



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

“Socios supersimétricos del potencial de Rosen-
Morse trigonométrico y diseño espectral”

Tesis que presenta

Rosa María Reyes García

para obtener el Grado de

Doctora en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: Dr. David José Fernández Cabrera

Ciudad de México

Diciembre, 2021

Dedicado a mis queridos padres y hermano.

Agradecimientos

Mamá, Papá, Hermano, gracias por estar conmigo en cada momento y por todo el apoyo que me han brindado, por sus consejos y por alentarme a seguir adelante. Este trabajo lo dedico a ustedes.

A mi asesor, el Dr. David José Fernández Cabrera, gracias por darme la oportunidad de trabajar con usted, por su ayuda, sus enseñanzas, su paciencia y dedicación durante la realización de este trabajo. Gracias por el apoyo que me ha brindado, he aprendido y aún tengo mucho por aprender de usted. He sido realmente afortunada al tenerlo como asesor, muchas gracias por todo.

Agradezco a mis sinodales, el Dr. David Bermúdez Rosales, el Dr. Alonso Contreras Astorga, el Dr. Erik Díaz Bautista y el Dr. Héctor Hugo Garca Compean, por su interés, sus valiosos comentarios y el tiempo dedicado a la evaluación de este trabajo. También quiero agradecerles su apoyo durante mi formación en el Cinvestav, ya que han sido parte de ella desde el comienzo, muchas gracias.

Gracias a mis profesores, grupo de trabajo y al grupo de Física Matemática y Gravitación por cada conocimiento compartido.

Dra. Nora Eva Bretón Báez, gracias por todo su apoyo.

Familia y amigos, gracias por compartir conmigo buenos y no tan buenos momentos, gracias por el apoyo que me han brindado.

Al Cinvestav, en particular al Departamento de Física, gracias por el apoyo que se me otorgado durante estos años de formación académica.

Finalmente, agradezco al CONACyT por el financiamiento otorgado a través del Programa de Becas para Estudios de Posgrado (beca con número de CVU 483593) y del proyecto FORDECYT-PRONACES/61533/2020, apoyo que me permitió continuar con mi formación académica y la realización de este trabajo.

Abstract

The trigonometric Rosen-Morse potential admits exact solution, it has an infinite discrete energy spectrum and it has two free parameters allowing its shape to be greatly modified. Furthermore, it is a potential with short-range interaction and it is one of the few potentials that present the famous shape invariance symmetry. The characteristics of the potential, as well as its possible application in the description of some systems in various areas of Physics (such as Molecular Physics and Quantum Chromodynamics, among others), make it a potential of great interest, particularly for Supersymmetric Quantum Mechanics.

In this work we discuss the results of using the first and second order supersymmetric transformations to generate new potentials with exact solution, which have the same type and number of singularities as the initial trigonometric Rosen-Morse potential. In the first part of this work, a brief overview of the techniques of Supersymmetric Quantum Mechanics of first and second order is offered. Subsequently, the construction of the general solution to the stationary Schrödinger equation with arbitrary energy for the trigonometric Rosen-Morse potential in terms of hypergeometric functions is presented, and the characteristics that are important to implement successfully the various supersymmetric transformations are analyzed. Finally, the new potentials generated by the different first and second order transformations are studied, as well as the effect that the behavior of the seed solutions has on the spectrum of the new Hamiltonian, which may differ from the spectrum of the initial Hamiltonian by one or two discrete energy levels. The different variants of the spectrum that can be achieved suggest that the spectral design is increasingly reachable, at least at the theoretical level contained in this thesis.

Resumen

El potencial de Rosen-Morse trigonométrico admite solución exacta, cuenta con un espectro discreto infinito de energías y tiene dos parámetros libres que permiten modificar grandemente su forma. Además, es un potencial con interacción de corto alcance y es uno de los pocos potenciales que presentan la famosa simetría de invarianza de forma. Las características del potencial, así como su posible aplicación en la descripción de algunos sistemas en diversas áreas de la Física (como Física molecular y Cromodinámica Cuántica, entre otras), lo convierten en un potencial de gran interés, en particular para la Mecánica Cuántica Supersimétrica.

En este trabajo se discuten los resultados de emplear las transformaciones supersimétricas de primero y segundo orden para generar nuevos potenciales con solución exacta, que tienen el mismo tipo y número de singularidades que el potencial de Rosen-Morse trigonométrico inicial. En la primera parte de este trabajo se ofrece una breve revisión general de las técnicas de Mecánica Cuántica Supersimétrica de primero y segundo orden. Posteriormente, se presenta la construcción de la solución general a la ecuación de Schrödinger estacionaria con parámetro de energía arbitrario para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico en términos de funciones hipergeométricas y se analizan las características que son importantes para implementar con éxito las diversas transformaciones supersimétricas. Finalmente, se estudian los nuevos potenciales generados mediante las distintas transformaciones de primero y segundo orden, así como se discute el efecto que tiene el comportamiento de las soluciones semilla sobre el espectro del nuevo Hamiltoniano, el cual puede diferir del espectro del Hamiltoniano inicial en uno o dos niveles de energía discretos. Las distintas variantes del espectro que se pueden conseguir sugieren que el diseño espectral está cada día más accesible, cuando menos al nivel teórico contenido en esta tesis.

Índice general

Abstract	VII
Resumen	IX
Introducción	XV
1. Mecánica cuántica supersimétrica	1
1.1. Mecánica cuántica supersimétrica de primer orden	2
1.2. Mecánica cuántica supersimétrica de segundo orden	5
2. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico: solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria	15
2.1. Análisis de las soluciones	21
3. Socios supersimétricos del potencial de Rosen-Morse trigonométrico	25
3.1. Socios supersimétricos de primer orden	26
3.1.1. Borrando la energía del estado base	26
3.1.2. Creando un nuevo estado base	27
3.1.3. Transformación isoespectral	31
3.2. Socios supersimétricos de segundo orden	34
3.2.1. Caso real ($c > 0$)	35
3.2.2. Caso confluyente ($c = 0$)	49
3.2.3. Caso complejo ($c < 0$)	52
4. Observaciones finales y conclusiones	59
Análisis asintótico de las soluciones de la ecuación de Schrödinger	61

Índice de figuras

2.1. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico para diferentes valores de sus parámetros a y b	16
2.2. Comparativa entre los potenciales de Rosen-Morse trigonométricos para valores de b y $-b$ con un valor $a = 2$	20
2.3. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico para $a = 2$, $b = 20$ y algunas de sus <i>eigenfunciones</i>	22
2.4. Soluciones no físicas $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ de la ecuación de Schrödinger estacionaria para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico con $a = 2$, $b = 50$ y distintos valores de E	23
3.1. <i>Eigenfunción</i> del estado base del potencial de Rosen-Morse trigonométrico para diferentes valores de a y b	27
3.2. Borrar el estado base. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico $V_0(x)$ (curva sólida) y su socio supersimétrico de primer orden $V_1(x)$ (curva punteada) generado usando como solución semilla la <i>eigenfunción</i> del estado base de H_0 para distintos valores de a y b	28
3.3. <i>Eigenfunción</i> no física de H_1 asociada a E_0 , resultante de aplicar una transformación de primer orden sobre el potencial de Rosen-Morse trigonométrico que borra el estado base de H_0 para diferentes valores a y b	29
3.4. Creando un nuevo estado base. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y algunos socios supersimétricos de primer orden (a) y (d) generados usando soluciones semilla con $\epsilon_1 < E_0$. Solución semilla (b) y (e) y función $\psi_{1\epsilon_1}$ (c) y (f)	30
3.5. Transformación isoespectral. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico (curvas sólidas) y sus socios supersimétricos de primer orden generados usando una solución semilla no física u_{01} de H_0 para diferentes valores de a y b . . .	33

3.6. Borrando dos niveles de energía consecutivos. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para: (a) $a = 2, b = 50$, (d) $a = 5, b = 50$. (b) , (e) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones. (c) , (f) Estados faltantes.	37
3.7. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que se borran dos niveles de energía consecutivos. . .	38
3.8. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que se crean dos niveles de energía.	39
3.9. Creando dos nuevos niveles de energía. (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b) , (c) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones. . . .	40
3.10. <i>Eigenfunciones</i> $\psi_{2\epsilon_1}, \psi_{2\epsilon_2}$ de H_2 resultantes de efectuar las transformaciones de segundo orden en las que se crean dos niveles de energía.	41
3.11. Creando un nivel de energía. (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b) , (c) Soluciones semilla usadas para implementar las transformaciones.	42
3.12. Funciones $\psi_{2\epsilon_1}, \psi_{2\epsilon_2}$ resultantes de las transformaciones de segundo orden en las que se crea un nuevo nivel de energía.	43
3.13. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que se crea un nivel de energía.	44
3.14. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que un nivel de energía es desplazado.	44
3.15. Moviendo un nivel de energía. (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b) , (c) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones.	45
3.16. Funciones $\psi_{2\epsilon_1}, \psi_{2\epsilon_2}$, resultantes de transformaciones de segundo orden en las que un nivel de energía es desplazado.	46
3.17. Eliminando un nivel de energía. (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b) , (c) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones.	47
3.18. Funciones $\psi_{2\epsilon_1}, \psi_{2\epsilon_2}$, resultantes de las transformaciones de segundo orden en las que se elimina un nivel de energía.	48
3.19. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que se elimina un nivel de energía.	48
3.20. Transformación isoespectral (caso real). (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b) , (c) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones.	50

3.21. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden isoespectrales (caso real).	51
3.22. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico ($a = 2$, $b = 50$) y algunos socios supersimétricos de segundo orden confluentes.	51
3.23. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones supersimétricas de segundo orden confluentes de las Figuras 3.22(a) y 3.22(b)	52
3.24. Función $\psi_{2\epsilon_1}(x)$ asociada a los potenciales graficados en las Figuras 3.22(a) y 3.22(b)	53
3.25. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico ($a = 5$, $b = 50$) y algunos socios supersimétricos de segundo orden confluentes.	54
3.26. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones supersimétricas de segundo orden confluentes de las Figuras 3.25(a) y 3.25(b)	55
3.27. Función $\psi_{2\epsilon_1}(x)$ asociada a los potenciales graficados en las Figuras 3.25(a) y 3.25(b)	56
3.28. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico ($a = 2$, $b = 50$) y sus socios supersimétricos de segundo orden generados usando una transformación con energías de factorización complejas y solución semilla ψ_L	57
3.29. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico ($a = 5$, $b = 50$) y sus socios supersimétricos de segundo orden generados usando una transformación con energías de factorización complejas y solución semilla ψ_L o ψ_R	58

Introducción

En Física existen pocos potenciales que admiten solución exacta, por lo que la búsqueda de potenciales de este tipo ha merecido la atención de los físicos a lo largo de los años [1, 2]. Las técnicas de la mecánica cuántica supersimétrica permiten generar nuevos potenciales con solución exacta a partir de potenciales con soluciones conocidas, por lo que estas técnicas han sido usadas de forma recurrente en la literatura para la realización de dicha tarea [3–8].

El enfoque usado en mecánica cuántica supersimétrica es equivalente al método de factorización, a las técnicas de entrelazamiento y a la transformación de Darboux [9, 10]. Las transformaciones usadas en mecánica cuántica supersimétrica (transformaciones supersimétricas) permiten generar Hamiltonianos con características similares a las del Hamiltoniano inicial. Ya que el espectro del Hamiltoniano inicial es una de tales características, resulta que el nuevo Hamiltoniano generado por una transformación supersimétrica tiene un espectro que puede diferir del espectro inicial en un número finito de niveles, sugiriendo así la posibilidad de implementar a través de las técnicas de mecánica cuántica supersimétrica lo que se denomina como diseño espectral [11–15].

Por otro lado, el potencial de Rosen-Morse trigonométrico (que es la versión trigonométrica del potencial original de Rosen-Morse [16]) admite solución exacta, al igual el de Rosen-Morse. El potencial de Rosen-Morse trigonométrico (tRM, por sus siglas en inglés) surge en el estudio de diversos sistemas físicos, por ejemplo, en el análisis de soluciones exactas para la ecuación de Schrödinger con masa dependiente de la posición [17], también como propuesta para estudiar la degeneración de tipo rotacional en moléculas diatómicas [18] y en estudios del grafeno sometido a campos magnéticos externos [19–21]. Además, es un potencial con interacción de corto alcance, un tipo de potenciales que son relevantes en Física de altas energías ya que pueden considerarse como alternativa para modelar el confinamiento de quarks en Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés). El potencial de Rosen-Morse trigonométrico ha sido identificado como un potencial relevante en el estudio del espectro de mesones y bariones cuando éstos son considerados como un sistema quark-diquark [22] y también como un potencial efectivo para la interacción quark-antiquark [23]. Igualmente, el potencial de Rosen-Morse trigonométrico se ha empleado para describir las propiedades termodinámicas de un gas cuántico de mesones [24].

Además de los sistemas físicos que ayuda a describir, el Hamiltoniano de Rosen-Morse trigonométrico posee un espectro de energías que presenta una relación no lineal con el

número cuántico que caracteriza a su correspondiente valor propio de la energía. Esto hace que el potencial de Rosen-Morse trigonométrico sea de gran interés en el área de Física-Matemática, en el estudio de álgebras no lineales y su conexión con la mecánica cuántica supersimétrica [25–28]. Además, el potencial tRM aparece de forma natural al analizar los potenciales cuánticos en espacios curvos [29].

Las técnicas de la mecánica cuántica supersimétrica han sido implementadas con éxito para diversos potenciales exactamente solubles [7, 25, 30–33]. Sin embargo, hasta donde sabemos, para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico sólo se han explorado algunos casos particulares de primero y segundo orden. Las transformaciones más estudiadas son aquellas que dan lugar a potenciales invariantes de forma [3, 34, 35]. No obstante, en el caso de segundo orden han sido exploradas también transformaciones en las que se eliminan dos niveles de energía consecutivos del potencial tRM [36], así como algunos casos específicos con energías de factorización que no pertenecen al espectro del Hamiltoniano inicial [37], aunque existen aún diversos casos que no han sido explorados detalladamente [38].

En este trabajo, se presenta un estudio sistemático de los socios supersimétricos de primero y segundo orden del potencial de Rosen-Morse trigonométrico, ilustrando en cada caso los diferentes tipos de manipulación espectral que se pueden conseguir al aplicar tales transformaciones.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma. En el Capítulo 1 se presenta una breve descripción de las técnicas de la mecánica cuántica supersimétrica de primero y segundo orden. En el Capítulo 2 se presenta un estudio del potencial de Rosen-Morse trigonométrico, su correspondiente ecuación de Schrödinger, la construcción de las soluciones de tal ecuación y un análisis de las mismas. En el Capítulo 3 se muestran los resultados obtenidos de aplicar las técnicas de la mecánica cuántica supersimétrica al potencial de Rosen-Morse trigonométrico. Finalmente, nuestras conclusiones y comentarios finales se presentan en el Capítulo 4.

Capítulo 1

Mecánica cuántica supersimétrica

Las técnicas de la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY QM por sus siglas en inglés) son ampliamente conocidas en la actualidad y resultan muy útiles para la construcción de nuevos Hamiltonianos con solución exacta partiendo de un Hamiltoniano inicial con solución exacta dada. En el presente trabajo se considera como punto de partida para efectuar las transformaciones de primero y segundo orden al Hamiltoniano de Rosen-Morse trigonométrico, a partir del cual se construirán nuevos Hamiltonianos exactamente solubles. En este capítulo se presentan de forma breve y a manera de algoritmo las fórmulas que constituyen las herramientas necesarias para poder llevar a cabo las transformaciones supersimétricas de primero y segundo orden.

En 1981, Witten definió un sistema mecánico cuántico supersimétrico [39] como aquel para el cual existen operadores Q_i , $i = 1, 2, \dots, N$, que conmutan con el Hamiltoniano H_{ss} de la siguiente forma

$$[Q_i, H_{ss}] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

y que además satisfacen las relaciones de anticonmutación siguientes:

$$\{Q_i, Q_j\} = H_{ss}\delta_{ij}.$$

En particular, en el caso con $N = 2$ los operadores previos se pueden expresar de la siguiente forma

$$Q_1 = \frac{Q^\dagger + Q}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{Q^\dagger - Q}{i\sqrt{2}},$$
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & B^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{ss} = \{Q, Q^\dagger\} = \begin{pmatrix} B^\dagger B & 0 \\ 0 & BB^\dagger \end{pmatrix},$$

donde H_{ss} es el Hamiltoniano supersimétrico, los operadores Q_1, Q_2 son llamados supercargas y B, B^\dagger son operadores diferenciales de orden k conocidos como operadores de entrelazamiento. Esto último se debe a que B, B^\dagger satisfacen las siguientes relaciones de entrelazamiento operatorial

$$HB = B\tilde{H}, \quad \tilde{H}B^\dagger = B^\dagger H, \quad (1.1)$$

donde los operadores H y \tilde{H} son Hamiltonianos unidimensionales de la forma

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad \tilde{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}(x). \quad (1.2)$$

Los operadores B y B^\dagger satisfacen las siguientes relaciones operatoriales polinomiales factorizadas:

$$BB^\dagger = \prod_{j=1}^k (\tilde{H} - \epsilon_j), \quad B^\dagger B = \prod_{j=1}^k (H - \epsilon_j), \quad (1.3)$$

donde se puede definir un operador H_p como sigue

$$H_p = \begin{pmatrix} \tilde{H} & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix},$$

de tal modo que el Hamiltoniano supersimétrico se puede expresar en la siguiente forma polinomial factorizada:

$$H_{ss} = \prod_{j=1}^k (H_p - \epsilon_j).$$

En el presente trabajo vamos a estudiar las transformaciones supersimétricas generadas por operadores de entrelazamiento de primero y segundo orden, que son los casos con $k = 1$ y $k = 2$, respectivamente. A continuación se analizan tales transformaciones.

1.1. Mecánica cuántica supersimétrica de primer orden

Las transformaciones supersimétricas en el caso de primer orden tienen asociadas relaciones de entrelazamiento operatorial que denotaremos como sigue,

$$H_1 A_1^+ = A_1^+ H_0, \quad (1.4)$$

$$H_0 A_1^- = A_1^- H_1, \quad (1.5)$$

donde los operadores H_0, H_1 son Hamiltonianos de tipo Schrödinger (ver expresiones (1.2)), es decir,

$$H_i = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_i(x), \quad i = 0, 1, \quad (1.6)$$

y A_1^\pm son los siguientes operadores de entrelazamiento diferenciales de primer orden

$$A_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \frac{d}{dx} + \frac{u'_{01}(x)}{u_{01}(x)} \right). \quad (1.7)$$

La función $u_{01}(x)$ es conocida como *solución semilla*, ya que satisface la ecuación estacionaria de Schrödinger para H_0 , como veremos más adelante.

Al sustituir en las relaciones de entrelazamiento previas las expresiones de los Hamiltonianos en términos de los potenciales $V_0(x)$, $V_1(x)$ y los operadores de entrelazamiento en términos de la solución semilla $u_{01}(x)$, resulta que $V_0(x)$, $V_1(x)$ y $u_{01}(x)$ deben cumplir con ciertas relaciones [3–8] que, después de ser trabajadas conducen a las siguientes expresiones

$$V_1(x) = V_0(x) - [\ln u_{01}]'', \quad (1.8)$$

$$H_0 u_{01} = -\frac{1}{2} u_{01}'' + V_0 u_{01} = \epsilon_1 u_{01}. \quad (1.9)$$

Los potenciales $V_0(x)$, $V_1(x)$ son llamados socios supersimétricos, mientras que $u_{01}(x)$ es solución de la ecuación estacionaria de Schrödinger para el Hamiltoniano H_0 con *energía de factorización* ϵ_1 (como podemos ver de la ecuación (1.9)) y debe satisfacer también que $A_1^+ u_{01} = 0$. Es importante notar que las soluciones semilla $u_{01}(x)$ en general no necesitan ser de cuadrado-integrable, condición que deben satisfacer las *eigenfunciones* de la ecuación de Schrödinger. Entonces, se puede distinguir entre categorías de soluciones usando la siguiente convención: las soluciones que sean de cuadrado-integrable las llamaremos soluciones físicas mientras que las que satisfagan sólo la ecuación, pero no sean de cuadrado-integrable, las llamaremos soluciones no físicas.

Las condiciones previas que deben cumplir los Hamiltonianos H_0 y H_1 implican que pueden ser factorizados de la siguiente forma

$$H_0 = A_1^- A_1^+ + \epsilon_1, \quad (1.10)$$

$$H_1 = A_1^+ A_1^- + \epsilon_1. \quad (1.11)$$

Para usar las transformaciones supersimétricas de primer orden como un algoritmo para obtener nuevos Hamiltonianos con solución exacta, se requiere de un Hamiltoniano inicial H_0 con solución exacta conocida.

Supongamos que se tiene un Hamiltoniano H_0 con solución exacta dada, que se encuentra definido en el intervalo $x \in (x_L, x_R)$, lo cual incluye la posibilidad de que su dominio sea el conjunto de los números reales, los reales positivos o algún intervalo finito en los reales. Por lo tanto, conocemos las *eigenfunciones* normalizadas de H_0 las cuales denotaremos por $\psi_{0n}(x)$, sus correspondientes *eigenvalores* E_n , $n = 0, 1, \dots$, así como algunas soluciones no físicas a la ecuación estacionaria de Schrödinger asociada. Consideremos ahora una solución $u_{01}(x)$ que satisface la ecuación (1.9) para una energía de factorización ϵ_1 tal que $\epsilon_1 \leq E_0$, lo cual hace posible que la transformación genere un nuevo potencial $V_1(x)$ que no tenga singularidades adicionales respecto del potencial inicial $V_0(x)$ (ver ecuación (1.8)). Dados los elementos anteriores y sustituyéndolos en las ecuaciones (1.8) y (1.9) se obtiene el nuevo potencial $V_1(x)$ y en consecuencia el nuevo Hamiltoniano H_1 . Además, al aplicar el operador de entrelazamiento A_1^+ a las *eigenfunciones* $\psi_{0n}(x)$ de H_0 es posible determinar las *eigenfunciones* $\psi_{1n}(x)$ de H_1 asociadas a los *eigenvalores* E_n , las cuales

están dadas por

$$\psi_{1n}(x) = \frac{A_1^+ \psi_{0n}(x)}{\sqrt{E_n - \epsilon_1}}. \quad (1.12)$$

Adicionalmente, existe una función $\psi_{1\epsilon_1}$ que es una *eigenfunción* formal de H_1 asociada a ϵ_1 , es decir, satisface $H_1 \psi_{1\epsilon_1}(x) = \epsilon_1 \psi_{1\epsilon_1}(x)$; tal función $\psi_{1\epsilon_1}$ es aniquilada simultáneamente por el operador A_1^- por lo que satisface la ecuación $A_1^- \psi_{1\epsilon_1}(x) = 0$, de donde se obtiene que

$$\psi_{1\epsilon_1}(x) \propto \frac{1}{u_{01}(x)}. \quad (1.13)$$

Esta relación entre la solución semilla u_{01} y la *eigenfunción* formal $\psi_{1\epsilon_1}$ de H_1 nos permite identificar las distintas modificaciones que la transformación de primer orden puede generar sobre el espectro del nuevo Hamiltoniano H_1 con respecto al espectro inicial. Como se mencionó anteriormente, para poder tener transformaciones no singulares se debe elegir una energía de factorización que sea menor o igual a la energía del estado base de H_0 . Al elegir la energía de factorización igual a la del estado base de H_0 (E_0) la transformación genera un nuevo Hamiltoniano H_1 cuyo espectro no incluye a E_0 ; por otra parte, si se elige la energía de factorización por debajo del estado base de H_0 , dependiendo de las características de la solución semilla la transformación puede generar o un Hamiltoniano H_1 con un nivel de energía adicional o uno iso-espectral al inicial. Tales modificaciones en el espectro están estrechamente relacionadas con la cuadrado-integrabilidad de la función $\psi_{1\epsilon_1}$, por lo que surgen tres posibles modificaciones espectrales que se describen a continuación.

i) Borrar el estado base del espectro inicial.

Este tipo de modificación es el resultado de considerar a la energía del estado base de H_0 como la energía de factorización ϵ_1 y a su correspondiente *eigenfunción* $\psi_{00}(x)$ como solución semilla para efectuar la transformación, es decir, $\epsilon_1 = E_0$ y $u_{01}(x) = \psi_{00}(x)$. Por la relación entre $\psi_{1\epsilon_1}(x)$ y $u_{01}(x)$ se puede concluir que si $u_{01}(x)$ va a cero cuando $x \rightarrow x_L$ y $x \rightarrow x_R$, entonces $\psi_{1\epsilon_1}(x)$ diverge cuando x se aproxima a los mismos extremos. Por lo anterior, la función $\psi_{1\epsilon_1}(x)$ no resulta ser de cuadrado-integrable y, en consecuencia, la energía $\epsilon_1 = E_0$ no pertenece al espectro $\text{Sp}(H_1)$ del nuevo Hamiltoniano H_1 , es decir,

$$\text{Sp}(H_1) = \{E_n, n = 1, 2, \dots\} = \text{Sp}(H_0) - \{E_0\}. \quad (1.14)$$

ii) Crear un nuevo estado base.

Si se toma una energía de factorización $\epsilon_1 < E_0$ y una solución semilla $u_{01}(x)$ que no tenga nodos en el dominio de H_0 (incluidos los extremos del intervalo), entonces la transformación genera una función $\psi_{1\epsilon_1}(x)$ que es de cuadrado-integrable y por tanto, es una *eigenfunción* de H_1 con energía ϵ_1 . Así, la transformación agrega el nivel de energía $\epsilon_1 < E_0$ al espectro de H_1 por lo que

$$\text{Sp}(H_1) = \{\epsilon_1, E_n, n = 0, 1, \dots\} = \{\epsilon_1\} \cup \text{Sp}(H_0). \quad (1.15)$$

Ya que $\epsilon_1 < E_0$, entonces ϵ_1 será el estado base de H_1 .

Nótese que $\psi_{1\epsilon_1}(x)$ es usualmente llamado estado faltante [40] (por su traducción del inglés ‘missing state’, ver también [30]).

iii) Transformación isoespectral.

Al considerar una energía de factorización $\epsilon_1 < E_0$ aparece una forma alternativa a la anterior de elegir la solución semilla, la cual al igual que en los casos anteriores conduce a una transformación no singular. La solución semilla $u_{01}(x)$ que induce este tipo de transformación diverge en uno de los extremos del dominio del potencial y tiene un nodo, o bien tiende asintóticamente a cero, en el otro extremo del dominio, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow x_L} u_{01}(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow x_R} u_{01}(x) = 0. \quad (1.16)$$

Una solución semilla con tales características conduce a una función $\psi_{1\epsilon_1}(x)$ que no es de cuadrado-integrable, por lo que el espectro de H_1 no incluye a ϵ_1 , es decir $\epsilon_1 \notin \text{Sp}(H_0)$. Así, los espectros de H_0 y de H_1 son iguales,

$$\text{Sp}(H_1) = \{E_n, n = 0, 1, \dots\} = \text{Sp}(H_0). \quad (1.17)$$

Se obtiene de esta forma una transformación isoespectral.

1.2. Mecánica cuántica supersimétrica de segundo orden

Las transformaciones supersimétricas no singulares de segundo orden en algunos casos pueden descomponerse en dos transformaciones sucesivas no singulares de primer orden; sin embargo, esa aproximación tiene ciertas limitantes cuando se consigue su implementación. Ejemplos de tales dificultades al usar ese enfoque son la restricción en la elección de las energías de factorización para generar transformaciones no singulares, la aparición de potenciales complejos al elegir energías de factorización complejas, entre otros inconvenientes. Por otra parte, existe el enfoque directo, en el que la transformación se realiza empleando un operador diferencial de entrelazamiento de segundo orden. Este tipo de transformación permite generar potenciales sin singularidades adicionales dentro del dominio del potencial inicial aún cuando las energías de factorización están por encima de la energía del estado base del Hamiltoniano inicial. Además, es posible implementar la transformación de segundo orden para energías de factorización complejas obteniendo no obstante (bajo ciertas restricciones) un nuevo Hamiltoniano que es Hermitiano. Es así que las transformaciones de segundo orden en el enfoque directo brindan mayor versatilidad en la elección de las energías de factorización para generar nuevos potenciales no singulares, razón por la que resulta importante estudiar este tipo de transformaciones.

Para estudiar las transformaciones supersimétricas de segundo orden consideremos la segunda relación de entrelazamiento que aparece en la expresión (1.1) para SUSY QM [41–47] en una nueva notación:

$$H_2 B_2^+ = B_2^+ H_0, \quad (1.18)$$

siendo B_2^+ un operador diferencial de segundo orden dado por

$$B_2^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta(x) \frac{d}{dx} + \gamma(x) \right), \quad (1.19)$$

donde $\eta(x)$ y $\gamma(x)$ son funciones reales de x por determinarse. Los operadores H_0 y H_2 que aparecen en la relación de entrelazamiento (1.18) corresponden a los Hamiltonianos H y \tilde{H} que se mencionaron anteriormente (ver ecuación (1.1)), es decir, son Hamiltonianos de Schrödinger de la forma (1.6). Notemos que, al igual que en el caso de primer orden, hay una relación de entrelazamiento complementaria que aparece en la expresión (1.1) que reescribimos como sigue

$$H_0 B_2^- = B_2^- H_2, \quad (1.20)$$

donde el operador B_2^- satisface que $B_2^- = (B_2^+)^{\dagger}$. Tomando en cuenta lo anterior, es fácil ver que la relación (1.20) surge de calcular el operador Hermitiano conjugado de la relación contenida en la ecuación (1.18).

Por otra parte, al sustituir las expresiones explícitas para B_2^+ y H_i , $i = 0, 2$ en la ecuación (1.18), posteriormente hacer algunos cálculos algebraicos y efectuar un par de integrales directas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones [6]

$$V_2 = V_0 - \eta', \quad (1.21)$$

$$\gamma = \frac{\eta'}{2} + \frac{\eta^2}{2} - 2V_0 + d, \quad (1.22)$$

$$\frac{\eta\eta''}{2} - \frac{\eta'^2}{4} + \eta^2\eta' + \frac{\eta^4}{4} - 2V_0\eta^2 + d\eta^2 + c = 0, \quad (1.23)$$

donde $d, c \in \mathbb{R}$ son constantes de integración. Para resolver el sistema de ecuaciones anterior de forma única se requiere información adicional, ya que como se puede ver hay cuatro funciones a ser determinadas, V_0, V_2, η y γ , pero sólo se cuenta con tres ecuaciones.

Si se considera que el potencial $V_0(x)$ es conocido, entonces es posible determinar $V_2(x)$, $\gamma(x)$ y $\eta(x)$. Dado que en la ecuación (1.23) sólo aparecen $V_0(x)$ y $\eta(x)$, al conocer $V_0(x)$ es natural comenzar por intentar resolver esta ecuación. Una vez que se tiene una solución a la ecuación diferencial no-lineal (1.23) para $\eta(x)$ resulta fácil determinar γ y V_2 de las ecuaciones (1.21) y (1.22).

La solución a la ecuación (1.23) para $\eta(x)$ se encuentra al proponer el siguiente *ansatz* (ver [6])

$$\eta' = -\eta^2 + 2\beta\eta + 2\xi,$$

en el que β , ξ son funciones de x a determinar. Este *ansatz* transforma la ecuación (1.23) en el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\xi^2 &= c, & \epsilon &= \frac{1}{2}(d + \xi), \\ \beta' + \beta^2 &= 2(V_0 - \epsilon).\end{aligned}$$

Las primeras dos ecuaciones conducen a $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{c}$ y en consecuencia a

$$\epsilon_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{c}}{2}. \quad (1.24)$$

Por otra parte, la tercera es una ecuación diferencial no-lineal de primer orden conocida como ecuación de Riccati; para resolverla se considera el cambio $\beta_i = u'_{0i}/u_{0i}$ lo cual la transforma en una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$H_0 u_{0i} = -\frac{1}{2}u''_{0i} + V_0 u_{0i} = \epsilon_i u_{0i}, \quad i = 1, 2. \quad (1.25)$$

La ecuación que se ha obtenido al transformar la ecuación de Riccati es la ecuación estacionaria de Schrödinger para el potencial V_0 con las dos energías de factorización ϵ_1 , ϵ_2 . Las funciones u_{0i} , $i = 1, 2$ satisfacen la ecuación de Schrödinger (1.25), además pertenecen al kernel del operador B_2^+ , es decir, $B_2^+ u_{0i} = 0$, $i = 1, 2$, consecuentemente son llamadas soluciones semilla o funciones de transformación en la literatura [6–8, 36]. Las soluciones semilla pueden ser o no de cuadrado-integrable; dependiendo de ello son llamadas soluciones físicas o soluciones no físicas del Hamiltoniano H_0 , respectivamente.

Las transformaciones que estamos interesados en estudiar en este trabajo son no singulares. Para conseguir este tipo de transformaciones se deben satisfacer algunas condiciones que han sido ampliamente estudiadas en la literatura (ver por ejemplo [6–8]). Las transformaciones no singulares de segundo orden se clasifican de acuerdo al valor de la constante c que aparece en las energías de factorización (ecuación (1.24)), de donde surgen tres casos: para $c > 0$ aparece el caso real, con energías de factorización $\epsilon_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$; el caso confluyente surge para $c = 0$, con energías de factorización iguales $\epsilon_1 = \epsilon_2 = d/2 \in \mathbb{R}$; para $c < 0$ el caso complejo emerge, con energías de factorización $\epsilon_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, $\epsilon_2 = \epsilon_1^*$.

Cada uno de los casos mencionados conduce a restricciones específicas sobre las soluciones semilla usadas para implementar la transformación. A continuación se describe brevemente cada uno de esos casos y las correspondientes restricciones sobre las soluciones semilla.

Caso real

Este caso surge de considerar que $c > 0$, lo cual como se puede ver en la ecuación (1.24) produce dos energías de factorización reales diferentes $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$, las cuales se van a elegir teniendo en cuenta algunas restricciones que resultan de requerir que la transformación conduzca a nuevos potenciales no singulares.

Ambas energías de factorización deben pertenecer a uno de los intervalos delimitados por un par de energías consecutivas E_j, E_{j+1} del espectro del Hamiltoniano inicial H_0 o al intervalo $(-\infty, E_0)$. Para simplificar la identificación de los diferentes intervalos de energía usaremos la convención de que $I_j = (E_j, E_{j+1})$, en la que el subíndice de I_j está asociado al índice de la energía menor, mientras que al intervalo $(-\infty, E_0)$ lo denotaremos por I_{-1} . Además, a lo largo del trabajo se adopta la convención de que $\epsilon_1 > \epsilon_2$ para ordenar las energías de factorización, convención ampliamente usada en la literatura (ver por ejemplo [6–8]). Al considerar que ambas energías de factorización son reales distintas nos lleva a la elección de dos funciones de transformación u_{01}, u_{02} que deben resolver la ecuación de Schrödinger estacionaria (1.25) para ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente. Una vez determinadas las soluciones semilla u_{01}, u_{02} (que elegiremos reales), se obtienen dos ecuaciones para η ,

$$\begin{aligned}\eta' &= -\eta^2 + 2\beta_1\eta + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2), \\ \eta' &= -\eta^2 + 2\beta_2\eta - 2(\epsilon_2 - \epsilon_1),\end{aligned}$$

que al restarse conducen fácilmente a la siguiente solución para η ,

$$\eta(x) = -\frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\beta_1(x) - \beta_2(x)} = \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)u_1^{(0)}u_2^{(0)}}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})} = \frac{W'(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})},$$

que se reescribe en forma compacta como sigue

$$\eta(x) = [\ln W(u_{01}, u_{02})]',$$

donde $W(u_{01}, u_{02})$ es el Wronskiano de las dos soluciones semilla. Una vez encontrada $\eta(x)$, en términos de las soluciones semilla y de las correspondientes energías de factorización, la ecuación (1.21) para el potencial V_2 permite expresarlo en términos de las soluciones semilla y del potencial inicial V_0 en la siguiente forma

$$V_2(x) = V_0(x) - [\ln W(u_{01}, u_{02})]'' . \quad (1.26)$$

Como se puede notar en esta expresión, la forma de evitar posibles singularidades extra en el nuevo potencial $V_2(x)$ es que el Wronskiano de las soluciones semilla $W(u_{01}, u_{02})$ sea una función libre de nodos. Las condiciones sobre u_{01}, u_{02} para obtener un Wronskiano libre de nodos dependen de la elección de las energías de factorización (ver por ejemplo [6–8]), teniéndose diferentes posibilidades. Si ambas energías de factorización pertenecen a espectro de H_0 éstas deben ser elegidas en la forma $\epsilon_1 = E_{j+1}$ y $\epsilon_2 = E_j$, con lo cual el Wronskiano no tiene nodos. Por otra parte, para parejas de energías de factorización en las que al menos una de ellas no pertenece al espectro del Hamiltoniano inicial, pero ambas pertenecen al intervalo $I_j^+ = [E_j, E_{j+1})$ ($\epsilon_1, \epsilon_2 \in I_j^+$), la condición sobre las soluciones semilla es que u_{02} debe tener un nodo adicional con respecto a u_{01} [6]. En particular, si las energías de factorización pertenecen al intervalo I_{-1} , es decir, ϵ_2 es estrictamente menor que la energía del estado base de H_0 mientras que ϵ_1 puede ser menor o igual que E_0 , entonces u_{01} no debe tener nodos mientras que u_{02} debe tener un nodo.

Por otra parte, aplicando el operador B_2^+ que aparece en la relación de entrelazamiento (1.18) a las *eigenfunciones* $\psi_{0n}(x)$ de H_0 se tiene lo siguiente

$$\psi_{2n}(x) \propto B_2^+ \psi_{0n}, \quad (1.27)$$

donde $\psi_{2n}(x)$ son las *eigenfunciones* de H_2 asociadas a los *eigenvalores* comunes de ambos Hamiltonianos H_0 y H_2 . Al considerar las relaciones de factorización expresadas en (1.3) se determinan las constantes de normalización para los estados $\psi_{2n}(x)$, es decir

$$\psi_{2n}(x) = \frac{B_2^+ \psi_{0n}(x)}{\sqrt{(E_n - \epsilon_1)(E_n - \epsilon_2)}}. \quad (1.28)$$

Sin embargo, existen dos *eigenfunciones* formales de H_2 asociadas a las energías de factorización ϵ_1 y ϵ_2 , las cuales denotaremos por $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$, respectivamente. Además, las funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ pertenecen al kernel del operador B_2^- , es decir, satisfacen lo siguiente

$$H_2 \psi_{2\epsilon_1} = \epsilon_1 \psi_{2\epsilon_1}, \quad H_2 \psi_{2\epsilon_2} = \epsilon_2 \psi_{2\epsilon_2}, \quad (1.29)$$

$$B_2^- \psi_{2\epsilon_1} = 0, \quad B_2^- \psi_{2\epsilon_2} = 0, \quad (1.30)$$

expresiones que, luego de algunos cálculos, nos llevan a

$$\psi_{2\epsilon_1}(x) \propto \frac{u_{02}(x)}{W(u_{01}, u_{02})}, \quad \psi_{2\epsilon_2}(x) \propto \frac{u_{01}(x)}{W(u_{01}, u_{02})}. \quad (1.31)$$

El caso real para las transformaciones supersimétricas de segundo orden permite generar un nuevo Hamiltoniano H_2 cuyo espectro es igual o ligeramente distinto del espectro del Hamiltoniano inicial H_0 , la diferencia entre ambos espectros viene determinada por la cuadrado-integrabilidad de las funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$. Al considerar el espectro resultante de H_2 como la transformación del espectro de H_0 , las posibles modificaciones espectrales que se pueden hacer son las que se listan a continuación.

a) *Borrar dos niveles de energía.*

Este tipo de modificación en el espectro es el resultado de elegir las energías de factorización como $\epsilon_1 = E_{j+1}$, $\epsilon_2 = E_j$ y a las soluciones semilla como las correspondientes *eigenfunciones* de H_0 , lo que nos lleva a que $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ no sean de cuadrado-integrable por lo que el espectro de H_2 es

$$\text{Sp}(H_2) = \{E_n, n \in \mathbb{N}_0 - \{j, j+1\}\} = \text{Sp}(H_0) - \{E_j, E_{j+1}\}. \quad (1.32)$$

b) *Crear dos nuevos niveles de energía.*

Se pueden elegir energías de factorización que no pertenecen al espectro de H_0 , que las correspondientes soluciones semilla tengan el número de nodos adecuado y que sean divergentes en ambos extremos del dominio, es decir

$$\lim_{x \rightarrow x_L} u_{0i}(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_R} u_{0i}(x) = \pm\infty, \quad i = 1, 2. \quad (1.33)$$

La correspondiente transformación genera un nuevo Hamiltoniano H_2 para el cual las funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ resultan ser de cuadrado-integrable, por lo que H_2 tiene un espectro dado por

$$\text{Sp}(H_2) = \{\epsilon_1, \epsilon_2, E_n, n \in \mathbb{N}_0\} = \text{Sp}(H_0) \cup \{\epsilon_1, \epsilon_2\}. \quad (1.34)$$

c) *Borrar un nivel de energía.*

Para tener una transformación en la que el espectro de H_2 no incluya al nivel de energía E_{j+1} del espectro de H_0 existen dos alternativas, en las cuales una de las energías de factorización corresponde a E_{j+1} y la otra está asociada a una solución semilla no física de H_0 . La primera opción consiste en elegir las energías de factorización en la forma $\epsilon_1 = E_{j+1}$ y $\epsilon_2 \in I_j$, mientras que las correspondientes soluciones semilla son tales que $u_{01} = \psi_{j+1}$ y u_{02} tiene un comportamiento en los extremos de la forma

$$\lim_{x \rightarrow x_L} u_{02}(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_R} |u_{02}(x)| = \infty, \quad (1.35)$$

ó

$$\lim_{x \rightarrow x_L} |u_{02}(x)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_R} u_{02}(x) = 0. \quad (1.36)$$

La otra opción es elegir las energías de factorización en la forma $\epsilon_1 \in I_{j+1}$ y $\epsilon_2 = E_{j+1}$. En este caso las soluciones semilla deberán ser elegidas de tal forma que $u_{02} = \psi_{j+1}$ y u_{01} tenga un comportamiento en los extremos como el de la expresión (1.35) ó (1.36).

Ambas opciones nos llevan a funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ que no son de cuadrado integrable por lo que para una transformación de este tipo el espectro de H_2 será

$$\text{Sp}(H_2) = \{E_n, n \in \mathbb{N}_0\} - \{E_{j+1}\} = \text{Sp}(H_0) - \{E_{j+1}\}. \quad (1.37)$$

d) *Agregar un nivel de energía.*

Elegir energías de factorización tales que $\epsilon_1, \epsilon_2 \in I_j$, para las cuales una de las soluciones semilla tiene un comportamiento en los extremos como el de la ecuación (1.33) mientras que la otra se comporta como en la expresión (1.35) ó (1.36), produce una transformación en la que sólo una de las funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ ó $\psi_{2\epsilon_2}$ es de cuadrado integrable, lo cual depende de cómo sean elegidas las soluciones semilla. Si u_{01} es la solución con un comportamiento divergente en ambos extremos del dominio, entonces $\psi_{2\epsilon_1}$ resulta ser de cuadrado integrable y el espectro de H_2

$$\text{Sp}(H_2) = \{\epsilon_2, E_n, n \in \mathbb{N}_0\} = \text{Sp}(H_0) \cup \{\epsilon_1\}. \quad (1.38)$$

Sin embargo, si u_{02} fuera la solución semilla que es divergente en ambos extremos, entonces la función de cuadrado integrable sería $\psi_{2\epsilon_2}$, por lo que el espectro de H_2 se modificaría a

$$\text{Sp}(H_2) = \{\epsilon_1, E_n, n \in \mathbb{N}_0\} = \text{Sp}(H_0) \cup \{\epsilon_2\}. \quad (1.39)$$

e) *Mover un nivel de energía.*

Este tipo de transformación es el resultado de elegir las energías de factorización como en el caso en el que se borra un nivel de energía, pero ahora la solución semilla cuya energía está en el intervalo I_j es divergente en ambos extremos del dominio, es decir, tiene un comportamiento de la forma (1.33). Por lo tanto, una de las soluciones $\psi_{2\epsilon_1}$ ó $\psi_{2\epsilon_2}$ resulta ser de cuadrado integrable, lo cual depende de cómo sean elegidas las soluciones semilla. Si u_{01} es la función cuyo comportamiento es divergente en ambos extremos del dominio, entonces $\psi_{2\epsilon_1}$ será de cuadrado integrable y el espectro de H_2 va a ser

$$\text{Sp}(H_2) = \{\epsilon_1, E_n, n \in \mathbb{N}_0 - \{j+1\}\} = \text{Sp}(H_0) \cup \{\epsilon_1\} - \{E_{j+1}\}. \quad (1.40)$$

Sin embargo, si u_{02} fuera la solución semilla que es divergente en ambos extremos, entonces la función de cuadrado-integrable sería $\psi_{2\epsilon_2}$, por lo que el espectro de H_2 sería:

$$\text{Sp}(H_2) = \{\epsilon_2, E_n, n \in \mathbb{N}_0 - \{j+1\}\} = \text{Sp}(H_0) \cup \{\epsilon_2\} - \{E_{j+1}\}. \quad (1.41)$$

f) *Transformación isoespectral.*

Es una transformación en la que las energías de factorización ϵ_1, ϵ_2 no pertenecen al espectro de H_0 , $\epsilon_1, \epsilon_2 \in I_j$, sus correspondientes soluciones semilla tienen un nodo (o tienden asintóticamente a cero) en uno sólo de los extremos del dominio mientras que en el otro extremo divergen, es decir, ambas soluciones semilla tienen comportamientos del tipo dado en las expresiones (1.35) ó (1.36). Los comportamientos divergentes de las soluciones semilla no necesariamente deben aparecer en el mismo extremo del dominio para ambas soluciones, así como tampoco el nodo de una solución en un extremo tendría que coincidir con el nodo en el mismo extremo de la otra solución. La elección de soluciones semilla con el comportamiento descrito en las expresiones (1.35) ó (1.36) conduce a funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ que no son de cuadrado-integrable, por lo que el espectro de H_2 es igual al de H_0 , es decir

$$\text{Sp}(H_2) = \{E_n, n \in \mathbb{N}_0\} = \text{Sp}(H_0). \quad (1.42)$$

Caso confluyente

El caso confluyente surge al considerar que $c = 0$, con lo que se obtiene sólo un valor para ambas energías de factorización, $\epsilon_1 = \epsilon_2 \in \mathbb{R}$. Se requiere de una única solución semilla u_{01} que satisfaga la ecuación de Schrödinger estacionaria (1.25), por lo que se obtiene una sola ecuación para η

$$\eta' = -\eta^2 + 2\beta\eta.$$

Para resolverla se supone que $\eta = 1/y$, con lo que la ecuación anterior se transforma en

$$y' + 2\beta y = 1,$$

que tiene como solución general a la siguiente expresión

$$y = \left[\omega_0 + \int \exp \left(2 \int \beta(x) dx \right) \right] \exp \left(-2 \int \beta(x) dx \right),$$

donde ω_0 es una constante de integración real. El resultado anterior nos lleva a la siguiente solución para η ,

$$\eta(x) = \frac{\exp \left(2 \int \beta(x) dx \right)}{\omega_0 + \int \exp \left(2 \int \beta(x) dx \right)}.$$

Recordemos que anteriormente se propuso el cambio $\beta_i = u'_{0i}/u_{0i}$ por lo que se satisface que $u_{01} \propto \exp \left(\int \beta(x) dx \right)$. Entonces, se puede reescribir la expresión previa para η en términos de la solución semilla u_{01} , obteniéndose lo siguiente,

$$\eta(x) = \frac{[u_{01}(x)]^2}{\omega_0 + \int_{x_0}^x [u_{01}(y)]^2 dy} = \frac{W'(u_{01}, u_{02})}{W(u_{01}, u_{02})},$$

donde

$$W(u_{01}, u_{02}) = w_0 + \int_{x_0}^x [u_{01}(y)]^2 dy, \quad (1.43)$$

es el Wronskiano de las funciones u_{01} y u_{02} , donde ahora u_{02} satisface $(H_0 - \epsilon_1)u_{02} = u_{01}$ [48, 49]; como se mencionó anteriormente, w_0 es una constante de integración real que puede ser ajustada para evitar que $W(u_{01}, u_{02})$ tenga nodos en el dominio de $V_0(x)$. Para conseguir lo anterior, es necesario que la solución semilla u_{01} satisfaga alguno de los comportamientos siguientes (ver por ejemplo [6–8, 15, 48–56])

$$\lim_{x \rightarrow x_R} u_{01}(x) = 0, \quad I_+ = \int_{x_0}^{x_R} [u_{01}(y)]^2 dy < \infty$$

o

$$\lim_{x \rightarrow x_L} u_{01}(x) = 0, \quad I_- = \int_{x_L}^{x_0} [u_{01}(y)]^2 dy < \infty.$$

En ambos casos es posible encontrar un dominio de w_0 para el cual $W(u_{01}, u_{02})$ no tenga nodos [50].

De forma similar al caso real, en este caso hay una función $\psi_{2\epsilon_1}$ que pertenece al kernel de B_2^- y que también es *eigenfunción* formal de H_2 con *eigenvalor* ϵ_1 ,

$$\psi_{2\epsilon_1}(x) \propto \frac{u_{01}(x)}{W(u_{01}, u_{02})}.$$

Por otra parte, las *eigenfunciones* de H_0 se transforman en la misma forma que lo hacen para el caso real.

El tipo de modificaciones posibles del espectro de H_2 depende de la energía de factorización ϵ_1 elegida para efectuar la transformación, así como del valor de w_0 . Ambas cantidades definen si la solución $\psi_{2\epsilon_1}$ es de cuadrado-integrable o no. Así, con el algoritmo confluyente es posible generar un Hamiltoniano H_2 que sea iso-espectral a H_0 , que tenga un nivel de energía adicional al espectro de H_0 ó que tenga un nivel de energía menos que el espectro de H_0 .

Caso complejo

Al elegir un valor de c tal que $c < 0$ se obtienen dos energías de factorización ϵ_1, ϵ_2 complejas, tales que una es la compleja conjugada de la otra, es decir, $\epsilon_2 = \epsilon_1^*$. A las transformaciones de segundo orden con esta elección específica para las energías de factorización se le conoce como el caso complejo de las transformaciones de segundo orden [57]. Al considerar dos energías de factorización complejas tales que $\epsilon_2 = \epsilon_1^*$ se tendrán dos funciones $\beta_i, i = 1, 2$, que satisfacen

$$\beta_1 = \beta_2^*.$$

Por lo tanto, también se tendrán dos ecuaciones para η , una por cada β_i diferente

$$\eta' = -\eta^2 + 2\beta_1\eta + 2(\epsilon_1 - \epsilon_1^*),$$

$$\eta' = -\eta^2 + 2\beta_1^*\eta - 2(\epsilon_1^* - \epsilon_1).$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene la solución para η ,

$$\eta(x) = -\frac{2\text{Im}(\epsilon_1)}{\text{Im}(\beta_1(x))} = \frac{W'(u_{01}, u_{01}^*)}{W(u_{01}, u_{01}^*)}, \quad (1.44)$$

donde las funciones u_{01} y u_{01}^* son soluciones semilla complejas de la ecuación de Schrödinger (1.25), que además son complejas conjugadas una de la otra. Al sustituir la expresión (1.44) para η en la ecuación (1.21), se obtiene la expresión para el nuevo potencial (real) en términos de las soluciones semilla usadas para implementar la transformación

$$V_2(x) = V_0(x) - [\ln W(u_{01}, u_{01}^*)]'' . \quad (1.45)$$

Para que las soluciones semilla consideradas generen una transformación no singular, la solución u_{01} debe satisfacer una de las condiciones expresadas en la ecuación (1.16) (ver por ejemplo [6–8]), como consecuencia también se debe cumplir que

$$\lim_{x \rightarrow x_L} u_{01}^*(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow x_R} u_{01}^*(x) = 0. \quad (1.46)$$

Al tratarse de energías de factorización complejas, el espectro del nuevo Hamiltoniano H_2 no se ve modificado con respecto al espectro del Hamiltoniano inicial por lo que el caso complejo de las transformaciones de segundo orden, cuyas energías de factorización son complejas conjugadas una de la otra, son otra forma de llevar a cabo transformaciones iso-espectrales.

Capítulo 2

Potencial de Rosen-Morse trigonométrico: solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria

El potencial de Rosen-Morse se denomina así en honor a Nathan Rosen y Philip McCord Morse por su trabajo publicado en 1932 titulado “On the Vibrations of Polyatomic Molecules” [16]. En dicho trabajo se plantea una propuesta de potencial para describir la vibración del nitrógeno en la molécula de amonio, el cual presenta la ventaja de ser un potencial con solución exacta que permite describir de forma adecuada a las energías del sistema.

El potencial de Rosen-Morse trigonométrico puede verse como el resultado de una transformación sobre el potencial de Rosen-Morse, la cual consiste en un cambio de variable de la forma $x \rightarrow ix$. El potencial que resulta de dicha transformación, al igual que el de Rosen-Morse, es un potencial unidimensional con solución exacta cuya expresión matemática es bastante sencilla. Además de las características que la versión trigonométrica comparte con el de Rosen Morse original, el potencial de Rosen-Morse trigonométrico es un potencial con dominio finito cuyo espectro de energías es discreto infinito.

El potencial de Rosen-Morse trigonométrico ha cobrado popularidad recientemente, debido a algunas propuestas que se han hecho para usarlo en la descripción de diversos sistemas físicos, por ejemplo, como modelo de algunas interacciones en Cromodinámica Cuántica [22–24].

Por otro lado, las características del potencial de Rosen-Morse trigonométrico lo hacen un buen candidato para la aplicación de las técnicas de la mecánica cuántica supersimétrica en el proceso de generación de nuevos potenciales con solución exacta. Con este propósito, en este capítulo se van a construir las soluciones de la ecuación de Schrödinger estacionaria que posteriormente se usarán como soluciones semilla para implementar las transformaciones supersimétricas de primero y segundo orden sobre dicho potencial.

En su forma adimensional, el potencial de Rosen-Morse trigonométrico está dado por

$$V(x) = \frac{a(a+1)}{2} \csc^2(x) - b \cot(x), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, \pi). \quad (2.1)$$

De la expresión anterior se puede observar que se trata de un potencial unidimensional de corto alcance independiente del tiempo. Los parámetros a y b permiten modificar la forma del potencial, teniendo que la ubicación del mínimo está en $x_m = \tan^{-1}(a(a+1)/b)$ y su valor mínimo alcanzado es $V(x_m) = (a(a+1)/2 - b^2/2a(a+1))$. En la Figura 2.1 podemos ver cómo se modifican la profundidad y la ubicación del mínimo, así como algunas otras características del potencial que cambian al modificar los valores de los parámetros a y b .

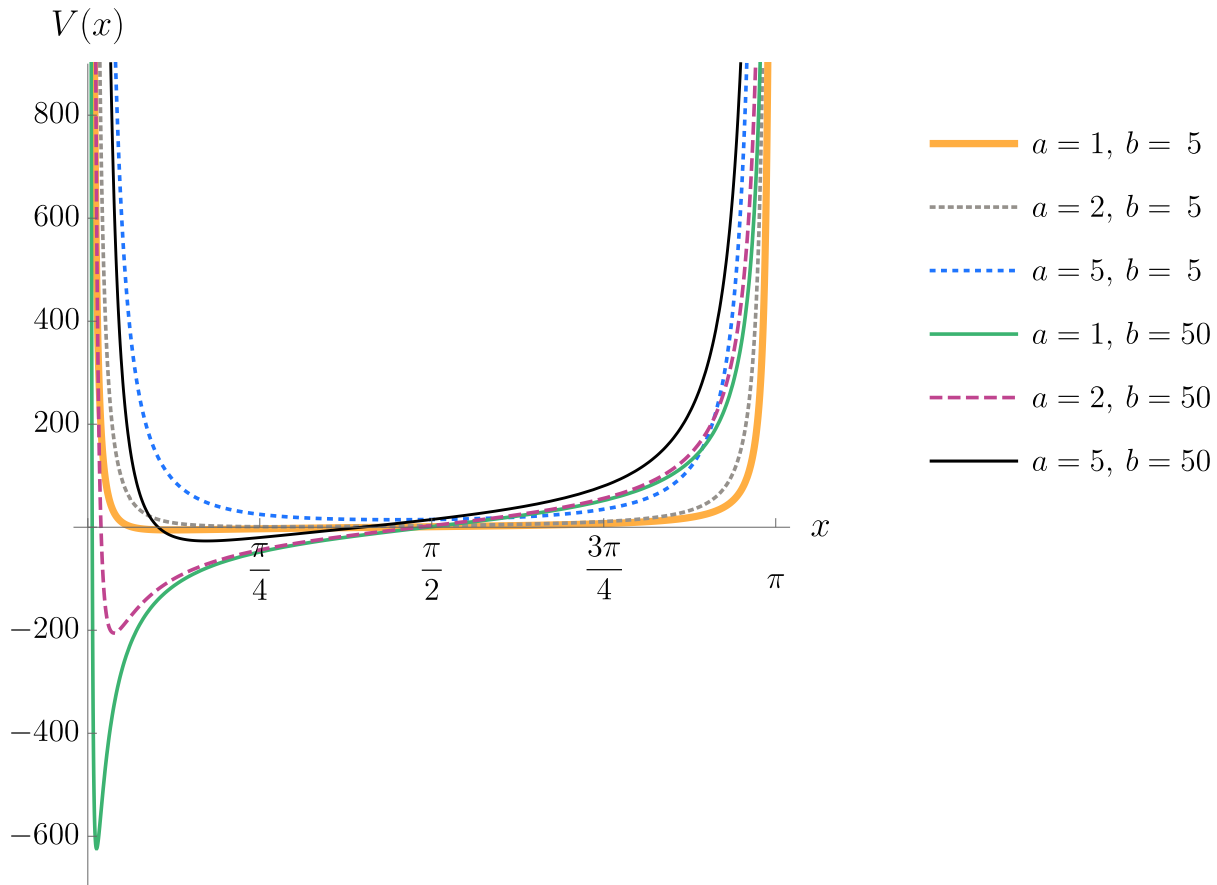


Figura 2.1. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico para diferentes valores de sus parámetros a y b .

El problema a resolver en este capítulo es la ecuación diferencial de Schrödinger estacionaria

$$H\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.2)$$

la cual, al considerar la expresión explícita del potencial de Rosen-Morse trigonométrico, dado en la ecuación (2.1), se expresa como

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{a(a+1)}{2} \csc^2(x) - b \cot(x) \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (2.3)$$

Esta ecuación admite solución exacta la cual, como se ha estudiado anteriormente, se puede obtener al conectar con una ecuación hipergeométrica (ver por ejemplo [36]). Para llevarla a tal forma, se supone primero lo siguiente,

$$\psi(x) = e^{-\frac{\mu}{2}x} (1 + \cot^2(x))^{(\nu-1)/2} f(x). \quad (2.4)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (2.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) - (\mu + 2(\nu - 1) \cot(x)) \frac{d}{dx} f(x) + [\nu(\nu - 1) - a(a + 1)] (\cot^2(x) + 1) f(x) \\ + \{ [\mu(\nu - 1) + 2b] \cot(x) + \mu^2/4 + 2E - (\nu - 1)^2 \} f(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Haciendo ahora el cambio de variable $z = \cot(x)$ se llega a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} (1 + z^2) \frac{d^2}{dz^2} f(z) + (\mu + 2\nu z) \frac{d}{dz} f(z) + [\nu(\nu - 1) - a(a + 1)] f(z) \\ + \left\{ \frac{[\mu(\nu - 1) + 2b]z + \mu^2/4 + 2E - (\nu - 1)^2}{1 + z^2} \right\} f(z) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nótese que, hasta ahora, no se han impuesto condiciones sobre los posibles valores de μ y ν que aparecen en la forma propuesta (2.4) para la solución de la ecuación (2.3). Recordando ahora que el objetivo es que la ecuación (2.6) se convierta en una ecuación hipergeométrica, se requiere entonces que se cumpla lo siguiente,

$$[\mu(\nu - 1) + 2b]z + \mu^2/4 + 2E - (\nu - 1)^2 = 0, \quad (2.7)$$

lo cual genera dos ecuaciones acopladas para μ y ν :

$$\mu(\nu - 1) + 2b = 0, \quad \mu^2/4 + 2E - (\nu - 1)^2 = 0. \quad (2.8)$$

Resolviendo las ecuaciones previas se obtiene

$$\mu = \frac{2b}{\sqrt{E + \sqrt{E^2 + b^2}}}, \quad \nu = 1 - \sqrt{E + \sqrt{E^2 + b^2}}, \quad (2.9)$$

donde se han considerado sólo las raíces reales positivas. Tomando en cuenta las expresiones anteriores, la ecuación (2.6) se reduce a

$$(1 + z^2) \frac{d^2 f}{dz^2} + (\mu + 2\nu z) \frac{df}{dz} + [\nu(\nu - 1) - a(a + 1)] f = 0. \quad (2.10)$$

Si hacemos el cambio de variable adicional $\zeta = 2/(1 - iz)$, la ecuación (2.10) se transforma en

$$\zeta^2 (1 - \zeta) \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \left[\left(\nu - 2 + i\frac{\mu}{2} \right) \zeta^2 + 2(1 - \nu)\zeta \right] \frac{df}{d\zeta} + [\nu(\nu - 1) - a(a + 1)] f = 0. \quad (2.11)$$

Finalmente, al suponer que $f = \zeta^{\nu+a} g$ se obtiene

$$\zeta (1 - \zeta) \frac{d^2 g}{d\zeta^2} + \left[2(a + 1) - \left(\nu + 2(a + 1) - i\frac{\mu}{2} \right) \zeta \right] \frac{dg}{d\zeta} - (\nu + a) \left(a + 1 - i\frac{\mu}{2} \right) g = 0, \quad (2.12)$$

que es la ecuación hipergeométrica con parámetros $\nu + a$, $a + 1 - i\frac{\mu}{2}$ y $2(a + 1)$.

La ecuación hipergeométrica posee soluciones conocidas como series hipergeométricas Gaussianas (ver por ejemplo [58–60]). Partiendo de tales series podemos obtener la solución general de la ecuación de Schrödinger estacionaria (2.3) para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico, la cual fue transformada para obtener la ecuación hipergeométrica (2.12). En la literatura existen diversas formas de elegir el conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación hipergeométrica, las más populares son las series alrededor de los puntos singulares de la ecuación, es decir, en torno a 0, 1 e ∞ . Considerando lo anterior, se tiene una amplia y bien estudiada gama de soluciones para elegir la que mejor se adapte a nuestros objetivos. Por las características que buscamos consideraremos el conjunto de soluciones a la ecuación hipergeométrica que son construidas en torno a la vecindad de $\zeta = 0$. Entonces, tomando en cuenta el proceso completo que nos lleve de la ecuación de Schrödinger inicial a la ecuación hipergeométrica se puede obtener una solución de la ecuación (2.3), la cual se expresa como sigue

$$\psi_L(x) = e^{-[\frac{\mu}{2} + i(\nu+a)]x} \sin^{a+1}(x) {}_2F_1 \left(\nu + a, a + 1 - \frac{i\mu}{2}; 2a + 2; 2ie^{-ix} \sin(x) \right). \quad (2.13)$$

En esta solución aparece una serie hipergeométrica, la cual tiene ciertas condiciones de convergencia que se deben cumplir para que sea solución de la ecuación. Se sabe que las series hipergeométricas se reducen a un polinomio para ciertos valores de sus parámetros. Para que esto suceda, en la serie hipergeométrica que aparece en la solución (2.13) se debe satisfacer que $\nu + a$ o $a + 1 - \frac{i\mu}{2}$ sean enteros negativos. Como analizaremos más adelante, la condición de que $\nu + a$ sea igual a un entero negativo nos permite encontrar las *eigenfunciones* y los *eigenvalores* de la ecuación (2.3). Por otro lado, si $a + 1 - \frac{i\mu}{2}$ se iguala a un entero negativo se puede verificar, luego de algunos sencillos cálculos, que el parámetro b debería ser cero mientras que el parámetro a sería un entero negativo menor que 1, lo que va en contra de los requisitos impuestos sobre los parámetros del potencial. Además, se sabe que una serie hipergeométrica Gaussiana es convergente en el círculo unitario definido por su argumento, que en este caso implica que la serie hipergeométrica que aparece en la solución (2.13) es convergente para $|2ie^{-ix} \sin(x)| < 1$, que en términos de la variable x corresponde al dominio $x \in (0, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi)$, lo cual genera problemas

ya que queremos una solución válida en todo el dominio de definición del potencial de Rosen-Morse trigonométrico.

Para resolver el problema que se tiene con el dominio de convergencia de la serie hipergeométrica presente en la solución (2.13), lo que hacemos es construir la continuación analítica de la serie, para lo cual usaremos algunas de las fórmulas de transformación lineales para ${}_2F_1$ que aparecen en [59]. Usando las ecuaciones 15.3.8 y 15.3.3 de [59] se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \psi_L(x) = & \kappa_L(\mu) e^{-[\frac{\mu}{2} - i(\nu+a)]x} \sin^{a+1}(x) {}_2F_1\left(\nu + a, a + 1 + \frac{i\mu}{2}; \nu + \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right) \\ & + \rho_L(\mu) e^{[\frac{\mu}{2} + i(1-\nu-a)]x} \sin^{-a}(x) {}_2F_1\left(1 - \nu - a, -a - \frac{i\mu}{2}; 2 - \nu - \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde se ha definido

$$\kappa_L(\mu) = \frac{\Gamma(2a+2)\Gamma(1-\nu-i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(a+1-i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+2-\nu)}, \quad \rho_L(\mu) = \left(\frac{i}{2}\right)^{2a+1} \frac{\Gamma(2a+2)\Gamma(\nu-1+i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(a+1+i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+\nu)},$$

lo cual nos ayudará a simplificar algunas expresiones que se utilizarán a lo largo del trabajo. Se puede notar que κ_L y ρ_L dependen de otros parámetros además del parámetro μ ; sin embargo, el considerar sólo la dependencia en μ es suficiente para las simplificaciones posteriores.

Para construir la solución general de la ecuación (2.3) es necesario tener un conjunto de dos soluciones linealmente independientes. Con este propósito, resulta conveniente usar la solución (2.14) como uno de los elementos de dicho conjunto. Para obtener otra solución que sea linealmente independiente de $\psi_L(x)$ consideremos algunas de las propiedades de simetría de la ecuación (2.3). Notemos que tal ecuación involucra a las funciones trigonométricas $\csc^2(x)$ y $\cot(x)$, cuyas propiedades de paridad son bien conocidas, además de ser ambas funciones periódicas de período $\tau = \pi$. Usando la información anterior y prestando atención al dominio de definición del potencial se propone el cambio de variable $x \rightarrow \pi - x$ en la ecuación (2.3), obteniendo con ello lo siguiente

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2\psi(\pi - x)}{dx^2} + \left[\frac{a(a+1)}{2} \csc^2(x) - (-b) \cot(x) - E \right] \psi(\pi - x) = 0. \quad (2.15)$$

Al comparar (2.15) con la ecuación de Schrödinger inicial notamos que tienen la misma forma, salvo que el signo del parámetro b es opuesto. Si tomamos en cuenta que dicho parámetro puede tomar cualquier valor en los números reales, entonces para cualquier valor de b el valor $-b$ nos lleva a una ecuación de la misma familia. En la Figura 2.2 podemos ver que al comparar los potenciales el cambio de b a $-b$ es equivalente a hacer una reflexión del potencial con respecto a $\pi/2$.

Si consideramos lo anterior, así como la solución (2.14) que depende de los parámetros a, b, E y de la variable x , entonces haciendo el cambio $x \rightarrow \pi - x$ (que corresponde a hacer una reflexión de la solución (2.14) con respecto a $\pi/2$) y sustituyendo $b \rightarrow -b$ en

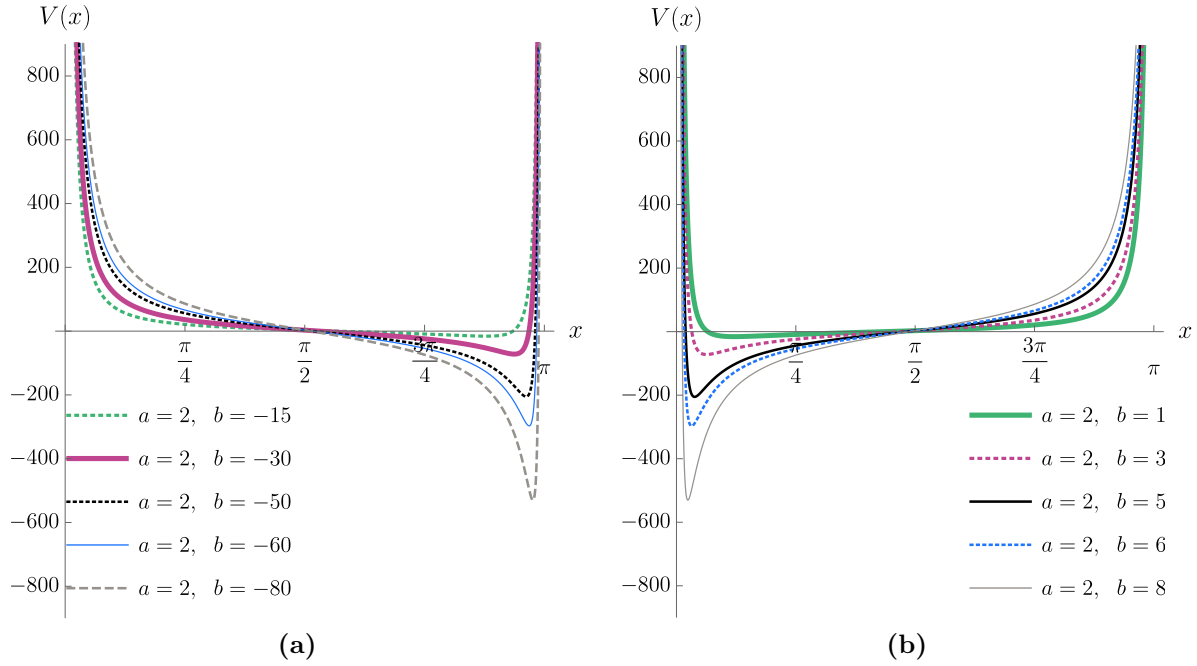


Figura 2.2. Comparativa entre los potenciales de Rosen-Morse trigonométricos para valores de b y $-b$ con un valor $a = 2$.

la misma ecuación se tiene

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi_L(a, -b; \pi - x)}{dx^2} + \left[\frac{a(a+1)}{2} \csc^2(x) - b \cot(x) - E \right] \psi_L(a, -b; \pi - x) = 0. \quad (2.16)$$

Por lo tanto, $\psi_L(a, -b; \pi - x)$ resulta ser otra solución de la ecuación (2.3), para la cual ya se tenía la solución $\psi_L(a, b; x)$. A la solución resultante de las transformaciones de simetría previas la denotaremos por $\psi_R(x)$ y se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= e^{\left[\frac{\mu}{2} - i(\nu+a)\right]\pi} e^{-\left[\frac{\mu}{2} - i(\nu+a)\right]x} \sin^{a+1}(x) {}_2F_1\left(\nu + a, a + 1 + \frac{i\mu}{2}; 2a + 2; -2ie^{ix} \sin(x)\right) \\ &= e^{\left[\frac{\mu}{2} + i(\nu+a)\right]\pi} \kappa_L(-\mu) e^{-\left[\frac{\mu}{2} + i(\nu+a)\right]x} \sin^{a+1}(x) {}_2F_1\left(\nu + a, a + 1 - \frac{i\mu}{2}; \nu - \frac{i\mu}{2}; e^{-2ix}\right) \\ &\quad - e^{-\left[\frac{\mu}{2} + i(\nu+a)\right]\pi} \rho_L(-\mu) e^{\left[\frac{\mu}{2} + i(\nu+a-1)\right]x} \sin^{-a}(x) {}_2F_1\left(1 - \nu - a, -a + \frac{i\mu}{2}; 2 - \nu + \frac{i\mu}{2}; e^{-2ix}\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Notemos que es posible expresar ambas soluciones en términos de series hipergeométricas con el mismo argumento. Así, para expresar $\psi_R(x)$ en términos de las mismas series que $\psi_L(x)$ usamos las transformaciones lineales 15.3.7 y 15.3.3 reportadas en [59], obteniendo que

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= \kappa_R(\mu) e^{-\left[\frac{\mu}{2} - i(\nu+a)\right]x} \sin^{a+1}(x) {}_2F_1\left(\nu + a, a + 1 + \frac{i\mu}{2}; \nu + \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right) \\ &\quad + \rho_R(\mu) e^{\left[\frac{\mu}{2} + i(1-\nu-a)\right]x} \sin^{-a}(x) {}_2F_1\left(1 - \nu - a, -a - \frac{i\mu}{2}; 2 - \nu - \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde

$$\begin{aligned}\kappa_R(\mu) &= \Gamma\left(\nu - i\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \nu + i\frac{\mu}{2}\right) \kappa_L(\mu) \left[\frac{e^{\frac{\mu}{2}\pi}}{\Gamma(a+1+i\frac{\mu}{2})\Gamma(-a-i\frac{\mu}{2})} + \frac{e^{-i\nu\pi}}{\Gamma(a+\nu)\Gamma(1-a-\nu)} \right], \\ \rho_R(\mu) &= -\Gamma\left(\nu - i\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \nu + i\frac{\mu}{2}\right) \rho_L(\mu) \left[\frac{e^{-\frac{\mu}{2}\pi}}{\Gamma(a+1-i\frac{\mu}{2})\Gamma(-a+i\frac{\mu}{2})} + \frac{e^{i\nu\pi}}{\Gamma(a+2-\nu)\Gamma(\nu-a-1)} \right].\end{aligned}$$

Tenemos entonces un conjunto de dos soluciones linealmente independientes $\{\psi_L(x), \psi_R(x)\}$ de la ecuación (2.3), por lo que podemos expresar la solución general de tal ecuación como sigue

$$\psi(x) = A\psi_L(x) + B\psi_R(x), \quad A, B \in \mathbb{C}. \quad (2.19)$$

Para encontrar las soluciones físicas del problema (las funciones propias asociadas a los estados ligados), debemos imponer la condición de cuadrado integrabilidad sobre la solución general, lo cual conduce a la siguiente expresión para las energías propias

$$E_n = \frac{1}{2} (n + a + 1)^2 - \frac{b^2}{2(n + a + 1)^2}, \quad (2.20)$$

para las cuales las soluciones físicas son de la forma (ver también la ecuación (2.13))

$$\psi_n(x) = C_n e^{-[\frac{b}{n+1+a} - in]x} \sin^{a+1}(x) {}_2F_1\left(-n, a + 1 - \frac{ib}{n+1+a}; 2a + 2; 2ie^{-ix} \sin(x)\right), \quad (2.21)$$

siendo C_n una constante de normalización. En la Figura 2.3 podemos ver el potencial de Rosen-Morse trigonométrico para los valores de los parámetros $a = 2$ y $b = 20$, así como algunas de sus eigenfunciones dadas por la expresión (2.21).

2.1. Análisis de las soluciones

Una vez que se ha construido la solución general de la ecuación de Schrödinger estacionaria para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico (2.2), vamos a estudiar sus propiedades. Para los propósitos de este trabajo y con el fin de facilitar el análisis, nos restringimos a estudiar soluciones de la forma

$$\psi(x; \Lambda, \lambda) = \Lambda\psi_L(x) + \lambda\psi_R(x), \quad \Lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Considerando lo anterior, en caso de que las soluciones elegidas tuvieran parte imaginaria sería atribuible únicamente a las funciones $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$, no a las constantes (Λ y λ) de la combinación lineal. Las soluciones $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ han sido elegidas de forma tal que para $E \in \mathbb{R}$ ambas son reales (lo cual se puede verificar fácilmente), mientras que para $E \in \mathbb{C}$ ambas soluciones son complejas. Analicemos por separado los diferentes casos que dependen de la elección de E y comencemos considerando $E \in \mathbb{R}$. En tal caso se tiene que las soluciones de la forma $\psi(x; \Lambda, \lambda)$, como función de x tienen como imagen a \mathbb{R} . Para $E \in \mathbb{R}$ resulta conveniente separar el conjunto $\{E_n\}$ cuyos elementos cumplen (2.20)

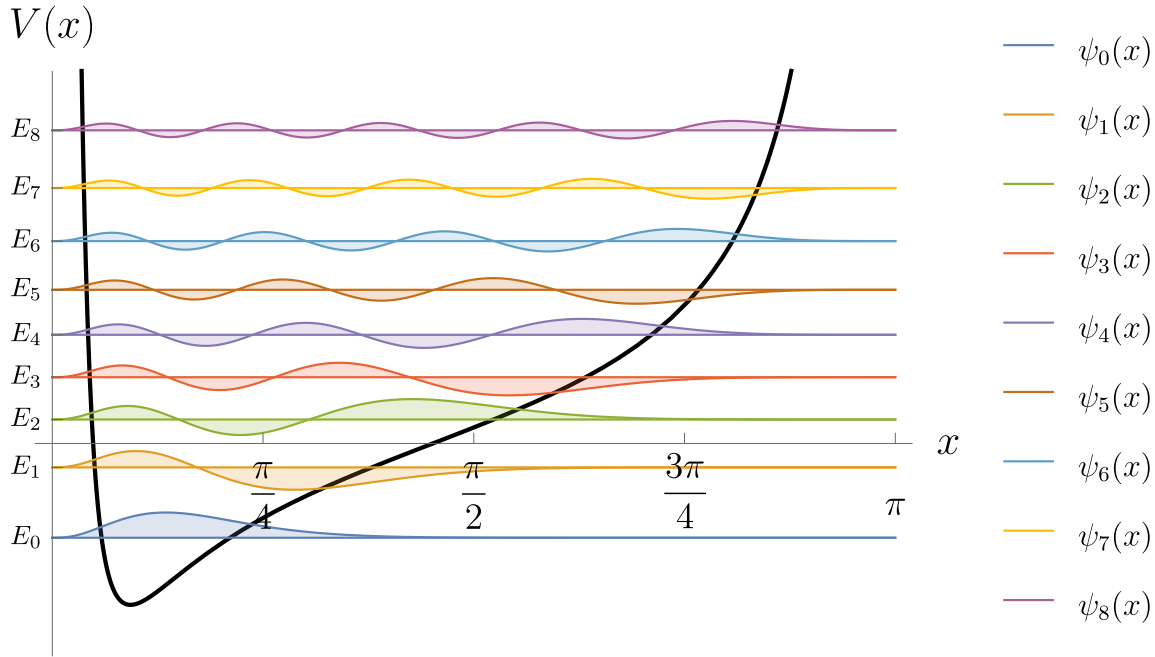


Figura 2.3. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico para $a = 2$, $b = 20$ y algunas de sus *eigenfunciones*.

y conforman el espectro del Hamiltoniano con el potencial (2.1). Para ese conjunto las soluciones $\psi(x; \Lambda, \lambda)$ adquieren la forma (2.21), por construcción son de cuadrado integrable y tienden asintóticamente a cero en los extremos del dominio de definición del potencial.

Para el resto de valores de $E \in \mathbb{R}$ que no satisfagan la condición (2.20), el comportamiento de $\psi(x; \Lambda, \lambda)$ es diferente; para analizarlo comenzaremos estudiando las propiedades de las funciones $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ por separado.

Las funciones $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ se han elegido debido a que tienen comportamientos asintóticos de la forma (para más detalles ver apéndice 4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_L(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \psi_L(x) = \text{sgn}(\varkappa(\mu, \nu, a)) \infty, \quad (2.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_R(x) = \text{sgn}(\varkappa(\mu, \nu, a)) \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \psi_R(x) = 0, \quad (2.24)$$

en las cuales $\varkappa(\mu, \nu, a)$ es una constante dada por

$$\varkappa(\mu, \nu, a) = \left(\frac{1}{4}\right)^a \frac{\Gamma(2a+2) \Gamma(2a+1)}{\Gamma(a+1+i\frac{\mu}{2}) \Gamma(a+1-i\frac{\mu}{2}) \Gamma(a+\nu) \Gamma(2+a-\nu)}.$$

Notemos además que, por construcción, para un mismo valor dado de E ambas $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ tienen el mismo comportamiento asintótico divergente pero en extremos opuestos, es decir, para x tendiendo a π en $\psi_L(x)$ y para x tendiendo a 0 en $\psi_R(x)$ ambas tienden a infinito con el mismo signo, el cual es determinado por la constante $\varkappa(\mu, \nu, a)$. En la Figura

2.4 se muestran algunos ejemplos de las funciones $\psi_L(x)$ (Figura 2.4(a)) y $\psi_R(x)$ (Figura 2.4(b)) para distintos valores de E . En tales figuras se puede ver que los comportamientos de ambas soluciones corresponden con lo que se mencionó previamente.

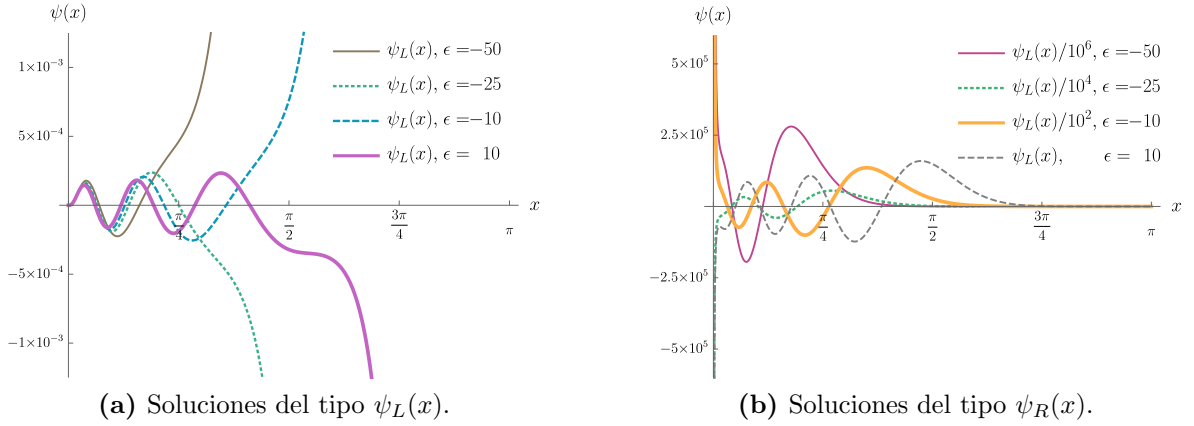


Figura 2.4. Soluciones no físicas $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ de la ecuación de Schrödinger estacionaria para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico con $a = 2$, $b = 50$ y distintos valores de E .

Los comportamientos de las soluciones $\psi_L(x)$ para $x \rightarrow 0$ y $\psi_R(x)$ para $x \rightarrow \pi$ que aparecen en las expresiones (2.23) y (2.24) reflejan el comportamiento asintótico que es válido tanto para E real como compleja, lo cual no sucede en los extremos opuestos, los cuales tienen comportamientos asintóticos diferentes para $E \in \mathbb{C}$.

Para analizar el número de ceros que tienen las soluciones de la ecuación (2.3) para $E \in \mathbb{R}$ consideremos dos *eigenestados* consecutivos $\psi_j(x)$, $\psi_{j+1}(x)$ asociados a dos *eigenvalores* consecutivos E_j , E_{j+1} del espectro de H_0 . Empleando ahora el teorema de comparación de Sturm, tenemos que las soluciones cuyas energías de factorización E son tales que $E \in I_j$ pueden tener $j + 1$ o $j + 2$ ceros. Con esta información sobre la posible cantidad de ceros en las soluciones $\psi_L(x)$, $\psi_R(x)$ y considerando los comportamientos asintóticos de las soluciones $\psi_j(x)$, $\psi_{j+1}(x)$, podemos concluir que el número de ceros que tienen $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ para $E \in I_j$ es $j + 1$.

La información que hemos obtenido sobre los ceros de $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ nos permite ahora obtener información sobre los ceros de las soluciones de la forma (2.22), basada en la relación entre los signos de los coeficientes de la combinación lineal (Λ y λ), salvo para casos muy específicos difíciles de determinar en los que los ceros de la solución no impliquen un cambio de signo.

Así, la solución general tiene un número par de ceros si Λ y λ tienen el mismo signo, mientras que cuando Λ y λ tienen signos opuestos dicha solución tiene un número impar de ceros. Al considerar las energías de factorización en la misma forma que se hizo para estudiar el número de ceros de $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$, tenemos que para $E \in I_j$ el número de ceros de las soluciones de la forma (2.22) dependen de la paridad del índice j , por lo cual

si j es par la solución con Λ y λ del mismo signo tendrá $j + 2$ ceros, mientras que para signos opuestos de Λ y λ o cuando alguna de ellas sea igual a cero la solución tendrá $j + 1$ ceros. Por otra parte, si j es impar la solución con Λ y λ del mismo signo o cuando alguna de las constantes sea igual a cero tendrá $j + 1$ ceros, en otro caso tal solución tendrá $j + 2$ ceros. Entonces, para $E \notin \{E_n\} = \text{Sp}(H_0)$ los comportamientos asintóticos de las soluciones se resumen como sigue

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x; \Lambda, \lambda) = \lambda \lim_{x \rightarrow 0} \psi_R(x), \quad (2.25)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \psi(x; \Lambda, \lambda) = \Lambda \lim_{x \rightarrow \pi} \psi_L(x), \quad (2.26)$$

con lo cual tenemos la información necesaria que usaremos a lo largo de este trabajo.

Capítulo 3

Socios supersimétricos del potencial de Rosen-Morse trigonométrico

En el Capítulo 1 se introdujeron las técnicas de la SUSY QM mediante Hamiltonianos de la forma (1.6) cuyos potenciales $V_0(x)$, $V_1(x)$ y $V_2(x)$ son arbitrarios. En el presente capítulo se considerará a $V_0(x)$ como el potencial de Rosen-Morse trigonométrico (ver expresión (2.1)) y se obtendrán sus socios supersimétricos de primero $V_1(x)$ y segundo orden $V_2(x)$ a partir de las correspondientes transformaciones supersimétricas.

La principal dificultad al estudiar las diversas transformaciones supersimétricas consiste en seleccionar las soluciones semilla con el comportamiento apropiado para realizar la transformación; el caso en el que tales transformaciones se aplican al potencial de Rosen-Morse trigonométrico no es la excepción, ya que a pesar de que en la literatura existen trabajos en los que se han aplicado algunas transformaciones supersimétricas a este potencial [22, 36–38], dichos estudios se limitan a casos particulares específicos para las soluciones semilla y las energías de factorización correspondientes.

En este trabajo el objetivo es presentar un análisis completo de las transformaciones supersimétricas de primero y segundo orden aplicadas al potencial de Rosen-Morse trigonométrico, para lo cual hemos construido las soluciones en la forma (2.22). Expresar las soluciones de esa manera permite caracterizar su número de ceros en función de algunos parámetros bien definidos, lo cual hace posible elegir adecuadamente las soluciones semilla para implementar las transformaciones de primero o segundo orden de manera directa y simple.

A continuación se describe la forma en que las soluciones semilla son elegidas, de acuerdo a la transformación supersimétrica que se quiera implementar, los efectos que el tipo de solución semilla usada tiene sobre el espectro del nuevo Hamiltoniano y la forma que adquiere el nuevo potencial.

3.1. Socios supersimétricos de primer orden

En algunos trabajos previos se han estudiado los socios supersimétricos de primer orden del potencial de Rosen-Morse trigonométrico en forma mucho menos general de la que se presentará a continuación [22, 36–38]. El caso más ampliamente considerado en la literatura existente es aquel en el que la solución semilla es la *eigenfunción* del estado base, lo cual reduce el problema a determinar tal función de onda. El caso menos estudiado es aquel en el que la energía de factorización cumple que $\epsilon_1 < E_0$, lo cual se debe a que no resulta sencillo determinar las soluciones semilla que sean libres de nodos para implementar la transformación; sin embargo, notemos que en el capítulo anterior se presentó una parametrización que nos va a permitir hacerlo, profundizando así en este tipo de transformaciones.

En esta sección se exploran los distintos tipos de modificaciones que se le pueden hacer al espectro del Hamiltoniano generado mediante las transformaciones no singulares de primer orden de la Sección 1.1 aplicadas al potencial de Rosen-Morse trigonométrico, razón por la cual de ahora en adelante consideraremos a $V_0(x)$ como tal potencial (2.1)).

Los efectos de la transformación sobre el espectro del nuevo Hamiltoniano dependen de la solución semilla usada para hacer la transformación, como se mostrará en las siguientes secciones.

3.1.1. Borrando la energía del estado base

Las transformaciones de primer orden nos permiten borrar la energía del estado base E_0 de H_0 , es decir, obtener un nuevo Hamiltoniano H_1 cuyo espectro difiere del inicial en que no incluye a E_0 . La solución semilla que se va a usar para generar esta transformación es la *eigenfunción* del estado base del Hamiltoniano inicial, es decir, la función

$$u_{01}(x) = \psi_{00}(x) \propto e^{-\frac{b}{a+1}x} \sin^{a+1}(x). \quad (3.1)$$

En la Figura 3.1 se muestran algunos ejemplos de funciones del tipo (3.1) para diferentes valores de los parámetros a y b del potencial inicial. Como se puede observar, la forma de tales funciones cambia al considerar diferentes valores de los parámetros.

Al considerar la *eigenfunción* del estado base de H_0 como la solución semilla y sustituirla en la expresión (1.8), que relaciona al potencial inicial $V_0(x)$ con su socio supersimétrico de primer orden $V_1(x)$, se obtiene la siguiente expresión (ver [35])

$$V_1(x) = \frac{1}{2}(a+1)(a+2) \csc^2(x) - b \cot(x). \quad (3.2)$$

Notemos que en este caso $V_1(x)$ corresponde una vez más a un potencial de Rosen-Morse trigonométrico, con el cambio en el parámetro a de la forma $a \rightarrow a+1$ con respecto al potencial inicial. Se tiene así que la transformación previa genera un potencial invariante de forma, propiedad bien conocida de la familia de potenciales de Rosen-Morse trigonométricos (ver [3]).

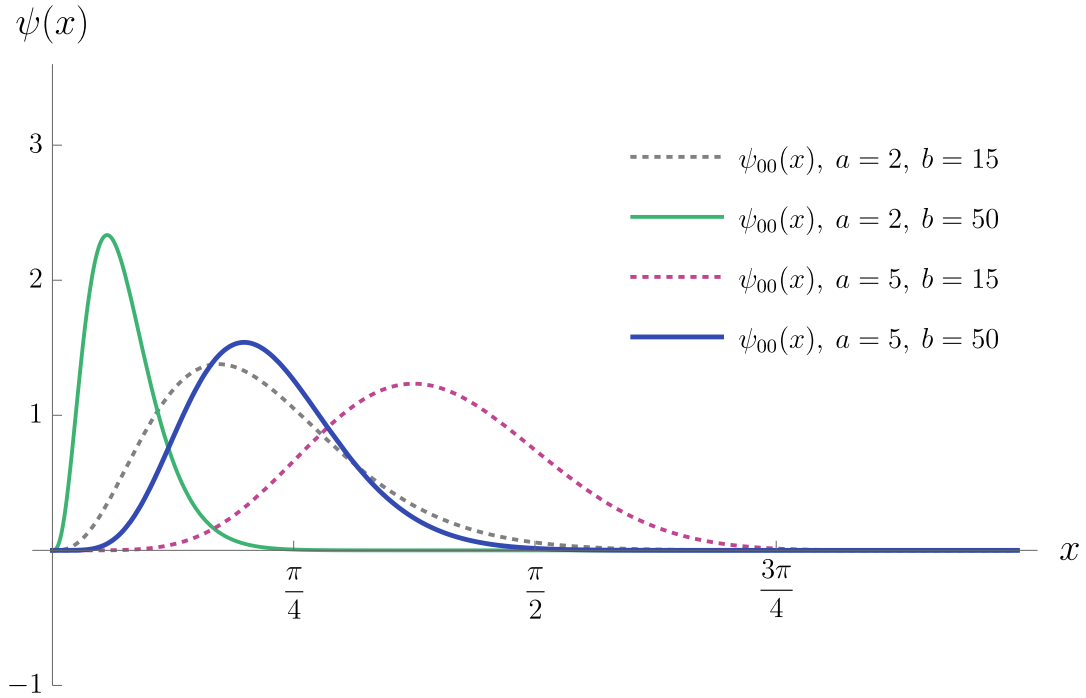


Figura 3.1. *Eigenfunción* del estado base del potencial de Rosen-Morse trigonométrico para diferentes valores de a y b

El efecto de tal transformación es generar un nuevo Hamiltoniano H_1 con espectro

$$\text{Sp}(H_1) = \{E_n, n = 1, 2, \dots\}. \quad (3.3)$$

En la Figura 3.2 se muestran algunos socios supersimétricos del potencial de Rosen-Morse trigonométrico, los cuales resultan de aplicar la transformación supersimétrica usando como solución semilla cada una de las *eigenfunciones* del estado base graficadas en la Figura 3.1. El efecto de la transformación es producir un nuevo Hamiltoniano H_1 en el que se ha borrado el estado base de H_0 . En la Figura 3.3 podemos ver gráficas de la *eigenfunción* no física de H_1 asociada a E_0 correspondientes a las gráficas de la Figura 3.1; al ser proporcional a $1/u_{01}$, tal *eigenfunción* formal no es de cuadrado integrable. Al borrar el estado base de $V_0(x)$, el potencial $V_1(x)$ del nuevo Hamiltoniano muestra una profundidad disminuida con respecto al potencial inicial. Además, en las figuras podemos notar que el cambio en el parámetro $a \rightarrow a + 1$ modifica también el ancho del potencial.

3.1.2. Creando un nuevo estado base

A diferencia del caso anterior, cuando se trata de agregar un nivel de energía al espectro de H_1 la solución semilla u_{01} no puede ser solución física del Hamiltoniano inicial H_0 , ya que debe ser divergente en ambos extremos del dominio de x . Además, debe tratarse

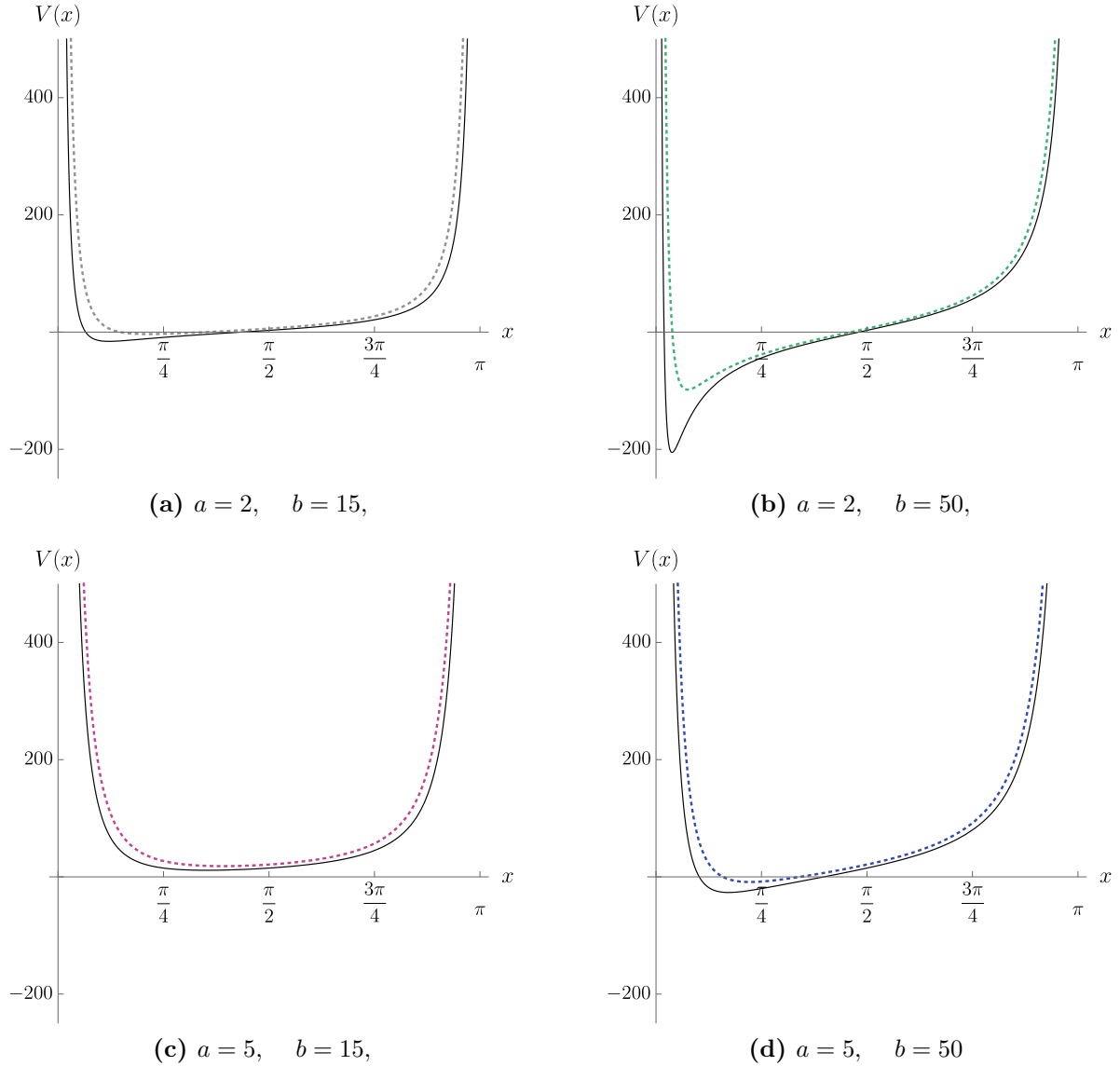


Figura 3.2. Borrarse el estado base. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico $V_0(x)$ (curva sólida) y su socio supersimétrico de primer orden $V_1(x)$ (curva punteada) generado usando como solución semilla la *eigenfunción* del estado base de H_0 para distintos valores de a y b .

de una función libre de nodos, es decir, para este tipo de transformación requerimos una solución de la forma

$$u_{01}(x) = \psi(x, \epsilon_1, \Lambda, \lambda) = \sin^{-a}(x)v_{01}(x), \quad \Lambda, \lambda > 0, \quad \epsilon_1 < E_0. \quad (3.4)$$

Nótese que en esta expresión se ha factorizado la solución semilla de tal forma que las singularidades que presenta tal función en $x = 0$ y $x = \pi$ han sido agrupadas en el término

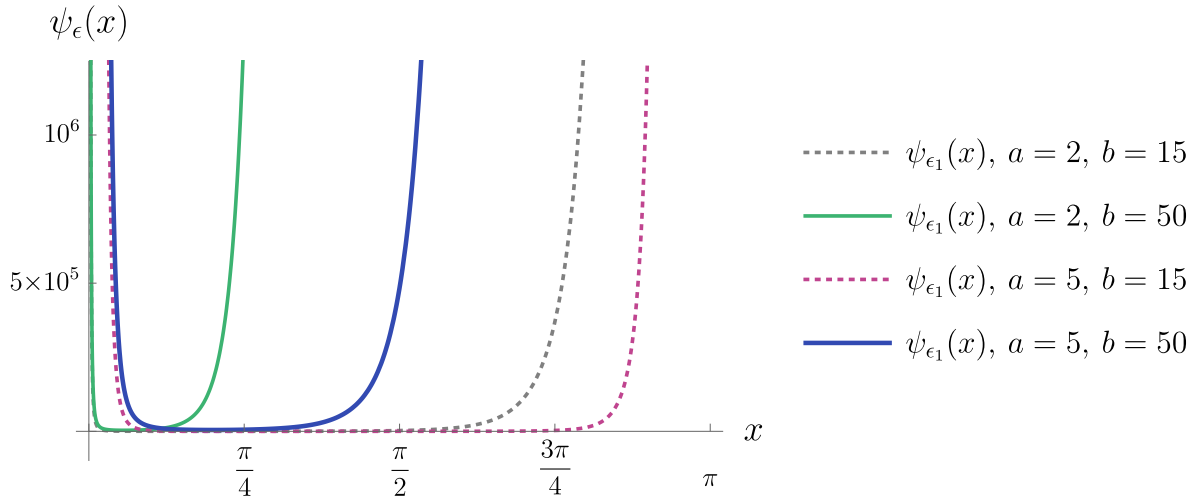


Figura 3.3. Eigenfunción no física de H_1 asociada a E_0 , resultante de aplicar una transformación de primer orden sobre el potencial de Rosen-Morse trigonométrico que borra el estado base de H_0 para diferentes valores a y b .

$\sin^{-a}(x)$ (ver también [33]). Esto es posible ya que el tipo de singularidad que pueden presentar las soluciones de la ecuación (2.3) en la vecindad de los extremos del dominio de x es de la forma $\sin^{-a}(x)$. Además, una solución con energía de factorización $\epsilon_1 < E_0$ que no tenga nodos es una función del tipo (2.22), para la cual las constantes de la combinación lineal Λ y λ (las que nos permiten expresarla en términos de $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$) tienen el mismo signo. Considerando lo anterior, se tiene que la función $v_{01}(x) = \sin^a(x)u_{01}(x)$ está libre de nodos en el intervalo $(0, \pi)$. Además, tomando en cuenta la solución semilla factorizada (3.4) el socio supersimétrico de primer orden del potencial $V_0(x)$ se escribe de la siguiente forma

$$V_1(x) = \frac{1}{2}(a-1)a \csc^2(x) - b \cot(x) - [\ln v_{01}]'' . \quad (3.5)$$

En la expresión anterior podemos ver que los dos primeros términos corresponden a un potencial de Rosen-Morse trigonométrico con el parámetro a disminuido en una unidad, es decir, $a \rightarrow a-1$. La parte restante del nuevo potencial $V_1(x)$ corresponde a la contribución del término no singular de la solución semilla, por lo que no aporta modificaciones en los extremos del dominio de definición del nuevo potencial (que es el mismo que el del potencial inicial) pero sí genera diferencias en el interior de tal dominio.

En la Figura 3.4 podemos observar los nuevos potenciales que resultan de implementar diversas transformaciones supersimétricas de primer orden tomando como potencial inicial el de Rosen-Morse trigonométrico. En la Figura 3.4(a) los parámetros del potencial inicial seleccionados son $a = 2$, $b = 50$, mientras que en la Figura 3.4(d) cambiamos el valor del parámetro a a 5. En ambas figuras el potencial inicial que se grafica es una curva negra continua, mientras que los otros potenciales son generados mediante la transformación de primer orden considerando diferentes soluciones semilla, mismas que se graficaron en las

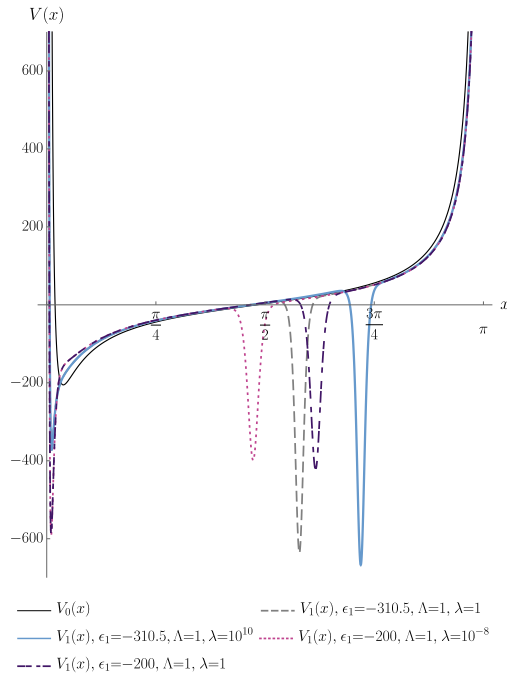
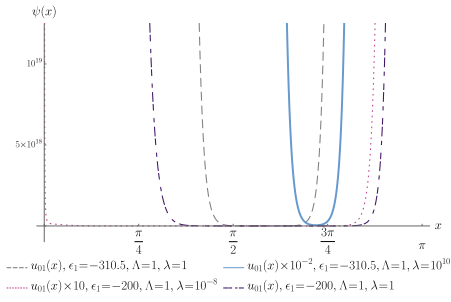
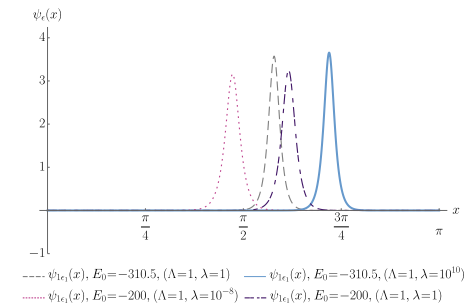
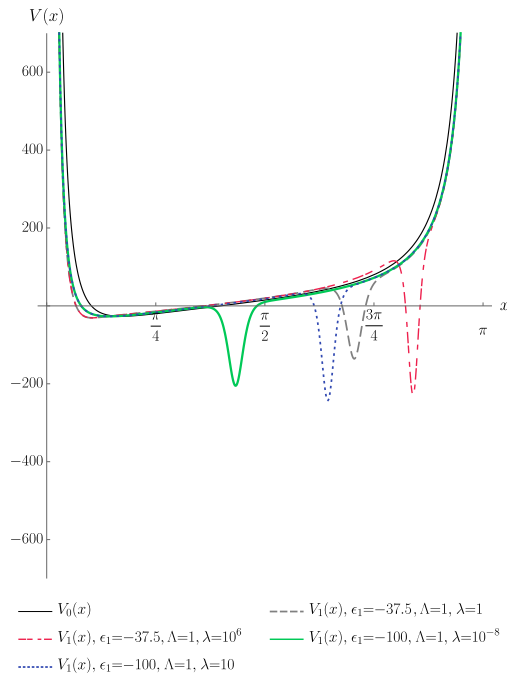
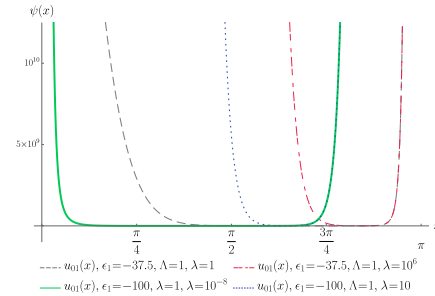
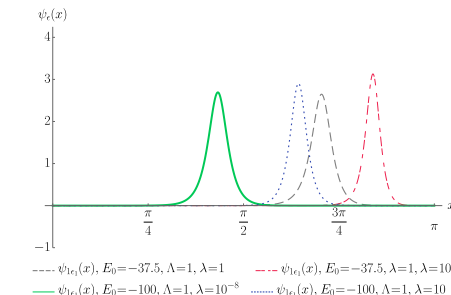
(a) $a = 2$, $b = 50$,(b) Solución semilla $u_{01}(x)$.(c) Estado faltante $\psi_{1\epsilon_1}(x)$.(d) $a = 5$, $b = 50$,(e) Solución semilla $u_{01}(x)$.(f) Estado faltante $\psi_{1\epsilon_1}(x)$.

Figura 3.4. Creando un nuevo estado base. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y algunos socios supersimétricos de primer orden (a) y (d) generados usando soluciones semilla con $\epsilon_1 < E_0$. Solución semilla (b) y (e) y función $\psi_{1\epsilon_1}$ (c) y (f).

Figuras 3.4(b) y 3.4(e). Las figuras 3.4(c) y 3.4(f) corresponden a las *eigenfunciones* del estado faltante para cada uno de los nuevos potenciales. Podemos observar esta vez que tales funciones son de cuadrado integrable, por lo que constituyen el estado base para cada nuevo Hamiltoniano, con la energía de factorización siendo ahora la energía del nuevo estado base.

Notemos que las transformaciones con energías de factorización $\epsilon_1 = -134.389$ para $a = 2$, $b = 50$ y $\epsilon_1 = -37.5$ para $a = 2$, $b = 50$ generan Hamiltonianos H_1 isoespectrales a H_0 con un potencial de tipo Rosen-Morse trigonométrico con parámetros $a - 1$, b . Sin embargo, no son invariantes de forma ya que los nuevos potenciales V_1 en H_1 no tienen la forma de los potenciales de Rosen-Morse trigonométrico como podemos ver en las Figuras 3.4(a) y 3.4(d).

Es importante mencionar que, a pesar de que en las transformaciones presentadas en la Figura 3.4 no se muestra el caso que conduce a un potencial invariante de forma, este tipo de transformación permite no obstante generar potenciales de ese tipo.

3.1.3. Transformación isoespectral

Las transformaciones isoespectrales implementadas usando mecánica cuántica supersimétrica de primer orden pueden ser vistas como un caso límite de aquellas en las que se agrega un nuevo estado base. La diferencia en este caso es que la solución semilla es divergente en uno de los extremos del dominio del potencial mientras que en el otro extremo tiende a cero. Por la forma en que se expresa la solución general de la ecuación (2.3) (ver ecuación 2.22) el tipo de solución semilla adecuada para este tipo de transformación puede ser $\psi_L(x)$ o $\psi_R(x)$, las cuales se obtienen al considerar $\Lambda = 0$ o $\lambda = 0$, respectivamente. Las soluciones semilla usadas en las transformaciones supersimétricas isoespectrales de primer orden no se factorizarán para aislar la singularidad, como se hizo en el caso anterior (ver la ecuación (3.4)), por lo que la expresión para el nuevo potencial es

$$V_1(x) = \frac{1}{2}a(a+1)\csc^2(x) - b\cot(x) - [\log u_{01}]''. \quad (3.6)$$

Por el comportamiento que tiene la solución semilla en cada extremo del dominio, la transformación induce cambios opuestos en el coeficiente del término $\csc^2(x)$ para $x = 0$ y $x = \pi$. Al tratarse de transformaciones isoespectrales, se espera que las modificaciones en la forma del nuevo potencial de algún modo se compensen, para que el espectro del nuevo Hamiltoniano no se modifique. Es así como se explica el comportamiento opuesto en los extremos del dominio lo cual muestra claramente la mencionada compensación. Para el extremo en el que la solución semilla diverge el cambio que se produce en el coeficiente es de la forma $a \rightarrow a - 1$, mientras que en el otro extremo tal cambio es de la forma $a \rightarrow a + 1$. En la Figura 3.5 se muestran algunos ejemplos de este tipo de transformaciones. Podemos observar en las gráficas de los nuevos potenciales el distinto comportamiento que se presenta en las vecindades de $x = 0$ y $x = \pi$, dependiendo del tipo de solución semilla usada para implementar la transformación. Así, para las transformaciones que emplean

soluciones semilla del tipo $\psi_R(x)$ el potencial $V_1(x)$ tiene un cambio en el coeficiente de $\csc^2(x)$ de la forma $a \rightarrow a - 1$ para $x = 0$ y de la forma $a \rightarrow a + 1$ para $x = \pi$, mientras que para soluciones semilla del tipo $\psi_L(x)$ el cambio en el coeficiente de $\csc^2(x)$ es el opuesto.

En la Figura 2.1 pudimos ver que, para un valor fijo del parámetro b , los potenciales de Rosen-Morse trigonométrico con a y $a + 1$ para un valor dado de a son tales que $V(x; a, b) \leq V(x; a + 1, b)$ para $x \in (0, \pi)$. Considerando ese comportamiento, podemos apreciar que los potenciales isoespectrales de la Figura 3.5 generados por transformaciones de primer orden presentan los distintos comportamientos descritos antes.

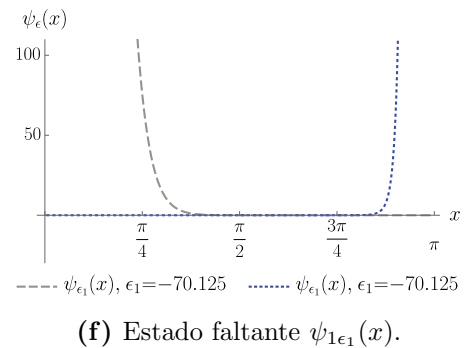
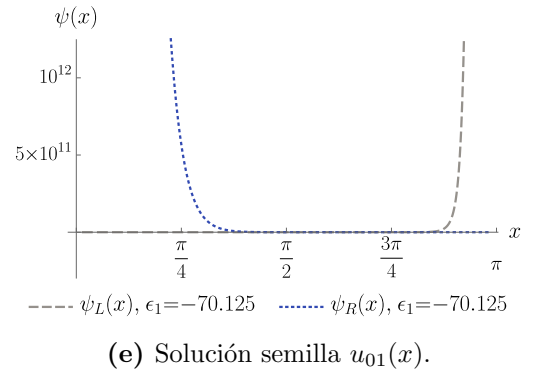
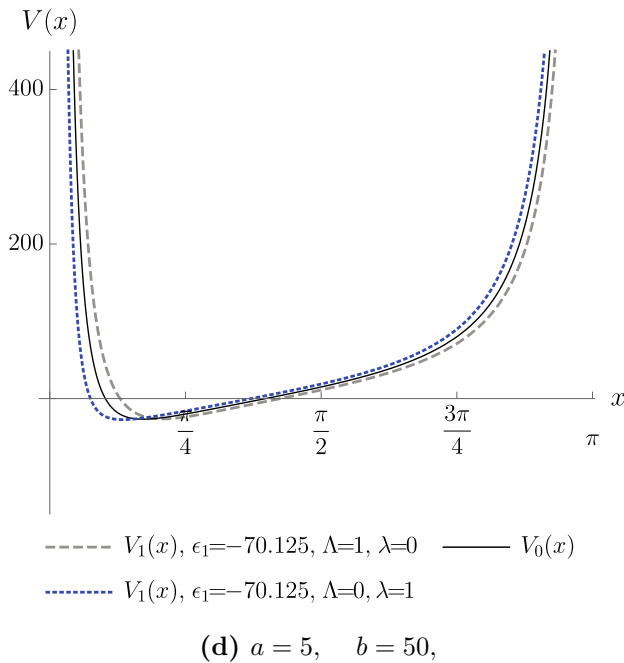
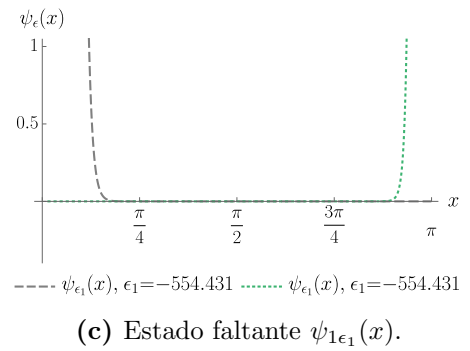
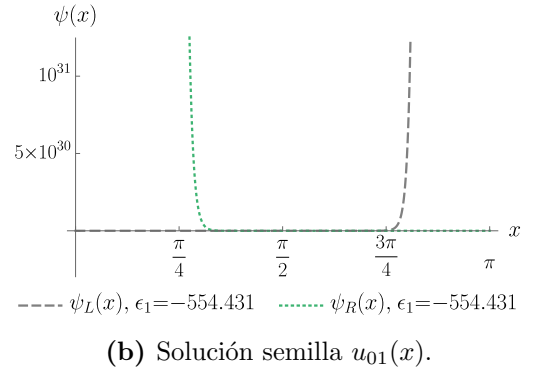
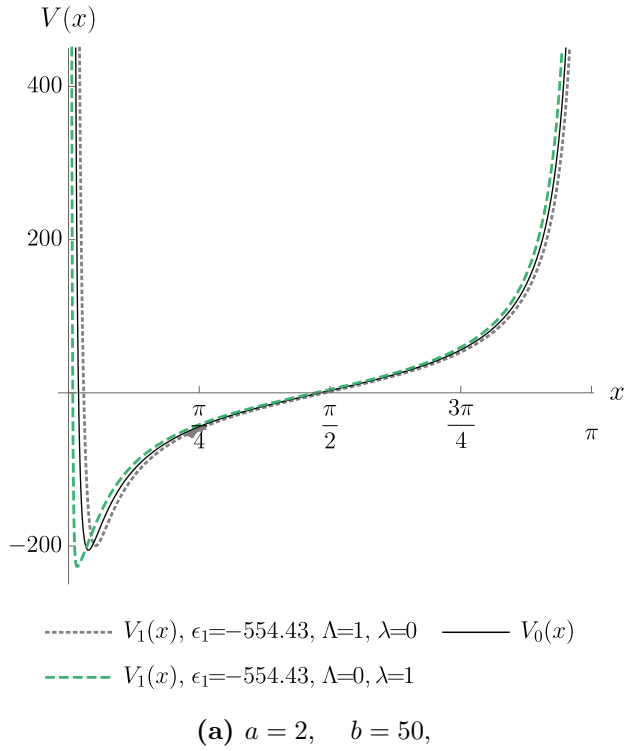


Figura 3.5. Transformación isoespectral. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico (curvas sólidas) y sus socios supersimétricos de primer orden generados usando una solución semilla no física u_{01} de H_0 para diferentes valores de a y b .

3.2. Socios supersimétricos de segundo orden

En esta sección aplicaremos las transformaciones de segundo orden discutidas en la Sección 1.2 al potencial de Rosen-Morse trigonométrico.

La principal dificultad al considerar este tipo de transformaciones, al igual que en el caso de primer orden, consiste en encontrar soluciones semilla que tengan el comportamiento apropiado para que la transformación sea no singular. Las condiciones generales para conseguir una transformación no singular de segundo orden han sido estudiadas previamente y son bien conocidas (ver Sección 1.2), las cuales están relacionadas con el número de ceros y el comportamiento asintótico de las soluciones semilla en los extremos del dominio de definición del potencial inicial, en este caso el potencial de Rosen-Morse trigonométrico.

Los casos para los que resulta más complicado (pero a la vez más interesante) elegir adecuadamente las soluciones semilla son aquellos en los cuales las energías de factorización se encuentran por encima de la energía del estado base del Hamiltoniano inicial H_0 y cuando ellas a su vez no pertenecen al espectro de H_0 .

Las transformaciones supersimétricas de segundo orden para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico han sido estudiadas para algunos casos particulares, por ejemplo, cuando las soluciones semilla son dos funciones propias consecutivas del Hamiltoniano inicial [36]. También se han explorado algunos ejemplos en los cuales para ciertos valores específicos de las energías de factorización, se encontraron soluciones semilla que permiten agregar un par de niveles por debajo del estado base ó por encima de éste [37].

Al considerar al potencial de Rosen-Morse trigonométrico como el potencial inicial V_0 y a las soluciones semilla u_{01} , u_{02} , como soluciones generales arbitrarias de la ecuación diferencial (2.3), tenemos que el socio supersimétrico $V_2(x)$ del potencial de Rosen-Morse trigonométrico está dado por

$$V_2(x) = \frac{1}{2}a(a+1)\csc^2(x) - b\cot(x) - \{\ln[W(u_{01}, u_{02})]\}'' \quad (3.7)$$

En algunos casos, al tomar en cuenta ciertas características generales de las soluciones semilla para implementar las diferentes transformaciones de segundo orden la expresión para $V_2(x)$ se puede simplificar, ya que los comportamientos asintóticos de tales funciones pueden darnos información del potencial aún sin considerar las soluciones específicas. En los casos en los que esto ocurra se reescribirá la expresión para $V_2(x)$ en su forma simplificada.

En las siguientes secciones aplicaremos los diferentes tipos de transformaciones de segundo orden al potencial de Rosen-Morse trigonométrico y analizaremos los nuevos potenciales generados mediante tal transformación. Además, discutiremos las modificaciones que la transformación hace sobre el espectro del nuevo Hamiltoniano con respecto del espectro inicial.

3.2.1. Caso real ($c > 0$)

Las transformaciones de segundo orden para energías de factorización reales distintas nos permiten manipular el espectro de H_2 en diferentes formas, que dependen tanto de la elección de las energías de factorización como de las soluciones semilla que se usan. A continuación se describen las diferentes transformaciones que se pueden hacer de acuerdo al efecto que producen sobre el espectro del nuevo Hamiltoniano con respecto al espectro inicial.

Recordemos que para el caso real se requiere que las dos energías de factorización reales ϵ_1, ϵ_2 pertenezcan al mismo intervalo definido por dos energías consecutivas del Hamiltoniano inicial H_0 ó que estén en el intervalo $(-\infty, E_0]$, es decir, $\epsilon_1, \epsilon_2 \in I_j \cup \{E_j, E_{j+1}\}, j \in \mathbb{N}_0$ ó $\epsilon_1, \epsilon_2 \in I_{-1} \cup \{E_0\}$.

(i) Borrando dos niveles de energía consecutivos

Las transformaciones de segundo orden en las que se eligen como energías de factorización dos *eigenvalores* consecutivos del Hamiltoniano inicial H_0 , es decir, $\epsilon_2 = E_j, \epsilon_1 = E_{j+1}$, y las soluciones semilla como sus correspondientes *eigenfunciones*, $u_{01}(x) = \psi_{0j+1}(x), u_{02}(x) = \psi_{0j}(x)$, producen un nuevo Hamiltoniano H_2 cuyo espectro no incluye a las energías $\epsilon_2 = E_j, \epsilon_1 = E_{j+1}$ pero el resto del espectro es el mismo que el de H_0 . Lo anterior se interpreta como que la transformación “borra” o “elimina” dos energías consecutivas del espectro del Hamiltoniano inicial H_0 , lo cual se debe a que las funciones $\psi_{2\epsilon_1}, \psi_{2\epsilon_2}$ no son de cuadrado-integrable.

Las transformaciones que usan esta elección particular de energías de factorización y las correspondientes soluciones semilla han sido estudiadas previamente [36], determinándose que la expresión del nuevo potencial está dada por

$$V_2(x) = \frac{1}{2}(a+2)(a+3) \csc^2(x) - b \cot(x) - [\ln \mathcal{W}(x)]'', \quad (3.8)$$

donde $\mathcal{W}(x)$ es la función que resulta de factorizar el Wronskiano $W(u_{01}, u_{02})$ para aislar su comportamiento nulo en los extremos del dominio, por lo que tal Wronskiano se expresa como

$$W(u_{01}(x), u_{02}(x)) = \sin^{2a+3}(x) \mathcal{W}(x).$$

Tomando en cuenta esta factorización del Wronskiano en la expresión (3.7) y usando las propiedades del logaritmo y de las derivadas para separar el término que contiene el comportamiento asintóticamente nulo inducido por $W(u_{01}, u_{02})$ en los extremos del dominio, se puede reagrupar dicho término con el del potencial inicial $V_0(x)$ que forma parte también del nuevo potencial, obteniéndose la expresión (3.8) (ver también [33]).

Notemos que los primeros dos términos en la expresión para $V_2(x)$ corresponden a un potencial de Rosen-Morse trigonométrico con parámetros $a+2$ y b , lo que nos lleva a

preguntar si existe una transformación que pudiera generar un nuevo potencial invariante de forma con parámetros $a + 2$ y b . Una forma de conseguirlo resulta de aplicar sucesivamente dos transformaciones de primer orden en las que se borra en ambas el estado base, mientras que la transformación de segundo orden equivalente aparece al considerar $j = 0$ en las expresiones previas, es decir, cuando las energías de factorización coinciden con las del estado base y el primer estado excitado del potencial inicial mientras que las soluciones semilla son sus correspondientes *eigenfunciones*. La expresión para el nuevo potencial $V_2(x)$ es en este caso

$$V_2(x) = \frac{1}{2}(a + 2)(a + 3) \csc^2(x) - b \cot(x), \quad (3.9)$$

que como podemos notar se trata de un potencial de la misma familia que el inicial $V_0(x)$ y puede obtenerse de este último sustituyendo el parámetro a por $a + 2$, es decir, la transformación genera un potencial invariante de forma. En las Figuras 3.6(a) y 3.6(d) se representa por la curva gris punteada al potencial invariante de forma generado por una transformación de segundo orden como la descrita previamente.

En las Figuras 3.6(a) y 3.6(d) se presentan también algunos ejemplos de potenciales generados a partir de transformaciones de segundo orden cuyas energías de factorización $\epsilon_2 = E_j$, $\epsilon_1 = E_{j+1}$ no generan potenciales invariantes de forma. Además, en las Figuras 3.6(b) y 3.6(e) se muestran las soluciones semilla usadas para las distintas transformaciones, mientras que las funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ para cada transformación están graficadas en las Figuras 3.6(c) y 3.6(f).

Otra observación interesante que podemos hacer sobre los potenciales generados al borrar dos niveles consecutivos del Hamiltoniano inicial H_0 es que, a pesar de que la transformación no se realice necesariamente con las energías de factorización del estado base y el primer estado excitado de H_0 , los socios supersimétricos resultantes $V_2(x)$ presentan el mismo comportamiento asintótico para $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow \pi$ que en el caso de una transformación cuyas energías de factorización son el estado base y el primer estado excitado de H_0 . En las Figuras 3.6(a) y 3.6(c) se puede apreciar que los socios supersimétricos resultantes de transformaciones que no generan potenciales invariantes de forma presentan un comportamiento en las vecindades de $x = 0$ y $x = \pi$ similar al que presenta el potencial invariante de forma representado por la curva gris punteada.

La propiedad anterior es el resultado del comportamiento que presenta el Wronskiano de ambas soluciones en las vecindades de $x = 0$ y $x = \pi$, que es muy similar para las diferentes parejas de soluciones semilla. En la Figura 3.7 podemos ver que para valores fijos de los parámetros a y b del potencial de Rosen-Morse trigonométrico, los Wronskianos de las diferentes parejas de soluciones semilla usadas en las transformaciones que originaron los potenciales de las Figuras 3.6(a) y 3.6(c) presentan el mismo comportamiento para $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow \pi$, el cual es el que se esperaba del análisis de los mismos.

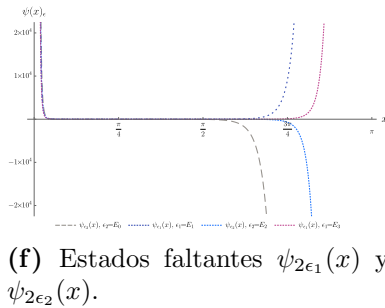
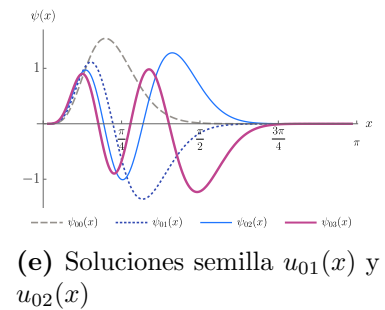
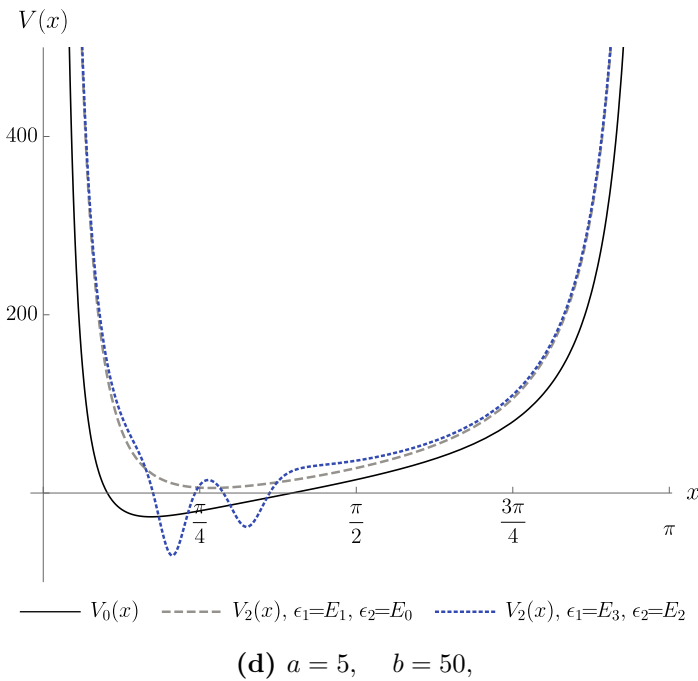
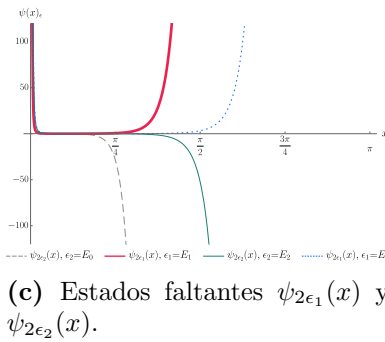
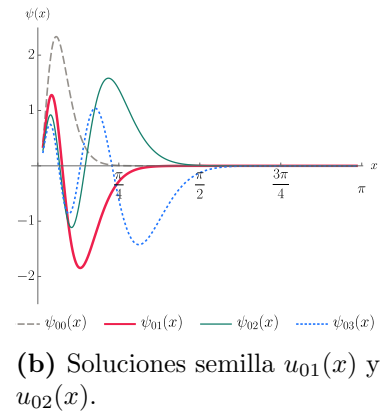
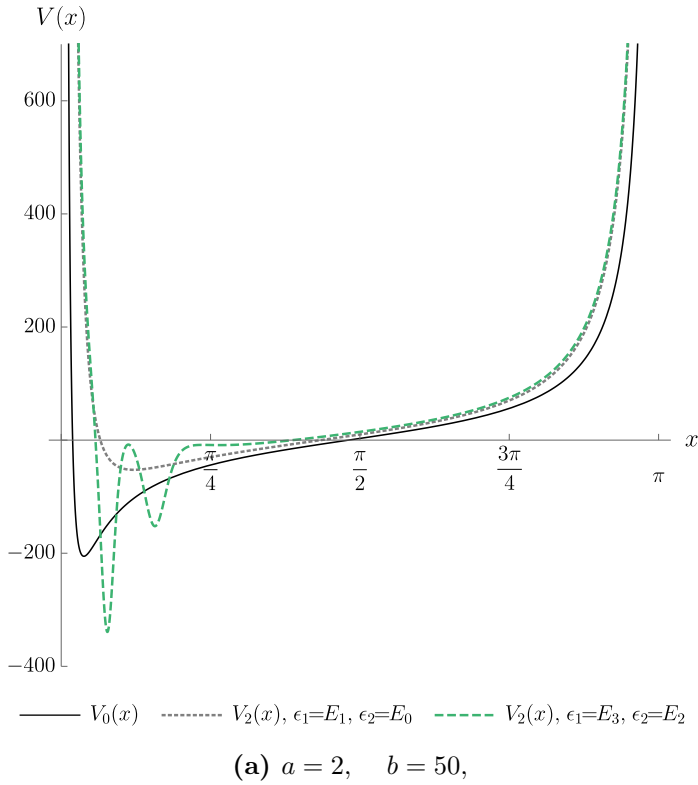


Figura 3.6. Borrando dos niveles de energía consecutivos. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para: (a) $a = 2, b = 50,$ (d) $a = 5, b = 50.$ (b), (e) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones. (c), (f) Estados faltantes.

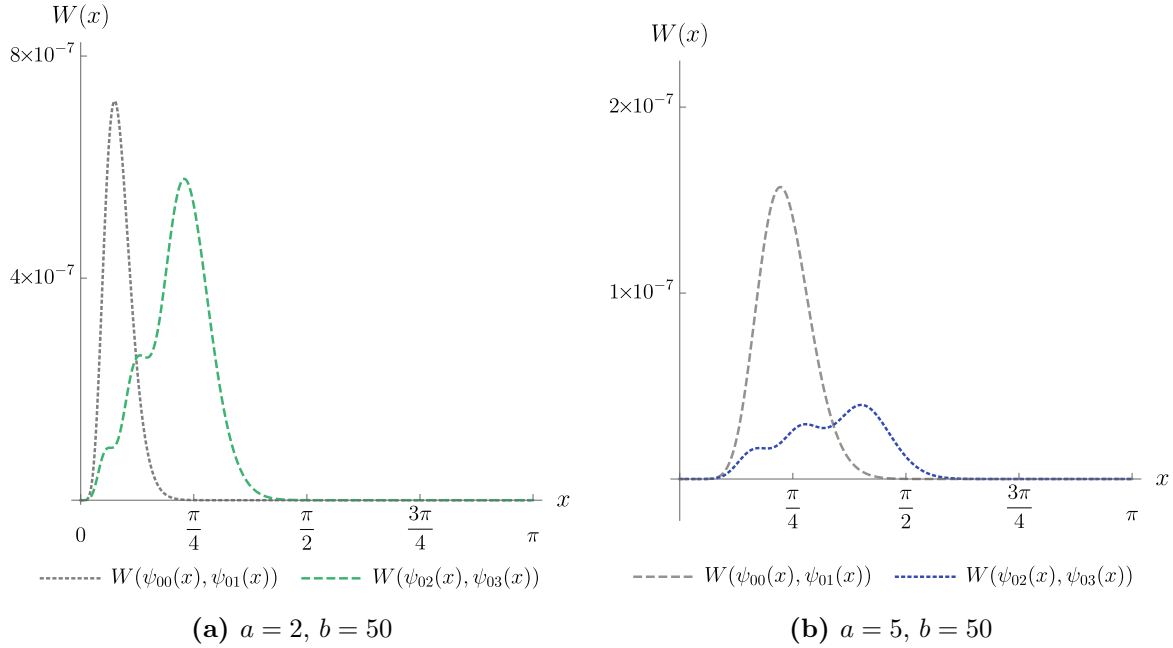


Figura 3.7. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que se borran dos niveles de energía consecutivos.

(ii) Creando dos nuevos niveles

En este caso las energías de factorización deben cumplir que $E_j < \epsilon_2 < \epsilon_1 < E_{j+1}$. Para analizar el tipo de soluciones semilla que se usarán en la transformación, primero hay que clasificar las bandas de energía delimitadas por dos energías consecutivas del espectro de H_0 , es decir, los intervalos I_j . Tales intervalos I_j se clasifican en dos tipos, de acuerdo a la paridad del índice j que etiqueta al intervalo. Se tiene entonces que, si j es par, las constantes (Λ_1, λ_1) de la combinación lineal de la primera solución semilla $u_{01}(x)$ deben tener signos opuestos, para garantizar que tenga $j + 1$ nodos, mientras que las constantes (Λ_2, λ_2) de la solución semilla $u_{02}(x)$ deben tener el mismo signo para que tenga $j + 2$ nodos. Por otra parte, si j es impar las constantes de las combinaciones lineales en las soluciones semilla deben ser elegidas así: con el mismo signo para la solución semilla $u_{01}(x)$ asociada a ϵ_1 y signos opuestos para la solución semilla $u_{02}(x)$ con energía de factorización ϵ_2 . Notemos que para este tipo de transformaciones las funciones $u_{01}(x)$ y $u_{02}(x)$ son soluciones semilla no físicas de la ecuación (2.3), sin embargo, la transformación da lugar a las funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ que resultan ser de cuadrado integrable por lo que son *eigenfunciones* físicas de H_2 con *eigenvalores* ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente. El Wronskiano para el tipo de soluciones semilla usadas en esta transformación se puede factorizar como sigue [38, 61]

$$W(u_{01}(x), u_{02}(x)) = \sin^{-2a+1}(x)\mathcal{W}(x),$$

donde $\mathcal{W}(x)$ es una función acotada sin nodos que surge al factorizar los términos divergentes que aparecen en el Wronskiano en las vecindades $x = 0$ y $x = \pi$. En las Figuras 3.8(a) y 3.8(b) se grafican algunos ejemplos de Wronskianos para los pares de soluciones semilla usadas en este tipo de transformaciones.

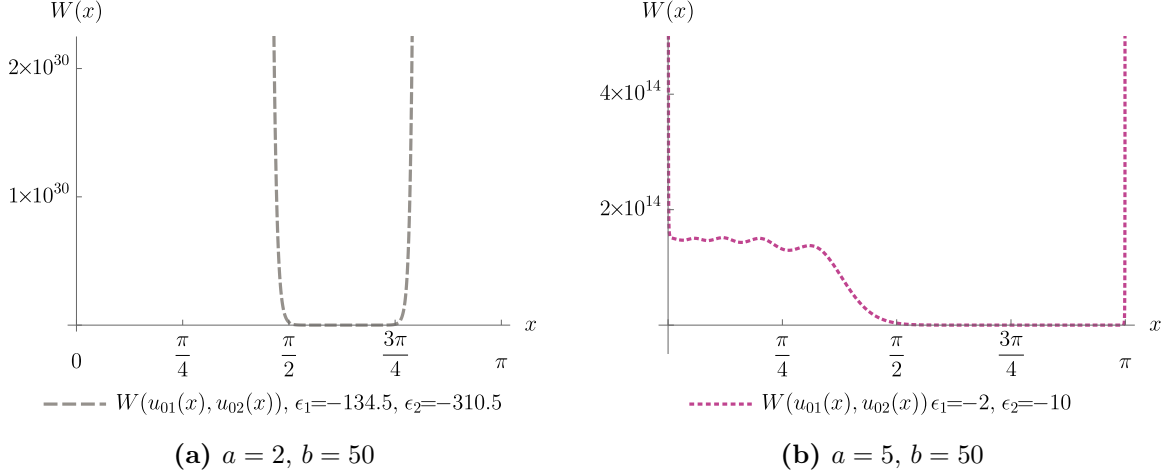


Figura 3.8. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que se crean dos niveles de energía.

Sustituyendo la fórmula anterior en la expresión general para el potencial $V_2(x)$ generado por una transformación de segundo orden, luego de hacer un poco de álgebra se obtiene

$$V_2(x) = \frac{1}{2}(a-2)(a-1)\csc^2(x) - b\cot(x) - [\ln \mathcal{W}(x)]'' . \quad (3.10)$$

En esta expresión se puede notar que los dos primeros términos corresponden a un potencial de Rosen-Morse trigonométrico con parámetros $a-2, b$, por lo que el comportamiento de nuevo potencial V_2 para $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow \pi$ es el mismo que V_0 con el parámetro a sustituido por $a-2$.

Lo anterior resulta especialmente importante al considerar energías de factorización que pertenezcan al intervalo I_{-1} , es decir $\epsilon_2 < \epsilon_1 < E_0$, para las cuales hay que elegir la solución semilla $u_{01}(x)$ con el mismo signo para las constantes Λ_1 y λ_1 , mientras que Λ_2 y λ_2 deben tener signos opuestos entre sí. Una transformación de este tipo es equivalente a efectuar dos transformaciones sucesivas de primer orden, la primera considerando la energía de factorización $\epsilon_1 < E_0$ con solución semilla $u_{01}(x)$ elegida como se mencionó previamente y la segunda con energía de factorización $\epsilon_2 < \epsilon_1$ con su correspondiente solución semilla $u_{12}(x) = W(u_{01}(x), u_{02}(x))/u_{01}(x)$.

Al igual que en el caso anterior, en este tipo de transformaciones es posible generar potenciales invariantes de forma al elegir soluciones semilla adecuadas, para las cuales se satisfaga que $\mathcal{W}(x) = 0$. Sin embargo, a diferencia del caso (i) el encontrar ahora las soluciones semilla con las características apropiadas resulta más complicado.

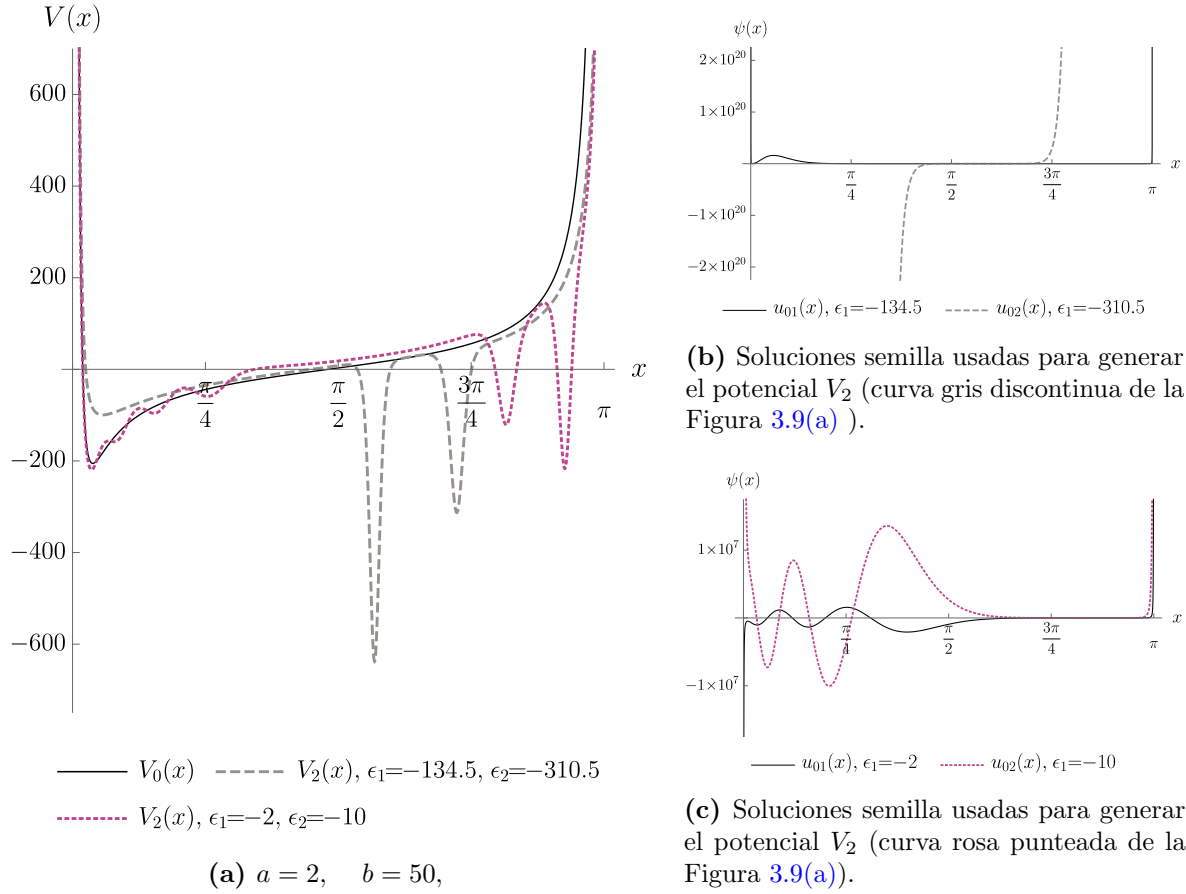


Figura 3.9. Creando dos nuevos niveles de energía. (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b), (c) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones.

En la Figura 3.9(a) se representa el potencial generado por una transformación de segundo orden en la que se agregan dos niveles de energía $\epsilon_2 < \epsilon_1 < E_0$ por la curva gris discontinua, transformación que es equivalente a la aplicación sucesiva de dos de primer orden.

Además, en la Figura 3.9(a) se presenta un potencial generado a partir de una transformación de segundo orden con energías de factorización $\epsilon_2, \epsilon_1 \in I_j$, que es un caso que no se puede alcanzar mediante la aplicación sucesiva de dos transformaciones de primer orden no singulares. El caso graficado corresponde a $E_3 < \epsilon_2 < \epsilon_1 < E_4$ y genera el potencial representado por la curva rosa punteada. En la Figura 3.9(b) se muestran las soluciones semilla usadas para efectuar la transformación con $\epsilon_2 < \epsilon_1 < E_0$, mientras que las soluciones semilla usadas en la transformación con $\epsilon_2, \epsilon_1 \in I_j$ están graficadas en la Figura 3.9(c).

Las funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ que aparecen para cada transformación, que en este caso son *eigenfunciones* físicas de H_2 , están graficadas en las Figuras 3.10(a) y 3.10(b). Por otra

parte, en las Figuras 3.8(a) y 3.8(b) se grafica el Wronskiano de los pares de soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones de la Figura 3.9(a).

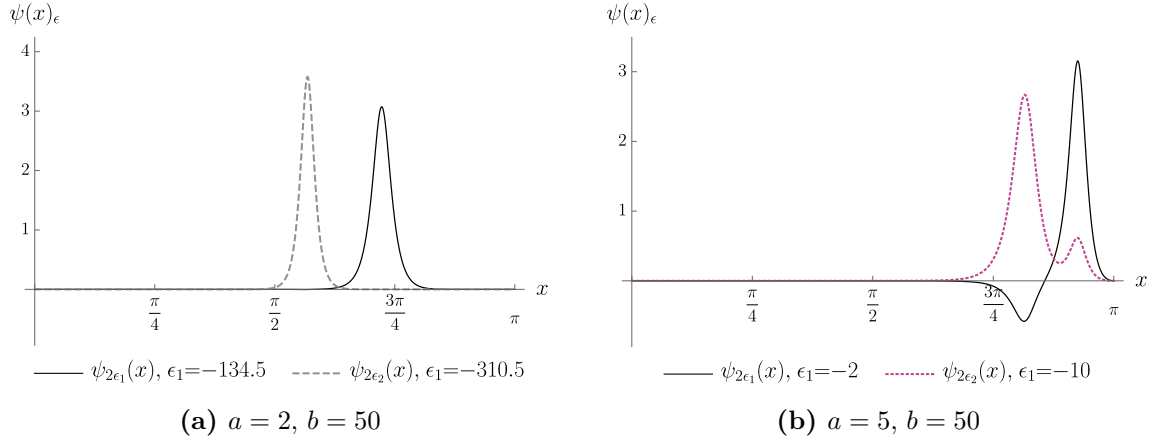


Figura 3.10. Eigenfunciones $\psi_{2\epsilon_1}$, $\psi_{2\epsilon_2}$ de H_2 resultantes de efectuar las transformaciones de segundo orden en las que se crean dos niveles de energía.

(iii) Creando un nivel de energía

Para generar un Hamiltoniano H_2 que tenga un nivel de energía adicional al espectro de H_0 las transformaciones de segundo orden nos brindan la libertad de agregarlo sin la restricción que se tiene en el caso de primer orden, es decir, el nuevo nivel de energía no tiene que estar necesariamente debajo de la energía del estado base de H_0 . Este tipo de transformación se puede alcanzar como un caso límite del inciso anterior, en el que una de las dos soluciones semilla es ahora del tipo $\psi_L(x)$ ó $\psi_R(x)$ (para $\lambda \rightarrow 0$ ó $\Lambda \rightarrow 0$, respectivamente). Al igual que en el caso anterior, las energías de factorización deben satisfacer que $\epsilon_2, \epsilon_1 \in I_j$. Si la solución semilla para ϵ_1 es de la forma $\psi_L(x)$ ó $\psi_R(x)$ entonces ϵ_2 debe tener asociada una solución semilla con $j + 2$ nodos. Por tanto, si j es par la solución semilla u_{02} debe tener constantes Λ_2 y λ_2 que tengan el mismo signo, pero si j es impar Λ_2 y λ_2 deberán tener signos opuestos. Al elegir las energías de factorización y las soluciones semilla de tal forma, la transformación genera una función $\psi_{2\epsilon_2}$ que es *eigenfunción* física de H_2 mientras que la función $\psi_{2\epsilon_1}$ es una *eigenfunción* no física de H_2 con *eigenvalores* ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente.

Por otra parte, si la solución semilla del tipo $\psi_L(x)$ ó $\psi_R(x)$ corresponde a la energía de factorización ϵ_2 , entonces la solución semilla para ϵ_1 debe tener $j + 1$ nodos lo cual se consigue al elegir Λ_1 y λ_1 con signos opuestos si j es par, mientras que si j es impar entonces Λ_1 y λ_1 deben tener el mismo signo. En este caso $\psi_{2\epsilon_2}$ es una *eigenfunción* no física de H_2 , mientras que $\psi_{2\epsilon_1}$ es una *eigenfunción* física de H_2 con *eigenvalores* ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente.

Las singularidades presentes en el Wronskiano no sugieren ahora una factorización que pueda ser útil como en los casos anteriores, por lo que la expresión para el nuevo potencial está dada por la ecuación (3.7). Sin embargo, del comportamiento de las soluciones semilla se sabe que el Wronskiano es tal que en la vecindad del extremo del dominio donde ambas soluciones semilla divergen el nuevo potencial V_2 se aproxima al V_0 con el parámetro $a - 2$ mientras que en el otro extremo del dominio el potencial V_2 se acerca al V_0 con los parámetros iniciales, esto último ya que una de las soluciones semilla diverge y la otra tiende a cero en ese extremo. Al igual que en el inciso anterior, consideremos ahora el

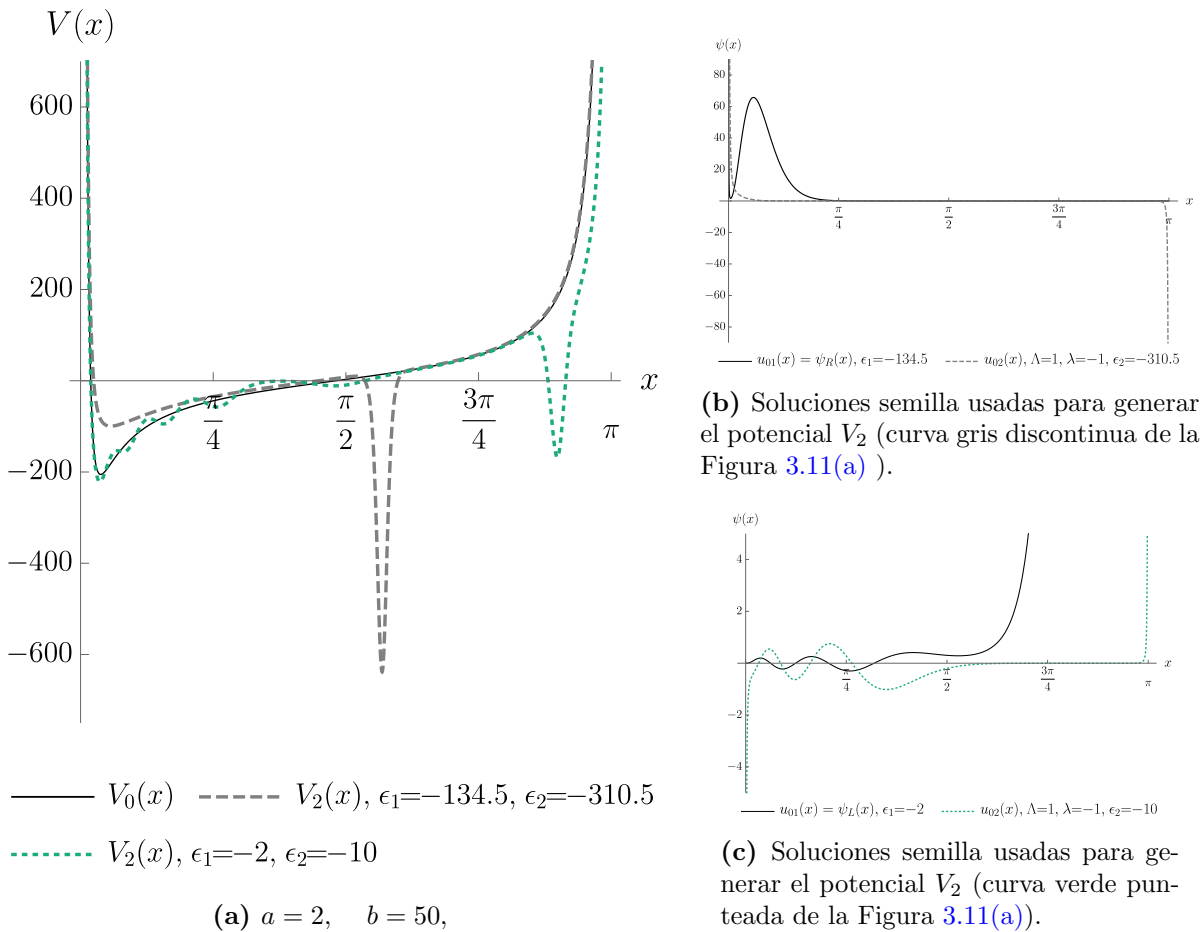


Figura 3.11. Creando un nivel de energía. (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b), (c) Soluciones semilla usadas para implementar las transformaciones.

caso en el que las energías de factorización ϵ_2, ϵ_1 pertenecen al intervalo I_{-1} , para lo cual se pueden elegir las soluciones semilla de dos formas. Una de ellas consiste en escoger a u_{01} como una función del tipo $\psi_L(x)$ ó $\psi_R(x)$ y a u_{02} con constantes Λ_2 y λ_2 que tengan signos diferentes para garantizar que u_{02} tenga un nodo. La otra opción es elegir a u_{01}

con Λ_1 y λ_1 siendo del mismo signo, teniendo así una solución sin nodos, mientras que la otra solución semilla u_{02} tiene que ser del tipo $\psi_L(x)$ ó $\psi_R(x)$.

En la Figura 3.11(a) se muestran algunos potenciales generados por este tipo de transformación. En los casos presentados en esas graficas los nuevos Hamiltonianos tienen un nivel de energía extra en $\epsilon_2 = -310.5$ (curva gris discontinua) ó en $\epsilon_2 = -10$ (curva verde punteada). Las soluciones semilla usadas en la transformación están graficadas en las Figuras 3.11(b) y 3.11(c). Por otra parte, las funciones $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ se muestran en la Figura 3.12, mientras que los Wronskianos de las soluciones semilla u_{01} , u_{02} se dibujan en la Figura 3.13.

El potencial V_2 que corresponde a la curva gris discontinua de la Figura 3.11(a) tiene ubicado el nuevo nivel de energía en donde estaría el estado base del Hamiltoniano inicial pero con el parámetro a reducido en una unidad, es decir, se trata de un potencial isoespectral a un potencial de Rosen-Morse trigonométrico con parámetros $a - 1$, b . Sin embargo, no se trata de un potencial invariante de forma ya que V_2 no es del tipo Rosen-Morse trigonométrico.

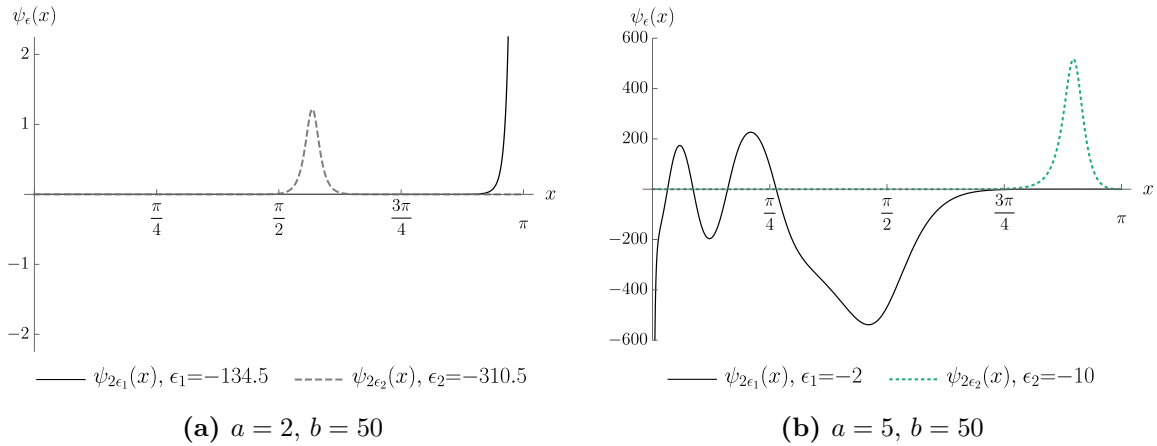


Figura 3.12. Funciones $\psi_{2\epsilon_1}$, $\psi_{2\epsilon_2}$ resultantes de las transformaciones de segundo orden en las que se crea un nuevo nivel de energía.

(iv) Moviendo un nivel de energía

Las transformaciones que generan un nuevo potencial con este tipo de modificación en el espectro requieren de energías de factorización y soluciones semilla tales que el efecto de la transformación sea borrar un nivel arbitrario E_j del espectro de H_0 pero simultáneamente crear un nuevo nivel en alguno de los intervalos I_{j-1} ó I_j , que tiene asociada una solución semilla que es *eigenfunción* no física de H_0 .

La forma de elegir las constantes Λ y λ para la solución semilla no física de H_0 depende del intervalo al que pertenezca la correspondiente energía de factorización, es decir, de si

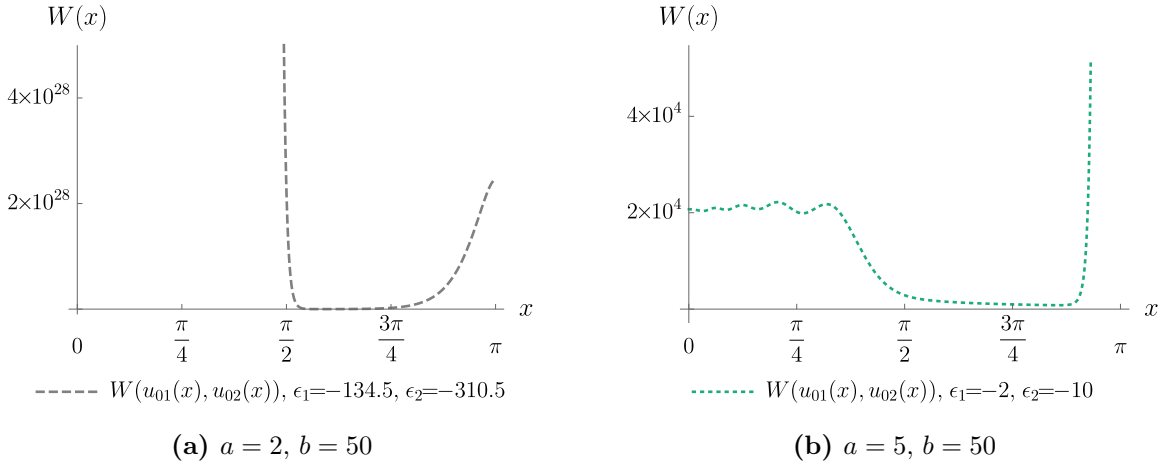


Figura 3.13. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que se crea un nivel de energía.

el nuevo nivel estará por encima o por debajo del que se borrará. Por tanto, si las energías de factorización se eligen como $\epsilon_1 = E_j$ y $\epsilon_2 \in I_{j-1}$ el efecto global de la transformación puede verse como un desplazamiento del *eigenvalor* E_j hacia un nivel más bajo de energía. Otra posibilidad es considerar que $\epsilon_i \in I_j$ y $\epsilon_2 = E_j$, lo cual puede interpretarse como un desplazamiento de E_j hacia un nivel de energía mayor como efecto de la transformación. Para ambas formas de elegir las energías de factorización la solución no física de H_0 debe tener $j + 1$ nodos, por lo que si j es par las constantes Λ y λ deben tener signos opuestos pero si j es impar entonces ambas constantes deben tener el mismo signo.

Este tipo de transformación no contiene singularidades en el Wronskiano de las soluciones semilla, ya que el comportamiento nulo de la solución física en las vecindades de $x = 0$ y $x = \pi$ compensa al comportamiento divergente de la solución no física en la misma región. En la Figura 3.14 podemos ver claramente que en la vecindad de $x = 0$ los dos Wronskianos tienden a un valor constante diferente de cero, mientras que para $x \rightarrow \pi$ ambos tienden también a un valor constante diferente de cero.

Así, la expresión para el nuevo potencial $V_2(x)$ está dada por la ecuación (3.7), ya que al no haber comportamiento singular ni asintóticamente nulo para el Wronskiano el coeficiente $a(a + 1)/2$ del término con $\csc^2(x)$ no se ve modificado.

En la Figura 3.15(a) se muestran algunos ejemplos de socios supersimétricos del potencial de Rosen-Morse trigonométrico generados por el tipo de transformación descrita previamente. El potencial representado por la curva roja punteada resulta de mover un nivel de energía E_j hacia abajo; por otra parte, el potencial que corresponde a la curva gris discontinua resulta de mover una energía E_j hacia arriba. En la Figuras 3.15(b), 3.15(c) se grafican las parejas de soluciones semilla usadas en cada una de las transformaciones que dieron lugar a los socios supersimétricos de la Figura 3.15(a). En la Figura 3.16 se muestran las funciones $\psi_{2\epsilon_1}, \psi_{2\epsilon_2}$ resultantes de la transformación. Allí se puede apreciar

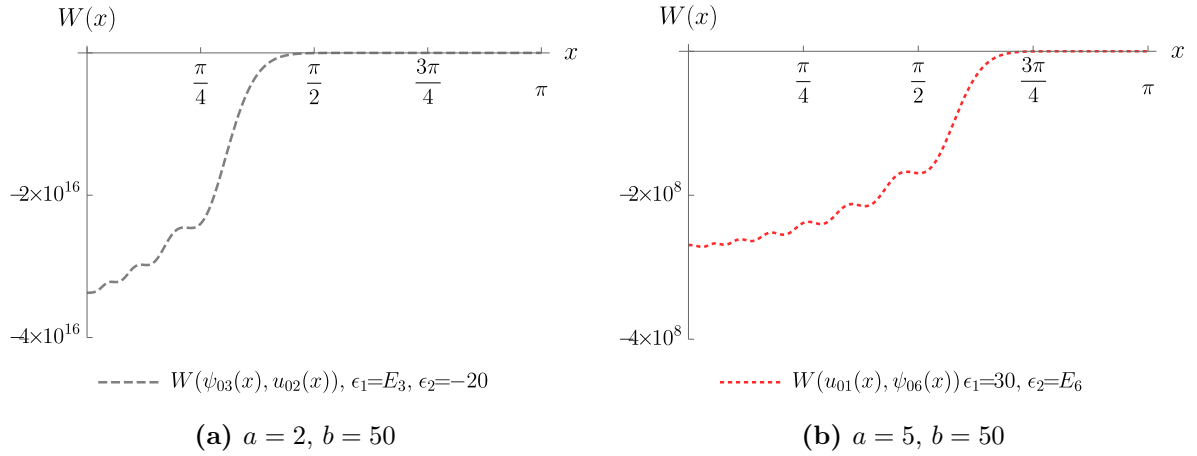


Figura 3.14. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que un nivel de energía es desplazado.

que el estado faltante de H_2 asociado a la energía de factorización E_j deja de ser de cuadrado integrable.

(v) Eliminando un nivel de energía

Otra posible modificación en el espectro del nuevo Hamiltoniano generado por transformaciones de segundo orden con energías de factorización reales consiste en eliminar la energía E_j del Hamiltoniano inicial. Esta transformación puede obtenerse como límite del caso anterior cuando la solución semilla no física de H_0 se convierte en una función del tipo $\psi_L(x)$ ó $\psi_R(x)$, es decir, para $\lambda \rightarrow 0$ ó $\Lambda \rightarrow 0$. Al igual que en el caso (iv), se tienen dos formas de escoger las energías de factorización para conseguir una transformación con el efecto deseado: la primera consiste en elegir $\epsilon_1 = E_j$, $\epsilon_2 \in I_{j-1}$ y las soluciones semilla como $u_{01}(x) = \psi_{0j}(x)$ y $u_{02}(x)$ siendo $\psi_L(x)$ ó $\psi_R(x)$; la otra opción es elegir $\epsilon_1 \in I_j$, $\epsilon_2 = E_j$ y sus correspondientes soluciones semilla $u_{01}(x)$ siendo $\psi_L(x)$ ó $\psi_R(x)$ y $u_{02}(x) = \psi_{0j}(x)$. Este tipo de transformación produce *eigenfunciones* no físicas $\psi_{2\epsilon_1}$ y $\psi_{2\epsilon_2}$ del nuevo Hamiltoniano H_2 .

Nuevamente, la expresión para el nuevo potencial $V_2(x)$ está dada en la ecuación (3.7) ya que el comportamiento singular que aporta el Wronskiano se presenta sólo en el extremo en el cual ambas soluciones semilla tienden a cero y no se puede factorizar de modo que modifique global y correctamente el coeficiente $a(a+1)/2$ de la función $\csc^2(x)$ en ambos extremos del potencial V_2 . Sin embargo, se tiene información local del efecto de la transformación sobre el nuevo potencial $V_2(x)$: para la vecindad del extremo del dominio en el que ambas soluciones semilla tienden a cero, V_2 se aproxima al potencial resultante de eliminar dos niveles de energía del espectro inicial, es decir, se comporta como un potencial de Rosen-Morse trigonométrico con parámetro $a+2$; por otra parte, en la vecindad del extremo en el que la solución semilla no física diverge el potencial V_2 se aproxima al

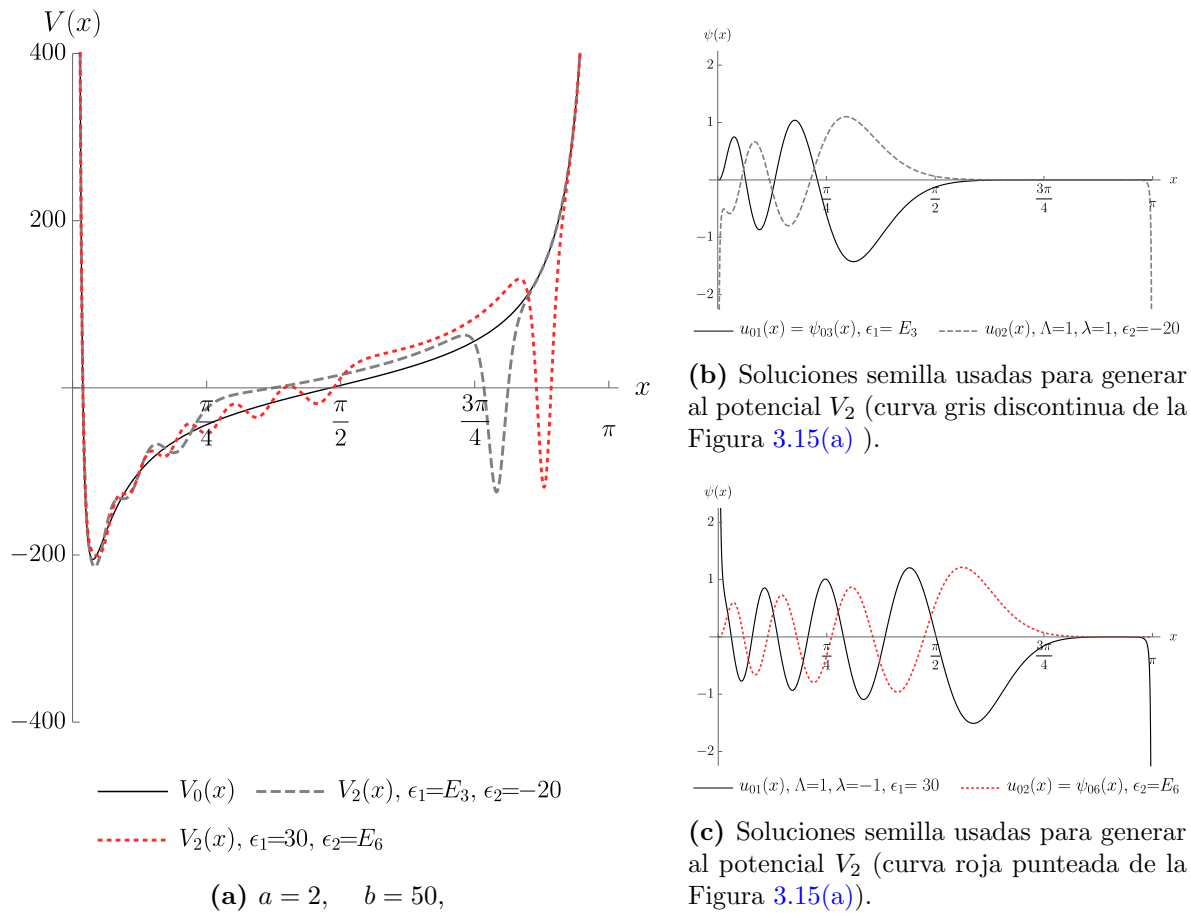


Figura 3.15. Moviendo un nivel de energía. (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b), (c) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones.

potencial inicial V_0 , ya que el comportamiento nulo de la solución física es compensado por el comportamiento divergente que tiene la solución no física en la misma región.

En la Figura 3.17 se muestran algunos potenciales generados al eliminar una energía del espectro de H_0 (Figura 3.17(a)) y las diferentes soluciones semilla usadas en cada transformación (Figuras 3.17(b) y 3.17(c)). En tales potenciales se puede observar el comportamiento descrito previamente en las vecindades de los extremos del dominio. En la Figura 3.18 se muestran los estados faltantes $\psi_{2\epsilon_1}, \psi_{2\epsilon_2}$ que aparecen para cada transformación. Además, en la Figura 3.19 se grafica el Wronskiano de las soluciones semilla usadas para las diferentes transformaciones, en la cual se puede apreciar el comportamiento asintóticamente nulo que presenta el Wronskiano sólo en uno de los extremos del dominio, lo cual se traduce en un comportamiento divergente del nuevo potencial en la misma región.

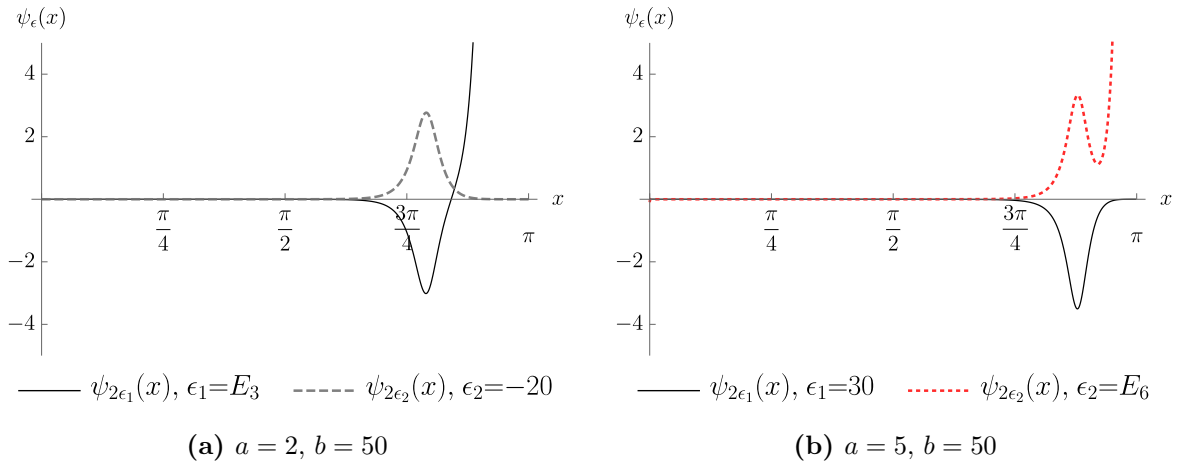


Figura 3.16. Funciones $\psi_{2\epsilon_1}$, $\psi_{2\epsilon_2}$, resultantes de transformaciones de segundo orden en las que un nivel de energía es desplazado.

(vi) Transformación isoespectral

Las transformaciones de segundo orden con energías de factorización reales permiten generar nuevos Hamiltonianos H_2 cuyo espectro es igual al del Hamiltoniano inicial H_0 . Para efectuarlas es necesario considerar un par de energías de factorización que pertenezcan a un mismo intervalo I_j cuyas soluciones semilla sean del tipo ψ_L o ψ_R . El tipo de solución semilla no necesariamente debe ser el mismo para ambas energías de factorización, por lo que se pueden considerar las diferentes combinaciones que resultan de seleccionar los dos tipos de soluciones.

Al igual que en el caso anterior, el nuevo potencial está dado por la expresión (3.7), dado que el coeficiente del término $\csc^2(x)$ no se ve afectado globalmente en la misma forma por el comportamiento de las soluciones semilla. Lo anterior se debe a que si una de las soluciones semilla es del tipo ψ_L y la otra del tipo ψ_R los comportamientos divergente y nulo de ambas soluciones en un extremo dado del dominio se cancelan obteniéndose así un nuevo potencial que tiene el mismo comportamiento asintótico que el inicial en ambos extremos del dominio. Mientras tanto, si ambas funciones son del mismo tipo ψ_L (ψ_R), entonces la singularidad inducida por las mismas para el potencial $V_2(x)$ en la vecindad de $x = 0$ es opuesta al efecto producido en la vecindad de $x = \pi$, es decir, el nuevo potencial tiene el mismo comportamiento asintótico del caso cuando se borran dos niveles de energía en el extremo en el que ambas soluciones semilla tienden a cero y un comportamiento similar al que resulta de agregar dos niveles en el otro extremo, en el cual ambas soluciones semilla divergen.

En la Figura 3.20(a) se muestran algunos potenciales generados a partir de una transformación isoespectral, los cuales son generados usando soluciones semilla de tipos opuestos, es decir, una del tipo ψ_L y la otra del ψ_R (Figuras 3.20(b) y 3.20(c)). Como se puede notar, el comportamiento de los potenciales en las vecindades de los extremos del dominio

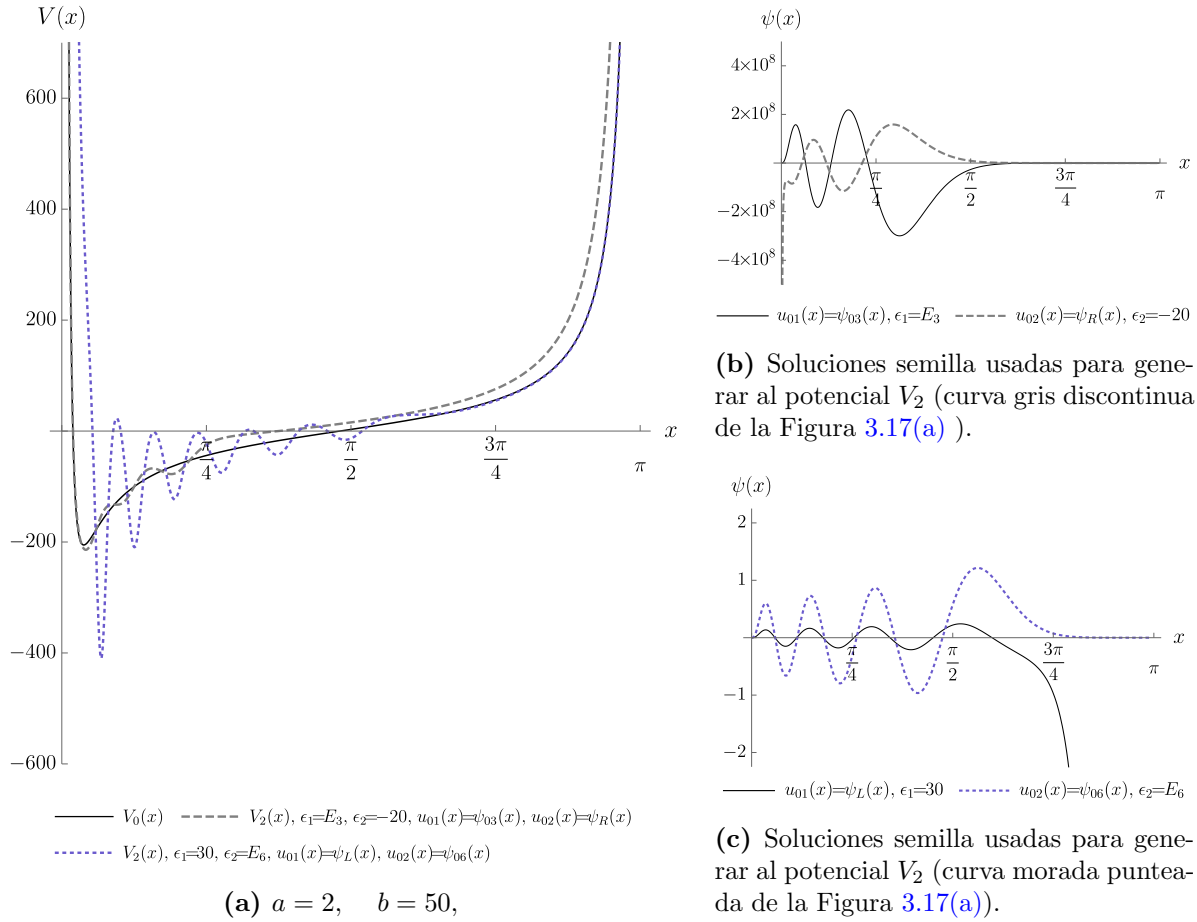


Figura 3.17. Eliminando un nivel de energía. (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2$, $b = 50$. (b), (c) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones.

es el mismo que el del potencial inicial, ya que como se discutió previamente el tipo de soluciones semilla elegidas para efectuar la transformación hace que el Wronskiano de las mismas tenga un comportamiento constante distinto de cero en los extremos del dominio, como se puede ver en la Figura 3.21.

3.2.2. Caso confluyente ($c = 0$)

En este caso la energía de factorización ϵ_1 es real, como en el denominado caso real, por lo que tomando la solución semilla u_{01} en la forma (2.22) resulta ser una función real. Además, la solución semilla debe cumplir alguna de las dos condiciones siguientes

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_{01}(x) = 0, \quad \circ \quad \lim_{x \rightarrow \pi} u_{01}(x) = 0. \quad (3.11)$$

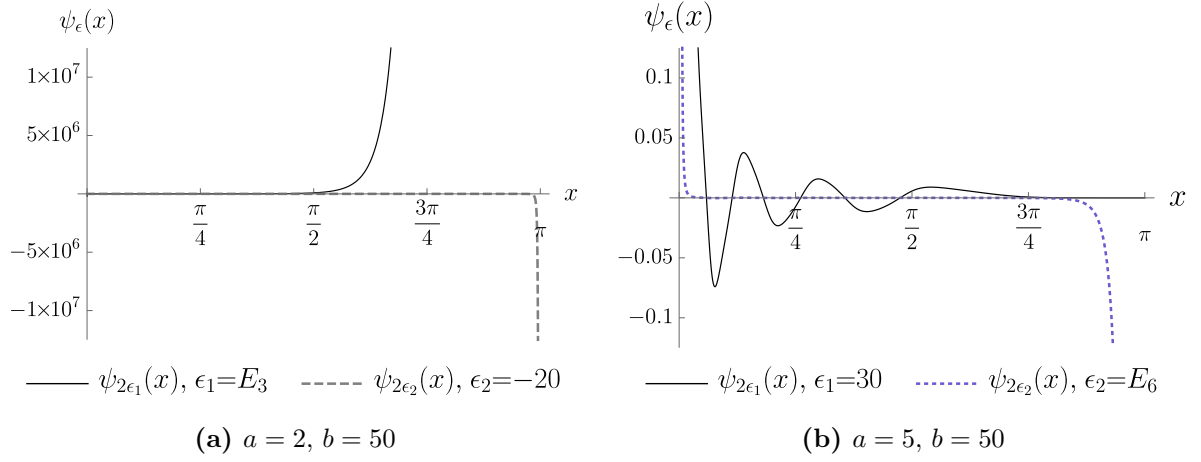


Figura 3.18. Funciones $\psi_{2\epsilon_1}$, $\psi_{2\epsilon_2}$, resultantes de las transformaciones de segundo orden en las que se elimina un nivel de energía.

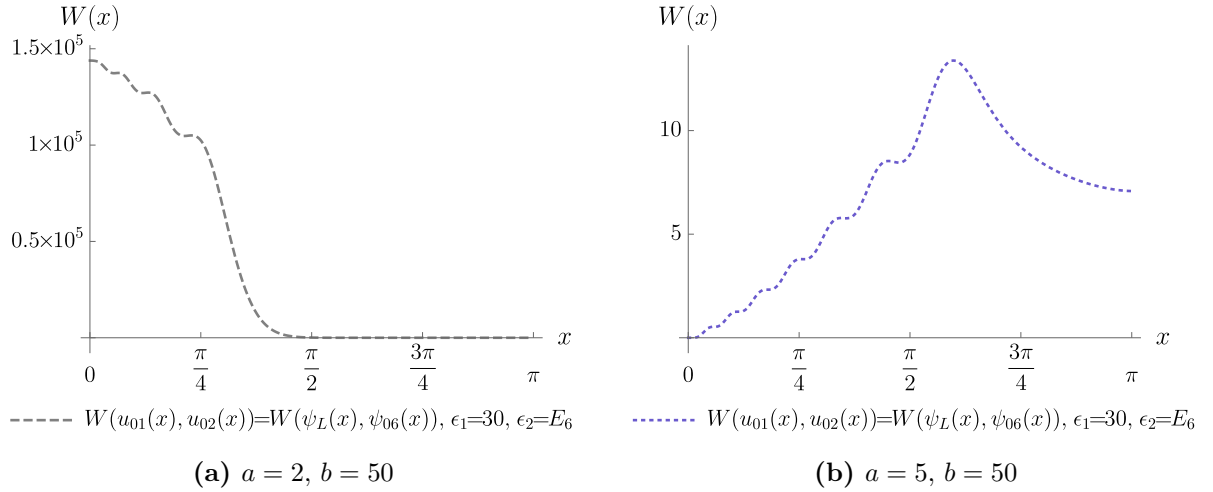


Figura 3.19. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden en las que se elimina un nivel de energía.

La expresión para el nuevo potencial en este caso es la siguiente

$$V_2(x) = \frac{1}{2}a(a+1)\csc^2(x) - b\cot(x) - [\ln W(u_{01}, u_{02})]'' , \quad (3.12)$$

donde

$$W(u_{01}, u_{02}) = w_0 + \int_0^x [u_{01}(y)]^2 dy, \quad (3.13)$$

que resulta de tomar como límite inferior de la integral en la expresión (1.43) el valor $x_0 = 0$, lo cual simplifica los cálculos.

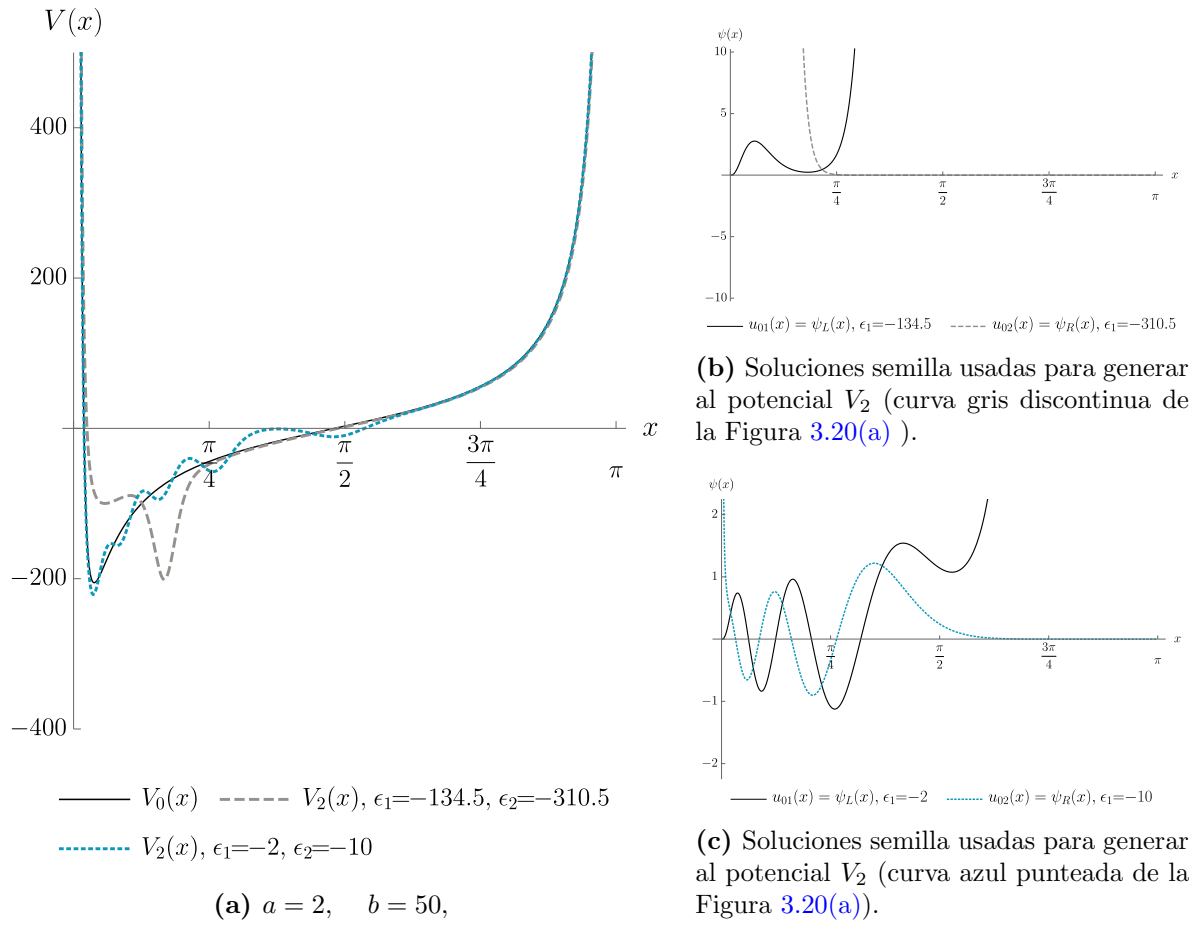


Figura 3.20. Transformación isoespectral (caso real). (a) Potencial de Rosen-Morse trigonométrico y sus socios supersimétricos de segundo orden para $a = 2, b = 50$. (b), (c) Soluciones semilla usadas para efectuar las transformaciones.

El algoritmo confluyente nos permite escoger soluciones físicas o soluciones no físicas para hacer la transformación, por lo que se puede usar las *eigenfunciones* del Hamiltoniano inicial ψ_{0n} o las funciones del tipo $\psi_L(x)$ o $\psi_R(x)$, que satisfacen las condiciones (3.11) requeridas para poder ser usadas como solución semilla. En este trabajo se analizará únicamente el caso en el que las soluciones semilla son las *eigenfunciones* ψ_{0n} , lo cual se debe a la dificultad para evaluar de forma explícita las integrales para soluciones semilla no físicas.

Así, para $u_{01}(x) = \psi_{0j}(x)$ el dominio de w_0 para el cual se producen transformaciones no singulares es $w_0 \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$. En particular, una transformación con $w_0 \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ genera un potencial que es isoespectral al inicial, mientras que para $w_0 \rightarrow -1$ ó $w_0 \rightarrow 0$ la transformación produce un potencial que no incluye a la energía E_j en su espectro.

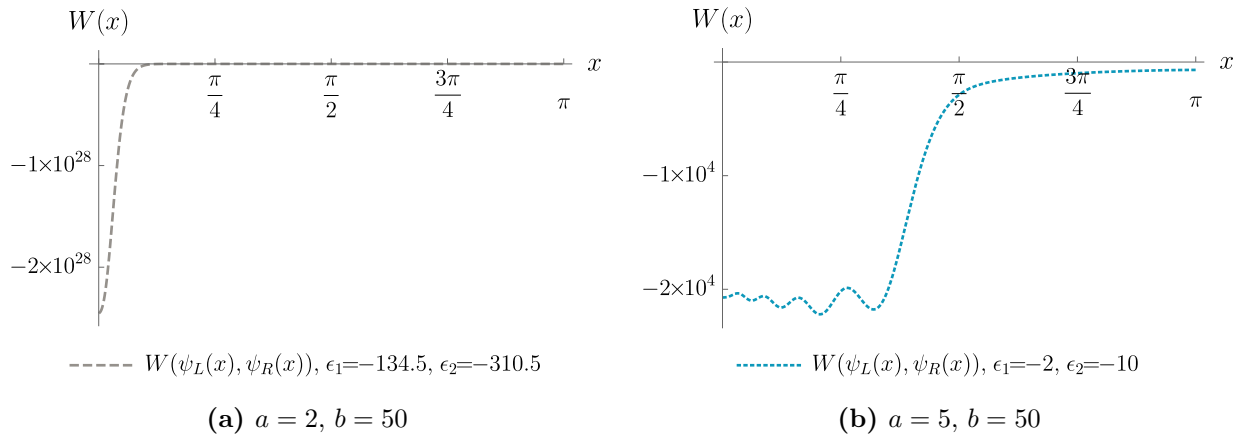


Figura 3.21. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones de segundo orden isoespectrales (caso real).

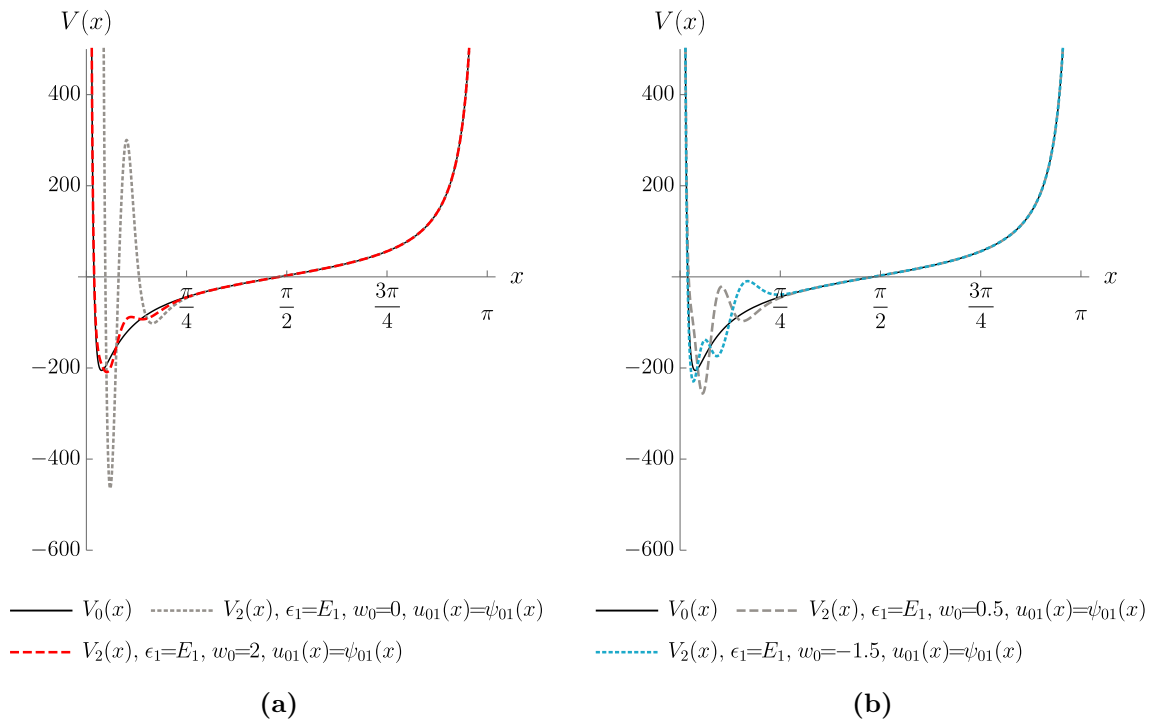


Figura 3.22. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico ($a = 2, b = 50$) y algunos socios supersimétricos de segundo orden confluentes.

En las Figuras 3.22 y 3.25 se muestran algunos potenciales generados por una transformación confluyente de segundo orden, en donde se considera a una solución semilla que es *eigenestado* de H_0 . Casi todos los socios supersimétricos del potencial de Rosen-Morse

trigonométrico que se ilustran en tales figuras son isoespectrales al inicial, salvo los que corresponden a la curvas gris punteada en la Figura 3.22(a) y a la gris discontinua en la Figura 3.25(b). En esos casos la energía del *eigenestado* de H_0 usada no pertenece al espectro de H_2 , ya que se consideró el valor $w_0 = 0$ por lo que dicho nivel de energía se borró de $\text{Sp}(H_2)$.

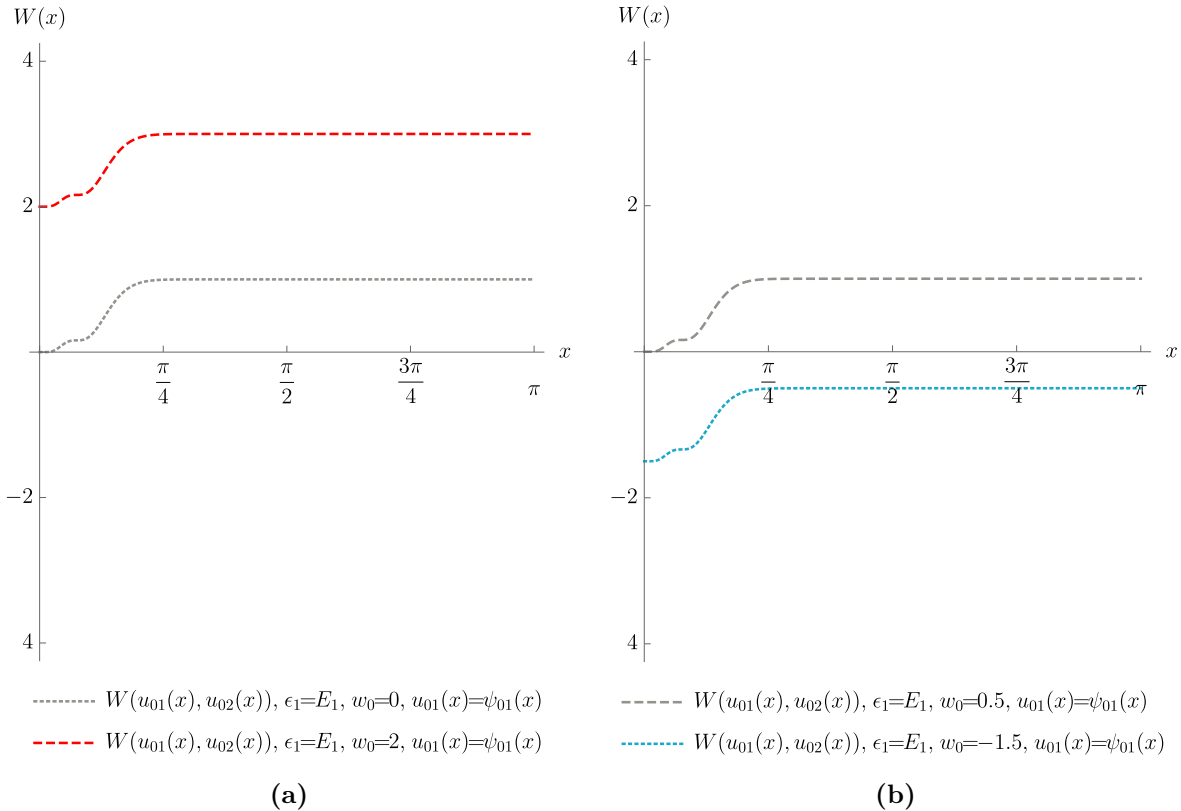


Figura 3.23. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones supersimétricas de segundo orden confluentes de las Figuras 3.22(a) y 3.22(b)

Por otra parte, en las Figuras 3.23 y 3.26 se grafica el Wronskiano de las correspondientes soluciones semilla usadas para obtener los potenciales de las Figuras 3.22 y 3.25.

Podemos observar que el Wronskiano que corresponde a los potenciales graficados en la curva gris punteada de la Figura 3.22(a) y a la gris discontinua en la Figura 3.25(b), es decir, a transformaciones no isoespectrales, tiene un comportamiento asintóticamente nulo en la vecindad de $x = 0$, lo cual hace que la función $\psi_{2\epsilon_1}(x)$ diverja en esa misma región, como se observa en las Figuras 3.24 y 3.27. Notemos que en los otros casos el Wronskiano no muestra un comportamiento nulo ni divergente, razón por la cual la función $\psi_{2\epsilon_1}(x)$ es de cuadrado-integrable.

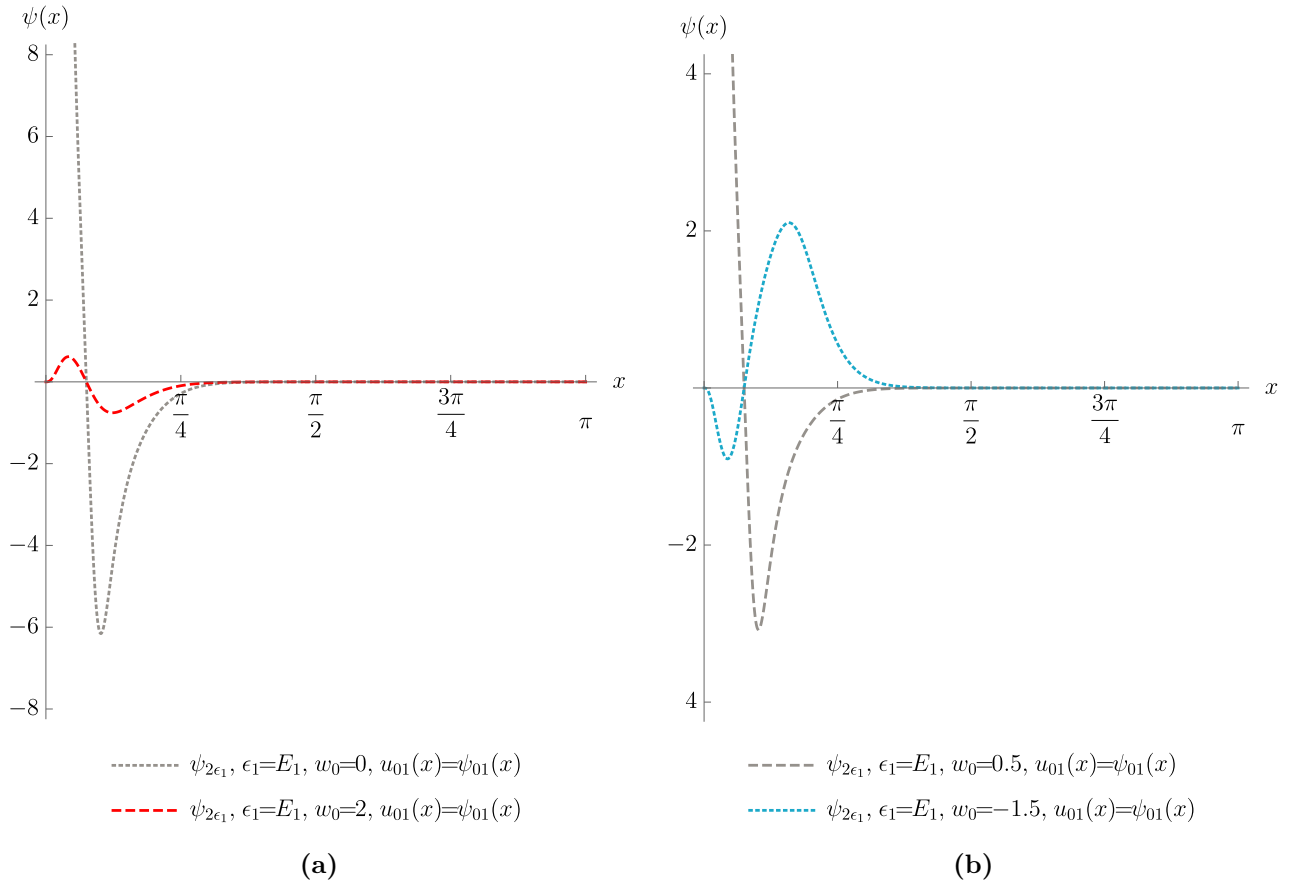


Figura 3.24. Función $\psi_{2\epsilon_1}(x)$ asociada a los potenciales graficados en las Figuras 3.22(a) y 3.22(b)

3.2.3. Caso complejo ($c < 0$)

Las transformaciones de segundo orden en las que las energías de factorización ϵ_1, ϵ_2 son complejas, tales que $\epsilon_1 = \epsilon_2^*$, nos permiten obtener también Hamiltonianos isoenergéticos. Como se mencionó en la Sección 1.2, para implementar este tipo de transformaciones es necesario encontrar soluciones semilla que satisfagan alguna de las condiciones expresadas en la ecuación (1.46). En el caso que estamos estudiando los extremos del dominio corresponden a $x_L = 0$ y $x_R = \pi$, es decir, la solución semilla en este caso deberá cumplir alguna de las condiciones expresadas en la ecuación (3.11).

Por otra parte, recordando lo discutido en la Sección 2.1, se sabe que para energías de factorización $E \in \mathbb{C}$ las soluciones $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ son también complejas; además, como se analiza en el apéndice 4, aún para $E \in \mathbb{C}$ las soluciones $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ satisfacen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_L(x) = 0, \quad (3.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \psi_R(x) = 0. \quad (3.15)$$

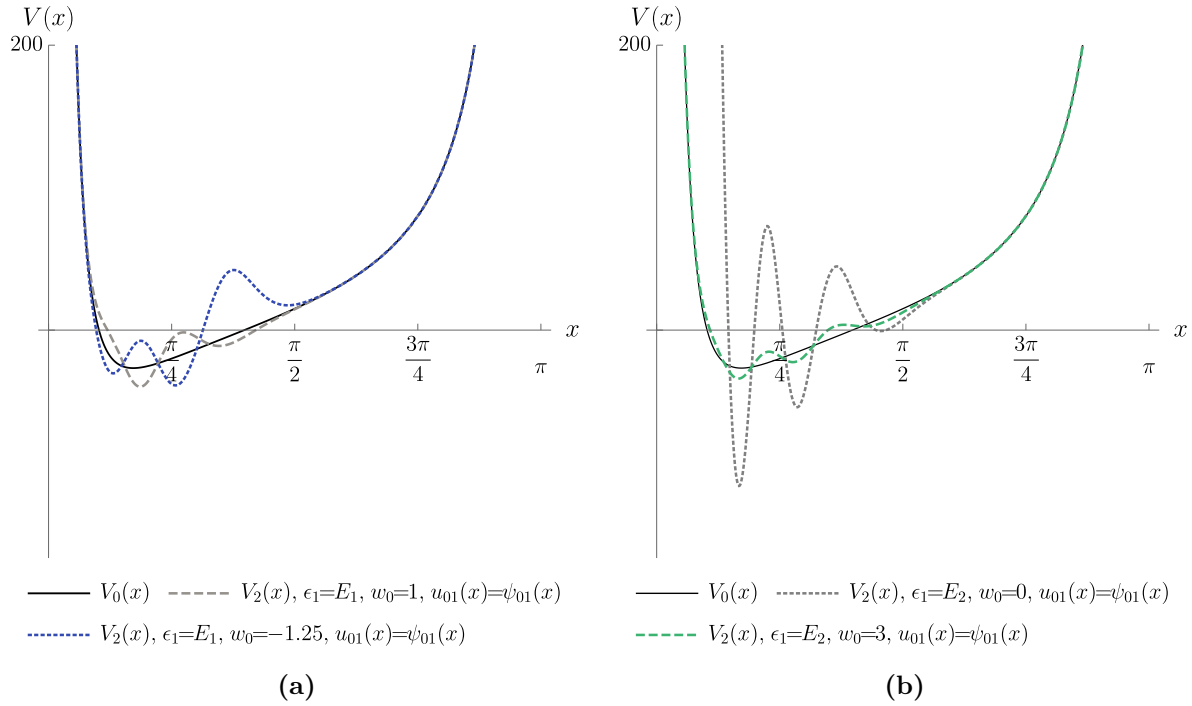


Figura 3.25. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico ($a = 5$, $b = 50$) y algunos socios supersimétricos de segundo orden confluentes.

Al comparar el comportamiento de las soluciones $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ con las condiciones (3.11) podemos notar que cada una de las soluciones $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ satisface alguna de las condiciones necesarias requeridas sobre las soluciones semilla para efectuar una transformación no singular: $\psi_L(x)$ satisface la primera condición mientras que $\psi_R(x)$ lo hace con la segunda. Entonces, para implementar una transformación de segundo orden no singular con energías de factorización complejas se debe usar una solución semilla del tipo $\psi_R(x)$ ó bien del tipo $\psi_L(x)$.

El nuevo potencial para este tipo de transformaciones tiene la forma

$$V_2(x) = \frac{1}{2}a(a+1)\csc^2(x) - b\cot(x) - [\ln W(u_{01}, u_{01}^*)]'' . \quad (3.16)$$

Como en este caso la singularidad inducida por la solución semilla en el potencial $V_2(x)$ en la vecindad de $x = 0$ es opuesta al efecto producido por la misma función en la vecindad de $x = \pi$, se obtiene un nuevo potencial cuyo comportamiento asintótico es el mismo que cuando se borran dos niveles de energía en la vecindad donde ambas soluciones semilla van a cero y un comportamiento similar a cuando se agregan dos niveles en la vecindad opuesta, en donde ambas soluciones semilla divergen.

Algunos potenciales generados a través de este tipo de transformaciones están graficados en las Figuras (3.28) y (3.29), en donde los potenciales de Rosen-Morse trigonométricos

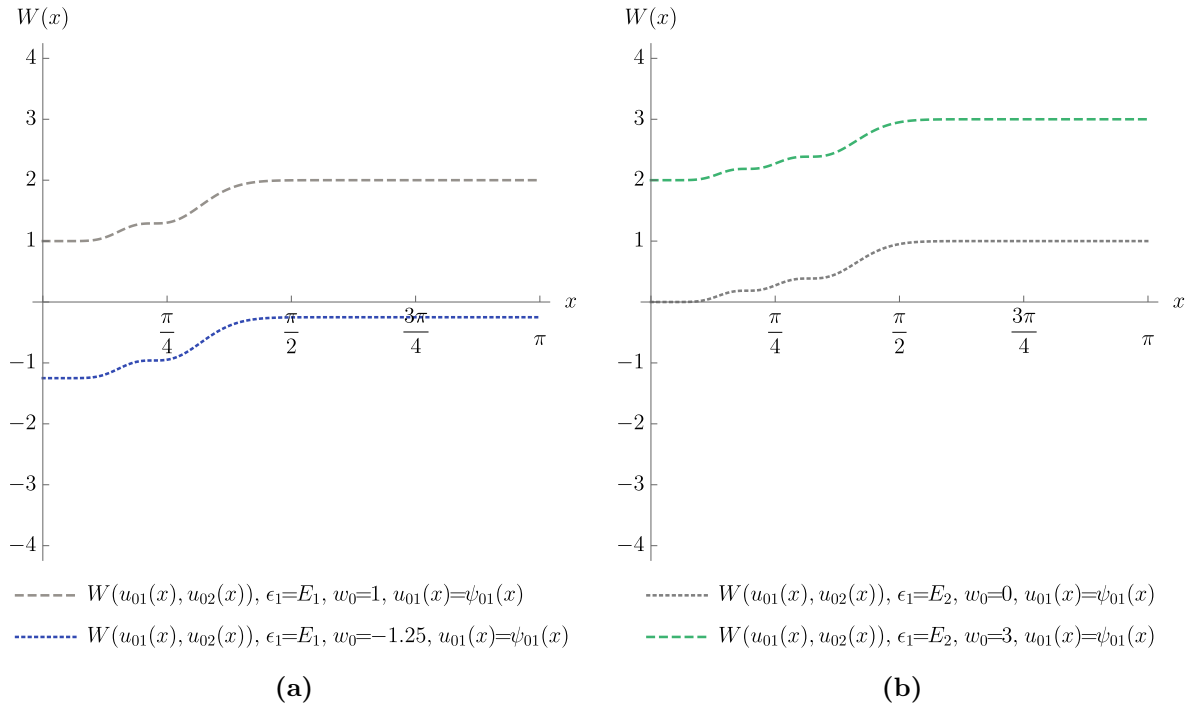


Figura 3.26. Wronskiano de las soluciones semilla usadas en las transformaciones supersimétricas de segundo orden confluentes de las Figuras 3.25(a) y 3.25(b)

iniciales se representan por la curva negra sólida en cada una de las figuras (para tener una referencia). En la Figura 3.28 se muestran los socios supersimétricos generados por soluciones semilla del tipo ψ_L , razón por la cual todos los nuevos potenciales de dicha figura tienen el mismo comportamiento en los extremos del dominio. Los potenciales de la Figura 3.28 muestran del lado derecho un comportamiento similar al generado por una transformación en la que se crean dos niveles de energía, mientras que en la vecindad de $x = 0$ el efecto de la transformación es similar al de un potencial en el que se borran dos niveles de energía.

Por otra parte, en la Figura 3.29 los potenciales asociados a las curvas grises discontinuas fueron generados por una transformación en donde la solución semilla es del tipo ψ_R , por lo que muestran un comportamiento similar a cuando se usan soluciones semilla del tipo ψ_L pero en extremos opuestos del dominio.

Analizando los diferentes potenciales graficados en las Figuras 3.28 y 3.29 podemos detectar ciertas características y por la forma en la que se presentan las podemos asociar a los parámetros de la transformación. Por ejemplo, se puede observar que para energías de factorización con la misma parte real pero distinta parte imaginaria el potencial generado por la transformación tiene un mayor o un menor número de oscilaciones y consecuentemente un mayor o menor número de mínimos locales dependientes de la parte imaginaria de la energía de factorización.

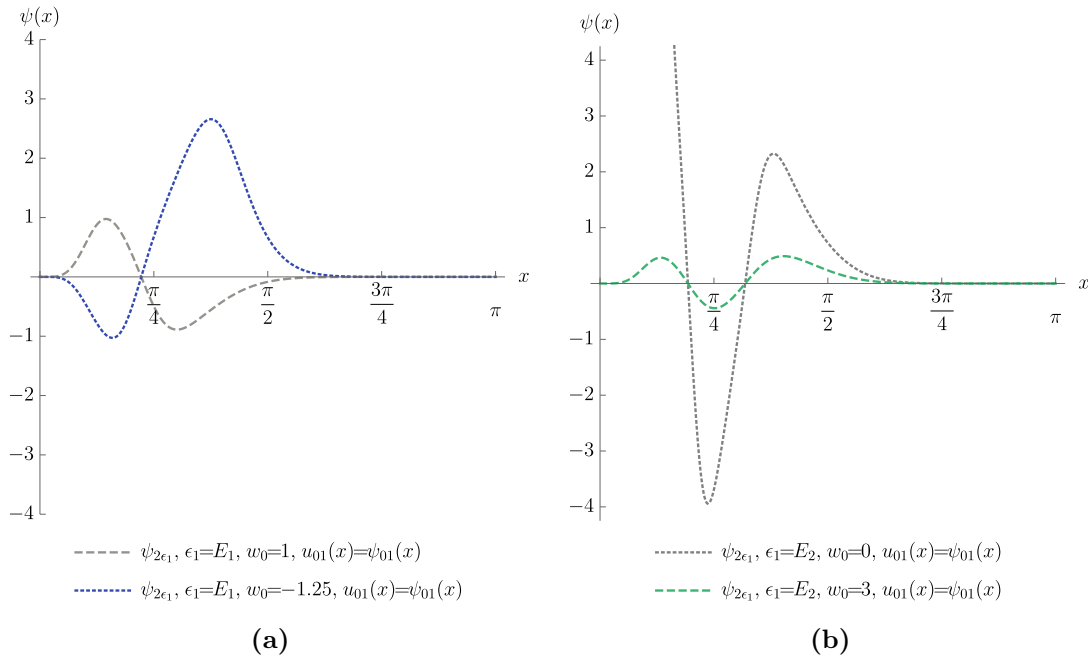


Figura 3.27. Función $\psi_{2\epsilon_1}(x)$ asociada a los potenciales graficados en las Figuras 3.25(a) y 3.25(b)

En conclusión, las técnicas de la mecánica cuántica supersimétrica de segundo orden permiten manipular el espectro del Hamiltoniano H_2 de distintas formas usando diferentes parámetros, ofreciendo también la oportunidad de generar Hamiltonianos isoespectrales a través de diferentes tipos de transformaciones, como lo vimos en distintas secciones de este capítulo.

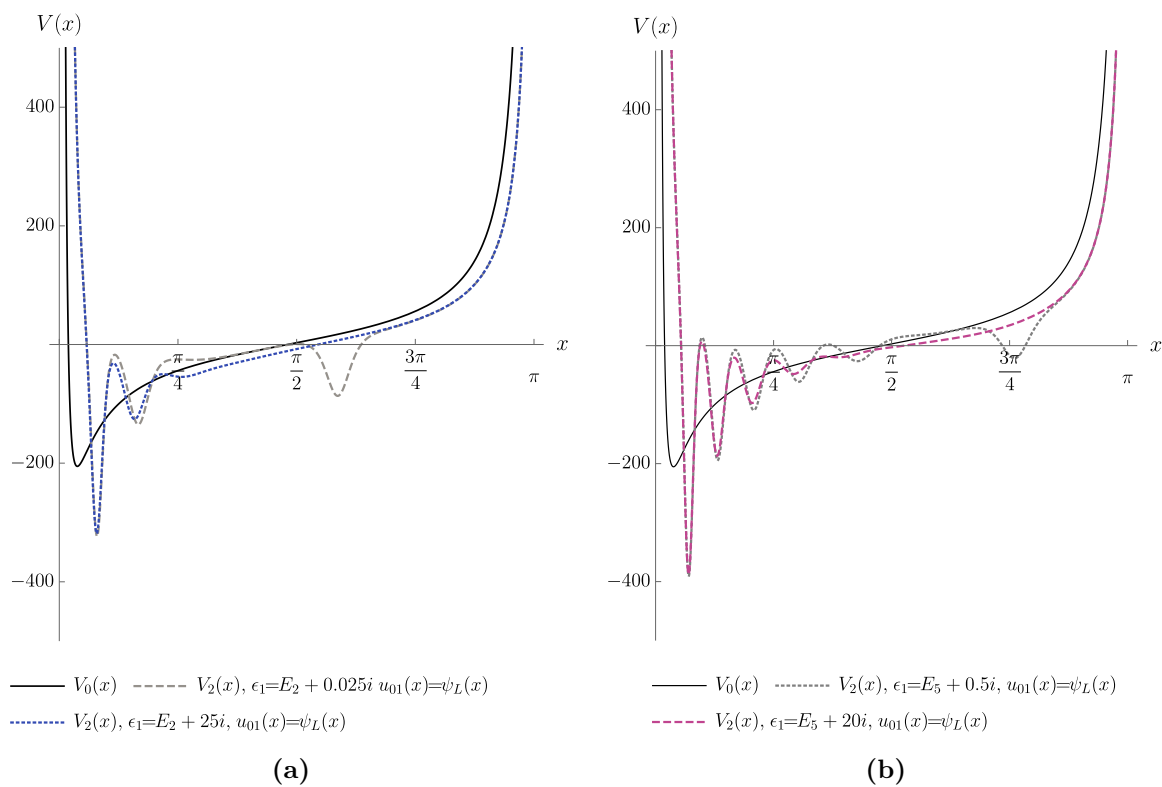


Figura 3.28. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico ($a = 2$, $b = 50$) y sus socios supersimétricos de segundo orden generados usando una transformación con energías de factorización complejas y solución semilla ψ_L .

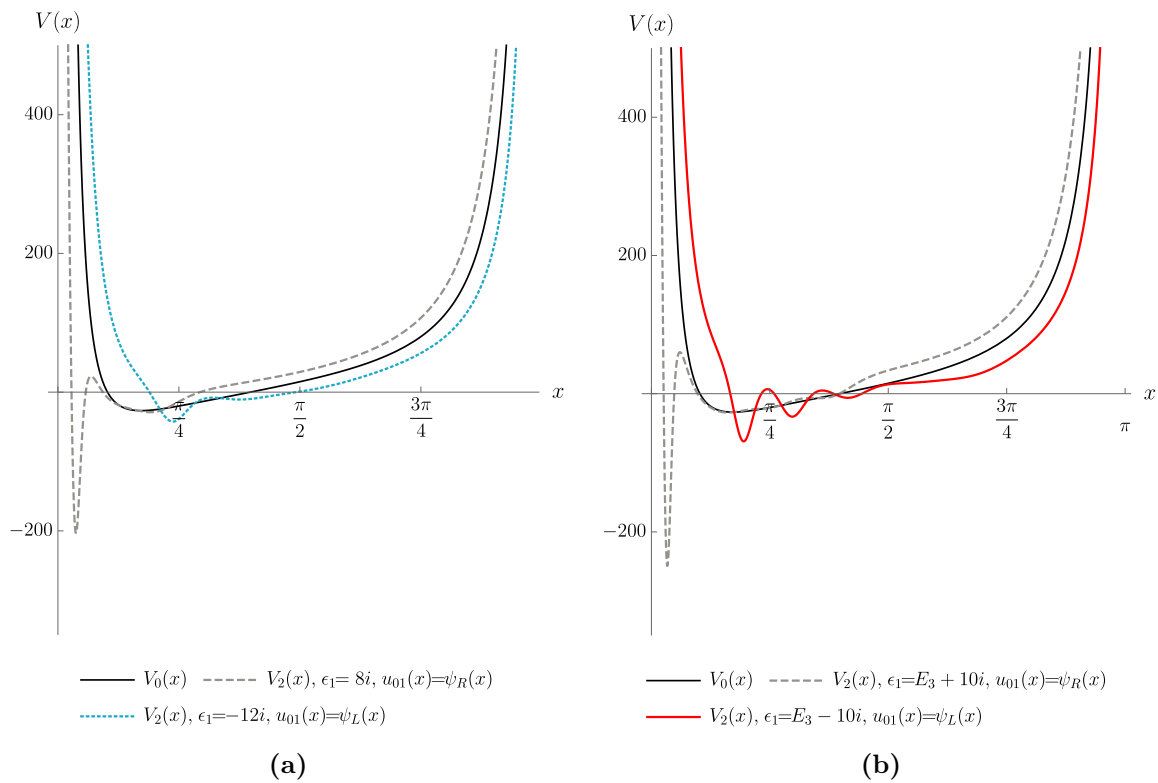


Figura 3.29. Potencial de Rosen-Morse trigonométrico ($a = 5$, $b = 50$) y sus socios supersimétricos de segundo orden generados usando una transformación con energías de factorización complejas y solución semilla ψ_L o ψ_R .

Capítulo 4

Observaciones finales y conclusiones

Las transformaciones supersimétricas de primero y segundo orden permiten generar nuevos Hamiltonianos con solución exacta a partir de un Hamiltoniano inicial dado. En este trabajo se consideraron este tipo de transformaciones aplicadas al potencial de Rosen-Morse trigonométrico. Es importante mencionar que algunas transformaciones particulares de primero y segundo orden aplicadas al potencial de Rosen-Morse trigonométrico habían sido estudiadas previamente [36]. En este trabajo no sólo se recuperaron los resultados obtenidos anteriormente [36], sino que además se estudiaron nuevos casos que no habían sido considerados previamente en la literatura. Esto se debió a la dificultad que implica el determinar las soluciones semilla apropiadas para implementar las transformaciones no singulares en este caso.

La primera parte del trabajo consistió en obtener una base apropiada para expresar la solución general de la ecuación de Schrödinger estacionaria para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico. El objetivo de elegir la base del espacio de soluciones de tal ecuación en la forma aquí reportada fue para obtener elementos que nos permitieran identificar ciertas características de la solución, las cuales resultaron de gran utilidad en la identificación del número de ceros y los comportamientos asintóticos en las vecindades de los extremos del dominio de definición del potencial. Se obtuvieron también los parámetros a partir de los cuales se simplifica grandemente la identificación de tales características en las soluciones, con lo cual la elección apropiada de las soluciones semilla para implementar las diferentes transformaciones de primero y segundo orden se vuelve más sencilla. El conjunto de soluciones que se consideró como base del espacio está formado por las dos funciones linealmente independientes $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$, las cuales se caracterizan por tender a cero en los extremos derecho e izquierdo del dominio del potencial, respectivamente, mientras que en el extremo opuesto presentan un comportamiento divergente. Además de lo anterior, se logró caracterizar en general el número de nodos de las soluciones $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ como función del parámetro energía. Al expresar la solución general como combinación lineal de las funciones $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$, las constantes de tal combinación se convierten en parámetros importantes que permiten caracterizar el número de ceros de la misma.

Una vez que se tiene la base apropiada del espacio solución, se consiguió implementar las transformaciones supersimétricas con soluciones semilla diferentes de los *eigenestados* del Hamiltoniano inicial, lo cual generaliza los resultados que ya habían sido obtenidos previamente [36]. La solución general expresada en términos de $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ permite identificar de manera simple y directa las soluciones semilla con los comportamientos adecuados para implementar diversas transformaciones de segundo orden que no habían sido consideradas con anterioridad en la literatura, debido a la dificultad que esto implicaba. En este trabajo hemos explorado a fondo los diferentes tipos de transformaciones de primero y segundo orden que se pueden llevar a cabo para el potencial de Rosen-Morse trigonométrico, excepto cuando se utilizan soluciones semilla no físicas en el caso de segundo orden confluyente.

Las diferentes transformaciones analizadas involucran algunos parámetros, como las energías de factorización, que al ser modificadas nos permiten manipular el espectro del Hamiltoniano inicial generando un nuevo Hamiltoniano cuyo espectro es similar al inicial excepto por los pequeños cambios que las energías de factorización generan. En el presente trabajo se discutió el efecto que cada transformación considerada genera en el nuevo potencial. Para algunos casos, además de las energías de factorización, las constantes de la combinación lineal de las soluciones semilla constituyen parámetros adicionales que caracterizan al nuevo potencial.

Los diferentes potenciales obtenidos en este trabajo describen una interacción de corto alcance, al igual que el potencial inicial. Lo anterior significa que tales potenciales podrían usarse también en la mayoría de las situaciones físicas descritas en la introducción. En particular, podrían usarse como modelos de confinamiento de quarks en Cromodinámica Cuántica, para sistemas en los cuales aunque el potencial de Rosen-Morse trigonométrico proporciona una buena aproximación, el tener parámetros adicionales podría representar alguna ventaja. En comparación con los potenciales de Rosen-Morse trigonométricos, los parámetros libres adicionales que sus socios supersimétricos poseen podrían usarse para ajustar mejor las cantidades físicas bajo estudio (ver por ejemplo [62]). Esperamos que estas ideas sean de alguna utilidad para los lectores interesados en mecánica cuántica supersimétrica y sus aplicaciones físicas.

Análisis asintótico de las soluciones de la ecuación de Schrödinger

A continuación se presenta un análisis del comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación estacionaria de Schrödinger (2.3) en los extremos del dominio del potencial $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow \pi$. Al reescribir la ecuación (2.3) en la forma

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \left[\frac{a(a+1)}{2} \csc^2(x) - b \cot(x) - E \right] \psi(x) = 0, \quad (1)$$

notamos que, de los términos que multiplican a $\psi(x)$ en la ecuación diferencial anterior, el que contiene a la función $\csc^2(x)$ es dominante cuando $x \rightarrow 0$ ó $x \rightarrow \pi$, por lo que en ambos extremos la forma asintótica de tal ecuación es

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \left[\frac{a(a+1)}{2} \csc^2(x) \right] \psi(x) = 0, \quad (2)$$

la cual tiene como soluciones $\sin^{a+1}(x)$ y $\sin^{-a}(x)$. Esto implica que los posibles comportamientos asintóticos de las soluciones de la ecuación (2.3) están dados por:

$$\psi(x) \underset{x \rightarrow 0, \pi}{\longrightarrow} \sin^{a+1}(x), \quad \psi(x) \underset{x \rightarrow 0, \pi}{\longrightarrow} \sin^{-a}(x). \quad (3)$$

Para incorporar esta información en el análisis asintótico de las soluciones dadas en la ecuación (2.22) comencemos por analizar lo que ocurre con las soluciones $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$.

En las expresiones (2.14) y (2.18) las soluciones $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ están expresadas como la suma de dos términos, cada uno de los cuales tiene un factor con alguna de las formas asintóticas dadas en la ecuación (3). Los términos que aparecen en las sumas para $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ son ambos de la forma

$$g_1(x) = e^{-\left[\frac{\mu}{2} - i(\nu+a)\right]x} \sin^{a+1}(x) {}_2F_1 \left(\nu + a, a + 1 + \frac{i\mu}{2}; \nu + \frac{i\mu}{2}; e^{2ix} \right), \quad (4)$$

$$g_2(x) = e^{\left[\frac{\mu}{2} + i(1-\nu-a)\right]x} \sin^{-a}(x) {}_2F_1 \left(1 - \nu - a, -a - \frac{i\mu}{2}; 2 - \nu - \frac{i\mu}{2}; e^{2ix} \right). \quad (5)$$

En $g_1(x)$ y $g_2(x)$ se tienen aislados los términos que corresponden a los posibles comportamientos asintóticos de las soluciones de la ecuación (2.3), por lo que es importante ahora analizar el comportamiento de los factores restantes en ambos extremos. Comencemos por notar que los dos factores exponenciales que aparecen en $g_1(x)$ y $g_2(x)$ tienden a valores finitos en \mathbb{C} , por lo que las posibles divergencias en las soluciones no están relacionadas con estos términos. Analicemos ahora lo que ocurre con las series hipergeométricas que aparecen en $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$. Notemos que dichas series son convergentes en todo el dominio de definición del potencial, lo cual no es suficiente para el propósito de este trabajo. Para poder usar tales soluciones es necesario verificar que el comportamiento divergente que presentan $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ cuando $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow \pi$, respectivamente, se encuentra aislado en el factor $\sin^{-a}(x)$ y que su comportamiento asintóticamente nulo en el otro extremo del dominio está contenido en el factor $\sin^{a+1}(x)$. Para poder hacer este análisis necesitamos la siguiente propiedad de las series hipergeométricas

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} {}_2F_1(A, B; C; \chi) = \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)}, \quad \text{Re}(C-A-B) > 0. \quad (6)$$

Notemos que para las series que estamos analizando $\chi = e^{2ix}$ (ver ecuaciones (4) y (5)). Entonces, podemos usar la ecuación (6) para estudiar el comportamiento cuando $x \rightarrow 0, \pi$ de $\psi_R(x)$ y $\psi_L(x)$ (ver expresiones (2.14) y (2.18)). Comencemos por analizar $\psi_L(x)$. Para ello, lo primero que hacemos es transformar las series hipergeométricas que aparecen en la misma a una forma apropiada para usar el límite (6). Aplicando una transformación lineal a la serie hipergeométrica del primer término de $\psi_L(x)$ tenemos que tal solución se puede reescribir en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \psi_L(x) = \sin^{-a}(x) & \left[\left(\frac{i}{2}\right)^{2a+1} \kappa_L(\mu) e^{\left[-\frac{\mu}{2} + i(\nu-a-1)\right]x} {}_2F_1\left(\nu-a-1, -a + \frac{i\mu}{2}; \nu + \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right) \right. \\ & \left. + \rho_L(\mu) e^{\left[\frac{\mu}{2} + i(1-\nu-a)\right]x} {}_2F_1\left(1-\nu-a, -a - \frac{i\mu}{2}; 2-\nu - \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

En ambas series hipergeométricas tenemos que $\text{Re}(C-A-B) = 2a+1 > 0$, por lo que en la expresión anterior para $\psi_L(x)$ se puede usar ya la ecuación (6) para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 0, \pi} {}_2F_1\left(\nu-a-1, -a + \frac{i\mu}{2}; \nu + \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right) = \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma\left(\nu + \frac{i\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+a + \frac{i\mu}{2}\right)\Gamma(a+\nu)}, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, \pi} {}_2F_1\left(1-a-\nu, -a - \frac{i\mu}{2}; 2-\nu - \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right) = \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma\left(2-\nu - \frac{i\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+a - \frac{i\mu}{2}\right)\Gamma(2+a-\nu)}. \quad (9)$$

Así, al considerar estos límites en $\psi_L(x)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \sin^a(x) \psi_L(x) &= \left[\left(\frac{i}{2} \right)^{2a+1} \kappa_L(\mu) \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(\nu+i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a+i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+\nu)} + \rho_L(\mu) \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(2-\nu-i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a-i\frac{\mu}{2})\Gamma(2+a-\nu)} \right] \\
&= \left(\frac{i}{2} \right)^{2a+1} \left[\frac{\Gamma(2a+2)\Gamma(1-\nu-i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(a+1-i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+2-\nu)} \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(\nu+i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a+i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+\nu)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(2a+2)\Gamma(\nu+i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(a+1-i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+2-\nu)} \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(1-\nu-i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a-i\frac{\mu}{2})\Gamma(2+a-\nu)} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

con lo cual no obtenemos información del comportamiento de la solución para $x \rightarrow 0$. Sin embargo, recordemos que existe una expresión equivalente para $\psi_L(x)$ (ver ecuación (2.13)). Al considerar esta expresión, identificando en la serie hipergeométrica la variable $\chi = 2ie^{-ix} \sin(x)$, para $x \rightarrow 0$ se tiene que $\chi \rightarrow 0$ por lo que para la serie hipergeométrica se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} {}_2F_1 \left(\nu + a, a + 1 - \frac{i\mu}{2}; 2a + 2; 2ie^{-ix} \sin(x) \right) &= {}_2F_1 \left(\nu + a, a + 1 - \frac{i\mu}{2}; 2a + 2; 0 \right) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{11}$$

Considerando este resultado podemos determinar lo que ocurre con la solución $\psi_L(x)$ para $x \rightarrow 0$, lo cual nos conduce a lo siguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \psi_L(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-[\frac{\mu}{2}+i(\nu+a)]x} \sin^{a+1}(x) {}_2F_1 \left(\nu + a, a + 1 - \frac{i\mu}{2}; 2a + 2; 2ie^{-ix} \sin(x) \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Por otra parte, para analizar lo que ocurre con $\psi_L(x)$ en la vecindad de π retomamos la expresión que usamos en la ecuación (10) y los límites que aparecen en las expresiones (8)

y (9), con lo cual se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi} \sin^a(x) \psi_L(x) &= \left[\left(\frac{i}{2} \right)^{2a+1} \kappa_L(\mu) e^{[-\frac{\mu}{2} + i(\nu-a-1)]\pi} \frac{\Gamma(2a+1) \Gamma(\nu + i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a + \frac{i\mu}{2}) \Gamma(a+\nu)} \right. \\
&\quad \left. - \rho_L(\mu) e^{[\frac{\mu}{2} + i(1-\nu-a)]\pi} \frac{\Gamma(2a+1) \Gamma(2-\nu - i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a - \frac{i\mu}{2}) \Gamma(2+a-\nu)} \right] \\
&= \left(\frac{i}{2} \right)^{2a+1} \left[\frac{\Gamma(2a+2) \Gamma(1-\nu - i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(a+1 - i\frac{\mu}{2}) \Gamma(a+2-\nu)} \frac{\Gamma(2a+1) \Gamma(\nu + i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a + \frac{i\mu}{2}) \Gamma(a+\nu)} e^{[-\frac{\mu}{2} + i(\nu-a-1)]\pi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(2a+2) \Gamma(\nu + i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(a+1 + i\frac{\mu}{2}) \Gamma(a+\nu)} \frac{\Gamma(2a+1) \Gamma(1-\nu - i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a - \frac{i\mu}{2}) \Gamma(2+a-\nu)} e^{[\frac{\mu}{2} + i(1-\nu-a)]\pi} \right] \\
&= \left(\frac{1}{4} \right)^a \frac{\Gamma(2a+2) \Gamma(2a+1)}{\Gamma(a+1 + i\frac{\mu}{2}) \Gamma(1+a - \frac{i\mu}{2}) \Gamma(a+\nu) \Gamma(2+a-\nu)}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Este límite produce una constante en general compleja (para $E \in \mathbb{C}$) que llamaremos $\varkappa(\mu, \nu, a)$, la cual depende de a , μ , ν y estas últimas a su vez dependen de b y E . Como podemos notar, la naturaleza real o compleja de la constante $\varkappa(\mu, \nu, a)$ depende de las expresiones para μ , ν y de si el parámetro E es real o complejo. Al considerar $E \in \mathbb{R}$, la constante $\varkappa(\mu, \nu, a)$ es real por lo que el límite de $\psi_L(x)$ para $x \rightarrow \pi$ en este caso es

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \psi_L(x) = \text{sgn}(\varkappa(\mu, \nu, a)) \infty. \quad (14)$$

De las expresiones (12) y (14) verificamos que el comportamiento asintótico de la solución $\psi_L(x)$ es el que buscábamos. Ahora analizaremos el comportamiento de $\psi_R(x)$, para lo cual conviene reescribirla como sigue

$$\begin{aligned}
\psi_R(x) &= \sin^{-a}(x) \left[\left(\frac{i}{2} \right)^{2a+1} \kappa_R(\mu) e^{[-\frac{\mu}{2} + i(\nu-a-1)]x} {}_2F_1\left(\nu-a-1, -a + i\frac{\mu}{2}; \nu + \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right) \right. \\
&\quad \left. + \rho_R(\mu) e^{[\frac{\mu}{2} + i(1-\nu-a)]x} {}_2F_1\left(1-\nu-a, -a - \frac{i\mu}{2}; 2-\nu - \frac{i\mu}{2}; e^{2ix}\right) \right]. \quad (15)
\end{aligned}$$

La expresión anterior nos permite hacer un análisis similar al que se hizo para $\psi_L(x)$ usando la información de los límites que se calcularon en las expresiones (8) y (9). Comencemos

considerando $x \rightarrow 0$ en la función $\sin^a(x)\psi_R(x)$, para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sin^a(x)\psi_R(x) &= \left(\frac{i}{2}\right)^{2a+1} \kappa_R(\mu) \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(\nu+i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a+i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+\nu)} - \rho_R(\mu) \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(2-\nu-i\frac{\mu}{2})}{\Gamma(1+a-i\frac{\mu}{2})\Gamma(2+a-\nu)} \\ &= \frac{\Gamma(2a+2)\Gamma(2a+1)\Gamma(\nu-i\frac{\mu}{2})\Gamma(\nu+i\frac{\mu}{2})\Gamma(1-\nu-i\frac{\mu}{2})\Gamma(1-\nu+i\frac{\mu}{2})}{(2)^{2a+1}\Gamma(a+1-i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+1+i\frac{\mu}{2})\Gamma(a+2-\nu)\Gamma(a+\nu)} [\cos(2\nu\pi) - \cosh(\mu\pi)] \\ &= \varkappa(\mu, \nu, a) \frac{\Gamma(\nu-i\frac{\mu}{2})\Gamma(\nu+i\frac{\mu}{2})\Gamma(1-\nu-i\frac{\mu}{2})\Gamma(1-\nu+i\frac{\mu}{2})}{2} [\cos(2\nu\pi) - \cosh(\mu\pi)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Usando este resultado podemos calcular el comportamiento asintótico de $\psi_R(x)$ cuando $x \rightarrow 0$ para obtener lo siguiente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_R(x) = \operatorname{sgn} \left(\varkappa(\mu, \nu, a) \frac{\Gamma(\nu-i\frac{\mu}{2})\Gamma(\nu+i\frac{\mu}{2})\Gamma(1-\nu-i\frac{\mu}{2})\Gamma(1-\nu+i\frac{\mu}{2})}{2} [\cosh(\mu\pi) - \cos(2\nu\pi)] \right) \infty. \quad (17)$$

Al analizar la expresión anterior podemos notar que el signo del límite se reduce al signo de la constante $\varkappa(\mu, \nu, a)$, debido a que el producto de los otros factores que aparecen en dicha expresión es positivo así que lo único que aporta información al argumento de la función signo es la constante $\varkappa(\mu, \nu, a)$. Por tanto, podemos omitir los otros términos de dicho argumento y reescribir el límite de la siguiente forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_R(x) = \operatorname{sgn}(\varkappa(\mu, \nu, a)) \infty. \quad (18)$$

Para completar el análisis nos falta estudiar el comportamiento de $\psi_R(x)$ cuando $x \rightarrow \pi$ para lo cual, al igual que en el caso de $\psi_L(x)$ con $x \rightarrow 0$, consideramos una expresión alternativa para $\psi_R(x)$ en la vecindad de $x = \pi$. Tal expresión es la que aparece en la primera línea de la ecuación (2.17). La serie hipergeométrica que aparece en esa expresión de $\psi_R(x)$ tiene como variable $\chi = -2ie^{ix} \sin(x)$, que en el caso límite cuando $x \rightarrow \pi$ equivale a considerar $\chi \rightarrow 0$ por lo que el límite de la serie es

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} {}_2F_1 \left(\nu + a, a + 1 + \frac{i\mu}{2}; 2a + 2; -2ie^{ix} \sin(x) \right) &= {}_2F_1 \left(\nu + a, a + 1 + \frac{i\mu}{2}; 2a + 2; 0 \right) \\ &= 1, \end{aligned} \quad (19)$$

lo cual nos permite concluir que $\psi_R(x)$ tiende a cero en la vecindad de $x = \pi$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \psi_R(x) = 0. \quad (20)$$

En las ecuaciones (12), (14), (18) y (20) reunimos la información de los comportamientos asintóticos de las soluciones $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ que usamos como base para expresar las soluciones de la ecuación (2.3).

Notemos que, si bien los resultados de las expresiones (14) y (18) son válidos sólo para $E \in \mathbb{R}$, las expresiones (12) y (20) son válidas también para $E \in \mathbb{C}$, por lo que además encontramos que $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ tienen los comportamientos requeridos en el caso complejo para alcanzar los propósitos de este trabajo.

Bibliografía

1. W. Miller, *Lie theory and special functions* (Academic Press, New York, 1968)
2. O.L. de Lange and R.E. Raab, *Operator methods in quantum mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1991)
3. F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. **251** (1995) 267-385
4. G. Junker, *Supersymmetric methods in quantum, statistical and solid state physics* (IOP Publishing Ltd, Bristol, 2019).
5. B.K. Bagchi, *Supersymmetry in quantum and classical mechanics* (Chapman & Hall, New York, 2001)
6. D.J. Fernández and N. Fernández-García, AIP Conf. Proc. **744** (2005) 236-273
7. D.J. Fernández, AIP Conf. Proc. **1287** (2010) 3-36
8. D.J. Fernández, in *Integrability, Supersymmetry and Coherent States. CRM Series in Mathematical Physics*. S. Kuru, J. Negro, L.M. Nieto (eds.) (Springer, Cham, 2019) pp. 37-68
9. A.A. Andrianov, N.V. Borisov and M.V. Ioffe, Theor. Math. Phys. **61** (1984) 1078-1088
10. V.G. Bagrov and B.F. Samsonov, Phys. Part. Nucl. **28** (1997) 374-397
11. B.N. Zakhariev and V.M. Chabanov, Inverse Problems **13** (1997) R47-R79
12. D.J. Fernández and H.C. Rosu, Phys. Scr. **64** (2001) 177-183
13. M.L. Glasser, L.M. Nieto and B.F. Samsonov, J. Phys. A **36** (2003) L585-L591
14. A.A. Andrianov and F. Cannata, J. Phys. A **37** (2004) 10297-10321
15. D.J. Fernández and B. Roy, Phys. Scr. **95** (2020) 055210
16. N. Rosen and P.M. Morse, Phys. Rev. **42** (1932) 210-217
17. R. Ko and M. Koca, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 8105-8112
18. D.E. Alvarez-Castillo, C.B. Compeán and M. Kirchbach, Mol. Phys. **109** (2011) 1477-1483
19. S. Kuru, J. Negro and L.M. Nieto, J. Phys.: Condens. Matter **21** (2009) 455305
20. D.J. Fernández, J.D. Garcia M. and D. O-Campa, J. Phys. A: Math. Theor. **53** (2020) 435202
21. D.J. Fernández, J.D. Garcia M. and D. O-Campa, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021) 245302
22. C.B. Compeán and M. Kirchbach, Eur. Phys. J. A **33** (2007) 1-4
23. M. Abu-Shady and S.Y. Ezz-Alarab, Few-Body Syst. **60** (2019) 66
24. A.B. Brzo and D. Alvarez-Castillo, Mod. Phys. Lett. A **36** (2021) 2150095
25. D.J. Fernández, V. Hussin and O. Rosas-Ortiz, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 6491-6511
26. A. Chenaghlou and O. Faizy, J. Math. Phys. **49** (2008) 022104
27. K. Zelaya, S. Dey and V. Hussin, Phys. Lett. A **382** (2018) 3369-3375
28. S. Garneau-Desroches and V. Hussin, J. Phys. A **54** (2021) 475201

29. L.M. Nieto, M. Santander and H.C. Rosu, *Mod. Phys. Lett. A* **14** (1999) 2463-2469
30. D.J. Fernández, M.L. Glasser and L.M. Nieto, *Phys. Lett. A* **240** (1998) 15-20
31. D.J. Fernández, V. Hussin and B. Mielnik, *Phys. Lett. A* **244** (1998) 309-316
32. D.J. Fernández and V. Hussin, *J. Phys. A* **32** (1999) 3603-3619
33. A. Contreras-Astorga and D.J. Fernández, *J. Phys. A* **41** (2008) 475303
34. D.T. Barclay and C.J. Maxwell, *Phys. Lett. A* **157** (1991) 357-360
35. C.B. Compean and M. Kirchbach, *J. Phys. A* **39** (2006) 547-557
36. S. Domínguez-Hernández and D.J. Fernández, *Int. J. Theor. Phys.* **50** (2011) 1993-2001
37. H. Gasperín, *Tratamiento supersimétrico de los potenciales de Rosen-Morse*, M.Sc. Thesis, Cinvestav-IPN, México, 2013
38. R. Reyes, D.J. Fernández and H. Gasperín, in *Quantum Theory and Symmetries. CRM Series in Mathematical Physics*. M.B. Paranjape, R. MacKenzie, Z. Thomova, P. Winternitz y W. Witczak-Krempa (eds.) (Springer, Cham, 2021) pp. 235-243
39. E. Witten, *Nucl. Phys. B* **188** (1981) 513
40. B. Mielnik, *J. Math. Phys.* **25** (1984) 3387
41. A.A. Andrianov, M.V. Ioffe and V. Spiridonov, *Phys. Lett. A* **174** (1993) 273-279
42. A.A. Andrianov, M.V. Ioffe, F. Cannata and J.P. Dedonder, *Int. J. Mod. Phys. A* **10** (1995) 2683-2702
43. D.J. Fernández, *Int. J. Mod. Phys. A* **12** (1997) 171-176
44. B.F. Samsonov, *Phys. Lett. A* **263** (1999) 274-280
45. M. Plyushchay, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 3679-3698
46. H. Aoyama, M. Sato and T. Tanaka, *Nucl. Phys. B* **619** (2001) 105-127
47. M. Plyushchay, *J. Phys. A* **37** (2004) 10375-10384
48. D.J. Fernández and E. Salinas-Hernández, *J. Phys. A* **36** (2003) 2537-2543
49. D. Bermudez, D.J. Fernández and N. Fernández-García, *Phys. Lett. A* **336** (2012) 692-696
50. D.J. Fernández and E. Salinas-Hernández, *Phys. Lett. A* **338** (2005) 13-18
51. D.J. Fernández and E. Salinas-Hernández, *J. Phys. A* **44** (2011) 365302
52. F. Correa, V. Jakubsky and M. Plyushchay, *Phys. Rev. A* **92** (2015) 023839
53. Y. Grandati and C. Quesne, *SIGMA* **11** (2015) 061
54. A. Contreras-Astorga and A. Schulze-Halberg, *Ann. Phys.* **354** (2015) 353-364
55. D. Bermudez, *Ann. Phys.* **364** (2016) 35-52
56. A. Contreras-Astorga and A. Schulze-Halberg, *J. Phys. A* **50** (2017) 105301
57. D.J. Fernández, R. Muñoz and A. Ramos, *Phys. Lett. A* **308** (2003) 11-16
58. H. Bateman, *Higher transcendental functions Vol.1*, (McGraw-Hill, New York, 1953)
59. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (Dover Publications, New York, 1964), p.555
60. N.N. Lebedev and R.A. Silverman, *Special Functions and Their Applications*, Rev. English ed., transl. and ed. By R. A. Silverman (Dover Publications, New York, 1972), p.238
61. D. J. Fernández and R. Reyes, *Phys. Scr.* **96** (2021) 125250
62. E. Drigo-Filho and J.R. Ruggiero, *Phys. Rev. E* **56** (1997) 4486-4488