H \in (0,1)$.

4.1. Preliminares

Como se vio en el capítulo pasado, el proceso B_t^H no es general una semimartingala, y por tanto no puede ser estudiado usando la integral de Itô clásica. Este hecho ha propiciado la creación de diversas "extensiones" de la integral estocástica, esta vez basadas en el operador de divergencia del cálculo de Malliavin:

1. Decreusefond y Üstünel [10] usa espacios de Cameron-Martin para extender el operador divergencia, y procede a obtener teoremas tipo Itô y tipo Girsanov.

2. Carmona, Coutin y Montseny [6] aprovechan la representación del movimiento browniano fraccionario como integral de un kernel reproductor sobre un movimiento browniano clásico para obtener algoritmos de aproximación, así como un teorema del límite central.

3. Alós, Mazet y Nualart [1] muestran que si $H \in \left(\frac{1}{4}, 1\ \right)$, entonces para todas las funciones $f \in C^2(\mathbb{R})$ con un crecimiento adecuadamente lento de f'' , la divergencia del proceso $\left\{ f'\left(B_t^H\right), t \in [0,T] \right\}$ existe, y se cumple:

$$f\left(B_T^H\right) - f(0) = \int_0^T f'\left(B_t^H\right) \delta(B_t^H) + H \int_0^T f''\left(B_t^H\right) \tag{34}$$

4. Privault [37] obtiene una forma de integral estocástica para procesos con ciertas condiciones de homogeneidad y diferenciabilidad, sin requerir ciertos tipos de filtraciones o que sean adaptados. Si el proceso es un movimiento browniano fraccionario, la Ecuación 34 es cierta para toda $H \in (0,1)$ conque f sea dos veces diferenciable y acotada en estas derivadas. Sin embargo, para $H \in (0, 1/2)$, esta integral involucra una función hipergeométrica; es decir, en general se tiene que aproximar por procesos regulares.

Finalmente, aquí se exponen los resultados de [7], y su generalización a espacios gaussianos isonormales llevada a cabo por León y Nualart [25], y el cual es válido para funciones f dentro del espacio de Hilbert índice $\mathcal{H}$. La principal ventaja que tiene esta nueva definición de integral estocástica es que el integrando

$$B_t^H 1_{(a,b]}(t),\ H \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$$

se encuentra dentro del dominio de este nuevo operador derivada, mas no así en el dominio del operador derivada clásico:

Lema 4.1. *Suponga que $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, y que $\mathcal{H}$ es el espacio definido en el Lema 3.4. Sean $-\infty < a < b < \infty$, y defina:*

$$u_t = B_t^H 1_{(a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Entonces se cumplen las siguientes dos igualdades:

$$P\left[u \in \mathcal{H}\right] = 1, \quad \textit{para } H \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$
$$P\left[u \in \mathcal{H}\right] = 0, \quad \textit{para } H \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$$

Demostración. (Cheridito y Nualart [7], Proposición 3.2)

□

Como $\mathrm{Dom}(\delta) \subseteq \bigcup_{p>1} L^p(\Omega, \mathcal{H})$ [7], el lema anterior prueba que los procesos

$$B_t^H 1_{(a,b]}(t)$$

no se encuentran en $\mathrm{Dom}(\delta)$ si $H \leqslant \frac{1}{4}$.

4.2. El operador derivada extendido

Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ dos espacios de Hilbert (reales y separables), con productos internos respectivos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0}$. Se asume que $\mathcal{H}$ está inmerso de forma densa y continua en $\mathcal{H}_0$, y que $T : \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ es un operador lineal que satisface las siguientes condiciones:

1. (A1) $|Th|_{\mathcal{H}_0} = |h|_{\mathcal{H}}$ para todo $h \in \mathcal{H}$.
2. (A2) $\mathcal{T}_{\mathcal{H}} := \{h \in \mathcal{H} : Th \in D(T^*)\}$ es un subconjunto denso de $\mathcal{H}$.
3. (A3) $\mathcal{T}_{\mathcal{H}_0} = \{T^*Th : h \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}\}$ es denso en $\mathcal{H}_0$.

Como T es una isometría y por tanto es continua, se ve en base a la Definición 2.4 que T es un operador cerrado. Del Teorema 2.3 se sigue que $D(T^*)$ es denso en $\mathcal{H}_0$.

Sea $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunto definido en la Definición 3.7. Sea a su vez $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert separable, e $I_{\mathcal{K}}$ la función identidad sobre ese conjunto. Como en la Definición 3.7, se denomina $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ (respectivamente $\mathcal{S}_T(\mathcal{K})$) al conjunto formado por variables aleatorias de la forma:

$$F = f\left(W(g_1), \ldots, W(g_n)\right) k$$

donde $k \in \mathcal{K}, \{g_1, \ldots, g_n\}$ son miembros de $\mathcal{H}$ (respectivamente miembros de $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$) y $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. $(T \otimes I_{\mathcal{K}})^*$ se considera la adjunta del operador $(T \otimes I_{\mathcal{K}})$. Entonces se puede considerar una extensión del operador derivada:

Definición 4.1. El operador de derivada extendido $D_T : \mathcal{S}_T(\mathcal{K}) \subseteq L^2(\Omega;\mathcal{K}) \to L^2(\Omega;\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{K})$ es la función definida como:

$$D_T(F) = (T \otimes I_{\mathcal{K}})^* (T \otimes I_{\mathcal{K}}) DF \tag{35}$$

para $F \in \mathcal{S}_T(\mathcal{K})$.

Los siguientes lemas caracterizan este operador y exploran algunas de sus propiedades. Son análogas a las vistas en la Sección 3.3:

Lema 4.2. *El operador D_T es cerrable de $L^2(\Omega;\mathcal{H})$ a $L^2(\Omega;\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{K})$*

Demostración. ([25], Lema A.1)

Sea $\{F_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}_T(\mathcal{K})$ una secuencia que va a cero en $L^2(\Omega;\mathcal{K})$, tal que $D_T(F_n)$ converge a Y en $L^2(\Omega;\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{K})$. F_n se puede descomponer de la forma $F_n = f_n k_n$, donde $k_n \in \mathcal{K}$ y $f_n \in \mathcal{S}_T(\mathbb{R})$. La regla de la cadena permite deducir, para cada $F \in \mathcal{S}_T(\mathbb{R}), h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} E[\langle Y, Fh \otimes k\rangle_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}] &= \lim_{n\to\infty} E[\langle (T \otimes I_{\mathcal{K}})^* (T \otimes I_{\mathcal{K}}) DF_n, Fh \otimes k\rangle_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[\langle k_n, k\rangle_{\mathcal{K}} \langle T^*TDf_n, Fh\rangle_{\mathcal{H}_0}] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[\langle k_n, k\rangle_{\mathcal{K}} \langle T^*TD(Ff_n) - f_nT^*TD(F), h\rangle_{\mathcal{H}_0}] \end{aligned}$$

Las propiedades de la adjunta, (A1) y el Lema 3.19 permiten obtener:

$$\begin{aligned} E[\langle T^*TD(Ff_n), h\rangle_{\mathcal{H}_0}] &= E[\langle TD(Ff_n), Th\rangle_{\mathcal{H}_0}] \\ &= E[\langle D(Ff_n), h\rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= E[Ff_nW(h)] \end{aligned}$$

y en consecuencia se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\langle F_n, k\rangle_{\mathcal{K}} \left(FW(h) - \langle T^*TDF, h\rangle_{\mathcal{H}_0}\right)\right] = 0,$$

pues $F_n \to 0$ en $L^2(\Omega;\mathcal{K})$. Por el Lema 2.3, se tiene que $Y = 0$ y el resultado se comprueba. □

Similar al operador derivada clásico, el dominio del operador se denomina $\mathbb{D}_T^{1,2}(\mathcal{K})$, y consta de la completación del espacio $\mathcal{S}_T(\mathcal{K})$ bajo la norma:

$$\|F\|_{1,2,T}^2 = E\left(|F|_{\mathcal{K}}^2 + |(T \otimes I_{\mathcal{K}})^* (T \otimes I_{\mathcal{K}}) DF|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}^2\right)$$

El siguiente lema muestra que este nuevo operador es realmente una extensión del operador derivada clásico:

Lema 4.3. *Si $F \in \mathbb{D}_T^{1,2}(\mathcal{K})$, entonces $F \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{K})$.*

Demostración. ([25], Lema A.2).

Sea $F \in \mathcal{S}_T(\mathcal{K})$ tal que $F = Gk, G \in \mathcal{S}_T(\mathbb{R})$ y $k \in \mathcal{K}$. Dado que $\mathcal{H}$ está inmerso continuamente en $\mathcal{H}_0$, y por las propiedades de la adjunta, se tiene:

$$\begin{aligned} |DF|^2_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}} &= \langle DG \otimes k, DG \otimes k\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}} \\ &= \langle DG, DG\rangle_{\mathcal{H}} \langle k, k\rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \langle TDG, TDG\rangle_{\mathcal{H}_0} \langle k, k\rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \langle DG \otimes k, T^*TDG \otimes k\rangle_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}} \\ &\leq C|DF|_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}} \, |D_T F|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}} \end{aligned}$$

Esto es:

$$|DF|_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}} \leqslant C \, |D_T F|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}$$

El resultado se sigue de lo anterior y de la definición de los espacios respectivos. □

Lema 4.4. *Sea $F \in \mathbb{D}_T^{1,2}(\mathcal{K})$. Entonces $(T \otimes I_{\mathcal{K}})\, DF$ pertenece al dominio $\mathrm{Dom}\,(T \otimes I_{\mathcal{K}})^*$ con probabilidad 1. Además, $D_T F = (T \otimes I_{\mathcal{K}})^* (T \otimes I_{\mathcal{K}})\, DF$*

Demostración. ([25], Lema A.3).

Sea $\{F_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}_T(\mathcal{K})$ una secuencia que converge a F en $\mathbb{D}_T^{1,2}(\mathcal{K})$ cuando $n \to \infty$. Usando (A1) se obtiene:

$$E\left[|(T \otimes I_{\mathcal{K}})\,(DF_n - DF)|^2_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}\right] = E\left[|DF_n - DF|^2_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}}\right] \to 0$$

si $n \to \infty$. Por Teorema 2.3 y Lema 2.12, $(T \otimes I_{\mathcal{K}})^*$ es operador cerrado, lo cual significa que:

$$(T \otimes I_{\mathcal{K}})^* (T \otimes I_{\mathcal{K}})\, DF_n \to (T \otimes I_{\mathcal{K}})^* (T \otimes I_{\mathcal{K}})\, DF$$

en $L^2(\Omega; \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{K})$ cuando $n \to \infty$. Pero, por definición, $(T \otimes I_{\mathcal{K}})^* (T \otimes I_{\mathcal{K}})\, DF_n = D_T F_n$, y D_T es un operador cerrado. Se concluye que:

$$E\left[|(T \otimes I_{\mathcal{K}})^* (T \otimes I_{\mathcal{K}})\, DF_n - D_T F|^2_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}\right] \to 0$$

□

4.3. El operador divergencia extendido

Suponiendo una vez más que T es un operador lineal que cumple (A1-A3), se tiene la siguiente definición:

Definición 4.2. Sea $u \in L^2(\Omega; \mathcal{H}_0)$. Se dice que u pertenece a $\mathrm{Dom}(\delta_T)$ si y solo si existe $\delta_T(u) \in L^2(\Omega)$ tal que, para cualquier $F \in \mathcal{S}_T(\mathbb{R})$, se cumple la *relación de dualidad*:

$$E\left[\langle D_T F, u\rangle_{\mathcal{H}_0}\right] = E[F\delta_T(u)] \tag{36}$$

En este caso, la variable aleatoria $\delta_T(u)$ se llama la divergencia extendida de u.

Una consecuencia de (A2) es que si $\delta_T(u)$ existe, esta es única. Este operador es una extensión verdadera; es decir, en $\mathrm{Dom}(\delta)$ ambos operadores coinciden. Además, la relación de dualidad también es cierta para la completación de $\mathcal{S}_T(\mathbb{R})$; esto es, para $F \in \mathbb{D}_T^{1,2}(\mathbb{R})$.

El siguiente lema será necesario para demostrar el Teorema 4.1:

Lema 4.5. *Sea $n \geqslant 1, f \in \mathcal{H}^{\odot n} \otimes \mathcal{H}_0, h \in \mathcal{H}_0$ y $\{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$. Entonces (A1) implica que lo siguiente es cierto:*

$$\langle f, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes h\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_0} = \langle f, T^*Tg_1 \otimes \cdots \otimes T^*Tg_n \otimes h\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes(n+1)}}$$

Demostración. ([25], Lema 2.1)

Sean $\{h_i\}$ y $\{k_i\}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}^{\otimes n}$ y $\mathcal{H}_0$, respectivamente. Se tiene entonces:

$$f = \sum_{i,j} a_{ij} h_i \otimes k_j$$

para alguna secuencia $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i \otimes k_j, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes h \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_0} \\ = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \langle h_i, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \langle k_j, h\rangle_{\mathcal{H}_0}\end{aligned}$$

Por ser T isometría, $\langle Th, Tg\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle h, g\rangle_{\mathcal{H}}$. De la Ecuación 2.14 se concluye:

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \langle h_i, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}} \langle k_j, h\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \left\langle T^{\otimes n}(h_i), T^{\otimes n}(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)\right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}} \langle k_j, h\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ &= \left\langle T^{\otimes n} \otimes I_{\mathcal{H}_0} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i \otimes k_j\right), Tg_1 \otimes \cdots \otimes Tg_n \otimes h \right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes(n+1)}}\end{aligned}$$

Aquí $I_{\mathcal{H}_0}$ es el operador identidad en $\mathcal{H}_0$. Cuando $m \to \infty$, se obtiene por la continuidad del producto interno y de $T^{\otimes n} \otimes I_{\mathcal{H}_0}$:

$$\langle f, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes h \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_0} = \left\langle T^{\otimes n} \otimes I_{\mathcal{H}_0}(f), Tg_1 \otimes \cdots \otimes Tg_n \otimes h \right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes (n+1)}}$$

Por lo que se demuestra el enunciado. □

El siguiente teorema caracteriza a la divergencia extendida de forma análoga al Lema 3.24:

Teorema 4.1. *Asumiendo que (A1-A3) se cumplen, y que $u \in L^2(\Omega; \mathcal{H}_0)$ tiene la representación en caos*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \quad f_n \in \mathcal{H}^{\odot n} \otimes \mathcal{H}_0 \tag{37}$$

entonces $u \in \mathrm{Dom}(\delta_T)$ si y sólo si $\widetilde{f}_n$ (la simetrización de f_n como elemento de $\mathcal{H}_0^{\otimes (n+1)}$) pertenece a $\mathcal{H}^{\odot (n+1)}$ para todo $n \geq 0$, y se cumple:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left| \widetilde{f}_{n-1} \right|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty \tag{38}$$

Entonces:

$$\delta_T(u) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n\left(\widetilde{f}_{n-1}\right). \tag{39}$$

Demostración. ([25], Teorema 3.2).

En primer lugar, note que si $\sum_{j=1}^{k} n_{i_j} = n$, $h \in \mathcal{H}_0$ e I_n es la función de isometría, entonces se tiene: $(n_{i_1})! H_{n_{i_1}}(W(e_{i_1})) \cdots (n_{i_k})! H_{n_{i_k}}(W(e_{i_k})) = I_n(e_{i_1}^{\odot n_{i_1}} \odot \cdots \odot e_{i_k}^{\odot n_{ik}} \otimes h)$. Por el Lema 3.18, se cumple:

$$\begin{aligned} &E\left[\langle h, I_n(f_n)\rangle_{\mathcal{H}_0} (n_{i_1})! H_{n_{i_1}}(W(e_{i_1})) \cdots (n_{i_k})! H_{n_{i_k}}(W(e_{i_k}))\right] \\ &\quad = \begin{cases} n! \left\langle f_n, e_{i_1}^{\otimes n_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^{\otimes n_{ik}} \otimes h \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_0} & \text{si } \sum_{j=1}^{k} n_{i_j} = n \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \end{aligned} \tag{40}$$

Fije $n \geqslant 1$. Sea $\{n_1, \ldots, n_k\}$ una secuencia finita de enteros positivos tal que se cumple: $n_1 + \cdots + n_k = n$ y sea $\{g_1, \ldots, g_k\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$.

Como $H_n'(x) = H_{n-1}(x)$, el teorema de convergencia dominada, la descomposición en caos de u y el Lema 4.5 permiten obtener:

$$E\left[\langle u, D_T\left(n_1! H_{n_1}\left(W\left(g_1\right)\right)\cdots n_k! H_{n_k}\left(W\left(g_k\right)\right)\right)\rangle_{\mathcal{H}_0}\right]$$

$$= E\left[\sum_{j=1}^{k} n_j \left\langle I_{n-1}(f_{n-1}), I_{n-1}\left(\left(g_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes g_{j-1}^{\otimes n_{j-1}}\otimes g_j^{\otimes(n_j-1)}\otimes\cdots\otimes g_{n_k}^{\otimes n_k}\right)\otimes g_j\right\rangle_{\mathcal{H}_0}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{k} n_j (n-1)! \left\langle f_{n-1}, \left(g_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes g_{j-1}^{\otimes n_{j-1}}\otimes g_j^{\otimes(n_j-1)}\otimes\cdots\otimes g_{n_k}^{\otimes n_k}\right)\otimes g_j\right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(n-1)}\otimes\mathcal{H}_0}$$

$$= n! \left\langle f_{n-1}, T^*T\left(g_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes g_{j-1}^{\otimes n_{j-1}}\otimes g_j^{\otimes(n_j-1)}\otimes\cdots\otimes g_{n_k}^{\otimes n_k}\right)\otimes T^*T g_j\right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}}$$

Por el Lema 2.16, esto es igual a:

$$n! \left\langle f_{n-1}, T^*T\left(\operatorname{sim}\left(g_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes g_{j-1}^{\otimes n_{j-1}}\otimes g_j^{\otimes n_j}\otimes\cdots\otimes g_{n_k}^{\otimes n_k}\right)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}}$$

$\Rightarrow$): Sea $F \in \mathcal{S}_T(\mathbb{R})$. Si $\delta_T(u)$ tiene la representación en caos:

$$\delta_T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(v_n\right), \quad v_n \in \mathcal{H}^{\odot n}$$

entonces, por dualidad, Lema 4.5, Lema 2.16 de nuevo y teorema de convergencia dominada se obtiene:

$$E\left[D_T F u\right] = E\left[D_T F \sum_{i=n}^{\infty} I_n\left(v_n\right)\right]$$

$$= n! \left\langle v_n,\, g_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes g_{j-1}^{\otimes n_{j-1}}\otimes g_j^{\otimes n_j-1}\otimes\cdots\otimes g_{n_k}^{\otimes n_k}\otimes g_j\right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$$

$$= n! \left\langle v_n,\, T^*T\left(g_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes g_{j-1}^{\otimes n_{j-1}}\otimes g_j^{\otimes n_j-1}\otimes\cdots\otimes g_{n_k}^{\otimes n_k}\otimes g_j\right)\right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}}$$

$$= n! \left\langle v_n,\, T^*T\left(\operatorname{sim}\left(g_1^{\otimes n_1}\otimes\cdots\otimes g_{j-1}^{\otimes n_{j-1}}\otimes g_j^{\otimes n_j}\otimes\cdots\otimes g_{n_k}^{\otimes n_k}\right)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes n}} \tag{41}$$

Por (A3), Lema 2.3 y la Ecuación 4.3, se tiene que $v_n = f_{n-1}$ y así $\widetilde{f}_{n-1} \in \mathcal{H}^{\odot n}$. Finalmente, por convergencia dominada, el hecho que $\mathrm{Dom}(\delta_T)$ y el Lema 3.18, se tiene:

$$E[\delta_T^2(u)] = E\left[\left(\sum_{l=0}^{\infty} I_l(\widetilde{f}_{l-1})\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\widetilde{f}_{n-1}\right)\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\widetilde{f}_{n-1}\right) I_l\left(\widetilde{f}_{l-1}\right)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n! \left|\widetilde{f}_{n-1}\right|^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty$$

$\Leftarrow$): Sea $F = f\left(W\left(g_1\right), \ldots, W\left(g_k\right)\right)$ una variable aleatoria en $\mathcal{S}_T(\mathbb{R})$, y sea $\mathcal{K}$ el subespacio lineal de $\mathcal{H}$ generado por $\{g_1, \ldots, g_k\}$. F tiene la descomposición en caos:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(k_n\right), \quad k_n \in \mathcal{K}^{\odot n}$$

Por el teorema de convergencia dominada, Ecuación 41, Lema 2.16 y Lema 4.5, se concluye:

$$\begin{aligned} E\left\langle u, D_T F\right\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\left\langle f_n, \left(T^*T\right)^{\otimes(n+1)}\left(k_{n+1}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes(n+1)}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\left\langle \widetilde{f}_n, \left(T^*T\right)^{\otimes(n+1)}\left(k_{n+1}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\otimes(n+1)}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\left\langle \widetilde{f}_n, k_{n+1}\right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} \\ &= E\left(F\sum_{n=1}^{\infty} I_n\left(\widetilde{f}_{n-1}\right)\right). \end{aligned}$$

Esto completa la prueba. □

El siguiente resultado es auxiliar para demostrar el lema a continuación:

Lema 4.6. *Sean $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $u \in \mathbb{D}_T^{1,2}(\mathcal{K})$. Luego $\phi\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)$ pertenece a $\mathbb{D}_T^{1,2}(\mathcal{K})$ y:*

$$D_T\left(\phi\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)\right) = 2\phi'\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)\left((T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)Du\right)^*(u)$$

Demostración. ([25], Lema 2.4).

Suponga que $u = fk \in \mathcal{S}_T(\mathcal{K})$, donde $f \in \mathcal{S}_T(\mathbb{R})$, $k \in \mathcal{K}$. Para $h \in \mathcal{H}_0$, se define el operador:

$$(D_T u)(h) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}k\langle T^*Th_i,\, h\rangle_{\mathcal{H}_0}$$

Y su adjunta es entonces, para $v \in \mathcal{K}$:

$$(D_T u)^*(v) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}T^*Th_i\langle k,\, v\rangle_{\mathcal{K}}$$

Si $v = u$:

$$(D_T u)^*(v) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}T^*Th_i f\|k\|_{\mathcal{K}}^2$$

Luego se tiene:

$$D_T\left(\phi\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)}{\partial x_i}T^*Th_i$$

y:

$$\frac{\partial\phi\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)}{\partial x_i} = 2\phi'\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)f\frac{\partial f}{\partial x_i}\|k\|_{\mathcal{K}}^2 = 2\phi'\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)(D_T u)^*(u)$$

Esto muestra que el resultado es cierto para $u \in \mathcal{S}_T(\mathcal{K})$. Sea ahora $(F_n)_n \subseteq \mathcal{S}_T(\mathcal{K})$ una secuencia tal que:

$$\|F_n - u\|_{1,2,T} \to 0, \quad \text{si } n \to \infty$$

Por la continuidad de ϕ, del valor absoluto, y al ser D_T cerrado, claramente:

$$D_T\left(\phi\left(|F_n|_{\mathcal{K}}^2\right)\right) \to D_T\left(\phi\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)\right)$$

en probabilidad. Note que, si $F_n = f_n k_n$:

$$\left|\left((T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)DF_n\right)^*(F_n)\right|_{\mathcal{H}_0} = |f_n|\,|k_n|_{\mathcal{K}}\left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}T^*Th_i\right|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}} = |F_n|_{\mathcal{K}}\,|D_T(F_n)|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
&\left|\phi'\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)\left((T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)Du\right)^*(u) - \phi'\left(|F_n|_{\mathcal{K}}^2\right)\left((T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)DF_n\right)^*(F_n)\right|_{\mathcal{H}_0}\\
&\qquad\le \left|\phi'\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)\right||u|_{\mathcal{K}}\,|(T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)(Du-DF_n)|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}\\
&\qquad\quad + \left|\phi'\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)\right||(T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)DF_n|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}\,|u-F_n|_{\mathcal{K}}\\
&\qquad + \left|\phi'\left(|u|_{\mathcal{K}}^2\right)-\phi'\left(|F_n|_{\mathcal{K}}^2\right)\right||(T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)DF_n|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}\,|F_n|_{\mathcal{K}} \to 0
\end{aligned}$$

donde el límite es en probabilidad. Ya que D_T es cerrado y ϕ y sus derivadas son acotadas, se sigue:

$$\begin{aligned}
&\left|\phi'\left(|F_n|_{\mathcal{K}}^2\right)\right|\left|\left((T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)DF_n\right)^*(F_n)\right|_{\mathcal{H}_0}\\
&= \left|\frac{1}{2}\frac{d}{d\,|F_n|_{\mathcal{K}}}\phi\left(|F_n|_{\mathcal{K}}^2\right)\right||(T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)DF_n|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}\\
&\le C\,|(T\otimes I_{\mathcal{K}})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{K}}\right)DF_n|_{\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}}
\end{aligned}$$

Esto demuestra la proposición. □

El siguiente lema muestra que la divergencia extendida cumple una propiedad local:

Lema 4.7. *Sea $u \in \mathrm{Dom}^*(\delta)\cap \mathbb{D}_T^{1,2}(\mathcal{H}_0)$ y sea $A\in\mathcal{F}$ tal que $u=0$ en A. Entonces $\delta(u)=0$ en A con probabilidad 1.*

Demostración. ([25], Proposición 3.3).

Sea $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ una función en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi(0)=1$ y su soporte está contenido en $[-1,1]$. Para $\varepsilon>0$, sea $\phi_\varepsilon(x)=\phi(x/\varepsilon)$. Finalmente, sea $F = f\left(W(g_1),\ldots,W(g_n)\right)$ un miembro de $\mathcal{S}_T(\mathbb{R})\cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces, la relación de dualidad y el lema anterior dan como resultado:

$$\begin{aligned}
&E\left[\delta_T(u)\phi_\varepsilon\left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2\right)F\right] = E\left[\left\langle D_T\phi_\varepsilon\left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2\right),Fu\right\rangle_{\mathcal{H}_0}\right] + E\left[\left\langle D_TF,\phi_\varepsilon\left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2\right)u\right\rangle_{\mathcal{H}_0}\right]\\
&= E\left[2F\left\langle\left((T\otimes I_{\mathcal{H}_0})^*\left(T\otimes I_{\mathcal{H}_0}\right)Du\right)^*(u),\phi_\varepsilon'\left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2\right)u\right\rangle_{\mathcal{H}_0}\right] + E\left[\left\langle D_TF,\phi_\varepsilon\left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2\right)u\right\rangle_{\mathcal{H}_0}\right]
\end{aligned}$$

Se tienen dos casos:

1. Si $|u|_{\mathcal{H}_0} = 0$, entonces los productos internos son cero.

2. Si $|u|_{\mathcal{H}_0} \neq 0$, entonces:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \phi_\varepsilon' \left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2 \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \phi_\varepsilon \left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2 \right) = 0$$

y se concluye entonces:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2F \left\langle \left(\left(T \otimes I_{\mathcal{H}_0} \right)^* \left(T \otimes I_{\mathcal{H}_0} \right) Du \right)^* (u), \phi_\varepsilon' \left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2 \right) u \right\rangle_{\mathcal{H}_0} + \left\langle D_T F, \phi_\varepsilon \left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2 \right) u \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = 0$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_T(u) \phi_\varepsilon \left(|u|_{\mathcal{H}_0}^2 \right) F = \delta_T(u) \mathbf{1}_{\left[|u|_{\mathcal{H}_0}^2 = 0 \right]} F$$

El teorema de convergencia dominada y el Lema 2.3 permiten deducir que:

$$\delta_T(u) \mathbf{1}_{\left[|u|_{\mathcal{H}_0}^2 = 0 \right]} = 0 \quad \text{casi seguramente,}$$

con lo que se termina la demostración. □

En base al lema anterior, se puede localizar a δ de la siguiente manera: decimos que $u \in \left(\mathrm{Dom}^*(\delta) \right)_{\mathrm{loc}}$ si existe una secuencia $\left\{ \left(\Omega_n, u^{(n)} \right) : n \geqslant 1 \right\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathbb{D}_T^{1,2} \left(\mathcal{H}_0 \right)$ tal que $\Omega_n \uparrow \Omega$ y $u = u^{(n)}$ en Ω_n con probabilidad 1. En este caso, se define:

$$\delta(u)|_{\Omega_n} = \delta \left(u^{(n)} \right), \quad n \geqslant 1$$

4.4. Aplicación al movimiento browniano fraccionario

Con los resultados expuestos anteriormente, se muestra ahora que existe un operador T y espacios $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$ adecuados que satisfacen las condiciones (A1), (A2) y (A3), si el proceso gaussiano W es un movimiento browniano fraccionario B^H. Esto servirá para probar que $B^H \in \left(\mathrm{Dom}(\delta_T) \setminus \mathrm{Dom}(\delta) \right)$ cuando $H \in \left(0, \frac{1}{4} \right)$.

En primer lugar, sea $\mathcal{H}$ el espacio definido en la Ecuación 22; es decir, el espacio de Hilbert índice para el movimiento browniano fraccionario. Se probará ahora que $L^2([0,a])$ funciona como el espacio $\mathcal{H}_0$.

Lema 4.8. *El espacio $\mathcal{H}$ está inmerso de forma densa y continua en $L^2([0,a])$.*

Demostración. ([25], Proposición 4.1).

Sea $f \in \mathcal{H}$. Entonces existe $\phi_f \in L^2([0,a])$ tal que:

$$\begin{aligned}\int_0^a (f(u))^2 du &\leq C_\alpha \int_0^a \left(\int_u^a (\frac{u}{r})^\alpha (r-u)^{\alpha-1} \phi_f(r) dr \right)^2 du \\ &\leq C_\alpha \int_0^a \left(\int_u^a (r-u)^{\alpha-1} \phi_f(r) dr \right)^2 du \\ &\leq C_{\alpha,a} \int_0^a \left(\int_u^a (r-u)^{\alpha-1} \phi_f^2(r) dr \right) du \\ &= C_{\alpha,a} \int_0^a \left(\int_0^r (r-u)^{\alpha-1} \phi_f^2(r) du \right) dr \\ &\leq C_{\alpha,a} \int_0^a \phi_f(u)^2 du\end{aligned}$$

Esto muestra la inclusión continua. Las funciones indicadores están contenidas en $\mathcal{H}$ [36], por lo que la proposición queda demostrada. □

Sea ahora el operador lineal $T : \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$, donde $\mathcal{H}_0 = L^2([0,a])$, definido de la siguiente manera (C_H con la misma descripción que en el Lema 3.8):

$$(Tf)(u) = C_H u^\alpha D_{a-}^\alpha \left(s^{-\alpha} f(s) \right)(u) = C_H \phi_f(u) \tag{42}$$

El siguiente lema da una expresión explícita de la adjunta:

Lema 4.9. *Sea $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ una función tal que el mapeo $u \mapsto u^\alpha g(u)$ pertenezca a $I_{0+}^\alpha (L^q([0,a]))$ para algún $q > \alpha^{-1} \vee H^{-1}$. Entonces, $g \in D(T^*)$ y para $u \in [0,a]$:*

$$(T^* g)(u) = C_H u^{-\alpha} D_{0+}^\alpha \left(s^\alpha g(s) \right)(u)$$

Demostración. ([25], Proposición 4.2).

La función $u^{-\alpha} f(u)$ es miembro de $I_{a-}^\alpha (L^1([0,a]))$. Como $q > H^{-1} > 2$, la parte derecha de la ecuación anterior es miembro de $L^2([0,a])$. La condición $q > \alpha^{-1}$ implica que $1 + 1/q \leq 1 + \alpha$. Entonces el Lema 1.11 se puede aplicar y resulta en:

$$\int_0^a (Tf)(u) g(u) du = C_H \int_0^a u^\alpha g(u) D_{a-}^\alpha \left(s^{-\alpha} f(s) \right)(u) du = C_H \int_0^a u^{-\alpha} f(u) D_{0+}^\alpha \left(s^\alpha g(s) \right)(u) du$$

En consecuencia, la propiedad de adjunta indica que $g \in D(T^*)$ y se cumple la proposición. □

Lema 4.10. *El operador T dado en la Ecuación 42 cumple las condiciones $(A1), (A2)$ y $(A3)$.*

Demostración. ([25], Proposición 4.3).

Por la definición del operador T, se tiene que para cualquier $f \in \mathcal{H}$:

$$|Tf|_{\mathcal{H}_0} = |Tf|_{L^2([0,a])} = C_H^{1/2} |\phi_f|_{L^2([0,a])} = |f|_{\mathcal{H}}.$$

por lo que se cumple (A1). Defínase ahora el siguiente conjunto:

$$\mathcal{H}_* = \left\{ f \in \mathcal{H} : \exists f^* \in L^\infty([0,a]) \text{ tal que } \quad \phi_f(u) = u^{-\alpha} I_{0^+}^\alpha \left(s^\alpha f^*(s) \right)(u) \right\}$$

El lema anterior implica que para cualquier $f \in \mathcal{H}_*$, ϕ_f pertenece a $\mathcal{D}(T^*)$. Luego $\mathcal{H}_* \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$. Basta probar entonces que $\mathcal{H}_*$ es denso en $\mathcal{H}$. Esto pasa si y sólo si el conjunto

$$L_*^2 = \left\{ f : [0,a] \to \mathbb{R} : \exists f^* \in L^\infty([0,a]) \text{ tal que } f(u) = u^{-\alpha} I_{0^+}^\alpha \left(s^\alpha f^*(s) \right)(u) \right\}$$

es denso en $L^2([0,a])$. Para ver esto, sea $g \in L^2([0,a])$ tal que, para cualquier $f^* \in L^\infty([0,a])$:

$$0 = \int_0^a g(u) u^{-\alpha} I_{0^+}^\alpha \left(s^\alpha f^*(s) \right)(u) du$$

Por Lema 1.11, se tiene:

$$0 = \int_0^a I_{a-}^\alpha \left(s^{-\alpha} g(s) \right)(u) u^\alpha f^*(u) du$$

Al ser $L^\infty([0,a])$ denso en $L^1([0,a])$, se concluye por el Lema 1.10 que:

$$I_{a-}^\alpha \left(s^{-\alpha} g(s) \right) = 0 \to g(s) = 0$$

En consecuencia, el uso del Lema 2.2 permite ver que L_*^2 es denso en $L^2([0,a])$.

Finalmente, sea $f \in \mathcal{H}_*$. Cálculos directos muestran que $T^*Tf = C_H^2 f^*$, donde $f^* \in L^\infty([0,a])$. Entonces $L^\infty([0,a]) \subseteq \mathcal{T}_{L^2([0,a])}$, y se cumple $(A3)$ al ser $L^\infty([0,a])$ denso en $\mathcal{H}_0$. □

Con todos estos preliminares, se puede ahora enunciar el resultado más importante de este capítulo:

Teorema 4.2. *B^H pertenece a* $\mathrm{Dom}(\delta_T)$.

Demostración. ([25], Proposición 4.4).

Por la isometría entre el espacio gaussiano B^H y $\mathcal{H}$, se sabe que: $B_t^H = I_1\left(1_{[0,t]}\right) \in L^2\left(\Omega; L^2([0,a])\right)$. La simetrización de $1_{[0,t]}$ como elemento de $\left(L^2([0,a])\right)^{\otimes 2}$ es $1_{[0,t]}(\cdot) = \frac{1}{2}(1 \otimes 1)$. Al ser las funciones indicadoras miembros de $\mathcal{H}$, es claro que $\frac{1}{2}(1 \otimes 1) \in \mathcal{H}^{\odot 2}$. Por el Teorema 4.1, se concluye el resultado. □

5. La integral de Stratonovich extendida

El operador divergencia es solamente una de las formas en las que se puede generar un concepto de integral estocástica con respecto al movimiento browniano fraccionario. Diversos autores han usado integrales de Stratonovich generalizadas para este fin; como se vio en el Capítulo 3, las fórmulas de cambio de variable para éstas suelen ser más simples.

El propósito de este capítulo es proponer una nueva integral tipo Stratonovich en sentido débil, el cual posee diversas ventajas con respecto a otras integrales propuestas anteriormente. Se discuten algunas de sus propiedades, se provee de una fórmula tipo Itô y se resuelven algunos tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas que involucran esta integral.

5.1. Preliminares

Una de las integrales estocásticas más usadas con respecto al movimiento browniano fraccionario es la integral simétrica propuesta por Russo y Vallois [46]:

Definición 5.1. La integral simétrica $\int_0^T u_r \circ dB_r$ de un proceso u con trayectorias integrables, respecto a un movimiento browniano fraccionario B^H se define, cuando este límite existe, como:

$$P\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T u_s \left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds \tag{43}$$

Esta integral tiene ventajas con respecto al operador de divergencia usual; por ejemplo, el proceso B^H_t siempre es integrable para cualquier $H \in (0,1)$ [7]. Si el integrando u está en el dominio de ambos tipos de integrales, el valor de la integral simétrica es igual al valor del operador de divergencia más un término adicional, llamado de traza.

Lema 5.1. *Sea $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ miembro de $\mathbb{D}^{1,2}(\mathbb{R})$. Suponga que existe el siguiente límite en probabilidad:*

$$\operatorname{Tr} Du := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \left\langle Du_s, \mathbf{1}_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}} ds$$

Entonces la integral simétrica de u existe y es igual a:

$$\int_0^T u_t \circ dB_t = \delta(u) + \operatorname{Tr} Du$$

Demostración. ([33], Proposición 5.2.4). □

Ya que esta integral es una generalización de la integral de Stratonovich, es natural preguntarse sobre la existencia de una fórmula de Itô análoga al Lema 3.9. Si $H \in (1/4, 1)$, una fórmula similar se cumple para integrandos de la forma $g(B_t^H)$, donde $g \in C^4(\mathbb{R})$ (Gradinaru et al. [14]). Posteriormente, Gradinaru et al. [15] probaron que la identidad anterior se cumple para todo $g \in C^6(\mathbb{R})$ si y sólo si $H \in (1/6, 1)$. En efecto, el integrando $\left(B_t^H\right)^2$ no está en el dominio de la integral simétrica para cualquier $H \in (0, 1/6)$ [7].

Por supuesto, el hecho que procesos de la forma $p\left(B_t^H\right)$, p polinomio, no se puedan integrar con la integral simétrica para todo H supone una desventaja, así como la falta de una fórmula de Itô para $H \leq 1/6$. El límite en probabilidad también dificulta el estudio de la integral. Sin embargo, se puede definir una nueva integral, inspirada en la integral simétrica, que logra obviar estos problemas.

5.2. Definición y algunos resultados

Sea ahora T el operador definido en el capítulo anterior (Ecuación 42), y sea $\mathcal{S}_T = \mathcal{S}_T(\mathbb{R})$ con el concepto dado en la Definición 4.1.

Definición 5.2. Sea $u = \{u_t : t \in [0, T]\}$ un proceso medible con trayectorias integrables tal que: $E\left(\left(\int_0^T |u_t|\, dt\right)^p\right) < \infty$ para algún $p > 2$. Decimos que u pertenece a $D(\delta_S)$ si existe una variable aleatoria cuadrado integrable $\int_0^T u_t \circ dB_t^H$ tal que:

$$\left\langle F, \int_0^T u_t \circ dB_t^H \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\langle F, \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T u_s \left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

dado que este límite exista para cada $F \in \mathcal{S}_T$. En este caso, $\int_0^T u_t \circ dB_t^H$ es llamada la integral de Stratonovich débil de u con respecto a B^H.

Note que esta integral es verdaderamente un límite débil en $L^2(\Omega)$ de acuerdo a la Definición 2.2 y como consecuencia del teorema de representación de Riesz. Por la densidad de $\mathcal{S}_T$, si existe esta variable aleatoria, es única. Note además que $\int_0^T u_S \left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds$ es cuadrado integrable, ya que el Lema 1.6 permite concluir que $\sup_{0\leq s\leq T} \left|B_s^H\right|$ es miembro de $L^p(\Omega)$ para cada $p \geq 1$.

Sea $G \in \mathcal{S}_T$ una variable aleatoria acotada y $u \in D(\delta_S)$. Como para cualquier $F \in \mathcal{S}_T$, $FG \in \mathcal{S}_T$ también, se tiene que Gu pertenece a $D(\delta_S)$ y se cumple:

$$\int_0^T Gu_t \circ dB_t^H = G \int_0^T u_t \circ dB_t^H$$

El siguiente resultado muestra el valor de esta integral débil para cuando el integrando es B_t^H:

Lema 5.2. *Sea $H < \frac{1}{2}$. Entonces B_t^H pertenece a $D(\delta_S)$ y se tiene:*

$$\int_0^T B_s^H \circ dB_s^H = \delta_T\left(B_T^H\right) + \frac{1}{2}T^{2H}$$

Demostración. (León [24], Proposición 3.3).

Sea $\varepsilon > 0$. El Lema 3.23 implica que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T B_s^H \left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds \\
&= \int_0^T \delta\left(B_s^H 1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}(\cdot)\right) ds + \int_0^T \left\langle 1_{[0,s]}, 1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}} ds \\
&= \int_0^T \delta\left(B_s^H 1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}(\cdot)\right) ds + \int_0^T (R(s,(s+\varepsilon)\wedge T) - R(s,(s-\varepsilon)\vee 0)) ds
\end{aligned}$$

El teorema de Fubini y la relación de dualidad implican que, para cualquier $F \in \mathcal{S}_T$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon}E\left[F\int_0^T B_s^H\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds\right] \\
&\quad = \frac{1}{2\varepsilon}E\left[\int_0^T \left\langle D_T F(\cdot), B_s^H 1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}(\cdot)\right\rangle_{L^2([0,T])} ds\right] \\
&+ \frac{1}{4\varepsilon}E\left[F\int_0^T \left[((s+\varepsilon)\wedge T)^{2H} - ((s-\varepsilon)\vee 0)^{2H}\right.\right. \\
&\left.\left. -((s+\varepsilon)\wedge T - s)^{2H} + (s-(s-\varepsilon)\vee 0)^{2H}\right] ds\right] \\
&= E\left[\int_0^T D_T F(r)\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{(r-\varepsilon)\vee 0}^{(r+\varepsilon)\wedge T} B_s^H ds\right) dr\right] \\
&+ \frac{1}{4\varepsilon}E\left[F\int_0^T \left[((s+\varepsilon)\wedge T)^{2H} - ((s-\varepsilon)\vee 0)^{2H}\right.\right. \\
&\left.\left. -((s+\varepsilon)\wedge T - s)^{2H} + (s-(s-\varepsilon)\vee 0)^{2H}\right] ds\right]
\end{aligned}$$

Este término converge a $E\left(\int_0^T D_{\mathcal{T}} F(s) B_s^H ds + HF\int_0^T s^{2H-1} ds\right)$, si $\varepsilon \downarrow 0$. La relación de dualidad y el Teorema 4.2 indican que B_t^H pertenece a $D(\delta_S)$ y

$$\int_0^T B_s^H \circ dB_s^H = \delta_T(B_T^H) + \frac{1}{2}T^{2H}$$

□

A continuación se da el mismo resultado anterior pero usando sumas de Riemann:

Lema 5.3. *Sea $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = T$ una partición del intervalo $[0,T]$ y sea $\alpha \in (0,1)$. El límite débil en $L^2(\Omega)$ de $\sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha B^H_{t_{i+1}} + (1-\alpha)B^H_{t_i}\right)\left(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}\right)$ cuando $|\pi| \to 0$ es igual a $\delta_T(B_T^H) + \frac{1}{2}T^{2H}$ si $\alpha = 1/2$, y no existe para otros valores de α.*

Demostración. El Lema 3.23 permite concluir:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha B^H_{t_{i+1}}+(1-\alpha)B^H_{t_i}\right)\left(B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha B^H_{t_{i+1}}+(1-\alpha)B^H_{t_i}\right)\delta_T(\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]})$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\delta_T\left(\left(\alpha B^H_{t_{i+1}}+(1-\alpha)B^H_{t_i}\right)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\right)+\langle\alpha DB^H_{t_{i+1}}+(1-\alpha)DB^H_{t_i},\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}$$

Para la parte izquierda se tiene, por la relación de dualidad y al ser, en este caso, $\mathcal{H}_0=L^2([0,T])$:

$$\sum_{i=0}^{n-1}E\left[F\delta_T\left(\left(\alpha B^H_{t_{i+1}}+(1-\alpha)B^H_{t_i}\right)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\right]$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}E\left[\int_0^T D_TF(r)\left(\alpha B^H_{t_{i+1}}+(1-\alpha)B^H_{t_i}\right)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(r)dr\right]$$
$$=E\left[\alpha\int_0^T D_TF(r)\left(\sum_{i=0}^{n-1}B^H_{t_{i+1}}\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(r)\right)dr\right]+E\left[(1-\alpha)\int_0^T D_TF(r)\left(\sum_{i=0}^{n-1}B^H_{t_i}\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(r)\right)dr\right]$$

Como $\left|\sum_{i=0}^{n-1}B^H_{t_i}\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\right|\leq\sup_{s\in[0,T]}\left|B^H_s\right|\in L^2(\Omega)$, la continuidad de las trayectorias y el teorema de convergencia dominada permiten concluir:

$$\lim_{|\pi|\to0}\sum_{i=0}^{n-1}E\left[F\delta_T\left(\left(\alpha B^H_{t_{i+1}}+(1-\alpha)B^H_{t_i}\right)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\right]$$
$$=\alpha E\left[\int_0^T D_TF(r)B^H_r dr\right]+(1-\alpha)E\left[\int_0^T D_TF(r)B^H_r dr\right]$$
$$=E\left[\int_0^T D_TF(r)B^H_r dr\right]=E\left[F\delta_T(B^H_T)\right]$$

Por el otro lado, el lado derecho es igual a:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\langle\alpha DB^H_{t_{i+1}}+(1-\alpha)DB^H_{t_i},\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha\langle\mathbf{1}_{[0,t_{i+1}]},\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}+(1-\alpha)\langle\mathbf{1}_{[0,t_i]},\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1})^{2H}-(t_i)^{2H}+(1-2\alpha)(t_{i+1}-t_i)^{2H}$$

Los dos primeros términos forman una suma telescópica igual a $\frac{1}{2}T^{2H}$. Sin pérdida de generalidad, sea la partición equidistante; es decir, $t_{i+1}-t_i=1/n$. En este caso, el tercer término es igual a:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(1-2\alpha)(1/n)^{2H}=\frac{1}{2}(1-2\alpha)n^{1-2H},$$

el cual crece sin cota cuando $n\to\infty$ a menos que $\alpha=1/2$. Esto prueba la proposición. □

En cierto sentido, esto indica que es "correcto" tomar el promedio de $B^H_{t_{i+1}}$ y $B^H_{t_i}$ en la suma de Riemann.

Como consecuencia del Lema 5.2 se tiene el siguiente resultado, el cual es análogo al Lema 5.1:

Teorema 5.1. *Sea $p > 2$ y $u \in \mathbb{D}^{1,2}\left(L^2([0,T])\right) \cap L^p(\Omega \times [0,T]) \cap D(\delta_T)$ un proceso tal que:*

1. *Para cada $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, se cumple:*

$$\left(u_s\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) - \left\langle Du_s, \mathbf{1}_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right) \in L^2(\Omega)$$

   para casi todo $s \in [0,T]$.

2. *Existe una variable aleatoria cuadrado integrable $TrDu$ tal que:*

$$E[F\,TrDu] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} E\left[F \int_0^T \left\langle Du_s, \mathbf{1}_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right]$$

   para cada $F \in \mathcal{S}_T$.

Entonces $u \in D\left(\delta_S\right)$ y:

$$\int_0^T u_s \circ dB^H_s = \delta_{\mathcal{T}}(u) + \operatorname{Tr} Du$$

Demostración. ([24], Teorema 3.6).

La demostración es idéntica a la del Lema 5.2, pero sustituyendo B^H_s y $1_{[0,s]}$ por u_s y Du_s, respectivamente. Como $DB^H_s = 1_{[0,s]}$, el Lema 5.2 es un caso particular de este teorema. □

5.3. Una fórmula de Itô

En esta sección se dará una fórmula de Itô para la integral de Stratonovich débil definida anteriormente. De aquí en adelante, $C^{1,2}_e([0,T] \times \mathbb{R})$ denota a todas las funciones f tales que $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ y ella y sus derivadas están acotadas por exponenciales:

$$\text{máx}\left\{|f(t,x)|, |\partial_t f(t,x)|, |\partial_x f(t,x)|, \left|\partial^2_x f(t,x)\right|\right\} \leq c\exp(C|x|)$$

para $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Tanto c como C son dos constantes positivas. Se usarán las notaciones:

$$B^{H,\varepsilon}_t := \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds, \quad \text{para } t \in [0,T], \quad \varepsilon > 0, \tag{44}$$

y

$$\int_0^t u_s \circ dB_s^H := \int_0^T \left(u_s 1_{[0,t]}(s)\right) \circ dB_s^H, \quad \text{para } t \in [0,T]$$

En primer lugar se analizarán algunos lemas auxiliares para la demostración del teorema principal.

Lema 5.4. *Sea $f \in C_e^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ y $t \in [0,T]$. Entonces se tiene en $L^2(\Omega)$:*

$$f\left(t, B_t^H\right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f\left(t, B_t^{H,\varepsilon}\right), \quad \int_0^t \partial_t f\left(s, B_s^H\right) ds = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \partial_t f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) ds$$

Demostración. ([24], Lema 4.13).

Sean $t \in (0,T]$ y $0 < \varepsilon < t$. En este rango, se tiene por cambio de variable que:

$$B_t^{H,\varepsilon} := \frac{1}{2\varepsilon}\left(\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds - \int_0^{\varepsilon} B_s^H ds\right) \tag{45}$$

Al mismo tiempo, si $0 \leq t \leq \varepsilon$, se tiene:

$$B_t^{H,\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds \tag{46}$$

Al ser las trayectorias de B^H continuas con probabilidad 1, el teorema fundamental del cálculo implica que $B_t^{H,\varepsilon}$ converge a B_t^H casi seguramente si $\varepsilon \downarrow 0$. Además, acotando las integrales anteriores se concluye:

$$\sup_{s\in[0,T]} \left|B_s^{H,\varepsilon}\right| \leq 2 \sup_{s\in[0,T]} \left|B_s^H\right| \tag{47}$$

En consecuencia se tiene, por la desigualdad de Jensen y el Lema 1.7:

$$E\left[\left(\int_0^t \partial_t f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_t f\left(s, B_s^H\right) ds\right)^2\right] \leq E\left[t\int_0^t \left(\partial_t f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_t f\left(s, B_s^H\right)\right)^2 ds\right]$$
$$\leq E\left[2T^2c^2\left(\exp\left(C \sup_{s\in[0,T]} |B_s^{H,\varepsilon}|\right) + \exp\left(C \sup_{s\in[0,T]} |B_s^H|\right)\right)\right] < \infty$$

El primer término tiene cotas similares. Por el teorema de convergencia dominada, se sigue que el resultado es cierto para ambos términos. □

Lema 5.5. *Sean $a, b \in [0,T]$ y $\varepsilon \geq 0$ tal que $a \leq b + \varepsilon$. Luego $\int_a^{b+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds$ pertenece a $\mathbb{D}^{1,2}$ y:*

$$\left\langle D\int_a^{b+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds, \phi \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_a^{b+\varepsilon} \left\langle 1_{[0,s\wedge T]}, \phi \right\rangle_{\mathcal{H}} ds, \quad \textit{para } \phi \in \mathcal{H}$$

Demostración. ([24], Lema 4.14).

Como B_t^H es continuo y $\left(\sup_{s\in[0,T]}\left|B_s^H\right|\right) \in L^2(\Omega)$, se tiene que:

$$\int_a^{b+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i\wedge T}^H \left(t_{i+1}-t_i\right) = \lim_{|\pi|\to 0} S_n,$$

donde el límite es en $L^2(\Omega)$ y $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b+\varepsilon\}$ es una partición del intervalo $[a, b+\varepsilon]$. Note que cada S_n está en el dominio del operador derivada, y además que DS_n es determinista. Por lo tanto, el límite $\int_a^{b+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds$ es cuadrado integrable, determinista, y se encuentra en $\mathbb{D}^{1,2}$ por el Lema 3.21. Finalmente, la relación de dualidad y el teorema de Fubini permiten deducir, para $\phi \in \mathcal{H}$:

$$\left\langle D\int_a^{b+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds, \phi \right\rangle_{\mathcal{H}} = E\left[\left\langle D\int_a^{b+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds, \phi\right\rangle_{\mathcal{H}}\right]$$
$$= E\left[\delta(\phi)\int_a^{b+\varepsilon} B_{s\wedge T}^H ds\right] \quad = \int_a^{b+\varepsilon} E\left[\delta(\phi) B_{s\wedge T}^H\right] ds = \int_a^{b+\varepsilon} \left\langle 1_{[0,s\wedge T]}, \phi\right\rangle_{\mathcal{H}} ds$$

□

Lema 5.6. *Sea $f \in C_e^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$. Entonces:*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left[\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \left|\left\langle \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) DB_s^{H,\varepsilon} - \partial_x^2 f\left(s, B_s^H\right) 1_{[0,s]}, 1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right| ds\right)^2\right] = 0$$

Demostración. ([24], Lema 4.15).

Sea $\varepsilon < T/2$. Por Ecuación 46 se tiene:

$$B_t^{H,\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} B_s^H ds, \quad t \in [0,\varepsilon]$$

Como $f \in C_e^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$, (1,1), (4,16), el Lema 5.5 permite concluir que:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \left|\left\langle \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) DB_s^{H,\varepsilon} - \partial_x^2 f\left(s, B_s^H\right) 1_{[0,s]}, 1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right| ds$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{s+\varepsilon} \left\langle 1_{[0,u]}, 1_{[0,s+\varepsilon]}\right\rangle_{\mathcal{H}} du - \partial_x^2 f\left(s, B_s^H\right)\left\langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,s+\varepsilon]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right| ds$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{s+\varepsilon} R(u, s+\varepsilon) du - \partial_x^2 f\left(s, B_s^H\right) R(s, s+\varepsilon)\right| ds$$
$$\leq \frac{C}{\varepsilon}\exp\left(C\sup_{s\in[0,T]}\left|B_s^H\right|\right)\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{s+\varepsilon} |R(u,s+\varepsilon)| du + |R(s,s+\varepsilon)|\right) ds$$
$$\leq C\exp\left(C\sup_{s\in[0,T]}\left|B_s^H\right|\right)\varepsilon^{2H}$$

Este término converge a 0 en $L^2(\Omega)$ cuando $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}$ como consecuencia del Lema 1.7. Esto comprueba el resultado. □

Lema 5.7. *Sea $f \in C_e^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ y $t\in[0,T]$. Entonces:*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left[\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t\wedge\varepsilon}^{t}\left|\left\langle \partial_x^2 f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)DB_s^{H,\varepsilon}-\partial_x^2 f\left(s,B_s^H\right)1_{[0,s]},1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|ds\right)^2\right]=0$$

Demostración. ([24], Lema 4.16).

Sea $0<\varepsilon<t/2\leq T/2$. Por la Ecuación 45 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\left\langle \partial_x^2 f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)DB_s^{H,\varepsilon}-\partial_x^2 f\left(s,B_s^H\right)1_{[0,s]},1_{[s-\varepsilon,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|ds\\
&\leq\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\left\langle \partial_x^2 f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)D\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}B_{u\wedge T}^H du\right\}-\partial_x^2 f\left(s,B_s^H\right)1_{[0,s]},1_{[s-\varepsilon,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|ds\\
&+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\left\langle \partial_x^2 f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)D\int_0^{\varepsilon}B_u^H du,1_{[s-\varepsilon,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|ds\\
&=I_1^{\varepsilon}+I_2^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Estos términos se estudian en tres pasos:

1. En primer lugar se estudia la convergencia de I_2^{ε} en $L^2(\Omega)$ cuando $\varepsilon\downarrow 0$. Por el Lema 5.5 se tiene:

$$\begin{aligned}
I_2^{\varepsilon}=&\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\partial_x^2 f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)\int_0^{\varepsilon}(R(u,(s+\varepsilon)\wedge T)-R(u,s-\varepsilon))du\right|ds\\
\leq&\frac{C\exp\left(C\sup_{s\in[0,T]}\left|B_s^H\right|\right)}{\varepsilon^2}\left(\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}|R(u,(s+\varepsilon)\wedge T)-R(u,s-\varepsilon)|duds\right.\\
&\left.+\int_{2\varepsilon}^{t}\int_0^{\varepsilon}|R(u,(s+\varepsilon)\wedge T)-R(u,s-\varepsilon)|duds\right)\\
=&\frac{C\exp\left(C\sup_{s\in[0,T]}\left|B_s^H\right|\right)}{\varepsilon^2}\left(I_{2,1}^{\varepsilon}+I_{2,2}^{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

Como $s\in[\varepsilon,2\varepsilon]$, entonces:

$$\begin{aligned}
&|R(u,(s+\varepsilon)\wedge T)-R(u,s-\varepsilon)|\\
=&\left|((s+\varepsilon)\wedge T)^{2H}-(s-\varepsilon)^{2H}+|s-\varepsilon-u|^{2H}-(-u+(s+\varepsilon)\wedge T)^{2H}\right|\\
\leq&(3^{2H}+1)\varepsilon^{2H}
\end{aligned}$$

y en consecuencia se tiene:

$$I_{2,1}^{\varepsilon}\leq C\varepsilon^{2H}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}duds=C\varepsilon^{2+2H}$$

Por otro lado, para $u\in(0,\varepsilon)$ y $v\in(\varepsilon,T]$:

$$|\partial_v R(v,u)|=H\left((v-u)^{2H-1}-v^{2H-1}\right)$$

En consecuencia, el teorema del valor medio permite deducir:

$$\begin{aligned}
I_{2,2}^{\varepsilon} &= \int_{2\varepsilon}^{t}\int_{0}^{\varepsilon} |R(u,(s+\varepsilon)\wedge T) - R(u,s-\varepsilon)|du\,ds \\
&= \int_{2\varepsilon}^{t}\int_{0}^{\varepsilon} \left|\int_{s-\varepsilon}^{(s+\varepsilon)\wedge T} \partial_v R(v,u)dv\right| du\,ds \\
&\leq 2H\varepsilon \int_{2\varepsilon}^{t}\int_{0}^{\varepsilon} \sup|(v-u)^{2H-1} - v^{2H-1}|du\,ds \\
&= C\varepsilon \int_{2\varepsilon}^{t}\int_{0}^{\varepsilon} \left\{(s-2\varepsilon)^{2H-1} - ((s+\varepsilon)\wedge T)^{2H-1}\right\} du\,ds \\
&= C\varepsilon^2 \int_{2\varepsilon}^{t} \left\{(s-2\varepsilon)^{2H-1} - ((s+\varepsilon)\wedge T)^{2H-1}\right\} ds
\end{aligned}$$

Si $0 < t < T$ y ε es lo suficientemente pequeño, se tiene:

$$\begin{aligned}
I_{2,2}^{\varepsilon} &\leq C\varepsilon^2 \int_{2\varepsilon}^{t} \left\{(s-2\varepsilon)^{2H-1} - (s+\varepsilon)^{2H-1}\right\} ds \\
&= C\varepsilon^2 \left[(t-2\varepsilon)^{2H} - (t+\varepsilon)^{2H} + (3\varepsilon)^{2H}\right] \leq C\varepsilon^{2+2H}
\end{aligned}$$

En el caso $t = T$, se tiene para ε suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned}
I_{2,2}^{\varepsilon} \leq & C\varepsilon^2 \int_{2\varepsilon}^{T-\varepsilon} \left\{(s-2\varepsilon)^{2H-1} - (s+\varepsilon)^{2H-1}\right\} ds \\
& + C\varepsilon^2 \int_{T-\varepsilon}^{T} \left\{(s-2\varepsilon)^{2H-1} - (T)^{2H-1}\right\} ds \\
= & C\varepsilon^2 \left|\frac{1}{2H}\left((T-2\varepsilon)^{2H} - (T)^{2H} + (3\varepsilon)^{2H}\right) - T^{2H-1}\varepsilon\right| \leq C\varepsilon^{2+2H}
\end{aligned}$$

Resumiendo, se tiene:

$$I_2^{\varepsilon} \leq \frac{C\exp\left(C\sup_{s\in[0,T]}\left|B_s^H\right|\right)}{\varepsilon^2}\varepsilon^{2+2H},$$

el cual claramente coverge a cero en $L^2(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

2. Ahora se probará que I_1^{ε} también converge a cero en $L^2(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Se puede escribir, sumando y restando términos convenientes:

$$\begin{aligned}
I_1^{\varepsilon} \leq & \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t} \left|\left\langle\left(\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^H\right)\right) 1_{[0,s]}, 1_{[s-\varepsilon,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right| ds \\
& + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t} \left|\left\langle \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right)\left(D\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} B_{u\wedge T}^H du\right\} - 1_{[0,s]}\right), 1_{[s-\varepsilon,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}\right| ds \\
= & I_{1,1}^{\varepsilon} + I_{1,2}^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Veamos primero al término $I_{1,1}^{\varepsilon}$ cuando $t < T$. Si ε es suficientemente pequeño, el teorema del valor medio y el hecho que x^{2H-1} es monotónicamente decreciente

si $x > 0$ permiten concluir:

$$\begin{aligned}
I_{1,1}^{\varepsilon} &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\left(\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H}\right)\right)\left(R(s, s+\varepsilon) - R(s, s-\varepsilon)\right)\right| ds \\
&= \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H}\right)\right|\left((s+\varepsilon)^{2H} - (s-\varepsilon)^{2H}\right) ds \\
&= \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H}\right)\right| 2H\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} x^{2H-1} dx\, ds \\
&\leq H\int_{\varepsilon}^{t}\left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H}\right)\right|(s-\varepsilon)^{2H-1} ds
\end{aligned}$$

Igualmente, si $t = T$ y ε es suficientemente pequeño, el teorema del valor medio indica que:

$$\begin{aligned}
I_{1,1}^{\varepsilon} =& \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H}\right)\right|\left((s+\varepsilon)^{2H} - (s-\varepsilon)^{2H}\right) ds \\
&+ \frac{1}{4\varepsilon}\int_{T-\varepsilon}^{T}\left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H}\right)\right|\left(T^{2H} - (s-\varepsilon)^{2H} + \varepsilon^{2H} - (T-s)^{2H}\right) ds \\
\leq& H\int_{\varepsilon}^{T}\left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H}\right)\right|(s-\varepsilon)^{2H-1} ds \\
&+ H\int_{T-\varepsilon}^{T}\left|\partial_x^2 f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x^2 f\left(s, B_s^{H}\right)\right|\left((T-s)^{2H-1} + (s-\varepsilon)^{2H-1}\right) ds
\end{aligned}$$

Como $f \in C_e^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$, el Lema 5.4, el teorema de Fubini y el teorema de convergencia dominada permiten concluir que $I_{1,1}^{\varepsilon}$ converge a cero en $L^2(\Omega)$ si $\varepsilon \to 0$.

Sólo falta ver que $I_{1,2}^{\varepsilon}$ se va a cero en $L^2(\Omega)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Considere primero el caso $t < T$, usando la notación $G = C\exp\left(C\sup_{s\in[0,T]}\left|B_s^H\right|\right)$. Usando el Lema 5.5 se tiene, para ε suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned}
I_{1,2}^{\varepsilon} &\leq \frac{G}{4\varepsilon^2}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\left[R(u, s+\varepsilon) - R(u, s-\varepsilon) - R(s, s+\varepsilon) + R(s, s-\varepsilon)\right]du\right| ds \\
&\leq C\frac{G}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\left[(s+\varepsilon-u)^{2H} - (u-(s-\varepsilon))^{2H}\right]du\right| ds \\
&= C\frac{G}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon}^{t}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left[\varepsilon - v)^{2H} - (v+\varepsilon)^{2H}\right]dv\right| ds = 0,
\end{aligned}$$

y donde la última igualdad se obtuvo por un cambio de variable y usando propiedades de las funciones impares. Por otra parte, si $t = T$ y ε suficientemente

pequeño, se tiene:

$$\begin{aligned}
I_{1,2}^{\varepsilon} \leq & C\frac{G}{\varepsilon^2}\int_{T-\varepsilon}^{T}\Big|\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}[R(u\wedge T,(s+\varepsilon)\wedge T) \\
& -R(u\wedge T,s-\varepsilon)-R(s,(s+\varepsilon)\wedge T)+R(s,s-\varepsilon)]du\Big|\,ds \\
= & C\frac{G}{\varepsilon^2}\int_{T-\varepsilon}^{T}|\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\left[(T-u\wedge T)^{2H}\right. \\
& \left.-(u\wedge T-(s-\varepsilon))^{2H}+\varepsilon^{2H}-(T-s)^{2H}\right]du|\,ds \\
\leq & C\frac{G}{\varepsilon^2}\int_{T-\varepsilon}^{T}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\varepsilon^{2H}du\,ds=CG\varepsilon^{2H}.
\end{aligned}$$

De ambos casos se concluye que, efectivamente, $I_{1,2}^{\varepsilon}\to 0$ en $L^2(\Omega)$ si $\varepsilon\downarrow 0$.

3. Juntando las conclusiones de los pasos 1 y 2, se ve que el resultado es cierto.

□

Con los resultados anteriores ya expuestos, se puede enunciar el teorema principal de esta sección:

Teorema 5.2. *Sea $f\in C_e^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$. Luego, para $t\in[0,T]$, se tiene que $\partial_x f\left(\cdot,B_{\cdot}^H\right)1_{[0,t]}(\cdot)\in D\left(\delta_S\right)$ y:*

$$f\left(t,B_t^H\right)=f(0,0)+\int_0^t\partial_t f\left(s,B_s^H\right)ds+\int_0^t\partial_x f\left(s,B_s^H\right)\circ dB_s^H$$

Demostración. ([24], Teorema 4.1).

Sea $t\in[0,T]$ y $\varepsilon>0$. El teorema fundamental del cálculo se puede usar para derivar:

$$\begin{aligned}
& f\left(t,B_t^{H,\varepsilon}\right) \\
& \quad =f(0,0)+\int_0^t\partial_t f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)ds+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\partial_x f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T}-B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right)ds \\
& \quad =f(0,0)+\int_0^t\partial_t f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)ds+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\partial_x f\left(s,B_s^{H}\right)\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T}-B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right)ds \\
& \quad +\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\partial_x f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)-\partial_x f\left(s,B_s^{H}\right)\right)\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T}-B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right)ds
\end{aligned}$$

Por el Lema 5.4 y la definición de integral de Stratonovich débil, sólo se tiene que checar la convergencia del último término. Por el Lema 3.23, se concluye que:

$$\begin{aligned}
I_t^{\varepsilon}:= & \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\left(\partial_x f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)-\partial_x f\left(s,B_s^{H}\right)\right)\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T}-B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right)ds \\
= & \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\delta\left(\left(\partial_x f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)-\partial_x f\left(s,B_s^{H}\right)\right)1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right)ds \\
& +\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\left\langle\partial_x^2 f\left(s,B_s^{H,\varepsilon}\right)DB_s^{H,\varepsilon}-\partial_x^2 f\left(s,B_s^{H}\right)1_{[0,s]},1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{\mathcal{H}}ds
\end{aligned}$$

Los Lemas 5.6 y 5.7 permiten concluir que el último término de la expresión anterior converge débilmente a cero cuando $\varepsilon \to 0$. Finalmente, sólo se tiene que ver la convergencia del primer término. Sea $F \in \mathcal{S}_T$. Luego, la relación de dualidad, el teorema de Fubini y la desigualdad de Cauchy-Schwartz permiten concluir:

$$
\begin{aligned}
&E\left[\frac{F}{2\varepsilon}\int_0^t \delta\left(\left(\partial_x f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x f\left(s, B_s^H\right)\right) 1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right) ds\right] \\
&\quad = E\left[\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \left\langle D_T F, \left(\partial_x f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x f\left(s, B_s^H\right)\right) 1_{[(s-\varepsilon)\vee 0,(s+\varepsilon)\wedge T]}\right\rangle_{L^2([0,T])} ds\right] \\
&\quad \leq \left(E\int_0^t \left(\partial_x f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x f\left(s, B_s^H\right)\right)^2 ds\right)^{1/2} \left(E\int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^{(s+\varepsilon)\wedge T} D_T F(r) dr\right)^2 ds\right)^{1/2} \\
&\leq \left(E\int_0^t \left(\partial_x f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x f\left(s, B_s^H\right)\right)^2 ds\right)^{1/2} \left(E\int_0^t \frac{1}{2\varepsilon}\int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^{(s+\varepsilon)\wedge T} \left(D_T F(r)\right)^2 dr ds\right)^{1/2} \\
&\leq \left(E\int_0^t \left(\partial_x f\left(s, B_s^{H,\varepsilon}\right) - \partial_x f\left(s, B_s^H\right)\right)^2 ds\right)^{1/2} \left(E\int_0^{(t+\varepsilon)\wedge T} \left(D_T F(r)\right)^2 dr\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Como f es miembro de $C_e^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$, juntando los resultados anteriores se obtiene que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left(F I_t^{\varepsilon}\right)) = 0$ para cada $F \in \mathcal{S}_T$. Se sigue que $s \mapsto \partial_x f\left(s, B_s^H\right) 1_{[0,t]}(s)$ pertenece $D\left(\delta_S\right)$ y que la fórmula de Itô se cumple. □

Note que esta fórmula de Itô es cierta para toda $H \in (0, 1/2)$, y las condiciones en f son menos restrictivas que las usadas por otros autores (crecimiento no demasiado pronunciado, y $f \in C^2(\mathbb{R})$). El uso de los operadores de divergencia y derivada extendidos permite además trabajar con productos internos en $L^2([0,T])$, los cuales son mucho más fáciles de manipular que aquellos sobre el espacio $\mathcal{H}$ del Lema 3.4.

5.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Stratonovich

Se estudiarán ahora algunas soluciones a la ecuación diferencial estocástica:

$$
X_t = x_0 + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) \circ dB_s^H, \quad t \in [0,T] \tag{48}
$$

Se supone que $x_0 \in \mathbb{R}$ y que $b, \sigma : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones medibles.

Definición 5.3. Decimos que un proceso medible $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ es *solución* a la Ecuación 48 si y sólo si, para cada $t \in [0,T]$, $\left(\sigma(\cdot, X_\cdot) 1_{[0,t]}(\cdot)\right) \in D\left(\delta_S\right)$, y la igualdad se cumple casi seguramente.

Tratar el caso general es difícil. Por lo tanto, se estudiarán solamente dos casos particulares. En el primero, sea la ecuación diferencial:

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s)X_s ds + \int_0^t \sigma X_s \circ dB_s^H, \quad t \in [0,T], \tag{49}$$

donde $x_0, \sigma \in \mathbb{R}$ y $b \in L^1([0,T])$.

Lema 5.8. *Sea $b : [0,T] \to \mathbb{R}$ un proceso continuo. Entonces, el proceso:*

$$X_t = x_0 \exp\left(\int_0^t b(s)ds + \sigma B_t^H\right), \quad t \in [0,T]$$

es solución a la Ecuación 49.

Demostración. ([24], Proposición 4.4).

Observe que la función:

$$f(t,x) = x_0 \exp\left(\int_0^t b(s)ds + \sigma x\right), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$$

pertenece $C_e^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$. Por lo tanto, el resultado es cierto por el Teorema 5.2. □

La estrategia para establecer unicidad es caracterizar las propiedades que tiene la solución encontrada, definir un espacio $\mathcal{A}$ de procesos con estas propiedades, y después probar que sólo un proceso cumple la ecuación diferencial (casi seguramente) en $\mathcal{A}$. Se usará la notación:

$$Y_t^\varepsilon = x_0 + \int_0^t b(s)Y_s ds + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \sigma Y_s \left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds, \quad t \in [0,T],$$

donde $\varepsilon > 0$ y Y son procesos con trayectorias integrables. Considere además la función $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ en $C_b^\infty(\mathbb{R})$ tal que:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} |x| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Sea ahora $\psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $\psi_m(x) = \psi(x/m)$, donde $m \in \mathbb{N}$. Sea $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}\left(L^2([0,T])\right)$ una secuencia que converge a B^H en $L^2\left(\Omega; L^2([0,T])\right)$ casi seguramente, donde F_n tiene la forma:

$$F_n = \sum_{i=1}^{N_n} f_{i,n}\left(B^H\left(\phi_{1,n}\right), \ldots, B^H\left(\phi_{i_n,n}\right)\right) g_{i,n} \tag{50}$$

con $g_{i,n} \in C^1([0,T])$ y $f_{i,n}\left(B^H\left(\phi_{1,n}\right), \ldots, B^H\left(\phi_{i_n,n}\right)\right) \in \mathcal{S}_T$. Note que esta secuencia existe, pues $C^1([0,T])$ es denso en $L^2([0,T])$, $\mathcal{S}_T$ es denso en $L^2(\Omega)$, $B^H \in L^2\left(\Omega; L^2([0,T])\right)$ y como consecuencia del Lema 2.10.

Además, se puede tener una sucesión tal que $F_n(0) = 0$. Esto es posible al cambiar F_n por $F_n\tilde{\psi}_n$, donde $\tilde{\psi}_n : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ es una función en $C_b^\infty(\mathbb{R}_+)$ definida como:

$$\tilde{\psi}_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq \frac{2}{n} \\ 0, & \text{si0} \leq t \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Lema 5.9. *Sea X un proceso como en el Lema 5.8. Entonces:*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left[FX_t^\varepsilon \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(t)\right)\right)\right] = E\left[FX_t \exp\left(-\sigma B_t^H\right)\right]$$

para casi todo $t \in [0,T]$, para todo $F \in \mathcal{S}_T$.

Demostración. ([24], Lema 4.6).

Como $F\exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(t)\right)\right)$ pertenece a $\mathcal{S}_T$, para $t \in [0,T]$ y $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left[FX_t^\varepsilon \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(t)\right)\right)\right] = E\left[FX_t \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(t)\right)\right)\right]$$

Usando las definiciones de ψ_m y F_n, y el teorema de convergencia dominada, se prueba el resultado. □

Lema 5.10. *Sea X el proceso del Lema 5.8. Luego:*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left[\frac{F}{2\varepsilon}\int_0^t X_s \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds \right.$$
$$\left. -F\int_0^t X_s^\varepsilon \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)\psi_m'\left(F_n(s)\right)F_n'(s)ds\right] = 0$$

para casi todo $t \in [0,T]$ y para todo $F \in \mathcal{S}_T$.

Demostración. ([24], Lema 4.8).

Sean $t \in [0,T], \varepsilon > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$. El teorema fundamental del cálculo implica que:

$$\begin{aligned} X_t^\varepsilon \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(t)\right)\right) =& x_0 + \int_0^t b(s)X_s \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right) ds \\ &+ \frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_0^t X_s \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right) ds \\ &- \sigma\int_0^t X_s^\varepsilon \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)\psi_m'\left(F_n(s)\right)F_n'(s)ds \end{aligned}$$

Por el lema anterior y el Lema 5.8, sólo se tiene que mostrar que:

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} E\left[F\int_0^t b(s)X_s \exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right) ds\right] = E\left[F\int_0^t b(s)X_s \exp\left(-\sigma B_s^H\right) ds\right]$$

Por Cauchy-Schwartz se tiene:

$$
\begin{aligned}
&E\left[|F|\int_0^t |b(s)X_s|\left|\exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)-\exp\left(-\sigma B_s^H\right)\right|ds\right]\\
&\leq C\left(E\int_0^T |FX_s|^2\,ds\right)^{1/2}\left(E\int_0^T\left(\exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)-\exp\left(-\sigma B_s^H\right)\right)^2 ds\right)^{1/2}\\
&\leq C\left(E\int_0^T\left(\exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)-\exp\left(-\sigma\psi_m\left(B_s^H\right)\right)\right)^2 ds\right)^{1/2}\\
&+C\left(E\int_0^T\left(\exp\left(-\sigma\psi_m\left(B_s^H\right)\right)-\exp\left(-\sigma B_s^H\right)\right)^2 ds\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Por el Lema 1.7 y convergencia dominada, los últimos dos términos convergen a cero cuado n, m tienden a ∞. Por lo tanto, el resultado es cierto. □

Podemos ahora definir la familia $\mathcal{A}$ de todos los procesos Y tales que:

1. Y es un proceso continuo en $L^p(\Omega\times[0,T])$ para algún $p>2$.
2. Existe una secuencia $\{F_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq \mathcal{S}\left(L^2([0,T])\right)$ que converge a B^H en $L^2\left(\Omega; L^2([0,T])\right)$ casi seguramente. Además, se asume que F_n tiene la forma de la Ecuación 50, donde $g_{i,n}\in C^1([0,T])$, $g_{i,n}(0)=0$ y $f_{i,n}\left(B^H\left(\phi_{1,n}\right),\ldots,B^H\left(\phi_{i_n,n}\right)\right)\in \mathcal{S}_T$.
3. Para casi todo $t\in[0,T]$,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left[FY_t^\varepsilon\exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(t)\right)\right)\right]=E\left[FY_t\exp\left(-\sigma B_t^H\right)\right],$$

   para todo $F\in\mathcal{S}_T$.
4. Para casi todo $t\in[0,T]$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\Bigg[&\frac{F}{2\varepsilon}\int_0^t Y_s\exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T}-B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right)ds\\
&-F\int_0^t Y_s^\varepsilon\exp\left(-\sigma\psi_m\left(F_n(s)\right)\right)\psi_m'\left(F_n(s)\right)F_n'(s)ds\Bigg]=0,
\end{aligned}
$$

   para todo $F\in\mathcal{S}_T$.

En este espacio se puede probar unicidad de la siguiente manera:

Lema 5.11. *Sea $Y\in\mathcal{A}$ una solución de la Ecuación 49. Entonces $Y=X$ en $L^p(\Omega\times[0,T])$.*

Demostración. ([24], Proposición 4.9).

Se tiene que el Lema 5.10 también es cierto si se reemplazan X y X^ε por Y y Y^ε. Procediendo de la misma manera, y usando las propiedades de la familia $\mathcal{A}$, se tiene:

$$E\left[FY_t \exp\left(-\sigma B_t^H\right)\right] = E\left[F\left(x_0 + \int_0^t b(s)Y_s \exp\left(-\sigma B_s^H\right) ds\right)\right]$$

para casi todo $t \in [0,T]$ y para todo $F \in \mathcal{S}_T$. Dado que $\mathcal{S}_T$ es denso en $L^2(\Omega)$, se tiene:

$$Y_t \exp\left(-\sigma B_t^H\right) = x_0 + \int_0^t b(s)Y_s \exp\left(-\sigma B_s^H\right) ds, \quad \text{casi seguramente}$$

Como Y es un proceso continuo, se tiene que:

$$Y_t \exp\left(-\sigma B_t^H\right) = x_0 \exp\left(\int_0^t b(s)ds\right),$$

lo cual prueba el resultado. □

En segundo lugar consideraremos ecuaciones de la forma:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma\left(X_s\right) \circ dB_s^H, \quad t \in [0,T], \tag{51}$$

y donde $\sigma \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$. Para resolver esta ecuación se usará el teorema de Doss:

Teorema 5.3. *Sea la ecuación diferencial estocástica:*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma\left(Y_s\right) \diamond dM_s + \int_0^t b\left(Y_s\right) ds$$

donde σ, b son Lipschitz, $\sigma \in C^2(\mathbb{R})$, M es un proceso con trayectorias continuas y $\diamond$ es un tipo de integración estocástica que satisface una fórmula tipo Itô:

$$f(X,Y) = f(X_0,Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\left(X_s,Y_s\right) \diamond dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}\left(X_s,Y_s\right) Y_s' ds,$$

para $f \in C^2(\mathbb{R})$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) &= \sigma(\alpha(x,y)) \\ \alpha(0,y) &= y, \end{aligned}$$

definida para todo $x, y \in \mathbb{R}$, y la cual existe y es única por ser σ Lipschitz. Entonces, la ecuación diferencial estocástica tiene una solución continua, y además se verifican las identidades:

1. $\forall y, z \in \mathbb{R}: \quad y = \alpha(-z, \alpha(z,y))$.

2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad \alpha(x, y) = \alpha(x - z, \alpha(z, y))$.

3.
$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(x, y) = \sigma'(\alpha(x, y))\sigma(\alpha(x, y))$$

4.
$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y) = \exp\left(\int_0^x \sigma'(\alpha(s, y))ds\right)$$

Demostración. ([11]).

En primer lugar, suponga que α es solución a la ecuación diferencial ordinaria anterior. Como esta solución es única, se puede probar lo siguiente:

1. $\forall y, z \in \mathbb{R}: \quad y = \alpha(-z, \alpha(z, y))$.

2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad \alpha(x, y) = \alpha(x - z, \alpha(z, y))$. Esto es pues $\alpha(x - z, \alpha(z, y))$ cumple con la ecuación diferencial, y por el punto anterior:
$$\alpha(0 - z, \alpha(z, y)) = y = \alpha(0, y)$$

3.
$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(x, y) = \sigma'(\alpha(x, y))\sigma(\alpha(x, y))$$
Se prueba directamente por regla de la cadena.

4.
$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y) = \exp\left(\int_0^x \sigma'(\alpha(s, y))ds\right)$$
Para ver esto, sea $f = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y)$. Derivando esto con respecto a x, se ve que:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \alpha}{\partial y \partial x} = \sigma'(\alpha(x, y))\frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y) = \sigma'(\alpha(x, y))f$$
El resultado se sigue de resolver la ecuación diferencial.

Sea ahora $\omega \in \Omega$, y sea la función $f_\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_\omega(t, x) = \exp\left(-\int_0^{M_t(\omega)} \sigma'(\alpha(s, x))ds\right) \cdot b\left(\alpha\left(M_t(\omega), x\right)\right)$$

Por las hipótesis en σ, b y M, $f_\omega(t, x)$ es continua y localmente Lipschitz en x. Luego existe una solución maximal $(D_t(\omega))_{t \geq 0}$ de la ecuación diferencial :

$$D'_t(\omega) = f_\omega\left(t, D_t(\omega)\right)$$
$$D_0(\omega) = Y_0(\omega)$$

Esto es pues σ' siempre es acotado (al ser σ Lipschitz), por lo que existen constantes que no dependen de σ, b tales que:

$$|D'_t(\omega)| \leq K_1^T(\omega) + K_2^T(\omega)\,|D_t(\omega)| \quad \forall t \in [0,T]$$

y por tanto:

$$|D_t(\omega)| \leq TK_1^T(\omega) + |Y_0(\omega)| + K_2^T(\omega)\int_0^t |D_s(\omega)|\,ds \quad \forall t \in [0,T]$$

Por el lema de Grönwall, se obtiene:

$$|D_t(\omega)| \leq \left(TK_1^T(\omega) + |Y_0(\omega)|\right)\exp\left(TK_2^T(\omega)\right)$$

y así la solución maximal está definida para todo $t > 0$.

Considere ahora el proceso $Y_t = \alpha(M_t, D_t)$. Luego, sustituyendo en la fórmula de Itô, se obtiene:

$$\begin{aligned}
Y_t - Y_0 &= \alpha(M_t, D_t) - \alpha(M_0, D_0) \\
&= \int_0^t \frac{\partial \alpha}{\partial x}(M_s, D_s) \diamond dM_s + \int_0^t \frac{\partial \alpha}{\partial y}(M_s, D_s)\, D'_s ds \\
&= \int_0^t \sigma\left(\alpha\left(M_s, D_s\right)\right) \diamond dM_s \\
&+ \int_0^t \exp\left(\int_0^{M_s} \sigma'\left(\alpha\left(u, D_s\right)\right) du\right) \cdot \exp\left(-\int_0^{M_s} \sigma'\left(\alpha\left(u, D_s\right)\right) du\right) b\left(\alpha\left(M_s,\, D_s\right)\right) ds \\
&= \int_0^t \sigma\left(Y_s\right) \diamond dM_s + \int_0^t b\left(Y_s\right) ds
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

El teorema anterior es muy versátil, ya que se puede adaptar a diferentes tipos de integrales, conque tengan una fórmula de Itô adecuada. Gracias a este resultado, se puede ahora ver la existencia de una solución a la Ecuación 51:

Lema 5.12. *Asuma que $\sigma \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$. Luego, el proceso*

$$X_t = \alpha\left(B_t^H, x_0\right), \quad t \in [0,T]$$

es una solución continua a la Ecuación 51.

Demostración. ([24], Proposición 4.10).

La ecuación diferencial auxiliar, de forma análoga al Teorema 5.3, es:

$$\begin{aligned}
\partial_x \alpha(x,y) &= \sigma(\alpha(x,y)), \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\
\alpha(0,y) &= y.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que α pertenece a $C_e^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$. En efecto, por el sistema auxiliar anterior se concluye que:

$$|\alpha(x,x_0)| = \left|x_0 + \int_0^x \sigma(\alpha(u,x_0))\,du\right| \leq |x_0| + |x|\|\sigma\|_\infty, \quad x\in\mathbb{R}$$

Finalmente, usando las propiedades expuestas en el Teorema 5.3 y el sistema auxiliar, se tiene que:

$$|\partial_x\alpha(x,x_0)| = |\sigma(\alpha(x,x_0))| \leq \|\sigma\|_\infty$$
$$\left|\partial_x^2\alpha(x,x_0)\right| = |\sigma'(\alpha(x,x_0))\,\sigma(\alpha(x,x_0))| \leq \|\sigma\|_\infty\|\sigma'\|_\infty$$

Note que para esta integral tipo Stratonovich no se tiene una fórmula de Itô para dos variables aleatorias, por lo que el Teorema 5.3 no se puede aplicar como tal. Sin embargo, si $b=0$, entonces la función α se reduce a un caso de una sola variable, y el resultado se sigue como consecuencia del Teorema 5.2. □

Como en el caso anterior, se analizan ahora las propiedades de esta solución para delimitar un espacio adecuado donde probar unicidad. Sea entonces $\varepsilon>0$. Por Teorema 5.3 se ve que la solución a la ecuación:

$$X_{t,\varepsilon} = x_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \sigma(X_{s,\varepsilon})\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right)ds, \quad t\in[0,T]$$

es el proceso $X_{t,\varepsilon} = \alpha\left(B_t^{H,\varepsilon}, x_0\right)$, donde, para $p>2$, se encuentra en $L^p(\Omega\times[0,T])$. Además, para $t\in[0,T]$, $X_{t,\varepsilon}$ converge a X_t en $L^p(\Omega)$, al ser una consecuencia del Lema 1.7, convergencia dominada y el hecho que $\alpha(\cdot,x_0)\in C_e^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$. Se tiene ahora el siguiente resultado:

Lema 5.13. *Sea X como en el Lema 5.12, $t\in[0,T]$ y $F\in\mathcal{S}_T$. Entonces se cumple:*

$$\lim_{\tilde\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left[F\left(-\frac{1}{2\tilde\varepsilon}\int_0^t \sigma\left(\alpha\left(-B_s^{H,\tilde\varepsilon}, X_{s,\varepsilon}\right)\right)\left(B^H_{(s+\tilde\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\tilde\varepsilon)\vee 0}\right)ds\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \partial_y\alpha\left(-B_s^{H,\tilde\varepsilon}, X_{s,\varepsilon}\right)\sigma(X_{s,\varepsilon})\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right)ds\right)\right] = 0$$

Demostración. ([24], Lema 4.11).

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\alpha\left(-B_s^{H,\tilde\varepsilon}, \alpha\left(B_s^{H,\varepsilon}, x_0\right)\right) = x_0$$
$$- \frac{1}{2\tilde\varepsilon}\int_0^t \sigma\left(\alpha\left(-B_s^{H,\tilde\varepsilon}, X_{s,\varepsilon}\right)\right)\left(B^H_{(s+\tilde\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\tilde\varepsilon)\vee 0}\right)ds$$
$$+ \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \partial_y\alpha\left(-B_s^{H,\tilde\varepsilon}, X_{s,\varepsilon}\right)\sigma(X_{s,\varepsilon})\left(B^H_{(s+\varepsilon)\wedge T} - B^H_{(s-\varepsilon)\vee 0}\right)ds$$

Se tiene además que:

$$F\alpha\left(-B_t^{H,\tilde{\varepsilon}}, X_{t,\varepsilon}\right) \leq |F|\left(|X_{t,\varepsilon}| + \|\sigma\|_\infty |B_t^{H,\tilde{\varepsilon}}|\right)$$

Por el teorema de convergencia dominada y las propiedades de α en Teorema 5.3, se tiene:

$$\lim_{\tilde{\varepsilon}\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left(F\alpha\left(-B_t^{H,\tilde{\varepsilon}}, X_{t,\varepsilon}\right)\right) = E\left(F\alpha\left(-B_t^H, X_t\right)\right) = E\left(F\alpha\left(-B_t^H, \alpha\left(B_t^H, x_0\right)\right)\right) = E\left(Fx_0\right)$$

para todo $F \in \mathcal{S}_T$. Esto prueba la proposición. □

Ahora se introduce la familia $\tilde{\mathcal{A}}$. Decimos que un proceso Y pertenece a $\tilde{\mathcal{A}}$ si y sólo si:

1. Y es un proceso continuo en $L^p(\Omega \times [0,T])$, para algún $p > 2$.
2. Existen dos secuencias $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\left\{\tilde{F}_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ de procesos tales que:
   (a) $F_n, \tilde{F}_n \in C^1([0,T])$ y $F_n(0) = \tilde{F}_n(0) = 0$, para todo $\omega \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$.
   (b) F_n y $\tilde{F}_n$ convergen a B^H en $L^2\left(\Omega; L^2([0,T])\right)$.
3. La solución a la ecuación

$$Y_t^n = x_0 + \int_0^t \sigma\left(Y_s^n\right) F_n'(s)ds, \quad t \in [0,T]$$

   es tal que:
   (c) $\lim_{n\to\infty} E\left[FY_t^n\right] = E\left[FY_t\right]$, para todo $t \in [0,T]$ y $F \in \mathcal{S}_T$.
   (d) Para todo $t \in [0,T]$ y $F \in \mathcal{S}_T$:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\left[F\alpha\left(-\tilde{F}_m(t), Y_t^n\right)\right] = E\left[F\alpha\left(-B_t^H, Y_t\right)\right]$$

   (e) Para todo $t \in [0,T]$ y $F \in \mathcal{S}_T$:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\left[F\left(-\int_0^t \sigma\left(\alpha\left(-\tilde{F}_m(s), Y_s^n\right)\right)\tilde{F}_m'(s)ds + \int_0^t \partial_y\alpha\left(-\tilde{F}_m(s), Y_s^n\right)\sigma\left(Y_s^n\right)F_n'(s)ds\right)\right] = 0$$

Con esto, se puede ahora probar un tipo de unicidad:

Lema 5.14. *Sea $Y \in \mathcal{A}$ una solución de la Ecuación 51. Luego $Y = X$, donde X es como en el Lema 5.12.*

Demostración. ([24], Proposición 4.12).

Aplicando una vez más el teorema fundamental del cálculo al proceso $s \mapsto \left(\alpha\left(-\tilde{F}_m(s), Y_s^n\right)\right)$, y por la definición de $\tilde{\mathcal{A}}$, se tiene que:

$$\alpha\left(-B_t^H, Y_t\right) = x_0, \quad t \in [0,T]$$

Finalmente, usando el Teorema 5.3, se ve que $Y_t = \alpha\left(B_t^H, \alpha\left(-B_t^H, Y_t\right)\right) = \alpha\left(B_t^H, x_0\right) = X_t$. Esto completa la prueba. □

Referencias

[1] Alós, E., Mazet, O., Nualart, D. (2001). Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. *Ann. Probab.* 29: 766–801.

[2] Artin, E. (1964). *The Gamma Function*. Nueva York: Holt, Reinehart & Winston.

[3] Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B. y Zhang, T. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Londres: Springer

[4] Bichteler, K. (2002). *Stochastic Integration with Jumps*. Nueva York: Cambridge University Press.

[5] Bobrowski, A. (2005). *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes: An Introduction.* Nueva York: Cambridge University Press.

[6] Carmona, P., Coutin, L. y Montseny, G. (2000). Approximation of Some Gaussian Processes. *Statistical Inference for Stochastic Processes 3:* 161-171.

[7] Cheridito, P. y Nualart, D. (2005). Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0, 1/2)$. *Ann. I. H. Poincaré-PR 41*: 1049-1081.

[8] Chung, K.L. y Williams, R.J. (1990). *Introduction to Stochastic Integration*. Boston: Birkhäuser.

[9] Da Prato, G. y Jabczyk, J. (1996). *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems.* Nueva York: Cambridge University Press.

[10] Decreusefond, L. y A.S. Üstünel, A.S. (1999). Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Anal. 10*: 177–214.

[11] Doss, H. (1977). Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. B (N.S.)*. 13: 99–125.

[12] Folland, G. (1999). *Real Analyis: Modern Techniques and their Applications.* Nueva York: Wiley.

[13] Friedman, A. (1975). *Stochastic Differential Equations and Applications, Vol. I.* Nueva York: Academic Press.

[14] Gradinaru, M., Russo, F. y Vallois, P. (2003). Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index $H \geq 1/4$. *Ann. Probab.* 31: 1772–1820.

[15] Gradinaru, M., Nourdin, I., Russo, F. y Vallois, P. (2005). m-order integrals and generalized Itô's formula; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index. *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. B (N.S.)* 41: 781-806.

[16] Guichardet, A. (1972). *Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics.* Berlin: Springer.

[17] He, S., Wang, J. y Yan, J. (1990). *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*. Hong Kong: CRC Press, Inc.

[18] Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers.* 116: 770–808.

[19] Itô, K. (1954). Stochastic Integral. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 20: 519–524.

[20] Janson, S. (1997). *Gaussian Hilbert Spaces.* Londres: Cambridge University Press.

[21] Jarrow, R. y Protter, P. (2004). A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880-1970. *Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes- Monograph Series* 45:75-91.

[22] Karatzas, I. y Shreve, S. (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Nueva York: Springer Verlag.

[23] Kolmogorov, A. N. (1940). Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 26: 115–118.

[24] León, J.A. (2020). Stratonovich type integration with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter less than 1/2. *Bernoulli.* 26(3): 2436-2462.

[25] León, J.A. y Nualart, D. (2005). An extension of the divergence operator for Gaussian processes. *Stochastic Processes and their Applications*. 115: 481-492.

[26] Malliavin, P. (1976). Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. En: *Proceedings, International Symposium on S.D.E., Kyoto*, 195-263. Tokyo: Kinokuniya.

[27] Mandelbrot, B.B. (1965). Une classe processus stochastiques homothétiques à soi; application à la loi climatologique H. E. Hurst. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 260: 3274-3277.

[28] Mandelbrot, B.B. y Van Ness, J.W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.* 10: 422–437.

[29] Meyer, P. A. (1967). Intégrales Stochastiques I. *Séminaire de Probabilités I, Lecture Notes in Mathematics.* 39: 72–94.

[30] Norvaiša, R. (2006). Rough Functions: p-Variation, Calculus, and Index Estimation. *Lithuanian Mathematical Journal.* 46:102-128.

[31] Nourdin, I. (2012). *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion.* Bocconi Springer Series 4. Milan: Springer.

[32] Nualart, D. (2003). Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. En *Stochastic Models* (Ciudad de México, 2002). *Contemp. Math.* 336 3–39. Providence, RI: Amer. Math.

[33] Nualart, D. (2006). *The Malliavin Calculus and Related Topics, 2nd ed. Probability and Its Applications.* Berlin: Springer

[34] Nualart, D. y Nualart, E. (2018). *Introduction to Malliavin Calculus.* Cambridge: Cambridge University Press.

[35] Øksendal, B. (2000). *Stochastic Differential Equations.* Berlin: Springer.

[36] Pipiras, V. y Taqqu, M.S. (2001). Are classes of deterministic integrands for fractional Brownian motion on an interval complete? *Bernoulli* 7: 873–897.

[37] Privault, N. (1998). Skorohod stochastic integration with respect to non-adapted processes on Wiener space. *Stochastics Stochastics Rep.* 65: 13–39.

[38] Protter, P. (2003). *Stochastic Integration and Differential Equations.* Berlin: Springer.

[39] Reed, M. y Simon, B. (1972). *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis.* Nueva York: Academic Press.

[40] Ross, S.M. (2006). *A first course in probability.* Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.

[41] Ross, S.M. y Peköz, E. (2007). *A second course in probability.* Boston: ProbabilityBookstore.com.

[42] Royden, H.L. y Fitzpatrick, P.M. (2010). *Real Analysis.* Boston: Pearson Prentice Hall.

[43] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* Nueva York: McGraw-Hill.

[44] Rudin, W. (1986). *Real and Complex Analysis* Nueva York: McGraw-Hill.

[45] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis.* Nueva York: McGraw-Hill.

[46] Russo,F. y Vallois, P. (1993). Forward, backward and symmetric stochastic integration. *Probab. Theory Related Fields* 97: 403–421

[47] Ryan, R. (2002). *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces.* London: Springer Verlag.

[48] Samko, S.G., Kilbas, A.A. y Marichev, O.I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers

[49] Samorodnitsky, G. y Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Washington D.C.: Chapman & Hall/CRC.

[50] Taqqu, M.S. (2013). Benoit Mandelbrot and Fractional Brownian Motion. *Statistical Science* 28: 131-134.

[51] Yaglom, A. M. (1955). Correlation theory of processes with random stationary nth increments. *Mat. Sb. N.S.* 37(79): 141–196.

[52] Zadi, N.L. y Nualart, D. (2003). Smoothness of the Law of the Supremum of the Fractional Brownian Motion. *Elect. Comm. in Probab.* 8: 102-111.