



Centro de Investigación y de Estudios  
Avanzados del  
Instituto Politécnico Nacional

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Factores de forma electromagnéticos del  
pion y el kaón y su dependencia en los  
métodos de regularización tiempo propio y  
corte 4 dimensional en el modelo Nambu-  
Jona-Lasinio.

**Tesis que presenta**

**Gilberto Ricardo Robles Delgado**

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Jesús Javier Cobos Martínez**



Factores de forma electromagnéticos  
del pion y el kaón y su dependencia  
en los métodos de regularización  
tiempo propio y corte 4 dimensional  
en el modelo Nambu–Jona-Lasinio

CINVESTAV  
IPN

Agosto 2020



*A mis padres  
y  
hermanos*



# Agradecimientos

*La amistad duplica las alegrías y divide  
las angustias por la mitad.*

Francis Bacon

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca que me fue otorgada.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) por su enorme esfuerzo de tener programas de posgrado que compiten a nivel internacional.

Al Dr. J. Javier Cobos Martínez por su enorme atención y apoyo.

Al Dr. Alfredo Raya Montaña y al Dr. Pablo Roig Garcés por sus comentarios y aportaciones a este trabajo.

Al Mtro. Norberto Báez por sus consejos y ayuda para organizar el tiempo de trabajo.

A mis amigos Karen Aguilar, Oscar Muñoz y José Nicasio, por su ayuda técnica y además por su amistad que fue el apoyo fundamental para realizar este trabajo.





# Resumen

El estudio de los factores de forma electromagnéticos de los hadrones ha sido un enorme esfuerzo desde los 60's en la parte teórica y experimental. En especial los factores de forma del pion y el kaón tienen un gran interés por estar asociados a modos de Goldstone producidos por el rompimiento espontáneo de la simetría quiral. Por esta razón el modelo Nambu–Jona-Lasinio (NJL) es muy útil debido a que es construido basándose en la simetría quiral. Sin embargo, es un modelo no renormalizable.

Este trabajo se divide en seis capítulos. El primer capítulo es una introducción. En el segundo se revisan aspectos fundamentales de la cromodinámica cuántica, como por ejemplo la simetría quiral, el confinamiento de color y la libertad asintótica. En el tercer capítulo se revisa aspectos generales del modelo Nambu–Jona-Lasinio. En el capítulo cuatro se explican la masa dinámica, la masa de los mesones, la constante de acoplamiento y la constante de decaimiento que surgen en el modelo NJL para el pion y el kaón, además se muestra dichas observables en diferentes métodos de regularización. El desarrollo de los factores de forma electromagnéticos del pion y el kaón en el modelo NJL está en el capítulo cinco y se desarrolla su sensibilidad a los métodos de regularización. Finalmente el capítulo seis incluye las conclusiones de este trabajo.



# Abstract

The study of the electromagnetic form factors of hadrons has been an enormous effort since the 1960s in the theoretical and experimental part. Especially the pion and kaon form factors are of great interest because they are associated with Goldstone modes produced by the spontaneous breaking of chiral symmetry. For this reason the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model is very useful because it is built based on chiral symmetry. However, it is a non-renormalizable model.

This work is divided into six chapters. The first chapter is an introduction. In the second, fundamental aspects of quantum chromodynamics are reviewed, such as chiral symmetry, color confinement and asymptotic freedom. The third chapter reviews general aspects of the Nambu - Jona-Lasinio model. Chapter four explains the dynamic mass, the mass of the mesons, the coupling constant and the decay constant that arise in the NJL model for pion and kaon, and also shows these observables in different regularization methods. The development of the electromagnetic form factors of pion and kaon in the NJL model is in Chapter Five and their sensitivity to regularization methods is developed. Finally, chapter six includes the conclusions of this work.



# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Abstract</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Cromodinámica cuántica</b>	<b>3</b>
2.1. Modelo de quarks . . . . .	3
2.1.1. Eightfold way . . . . .	4
2.1.2. Modelo de quarks . . . . .	5
2.2. Cromodinámica cuántica . . . . .	7
2.2.1. Lagrangiano de la cromodinámica cuántica . . . . .	8
2.2.2. Libertad asintótica . . . . .	10
2.2.3. Confinamiento de color . . . . .	11
2.3. Simetría quiral y su rompimiento espontáneo . . . . .	13
<b>3. El modelo Nambu–Jona-Lasinio</b>	<b>15</b>
3.1. Transformación de Bogoliubov–Valatin . . . . .	16
3.2. El lagrangiano Nambu–Jona-Lasinio . . . . .	18
<b>4. El pion y el kaón en el modelo NJL</b>	<b>21</b>
4.1. Masa dinámica y ecuación de gap . . . . .	21
4.2. Masas del pion y del kaón . . . . .	26
4.3. Constante de acoplamiento pion-quark . . . . .	27
4.4. Constante de decaimiento . . . . .	28
4.5. Resultados numéricos . . . . .	29
<b>5. Factores de forma electromagnéticos del pion y el kaón</b>	<b>35</b>
5.1. Factores de forma electromagnéticos . . . . .	35
5.1.1. Resultados numéricos . . . . .	40

5.2. Factores de forma electromagnéticos, vértice vestido . . . . .	46
5.2.1. Resultados numéricos . . . . .	47
5.3. Radio de carga . . . . .	54
<b>6. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>59</b>
A.1. Ángulo sólido en d dimensiones . . . . .	59
A.2. Propiedades de las matrices gamma . . . . .	60
A.3. $\Pi_P^{ij}(p^2)$ . . . . .	60
A.4. Constante de decaimiento . . . . .	63
A.5. Parametrización de Feynman . . . . .	65
A.5.1. Parametrización de Feynman de $I_{ij}^{(1)}(p^2)$ . . . . .	66
A.5.2. Parametrización de Feynman de $I_{ij}^{(2)}(p^2)$ . . . . .	67
A.5.3. Parametrización de Feynman de $I_i^{(3)\mu}(p^2)$ . . . . .	68
A.5.4. Parametrización de Feynman de $I_{ij}^{(4)\mu}(p^2)$ . . . . .	69
A.6. Regularización en tiempo propio . . . . .	71
A.6.1. $I_{ij}^{(1)}(p^2)$ . . . . .	71
A.6.2. $I_{ij}^{(2)}(p^2)$ . . . . .	72
A.6.3. $L_i^{(3)}$ . . . . .	72
A.6.4. $L_{ij}^{(4)\mu}(p^2)$ . . . . .	72
A.7. Corte en 4 dimensiones . . . . .	72
A.7.1. $I_{ij}^{(1)}(p^2)$ . . . . .	72
A.7.2. $I_{ij}^{(2)}(p^2)$ . . . . .	74
A.7.3. $L_i^{(3)}$ . . . . .	75
A.7.4. $L_{ij}^{(4)}(p^2)$ . . . . .	75
A.8. Regularización Pauli–Villars . . . . .	76
A.8.1. $I_{ij}^{(1)}(p^2)$ . . . . .	76
A.8.2. $I_{ij}^{(2)}(p^2)$ . . . . .	77
A.8.3. $L_i^{(3)}$ . . . . .	78
A.8.4. $L_{ij}^{(4)}(p^2)$ . . . . .	78
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Índice de figuras

2.1. Octete de los bariones más ligeros. El protón y el neutrón se encuentran en la parte superior. . . . .	4
2.2. Octete de los mesones (pseudoscalares). El triplete de piones se encuentra en la línea horizontal $S = 0$ . Un arreglo similar existe para los mesones vectoriales. . . . .	5
2.3. Decuplete de los bariones. . . . .	6
2.4. Vértices fundamentales en QCD. El vértice quark–gluon está a la izquierda, los vértices de gluones son los dos restantes. . .	7
2.5. Compilación de datos del Particle Data Group [1] sobre el comportamiento de la constante de acoplo fuerte $\alpha_s$ con el momento $Q \propto 1/r$ . . . . .	12
4.1. Representación gráfica de la ecuación de gap para el modelo NJL. . . . .	22
4.2. Diagrama de Feynman para obtener la constante de decaimiento. Las dos líneas con la flecha representan un mesón pseudoscalar y la línea ondulada es un campo vectorial axial externo. . . . .	28
5.1. Representación de los factores de forma electromagnéticos para el kaón y el pion. El diagrama de Feynman de la izquierda representa el acoplamiento quark–fotón. El derecho el acoplamiento antiquark–fotón. El vértice es $\frac{1}{2}e \left( \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} + \lambda_3 \right) \gamma^\mu$ . . . . .	36
5.2. Factores de forma con vértice quark–fotón desnudo comparados con datos de Cornell Experiment, NA7 Collaboration, JLab $\pi$ Collaboration 2001 y JLab $\pi$ Collaboration 2008. . .	41
5.3. Factores de forma con vértice desnudo usando NJL en distintos esquemas de regularización junto con datos del CERN. . . . .	42
5.4. Se grafica $Q^2 F(Q^2)$ vs $Q^2$ comparado con datos de Cornell Experiment, NA7 Collaboration, JLab $\pi$ Collaboration 2001 y 2008. El vértice está desnudo. . . . .	43

5.5. Se grafica $Q^2 F(Q^2)$ vs $Q^2$ en diferentes esquemas de regularización. El vértice está desnudo. . . . .	44
5.6. El vértice quark-fotón que incluye los estados intermedios de los mesones vectoriales. El círculo sombreado grande es la solución de la ecuación Bethe–Salpeter, que representa el vértice quark-fotón. . . . .	46
5.7. Factores de forma del pión con vértice vestido comparados con datos de Cornell Experiment, NA7 Collaboration, JLab $\pi$ Collaboration 2001 y JLab $\pi$ Collaboration 2008. . . . .	49
5.8. Factores de forma del kaón con vértice vestido usando NJL en distintos esquemas de regularización junto con datos del CERN. . . . .	50
5.9. Se grafica $Q^2 F(Q^2)$ vs $Q^2$ para el pión comparado con datos de Cornell Experiment, NA7 Collaboration, JLab $\pi$ Collaboration 2001 y 2008. El vértice está vestido. . . . .	51
5.10. Se grafica $Q^2 F(Q^2)$ vs $Q^2$ para el kaón en diferentes esquemas de regularización. El vértice está vestido. . . . .	52



# Índice de Tablas

2.1. Algunas propiedades de los quarks que conforman la cromodinámica cuántica obtenidas de [1]. La carga está dada en unidades de la carga del positrón. . . . .	7
2.2. Bariones del decuplete . . . . .	11
2.3. Simetrías en cromodinámica cuántica . . . . .	14
3.1. $\beta$ y $t$ son los generadores de $SU(N_f)$ y $SU(N_C)$ , respectivamente. ADJ quiere decir representación adjunta. . . . .	18
4.1. Parámetros utilizados en la regularización tiempo propio (PT) obtenidos al fijar $M_u$ , $m_\pi$ , $m_K$ y $f_\pi$ . . . . .	30
4.2. Parámetros utilizados en el corte 4 dimensional (4D) obtenidos al fijar $M_u$ , $m_\pi$ , $m_K$ y $f_\pi$ . . . . .	31
4.3. Parámetros utilizados en la regularización Pauli–Villars (PV) obtenidos al fijar $M_u$ , $m_\pi$ , $m_K$ y $f_\pi$ . . . . .	31
4.4. Constantes de acoplamiento y de decaimiento usando regularización PT. . . . .	31
4.5. Constantes de acoplamiento y de decaimiento usando el corte 4 dimensional. . . . .	31
4.6. Constantes de acoplamiento y de decaimiento usando regularización PV. . . . .	32
4.7. Masas obtenidas en el método de regularización tiempo propio. . . . .	32
4.8. Masas obtenidas en el corte 4 dimensional. . . . .	32
4.9. Masas obtenidas en el método de regularización Pauli–Villars. . . . .	32
5.1. Radio de carga en femtómetros en la regularización PT. . . . .	54
5.2. Radio de carga en femtómetros en corte 4 dimensional. . . . .	54



# Capítulo 1

## Introducción

*El universo no es solo más extraño de lo que pensamos, es también más extraño de lo que podemos pensar.*

Werner Heisenberg

El lagrangiano de la cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es el único que se conoce que cumple con simetría de gauge local  $SU_C(3)$ , invarianza de Lorentz, localidad y renormalizable en 4 dimensiones espacio tiempo. Es aquel que describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones. Una de las características que posee es la libertad asintótica. Aquella donde un tratamiento perturbativo es válido cuando se consideran cortas distancias o energías muy grandes. Cuando dicha condición no se cumple y se consideran energías pequeñas, la constante de acoplamiento se vuelve grande y fenómenos como el confinamiento de quarks se hace inviable de estudiar con métodos perturbativos.

El modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) es una teoría efectiva a bajas energías de QCD. Ella cumple con las mismas simetrías que QCD pero sin considerar a los gluones y solo se consideran interacciones entre quarks. En este modelo, la simetría quiral está rota espontáneamente ya que el valor de expectación en el vacío de un estado ligado quark-antiquark  $\langle q\bar{q} \rangle$  no es cero. Gracias a esta característica del modelo, la generación dinámica de masa de los quarks está incluida y es especialmente útil para estudiar a los mesones más ligeros ( $\pi$ ,  $K$  y  $\eta$ ).

Sin embargo, tiene como desventaja que no es un modelo renormalizable por lo que es necesario usar un esquema de regularización para poder usar el modelo NJL. Un esquema de regularización trata expresiones infinitas, divergentes mediante la introducción de un regulador. Entre las técnicas de regularización se encuentran regularización en tiempo propio, corte 4 dimensional y regularización Pauli–Villars.

Este trabajo se divide en seis capítulos. El primer capítulo es una intro-

ducción. En el segundo se revisan aspectos fundamentales de la cromodinámica cuántica como por ejemplo la simetría quiral, el confinamiento de color y la libertad asintótica. En el tercer capítulo se revisa aspectos generales del modelo Nambu–Jona-Lasinio, donde se muestra como se obtiene su lagrangiano. En el capítulo cuatro se explican diferentes observables para el pion y el kaón en diferentes métodos de regularización y se estudia su dependencia del esquema de regularización. El desarrollo de los factores de forma del pion y el kaón en el modelo NJL y su dependencia del esquema de regularización está en el capítulo cinco. Las conclusiones se incluyen en el capítulo seis.

## Capítulo 2

# Cromodinámica cuántica

*Lo que sabemos es una gota de agua; lo  
que ignoramos es el océano.*

Isaac Newton

**RESUMEN:** Se revisa el modelo de quarks desde una perspectiva histórica. Para la cromodinámica cuántica se revisa su lagrangiano. Se revisan diferentes propiedades únicas de la cromodinámica cuántica, como la libertad asintótica, el confinamiento de color y la simetría quiral.

### 2.1. Modelo de quarks

Para el año 1960 se habían descubierto una gran cantidad de mesones y bariones. Se conocían algunas de sus propiedades como masa, carga y extrañeza, sin embargo, poco más se conocía. El avance en la comprensión del mundo subnuclear llegó por las manos de Murray Gell-Mann.

Posteriormente se haría una analogía histórica en el siglo 19, época donde la tabla periódica fue ideada para clasificar la enorme cantidad de elementos que se descubrieron en dicho siglo. Fue pues Murray Gell-Mann el que trajo una “tabla periódica” a la física de partículas.

La idea de Gell-Mann (eightfold way) consistió en clasificar los hadrones respecto a su extrañeza y su carga. Lo que además le permitió predecir la existencia de un barión ( $\Omega^-$ ) con extrañeza  $-3$ , carga eléctrica  $-1$  (en unidades de la carga del positrón) y una masa cercana a los 1680 MeV (en unidades naturales). En 1964 se descubre dicha partícula con una masa de  $1686 \pm 12$  MeV en un grupo del acelerador de partículas de Brookhaven [2].

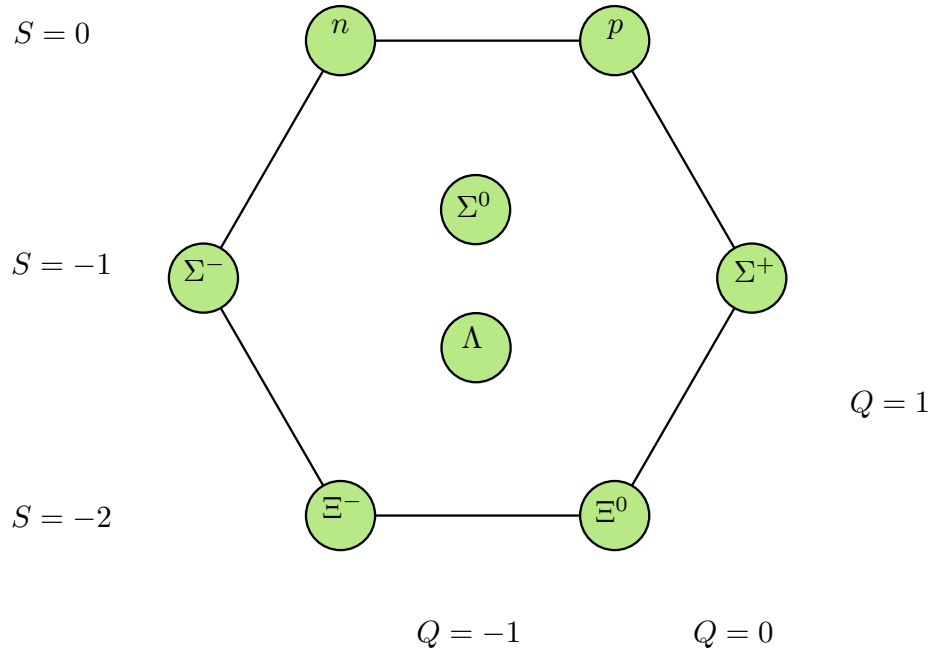


Figura 2.1: Octete de los bariones más ligeros. El protón y el neutrón se encuentran en la parte superior.

### 2.1.1. Eightfold way

El *eightfold way* fue introducido en 1961 por Murray Gell-Mann [3]. Consiste en ordenar los bariones y los mesones en un patrón geométrico. Los ocho bariones más ligeros se ordenan en un hexágono, con dos partículas en el centro, por ejemplo, en la figura 2.1.

Este conjunto es conocido como octete de bariones. El orden que hizo Gell-Mann es en las líneas horizontales colocar las partículas con la misma extrañeza ( $S$ ). Así pues, las partículas con  $S = 0$  son  $n$  (neutrón) y  $p$  (protón). Las partículas con  $S = -1$  son:  $\Sigma^-$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Lambda$  y  $\Sigma^+$ . Y finalmente las partículas con  $S = -2$  son:  $\Xi^-$  y  $\Xi^0$ .

Ahora, las partículas también se ordenan según su carga en unas líneas inclinadas imaginarias. De esta forma las partículas con carga  $Q = -1$  están en la misma línea. En la línea  $Q = -1$  están los bariones  $\Sigma^-$  y  $\Xi^-$ . En la línea con  $Q = 0$  están las partículas  $n$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Lambda$  y  $\Xi^0$ . Y en la última línea están los bariones  $\Sigma^+$  y  $p$ .

Los ocho mesones más ligeros también se organizan en un octete, tal como se ve en la figura 2.2. Aquí los mesones tienen una extrañeza que va desde  $S = -1$  hasta  $S = 1$ . El pión y el kaón que pertenecen a este octete son de particular interés en este trabajo. Los piones cargados  $\pi^\pm$  tienen una

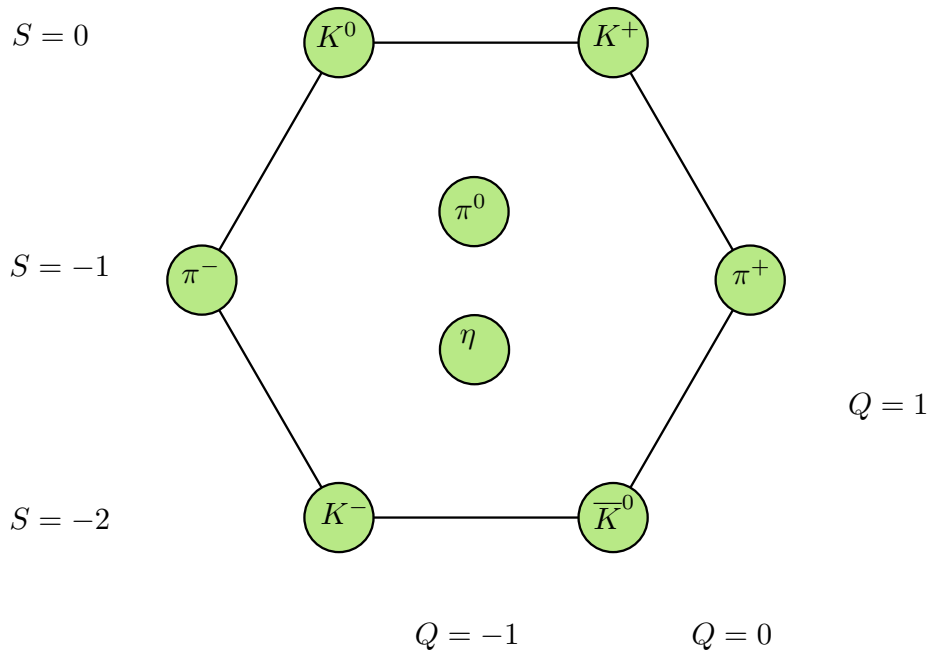


Figura 2.2: Octete de los mesones (pseudoescales). El triplete de piones se encuentra en la línea horizontal  $S = 0$ . Un arreglo similar existe para los mesones vectoriales.

masa de 139.6 MeV (en unidades naturales). Su principal decaimiento es a  $\mu^+\nu_\mu$  siendo del 99.98%. Su vida media es de  $2.6 \times 10^{-8}$  s. El pion neutro  $\pi^0$  tiene una masa de 134.98 MeV. Los kaones están conformados por kaones con carga positiva y negativa  $K^\pm$ , el kaon neutro  $K^0$  y su antipartícula  $\bar{K}^0$ . Los decaimientos principales de  $K^\pm$  son  $\mu^+\nu_\mu$  al 63.6% y  $\pi^+\pi^0$  al 20.7%. Sin embargo, no solo surgieron hexágonos. Bariones más pesados forman un decuplete como se muestra en la figura 2.3. En esa época solo se conocían 9 de los 10 bariones del decuplete. Gell-Mann predijo la existencia y propiedades del barión  $\Omega^-$ . En 1964 [2],  $\Omega^-$  fue descubierto con una masa de  $1686 \pm 12$  MeV, cercana a la predicción de Gell-Mann de 1680 MeV.

### 2.1.2. Modelo de quarks

A pesar de que aún hoy los quarks no se han visto aislados, el modelo de quarks cosechó muchos éxitos. Fue propuesto por Gell-Mann y Zweig independientemente como una idea para explicar el eightfold way [4]. Expresa que todos los hadrones están compuestos por constituyentes elementales llamados quarks. En la tabla 2.1 se muestran algunas de sus propiedades como carga y masa. En la tabla 2.2 se aprecia como los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  generan

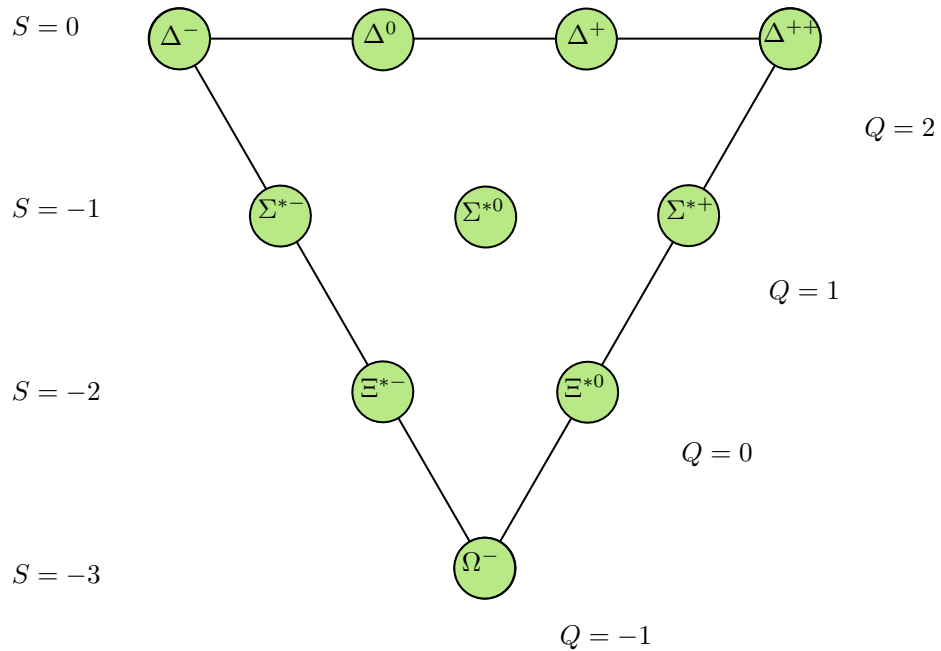


Figura 2.3: Decuplete de los bariones.

todas las propiedades del decuplete de bariones. Por ejemplo el barion  $\Delta^{++}$  esta formado por 3 quarks  $u$ . Si sumamos las cargas en unidades de la carga del positrón de los 3 quarks se obtiene una carga total igual a 2, es decir la carga del barión  $\Delta^{++}$ . Sin embargo, la masa de  $\Delta^{++}$  no es la suma de las masas corrientes de los tres quarks.

Hay algo que es importante mencionar. En el modelo de quarks el protón y el barión  $\Delta^+$  están formados ambos por dos quarks  $u$  y un quark  $d$ . Así, de las misma manera que el hidrógeno tiene diferentes niveles de energía, una colección dada de quarks puede unirse de muchas maneras diferentes con diferentes niveles de energía. El protón y el barión  $\Delta^+$  serian dos niveles de energía de los mismos 3 quarks ligados. Sin embargo, a diferencia del hidrógeno que tiene los niveles de energía muy cercanos entre sí (el espaciamiento de los estados es del orden de unos cuantos eV, siendo la energía en reposo del hidrógeno del orden de  $10^9$  eV), los estados ligados de quarks tienen una energía muy separada entre ellos. Otra cosa que diferencia al protón y a  $\Delta^+$  es el espín, el protón tiene espín  $1/2$  y  $\Delta^+$  tiene espín  $3/2$ . Por estas razones son entes distintos.

El modelo de quarks entraba en contradicción con el principio de exclusión de Pauli por lo que en 1964 O. W. Greenberg propuso que los quarks no solo tenían sabor (en ese entonces solo  $u$ ,  $d$  y  $s$ ), si no que además tenían otro número cuántico llamado color el cual puede tomar tres valores (rojo,



Tabla 2.1: Algunas propiedades de los quarks que conforman la cromodinámica cuántica obtenidas de [1]. La carga está dada en unidades de la carga del positrón.

Nombre	Símbolo	Generación	Carga	Masa corriente
arriba (up)	u	1	+2/3	$2.14^{+0.49}_{-0.26}$ MeV
abajo (down)	d	1	-1/3	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$ MeV
encanto (charm)	c	2	+2/3	$1.27 \pm 0.02$ GeV
extraño (strange)	s	2	-1/3	$93^{+11}_{-5}$ MeV
cima (top)	t	3	+2/3	$172.76 \pm 0.30$ GeV
fondo (bottom)	b	3	-1/3	$4.18^{+0.03}_{-0.02}$ GeV

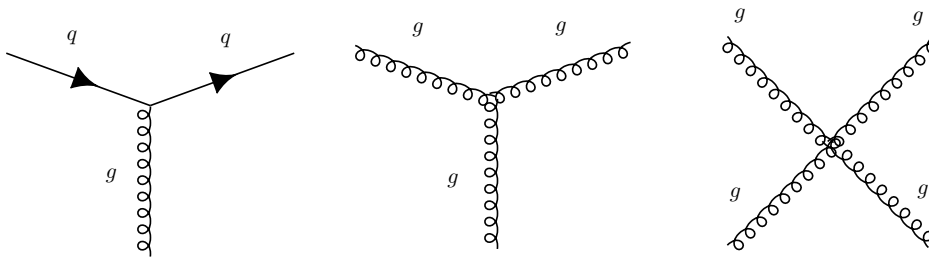


Figura 2.4: Vértices fundamentales en QCD. El vértice quark–gluon está a la izquierda, los vértices de gluones son los dos restantes.

verde y azul) [5].

## 2.2. Cromodinámica cuántica

La cromodinámica cuántica (QCD, por sus siglas en inglés) es la teoría fundamental de la interacción fuerte. La interacción fuerte es la que permite que existan los hadrones. Al igual que el modelo de quarks, en QCD todos los hadrones están formados por quarks. A cada quark se le asocia un campo quark y a cada gluon se le asocia un campo gluon.

Los quarks tienen espín 1/2, por lo que son fermiones. Tienen carga fraccionaria en unidades de la carga del positrón y se dividen en 6 sabores distintos: up ( $u$ ), down ( $d$ ), charm ( $c$ ), strange ( $s$ ), top ( $t$ ) y bottom ( $b$ ). Como ya se mencionó en la sección 2.1.2 los quarks tienen un grado de libertad extra llamado carga de color. Al igual que las cargas eléctricas generan campos eléctricos las cargas de color generan campos de color. Además, los quarks interactúan a través de dicho campo. La carga de color, a diferencia de la carga eléctrica es un vector con tres componentes (también llamados rojo, verde y azul).

La cromodinámica cuántica es una teoría de norma con el grupo de norma de color  $SU(3)$ . Aquí, los gluones resultan ser los cuantos del campo de color, de la misma forma que los fotones son los cuantos del campo eléctrico en la electrodinámica cuántica. Los gluones pueden cambiar el color de un quark. Por ejemplo, un quark azul se puede transformar a un quark de color rojo si se emite un gluon con carga de color rojo y anti azul. Fenómeno que no sucede con los fotones que no tienen carga eléctrica. Cuando un fotón se emite desde un electrón, no cambia su carga.

La interacción entre los quarks se realiza mediante el intercambio de gluones. No obstante ya que los gluones también tienen carga de color, la interacción entre ellos es posible. Por lo tanto los gluones pueden emitir gluones.

La teoría de campo para los quarks y gluones pertenece a las teorías de campo de norma o teorías de campo gauge. Para los quarks y gluones, al requerir que su lagrangiano sea invariante ante una transformación de norma local aparece como requisito que los gluones no tengan masa.

### 2.2.1. Lagrangiano de la cromodinámica cuántica

Como ya se dijo, la cromodinámica es construida basada en el grupo de gauge  $SU(3)$  en el espacio de color. A partir de esto se puede obtener el lagrangiano de QCD. El siguiente desarrollo se basa en [6]. En teoría de grupos,  $SU(3)$  es el grupo unitario especial de las matrices de  $3 \times 3$ . La representación fundamental de  $SU(3)$  consiste en 8 generadores linealmente independientes.

Para construir el lagrangiano de la cromodinámica cuántica se debe de tomar en cuenta la energía potencial y la energía cinética de la interacción entre quarks y la interacción con gluones. La deducción del lagrangiano de QCD consiste en tomar el lagrangiano de Dirac e imponer que sea invariante ante transformaciones locales del grupo  $SU_C(3)$ , donde el subíndice C indica que las transformaciones actúan en el espacio de color. El lagrangiano de Dirac (el de un fermión libre) es

$$\mathcal{L} = \sum_{f=u,d,s,\dots} \bar{\psi}_f^i (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} - m_f \delta_{ij}) \psi_f^j \quad (2.1)$$

donde  $\psi_f^i$  denota el campo de un quark con índice de color  $i = (R, G, B)$  y donde  $f$ , el índice de sabor, puede tomar los valores:  $(u, d, s, c, b, t)$ .  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac. La matriz de masa en el espacio de sabor es  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t)$ . El lagrangiano de la ecuación 2.1 es invariante bajo cualquier transformación global del grupo  $SU_C(3)$ . Ahora se considera una transformación local. Bajo una transformación local los campos de quark se transforman como

$$\psi_f \rightarrow \psi'_f = U \psi_f \quad (2.2)$$

donde  $UU^\dagger = 1$  y  $\text{Det}(U) = 1$ . Las matrices unitarias  $U$  de  $3 \times 3$  actuando en el espacio de color se pueden representar por

$$U = e^{-ig_s \frac{\lambda^a}{2} \Omega_a(x)} \quad (2.3)$$

Las matrices  $\lambda^a$  son matrices hermitianas de  $3 \times 3$  y se les conoce como las matrices de Gell-Mann, además son los generadores de  $SU_C(3)$ .  $\Omega_a$  es un parámetro arbitrario real, con  $a = 1, 2, \dots, 8$ .  $g_s$  es la constante de acoplamiento fuerte ( $g_s^2 = 4\pi\alpha_S$ ) y es adimensional. Esta constante es la análoga a  $e$  en electrodinámica cuántica. Las matrices de Gell-Mann tienen traza nula y cumple con la siguiente álgebra de Lie

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \quad (2.4)$$

Como ya se dijo para obtener el lagrangiano de la cromodinámica cuántica libre hay que imponer que la ec. 2.1 sea invariante bajo transformaciones locales de  $SU_C(3)$ . Esto implica que la derivada parcial  $\partial_\mu$  se reemplaza por la derivada covariante  $D_\mu$ . Al ser invariante local se cumplirá que

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \quad (2.5)$$

donde el campo de gauge en  $SU_C(3)$  es  $G_\mu^a$ . Su índice de Lorentz es  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Para cada valor de  $a$ , que puede tomar un valor entre 1 y 8,  $G_\mu^a$  es el campo de un gluón. Es decir, hay 8 gluones en la cromodinámica cuántica. Las transformaciones de gauge  $SU_C(3)$  se pueden expandir en serie de Taylor. A primer orden se tiene

$$U = e^{-ig_s \frac{\lambda^a}{2} \Omega_a} \simeq 1 - ig_s \frac{\lambda^a}{2} \Omega_a \quad (2.6)$$

Entonces se obtiene

$$\psi_f \rightarrow \psi'_f = \psi_f - ig_s \left( \frac{\lambda^a}{2} \right) \delta\Omega_a \psi_f \quad (2.7)$$

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu'^a = G_\mu^a - \partial_\mu(\delta\Omega_a) + g_s f_{abc} \delta\Omega^b G_\mu^c \quad (2.8)$$

Los gluones son grados físicos de libertad y transportan energía e impulso. Luego, para construir un término cinético para los campos de gluones que satisfagan la invariancia del gauge se debe agregar un término adicional ( $g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ ) al tensor de campo de gluones. Los términos adicionales son agregados de forma análoga a la electrodinámica cuántica. El tensor de campo de gluones es entonces

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.9)$$

Por lo que bajo una transformación de gauge se tiene que

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow (F_{\mu\nu}^a)' = U F_{\mu\nu}^a U^\dagger \quad (2.10)$$

Lo que significa que la traza en el espacio de color,  $tr_C[F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}]$ , es invariante.  $G_\mu^a$  es el campo del gluon con índice de color  $a$ .  $f^{abc}$  son las constantes de estructura del grupo  $SU_C(3)$ . Finalmente el lagrangiano de la cromodinámica clásica que satisface la invarianza local del grupo de gauge  $SU_C(3)$  es

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{f=u,d,s,\dots} \bar{\psi}_f^i (i\gamma^\mu D_\mu \delta_{ij} - m_f \delta_{ij}) \psi_f^j \quad (2.11)$$

Desarrollado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & -\frac{1}{4} [\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a] [\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu] + \sum_{f=u,d,s,\dots} \bar{\psi}_f^i (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} - m_f \delta_{ij}) \psi_f^j \\ & + \sum_{f=u,d,s,\dots} g_s G^a \bar{\psi}_f^i \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \delta_{ij} \psi_f^j - \frac{g_s}{2} f_{abc} [\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a] G_b^\mu G_c^\nu \\ & - \frac{g_s^2}{4} f_{abc} f_{abc} G_\mu^a G_\nu^b G_d^\mu G_c^\nu \end{aligned} \quad (2.12)$$

La primera línea de la ecuación (2.12) contiene los términos cinéticos de los diferentes campos. El primer término de la segunda línea del lagrangiano describe la interacción de color de los quarks y de los gluones. Los términos cúbicos y cuárticos son auto interacciones de los gluones y surgen de los términos de Yang-Mills,  $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ . El lagrangiano de QCD que surge al mantener la consistencia de la formulación de integral de caminos es [6]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^a)^2 + \sum_{f=u,d,s,\dots} \bar{\psi}_f^i (i\gamma^\mu D_\mu \delta_{ij} - m_f \delta_{ij}) \psi_f^j \\ & + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c^c \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde el segundo término fija el gauge y el cuarto término incluye campos llamados fantasmas de Faddeev-Popov.

### 2.2.2. Libertad asintótica

La libertad asintótica es una propiedad muy interesante en cromodinámica cuántica. Fue descubierta en 1973 por Frank Wilczek, David Gross y David Politzer en procesos de dispersión inelástica profunda [7]. En estos, un electrón choca con un quark dentro de un hadrón transfiriendo parte de su momento. Por medio de la medición del momento inicial y final del electrón se obtuvo la distribución de momento de los quarks dentro del hadrón.

Tabla 2.2: Bariones del decuplete

$qqq$	Carga (Q)	Extrañeza (S)	Barión
$uuu$	+2	0	$\Delta^{++}$
$uud$	+1	0	$\Delta^+$
$udd$	0	0	$\Delta^0$
$ddd$	-1	0	$\Delta^-$
$uus$	+1	-1	$\Sigma^{*+}$
$uds$	0	-1	$\Sigma^{*0}$
$dds$	-1	-1	$\Sigma^{*-}$
$uss$	0	-2	$\Xi^{*0}$
$dss$	-1	-2	$\Xi^{*-}$
$sss$	-1	-3	$\Omega^-$

Para transferencias de momento muy grandes los quarks se comportaban casi como partículas libres. La intensidad de fuerza de la interacción entre los quarks y gluones depende de la constante de acoplamiento fuerte. Dicha constante a su vez depende de la transferencia de momento. En la figura 2.5 se observa la dependencia de la constante de acoplamiento fuerte con respecto al momento transferido. Para interacciones a distancias cortas la constante de acoplamiento tiende asintóticamente a cero. Este es el caso de la libertad asintótica. Cuando la constante de acoplamiento es grande (es decir cuando la transferencia de momento es pequeña) un tratamiento perturbativo es inviable por lo que son necesarios otros modelos para estudiar, por ejemplo, la estructura del estado base de un hadrón. El estudio de QCD no perturbativa se puede llevar a cabo con diferentes enfoques: 1) Teorías de campo efectivas, como la teoría de perturbación quiral, 2) Lattice QCD que es el único método conocido que resuelve QCD en el régimen no perturbativo, 3) Las ecuaciones de Schwinger-Dyson, 4) Modelos basados en simetrías QCD. El modelo de Nambu–Jona-Lasinio se coloca dentro de los modelos del apartado cuarto.

### 2.2.3. Confinamiento de color

La conjetura del confinamiento de color postula que las partículas con carga de color no pueden estar aisladas y que por lo tanto no pueden ser observadas en la naturaleza. Sin embargo, no se ha demostrado analíticamente a la fecha y continúa siendo un problema abierto. Para poder demostrar el confinamiento de color es necesario una comprensión de la cromodinámica cuántica en el régimen no perturbativo. Fenomenológicamente se considera que el potencial de color entre dos cargas de color es proporcional a una

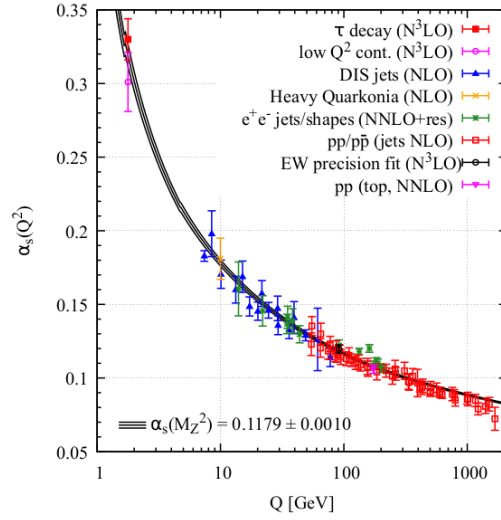


Figura 2.5: Compilación de datos del Particle Data Group [1] sobre el comportamiento de la constante de acoplamiento fuerte  $\alpha_s$  con el momento  $Q \propto 1/r$ .

potencia de la distancia entre ellas.

$$V(r) = kr^\alpha \quad (2.14)$$

Otra forma es que el potencial proporcional al logaritmo de la distancia. Esto implica que para poder separar dos cargas de color (al menos clásicamente) sería necesario una energía infinita. Sin embargo, cuánticamente, dos pares de quark antiquark pueden ser creados a partir del vacío si la distancia es del orden de unos cuantos femtómetros. En dichas distancias la energía del campo es más grande que dos veces la energía en reposo del quark. Por lo tanto, es energéticamente más viable que el sistema cree dos quarks a mantener el campo. Además, ya que los gluones tampoco pueden alejarse de sus respectivas cargas de color, los campos de color entre dos cargas están confinados en un pequeño tubo. Como consecuencia, en la naturaleza solo existen partículas con color neutro y las cargas de un solo color (quarks y gluones) no se pueden observar.

### 2.3. Simetría quiral y su rompimiento espontáneo

Para un campo de quark,  $\psi$ , los componentes derechos e izquierdos están dados por la siguiente expresión

$$\psi_D = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \quad (2.15)$$

$$\psi_I = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \quad (2.16)$$

donde  $\psi_D$  y  $\psi_I$  son los componentes de mano derecha y de mano izquierda del campo  $\psi$  respectivamente.  $P_D = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$  es el proyector de mano derecha y  $P_I = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$  es el proyector de mano izquierda y  $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ . Cabe mencionar que la quiralidad de una partícula es igual a su helicidad cuando dicha partícula tiene masa cero. La helicidad,  $H$ , se define como la proyección del espín en la dirección de movimiento de la partícula

$$H = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{\|\mathbf{P}\|} \quad (2.17)$$

Se puede reescribir el lagrangiano de QCD en términos de los componentes derechos e izquierdos con el objetivo de obtener mas información sobre las simetrías. El lagrangiano de la ecuación (2.11) se vuelve

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_I \not{D}\psi_I + i\bar{\psi}_D \not{D}\psi_D - \bar{\psi}_D \hat{m}\bar{\psi}_I - \bar{\psi}_I \hat{m}\bar{\psi}_D \quad (2.18)$$

Si despreciamos la masa de los quarks, el lagrangiano se obtiene

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_I \not{D}\psi_I + i\bar{\psi}_D \not{D}\psi_D \quad (2.19)$$

Este lagrangiano tiene simetría quiral  $SU(N_f)$ . La aproximación de hacer nula la masa de los quarks es buena para los quarks más ligeros  $u$ ,  $d$  y  $s$ , tal como se puede ver en la tabla 2.1. Sin embargo, consideraremos que los 6 quarks tienen masa cero solo para simplificar el álgebra. El lagrangiano ahora es invariante ante las siguientes transformaciones

$$\psi_I = \begin{pmatrix} u_I \\ d_I \\ \vdots \\ (q_{N_f})_I \end{pmatrix} \rightarrow \psi'_I = e^{-i\omega_I^a T^a} \psi_I \quad (2.20)$$

$$\psi_D = \begin{pmatrix} u_D \\ d_D \\ \vdots \\ (q_{N_f})_D \end{pmatrix} \rightarrow \psi'_D = e^{-i\omega_D^a T^a} \psi_D \quad (2.21)$$

Tabla 2.3: Simetrías en cromodinámica cuántica

Simetría	Transformación	Corriente	Nombre	Manifestación
$SU_V(N_f)$	$\psi \rightarrow e^{-i\tau\omega/2}\psi$	$J_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau^k\psi$	Isoespín	Aprox. conservada
$U_V(1)$	$\psi \rightarrow e^{-\alpha}\psi$	$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	Barionica	Siempre conservada
$SU_A(N_f)$	$\psi \rightarrow e^{-i\tau\theta\gamma_5/2}\psi$	$J_{5\mu}^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^k\psi$	Quiral	Romp. espontaneo
$U_A(1)$	$\psi \rightarrow e^{-i\beta\gamma_5}\psi$	$j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$	Axial	Problema $U_A(1)$

donde  $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ . Es decir es invariante bajo  $SU_I(N_f) \otimes SU_D(N_f)$  que se descompone en  $SU_V(N_f) \otimes SU_A(N_f) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1)$ . Estas simetrías son muy importantes en QCD y también las contiene el modelo NJL. Aquí  $N_f$  indica el número de sabores que se consideraron que tienen masa despreciable, más adelante se tomará  $N_f = 3$ . Debido al teorema de Noether la invarianza de  $\mathcal{L}_{QCD}$  bajo  $U_V(1)$  implica la conservación del número bariónico. La tabla 2.3 muestra más información asociada a cada simetría.

Nambu observó, mucho antes del establecimiento de QCD como la teoría de la interacción fuerte, que la simetría quiral, se rompía espontáneamente [8]. Las simetrías  $SU_A(N_f)$  y  $U_A(1)$  son conocidas como las simetrías quirales o axiales. Las transformaciones axiales cambian la paridad. Por lo tanto para poder afirmar que la simetría  $SU_A(N_f)$  está en la naturaleza tendría que observarse una duplicidad de multipletes hadrónicos con paridades opuestas, cosa que no sucede. J. Goldstone, A. Salam y S. Weinberg [9] mostraron que esta duplicidad desaparece solo si el lagrangiano es invariante bajo el grupo de gauge pero el estado del vacío no lo es, es decir, solo cuando la simetría esta rota espontáneamente. Así mismo desarrollaron un teorema (teorema de Goldstone) que afirma que cuando una simetría es rota espontáneamente aparecen bosones de Goldstone sin masa. Ya que la simetría quiral no solo está rota espontáneamente si no también explícitamente hay bosones de pseudoGoldstone con masas, pero muy ligeras. Para  $N_f = 3$  el octete de los mesones más ligeros son identificados con los bosones  $(\pi, K, \eta)$ . El grupo  $U_A(1)$  es especial en QCD. A diferencia de las demás simetrías quirales de QCD,  $U_A(1)$  es una simetría solamente rota explícitamente. Por lo tanto  $\eta'$  no es un bosón de Goldstone. Esto es conocido como el problema  $U_A(1)$ . El problema es que la masa entre los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  son demasiado grandes para ser explicadas por el modelo de quarks. Este problema fue resuelto por 't Hooft con el mecanismo de instantones [10].



## Capítulo 3

# El modelo Nambu–Jona-Lasinio

*La ausencia de pruebas no es prueba de ausencia.*

Carl Sagan

**RESUMEN:** Se muestra como el lagrangiano de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) surge a través de simetrías que debe de cumplir, siendo la simetría quiral la más importante. Distintas propiedades del modelo NJL se desarrollan. Se discute la transformación de Bogoliubov–Valatin que diagonaliza el lagrangiano de NJL.

Como ya se dijo en la sección 2.3 el rompimiento espontáneo de  $SU_A(3)$  es la que produce al octete de los mesones más ligeros, entre ellos el pion y el kaón [11]. Esto es soportado por el hecho de que experimentalmente se ha observado que el pion tiene una masa muy ligera [1]. En el lagrangiano  $\mathcal{L}_{QCD}$  si se considera como aproximación las masas del quark  $u$ ,  $d$  y  $s$  iguales a cero entonces las simetrías que se obtienen son

$$SU_V(3) \otimes SU_A(3) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1) \quad (3.1)$$

que también puede expresarse en la siguiente descomposición

$$[SU(3) \otimes U(1)]_I \otimes [SU(3) \otimes U(1)]_D \quad (3.2)$$

La idea es buscar un lagrangiano o modelo que sea más sencillo de manejar que la cromodinámica cuántica pero que conserve todas sus simetrías. Nambu y Jona-Lasinio (NJL) construyeron un modelo para la interacción de nucleones que contenía las simetrías de isoespin  $SU_V(2) \otimes SU_A(2) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1)$ , posteriormente dejó de considerar la simetría bajo  $U_A(1)$ . En los grupos de

la ecuación (3.1) la simetría  $U_A(1)$  está violada [12, 13]. Si en vez de usar los nucleones del modelo de Nambu y Jona-Lasinio usamos los quarks se obtiene el modelo más sencillo y con las mismas simetrías que la cromodinámica cuántica. Bajo estas consideraciones el lagrangiano de Nambu Jona-Lasinio para tres sabores de quarks que es simétrico ante  $SU_V(3) \otimes SU_A(3) \otimes U_V(1)$  es [11, 14]

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\not{\partial}\psi - m)\psi + G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^a\psi)^2] - K[\det(\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi) + \det(\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi)] \quad (3.3)$$

donde  $\lambda^a$  son las matrices de Gell-Mann en el espacio de color. El segundo termino rompe  $U_A(1)$  y es conocido como el determinante de 't-Hooft,  $G$  y  $K$  son constantes de acoplamiento,  $\det$  es el determinante en el espacio de sabor. Una descripción más detallada del lagrangiano de NJL se da en la sección 3.2.

### 3.1. Transformación de Bogoliubov–Valatin

Las transformaciones de Bogoliubov-Valatin permiten diagonalizar Hamiltonianos. Lo cual permite obtener entre otras cosas el valor de expectación de la energía en el estado base. Sea el lagrangiano de Nambu–Jona-Lasinio para dos sabores en el límite quiral ( $SU(2)$ )

$$\mathcal{L}_{NJL} = (\bar{\psi}i\not{\partial}\psi)^2 + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2] \quad (3.4)$$

La densidad hamiltoniana correspondiente es

$$\mathcal{H}_{NJL} = -i\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi - G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2] \quad (3.5)$$

Usando la expansión de Fourier en términos de operadores de creación y aniquilación del operador campo  $\psi$  en el tiempo  $t = 0$  es

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [b(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + d^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}] \quad (3.6)$$

donde  $b(\mathbf{p}, s)$  y  $d(\mathbf{p}, s)$  son los operadores de aniquilación de la partícula y de la antipartícula respectivamente de momento  $\mathbf{p}$  y helicidad  $s$ . Por definición con el estado de vacío normal o sin paridad  $|0\rangle$  se cumple que  $b(\mathbf{p}, s)|0\rangle = d(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0$ . Los espinores  $u(\mathbf{p}, s)$  y  $v(\mathbf{p}, s)$  son eigenestados de helicidad que satisface  $\not{p}u(\mathbf{p}, s) = \not{p}v(\mathbf{p}, s) = 0$ . Además están normalizados, es decir  $u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s) = v^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s) = 1$ . Se considera ahora un estado fundamental de tipo BCS [15]. Es decir, es el estado de vacío al aplicar las transformaciones de Bogoliubov.

$$|vac\rangle = \prod_{p,s=\pm 1} [\cos\theta(p) + s \sin\theta(p)b^\dagger(\mathbf{p}, s)d^\dagger(-\mathbf{p}, s)]|0\rangle \quad (3.7)$$

Es de tipo BCS ya que es el mismo estado fundamental que se usa en la teoría BCS, pero usando los operadores de aniquilación del modelo NJL que son de partícula y antipartícula a diferencia en la teoría BCS donde son partículas solamente. El estado de la ecuación (3.7) corresponde a un sistema donde los pares de partícula y antipartícula tienen un momento total igual a cero y también una helicidad total igual a cero. Los operadores que aniquilan el estado fundamental de la ecuación (3.7) son [16, 17]

$$B(\mathbf{p}, s) = \cos(\theta(p))b(\mathbf{p}, s) + s \sin(\theta(p))d^\dagger(-\mathbf{p}, s) \quad (3.8)$$

$$D(\mathbf{p}, s) = \cos(\theta(p))d(\mathbf{p}, s) - s \sin(\theta(p))b^\dagger(-\mathbf{p}, s) \quad (3.9)$$

Lo cual son las transformaciones de Bogoliubov–Valatin. Usando las ecuaciones (3.8) y (3.9), la relación entre espinores  $\gamma_0 s v(-\mathbf{p}, s) = u(\mathbf{p}, s)$  y la suma de helicidad

$$\sum_s u(\mathbf{p}, s)u^\dagger(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\gamma^0) \quad (3.10)$$

el operador campo de los quarks se vuelve

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [B(\mathbf{p}, s)M_1(\mathbf{p}, s)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + D^\dagger(\mathbf{p}, s)M_2(\mathbf{p}, s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}] \quad (3.11)$$

donde

$$M_1(\mathbf{p}, s) = [\cos(\theta(p)) + \gamma^0 \sin(\theta(p))]u(\mathbf{p}, s) \quad (3.12)$$

$$M_2(\mathbf{p}, s) = [\cos(\theta(p)) - \gamma^0 \sin(\theta(p))]u(\mathbf{p}, s) \quad (3.13)$$

Por lo tanto ahora usando las ecuaciones (3.11) y (3.5) se calcula  $W[\phi] \equiv \langle vac | \mathcal{H}_{NJL} | vac \rangle$  ( $\phi(p) = 2\theta(p)$ ), es decir, el valor de expectación de  $\mathcal{H}_{NJL}$  con respecto al estado fundamental. El resultado es [11]

$$W[\phi] = -2N_C N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \cos(\phi(p)) - 4G(N_C N_f)^2 \left[ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sin(\phi(p)) \right]^2 \quad (3.14)$$

donde  $N_C$  es el número de color y  $N_f$  es el número de sabores. Al imponer la condición  $\partial W / \partial \phi(p) = 0$ , que minimiza  $W[\phi]$  se obtiene [11]

$$p \tan(\phi(p)) = 4GN_C N_f \int \frac{d^3q}{(4\pi)^3} \sin(\phi(q)) \quad (3.15)$$

que es conocida como la ecuación de gap, que permite calcular la masa dinámica de quarks. Ya que el lado derecho de esta ecuación no depende del momento  $p$  podemos igualar el lado izquierdo a una constante ( $M$ ). Por lo tanto

$$\tan(\phi(p)) = \frac{M}{p} \quad (3.16)$$

Tabla 3.1:  $\beta$  y  $t$  son los generadores de  $SU(N_f)$  y  $SU(N_C)$ , respectivamente. ADJ quiere decir representación adjunta.

Corriente	$SU_I(N_f)$	$SU_I(N_C)$	$SU_D(N_f)$	$SU_D(N_C)$
$\bar{\psi}_I \gamma_\mu \psi_I$	1	1	1	1
$\bar{\psi}_I \gamma_\mu \beta \psi_I$	ADJ	1	1	1
$\bar{\psi}_I \gamma_\mu \tilde{t} \psi_I$	1	ADJ	1	1
$\bar{\psi}_I \gamma_\mu \beta \tilde{t} \psi_I$	ADJ	ADJ	1	1
$\bar{\psi}_D \gamma_\mu \psi_D$	1	1	1	1
$\bar{\psi}_D \gamma_\mu \beta \psi_D$	1	1	ADJ	1
$\bar{\psi}_D \gamma_\mu \tilde{t} \psi_D$	1	1	1	ADJ
$\bar{\psi}_D \gamma_\mu \beta \tilde{t} \psi_D$	1	1	ADJ	ADJ

y

$$\sin(\phi(p)) = \frac{M}{(\mathbf{p}^2 + M^2)^{1/2}} \quad (3.17)$$

Combinando las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.15) finalmente se obtiene la forma conocida de la ecuación de gap en el modelo NJL cuando la masa corriente es

$$M = 4GN_C N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \quad (3.18)$$

donde  $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ .

### 3.2. El lagrangiano Nambu–Jona-Lasinio

Para obtener el lagrangiano de la ecuación (3.3) se consideran las siguientes simetrías

$$\mathcal{S} = SU_I(N_f) \otimes SU_D(N_f) \otimes SU_V(N_C) \otimes U_V(1) \otimes \mathcal{D} \quad (3.19)$$

donde  $SU(N_f)_I \otimes SU(N_f)_D = SU(N_f)$  es la simetría de sabor (quiral),  $SU(N_C)_V$  es la simetría de color vectorial y  $U(1)_V$  es la simetría del número bariónico,  $\mathcal{D}$  representa todas las simetrías discretas (paridad, conjugación de carga e inversión temporal). Ya que en NJL no hay gluones en  $SU_V(N_C)$  se toman las transformaciones globales. No aparece la simetría completa de color ya que si estuviera aparecería bosones de Goldstone con color.

Para construir el lagrangiano se debe de buscar términos de interacción de los quarks que respeten las simetrías deseadas. Se considera, por lo tanto, las corrientes quirales construidas con los campos de los quarks ( $\psi$ ). En la tabla 3.1 están las distintas corrientes y como se transforman bajo  $SU_I(N_f) \otimes SU_D(N_f) \otimes SU_I(N_C) \otimes SU_D(N_C)$  Los términos de interacción de quarks

vectoriales o pseudovectoriales que se pueden construir son

$$L_1 = (\bar{\psi}_I \gamma_\mu \psi_I)^2 + (\bar{\psi}_D \gamma_\mu \psi_D)^2 \quad (3.20)$$

$$L_2 = (\bar{\psi}_I \gamma_\mu \beta \psi_I)^2 + (\bar{\psi}_D \gamma_\mu \beta \psi_D)^2 \quad (3.21)$$

$$L_3 = (\bar{\psi}_I \gamma_\mu \tilde{t} \psi_I)^2 + (\bar{\psi}_D \gamma_\mu \tilde{t} \psi_D)^2 \quad (3.22)$$

$$L_4 = (\bar{\psi}_I \gamma_\mu \beta \tilde{t} \psi_I)^2 + (\bar{\psi}_D \gamma_\mu \beta \tilde{t} \psi_D)^2 \quad (3.23)$$

$$L_5 = (\bar{\psi}_I \gamma_\mu \psi_I)(\bar{\psi}_D \gamma_\mu \psi_D) \quad (3.24)$$

$$L_6 = (\bar{\psi}_I \gamma_\mu \tilde{t} \psi_I)(\bar{\psi}_D \gamma_\mu \tilde{t} \psi_D) \quad (3.25)$$

Los términos  $L_1$  al  $L_5$  tienen una simetría completa bajo  $SU_I(N_C) \otimes SU_D(N_C)$ , lo cual no se desea. Para evitar dicha simetría solo se debe de agregar el término  $L_6$  al lagrangiano de Nambu–Jona-Lasinio que no la cumple. Se sabe que no importa las combinaciones que se tome entre los términos de  $L_1$  al  $L_5$  o incluso que se tomen todos, ya que producen resultados cualitativamente similares [14]. Tomando  $L_5$  y  $L_6$ , que simplifican la estructura de la ecuación Bethe-Salpeter [14], y aplicando los operadores  $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$  para regresar al campo completo  $\psi$  el lagrangiano obtenido es

$$\mathcal{L}_{NJL} = \mathcal{L}_{Dirac} - \frac{1}{2}G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi} \gamma_\mu t^a \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 t^a \psi)^2] \quad (3.26)$$

Lamentablemente el lagrangiano de la ecuación (3.26) es simétrico bajo el grupo  $U_A(1)$ . Hay que proceder de una forma análoga a la que se agregó  $L_6$  a la ecuación (3.26). Es decir, buscar términos que sean invariantes ante  $SU(N_f)$  pero que no lo sean ante  $U_A(1)$ . Ya que hasta ahora se ha considerado en la tabla 3.1 todos los términos vectoriales posibles, ahora se considerara los términos tensoriales. Los únicos tensores invariantes ante  $SU(N_f)$  son  $\delta_b^a$  y  $\epsilon_{a_1, a_2, \dots, a_{N_f}}$ , por lo tanto se consideran los siguientes términos construidos con los campos de los quarks

$$\begin{aligned} I_1 &= \delta_b^a \bar{\psi}_a \psi^b \\ I_2 &= \epsilon_{a_1, a_2, \dots, a_{N_f}} \psi^{a_1} \psi^{a_2} \psi \dots \psi^{a_{N_f}} \\ I_3 &= \epsilon^{a_1, a_2, \dots, a_{N_f}} \bar{\psi}_{a_1} \bar{\psi}_{a_2} \psi \dots \bar{\psi}_{a_{N_f}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Los términos que no son invariantes ante  $U_A(1)$  son  $I_2$  e  $I_3$ , ergo los incluimos en el lagrangiano. Es decir, se agrega el siguiente lagrangiano que fue primeramente sugerido por G 't-Hooft [12]

$$\mathcal{L}_{\text{'t-Hooft}} = 2K [\det(\bar{\psi}_D \psi_I) + \det(\bar{\psi}_I \psi_D)] \quad (3.28)$$

$$= K [\det(\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi) + \det(\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi)] \quad (3.29)$$

Combinando la ecuación (3.26) con (3.28)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NJL} = & \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{2}G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\gamma_\mu t^a \psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 t^a \psi)^2] \\ & - K[\det(\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi) + \det(\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi)] \quad (3.30) \end{aligned}$$

Considerando  $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$  con  $\lambda^a$  las matrices de Gell-Mann y además tomando en cuenta  $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4\mathbb{I}_4$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NJL} = & \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \lambda^a \psi)^2] \\ & - K[\det(\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi) + \det(\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi)] \quad (3.31) \end{aligned}$$

En este trabajo vamos a tomar  $K = 0$  ya que no describiremos los mesones  $\eta$  y  $\eta'$ . Es decir nuestro lagrangiano será

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\not{\partial}\psi - m)\psi + G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \lambda^a \psi)^2] \quad (3.32)$$

## Capítulo 4

# El pion y el kaón en el modelo NJL

*No me gusta y me disgusta haber tenido  
que ver con ella.*

Erwin Schrödinger en referencia a la  
teoría cuántica

**RESUMEN:** En este capítulo se desarrollan las ecuaciones para las masas dinámicas de los quarks, las masas del pion y el kaón, las constantes de decaimiento y las constantes de acoplamiento del pion y el kaón. Todas estas cantidades se expresan en términos de las integrales que necesitan ser regularizadas.

### 4.1. Masa dinámica y ecuación de gap

Una de las características del modelo de NJL es que la masa dinámica calculada es independiente del momento, por lo que el modelo es una descripción efectiva de la cromodinámica cuántica a bajas energías. En el modelo NJL el lagrangiano está dado según la ecuación (3.32)

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi + G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\lambda^a\psi)^2] \quad (4.1)$$

donde  $\psi = \text{diag}(\psi_u, \psi_d, \psi_s)$  representa el campo del quark  $u$ ,  $d$  o  $s$ ,  $\hat{m}$  es la matriz de las masas corrientes,  $G$  es la constante de acoplamiento,  $\lambda_a$  son las matrices de Gell-Mann en el espacio de color. La aproximación de Hartree (o



Figura 4.1: Representación gráfica de la ecuación de gap para el modelo NJL.

aproximación de campo medio) se usa en el modelo NJL y consiste en tomar la siguiente aproximación  $\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle \simeq \phi_i$ , donde

$$\phi_i = Tr \left[ \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} S^i(k) \right] \quad (4.2)$$

el propagador es

$$S^i(k) = \frac{\not{k} + M_i}{k^2 - M_i^2} \quad (4.3)$$

la traza es tomada en el espacio de sabor, de color y en el espacio de Dirac. Es decir en esta aproximación aparece la masa dinámica de los quarks. Aplicando la aproximación del campo medio en la ecuación (3.32) se obtiene el siguiente lagrangiano linealizado

$$\bar{\mathcal{L}}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - \widehat{M})\psi - 2G(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) \quad (4.4)$$

donde  $\widehat{M}$  es la matriz diagonal cuyos elementos son las masas dinámicas de los quarks [18]

$$M_q = m_q - 4G\phi_q \quad (4.5)$$

$M_q$  es la masa dinámica,  $m_q$  es la masa corriente correspondientes al quark de sabor  $q = u, d, s$  y  $\phi_q$  es llamado el condensado de quarks. Esta ecuación es conocida como la ecuación de gap y nos permitirá obtener las masas vestidas de los quarks. La ecuación de gap describe la interacción de una partícula con el vacío. Esquemáticamente, se muestra en la figura 4.1. Consideramos que hay  $N_C$  colores y ya que la traza de un número impar de matrices de Dirac es igual a cero se obtiene

$$\phi_i = N_C \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{4M_i}{k^2 - M_i^2} \quad (4.6)$$

La integral es divergente por lo tanto se necesitan aplicar algún método de regularización. La regularización es un método para poder tratar con integrales divergentes. Se usa en modelos donde hay integrales divergentes. Hay tres métodos de regularización que consideraremos: tiempo propio, regularización corte en 4 dimensiones y regularización Pauli–Villars.



### Regularización en tiempo propio

La regularización en tiempo propio (regularización PT por sus siglas en inglés proper time) consiste en introducir un factor exponencial que elimine las divergencias en las integrales. Se usa básicamente la siguiente igualdad

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma[n]} \int_0^\infty d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau A} \quad (4.7)$$

donde  $Re(a) > 0$ . Luego se le introduce un cut-off. Aunque solo es necesario el cut-off en el límite inferior se puede considerar un límite superior. El cut-off superior surge para evitar polos en las integrales. Si se trabaja en regiones donde el confinamiento no es importante el cut-off extra no es necesario. Para el caso del cálculo de la masa de los mesones más ligeros el cut-off infrarrojo es necesario.

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma[n]} \int_{1/\Lambda_{UV}^2}^{1/\Lambda_{IR}^2} d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau A} \quad (4.8)$$

Considerando la rotación de Wick

$$k^\mu \rightarrow k^\mu = (ik^0, \mathbf{k}) \quad (4.9)$$

en la ecuación (4.6) se obtiene

$$\phi_i = -N_C \int \frac{dk^0 d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{4M_i}{k^2 + M_i^2} \quad (4.10)$$

Cambiando a coordenadas esféricas

$$\phi_i = \frac{-N_C}{(2\pi)^4} \int d\Omega \int \frac{4M_i k^3}{k^2 + M_i^2} dk \quad (4.11)$$

La integral del ángulo sólido es igual a  $2\pi^2$  (ver la apéndice A.1)

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k^2 + M_i^2} \quad (4.12)$$

La integral se puede considerar respecto a  $k^2$

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk^2}{k^2 + M_i^2} \quad (4.13)$$

Introduciendo la ecuación (4.8)

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} k^2 dk^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(k^2 + M_i^2)} \quad (4.14)$$

Finalmente integrando en  $k^2$

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} \frac{e^{-\tau M_i^2}}{\tau^2} \quad (4.15)$$

La ecuación (4.15) se puede expresar en términos de la integral exponencial  $Ei(z) = \int_z^\infty e^{-t} dt/t$

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \left[ \Lambda_{UV}^2 e^{-M_i^2/\Lambda_{UV}^2} - \Lambda_{IR}^2 e^{-M_i^2/\Lambda_{IR}^2} + M_i^2 Ei\left(\frac{M_i^2}{\Lambda_{IR}^2}\right) - M_i^2 Ei\left(\frac{M_i^2}{\Lambda_{UV}^2}\right) \right] \quad (4.16)$$

Ya que la integral exponencial tiene un comportamiento logarítmico para valores pequeños de  $z$  [19] también lo tendrá  $\phi_i$ . Usando ec. (4.15) en ec. (4.5) se obtiene la ecuación de gap en tiempo propio

$$M_q = m_q + \frac{GN_C M_q}{\pi^2} \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} \frac{e^{-\tau M_q^2}}{\tau^2} \quad (4.17)$$

### Regularización en corte en 4 dimensiones

El corte en 4 dimensiones consiste en introducir un cut-off,  $\Lambda_{4D}$ , después de aplicar rotación de Wick y cambiar al espacio euclidiano. Retomando la expresión (4.13) se aplica el cut-off

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda_{4D}^2} \frac{k^2 dk^2}{k^2 + M_i^2} \quad (4.18)$$

Integrando por partes

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \left[ \left[ k^2 \ln(k + M_i^2) \right]_0^{\Lambda_{4D}^2} - \int_0^{\Lambda_{4D}^2} \ln(k^2 + M_i^2) dk^2 \right] \quad (4.19)$$

A la integral restante se le vuelve aplicar integración por partes. El resultado final es

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \left[ \Lambda_{4D}^2 - M_i^2 \ln\left(\frac{\Lambda_{4D}^2 + M_i^2}{M_i^2}\right) \right] \quad (4.20)$$

Por lo tanto la ecuación de gap para este caso es

$$M_q = m_q + \frac{GN_C M_q}{\pi^2} \left[ \Lambda_{4D}^2 - M_q^2 \ln\left(\frac{\Lambda_{4D}^2 + M_q^2}{M_q^2}\right) \right] \quad (4.21)$$

### Regularización Pauli–Villars

La regularización Pauli–Villars (regularización PV) consiste en eliminar las divergencias de las integrales al introducir partículas virtuales pesadas. Se hace la siguiente sustitución en  $\psi(M)$

$$\frac{1}{k^2 - M^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - M^2} - \sum_i \frac{a_i}{k^2 - \Lambda_i^2} \quad (4.22)$$

donde las constantes  $a_i$  se escogen de tal forma que no existan potencias de  $k$  en el numerador. Veamos como ejemplo la regularización de  $\phi_i$ . Retomando la ecuación (4.12)

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k^2 + M_i^2} \quad (4.23)$$

Se hace la siguiente sustitución

$$\frac{1}{k^2 - M^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 + M_i^2} - \frac{a_1}{k^2 + \Lambda_1^2} - \frac{a_2}{k^2 + \Lambda_2^2} \quad (4.24)$$

donde

$$a_1 = \frac{M_i^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \quad (4.25)$$

$$a_2 = \frac{\Lambda_1^2 - M_i^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \quad (4.26)$$

El resultado al simplificar

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{(\Lambda_1^2 - M_i^2)(\Lambda_2^2 - M_i^2) dk^2}{(k^2 + \Lambda_1^2)(k^2 + \Lambda_2^2)(k^2 + M_i^2)} \quad (4.27)$$

con  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_{PV}$

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} (\Lambda_{PV}^2 - M_i^2)^2 \int_0^\infty \frac{k}{(k + \Lambda_{PV}^2)^2 (k + M_i^2)} \quad (4.28)$$

Usando fracciones parciales el integrando se expresa como

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{M_i^2}{k + \Lambda_{PV}^2} - \frac{M_i^2}{k + M_i^2} - \frac{\Lambda_{PV}^2 (M_i^2 - \Lambda_{PV}^2)}{(k + \Lambda_{PV}^2)^2} \right] \quad (4.29)$$

El resultado final es

$$\phi_i = -\frac{N_C M_i}{4\pi^2} \left[ \Lambda_{PV}^2 - M_i^2 + M_i^2 \ln \left( \frac{M_i^2}{\Lambda_{PV}^2} \right) \right] \quad (4.30)$$

Insertando este resultado en la ecuación (4.5) se obtiene

$$M_q = m_q + \frac{G N_C M_q}{\pi^2} \left[ \Lambda_{PV}^2 - M_q^2 + M_q^2 \ln \left( \frac{M_q^2}{\Lambda_{PV}^2} \right) \right] \quad (4.31)$$

que es la ecuación de gap para la regularización de Pauli–Villars. Otra forma de regularizar la ecuación de gap es utilizando regularización dimensional. Un desarrollo se encuentra en [18].

## 4.2. Masas del pion y del kaón

La ecuación de Bethe-Salpeter describe estados ligados en teorías cuánticas de campos. Al ser los mesones estados ligados  $q\bar{q}$  entonces satisfacen dicha ecuación. En el modelo NJL la forma de la ecuación es

$$\mathcal{T}(p) = \mathcal{K} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathcal{K} S \left( k + \frac{1}{2}p \right) \mathcal{T}(p) S \left( k - \frac{1}{2}p \right) \quad (4.32)$$

Su solución para el caso pseudoescalar en termino de las matrices  $\tau_\alpha$  reducidas (las matrices  $\mathcal{T}$  sin el vértice  $\bar{q}q$ -meson) es [20, 21, 22, 23]

$$\tau_{PP}(p) = \frac{-2iG}{1 + 2G\Pi_P(p^2)} \quad (4.33)$$

donde  $P = \pi^+, K^+$  y la contribución del loop quark-antiquark,  $\Pi_P(p^2)$ , es dada por

$$\Pi_{\pi^+}(p^2) = 2\Pi_p^{ud}(p^2) \quad (4.34)$$

$$\Pi_{K^+}(p^2) = 2\Pi_p^{us}(p^2) \quad (4.35)$$

con

$$\Pi_P^{ij}(p^2) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma_5 S^i \left( k + \frac{1}{2}p \right) \gamma_5 S^j \left( k - \frac{1}{2}p \right) \right] \quad (4.36)$$

donde la traza es en el espacio de Dirac y en el espacio de color. Los superíndices corresponden al quark ( $i$ ) y al antiquark ( $j$ ). El polo en (4.33) define las masas de los mesones

$$1 + 2G\Pi_P(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \quad (4.37)$$

por lo que la ecuación (4.37) sirve para calcular las masas del pion y el kaón. Después de resolver las trazas y aplicar parametrización de Feynman en la ecuación (4.36) se obtiene (ver apéndice A.3)

$$\Pi_P^{ij}(p^2) = \frac{-\phi_i}{2M_i} + \frac{-\phi_j}{2M_j} + \frac{1}{2} \left[ p^2 - (M_i - M_j)^2 \right] I_{ij}^{(1)}(p^2) \quad (4.38)$$

donde  $\phi_i$  y  $I_{ij}^{(1)}$  son integrales divergentes. Las ecuaciones para  $\phi_i$  son (4.15), (4.20) y (4.30). Las diferentes expresiones para  $I_{ij}^{(1)}$  en cada regularización son

$$I_{ij}^{(1)PT}(p^2) = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 \int_{1/\Lambda_{UV}^2}^{1/\Lambda_{IR}^2} \frac{e^{-\tau\Delta_{ij}^{(1)}}}{\tau} d\tau dx \quad (4.39)$$

para la regularización tiempo propio (ver apéndice A.6). Y donde se define

$$\Delta_{ij}^{(1)} \equiv x(M_i^2 - M_j^2) - p^2x(1-x) + M_j^2 \quad (4.40)$$

$$I_{ij}^{(1)4D}(p^2) = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \frac{-\Lambda_{4D}^2}{\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(1)}} + \ln(\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(1)}) - \ln(\Delta_{ij}^{(1)}) \right] \quad (4.41)$$

para el corte dimensional en 4 dimensiones (ver apéndice A.7). Y

$$I_{ij}^{(1)PV}(p^2) = -\frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \ln(\Delta_{ij}^{(1)}) - \frac{1}{2} \ln(\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)}) - \frac{1}{2} \ln(\Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)}) \right] \quad (4.42)$$

para la regularización Pauli–Villars (ver apéndice A.8). Además  $\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)}$  se obtiene de  $\Delta_{ij}^{(1)}$  al hacer la sustitución  $M_j \rightarrow \Lambda_{PV}$ .

### 4.3. Constante de acoplamiento pion-quark

Al considerar la dispersión de dos quarks de sabores  $j$  e  $i$  en el modelo NJL se obtiene la siguiente amplitud de dispersión [24]

$$iU_{ij}(k^2) = (i\gamma_5)T_i \left( \frac{2iG}{1 + 2G\Pi_P(k^2)} \right) (i\gamma_5)T_j \quad (4.43)$$

donde  $G$  es la constante de acoplamiento en el lagrangiano del modelo Nambu–Jona-Lasinio en la ecuación (3.32),  $T_i$  y  $T_j$  son  $\lambda_3$  para  $\pi^0$ ,  $T_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$ ,  $T_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \mp i\lambda_2)$  para  $\pi^+$  y  $\pi^-$  y  $T_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$ ,  $T_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_4 \mp i\lambda_5)$ . Se expande la ecuación (4.43) alrededor de  $k^2 = m^2$  y considerando que  $1 + 2G\Pi_P(k^2 = m^2) = 0$  se obtiene

$$iU_{ij}(k^2) = (i\gamma_5)T_i \frac{-i \left( \frac{\partial \Pi_{q\bar{q}}}{\partial k^2} \right)^{-1}}{k^2 - M^2} (i\gamma_5)T_j \quad (4.44)$$

donde  $m^2$  es la masa del mesón, por ejemplo del pion o del kaon. Por otra parte la matriz de dispersión puede ser obtenida del siguiente lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L}_{\alpha q\bar{q}} = ig_{\alpha q\bar{q}} \bar{\psi}(x) \gamma_5 \tau \cdot P \psi(x) \quad (4.45)$$

donde  $\alpha = \pi, K$ . La amplitud de dispersión es

$$iU_{ij}(k^2) = (i\gamma_5)T_i \frac{-ig_{\alpha q\bar{q}}^2}{k^2 - M^2} (i\gamma_5)T_j \quad (4.46)$$

Comparando (4.43) y (4.46) se obtiene

$$g_{\alpha q\bar{q}}^{-2} = \left. \frac{\partial \Pi_{P\bar{q}}}{\partial k^2} \right|_{k^2=m^2} \quad (4.47)$$

que es la constante de acoplamiento efectivo  $\bar{q}q$ -meson en términos de grados de libertad de quarks.

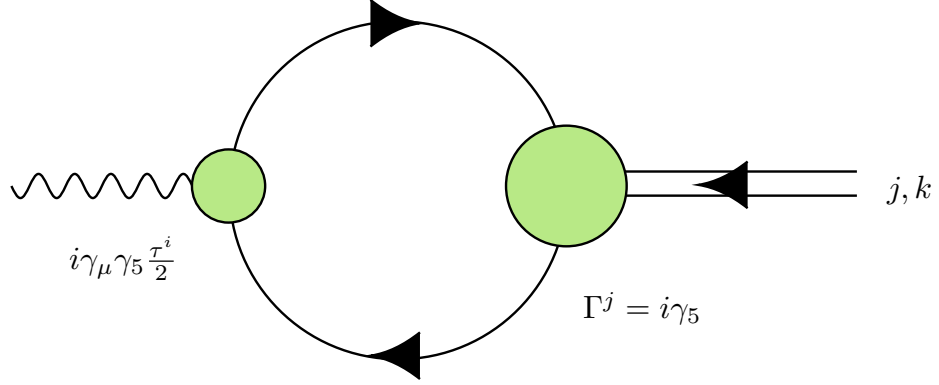


Figura 4.2: Diagrama de Feynman para obtener la constante de decaimiento. Las dos líneas con la flecha representan un mesón pseudoescalar y la línea ondulada es un campo vectorial axial externo.

#### 4.4. Constante de decaimiento

Usando el diagrama de Feynman de la figura 4.2 se define la constante de decaimiento del mesón pseudoescalar

$$\left\langle 0 \left| \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{2} \tau_a \right| \alpha_b(p) \right\rangle = ip_\mu f_\alpha \delta_{ab} \quad (4.48)$$

Lo que da como resultado [24]

$$ip_\mu f_\alpha = -N_C g_{\alpha q\bar{q}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \left[ \gamma_\mu \gamma_5 S \left( k + \frac{1}{2} p \right) \gamma_5 S \left( k - \frac{1}{2} p \right) \right] \quad (4.49)$$

donde la traza es solo en el espacio de Dirac y  $p^2 = m^2$ ,  $m$  la masa del mesón. La constante de decaimiento determina la fuerza de los decaimientos leptónicos. Por ejemplo para el pion con el decaimiento  $\pi^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$ ,  $\ell = e, \mu$  se tiene [25]

$$\Gamma^{(0)}(\pi \rightarrow \ell \nu) = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 f_\pi^2}{8\pi} m_\pi m_\ell^2 \left( 1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2} \right)^2 \quad (4.50)$$

Luego de resolver las trazas de la ecuación (4.49) (ver apéndice A.4) se obtiene

$$f_\alpha = \frac{g_{\alpha q\bar{q}}(M_j + M_i)}{2} I_{ij}^{(1)}(p^2) - \frac{g_{\alpha q\bar{q}}}{p^2} (M_i - M_j) I_{ij}^{(2)}(p^2) \quad (4.51)$$

donde  $I_{ij}^{(1)}(p^2)$  esta dada por las ecuaciones (4.39), (4.41) y (4.42). En la regularización de tiempo propio  $I_{ij}^{(2)}(p^2)$  es (ver apéndice A.6)

$$I_{ij}^{(2)PT}(p^2) = \frac{p^2}{2} I_{ij}^{(1)}(p^2) - \frac{p^2 N_C}{4\pi^2} \int_0^1 x \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} \frac{e^{-\tau \Delta_{ij}^{(1)}}}{\tau} dx d\tau \quad (4.52)$$

Para el corte en 4 dimensiones se obtiene (ver apéndice A.7)

$$I_{ij}^{(2)4D}(p^2) = \frac{p^2}{2} I_{ij}^{(1)}(p^2) - \frac{p^2 N_C}{4\pi^2} \int_0^1 x \left[ \frac{-\Lambda_{4D}^2}{\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(1)}} + \ln\left(\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(1)}\right) - \ln\left(\Delta_{ij}^{(1)}\right) \right] dx \quad (4.53)$$

Y para la regularización de Pauli–Villars el resultado es (ver apéndice A.8)

$$I_{ij}^{(2)PV}(p^2) = \frac{p^2 N_C}{8\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \ln\left(\Delta_{ij}^{(1)}\right) - \frac{3}{4} \ln\left(\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)} \Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\Delta_{\Lambda_{PV}\Lambda_{PV}}^{(1)}\right) \right] - \frac{p^2 N_C}{4\pi^2} \int_0^1 x dx \left[ \ln\left(\Delta_{ij}^{(1)}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)}\right) \right] \quad (4.54)$$

## 4.5. Resultados numéricos

Nuestro modelo tiene 4 parámetros (consideramos  $m_u = m_d$ ),  $m_s$ ,  $G$  y el cut-off  $\Lambda$  (que es diferente para cada método de regularización). Para obtener nuestros parámetros que fueron utilizados en este trabajo fijamos la masa dinámica del quark u, las masas del kaón y del pion en  $m_K = 0.495$  GeV y  $m_\pi = 0.14$  GeV y la constante de decaimiento del pion en  $f_\pi = 0.093$  MeV en todos los esquemas de regularización. Usamos diferentes masas vestidas para el quark u:  $M_u = 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40$  GeV. Los parámetros se observan en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3. A cada renglón de las tablas le corresponde una masa fija del quark u. Para la masa desnuda de los quarks u y d consideramos que  $m_u = m_d$ , lo cual es una buena aproximación ya que se ha mostrado que tiene efectos despreciables en la constante de decaimiento y de acoplamiento [26]. Empíricamente se conocen que  $m_s/m_u = 27.3 \pm 0.7$  [1],  $f_K/f_\pi = 1.1928(26)$  [27] y a través de lattice QCD se conoce  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle = 1.08 \pm 0.16$ . [28].

Para comparar los resultados que obtuvimos con los datos empíricos comparamos si una predicción esta dentro del margen de error del dato reportado, por ejemplo en la regularización de tiempo propio con  $M_u = 0.25$  GeV la predicción es  $m_s/m_u = 27.69$  (tabla 4.1) que esta dentro de  $m_s/m_u = 27.3 \pm 0.7$ .

Tabla 4.1: Parámetros utilizados en la regularización tiempo propio (PT) obtenidos al fijar  $M_u$ ,  $m_\pi$ ,  $m_K$  y  $f_\pi$ .

$m_u$ (GeV)	$m_s$ (GeV)	$m_s/m_u$	$G$ (GeV <sup>-2</sup> )	$\Lambda_{PT}$ (GeV)
0.0035	0.117	32.96	2.06	1.32
0.0076	0.212	27.69	5.55	0.88
0.0114	0.280	24.54	9.90	0.73
0.0143	0.325	22.70	14.53	0.67
0.0164	0.356	21.66	19.04	0.65

Por lo tanto en ese caso la predicción es buena y se dirá que acertó. Sin embargo, si dos predicciones están dentro del error de la medición entonces aquella que este más cercana al valor medio diremos que es mejor.

En base a los resultados empíricos se observa en las tablas 4.1, 4.7 y 4.4 que para el método de regularización de tiempo propio los parámetros que mejor se ajustan a los valores experimentales de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle$  son aquellos con  $M_u = 0.25$  GeV ( $m_s/m_u$  1% más grande que el valor medio experimental,  $f_K/f_\pi$  1% más grande que el valor medio experimental y  $\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle$  10% más grande que el valor medio experimental), resultado similares a los obtenidos a Y. Ninomiya, W. Bentz y I.C. Cloët [29], pero que difiere del valor típicamente escogido de  $M_u = 0.4$  GeV.

Para el método de corte 4 dimensional considerando las tablas 4.2, 4.8 y 4.5,  $m_s/m_u$  y  $f_K/f_\pi$  se acercan más al valor experimental cuando  $M_u = 0.25$  GeV ( $m_s/m_u$  5% más pequeño que el valor medio reportado y  $f_K/f_\pi$  3% más pequeño que el valor reportado) y  $\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle$  cuando  $M_u = 0.30$  GeV (13% más grande que el valor medio reportado).

Finalmente para la regularización Pauli–Villars  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  coinciden mejor cuando  $M_u = 0.30$  GeV (respectivamente 3% y 2% más pequeños que el valor medio empírico) y  $\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle$  es más razonable a [28] cuando  $M_u = 0.25$  GeV (6% más pequeño que el valor experimental). Esto se puede observar de las tablas 4.3, 4.3 y 4.6.

Por lo tanto los parámetros que más coinciden con datos empíricos en los 3 métodos de regularización son aquellos que tienen una masa entre  $M_u = 0.25$  y  $M_u = 0.30$  GeV. Para cada  $M_u$ , los métodos de regularización que mejor dan resultados fueron los siguientes. Para  $M_u = 0.20$  GeV la regularización 4D se acercó más a los valores medios reportados de  $m_s/m_u$  y  $f_K/f_\pi$ , pero PV fue mejor para el valor de  $\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle$ . Por lo tanto el corte 4 dimensional es mejor cuando  $M_u = 0.20$  GeV. En  $M_u = 0.25$  GeV, la regularización PT predijo con mayor acierto  $m_s/m_u$  y  $f_K/f_\pi$  pero de nuevo PV fue mejor para el valor de  $\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle$ . Sin embargo para  $M_u = 0.25$  GeV la regularización de tiempo propio es la que más se acerca a los datos experimentales. En la región de  $M_u = 0.30$  GeV la regularización Pauli–



Tabla 4.2: Parámetros utilizados en el corte 4 dimensional (4D) obtenidos al fijar  $M_u$ ,  $m_\pi$ ,  $m_K$  y  $f_\pi$ .

$m_u$ (GeV)	$m_s$ (GeV)	$m_s/m_u$	$G$ (GeV $^{-2}$ )	$\Lambda_{4D}$ (GeV)
0.0034	0.102	29.76	1.97	1.34
0.0059	0.154	25.92	4.28	0.96
0.0076	0.182	23.99	6.57	0.82
0.0085	0.197	22.99	8.63	0.77
0.0090	0.202	22.49	10.42	0.74

Tabla 4.3: Parámetros utilizados en la regularización Pauli–Villars (PV) obtenidos al fijar  $M_u$ ,  $m_\pi$ ,  $m_K$  y  $f_\pi$ .

$m_u$ (GeV)	$m_s$ (GeV)	$m_s/m_u$	$G$ (GeV $^{-2}$ )	$\Lambda_{PV}$ (GeV)
0.0037	0.123	33.30	2.12	1.31
0.0070	0.207	29.23	5.09	0.92
0.0102	0.270	26.50	8.80	0.79
0.0129	0.318	24.60	13.10	0.74
0.0154	0.359	23.22	17.96	0.73

Tabla 4.4: Constantes de acoplamiento y de decaimiento usando regularización PT.

$M_u$ (GeV)	$g_\pi$ (GeV)	$g_K$ (GeV)	$f_\pi$ (GeV)	$f_K$ (GeV)	$f_K/f_\pi$	$G_\rho$ (GeV $^{-2}$ )
0.20	2.05	2.21	0.093	0.131	1.41	3.00
0.25	2.57	2.77	0.093	0.113	1.21	4.25
0.30	3.09	3.32	0.093	0.102	1.09	5.90
0.35	3.62	3.86	0.093	0.095	1.02	8.12
0.40	4.15	4.38	0.093	0.091	0.98	11.04

Tabla 4.5: Constantes de acoplamiento y de decaimiento usando el corte 4 dimensional.

$M_u$ (GeV)	$g_\pi$ (GeV)	$g_K$ (GeV)	$f_\pi$ (GeV)	$f_K$ (GeV)	$f_K/f_\pi$	$G_\rho$ (GeV $^{-2}$ )
0.20	2.09	2.21	0.093	0.150	1.31	1.34
0.25	2.62	2.81	0.093	0.129	1.16	0.96
0.30	3.15	3.39	0.093	0.117	1.08	0.82
0.35	3.69	3.97	0.093	0.110	1.04	0.77
0.40	4.23	4.53	0.093	0.105	1.01	0.74

Tabla 4.6: Constantes de acoplamiento y de decaimiento usando regularización PV.

$M_u$ (GeV)	$g_\pi$ (GeV)	$g_K$ (GeV)	$f_\pi$ (GeV)	$f_K$ (GeV)	$f_K/f_\pi$
0.20	2.09	2.08	0.093	0.136	1.46
0.25	2.62	2.63	0.093	0.120	1.28
0.30	3.16	3.22	0.093	0.109	1.17
0.35	3.70	3.82	0.093	0.102	1.10
0.40	4.24	4.44	0.093	0.097	1.04

Tabla 4.7: Masas obtenidas en el método de regularización tiempo propio.

$\Lambda_{PT}$ (GeV)	$M_u$ (GeV)	$M_s$ (GeV)	$\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$	$m_\pi$ (GeV)	$m_K$ (GeV)
1.32	0.20	0.47	1.77	0.14	0.495
0.88	0.25	0.50	1.19	0.14	0.495
0.73	0.30	0.54	0.89	0.14	0.495
0.67	0.35	0.57	0.74	0.14	0.495
0.65	0.40	0.61	0.66	0.14	0.495

Tabla 4.8: Masas obtenidas en el corte 4 dimensional.

$\Lambda_{4D}$ (GeV)	$M_u$ (GeV)	$M_s$ (GeV)	$\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$	$m_\pi$ (GeV)	$m_K$ (GeV)
1.34	0.20	0.47	1.87	0.14	0.495
0.96	0.25	0.50	1.43	0.14	0.495
0.82	0.30	0.54	1.22	0.14	0.495
0.77	0.35	0.57	1.10	0.14	0.495
0.74	0.40	0.61	1.04	0.14	0.495

Tabla 4.9: Masas obtenidas en el método de regularización Pauli–Villars.

$\Lambda_{PV}$ (GeV)	$M_u$ (GeV)	$M_s$ (GeV)	$\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$	$m_\pi$ (GeV)	$m_K$ (GeV)
1.31	0.20	0.43	1.58	0.14	0.495
0.92	0.25	0.45	1.02	0.14	0.495
0.79	0.30	0.48	0.73	0.14	0.495
0.74	0.35	0.51	0.57	0.14	0.495
0.73	0.40	0.54	0.47	0.14	0.495

Villars es la que tiene mayor éxito a excepción de  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$  donde el corte 4 dimensional tiene el valor más indicado. La regularización Pauli–Villars de nuevo acierta a los valores reportados de  $m_s/m_u$  y  $f_K/f_\pi$  y la regularización 4D lo hace para  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$  cuando  $M_u = 0.35$  GeV. Esto mismo se repite para  $M_u = 0.40$  GeV. Por lo tanto de los 5 valores de  $M_u$  la regularización de Pauli–Villars es mejor en 3. Sin embargo, la combinación del método de regularización y masa  $M_u$  cuyas predicciones están más cercanas al valor promedio de los datos experimentales son aquellas con la regularización tiempo propio y  $M_u = 0.25$  GeV.



## Capítulo 5

# Factores de forma electromagnéticos del pion y el kaón

*Conforme pasa el tiempo, es cada vez  
más evidente que las normas que el  
matemático encuentra interesantes son  
las mismas por las que ha optado la  
naturaleza.*

Paul Dirac

**RESUMEN:** Se muestran los resultados de los factores de forma y se muestra su dependencia del método de regularización. Finalmente se analiza y se explica su dependencia.

### 5.1. Factores de forma electromagnéticos

Los factores de forma electromagnéticos tienen su importancia en el estudio de la transición entre QCD a bajas energías y QCD a altas energías. Así como para conocer aspectos de la estructura de los hadrones, por ejemplo del pion y el kaón. Durante la última década se ha podido generar confiabilidad en la electroproducción de piones en mediciones del JLab 6 GeV [30, 31, 32, 33, 34] como una herramienta para la extracción de factores de forma. En el futuro se espera realizar mediciones en el 12 GeV JLab lo que permitirá extraer los factores de forma del pion y el kaón a regiones de transición entre el dominio QCD perturbativo y el dominio QCD no perturbativo. Para el kaón se realizará mediciones con  $Q^2 \approx 5 \text{ GeV}^2$  [35]. En este trabajo

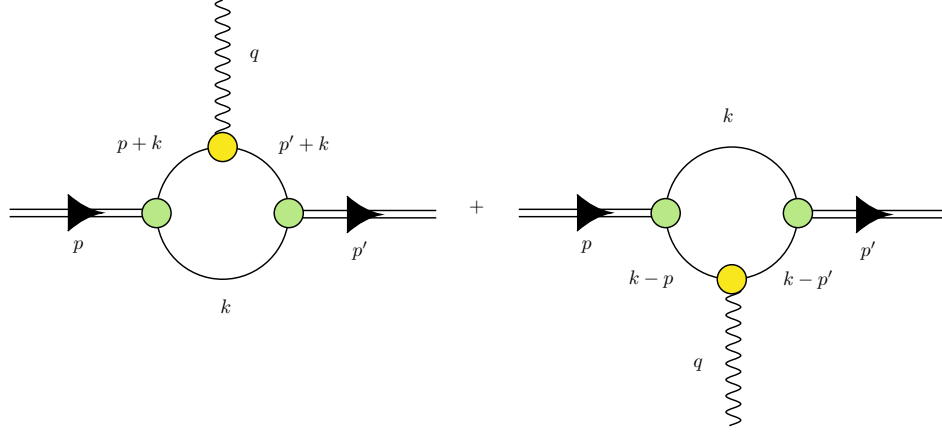


Figura 5.1: Representación de los factores de forma electromagnéticos para el kaón y el pion. El diagrama de Feynman de la izquierda representa el acoplamiento quark-fotón. El derecho el acoplamiento antiquark-fotón. El vértice es  $\frac{1}{2}e \left( \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} + \lambda_3 \right) \gamma^\mu$ .

nos centraremos en los factores de forma en la región space-like ( $Q^2 > 0$ ) donde hay poco esfuerzo teórico [36]. La región de time-like corresponde a ( $Q^2 < 0$ ), mediciones en esta región se han hecho para el kaón en  $Q^2 > -10$   $\text{GeV}^2$  [37].

Para poder hablar de los factores de forma hay que introducir la interacción electromagnética con el pion o el kaón. Para esto es necesario acoplar el campo electromagnético al lagrangiano de NJL. Esto se logra con la sustitución mínima:  $i\bar{\psi} \rightarrow i\bar{\psi} - \widehat{Q} A_\mu \gamma^\mu$ . Donde  $A_\mu$  es el 4 potencial electromagnético,  $e$  es la carga del positrón y  $\widehat{Q} = \text{diag}[e_u, e_d, e_s] = \frac{e}{2} \left( \lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right)$ .  $\lambda_3$  y  $\lambda_8$  son las matrices de Gell-Mann en el espacio de sabor. La corriente electromagnética se expresa proporcional a los factores de forma. Esto se hace considerando la invarianza de Lorentz y la conservación de la corriente [38]. Por lo tanto la corriente electromagnética para el kaón y el pion es

$$J_\alpha^\mu(p, p') = \langle \alpha(p') | \widehat{J}^\mu | \alpha(p) \rangle = (p^\mu + p'^\mu) F_\alpha(Q^2) \quad (5.1)$$

donde  $\alpha = \pi, K$ .  $p$  y  $p'$  son los 4 momentos inicial y final del mesón pseudoescalar.  $q = p' - p \equiv -Q^2$ , con  $q^\mu$  el 4 momento transferido por el fotón virtual.  $\widehat{J}^\mu$  es la corriente electromagnética.  $|\alpha(p)\rangle$  representa el estado del pion o el kaón y  $F_\alpha(Q^2)$  es el factor de forma electromagnético del kaón o del pion.

El vértice desnudo quark-fotón es

$$\Lambda_{\gamma q}^\mu(p, p') = \frac{1}{2} \left( \lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right) \gamma^\mu \quad (5.2)$$

Que también se puede expresar como

$$\Lambda_{\gamma q}^{\mu}(p', p) = \begin{pmatrix} [e_u \frac{1+\tau_3}{2} + e_d \frac{1-\tau_3}{2}] \gamma^{\mu} & 0 \\ 0 & e_s \gamma^{\mu} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Usando esta expresión y el diagrama de Feynman de la figura 5.1, se obtiene el factor de forma. En la figura 5.1 un diagrama el fotón se acopla al quark y en el otro el fotón se acopla al antiquark. El resultado final es

$$J_{\alpha}^{\mu}(p, p') = J_{i/\alpha}^{\mu}(p, p') + J_{j/\alpha}^{\mu}(p, p') \quad (5.4)$$

$$= e_i \Lambda_{i/\alpha}^{\mu}(p, p') + e_j \Lambda_{j/\alpha}^{\mu}(-p, -p') \quad (5.5)$$

donde  $e_i$  es la carga eléctrica del quark  $i$ , en fracciones de la carga del protón y  $\alpha$  es  $\pi^+$  o  $K^+$ . Ahora el término  $\Lambda_{i/\alpha}^{\mu}(p, p')$  es [24]

$$\Lambda_{i/\alpha}^{\mu}(p, p') = 2i N_C g_{\alpha q \bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr_D [\gamma_5 S_i(p' + k) \gamma^{\mu} S_i(p + k) \gamma_5 S_j] \quad (5.6)$$

donde la traza es en el espacio de Dirac y

$$S_i(p' + k) = \frac{\not{k} + \not{p}' + M_i}{(k + p')^2 - M_i^2} \quad (5.7)$$

$$S_j(k) = \frac{\not{k} + M_j}{k^2 - M_j^2} \quad (5.8)$$

Definimos el numerador como

$$N^{\mu} \equiv tr_D [\gamma_5 (\not{k} + \not{p}' + M_i) \gamma^{\mu} (\not{k} + \not{p} + M_i) \gamma_5 (\not{k} + M_j)] \quad (5.9)$$

Y el denominador

$$D \equiv [(k + p')^2 - M_i^2][(k + p)^2 - M_i^2][k^2 - M_j^2] \quad (5.10)$$

Por lo que

$$\Lambda^{\mu}(p, p') = 2i N_C g_{\alpha q \bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{N}{D} \quad (5.11)$$

Trabajando en el numerador

$$N^{\mu} = tr_D [(\gamma_5 \not{k} \gamma^{\mu} + \gamma_5 \not{p}' \gamma^{\mu} + \gamma_5 M_i \gamma^{\mu})(\not{k} \gamma_5 + \not{p} \gamma_5 + M_i \gamma_5)(\not{k} + M_j)] \quad (5.12)$$

Realizamos todos los productos

$$\begin{aligned} N^{\mu} = tr_D [ & -\not{k} \gamma^{\mu} \not{k} \not{k} - \not{p}' \gamma^{\mu} \not{k} \not{k} - \not{k} \gamma^{\mu} \not{p} \not{k} - \not{p}' \gamma^{\mu} \not{p} \not{k} \\ & - M_i^2 \gamma^{\mu} \not{k} + M_i M_j \gamma^{\mu} \not{k} + M_i M_s \gamma^{\mu} \not{p} + M_i M_j \not{k} \gamma^{\mu} + M_i M_j \not{p}' \gamma^{\mu}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Usando las propiedades de la matrices gamma (apéndice A.2)

$$\begin{aligned}
 N^\mu &= -4k^\mu k^2 - 4p'^\mu k^2 + 4p' \cdot k k^\mu - 4p' \cdot k k^\mu \\
 &\quad - 4p \cdot k k^\mu + 4k \cdot p k^\mu - 4k^2 p^\mu \\
 &\quad + 4k^\mu (-M_i^2 + M_i M_j + M_i M_j) \\
 &\quad + 4p^\mu M_i M_j + 4p'^\mu M_i M_j
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Eliminando los términos iguales queda

$$\begin{aligned}
 N^\mu &= -4k^2 [k^\mu + p'^\mu + p^\mu] - 4p \cdot k p'^\mu + 4p' \cdot p k^\mu \\
 &\quad - 4p' \cdot k p^\mu + 4k^\mu (-M_i^2 + 2M_i M_s) + 4M_i M_s (p^\mu + p'^\mu)
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Sumamos un cero,  $4M_j^2(k^\mu + p'^\mu + p^\mu) - 4M_j^2(k^\mu + p'^\mu + p^\mu)$ , y se obtiene

$$\begin{aligned}
 N^\mu &= -4[(k^2 - M_j^2)(k^\mu + p'^\mu + p^\mu)] - 4p \cdot k p'^\mu + 4p' \cdot p k^\mu \\
 &\quad - 4p' \cdot k p^\mu + 4k^\mu (-M_i^2 + 2M_i M_j) + 4M_i M_j (p'^\mu + p^\mu) \\
 &\quad - 4M_j^2(k^\mu + p'^\mu + p^\mu)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Sumando otro cero,  $4(p^\mu + p'^\mu)(-M_i^2 + 2M_i M_j) - 4(p^\mu + p'^\mu)(-M_i^2 + 2M_i M_j)$ , y reacomodando términos

$$\begin{aligned}
 N^\mu &= -4[(k^2 - M_j^2)(k^\mu + p'^\mu + p^\mu) - M_i^2(p'^\mu + p^\mu) \\
 &\quad + (M_j - M_i)^2(k^\mu + p'^\mu + p^\mu) + p \cdot k p'^\mu - p \cdot p' k^\mu + p \cdot k p^\mu \\
 &\quad + M_i M_j (p'^\mu + p^\mu)]
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Definimos

$$N_1^\mu \equiv k^\mu + p'^\mu + p^\mu \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
 N_2^\mu &\equiv -M_i^2(p'^\mu + p^\mu) + (M_j - M_i)^2(k^\mu + p'^\mu + p^\mu) \\
 &\quad + p \cdot k p'^\mu - p \cdot p' k^\mu + p \cdot k p^\mu + M_i M_j (p'^\mu + p^\mu)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Por lo tanto

$$N^\mu = -4[(k^2 - M_j^2)N_1^\mu + N_2^\mu] \tag{5.20}$$

Luego la ecuación (5.11) queda

$$\Lambda_{i/\alpha}^\mu(p, p') = 2iN_C g_{\alpha q \bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-4[(k^2 - M_j^2)N_1^\mu + N_2^\mu]}{[(k+p)^\mu - M_i^2][(k+p)^\mu - M_i^2][k^2 - M_j^2]} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{i/\alpha}^\mu(p, p') &= -8iN_C g_{\alpha q \bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{N_1^\mu}{[(k+p)^\mu - M_i^2][(k+p)^\mu - M_i^2]} \\
 &\quad - 8iN_C g_{\alpha q \bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{N_2^\mu}{[(k+p)^\mu - M_i^2][(k+p)^\mu - M_i^2][k^2 - M_j^2]}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$



donde se definen las siguientes expresiones

$$I_i^{(3)\mu} = -8iN_C g_{\alpha q\bar{q}}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_1^\mu}{[(k+p')^2 - M_i^2][(k+p)^2 - M_i^2]} \quad (5.23)$$

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = -8iN_C g_{\alpha q\bar{q}}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_2^\mu}{[(k+p')^2 - M_i^2][(k+p)^2 - M_i^2][k^2 - M_j^2]} \quad (5.24)$$

Por lo tanto

$$\Lambda_{i/\alpha}^\mu(p, p') = I_i^{(3)\mu} + I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) \quad (5.25)$$

Aplicando parametrización de Feynman se obtiene (ver apéndice A.5)

$$I_i^{(3)\mu} = (p^\mu + p'^\mu)L_i^{(3)} \quad (5.26)$$

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = (p^\mu + p'^\mu)L_{ij}^{(4)}(p^2) \quad (5.27)$$

donde

$$L_i^{(3)} \equiv 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - \Delta_i^{(2)})^2} \quad (5.28)$$

$$L_{ij}^{(4)}(p^2) \equiv -4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{\Delta_{ij}^{(3)} dz dx}{(k^2 - \Delta_{ij}^{(4)})^3} \quad (5.29)$$

y con

$$\Delta_i^{(2)} \equiv -q^2(x-x^2) + M_i^2 \quad (5.30)$$

$$\Delta_{ij}^{(4)} \equiv M_j^2 + p^2((x+z)^2 - x - z) - q^2xz - (M_j^2 - M_i^2)(x+z) \quad (5.31)$$

Por lo tanto la ecuación (5.6) se vuelve

$$\Lambda_{i/\alpha}^\mu(p, p') = (p^\mu + p'^\mu) \left[ L_i^{(3)} + L_{ij}^{(4)}(m_\alpha^2) \right] \quad (5.32)$$

Para  $\Lambda_{j/\alpha}^\mu(-p, -p')$  solo se considera el cambio de variable  $p \rightarrow -p$ ,  $p' \rightarrow -p'$  y el cambio  $i \leftrightarrow j$ . Finalmente los factores de forma estaran dados por

$$F_\alpha^{(bare)}(Q^2) = e_i \left( L_i^{(3)} + L_{ij}^{(4)}(m_\alpha^2) \right) + e_j \left( L_j^{(3)} + L_{ji}^{(4)}(m_\alpha^2) \right) \quad (5.33)$$

donde  $\alpha = \pi^+, K^+$  y la etiqueta (*bare*) quiere decir que el factor de forma es desnudo. Las expresiones para  $L_i^{(3)}$  en regularización PT, corte 4 dimensional y regularización PV están dadas por las ecuaciones (A.102), (A.121) y (A.137) respectivamente. Las expresiones para  $L_{ij}^{(4)}(p^2)$  en regularización

PT, corte 4 dimensional y regularización PV están dadas por las ecuaciones (A.104), (A.124) y (A.140) respectivamente. La contribución del quark  $i$  al factor de forma electromagnético del meson  $\alpha$  es

$$F_{\alpha}^{ij}(Q^2) = L_i^{(3)} + L_{ij}^{(4)}(m_{\alpha}^2) \quad (5.34)$$

donde  $i = u, d, s$  es el índice del quark,  $j = \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$  es el superíndice del antiquark y  $\alpha = \pi^+, K^+$ . Por lo tanto en términos de la ecuación (5.34), la ecuación (5.33) se vuelve

$$\begin{aligned} F_{\pi^+}^{(bare)}(Q^2) &= e_u F_{\pi^+}^{ud}(Q^2) - e_d F_{\pi^+}^{du}(Q^2) \\ F_{K^+}^{(bare)}(Q^2) &= e_u F_{K^+}^{us}(Q^2) - e_s F_{K^+}^{su}(Q^2) \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde  $e_i$  es la carga eléctrica del quark  $i$ , en fracciones de la carga del protón.

### 5.1.1. Resultados numéricos

Las ecuaciones (5.35) las graficamos numéricamente para diferentes masas del quark  $u$ ,  $M_u = 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4$ . Además para dos métodos de regularización, tiempo propio y corte 4 dimensional. Los resultados se muestran en 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5. Graficamos comparado con datos de Cornell Experiment [39], NA7 Collaboration [40], JLab  $\pi$  Collaboration 2001 [30] y 2008 [31, 32, 33, 34] para el pion. Para el kaón comparamos con datos de [41].

Para el caso del pion con vértice desnudo obtuvimos que con  $M_u = 0.2$  GeV (figura 5.2a) la regularización corte 4 dimensional coincide mejor con los datos experimentales. Lo mismo sucede para  $M_u = 0.25$  GeV en la figura 5.2b. La tendencia cambia cuando  $M_u = 0.30$  GeV donde la regularización en tiempo propio es mejor que el corte 4 dimensional. Para  $M_u = 0.35$  y  $M_u = 0.40$  GeV de nuevo es mejor la predicción en corte 4 dimensional en las figuras 5.2d y 5.2e. Por lo tanto la regularización de tiempo propio es mejor en 3 de los 5 casos.

En las gráficas 5.2 y 5.4 se observa que la predicción de NJL mejora cuando  $M_u$  es mayor para el caso de regularización de tiempo propio. Caso contrario para el corte 4 dimensional, donde la mejor predicción fue para  $M_u = 0.25$  GeV y luego empeoraba mientras aumentaba la masa dinámica de  $u$ . En la figura 5.2 se aprecia que el corte 4 dimensional tiene una menor dependencia respecto a la masa vestida del quark  $u$ , esto mismo se observa en las predicciones de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_{\pi}$  y  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$ . En las figuras de 5.4 observamos que conforme  $Q^2$  crece  $Q^2 F(Q^2)$  tiende a un valor constante. Para el pion con el vértice desnudo por lo tanto la mejor predicción fue para  $M_u = 0.40$  GeV y con la regularización de tiempo propio.

En el caso del kaón en las figuras 5.3a y 5.5 el corte 4 dimensional mejoró la predicción a comparación de la regularización de tiempo propio cuando

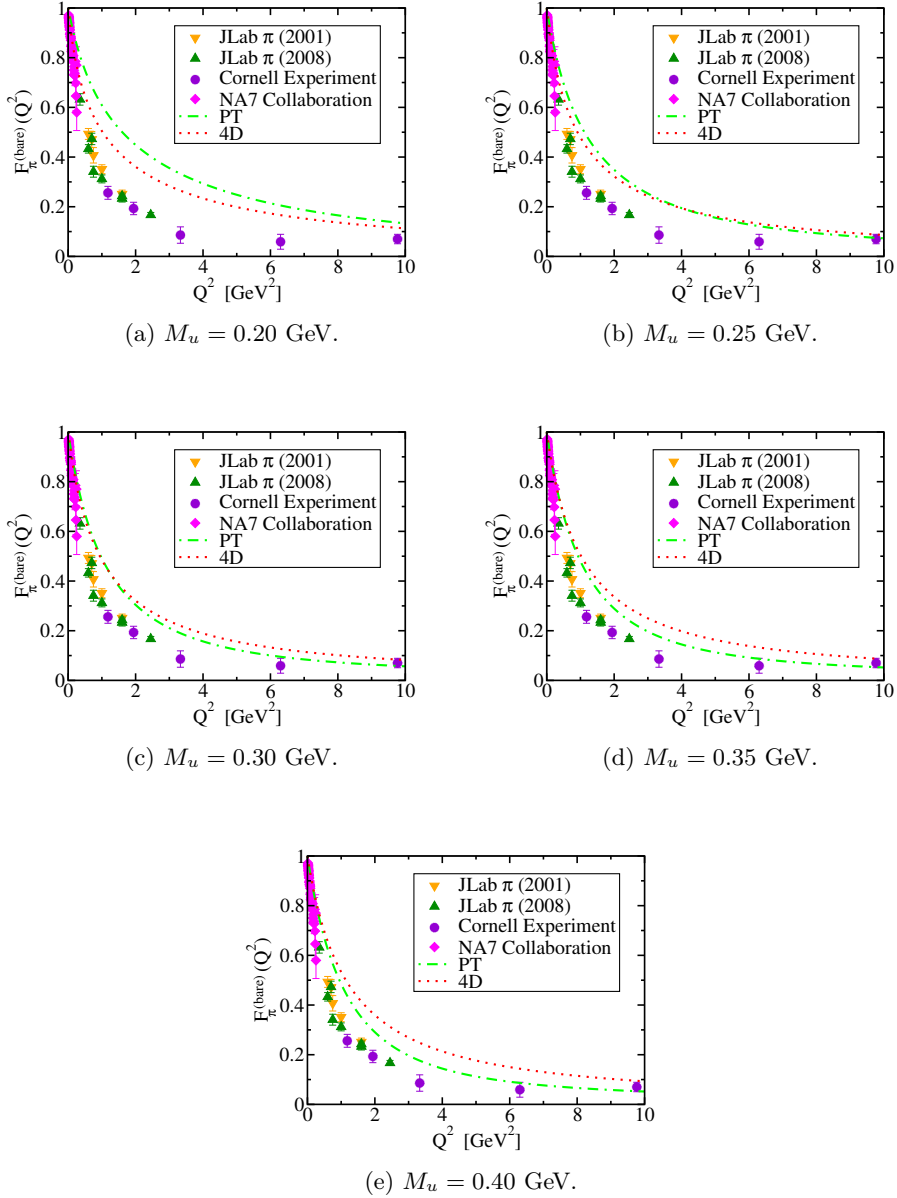


Figura 5.2: Factores de forma con vértice quark-fotón desnudo comparados con datos de Cornell Experiment, NA7 Collaboration, JLab  $\pi$  Collaboration 2001 y JLab  $\pi$  Collaboration 2008.

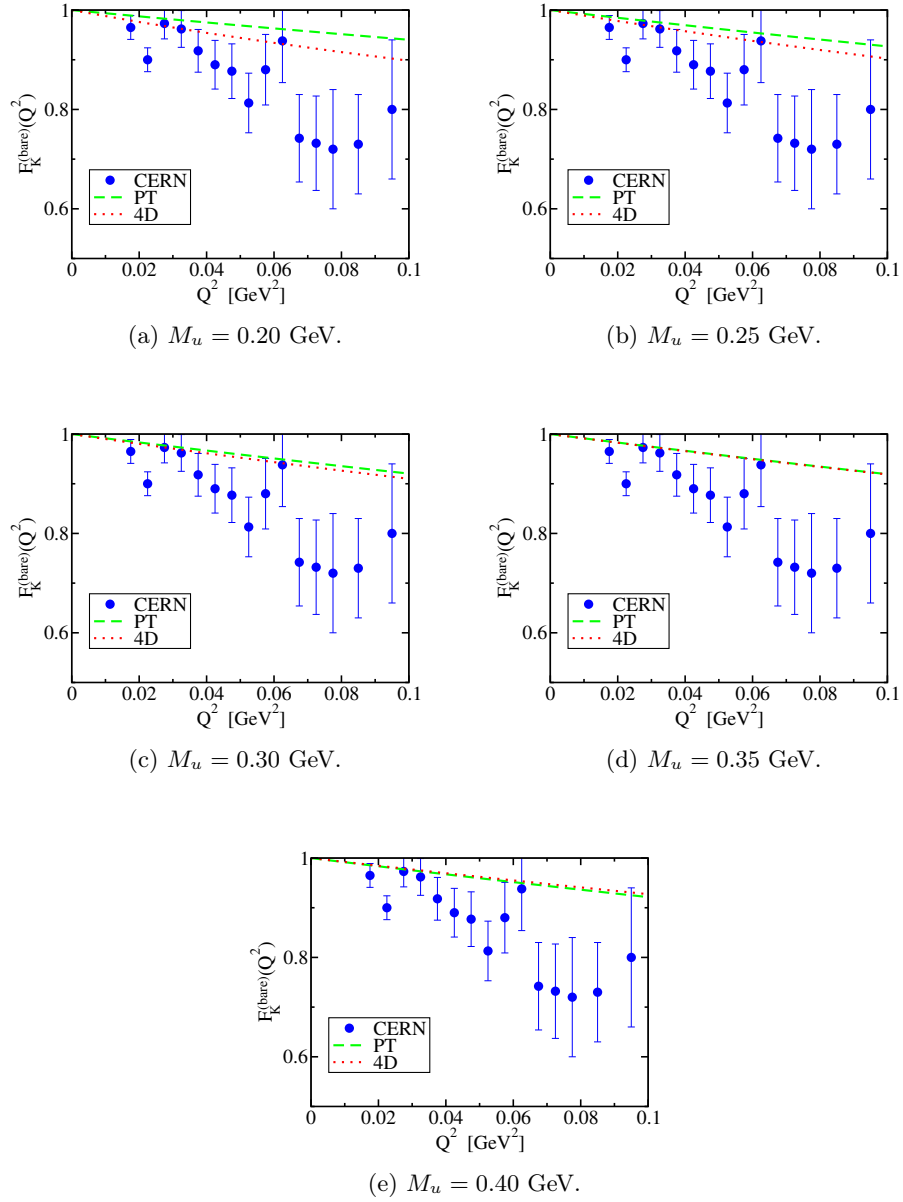


Figura 5.3: Factores de forma con vértice desnudo usando NJL en distintos esquemas de regularización junto con datos del CERN.

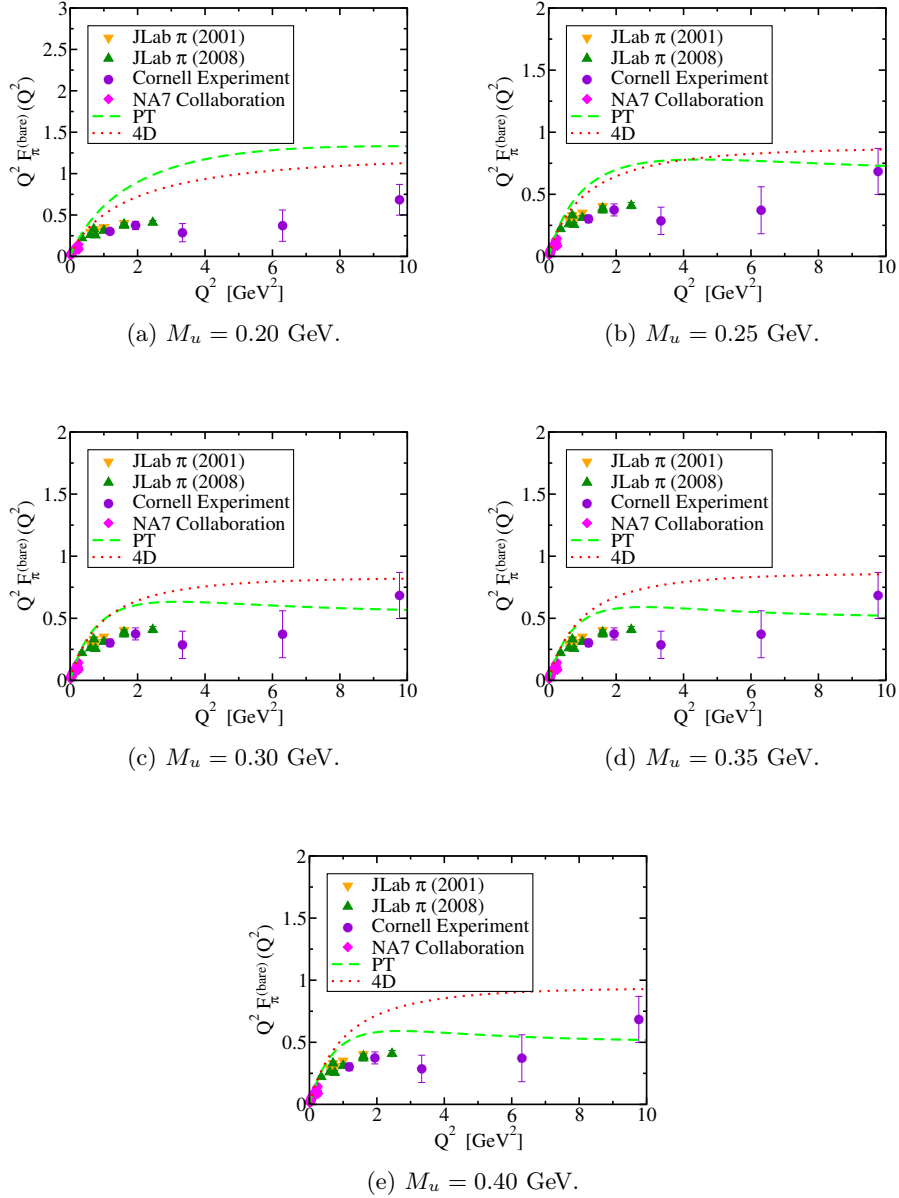


Figura 5.4: Se grafica  $Q^2 F(Q^2)$  vs  $Q^2$  comparado con datos de Cornell Experiment, NA7 Collaboration, JLab  $\pi$  Collaboration 2001 y 2008. El vértice está desnudo.

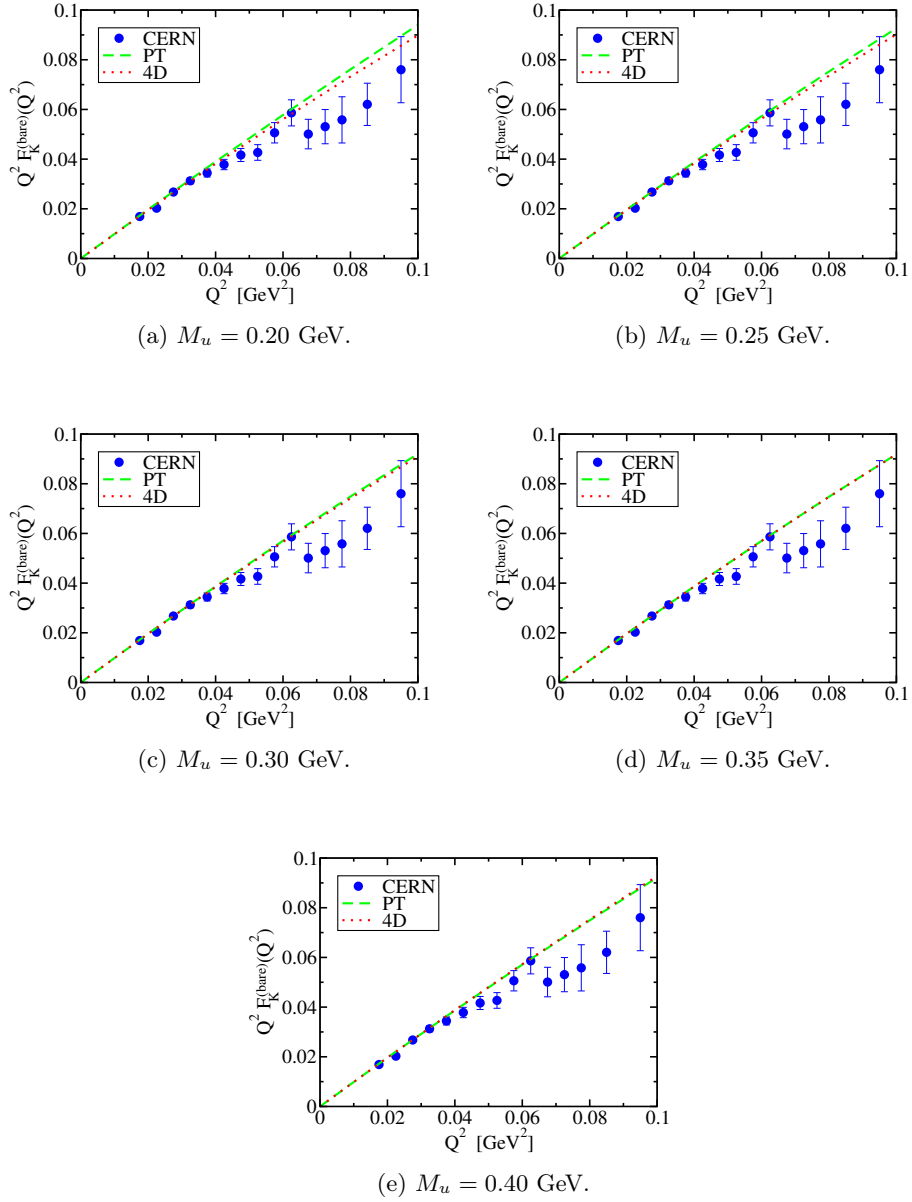


Figura 5.5: Se grafica  $Q^2 F(Q^2)$  vs  $Q^2$  en diferentes esquemas de regularización. El vértice está desnudo.

$M_u = 0.20$  GeV. Lo mismo se observa en las figuras 5.3b, 5.3c con  $M_u = 0.25$  y  $M_u = 0.30$  GeV. En la figura 5.3d ambos métodos de regularización producen básicamente los mismos resultados. Y finalmente cuando  $M_u = 0.40$  GeV la regularización tiempo propio es mejor que el corte 4 dimensional.

Con las diferentes masas dinámicas del quark u el factor de forma electromagnético del pión y el kaón, con vértice desnudo y con el método de regularización de tiempo propio, la predicción mejoró cuando  $M_u$  era grande. Para el mismo caso pero con corte dimensional en 4 dimensiones el modelo acertó más a los datos experimentales cuando  $M_u = 0.25$  GeV.

La regularización corte 4 dimensional tiene mejores resultados cuando  $M_u = 0.25$  GeV en los factores de forma electromagnéticos desnudos y en la predicción de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$ . Esto no sucede en la regularización tiempo propio donde la predicción de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$  es mejor cuando  $M_u = 0.25$  GeV pero los factores de forma electromagnéticos desnudos tienen mayor acierto en  $M_u = 0.40$  GeV esto podría significar que la regularización de tiempo propio es más afectada a la aproximación  $m_u = m_d$  ya que en ambos esquemas se uso la simetría isospín y se ha mostrado [26] que dicha aproximación tiene efectos despreciables en la constante de decaimiento y de acoplamiento pero no en los factores de forma electromagnéticos.

Las conclusiones son que la mejor predicción se logró para la regularización de tiempo propio y con  $M_u = 0.40$  GeV. Para saber cual regularización predice mejor los datos empiricos se debe de fijar la masa dinámica  $M_u$  ya que ambas regularizaciones son buenas dependiendo de cual  $M_u$  se hable. La regularización en corte 4 dimensional depende menos de  $M_u$  que la regularización de tiempo propio. La regularización corte dimensional produce las mejores predicciones en  $M_u = 0.25$  GeV en los factores de forma electromagnéticos con vértice desnudo y en la predicción de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$ , lo que no sucede con la regularización de tiempo propio.

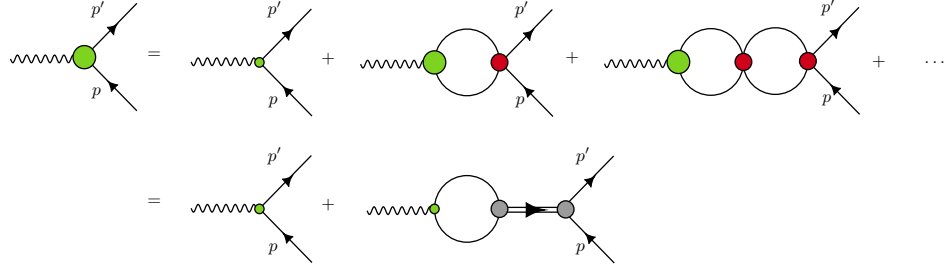


Figura 5.6: El vértice quark-fotón que incluye los estados intermedios de los mesones vectoriales. El círculo sombreado grande es la solución de la ecuación Bethe-Salpeter, que representa el vértice quark-fotón.

## 5.2. Factores de forma electromagnéticos, vértice vestido

Una forma de mejorar el factor de forma obtenido en el modelo NJL es en vez de usar un vértice de quark-fotón con el quark desnudo (es decir suponerlo puntual) es cambiando dicho vértice por uno vestido. El vértice quark-fotón vestido en el modelo NJL se obtiene al resolver la ecuación de Bethe-Salpeter en el canal vectorial. Esquemáticamente el vértice quark-fotón está dada por la figura 5.6. Por lo tanto para este caso el vértice vestido del quark-fotón que se obtiene al resolver la ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) es [24, 29]

$$\Lambda_{\gamma Q}^{BSE,\mu}(p', p) = \begin{pmatrix} \left[ \frac{1}{6} F_{1\omega}(Q^2) + \frac{\tau_3}{2} F_{1\rho}(Q^2) \right] \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} F_{1\phi}(Q^2) \gamma^\mu \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

donde

$$F_{1i}(Q^2) = \frac{1}{1 + 2G_i \Pi_{vv}(Q^2)} \quad (5.37)$$

con  $i = \omega, \rho, \phi$ .  $G_i$  es la constante de acoplamiento del mesón  $i = \omega, \rho, \phi$  y  $\Pi_{vv}(Q^2)$  se obtiene de la solución de la ecuación Bethe-Salpeter que se menciona en la sección 4.2 pero para el caso vectorial

$$\tau_{vv}(p) = \frac{-2iG_i}{1 + 2G_i \Pi_{vv}(p^2)} \quad (5.38)$$

y el término de burbuja

$$\Pi_{vv}^{ab} \left( \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) = 2iN_C \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr_D [\gamma^\mu S_a(k) \gamma^\nu S_b(k+p)] \quad (5.39)$$

La expresión para el corte 4 dimensional es (con  $a = b = u$ ) [29]

$$\begin{aligned} \Pi_{vv}^{4D}(Q^2) = & \frac{6}{\pi^2} Q^2 \int_0^1 (x-x^2) \left[ \frac{-\Lambda_{4D}^2}{\Lambda_{4D}^2 + M_u^2 + Q^2(x-x^2)} \right. \\ & \left. + \ln(\Lambda_{4D}^2 + M_u^2 + Q^2(x-x^2)) - \ln(M_u^2 + Q^2(x-x^2)) \right] dx \quad (5.40) \end{aligned}$$



Para la regularización en tiempo propio se obtiene [24]

$$\Pi_{vv}^{PT}(Q^2) = \frac{3}{\pi^2} Q^2 \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \frac{(x-x^2)e^{-\tau[Q^2(x-x^2)+M_u^2]}}{\tau} \quad (5.41)$$

En este trabajo, sin embargo, por simplicidad se considera  $G_\rho = G_\omega = G_\phi$ . Aunque mejora la predicción tomando el caso más realista  $G_\rho \neq G_\omega \neq G_\phi$  nos interesa más estudiar la dependencia del método de regularización en los factores de forma. Otra forma de obtener  $\Lambda_{\gamma Q}^\mu(p', p)$  es usar  $\Lambda_{\gamma q}^\mu(p', p)$  de la ecuación (5.3) y hacer las sustituciones  $e_u \rightarrow F_{1U}(Q^2)$ ,  $e_d \rightarrow F_{1D}(Q^2)$  y  $e_s \rightarrow F_{1S}(Q^2)$  [38]. Se obtiene

$$\Lambda_{\gamma Q}^{BSE,\mu}(p', p) = \begin{pmatrix} [F_{1U}(Q^2)^{\frac{1+\tau_3}{2}} + F_{1D}(Q^2)^{\frac{1-\tau_3}{2}}] \gamma^\mu & 0 \\ 0 & F_{1S}(Q^2) \gamma^\mu \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

Comparando las ecuaciones (5.36) y (5.42) se obtienen los factores de forma de los quarks vestidos con respecto a sus contribuciones de  $\omega$ ,  $\rho$  y  $\phi$

$$F_{1U}(Q^2) = \frac{1}{6} F_{1\omega}(Q^2) + \frac{1}{2} F_{1\rho}(Q^2) \quad (5.43)$$

$$F_{1D}(Q^2) = \frac{1}{6} F_{1\omega}(Q^2) - \frac{1}{2} F_{1\rho}(Q^2) \quad (5.44)$$

$$F_{1S}(Q^2) = -\frac{1}{3} F_{1\phi}(Q^2) \quad (5.45)$$

Finalmente los factores de forma del kaón y pion considerando quarks vestidos se obtienen al hacer la sustitución  $e_u \rightarrow F_{1U}(Q^2)$ ,  $e_d \rightarrow F_{1D}(Q^2)$  y  $e_s \rightarrow F_{1S}(Q^2)$  en las ecuaciones (5.35). Los resultados son

$$F_{\pi^+}^{(dressed)}(Q^2) = F_{1U}(Q^2) F_{\pi^+}^{ud}(Q^2) - F_{1D}(Q^2) F_{\pi^+}^{du}(Q^2) \quad (5.46)$$

$$F_{K^+}^{(dressed)}(Q^2) = F_{1U}(Q^2) F_{K^+}^{us}(Q^2) - F_{1S}(Q^2) F_{K^+}^{su}(Q^2) \quad (5.47)$$

Donde los términos  $F_{\pi^+}^{ij}$  y  $F_{K^+}^{ij}$  están dados por la ecuación (5.34). Los resultados de las ecuaciones (5.46) y (5.47) se grafican numéricamente en 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10.

### 5.2.1. Resultados numéricos

Las ecuaciones (5.46) (5.47) las graficamos numéricamente para diferentes masas del quark u,  $M_u = 0.2, 0, 25, 0.3, 0.35, 0.4$  GeV y en dos métodos de regularización, tiempo propio y corte 4 dimensional. Los resultados se muestran en 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10. De nuevo comparamos con datos empíricos de Cornell Experiment [39], NA7 Collaboration [40], JLab  $\pi$  Collaboration 2001 [30] y 2008 [31, 32, 33, 34] para el pion. Para el kaón comparamos con datos de [41]. Los resultados con el vértice vestido mejoran la predicción a comparación del vértice desnudo.

Para el pion con vértice vestido obtuvimos que para el caso de  $M_u = 0.2$  GeV (figura 5.7a) la regularización en tiempo propio es mejor predicción que el corte 4 dimensional. Lo mismo sucede para  $M_u = 0.25$ ,  $M_u = 0.30$ ,  $M_u = 0.35$  y  $M_u = 0.40$  GeV en las figuras 5.7b, 5.7c, 5.7d y 5.7e. Por lo tanto la regularización de tiempo propio es mejor en todos los casos, a diferencia del caso donde el vértice es desnudo donde era mejor en 3 de 5 casos.

En las gráficas 5.7 de los factores de forma electromagnéticos del pion observamos que la predicción de NJL mejora cuando  $M_u$  tiene valores grandes cuando se usa la regularización de tiempo propio. Esto no sucede en el corte 4 dimensional, donde la mejor predicción fue para  $M_u = 0.25$  GeV y después se alejaba de los datos empíricos mientras aumentaba la masa dinámica de  $u$ . Con el 4 corte dimensional el modelo acertó más a los datos experimentales cuando  $M_u = 0.25$  GeV. Esto mismo se cumple cuando el vértice es desnudo. En las figuras de 5.9 observamos que conforme  $Q^2$  crece  $Q^2 F(Q^2)$  tiende a un valor constante. El factor de forma electromagnético del pion con el vértice vestido con la mejor predicción fue para  $M_u = 0.40$  GeV y con la regularización de tiempo propio.

En el caso del kaón en las figuras 5.8, y 5.10 el corte 4 dimensional da mejores predicciones a comparación de la regularización de tiempo propio. En la figura 5.10d ambos métodos de regularización producen básicamente los mismos resultados. La regularización en tiempo propio no muestra una gran dependencia de  $M_u$ .

De nuevo la regularización corte 4 dimensional tiene mejores resultados cuando  $M_u = 0.25$  GeV en los factores de forma electromagnéticos vestidos y en la predicción de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$ . En la regularización tiempo propio los factores de forma electromagnéticos con vértices vestidos coinciden más con los datos empíricos en  $M_u = 0.40$  GeV, pero esto no sucede en la predicción de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$ . Ya que para el tiempo propio es mejor cuando  $M_u = 0.25$  GeV.

Concluimos que la mejor predicción para el factor de forma electromagnético con vértice vestido del pion es para la regularización de tiempo propio y con  $M_u = 0.40$  GeV. Para el factor de forma electromagnético del kaón la mejor predicción es para el corte 4 dimensional con  $M_u = 0.25$  GeV. Incluir el vértice vestido hace que la regularización de tiempo propio sea mejor para el factor de forma del pion y el corte 4 dimensional sea mejor para el factor de forma del kaón. El incluir el vértice vestido hace que la regularización de tiempo propio y el corte 4 dimensional dependa menos de  $M_u$ , lo cual es una ventaja para nosotros ya que buscamos la dependencia que tienen los métodos de regularización en los factores de forma. La regularización corte dimensional produce las mejores predicciones en  $M_u = 0.25$  GeV en los factores de forma electromagnéticos con vértice vestido o desnudo y en la predicción de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{u}u \rangle$ , esta consistencia no sucede con la

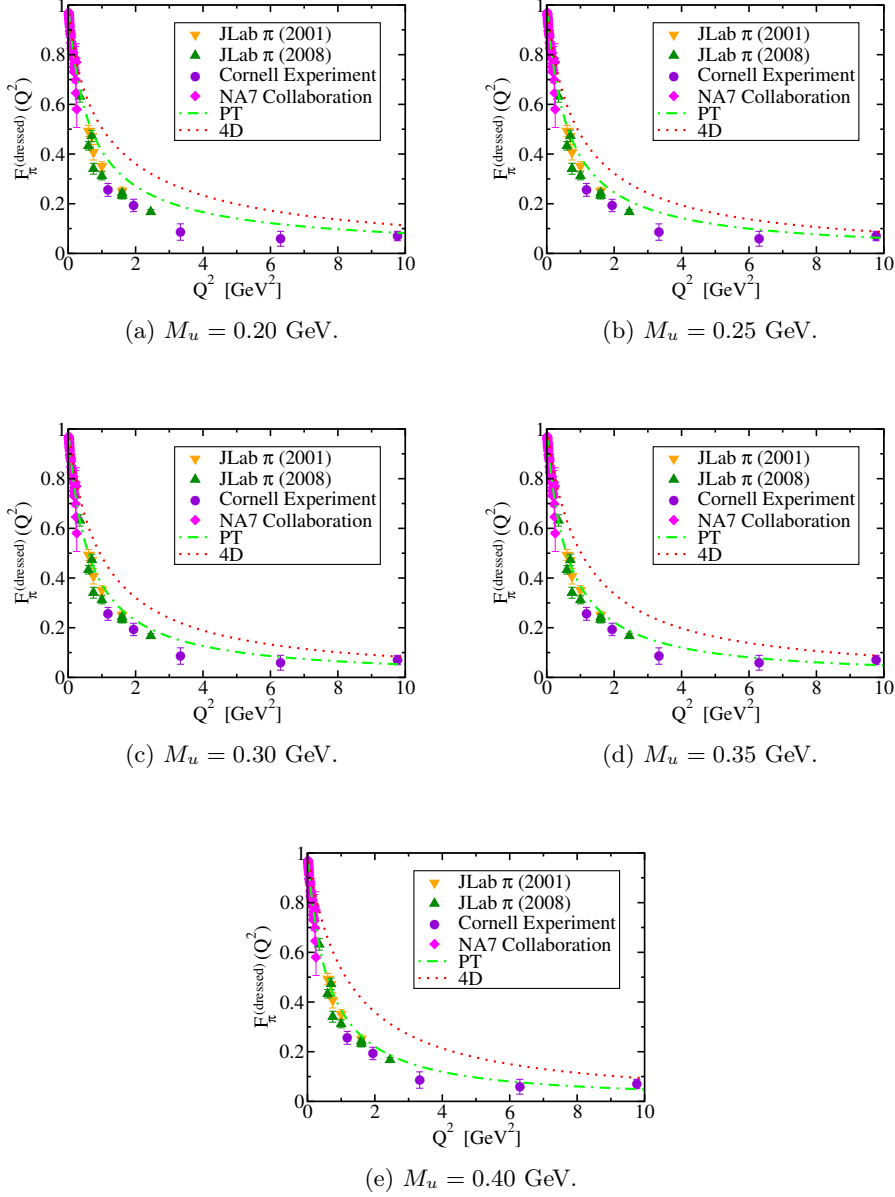


Figura 5.7: Factores de forma del pión con vértice vestido comparados con datos de Cornell Experiment, NA7 Collaboration, JLab  $\pi$  Collaboration 2001 y JLab  $\pi$  Collaboration 2008.

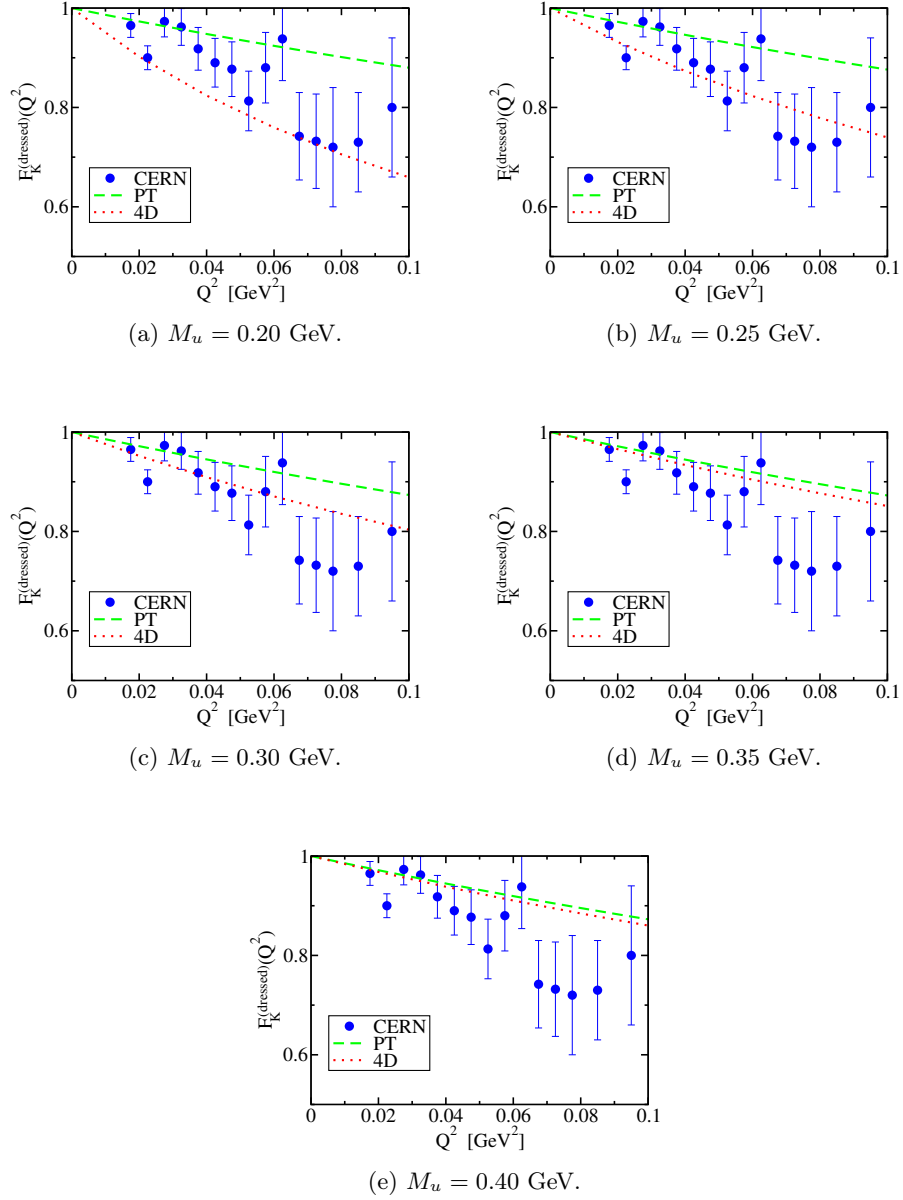


Figura 5.8: Factores de forma del kaón con vértice vestido usando NJL en distintos esquemas de regularización junto con datos del CERN.

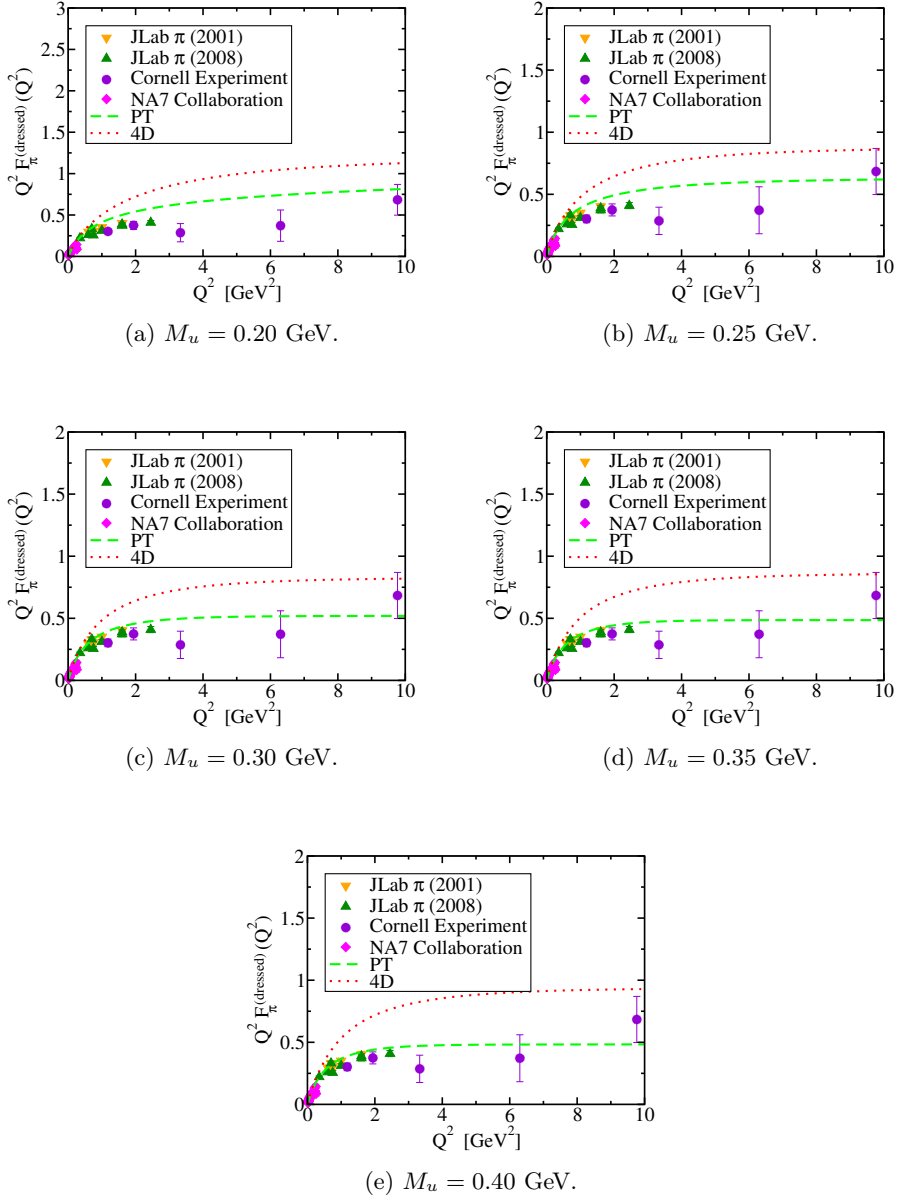


Figura 5.9: Se grafica  $Q^2 F(Q^2)$  vs  $Q^2$  para el pion comparado con datos de Cornell Experiment, NA7 Collaboration, JLab  $\pi$  Collaboration 2001 y 2008. El vértice está vestido.

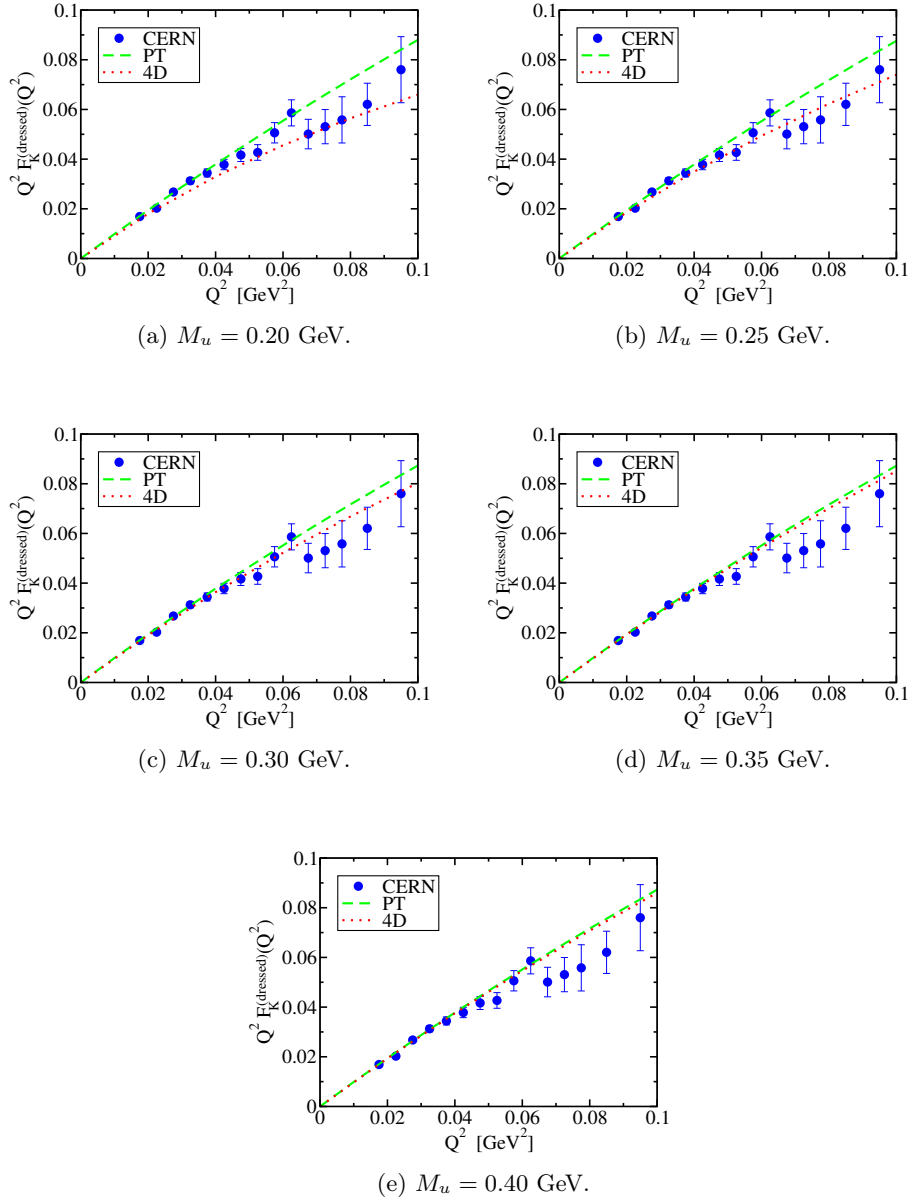


Figura 5.10: Se grafica  $Q^2 F(Q^2)$  vs  $Q^2$  para el kaón en diferentes esquemas de regularización. El vértice está vestido.

regularización de tiempo propio.

Tabla 5.1: Radio de carga en femtómetros en la regularización PT.

$M_u$ (GeV)	$r_\pi^{(bare)}$	$r_K^{(bare)}$	$r_\pi^{(bare)}/r_K^{(bare)}$	$r_\pi^{(dressed)}$	$r_K^{(dressed)}$	$r_\pi^{(dressed)}/r_K^{(dressed)}$
0.20	0.40	0.39	1.05	0.60	0.57	1.06
0.25	0.45	0.43	1.04	0.62	0.58	1.07
0.30	0.46	0.45	1.04	0.63	0.58	1.07
0.35	0.47	0.45	1.04	0.63	0.59	1.07
0.40	0.46	0.44	1.03	0.63	0.58	1.07

Tabla 5.2: Radio de carga en femtómetros en corte 4 dimensional.

$M_u$ (GeV)	$r_\pi^{(bare)}$	$r_K^{(bare)}$	$r_\pi^{(bare)}/r_K^{(bare)}$	$r_\pi^{(dressed)}$	$r_K^{(dressed)}$	$r_\pi^{(dressed)}/r_K^{(dressed)}$
0.20	0.59	0.54	1.08	1.25	1.13	1.10
0.25	0.55	0.51	1.07	1.03	0.93	1.10
0.30	0.52	0.49	1.07	0.84	0.77	1.10
0.35	0.48	0.46	1.06	0.70	0.65	1.09
0.40	0.45	0.43	1.05	0.67	0.62	1.08

### 5.3. Radio de carga

Cuando la transferencia de 4 momento  $q$  es pequeña, los factores de forma son la transformada de Fourier de la distribución de carga  $\rho(\mathbf{x})$

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3x \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (5.48)$$

Además, en dicho caso, se puede asumir simetría esférica en la distribución de carga. La serie de Taylor de la ecuación (5.48) es

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle |\mathbf{q}|^2 + \dots \quad (5.49)$$

Por lo tanto el valor medio del radio al cuadrado del pion y el kaón se puede calcular por medio de la siguiente expresión

$$\langle r_P \rangle = \sqrt{-6 \left. \frac{\partial F_P(Q^2)}{\partial Q^2} \right|_{Q^2=0}} \quad (5.50)$$

donde  $P = \pi^+, K^+$ . Los resultados empíricos reportados en la literatura son [42]:  $\langle r_\pi \rangle = 0.672 \pm 0.008$  fm y  $\langle r_K \rangle = 0.560 \pm 0.031$  fm. Con una razón igual a  $\langle r_\pi \rangle / \langle r_K \rangle = 1.20 \pm 0.08$ .

Obtuvimos el radio del pion y el kaón en el método de regularización de tiempo propio y corte 4 dimensional con 5 masas vestidas del quark u, los resultados se muestran en las tablas 5.1 y 5.2.

En la regularización de tiempo propio las predicciones del radio de carga del pion con vértice vestido y desnudo dan resultados cercanos de los valores



empíricos reportados del pion [42]. Para el vértice vestido la predicción se acerca al valor experimental a comparación de la predicción con el vértice desnudo. El radio del kaón en regularización PT coinciden dentro del rango de error del radio experimental cuando el vértice es vestido con todas las masas del quark u ( $M_u$ ).

El corte 4 dimensional dio valores más altos en los radios del pion y el kaón ya sea con el vértice desnudo o vestido. Para el pion en esta regularización solo el valor con la masa  $M_u = 0.40$  GeV y con el vértice vestido está dentro del margen de error del radio del pion empírico. El radio del kaón en la predicción del corte 4 dimensional está dentro del rango de error del experimento cuando  $M_u = 0.20$  GeV y el vértice es desnudo. La mejor predicción para el kaón cuando el vértice es vestido es con  $M_u = 0.40$  GeV, siendo 11 % más grande que el valor reportado del kaón.



## Capítulo 6

# Conclusiones

Hicimos un estudio de las masas, constantes de acoplamiento, constantes de decaimiento, factores de forma electromagnético con vértice desnudo y factores de forma electromagnéticos con vértice vestido del pion y el kaón. Todo esto realizado en dos métodos de regularización. Lo que nos permitió ver como era la sensibilidad de las observables físicas a los métodos de regularización.

La regularización de Pauli–Villars predice mejor  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle$  en 3 de las 5 masas de  $M_u$  que consideramos. Por lo que se recomienda hacer estudios de la dependencia de la regularización de Pauli–Villars en los factores de forma.

Para los factores de forma con vértice desnudo tenemos que la mejor predicción se logró para la regularización de tiempo propio y con  $M_u = 0.40$  GeV. No hay una tendencia clara de cual regularización es mejor una mayor cantidad de veces en cada  $M_u$ . La regularización en corte 4 dimensional depende menos de  $M_u$  que la regularización de tiempo propio. La regularización corte dimensional produce las mejores predicciones en  $M_u = 0.25$  GeV en los factores de forma electromagnéticos con vértice desnudo, vértice vestido y en la predicción de  $m_s/m_u$ ,  $f_K/f_\pi$  y  $\langle\bar{s}s\rangle/\langle\bar{u}u\rangle$ , esta consistencia no sucede con la regularización de tiempo propio.

Considerando el vértice vestido tenemos que la mejor predicción para el factor de forma electromagnético del pion es para la regularización de tiempo propio con  $M_u = 0.40$  GeV. Para el factor de forma electromagnético del kaón la mejor predicción es para el corte 4 dimensional con  $M_u = 0.25$  GeV. El incluir el vértice vestido hace que la regularización de tiempo propio y el corte 4 dimensional dependan menos de  $M_u$ .

En la regularización de tiempo propio las predicciones del radio del pion con vértice desnudo no coinciden dentro de los valores empíricos reportados del pion. Sin embargo el vértice vestido acerca la predicción al valor experimental. El radio del kaón en regularización PT coinciden con el radio experimental cuando el vértice es vestido. Esto en todas las masas vestidas

del quark  $u$ .

El corte 4 dimensional dio valores más altos en los radios del pion y el kaón, ya sea con el vértice desnudo o vestido a comparación de la regularización PT. Para el pion en esta regularización solo el valor con la masa  $M_u = 0.40$  GeV y con el vértice vestido está dentro del margen de error del radio del pion empírico. Ningún valor del radio del kaón en la predicción del corte 4 dimensional coincide con el valor experimental.

# Apéndice A

## Apéndice

### A.1. Ángulo sólido en d dimensiones

El objetivo de esta seccion es demostrar que

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{A.1})$$

Se considera que

$$\sqrt{\pi^d} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \int d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} \quad (\text{A.2})$$

Ahora se hace el cambio de variables a coordenadas hipersféricas donde se cumple que  $r^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$ . El diferencial de volumen en coordenadas hipersféricas se puede obtener del Jacobiano, pero analizando las unidades se obtiene

$$d^d x = r^{d-1} d\Omega_d dr \quad (\text{A.3})$$

ya que el ángulo sólido representa en  $\mathbb{R}^3$  el área infinitesimal de la esfera en  $\mathbb{R}^d$  representara lo mismo pero para una hipersfera.  $r^{d-1}$  se agrega para que el área tenga exactamente  $d - 1$  dimensiones y ya que el area infiniteimal es perpendicular a la direccion radial  $r^{d-1} d\Omega_d dr$  es el volumen deseado. Por lo tanto se llega a que

$$\sqrt{\pi^d} = \int r^{d-1} e^{-r^2} d\Omega_d dr \quad (\text{A.4})$$

$$= \int d\Omega_d \int_0^{\infty} r^{d-1} e^{-r^2} dr \quad (\text{A.5})$$

$$= \int d\Omega_d \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d(r^2) (r^2)^{d/2-1} e^{-r^2} \quad (\text{A.6})$$

$$= \int d\Omega_d \frac{1}{2} \Gamma(d/2) \quad (\text{A.7})$$

Lo que significa que

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{A.8})$$

## A.2. Propiedades de las matrices gamma

Las matrices gamma se definen como las matrices  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  que cumplen con

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.9})$$

Además se define la matriz gamma cinco como

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.10})$$

Algunas identidades importantes de las matrices gamma son

- $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\mathbb{I}$
- $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$
- $\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho}\mathbb{I}$
- $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$
- $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$

Las propiedades que cumplen las trazas de las matrices son

- $tr(\gamma^\mu) = 0$
- La traza de cualquier producto impar de matrices gamma es cero
- La traza de  $\gamma^5$  por cualquier producto impar de matrices gamma es cero
- $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$
- $tr(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) = 4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda})$

## A.3. $\Pi_P^{ij}(p^2)$

Retomando la ecuación (4.36)

$$\Pi_P^{ij}(p^2) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} tr \left[ \gamma_5 S^i \left( k + \frac{1}{2}p \right) \gamma_5 S^j \left( k - \frac{1}{2}p \right) \right] \quad (\text{A.11})$$

Definimos

$$A \equiv \gamma_5 S^i \left( k + \frac{1}{2}p \right) \gamma_5 S^j \left( k - \frac{1}{2}p \right) \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto

$$\Pi_P^{ij}(p^2) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr} [A] \quad (\text{A.13})$$

La traza es

$$\text{tr}(A) = N_C \text{tr} \left( \gamma_5 \frac{\not{k} + \frac{1}{2}\not{p} + M_i}{(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2} \gamma_5 \frac{\not{k} - \frac{1}{2}\not{p} + M_j}{(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

Los denominadores pueden salir de la traza por ser escalares

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \frac{N_C}{\left[ (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right] \left[ (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right]} \\ &\quad \times \text{tr} \left[ \left( -\not{k} - \frac{1}{2}\not{p} + M_i \right) \gamma_5^2 \left( \not{k} - \frac{1}{2}\not{p} + M_j \right) \right] \\ &= \frac{N_C}{\left[ (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right] \left[ (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right]} \left[ -\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) k_\mu k_\nu \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) p_\mu p_\nu + 4M_i M_j \right] \end{aligned}$$

pero  $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$ , entonces

$$\text{tr}(A) = \frac{4N_C}{\left[ (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right] \left[ (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right]} \left[ -k^2 + \frac{1}{4}p^2 + M_i M_j \right] \quad (\text{A.15})$$

Por otro parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left[ (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right] \left[ (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right]} &= \frac{1}{2 \left( k^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}M_i^2 - \frac{1}{2}M_j^2 \right)} \\ &\quad \times \left( \frac{1}{(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2} + \frac{1}{(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2} \right) \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} - \left( k^2 - \frac{1}{4}p^2 - M_i M_j \right) &= \\ - \left[ \left( k^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}M_i^2 - \frac{1}{2}M_j^2 \right) - M_i M_j - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}M_i^2 + \frac{1}{2}M_j^2 \right] & \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Usando estos resultados en la ecuación (A.15)

$$\begin{aligned}
tr(A) &= -4N_C \frac{\left[ \left( k^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}M_i^2 - \frac{1}{2}M_j^2 \right) - M_i M_j - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}M_i^2 + \frac{1}{2}M_j^2 \right]}{2 \left( k^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}M_i^2 - \frac{1}{2}M_j^2 \right)^2} \\
&\quad \times \left( \frac{1}{\left( k + \frac{1}{2}p \right)^2 - M_i^2} + \frac{1}{\left( k - \frac{1}{2}p \right)^2 - M_j^2} \right) \\
&= -4N_C \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\left( k + \frac{1}{2}p \right)^2 - M_i^2} + \frac{1}{\left( k - \frac{1}{2}p \right)^2 - M_j^2} \right] \\
&\quad - 4N_C \frac{\frac{1}{2} \left[ p^2 - \left( M_i^2 + M_j^2 - 2M_i M_j \right) \right]}{\left[ \left( k + \frac{1}{2}p \right)^2 - M_i^2 \right] \left[ \left( k - \frac{1}{2}p \right)^2 - M_j^2 \right]}
\end{aligned}$$

Reagrupando el binomio cuadrado

$$\begin{aligned}
tr(A) &= -4N_C \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\left( k + \frac{1}{2}p \right)^2 - M_i^2} + \frac{1}{\left( k - \frac{1}{2}p \right)^2 - M_j^2} \right] \\
&\quad - 4N_C \frac{\frac{1}{2} \left[ p^2 - \left( M_i - M_j \right)^2 \right]}{\left[ \left( k + \frac{1}{2}p \right)^2 - M_i^2 \right] \left[ \left( k - \frac{1}{2}p \right)^2 - M_j^2 \right]} \quad (A.18)
\end{aligned}$$

Los dos primeros términos son propagadores del quark y el antiquark

$$\begin{aligned}
tr(A) &= -\frac{tr \left( S^i \left( k + \frac{1}{2}p \right) \right)}{2M_i} - \frac{tr \left( S^j \left( k - \frac{1}{2}p \right) \right)}{2M_j} \\
&\quad - \frac{\left( p^2 - \left( M_i - M_j \right)^2 \right) tr \mathbb{1}_{D,C}}{2 \left[ \left( k + \frac{1}{2}p \right)^2 - M_i^2 \right] \left[ \left( k - \frac{1}{2}p \right)^2 - M_j^2 \right]} \quad (A.19)
\end{aligned}$$

Y finalmente usando la ecuación (A.19) en la ecuación (A.13)

$$\begin{aligned}
\Pi_P^{ij}(p^2) &= -\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \left[ \frac{tr \left( S^i \left( k + \frac{1}{2}p \right) \right)}{2M_i} + \frac{tr \left( S^j \left( k - \frac{1}{2}p \right) \right)}{2M_j} \right] \\
&\quad + \frac{\left( p^2 - \left( M_i - M_j \right)^2 \right)}{2} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{tr \mathbb{1}_{D,C}}{\left[ \left( k + \frac{1}{2}p \right)^2 - M_i^2 \right] \left[ \left( k - \frac{1}{2}p \right)^2 - M_j^2 \right]} \quad (A.20)
\end{aligned}$$

En una notación más compacta

$$\Pi_P^{ij}(p^2) = \frac{-\phi_i}{2M_i} + \frac{-\phi_j}{2M_j} + \frac{1}{2} \left[ p^2 - \left( M_i - M_j \right)^2 \right] I_{ij}^{(1)}(p^2) \quad (A.21)$$

donde  $\phi_i$  y  $I_{ij}^{(1)}$  son integrales divergentes



### A.4. Constante de decaimiento

$$\begin{aligned}
ip^\mu p_\mu f_\alpha &= -p^\mu N_C g_{\alpha q \bar{q}} \\
&\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr_D \left[ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{(\not{k} + \frac{1}{2}\not{p} + M_i)}{(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2} \gamma_5 \frac{(\not{k} - \frac{1}{2}\not{p} + M_j)}{(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2} \right] \quad (A.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iM^2 f_\alpha &= -p^\mu N_C g_{\alpha q \bar{q}} \\
&\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr_D \left[ \frac{\gamma_\mu \gamma_5 (\not{k} + \frac{1}{2}\not{p} + M_i) \gamma_5 (\not{k} - \frac{1}{2}\not{p} + M_j)}{\left( (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right)} \right] \quad (A.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_\alpha &= -p^\mu \frac{N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \\
&\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr_D \left[ \frac{\gamma_\mu \gamma_5 (\not{k} + \frac{1}{2}\not{p} + M_i) (-\not{k} + \frac{1}{2}\not{p} + M_j) \gamma_5}{\left( (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right)} \right] \quad (A.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_\alpha &= -p^\mu \frac{N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr_D \left[ \frac{\gamma_\mu \gamma_5}{\left( (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right)} \right. \\
&\times \left. \left( -\not{k}\not{k} + \not{k}\frac{1}{2}\not{p} + \not{k}M_j - \frac{1}{2}\not{k}\not{p} + \frac{1}{4}\not{p}\not{p} + \not{p}\frac{1}{2}M_j - M_i\not{k} + \frac{1}{2}M_i\not{p} + M_iM_j \right) \gamma_5 \right] \quad (A.25)
\end{aligned}$$

Se usa  $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$  y  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$

$$\begin{aligned}
f_\alpha &= -p^\mu \frac{N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr_D \\
&\left[ \frac{\gamma_\mu \left( -\not{k}\not{k} + \not{k}\frac{1}{2}\not{p} - \not{k}M_j - \frac{1}{2}\not{k}\not{p} + \frac{1}{4}\not{p}\not{p} - \not{p}\frac{1}{2}M_j + M_i\not{k} - \frac{1}{2}M_i\not{p} + M_iM_j \right)}{\left( (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right)} \right] \quad (A.26)
\end{aligned}$$

Ya que la traza es una aplicación lineal y además la traza de matrices gamma impares es igual a cero se obtiene:

$$\begin{aligned}
f_\alpha &= -\frac{N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \\
&\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} tr_D \left[ \frac{\gamma_\mu p^\mu \left( -\not{k}M_j - \not{p}\frac{1}{2}M_j + M_i\not{k} - \frac{1}{2}M_i\not{p} \right)}{\left( (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right)} \right] \quad (A.27)
\end{aligned}$$

$$f_\alpha = -\frac{N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr}_D \left[ \frac{-\not{p} \not{k} M_j - \not{p} \not{p} \frac{1}{2} M_j + \not{p} \not{k} M_i - \not{p} \not{p} \frac{1}{2} M_i}{\left( (k + \frac{1}{2} p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2} p)^2 - M_j^2 \right)} \right] \quad (\text{A.28})$$

Usando  $\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\eta_{\nu\mu}$

$$f_\alpha = -\frac{N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[-4\eta_{\mu\nu} p^\mu k^\nu M_j - 4\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{1}{2} M_j + 4\eta_{\mu\nu} p^\mu k^\nu M_i - 4\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{1}{2} M_i]}{\left( (k + \frac{1}{2} p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2} p)^2 - M_j^2 \right)} \quad (\text{A.29})$$

$$f_\alpha = -\frac{4N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[-k \cdot p M_j - p \cdot p \frac{1}{2} M_j + k \cdot p M_i - p \cdot p \frac{1}{2} M_i]}{\left( (k + \frac{1}{2} p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2} p)^2 - M_j^2 \right)} \quad (\text{A.30})$$

Agrupando términos

$$f_\alpha = -\frac{4N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[k \cdot p (M_i - M_j) - M^2 \frac{1}{2} (M_j + M_i)]}{\left( (k + \frac{1}{2} p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2} p)^2 - M_j^2 \right)} \quad (\text{A.31})$$

Se puede expresar la constante de decaimiento de la siguiente forma

$$f_\alpha = -\frac{N_C g_{\alpha q \bar{q}}}{iM^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k \cdot p (M_i - M_j)}{\left( (k + \frac{1}{2} p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2} p)^2 - M_j^2 \right)} + \frac{4N_C g_{\alpha q \bar{q}} (M_j + M_i)}{2i} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left( (k + \frac{1}{2} p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2} p)^2 - M_j^2 \right)} \quad (\text{A.32})$$

$$f_\alpha = \frac{g_{\alpha q \bar{q}} (M_j + M_i)}{2} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{\text{tr}_{D,C} \mathbb{1}_{D,C}}{\left( (k + \frac{1}{2} p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2} p)^2 - M_j^2 \right)} - \frac{g_{\alpha q \bar{q}} (M_i - M_j)}{M^2} \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k \cdot p \text{tr}_{D,C} \mathbb{1}_{D,C}}{\left( (k + \frac{1}{2} p)^2 - M_i^2 \right) \left( (k - \frac{1}{2} p)^2 - M_j^2 \right)} \quad (\text{A.33})$$

El segundo término tiene un término que ya se ha calculado.

$$f_\alpha = \frac{g_{\alpha q \bar{q}} (M_j + M_i)}{2} I_{ij}^{(1)}(p^2) - \frac{g_{\alpha q \bar{q}} (M_i - M_j)}{M^2} I_{ij}^{(2)}(p^2) \quad (\text{A.34})$$

## A.5. Parametrización de Feynman

La parametrización de Feynman es una técnica que nos permite expresar una integral de una forma más conveniente para poder resolverla. Básicamente el objetivo es aislar la variable de integración del resto de términos. El caso más común es cuando se multiplican dos términos en el denominador.

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (\text{A.35})$$

El caso general, para  $\text{Re}(\alpha_j) > 0$  y  $1 \leq j \leq n$ , es

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_n \frac{\delta(1 - \sum_{k=1}^n u_k) u_1^{\alpha_1-1} \cdots u_n^{\alpha_n-1}}{(\sum_{k=1}^n u_k A_k)^{\sum_{k=1}^n \alpha_k}} \quad (\text{A.36})$$

Las integrales que surgen en este trabajo y que se les aplica parametrización de Feynman están dadas por las ecuaciones (A.37), (A.38), (A.39), (A.40) y (A.41).

$$\phi_i = N_C \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{4M_i}{k^2 - M_i^2} \quad (\text{A.37})$$

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2][(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2]} \quad (\text{A.38})$$

$$I_{ij}^{(2)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{k \cdot p}{[(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2][(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2]} \quad (\text{A.39})$$

$$I_i^{(3)\mu}(p^2) = 8N_C \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{N_1^\mu}{[(k+p')^2 - M_i^2][(k+p)^2 - M_i^2]} \quad (\text{A.40})$$

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = 8N_C \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{N_2^\mu}{[(k+p')^2 - M_i^2][(k+p)^2 - M_i^2][k^2 - M_j^2]} \quad (\text{A.41})$$

con

$$N_1^\mu \equiv k^\mu + p^\mu + p'^\mu \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} N_2^\mu &\equiv -M_i^2(p'^\mu + p^\mu) + (M_j - M_i)^2(k^\mu + p^\mu + p'^\mu) \\ &+ p \cdot k p'^\mu - p \cdot p' k^\mu + p \cdot k p^\mu + M_i M_j (p^\mu + p'^\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

También se definen las siguientes cantidades

$$\Delta_{ij}^{(1)} \equiv x(M_i^2 - M_j^2) - p^2 x(1 - x) + M_j^2 \quad (\text{A.44})$$

$$\Delta_i^{(2)} \equiv -q^2(x - x^2) + M_i^2 \quad (\text{A.45})$$

$$\Delta_{ij}^{(3)} \equiv 2[p^2(x + z) + (M_i - M_j)^2(x + z) - 2M_j^2 + 2M_i M_j] \quad (\text{A.46})$$

$$\Delta_{ij}^{(4)} \equiv M_j^2 + p^2((x + z)^2 - x - z) - q^2 x z - (M_j^2 - M_i^2)(x + z) \quad (\text{A.47})$$

$$\Delta_{i\Lambda}^{(5)} \equiv -q^2(x - x^2) + \Lambda^2 - x(\Lambda^2 - M_i^2) \quad (\text{A.48})$$

$$\Delta_{ij}^{(6)} \equiv M_j^2 + p^2((x + z)^2 - x - z) - q^2 x z + (\Lambda^2 - M_i^2)x + (M_j^2 - M_i^2)z \quad (\text{A.49})$$

donde x y z son los parametros de Feynman.

### A.5.1. Parametrización de Feynman de $I_{ij}^{(1)}(p^2)$

La expresión  $I_{ij}^{(1)}(p^2)$  de la ecuación (A.38) es

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{\left[ \left(k + \frac{1}{2}p\right)^2 - M_i^2 \right] \left[ \left(k - \frac{1}{2}p\right)^2 - M_j^2 \right]} \quad (\text{A.50})$$

Usando parametrización de Feynman de la ecuación (A.35)

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = \frac{4N_C}{(2\pi)^4} \times \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{\left[ x \left[ \left(k + \frac{1}{2}p\right)^2 - M_i^2 \right] + (1 - x) \left[ \left(k - \frac{1}{2}p\right)^2 - M_j^2 \right] \right]^2} \quad (\text{A.51})$$

Luego se define

$$D \equiv x \left[ \left(k + \frac{1}{2}p\right)^2 - M_i^2 \right] + (1 - x) \left[ \left(k - \frac{1}{2}p\right)^2 - M_j^2 \right] \quad (\text{A.52})$$

Expandiendo términos

$$D = x \left( k^2 + k \cdot p + \frac{1}{4}p^2 - M_i^2 \right) + (1 - x) \left( k^2 - k \cdot p + \frac{1}{4}p^2 - M_j^2 \right) \quad (\text{A.53})$$

Agrupando

$$D = 2xk \cdot p - x(M_i^2 - M_j^2) + \left(k - \frac{1}{2}p\right)^2 - M_j^2 \quad (\text{A.54})$$

Se hace el siguiente cambio de variable  $k'_\mu = k_\mu - \frac{1}{2}p_\mu$

$$D = 2xp \cdot \left(k' + \frac{1}{2}p\right) - x(M_i^2 - M_j^2) + k'^2 + M_j^2 \quad (\text{A.55})$$

$$D = k'^2 + 2xp \cdot k' + p^2x^2 - p^2x^2 + p^2x - x(M_i^2 - M_j^2) + M_j^2 \quad (\text{A.56})$$

$$D = -x(M_i^2 - M_j^2) + (k' + px)^2 + p^2x(1-x) - M_j^2 \quad (\text{A.57})$$

Ahora el siguiente cambio de variable,  $k''_\mu = k'_\mu + p_\mu x$ , entonces

$$D = -x(M_i^2 - M_j^2) + k''^2 + p^2x(1-x) - M_j^2 \quad (\text{A.58})$$

Omitiendo biprima y usando la ecuación (A.44) la integral se vuelve

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = \frac{4N_C}{i(2\pi)^4} \int \int_0^1 \frac{dx d^4k}{(k^2 - \Delta_{ij}^{(1)})^2} \quad (\text{A.59})$$

### A.5.2. Parametrización de Feynman de $I_{ij}^{(2)}(p^2)$

Las ecuaciones (A.38) y (A.39) son prácticamente las mismas excepto por el factor  $(k \cdot p)$  en el numerador de (A.39). Por lo tanto el resultado de aplicar la parametrización de Feynman es la misma, a excepción de que  $k$  en el numerador se le realizan los mismo cambios de variable que los que fueron aplicados en (A.38). El resultado es

$$I_{ij}^{(2)}(p^2) = 4N_C p \cdot \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{(k + p/2 - px)}{(k^2 - \Delta_{ij}^{(1)})^2} \quad (\text{A.60})$$

$k$  en el numerador desaparece porque la integral tiene un intervalo simétrico en  $k$  y el integrando que acompaña a  $k$  es impar

$$I_{ij}^{(2)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{(p^2/2 - p^2x)}{(k^2 - \Delta_{ij}^{(1)})^2} \quad (\text{A.61})$$

Usando la ecuación (A.59)

$$I_{ij}^{(2)}(p^2) = \frac{p^2}{2} I_{ij}^{(1)} - 4N_C p^2 \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{x}{(k^2 - \Delta_{ij}^{(1)})^2} \quad (\text{A.62})$$

### A.5.3. Parametrización de Feynman de $I_i^{(3)\mu}(p^2)$

Trabajando en la integral  $I_i^{(3)\mu}$

$$I_i^{(3)\mu} = -8iN_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{N_1^\mu}{\{x[(k+p')^2 - M_i^2] + (1-x)[(k+p)^2 - M_i^2]\}^2} \quad (\text{A.63})$$

El denominador se puede expresar de una forma más conveniente

$$D_1 = \{x[(k+p')^2 - M_i^2] + (1-x)[(k+p)^2 - M_i^2]\}^2 \quad (\text{A.64})$$

Realizando todos los productos posibles

$$D_1 = (k^2 + 2xp' \cdot k - 2xp \cdot k + 2k \cdot p - M_i^2 + p^2 - xp^2 + xp'^2) \quad (\text{A.65})$$

$$D_1 = (k^2 + 2k \cdot [xp' - xp + p] - M_i^2 + p^2 - xp^2 + xp'^2) \quad (\text{A.66})$$

Sumando un cero se obtiene

$$D_1 = ((k + xp' - xp + p)^2 - (xp' - xp + p)^2 - M_i^2 + p^2 - xp^2 + xp'^2) \quad (\text{A.67})$$

Se hace el siguiente cambio de variable  $k_2 = k + (xp' - xp + p)$

$$D_1 = (k_2^2 - (xp' - xp + p)^2 - M_i^2 + p^2 - xp^2 + xp'^2) \quad (\text{A.68})$$

$$D_1 = (k_2^2 - x^2p'^2 - x^2p^2 - p^2 + 2x^2p' \cdot p - 2xp' \cdot p + 2xp^2 - M_i^2 + p^2 - xp^2 + xp'^2) \quad (\text{A.69})$$

Como  $p^2 = p'^2$  y usando  $p + q = p'$ , se obtiene  $p' \cdot p = (p^2 - q^2)/2$ . Por lo tanto

$$D_1 = (k_2^2 - 2x^2p^2 - p^2 + 2x^2(p^2 - q^2)/2 - 2x(p^2 - q^2)/2 + 2xp^2 - M_i^2 + p^2)^2 \quad (\text{A.70})$$

Desarrollando los productos y eliminando los términos iguales se obtiene

$$D_1 = (k_2^2 + q^2(x - x^2) - M_i^2)^2 \quad (\text{A.71})$$

El numerador  $N_1^\mu$  con el cambio de variable  $k_2^\mu = k^\mu + (xp'^\mu - xp^\mu + p^\mu)$  queda igual a

$$N_1^\mu = k_2^\mu - xq^\mu + p'^\mu \quad (\text{A.72})$$

Usando las ecuaciones (A.71) y (A.72) en la integral  $I_i^{(3)\mu}$  de la ecuación (A.63)

$$I_i^{(3)\mu} = -8iN_C \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k_2^\mu - xq^\mu + p'^\mu}{(k_2^2 + q^2(x - x^2) - M_i^2)^2} \quad (\text{A.73})$$

Pero, ya que la integral es simétrica y  $k_2^\mu$  es impar, entonces se elimina. Además eliminamos el subíndice 2 en la variable  $k$

$$I_i^{(3)\mu} = -8iN_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\frac{1}{2}(p^\mu + p'^\mu)}{(k^2 + q^2(x-x^2) - M_i^2)^2} \quad (\text{A.74})$$

Usando la ecuación (A.45) finalmente se obtiene

$$I_i^{(3)\mu} = 8N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\frac{1}{2}(p^\mu + p'^\mu)}{(k^2 - \Delta_i^{(2)})^2} \quad (\text{A.75})$$

que también se puede expresar como

$$I_i^{(3)\mu} = (p^\mu + p'^\mu)L_i^{(3)} \quad (\text{A.76})$$

donde

$$L_i^{(3)} \equiv 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - \Delta_i^{(2)})^2} \quad (\text{A.77})$$

#### A.5.4. Parametrización de Feynman de $I_{ij}^{(4)\mu}(p^2)$

Para la integral  $I_{ij}^{(4)\mu}(p^2)$  de la ecuación (A.41) se usa de nuevo la parametrización de Feynman y se obtiene

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = -16iN_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{N_2^\mu dz dx}{D_2} \quad (\text{A.78})$$

El denominador es por lo tanto

$$D_2 \equiv ((k^2 - M_j^2) + [(k+p)^2 - M_i^2 - k^2 + M_j^2]x - [[(k+p')^2 - M_i^2] - k^2 + M_j^2]z)^3 \quad (\text{A.79})$$

Desarrollando los productos y eliminando los términos iguales se obtiene

$$D_2 = \{k^2 - M_j^2 + 2k \cdot px + p^2x - M_i^2x + M_j^2x + p'^2z + 2k \cdot p'z - M_i^2z + M_j^2z\}^3 \quad (\text{A.80})$$

$$D_2 = \{k^2 - M_j^2 + 2k \cdot (px + p'z) + p^2x - M_i^2x + M_j^2x + p'^2z - M_i^2z + M_j^2z\}^3 \quad (\text{A.81})$$

Se agrega  $(px + p'z)^2 - (px + p'z)^2$

$$D_2 = \{[k + (px + p'z)]^2 - M_j^2 - (px + p'z) + p^2x - M_i^2x + M_j^2x + p'^2z - M_i^2z + M_j^2z\}^3 \quad (\text{A.82})$$

Considerando el cambio de variable  $k = k_2 - (xp + zp')$

$$D_2 = \{k_2^2 - M_j^2 - (px + p'z)^2 + p^2x - M_i^2x + M_j^2x + p'^2z - M_i^2z + M_j^2z\}^3 \quad (\text{A.83})$$

$$D_2 = \{k_2^2 - M_j^2 - p^2x^2 - p^2z^2 - 2xzp \cdot q - 2xzp^2 + p^2x \\ - M_i^2x + M_j^2x + p'^2z - M_i^2z + M_j^2z\}^3 \quad (\text{A.84})$$

Usando la conservación de energía y momento ( $p'^\mu = p^\mu + q^\mu$ ), además de  $p^2 = p'^2$ , se encuentra que  $2q \cdot p = -q^2$

$$D_2 = \{k_2^2 - M_j^2 - p^2x^2 - p^2z^2 + xzq^2 - 2xzp^2p^2x \\ - M_i^2x + M_j^2x + p^2z - M_i^2z + M_j^2z\}^3 \quad (\text{A.85})$$

Agrupando términos y omitiendo el subíndice 2, finalmente

$$D_2 = \{k^2 - M_j^2 - p^2[(x+z)^2 - (x+z)] + xzq^2 - M_i^2x + M_j^2x - M_i^2z + M_j^2z\}^3 \quad (\text{A.86})$$

Por supuesto el cambio de variable también se incluye en el numerador  $N_2^\mu$ . Además, de nuevo, el término lineal en  $k$  desaparece en el integrando por la simetría de la integral.

$$N_2^\mu = -M_i^2(p'^\mu + p^\mu) + (M_j - M_i)^2(1-x)p^\mu + (M_j - M_i)^2(1-z)p'^\mu \\ + M_iM_j(p'^\mu + p^\mu) - xp^2p'^\mu - zp'^2p^\mu \quad (\text{A.87})$$

Ahora se usa la siguiente identidad

$$p'^\mu = \frac{1}{2}(p'^\mu + p^\mu) + \frac{1}{2}(p'^\mu - p^\mu) \quad (\text{A.88})$$

$$p^\mu = \frac{1}{2}(p'^\mu - p^\mu) + \frac{1}{2}(p'^\mu + p^\mu) \quad (\text{A.89})$$

Reacomodando los términos

$$N_2^\mu = -\frac{xp^2 + zp'^2}{2}(p'^\mu + p^\mu) + \frac{-xp^2 + zp'^2}{2}(p'^\mu - p^\mu) \\ + (M_j - M_i)^2 \left[ \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{z}{2}\right)(p'^\mu + p^\mu) + \frac{x-z}{2}(p'^\mu - p^\mu) \right] \\ - M_i^2(p'^\mu + p^\mu) + M_iM_j(p'^\mu + p^\mu) \quad (\text{A.90})$$

Luego los términos de la ecuación (A.90) que contienen  $x - z$  son igual a cero cuando se integran. Esto se puede ver más fácilmente con el cambio de variable  $x \rightarrow \frac{1}{2}(x+z)$  y  $z \rightarrow \frac{1}{2}(x-z)$ . El resultado final del numerador  $N_2^\mu$  es

$$N_2^\mu = \left[ -\frac{1}{2}p^2(x+z) - \frac{1}{2}(M_j - M_i)^2(x+z) + M_j^2 - M_iM_s \right] (p^\mu + p'^\mu) \quad (\text{A.91})$$



Usando  $N_2^\mu$  de la ecuación (A.91) y  $D_2$  de la ecuación (A.86) en la integral  $I_{ij}^{(4)\mu}(p^2)$  de la ecuación (A.78)

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = -16iN_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[ -\frac{1}{2}p^2(x+z) - \frac{1}{2}(M_j - M_i)^2(x+z) + M_j^2 - M_i M_s \right] (p^\mu + p'^\mu) dz dx \\ \times \frac{1}{\{k^2 - M_j^2 - p^2[(x+z)^2 - (x+z)] + xzq^2 + (M_j^2 - M_i^2)(x+z)\}^3} \quad (\text{A.92})$$

Para simplificar la expresión se consideran las ecuaciones (A.46) y (A.47)

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = -4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{\Delta_{ij}^{(3)}(p^\mu + p'^\mu) dz dx}{\{k^2 - \Delta_{ij}^{(4)}\}^3} \quad (\text{A.93})$$

o también

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = (p^\mu + p'^\mu) L_{ij}^{(4)}(p^2) \quad (\text{A.94})$$

con

$$L_{ij}^{(4)}(p^2) \equiv -4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{\Delta_{ij}^{(3)} dz dx}{\{k^2 - \Delta_{ij}^{(4)}\}^3} \quad (\text{A.95})$$

## A.6. Regularización en tiempo propio

### A.6.1. $I_{ij}^{(1)}(p^2)$

Aplicando la identidad (4.8) a la ecuación (A.59)

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = \frac{N_C}{2\pi^2} \int_0^1 \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} e^{-\tau\Delta_{ij}^{(1)}} \tau d\tau dx \int_0^\infty k^3 e^{-\tau k^2} dk \quad (\text{A.96})$$

La integral en  $k$  es fácil de resolver si integramos respecto a  $k^2$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty k^2 e^{-\tau k^2} dk^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\tau k'} k' dk' = \frac{1}{2\tau^2} \quad (\text{A.97})$$

Por lo que se obtiene

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = \frac{N_C}{2\pi^2} \int_0^1 \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} e^{-\tau\Delta_{ij}^{(1)}} \tau d\tau dx \left( \frac{1}{2\tau^2} \right) \quad (\text{A.98})$$

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} \frac{e^{-\tau\Delta_{ij}^{(1)}}}{\tau} d\tau dx \quad (\text{A.99})$$

**A.6.2.**  $I_{ij}^{(2)}(p^2)$ 

Para la integral  $I_{ij}^{(2)}(p^2)$  se observa que tiene una estructura similar a la de la ecuación (A.59) perteneciente a  $I_{ij}^{(1)}(p^2)$  por lo que se puede aplicar el mismo resultado

$$I_{ij}^{(2)}(p^2) = \frac{p^2}{2} I_{ij}^{(1)}(p^2) - \frac{p^2 N_C}{4\pi^2} \int_0^1 x \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} \frac{e^{-\tau \Delta_{ij}^{(1)}}}{\tau} dx d\tau \quad (\text{A.100})$$

**A.6.3.**  $L_i^{(3)}$ 

El resultado al aplicar rotación de Wick e integrando el ángulo solido en la integral (A.77) es

$$L_i^{(3)} = \frac{N_C}{2\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk \int_0^1 dx \frac{1}{\left(k^2 + \Delta_{ij}^{(2)}\right)^2} \quad (\text{A.101})$$

Introduciendo la regularización del tiempo propio el resultado final es

$$L_i^{(3)} = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} \frac{e^{-\tau \Delta_{ij}^{(2)}}}{\tau} \quad (\text{A.102})$$

**A.6.4.**  $L_{ij}^{(4)\mu}(p^2)$ 

En coordenadas esféricas con previa rotación de Wick en la integral (A.95)

$$L_{ij}^{(4)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d\Omega_4 k^3 dk}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{\Delta_{ij}^{(3)}}{\{k^2 + \Delta_{ij}^{(4)}\}^3} \quad (\text{A.103})$$

Al integral el ángulo sólido y aplicar la identidad (4.8)

$$L_{ij}^{(4)}(p^2) = \frac{N_C}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_{\frac{1}{\Lambda_{UV}^2}}^{\frac{1}{\Lambda_{IR}^2}} d\tau \Delta_{ij}^{(3)} \tau e^{-\tau \Delta_{ij}^{(4)}} \quad (\text{A.104})$$

**A.7. Corte en 4 dimensiones****A.7.1.**  $I_{ij}^{(1)}(p^2)$ 

Para (A.59)

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = \frac{4N_C}{i(2\pi)^4} \int \int_0^1 \frac{dx d^4 k}{\left(k^2 - \Delta_{ij}^{(1)}\right)^2} \quad (\text{A.105})$$

Se hace rotación de Wick

$$I_{ij}^{(1)} = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda_{4D}^2} dk \frac{k^2}{(k^2 + \Delta_{ij}^{(1)})^2} \quad (\text{A.106})$$

Integrando en  $k^2$

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \frac{-\Lambda_{4D}^2}{\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(1)}} + \ln(\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(1)}) - \ln(\Delta_{ij}^{(1)}) \right] \quad (\text{A.107})$$

Para poder integrar en  $x$  reescribimos  $\Delta_{ij}^{(1)}$

$$\Delta_{ij}^{(1)} = p^2[(x - A_{ij})^2 + B_{ij}] \quad (\text{A.108})$$

con

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{M_j^2 - M_i^2}{p^2} \right) \quad (\text{A.109})$$

$$B_{ij} = -\frac{1}{4} + \frac{M_i^2 + M_j^2}{2p^2} - \frac{(M_j^2 - M_i^2)^2}{4p^4} \quad (\text{A.110})$$

$I_{ij}^{(1)}(p^2)$  se vuelve

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = J_{ij}^{(1)}(p^2) + J_{ij}^{(2)}(p^2) + J_{ij}^{(3)}(p^2) \quad (\text{A.111})$$

Considerando la primera integral con el cambio de variable  $\tan(\theta) = \frac{p(x-A_{ij})}{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2}$

$$J_{ij}^{(1)}(p^2) = -\frac{N_C}{4\pi^2} \frac{\Lambda_{4D}^2}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 p^2 + B_{ij} p^4}} \int d\theta \quad (\text{A.112})$$

Cuyo resultado se vuelve

$$J_{ij}^{(1)}(p^2) = -\frac{N_C}{4\pi^2} \frac{\Lambda_{4D}^2}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 p^2 + B_{ij} p^4}} \left[ \arctan\left(\frac{p(1-A_{ij})}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij} p^2}}\right) - \arctan\left(\frac{-pA_{ij}}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij} p^2}}\right) \right] \quad (\text{A.113})$$

Para  $J_{ij}^{(2)}(p^2)$  la integración por partes posterior al cambio de variable  $p(x - A_{ij}) \rightarrow x$  produce el siguiente resultado

$$J_{ij}^{(2)}(p^2) = \frac{N_C}{4\pi^2 p} \left\{ \ln(\Lambda_{4D}^2 + B_{ij} p^2 + x^2) x \Big|_{-pA_{ij}}^{p(1-A_{ij})} - \int \frac{2x^2 dx}{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij} p^2 + x^2} \right\} \quad (\text{A.114})$$

Se puede realizar la última integral si se considera que  $\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2}}$

$$\begin{aligned}
J_{ij}^{(2)}(p^2) &= \frac{N_C}{4\pi^2 p} \left\{ \ln[\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2 + p^2(1 - A_{ij})^2] p(1 - A_{ij}) \right. \\
&\quad + \ln[\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2 + p^2 A_{ij}^2] p A_{ij} \\
&\quad - \frac{2p}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2}} + \frac{2}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2}} \arctan \left( \frac{p(1 - A_{ij})}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2}} \right) \\
&\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2}} \arctan \left( \frac{-p A_{ij}}{\sqrt{\Lambda_{4D}^2 + B_{ij}p^2}} \right) \right\} \quad (A.115)
\end{aligned}$$

La última integral con las mismas técnicas usadas para  $J_{ij}^{(1)}$  y  $J_{ij}^{(2)}$  da como resultado

$$\begin{aligned}
J_{ij}^{(3)}(p^2) &= -\frac{N_C}{4\pi^2 p} \left\{ \ln[B_{ij}p^2 + p^2(1 - A_{ij})^2] p(1 - A_{ij}) \right. \\
&\quad + \ln[B_{ij}p^2 + p^2 A_{ij}^2] p A_{ij} \\
&\quad - 2p + 2\sqrt{B_{ij}} p \arctan \left( \frac{1 - A_{ij}}{\sqrt{B_{ij}}} \right) \\
&\quad \left. - 2p\sqrt{B_{ij}} \arctan \left( \frac{-A_{ij}}{\sqrt{B_{ij}}} \right) \right\} \quad (A.116)
\end{aligned}$$

### A.7.2. $I_{ij}^{(2)}(p^2)$

Retomando la ecuación (A.62)

$$I_{ij}^{(2)}(p^2) = \frac{p^2}{2} I_{ij}^{(1)} - 4N_C p^2 \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{x}{(k^2 - \Delta_{ij}^{(1)})^2} \quad (A.117)$$

Básicamente tiene la misma integral en  $k$  que  $I_{ij}^{(1)}(p^2)$ . Al aplicar rotación de Wick y usando el cut-off  $\Lambda_{4D}$

$$\begin{aligned}
I_{ij}^{(2)}(p^2) &= \frac{M^2}{2} I_{ij}^{(1)} - \frac{M^2 N_C}{4\pi^2} \int_0^1 x \left[ \frac{-\Lambda_{4D}^2}{\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(1)}} \right. \\
&\quad \left. + \ln(\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(1)}) - \ln(\Delta_{ij}^{(1)}) \right] dx \quad (A.118)
\end{aligned}$$

**A.7.3.**  $L_i^{(3)}$ 

Recordando la ecuación (A.77)

$$L_i^{(3)} = 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - \Delta_i^{(2)})^2} \quad (\text{A.119})$$

Usando rotación de Wick e integrando el ángulo sólido

$$L_i^{(3)} = \frac{N_C}{2\pi^2} \int_0^{\Lambda_{4D}} k^3 dk \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 + \Delta_i^{(2)})^2} \quad (\text{A.120})$$

De nuevo la integral en  $k$  es la misma que la contenida en  $I_{ij}^{(1)}(p^2)$ , pero  $\Delta_{ij}^{(1)} \rightarrow \Delta_i^{(2)}$

$$L_i^{(3)} = (p^\mu + p'^\mu) \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 \left[ \frac{-\Lambda_{4D}^2}{\Lambda_{4D}^2 + \Delta_i^{(2)}} + \ln(\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(2)}) - \ln(\Delta_i^{(2)}) \right] dx \quad (\text{A.121})$$

**A.7.4.**  $L_{ij}^{(4)}(p^2)$ 

La última integral es la ecuación (A.95)

$$L_{ij}^{(4)}(p^2) = -4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{\Delta_{ij}^{(3)} dz dx}{\{k^2 - \Delta_{ij}^{(4)}\}^3} \quad (\text{A.122})$$

Aquí integramos por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) posterior a la rotación de Wick

$$L_{ij}^{(4)}(p^2) = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \Delta_{ij}^{(3)} dz \left[ \frac{-\Lambda_{4D}^2}{2(\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(4)})^2} + \int_0^{\Lambda_{4D}^2} \frac{dk}{2(k + \Delta_{ij}^{(4)})^2} \right] \quad (\text{A.123})$$

Por lo tanto

$$L_{ij}^{(4)}(p^2) = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \left[ \frac{\Lambda_{4D}^4 \Delta_{ij}^{(3)}}{2\Delta_{ij}^{(4)} (\Lambda_{4D}^2 + \Delta_{ij}^{(4)})^2} \right] \quad (\text{A.124})$$

## A.8. Regularización Pauli–Villars

### A.8.1. $I_{ij}^{(1)}(p^2)$

Se considera la siguiente integral

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2\right] \left[(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2\right]} \quad (\text{A.125})$$

se tiene que diverge logarítmicamente. Si se hace una sustracción en la integral se tendrá más potencias en el denominador por lo tanto solo se hace una sustracción. La sustracción se puede hacer de la siguiente forma

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2\right]} \times \left[ \frac{1}{\left[(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2\right]} - \frac{1}{\left[(k - \frac{1}{2}p)^2 - \Lambda_{PV}^2\right]} \right] \quad (\text{A.126})$$

O de la siguiente forma

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\left[(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2\right]} - \frac{1}{\left[(k + \frac{1}{2}p)^2 - \Lambda_{PV}^2\right]} \right] \times \frac{1}{\left[(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2\right]} \quad (\text{A.127})$$

Ya que ambas expresiones son equivalentes se tiene

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{\left[(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2\right] \left[(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2\right]} - \frac{1}{2} \frac{1}{\left[(k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2\right] \left[(k - \frac{1}{2}p)^2 - \Lambda_{PV}^2\right]} - \frac{1}{2} \frac{1}{\left[(k + \frac{1}{2}p)^2 - \Lambda_{PV}^2\right] \left[(k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2\right]} \right\} \quad (\text{A.128})$$

Las integrales son las mismas que la ecuación (A.38) solo que para la segunda y tercera integral se hace el cambio de  $M_j^2 \rightarrow \Lambda_{PV}^2$  y  $M_i^2 \rightarrow \Lambda_{PV}^2$

respectivamente. Usando la ecuación (A.59) se obtiene

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^1 dx \left[ \frac{k^3}{(k^2 + \Delta_{ij}^{(1)})^2} - \frac{1}{2} \frac{k^3}{(k^2 + \Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)})^2} - \frac{1}{2} \frac{k^3}{(k^2 + \Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)})^2} \right] \quad (\text{A.129})$$

La integral en  $k$  es fácil de resolver

$$I_{ij}^{(1)}(p^2) = -\frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \ln(\Delta_{ij}^{(1)}) - \frac{1}{2} \ln(\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)}) - \frac{1}{2} \ln(\Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)}) \right] \quad (\text{A.130})$$

Donde  $\Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)}$  es la misma expresión que  $\Delta_{ij}^{(1)}$  pero con el cambio  $M_j \rightarrow \Lambda_{PV}$ .

### A.8.2. $I_{ij}^{(2)}(p^2)$

Para la integral de la ecuación (A.39) se hace la misma sustracción ya de esa manera habrá más potencias de  $k$  en el denominador

$$I_{ij}^{(2)}(p^2) = 4N_C \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \left\{ \frac{k \cdot p}{\left[ (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right] \left[ (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right]} - \frac{k \cdot p}{\left[ (k + \frac{1}{2}p)^2 - M_i^2 \right] \left[ (k - \frac{1}{2}p)^2 - \Lambda_{PV}^2 \right]} - \frac{k \cdot p}{\left[ (k + \frac{1}{2}p)^2 - \Lambda_{PV}^2 \right] \left[ (k - \frac{1}{2}p)^2 - M_j^2 \right]} \right\} \quad (\text{A.131})$$

Las integrales son las mismas que (A.39). Usando la ecuación (A.62), pero considerando que para la segunda integral  $M_j^2 \rightarrow \Lambda_{PV}^2$  y que para la tercera  $M_i^2 \rightarrow \Lambda_{PV}^2$  se obtiene

$$I_{ij}^{(2)}(p^2) = \frac{M^2}{2} \left( I_{ij}^{(1)} - \frac{1}{2} I_{i\Lambda_{PV}}^{(1)} - \frac{1}{2} I_{\Lambda_{PV}j}^{(1)} \right) - \frac{N_C M^2}{2\pi^2} \times \int_0^1 dx \int_0^\infty dk \left[ \frac{k^3}{(k^2 + \Delta_{ij}^{(1)})^2} - \frac{1}{2} \frac{k^3}{(k^2 + \Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)})^2} - \frac{1}{2} \frac{k^3}{(k^2 + \Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)})^2} \right] \quad (\text{A.132})$$

El resultado final es

$$I_{ij}^{(2)} = \frac{M^2 N_C}{8\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \ln(\Delta_{ij}^{(1)}) - \frac{3}{4} \ln(\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)} \Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)}) + \frac{1}{2} \ln(\Delta_{\Lambda_{PV}\Lambda_{PV}}^{(1)}) \right] \\ - \frac{M^2 N_C}{4\pi^2} \int_0^1 x dx \left[ \ln(\Delta_{ij}^{(1)}) - \frac{1}{2} \ln(\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(1)}) - \frac{1}{2} \ln(\Delta_{\Lambda_{PV}j}^{(1)}) \right] \quad (\text{A.133})$$

### A.8.3. $L_i^{(3)}$

Para (A.40) el resultado al sustraer es

$$I_i^{(3)\mu} = \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \left\{ \frac{8N_C N_1^\mu}{[(k+p')^2 - M_i^2][(k+p)^2 - M_i^2]} \right. \\ \left. - \frac{4N_C N_1^\mu}{[(k+p')^2 - M_i^2][(k+p)^2 - \Lambda_{PV}^2]} - \frac{4N_C N_1^\mu}{[(k+p')^2 - \Lambda_{PV}^2][(k+p)^2 - M_i^2]} \right\} \quad (\text{A.134})$$

Las integrales son las mismas que (A.40). Bajo un procedimiento análogo al usado para obtener (A.77)

$$I_i^{(3)\mu} = 4N_C(p^\mu + p'^\mu) \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{(k^2 - \Delta_i^{(2)})^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2 - \Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(5)})^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2 - \Delta_{\Lambda_{PV}i}^{(5)})^2} \right] \quad (\text{A.135})$$

Al aplicar rotación de Wick e integrar en k se obtiene el resultado final

$$I_i^{(3)\mu} = \frac{N_C(p^\mu + p'^\mu)}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{2} \ln(\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(5)}) + \frac{1}{2} \ln(\Delta_{\Lambda_{PV}i}^{(5)}) - \ln(\Delta_i^{(2)}) \right] \quad (\text{A.136})$$

donde se define

$$L_i^{(3)} \equiv \frac{N_C}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{2} \ln(\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(5)}) + \frac{1}{2} \ln(\Delta_{\Lambda_{PV}i}^{(5)}) - \ln(\Delta_i^{(2)}) \right] \quad (\text{A.137})$$

### A.8.4. $L_{ij}^{(4)}(p^2)$

Para (A.41) también se sustrae solo un término

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = 8N_C \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{N_2^\mu}{[(k+p')^2 - M_i^2]} \left\{ \frac{1}{[(k+p)^2 - M_i^2][k^2 - M_j^2]} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{[(k+p)^2 - M_i^2][k^2 - \Lambda_{PV}^2]} - \frac{1}{2} \frac{1}{[(k+p)^2 - \Lambda_{PV}^2][k^2 - M_j^2]} \right\} \quad (\text{A.138})$$



Análogamente a como se obtuvo la ecuación (A.95), aplicando rotación de Wick e integrando  $k$

$$I_{ij}^{(4)\mu}(p^2) = \frac{N_C}{8\pi^2} (p^\mu + p'^\mu) \int_0^1 \int_0^{1-x} dz \left\{ \frac{\Delta_{ij}^{(3)}}{\Delta_{ij}^{(4)}} - \frac{1}{2} \frac{\Delta_{ij}^{(3)}}{\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(4)}} - \frac{1}{2} \frac{\Delta_{ij}^{(3)}}{\Delta_{ij}^{(6)}} \right\} \quad (\text{A.139})$$

donde se define

$$L_{ij}^{(4)}(p^2) \equiv \frac{N_C}{8\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} dz \left\{ \frac{\Delta_{ij}^{(3)}}{\Delta_{ij}^{(4)}} - \frac{1}{2} \frac{\Delta_{ij}^{(3)}}{\Delta_{i\Lambda_{PV}}^{(4)}} - \frac{1}{2} \frac{\Delta_{ij}^{(3)}}{\Delta_{ij}^{(6)}} \right\} \quad (\text{A.140})$$



# Bibliografía

- [1] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group). Review of particle physics. *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2020, 083C01, 2020.
- [2] VE Barnes, PL Connolly, DJ Crennell, BB Culwick, WC Delaney, WB Fowler, PE Hagerty, EL Hart, N Horwitz, PVC Hough, et al. Observation of a hyperon with strangeness minus three. *Physical Review Letters*, 12(8):204, 1964.
- [3] Roger F Dashen, SC Frautschi, Murray Gell-Mann, and Yasuo Hara. The eightfold way. *Benjamin*, 1964.
- [4] OW Greenberg. Resource letter q-1: Quarks. *American Journal of Physics*, 50(12):1074–1089, 1982.
- [5] Harald Fritzsch, Murray Gell-Mann, and Heinrich Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture. *Physics Letters B*, 47(4):365–368, 1973.
- [6] Michael Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [7] David J Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, 30(26):1343, 1973.
- [8] Yoichiro Nambu. Axial vector current conservation in weak interactions. *Physical Review Letters*, 4(7):380, 1960.
- [9] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken symmetries. *Physical Review*, 127(3):965, 1962.
- [10] G 't Hooft. Symmetry breaking through bell-jackiw anomalies. *Physical Review Letters*, 37:8–11, 1976.
- [11] SP Klevansky. The nambu–jona-lasinio model of quantum chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 64(3):649, 1992.
- [12] G 't Hooft. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudo-particle. *Physical review: D*, 14(12):3432–3450, 1976.

- 
- [13] Peter Hasenfratz et al. Fermion-boson puzzle in a gauge theory. *Physical Review Letters*, 36(19):1119, 1976.
- [14] Veronique Bernard, Robert L Jaffe, and U-G Meissner. Strangeness mixing and quenching in the nambu-jona-lasinio model. *Nuclear Physics B*, 308(4):753–790, 1988.
- [15] Michael Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Courier Corporation, 2004.
- [16] NN Bogoljubov, Vladimir Veniaminovic Tolmachov, and DV Širkov. A new method in the theory of superconductivity. *Fortschritte der physik*, 6(11-12):605–682, 1958.
- [17] JG Valatin. Comments on the theory of superconductivity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 7(6):843–857, 1958.
- [18] Hiroaki Kohyama, Diji Kimura, and Tomohiro Inagaki. Parameter fitting in three-flavor nambu–jona-lasinio model with various regularizations. *Nuclear Physics B*, 906:524–548, 2016.
- [19] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. US Government printing office, 1948.
- [20] Yu Ninomiya, Wolfgang Bentz, and IC Cloët. Dressed quark mass dependence of pion and kaon form factors. *Physical Review C*, 91(2):025202, 2015.
- [21] Parada TP Hutaauruk, Ian C Cloët, and Anthony W Thomas. Flavor dependence of the pion and kaon form factors and parton distribution functions. *Physical Review C*, 94(3):035201, 2016.
- [22] SP Klevansky. The nambu–jona-lasinio model of quantum chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 64(3):649, 1992.
- [23] P Rehberg, SP Klevansky, and J Hüfner. Hadronization in the su (3) nambu–jona-lasinio model. *Physical Review C*, 53(1):410, 1996.
- [24] Parada Tobel Paraduan Hutaauruk. *Nonperturbative aspects of kaon structure*. PhD thesis, 2016.
- [25] J Gasser and GRS Zarnauskas. On the pion decay constant. *Physics Letters B*, 693(2):122–128, 2010.
- [26] Parada TP Hutaauruk, Wolfgang Bentz, Ian C Cloët, and Anthony W Thomas. Charge symmetry breaking effects in pion and kaon structure. *Physical Review C*, 97(5):055210, 2018.

- [27] Jonathan L Rosner, Sheldon Stone, and Ruth S Van de Water. Leptonic decays of charged pseudoscalar mesons-2015. *arXiv preprint arXiv:1509.02220*, 2015.
- [28] C McNeile, A Bazavov, CTH Davies, RJ Dowdall, K Hornbostel, GP Lepage, and HD Trotter. Direct determination of the strange and light quark condensates from full lattice qcd. *Physical Review D*, 87(3):034503, 2013.
- [29] Yu Ninomiya, Wolfgang Bentz, and IC Cloët. Dressed quark mass dependence of pion and kaon form factors. *Physical Review C*, 91(2):025202, 2015.
- [30] J Volmer, David Abbott, H Anklin, Chris Armstrong, John Arrington, K Assamagan, Steven Avery, OKeith Baker, HP Blok, C Bochna, et al. Measurement of the charged pion electromagnetic form factor. *Physical review letters*, 86(9):1713, 2001.
- [31] Vardan Tadevosyan, HP Blok, GM Huber, David Abbott, Heinz Anklin, Christopher Armstrong, John Arrington, Ketevi Assamagan, Steven Avery, OK Baker, et al. Determination of the pion charge form factor for  $q^2 = 0.60\text{--}1.60 \text{ geV}^2$ . *Physical Review C*, 75(5):055205, 2007.
- [32] T Horn, K Aniol, J Arrington, B Barrett, EJ Beise, HP Blok, W Boeglin, EJ Brash, H Breuer, CC Chang, et al. Determination of the pion charge form factor at  $q^2 = 1.60$  and  $2.45 \text{ (geV/c)}^2$ . *Physical review letters*, 97(19):192001, 2006.
- [33] HP Blok, Tanja Horn, GM Huber, EJ Beise, David Gaskell, DJ Mack, Vardan Tadevosyan, Jochen Volmer, David Abbott, Konrad Aniol, et al. Charged pion form factor between  $q^2 = 0.60$  and  $2.45 \text{ geV}^2$ . i. measurements of the cross section for the  $1 \text{ h} (e, e'\pi^+) n$  reaction. *Physical Review C*, 78(4):045202, 2008.
- [34] GM Huber, HP Blok, Tanja Horn, EJ Beise, David Gaskell, DJ Mack, Vardan Tadevosyan, Jochen Volmer, David Abbott, Konrad Aniol, et al. Charged pion form factor between  $q^2 = 0.60$  and  $2.45 \text{ geV}^2$ . ii. determination of, and results for, the pion form factor. *Physical Review C*, 78(4):045203, 2008.
- [35] Arlene C Aguilar, Zafir Ahmed, Christine Aidala, Salina Ali, Vincent Andrieux, John Arrington, Adnan Bashir, Vladimir Berdnikov, Daniele Binosi, Lei Chang, et al. Pion and kaon structure at the electron-ion collider. *The European Physical Journal A*, 55(10):190, 2019.
- [36] Jin Dan and Yang Ya-Dong. Space-and time-like kaon electromagnetic form factors in perturbative qcd. *Chinese Physics C*, 36(10):941, 2012.

- 
- [37] MR Whalley. A compilation of data on hadronic total cross sections in  $e^+e^-$  interactions. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 29(12A):A1, 2003.
- [38] Ian JR Aitchison and Anthony JG Hey. *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*, volume 1. CRC Press, 2012.
- [39] CJ Bebek, CN Brown, SD Holmes, RV Kline, FM Pipkin, S Raither, LK Sisterson, A Browman, KM Hanson, D Larson, et al. Electroproduction of single pions at low  $\varepsilon$  and a measurement of the pion form factor up to  $q^2 = 10 \text{ geV}^2$ . *Physical Review D*, 17(7):1693, 1978.
- [40] SR Amendolia, F Fidecaro, A Stefanini, MPJ Landon, P Laurelli, MA Giorgi, A Zallo, L Ristori, PV March, H Bilokon, et al. A measurement of the space-like pion electromagnetic form factor. *Nucl. Phys. B*, 277(CERN-EP-86-34):168–196, 1986.
- [41] SR Amendolia, G Batignani, GA Beck, EH Bellamy, E Bertolucci, G Bologna, Luciano Bosisio, C Bradaschia, Marco Budinich, M Dell’Órso, et al. A measurement of the kaon charge radius. *Physics Letters B*, 178(4):435–440, 1986.
- [42] Juerg Beringer, JF Arguin, RM Barnett, K Copic, O Dahl, DE Groom, CJ Lin, J Lys, H Murayama, CG Wohl, et al. Review of particle physics. *Physical Review D-Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 86(1):010001, 2012.

*Admira a quien lo intenta, aunque fracase*

*Séneca*

