

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del  
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Algunas aplicaciones físicas de la solución 2-  
solitónica en Relatividad General**

**Tesis que presenta**

**César Iván Ramos Almada**

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Vladimir Semionovich Manko**

Ciudad de México

Octubre, 2021



# Agradecimientos

Quiero agradecer al CINVESTAV, IPN por las facilidades proporcionadas para realizar mis estudios de maestría, así como al CONACYT por haberme ayudado económicamente durante esta etapa de mi formación. Extiendo estos agradecimientos a todo Departamento de Física, personal administrativo y docentes, cuyo apoyo fue crucial para la culminación de este proyecto. En especial, quiero agradecer a mi asesor de tesis, el Dr. Vladimir S. Manko, primeramente por haberme aceptado como su estudiante y por la atención y apoyo brindado a lo largo de todo este camino, sus valiosas enseñanzas en la materia y sus consejos, tanto en lo académico, como en lo personal.

Agradezco a mi familia, a quienes amo, por ser mi soporte. A mis padres, Fermín y Mayra, por siempre ayudarme y por fungir como guías de vida inigualables, mostrando constantemente su amor y prudencia y colmándome de lecciones. A mi hermana, Glenda, por siempre mostrar su incondicionalidad y cariño, a quien le deseo lo mejor en su vida.

Agradezco a todos mis amigos, cuyo paso por mi vida me ha marcado y enseñado una infinidad de cosas, además de haberme hecho pasar momentos agradables y extraordinarios.

Expreso mis agradecimientos también a la Universidad Autónoma de Nuevo León, donde obtuve mi grado de licenciatura en física, por haberme instruido a este nivel. Incluyo en este agradecimiento a aquellas personas que he conocido durante este camino y que me han brindado también apreciables enseñanzas.

*A mi familia y amigos.*



# Resumen

Se da un repaso de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para espacio-tiempos estacionarios axial-simétricos de electrovacío utilizando la métrica de Papapetrou como elemento de línea. Se revisa el formalismo de Ernst, la introducción de los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  y la reducción de las ecuaciones de Einstein-Maxwell sobre las funciones que aparecen en la métrica y el 4-potencial electromagnético a dos ecuaciones diferenciales no lineales sobre estos potenciales complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . También se proporcionan las fórmulas integrales del método de Sibgatullin para los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  y posteriormente se presenta la solución  $N$ -solitónica extendida de electrovacío y la especialización del caso  $N = 2$ .

Utilizando el caso particular de la solución 2-solitónica obtenida por el método integral de Sibgatullin, se proporcionan dos soluciones de interés. Primero se presenta una extensión de la solución estacionaria axial-simétrica 4-paramétrica de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, la cual describe los campos exteriores gravitacional y electromagnético de una masa deformada rotante magnetizada. La extensión se presenta como un estado final del colapso de dos agujeros negros, donde el objeto resultante muestra un espacio de parámetros extendido, ya que permite que los valores de las masas del estado inicial que colapsan para dar paso al estado final sean complejas conjugadas la una de la otra, debido a que esto no afecta la realidad de la métrica ni del comportamiento en el eje presentado. El objeto final cuenta con una estructura de solución más rica que la del estado inicial y se presenta una posible configuración adicional a las configuraciones de la solución original de una manera no trivial, además de que presenta una característica interesante en las singularidades que se calculan. La segunda solución es una generalización con dipolo magnético del modelo con antisimetría ecuatorial de Bretón-Manko, que consta de dos fuentes de Kerr-Newman contrarrotantes separadas por un soporte sin masa. La generalización de la solución no presenta comportamiento de simetría, ni de antisimetría ecuatorial. En ambos casos la solución es construida en todo el espacio y también se presentan singularidades, las superficies de límite estacionario, las líneas de campo magnético y los primeros momentos multipolares no nulos.

# Summary

Einstein-Maxwell equations for stationary axisymmetric electrovacuum space-times are examined using Papapetrou's metric as line element. Ernst complex potentials  $\mathcal{E}$  and  $\Phi$  are introduced, as the Einstein-Maxwell equations for this type of space-times, which contain the metric functions and the electromagnetic 4-potential, are reduced into two non-linear differential equations over the Ernst complex potentials  $\mathcal{E}$  and  $\Phi$  due to Ernst formalism. Integral formulas from Sibgatullin's method for the complex potentials  $\mathcal{E}$  and  $\Phi$  are given and the extended  $N$ -soliton solution for electrovac spacetimes and the  $N = 2$  case of this solution is subsequently presented.

Implementing the particular case of the 2-soliton specialization obtained with the aid of Sibgatullin's integral method, two solutions of interest are supplied. First, an extension for a 4-parameter stationary axisymmetric solution of the Einstein-Maxwell equations which describes the exterior gravitational and electromagnetic fields of a rotating magnetized deformed mass is presented. The extension is presented as the final state of the collapse of two black holes and the resultant object has an extended parameter space structure which permits complex conjugate values for the initial masses, as this does not affect the reality of metric nor the axis data presented. The final object shows a richer solution structure, an additional configuration is added to the final state in a non-trivial manner and the singularities that are calculated reveal an interesting feature. The second solution provided is a generalization with magnetic dipole of the Bretón-Manko binary counterrotating Kerr-Newman sources separated by a massless strut. The generalization of the solution does not display equatorial symmetry nor equatorial antisymmetry behavior. The solution for both cases is constructed in all the space and singularities, stationary limit surfaces, magnetic field lines and first multipole moments are given.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. $e(z)$ y $f(z)$ para construir soluciones exactas . . . . .	5
2.2. <b>Ecuaciones de Einstein-Maxwell</b> . . . . .	8
2.2.1. Definiciones y ecuaciones de Einstein-Maxwell . . . . .	8
2.2.2. Métrica de Papapetrou para el caso axialsimétrico estacionario . . . . .	9
2.3. <b>Formalismo de Ernst: Reducción a dos ecuaciones</b> . . . . .	12
2.4. <b>Método de Sibgatullin</b> . . . . .	15
2.4.1. Fórmulas integrales para $\mathcal{E}$ y $\Phi$ . . . . .	15
2.4.2. Solución extendida $N$ -solitónica de electrovacío y el caso $N = 2$ . . . . .	19
2.5. <b>Simetría y antisimetría ecuatorial</b> . . . . .	25
2.6. <b>Momentos multipolares</b> . . . . .	27
2.6.1. Ejemplos: datos en el eje y multipolos . . . . .	28
<b>3. Extensión de masa deformada rotante magnetizada</b>	<b>32</b>
3.1. <b>Solución 4-paramétrica extendida</b> . . . . .	32
3.1.1. Extensión $(m_1, m_2, a, \mu) \rightarrow (M, q, a, \mu)$ . . . . .	32
3.1.2. Potenciales de Ernst . . . . .	34
3.1.3. Funciones métricas y 4-potencial EM . . . . .	37
3.2. <b>Características de la solución</b> . . . . .	38
3.2.1. Evaluación de simetría/antisimetría ecuatorial . . . . .	38
3.2.2. Tipos de constituyentes . . . . .	39
3.2.3. Superficie de límite estacionario, campo magnético y singularidades . . . . .	42
3.2.4. Momentos multipolares . . . . .	60
<b>4. Generalización de BM con dipolo magnético</b>	<b>62</b>
4.1. <b>Solución BM de 5 parámetros con dipolo magnético</b> . . . . .	62
4.1.1. Potenciales de Ernst . . . . .	65

4.1.2.	Funciones métricas . . . . .	65
4.2.	<b>Características de la solución</b> . . . . .	67
4.2.1.	Evaluación de simetría/antisimetría ecuatorial . . . . .	67
4.2.2.	Tipos de constituyentes . . . . .	68
4.2.3.	Reparametrización $\alpha_{\pm} \rightarrow \alpha_{\pm}(\kappa_{\pm})$ . . . . .	70
4.2.4.	Superficie de límite estacionario, campo magnético y singularidades . . . . .	72
4.2.5.	Momentos multipolares . . . . .	93
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>95</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La más débil de las familiares cuatro interacciones fundamentales es la gravedad, siendo esta también la de más alcance y la causante de fenómenos como la caída de una manzana hacia el suelo y la atracción entre cuerpos celestes del sistema solar, entre muchos otros. La manera de entender a esta fuerza fundamental de la naturaleza ha ido cambiando a lo largo del tiempo. Bajo observaciones evidentes, el ser humano ha sido capaz de notar a lo largo de su historia el fenómeno por el cual todo objeto que se sostiene en el aire y se suelta es atraído por la Tierra y cae al suelo, por ejemplo, cómo esta nos atrae y nos mantiene unidos a su superficie o el tiro parabólico. Además, al estudiar las estrellas y objetos celestes, se puede apreciar que se presentan distintos patrones como duración del día, constelaciones visibles durante el año, entre muchos otros. Así, desde hace miles de años se tenía conocimiento empírico y de gran utilidad para la humanidad de estos dos fenómenos mencionados: el de la atracción hacia la superficie de la Tierra y el de los patrones de los objetos celestes. Al comienzo estos dos se consideraban como fenómenos separados y no se tenía una teoría que explicara estos sucesos naturales, hasta que llegó Newton, en el siglo XVI.

Newton buscaba explicar los resultados de Galileo y Kepler acerca de los movimientos de los objetos celestes. Para comprender lo que se entendía y lo que actualmente se conoce como gravedad, es provechoso retroceder 1687, cuando Newton publicaba su artículo sobre la gravitación universal *Philosophiæ naturalis principia mathematica* o *Principia*. Newton interpretó que la gravedad es una fuerza que exige que los cuerpos con masa se atraigan, la cual va como  $1/r^2$ , donde  $r$  es la distancia del centro de masa de los objetos en cuestión. Esto proporcionó una buena explicación sobre las órbitas planetarias, además de una descripción sobre esta fuerza de atracción a la que los objetos con masa son sometidos. Así, lo que causaba el movimiento de los planetas y lo que hace que los objetos sean atraídos por la Tierra, era manifestaciones del mismo fenómeno de la gravedad, pero no era todo lo que había que decir sobre esta fuerza.

Poco más de 200 años después, Einstein revolucionó el entendimiento del concepto de

gravedad al publicar su artículo en 1915 [1] donde presentaba su teoría de la relatividad general. En esta postuló que esta aparente fuerza de atracción gravitatoria es más bien la consecuencia de que la presencia de masa y la energía son capaces de deformar la geometría del espacio-tiempo. Este último es un concepto donde las dimensiones de espacio y tiempo se unen para formar una nueva estructura, una variedad de cuatro dimensiones llamada *espacio-tiempo*. La ecuación que describe como se relacionan la geometría del espacio-tiempo y su contenido de materia y energía es la ecuación de Einstein. De esta manera, la dinámica de la materia y energía está determinada por la estructura de este espacio-tiempo y la estructura del espacio-tiempo descrita por la ecuación de Einstein.

Esto retaba a reconceptualizar lo que se entendía por gravedad, ya que la teoría se demostraba correcta con evidencia experimental, como la precesión del perihelio de mercurio y la deflexión de la luz por gravedad, que confirman las implicaciones de la relatividad general. Así, durante el último siglo, nuestro conocimiento acerca del fenómeno de la gravedad ha sido enriquecido grandemente gracias a la teoría de la relatividad general.

Las confirmaciones experimentales de la teoría están en el régimen de gravedad débil. En el contexto de la relatividad general esto significa que, en la métrica del espacio-tiempo, el componente  $g_{tt} = 1 + \phi$ , donde  $|\phi| \ll 1$ , lo cual significa que la métrica es casi plana. En el régimen de gravedad fuerte, debido a la naturaleza de los campos con los que se trata, ha resultado más difícil confirmar la validez de la teoría, por lo que es de interés buscar maneras de estudiar a la gravedad en una aproximación de campo fuerte.

Una de las predicciones más notables y quizá más impresionantes de la teoría es la de la existencia de objetos compactos llamados agujeros negros (BH, del inglés *black holes*). Los BHs, al ser objetos extremadamente densos que predice la relatividad general (RG), son excelentes para estudiar la gravedad ya que ponen a prueba la teoría en el régimen fuerte. Se sugiere que los candidatos a agujeros negros astrofísicos son los agujeros negros modelados por la métrica sugerida por Kerr [7], pero no hay evidencia de que el espacio-tiempo que rodea estos objetos sea descrito por la métrica de Kerr.

Se han implementado diferentes modelos para describir los campos exteriores gravitacional y electromagnético de objetos compactos donde, además de los parámetros de espín y masa necesarios para describir un agujero negro rotante, se utilizan ciertos parámetros adicionales como parámetros de deformación, e.g., el momento cuadrupolar de masa [36] o parámetros para el campo electromagnético como el momento dipolar magnético [35], entre otros, los cuales son útiles para representar las posibles desviaciones a la solución de Kerr.

Comparando los datos experimentales obtenidos de observaciones astrofísicas con las predicciones teóricas de los distintos modelos, se puede medir si la geometría del espacio tiempo alrededor de estos objetos compactos realmente está descrita por la métrica de Kerr o si se necesitan más parámetros aparte del momento angular y la masa para obtener una

descripción más concisa de estos espacio-tiempos con una interpretación física clara. Este trabajo de comparación de modelos obtenidos de soluciones exactas con modelos numéricos físicamente realistas se ha realizado, por ejemplo, en [34], donde se utiliza una solución de cuatro parámetros para describir una estrella de neutrones, comparando la estructura multipolar de la solución y del modelo numérico.

En este sentido, las soluciones exactas en RG juegan un papel muy importante al implementar modelos matemáticos que permiten una descripción concisa de objetos físicos, como la ya mencionada solución de Kerr o la solución de Schwarzschild [2]. La consideración de simetrías en los espacio-tiempos facilita el estudio de estos, como es el caso de la simetría esférica para Schwarzschild, por ejemplo. En sus trabajos [8, 9], Ernst proporcionó un acercamiento distinto al problema de electrovacío estacionario con simetría axial de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, en el cual reformulaba estas ecuaciones de una manera astuta introduciendo los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ , lo cual abrió paso al estudio riguroso de este tipo de espacios-tiempos y sus respectivas simetrías y eventualmente sentaba las bases para la construcción de soluciones exactas y modelos astrofísicos interesantes como agujeros negros, estrellas de neutrones e incluso sistemas con combinaciones de estos.

Con esto último, es natural preguntarse cómo es que estos BHs se comportan al interactuar con algún otro objeto como otro agujero negro. En este ámbito de los BHs interactuantes, el método de Sibgatullin [39] es excelente para la construcción de soluciones exactas. El método es muy útil para aplicarlo en sistemas de BHs y más aún cuando se trata también con campo electromagnético, ya que permite generar distintos modelos con potencial aplicación astrofísica. El método de Sibgatullin sirve para construir soluciones exactas en todo el espacio a las ecuaciones de Einstein-Maxwell de electrovacío por medio de fijar el comportamiento de dos potenciales  $e(z)$  y  $f(z)$  en el eje de simetría. Antes del método de Sibgatullin, la mayoría del trabajo que se hacía en soluciones exactas era la superposición de soluciones, pero ahora, el método de Sibgatullin ha servido para generar diversas soluciones como la solución  $N$ -solitónica [21], cuyas especializaciones de este caso han resultado importantes para aplicaciones astrofísicas.

El estudio de sistemas de objetos binarios subextremos, hiperextremos o combinaciones de estos (caso mixto), no solo provee información acerca del estado inicial de los objetos antes de la interacción, sino también después del colapso de los cuerpos por fuerza gravitacional, permitiéndonos describir el objeto que se forma en el estado final. La caracterización del objeto final es importante, ya que el objeto que se forma después del colapso de dos BHs puede tener propiedades interesantes que el objeto inicial no tenía, cuyo estudio es de interés.

Por su parte, para caracterizar los espacio-tiempos estacionarios axisimétricos electrovacíos de sistemas binarios surgió el término de *simetría ecuatorial* para sistemas corotantes, i.e., cuyos constituyentes rotan con espín paralelo y el de *antisimetría ecuatorial* para sis-

temas contrarrotantes, con el espín de los objetos antiparalelamente orientados. Con todo lo anterior en mente, en la presente tesis se trabaja principalmente con dos modelos de sistemas binarios: el primero, con dos constituyentes corotantes que se traslapan y el segundo siendo un sistema de dos fuentes contrarrotantes separadas por un soporte sin masa.

En el Capítulo 2 se dan los preliminares antes de exponer los dos modelos mencionados. Primero, se enfatiza la importancia de proveer el comportamiento de los potenciales  $e(z)$  y  $f(z)$  de la solución en el eje de simetría para la aplicación del método de Sibgatullin. Después, se da un repaso de las ecuaciones de Einstein-Maxwell y del formalismo de Ernst, y posteriormente se introduce el método de Sibgatullin y la solución  $N$ -solitónica obtenida por este método, así como el caso particular con  $N = 2$ . También se dan las definiciones de simetría y antisimetría ecuatorial para las soluciones caracterizados por los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  y por  $e(z)$  y  $f(z)$ , para terminar el capítulo con un análisis de los momentos multipolares en el contexto de la relatividad general, relacionándolos con los datos en el eje  $e(z)$  y  $f(z)$ . En esta última parte se muestran los primeros momentos multipolares de algunas soluciones clásicas de la teoría.

En el Capítulo 3 se presenta la solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell estacionaria axisimétrica de 4-parámetros presentada por Manko *et al.* [35], la cual describe el campo exterior de una masa deformada rotante y magnetizada y es caracterizada por los parámetros  $(m_1, m_2, a, \mu)$ , lo cuales son las masas de los dos constituyentes del sistema, el parámetro de rotación y el dipolo magnético respectivamente, por lo que la solución también se puede interpretar como dos agujeros negros corotantes que se traslapan. La solución extendida se obtiene al hacer una reparametrización de las masas corotantes  $m_1, m_2$ , donde se utiliza la masa total del sistema  $M$  y el momento cuadrupolar por unidad de masa  $q$ , lo cual extiende el espacio de parámetros de la solución original para que acepte valores de las masas de los constituyentes complejas conjugadas una con la otra, sin que afecte la realidad de los datos en el eje ni de las funciones métricas, por lo que el objeto que se obtiene al final tiene una estructura de solución más rica que la del objeto inicial. El parámetro  $q$  se usa para describir la deformación del objeto compacto.

Más adelante, en el Capítulo 4 se presenta la generalización con dipolo magnético de la solución con antisimetría ecuatorial de Bretón-Manko [23]. El sistema consiste de dos fuentes de Kerr-Newman contrarrotantes separadas por un soporte sin masa, con la misma masa y carga eléctrica, espines iguales pero orientados opuestamente y cargas magnéticas iguales pero opuestas, por lo que la carga neta es cero, pero habrá un momento dipolar magnético arbitrario. Para cada una de las soluciones presentadas en los Capítulos 3 y 4, se da la solución en todo el espacio, se construye la métrica y potenciales electromagnéticos. además de presentarse las singularidades, superficies de límite estacionario y las líneas de campo magnético para algunos casos particulares.



# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo, primero se introducen las ideas del formalismo de Ernst y el método de Sibgatullin, así como su importancia en soluciones exactas. En la Sección 2.1 se bosqueja el papel del comportamiento en el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$  de los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  en el método de Sibgatullin para la construcción de soluciones exactas. Más adelante, en 2.2, se consideran las ecuaciones de Einstein-Maxwell, así como las siete ecuaciones (I)-(VII) que resultan al considerar una métrica de Papapetrou con simetría axial y estacionaria. En la Sección 2.3 se muestra la reducción de las primeras cuatro ecuaciones (I)-(IV) a dos ecuaciones simples en términos de los potenciales de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ , que resultan en principio más fáciles de resolver que las cuatro ecuaciones iniciales. También se explica cómo los potenciales complejos facilitan el estudio de este tipo de espacio-tiempos axialsimétricos estacionarios, permitiendo la construcción de las funciones que aparecen en la métrica utilizando de estos potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . En la Sección 2.4 se proporciona una explicación del método integral de Sibgatullin y cómo es que las funciones métricas pueden ser obtenidas al fijar el comportamiento en el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$ . También se presenta la solución  $N$ -solitónica extendida y la especialización del caso  $N = 2$ , útil para aplicaciones astrofísicas. Por último, en la Sección 2.5 se definen los espacio-tiempos con simetría y antisimetría ecuatorial y en la Sección 2.6 se da una introducción a los momentos multipolares y un repaso de los momentos multipolares de algunas soluciones exactas clásicas de la relatividad general.

### 2.1. $e(z)$ y $f(z)$ para construir soluciones exactas

La teoría de la relatividad general y las ecuaciones de Einstein brindan un marco para estudiar la gravedad. Al buscar soluciones exactas en la teoría de la gravedad de Einstein, se trata de encontrar o construir la métrica, i.e., el objeto  $g_{ik}$  que satisface las ecuaciones de Einstein y el cual contiene información acerca de la estructura del espacio-tiempo. Una solución

exacta a las ecuaciones de Einstein-Maxwell es una solución local,  $ds^2$ , de las ecuaciones de campo, mientras que propiedades topológicas o globales para el espacio-tiempo pueden ser impuestas a criterio, ya que no están implicadas en las ecuaciones de Einstein.

Las ecuaciones de Einstein describen como se comporta la geometría del espacio-tiempo respondiendo a la densidad de materia-energía que contenga. Esta ecuación tiene la forma:

$$G_{ik} = 8\pi T_{ik},$$

la cual se presentará más adelante y se mostrará la forma de  $G_{ik}$  y  $T_{ik}$ . El lado izquierdo,  $G_{ik}$ , es el tensor de Einstein, la parte geométrica de la ecuación y está definido en términos de tensor que tienen que ver con la curvatura del espacio-tiempo, los tensores de Ricci  $R_{ik}$ , de curvatura escalar  $R$  y la métrica. El lado derecho, con el tensor de energía-momento  $T_{ik}$ , es la parte masiva de la ecuación ya que incluye la configuración de materia y energía del universo.

Resolver las ecuaciones de Einstein es encontrar la métrica  $g_{ik}$  que las satisface, y así, obtener una descripción del espacio-tiempo con el que se trabaja. Hay muchas soluciones de a las ecuaciones de Einstein  $g_{ik}$ , por lo que, siendo un problema muy general, el trabajo difícil en soluciones exactas es obtener soluciones físicamente aceptables y entender estas mismas.

En la literatura se pueden encontrar bastantes soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein, como se puede notar en [40, 41], sin mencionar las soluciones que no se consideraron en estos libros, las “nuevas” soluciones que se han reportado en los últimos años, ni otras referencias. Con esto, uno se puede hacer a la idea de lo numerosas que son las soluciones exactas en la teoría. Sin embargo, lo más común es que la solución no tenga utilidad física, por lo que entre todas las soluciones matemáticas para las ecuaciones de Einstein que se han encontrado, sólo algunas de estas resultan relevantes al tener sentido físico y aplicaciones, por ejemplo, en astrofísica.

Otra dificultad en soluciones exactas son los métodos de generación de soluciones. Las primeras soluciones exactas que se reportaron, se encontraban imponiendo ciertas condiciones de simetría y algunas tenían cierta interpretación física, como un campo exterior de una distribución esférica u ondas gravitacionales. La primera solución a las ecuaciones de Einstein fue dada por Schwarzschild [2] unos meses después de publicada la teoría, utilizando simetría esférica y un espacio-tiempo estático. Desde ese entonces, se han explorado distintos métodos de generación de soluciones exactas que implican trabajar con espacio-tiempos que no presentan altos grados de simetría. Algunos de estos métodos se pueden apreciar en [40]. Con esto último, es evidente que hay bastantes soluciones exactas y algunos métodos que permiten generar soluciones exactas, pero como se mencionó anteriormente, el problema no ha sido en generar nuevas soluciones matemáticas, sino encontrar modelos de la teoría que describan la realidad.

Lo rentable es estudiar las soluciones ya conocidas y entenderlas a profundidad, pero también buscar generar soluciones con el fin de que tengan, *a priori*, una aplicación física. De esta manera se pueden generar soluciones relevantes que tengan una interpretación física clara y entenderlas, como entender qué sistema físico representan en particular, si tienen singularidades, el horizonte de eventos, etc. En este sentido, el método de Sibgatullin [39] es óptimo para generar soluciones exactas que se pueden aplicar en sistemas de agujeros negros, por ejemplo. El método de Sibgatullin es relevante a sobremanera para los resultados que se presentan en esta tesis y será abordado más adelante.

En esta sección, lo relevante es plantear un primer acercamiento al método de Sibgatullin y destacar la importancia del comportamiento de la solución de los potenciales de Ernst evaluados en el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$ , por lo que necesariamente se tiene que hablar sobre la formulación de los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . Ernst [8, 9] desarrolló un formalismo en el que, imponiendo condición de simetría axial y un espacio-tiempo estacionario, reduce las ecuaciones de Einstein-Maxwell a dos ecuaciones diferenciales para los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ .

En su formulación, Ernst estudia los espacio-tiempos estacionarios con simetría axial y descritos por el elemento de línea de Papapetrou [5]. Al hacer uso de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para electrovacío, Ernst demuestra que las primeras cuatro de las siete ecuaciones de campo que se obtienen, se pueden reducir a dos ecuaciones diferenciales no lineales para los potenciales complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . El conocimiento de estos potenciales era suficiente para definir completamente los campos exteriores axialsimétricos fuera de las fuentes, por lo que representaban una herramienta interesante.

Más adelante, y después de otros avances en la teoría, Sibgatullin publica su libro en ruso en 1984 y posteriormente en inglés en 1991, donde muestra el método llamado **método de Sibgatullin** [19, 39], el cuál sirve para construir soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell por medio de ajustar el comportamiento de dos potenciales, llamados los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  en el eje de simetría,  $e(z)$  y  $f(z)$ . Esto se resume como sigue:

Se fija  $e(z)$  y  $f(z) \Rightarrow$  **Método de Sibgatullin**  $\Rightarrow$  Construcción de solución.

La idea del método es la siguiente: al proveerse los datos del comportamiento en el eje de simetría de los potenciales  $e(z)$  y  $f(z)$ , donde  $e(z) := \mathcal{E}(\rho = 0, z)$  y  $f(z) := \Phi(\rho = 0, z)$ , es posible construir la solución en todo el espacio por medio del método integral de Sibgatullin.  $e(z)$  y  $f(z)$  dependen de los parámetros de la solución, que se pueden relacionar con los momentos multipolares de esta, y al fijarlos, se usa el método integral de Sibgatullin para encontrar los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ , construir las funciones métricas, y en el caso de electrova-

cío, los componentes del campo electromagnético, lo cual determina la solución en todo el espacio-tiempo. Este procedimiento se explica con más detalle en la Sección 2.4.

Con los avances dados por el formalismo de Ernst y el método de Sibgatullin, así como muchas otras aportaciones, se ha logrado obtener un método que permite construir soluciones exactas con una interpretación física concisa. En búsqueda extender el conocimiento acerca de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con interpretación física clara, en los Capítulos 3 y 4 se presentan dos soluciones exactas, la primera con potencial interés astrofísico y la segunda siendo una generalización de un modelo ya conocido.

## 2.2. Ecuaciones de Einstein-Maxwell

### 2.2.1. Definiciones y ecuaciones de Einstein-Maxwell

El sistema acoplado de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en electrovacío tiene la forma

$$G_{ik} = 8\pi T_{ik}, \quad (2.1)$$

$$(\sqrt{-g}F^{ik})_{,k} = 0, \quad (2.2)$$

$$F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k} = 0. \quad (2.3)$$

donde  $G_{ik}$  es el tensor de Einstein,  $T_{ik}$  es el tensor de energía-momento del campo electromagnético y  $F_{ik}$  es el tensor del campo electromagnético.  $G_{ik}$  proporciona información acerca de cómo es que se curva el espacio-tiempo,  $T_{ik}$  de cuál es el contenido de materia en el universo y el tensor  $F_{ik}$  acerca de cómo se comportan los campos electromagnéticos. Una vez que se proporcione la métrica  $g_{ik}$  y la forma de  $F_{ik}$  del sistema, las ecuaciones (2.1)-(2.3) estarán resueltas, por lo que se conocerá el comportamiento del sistema.

Por el lado gravitacional, es de interés saber cuál es la forma del tensor de Einstein  $G_{ik}$  en términos de cantidades de relatividad general conocidas. El tensor de Einstein  $G_{ik}$  se relaciona con el tensor de Ricci  $R_{ik}$  y con la curvatura escalar  $R$  de la siguiente manera:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (2.4)$$

El tensor de Ricci  $R_{ik}$  y el de curvatura escalar  $R$  están dados por las siguientes fórmulas:

$$R_{ik} = \Gamma_{ik,l}^l - \Gamma_{il,k}^l + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l, \quad (2.5)$$

$$R = R_{ik}g^{ik}. \quad (2.6)$$

Los objetos que aparecen en (2.5) y (2.6) son los llamados símbolos de Christoffel  $\Gamma_{kl}^i$ , los cuales son los coeficientes de la conexión. Los símbolos  $\Gamma$ 's están dados en términos de la métrica  $g_{ab}$  por medio de la siguiente definición:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}). \quad (2.7)$$

Ahora, por el lado del electromagnetismo, se considera el electrovacío, por lo que el campo electromagnético tiene en (2.1) este tensor de energía momento  $T_{ik}$  no nulo, el cual está dado por:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{il} F_k^l - \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik} \right), \quad (2.8)$$

que está en términos de la métrica  $g_{ik}$  y el tensor  $F_{lm}$  electromagnético. Este último tensor se elige en términos del cuadripotencial electromagnético  $A_k$

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}, \quad (2.9)$$

donde se puede notar que  $F_{ik}$  es un tensor antisimétrico. Se puede notar también que utilizando (2.9), la ecuación (2.3) se cumple.

### 2.2.2. Métrica de Papapetrou para el caso axialsimétrico estacionario

Al estudiar un sistema físico o un fenómeno, las simetrías facilitan información importante sobre el comportamiento de estos. Las simetrías permiten caracterizar los sistemas con los que se trata, por ejemplo, cuando en electromagnetismo se tiene una distribución de carga con simetría esférica o cilíndrica, lo que permite aplicar distintos métodos de resolución, o en la solución de Schwarzschild en relatividad general, la cual posee simetría esférica. En general, es gracias a las simetrías que muchos problemas físicos tienen soluciones sencillas, por lo que es natural pensar en las simetrías en el contexto de la relatividad general y cuáles son las implicaciones físicas de estas simetrías.

En soluciones exactas se busca encontrar una familia de soluciones, en este caso de electrovacío, una familia de soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell que tengan características particulares, las cuales condicionan el comportamiento de la solución. Resulta interesante entonces fijarse soluciones en RG que posean ciertas simetrías y tratar de encontrarlas mediante distintos métodos de generación de soluciones.

Los vectores de Killing son campos vectoriales los cuales desplazan cada punto del espacio-tiempo por una cantidad infinitesimal y estos conservan la métrica después de la transformación. Estos campos vectoriales generan una simetría que se puede caracterizar mediante estos mismos vectores de Killing. En este trabajo se van a considerar las soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell que sean axialsimétricas y estacionarias, esto es, que

sean invariantes antes traslaciones infinitesimales de la coordenada axial  $\varphi$  y la temporal  $t$ . La métrica que describe en RG a las soluciones con estas dos características fue facilitada por Papapetrou [5], y está dado como el elemento de línea de Papapetrou  $ds^2$ :

$$ds^2 = f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt - \omega d\varphi)^2, \quad (2.10)$$

donde  $\rho$ ,  $z$  y  $\varphi$  son las coordenadas cilíndricas de Weyl-Papapetrou y  $t$  es el tiempo. Las tres funciones  $f(\rho, z)$ ,  $\omega(\rho, z)$  y  $\gamma(\rho, z)$  que aparecen en (2.10) son desconocidas y deben ser encontradas mediante las ecuaciones de campo.

La métrica en (2.10) tiene dos vectores de Killing, los cuales caracterizan la simetría en el tiempo con el vector temporal  $\xi = \partial_t$  y el vector espacial  $\eta = \partial_\varphi$ , que permiten la estacionariedad y la simetría axial respectivamente. La forma del tensor métrico covariante  $g_{ik}$ , de (2.10), consiste de una métrica no-diagonal ya que tiene términos cruzados  $t$ - $\varphi$  y  $\rho$ - $z$ .

Con (2.10) en mano es suficiente para hacer uso de las definiciones de la subsección anterior. Se puede calcular el determinante de  $g_{ik}$  y también se define el inverso  $g^{ik}$  de la métrica covariante  $g_{ik}$  como:  $g^{il}g_{lk} = \delta_k^i$ , por lo que es como si definiéramos la inversa de la matriz. Con esto se definen también las componentes no nulas del tensor métrico contravariante  $g^{ik}$ .

Lo que se quiere hacer es resolver, i.e., saber la solución, la métrica  $g_{ik}$  que describe el espacio-tiempo de interés. La forma de la métrica que describe un campo estacionario axi-simétrico gravitacional está dada por (2.10), pero se requiere encontrar las funciones  $f$ ,  $\omega$  y  $\gamma$  por medio de las ecuaciones de campo para poder construir la solución completa. En este caso, el espacio-tiempo con el que se trabaja presenta ciertas simetrías, la axial y la estacionaria, y está en electrovacío. Para resolver este problema, se cuenta con el conocimiento de las ecuaciones de Einstein-Maxwell (2.1)-(2.3) que describen como se comporta la geometría del espacio-tiempo en presencia del de energía-momento  $T_{ik}$  de campo electromagnético en el vacío, además de cómo es que los campos electromagnéticos se comportan en el espacio curvo en particular. Lo que se procede a hacer es encontrar las ecuaciones de campo de Einstein de la solución axialsimétrica estacionaria para las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Para esto, hay que plantear las ecuaciones (2.1)-(2.3) en términos de las funciones que definen la métrica  $g_{ik}$  y el campo electromagnético  $F_{ik}$ , después se busca resolverlas para poder obtener las expresiones  $f$ ,  $\omega$  y  $\gamma$  y para el potencial  $A_i$  y así poder construir la solución en todo el espacio.

Para encontrar las ecuaciones de campo de Einstein de este problema del campo gravitacional axialsimétrico estacionario, se utiliza la ecuación (2.1), por lo cual hay que calcular  $G_{ik}$  y  $T_{ik}$ . Se pueden calcular por separado para después comparar los componentes de ambos tensores.

Para calcular  $G_{ik}$  se utiliza la definición en (2.4), por lo que hay que escribir primero los tensores de Ricci  $R_{ik}$  y el escalar de curvatura  $R$  que a su vez están en términos de los símbolos

de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$ . Así, primero se utiliza  $g_{ik}$  para calcular los  $\Gamma$ 's no nulos, luego los tensores de Ricci y de curvatura escalar. Al obtener esto se puede calcular el tensor de Einstein  $G_{ik}$ .

Para el cálculo del tensor de energía-momento electromagnético  $T_{ik}$ , el cuadripotencial  $A_i$  es un objeto importante. Hay que recordar que el tensor antisimétrico de campo electromagnético  $F_{ik}$  se escogió como en (2.9), por lo que cumple con (2.3).

Al imponer estas condiciones de simetría sobre el cuadripotencial electromagnético, este toma la forma de  $A_i = (0, 0, A_\varphi, A_t)$ , por lo que tiene dos componentes: la del campo eléctrico  $A_t$  y la del campo magnético  $A_\varphi$ . Utilizando  $A_i$  y (2.9), se pueden calcular las componentes no nulas del tensor de campo electromagnético  $F_{ik}$ . Encontrar los componentes del tensor de campo electromagnético  $F_{ik}$ , así como los de la métrica  $g_{ik}$ , permite usar la definición del tensor  $T_{ik}$  de (2.8) para calcular los componentes de este. Así, se pueden obtener los componentes no nulos del tensor de energía-momento electromagnético  $T_{ik}$ .

Con los componentes no nulos del tensor de Einstein  $G_{ik}$  y el tensor de energía-momento  $T_{ik}$  se puede usar la primera ecuación de Einstein-Maxwell, la ecuación (2.1). De esta manera se obtienen cinco ecuaciones de campo. Por otro lado, se puede usar esto para utilizar las otras dos ecuaciones (2.2), (2.3) y obtener otras las otras dos ecuaciones de campo.

Durante los cálculos se utiliza la siguiente definición de la acción del operador  $\nabla$  sobre un vector  $\mathbf{A}$  con las proyecciones  $A_\rho$  y  $A_z$  de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho^{-1}(\rho A_\rho)_{,\rho} + A_{z,z}. \quad (2.11)$$

Con esto, se obtienen las siete ecuaciones que describen los campos gravitacional y electromagnético estacionarios exteriores con simetría axial. Las ecuaciones de campo para este caso se pueden escribir como:

$$\nabla[\rho^{-2}f(\nabla A_\varphi + \omega \nabla A_t)] = 0, \quad (\text{I})$$

$$\nabla[f^{-1}\nabla A_t - \rho^{-2}f\omega(\nabla A_\varphi + \omega \nabla A_t)] = 0, \quad (\text{II})$$

$$\nabla[\rho^{-2}f^2\nabla\omega + 4\rho^{-2}fA_t(\nabla A_\varphi + \omega \nabla A_t)] = 0, \quad (\text{III})$$

$$f\Delta f = (\nabla f)^2 - \rho^{-2}f^4(\nabla\omega)^2 + 2f(\nabla A_t)^2 + 2\rho^{-2}f^3(\nabla A_\varphi + \omega \nabla A_t)^2, \quad (\text{IV})$$

$$\gamma_{,\rho} = \frac{1}{4}\rho f^{-2}[f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2 - \rho^{-2}f^4(\omega_{,\rho}^2 - \omega_{,z}^2)] + \rho^{-1}f \times [(A_{\varphi,\rho} + \omega A_{t,\rho})^2 - (A_{\varphi,z} + \omega A_{t,z})^2] - \rho f^{-1}(A_{t,\rho}^2 - A_{t,z}^2), \quad (\text{V})$$

$$\gamma_{,z} = \frac{1}{2}\rho f^{-2}(f_{,\rho}f_{,z} - \rho^{-2}f^4\omega_{,\rho}\omega_{,z}) + 2\rho^{-1}f(A_{\varphi,\rho} + \omega A_{t,\rho}) \times (A_{\varphi,z} + \omega A_{t,z}) - 2\rho f^{-1}A_{t,\rho}A_{t,z}, \quad (\text{VI})$$

$$\gamma_{,\rho,\rho} + \gamma_{,z,z} = -\frac{1}{4}f^{-2}[(\nabla f)^2 + \rho^{-2}f^4(\nabla\omega)^2] + f^{-1}(\nabla A_t)^2 + \rho^{-2}f(\nabla A_\varphi + \omega \nabla A_t)^2. \quad (\text{VII})$$

Se presentan aquí las siete ecuaciones de campo. De estas, sólo las ecuaciones (I)-(VI) son independientes, mientras que la ecuación (VII) se puede obtener de las seis ecuaciones anteriores. La condición de integrabilidad de las ecuaciones (V)-(VI) para la función  $\gamma$  es el sistema (I)-(IV), en el cual  $\gamma$  no aparece. En este caso, el problema de la resolución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell se reduce a la integración del sistema (I)-(IV).

### 2.3. Formalismo de Ernst: Reducción a dos ecuaciones

En la Subsección 2.2.2 se obtienen las siete ecuaciones de campo (I)-(VII) de Einstein-Maxwell de un espacio-tiempo estacionario en electrovacío con simetría axial. Lo que se busca es describir los campos exteriores gravitacionales y electromagnéticos de ciertos objetos dentro de la teoría que presenten estas simetrías, pero aun imponiendo estas simetrías, la resolución de las ecuaciones resulta difícil. En este caso, el problema de la resolución de las ecuaciones se reduce a la integración de (I)-(IV), pero este es un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden donde las funciones  $f$ ,  $\omega$ ,  $A_\varphi$  y  $A_t$  son desconocidas y se tienen que determinar, pero su integración directa representa un problema lo suficientemente complicado.

Para facilitar la resolución de las ecuaciones de campo, se trató el problema de distintas maneras, pero en 1968, con su trabajo [8, 9], Ernst presentaba un avance significativo en la obtención de soluciones exactas de electrovacío estacionario axialmente simétrico, donde reduce las ecuaciones (I)-(IV) a dos ecuaciones diferenciales no lineales para dos funciones complejas  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  llamados “potenciales de Ernst”, los cuales también proveen de información importante acerca del espacio-tiempo y tienen forma simple para soluciones estacionariamente axial-simétricas conocidas. Así, es de interés revisar ciertas definiciones de la formulación de Ernst para las ecuaciones de campo acopladas de Einstein-Maxwell en términos de estos dos potenciales complejos.

Para la reducción de las ecuaciones (I)-(IV) se hacen algunas manipulaciones algebraicas y se introducen algunos objetos. Se comienza con la primera de las ecuaciones, (I), que tienen que satisfacer los potenciales electromagnéticos y gravitacionales. Utilizando la definición del operador  $\nabla$  en (2.11), la ecuación (I) se puede reescribir en su forma explícita como:

$$[\rho^{-1}f(A_{\varphi,\rho} + \omega A_{t,\rho})]_{,\rho} + [\rho^{-1}f(A_{\varphi,z} + \omega A_{t,z})]_{,z} = 0, \quad (2.12)$$

donde (2.12) puede considerarse como condición de integrabilidad para la existencia de un nuevo potencial magnético  $A'_\varphi$ . El potencial  $A'_\varphi$  estará definido por las ecuaciones:



$$\begin{aligned} A'_{\varphi,\rho} &= \rho^{-1} f(A_{\varphi,z} + \omega A_{t,z}), \\ A'_{\varphi,z} &= -\rho^{-1} f(A_{\varphi,\rho} + \omega A_{t,\rho}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por otro lado, la ecuación (II) se puede reescribir utilizando este potencial  $A'_\varphi$ . Además, con (II) reescrita y (2.12), Ernst introduce un nuevo potencial complejo  $\Phi$  en términos del potencial  $A_t$  y el recién definido  $A'_\varphi$  como:

$$\Phi = -A_t + iA'_\varphi. \quad (2.14)$$

Esta definición en (2.14) permite expresar las ecuaciones (I) y (II) en una sola ecuación que se mostrará más adelante.

Ahora, al implementar la ecuación (III) en el análisis y usando  $\Phi$  de (2.14), Ernst llega a una ecuación que representa la condición de integrabilidad para la existencia de un nuevo potencial  $\Omega$ . Con esto, la ecuación (IV) también se puede escribir en los nuevos potenciales  $\Phi$  y  $\Omega$  en una forma simple.

Considerando lo anterior y este nuevo potencial  $\Omega$ , Ernst nota que puede introducir convenientemente función compleja  $\mathcal{E}$ , la cual define como:

$$\mathcal{E} = f - \Phi\bar{\Phi} + i\Omega, \quad (2.15)$$

donde la barra  $\bar{\Phi}$  representa la conjugación compleja de  $\Phi$ . Análogo a lo que hace el potencial  $\Phi$  de (2.14) al unir las ecuaciones (I) y (II) en una sola, este potencial  $\mathcal{E}$  también facilita la reducción de (III) y (IV) a una ecuación. La ecuación que se obtiene con al unir (III) y (IV) utilizando los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  es:

$$(\text{Re}\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi})\Delta\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi)\nabla\mathcal{E}, \quad (2.16)$$

donde  $\text{Re}(\alpha)$  indica la parte real de  $\alpha$ . Esta es la primera ecuación a la que se reducen las ecuaciones de Einstein-Maxwell, donde (III) y (IV) son reescritas en (2.16) en términos de los potenciales complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ .

Similarmente, las ecuaciones (I) y (II) se reescriben con estos potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  como

$$(\text{Re}\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi})\Delta\Phi = (\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi)\nabla\Phi, \quad (2.17)$$

lo cual se puede notar tomando en cuenta que

$$f = \text{Re}\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi}, \quad (2.18)$$

y que

$$\begin{aligned}\omega_{,\rho} &= -\rho f^{-2} \operatorname{Im}(\mathcal{E}_{,z} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,z}), \\ \omega_{,z} &= \rho f^{-2} \operatorname{Im}(\mathcal{E}_{,\rho} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,\rho}),\end{aligned}\tag{2.19}$$

donde  $\operatorname{Im}(\alpha)$  denota la parte imaginaria de  $\alpha$ . Las últimas dos ecuaciones son consecuencia de la ecuación que da la condición de integrabilidad para la función  $\Omega$ . Con estos resultados se reduce el sistema (I)-(IV) a dos ecuaciones diferenciales no lineales (2.16) y (2.17) para las funciones complejas  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ .

Las ecuaciones (V) y (VI) también se pueden escribir en términos de los potenciales de Ernst y toman la forma:

$$\begin{aligned}\gamma_{,\rho} &= \frac{\rho}{4(\operatorname{Re}\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi})^2} [(\mathcal{E}_{,\rho} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,\rho})(\bar{\mathcal{E}}_{,\rho} + 2\Phi\bar{\Phi}_{,\rho}) - (\mathcal{E}_{,z} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,z}) \\ &\quad \times (\bar{\mathcal{E}}_{,z} + 2\Phi\bar{\Phi}_{,z})] - \frac{\rho(\Phi_{,\rho}\bar{\Phi}_{,\rho} - \Phi_{,z}\bar{\Phi}_{,z})}{\operatorname{Re}\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi}}, \\ \gamma_{,z} &= \frac{\rho\operatorname{Re}[(\mathcal{E}_{,\rho} + 2\bar{\Phi}\Phi_{,\rho})(\bar{\mathcal{E}}_{,z} + 2\Phi\bar{\Phi}_{,z})]}{2(\operatorname{Re}\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi})^2} - \frac{2\rho\operatorname{Re}(\bar{\Phi}_{,\rho}\Phi_{,z})}{\operatorname{Re}\mathcal{E} + \Phi\bar{\Phi}}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell representan un sistema de tres ecuaciones, dadas en (2.1)-(2.3). Al buscar soluciones que presenten una simetría axial y que sean estacionarias, usando la métrica de Papapetrou (2.10) uno llega a las siete ecuaciones de campo obtenidas en (I)-(VII). Ernst, redujo las primeras cuatro ecuaciones (I)-(IV) a dos ecuaciones diferenciales no lineales (2.16) y (2.17) para los potenciales complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . Así, es evidente que las funciones complejas  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  que definió Ernst facilitan el estudio de soluciones exactas ya que estas definen plenamente el campo estacionario gravitacional y electromagnético axialmente simétrico fuera de las fuentes. Al encontrarse  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  de las dos ecuaciones (2.16) y (2.17), las funciones  $f$ ,  $\Omega$ ,  $A_t$  y  $A'_\varphi$  se obtienen algebraicamente de los potenciales de Ernst utilizando (2.14) y (2.15). El coeficiente métrico  $\omega$  se encuentra por medio de la integración de las ecuaciones (2.19), lo que también permite a encontrar la componente magnética  $A_\varphi$  del sistema (2.13). Por último, la función  $\gamma$  se obtiene de las ecuaciones (2.20) en términos de los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . El hecho de que se cumplan las primeras cuatro ecuaciones (I)-(IV) garantiza la existencia de la función  $\gamma$ , ya que estas cuatro ecuaciones son las condiciones de integrabilidad de  $\gamma$ , lo cual se nota al calcular  $\gamma_{,z\rho} = \gamma_{,\rho z}$ , ya que se obtienen combinaciones de (I)-(IV).

Con lo anterior, queda evidenciado que el formalismo de Ernst reduce el sistema de ecuaciones de campo (I)-(IV) para espacio-tiempos axial-simétricos estacionarios a dos ecuaciones diferenciales no lineales para  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ , lo cual facilita en gran manera el estudio de este tipo de espacio-tiempos.

Como comentario final de esta sección, se presenta una manera más simétrica de escribir las ecuaciones de Ernst (2.16) y (2.16). Se introducen dos nuevos potenciales, llamados “potenciales modificados de Ernst”  $\xi$  y  $\eta$ , los cuales están dados por las fórmulas:

$$\mathcal{E} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \Phi = \frac{\eta}{1 + \xi}, \quad (2.21)$$

y con esto, las ecuaciones (2.16) y (2.17) de Ernst se reescriben como:

$$\begin{aligned} (\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} - 1)\Delta\xi &= 2(\bar{\xi}\nabla\xi + \bar{\eta}\nabla\eta) \cdot \nabla\xi, \\ (\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} - 1)\Delta\eta &= 2(\bar{\xi}\nabla\xi + \bar{\eta}\nabla\eta) \cdot \nabla\eta, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  entran de manera simétrica.

Fodor *et al.* en su artículo [17] presentaban un algoritmo para obtener los  $n$  multipolos gravitacionales de una solución estacionaria axialsimétrica asintóticamente plana en el vacío usando la expansión en el eje del potencial modificado  $\xi$ . El uso de  $\xi$  en la expansión simplifica el cálculo de los momentos multipolares de GH  $P_n$  [11, 13], y es esto lo que se utiliza para calcular computacionalmente los momentos multipolares de la Sección 2.6, así como los de los modelos presentados en los capítulos 3 y 4.

## 2.4. Método de Sibgatullin

### 2.4.1. Fórmulas integrales para $\mathcal{E}$ y $\Phi$

Debido al formalismo que plantea Ernst explicado en la Sección 2.3, es natural pensar que una vez que se obtienen los potenciales complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  de las ecuaciones (2.16) y (2.17) el problema de construir la solución puede ser fácilmente resuelto utilizando las ecuaciones para las funciones métricas  $f$ ,  $\omega$  y  $\gamma$ , además de las ecuaciones para los potenciales electromagnéticos  $A_t$  y  $A_\varphi$  dadas en dicho formalismo en términos de estos potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . Por un lado, el formalismo de Ernst facilita ampliamente el cálculo de ciertas funciones de la solución como la funciones métricas  $f$ ,  $\gamma$  y el potencial  $A_t$  en comparación con las ecuaciones originales de Einstein-Maxwell (I)-(VII), pero en general la construcción de la solución no es un problema sencillo de resolver y se pueden presentar dificultades al momento de integrar para obtener la función  $\omega$  y el potencial  $A_\varphi$ . En este aspecto, el método de Sibgatullin surge como una alternativa para la resolución de estos problemas, por lo que su estudio y aplicación es del todo pertinente.

Con los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  se puede calcular la función  $f$  de Papapetrou y el potencial  $A_t$  de manera directa, ya que lo que se puede obtener algebraicamente con estos potenciales son  $f$  y los potenciales  $A_t$ ,  $\Omega$  y  $A'_\varphi$  utilizando (2.14) y (2.15). También se pueden usar  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  para

calcular la función métrica  $\gamma$  directamente del sistema (2.20) dado que, como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de Ernst (2.16) y (2.17) son las condiciones de integrabilidad para este sistema. Teniendo  $f$ ,  $\gamma$  y  $A_t$ , para completar la solución de electrovacío faltaría obtener la función métrica  $\omega$  y el potencial magnético  $A_\varphi$  y es aquí donde se presenta una dificultad, ya que para la obtención de  $\omega$  y  $A_\varphi$  hay casos donde la integración de las ecuaciones (2.12) y (2.19) se complica grandemente.

Para obtener la función métrica  $\omega$  es necesaria la integración de la ecuación (2.19), la cual contiene la función métrica  $f$ , los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  y derivadas de estos, así que, técnicamente se podrían integrar estas ecuaciones. Con la función  $\omega$  se pueden integrar las ecuaciones (2.12) para obtener el potencial  $A_\varphi$ , ya que estas ecuaciones dependen de la función métrica  $f$  y los potenciales  $A'_\varphi$  y  $A_t$  que se calculan con los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . Así, en principio, este proceso permite obtener el potencial magnético  $A_\varphi$ , pero en la praxis esto resulta complicado, ya que puede pasar que la integración y obtención de  $A_\varphi$  de (2.13) sea prácticamente imposible. Por tanto, si bien el formalismo en teoría permite construir la solución al obtener los potenciales complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  de las ecuaciones (2.16) y (2.17), y aunque se pueda obtener la función  $f$  de (2.18), la función métrica  $\gamma$  y el potencial  $A_t$ , el problema se dificulta al intentar resolver para  $\omega$  y  $A_\varphi$ .

Construyendo los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  se pueden estudiar las superficies de límite estacionario de la solución, pero no sus líneas de campo magnético debido a que aún faltaría resolver para  $A_\varphi$ . Por otro lado, la función métrica  $\omega$  es necesaria para obtener las cargas de las fuentes y varias propiedades de la solución. Con esto se puede notar que la obtención de la función  $\omega$  y el potencial  $A_\varphi$  es de crucial importancia para la construcción y análisis de este tipo de soluciones exactas estacionarias axialsimétricas de electrovacío.

La obtención de la función métrica  $\omega$  y el potencial  $A_\varphi$  por medio del formalismo de Ernst se puede complicar debido a las razones anteriormente mencionadas. En este sentido, el método de Sibgatullin resulta muy útil para electrovacío y presenta la ventaja de permitir construir  $\omega$  y  $A_\varphi$  sin la necesidad de integrar las ecuaciones (2.12) y (2.19) correspondientes. Por esto, resulta beneficioso conocer el método y utilizarlo para generar soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con una interpretación física clara.

El método de Sibgatullin [39] es un método integral que utiliza el procedimiento de continuación analítica de Riemann-Hilbert para construir los potenciales de Ernst  $\mathcal{E}(\rho, z)$  y  $\Phi(\rho, z)$  en todo el plano complejo a partir de su comportamiento sobre el eje de simetría  $e(z) := \mathcal{E}(\rho = 0, z)$  y  $f(z) := \Phi(\rho = 0, z)$ . Como nota, es relevante remarcar aquí que esta función compleja  $f(z)$  que describe el comportamiento de la solución en el eje de simetría es distinta a la función  $f$  que aparece en la métrica de Papapetrou.

El método integral de Sibgatullin provee dos fórmulas para construir los potenciales de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  sobre el plano complejo. Así, estos potenciales se obtienen por medio de las

fórmulas integrales

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma) e(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (2.23)$$

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma) f(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (2.24)$$

con la función desconocida  $\mu_1(\sigma)$  que debe satisfacer una condición integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma) [e(\xi) + \bar{e}(\eta) + 2f(\xi)\bar{f}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0, \quad (2.25)$$

y la condición de normalización

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = \pi. \quad (2.26)$$

En las ecuaciones anteriores  $\xi = z + i\rho\sigma$ ,  $\eta = z + i\rho\tau$ ,  $\sigma \in [-1, 1]$ ,  $\tau \in [-1, 1]$ , donde  $\rho$  y  $z$  son las coordenadas de Weyl-Papapetrou. Los potenciales  $e(\xi)$  y  $f(\xi)$  son continuaciones holomorfas locales de las funciones  $e(z)$  y  $f(z)$  sobre el plano complejo  $(\rho, z)$ . Por convención se emplea  $\bar{e}(\eta) \equiv \overline{e(\bar{\eta})}$  y  $\bar{f}(\eta) \equiv \overline{f(\bar{\eta})}$ , donde la barra indica conjugación compleja.

Una importante relación entre los parámetros de la solución viene determinada por la ecuación algebraica

$$e(\xi) + \bar{e}(\xi) + 2f(\xi)\bar{f}(\xi) = 0, \quad (2.27)$$

la cual deben cumplir los datos en el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$ . Las raíces de (2.27) pueden ser escogidas adecuadamente para construir soluciones con distintos objetos. Para objetos extremos, en (2.27) se presentan raíces reales de multiplicidad 2, para objetos subextremos, con pares de raíces reales distintas, y para objetos hiperextremos (también llamados ‘superextremos’), con pares de raíces complejas conjugadas. También pueden ser combinaciones de estos, como los casos subextremo-superextremo mixtos donde se tienen tanto pares raíces reales como pares de raíces complejas conjugadas, las cuales se presentan en la solución extendida del Capítulo 3.

Cuando  $e(\xi)$  y  $f(\xi)$  son funciones racionales arbitrarias, la función  $\mu_1$  se busca en la forma

$$\mu_1(\sigma) = A_0 + \sum_{k=1}^N \left( \frac{A_k^1}{\xi - \alpha_k} + \cdots + \frac{A_k^{m_k}}{(\xi - \alpha_k)^{m_k}} \right), \quad (2.28)$$

donde  $\alpha_k$  son raíces de la ecuación (2.27) de multiplicidad  $m_k$ ;  $A_0, A_k$  son coeficientes que no dependen de  $\sigma$  y su forma debe ser encontrada de las ecuaciones (2.25) y (2.26).

Al fijar el comportamiento en el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$ , se puede proceder a calcular los potenciales complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  mediante las ecuaciones (2.23) y (2.24). Esto permite comenzar a construir la solución, ya que se puede calcular inmediatamente una de las funciones métricas, la función  $f$  para la métrica de Papapetrou (2.10), de la relación (2.18), además del potencial eléctrico  $A_t$  de (2.14). Como se menciona al principio de la sección, la función métrica  $\gamma$  también se puede obtenerse, esta por medio del sistema (2.20).

El método de Sibgatullin facilita el cálculo de la función métrica  $\omega$  debido a que permite obtenerla sin integrar el sistema (2.19). Para esto el método proporciona la expresión necesaria para calcular la  $\omega$ :

$$f \omega = \frac{1}{2}(H_{12} + \bar{H}_{21}) + \Phi \bar{\Phi}_2 - i z, \quad (2.29)$$

con  $H_{12}$ ,  $H_{21}$  y  $\Phi_2$  definidos mediante las integrales:

$$H_{12} = \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi \mu_1(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (2.30)$$

$$H_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e(\xi) \mu_2(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (2.31)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(\xi) \mu_2(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma. \quad (2.32)$$

En las dos últimas fórmulas se ha introducido una función desconocida  $\mu_2(\sigma)$  que debe satisfacer las ecuaciones integrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma) [e(\xi) + \bar{e}(\eta) + 2f(\xi)\bar{f}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = -2\pi i, \quad (2.33)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0. \quad (2.34)$$

La forma en la que se busca la función  $\mu_2(\sigma)$  es la siguiente [19]:

$$\mu_2(\sigma) = -i\xi + B_0 + \sum_{k=1}^N \left( \frac{B_k^1}{\xi - \alpha_k} + \dots + \frac{B_k^{m_k}}{(\xi - \alpha_k)^{m_k}} \right), \quad (2.35)$$

donde, tal como en el caso de la función  $\mu_1(\sigma)$ , las  $\alpha_k$  son raíces de la ecuación (2.27) de multiplicidad  $m_k$ , y también los coeficientes desconocidos  $B_0$  y  $B_k$  son independientes de  $\sigma$ .

Hasta aquí, con (2.29) se tendrían las funciones métricas  $f$ ,  $\gamma$  y  $\omega$ , además del potencial eléctrico  $A_t$ . Para el cálculo del potencial magnético  $A_\varphi$  faltante para complementar la solución de electrovacío, se utiliza la función  $\mu_2(\sigma)$ . Esto es a debido que la parte real del

potencial  $\Phi_2$  es el potencial  $A_\varphi$ , i.e.,  $A_\varphi = \text{Re}(\Phi_2)$ , por lo que al determinar  $\mu_2(\sigma)$  basta con calcular  $\Phi_2$  y obteniendo su parte real, el potencial  $A_\varphi$  habrá sido conseguido sin la necesidad de la integración del sistema (2.12).

En esta sección se muestra el método de Sibgatullin, el cual permite la construcción de soluciones exactas estacionarias axialsimétricas de electrovacío por medio de fijar el comportamiento de los potenciales  $e(z)$  y  $f(z)$  de la solución en el eje de simetría. En resumen, la idea del método es que una vez que se proporciona el comportamiento en el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$ , estos se utilizan para resolver las fórmulas integrales para  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  en (2.23) y (2.24) al determinar la función desconocida  $\mu_1(\sigma)$ . Con  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  se construyen el potencial  $A_t$  y la función métrica  $f$  de (2.14) y (2.18) respectivamente. Después se puede calcular la función  $\omega$  por medio de (2.29) y la obtención de otra función desconocida  $\mu_2(\sigma)$ , mientras que la función métrica  $\gamma$  se puede obtener directamente del sistema (2.20) utilizando potenciales de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . Por último, el potencial  $A_\varphi$  se puede obtener también con esta función  $\mu_2(\sigma)$  al calcular la parte real de  $\Phi_2$  en (2.32). Con esto se determina plenamente la solución exacta de electrovacío al haber obtenido las funciones métricas  $f$ ,  $\gamma$  y  $\omega$  y los potenciales electromagnéticos  $A_t$  y  $A_\varphi$ .

### 2.4.2. Solución extendida $N$ -solitónica de electrovacío y el caso $N = 2$

Una aplicación muy importante del método de Sibgatullin es la solución multi-solitónica de electrovacío. El comportamiento sobre el eje de simetría de esta solución está dado por [21]:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\rho = 0, z) \equiv e(z) &= \frac{z^N + \sum_{l=1}^N a_l z^{N-l}}{z^N + \sum_{l=1}^N b_l z^{N-l}} \equiv \frac{P(z)}{R(z)}, \\ \Phi(\rho = 0, z) \equiv f(z) &= \frac{\sum_{l=1}^N c_l z^{N-l}}{z^N + \sum_{l=1}^N b_l z^{N-l}} \equiv \frac{Q(z)}{R(z)},\end{aligned}\quad (2.36)$$

donde  $a_l, b_l, c_l, l = 1, \dots, N$  son  $3N$  parámetros arbitrarios complejos. También se puede escribir (2.36) utilizando:

$$e(z) = 1 + \sum_{l=1}^N \frac{e_l}{z - \beta_l}, \quad f(z) = \sum_{l=1}^N \frac{f_l}{z - \beta_l}, \quad (2.37)$$

donde  $e_l$  y  $f_l$  son constantes arbitrarias complejas, siendo coeficientes en expansiones de las funciones  $e(z)$  y  $f(z)$  en fracciones parciales y  $\beta_l$  siendo los polos de estas funciones. Para  $6N$  parámetros reales, los  $\beta_l$  son polos simples. Así, los parámetros  $\{e_l, \beta_l, f_l\}$  son equivalente al conjunto  $\{a_l, b_l, c_l\}$  de la ecuación (2.36).

Aplicando el método integral de Sibgatullin para los datos en el eje de simetría (2.37), se puede resolver un sistema de ecuaciones algebraicas para obtener la forma de los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ , los cuales se presentan como cocientes de dos determinantes de orden  $2N + 1$ :

$$\mathcal{E} = E_+/E_-, \quad \Phi = F/E_-,$$

$$E_{\pm} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \pm 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_N} & \dots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_N} \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f(\alpha_1) & \dots & f(\alpha_{2N}) \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_N} & \dots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_N} \end{vmatrix}. \quad (2.38)$$

Las fórmulas (2.38) junto con las definiciones:

$$e_l = \frac{2 \prod_{n=1}^{2N} (\beta_l - \alpha_n)}{\prod_{k \neq l}^N (\beta_l - \beta_k) \prod_{k=1}^N (\beta_l - \bar{\beta}_k)} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{f_l \bar{f}_k}{\beta_l - \bar{\beta}_k},$$

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha_n)^2},$$

$$h_l(\alpha_n) \equiv \bar{e}_l + 2 \bar{f}_l f(\alpha_n), \quad f(\alpha_n) \equiv f(z)|_{z=\alpha_n}, \quad (2.39)$$

para  $e_l$ ,  $r_n$ ,  $h_l(\alpha_n)$  y  $f(\alpha_n)$  que se obtienen durante los cálculos con (2.39), se describen completamente la solución  $N$ -solitónica de electrovacío. Con la fórmula para  $e_l$ , se puede pasar de estos parámetros  $e_l$  a las  $\alpha_n$ .



Los coeficientes métricos  $f$ ,  $\gamma$  y  $\omega$  de la solución obtenida pueden ser encontrados con ayuda de las fórmulas anteriores. Recordando (2.18) y tomando en cuenta (2.38), se obtiene directamente

$$f = \frac{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_- + 2F\bar{F}}{2E_- \bar{E}_-}. \quad (2.40)$$

La función  $\gamma$  también tiene una forma sencilla:

$$e^{2\gamma} = \frac{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_- + 2F\bar{F}}{2K_0 \bar{K}_0 \prod_{n=1}^{2N} r_n},$$

$$K_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_N} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \cdots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_N} & \cdots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_N} \end{vmatrix}, \quad (2.41)$$

donde  $K_0$  es la constante de integración para que  $\gamma$  sea asintóticamente plana y la cual se expresa como un determinante de orden  $2N$ . Hay que recordar que esta función  $\gamma$  no se obtiene del método de Sibgatullin, sino que se obtiene mediante la integración de las fórmulas (2.20).

De la Subsección 2.4.1 se calcula la función  $\omega$ , para la cual es necesario construir los potenciales  $H_{12}$ ,  $H_{21}$  y  $\Phi_2$  por medio de las fórmulas (2.30)–(2.32) en las que entra la función desconocida  $\mu_2(\sigma)$ , que satisface la ecuación (2.33) y la condición de normalización (2.34). La expresión para  $\omega$  que se obtiene es:

$$\omega = \frac{2 \operatorname{Im}(E_- \bar{H} - \bar{E}_- G - F\bar{I})}{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_- + 2F\bar{F}}, \quad (2.42)$$

donde

$$\begin{aligned}
G &= \begin{vmatrix} 0 & r_1 + \alpha_1 - z & \dots & r_{2N} + \alpha_{2N} - z \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_N} & \dots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_N} \end{vmatrix}, \\
H &= \begin{vmatrix} z & 1 & \dots & 1 \\ -\beta_1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_N & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ \bar{e}_1 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{e}_N & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_N} & \dots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_N} \end{vmatrix}, \\
I &= \begin{vmatrix} \sum_{l=1}^N f_l & 0 & f(\alpha_1) & \dots & f(\alpha_{2N}) \\ z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\beta_1 & -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_N & -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ \bar{e}_1 & 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{e}_N & 0 & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_N} & \dots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \bar{\beta}_N} \end{vmatrix}. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

$G$  y  $H$  son determinantes de orden  $2N + 1$ , mientras que  $I$  tiene orden  $2N + 2$ . Usando las fórmulas obtenidas, se encuentra la expresión para el coeficiente métrico  $\omega$  dada por (2.42).

Con estos resultados en (2.40), (2.41) y (2.42), se han determinado las funciones  $f$ ,  $\gamma$  y  $\omega$  lo cual concluye la construcción de la métrica  $N$ -solitónica extendida de vacío, mientras

que los potenciales eléctrico  $A_t$  y magnético  $A_\varphi$  se pueden calcular una vez obtenidos los potenciales  $\Phi$  y  $\Phi_2$  respectivamente, sabiendo que  $A_t = -\text{Re}(\Phi)$  y que  $A_\varphi = \text{Re}(\Phi_2)$ , como se mencionó en la Subsección 2.4.1, por lo que queda construida la solución en todo el espacio.

El caso  $N = 2$  lleva a un caso particular de la solución  $N$ -solitónica obtenida en esta subsección y es útil para futuras aplicaciones. Este es el caso que se utiliza para encontrar las soluciones de los sistemas de los Capítulos 3 y 4. En esta especialización los potenciales toman la forma:

$$\mathcal{E} = E_+/E_-, \quad \Phi = F/E_-,$$

$$E_\pm = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \pm 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_1} \\ \pm 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_2} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_1} \\ 0 & \frac{h_2(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_2} & \dots & \frac{h_2(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_2} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f(\alpha_1) & \dots & f(\alpha_4) \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_1} \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_2} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_1} \\ 0 & \frac{h_2(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_2} & \dots & \frac{h_2(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_2} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Por otro lado, para las funciones métricas  $f$ ,  $\gamma$  y  $\omega$ , se utilizan los resultados obtenidos anteriormente:

$$f = \frac{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_- + 2F\bar{F}}{2E_- \bar{E}_-},$$

$$e^{2\gamma} = \frac{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_- + 2F\bar{F}}{2K_0 \bar{K}_0 r_1 r_2 r_3 r_4},$$

$$\omega = \frac{2 \text{Im}(E_- \bar{H} - \bar{E}_- G - F\bar{I})}{E_+ \bar{E}_- + \bar{E}_+ E_- + 2F\bar{F}}, \quad (2.45)$$

por lo que es necesario calcular  $G$ ,  $I$ ,  $H$  y  $K_0$ , los cuales determinan las fórmulas en (2.45). Las expresiones para estas cantidades quedan como:

$$\begin{aligned}
 G &= \begin{vmatrix} 0 & r_1 + \alpha_1 - z & \dots & r_{2N} + \alpha_{2N} - z \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_1} \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_2} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_1} \\ 0 & \frac{h_2(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_2} & \dots & \frac{h_2(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_2} \end{vmatrix}, \\
 H &= \begin{vmatrix} z & 1 & \dots & 1 \\ -\beta_1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_1} \\ -\beta_2 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_2} \\ \bar{e}_1 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_1} \\ \bar{e}_2 & \frac{h_2(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_2} & \dots & \frac{h_2(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_2} \end{vmatrix}, \\
 I &= \begin{vmatrix} f_1 + f_2 & 0 & f(\alpha_1) & \dots & f(\alpha_4) \\ z & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\beta_1 & -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_1} \\ -\beta_2 & -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \dots & \frac{r_4}{\alpha_4 - \beta_2} \\ \bar{e}_1 & 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & \frac{h_1(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_1} \\ \bar{e}_2 & 0 & \frac{h_2(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_2} & \dots & \frac{h_2(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_2} \end{vmatrix}, \\
 K_0 &= \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & & \frac{1}{\alpha_4 - \beta_1} \\ 1 & & & 1 \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_2} & \dots & & \frac{1}{\alpha_4 - \beta_2} \\ \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_1} & \dots & & \frac{h_1(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_1} \\ \frac{h_2(\alpha_1)}{\alpha_1 - \bar{\beta}_2} & \dots & & \frac{h_2(\alpha_4)}{\alpha_4 - \bar{\beta}_2} \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Estos determinantes obtenidos pueden ser desarrollados utilizando la regla de Laplace,

ya que estos dependen solo de la coordenada  $\rho$  mediante las funciones  $r_n$ . Este resultado es extenso y no se expondrá aquí, pero está como apéndice en la referencia [31]. Es la expansión de los determinantes la que se utiliza en para los cálculos computacionales. Al calcular esta expansión de los determinantes por medio de la regla de Laplace, se obtienen las funciones métricas para el caso especializado  $N = 2$  de la solución  $N$ -solitónica. Estos resultados son los que se utilizan en los Capítulos 3 y 4

## 2.5. Simetría y antisimetría ecuatorial

En la literatura de soluciones exactas, el término “sistema antisimétrico” aparece por primera vez en 1995 en el artículo de Bretón y Manko [23], pero la definición matemáticamente rigurosa de “antisimetría ecuatorial” fue dada solamente en el año 2006 por Ernst, Manko y Ruiz [30]. A continuación, se exponen las definiciones:

**Definición.** El espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico con el elemento de línea dado por (2.10):

$$ds^2 = f(\rho, z)^{-1} [e^{2\gamma(\rho, z)} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] - f(\rho, z) (dt - \omega(\rho, z) d\phi)^2,$$

se considera que tiene “*simetría ecuatorial*” o “*antisimetría ecuatorial*” dependiendo de lo cómo se comporten los campos métricos  $f$ ,  $\gamma$  y  $\omega$  bajo la transformación

$$z \rightarrow z' = -z, \quad \rho \rightarrow \rho' = \rho, \quad (2.47)$$

lo cual se definir como sigue:

- Un espacio-tiempo estacionario con simetría axial es llamado “**ecuatorialmente simétrico**” si existe una elección del origen de coordenadas tal que bajo la transformación en (2.47), los campos  $f(\rho, z)$ ,  $\gamma(\rho, z)$  y  $\omega(\rho, z)$  sean funciones pares de  $z$ .
- Un espacio-tiempo con estas simetrías es llamado “**ecuatorialmente antisimétrico**” si existe una elección del origen de coordenadas y una constante  $\omega_0$  tales que bajo la transformación (2.47) los campos métricos  $f$  y  $\gamma$  sean funciones pares de  $z$ , mientras que  $\omega - \omega_0$  es función impar de  $z$ .

En el artículo [30] también se comprobaron dos teoremas que caracterizan los espacios-tiempos ecuatorialmente simétricos y antisimétricos en términos de los potenciales de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . Estos teoremas, por un lado, permiten ver, usando solo los potenciales de Ernst y no toda la métrica, si el espacio-tiempo en cuestión es ecuatorialmente antisimétrico y, por otro

lado, permiten elegir datos sobre el eje de simetría que lleven a las soluciones exactas con simetría o antisimetría ecuatorial.

**Teorema 1.** Una solución estacionaria axialsimétrica de las ecuaciones de Ernst de electrovacío

$$\begin{aligned}(\operatorname{Re}\mathcal{E} + |\Phi|^2)\Delta\mathcal{E} &= (\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi) \cdot \nabla\mathcal{E}, \\(\operatorname{Re}\mathcal{E} + |\Phi|^2)\Delta\Phi &= (\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi) \cdot \nabla\Phi,\end{aligned}$$

es ecuatorialmente simétrica si y solo si

$$\mathcal{E}(-z, \rho) = \mathcal{E}(z, \rho)^*, \quad \Phi(-z, \rho) = e^{2i\delta}\Phi(z, \rho)^*. \quad (2.48)$$

donde  $\delta$  es una constante real, y la solución será ecuatorialmente antisimétrica si y solo si

$$\mathcal{E}(-z, \rho) = \mathcal{E}(z, \rho), \quad \Phi(-z, \rho) = \pm\Phi(z, \rho). \quad (2.49)$$

Por medio de este teorema se puede ver demostrar que la conocida solución de NUT [6], es ecuatorialmente antisimétrica usando la expresión de su potencial de Ernst correspondiente [27].

**Teorema 2.** Una solución asintóticamente plana de electrovacío construida a partir de los datos  $e_+(z) = \mathcal{E}(z, 0)$  y  $f_+(z) = \Phi(z, 0)$  especificados en un intervalo abierto conexo extendido a  $z = +\infty$  sobre la parte positiva del eje  $z$  es ecuatorialmente simétrica si y solo si

$$e_+(z)[e_+(-z)]^* = 1 \quad \text{y} \quad f_+(z) = -e^{2i\delta}[f_+(-z)]^*e_+(z), \quad (2.50)$$

y será ecuatorialmente antisimétrica si y solo si

$$e_+(z)e_+(-z) = 1 \quad \text{y} \quad f_+(z) = \mp f_+(-z)e_+(z), \quad (2.51)$$

donde  $e_+(z)$  y  $f_+(z)$  han sido extendidos analíticamente desde la parte positiva del eje  $z$  a la parte negativa del mismo.

Este segundo teorema permite encontrar datos sobre el eje de simetría que definen las soluciones exactas con simetría o antisimetría ecuatorial, para poder después construir las soluciones correspondientes a estos datos en todo el espacio. El signo “+” en  $e_+(z)$  y  $f_+(z)$  indica que los datos están tomados sobre la parte positiva del eje  $z$ . Se usa este signo exclusivamente en la formulación del Teorema 2 y se omite en otras partes del texto, escribiendo simplemente  $e(z)$  y  $f(z)$  para denotar los datos sobre el eje de simetría.

En los Capítulos 3 y 4 se presentan un par soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell: en el Capítulo 3 se trata un sistema de constituyentes traslapados corotantes con simetría ecuatorial y en el Capítulo 4, uno con dos fuentes de Kerr-Newman contrarrotantes, del cual también se estudia si tiene comportamiento de simetría o antisimetría ecuatorial.

## 2.6. Momentos multipolares

Cuando se habla de cantidades físicas llamadas “momentos”, no hay duda de la importancia de estas cantidades en el marco de la teoría de Newton o en electromagnetismo, entre otras teorías físicas, por lo que resulta de evidente interés estudiar en cómo se aplica la idea de momentos multipolares en el contexto relatividad general y sí el hacerlo trae consigo beneficios o facilidades.

Una vez que se entendieron ciertos aspectos de la teoría, se juntaron poco a poco los ingredientes para empezar a estudiar la estructura multipolar de los espaciotiempos en RG. La expansión en multipolos es una expansión en series de una función la cual depende los ángulos, y en este caso dependerá del ángulo axial  $\varphi$ . Lo que se expande es el campo gravitacional y electromagnético del sistema. Esta expansión está relacionada con la simetría del sistema. Por esta razón se parte de que se tiene un espacio-tiempo con simetría axial y estacionaria para después estudiar su estructura multipolar.

En una serie de dos artículos publicados en 1970 [10, 11], Geroch daba una definición de momentos multipolares para una solución estática asintóticamente plana de las ecuaciones de Einstein. Así, Geroch en [11] se encargó de definir los momentos multipolares en el caso estático de soluciones axisimétricas asintóticamente planas. Después de esto, en 1974, Hansen proporcionó la generalización para el caso estacionario [13], donde se agrega el parámetro de rotación para describir la solución.

El estudio de los momentos multipolares se extendió al caso de electrovacío, donde además del campo gravitacional, también se presenta el electromagnético, el cual debe de satisfacer las ecuaciones sin fuente de Maxwell en la geometría cierto espacio-tiempo. En 1976, Hoenselaers [14] hizo una generalización para el caso de electrostático y más adelante, en 1984 que Simon buscó dar una generalización para las ecuaciones de Einstein-Maxwell para el caso estacionario [16]. El estudio de estos momentos multipolares basados en resultados de Geroch brindó, después de bastantes trabajos sobre este ámbito, la prueba de que un espacio-tiempo puede ser caracterizado únicamente por sus momentos.

Tener idea de la estructura multipolar de la solución es de bastante interés físico. Con lo anterior en mente, a continuación, se dan algunas definiciones importantes para calcular los momentos multipolares relativistas de Simon para el caso axisimétrico.

Para facilitar el cálculo de los momentos se usa el procedimiento de Hoenselaers-Perjés (HP) [18], rectificado por Sotiriou y Apostolatos [26]. Se utilizan los potenciales de Ernst modificados  $\xi$  y  $\eta$  [9] evaluados en el eje de simetría e introducidos en (2.21), donde para estos, se necesitan los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . En este procedimiento, los momentos multipolares se pueden expresar en términos de los coeficientes de la expansión en series de  $\xi$  y  $\eta$ . Los potenciales modificados  $\xi$  y  $\eta$  se definen en términos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  como

sigue:

$$\xi(\rho = 0, z) = \frac{1 - e(z)}{1 + e(z)}, \quad \eta(\rho = 0, z) = \frac{2f(z)}{1 + e(z)}. \quad (2.52)$$

Los coeficientes que se buscan son los de Hoenselaers-Perjés (HP)  $m_n$  y  $q_n$ , los cuales acompañan a las potencias de  $z$  en la expansión cuando  $z \rightarrow \infty$

$$\xi(\rho = 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^{-n-1}, \quad \eta(\rho = 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^{-n-1} \quad (2.53)$$

Los coeficientes HP coinciden con los primeros cuatro momentos de Simon  $P_n$ . Las cantidades  $m_n$  representan los momentos multipolares de masa y de momento angular, mientras que los  $q_n$  son los momentos multipolares eléctricos y magnéticos. Estas definiciones en (2.53) nos proveen con información importante acerca del contenido físico de la solución y de las fuentes, que podrían ser masa, momento angular, carga eléctrica o dipolo magnético.

### 2.6.1. Ejemplos: datos en el eje y multipolos

Uno puede construir la solución en todo el espacio utilizando el método integral de Sibgatullin, pero se tiene que especificar un comportamiento en el eje de simetría. Además, dicho comportamiento también permite calcular los momentos multipolares por medio del método HP, por lo que el conocimiento de los datos en el eje de simetría resulta muy útil en técnicas modernas de generación soluciones exactas.

En esta subsección es importante empezar recordando la solución general de seis parámetros 2-solitónica con simetría ecuatorial en electrovacío [22], la cual es obtenida por el método integral de Sibgatullin [39]. Se muestran cuatro casos especial de esta solución, también llamada la solución MMR. Esta solución se define a partir del siguiente comportamiento en el eje de simetría:

$$e(z) = \frac{(z - m - ia)(z + ib) + k}{(z + m - ia)(z + ib) + k},$$

$$f(z) = \frac{qz + ic}{(z + m - ia)(z + ib) + k}. \quad (2.54)$$

Las expresiones  $e(z)$  y  $f(z)$  son los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  and  $\Phi$  evaluados en la parte superior del eje de simetría  $z$ . La solución tiene seis parámetros, por lo que  $e(z)$  y  $f(z)$  dependen de los valores reales y arbitrarios de  $m, a, b, k, q$  y  $c$ . Para cada caso que se presenta el cálculo de los primeros cinco momentos multipolares relativistas calculados con



el procedimiento de Hoenselaers-Perjés [18]. Se mostrarán los momentos multipolares  $M_n$  de masa,  $J_n$  de momento angular, eléctricos  $E_n$  y magnéticos  $B_n$ , y en el último caso, su representación como las cantidades  $m_n$  y  $q_n$ , donde podemos relacionar los momentos HP como  $m_n = M_n + iJ_n$  y  $q_n = E_n + iB_n$ .

La solución MMR en (2.54) viene como una especialización de una solución de 12 parámetros complejos, los cuales se vuelven 6 parámetros reales por tratarse el caso con simetría ecuatorial, ya que en todos los objetos compactos que posean esta simetría ecuatorial, los multipolos impares de masa  $M_{2k+1}$  y eléctricos  $E_{2k+1}$  impares, así como los momentos pares de momento angular  $J_{2k}$  y magnéticos  $B_{2k}$  pares, son cero.

### Solución de Schwarzschild: datos en el eje

Para la solución de Schwarzschild que solo depende del parámetro de la masa  $m$ , se escoge

$$a = 0, \quad b = 0, \quad m \neq 0, \quad k = 0, \quad q = 0, \quad c = 0. \quad (2.55)$$

Esta elección nos dice que estamos trabajando con un objeto masivo  $m \neq 0$ , estático  $a = 0$ , sin carga neta  $q = 0$ , etc. Con (2.55) en (2.54) obtenemos el siguiente comportamiento sobre el eje de simetría para la solución de Schwarzschild

$$e(z) = \frac{z - m}{z + m}, \quad f(z) = 0, \quad (2.56)$$

lo cual lleva a los momentos multipolares:

$$\begin{aligned} M_0 &= m, & M_1 &= M_2 = M_3 = M_4 = 0, \\ J_0 &= J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0, \\ E_0 &= E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0, \\ B_0 &= B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

### Solución de Kerr: datos en el eje

En la métrica de Kerr se utilizan dos parámetros: el de masa  $m$  y el parámetro que describe la rotación, ya sea el momento angular por unidad de masa  $a$  o el momento angular  $j$ . De los 6 parámetros de la solución MMR, para la solución de Kerr se escogen:

$$a \neq 0, \quad b = 0, \quad m \neq 0, \quad k = 0, \quad q = 0, \quad c = 0. \quad (2.58)$$

En este caso, el parámetro extra que se usa es el de rotación  $a \neq 0$ . Utilizando (2.58) en los datos en el eje de la solución MMR, el comportamiento en el eje de simetría para la solución de Kerr sería:

$$e(z) = \frac{z - m - ia}{z + m - ia}, \quad f(z) = 0. \quad (2.59)$$

Los momentos multipolares correspondientes a este comportamiento en el eje son:

$$\begin{aligned} M_0 &= m, & M_1 &= 0, & M_2 &= -ma^2, & M_3 &= 0, & M_4 &= ma^4, \\ J_0 &= 0, & J_1 &= ma, & J_2 &= 0, & J_3 &= -ma^3, & J_4 &= 0, \\ E_0 &= E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0, \\ B_0 &= B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

### Solución de Reissner-Nordström: datos en el eje

La solución de Reissner-Nordström describe el campo gravitacional y electromagnético de un objeto de masa  $m$  con carga neta  $q$  distinta de cero. La elección de parámetros en (2.54) para este caso es:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad m \neq 0, \quad k = 0, \quad q \neq 0, \quad c = 0. \quad (2.61)$$

Aquí, en vez de encender el parámetro de rotación, se trabaja con un objeto que tiene carga eléctrica, por lo que  $q \neq 0$ . Con esto, el comportamiento para  $e(z)$  y  $f(z)$  obtenido es el siguiente:

$$e(z) = \frac{z - m}{z + m}, \quad f(z) = \frac{q}{z + m}, \quad (2.62)$$

y los momentos multipolares son:

$$\begin{aligned} M_0 &= m, & M_1 &= M_2 = M_3 = M_4 = 0, \\ J_0 &= J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0, \\ E_0 &= q, & E_1 &= E_2 = E_3 = E_4 = 0, \\ B_0 &= B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

**Solución de Kerr-Newman: datos en el eje**

Otro de los casos ilustrativos para presentar es el del agujero negro de Kerr-Newman. Este es un agujero negro rotante con carga eléctrica, que se describe con los tres parámetros de masa  $m$ , momento angular  $j$  y carga eléctrica  $q$ . Los parámetros que se escogen en (2.54) son:

$$a \neq 0, \quad b = 0, \quad m \neq 0, \quad k = 0, \quad q \neq 0, \quad c = 0, \quad (2.64)$$

por lo que ahora se tienen tres parámetros no nulos como especialización de la solución de seis parámetros. Los datos en el eje son:

$$e(z) = \frac{z - m - ia}{z + m - ia}, \quad f(z) = \frac{q}{z + m - ia}. \quad (2.65)$$

Los momentos multipolares obtenidos con este comportamiento son:

$$\begin{aligned} M_0 &= m, & M_1 &= 0, & M_2 &= -ma^2, & M_3 &= 0, & M_4 &= ma^4, \\ J_0 &= 0, & J_1 &= am, & J_2 &= 0, & J_3 &= -ma^3, & J_4 &= 0, \\ E_0 &= q, & E_1 &= 0, & E_2 &= -qa^2, & E_3 &= 0, & E_4 &= qa^4, \\ B_0 &= 0, & B_1 &= qa, & B_2 &= 0, & B_3 &= -qa^3, & B_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Los resultados obtenidos son consistentes con el hecho de que los multipolos impares de masa  $M_{2k+1}$  y eléctricos  $E_{2k+1}$  son cero, así como los momentos pares de momento angular  $J_{2k}$  y magnéticos  $B_{2k}$ .

Utilizando la interpretación anterior se puede confirmar al calcular los primeros cuatro momentos multipolares complejos con la fórmula (2.52) y los datos en el eje del modelo. Los momentos son:

$$m_0 = m, \quad m_1 = ima, \quad m_2 = -ma^2, \quad m_3 = -ima^3, \quad m_4 = ma^4, \quad (2.67)$$

$$q_0 = q, \quad q_1 = iqa, \quad q_2 = -qa^2, \quad q_3 = -iqa^3, \quad q_4 = qa^4. \quad (2.68)$$

Así, la expresión general concisa para los multipolos HP para este caso de Kerr-Newman sería:

$$m_n = m(ia)^n, \quad q_n = q(ia)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

# Capítulo 3

## Extensión de masa deformada rotante magnetizada

En este capítulo se proporciona la extensión a los valores complejos de la solución de una masa deformada rotante magnetizada. La extensión se presenta como un estado final del colapso de dos agujeros negros donde el objeto resultante muestra un espacio de parámetros extendido, permitiendo masas complejas conjugadas de los objetos iniciales. Esto es de interés ya que al usar masas complejas conjugadas iniciales, se agregan estados finales de manera no trivial. Cabe a mencionar también que modelo es útil para modelar objetos astrofísicos. Se presenta la solución en todo el espacio, singularidades de algunos casos, superficies de límite estacionario y líneas de campo magnético, así como los momentos multipolares de la solución.

### 3.1. Solución 4-paramétrica extendida

#### 3.1.1. Extensión $(m_1, m_2, a, \mu) \rightarrow (M, q, a, \mu)$

Se parte de la solución publicada por Manko *et al.* [35], una solución estacionaria axi-simétrica de 4-parámetros de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, la cual puede describir el campo exterior de una masa deformada, rotante y magnetizada. Los parámetros empleados en la solución son  $(m_1, m_2, a, \mu)$ , los cuales representan las masas de los objetos constituyentes, ya sean agujeros negros o discos hiperextremos, el parámetro de rotación y el dipolo magnético respectivamente. Esto hace notar porqué esta masa deformada también puede ser interpretada como dos objetos corotantes traslapados, lo cual implica simetría ecuatorial. La solución es un buen modelo para una estrella de neutrones, como se comenta en [34], ya que la consideración de cuatro parámetros asociados con cuatro momentos multipolares, encaja bien con los resultados numéricos, por lo que esta solución proporciona un buen modelo

analítico. También se argumenta en [34] cómo es que el régimen hiperextremo es importante para la descripción correcta de estos objetos astrofísicos.

Para construir la extensión se define la masa total del sistema  $M$  como:

$$M = m_1 + m_2. \quad (3.1)$$

Como se muestra en [35], el momento cuadrupolar de masa  $Q$  de la solución está dado por:

$$Q = -(m_1 + m_2)(a^2 + m_1 m_2 - \mu^2),$$

por lo que el momento cuadrupolar de masa por unidad de masa queda definido como:

$$q \equiv Q/M \quad \Rightarrow \quad q = -a^2 - m_1 m_2 + \mu^2. \quad (3.2)$$

Además, el momento angular total del sistema  $J = j_1 + j_2$ , donde  $j_1$  y  $j_2$  representan los momentos angulares de los constituyentes, está relacionado con el parámetro de rotación  $a$  y la masa total  $M$ :

$$J = a m_1 + a m_2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{J}{M}. \quad (3.3)$$

La extensión para esta solución 4-paramétrica estacionaria antisimétrica se obtiene al resolver para  $m_1$  y  $m_2$  con las ecuaciones (3.2) y (3.1), lo cual nos lleva a:

$$m_1 = \frac{1}{2}(M + d), \quad m_2 = \frac{1}{2}(M - d), \quad (3.4)$$

donde se define:

$$d \equiv \sqrt{M^2 + 4q + 4a^2 - 4\mu^2}. \quad (3.5)$$

$d$  en (3.5) puede tomar valores reales o imaginarios dependiendo de cuál sea el valor de los parámetros dentro de la raíz, por lo que en un principio las masas  $m_1$  y  $m_2$  podrían ser complejas, y en particular, por la definición en (3.4), masas complejas conjugadas.

El parámetro  $d$  es una contribución a la masa de los constituyentes iniciales  $m_1$  y  $m_2$  y puede ser real o imaginario puro. Además, de (3.1) se puede ver que  $d$  no contribuye a la masa total del sistema, por lo que se asegura la realidad de la masa  $M$ . Aun así,  $d$  puede hacer que las masas de los constituyentes sean reales o complejas dependiendo de cuál de las siguientes desigualdades se cumplan:

- $d \in \mathbb{R}^+ \iff q > -\frac{1}{4}M^2 - a^2 + \mu^2$ ,
- $d \in I^+ \iff q < -\frac{1}{4}M^2 - a^2 + \mu^2$ .

Aunque se considera que no es físico que un parámetro de masa tenga valores complejos, esto se permite en este caso, ya que podemos tener masas complejas siempre y cuando una sea el complejo conjugado de la otra ( $m_1^* = m_2$ ) debido a que esto no afecta la realidad de los datos en el eje de simetría (3.8), que se mostrará más adelante, ni tampoco de las funciones que aparecen en la métrica.

El caso con  $d \in \mathbb{R}^+$  representa a los parámetros de la solución "original" en [35], lo que implica que las masas son reales. La extensión también incluye el caso en el que  $d \in \mathcal{I}^+$ , lo cual implica masas complejas conjugadas, lo que muestra que el objeto que se obtiene en el estado final tiene una solución de estructura más rica debido a la extensión del espacio de parámetros.

Es importante mencionar que hay algunos modelos como el de [15], en donde los parámetros arbitrarios que representan la solución no son los momentos multipolares, y estos están restringidos de tal manera que la solución solo es válida para describir objetos hiperextremos y no objetos subextremos. En casos como este, lo que se hace es que al usar una parametrización que describa solo agujeros negros, por ejemplo, para describir objetos superextremos se tiene que hacer una continuación compleja de los parámetros. En el caso de la solución  $N$ -solitónica obtenida por medio del método de Sibgatullin, se usan  $6N$  parámetros complejos arbitrarios que describen los 12 momentos multipolares arbitrarios. Es por esto que en [21] se refieren a la solución extendida de electrovacío, ya que sirve para describir casos subextremos e hiperextremos por la arbitrariedad de los  $4N$  parámetros reales correspondientes a los  $4N$  momentos multipolares. En este sentido, la solución presentada en [35] es una solución extendida debido a que permite modelar soluciones con constituyentes subextremos, hiperextremos y casos mixtos utilizando 4 parámetros que describen tres momentos multipolares gravitacionales arbitrarios  $M, q$  y  $a$ , y uno electromagnético  $\mu$ . Esta solución se extiende aún más al dominio de los complejos con (3.4). La "extensión" está dada sobre la solución ya extendida en cierto sentido, pero en este caso se hace referencia a que se extiende el espacio de parámetros a los números complejos.

### 3.1.2. Potenciales de Ernst

Se considera la solución general de dos solitones con simetría ecuatorial en electrovacío, también conocida como la solución MMR de seis parámetros [22], obtenida por medio del método de Sibgatullin [39], la cual está definida por el comportamiento en el eje de simetría presentado en la ecuación (2.54), donde  $e(z)$  y  $f(z)$  son las expresiones para los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  en la parte superior del eje  $z$ . Las funciones  $e(z)$  y  $f(z)$  dependen de los seis parámetros reales arbitrarios  $m, a, b, k, q$  y  $c$ .

La solución de cuatro parámetros mostrada en [35] se obtiene como un caso especial de la solución MMR al escoger

$$b = a, \quad k = m_1 m_2 - \mu, \quad q = 0, \quad c = M\mu, \quad (3.6)$$

donde la masa total  $M = m_1 + m_2$ . La carga eléctrica  $q$  se escogió cero ya que los objetos astrofísicos presentan carga eléctrica neta muy pequeña en comparación de su contraparte magnética, por lo que se puede despreciar. Esto hace que el campo electromagnético esté definido por el parámetro arbitrario de momento dipolar magnético  $\mu$ . Como lo comentan los autores de [35], la solución se presenta como un caso límite de la métrica para dos masas cargadas contrarrotantes distintas [32], ya que cuando  $R = 0$ , la solución pasa a ser miembro de la solución MMR. Así, en el límite  $R = 0$ , el caso pasa a ser de dos contrarrotantes a un caso de constituyentes corotantes traslapados. La solución de constituyentes corotantes es la que se utiliza en [35].

Haciendo la sustitución de la elección de parámetros (3.6) en el comportamiento en el eje (2.54), se obtiene que el comportamiento en el eje que describe esta especialización de la solución MMR está dado por:

$$\begin{aligned} e(z) &= \frac{(z - m_1)(z - m_2) - ia(m_1 + m_2) + a^2 - \mu^2}{(z + m_1)(z + m_2) + ia(m_1 + m_2) + a^2 - \mu^2}, \\ f(z) &= \frac{i\mu(m_1 + m_2)}{(z + m_1)(z + m_2) + ia(m_1 + m_2) + a^2 - \mu^2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

y los cuatro parámetros arbitrarios son  $m_1, m_2, a$  y  $\mu$ .

Haciendo la sustitución de (3.4) en (3.7), se obtiene el comportamiento en el eje de simetría que define la extensión de la solución:

$$\begin{aligned} e(z) &= \frac{z^2 - Mz - iaM - q}{z^2 + Mz + iaM - q}, \\ f(z) &= \frac{i\mu M}{z^2 + Mz + iaM - q}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Los datos en el eje (3.8) debe cumplir con la siguiente ecuación algebraica:

$$e(z) + \bar{e}(z) + 2f(z)\bar{f}(z) = 0, \quad (3.9)$$

cuya solución son las cuatro raíces  $\alpha_n$  que fijan las fuentes de la solución. Se puede resolver la ecuación algebraica en (3.9) para obtener las raíces, o simplemente hacer la sustitución algebraica de (3.4) en las funciones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  de la solución original. Por sustitución algebraica se llega a que las raíces que fijan las fuentes de la solución son:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\equiv \sqrt{\frac{1}{4}(M+d)^2 - a^2 + \mu^2} = \alpha_1 = -\alpha_2, \\ \sigma_2 &\equiv \sqrt{\frac{1}{4}(M-d)^2 - a^2 + \mu^2} = \alpha_3 = -\alpha_4.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Por otro lado, si se resuelve la ecuación algebraica con los datos en el eje (3.8) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\equiv \sqrt{\frac{1}{2}M(M+d) + q} = \alpha_1 = -\alpha_2, \\ \sigma_2 &\equiv \sqrt{\frac{1}{2}(M(M-d) + q)} = \alpha_3 = -\alpha_4,\end{aligned}\quad (3.11)$$

lo cual es equivalente con (3.10) si se eleva el binomio al cuadrado. Más adelante, estas definiciones serán utilizadas para escribir las desigualdades que determinan el tipo de configuración de la solución para los casos subextremo, mixto e hiperextremo, cuando el parámetro  $d \in \mathbb{R}$ .

Las raíces en (3.11) definen a las funciones  $r_n$ :

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha_n)^2}, \quad (3.12)$$

donde  $\rho$  y  $z$  son las coordenadas cilíndricas de Weyl-Papapetrou.

Se pueden construir los potenciales de Ernst complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  al sustituir (3.4) en las expresiones de [35] para los potenciales. Así, para esta extensión de solución estacionaria axisimétrica de cuatro parámetros, los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{A-B}{A+B}, \quad \Phi = \frac{C}{A+B}, \\ A &= \left[ \frac{1}{2}(M^2 + d^2)(r_1 + r_2)(r_3 + r_4) - (M^2 - d^2)(r_1 r_2 + r_3 r_4) \right] \sigma_1 \sigma_2 \\ &\quad - \frac{1}{4}(r_1 - r_2)(r_3 - r_4) [(M-d)^2 \sigma_1^2 + (M+d)^2 \sigma_2^2] \\ &\quad - iadM[(r_1 + r_2)(r_3 - r_4)\sigma_1 - (r_1 - r_2)(r_3 + r_4)\sigma_2], \\ B &= dM[(M+d)(r_3 + r_4) - (M-d)(r_1 + r_2)] \sigma_1 \sigma_2 \\ &\quad - iadM[(M+d)(r_3 - r_4)\sigma_1 - (M-d)(r_1 - r_2)\sigma_2], \\ C &= i\mu dM[(M-d)(r_3 - r_4)\sigma_1 - (M+d)(r_1 - r_2)\sigma_2].\end{aligned}\quad (3.13)$$

Con (3.13) se han obtenido los potenciales de Ernst complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  por medio de una sustitución algebraica en los potenciales proporcionados en [35].



### 3.1.3. Funciones métricas y 4-potencial EM

Las funciones métricas correspondientes  $f, \gamma$  y  $\omega$  que entran al elemento de línea  $ds^2$ :

$$ds^2 = f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] - f(dt - \omega d\phi)^2,$$

se pueden construir algebraicamente utilizando la reparametrización en (3.4). Las funciones métricas de la solución son obtenidas originalmente por medio del método de Sibgatullin, utilizando la solución 2-solitónica de electrovacío, y al extender la solución, las funciones toman la forma:

$$f = \frac{A\bar{A} - B\bar{B} + C\bar{C}}{(A+B)(\bar{A}+\bar{B})}, \quad e^{2\gamma} = \frac{A\bar{A} - B\bar{B} + C\bar{C}}{K_0 \bar{K}_0 r_1 r_2 r_3 r_4}, \quad \omega = -\frac{\Im[G(\bar{A} + \bar{B}) + C\bar{I}]}{A\bar{A} - B\bar{B} + C\bar{C}},$$

$$G = -2zB - dM \left\{ 2iadM(r_1 - r_2)(r_3 - r_4) + (\mu^2 + \frac{1}{2}(M-d)^2)(r_1 + r_2)(r_3 - r_4)\sigma_1 \right. \\ \left. - (\mu^2 + \frac{1}{2}(M+d)^2)(r_1 - r_2)(r_3 + r_4)\sigma_2 + 2(r_1 - r_2)[\mu^2 M - (M-d)\sigma_1^2]\sigma_2 \right. \\ \left. - 2(r_3 - r_4)[\mu^2 M - (M+d)\sigma_2^2]\sigma_1 - 2ia[(M+d)(r_3 + r_4) - (M-d)(r_1 + r_2)]\sigma_1\sigma_2 \right\},$$

$$I = \frac{1}{2}\mu \left\{ 2iM[2(M+d)r_1 r_2 + 2(M-d)r_3 r_4 - M(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)]\sigma_1\sigma_2 \right. \\ \left. - 4adM^2[(r_3 - r_4)\sigma_1 - (r_1 - r_2)\sigma_2] - 2adM[(r_1 + r_2)(r_3 - r_4)\sigma_1 - (r_1 - r_2)(r_3 + r_4)\sigma_2] \right. \\ \left. + 2idM[3M(r_1 + r_2 - r_3 - r_4) + d(4M + r_1 + r_2 + r_3 + r_4)]\sigma_1\sigma_2 \right. \\ \left. + iM(r_1 - r_2)(r_3 - r_4)[(M-d)\sigma_1^2 + (M+d)\sigma_2^2] \right\},$$

$$K_0 = 4d^2 \sigma_1 \sigma_2. \quad (3.14)$$

Con esto, (3.14) determina completamente la métrica del estado final de los dos constituyentes interactuantes, la cual describe la masa deformada rotante y magnetizada con una estructura de parámetros extendida.

Para complementar la descripción de la solución de 4 parámetros de electrovacío se expresan los componentes de campo eléctrico  $A_t$  y magnético  $A_\phi$  del 4-potencial electromagnético definido por (3.13), el cual tiene la misma forma que en [35]:

$$A_t = -\Re\left(\frac{C}{A+B}\right), \quad A_\phi = \Im\left(\frac{I - zC}{A+B}\right). \quad (3.15)$$

En (3.15), se cambia un poco la notación, y  $\Re[\alpha]$  representa la parte real de  $\alpha$ , mientras que  $\Im[\alpha]$  su parte imaginaria.

Con todo lo anterior se construye la solución caracterizada por los parámetros  $(M, q, a, \mu)$ , la cual describe el estado del objeto resultante del colapso de los dos cuerpos iniciales tras puestos al obtener los potenciales de Ernst (3.13), las funciones métricas (3.14) y los componentes del campo electromagnético (3.15). Los 4 parámetros arbitrarios en la solución

representan la masa total del objeto  $M$ , el momento cuadrupolar por unidad de masa  $q$ , el parámetro de espín  $a$  y el momento dipolar magnético  $\mu$ , por lo que se interpreta como una masa deformada rotante magnetizada. El momento cuadrupolar por unidad de masa  $q$  se utiliza como parámetro de deformación del objeto compacto y el momento dipolar magnético  $\mu$  es el único parámetro que define el campo electromagnético.

## 3.2. Características de la solución

La extensión del espacio de parámetros viene dada por el hecho de que el objeto final permite estados donde la masa total  $M$  es real, pero la de los constituyentes iniciales tendrían que haber sido masas complejas conjugadas tal que  $m_1 = m_2^*$ , lo cual los hace inaccesibles como estados iniciales, pero como estado final, el objeto que se forma después del colapso de sus constituyentes si tiene acceso a este espectro de parámetros de masa complejos conjugados. El hecho de tener masas reales o complejas en el estado final depende de cómo se relacionen los 4 parámetros  $(M, q, a, \mu)$ . En esta sección, primero se evalúan las condiciones de simetría y antisimetría ecuatorial para los datos en el eje  $e(z)$  y  $f(z)$  de la solución, después se analizan los tipos de configuraciones permitidas de la solución, se presentan superficies de límite estacionario, líneas de campo magnético y se calcula la localización de singularidades de algunos ejemplos. Estudiando esta extensión a las masas complejas, se llegó a que se pueden presentar configuraciones adicionales a la solución original que se pueden ver en Fig 3.1. Además, hay cierto tipo configuraciones donde la singularidad de anillo que se forma no depende de los valores de masa total  $M$  o de la deformación  $q$ .

### 3.2.1. Evaluación de simetría/antisimetría ecuatorial

Utilizando los datos en el eje de simetría (3.8) y los potenciales complejos de Ernst (3.13), se pueden evaluar las condiciones de simetría y antisimetría ecuatorial para las soluciones asintóticamente planas de electrovacío de la Sección 2.5, dadas por las ecuaciones (2.48) y (2.49) para  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ , y (2.50) y (2.51) para  $e(z)$  y  $f(z)$ .

Evaluando las condiciones para los datos en el eje de simetría, se puede verificar que con (3.8), las condiciones para la simetría ecuatorial que se obtienen son:

$$e_+(z)[e_+(-z)]^* = 1, \quad f_+(z) = -[f_+(-z)]^* e_+(z), \quad (3.16)$$

con lo cual  $\delta = 0$  y se cumplen las condiciones de simetría en (2.50), lo cual es consistente con el hecho de que esta solución es ecuatorialmente simétrica.

Si, por otro lado, se evalúan las condiciones para la antisimetría (2.51), se obtiene que:

$$e_+(z)e_+(-z) \neq 1, \quad f_+(z) \neq \mp f_+(-z)e_+(z), \quad (3.17)$$

por lo que no se cumplen estas condiciones y la solución no es antisimétrica. Así, utilizando  $e(z)$  y  $f(z)$  para esa solución extendida y las condiciones de simetría ecuatorial, se verifica que la solución es ecuatorialmente simétrica, al estar considerando una configuración con constituyentes traslapados corotantes.

Ahora, también se pueden evaluar las condiciones con los potenciales complejos  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . Al hacerlo, se llega a las mismas conclusiones que aquí se plantean, ya que se cumplen las dos condiciones de simetría ecuatorial de (2.48), mientras que las condiciones de antisimetría (2.49) no se satisfacen.

### 3.2.2. Tipos de constituyentes

El tipo de objetos que conforman la solución se puede conocer por medio de las definiciones en la Sección 2.4, donde es necesario notar la naturaleza de las raíces  $\alpha_n$ , determinando si se trata con objetos extremos, subextremos o hiperextremos. Equivalentemente, se puede saber el tipo de objetos por medio las funciones complejas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  definidas en (3.11).

En este capítulo, se trata con una aplicación de la solución  $N$ -solitónica del obtenida por el método de Sibgatullin, donde se utiliza  $N = 2$  y, por ende, la solución 2-solitónica. En el estado inicial se tienen las dos fuentes constituyentes del sistema binario y dos pares raíces que se pueden caracterizar solo con  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . En general  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , por lo que si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$  el caso es subextremo. El caso hiperextremo se presenta cuando  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{I}$ . Los casos extremos se presentan cuando uno de los dos  $\sigma$  tiende a cero, i.e., cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . También puede haber casos del estado inicial con una fuente subextrema y otra hiperextrema donde  $\sigma_1 \in \mathbb{R}, \sigma_2 \in \mathcal{I}$ , llamados subextremos-hiperextremos mixtos.

En [35] se muestran las desigualdades que se obtienen al exigir que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  sean reales o imaginarias, utilizando las masas de los objetos constituyentes  $m_1$  y  $m_2$ , y se pueden reescribir en términos de los parámetros de la solución extendida. Cuando  $d$  en (3.4) y (3.5) pertenece a los reales, se tiene el caso presentado en la solución original, la cual no está extendida a los valores complejos. Las desigualdades se pueden reescribir en términos de la masa total  $M$  del objeto final y el parámetro  $d$  utilizando (3.10), como se muestra a continuación:

1. **Caso subextremo:** Con  $\sigma_1, \sigma_2$  siendo reales.  $m_1$  y  $m_2$  deben cumplir:

- $m_1^2 > a^2 - \mu^2 \quad \Rightarrow (M + d)^2 > 4(a^2 - \mu^2)$
- $m_2^2 > a^2 - \mu^2 \quad \Rightarrow (M - d)^2 > 4(a^2 - \mu^2)$

2. **Caso mixto subextremo-hiperextremo:** En general  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Suponiendo que  $m_1 > m_2$ , el caso mixto se obtiene cuando  $\sigma_1 \in \mathbb{R}$  y  $\sigma_2 \in \mathcal{I}$ , i.e.,

$$\blacksquare m_1^2 > a^2 - \mu^2 > m_2^2 \quad \Rightarrow (M + d)^2 > 4(a^2 - \mu^2) > (M - d)^2$$

3. **Caso hiperextremo:** En este caso, cuando  $d \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  toman valores de imaginarios puros, por lo que:

$$\blacksquare m_1^2 < a^2 - \mu^2 \quad \Rightarrow (M + d)^2 < 4(a^2 - \mu^2)$$

$$\blacksquare m_2^2 < a^2 - \mu^2 \quad \Rightarrow (M - d)^2 < 4(a^2 - \mu^2)$$

Los tres tipos de configuraciones posibles se muestran en Fig 3.1 en las primeras tres gráficas (a), (b) y (c), y corresponden a los casos donde  $d \in \mathbb{R}$ . Para esta misma solución, la extensión permite que haya otro tipo de configuración. La nueva configuración permitida por la extensión se presenta solo cuando  $d \in \mathcal{I}$  y los objetos constituyentes son hiperextremos, pero con raíces complejas y no solo imaginarias. Este es un caso hiperextremo especial ya que además de que  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}$ , también se exige que  $\sigma_1 = \sigma_2^*$ , por lo que  $\alpha_1 = \alpha_3^*$  y  $\alpha_2 = \alpha_4^*$ . Esta configuración adicional se muestra en el caso (d) de la Fig 3.1.

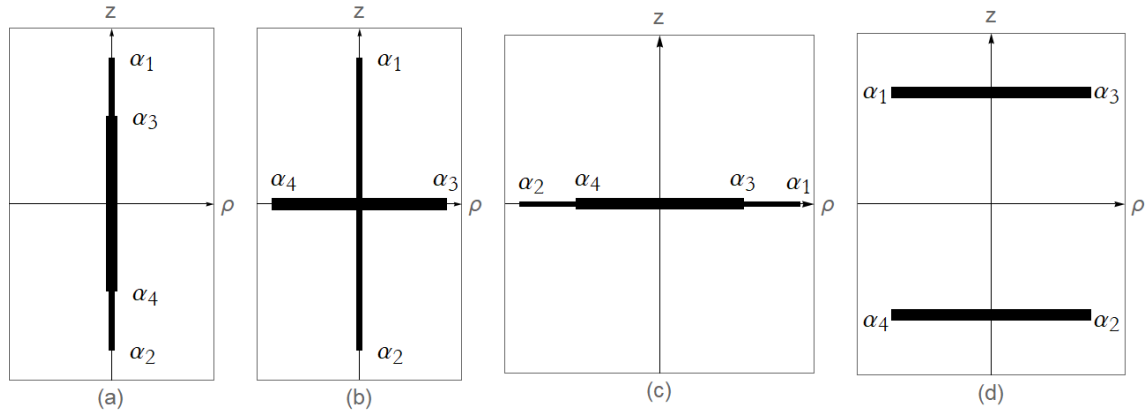


Figura 3.1: **Tipos de constituyentes:** Se presentan los cuatro tipos de posibles configuraciones de los objetos sobrepuestos constituyentes de la solución extendida: caso (a) subextremo, (b) mixto subextremo-hiperextremo y el caso (c) hiperextremo de la solución original con  $d \in \mathbb{R}$  y el caso (d) hiperextremo cuando  $d \in \mathcal{I}$ , i.e., constituyentes iniciales con masas complejas conjugadas.

Las primeras configuraciones (a), (b) y (c) de la Fig 3.1 corresponden a los casos de la solución original, cuando  $d \in \mathbb{R}$ . El caso (c) es el hiperextremo con raíces puramente imaginarias. Con la extensión, al permitir que  $d \in \mathcal{I}$ , se permite una configuración adicional,

la cual es mostrada en la gráfica (d) de la Fig 3.1. La configuración hiperextrema de masas conjugadas en (d) conserva la simetría ecuatorial. El hecho de que  $\alpha_1 = \alpha_3^*$  y  $\alpha_2 = \alpha_4^*$  fija las fuentes de manera no trivial, añadiendo una configuración nueva, lo cual hace a esta solución extendida más rica en estructura.

Reconsiderando las desigualdades para las configuraciones, estas también pueden ser escritas utilizando (3.11). Cada caso mostrado a continuación se obtiene al exigir que, nuevamente,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  sean reales, puramente imaginarios o el caso mixto que cuenta con uno real y uno imaginario, por lo que las desigualdades quedan de la siguiente manera:

1. **Caso subextremo:** Con  $\sigma_1, \sigma_2$  siendo reales. Se debe cumplir:

- $M(M + d) > -2q$
- $M(M - d) > -2q$

2. **Caso mixto subextremo-hiperextremo:** Genéricamente  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Con  $d \in \mathbb{R}$ ,  $(M + d) > (M - d)$ , por lo que en el caso mixto se cumple:

- $M(M + d) > -2q > M(M - d)$

3. **Caso hiperextremo:** En este caso,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  toman valores de imaginarios puros, por lo que:

- $M(M + d) < -2q$
- $M(M - d) < -2q$

Hay que recordar que estas desigualdades son para describir las configuraciones con  $d \in \mathbb{R}$ , mientras que la configuración adicional que provee la extensión se presentará cuando  $d \in \mathcal{I}$ . De estas desigualdades, se puede ver que  $q$  es importante al momento de definir la configuración en la que se encontrará el sistema.

Para las descripciones y análisis de las figuras que se harán en la Subsección 3.2.3 se presentan las siguientes abreviaciones refiriéndose a cada una de las cuatro configuraciones: el caso subextremo en (a) se abreviará como *SE*, el caso (b) subextremo-hiperextremo mixto como *SEHE*, el caso (c) hiperextremo como *HE*, refiriéndose al caso con raíces puramente imaginarias y para el caso (d) hiperextremo con raíces complejas y masas complejas conjugadas se utilizará la abreviación *HECE*, lo cual se refiere al caso hiperextremo extendido complejo, por sus siglas en inglés, *hyperextreme complex extended (HECE)*. Estas abreviaciones son por conveniencia y se utilizarán en para el análisis de las figuras de más adelante.

### 3.2.3. Superficie de límite estacionario, campo magnético y singularidades

Ahora se procede al análisis de las superficies de límite estacionario (SLS) y líneas de campo magnético (LCM) de la solución 4-paramétrica presentada en este capítulo. Se puede usar (3.10) o (3.11) para un análisis de las superficies de límite estacionario y líneas de campo magnético de la solución. Lo que se busca es saber cómo afectan los parámetros de la solución  $M, q, a$  y  $\mu$  a estas gráficas y a sus singularidades, si es que se presentan, por lo que saber la naturaleza del parámetro  $d$  en (3.5) y la de las funciones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  con las fórmulas (3.10) y (3.11), todo escrito explícitamente usando los parámetros de la solución, será de utilidad para este análisis, lo que definirá el tipo de configuración con la que se trata, por lo que será conveniente utilizar las abreviaciones mencionadas en la Subsección 3.2.2 para hacer referencia al tipo de configuración. También se busca analizar qué es lo que les pasa a las singularidades al cambiar un parámetro o si esta queda igual después del cambio. Las singularidades de anillo se denotarán como  $S$ .

Las SLS se obtienen graficando las soluciones de la función métrica  $f$  en (3.13) tal que  $f = 0$ , lo cual da como resultado un contorno. Las LCM se obtienen utilizando el potencial  $A_\varphi$  de (3.15), mientras que las singularidades de la solución (3.13), tanto para los campos gravitacional como electromagnético, están definidas por las raíces de la ecuación  $A + B = 0$ . Las singularidades en el límite de vacío  $\mu = 0$ , se presentan sobre las SLS, mientras que en el caso de electrovacío,  $\mu \neq 0$ , las singularidades normalmente se localizan fuera de las SLS. En esta solución, las singularidades se encuentran en las SLS incluso en el caso de electrovacío, pero también hay casos donde la  $S$  se presenta fuera de la superficie.

Un comentario importante sobre las figuras que se presentarán es que hay casos donde las SLS de las configuraciones HE, HECE o SEHE parecieran no estar graficadas completamente, mostrando ciertos huecos, y en algunos casos, pareciendo que son superficies abiertas. Esto se considera que puede ser debido a que el software encargado de generar las gráficas, *Mathematica*, al encontrarse con valores complejos, puede tener dificultades para completar la figura, proporcionando en ciertas ocasiones SLS cerradas y bien comportadas y en otras mostrando errores. Algunas gráficas con este tipo de problemas se incluyeron ya que se consideraron de importancia para el análisis siguiente. No obstante, se espera que con alguna actualización del software o con otro tipo de programa se puedan obtener las gráficas presentadas sin ningún problema y bien comportadas.

Otra nota importante es que, las SLS muestran distintos comportamientos, pero para el análisis, y por conveniencia, se van a considerar dos tipos de comportamiento particulares que se presentan en las SLS, las SLSI para superficies "internas" y SLSE para superficies "externas", las cuales tendrán características que serán de importancia destacar y se muestran

en la Fig 3.2.

Para comenzar con el análisis, se pueden considerar los límites de  $d, \sigma_1$  y  $\sigma_2$  cuando cada uno de los parámetros tiende a  $+\infty$  o  $-\infty$ , lo que permitirá saber cuál de las cuatro configuraciones posibles describirá la superficie de límite estacionario cuando uno de los parámetros tome un valor considerablemente grande respecto a los otros. Esto proporcionará una idea de cómo afectan los parámetros de la solución a las SLS y LCM. Así, los siguientes resultados se obtienen calculando los límites de  $d, \sigma_1$  y  $\sigma_2$  cuando cada uno de los parámetros tienden a  $+\infty$  o  $-\infty$ . Se considera, naturalmente, que cada uno de los parámetros  $M, q, a$  y  $\mu$  son reales. A continuación, se muestran los límites mencionados:

- Si  $M \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $M \ll q, a, \mu$ :
  - $\Rightarrow d \rightarrow +\infty, \sigma_1 \rightarrow \sqrt{-a^2 + \mu^2}, \sigma_2 \rightarrow +\infty, \Rightarrow d \in \mathbb{R}^+, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+$ ,
    - Si  $a^2 > \mu^2 \Rightarrow \sigma_1 \in I^+ \Rightarrow$  Caso SEHE
    - Si  $a^2 < \mu^2 \Rightarrow \sigma_1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$  Caso SE
- Si  $M \rightarrow +\infty$ , i.e.,  $M \gg q, a, \mu$ :
  - $\Rightarrow d \rightarrow +\infty, \sigma_1 \rightarrow +\infty, \sigma_2 \rightarrow \sqrt{-a^2 + \mu^2}, \Rightarrow d \in \mathbb{R}^+, \sigma_1 \in \mathbb{R}^+$ ,
    - Si  $a^2 > \mu^2 \Rightarrow \sigma_2 \in I^+ \Rightarrow$  Caso SEHE
    - Si  $a^2 < \mu^2 \Rightarrow \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$  Caso SE
- Si  $q \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $q \ll M, a, \mu$ :
  - $\Rightarrow d, \sigma_1, \sigma_2 \rightarrow +i\infty, \Rightarrow d, \sigma_1, \sigma_2 \in I^+ \Rightarrow$  Caso HECE
- Si  $q \rightarrow +\infty$ , i.e.,  $q \gg M, a, \mu$ :
  - $\Rightarrow d, \sigma_1, \sigma_2 \rightarrow +\infty, \Rightarrow d, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$  Caso SE
- Si  $a \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $a \ll M, q, \mu$ :  $\Rightarrow d \rightarrow +\infty, \Rightarrow d \in \mathbb{R}^+$ ,
  - Si  $M > 0 \Rightarrow \sigma_1 \rightarrow +\infty, \sigma_2 \rightarrow +i\infty \Rightarrow \sigma_1 \in \mathbb{R}^+, \sigma_2 \in I^+ \Rightarrow$  Caso SEHE
  - Si  $M < 0 \Rightarrow \sigma_1 \rightarrow +i\infty, \sigma_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \sigma_1 \in I^+, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$  Caso SEHE

El límite cuando  $a \rightarrow +\infty$  es exactamente el mismo que cuando  $a \rightarrow -\infty$ .

- Si  $\mu \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $\mu \ll M, q, a$ :  $\Rightarrow d \rightarrow +i\infty, \Rightarrow d \in I^+$ ,
  - Si  $M > 0 \Rightarrow \sigma_1 \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}\infty, \sigma_2 \rightarrow \frac{1-i}{\sqrt{2}}\infty \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow$  Caso HECE
  - Si  $M < 0 \Rightarrow \sigma_1 \rightarrow \frac{1-i}{\sqrt{2}}\infty, \sigma_2 \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}\infty \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow$  Caso HECE

El límite cuando  $\mu \rightarrow +\infty$  es exactamente el mismo que cuando  $\mu \rightarrow -\infty$ .

De estos límites notamos, por ejemplo, que al hacer el cambio  $M \rightarrow -M$  también se hace  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$  y  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ . Por otro lado, las gráficas tienen que ser simétricas ante el cambio  $a \rightarrow -a$  y ante  $\mu \rightarrow -\mu$ . Estos resultados se pueden comparar con las gráficas de más adelante.

A continuación, se muestran las SLS y LCM de algunos casos particulares de esta solución 4-paramétrica extendida. Se optó por indicar las singularidades de anillo en las SLS, las cuales están a la izquierda de cada par de gráficas y son reconocibles por ser una superficie caracterizada por uno o varios trazos y probables singularidades, mientras que las LCM son las que están a la derecha de cada par de gráficas y muestran una cantidad mayor de líneas para representar el campo magnético.



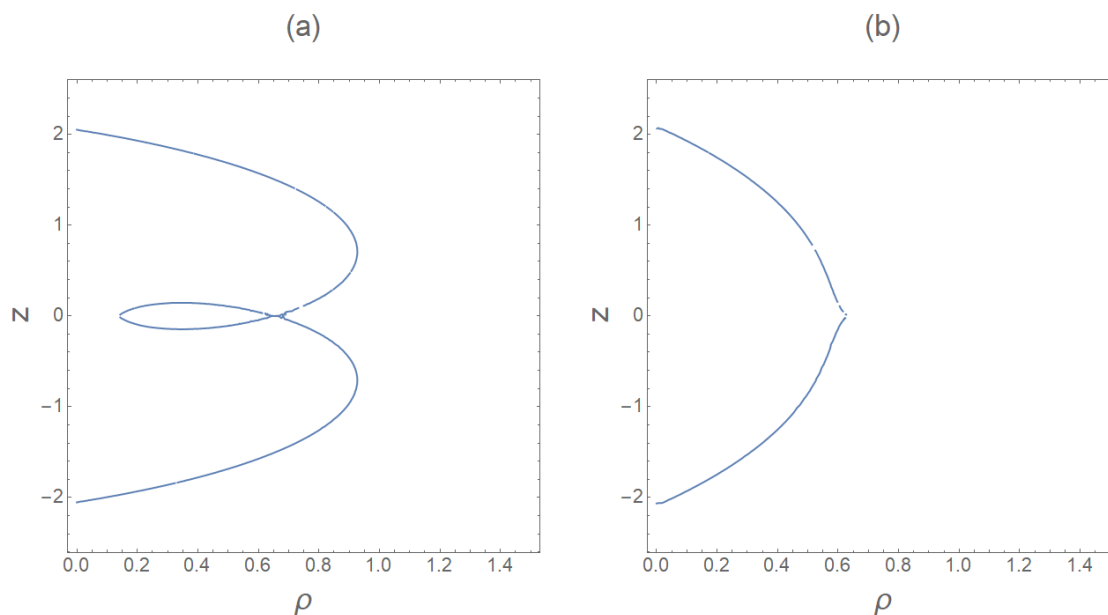


Figura 3.2: **SLSI y SLSE:** Se muestran dos tipos de comportamiento de las SLS. En (a) se utiliza  $M = 2.74$ ,  $q = -1.6875$ ,  $a = 0.7$  y  $\mu = 0.25$  y en (b)  $M = 2.08$ ,  $q = -0.1875$ ,  $a = 0.7$  y  $\mu = 0.25$ . Para el tipo de comportamiento en (a) se aludirá a las siglas como SLSI, i.e., SLS "internas", que hace referencia a que el traslape de las superficies parece apuntar hacia el eje de simetría, esto es, "adentro", mientras que el comportamiento en (b) sería SLSE, i.e., SLS "externas", ya que se forma un borde afilado en la superficie que apunta en dirección al eje  $\rho$  positivo, que se toma como "afuera" o "externo". En el caso (a) se presenta una singularidad de anillo en  $\rho \approx 0.653$ , la cual no se indica para mostrar la SLS más claramente, mientras que para el caso (b), *Mathematica* no ha sido capaz de calcular la posición de la singularidad. Esto puede ser debido a que las fuentes están traslapándose con la singularidad, ya que estas configuraciones se presentaron cuando la fuente hiperextrema se acerca a la singularidad o la supera en magnitud (en el eje  $\rho$ ), pareciendo que la fuente se superpone en el lugar donde debería estar la singularidad, por lo que el software presenta problemas y no realiza un cálculo estable de la singularidad. Por esta razón, para estos casos SLSE, no se pudo calcular una singularidad, e incluso se hipotetiza que puede ser que realmente no se desarrolle  $S$ . Este se considera como un comentario importante y que no se puede dejar de lado, ya que es relevante para el estudio de las singularidades de la solución. En adelante, se tendrá esto en consideración cuando se presenten estas SLSE. En los casos que se investigó, las SLSE solo aparecen en configuraciones SEHE, mientras que las SLSI pueden aparecer como SE, HE, SEHE o HECE. Esto es importante solo para hacer referencia al tipo de comportamiento de las superficies. Si se trata con SLSI o con SLSE dependerá de los valores de los parámetros de la solución.

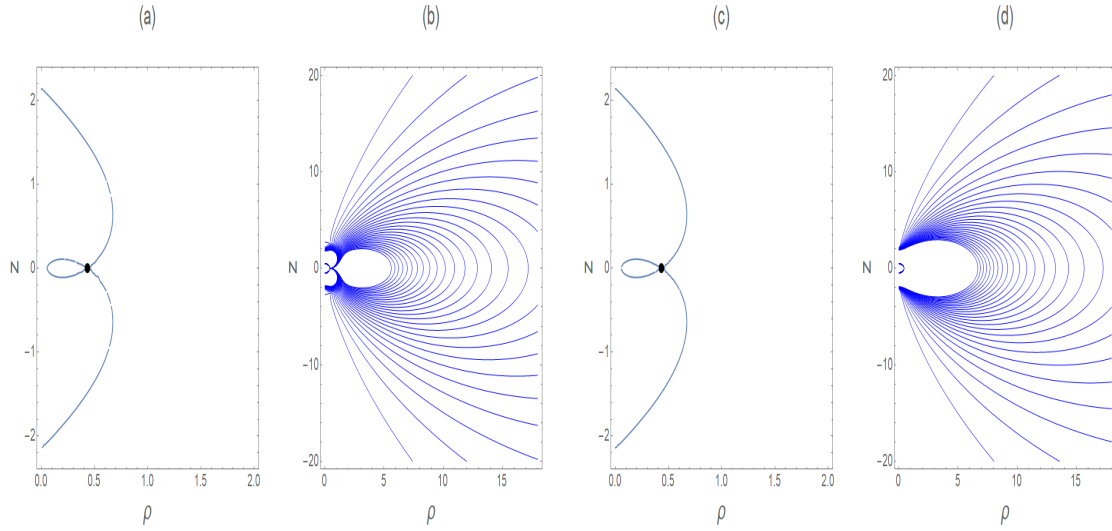


Figura 3.3: **Cambio  $M \rightarrow -M$  – SEHE:** Superficie de límite estacionario y líneas de campo magnético para el caso subextremo-hiperextremo con los parámetros fijos  $q = -1.084$ ,  $a = 0.5$  y  $\mu = 0.25$ . En (a) y (b) se utiliza  $M = -2.6$  y en (c) y (d) el valor de  $M = 2.6$ . Las SLS para ambos casos son iguales, mientras que las LCM cambian su forma, pero siempre se mantiene la simetría ecuatorial. En el caso con masa negativa,  $\sigma_1 \in \mathbb{C}$  y  $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ , mientras que, al pasar a la masa positiva,  $\sigma_1 \in \mathbb{R}$  y  $\sigma_2 \in \mathbb{C}$ , de tal manera que  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$  y  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$  al hacer el cambio  $M \rightarrow -M$  y viceversa. La singularidad de anillo para ambos casos se presenta en  $\rho \approx 0.433$ , en el plano ecuatorial  $z = 0$ . Las SLS pueden consistir de dos regiones separadas, como en Fig 3.9, o de una sola región, como en este caso, que resulta de la superposición de las dos regiones separadas. Como se menciona en [35],  $S$  se presenta cuando las regiones se traslapan, como se observa en este ejemplo.  $S$  puede ser debido a que en la evolución dinámica se requieren superficies estacionarias, por lo que  $S$  esta ayudaría a mantener el estado estacionario de estos impetuosos procesos (como en el caso de masas negativas, como se explica en el Capítulo 4).

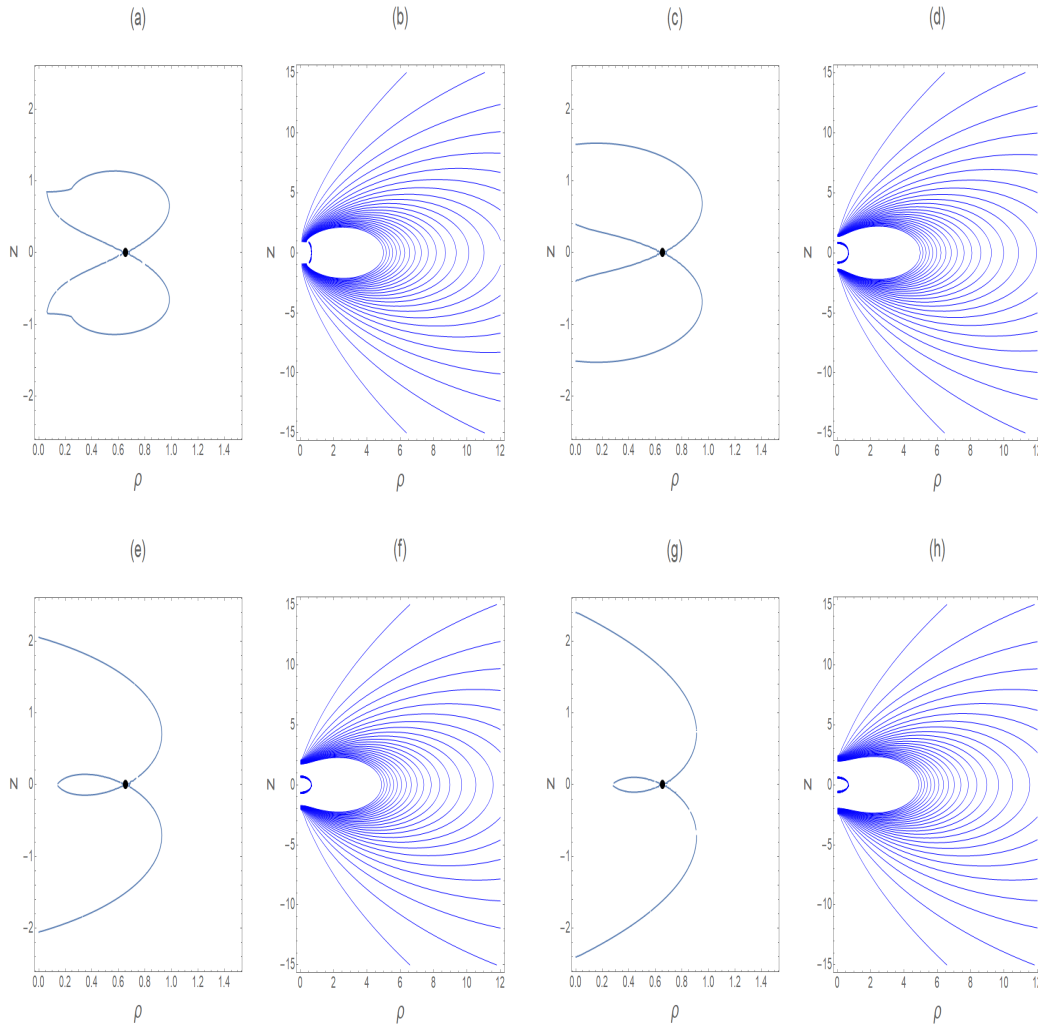


Figura 3.4: **Evolución de  $M$  – HECE  $\rightarrow$  SE  $\rightarrow$  SEHE:** Evolución de  $M$  con  $q = -1.6875$ ,  $a = 0.7$  y  $\mu = 0.25$  fijos. En (a) y (b), se usa  $M = 2.08$  y el caso es HECE, con  $d \approx 0.84i$ . Aumentando la masa total, en (c) y (d) con  $M = 2.41$ , el caso pasa a ser SE y las SLS se juntan al eje de simetría  $z$ , además de que se aumentan su tamaño a lo largo de este eje. En (e) y (f) se utiliza  $M = 2.74$ , el caso es SEHE y las SLS se alargan aún más sobre el eje  $z$ . Si se sigue aumentando  $M$ , la configuración continúa en SEHE, como en (g) y (h) con  $M = 3$ , donde las SLS continúan alargándose. En cada caso se presenta una  $S$  en el plano  $z = 0$  y  $\rho \approx 0.654$ , por lo que la posición de  $S$  no es afectada por el valor de  $M$  ni por la configuración. Se concluye que al tener SLSI, el cambio del parámetro  $M$  no afecta la localización de la singularidad  $S$ . Esta SLSI podría pasar SLSE al aumentar  $M$ , pero el valor de  $M$  tendría que ser muy grande. Como  $a^2 > \mu^2$ , al aumentar  $M$  la configuración permanece en SEHE, consistente con el límite obtenido. La geometría en el centro de las LCM va cambiando a medida que  $M$  evoluciona. La simetría ecuatorial se mantiene en todas las gráficas.

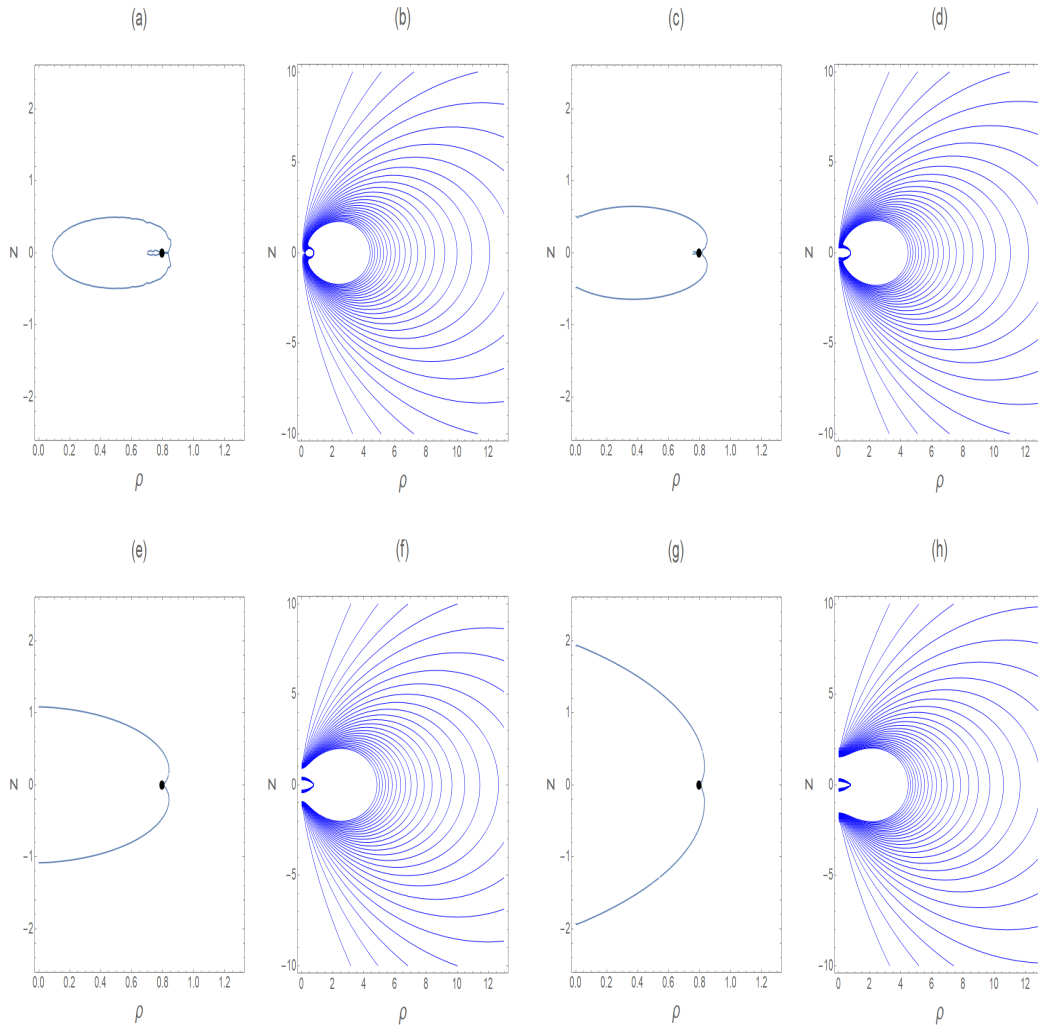


Figura 3.5: **Evolución de  $M - \text{HE} \rightarrow \text{SEHE}$ :** Evolución del parámetro de masa total  $M$  con los parámetros fijos  $q = -0.84$ ,  $a = 0.8$  y  $\mu = 0.1$ . La evolución en este caso pasa por casos distintos que los de la Fig 3.4. En (a) y (b) se usa  $M = 1$  y se muestra un caso HE con raíces puramente imaginarias. Al aumentar la masa, en (c) y (d) se utiliza  $M = 1.15$ , el caso pasa a ser SEHE mixto y las SLS se juntan al eje de simetría  $z$ . Para (e) y (f) se usa  $M = 1.5$ , el caso es SEHE y las SLS se alargan sobre el eje  $z$ , y lo mismo pasa en (g) y (h) con  $M = 2.2$  donde también es SEHE y las SLS continúan alargándose. Durante la evolución se desarrollan singularidades en las SLS en  $\rho \approx 0.794$  para todos los valores usados de  $M$ . Este SLSI podría pasar SLSE al aumentar  $M$ , pero  $M$  tendría que ser muy grande. Se concluye, al igual que como en la Fig 3.4, que cambiar el parámetro de la masa total  $M$  no cambia la posición de la singularidad de anillo mientras que se trate con SLSI. Como  $a^2 > \mu^2$ , al aumentar  $M$  la configuración permanecerá en SEHE. La simetría ecuatorial se mantiene en todas las gráficas. Las LCM muestran un cambio cerca del origen durante la evolución.

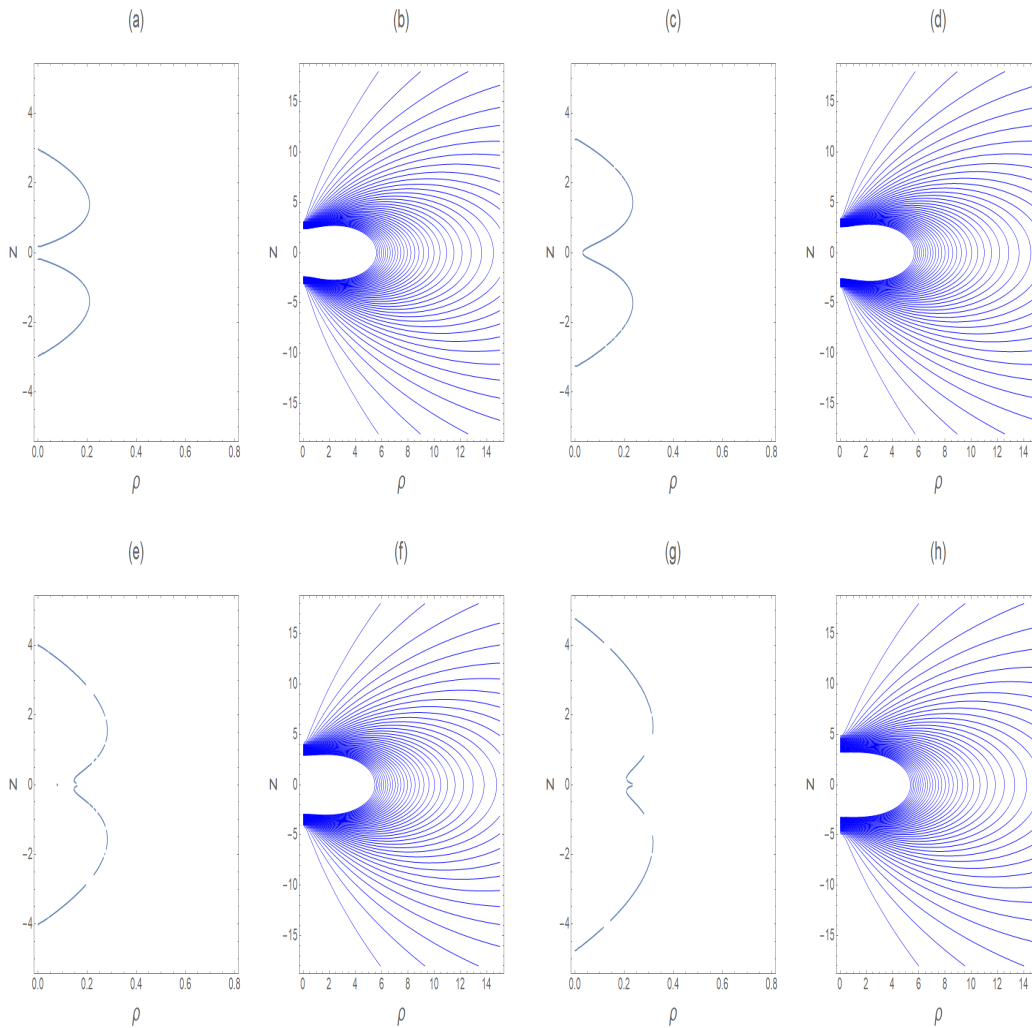


Figura 3.6: **Evolución de  $M - SE \rightarrow SEHE$ :** Evolución de  $M$  con  $q = 1.2$ ,  $a = 0.5$  y  $\mu = 0.25$  fijos. Para (a) y (b) se tiene  $M = 2.55$ , el caso es SE y no se presenta singularidad de anillo. Para (c) y (d) se incrementa el valor a  $M = 3$  y las SLS se juntan y el caso pasa a ser SEHE. Al juntarse las superficies, se presentan unas SLSE, aunque en (c) parece SLSI, pero que es una SLSE se puede notar al evolucionar el parámetro  $M$ . Para (e) y (f) se utiliza  $M = 3.7$ , el caso es SEHE, las SLS se alargan sobre el eje  $z$ . Al seguir aumentando  $M$ , la configuración continúa siendo SEHE. En (g) y (h) se usa  $M = 4.5$ , el caso es SEHE y las SLS continúan creciendo sobre el eje de simetría. Como se tienen SLSE, el análisis de las singularidades, si es que las hay, se complica para estos últimos tres casos. El aumento del parámetro de masa total  $M$  hace que la fuente sea cada vez más grande sobre el eje de simetría. La simetría ecuatorial se mantiene en todos los casos presentados y las LCM no cambian significativamente.

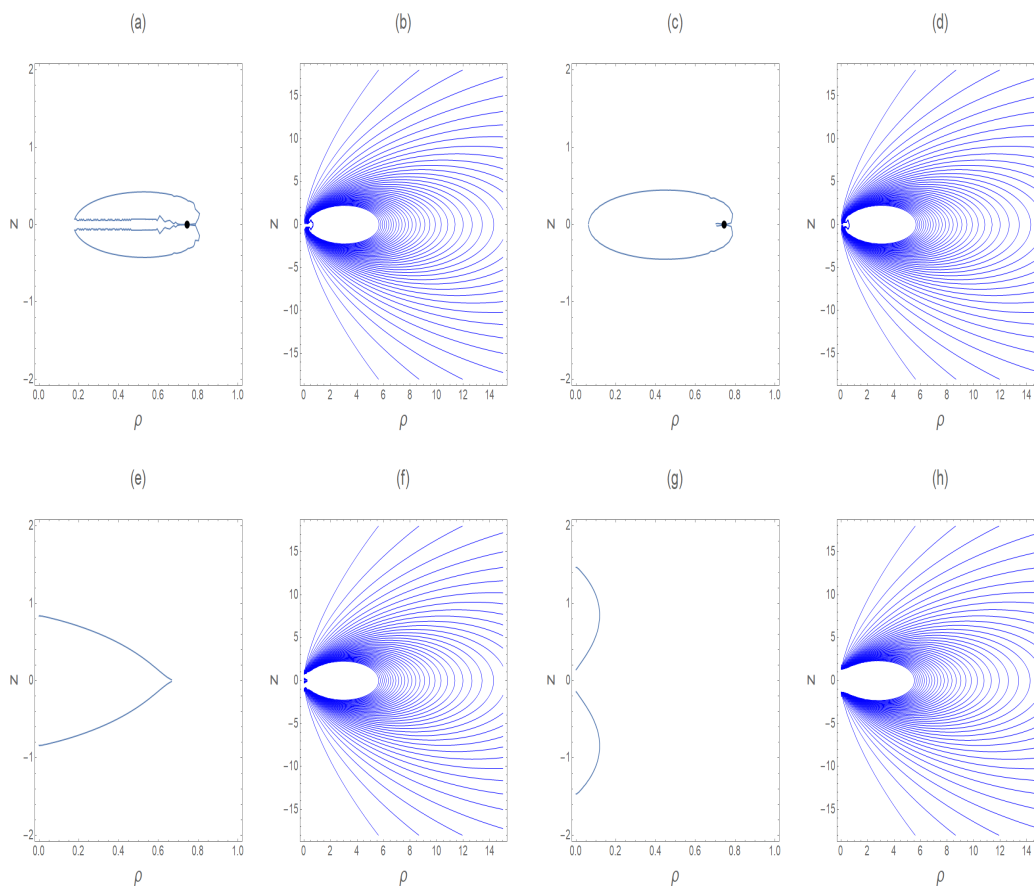


Figura 3.7: **Evolución de  $q$  y cambio  $q \rightarrow -q$  – HECE  $\rightarrow$  HE  $\rightarrow$  SEHE  $\rightarrow$  SE: SLS y LCM** utilizando los parámetros fijos  $M = 0.9$ ,  $a = 0.75$  y  $\mu = 0.09$ . En (a) y (b) se usa  $q = -0.76$  y se tiene un caso HECE con singularidad en  $\rho \approx 0.744$ . En (c) y (d) se utiliza  $q = -0.7$ , se desarrolla una  $S$  en  $\rho \approx 0.744$  y el caso es HE. En estos primeros dos casos, se presentan SLSI y, cuando esto ocurra, la localización de la singularidad es la misma independiente del valor de  $q$ , por lo que se concluye que el valor de  $q$  no afecta la posición de  $S$ , mientras se trate con SLSI. En (e) y (f) se muestra un caso SEHE con  $q = -0.3$  donde  $S$  no se puede calcular ya que se pasa a una SLSE. Así, se nota que aumentar  $q$  es capaz de cambiar una configuración SLSI a SLSE. En (g) y (h) se usa el valor de  $q = 0.7$  y se presenta un caso SE, donde las SLS se separan. En esta evolución se puede pasar por las cuatro configuraciones posibles. Comparando (c) y (d) con (g) y (h), se nota que las SLS y LCM difieren en ambos casos, e incluso cambia el tipo de configuración, por lo que las gráficas no son simétricas ante el cambio  $q \rightarrow -q$  ni viceversa. Cuando  $q$  aumenta, la configuración se quedará en SE, como fue obtenido en el límite cuando  $q \rightarrow \infty$ . La simetría ecuatorial se mantiene en ambos casos y las LCM difieren cerca del origen.

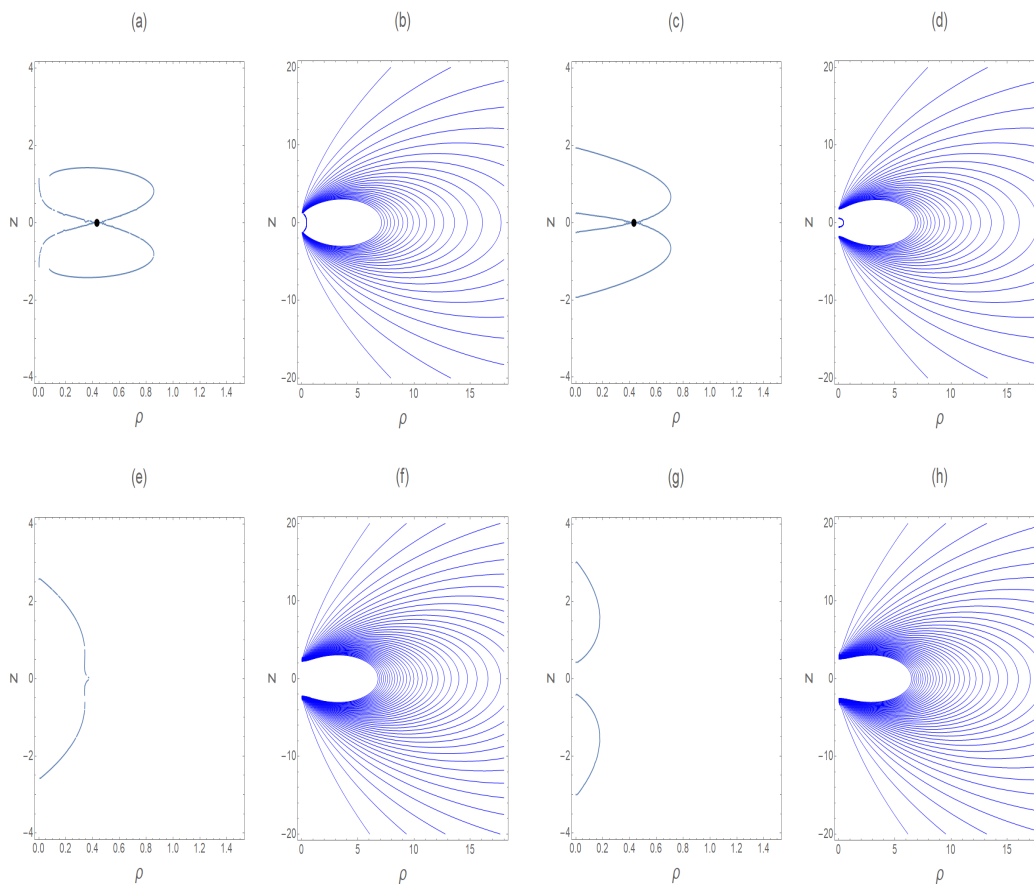


Figura 3.8: **Evolución de  $q$  – HECE  $\rightarrow$  SE  $\rightarrow$  SEHE  $\rightarrow$  SE:** Se muestra la evolución de las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $M = 2.5$ ,  $a = 0.5$  y  $\mu = 0.25$  y se varía el parámetro  $q$ . En (a) y (b) se usa  $q = -1.79$  y el caso es HECE, configuración añadida debido a la extensión de la solución con  $d = 0.4i$ . Se presenta una singularidad de anillo en  $\rho \approx 0.433$ . Para (c) y (d) se utiliza  $q = -1.2$  y el caso es SE con singularidad  $\rho \approx 0.433$ . Como se vio en la Fig 3.7, mientras se tengan SLSI, el valor de  $q$  no afecta la posición de la singularidad. Además, que se pase por SE o HE después de pasar por HECE depende de la relación entre los parámetros de la solución. Al aumentar  $q = 0.2$  en (e) y (f), el caso pasa a ser SEHE y a una SLSE, por lo cual no se indica una singularidad, aunque las superficies estén traslapadas. En (g) y (h) se tiene  $q = 1.6$  y se regresa a un caso subextremo y ya no se presenta  $S$  debido a que las SLS no se traslapan. Si  $q < -1.79$ , a medida que  $d$  pasa a ser complejo, el caso tiende a ser un HECE. Además, si  $q > 1.6$ , las SLS se continúan separando y haciéndose más delgadas y quedándose en el caso subextremo. Estos dos últimos enunciados son consistentes con los límites obtenidos. La simetría ecuatorial se mantiene en los casos presentados y las LCM difieren mayormente cerca del origen.

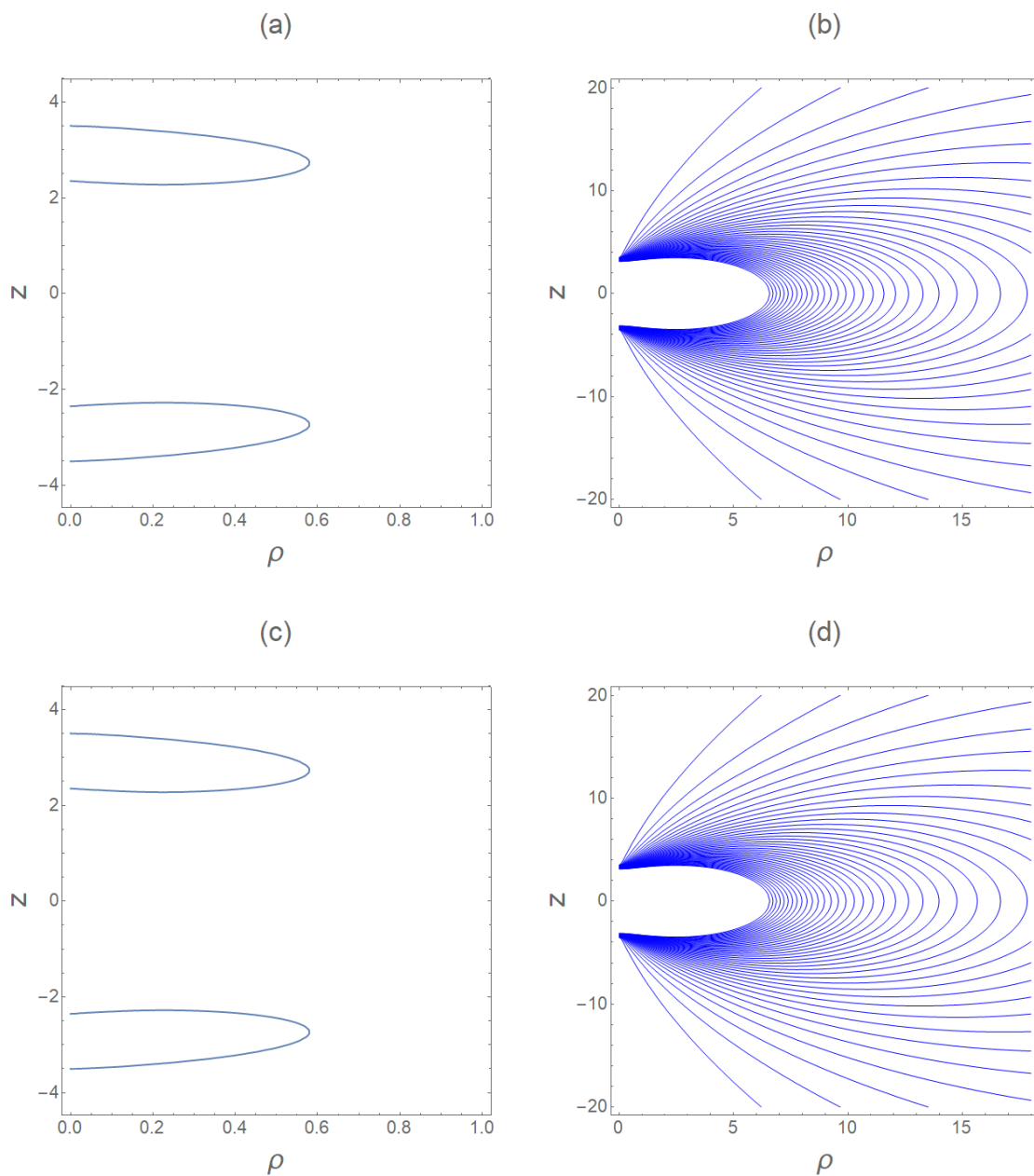


Figura 3.9: **Cambio  $a \rightarrow -a$  – SE:** Superficie de límite estacionario y líneas de campo magnético para el caso subextremo con los parámetros fijos  $M = 4$ ,  $q = 1$  y  $\mu = 2.3$ . En (a) y (b) se utiliza  $a = -1$  y en (c) y (d) el valor de  $a = 1$ . Las SLS y LCM para ambos casos son iguales, por lo que estas gráficas son simétricas ante el cambio  $a \rightarrow -a$  y viceversa. Además, siempre se mantiene la simetría ecuatorial. No se presentan singularidades de anillo en estos casos.



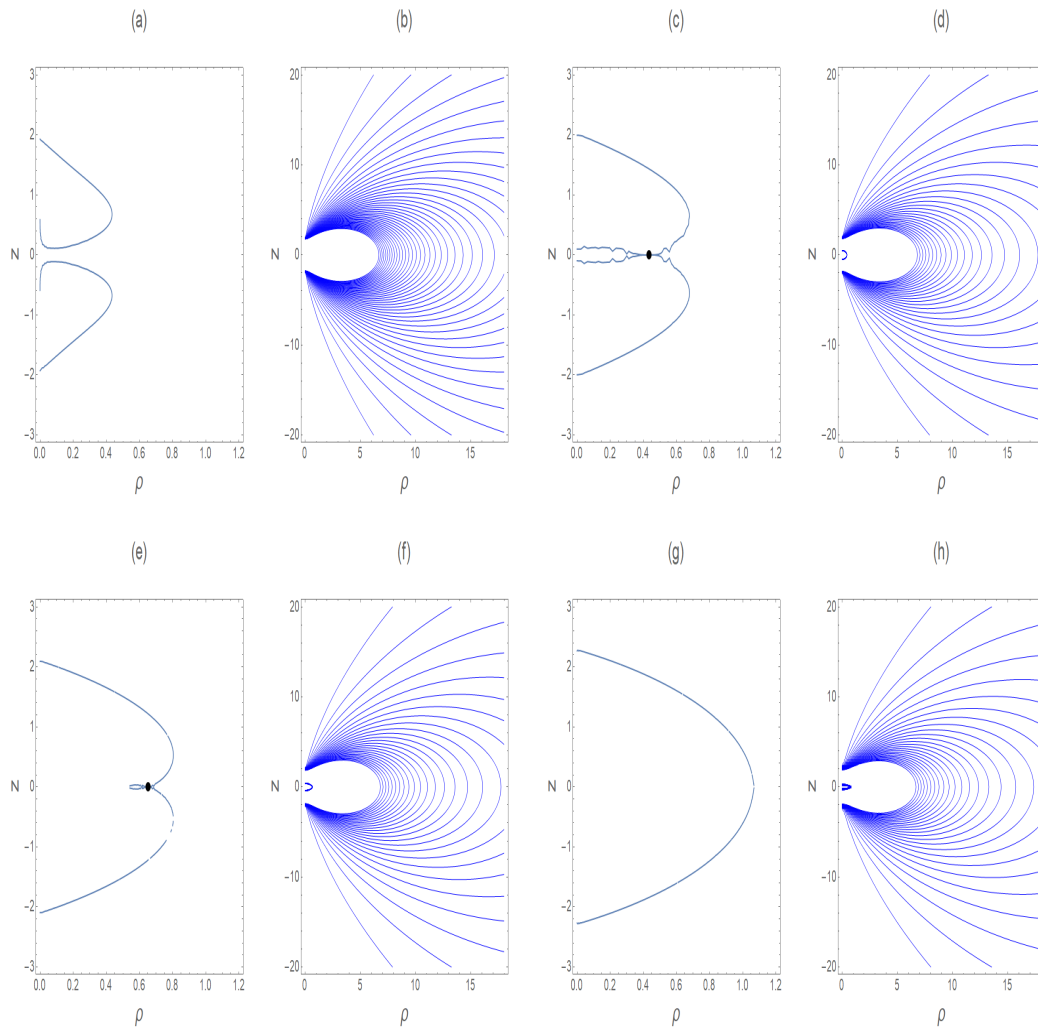


Figura 3.10: **Evolución de  $a$  – SE  $\rightarrow$  SEHE:** Se muestra la evolución de las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $M = 2.5$ ,  $q = -1.084$  y  $\mu = 0.25$  y se varía el parámetro  $a$ . Para (a) y (b) se utiliza  $a = 0.2$  y el caso es subextremo sin singularidad de anillo debido a la separación de las SLS. Aumentando a  $a = 0.5$  en (c) y (d), se continúa con un caso subextremo, pero, el aumentar la magnitud de  $a$ , junta las SLS y las hace traslaparse para formar una singularidad de anillo  $S$  en  $\rho \approx 0.433$ . En (e) y (f) se tiene  $a = 0.7$  y se pasa a un caso SEHE mixto, donde la singularidad pasa a estar en  $\rho \approx 0.653$ . Se puede notar como el aumentar el valor de  $a$  es capaz de cambiar la posición de  $S$ , alejándola del eje  $z$ . En este caso se tienen una SLSI. En (g) y (h) se tiene  $a = 1.1$ , caso SEHE y se presenta una SLSE. Se puede notar como el aumentar el valor de  $a$  es capaz de aumentar el tamaño de la fuente, alejándola del eje  $z$ . La configuración cuando  $a$  aumenta tiende a ser SEHE, lo cual es consistente con el límite para  $a \rightarrow +\infty$  obtenido. Como es de esperarse, la simetría ecuatorial se mantiene a lo largo de la evolución del parámetro.

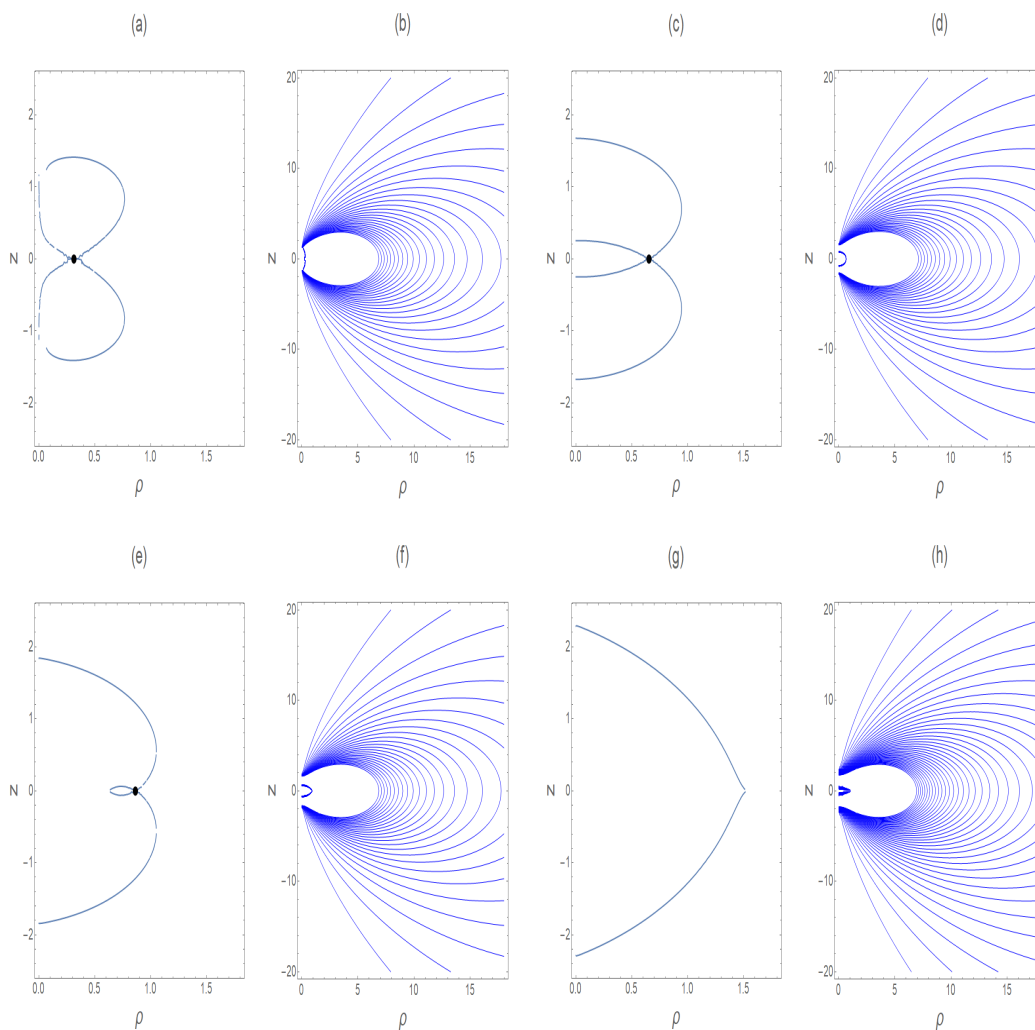


Figura 3.11: **Evolución de  $a$  – HECE  $\rightarrow$  SE  $\rightarrow$  SEHE:** Evolución de las SLS y LCM con los parámetros fijos  $M = 2.5$ ,  $q = -1.6875$  y  $\mu = 0.25$  y variando el parámetro  $a$ . Para (a) y (b) se utiliza  $a = 0.4$ , el caso es HECE, con  $d \approx 0.33i$  y  $S$  en  $\rho \approx 0.312$ . Con  $a = 0.7$  en (c) y (d) se pasa a un caso SE y la singularidad de anillo cambia a  $\rho \approx 0.653$ . En (e) y (f) se tiene  $a = 0.9$  se pasa a un caso SEHE mixto y  $S$  se presenta en  $\rho \approx 0.864$ . De estos tres últimos casos, se puede notar que, aunque se tengan SLSI, el valor de  $a$  si afecta la localización de  $S$ . Cuando  $a = 1.6$ , donde el caso se mantiene en SEHE mixto, pero cambia a SLSE, como se muestra en (g) y (h). Con esto se concluye que, independientemente del tipo de configuración con la que se trate, el aumentar el valor de  $a$  si cambia la posición de la singularidad de anillo, alejándola del eje de simetría  $z$ . Tener SEHE cuando  $a$  aumenta es consistente con el límite obtenido. La simetría ecuatorial se mantiene a lo largo de la evolución del parámetro y las LCM presentan distintos comportamientos cerca del origen.

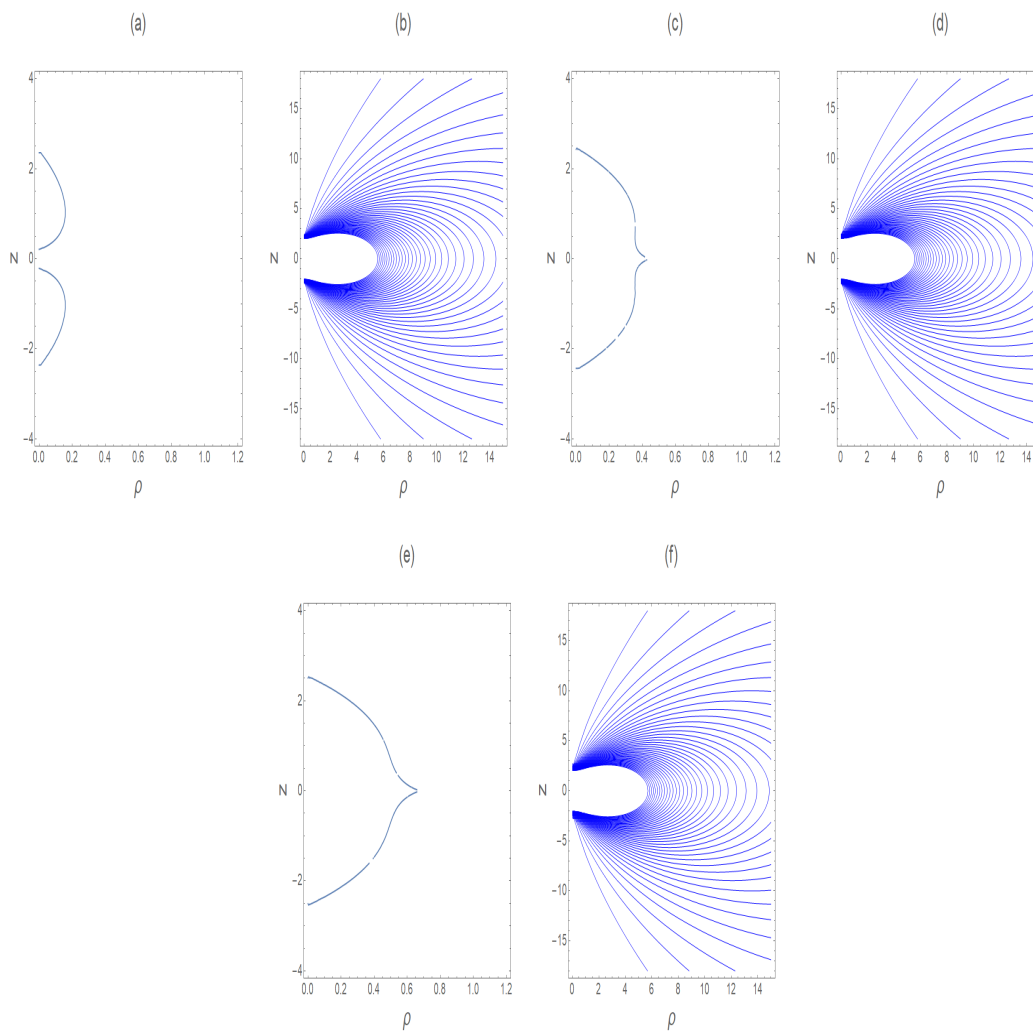


Figura 3.12: **Evolución de  $a - SE \rightarrow SEHE$ :** Se muestra la evolución de las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $M = 2.2$ ,  $q = 0.5$  y  $\mu = 0.3$  y se varía el parámetro  $a$ . En (a) y (b) se tiene  $a = 0.3$  y un caso SE sin singularidad. En (c) y (d) se utiliza  $a = 0.7$  y se pasa a un caso SEHE. El aumentar  $a$  hizo la tarea de traslapar las SLS. Para (e) y (f) se utiliza  $a = 1$  y se continúa en SEHE. En estos últimos dos casos se tienen SLSI, por lo que no se pueden calcular singularidades. En cambio a la Fig 3.11, la configuración inicial es SE y no se pasa por HECE, pero el aumento de  $a$  continúa incrementando el tamaño de la fuente, como se concluyó anteriormente. Consistentemente, la configuración cuando  $a$  incrementa significativamente, es SEHE. La simetría ecuatorial se mantiene a lo largo de la evolución del parámetro y las LCM son similares durante la evolución.

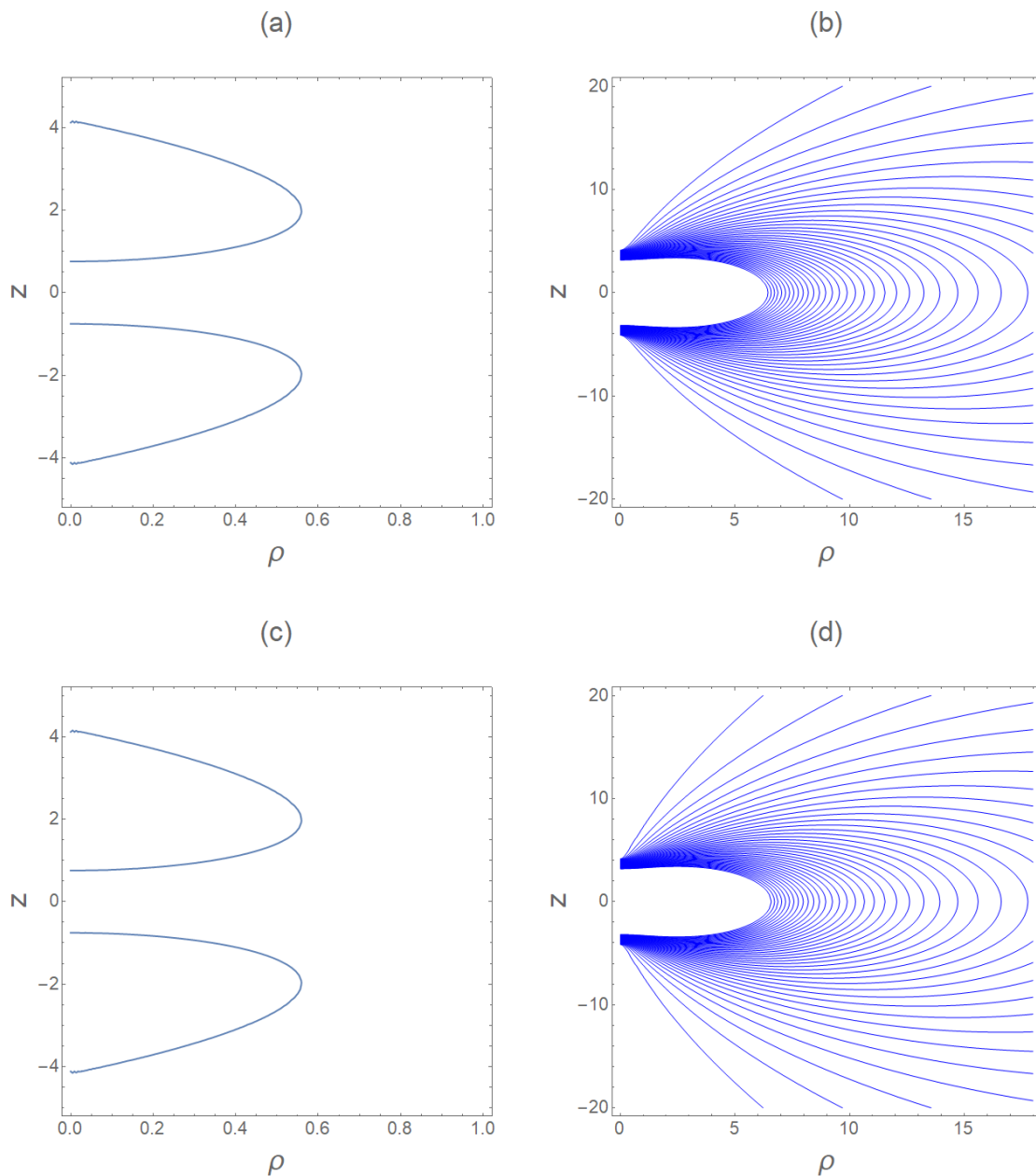


Figura 3.13: **Cambio  $\mu \rightarrow -\mu$  – SE:** Superficie de límite estacionario y líneas de campo magnético para el caso subextremo con los parámetros fijos  $M = 4$ ,  $q = 1$  y  $a = 1$ . En (a) y (b) se utiliza  $\mu = -1.25$  y en (c) y (d) el valor de  $\mu = 1.25$ . Las SLS y LCM para ambos casos son iguales, por lo que estas gráficas son simétricas ante el cambio  $\mu \rightarrow -\mu$  y viceversa. Además, siempre se mantiene la simetría ecuatorial. No se presentan singularidades de anillo.

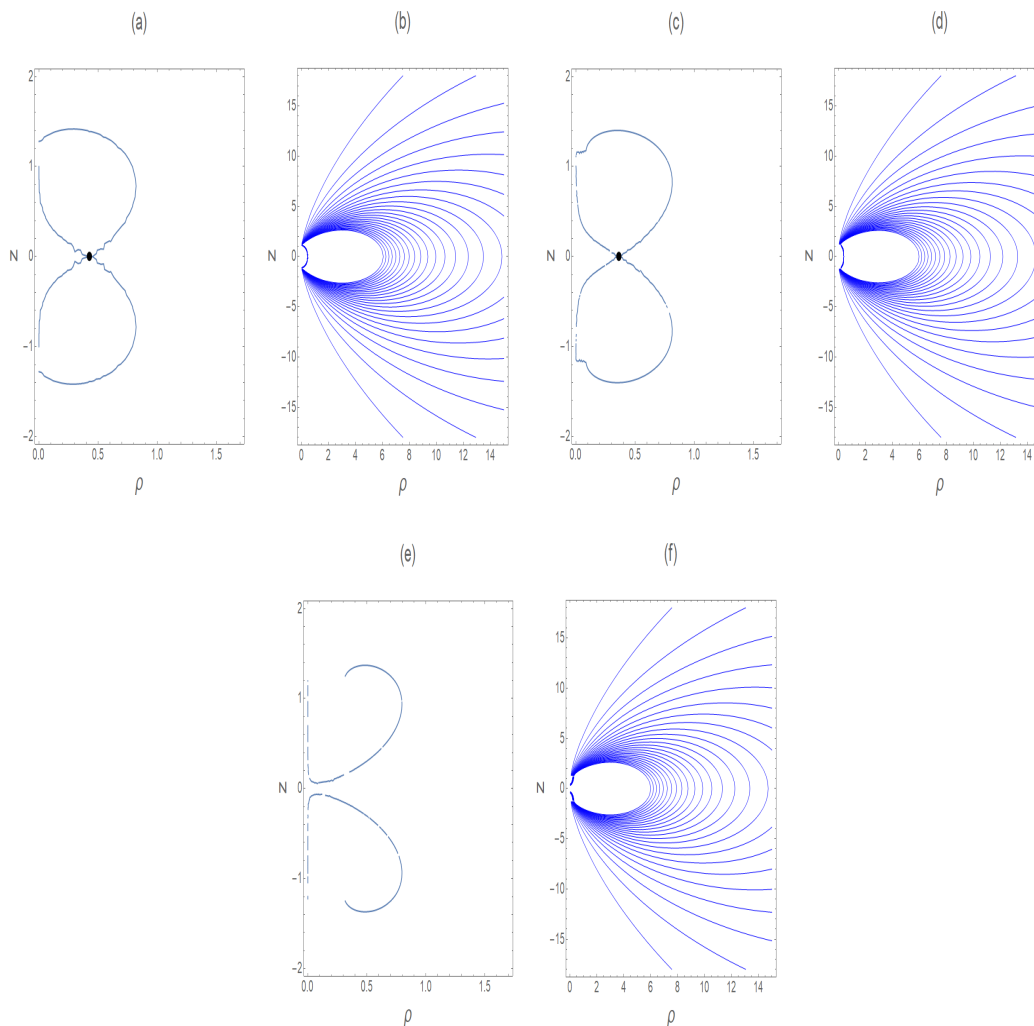


Figura 3.14: **Evolución de  $\mu$  – SE  $\rightarrow$  HECE:** Se muestra la evolución del parámetro  $\mu$  con los parámetros fijos  $M = 2.46$ ,  $q = -1.6875$  y  $a = 0.47$ . En (a) y (b) se utiliza  $\mu = 0.2$  y se tiene un caso SE con singularidad en  $\rho \approx 0.425$ . Aumentando  $\mu$ , en (c) y (d) se usa  $\mu = 0.3$  y se pasa a un caso HECE y la singularidad de anillo se recorre a  $\rho \approx 0.361$ . Estos dos primeros casos mencionados son SLSI.  $S$  se acerca al eje  $z$  al aumentar  $\mu$ . Las SLS se alargan y tienden a separarse, lo cual es más notable en (e) y (f) donde  $\mu = 0.49$ . Las SLS se separan, teniendo un caso HECE y no se desarrolla singularidad. Al seguir aumentando  $\mu$  se continúa en HECE y las SLS se separan cada vez más una de otra y se van volviendo más pequeñas. Tener una configuración HECE cuando  $\mu$  incrementa es consistente con el límite para  $\mu$  obtenido anteriormente. Se mantiene la simetría ecuatorial en las gráficas.

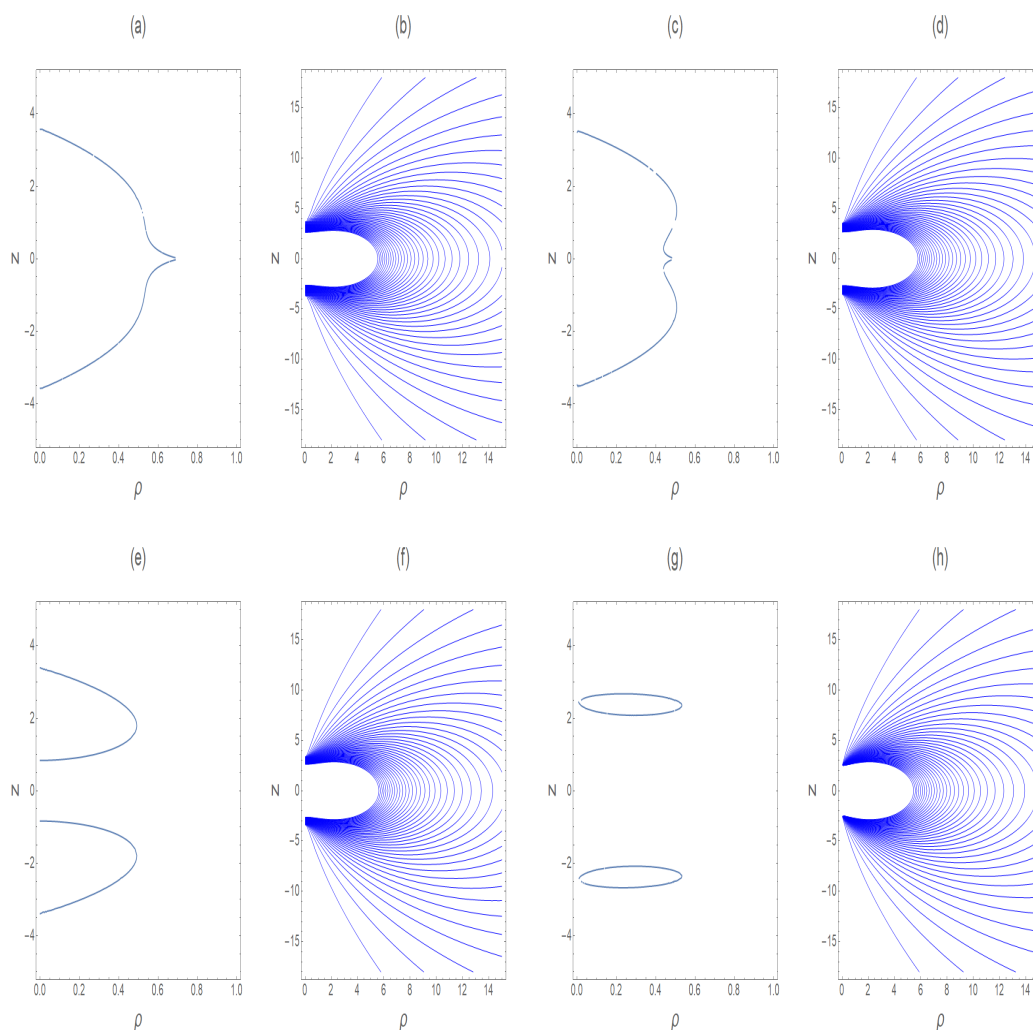


Figura 3.15: **Evolución de  $\mu$  – SEHE  $\rightarrow$  SE  $\rightarrow$  HECE:** Se muestra la evolución del parámetro  $\mu$  con los parámetros fijos  $M = 3.2$ ,  $q = 1$  y  $a = 1$ . En (a) y (b) se tiene  $\mu = 0.1$  y se tiene un caso SEHE con singularidad en  $\rho \approx 0.807$ . Al incrementar  $\mu$  a  $\mu = 0.7$  en (c) y (d), la SLS se disminuye de tamaño sobre el eje  $\rho$  y la singularidad se recorre a  $\rho \approx 0.571$ , continuando en el caso SEHE y siendo (a) y (c) SLSE. En (e) y (f) se usa  $\mu = 1.3$ , las SLS se separan, el caso pasa a ser SE y ya no se presenta la singularidad de anillo. Con  $\mu = 2.14$  en (g) y (h) el caso pasa a ser HECE y se puede apreciar como el incremento del valor de  $\mu$  tiende a separar las SLS. Si se sigue aumentando el valor de  $\mu$ , las SLS se separan más una de la otra y se vuelven más pequeñas. En el caso de la Fig 3.14, la configuración inicial de la evolución es HECE, mientras que en este caso la configuración inicial es SEHE y se pasa por tres tipos de configuraciones. Nuevamente, cuando  $\mu$  crece, la configuración a la que se tiende es HECE, como era de esperarse considerando el límite obtenido para  $\mu \rightarrow +\infty$ . Durante la evolución se mantiene la simetría ecuatorial en las gráficas.

En las figuras 3.3-3.15 se han presentado las SLS y LCM de distintas configuraciones de la solución 4-paramétrica de electrovacío extendida, donde la configuración tratada depende valores de los parámetros de la solución  $(M, q, a, \mu)$ . Se exponen algunas conclusiones a las que lleva el análisis anterior:

- La simetría ecuatorial se mantiene en todas las gráficas, como se esperaba.
- Las SLS son simétricas ante los cambios tipo  $M \rightarrow -M$ ,  $a \rightarrow -a$  y  $\mu \rightarrow -\mu$ , mientras que no lo son ante el cambio  $q \rightarrow -q$ . Las LCM son simétricas ante los cambios  $a \rightarrow -a$  y  $\mu \rightarrow -\mu$ , mientras que no son las mismas ante la transformación  $M \rightarrow -M$  ni ante  $q \rightarrow -q$ .
- El comportamiento de la solución cuando uno de los parámetros tiende a  $\pm\infty$  varía dependiendo del parámetro en cuestión. Cuando  $M \rightarrow \pm\infty$ , la configuración a la que tenderá la solución depende del signo de  $\mu^2 - a^2$ . Cuando  $a \rightarrow \pm\infty$ , el caso será SEHE, cuando  $\mu \rightarrow \pm\infty$ , el caso será HECE, cuando  $q \rightarrow +\infty$ , HECE, y cuando  $q \rightarrow -\infty$ , el caso será SE.
- Al variar uno de los parámetros de la solución, se puede pasar de cualquier tipo de configuración a otra, excepto de SE a HE ni viceversa.
- El incremento del parámetro  $M$  en configuraciones SE alarga las SLS sobre el eje  $z$ .
- El parámetro  $q$  es el que puede cambiar las SLS de manera más significativa, a comparación de los otros parámetros. Es el único parámetro que se encontró que puede pasar por las cuatro configuraciones posibles de la solución al evolucionarlo.
- El aumento de la magnitud de  $a$  junta las SLS, las hace más anchas hacia  $\rho$  y recorre las singularidades hacia la parte positiva del eje  $\rho$ .
- El variar los parámetros  $M$ ,  $q$  o  $a$ , permite que una SLS inicialmente SLSI pase a ser SLSE y viceversa, pero el parámetro  $\mu$  no es capaz de hacerlo.
- El aumento de la magnitud de  $\mu$  separa las SLS, las hace más pequeñas y, si hay singularidades, las acerca al eje de simetría  $z$  hasta separar las SLS haciéndolas cada vez más pequeñas.
- Las singularidades se presentan en el plano  $z = 0$  cuando las regiones en las SLS se traslapan, mientras que cuando son dos regiones separadas, no se presentan  $S$ . Esto se cumple con la excepción de las SLSE, donde se presenta un problema al intentar calcular las singularidades este tipo de configuraciones. La presencia de las  $S$  puede

deberse al tipo de proceso dinámico con el que se trata y se encuentran sobre las SLS como en [35].

- En las SLSI no hubo problemas para calcular las  $S$ , pero no se pudieron calcular las singularidades de las configuraciones SLSE, lo cual puede ser causado por problemas con el software utilizado.
- La localización de las singularidades de las configuraciones tipo SLSI no cambian al variar el parámetro  $M$  ni el parámetro  $q$ , pero si varían al cambiar  $a$  y  $\mu$ . Con esto se encuentra un régimen de valores en la solución donde la singularidad que se calcula no depende de los valores de masa total  $M$  ni de los valores del momento cuadrupolar de masa por unidad de masa  $q$ .

### 3.2.4. Momentos multipolares

Para concluir con el análisis de esta solución extendida, en esta subsección se presentan los cinco primeros momentos multipolares relativistas para esta solución obtenidos por medio del procedimiento de Hoenselaers-Perjés [18]. Escribiendo los momentos HP  $m_n$  y  $q_n$  como  $m_n = M_n + iJ_n$  y  $q_n = E_n + iB_n$ , para los multipolos de masa y momento angular se obtiene:

$$m_0 = M, \quad m_1 = iaM, \quad m_2 = qM, \quad m_3 = iaqM, \quad m_4 = Mq^2. \quad (3.18)$$

El resultado es que la masa total del sistema  $m_0$  es  $M$ , el momento angular  $J_1 = \Im[m_1]$  es  $aM$  y el momento cuadrupolar de masa  $M_2 = \Re[m_2]$  es  $qM$ , lo cual es consistente con la solución modelada. Los multipolos eléctricos y magnéticos son:

$$q_0 = 0, \quad q_1 = i\mu M, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = i\mu Mq, \quad q_4 = 0. \quad (3.19)$$

En (3.19) no hay carga eléctrica neta debido a que  $q_0 = 0$ , mientras que  $\mu$  es el dipolo magnético por unidad de masa, con lo que se verifica el hecho de que se está modelando un objeto que tiene carga eléctrica nula y dipolo magnético (por unidad de masa)  $\mu$  arbitrario. Los momentos multipolares de masa  $M_{2k+1}$  y eléctricos  $E_{2k+1}$  impares son cero, mientras que los momentos de rotación  $J_{2k}$  y magnéticos  $B_{2k}$  pares son los nulos, por lo que se verifica que esta es una solución con simetría ecuatorial.

Se pueden escribir un par de fórmulas para los momentos multipolares HP  $m_n$  y  $q_n$ , de la solución definida por los datos en el eje (3.8), tal y como se hace en [37] para una solución de 5 parámetros. Para los momentos gravitacionales  $m_n$  y electromagnéticos  $q_n$  de HP de esta solución, se tiene que:



$$\begin{aligned} m_{2n} &= Mq^n, & m_{2n+1} &= iaMq^n, \\ q_{2n} &= 0, & q_{2n+1} &= i\mu Mq^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

Los multipolos eléctricos  $q_{2n}$  tendría la forma tipo  $q_{2n} = eMq^n$ , siendo  $e$  un tipo de carga eléctrica, pero como la carga eléctrica de esta solución es cero, todos los momentos eléctricos son nulos. Con esto se concluye el análisis de la solución presentada en este capítulo.

## Capítulo 4

# Generalización de BM con dipolo magnético

En este capítulo se presenta una generalización del modelo binario antisimétrico de Bretón-Manko presentado en 1995. El modelo original consta de dos fuentes contrarrotantes de Kerr-Newman separadas por un soporte sin masa y la generalización viene dada al considerar que ambos constituyentes del sistema binario tienen cargas magnéticas iguales en magnitud, pero opuestas, por lo que la carga magnética neta del sistema es cero, pero hay un momento dipolar magnético arbitrario no nulo. Se construye la solución en todo el espacio y se facilitan las superficies de límite estacionario, las líneas de campo magnético y singularidades, así como el cálculo de los primeros momentos multipolares de la solución.

### 4.1. Solución BM de 5 parámetros con dipolo magnético

En esta sección se presenta una generalización con dipolo magnético de la solución presentada por Bretón y Manko en 1995 (solución BM) [23]. La solución BM describe un modelo de dos fuentes de Kerr-Newman idénticas separadas por un soporte sin masa, con misma masa  $m$  y carga eléctrica  $q$ , mismo espín, pero con orientaciones antiparalelas, por lo que se tiene un sistema de masas cargadas contrarrotantes con antisimetría ecuatorial.

En la generalización del modelo de BM que aquí se presenta, se considera que las fuentes tienen cargas magnéticas iguales pero opuestas, por lo que la carga magnética neta es cero. Aun así, se considera que estas cargas opuestas generan un momento dipolar magnético arbitrario distinto de cero, se denota como  $b$  y se presenta como parámetro en los datos en del eje.

Para construir el modelo, se utiliza el caso especial  $N = 2$  de la solución  $N$ -solitónica obtenida por el método de Sibgatullin. La idea es proporcionar un comportamiento en el eje

de simetría, aplicar el caso especial de la solución y construir las funciones métricas y los potenciales, lo cual permite el análisis de los campos exteriores de esta solución de 5 parámetros. Así, Se parte del comportamiento  $e(z)$  y  $f(z)$  para esta generalización con momento dipolar magnético del modelo BM, el cual es parecido al usado en [31], que también es similar al utilizado en el artículo original [23], pero en este caso se utiliza parámetro de NUT  $\nu = 0$  para tener soluciones asintóticamente planas. También se modifica el numerador en el potencial  $f(z)$  para desaparecer el momento monopolar magnético y que el primer momento multipolar magnético no nulo sea el dipolar. Considerar momento dipolar no nulo es de interés cuando se quieren modelar objetos astrofísicos, ya que estos no tienen carga magnética, pero si momento dipolar.

Considerando lo anterior, el comportamiento en el eje para esta solución está dado por:

$$\begin{aligned} e(z) &= \frac{(z - k - m - ia)(z + k - m + ia)}{(z - k + m - ia)(z + k + m + ia)}, \\ f(z) &= \frac{2(qz + ib)}{(z - k + m - ia)(z + k + m + ia)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde los parámetros representan la masa  $m$ , el momento angular por unidad de masa  $a$ , carga eléctrica  $q$ , momento dipolar magnético  $b$  y  $k$  siendo la mitad de la distancia coordenada entre las masas.

Para la construcción de solución es importante obtener ciertos objetos constantes  $h_l(\alpha_n)$  y  $f(\alpha_n)$  que aparecen en [39], con los que se construyen los potenciales complejos de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  y las funciones métricas. En este caso, como en el del Capítulo 3, se implementa la especialización del caso  $N$ -solitónico con  $N = 2$ , por lo que se cuenta con dos polos simples  $\beta_l$ . Los objetos  $h_l(\alpha_n)$  y  $f(\alpha_n)$  toman la forma:

$$h_l(\alpha_n) = \bar{e}_l + 2\bar{f}_l f(\alpha_n), \quad f(\alpha_n) = \frac{f_1}{\alpha_n - \beta_1} + \frac{f_2}{\alpha_n + \beta_1} \quad (4.2)$$

donde  $e_l$  y  $f_l$  son los coeficientes en potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  en el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$ , los cuales, además de poder ser escritos como en (4.1), se pueden expresar también de la forma:

$$e(z) = 1 + \frac{e_1}{z - \beta_1} + \frac{e_2}{z - \beta_2}, \quad f(z) = \frac{f_1}{z - \beta_1} + \frac{f_2}{z - \beta_2}.$$

Usando (4.1) se pueden obtener los coeficientes  $e_l$  y  $f_l$ :

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{2m[a - i(k - m)]}{a - ik}, & e_2 &= -\frac{2m[a - i(k + m)]}{a - ik}, \\ f_1 &= \frac{q[a - i(k - m)] + b}{a - ik}, & f_2 &= \frac{q[a - i(k + m)] - b}{a - ik}, \\ \beta_1 &= k - m + ia, & \beta_2 &= -k - m - ia. \end{aligned} \quad (4.3)$$

al descomponer (4.1) en fracciones parciales.

Los datos en el eje (4.1) deben de satisfacer la ecuación algebraica:

$$e(z) + \bar{e}(z) + 2f(z)\bar{f}(z) = 0, \quad (4.4)$$

lo cual, al resolver dicha ecuación bicuadrática nos lleva a las cuatro raíces  $\alpha_n$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &\equiv \sqrt{\delta \pm 2d}, \\ \alpha_+ &= \alpha_1 = -\alpha_4, \quad \alpha_- = \alpha_2 = -\alpha_3, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta &= k^2 + m^2 - a^2 - 2q^2, \\ d &= \sqrt{(k^2 - q^2)(m^2 - q^2) - a^2(k^2 + m^2 - q^2) - b^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para el cálculo de las raíces solo se necesitaron los datos en el eje  $e(z)$  y  $(z)$ . Los otros objetos calculados anteriormente, serán de utilidad al calcular los potenciales de Ernst complejos y las funciones métricas. Las ecuaciones (4.3) y (4.5) determinan  $f(\alpha_n)$  y  $h_i(\alpha_n)$  en (4.2). Se puede observar que las raíces en (4.5) tienen una relación distinta entre ellas a comparación de las raíces en (3.10) de la solución del Capítulo 3. Además, las raíces en (4.5) definen las funciones:

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha_n)^2} \quad (4.7)$$

de la misma manera que en la solución anterior.

Las raíces en (4.5) pueden ser escritas en otra representación utilizando la fórmula de radicales jerarquizados como suma (o resta) de raíces cuadradas. Las raíces quedan de la forma:

$$\alpha_+ = \kappa_+ + \kappa_-, \quad \alpha_- = \kappa_+ - \kappa_-, \quad (4.8)$$

donde

$$\kappa_+ = \sqrt{\frac{\delta + \Delta}{2}}, \quad \kappa_- = \sqrt{\frac{\delta - \Delta}{2}}, \quad \Delta = \sqrt{\delta^2 - 4d^2}. \quad (4.9)$$

La solución se construyó utilizando la parametrización en (4.8), aunque también se puede construir con la parametrización en (4.5). Se eligió la representación de las raíces  $\alpha_i$  en términos de  $\kappa_{\pm}$  ya que es la parametrización que se utiliza en [23] y permite la comparación de la

solución obtenida con la solución original. Además, usando esta parametrización se obtienen formulas compactas de los potenciales que se calculan, considerando que estas expresiones normalmente son extensas para estas soluciones. Para el análisis de la solución se utilizan ambas representaciones,  $\alpha_{\pm}$  y  $\kappa_{\pm}$ . En la Subsección 4.2.3 se hacen algunos comentarios acerca de la reparametrización en (4.8).

#### 4.1.1. Potenciales de Ernst

Los potenciales complejos de Ernst tienen la misma forma que en (3.13), ya que este caso también es una especialización de la solución  $N = 2$ -solitónica. En este caso los potenciales  $A$ ,  $B$  y  $C$  no se construyen por sustitución algebraica como los del capítulo anterior, sino que se obtienen utilizando las expresiones para los determinantes expandidos por la regla de Laplace, dados en el apéndice del artículo [31] y los objetos calculados en (4.2), (4.3) y (4.8). Con esto, después del cálculo y la simplificación de las expresiones obtenidas, los potenciales de Ernst  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$  para esta generalización con dipolo magnético toman la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{A - B}{A + B}, \quad \Phi = \frac{C}{A + B} \\ A &= \kappa_+^2 \left[ ((m^2 - q^2)\Delta - b^2)(r_1 r_3 + r_2 r_4) - 2ibq\kappa_-(r_1 r_3 - r_2 r_4) \right] \\ &\quad + \kappa_-^2 \left[ ((m^2 - q^2)\Delta + b^2)(r_1 r_2 + r_3 r_4) + 2ibq\kappa_+(r_1 r_2 - r_3 r_4) \right] \\ &\quad + \Delta \left[ (d^2 - a^2 k^2 - (m^2 - q^2)^2)(r_1 r_4 + r_2 r_3) + 2iak\kappa_+\kappa_-(r_1 r_4 - r_2 r_3) \right], \\ B &= 2m \left\{ \Delta d^2 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + \kappa_+\kappa_- \left[ \Delta (iak - (m^2 - q^2))(r_1 - r_2 + r_4 - r_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2ibq((r_1 + r_2 - r_3 - r_4)\kappa_- - (r_1 - r_2 + r_3 - r_4)\kappa_+) \right] \right\}, \\ C &= \frac{q}{m} B + b \left\{ \kappa_- \left[ 2\kappa_+^2 ak + i(d^2 - b^2 - a^2 k^2 - (m^2 - q^2)(m^2 - q^2 + \Delta)) \right] (r_1 - r_2 + r_3 - r_4) \right. \\ &\quad \left. - \kappa_+ \left[ 2\kappa_-^2 ak + i(d^2 - b^2 - a^2 k^2 - (m^2 - q^2)(m^2 - q^2 - \Delta)) \right] (r_1 + r_2 - r_3 - r_4) \right\}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

#### 4.1.2. Funciones métricas

Las funciones métricas correspondientes  $f$ ,  $\gamma$  y  $\omega$  que entran al elemento de línea  $ds^2$ :

$$ds^2 = f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] - f (dt - \omega d\phi)^2,$$

de esta generalización también se construyen utilizando las expresiones del apéndice del artículo [31]. Es importante mencionar que el potencial  $G$  que se presenta a continuación, es

la suma de los potenciales  $G$  y  $H$  del apéndice de [31], i.e.,  $G + H \rightarrow G$ . Después del proceso de simplificación de las expresiones que aparecen en la métrica se obtiene:

$$f = \frac{A\bar{A} - B\bar{B} + C\bar{C}}{(A+B)(\bar{A} + \bar{B})}, \quad e^{2\gamma} = \frac{A\bar{A} - B\bar{B} + C\bar{C}}{K_0 \bar{K}_0 r_1 r_2 r_3 r_4}, \quad \omega = -\frac{\Im[G(\bar{A} + \bar{B}) + C\bar{I}]}{A\bar{A} - B\bar{B} + C\bar{C}},$$

$$G = (2m + z)(A - B) + 2 \left\{ \kappa_+^2 \left[ \kappa_- \left( (2m^2 - q^2)\Delta - b^2 + 2ibqm \right) (r_1 r_3 - r_2 r_4) \right. \right. \\ - \left. \left. \left( m[(m^2 - q^2)\Delta - b^2] + 2ibq(\kappa_-^2 + m^2) \right) (r_1 r_3 + r_2 r_4) \right] \right. \\ + \kappa_-^2 \left[ \kappa_+ \left( (2m^2 - q^2)\Delta + b^2 - 2ibqm \right) (r_1 r_2 - r_3 r_4) \right. \\ - \left. \left. \left( m[(m^2 - q^2)\Delta + b^2] - 2ibq(\kappa_+^2 + m^2) \right) (r_1 r_2 + r_3 r_4) \right] \right. \\ - m\Delta \left[ \left( d^2 - a^2 k^2 - (m^2 - q^2)^2 - 2ibqm \right) (r_1 r_4 + r_2 r_3) + 2iak\kappa_+ \kappa_- (r_1 r_4 - r_2 r_3) \right] \\ + \kappa_+ \kappa_- \left[ \Delta \left( 2\kappa_+ \kappa_- (m^2 - q^2) (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \right. \right. \\ - \left. \left. \left. (m^2 - q^2) [(a - ik)^2 + m^2 + \delta] - 2ibqm \right) (r_1 - r_2 - r_3 + r_4) \right) \right. \\ + \left. \left. \left[ (\kappa_+ + \kappa_-) (m^2 - q^2 - iak - \kappa_+ \kappa_-) m\Delta + (\kappa_+ - \kappa_-) \left( \kappa_+ \kappa_- \{ m[(a - ik)^2 + m^2] + 2ibq \} \right. \right. \right. \right. \\ - \left. \left. \left. m[d^2 + b^2 - ak(ak - i\delta) - (m^2 - q^2)^2] - 2ibq(m^2 - q^2 - iak) \right) \right] (r_1 - r_4) \right. \right. \\ - \left. \left. \left[ (\kappa_+ - \kappa_-) (m^2 - q^2 - iak + \kappa_+ \kappa_-) m\Delta - (\kappa_+ + \kappa_-) \left( \kappa_+ \kappa_- \{ m[(a - ik)^2 + m^2] + 2ibq \} \right. \right. \right. \right. \\ + \left. \left. \left. m[d^2 + b^2 - ak(ak - i\delta) - (m^2 - q^2)^2] + 2ibq(m^2 - q^2 - iak) \right) \right] (r_2 - r_3) \right] \left. \right\},$$

$$I = 2q(A + B) - (2m + z)C + ibm \left[ \kappa_-^2 \left( (a + ik)^2 + m^2 + 4q^2 - \Delta \right) (r_1 r_2 + r_3 r_4) \right. \\ - \kappa_+^2 \left( (a + ik)^2 + m^2 + 4q^2 + \Delta \right) (r_1 r_3 + r_2 r_4) + 16d^2 \Delta \\ + 2\Delta m \left[ \kappa_+ \kappa_- \left( q[\kappa_- (r_1 r_2 - r_3 r_4) + \kappa_+ (r_1 r_3 - r_2 r_4)] \right. \right. \\ + \left. \left. ib(r_1 r_4 - r_2 r_3) \right) + ib \left( (m^2 + q^2) + iak \right) (r_1 r_4 + r_2 r_3) \right] \\ + \kappa_- \kappa_+ \left\{ 2\Delta \left[ \kappa_- \kappa_+ (2mq + ib) (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \right. \right. \\ - \left. \left. \left. (qm[(a - ik)^2 + m^2 + \delta] - ib(3m^2 + q^2 + iak)) (r_1 - r_2 - r_3 + r_4) \right) \right. \right. \\ + \left. \left. \left[ \Delta q \left( [(a - ik)^2 + m^2] (\kappa_+ + \kappa_-) + \Delta (\kappa_+ - \kappa_-) \right) \right. \right. \\ - \left. \left. 4ibm(\kappa_+ - \kappa_-) (m^2 + q^2 + iak + \kappa_+ \kappa_-) \right] (r_1 - r_4) \right. \\ - \left. \left. \left[ \Delta q \left( [(a - ik)^2 + m^2] (\kappa_+ - \kappa_-) + \Delta (\kappa_+ + \kappa_-) \right) \right. \right. \\ - \left. \left. 4ibm(\kappa_+ + \kappa_-) (m^2 + q^2 + iak - \kappa_+ \kappa_-) \right] (r_2 - r_3) \right] \left. \right\},$$

$$K_0 = 4d^2 \Delta. \tag{4.11}$$

Las ecuaciones (4.10) y (4.11) determinan completamente la métrica del sistema de cuerpos interactuantes separados por un soporte sin masa, la cual describe dos fuentes de Kerr-Newman idénticas con masa  $m$  y carga eléctrica  $q$  iguales, momentos angulares iguales en magnitud, pero opuestamente alineados, con momento angular por unidad de masa  $a$ , carga magnética igual en magnitud, pero opuesta, momento dipolar magnético arbitrario  $b$  y  $k$  siendo la mitad de la distancia coordinada entre las masas.

La solución de 5 parámetros de electrovacío permite una expresión para el campo eléctrico  $A_t$  y magnético  $A_\varphi$  del 4-potencial electromagnético definidos por:

$$A_t = -\Re\left(\frac{C}{A+B}\right), \quad A_\varphi = \Im\left(\frac{I}{A+B}\right), \quad (4.12)$$

lo cual concluye la construcción de la métrica y del 4-potencial electromagnético. En este caso, el campo magnético depende de la carga eléctrica  $q$  y el momento dipolar magnético  $b$ . En este caso se llegan a líneas de campo que no cuentan con simetría ni antisimetría ecuatorial, como se verá más adelante.

## 4.2. Características de la solución

La solución 5-paramétrica presentada en este capítulo es una generalización de un modelo con antisimetría ecuatorial. Es de interés conocer si la consideración adicional de momento dipolar magnético  $b$  creado por las cargas magnéticas opuestas de cada fuente afecta a que se cumplan las condiciones de antisimetría, lo que se podría visualizar en las superficies de límite estacionario, las líneas de campo magnético o en las condiciones de simetría y antisimetría ecuatorial. También se puede estudiar si se forman o no singularidades de anillo, además de cómo es que afecta cada parámetro a la solución. Esto se estudia en la presente sección, y al final de esta, se calculan los momentos multipolares de la solución. Tras el análisis, se obtiene el resultado de que la generalización con dipolo magnético del modelo BM no presenta comportamiento de simetría, ni de antisimetría ecuatorial, por lo que la consideración de dipolo magnético  $b$  arbitrario rompe con la antisimetría de la solución sin dipolo en [23].

### 4.2.1. Evaluación de simetría/antisimetría ecuatorial

Al igual que en la Subsección 3.2.1, se pueden evaluar las condiciones de simetría y antisimetría ecuatorial (2.48) y (2.49) para  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ , y (2.50) y (2.51) para  $e(z)$  y  $f(z)$ , considerando los datos en el eje de simetría (4.1) y los potenciales complejos de Ernst (4.10).

Considerando los datos en el eje (4.1) y las condiciones de simetría y antisimetría correspondientes, se llega a los siguientes resultados:

$$e_+(z)[e_+(-z)]^* \neq 1, \quad f_+(z) \neq -e^{2i\delta}[f_+(-z)]^* e_+(z), \quad (4.13)$$

por lo cual no se cumplen las condiciones de simetría para el comportamiento en el eje.

Haciendo uso de las condiciones de la antisimetría (2.51), se obtiene que:

$$e_+(z)e_+(-z) = 1, \quad f_+(z) = \mp \frac{2(qz - ib)}{(z - k + m - ia)(z + k + m + ia)}, \quad (4.14)$$

por lo que se cumple la primera condición de antisimetría ecuatorial, pero no la segunda, ya que esta última va a diferir del resultado requerido para la antisimetría ya sea por la carga eléctrica  $q$  o por el dipolo magnético  $b$ . Como las condiciones se tienen que cumplir simultáneamente para que la solución sea ecuatorialmente antisimétrica, se concluye que esta generalización con dipolo magnético de la solución BM no presenta simetría ni antisimetría ecuatorial.

También se pueden evaluar las condiciones para los potenciales  $\mathcal{E}$  y  $\Phi$ . Al hacer la evaluación, se puede verificar que no se cumple ninguna condición de simetría o antisimetría, i.e., ninguna condición de (2.48) ni de (2.49) se satisfacen. Esto es consistente con la conclusión anterior de que esta solución no presenta ninguno de estos dos comportamientos de simetría, ni de antisimetría ecuatorial.

Se puede observar que se cumple la primera condición de antisimetría en (4.14) para  $e(z)$  y no así la condición de antisimetría para el potencial  $\mathcal{E}$ . Por otro lado, también es importante recordar que los datos en el eje analíticamente extendidos  $e_+(z)$  y  $f_+(z)$ , no son, en general, para los valores negativos de  $z$ , iguales a los valores en el eje  $\mathcal{E}(z, 0)$  y  $\Phi(z, 0)$  de los potenciales de Ernst de la solución construidos del comportamiento en el eje.

Si se utiliza  $b = 0$  al evaluar las condiciones, se cumple que  $\mathcal{E}(-z, \rho) = \mathcal{E}(z, \rho)$  y  $\Phi(-z, \rho) = \Phi(z, \rho)$  para los potenciales complejos, mientras que para el comportamiento en el eje de simetría se cumple que  $e(z)e(-z) = 1$  y  $f(z) = -f(-z)e(z)$ , i.e., se cumplen las condiciones de antisimetría. Con esto se concluye que, considerar dipolo magnético arbitrario en cada una de las fuentes de la solución BM, rompe con la antisimetría ecuatorial, la cual se puede recuperar si cada constituyente tiene dipolo magnético nulo  $b = 0$ , por lo que el sistema tendrá momento dipolar magnético total igual a cero.

## 4.2.2. Tipos de constituyentes

En esta sección se presentarán los tipos de configuraciones accesibles para la solución considerada en este capítulo. Es conveniente definir primero ciertas abreviaciones para utilizarlas más adelante en el análisis de las SLS y LCM. En la Fig 4.1 se muestran los tres



tipos de configuraciones posibles encontradas para la generalización con dipolo magnético de la solución BM. El caso (a) subextremo se abrevia *SE* como en el Capítulo 3, el caso (b) hiperextremo con constituyentes imaginarios se abrevia como *HEI*, por sus siglas en inglés *hyperextreme imaginary*, i.e., hiperextremo imaginario. El caso (c) hiperextremo con raíces complejas será *HEC*, lo cual hace referencia a *hyperextreme complex* o hiperextremo complejo.

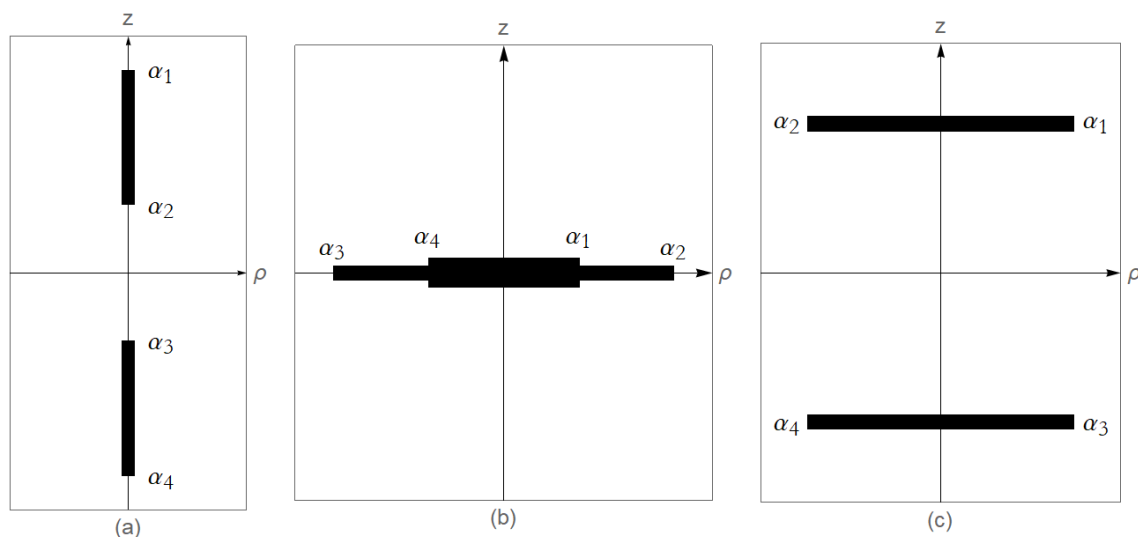


Figura 4.1: **Tipos de constituyentes:** Se muestran los tres tipos de posibles configuraciones de las fuentes contrarrotantes de la solución: caso (a) subextremo, (b) hiperextremo con  $\alpha_i \in \mathcal{I}$  y el caso (c) hiperextremo con  $\alpha_i \in \mathcal{C}$ .

En la Fig 4.1, se tienen cada una de las configuraciones accesibles para la solución. El caso (a) subextremo se presenta cuando  $\delta, d \in \mathbb{R}$  y  $\delta > 2d$ . El caso (b) es cuando  $\delta, d \in \mathbb{R}$  y  $\delta < 2d$ , lo cual, debido a la naturaleza de  $\delta$  y  $d$ , solo lleva a casos hiperextremos con raíces imaginarias, i.e., solo lleva a casos HEI. Las configuraciones en (c) se presentan cuando  $\delta \in \mathbb{R}$ , lo cual siempre se cumple, y con  $d \in \mathbb{C}$ , lo que nos lleva a casos HEC. Es relevante mencionar que estas son las únicas condiciones que se pueden cumplir simultáneamente para  $\delta$  y  $d$ , ya que no se pudo encontrar, por ejemplo, un caso con  $\delta, d \in \mathbb{R}$  tales que  $\delta > 0$  y  $\delta < 2d$ , lo cual llevaría a configuraciones mixtas subextremas-hiperextremas, siendo esta una configuración no accesible para el sistema. La causa de esto es que, si  $\delta > 0$ ,  $d$  solo puede ser complejo o real tal que  $\delta > 2d$ , pero no se puede cumplir que  $\delta > 0$  y  $2d > \delta$  simultáneamente, ya que si  $\delta > 0$ , la contribución para  $d$  dentro de la raíz de los parámetros  $m, a, k$  y  $q$ , hace que  $d$  se vuelva complejo o real tal que  $2d < \delta$ . Esto hace que las raíces  $\alpha_{\pm}$  siempre pertenezcan al mismo conjunto de parámetros, ya sean los reales o los complejos.

Para esta solución no se encontraron casos subextremo-hiperextremos, i.e., con un constituyente subextremos y uno hiperextremo, por lo que no se incluyen como configuraciones accesibles para el sistema. Esto se considera que es debido a que, como se mencionó anteriormente, no hay casos donde se pueda tener una raíz imaginaria y real, ya que, en general, la naturaleza de las raíces  $\alpha_{\pm}$  tienen que ser iguales, i.e., si  $\alpha_{+}$  es real,  $\alpha_{-}$  también lo será, y así con los tres tipos de raíces posibles. Respecto a estas conclusiones, aunque no se hizo un análisis numérico estricto para indagar sobre el comportamiento de las raíces  $\alpha_{\pm}$ , se utilizaron una gran cantidad de casos diferentes con distintos valores de los parámetros, y los resultados son consistentes con las conclusiones expuestas en esta subsección.

El análisis anterior se realizó utilizando la representación de las raíces  $\alpha_{\pm}$  en (4.5) y (4.6), pero también se puede hacer utilizando la forma en (4.8) y (4.9) en términos de las cantidades  $\kappa_{\pm}$ . El caso subextremo en (a) se presenta cuando ambas  $\kappa$  pertenecen a los reales, i.e.,  $\kappa_{\pm} \in \mathbb{R}$ , y las dos condiciones que se tienen que cumplir son  $\delta \pm \Delta > 0$ . El parámetro  $\Delta$ , por la manera en la que está definido, solo toma valores reales positivos. Por otro lado, el caso en HEI en (b) se presenta cuando las dos condiciones  $\delta \pm \Delta < 0$  se cumplen. En estos casos,  $\delta$  tiende a tomar valores negativos grandes. El caso HEC en (c) se presenta cuando  $\kappa_{+} \in \mathbb{R}$  y  $\kappa_{-} \in \mathcal{I}$ , por lo que las dos condiciones que se tienen que cumplir para que se presente esta configuración son  $\delta + \Delta > 0$  y  $\delta - \Delta < 0$ .

### 4.2.3. Reparametrización $\alpha_{\pm} \rightarrow \alpha_{\pm}(\kappa_{\pm})$

Respecto a la reparametrización en (4.8) de las raíces de esta solución, hay un par de detalles que vale la pena mencionar. Estrictamente, lo que se usa es la siguiente fórmula para radicales jerarquizados:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{C}} = \sqrt{\frac{A+D}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-D}{2}}, \quad D = \sqrt{A^2 - C}, \quad (4.15)$$

donde esta particular fórmula es válida cuando  $A > \sqrt{C}$ . Además, está escrita para variables reales. La ecuación (4.15) se utiliza para escribir  $\alpha_{\pm}$  en términos de  $\kappa_{\pm}$ , donde estas últimas son las raíces mostradas en (4.9).

Si se traduce la condición para aplicar (4.15) a las variables  $\delta$  y  $d$ , la condición para la aplicación de esta fórmula es que  $\delta > 2d$ , lo cual solamente se cumple para los casos subextremos de esta solución. Aun así, se puede analizar qué es lo que pasa con la reparametrización en los casos donde esta condición no se cumple.

Para fines de esta subsección, se pueden denotar las raíces expresadas en su parametrización obtenida en (4.5) como  $\alpha_i$ , las cuales están explícitamente en términos de  $\delta$  y  $d$ . A las raíces en su representación en términos de  $\kappa_{\pm}$ , i.e.,  $\alpha_i(\kappa_{\pm})$  de (4.8), se les denotará como las

raíces  $\alpha_{i\kappa}$ , como se utiliza en Fig 4.2. Así, para el caso SE donde  $\delta > 2d$  se cumple, se tiene que

$$\alpha_1 = \alpha_{1\kappa}, \quad \alpha_2 = \alpha_{2\kappa}, \quad \alpha_3 = \alpha_{3\kappa}, \quad \alpha_4 = \alpha_{4\kappa}, \quad (4.16)$$

por lo que se puede ver que las raíces en su representación como  $\alpha_{\pm}$  en (4.5) coincide con las raíces en su representación en  $\kappa_{\pm}$  de (4.8).

En el caso HEC se tiene  $d \in \mathcal{I}$  y  $\delta \in \mathbb{R}$ . La condición  $\delta > 2d$  no es aplicable, pero, aun así, se puede verificar que las  $\alpha_i$  y las  $\alpha_{i\kappa}$  cumplen con las mismas relaciones que en (4.16), por lo que las raíces coinciden en ambas representaciones. Esto justifica la aplicación de (4.15) en el régimen de los casos HEC.

El caso donde la reparametrización de las raíces no es trivial, es en las configuraciones HEI, ya que se está en el régimen cuando  $\delta < 2d$  y la condición para la aplicación de (4.15) no se cumple. En este caso, las raíces se presentan como sigue:

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_{3\kappa}, \quad \alpha_2 \rightarrow \alpha_{1\kappa}, \quad \alpha_3 \rightarrow \alpha_{4\kappa}, \quad \alpha_4 \rightarrow \alpha_{2\kappa}, \quad (4.17)$$

por lo que se deja de cumplir (4.16). Este comportamiento en del caso HEI se muestra gráficamente en la Fig 4.2. Las fuentes siguen siendo las mismas, ya que se fijan las mismas cuatro raíces obtenidas en (4.5), pero, formalmente, cambian. Aun así, las relaciones entre raíces de (4.5) se siguen cumpliendo, por lo que la reparametrización (4.8) no afecta la localización de las fuentes fijadas.

El problema aquí es comprobar si la solución en este régimen sigue cumpliendo las ecuaciones de Einstein, lo cual se puede corroborar incluso en este régimen. Para comprobar esto, se construyeron los potenciales de Ernst de la solución, así como las funciones métricas, utilizando la parametrización original en (4.5) para evaluar si los campos exteriores que se modelan son los mismos al utilizar  $\alpha_i$  o  $\alpha_{i\kappa}$ . El resultado fue que, no importa si se utiliza la parametrización en para las raíces de (4.5) o las raíces de (4.8), las ecuaciones se cumplen de la misma manera y los campos exteriores que se modelan son los mismos, ya que ambas reparametrizaciones son soluciones de las ecuaciones de Einstein, además de que las superficies de límite estacionario y las líneas de campo magnéticas que se obtienen son iguales en ambos casos. Con esto se comprueba la validez de la reparametrización de las raíces  $\alpha_{\pm}$  a su representación en  $\kappa_{\pm}$  en todos los regímenes, la cual es utilizada en esta tesis.

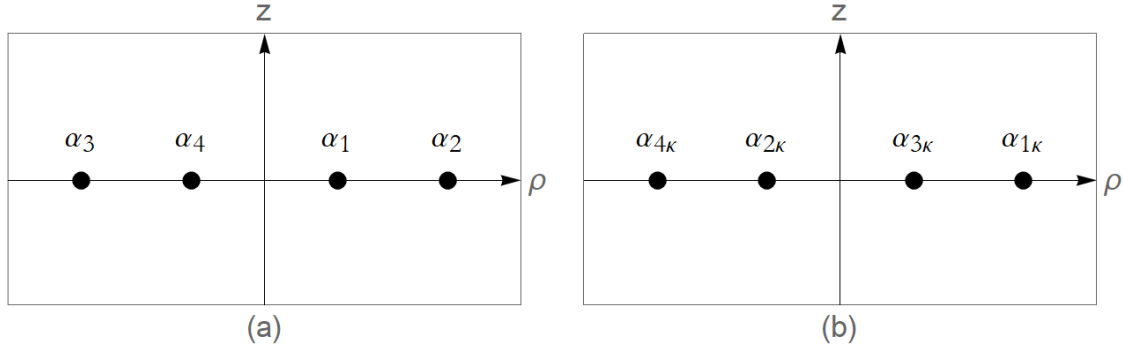


Figura 4.2: **Localización de las fuentes:** Se muestra la localización de las fuentes de la solución en el caso HEI, cuando  $\delta > 2d$  y las raíces  $\alpha_i$  son puramente complejas. En (a) se presenta la localización de las raíces cuando  $\alpha_{\pm}$  se usa como en (4.5) y se denotan con  $\alpha_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ , mientras que en (b) se muestra la localización de las fuentes cuando se utiliza la parametrización de  $\alpha_{\pm}$  en términos de  $\kappa_{\pm}$  de (4.8) y se denotan como  $\alpha_{i\kappa}$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ . La localización de las raíces difiere en (a) y (b), pero las fuentes se fijan donde mismo en ambos casos.

#### 4.2.4. Superficie de límite estacionario, campo magnético y singularidades

A continuación, se muestran algunas gráficas de las superficies de límite estacionario (SLS), así como de las líneas de campo magnético (LCM) de esta solución BM con dipolo magnético. También se comentan algunos detalles de interés en los distintos casos.

Para esta subsección también es de interés estudiar los límites de las raíces  $\alpha_{\pm}$  y de las variables  $\delta$  y  $2d$  o, equivalentemente, de  $\kappa_{\pm}$ , para saber cuál es el tipo de configuración con la que se va a tratar cuando cada uno de los parámetros de la solución tiende a ser más grande en magnitud que los otros parámetros. En el análisis se utilizan las cantidades  $\alpha_{\pm}$ ,  $\delta$  y  $d$  por conveniencia, pero también se puede hacer usando  $\kappa_{\pm}$ ,  $\delta$  y  $\Delta$ . A continuación, se muestran los límites de las cantidades mencionadas.

- Si  $m \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $m \ll a, k, q, b$  :  $\Rightarrow \delta, \alpha_1, \alpha_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \delta \in \mathbb{R}^+$ ,
  - Si  $k^2 - a^2 > q^2 \Rightarrow d \rightarrow +\infty \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$  Caso SE
  - Si  $k^2 - a^2 < q^2 \Rightarrow d \rightarrow +i\infty \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow$  Caso HEC

El límite cuando  $m \rightarrow +\infty$  es el mismo que cuando  $m \rightarrow -\infty$ . Si  $m \rightarrow \pm\infty$  en el caso

HEC, las fuentes estarán muy separadas en el eje  $z$ , mientras que el largo de la fuente en  $\rho$  será pequeño comparado con esta separación en  $z$ .

- Si  $a \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $a \ll m, k, q, b$ :  $\Rightarrow \delta \rightarrow -\infty, \alpha_1 \rightarrow +i\infty, \alpha_2 \rightarrow -i\infty \Rightarrow \delta \in \mathbb{R}^-$ 
  - Si  $k^2 + m^2 > q^2 \Rightarrow d \rightarrow +i\infty \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow$  Caso HEC
  - Si  $k^2 + m^2 < q^2 \Rightarrow d \rightarrow +\infty \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow$  Caso HEI

El límite cuando  $a \rightarrow +\infty$  es el mismo que cuando  $a \rightarrow -\infty$

- Si  $k \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $k \ll m, a, q, b$ :  $\Rightarrow \delta, \alpha_1, \alpha_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \delta \in \mathbb{R}^+$ 
  - Si  $m^2 - a^2 > q^2 \Rightarrow d \rightarrow +\infty \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$  Caso SE
  - Si  $m^2 - a^2 < q^2 \Rightarrow d \rightarrow +i\infty \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow$  Caso HEC

El límite cuando  $k \rightarrow +\infty$  es el mismo que cuando  $k \rightarrow -\infty$

- Si  $q \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $q \ll m, a, k, b$ :  $\Rightarrow \delta \rightarrow -\infty, d \rightarrow +\infty, \alpha_1 \rightarrow +i\infty, \alpha_2 \rightarrow 0$ ,  
 $\Rightarrow \delta \in \mathbb{R}^-, d \in \mathbb{R}^+, \alpha_1 \in \mathcal{I}, \alpha_2 \approx 0 \Rightarrow$  Caso HEI

El límite cuando  $q \rightarrow +\infty$  es el mismo que cuando  $q \rightarrow -\infty$

- Si  $b \rightarrow -\infty$ , i.e.,  $b \ll m, a, k, q$ :  $\Rightarrow \delta = m^2 - a^2 + k^2 - 2q^2$ ,  
 $d \rightarrow +i\infty, \alpha_1 \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}\infty, \alpha_2 \rightarrow \frac{1-i}{\sqrt{2}}\infty, \Rightarrow d \in \mathbb{C}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow$  Caso HEC

Evidentemente,  $\delta$  no depende de  $b$ . El límite cuando  $b \rightarrow +\infty$  es el mismo que cuando  $b \rightarrow -\infty$ .

Usando estos límites, se puede partir de alguna de las tres configuraciones y ver como evoluciona ante el aumento de cualquiera de los parámetros. La evolución, en algunos casos, está sujeta a alguna condición que restringe el tipo de configuración que el sistema va a desarrollar. Estos límites sirven también como referencia para las siguientes gráficas.

Ahora se muestran las SLS y LCM para ciertos valores de los parámetros de la generalización solución BM con dipolo magnético.

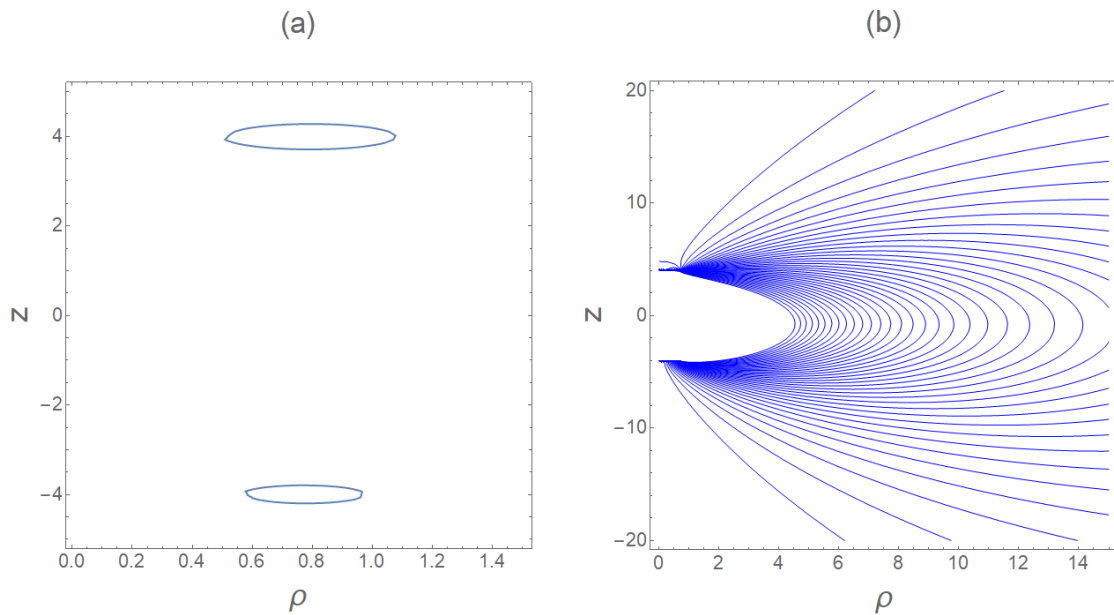


Figura 4.3: **Caso HEC:** (a) Superficie de límite estacionario y (b) líneas de campo magnético para el caso hiperextremo complejo con los parámetros  $m = 1$ ,  $a = 1$ ,  $k = 4$ ,  $q = 0.5$  y  $b = -2$ . Ninguna de las gráficas muestra la antisimetría ecuatorial. Es importante recordar que una configuración, ya sea con simetría o antisimetría ecuatorial, tendría que mostrar simetría respecto al eje  $\rho$ . No se desarrollan singularidades de anillo.

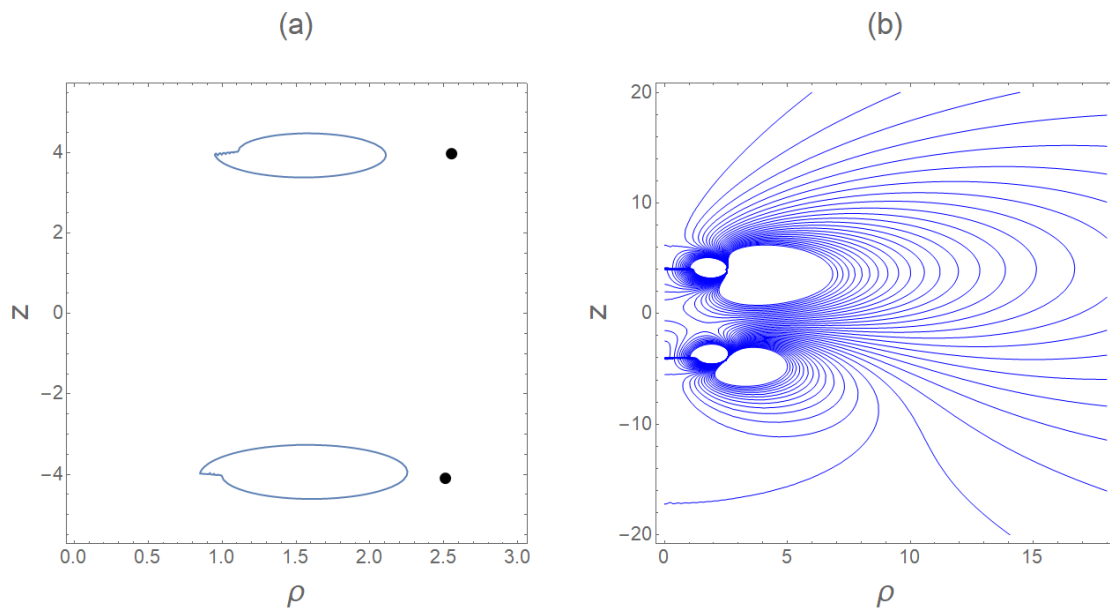


Figura 4.4: **Caso HEC:** (a) Superficie de límite estacionario y (b) líneas de campo magnético para el caso hiperextremo complejo con los parámetros  $m = -2$ ,  $a = 2$ ,  $k = 4$ ,  $q = -1$  y  $b = -2$ . Ninguna de las gráficas muestra la antisimetría ecuatorial. Se presentan dos singularidades de anillo en  $(\rho \approx 2.55, z \approx 3.97)$  y en  $(\rho \approx 2.51, z \approx -4.1)$ , por lo que estas también muestran una asimetría. Las singularidades solo se desarrolla para masas negativas, y tiene que ver con el hecho de que las masas negativas son inestables y se requieren esta singularidad para la estabilidad.

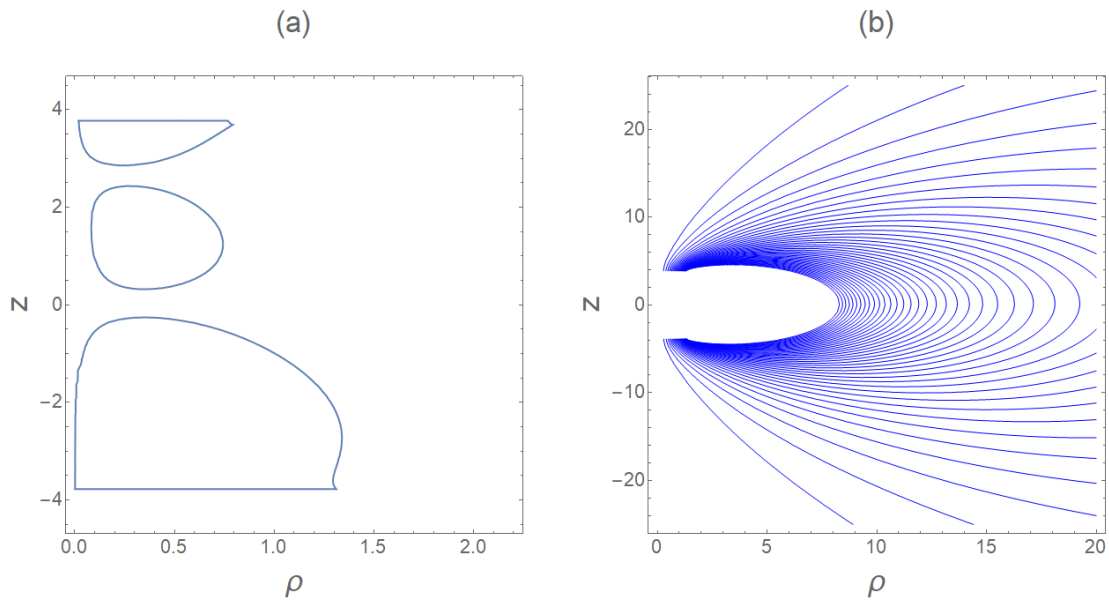


Figura 4.5: **Caso HEC:** (a) Superficie de límite estacionario y (b) líneas de campo magnético para el caso hiperextremo complejo con los parámetros  $m = 4$ ,  $a = 0.7$ ,  $k = 0.3$ ,  $q = 1.3$  y  $b = 1$ . La SLS muestra un comportamiento particular y asimétrico, mientras que las LCM prácticamente presentan la antisimetría, lo cual puede ser debido a la que la intensidad de momento dipolar magnético  $b$  es pequeña comparada con la masa de la solución. No se desarrollan singularidades de anillo.



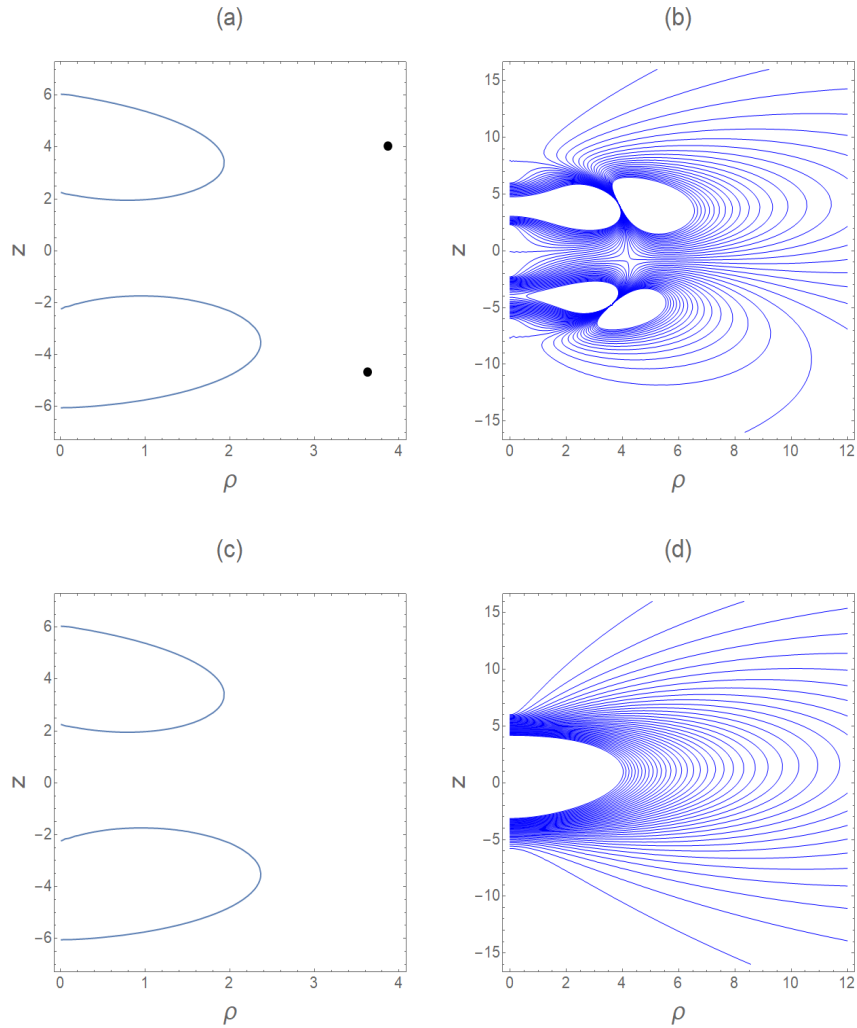


Figura 4.6: **Cambio  $m \rightarrow -m$  – SE:** SLS y LCM con  $a = 1.5$ ,  $k = 4$ ,  $q = 2$  y  $b = 3.2$  fijos. Con  $m = -3.9$  en (a) y (b) y  $m = 3.9$  en (c) y (d) se obtienen dos casos SE con raíces  $\alpha_i$  reales e idénticas en ambos casos. En general, como todos los parámetros de la solución entran como su cuadrado, las raíces son las mismas al hacer el cambio  $x \rightarrow -x$  y viceversa, siendo  $x$  cualquiera de los cinco parámetros. Ambos casos mostrados son asimétricos respecto a  $\rho$ . El cambio  $m \rightarrow -m$  no afecta a las SLS, ya que quedan iguales antes y después del cambio, pero las LCM cambian en gran manera. La masa negativa genera asimetrías más notables en las LCM. Se desarrollan dos  $S$  en  $(\rho \approx 3.87, z \approx 4.05)$  y en  $(\rho \approx 3.63, z \approx -4.69)$ , por lo que también son asimétricas respecto a  $\rho$  y se encuentran fuera de las SLS. Por otro lado, la masa positiva genera LCM que tienden a recuperar la antisimetría a medida que  $m$  aumenta y no presenta singularidad de anillo.

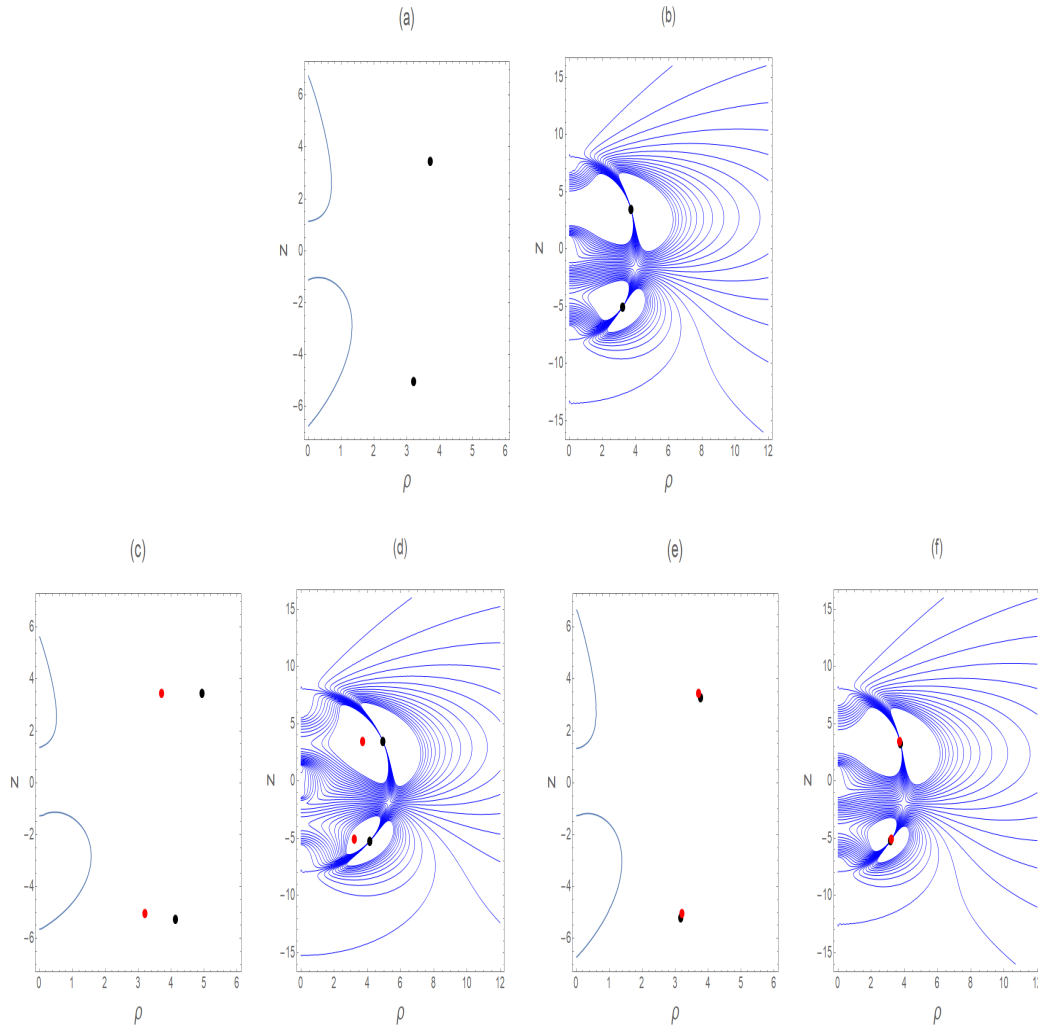


Figura 4.7: **Evolución de singularidades con  $q$  y  $b$  – SE:** SLS y LCM para  $m = -4$ ,  $a = 0.6$  y  $k = 4$  fijos, y se varían  $q$  y  $b$ . Todos los casos son SE. En (a) y (b) se usa  $q = 2$  y  $b = 3$  y, como hay masa negativa, se forman  $S$  en  $(\rho \approx 3.71, z \approx 3.46)$  y  $(\rho \approx 3.20, z \approx 5.05)$ . En (c) y (d) se usa  $q = 2.7$ , diferente al valor en (a) y (b), y las  $S$  se localizan en  $(\rho \approx 4.93, z \approx 3.44)$  y  $(\rho \approx 4.13, z \approx 5.26)$ , mientras que en (e) y (f) lo que se cambia es a  $b = 3.7$  y las  $S$  están en  $(\rho \approx 3.76, z \approx 3.27)$  y  $(\rho \approx 3.16, z \approx 5.20)$ . Estas  $S$  se muestran en (c)-(f) de color negro, y en rojo se muestran las  $S$  del caso en (a) y (b). Las  $S$  pueden ser localizadas entre los huecos que hay en las LCM, como se puede ver en (b), (d) y (f). Se nota que  $q$  recorre  $S$  a lo largo del eje  $\rho$  considerablemente, pero no cambia mucho en  $z$ , mientras que el cambio de  $b$  no afecta de gran manera la localización de  $S$ . Todos los parámetros de la solución afectan a la localización de la singularidad. Para las configuraciones HEI y HEC también se desarrollan dos singularidades, una en  $z > 0$  y la otra en  $z < 0$ .

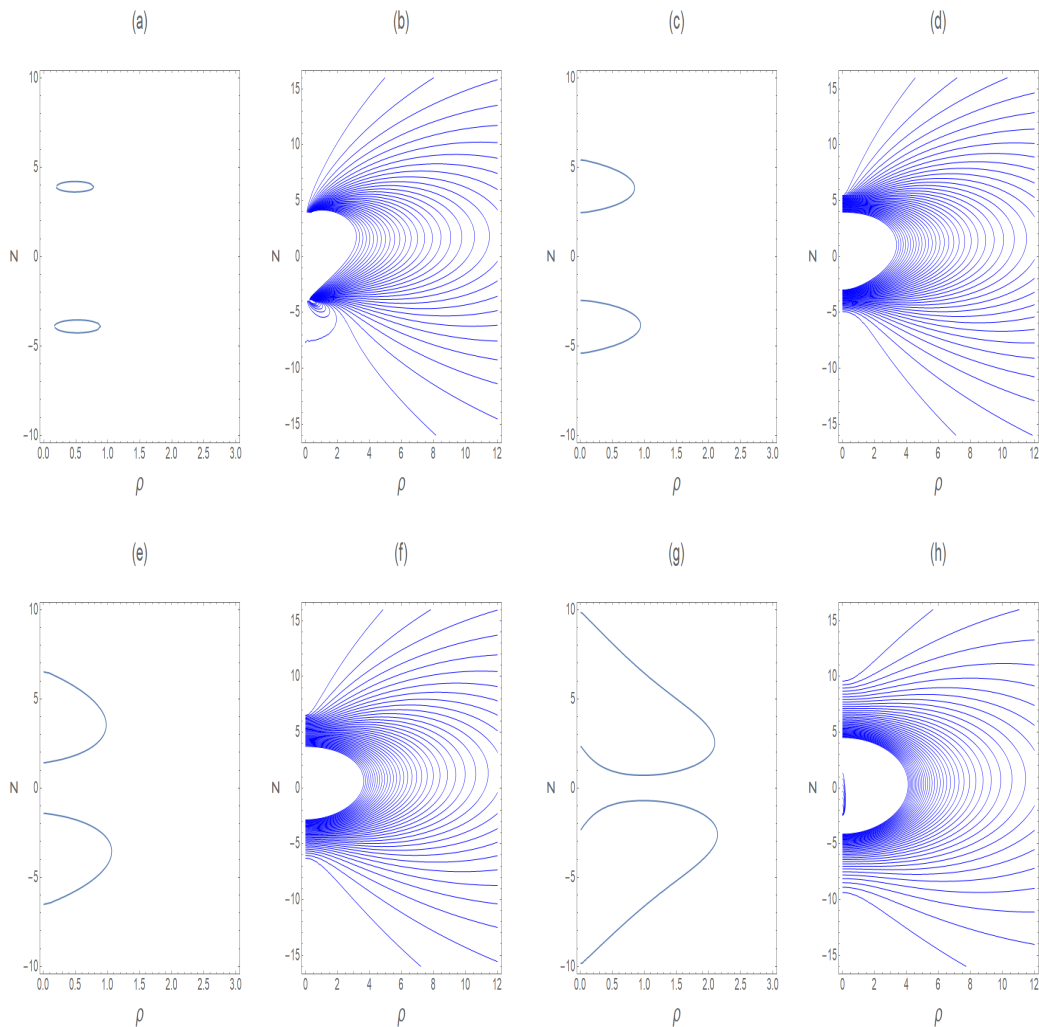


Figura 4.8: **Evolución de  $m$  – HEC  $\rightarrow$  SE:** Se muestran las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $a = 0.8$ ,  $k = 4$ ,  $q = 0.9$  y  $b = 1.1$  y la evolución del parámetro  $m$ . En (a) y (b) con  $m = 1.2$  se tiene un caso HEC. Con  $m = 2$  se pasa a un caso SE como se muestra en (c) y (d). Para pasar de HEC a SE,  $d$  cambió de ser imaginario a ser real. Al seguir aumentando  $m$  se aprecia como las fuentes se van alargando a lo largo del eje  $z$ , como se muestra en (e) y (f) con  $m = 3$  y más aún en  $m = 6.2$  en (g) y (h). Se nota también como las SLS y LCM van recuperando la antisimetría ecuatorial a medida que  $m$  incrementa. No se presentan singularidades de anillos.

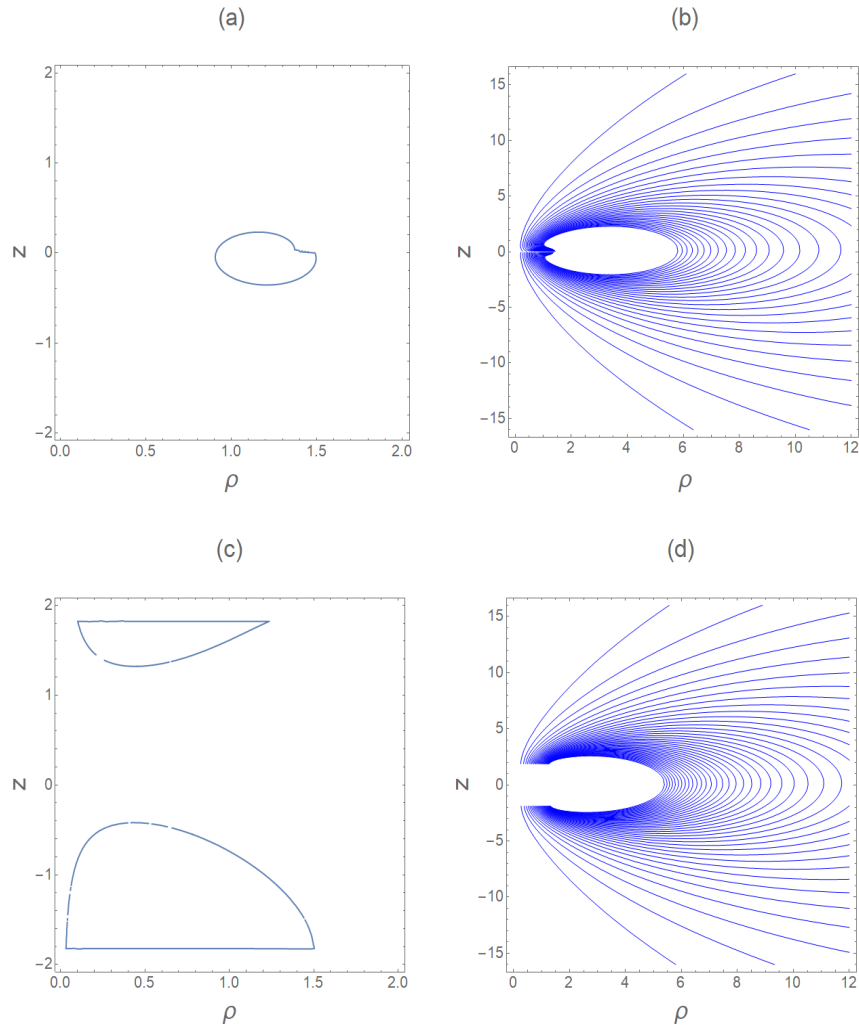


Figura 4.9: **Evolución de  $m$  – HEI  $\rightarrow$  HEC: SLS y LCM** para los parámetros fijos  $a = 0.6$ ,  $k = 0.3$ ,  $q = 1.3$  y  $b = 1$  y variando el parámetro  $m$ . En (a) y (b) se utiliza  $m = 1$  y se tiene un caso hiperextremo con raíces imaginarias y  $d \in \mathbb{R}$ , por lo que las fuentes se encuentran a lo largo del eje  $\rho$ . Al aumentar el parámetro de masa  $m$ , las fuentes se van juntando hacia el eje  $z$  y el argumento de la raíz de  $d$  se hace más pequeño en  $\mathbb{R}$  hasta llegar a cero, eventualmente tomando valores negativos, por lo que  $d$  toma valores imaginarios (por la definición de  $d$  en (3.5), imaginarios positivos). Cuando  $d \in \mathcal{I}$ , las fuentes pasan a tener una configuración HEC con raíces complejas, lo que se muestra con  $m = 2.2$  en (c) y (d). Las SLS en (a) y (c) no muestran simetría ecuatorial, mientras que las LCM en (b) son prácticamente simétricas respecto al eje  $\rho$  y en (d) esta antisimetría ecuatorial es más evidente. No se desarrollan singularidades de anillo. Si se sigue aumentando la masa  $m > 2.2$ , las fuentes se separan cada vez más sobre el eje  $z$  y comienzan a mostrar el comportamiento de Fig 4.5, donde eventualmente la superficie central desaparecerá al seguir incrementando  $m$ .

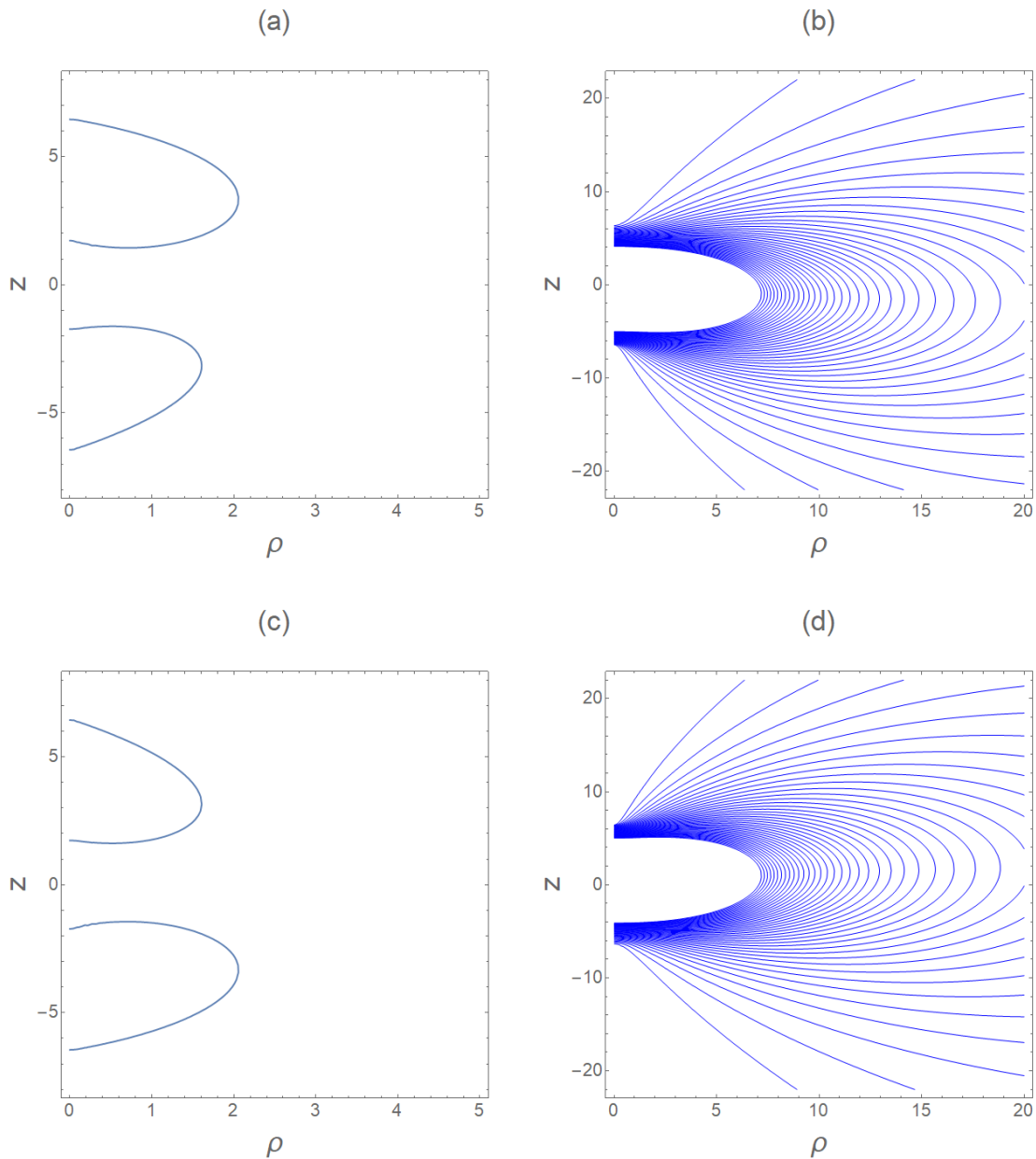


Figura 4.10: **Cambio  $a \rightarrow -a$  – SE:** Se muestran las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $m = 4$ ,  $k = 4$ ,  $q = 2$  y  $b = 3$ . Utilizando  $a = -1.2$  en (a) y (b) y  $a = 1.2$  en (c) y (d) obtenemos dos casos subextremos con raíces reales idénticas en ambos casos. Las SLS y LCM presentan una reflexión respecto al eje  $\rho$  al cambiar el parámetro  $-a \rightarrow a$  y no muestran la antisimetría. Ninguno de los casos desarrolla singularidad de anillo.

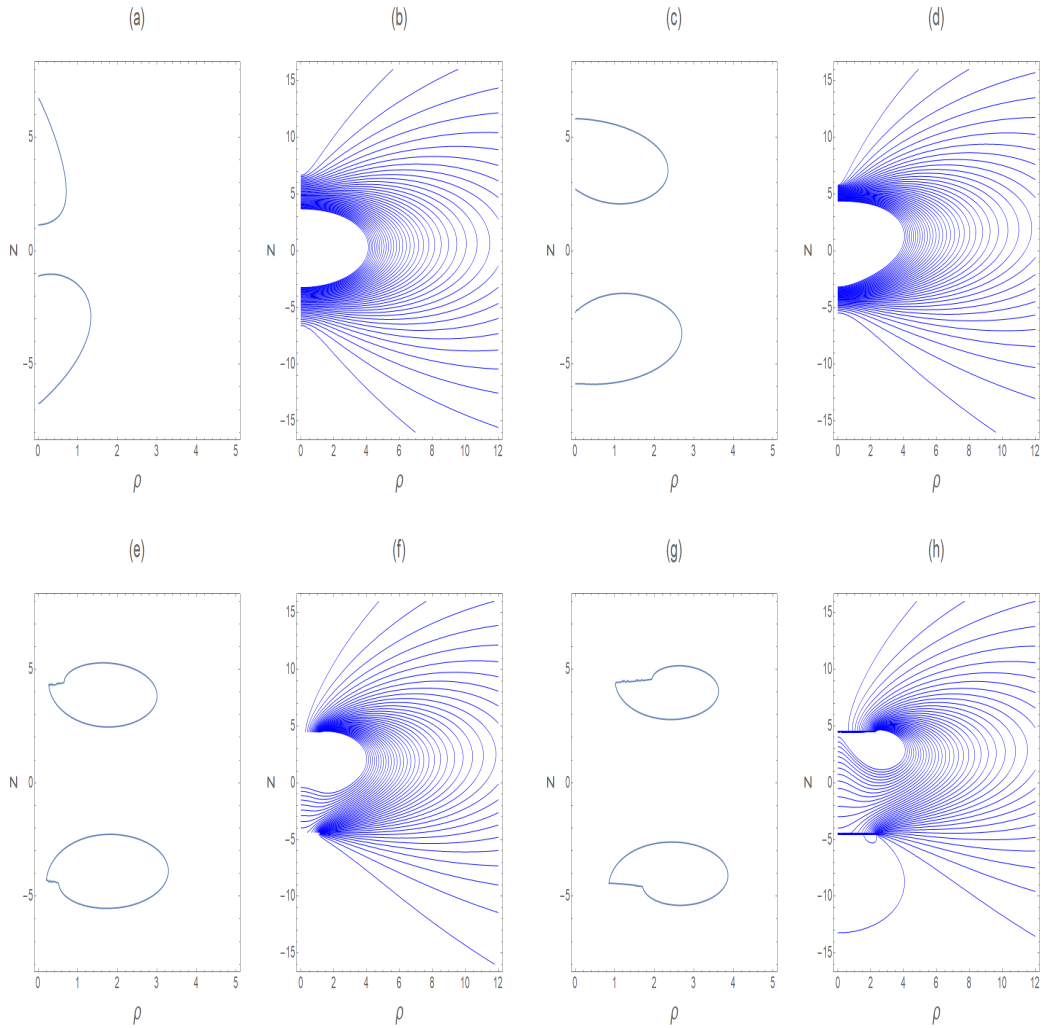


Figura 4.11: **Evolución de  $a$  – SE  $\rightarrow$  HEC: SLS y LCM** para los casos con parámetros fijos  $m = 4$ ,  $k = 4$ ,  $q = 2$  y  $b = 3$ , evolucionando el parámetro  $a$ . En (a) y (b) se tiene un caso SE y se utiliza  $a = 0.6$ . Las SLS son asimétricas ecuatorialmente y las LCM muestran antisimetría. Cuando  $a$  aumenta, e.g.,  $a = 1.8$  mostrado en (c) y (d), se continúa en SE, pero las SLS parecen recuperar simetría mientras que las LCM se vuelven asimétricas. Incrementando  $a$ ,  $d$  pasa de los reales a los complejos, como se muestra en (e) y (f) con  $a = 2.4$ , donde se trata un caso HEC. En (g) y (h) con  $a = 3$  se puede notar cómo, en el caso HEC, el incrementar  $a$  separa cada vez más las SLS eje  $z$  y alarga las fuentes, lo cual se puede ver por los valores de las raíces. Además, el comportamiento en HEC de este caso es consistente con el hecho de que  $k^2 + m^2 > q^2$ , lo cual viene de los límites calculados. Las LCM se vuelven más asimétricas con el aumento de  $a$ . No se presentan singularidades de anillo.

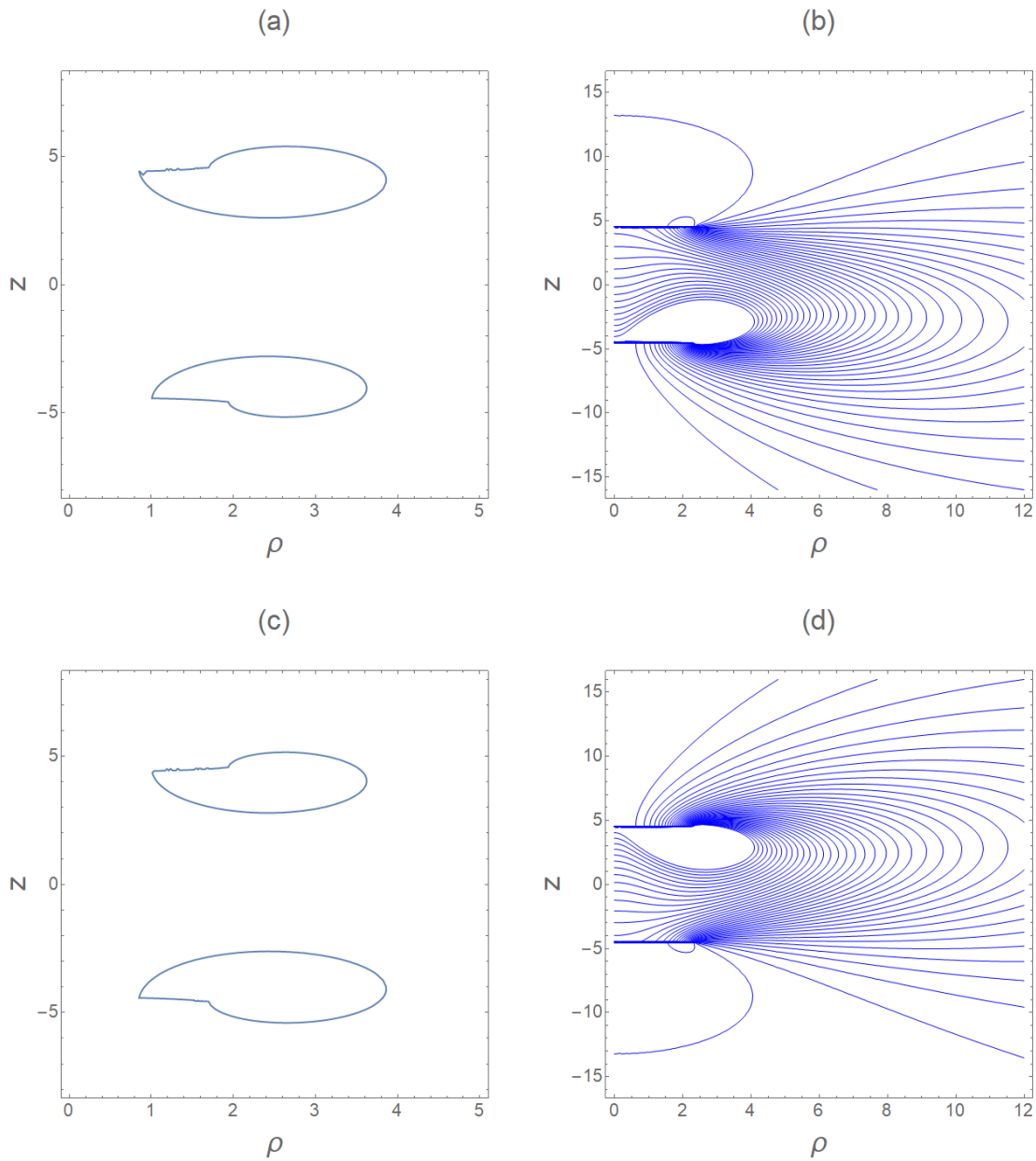


Figura 4.12: **Cambio  $k \rightarrow -k$  – HEC:** Se muestran las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $m = 4$ ,  $a = 3$ ,  $q = 2$  y  $b = 3$ . Con  $k = -4$  en (a) y (b) y  $k = 4$  en (c) y (d), obtenemos dos casos hiperextremos con raíces  $\alpha_i$  complejas. Notamos que se tienen SLS y LCM asimétricas respecto a  $\rho$ , por lo que no son una solución que presente la antisimetría ecuatorial de la solución BM original. Al hacer el cambio  $k \rightarrow -k$ , ambas gráficas son reflejadas respecto a  $\rho$ . En ningún caso se desarrolla singularidad de anillo.

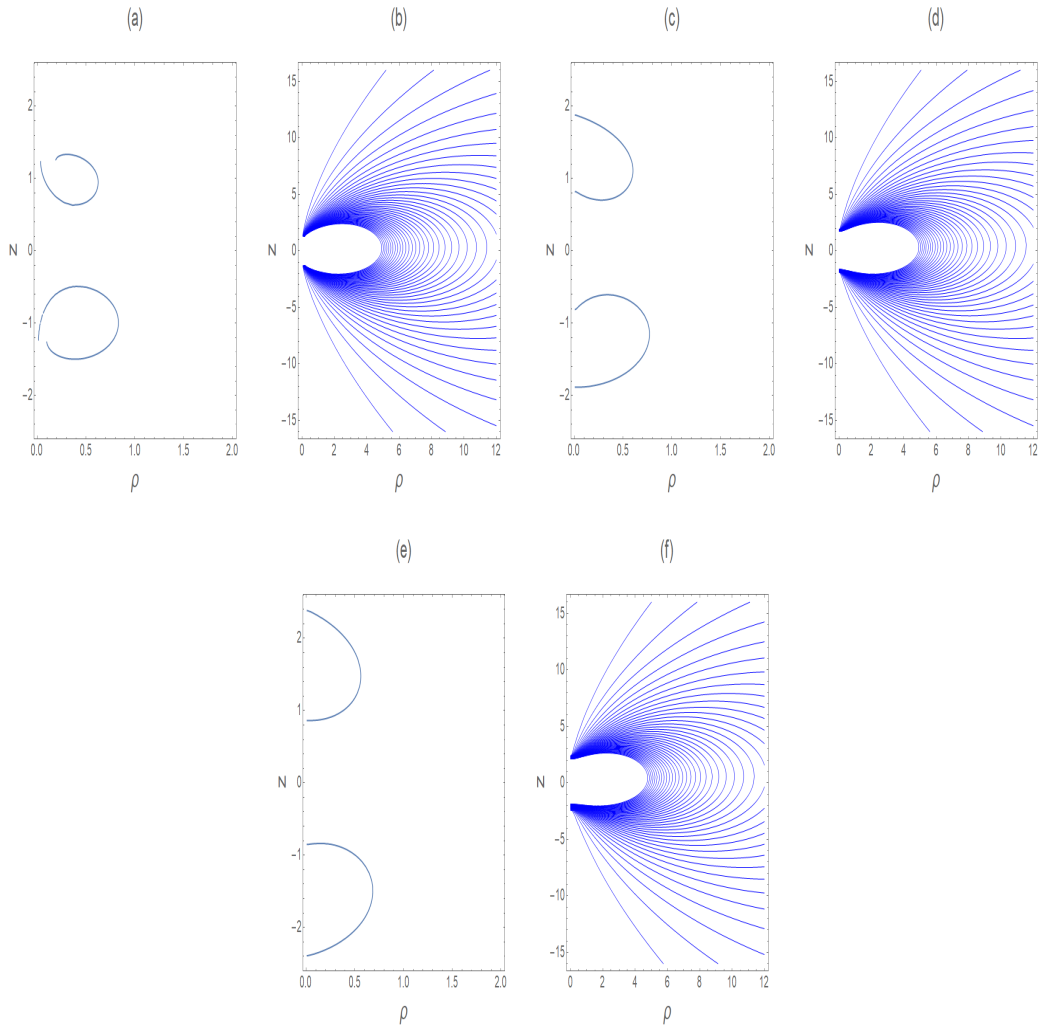


Figura 4.13: **Evolución de  $k$  – HEC  $\rightarrow$  SE:** Se muestran las SLS y LCM para los parámetros fijos  $m = 1.2$ ,  $a = 0.5$ ,  $q = 0.5$  y  $b = 0.5$  y la evolución del parámetro  $k$ . En (a) y (b) se utiliza  $k = 0.9$  y la configuración es HEC con  $\delta > 0$  y  $d \in \mathcal{I}$ . Al aumentar  $k$ ,  $\delta$  incrementa y  $d$  disminuye en  $\mathcal{I}$  hasta llegar a los reales. En (c) y (d) se muestra esto, donde  $k = 1.2$  y se pasa al caso SE con  $d \in \mathbb{R}$ . El seguir incrementando  $k$  alarga y separa las fuentes sobre el eje  $z$ , como se ve en el caso  $k = 1.6$  en (e) y (f). De estas gráficas se puede visualizar cómo es que  $k$  se interpreta como la mitad de la distancia coordinada entre las fuentes ya que es aproximadamente la distancia entre el punto medio de las fuentes fijadas por las raíces y el origen, pero esta distancia no es fija y se puede cambiar variando alguno de los cuatro parámetros. En SE y en HEC,  $k$  se relaciona con la distancia entre el punto medio de la fuente y el origen a lo largo del eje  $z$ , en HEI se relaciona con la distancia a lo largo del eje  $\rho$ . No se desarrollan singularidades de anillo.



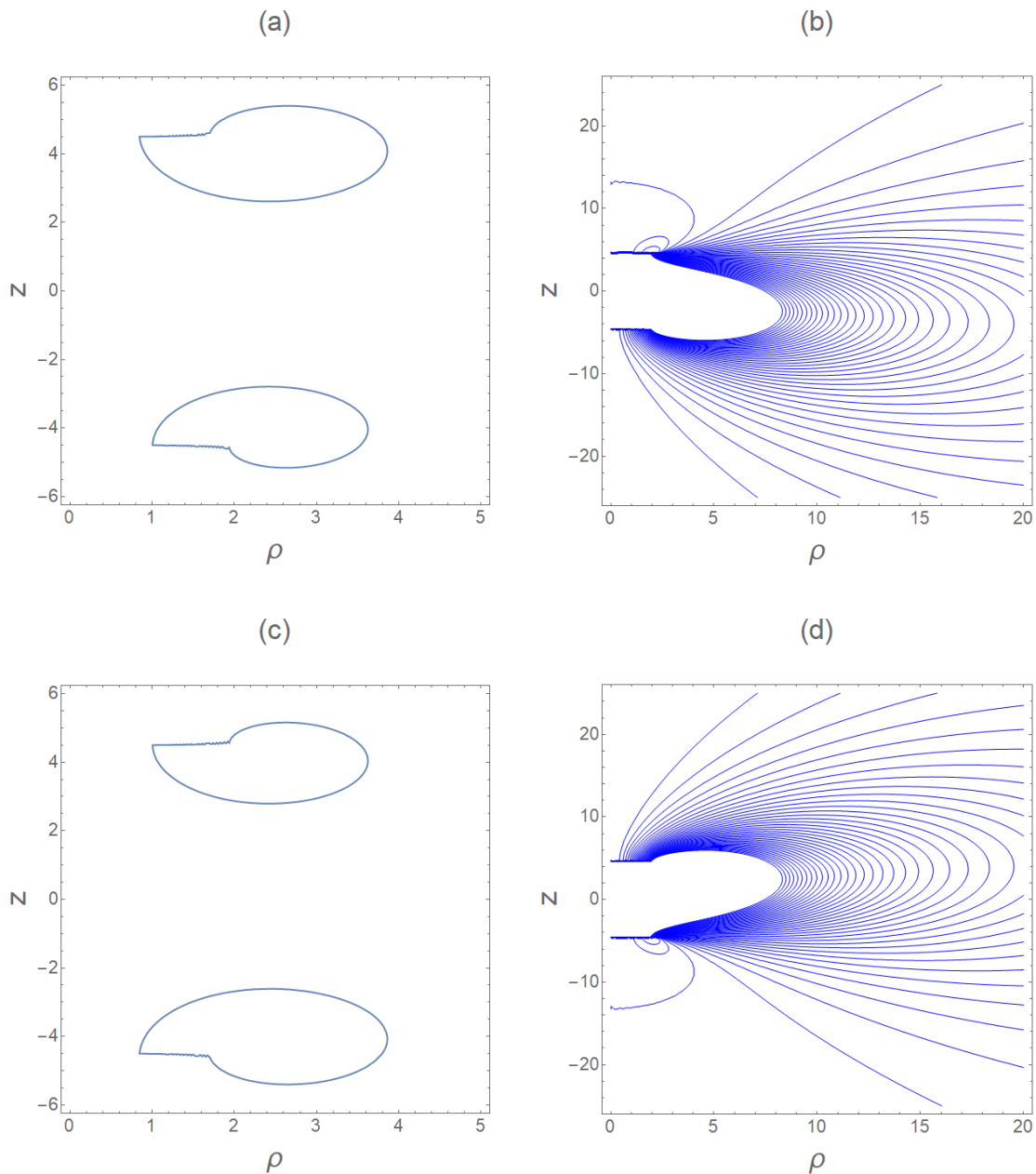


Figura 4.14: **Cambio  $q \rightarrow -q$  – HEC:** Se muestran las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $m = 4$ ,  $a = 3$ ,  $k = 4$  y  $b = 3$ . Utilizando  $q = -2$  en (a) y (b) y  $q = 2$  en (c) y (d) obtenemos dos casos hiperextremos con raíces complejas idénticas en ambos casos. Las SLS y LCM presentan una reflexión respecto al eje  $\rho$  al cambiar el parámetro  $-q \rightarrow q$  y no muestran la antisimetría. Ninguno de los casos desarrolla singularidad de anillo.

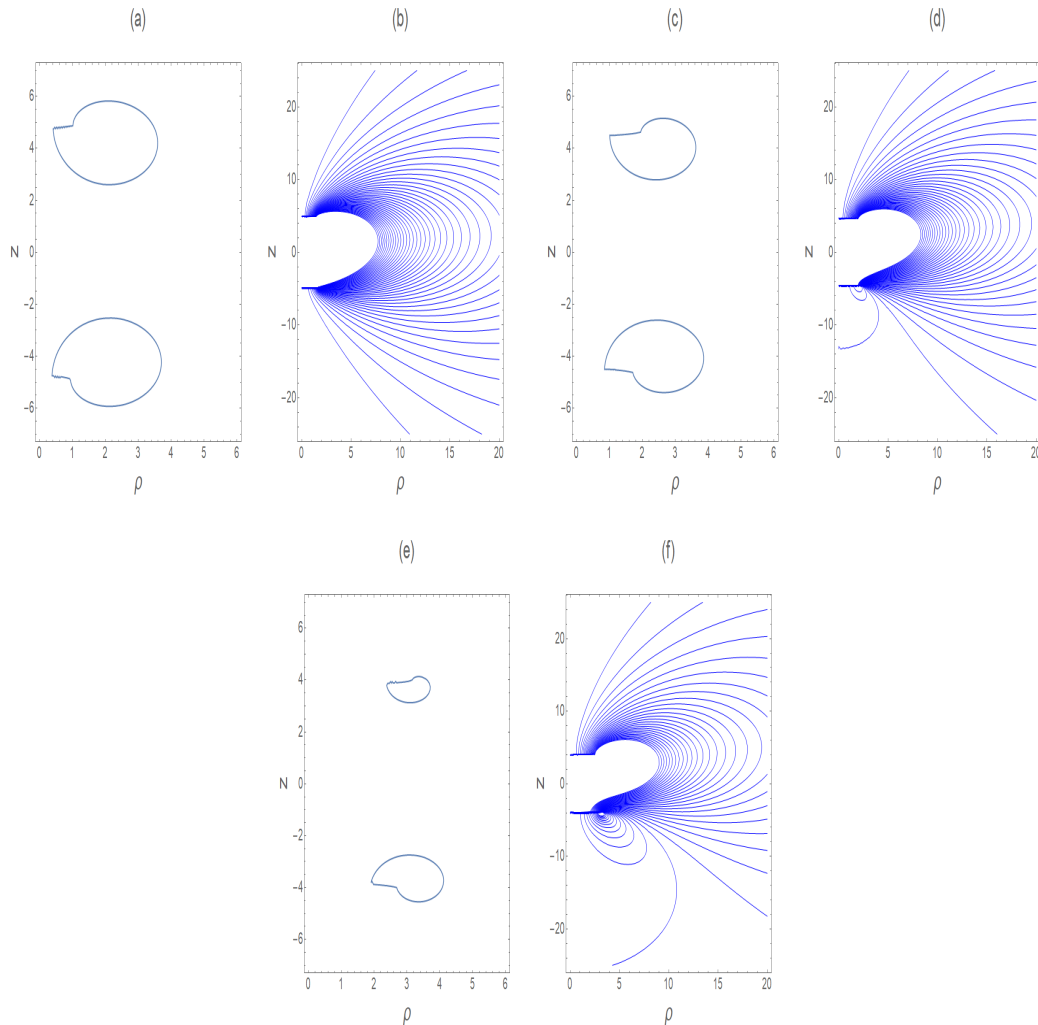


Figura 4.15: **Evolución de  $q$  – HEC** Se muestran las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $m = 4$ ,  $a = 3$ ,  $k = 4$  y  $b = 3$  y la evolución del parámetro  $q$  para este caso hiperextremo con raíces complejas. Se utiliza  $q = 1$  para (a) y (b),  $q = 2$  en (c) y (d) y  $q = 3$  para (e) y (f). Las SLS se vuelven más asimétricas a medida que el valor de la carga eléctrica  $q$  se vuelve más grande, ya que la parte de arriba se vuelve más pequeña más rápidamente que la parte de la SLS debajo del eje ecuatorial. Además, las SLS se separan cada vez más del eje de simetría  $z$ . Las LCM se vuelven más asimétricas a medida que  $q$  aumenta. No se desarrollan singularidades de anillo.

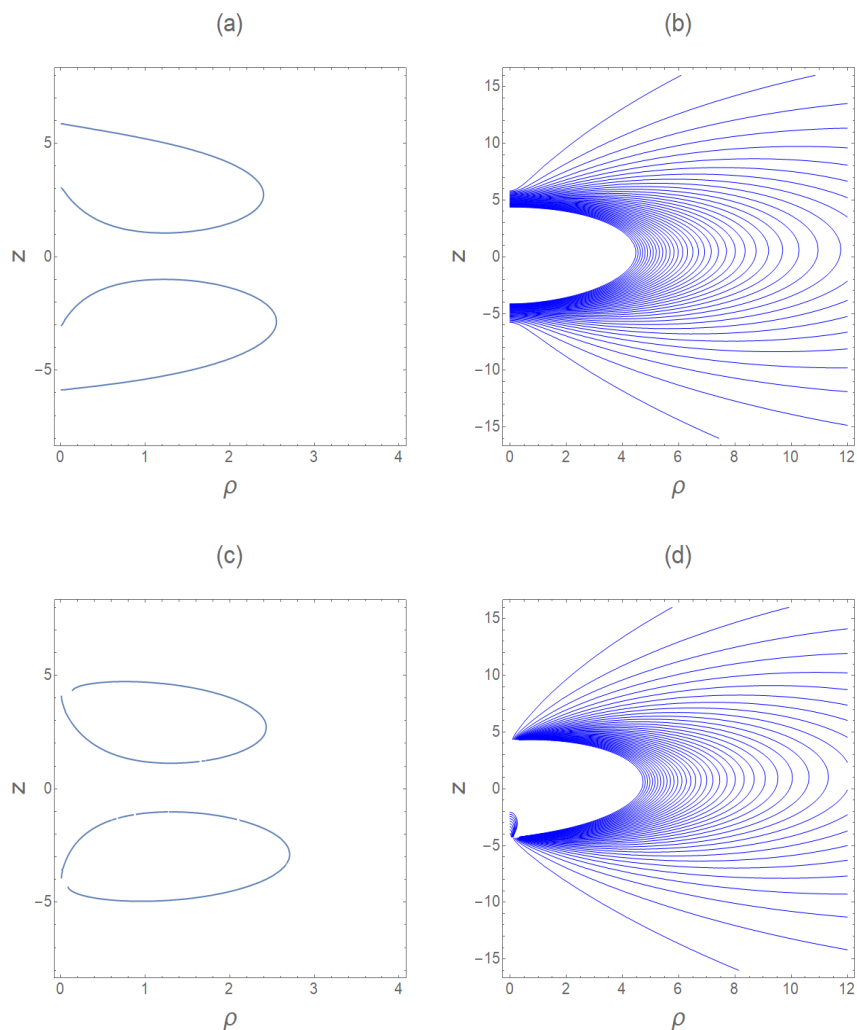


Figura 4.16: **Evolución de  $q$  – SE  $\rightarrow$  HEC  $\rightarrow$  HEI:** SLS y LCM que muestran la evolución del parámetro  $q$ , con los parámetros fijos  $m = 4.5$ ,  $a = 1.5$ ,  $k = 2.5$  y  $b = 2.4$ . En (a) y (b) se utiliza  $q = 1$ , por lo que es un caso SE con  $\delta > 0$  y  $d > 0$ . Aumentando  $q$  como en (c) y (d) con  $q = 1.72$ ,  $d$  pasa a ser imaginario y  $\delta$  comienza a decrementar, por lo que se tiene una configuración HEC.  $d$  aumenta en  $\mathcal{I}$  hasta  $d \approx 18.4i$  con  $q \approx 3.66$  y  $\delta$  toma valores negativos. Si se sigue aumentando  $q$ ,  $d$  comenzará a decrementar en  $\mathcal{I}$  hasta llegar a cero y pasar a los reales. En  $q \approx 4.7$  la configuración pasa a ser HEI con  $\delta < 0$  y  $d > 0$ , donde las SLS tendrán la forma de (a) en Fig 4.9 y las LCM serán asimétricas respecto al eje  $\rho$ . Se observa el comportamiento límite cuando  $q \rightarrow \infty$ , i.e., una configuración HEI, y también que en este ejemplo se pasa por los tres tipos de configuraciones posibles. No se desarrollan singularidades de anillo.

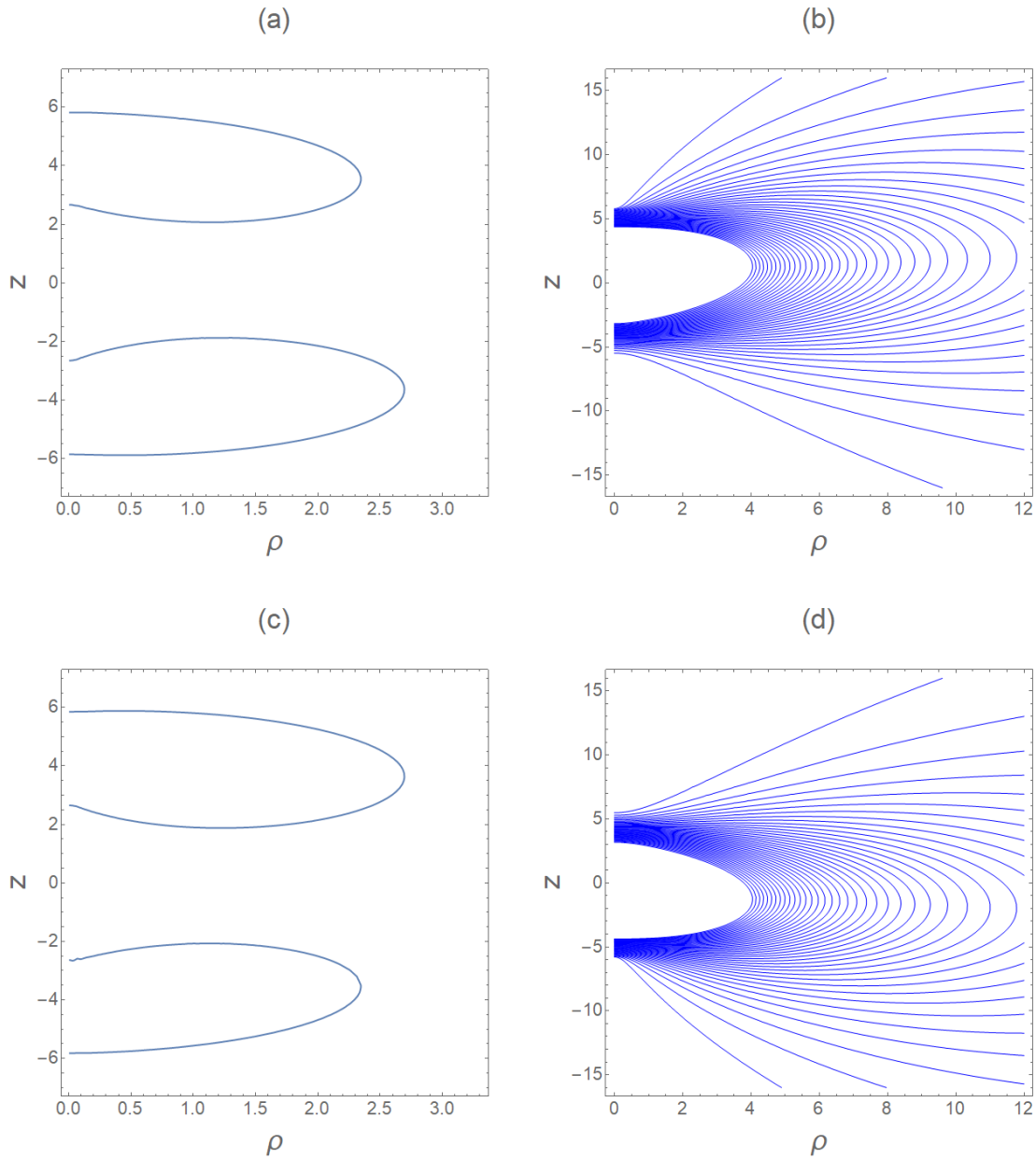


Figura 4.17: **Cambio  $b \rightarrow -b$  – SE:** Se muestran las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $m = 4$ ,  $a = 1.8$ ,  $k = 4$  y  $q = 2$ . Se muestran los casos (a) y (b), donde  $b = -3$ , además de (c) y (d), donde  $b = 3$ . Ambos casos son subextremos con raíces reales. Las SLS y LCM son asimétricas. El cambio  $b \rightarrow -b$  hace que las SLS y LCM sean reflejadas sobre el eje ecuatorial. No se desarrollan singularidades de anillo.

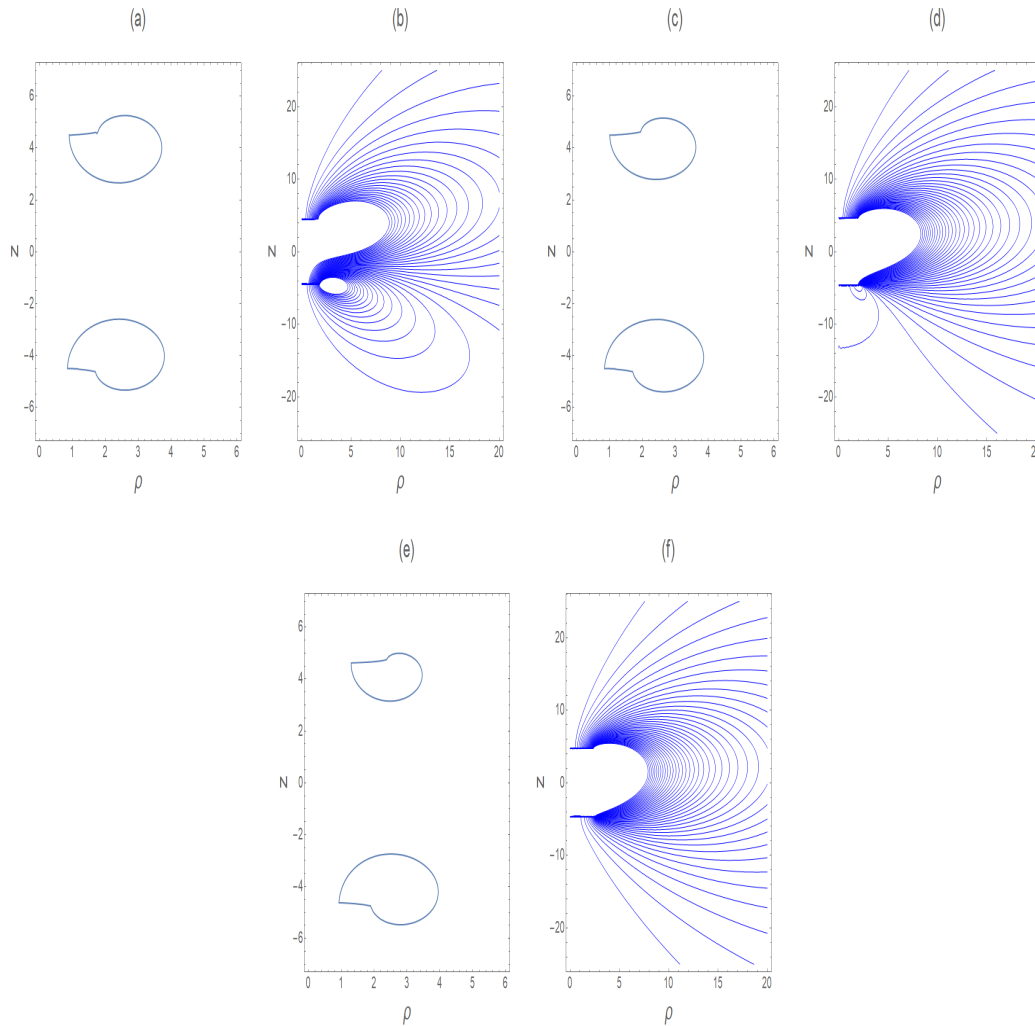


Figura 4.18: **Evolución de  $b$  – HEC:** Se muestra la evolución de las SLS y LCM utilizando los parámetros fijos  $m = 4$ ,  $a = 3$ ,  $k = 4$  y  $q = 2$  y variando el parámetro  $b$  para este caso hiperextremo con raíces complejas. Se utiliza  $b = 1$  para (a) y (b),  $b = 3$  en (c) y (d) y  $b = 6$  para (e) y (f). Las SLS se vuelven más asimétricas a medida que el momento dipolar magnético  $b$  aumenta, mientras que, en contraste con el caso de la Fig. 4.15, las LCM parecen recuperar la antisimetría ecuatorial cuando este parámetro crece. No se desarrollan singularidades de anillos.

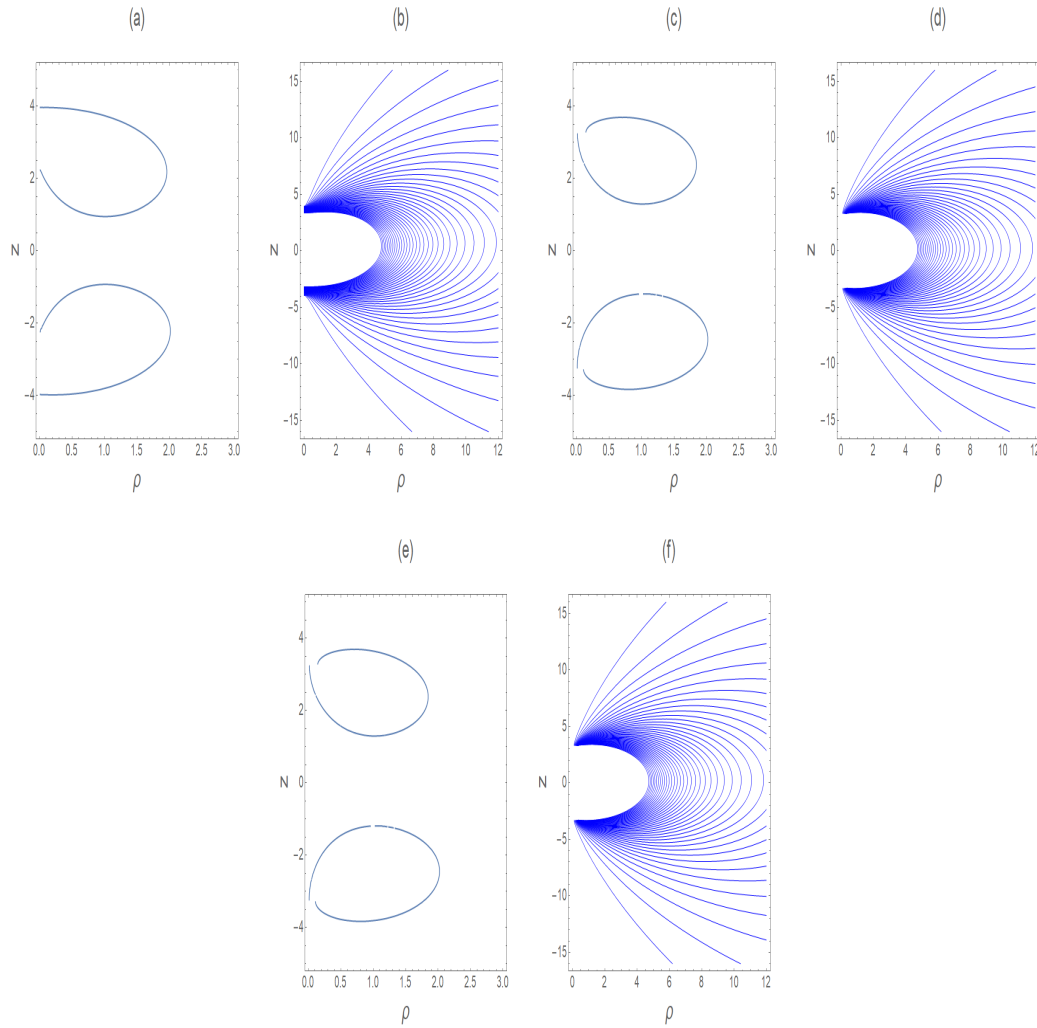


Figura 4.19: **Evolución de  $b$  – SE  $\rightarrow$  HEC: SLS y LCM** para la solución con parámetros fijos  $m = 3$ ,  $a = 1.4$ ,  $k = 2$  y  $q = 0.5$ , variando el parámetro  $b$ . En (a) y (b) se tiene  $b = 0.2$  y un caso SE. Las LCM se muestran asimétricas. En (c) y (d) se incrementa  $b$  a  $b = 1$  y el caso continúa en SE con  $\delta > 0$  y  $d > 0$ . Las LCM tienden a presentarse más simétricas con  $b$  mayores. Aumentando a  $b = 3$ , mostrado en (e) y (f), se pasa a una configuración HEC con  $\delta > 0$  y  $d$  decreta y pasa a los imaginarios, por lo que  $d \in \mathcal{I}$ .  $b$  no altera el valor de  $\delta$ , por lo que el parámetro que cambia con el incremento de  $b$  es  $d$ , pasando de los reales a los imaginarios. Si se continúa aumentando  $b$ , se mantendrá una configuración HEC y  $d$  seguirá creciendo en  $\mathcal{I}$ , lo cual es consistente con el límite para  $b$  obtenido anteriormente. Mientras que las LCM parecen recuperar la antisimetría cuando  $b$  aumenta, las SLS tienden a volverse asimétricas ante el aumento de este parámetro. No se presentan singularidades de anillo.

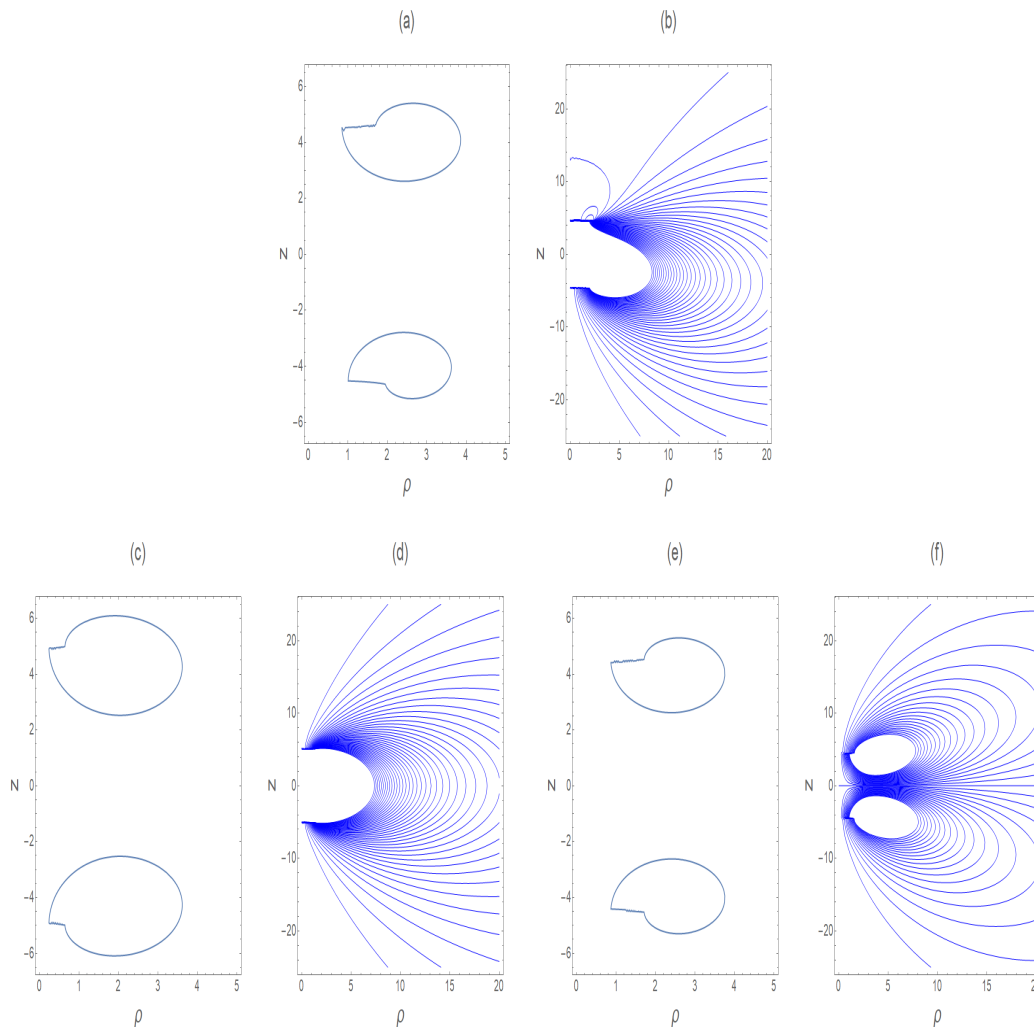


Figura 4.20: **Casos  $q = 0$  y  $b = 0$  – HEC:** Se presenta un caso HEC en (a) y (b) con los parámetros  $m = 4$ ,  $a = 3$ ,  $k = 4$ ,  $q = -2$  y  $b = 3$ . Se puede ver que las SLS y LCM son asimétricas respecto al eje  $\rho$ . Como se muestra en (c) y (d), al cambiar  $q$ , en el caso límite cuando  $q = 0$ , la solución prácticamente recupera la antisimetría ecuatorial, mostrando SLS y LCM simétricas respecto al eje  $\rho$ . Por otro lado, si se cambia solo  $b$ , como en (e) y (f) con  $b = 0$ , la solución se reduce a la solución BM sin dipolo magnético. Las gráficas difieren mínimamente, por lo que se considera que la antisimetría ecuatorial se hace presente nuevamente. No se desarrollan singularidades de anillo.

Con base al análisis de las Figuras 4.3-4.20, a continuación, se presentan algunas conclusiones acerca del papel de los parámetros  $m, a, k, q, b$  de la solución 5 paramétrica de este capítulo:

- Las SLS y LCM son en general asimétricas respecto al eje ecuatorial, lo cual es debido a que se trata con una solución que no muestra antisimetría ni simetría ecuatorial.
- Al variar los parámetros de la solución, es posible pasar de configuraciones HEC a SE y viceversa, HEI a HEC y viceversa, pero no de SE a HEI ni HEI a SE. Esto se puede observar en la forma de las raíces  $\alpha_{\pm}$  al hacer uso de las definiciones de  $\delta$  y  $d$ , cuyo comportamiento fija las fuentes.
- Hacer el cambio de  $x \rightarrow -x$  en las SLS, con  $x$  siendo cualquiera de los 5 parámetros de la solución excepto  $m$ , es equivalente a una reflexión respecto al eje  $\rho$ . En las LCM pasa lo mismo, con la excepción del caso del cambio  $m \rightarrow -m$ , donde se presentan  $S$  en los casos  $m < 0$  y las LCM son distintas al caso de  $m > 0$ . De la misma manera, cuando se hace el cambio  $m \rightarrow -m$  en las SLS, estas permanecen iguales y no presentan una reflexión respecto al eje ecuatorial.
- Las masas positivas no desarrollan singularidades de anillo en ningún caso. En cambio, las masas negativas si desarrollan  $S$  en todas las configuraciones. En estos casos se desarrollan dos  $S$ , una en  $z > 0$  y otra en  $z < 0$ , con coordenadas en  $\rho$  y  $z$  distintas y fuera de las SLS.
  - La localización de  $S$  depende de todos los parámetros de la solución, ya que, si se cambia uno,  $S$  cambia de posición. El parámetro de carga eléctrica  $q$  es el que más afecta a la localización de  $S$ , mientras que el variar  $b$  no cambia en gran medida la posición de  $S$ .
- Incrementar la magnitud del parámetro de masa  $m$  de cada una de las fuentes da como resultado SLS más grandes. Las LCM tienden a recuperar la antisimetría ecuatorial ante el aumento de  $m$ .
- En el caso de los parámetros  $m, a$  y  $k$ , la configuración de la solución en el límite cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  depende de la relación que cumplen los otros parámetros de la solución, pero en el caso cuando  $q \rightarrow \pm\infty$ , se tiende a una configuración HEI, mientras que cuando  $b \rightarrow \pm\infty$ , la configuración que se obtiene es HEC.
- El aumento del parámetro de rotación  $a$  separa las SLS del eje  $z$ , mientras que las LCM se vuelven más asimétricas a medida que aumenta  $a$ .



- Valores grandes del dipolo magnético  $b$  dan como resultado SLS y LCM que presentan antisimetría ecuatorial, mientras que utilizar valores grandes de la carga eléctrica  $q$ , da como resultado una configuración con SLS y LCM asimétricas. En ambos casos, las SLS se vuelven más pequeñas y alejadas del eje  $z$ . La antisimetría se recupera en los casos con  $q = 0$  o  $b = 0$ , por lo que se considera que el hecho de que se presenten configuraciones antisimétricas o asimétricas, es un efecto de la interacción entre  $q$  y  $b$ .

#### 4.2.5. Momentos multipolares

En adición al análisis de esta métrica de 5 parámetros, en esta subsección se presenta otra característica importante de esta solución. Se muestran los primeros momentos multipolares de masa, momento angular, eléctricos y magnéticos, los cuales se calculan de la misma manera que como se calcularon los de la Subsección 3.2.4. Los momentos obtenidos son:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 2m, & M_1 &= 0, & M_2 &= 2m(k^2 - m^2 - a^2), & M_3 &= 0, \\
 M_4 &= 2m[a^4 + (k^2 - m^2)^2 + 2a^2(m^2 - 3k^2)], \\
 J_0 &= J_1 = 0, & J_2 &= 4akm, & J_3 &= 0, & J_4 &= 8akm(k^2 - m^2 - a^2), \\
 E_0 &= 2q, & E_1 &= 0, & E_2 &= 2q(k^2 - m^2 - a^2), & E_3 &= -4abk, \\
 E_4 &= 2q[a^4 + (k^2 - m^2)^2 + 2a^2(m^2 - 3k^2)], \\
 B_0 &= 0, & B_1 &= 2b, & B_2 &= 4akq, & B_3 &= 2b(k^2 - m^2 - a^2), \\
 B_4 &= 8akq(k^2 - m^2 - a^2).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Hay que notar que se llega al resultado de que la masa total  $M_0$  y la carga eléctrica total del sistema  $E_0$  son  $2m$  y  $2q$  respectivamente, lo cual es consistente con el hecho de que se modelan dos masas cargadas idénticas y la contrarrotación de los cuerpos se observa en el hecho de que el momento angular total del sistema es cero ( $J_1 = 0$ ). La carga magnética neta también es cero ( $B_0 = 0$ ) por tratar con dos fuentes con la misma carga magnética pero opuestas, por lo que se anulan. Así, el primer momento multipolar magnético no nulo del sistema es el momento dipolar magnético total  $B_1$ , el cual es  $2b$  y es creado por las cargas magnéticas opuestas de cada fuente.

En esta solución, los momentos multipolares impares de masa  $M_{2k+1}$  son cero, pero los momentos eléctricos  $E_{2k+1}$  impares, no son todos nulos. Además, ni los momentos pares de rotación  $J_{2k}$ , ni los momentos pares magnéticos  $B_{2k}$  son nulos, como lo deberían de ser para una configuración con simetría ecuatorial. Más bien, los momentos de rotación nulos son los impares,  $J_{2k+1}$ . En los momentos eléctricos y los magnéticos no se cumple que se anulen todos los multipolos pares o todos los impares. Solo se cumple una de las cuatro condiciones para la simetría ecuatorial. Además, comparando los momentos multipolares con los de la solución

BM en [23], donde todos los momentos impares son nulos, se puede verificar una vez más que la generalización con dipolo magnético de la solución BM no posee comportamiento de simetría, ni de antisimetría ecuatorial.

En (4.18) se observa hay una cantidad recurrente, la cual será denotada como  $\eta$ , tal que:

$$\eta \equiv k^2 - m^2 - a^2, \quad (4.19)$$

y se podría interpretar como algún tipo de deformación. La implementación de esta cantidad  $\eta$  en (4.18) permite escribir los momentos multipolares de la siguiente manera más compacta:

$$\begin{aligned} M_0 &= 2m, & M_1 &= 0, & M_2 &= 2m\eta, & M_3 &= 0, & M_4 &= 2m(\eta^2 - 4a^2k^2), \\ J_0 &= J_1 = 0, & J_2 &= 4akm, & J_3 &= 0, & J_4 &= 8akm\eta, \\ E_0 &= 2q, & E_1 &= 0, & E_2 &= 2q\eta, & E_3 &= -4abk, & E_4 &= 2q(\eta^2 - 4a^2k^2), \\ B_0 &= 0, & B_1 &= 2b, & B_2 &= 4akq, & B_3 &= 2b\eta, & B_4 &= 8akq\eta. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En (4.18) se han calculado los primeros cinco momentos multipolares relativistas HP, los cuales se reescribieron en (4.20). Estos momentos también se pueden expresar en su representación como las cantidades  $m_n$  y  $q_n$  de la solución. Para esto, es relevante recordar que las primeras cuatro cantidades  $m_n$  de los momentos HP, coinciden con las primeros multipolos complejos GH  $P_n = M_n + iJ_n$ . Con esto se puede reescribir (4.18) en su representación en momentos multipolares de HP  $m_n$  y  $q_n$  como sigue:

$$\begin{aligned} m_0 &= 2m, & m_1 &= 0, & m_2 &= 2m(\eta + 2iak), & m_3 &= 0, & m_4 &= 2m[(\eta^2 - 4a^2k^2) + 4iak\eta], \\ q_0 &= 2q, & q_1 &= 2ib, & q_2 &= 2q(\eta + 2iak), & q_3 &= 2ib\eta, & q_4 &= 2q[(\eta^2 - 4a^2k^2) + 4iak\eta]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas

A continuación, se resumen los resultados más importantes presentado en el presente trabajo de tesis:

1. La solución para una masa deformada, rotante y magnetizada de [35] con aplicaciones astrofísicas, ya que presumiblemente es un buen modelo para una estrella de neutrones, se presenta como el estado final del colapso de dos agujeros negros y es capaz de modelar casos subextremos, superextremos y casos mixtos subextremos-hiperextremos. Se demostró que se puede hacer una extensión más general de esta solución que permita estados de masas complejas conjugadas iniciales, lo cual enriquece el espacio accesible de parámetros.
2. Además de extender el espacio de parámetros para la solución del Capítulo 3 a los valores complejos, la extensión agrega configuraciones de estados finales del tipo hiperextremo de manera no trivial y donde las fuentes no están restringidas a localizarse a lo largo del eje de simetría ni del ecuatorial como en la solución original. Con esto se obtiene una solución con el rango más general posible para el modelado de una estrella de neutrones.
3. En el análisis de las SLS y LCM de la primera solución presentada, se llega al resultado de que hay un régimen de valores para los cuatro parámetros donde, el cambiar los parámetros de masa total  $M$  y momento cuadrupolar de masa por unidad de masa  $q$ , no afecta la localización de las singularidades calculadas.
4. Se construyó, por medio de la aplicación de la solución 2-solitónica obtenida por el método de Sibgatullin, la solución que generaliza la presentada por Bretón y Manko en [23] al considerar momento dipolar magnético  $b$  arbitrario. Las expresiones para los potenciales son más complejas al considerar el dipolo magnético, pero se reducen a la solución BM como se esperaba.

5. El dipolo magnético en la generalización rompe la antisimetría ecuatorial de la solución BM, aunque la solución sea simétrica en las raíces  $\alpha_i$ , lo cual se puede apreciar en las superficies de límite estacionario y las líneas de campo magnético, donde si el valor del dipolo  $b$  es grande, las gráficas no muestran ningún tipo de simetría, mientras que para valores pequeños de  $b$  se recupera la antisimetría ecuatorial.
6. En la segunda solución se presentan tres configuraciones posibles a las que el sistema es accesible y se excluye que se puedan presentar configuraciones tipo SEHE, i.e., con un constituyente subextremo y uno hiperextremo.
7. Se hizo un análisis en las superficies de límite estacionario, líneas de campo magnético y singularidades de ambas soluciones para indagar en cómo afectan los distintos valores de los parámetros a las soluciones y se llegó a ciertas conclusiones sobre la física de la solución y su relación con los parámetros para cada caso.
8. En ninguna de las dos soluciones presentadas se encontraron casos donde se pueda pasar directamente de tener una configuración SE a tener configuración HE (o viceversa) al variar un sólo parámetro.

Al presentar dos soluciones exactas, una con aplicación astrofísica y la otra con detalles físicos relevantes, el trabajo que queda hacer es estudiar las propiedades físicas de estas soluciones de sistemas binarios, como el problema de geodésicas, cantidades conservadas en estas ecuaciones y aspectos termodinámicos de las soluciones. En la primera solución de una masa deformada rotante magnetizada, hay que estudiar los casos donde el cálculo de la singularidad falla, además de profundizar sobre el resultado de que se encuentra un régimen donde al variar los parámetros  $M$  y  $q$  de la solución, no afecta la localización de la singularidad. Por otro lado, la generalización con dipolo magnético de la solución BM muestra efectos interesantes en la interacción del campo electromagnético, ya que muestra asimetrías que aún no se han estudiado, por lo que el análisis acerca de esto también es trabajo que queda por hacer para esta solución.

# Bibliografía

- [1] A. Einstein, “Die feldgleichungen der gravitation”, *Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse* **25** (1915): 844-847.
- [2] K. Schwarzschild, “Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie”, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin (1916): 189-196.
- [3] H. Weyl, “Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen”, *Annalen der Physik* **364** (1919): 185-188.
- [4] R. Bach, H. Weyl, “Neue lösungen der Einsteinschen gravitationsgleichungen”, *Mathematische Zeitschrift* **13** (1922): 134-145.
- [5] A. Papapetrou, “Eine rotationssymmetrische Lösung in der Allgemeinen Relativitätstheorie”, *Annalen der Physik* **12** (1953): 309-315.
- [6] E. Newman, L. Tamburino, T. Unti, “Empty-space generalization of the Schwarzschild metric”, *Journal of Mathematical Physics* **4** (1963): 915-923.
- [7] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics”, *Physical Review Letters* **11** (1963): 237-238.
- [8] F. J. Ernst, “New formulation of the axially symmetric gravitational field problem”, *Physical Review* **167** (1968): 1175-1178.
- [9] F. J. Ernst, “New formulation of the axially symmetric gravitational field problem II”, *Physical Review* **168** (1968): 1415-1417.
- [10] R. Geroch, "Multipole moments. I. Flat space", *Journal of Mathematical Physics* **11** (1970): 1955-1961.
- [11] R. Geroch, “Multipole moments. II. Curved space”, *Journal of Mathematical Physics* **11** (1970): 2580-2588.

- [12] W. Kinnersley, “Generation of stationary Einstein-Maxwell fields”, *Journal of Mathematical Physics* **14** (1973): 651-653.
- [13] R. O. Hansen, “Multipole moments of stationary space-times”, *Journal of Mathematical Physics* **15** (1974): 46-52.
- [14] C. Hoenselaers, “Multipole moments of electrostatic space-times”, *Progress of Theoretical Physics* **55** (1976): 466-470.
- [15] D. S. Guo, F. J. Ernst, “Electrovac generalization of Neugebauer’s  $N = 2$  solution of the Einstein vacuum field equations”, *Journal of Mathematical Physics* **23** (1982): 1359-1363.
- [16] W. Simon, “The multipole expansion of stationary Einstein–Maxwell fields”, *Journal of Mathematical Physics* **25** (1984): 1035-1038.
- [17] G. Fodor, C. Hoenselaers, Z. Perjés, “Multipole moments of axisymmetric systems in relativity”, *Journal of Mathematical Physics* **30** (1989): 2252-2257.
- [18] C. Hoenselaers, Z. Perjés, “Multipole moments of axisymmetric electrovacuum space-times”, *Classical and Quantum Gravity* **7** (1990): 1819-1825.
- [19] V. S. Manko, N. R. Sibgatullin, “Construction of exact solutions of the Einstein-Maxwell equations corresponding to a given behaviour of the Ernst potentials on the symmetry axis”, *Classical and Quantum Gravity* **10** (1993): 1383-1404.
- [20] V. S. Manko, J. Martín, E. Ruiz, “Extended family of the electrovac two-soliton solutions for the Einstein-Maxwell equations”, *Physical Review D* **51** (1995): 4187-4191.
- [21] E. Ruiz, V. S. Manko, J. Martín, “Extended N-soliton solution of the Einstein-Maxwell equations”, *Physical Review D* **51** (1995): 4192-4197.
- [22] V. S. Manko, J. Martín, E. Ruiz, “Six-parameter solution of the Einstein–Maxwell equations possessing equatorial symmetry”, *Journal of Mathematical Physics* **36** (1995): 3063-3073.
- [23] N. Bretón, V. S. Manko, “A binary system of ‘antisymmetric’ Kerr-Newman masses”, *Classical and Quantum Gravity* **12** (1995): 1969-1975.
- [24] V. S. Manko, E. Ruiz, “Extended multi-soliton solutions of the Einstein field equations”, *Classical and Quantum Gravity* **15** (1998): 2007-2016.

- [25] V. S. Manko, E. Ruiz, J. D. Sanabria-Gómez, “Extended multi-soliton solutions of the Einstein field equations: II. Two comments on the existence of equilibrium states”, *Classical and Quantum Gravity* **17** (2000): 3881-3898.
- [26] T. P. Sotiriou, T. A. Apostolatos, “Corrections and comments on the multipole moments of axisymmetric electrovacuum spacetimes”, *Classical and Quantum Gravity* **21** (2004): 5727-5733.
- [27] V. S. Manko, E. Ruiz, “Physical interpretation of the NUT family of solutions”, *Classical and Quantum Gravity* **22** (2005): 3555-3560.
- [28] T. Bäckdahl, H. Magnus, “Explicit multipole moments of stationary axisymmetric spacetimes”, *Classical and Quantum Gravity* **22** (2005): 3585-3594.
- [29] L. A. Pachón, J. A. Rueda, J. D. Sanabria-Gómez, “Realistic exact solution for the exterior field of a rotating neutron star”, *Physical Review D* **73** (2006): 104038 (12 pp.).
- [30] F. J. Ernst, V.S. Manko, E. Ruiz, “Equatorial symmetry/antisymmetry of stationary axisymmetric electrovac spacetimes”, *Classical and Quantum Gravity* **23** (2006): 4945-4952.
- [31] J. Sod-Hoffs, E. D. Rodchenko, “On the properties of the Ernst–Manko–Ruiz equatorially antisymmetric solutions”, *Classical and Quantum Gravity* **24** (2007): 4617-4629.
- [32] I. Cabrera-Munguía, “Binary system of unequal counterrotating Kerr-Newman sources”, *Physical Review D* **91** (2016): 044005 (12 pp.).
- [33] E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso *et al.*, “Testing general relativity with present and future astrophysical observations”, *Classical and Quantum Gravity* **32** (2015): 243001 (179 pp.).
- [34] V. S. Manko, E. Ruiz, “Exterior field of slowly and rapidly rotating neutron stars: rehabilitating spacetime metrics involving hyperextreme objects”, *Physical Review D* **93** (2016): 104051 (11 pp.).
- [35] V. S. Manko, E. Ruiz, “Simple metric for a magnetized, spinning, deformed mass”, *Physical Review D* **97** (2018): 104016 (8 pp.).
- [36] I. M. Mejía, V. S. Manko, E. Ruiz, “Simplest static and stationary vacuum quadrupolar metrics”, *Physical Review D* **100** (2019): 124021 (8 pp.).
- [37] V. S. Manko, I. M. Mejía, E. Ruiz, “Metric of a rotating charged magnetized sphere”, *Physics Letters B* **803** (2020): 135286 (6 pp.).

- [38] R. M. Wald, “General Relativity”, *Chicago, University of Chicago Press*, 1984.
- [39] N. R. Sibgatullin, “Oscillations and Waves in Strong Gravitational and Electromagnetic Fields”, Moscow: *Nauka*, 1984, en ruso y Berlin: *Springer*, 1991, en ingles.
- [40] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, “Exact Solutions of Einstein’s Field Equations”, *Cambridge University Press*, 2003.
- [41] J. B. Griffiths, J. Podolský, “Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity”. *Cambridge University Press*, 2009.