Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

Operadores de Toeplitz radiales en espacios de funciones armónicas

Tesis que presenta

Jonathan Arturo Hernández Hermida

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas

Directora de la tesis

Maribel Loaiza Leyva

Ciudad de México **Agosto de 2021**

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Maribel Loaiza Leyva sus observaciones y sugerencias en el desarrollo y conclusión de este trabajo.

Gracias a mi familia por su cariño, comprensión y paciencia.

Gracias a mis amigos por su compañía y apoyo.

Gracias a todos los profesores que han participado en mi desarrollo académico y profesional.

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional por su apoyo y patrocinio proporcionado para la realización de esta tesis y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca 315060 con registro 255643, proporcionada a través del Programa Nacional de Posgrados de Calidad.

Resumen

En este trabajo, estudiamos los operadores radiales que actúan en el espacio de Bergman pluriarmónico con peso en la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$. Vemos que el álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz radiales acotados es isométricamente isomorfa a la cerradura topológica del conjunto de sus sucesiones de valores propios. Resulta que dicha álgebra C^* coincide con la generada por las sucesiones lentamente oscilantes, es decir, sucesiones que son uniformemente continuas con respecto a la métrica logarítmica. Esta tesis se basa principalmente en los artículos [6], [8], [11], [14], [16], [22] y [25].

Abstract

In this work, we study radial operators acting on the pluriarmonic Bergman space with weight in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. We see that the C^*-álgebra generated by bounded radial Toeplitz operators is isometrically isomorphic to the topological closure of the set of its sequences of eigenvalues. It turns out that this C^*-álgebra coincides with the one generated by slowly oscillating sequences, that is, sequences that are uniformly continuous with respect to the logarithmic metric. This thesis is mainly based on the articles [6], [8], [11], [14], [16], [22] and [25].

Contenido

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

1.1. Álgebras C^* 3
1.2. Operadores de multiplicación 6
1.3. Funciones armónicas en $\mathbb{C}^n$ 15
1.4. Armónicos esféricos 18
1.5. Funciones pluriarmónicas 27

2. Espacios de Bergman **31**

2.1. Espacios de Bergman analítico y anti-analítico sobre $\mathbb{D}$ 31
2.2. Espacio de Bergman armónico sobre $\mathbb{D}$ 33
2.3. Espacio de Bergman armónico sobre $\mathbb{B}^n$ 38
2.4. Espacio de Bergman pluriarmónico sobre $\mathbb{B}^n$ con peso 44

3. Operadores radiales en el espacio de Bergman armónico **53**

3.1. Operadores radiales y de Toeplitz 53
3.2. Compacidad de operadores radiales 57
3.3. Compacidad de operadores de Toeplitz radiales 59
3.3.1. En el espacio de Bergman armónico sobre $\mathbb{B}^n$ 64

4. Valores propios de operadores de Toeplitz radiales **71**

4.1. Espacio de sucesiones lentamente oscilantes 72
4.2. Sucesiones lentamente oscilantes y su relación con los operadores de Toeplitz radiales en el espacio de Bergman armónico 81

5. Operadores de Toeplitz con símbolo radial en el espacio de Bergman pluriarmónico **83**

5.1. Representación del espacio de Bergman pluriarmónico con peso 84
5.2. Operadores de Toeplitz radiales y sucesiones lentamente oscilantes 90

Bibliografía **95**

Introducción

En este trabajo estudiamos operadores radiales de Toeplitz actuando en el espacio de Bergman pluriarmónico con peso sobre la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$. Mostramos algunas propiedades de sus sucesiones de valores propios y describimos el álgebra C^* generada por las mismas. Resulta que dicha álgebra C^* coincide con las sucesiones lentamente oscilantes, es decir, sucesiones que son uniformemente continuas con respecto a la métrica logarítmica.

En el Capítulo 1 presentamos las propiedades básicas de las álgebras C^* y describimos las álgebras C^* generadas por operadores de multiplicación y por operadores normales. También estudiamos la descomposición homogénea de las funciones armónicas complejo valuadas en $\mathbb{C}^n$, la representación de $L^2(S^{2n-1})$ en términos de armónicos esféricos y propiedades de las funciones pluriarmónicas. Las referencias principales para este primer capítulo son [9], [4], [1] y [16].

En el Capítulo 2 establecemos la relación entre el espacio de Bergman pluriarmónico sobre la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$ y los espacios de Bergman analítico y anti-analítico. Comparamos sus respectivos núcleos reproductores y proyecciones de Bergman. Este capítulo tiene muchas similitudes y algunas diferencias con los trabajos [12] y [13] de Loaiza y Lozano.

Los criterios de compacidad para operadores radiales actuando en el espacio de Bergman armónico sobre el disco unitario de $\mathbb{C}$ los examinamos en el Capítulo 3 utilizando resultados de Lee en [11]. Vemos el concepto de radialización y probamos que un operador de Toeplitz es radial si y sólo si es un operador de Toepliz con símblo radial. Generalizamos los resultados de Korenblum y Zhu en [10] al trabajar con símbolos radiales en $L^1(\mathbb{D})$. Terminamos el capítulo revisando el trabajo de Miao en [14] acerca de los criterios de compacidad para operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado actuando en el espacio de Bergman armónico sobre la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$.

Un operador que actúa en el espacio de Bergman es radial si y sólo si se diagonaliza con respecto a la base canónica. Este hecho es establecido en [10] para el caso de operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado actuando en el espacio de Bergman analítico sobre el disco unitario por Korenblum y Zhu y en [14] para el caso de operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado actuando en el espacio de Bergman armónico sobre la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$ por Miao. Posteriormente, Zhou, Chen y Dong muestran este hecho para operadores radiales actuando en el espacio de Bergman analítico sobre la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$ en [24].

La diagonalización de operadores radiales implica que existe un isomorfismo isométrico entre los operadores radiales y sus sucesiones de valores propios. Grudsky, Maximenko y Vasilevski demuestran que dichos valores propios dependen sólamente del módulo del multi-índice en el caso del espacio de Bergman analítico sobre la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$ en [8]. Con ayuda de un resultado de Suárez [21], prueban que el álgebra C^* generada por las sucesiones de valores propios de los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado coincide con el conjunto de sucesiones acotadas que son lentamente oscilantes.

En el espacio de Bergman analítico sobre la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$, en [23], Vasilevski construye un operador unitario que reduce a cada operador de Toeplitz del álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado a un operador de multiplicación, proporcionándonos una representación tipo espectral y la mayoría de sus principales propiedades, como criterios de compacidad.

En el Capítulo 4 de esta tesis revisamos los resultados de Grudsky, Maximenko, Vasilevski, Bauer y Herrera sobre las sucesiones lentamente oscilantes en [8] y [3]. En el Capítulo 5, seguimos los métodos de Grudsky, Karapetyants y Vasilevski en [6] para construir un operador unitario que reduce a cada operador de Toeplitz del álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado que actúan en el espacio de Bergman pluriarmónico con peso sobre la bola unitaria de $\mathbb{C}^n$ a un operador de multiplicación. Se obtienen resultados análogos al caso analítico. Este capítulo está basado en los trabajos [6], [23] y [22].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y proposiciones fundamentales, así como la notación que empleamos en el desarrollo de capítulos siguientes. Comenzamos con algunas propiedades básicas de las álgebras C^* y algunos ejemplos, para continuar con las características espectrales del álgebra C^* de los operadores de multiplicación y del álgebra C^* generada por un operador normal. Para ver con mayor profundidad estos temas se sugiere consultar [4] y [9].

Posteriormente estudiaremos algunas propiedades de las funciones armónicas, los armónicos esféricos y las funciones pluriármonicas basándonos principalmente en [1] y [16].

1.1. Álgebras C^*

Un **álgebra** compleja es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{C}$ con una operación llamada multiplicación tal que para todo $x, y, z \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene

a) $x(yz) = (xy)z$,

b) $(x + y)z = xz + yz$, $z(x + y) = zx + zy$,

c) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

Si además A es un espacio de Banach, con respecto a una norma submultiplicativa; es decir, para todo $x, y \in A$,

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|;$$

decimos que A es un **álgebra de Banach**. Si esta álgebra tiene identidad multiplicativa de norma 1 diremos que es un **álgebra de Banach unitaria**.

Dadas dos álgebras A y B, un **homomorfismo** (de álgebras) es una función lineal $h\colon A \longrightarrow B$ que es **multiplicativa**; es decir, $h(xy) = h(x)h(y)$. Si $B = \mathbb{C}$ y $h \neq 0$, diremos que h es un **homomorfismo escalar**.

Si A es un álgebra de Banach, una **involución** es una función

$$\begin{array}{cccc} *\colon & A & \longrightarrow & A \\ & x & \mapsto & x^* := *(x) \end{array}$$

tal que para todo $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

a) $(x^*)^* = x$,

b) $(xy)^* = y^*x^*$,

c) $(\lambda x + y)^* = \overline{\lambda}x^* + y^*$.

Notemos que cuando A tiene identidad multiplicativa, $1^* = 1$, pues

$$1^*x = (1^*x)^{**} = (x^*1)^* = x^{**} = x.$$

En este caso, podemos identificar a $\mathbb{C}$ con el conjunto $\{\alpha 1 : \alpha \in \mathbb{C}\} \subseteq A$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha^* = (\alpha 1)^* = \overline{\alpha}1^* = \overline{\alpha}$.

Un **álgebra** C^* es un álgebra de Banach A con una función involución tal que para todo $x \in A$,

$$\|x^*x\| = \|x\|^2. \tag{1.1}$$

La función involución en un álgebra C^* es una isometría, lo cual se sigue de

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$$

y

$$\|x^*\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\|\|x^*\|.$$

Observemos que la condición (1.1) es equivalente a que para todo $x \in A$,

$$\|xx^*\| = \|x\|^2$$

pues

$$\|x\|^2 = \|x^*\|^2 = \|x^{**}x^*\| = \|xx^*\|.$$

Además, si x es invertible en un álgebra con identidad, entonces x^* también lo es y $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$, pues

$$x^*(x^{-1})^* = (x^{-1}x)^* = 1^* = 1 = (xx^{-1})^* = (x^{-1})^*x^*.$$

Recíprocamente, si x^* es invertible, entonces $x = x^{**}$ también lo es. Por lo tanto, $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)}$, donde $\sigma(x)$ es el **espectro** de x; es decir, el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $x - \lambda$ no es invertible.

Si $h\colon A \longrightarrow B$ es un homomorfismo (de álgebras) entre álgebras C^* y, para todo $x \in A$, $h(x^*) = h(x)^*$ diremos que h es un $*-$**homomorfismo**. Notemos que si $h\colon A \longrightarrow B$ es un $*-$isomorfismo, entonces $h^{-1}\colon B \longrightarrow A$ también lo es, pues dados $x \in A$ y $y \in B$ con $h(x) = y$, entonces

$$h^{-1}(y^*) = h^{-1}(h(x)^*) = h^{-1}(h(x^*)) = x^* = h^{-1}(y)^*.$$

Si $h\colon A \longrightarrow B$ es un $*-$homomorfismo, entonces $\sigma(h(x)) \subseteq \sigma(x)$ y $\|h(x)\| \leq \|x\|$. Esto implica que todo $*-$homomorfismo es continuo y todo $*-$isomorfismo es una isometría que preserva el espectro.

Si A es un álgebra C^* y B es una subálgebra de Banach de A la cual es cerrada bajo la operación involución, entonces B es un álgebra C^*. Se dirá que B es una **subálgebra** C^* de A.

El espacio de operadores acotados $\mathcal{B}(H)$ con H espacio de Hilbert es un álgebra C^* con unidad cuya función involución es la que a cada operador T le asocia su operador adjunto T^* y cuya norma está dada por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Si $\dim H = n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{B}(H)$ es $*-$isomorfo al álgebra C^* de las matrices $n \times n$ con la operación involución dada por la matriz transpuesta conjugada. También tenemos que el subespacio de operadores compactos $\mathcal{K}(H)$ es un álgebra C^* con la función involución de $\mathcal{B}(H)$ restringida y es unitaria si y sólo si H tiene dimensión finita.

Sea $X \neq \emptyset$ un espacio de Hausdorff compacto. El espacio de funciones continuas $C(X)$ es un álgebra C^* unitaria conmutativa con la operación involución que asocia a cada $f \in C(X)$ la función $\overline{f}$, donde $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ para cada $x \in X$ y cuya norma está dada por

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

En particular, si X es un conjunto finito con n elementos tenemos $C(X) = \mathbb{C}^n$ con la operación involución $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})$ y si $n = 1$, entonces obtenemos al álgebra C^* compleja más simple: $\mathbb{C}$ con involución $z \mapsto \overline{z}$.

En [4, Teorema 2.1] se muestra que toda álgebra unitaria conmutativa es $*-$isomorfa a $C(X)$ vía la transformada de Gelfand donde X es su espacio de ideales maximales dotado con la topología w^*.

Dado $X \neq \emptyset$, el espacio de funciones acotadas $l^\infty(X)$ es un álgebra C^* unitaria y conmutativa con la operación involución dada por $f \mapsto \overline{f}$ y norma definida por

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto no compacto, entonces el espacio de funciones continuas en X que se anulan en infinito:

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : \text{ para todo } \epsilon > 0, \{x \in X : \|f(x)\| \geq \epsilon\} \text{ es compacto}\}$$

es un álgebra C^* conmutativa sin identidad con la misma involución y norma que el caso anterior. En [4, Corolario 2.2] se muestra que toda álgebra conmutativa sin identidad es $*-$isomorfa a $C_0(X)$ vía la transformada de Gelfand donde X es su espacio de ideales maximales dotado con la topología w^*.

Dado (X, Σ, μ) es un espacio de medida, donde X es un conjunto no vacío, Σ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida en Σ. El conjunto (de equivalencias) de funciones acotadas casi en todas partes $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ es un álgebra C^* con involución dada por $f \mapsto \overline{f}$ y con la norma esencial:

$$\|f\| = \inf_{\mu(S)=0} \sup_{x\notin S} |f(x)|.$$

Esto equivale a decir que $\|f\|$ es el ínfimo de todas las constantes C tales que $|f(x)| \leq C$ casi en todas partes.

Cuando μ es la medida de Lebesgue y Σ es la $\sigma-$álgebra de Borel de X, escribiremos $L^\infty(X)$ en lugar de $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$.

Si A un álgebra C^*, una **representación** de A es una función $\rho\colon A \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, que es un $*-$homomorfismo para algún espacio de Hilbert H tal que $\rho(1) = 1$. Diremos en este caso que ρ es la representación de A en H.

Si A es una subálgebra C^* de $\mathcal{B}(H)$, entonces claramente la inclusión es una representación de A en H.

Además, toda álgebra C^* es $*-$isomorfa a una subálgebra C^* de $\mathcal{B}(H)$ para algún espacio de Hilbert H. La demostración se puede revisar en [4, Teorema 7.10] y [5, Teorema 2.6.1].

En la siguiente sección daremos más ejemplos de representaciones de álgebras C^*.

1.2. Álgebra C^* generada por operadores de multiplicación

En esta sección veremos una representación de $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, para ello recordemos que el espacio de las funciones medibles que son cuadrado integrales $L^2(X, \Sigma, \mu)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_X f\overline{g}\, d\mu$$

para $f, g \in L^2(X, \Sigma, \mu)$.

Cuando μ es la medida de Lebesgue y Σ es la $\sigma-$álgebra de Borel de X, escribimos $L^2(X)$ en lugar de $L^2(X, \Sigma, \mu)$.

Sea M_f el **operador de multiplicación con símbolo acotado** en el espacio de Hilbert $L^2(0, 1)$. Es decir,

$$\begin{array}{rccc} M_f\colon & L^2(0,1) & \longrightarrow & L^2(0,1) \\ & g & \mapsto & fg \end{array}$$

donde f es un elemento de $L^\infty(0, 1)$. El operador M_f es lineal y

$$\|M_f g\|^2 = \int\limits_0^1 |f(t)|^2 |g(t)|^2\, dt \leq \|f\|^2 \|g\|^2,$$

donde $\|f\|$ es la norma esencial de f. En este caso, $M_f \in \mathcal{B}(L^2(0, 1))$ con $\|M_f\| \leq \|f\|$.

El ejemplo anterior lo podemos generalizar tomando (X, Σ, μ) un espacio de medida, donde X es un conjunto no vacío, Σ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida en Σ. Se define M_f el operador de multiplicación con símbolo acotado en el espacio de Hilbert $L^2(X,\Sigma,\mu)$ por $M_f g = fg$ para $g \in L^2(X,\Sigma,\mu)$, donde $f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$. Entonces M_f es un operador lineal acotado de $L^2(X,\Sigma,\mu)$ con $\|M_f\| \leq \|f\|$, donde $\|f\|$ es la norma esencial de f.

En general no se tiene la igualdad $\|M_f\| = \|f\|$. Por ejemplo, si $X = [0,1]$, Σ es la $\sigma-$álgebra de Borel de X y μ coincide con la medida de Lebesgue en los elementos de Σ que no contengan a 0 y $\mu(S) = \infty$ si $0 \in S$, definimos $f = \chi_{\{0\}}$. Entonces $f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ con $\|f\| = 1$. Además, para todo $g \in L^2(X,\Sigma,\mu)$,

$$|g(0)|^2\mu(\{0\}) = \int\limits_X |g|^2\chi_{\{0\}}\, d\mu \leq \int\limits_X |g|^2\, d\mu < \infty,$$

por lo que $g(0) = 0$ para todo $g \in L^2(X,\Sigma,\mu)$. Esto implica que $M_f = 0$ y por lo tanto $\|M_f\| < \|f\|$.

Cuando (X,Σ,μ) es un espacio de medida $\sigma-$finito, entonces $\|M_f\| = \|f\|$: Sea $\epsilon > 0$, $S_\epsilon = \{x \in X : |f(x)| \geq \|f\| - \epsilon\}$ es medible y como μ es $\sigma-$finita, existe $S \subseteq S_\epsilon$ de medida finita con $\mu(S) > 0$. Sea $g = \frac{\chi_S}{\sqrt{\mu(S)}}$, entonces $g \in L^2(X,\Sigma,\mu)$ con $\|g\| = 1$ y

$$\|M_f g\|^2 = \int\limits_S \frac{|f|^2}{\mu(S)}\, d\mu \geq (\|f\| - \epsilon)^2.$$

Entonces, para todo $\epsilon > 0$, tenemos $\|M_f\| \geq \|f\| - \epsilon$ y por lo tanto $\|M_f\| \geq \|f\|$.

Si $M_f \colon L^2(X,\Sigma,\mu) \longrightarrow L^2(X,\Sigma,\mu)$ es el operador de multiplicación con símbolo acotado $f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$, entonces $M_f^* = M_{\overline{f}}$, donde $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ para $x \in X$, en particular, M_f es normal. Además, M_f es autoadjunto cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para casi todo $x \in X$ y unitario cuando $|f(x)| = 1$ para casi todo $x \in X$.

Definimos el **rango esencial** de f por

$$\mathrm{R}_{ess}(f) = \bigcap \big\{\overline{f(S)} : S \in \Sigma, \mu(X \backslash S) = 0\big\}.$$

Notemos que, para todo $f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$, $\|f\| = \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{R}_{ess}(f)} |\lambda|$, donde $\|f\|$ es la norma esencial de f. En particular, $\mathrm{R}_{ess}(f)$ es un conjunto compacto no vacío para todo $f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$.

Probaremos que $\sigma(M_f) = \sigma_{ap}(M_f) = \mathrm{R}_{ess}(f)$, donde $\sigma_{ap}(T)$ denota al **espectro aproximadamente puntual** de T; es decir, el conjunto de escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(X,\Sigma,\mu)$ cuyos elementos tienen norma 1 y $\lim\limits_{n\to\infty} (T - \lambda)g_n = 0$. La primera igualdad se obtiene del hecho de que M_f es normal. Si $\lambda \notin \mathrm{R}_{ess}(f)$, entonces existe $S \in \Sigma$ con $\mu(X \backslash S) = 0$ tal que $\lambda \notin \overline{f(S)}$. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \lambda| \geq \delta \tag{1.2}$$

para todo $x \in S$. Sea $g\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por $g(x) = \frac{1}{f(x)-\lambda}$ para $x \in X$. Por (1.2), g está bien definida casi en todas partes y $|g(x)| \leq \frac{1}{\delta}$ para todo $x \in S$. Esto implica que $g \in L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ con $\|g\| \leq \frac{1}{\delta}$. Además, $M_g(M_f - \lambda) = 1 = (M_f - \lambda)M_g$; es decir, $M_f - \lambda$ es invertible con inverso M_g. Por lo tanto $\lambda \notin \sigma(M_f)$.

Recíprocamente, si $\lambda \in \mathrm{R}_{ess}(f)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $S_n \in \Sigma$ tal que $0 < \mu(S_n) < \infty$ (μ es $\sigma-$finita) y

$$|f(x) - \lambda| < \frac{1}{n} \tag{1.3}$$

para todo $x \in S_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n = \frac{\chi_{S_n}}{(\mu(S_n))^{1/2}}$, entonces $f_n \in L^2(X, \Sigma, \mu)$ con

$$\|f_n\|^2 = \int_X \frac{\chi_{S_n}(x)}{\mu(S_n)}\, d\mu = \frac{1}{\mu(S_n)} \int_{S_n} d\mu = 1.$$

Además, utilizando (1.3),

$$\|(M_f - \lambda)f_n\|^2 = \int_X \frac{|f(x) - \lambda|^2 \chi_{S_n}(x)}{\mu(S_n)}\, d\mu = \frac{1}{\mu(S_n)} \int_{S_n} |f(x) - \lambda|^2\, d\mu < \frac{1}{n^2}.$$

Es decir, $\lim\limits_{n \to \infty} (M_f - \lambda)f_n = 0$. Esto implica $\lambda \in \sigma_{ap}(M_f)$. Por lo tanto,

$$\sigma(M_f) = \sigma_{ap}(M_f) = \mathrm{R}_{ess}(f).$$

Sea $M = M_f$ el operador de multiplicación en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ con símbolo $f(x) = e^{ix}$ para $x \in X$. Entonces M es unitario, $\sigma(M) = S^1$ y su conjunto de valores propios $\sigma_p(M)$ es vacío. En efecto, M es un operador lineal suprayectivo pues es invertible con inverso M_g donde $g(x) = e^{-ix}$ para $x \in X$. Además, M es isometría pues

$$\|Mh\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |Mh(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |e^{ix}|^2 |h(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2\, dx = \|h\|^2$$

para todo $h \in L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto M es unitario.

Por otro lado, λ es valor propio de M si y sólo si existe $h \neq 0$ en $L^2(\mathbb{R})$ tal que $e^{ix}h(x) = \lambda h(x)$ para casi todo $x \in X$. Como $e^{ix} = \lambda$ sólo en un conjunto numerable de $\mathbb{R}$, entonces $h(x) = 0$ para casi todo $x \in X$. Por lo tanto M no tiene valores propios. Finalmente $\sigma(M) = S^1$.

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Si $\rho\colon L^{\infty}(X, \Sigma, \mu) \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(X, \Sigma, \mu))$ es la función definida por $\rho(f) = M_f$ para $f \in L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$, donde M_f es el operador de multiplicación con símbolo f, entonces ρ es una representación de $L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ en $L^2(X, \Sigma, \mu)$.

Recordemos que dados X un conjunto no vacío, Σ una $\sigma-$álgebra de X y H un espacio de Hilbert, una **medida espectral** en (X, Σ, H) es una función $E\colon \Sigma \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $E(S)$ es una proyección ortogonal para cada $S \in \Sigma$,

b) $E(\emptyset) = 0$,

c) $E(X) = 1$,

d) $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2)$ para todos $S_1, S_2 \in \Sigma$,

e) Si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ es una sucesión de conjuntos disjuntos a pares, entonces

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} E(S_n),$$

donde el límite de la última expresión se toma en la topología fuerte de operadores. Los detalles de la existencia de dicho límite, así como la demostración de los siguientes resultados pueden consultarse en [9, Sección 4.1].

Si E es una medida espectral en (X, Σ, H) y $x, y \in H$, entonces

$$E_{x,y}(S) = \langle E(S)x, y\rangle$$

define una medida compleja en Σ con una variación total menor o igual que $\|x\|\|y\|$. En este caso se puede definir la integral de funciones $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ acotadas y $\Sigma-$medibles en el sentido débil:

$$\left\langle \left(\int_X f\, dE\right) x, y\right\rangle = \int_X f\, dE_{x,y},$$

la cual resulta ser el único operador en $\mathcal{B}(H)$ tal que si $\epsilon > 0$ y $\{S_1, \ldots, S_k\} \subseteq \Sigma$ es una partición de X tal que para todo k, $\sup\limits_{s,t\in S_k} |f(s) - f(t)| < \epsilon$, entonces para cualquier selección de $t_k \in S_k$,

$$\left\| \int_X f\, dE - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)E(S_k)\right\| < \epsilon.$$

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma-$finito sobre la $\sigma-$álgebra de Borel y $M_f\colon L^2(X, \Sigma, \mu) \longrightarrow L^2(X, \Sigma, \mu)$ el operador de multiplicación con símbolo acotado f. Entonces la medida espectral asociada a M_f está dada por $E(S) = M_{\chi_{f^{-1}(S)}}$ para $S \subseteq \mathrm{R}_{ess}(f)$.

En efecto, en [9] se puede ver que E es una medida espectral. Veamos que ésta es la medida espectral asociada a M_f; es decir,

$$M_f = \int z\, dE(z). \tag{1.4}$$

Notemos que $\chi_{f^{-1}(S)} = \chi_S \circ f$. Sean $g, h \in L^2(X, \Sigma, \mu)$ y $S \in \Sigma$, entonces

$$\int \chi_S\, dE_{g,h} = E_{g,h}(S) = \langle E(S)g, h\rangle = \langle M_{\chi_S \circ f}(g), h\rangle = \int (\chi_S \circ f) g\overline{h}\, d\mu.$$

Como $S \in \Sigma$ fue arbitrario,

$$\int \phi \, dE_{g,h} = \int (\phi \circ f) g\overline{h} \, d\mu \tag{1.5}$$

para toda función simple ϕ y por lo tanto para toda función Borel medible acotada en $\sigma(M_f) = \mathrm{R}_{ess}(f)$. En particular, para la función $\phi(z) = z$ se tiene

$$\int z \, dE_{g,h}(z) = \int f(z)g(z)\overline{h(z)} \, d\mu(z),$$

es decir,

$$\left\langle \Big(\int z \, dE(z) \Big) g, h \right\rangle = \langle M_f g, h \rangle = \langle M_f g, h \rangle.$$

Como $g, h \in L^2(X, \Sigma, \mu)$ fueron arbitrarios, esto prueba (1.4) y por lo tanto E es la medida espectral de M_f.

Finalmente notemos que, por (1.5),

$$\phi(M_f) = M_{\phi \circ f}$$

para toda función ϕ Borel medible acotada en $\mathrm{R}_{ess}(f)$.

La siguiente proposición resume la mayoría de los resultados obtenidos en esta sección.

Proposición 1.1. *Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida $\sigma-$finito, $f, g \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces:*

a) $M_{\alpha f + \beta g} = \alpha M_f + \beta M_g$,

b) $M_f M_g = M_{fg} = M_g M_f$,

c) $\|M_f\| = \|f\|$,

d) M_f *es normal con* $M_f^* = M_{\overline{f}}$,

e) $\sigma(M_f) = \sigma_{ap}(M_f) = \mathrm{R}_{ess}(f)$,

f) $\mathcal{M} = \{M_f : f \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)\}$ *es un álgebra* C^* *conmutativa con unidad,*

g) $f \mapsto M_f$ *es un* $*-$*isomorfismo entre* $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ *y* $\mathcal{M}$,

h) $f \mapsto M_f$ *define una representación de* $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ *en* $L^2(X, \Sigma, \mu)$,

i) $M_f = \displaystyle\int_{\mathrm{R}_{ess}(f)} z \, dE(z)$, *donde* $E(S) = M_{\chi_{f^{-1}(S)}}$ *para* $S \subseteq \mathrm{R}_{ess}(f)$ *Borel medible define la medida espectral asociada a* M_f,

j) $\phi(M_f) = M_{\phi \circ f}$ *para toda función Borel medible acotada en* $\mathrm{R}_{ess}(f)$,

k) *una red* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ *converge a una función* $f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ *en la topología* w^* *si y sólo si la red* $\{M_{f_\alpha}\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathcal{B}(L^2(X,\Sigma,\mu))$ *converge a* $M_f \in \mathcal{B}(L^2(X,\Sigma,\mu))$ *en la topología débil de operadores,*

l) $f \mapsto M_f$ *es un homeomorfismo de* $L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ *con la topología* w^* *a* $L^2(X,\Sigma,\mu)$ *con la topología débil de operadores, cuya imagen es* $\mathcal{M}$,

m) *si* $T \in \mathcal{B}(L^2(X,\Sigma,\mu))$ *conmuta con todo elemento de* $\mathcal{M}$, *entonces existe* $h \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ *tal que* $T = M_h$.

El siguiente ejemplo es un caso particular del anterior cuando $X = \mathbb{N}$, Σ es el conjunto potencia de $\mathbb{N}$ y μ es la medida de conteo. Sea λ una sucesión acotada $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in N} \in l^\infty(\mathbb{N})$. Definimos el operador de multiplicación $M_\lambda\colon l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ por $(M_\lambda x)_n = \lambda_n x_n$ para $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $M_\lambda \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ con $\|M_\lambda\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$. Dados $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,

$$\langle M_\lambda x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\overline{\lambda_n} y_n}.$$

Por lo que $M_\lambda^* = M_{\overline{\lambda}}$, donde $\overline{\lambda} = \{\overline{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$. M_λ es normal y en el caso en que la sucesión $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es real, M_λ es autoadjunto. Esto es consecuencia de que $M_\lambda M_\kappa = M_{\lambda\kappa}$ para $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\kappa = \{\kappa_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$, donde $\lambda\kappa = \{\lambda_n\kappa_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$ y de que $M_\lambda^* = M_{\overline{\lambda}}$. Notemos también que M_λ es unitario si y sólo si $|\lambda_n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $M_\lambda - \lambda_n$ no es inyectiva pues si $x = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, entonces $(M_\lambda - \lambda_n)x = 0$. Por lo tanto $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma_p(M_\lambda)$.

Sea $\alpha \notin \{\lambda_n\}$ y $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, entonces $(M_\lambda - \alpha)x = 0$ si y sólo si $(\lambda_n - \alpha)x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\alpha \notin \{\lambda_n\}$, entonces $x = 0$. Es decir, $M_\lambda - \alpha$ es inyectiva en este caso. Por lo tanto,

$$\sigma_p(M_\lambda) = \{\lambda_n\}.$$

Si $\alpha \notin \{\lambda_n\}$ es un punto de acumulación de $\{\lambda_n\}$, entonces existe una subsucesión $\{\lambda_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_{n_j} = \alpha$. Notemos que

$$\lim_{j\to\infty} \|(M_\lambda - \alpha)e_{n_j}\| = \lim_{j\to\infty} |\lambda_{n_j} - \alpha| = 0,$$

es decir, la sucesión $\{(M_\lambda - \alpha)e_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Además, como $M_\lambda - \alpha$ es inyectivo, podemos definir la función inversa $(M_\lambda - \alpha)^{-1}\colon \mathrm{R}(M_\lambda - \alpha) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$. Sin embargo esta función no es continua, pues la sucesión $\{(M_\lambda - \alpha)e_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a 0, pero la sucesión $\{(M_\lambda - \alpha)^{-1}(M_\lambda - \alpha)e_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ no converge a 0 ya que $\|(M_\lambda - \alpha)^{-1}(M_\lambda - \alpha)e_{n_j}\| = \|e_{n_j}\| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de la Función Inversa, $\mathrm{R}(M_\lambda - \alpha) \neq l^2(\mathbb{N})$. Así, $\alpha \in \sigma(M_\lambda)$. Por lo tanto $\overline{\{\lambda_n\}} \subseteq \sigma(M_\lambda)$.

Finalmente, si $\alpha \notin \overline{\{\lambda_n\}}$, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $B_{\epsilon_0}(\alpha) \cap \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset$; es decir, $|\alpha - \lambda_n| > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que la sucesión $\kappa = \{\frac{1}{\alpha-\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por $\frac{1}{\epsilon_0}$. Luego, $M_\kappa \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ con $\|M_\kappa\| \le \frac{1}{\epsilon_0}$. Además,

$$(M_\lambda - \alpha)M_\kappa = 1 = M_\kappa(M_\lambda - \alpha),$$

es decir $M_\lambda - \alpha$ es invertible.

Por lo tanto, $\sigma(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}}$ con $\sigma_p(M_\lambda) = \{\lambda_n\}$. Además, $\sigma_r(M_\alpha) = \emptyset$ por ser M_λ un operador normal.

Sea $M_\lambda \colon l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ el operador de multiplicación definido por $(M_\lambda x)_n = \lambda_n x_n$ para todo $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, donde $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el operador $T_n \colon l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ dado por

$$(T_n x)_m = \begin{cases} \lambda_n x_n & \text{si} \quad m \le n, \\ 0 & \text{si} \quad m > n, \end{cases}$$

para $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Cada T_n es de rango finito y por lo tanto es compacto. Además, la sucesión de operadores $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M_λ en la topología fuerte de operadores pues para todo $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,

$$\|(M_\lambda - T_n)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |x_j|^2 \le C \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2,$$

donde $|\lambda_j| \le C$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sin embargo, el operador M_λ es compacto si y sólo si la sucesión $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

En efecto, si $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \epsilon$ para todo $n \ge N$. Dado $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, para todo $n \ge N$,

$$\|(M_\lambda - T_n)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |x_j|^2 < \epsilon^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 \le \epsilon^2 \|x\|^2.$$

Luego, $\|(M_\lambda - T_n)x\| < \epsilon\|x\|$ si $n \ge N$. Esto implica que la sucesion de operadores compactos $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M_λ en la topología de la norma y por lo tanto M_λ es compacto. La otra implicación se demuestra construyendo una sucesión acotada en $l^2(\mathbb{N})$ de la forma $\left\{\frac{e_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, cuya imagen bajo M_λ no contiene alguna subsucesión convergente (pues $\|e_{n_{k_1}} - e_{n_{k_2}}\|^2 = 2$ para $k_1 \ne k_2$).

Sea $M_\lambda \colon l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ el operador de multiplicación con símbolo $\lambda = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por el ejemplo anterior sabemos que M_λ es un operador compacto y tenemos que $\sigma(M_\lambda) = \overline{\{\frac{1}{n}\}}$ con $\sigma_p(M_\lambda) = \{\frac{1}{n}\}$ y $\sigma_r(M_\lambda) = \emptyset$. Por lo tanto, $0 \in \sigma_c(M_\lambda)$.

La siguiente proposición es análoga a la Proposición 1.1 y resume la mayoría de los resultados obtenidos en el caso discreto.

Proposición 1.2. *Si* $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \kappa = \{\kappa_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *entonces:*

a) $M_{\alpha\lambda+\beta\kappa} = \alpha M_\lambda + \beta M_\kappa$,

b) $M_\lambda M_\kappa = M_{\lambda\kappa} = M_\kappa M_\lambda$,

c) $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|$,

d) M_λ *es normal con* $M_\lambda^* = M_{\overline{\lambda}}$,

e) $\sigma(M_\lambda) = \sigma_c(M_\lambda) \cup \sigma_p(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}}$ *y* $\sigma_p(M_\lambda) = \{\lambda_n\}$,

f) $\mathcal{M} = \{M_\lambda : \lambda \in l^\infty(\mathbb{N})\}$ *es un álgebra* C^* *conmutativa con unidad,*

g) $\lambda \mapsto M_\lambda$ *es un* $*-$*isomorfismo entre* $l^\infty(\mathbb{N})$ *y* $\mathcal{M}$,

h) $\lambda \mapsto M_\lambda$ *define una representación de* $l^\infty(\mathbb{N})$ *en* $l^2(\mathbb{N})$,

i) $M_\lambda(x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$, *para* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,

j) *si* $T \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ *conmuta con todo elemento de* $\mathcal{M}$, *entonces existe* $\eta \in l^\infty(\mathbb{N})$ *tal que* $T = M_\eta$.

Sea A un álgebra C^*. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia no vacía de subálgebras C^* de A, entonces $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha$ es una subálgebra C^* de A. Dado $B \subseteq A$, definimos el **álgebra** C^* **generada** por B como la intersección de todas las subálgebras C^* de A que contienen a B y la denotamos por $C^*(B)$.

Terminaremos esta sección enunciando una versión del cálculo funcional para operadores normales con resultados análogos a las Proposiciones 1.1 y 1.2. Su demostración se puede visualizar en [4] y [9].

Proposición 1.3. *Si* A *es un álgebra* C^* *unitaria y* $x \in A$ *es normal, entonces:*

a) $C^*(\{x,1\}) = \overline{\{p(x,x^*) : p(z,w) \text{ es un polinomio en dos variables}\}}$ *es un álgebra* C^* *conmutativa con unidad,*

b) *si* X *es el espacio de ideales maximales de* $C^*(\{x,1\})$, *la transformada de Gelfand* $G\colon C^*(\{x,1\}) \longrightarrow C(X)$ *es un* $*-$*isomorfismo,*

c) *el espacio de ideales maximales dotado con la topología* w^* *es homeomorfo al espectro de* x *vía* $G(x)\colon X \longrightarrow \sigma(x)$,

d) *definiendo* $f(x) = G^{-1}(f)$ *para todo* $f \in C(\sigma(x))$, $f \mapsto f(x)$ *es un* $*-$*isomorfismo entre* $C(\sigma(x))$ *y* $C^*(\{x,1\})$,

e) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ *para todo* $f \in C(\sigma(x))$,

f) $\|f(x)\| = \|f\|$ *para todo* $f \in C(\sigma(x))$,

g) *si* $A = \mathcal{B}(H)$ *para* H *espacio de Hilbert,* $f \mapsto f(x)$ *define una representación de* $C(\sigma(x))$ *en* H*, la cual se extiende a una representación del álgebra* C^* *formada por las funciones Borel acotadas en* $\sigma(x)$*,*

h) *en este caso, existe una única medida espectral* E *definida en la* $\sigma-$*álgebra de Borel de* $\sigma(x)$ *tal que* $f(x) = \int\limits_{\sigma(x)} f(z)\, dE(z)$*, para todo* $f \in C(\sigma(x))$*. Esta expresión se extiende a funciones Borel acotadas en* $\sigma(x)$*. En particular,*

$$x = \int\limits_{\sigma(x)} z\, dE(z),$$

i) $\mathcal{N} = \{f(x) : f$ *es una función Borel acotada en* $\sigma(x)\}$ *es un álgebra* C^* *conmutativa unitaria,*

j) *si* H *es separable y* μ *es una medida positiva en* $\sigma(x)$ *tal que* μ *y* E *tienen los mismos conjuntos de medida cero, entonces* $f \mapsto f(x)$ *es un* $*-$*isomorfismo entre* $L^\infty(\sigma(x), \Sigma, \mu)$ *y* $\mathcal{N}$*, donde* Σ *es la* $\sigma-$*álgebra de Borel,*

k) $f \mapsto f(x)$ *define una representación de* $L^\infty(\sigma(x), \Sigma, \mu)$ *en* H*,*

l) $f \mapsto f(x)$ *es un homeomorfismo de* $L^\infty(\sigma(x), \Sigma, \mu)$ *con la topología* w^* *a* $\mathcal{B}(H)$ *con la topología débil de operadores, cuya imagen es* $\mathcal{N}$*,*

m) $\sigma(f(x)) = \mathrm{R}_{ess}(f)$ *para todo* $f \in L^\infty(\sigma(x), \Sigma, \mu)$*,*

n) *si* $T \in \mathcal{B}(H)$ *conmuta con todo elemento de* $\mathcal{N}$*, entonces existe* $f \in L^\infty(\sigma(x), \Sigma, \mu)$ *tal que* $T = f(x)$*.*

De hecho, en [4, Teorema 11.5] se prueba que todo operador normal $N \in \mathcal{B}(H)$ es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación $M_f \colon L^2(X, \Sigma, \mu) \longrightarrow L^2(X, \Sigma, \mu)$ para algún espacio de medida (X, Σ, μ) y una función $f \in L^\infty(X, \Sigma, \mu)$. Cuando H es separable, el espacio de medida es $\sigma-$finito.

En este trabajo estamos interesados en describir álgebras C^* generadas por operadores que resultan de componer un operador de multiplicación con ciertas proyecciones ortogonales y ver si cumplen propiedades análogas a las Proposiciones 1.1, 1.2 y 1.3.

Recordemos que dados H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H. Se tiene

$$H = M \oplus M^\perp,$$

donde $M^\perp$ denota al complemento ortogonal de M. Luego, cada $x \in H$ puede escribirse de manera única en la forma $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in M$ y $x_2 \in M^\perp$. Los operadores $P, Q \colon H \longrightarrow H$ definidos por $P(x) = x_1$ y $Q(x) = x_2$ son lineales, $P^2 = P = P^*$ y $Q^2 = Q = Q^*$ Además, como para todo $x \in H$ se cumple $\langle Px, Qx \rangle = 0$, del Teorema de Pitágoras obtenemos la identidad

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$$

para todo $x \in H$. De aquí vemos que $\|Px\| \leq \|x\|$ y $\|Qx\| \leq \|x\|$ para todo $x \in H$ y por lo tanto $\|P\| \leq 1$ y $\|Q\| \leq 1$. Si $M \neq \{0\}$, entonces $P \neq 0$. Como $P^2 = P$, se tiene $0 < \|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2$. De esto último se sigue $\|P\| \geq 1$, y por lo tanto $\|P\| = 1$. Análogamente, si $M \neq H$, entonces $\|Q\| = 1$. Los operadores P y Q se llaman las **proyecciones ortogonales** de H sobre M y $M^{\perp}$ respectivamente.

1.3. Funciones armónicas en $\mathbb{C}^n$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Identificaremos (topológicamente) $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ escribiendo

$$z_k = x_k + iy_k$$

para cada $k = 1, \ldots, n$. Para todo $z = (z_1, \ldots, z_n)$ y $w = (w_1, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$, consideramos el producto interior

$$\langle z, w \rangle = z \cdot \overline{w} = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$

y la norma

$$|z| = \langle z, z \rangle^{1/2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}.$$

Para el multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y el elemento $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, escribimos

$$z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n},$$

donde $\alpha_k \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

y definimos la **longitud del multi-índice** por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario abierto en el plano complejo $\mathbb{C}$; es decir,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Denotamos por $\mathbb{B}^n$ a la bola unitaria abierta del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$; es decir,

$$\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}.$$

Su frontera es la esfera

$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}.$$

Dado $w \in \mathbb{C}^n$ y $r > 0$, escribimos

$$B(w, r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z - w| < r\} \quad \text{y} \quad \partial B(w, r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z - w| = r\}.$$

Notemos que $B(0,1) = \mathbb{B}^n$, $\partial B(0,1) = S^{2n-1}$ y $\mathbb{B}^1 = \mathbb{D}$. En este capítulo Ω denotará a un subconjunto no vacío, abierto y simplemente conexo de $\mathbb{C}^n$.

Los **operadores de Wirtinger** están definidos por

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right),$$

para $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ con derivadas parciales continuas y escribiendo $z_k = x_k + iy_k$ para cada $k = 1, \ldots, n$. En este caso, si para cada k

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0,$$

entonces diremos que f es una función **analítica**. Análogamente, decimos que la función $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es **anti-analítica** si tiene derivadas parciales continuas y

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = 0$$

para cada $k = 1, \ldots, n$. Notemos que f es anti-analíca si y sólo si $\overline{f}$ es analítica dado que

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}_k} \qquad \text{y} \qquad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}\right)} = \frac{\partial f}{\partial z_k},$$

para $k = 1, \ldots, n$.

Definimos el operador **laplaciano** Δ por

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2}\right)$$

para $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ con segundas derivadas parciales continuas.

Notemos que el laplaciano, en términos de operadores de Wirtinger, se puede escribir como

$$\Delta f = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial \overline{z}_k}. \tag{1.6}$$

A una función $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ con segundas derivadas parciales continuas la llamaremos **armónica** si su laplaciano es igual a cero. Por (1.6), toda función analítica y toda función anti-analítica son funciones armónicas.

Además, una función real valuada $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica si y sólo si localmente es la parte real de una función analítica.

El laplaciano Δ es lineal por lo que sumas y múltiplos escalares de funciones armónicas son armónicas. Además, si $w \in \mathbb{C}^n$, $r > 0$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función armónica, entonces la **función traslación**

$$\begin{array}{rccc} g\colon & \Omega + w & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & f(z-w) \end{array}$$

es armónica y la **función dilatación**

$$\begin{array}{rccc} f_r\colon & \frac{1}{r}\Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & f(rz) \end{array}$$

también es armónica pues

$$\Delta(f_r) = r^2(\Delta f)_r. \tag{1.7}$$

Recordemos que una transformación lineal $U\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ que preserva la esfera unitaria S^{2n-1} se llama **transformación ortogonal**. Por lo que si $U\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es lineal entonces es ortogonal si y sólo si $|Ux| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Sea $O(2n)$ el grupo de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^{2n}$.

Dada $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, y $U \in O(2n)$, decimos que $f \circ U\colon U^{-1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una **rotación de** f. La rotación de funciones armónicas son armónicas pues

$$\Delta(f \circ U) = (\Delta f) \circ U.$$

El valor de una función armónica en el centro de una bola es el promedio de sus valores en su frontera. Esto lo establece su Propiedad del Valor Medio, la cual se deduce de la identidad de Green y cuya demostación se puede encontrar en [1, Proposición 1.2].

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es armónica, $r > 0$ y $z \in \Omega$ con $\overline{B(z,r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$f(z) = \int\limits_{S^{2n-1}} f(z + rw)\, d\sigma(w), \tag{1.8}$$

donde σ es la medida de superficie de Lebesgue normalizada en S^{2n-1}.

Si v es la medida de volumen de Lebesgue normalizada en $\mathbb{B}^n$, entonces las integrales respecto a estas medidas están relacionadas por la ecuación

$$dv = 2nr^{2n-1}\, dr\, d\sigma. \tag{1.9}$$

Otra versión de la Propiedad del Valor Medio resulta de (1.8) y (1.9):

Proposición 1.4. *Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es armónica, $r > 0$ y $z \in \Omega$ con $\overline{B(z,r)} \subseteq \Omega$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{v\big(B(z,r)\big)} \int\limits_{B(z,r)} f(w)\, dv(w).$$

Una consecuencia de la Propiedad del Valor Medio de las funciones armónicas es su Principio del Máximo:

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es armónica (Ω es conexo) y $|f|$ tiene un máximo en Ω, entonces f es constante. En particular, si $f, g \in C(\overline{\Omega})$ son armónicas en Ω con Ω acotado y $f = g$ en $\partial\Omega$, entonces $f = g$ en Ω.

La **integral de Poisson** de una función $f \in C(S^{2n-1})$ está definida por

$$P[f](z) = \int\limits_{S^{2n-1}} \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^{2n}} f(w)\, d\sigma(w)$$

para $z \in \mathbb{B}^n$.

A la expresión $P(z,w) = \frac{1-|z|^2}{|z-w|^{2n}}$ la llamaremos **Núcleo de Poisson**. Notemos que para todo $z \in \mathbb{B}^n$ y $w \in S^{2n-1}$, $P(z,w) > 0$.

Para cada $w \in S^{2n-1}$, la función $P_w \colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $P_w(z) = P(z,w)$ es armónica en $\mathbb{B}^n$. Además, la integral de Poisson resuelve el problema de Dirichlet para $\mathbb{B}^n$ y por (1.7), tenemos que el problema de Dirichlet tiene solución para dominios de la forma $B(\zeta, r)$ con $\zeta \in \mathbb{C}^n$ y $r > 0$. En particular tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.5. *Si $f \in C(\overline{\mathbb{B}^n})$ es armónica en $\mathbb{B}^n$, entonces $f = P[f|_{S^{2n-1}}]$ en $\mathbb{B}^n$.*

Por lo que las funciones $f \in C(\overline{\mathbb{B}^n})$ armónicas en $\mathbb{B}^n$ se pueden representar por

$$f(z) = \int\limits_{S^{2n-1}} \frac{1-|z|^2}{|z-w|^{2n}} f(w)\, d\sigma(w)$$

para todo $z \in \mathbb{B}^n$.

Por ejemplo

$$\int\limits_{S^{2n-1}} P(z,w)\, d\sigma(w) = 1$$

para $z \in \mathbb{B}^n$.

Esto implica que toda función armónica es infinitamente diferenciable y el siguiente resultado.

Proposición 1.6. *Si $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones armónicas en Ω que convergen uniformemente a f en cada subconjunto compacto de Ω, entonces f es armónica en Ω.*

1.4. Armónicos esféricos

Un **polinomio** complejo en $\mathbb{R}^{2n}$ es una combinación lineal finita de monomios x^α. Un polinomio $f \colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama **homogéneo** de grado k si es de la forma

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$$

para $x \in \mathbb{R}^{2n}$ y $k \in \mathbb{Z}_+$. Notemos que si $f \colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio homogéneo de grado k, entonces

$$f(tx) = t^k f(x)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Por lo tanto, todo polinomio homogéneo $f \colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ está completamente definido por sus valores en la esfera S^{2n-1}. Un **armónico esférico** de grado k es la restricción a S^{2n-1} de un polinomio armónico y homogéneo de grado k.

Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ denotamos por $H_k(\mathbb{R}^{2n})$ al espacio vectorial de todos los polinomios $f \colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ armónicos y homogéneos de grado k. El espacio vectorial complejo de todos los armónicos esféricos de grado k lo denotaremos por H_k.

Para $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $H(p,q)$ es el espacio vectorial de todos los polinomios homogéneos armónicos $f\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ que tienen grado total p en las variables $z = (z_1 \cdots z_n)$ y grado total q en las variables $\overline{z} = (\overline{z}_1 \cdots \overline{z}_n)$.

Notemos que los elementos de $H(k,0)$ son funciones analíticas y los elementos de $H(0,k)$ son funciones anti-analíticas para cada $k \in \mathbb{Z}_+$.

Denotamos por $H_{p,q}$ al espacio vectorial de todos los polinomios homogéneos armónicos de $H(p,q)$ restringidos a la esfera S^{2n-1}. Los espacios $H_{p,q} \subseteq L^2(S^{2n-1})$ tienen dimensión finita y por lo tanto son espacios de Hilbert. Además, son ortogonales a pares y

$$H_k = \bigoplus_{p+q=k} H_{p,q} \tag{1.10}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$.

Cada $H_k(\mathbb{R}^{2n})$ es invariante bajo $O(2n)$; es decir, si $f \in H_k(\mathbb{R}^{2n})$ y $U \in O(2n)$, entonces $f \circ U \in H_k(\mathbb{R}^{2n})$. Análogamente, H_k también es invariante bajo $O(2n)$ para $k \in \mathbb{Z}_+$.

Con la identidad de Green se puede demostrar que si $k \neq l$, entonces H_k y H_l son ortogonales en $L^2(S^{2n-1})$. Se puede ver dicha demostración en [17, Teorema 12.1.2].

Si denotamos por $P_k(\mathbb{R}^{2n})$ al espacio vectorial complejo de polinomios homogéneos de grado k, se puede demostrar

$$P_k(\mathbb{R}^{2n}) = H_k(\mathbb{R}^{2n}) \oplus |x|^2 P_{k-2}(\mathbb{R}^{2n}) \tag{1.11}$$

Por inducción se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.7. *Todo polinomio homogéneo f de grado k puede ser escrito de manera única en la forma*

$$f(x) = f_k(x) + |x|^2 f_{k-2}(x) + \cdots + |x|^{2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} f_{k-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(x)$$

donde $f_{k-2j} \in H_{k-2j}(\mathbb{R}^{2n})$ con $j = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ y $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ es el entero inferior más próximo a $\frac{k}{2}$.

El siguiente corolario se deduce de que todo polinomio es la suma de polinomios homogéneos y del Teorema 1.7.

Corolario 1.8. *Todo polinomio de grado k restringido a S^{2n-1} es igual a la suma de armónicos esféricos de grado menor o igual a k.*

Recordemos que, por el Teorema de Stone-Weierstrass, el espacio lineal generado por todos los polinomios homogéneos $f\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ es denso en $C(S^{2n-1})$ respecto la norma del supremo. Como todo polinomio homogéneo de grado k restringido a S^{2n-1} se puede expresar como suma finita de armónicos esféricos de grados menores o iguales a k y $C(S^{2n-1})$ es denso en $L^2(S^{2n-1})$, entonces

$$L^2(S^{2n-1}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} H_k. \tag{1.12}$$

Para mayor detalle de este resultado se puede consultar [17, Capítulo 12].

Utilizando (1.10) y (1.12) vemos que toda función $f \in L^2(S^{2n-1})$ se puede representar como serie de polinomios armónicos homogéneos:

$$f = \sum_{p,q \in \mathbb{Z}_+} f_{p,q} \tag{1.13}$$

donde $f_{p,q} \in H_{p,q}$ y la convergencia de la serie es incondicional y en la norma de $L^2(S^{2n-1})$.

Si $n = 1$, $H_{p,q} = \{0\}$ cuando $pq > 0$ y $\dim H_{p,0} = \dim H_{0,q} = 1$ para todo $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $H_k = span\{z^k, \overline{z}^k\}$ con $|z| = 1$ y para cada función $f \in L^2(S^1)$, su descomposición como serie de Fourier coincide con su descomposición como serie de polinomios armónicos homogéneos.

Dado que cada H_k es un espacio de Hilbert finito con el mismo producto interno que $L^2(S^{2n-1})$, para cada $w \in S^{2n-1}$, la función evaluación

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & H_k & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(w) \end{array}$$

es lineal y acotada, por lo que existe un único elemento $Z_{w,k} \in H_k$ tal que

$$\varphi(f) = \langle f, Z_{w,k} \rangle \tag{1.14}$$

para todo $f \in H_k$. El elemento $Z_{w,k}$ es llamado **armónico zonal** de grado k con polo en w.

Definimos la función

$$\begin{array}{cccc} Z_k\colon & S^{2n-1} \times S^{2n-1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z, w) & \mapsto & Z_{w,k}(z) \end{array} \tag{1.15}$$

la cual tiene la siguiente propiedad reproductora por (1.14).

$$f(w) = \int\limits_{S^{2n-1}} f\overline{Z_{w,k}}\, d\sigma = \int\limits_{S^{2n-1}} f(z)\overline{Z_k(z,w)}\, d\sigma(z) \tag{1.16}$$

para $w \in S^{2n-1}$ y $f \in H_k$.

Dado $w \in S^{2n-1}$, sea $p = \operatorname{Im} Z_{w,k}$. Tenemos que p es real valuada y $p \in H_k$, utilizando (1.16):

$$0 = \operatorname{Im} p(w) = \operatorname{Im} \int\limits_{S^{2n-1}} p\overline{Z_{w,k}}\, d\sigma = -\int\limits_{S^{2n-1}} (p)(\operatorname{Im} Z_{w,k})\, d\sigma = -\int\limits_{S^{2n-1}} (\operatorname{Im} Z_{w,k})^2\, d\sigma.$$

Por lo que $\operatorname{Im} Z_{w,k} = 0$; es decir, $Z_{w,k}$ es real valuada.

Sea $p_1, \ldots, p_{h_k} \in H_k$ una base ortonormal para H_k. Entonces,

$$\begin{aligned} Z_{w,k}(z) &= \sum_{i=1}^{h_k} \langle Z_{w,k}, p_i \rangle p_i(z) \\ &= \sum_{i=1}^{h_k} \overline{p_i(w)} p_i(z) \\ &= \sum_{i=1}^{h_k} p_i(w) \overline{p_i(z)} \\ &= \sum_{i=1}^{h_k} \langle Z_{z,k}, p_i \rangle p_i(w) \\ &= Z_{z,k}(w), \end{aligned} \tag{1.17}$$

para $w, z \in S^{2n-1}$. Es decir, $Z_k(z,w) = Z_k(w,z)$ para todo $w, z \in S^{2n-1}$.

Por (1.17) y la igualdad de Bessel, tenemos

$$Z_{w,k}(w) = \sum_{i=1}^{h_k} \overline{p_i(w)} p_i(w) = \sum_{i=1}^{h_k} |p_i(w)|^2 = \|Z_{w,k}\|^2, \tag{1.18}$$

para $w \in S^{2n-1}$ y $k \in \mathbb{Z}_+$.

Dados $U \in O(2n)$, $p \in H_k$ y $z \in S^{2n-1}$,

$$\begin{aligned} \langle p, Z_{U(z),k} \rangle &= p(U(z)) \\ &= \int\limits_{S^{2n-1}} (p \circ U) \overline{Z_{z,k}}\, d\sigma \\ &= \int\limits_{S^{2n-1}} p(U(w)) \overline{Z_{z,k}(w)}\, d\sigma(w) \\ &= \int\limits_{S^{2n-1}} p(w) \overline{Z_{z,k}(U^{-1}(w))}\, d\sigma(w) \\ &= \int\limits_{S^{2n-1}} (p)(\overline{Z_{z,k} \circ U^{-1}})\, d\sigma \\ &= \langle p, Z_{z,k} \circ U^{-1} \rangle. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Por lo que

$$Z_{U(z),k} = Z_{z,k} \circ U^{-1} \tag{1.20}$$

para todo $U \in O(2n)$. Evaluando $U(z)$ en (1.20) tenemos

$$Z_{U(z),k}(U(z)) = Z_{z,k} \circ U^{-1}(U(z)) = Z_{z,k}(z).$$

Es decir, la función $z \mapsto Z_{z,k}(z)$ es constante en S^{2n-1}. Dicho valor constante coincide con la dimensión de H_k, pues utilizando (1.18):

$$
\begin{aligned}
Z_{z,k}(z) &= \int_{S^{2n-1}} Z_{z,k}(z)\, d\sigma(z) \\
&= \int_{S^{2n-1}} \sum_{i=1}^{h_k} |p_i(z)|^2\, d\sigma(z) \\
&= \sum_{i=1}^{h_k} \int_{S^{2n-1}} |p_i(z)|^2\, d\sigma(z) \\
&= \sum_{i=1}^{h_k} \|p_i\|^2 \\
&= h_k
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

Además, por la desigualdad de Schwarz, (1.14) y (1.18)

$$
|Z_{z,k}(w)| = |\langle Z_{z,k}, Z_{w,k}\rangle| \leq \|Z_{z,k}\|\|Z_{w,k}\| = \sqrt{h_k}\sqrt{h_k} = h_k. \tag{1.22}
$$

Así, todo armónico zonal de grado k alcanza su valor máximo en su polo y éste coincide con $\dim H_k = h_k$. Además, dado $z \in S^{2n-1}$, $Z_{z,k} \circ U = Z_{z,k}$ para todo $U \in O(2n)$ que tenga al polo z como punto fijo, sólo se necesita evaluar $U(w)$ en (1.20) para $w \in S^{2n-1}$. Antes de calcular el valor de h_k veamos una forma de generalizar la descomposición en series de Fourier de funciones cuadrado integrables $f\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ a otras dimensiones.

Teorema 1.9. *Si $f \in L^2(S^{2n-1})$, entonces*

$$
f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, Z_{z,m}\rangle
$$

en $L^2(S^{2n-1})$.

Demostración. Utilizando (1.12), expresamos a f como $f = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$ con $p_k \in H_k$ y $k \in \mathbb{Z}_+$, donde la convergencia de la serie es en $L^2(S^{2n-1})$. Así,

$$
\langle f, Z_{z,m}\rangle = \langle \sum_{k=0}^{\infty} p_k, Z_{z,m}\rangle = \langle p_m, Z_{z,m}\rangle = p_m(z).
$$

Por lo tanto,

$$
f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, Z_{z,m}\rangle.
$$

□

Notemos que $\dim H_m(\mathbb{R}^{2n}) = \dim H_m = h_m$,

$$h_0 = 1 \quad \text{y} \quad h_1 = 2n,$$

pues $H_0(\mathbb{R}^{2n})$ es el espacio de funciones constantes y $H_1(\mathbb{R}^{2n})$ es el espacio de funciones lineales en $\mathbb{R}^{2n}$. Calcularemos a continuación el valor de h_m para $m \geq 2$.

Si $\dim P_m(\mathbb{R}^{2n}) = d_m$, por (1.11)

$$d_m = h_m + d_{m-2} \tag{1.23}$$

para $m \geq 2$. Además, $\{x^\alpha : |\alpha| = m\}$ forma una base para $P_m(\mathbb{R}^{2n})$, por lo que d_m es igual al número de multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ con $|\alpha| = m$, esto es,

$$d_m = \binom{2n+m-1}{2n-1}.$$

Despejando de (1.23), para $m \geq 2$,

$$h_m = \binom{2n+m-1}{2n-1} - \binom{2n+m-3}{2n-1}.$$

Por el triángulo de Pascal sabemos que $\binom{k+1}{l} = \binom{k}{l} + \binom{k}{l-1}$. Así,

$$\begin{aligned}
\binom{2n+m-1}{2n-1} &= \binom{2n+m-2}{2n-1} + \binom{2n+m-2}{2n-2} \\
\binom{2n+m-3}{2n-1} &= \binom{2n+m-2}{2n-1} - \binom{2n+m-3}{2n-2} \\
h_m &= \binom{2n+m-2}{2n-2} + \binom{2n+m-3}{2n-2} \\
h_m &= \binom{2n+m-3}{2n-2}\left[\frac{2n+m-2}{m} + 1\right] \\
h_m &= \binom{2n+m-3}{2n-2}\left[\frac{2n+2m-2}{m}\right] \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

para $m \geq 2$. En particular, para $n = 1$, $h_m = \frac{(m-1)!(2m)}{(0)!(m-1)!(m)} = 2$ para $m \geq 2$. En este caso, $1 = h_0 < 2 = h_1 = h_2 = \ldots$, de hecho, $H_m = span\{e^{im\theta}, e^{-im\theta}\}$ para $m \in Z_+$.

Si $n > 1$, sea $k = 2n-2$. Entonces $k > 1$ y por (1.24),

$$h_m = \frac{(2m+k)(m+k-1)!}{(k!)(m-1)!(m)} = \frac{(2m+k)(m+k-1)(m+k-2)\cdots(m+1)}{k!}$$

para $m \geq 2$. Por lo tanto, $1 = h_0 < 2n = h_1 < h_2 < \ldots$ Además,

$$\frac{h_m}{m^k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{2m+k}{m}\right)\left(\frac{m+k-1}{m}\right)\left(\frac{m+k-2}{m}\right)\cdots\left(\frac{m+1}{m}\right).$$

Luego,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{m^k} = \frac{2}{k!}.$$

Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.10. *Existe una constante $C > 0$ tal que $h_m \leq Cm^{2n-2}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Recordemos que un polinomio homogéneo está completamente determinado por su restricción en S^{2n-1}. Además, todo elemento $p \in H_m$ tiene una única extensión a un elemento $\widetilde{p} \in H_m(\mathbb{R}^{2n})$. Sea $z \in \mathbb{C}^n$ no nulo y $p \in H_m$, entonces

$$\widetilde{p}(z) = |z|^m p\left(\frac{z}{|z|}\right) = |z|^m \int\limits_{S^{2n-1}} p(w) Z_m\left(\frac{z}{|z|}, w\right) d\sigma(w).$$

Por lo que

$$\widetilde{p}(z) = \int\limits_{S^{2n-1}} p(w) \widetilde{Z}_m(z, w)\, d\sigma(w) \tag{1.25}$$

para todo $z \in \mathbb{C}^n$.

Teorema 1.11. *La integral de Poisson de un polinomio f en $\mathbb{R}^{2n}$ de grado m es un polinomio de grado a lo más m. Además, para todo $z \in \mathbb{B}^n$,*

$$P[f](z) = \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{S^{2n-1}} \widetilde{Z}_k(z, w) f(w)\, d\sigma(w).$$

Demostración. Del Corolario 1.8, tenemos que

$$f|_{S^{2n-1}} = \sum_{k=0}^{m} p_k \tag{1.26}$$

con $p_k \in H_k$, $k = 0, \ldots, m$.

Por la unicidad de la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{B}^n$, tenemos

$$P[f](z) = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{p}_k(z) \tag{1.27}$$

para $z \in \mathbb{B}^n$, donde $\widetilde{p}_k \in H_k(\mathbb{R}^{2n})$, $k = 0, \ldots, m$.

Por (1.25) y (1.12), tenemos que

$$\begin{aligned} \int\limits_{S^{2n-1}} \widetilde{Z}_k(z, w) f(w)\, d\sigma(w) &= \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S^{2n-1}} \widetilde{Z}_k(z, w) \widetilde{p}_j(w)\, d\sigma(w) \\ &= \int\limits_{S^{2n-1}} \widetilde{Z}_k(z, w) \widetilde{p}_k(w)\, d\sigma(w) \\ &= \widetilde{p}_k(z) \end{aligned} \tag{1.28}$$

para $z \in \mathbb{C}^n$. De (1.28) y (1.27),

$$P[f](z) = \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{S^{2n-1}} \widetilde{Z}_k(z, w) f(w)\, d\sigma(w)$$

para $z \in \mathbb{B}^n$. □

Utilizando (1.26), si f es un polinomio de grado m, entonces $f|_{S^{2n-1}}$ es ortogonal a H_k para todo $k > m$. Este hecho junto con el Teorema 1.11 nos proporciona la llamada **expansión armónica zonal** del núcleo de Poisson.

Teorema 1.12. *Dado $n \in \mathbb{N}$,*

$$P(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{Z}_m(z, w)$$

para $z \in \mathbb{B}^n$ y $w \in S^{2n-1}$. La serie converge absoluta y uniformemente en $K \times S^{2n-1}$ para todo subconjunto compacto K de $\mathbb{B}^n$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 1.10 y la Ecuación 1.22, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left|\widetilde{Z}_m(z, w)\right| = |z|^m \left|Z_m\left(\frac{z}{|z|}, w\right)\right| \leq |z|^m h_m \leq C m^{2n-2} |z|^m, \tag{1.29}$$

para $z \in \mathbb{C}^n$ no nulo y $w \in S^{2n-1}$. Como $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m^{2n-2}} = 1$, por el Teorema de Cauchy-Hadamard

$$\sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{Z}_m(z, w)$$

converge absoluta y uniformemente en $K \times S^{2n-1}$ para todo $K \subseteq \mathbb{B}^n$ compacto.

Además, para cada $z \in \mathbb{B}^n$, tenemos por el Teorema 1.11

$$\begin{aligned}\left\langle f, \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{Z}_{z,m} \right\rangle &= \int\limits_{S^{2n-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{Z}_m(z, w) f(w)\, d\sigma(w) \\ &= P[f](z) = \int\limits_{S^{2n-1}} P(z, w) f(w)\, d\sigma(w) = \langle f, P_z \rangle\end{aligned}$$

para todos los armónicos esféricos f. Como las sumas finitas de armónicos esféricos son densos en $L^2(S^{2n-1})$, entonces

$$P(z, w) = P_z(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{Z}_{z,m}(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{Z}_m(z, w)$$

para $z \in \mathbb{B}^n$ y $w \in S^{2n-1}$. □

Uno de los principales resultados de esta sección se deduce del Teorema 1.12 y es la llamada **expansión homogénea** de funciones armónicas.

Corolario 1.13. *Si* $w \in \mathbb{C}^n$, $r > 0$ *y* $f\colon B(w,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ *es armónica, entonces existen* $p_m \in H_m(\mathbb{R}^{2n})$ *tales que*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(z-w)$$

para todo $z \in B(w,r)$*. La serie converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de* $B(w,r)$*.*

Demostración. Por la unicidad de la expansión homogénea y como la dilatación y traslación de funciones armónicas son armónicas, basta realizar la demostración suponiendo que $f \in C(\overline{\mathbb{B}^n})$ es armónica en $\mathbb{B}^n$. Por el Teorema 1.12,

$$f(z) = \int\limits_{S^{2n-1}} P(z,w) f(w)\, d\sigma(w) = \int\limits_{S^{2n-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{Z}_m(z,w) f(w)\, d\sigma(w) \tag{1.30}$$

para $z \in \mathbb{B}^n$. Sean $p_m \in H_m(\mathbb{R}^{2n})$ definidos por

$$p_m(z) = \int\limits_{S^{2n-1}} \widetilde{Z}_m(z,w) f(w)\, d\sigma(w)$$

para $z \in \mathbb{C}^n$. La serie $\sum_{m=0}^{\infty} p_m$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{B}^n$ debido a que

$$\begin{aligned}
|p_m(z)| &\leq \int\limits_{S^{2n-1}} |\widetilde{Z}_m(z,w)||f(w)|\, d\sigma(w) \\
&= \int\limits_{S^{2n-1}} |z|^m \left| \widetilde{Z}_m\left(\frac{z}{|z|}, w\right)\right| |f(w)|\, d\sigma(w) \\
&\leq \int\limits_{S^{2n-1}} |z|^m h_m |f(w)|\, d\sigma(w) \\
&= h_m |z|^m \int\limits_{S^{2n-1}} |f|\, d\sigma \\
&\leq C m^{2n-2} |z|^m \int\limits_{S^{2n-1}} |f|\, d\sigma
\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}^n$ no nulo.

Así, por (1.30),

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_{S^{2n-1}} \widetilde{Z}_m(z,w) f(w)\, d\sigma(w) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(z) \tag{1.31}$$

para $z \in \mathbb{B}^n$. $\square$

1.5. Funciones pluriarmónicas

Diremos que una función $f\colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ con segundas derivadas continuas es **pluriarmónica** si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} = 0,$$

para $i, j = 1, \ldots, n$.

De esta definici"on se sigue que toda función analítica y toda función anti-analítica definidas en la bola unitaria son funciones pluriarmónicas.

Notemos que si f es una función pluriarmónica, entonces su laplaciano es igual a cero:

$$\Delta f = 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial \overline{z}_k} = 0$$

y por lo tanto es armónica.

Para $n = 1$, de las definiciones se sigue que una función $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es pluriarmónica si y sólo si es armónica. Esto no se cumple en otras dimensiones, por ejemplo $f\colon \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z_1, z_2) = z_1 \overline{z}_2 + \overline{z_1} z_2$ es una función armónica que no es pluriarmónica.

La siguiente proposición nos dice que una función es pluriarmónica si y sólo si es armónica en cada dirección.

Proposición 1.14. *Dada una función $f\colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ con segundas derivadas continuas, para $a \in \mathbb{B}^n$ y $b \in \mathbb{C}^n$, definimos la función*

$$\begin{array}{rccc} f_{a,b}\colon & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \mapsto & f(a + \lambda b) \end{array}$$

donde $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \mathbb{B}^n\}$ es una vecindad del cero. Entonces f es pluriarmónica si y sólo si cada $f_{a,b}$ es armónica.

Demostración. Sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$ y $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. Aplicando la regla de la cadena a la función $f_{a,b} = f \circ h$ con $h = (h_1, \ldots, h_n)$ y

$$\begin{array}{rccc} h_k\colon & \Omega \subseteq \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \lambda & \mapsto & a_k + \lambda b_k \end{array}$$

para cada $k = 1, \ldots, n$, tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f_{a,b}\right)(z) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} f\right)(w)(\overline{b}_i)$$

para $z \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $w = h(z)$. Así,

$$
\begin{aligned}
(\Delta f_{a,b})(z) &= 4 \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} f(w) \right) \\
&= 4 \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} f \right) \right](w)(b_j) \\
&= 4 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_j \overline{b}_i \left(\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_i} f \right)(w) \\
&= 4 \langle H_f(w) b, b \rangle
\end{aligned} \tag{1.32}
$$

para $z \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $w = h(z)$, donde $H_f(w)$ es la matriz Hessiana compleja de f en w; es decir, $H_f(w)$ es la matriz de orden $n \times n$ cuyos elementos son $\big(H_f(w)\big)_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_i} f(w)$ para $w = h(z)$. En particular, para $z = 0$, $w = h(0) = a$ y por (1.32), cada $f_{a,b}$ es armónica si y sólo si f es pluriarmónica. $\square$

Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.14 y la Proposición 1.6 es el siguiente corolario.

Corolario 1.15. *Si $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones pluriarmónicas en Ω que convergen uniformemente a f en cada subconjunto compacto de Ω, entonces f es pluriarmónica en Ω.*

Sea $\widetilde{\Delta}$ el **operador de Laplace-Beltrami** definido por

$$
(\widetilde{\Delta} f)(z) = (1 - |z|^2) \left[(\Delta f)(z) - 4 \sum_{i,j=1}^{n} z_i \overline{z}_j \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(z) \right],
$$

para $z \in \mathbb{B}^n$.

Teorema 1.16. *Una función $f \colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es pluriarmónica si y sólo si $\Delta f = 0$ y $\widetilde{\Delta} f = 0$.*

Demostración. Si $f \colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función pluriarmónica, entonces claramente $\Delta f = 0$ y $\widetilde{\Delta} f = 0$. Ahora, si $f \colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función con $\Delta f = 0$ y $\widetilde{\Delta} f = 0$, definimos el operador Λ por

$$
(\Lambda g)(z) = \sum_{i,j=1}^{n} z_i \overline{z}_j \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(z)
$$

para $z \in \mathbb{B}^n$ y $g \colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.

Dado que $\Delta f = 0$, f es una función armónica. Por el Corolario 1.13 puede expresarse como la serie

$$
f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \tag{1.33}
$$

para $z \in \mathbb{B}^n$, en donde $f_k \in H_k$. La serie converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{B}^n$.

Como $\Delta f = 0$ y $\widetilde{\Delta} f = 0$, entonces $\Lambda f = 0$. Utilizando (1.33) y el hecho de que $\Lambda f_k \in H_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, tenemos

$$\Lambda f_k = 0 \tag{1.34}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$. Además, por (1.10), cada f_k se puede expresar como

$$f_k(z) = \sum_{p+q=k} f_{p,q}(z) \tag{1.35}$$

para $z \in \mathbb{B}^n$, en donde $f_{p,q} \in H(p,q)$. Sea M el monomio en $H(p,q)$ definido por

$$M(z) = c z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \overline{z}_1^{\beta_1} \cdots \overline{z}_n^{\beta_n} = c z^{\alpha} \overline{z}^{\beta},$$

con $|\alpha| = p$ y $|\beta| = q$. Como

$$z_i \overline{z}_j \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} c z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \overline{z}_1^{\beta_1} \cdots \overline{z}_n^{\beta_n} = c \alpha_i \beta_j z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \overline{z}_1^{\beta_1} \cdots \overline{z}_n^{\beta_n},$$

entonces $\Lambda M = pqM$ y por lo tanto $\Lambda f_{p,q} = pq f_{p,q}$ para cada $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Utilizando (1.34) y la ecuación anterior, tenemos que $pq f_{p,q} = 0$ para cada $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Es decir, $f_{p,q} = 0$ para todos p y q tales que $pq \neq 0$. Por (1.35),

$$f_k = f_{k,0} + f_{0,k} \tag{1.36}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Los polinomios $f_{k,0}$ y $\overline{f_{0,k}}$ son funciones analíticas. Esto muestra que para $k \in \mathbb{Z}_+$, f_k es un polinomio pluriarmónico. Por (1.33) y el Corolario 1.15, f es una función pluriarmónica. □

Notemos que el Teorema 1.16 se pudo demostrar utilizando la Ecuación 1.32, sin embargo quisimos enfatizar la expansión homogénea vista en (1.31) para funciones pluriarmónicas. Utilizando la misma notación que en la demostración pasada, si $f \colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es pluriarmónica, por (1.33) y (1.36),

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,0}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{0,k}(z) \tag{1.37}$$

para $z \in \mathbb{B}^n$, en donde las series convergen absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{B}^n$. Como f_0 es un polinomio constante y $f_{k,0}$, $\overline{f_{0,k}}$ son funciones analíticas, definiendo

$$g(z) = \frac{1}{2} f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,0}(z) \quad \text{y} \quad h(z) = \frac{1}{2} f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{f_{0,k}}(z) \tag{1.38}$$

y utilizando (1.37) se demuestra uno de los principales resultados de esta sección:

Proposición 1.17. *Una función* $f\colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *es pluriarmónica si y sólo si existen funciones* $g, h\colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *analíticas tales que*

$$f = g + \overline{h}$$

con $g(0) = h(0)$. *En este caso, la descomposición es única.*

Capítulo 2

Espacios de Bergman

En este capítulo repasamos las propiedades más importantes de los núcleos reproductores de los espacios de Bergman analítico y anti-analítico, así como de las proyecciones de Bergman y anti-Bergman asociadas a estos espacios. Como bien es tratado en [12] y [13], muchas de estas propiedades se cumplen en los espacios de Bergman armónico y pluriarmónico. Los resultados de la primera sección se pueden revisar en [23].

2.1. Espacios de Bergman analítico y anti-analítico sobre $\mathbb{D}$

Sea v la medida de área normalizada en $\mathbb{D}$. En coordenadas rectángulares y polares

$$dv(w) = \frac{1}{\pi}\, dxdy = \frac{1}{\pi} r\, dr\, d\theta,$$

con $w = x + iy = re^{i\theta}$.

Definimos ahora el **espacio de Bergman analítico del disco** $A^2(\mathbb{D})$ como el espacio de las funciones analíticas en $L^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}, \Sigma, dv)$.

El espacio de Bergman analítico $A^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$, esto equivale a que la función evaluación puntual es una función continua. Es decir, para cada $z \in \mathbb{D}$, la evaluación puntual

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & A^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(z) \end{array}$$

es un funcional lineal acotado.

Por el Teorema de Representación de Riesz existe un único elemento $K_z \in A^2(\mathbb{D})$ tal que para todo $f \in A^2(\mathbb{D})$, $\varphi(f) = \langle f, K_z \rangle$; es decir,

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f\overline{K_z}\, dv.$$

La función

$$\begin{array}{rccc} K\colon & \mathbb{D}\times\mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z,w) & \mapsto & \overline{K_z(w)} \end{array}$$

se llama **el núcleo de Bergman** de $\mathbb{D}$ y tiene la propiedad reproductora:

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(z,w)\,dv(w),$$

para $f \in A^2(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$.

El núcleo de Bergman K es una forma hermitiana que es analítica en la primera variable y anti-analítica en la segunda variable.

Como $A^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$ y este último espacio es separable, se sigue que $A^2(\mathbb{D})$ es separable. De hecho, $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ con $\varphi_k(z) = \sqrt{k+1}z^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ y $z \in \mathbb{D}$ es una base ortonormal para $A^2(\mathbb{D})$. Así, podemos escribir a K en forma explícita:

$$K(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\langle K_z, \varphi_k\rangle}\,\overline{\varphi_k}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k}(w) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z\overline{w})^k = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2},$$

para $w, z \in \mathbb{D}$. Tenemos que el núcleo reproductor de Bergman normalizado

$$k_z = \frac{K_z}{\|K_z\|}$$

converge débilmente a cero cuando $|z| \to 1^-$. Donde

$$\|K_z\| = \sqrt{\langle K_z, K_z\rangle} = \sqrt{K(z,z)} = \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{2.1}$$

Como $A^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{D})$, entonces existe la proyección ortogonal B de $L_2(\mathbb{D})$ sobre $A^2(\mathbb{D})$, la cual es llamada **la proyección de Bergman**. La proyección de Bergman coincide con el operador integral con núcleo de Bergman; es decir, B tiene la representación integral

$$(Bf)(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(z,w)\,dv(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\,dv(w), \tag{2.2}$$

para $f \in L^2(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$.

Definimos el **espacio de Bergman anti-analítico del disco** $\overline{A^2}(\mathbb{D})$ como el espacio de las funciones anti-analíticas en $L^2(\mathbb{D})$.

Consideremos el operador unitario $J\colon L^2(\mathbb{D}) \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ definido por $(Jf)(z) = f(\overline{z})$. Notemos que $J\big(A^2(\mathbb{D})\big) = \overline{A^2}(\mathbb{D})$. Por lo tanto, $\overline{A^2}(\mathbb{D})$ es cerrado y su núcleo reproductor es

$$\overline{K}(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2},$$

al cual llamamos **el núcleo de Bergman anti-analítico** de $\mathbb{D}$ y tiene la propiedad

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K}(z,w)\, dv(w),$$

para $f \in \overline{A^2}(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$. La proyección ortogonal $\overline{B}$ de $L^2(\mathbb{D})$ sobre su subespacio cerrado $\overline{A^2}(\mathbb{D})$ es llamada **la proyección de Bergman anti-analítica** y tiene la representación integral

$$(\overline{B}f)(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K}(z,w)\, dv(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\overline{z}w)^2}\, dv(w),$$

para $f \in L^2(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$.

2.2. Espacio de Bergman armónico sobre $\mathbb{D}$

Este espacio está relacionado con los espacios de Bergman analítico y anti-analítico, por lo que muchas de las propiedades que satisfacen estos últimos se cumplen también para el espacio de Bergman armónico.

El **espacio de Bergman armónico del disco** $b^2(\mathbb{D})$ es el espacio de las funciones armónicas en $L^2(\mathbb{D})$.

La siguiente proposición nos ayudará a establecer que cada evaluación puntual es continua en $b^2(\mathbb{D})$.

Proposición 2.1. *Dado $z \in \mathbb{D}$ existe una constante C tal que*

$$|f(z)| \leq C\|f\|$$

para toda $f \in b^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{D}$ y $r = \frac{1-|z|}{2}$. Aplicando la Proposición 1.4 para f en $B(z,r) \subseteq \mathbb{D}$ obtenemos

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r^2} \int_{B(z,r)} |f(w)|\, dv(w).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{D}} |f(w)\chi_{B(z,r)}(w)|\, dv(w) \\
&\leq \frac{1}{r^2} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2\, dv(w) \right)^{1/2} \left(\int_{B(z,r)} dv(w) \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{r^2} \|f\| (r^2)^{1/2} \\
&= \frac{1}{r} \|f\|.
\end{aligned}$$

□

Mostraremos a continuación que el espacio de funciones armónicas $b^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 2.2. *El espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Supongamos que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones armónicas que converge a una función f en $L^2(\mathbb{D})$. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Por la Proposición 2.1 existe una constante C_K tal que

$$|f_m(z) - f_k(z)| \leq C_K \|f_m - f_k\|$$

para todo $z \in K$ y $m, k \in \mathbb{N}$. Dado que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $b^2(\mathbb{D}) \subseteq L^2(\mathbb{D})$, la desigualdad anterior implica que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C(K)$. Por lo que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en K, entonces por la Proposición 1.6, $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ a una función armónica g en $\mathbb{D}$. Por otro lado, como $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^2(\mathbb{D})$, alguna subsucesión de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a f puntualmente casi en todas partes de $\mathbb{D}$. Se sigue que $f = g$ casi en todas partes y por lo tanto $f \in b^2(\mathbb{D})$. □

Por la Proposición 2.1, para cada $z \in \mathbb{D}$ la función

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & b^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(z) \end{array}$$

es un funcional lineal acotado en el espacio de Hilbert $b^2(\mathbb{D})$. Por el Teorema de Representación de Riesz existe una única función R_z en $b^2(\mathbb{D})$ tal que $\varphi(f) = \langle f, R_z\rangle$, esto es,

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f\overline{R_z}\, dv$$

para cada $f \in b^2(\mathbb{D})$. La función $R(z,w) = \overline{R_z(w)}$ se llama **núcleo de Bergman armónico** de $\mathbb{D}$.

Demos una base ortonormal para $b^2(\mathbb{D})$ y en encontremos una expresión del núcleo de Bergman armónico de $\mathbb{D}$. Sean

$$\begin{aligned} e_0(z) &= 1 = \varphi_0(z), \\ e_{2m-1}(z) &= \sqrt{m+1}z^m = \varphi_m(z), \\ e_{2m}(z) &= \sqrt{m+1}\overline{z}^m = \overline{\varphi_m}(z) \end{aligned} \tag{2.3}$$

para $m \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}$, donde $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ es base ortonormal para $A^2(\mathbb{D})$. Notemos que para $m, k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\int_{\mathbb{D}} z^m \overline{z}^k \, dv(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^m e^{im\theta})(r^k e^{-ik\theta}) r \, dr \, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^{m+k+1}\, dr \int_0^{2\pi} e^{(m-k)i\theta}\, d\theta, \tag{2.4}$$

$$\int_{\mathbb{D}} z^m z^k \, dv(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^m e^{im\theta})(r^k e^{ik\theta}) r \, dr \, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^{m+k+1}\, dr \int_0^{2\pi} e^{(m+k)i\theta}\, d\theta, \tag{2.5}$$

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{z}^m \overline{z}^k \, dv(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^m e^{-im\theta})(r^k e^{-ik\theta}) r \, dr \, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^{m+k+1}\, dr \int_0^{2\pi} e^{(-m-k)i\theta}\, d\theta, \tag{2.6}$$

donde (2.4) se anula para $m \neq k$, (2.5) y (2.6) se anulan para todo $m, k \in \mathbb{N}$. Además,

$$\int_{\mathbb{D}} z^m \overline{z}^m \, dv(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^{2m+1}\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left.\frac{2(r^{2m+2})}{2m+2}\right|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}_+$. Estos cálculos junto con la Proposición 1.17 muestran que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es una base ortonormal para $b^2(\mathbb{D})$.

Teorema 2.3. *El núcleo de Bergman armónico está dado explícitamente por*

$$R(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} + \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} - 1, \tag{2.7}$$

para $w, z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Recordemos $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+} \cup \{\overline{\varphi_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ordenados como en (2.3) es una base ortonormal para $b^2(\mathbb{D})$. Así, dados $z, w \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} R(z,w) &= \overline{R_z(w)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \overline{\langle R_z, \varphi_k\rangle \varphi_k(w)} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{\langle R_z, \overline{\varphi_k}\rangle \overline{\varphi_k}(w)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle \varphi_k, R_z\rangle \overline{\varphi_k}(w) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle \overline{\varphi_k}, R_z\rangle \varphi_k(w) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k}(w) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_k}(z)\varphi_k(w). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(z,w) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}(k+1)(z\overline{w})^k + \sum_{k\in\mathbb{N}}(k+1)(\overline{z}w)^k \\ &= \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} + \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} - 1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

para $w, z \in \mathbb{D}$. □

El núcleo de Bergman analítico en $A^2(\mathbb{D})$ es una forma hermitiana que es analítica en la primera variable y anti-analítica en la segunda variable. Sin embargo, el núcleo de Bergman armónico en $b^2(\mathbb{D})$ es real y simétrico como se muestra a continuación: Sean $w, z \in \mathbb{D}$, entonces

$$\begin{aligned} R(z,w) &= \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} + \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} - 1 \\ &= \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} + \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} - 1 \\ &= \overline{R(z,w)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(z,w) &= \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} + \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} - 1 \\ &= \frac{1}{(1-\overline{w}z)^2} + \frac{1}{(1-w\overline{z})^2} - 1 \\ &= \overline{R(w,z)} \\ &= R(w,z). \end{aligned}$$

Observemos que el Teorema 2.3 muestra que el núcleo de Bergman armónico de $\mathbb{D}$ está en términos del núcleo de Bergman del espacio $A^2(\mathbb{D})$ y de su conjugado:

$$R_z = K_z + \overline{K_z} - 1 \tag{2.9}$$

El objetivo de la siguiente proposición es acotar la norma del núcleo reproductor armónico.

Proposición 2.4. *La norma del núcleo reproductor armónico satisface*

$$\frac{1}{1-|z|^2} < \|R_z\| < \frac{\sqrt{2}}{1-|z|^2}.$$

Demostración. Tomando $z = w$ en (2.7) tenemos

$$R(z,z) = \frac{2}{(1-|z|^2)^2} - 1.$$

Observemos que
$$\frac{1}{(1-|z|^2)^2} < \frac{2}{(1-|z|^2)^2} - 1 < \frac{2}{(1-|z|^2)^2}$$
y que
$$\|R_z\|^2 = \langle R_z, R_z\rangle = \int_{\mathbb{D}} R(z,w)\overline{R(z,w)}\, dv(w) = \overline{R(z,z)} = R(z,z).$$

Por lo tanto, $\frac{1}{1-|z|^2} < \|R_z\| < \frac{\sqrt{2}}{1-|z|^2}$. □

Al igual que el núcleo de Bergman analítico normalizado, el núcleo de Bergman armónico normalizado converge débilmente a cero conforme los puntos se acercan a S^1. Esto será útil para caracterizar la compacidad de ciertos operadores.

Teorema 2.5. *El núcleo reproductor armónico normalizado $r_z = \frac{R_z}{\|R_z\|}$ converge a cero débilmente en $b^2(\mathbb{D})$ cuando $|z| \to 1$.*

Demostración. Sea f un elemento del espacio dual de $b^2(\mathbb{D})$, por el Teorema de Representación de Riesz, existe $g \in b^2(\mathbb{D})$ tal que
$$f\left(\frac{R_z}{\|R_z\|}\right) = \frac{1}{\|R_z\|} f(R_z) = \frac{1}{\|R_z\|}\langle R_z, g\rangle = \frac{1}{\|R_z\|}\overline{g(z)},$$
para $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto,
$$|f(r_z)| = \frac{|g(z)|}{\|R_z\|}.$$
Utilizando la Proposición 2.4, tenemos
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1-|z|^2)|g(z)| < |f(r_z)| < (1-|z|^2)|g(z)|,$$
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la función g es acotada, pues por el Lema 2.10, $b^2(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$ es denso en $b^2(\mathbb{D})$. Por lo tanto,
$$(1-|z|^2)|g(z)| \leq (1-|z|^2)\|g\|$$
para toda $z \in \mathbb{D}$ y esta última expresión tiende a cero cuando $|z| \to 1$, por lo que
$$\lim_{|z|\to 1} |f(r_z)| = 0.$$
Así, el núcleo reproductor armónico normalizado converge a cero débilmente en $b^2(\mathbb{D})$ cuando $|z| \to 1$. □

La proyección ortogonal Q de $L^2(\mathbb{D})$ sobre su subespacio cerrado $b^2(\mathbb{D})$ se llama **la proyección de Bergman armónica** en $\mathbb{D}$ y por el Teorema 2.3 se puede representar en términos de las proyecciones ortogonales de Bergman en los espacios analítico y anti-analítico de $\mathbb{D}$:

Teorema 2.6. *La proyección de Bergman armónica Q tiene la representación*

$$Qf = Bf + \overline{B}f - \int_{\mathbb{D}} f\,dv,$$

para $f \in L^2(\mathbb{D})$, donde B es la proyección de Bergman analítica en $A^2(\mathbb{D})$ y $\overline{B}$ la proyección de Bergman anti-analítica en $\overline{A}^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Sean $z \in \mathbb{D}$ y $f \in L^2(\mathbb{D})$. Entonces de la propiedad reproductora del núcleo, tenemos

$$\begin{aligned}
(Qf)(z) &= \langle Qf, R_z\rangle \\
&= \langle f, QR_z\rangle \\
&= \langle f, R_z\rangle \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w)R(z,w)\,dv(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w)\left(\frac{1}{(1-z\overline{w})^2} + \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} - 1\right) dv(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\,dv(w) + \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\overline{z}w)^2}\,dv(w) - \int_{\mathbb{D}} f(w)\,dv(w) \\
&= (Bf)(z) + (\overline{B}f)(z) - \int_{\mathbb{D}} f(w)\,dv(w).
\end{aligned}$$

□

Esto es, Q puede escribirse como

$$Q = B + \overline{B} + S,$$

donde B y $\overline{B}$ son las proyecciones de Bergman en $A^2(\mathbb{D})$ y $\overline{A}^2(\mathbb{D})$ respectivamente y S es el operador integral dado por

$$(Sf)(z) = -\int_{\mathbb{D}} f(w)\,dv(w),$$

para $z \in \mathbb{D}$ Este operador es unidimensional y por lo tanto compacto.

2.3. Espacio de Bergman armónico sobre $\mathbb{B}^n$

A diferencia de lo que sucede en el disco, el núcleo reproductor del espacio de Bergman armónico en $\mathbb{B}^n$ con $n > 1$ no se puede representar en términos de los núcleos de Bergman analítico y anti-analítico. Sin embargo, veremos una representación del mismo en términos de armónicos esféricos.

El **espacio de Bergman armónico de la bola unitaria** $b^2(\mathbb{B}^n)$ es el espacio de las funciones armónicas en $L^2(\mathbb{B}^n)$. La siguiente proposición nos ayudará a verificar que cada evaluación puntual es continua en $b^2(\mathbb{B}^n)$.

Proposición 2.7. *Dado $z \in \mathbb{B}^n$ existe una constante C tal que*

$$|f(z)| \leq C\|f\|$$

para toda $f \in b^2(\mathbb{B}^n)$.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{B}^n$ y $r = \frac{1-|z|}{2}$. Aplicando la Proposición 1.4 para f en $B(z,r) \subseteq \mathbb{B}^n$ obtenemos

$$|f(z)| \leq \frac{1}{v\big(B(z,r)\big)} \int\limits_{B(z,r)} |f(w)|\, dv(w).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{v\big(B(z,r)\big)} \int\limits_{\mathbb{B}^n} |f(w)\chi_{B(z,r)}(w)|\, dv(w) \\
&\leq \frac{1}{v\big(B(z,r)\big)} \left(\int\limits_{\mathbb{B}^n} |f(w)|^2\, dv(w) \right)^{1/2} \left(\int\limits_{B(z,r)} dv(w) \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{v\big(B(z,r)\big)} \|f\| \Big[v\big(B(z,r)\big)^{1/2} \Big] \\
&= \frac{1}{v\big(B(z,r)\big)^{1/2}} \|f\|.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.8. *El espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{B}^n)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{B}^n)$.*

Demostración. Supongamos que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones armónicas que converge a una función f en $L^2(\mathbb{B}^n)$. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{B}^n$. Por la Proposición 2.7 existe una constante C_K tal que

$$|f_m(z) - f_k(z)| \leq C_K \|f_m - f_k\|$$

para todo $z \in K$ y $m, k \in \mathbb{N}$. Dado que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $b^2(\mathbb{B}^n) \subseteq L^2(\mathbb{B}^n)$, la desigualdad anterior implica que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C(K)$. Por lo que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en K, entonces por la Proposición 1.6, $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{B}^n$ a una función armónica g en $\mathbb{B}^n$. Por otro lado, como $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^2(\mathbb{B}^n)$, alguna subsucesión de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a f puntualmente casi en todas partes de $\mathbb{B}^n$. Se sigue que $f = g$ casi en todas partes y por lo tanto $f \in b^2(\mathbb{B}^n)$. □

Por la Proposición 2.7, para cada $z \in \mathbb{B}^n$ la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & b^2(\mathbb{B}^n) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(z) \end{array}$$

es un funcional lineal acotado en el espacio de Hilbert $b^2(\mathbb{B}^n)$. Por el Teorema de Representación de Riesz existe una única función R_z en $b^2(\mathbb{B}^n)$ tal que $\varphi(f) = \langle f, R_z \rangle$; esto es,

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}^n} f \overline{R_z}\, dv \tag{2.10}$$

para cada $f \in b^2(\mathbb{B}^n)$. La función $R(z,w) = \overline{R_z(w)}$ se llama **núcleo de Bergman armónico** de $\mathbb{B}^n$.

Cuando $n = 1$, podemos dar una base ortonormal explícita para $b^2(\mathbb{D})$ y con ella hallar una expresión del núcleo de Bergman armónico de $\mathbb{D}$ en términos de los núcleos de Bergman analítico y anti-analítico como se realizó en la sección anterior. Cuando $n > 1$, esto no es posible. Sin embargo, deducimos algunas propiedades del núcleo de Bergman armónico en $\mathbb{B}^n$ con los mismos métodos que utilizamos en la Sección 1.4 para los armónicos zonales.

Dado $z \in \mathbb{B}^n$, sea $u = \operatorname{Im} R_z$. Tenemos que $u \in b^2(\mathbb{B}^n)$ es real valuada y por (2.10),

$$0 = \operatorname{Im} u(z) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{B}^n} u \overline{R_z}\, dv = -\int_{\mathbb{B}^n} u \operatorname{Im} R_z\, dv = -\int_{\mathbb{B}^n} (\operatorname{Im} R_z)^2\, dv.$$

Por lo que $\operatorname{Im} R_z = 0$; es decir, R_z es real valuada para cada $z \in \mathbb{B}^n$.

Como $L^2(\mathbb{B}^n)$ es un espacio de Hilbert y $b^2(\mathbb{B}^n) \subseteq L^2(\mathbb{B}^n)$ es cerrado por el Teorema 2.8, entonces $b^2(\mathbb{B}^n)$ es un espacio de Hilbert separable. Sea $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para $b^2(\mathbb{B}^n)$. Entonces, para todo $w, z \in \mathbb{B}^n$,

$$\begin{aligned} R_w(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle R_w, \phi_m \rangle \phi_m(z) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\phi_m}(w) \phi_m(z) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(z) \overline{\phi_m}(w) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\phi_m}(z) \phi_m(w) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle R_z, \phi_m \rangle \phi_m(w) \\ &= R_z(w). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Es decir, $R(w,z) = R(z,w)$ para todo $w, z \in \mathbb{B}^n$.

Además,

$$\|R_z\|^2 = \langle R_z, R_z\rangle = R_z(z)$$

para todo $z \in \mathbb{B}^n$.

La proyección ortogonal Q de $L^2(\mathbb{B}^n)$ sobre su subespacio cerrado $b^2(\mathbb{B}^n)$ se llama **la proyección de Bergman armónica** en $\mathbb{B}^n$. Utilizando la propiedad reproductora de R podemos representar a la proyección de Bergman armónica en $\mathbb{B}^n$ como un operador integral:

$$(Qf)(z) = \langle Qf, R_z\rangle = \langle f, R_z\rangle = \int_{\mathbb{B}^n} f(w)R(z,w)\, dv(w) \tag{2.12}$$

para $f \in L^2(\mathbb{B}^n)$ y $z \in \mathbb{B}^n$.

Para representar la proyección de Bergman armónica en $\mathbb{B}^n$ en términos de armónicos zonales, empezamos extendiendo la definición de armónico zonal de (1.15) homogéneamente; es decir, $\widetilde{Z}_0 = 1$ y para $k > 0$, $\widetilde{Z}_k \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ se define por

$$\widetilde{Z}_k(w,z) = |w|^k|z|^k Z_k\left(\frac{w}{|w|}, \frac{z}{|z|}\right)$$

para $w, z \in \mathbb{C}^n$ no nulos. Si w o z son iguales a 0, $\widetilde{Z}_k(w,z) = 0$. Por (1.14) y (1.17), $\widetilde{Z}_k \in H_k(\mathbb{R}^{2n})$ y $\widetilde{Z}_k$ es simétrica y real valuada para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Utilizando (1.25) y (1.9), obtenemos la siguiente propiedad reproductora de $(1+\frac{k}{n})\widetilde{Z}_k$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}^n} f(w)\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\widetilde{Z}_k(z,w)dv(w) &= 2n\int_0^1\int_{S^{2n-1}} r^{2n-1} f(r\zeta)\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\widetilde{Z}_k(z,r\zeta)\, dr\, d\sigma(\zeta)\\
&= 2n\int_0^1 r^{2n+2k-1}\, dr\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\int_{S^{2n-1}} f(\zeta)\widetilde{Z}_k(z,\zeta)\, d\sigma(\zeta)\\
&= 2n\int_0^1 r^{2n+2k-1}\, dr\Big(1+\frac{k}{n}\Big) f(z)\\
&= \frac{2n}{2n+2k}\Big(1+\frac{k}{n}\Big) f(z)\\
&= f(z)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

para $f \in H_k(\mathbb{R}^{2n})$ y $z \in \mathbb{C}^n$.

Lema 2.9. *Si $m \neq k$, entonces $H_m(\mathbb{R}^{2n})$ es ortogonal a $H_k(\mathbb{R}^{2n})$ en $L^2(\mathbb{B}^n)$.*

Demostración. Para $f \in H_k(\mathbb{R}^{2n})$ y $g \in H_m(\mathbb{R}^{2n})$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int\limits_{\mathbb{B}^n} f(z)\overline{g}(z)\,dv(z)\\ &= \int\limits_{\mathbb{B}^n} |z|^k f\left(\frac{z}{|z|}\right)|z|^m\overline{g}\left(\frac{z}{|z|}\right)\,dv(z)\\ &= 2n\int\limits_0^1 r^{k+m+2n-1}\,dr \int\limits_{S^{2n-1}} f(w)\overline{g}(w)\,d\sigma(w). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como H_m y H_k son ortogonales en $L^2(S^{2n-1})$ para $m \neq k$,

$$\int\limits_{S^{2n-1}} f(w)\overline{g}(w)\,d\sigma(w) = 0. \tag{2.15}$$

Por (2.14) y (2.15) se sigue que $H_m(\mathbb{R}^{2n})$ y $H_k(\mathbb{R}^{2n})$ son ortogonales en $L^2(\mathbb{B}^n)$ para $m \neq k$. □

Utilizando el Lema 2.9 y la propiedad reproductora de (2.13) tenemos

$$f(z) = \left\langle f, \sum_{k=0}^{m}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\widetilde{Z}_{z,k}\right\rangle \tag{2.16}$$

para todo polinomio armónico f de grado m.

Lema 2.10. *El conjunto de polinomios armónicos es denso en $b^2(\mathbb{B}^n)$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Corolario 1.13, que las dilataciones son armónicas y de que $C(\overline{\mathbb{B}^n})$ es denso en $L^2(\mathbb{B}^n)$. □

Teorema 2.11.

$$R(w,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\widetilde{Z}_k(w,z)$$

para $w, z \in \mathbb{B}^n$, donde la serie converge absoluta y uniformemente en $K \times \mathbb{B}^n$ para todo compacto $K \subseteq \mathbb{B}^n$.

Demostración. Utilizando (1.22) y el Corolario 1.10, para $w, z \in \mathbb{B}^n$ no nulos se tiene

$$|\widetilde{Z}_k(w,z)| = |w|^k|z|^k\left|Z_k\left(\frac{w}{|w|}, \frac{z}{|z|}\right)\right| \leq |w|^k|z|^k h_k \leq |w|^k|z|^k C k^{2n-2}.$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{(1+\frac{k}{n})k^{2n-2}} = 1$, por el teorema de Cauchy-Hadamard la serie

$$\phi_w(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\widetilde{Z}_k(w,z)$$

converge absoluta y uniformemente en $K\times\mathbb{B}^n$ para todo compacto $K\subseteq\mathbb{B}^n$. Notemos que $\widetilde{Z}_{w,k}\Big|_{\mathbb{B}^n} \in b^2(\mathbb{B}^n)$ para $k\in\mathbb{Z}_+$, implica que $\phi_w\in b^2(\mathbb{B}^n)$ por el Teorema 2.8.

Por (2.16),

$$\langle f,\phi_w\rangle = f(w) = \langle f, R_w\rangle$$

para $w\in\mathbb{B}^n$ y todo polinomio armónico f. Por el Lema 2.10, $R_w=\phi_w$ para todo $w\in\mathbb{B}^n$; es decir,

$$R(w,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\widetilde{Z}_k(w,z)$$

para $w,z\in\mathbb{B}^n$. $\square$

Si f es un polinomio de grado m en $\mathbb{R}^{2n}$, entonces su dilatación f_r también es un polinomio de grado m para cada $0<r<1$. Por el Corolario 1.8

$$\int\limits_{S^{2n-1}} f(r\zeta)Z_{k,w}(\zeta)\,d\sigma(\zeta) = 0$$

para $k>m$ y $0<r<1$. Así,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{B}^n} f(z)\widetilde{Z}_k(w,z)\,dv(z) &= \int\limits_{\mathbb{B}^n} f(z)|z|^k Z_{w,k}\left(\frac{z}{|z|}\right)\,dv(z)\\ &= 2n\int\limits_0^1 r^{k+2n-1}\int\limits_{S^{2n-1}} f(r\zeta)Z_{w,k}(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\,dr\\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

para todo $k>m$. Finalmente, del Teorema 2.11, (2.12) y (2.17) se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.12. *Si f es un polinomio de grado m en $\mathbb{R}^{2n}$, entonces $Q(f)$ es un polinomio de grado menor o igual a m. Además,*

$$(Qf)(z) = \sum_{k=0}^{m}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\int\limits_{\mathbb{B}^n} f(w)\widetilde{Z}_k(z,w)\,dv(w)$$

para $z\in\mathbb{B}^n$.

2.4. Espacio de Bergman pluriarmónico sobre $\mathbb{B}^n$ con peso

Debido a que toda función pluriarmónica en $\mathbb{B}^n$ es la suma de una función analítica y una función anti-analítica por la Proposición 1.17, este espacio se vincula con los espacios de Bergman analítico y anti-analítico en la bola unitaria.

Sea $\mu\colon (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ medible tal que $\{r \in (0,1) : \mu(r) > 0\}$ tiene medida igual a uno y

$$\int_{\mathbb{B}^n} \mu(|z|)\, dv(z) = 2n \int_0^1 \mu(r) r^{2n-1}\, dr \int_{S^{2n-1}} d\sigma = 2n \int_0^1 \mu(r) r^{2n-1}\, dr \quad \text{es finita,}$$

donde v es la medida de volumen de Lebesgue normalizada en $\mathbb{B}^n$ y σ es la medida de superficie de Lebesgue normalizada en S^{2n-1}.

El **espacio de Bergman pluriarmónico con peso** $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ es el espacio de las funciones pluriarmónicas en $L^2_\mu(\mathbb{B}^n) := L^2(\mathbb{B}^n, \Sigma, v_\mu)$, donde v_μ es la medida definida por $dv_\mu(z) = \mu(|z|)\, dv(z)$.

Proposición 2.13. *Dado $z \in \mathbb{B}^n$ existe una constante C tal que*

$$|f(z)| \leq C\|f\|$$

para toda $f \in b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{B}^n$ y $r = \frac{1-|z|}{2}$. Aplicando la Propiedad del Valor Medio 1.8 para f en $\partial B(z,r)$:

$$f(z) = \int_{S^{2n-1}} f(z + rw)\, d\sigma(w)$$

y después integrando en coordenadas polares obtenemos

$$|f(z)| \leq \frac{1}{v_\mu\big(B(z,r)\big)} \int_{B(z,r)} |f(w)|\, dv_\mu(w).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{v_\mu\big(B(z,r)\big)} \int_{\mathbb{B}^n} |f(w)\chi_{B(z,r)}(w)|\, dv_\mu(w) \\
&\leq \frac{1}{v_\mu\big(B(z,r)\big)} \left(\int_{\mathbb{B}^n} |f(w)|^2\, dv_\mu(w) \right)^{1/2} \left(\int_{B(z,r)} dv_\mu(w) \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{v_\mu\big(B(z,r)\big)} \|f\| \Big[v_\mu\big(B(z,r)\big) \Big]^{1/2} \\
&= \frac{1}{v_\mu\big(B(z,r)\big)^{1/2}} \|f\|.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.14. *El espacio de Bergman pluriarmónico $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ es un subespacio cerrado de $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$.*

Demostración. Supongamos que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones pluriarmónicas que converge a una función f en $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{B}^n$. Por la Proposición 2.13 existe una constante C_K tal que

$$|f_m(z) - f_k(z)| \leq C_K \|f_m - f_k\|$$

para todo $z \in K$ y $m, k \in \mathbb{N}$. Dado que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \subseteq L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$, la desigualdad anterior implica que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C(K)$. Por lo que $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en K, entonces por el Corolario 1.15, $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{B}^n$ a una función pluriarmónica g en $\mathbb{B}^n$. Por otro lado, como $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$, alguna subsucesión de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a f puntualmente casi en todas partes de $\mathbb{B}^n$. Se sigue que $f = g$ casi en todas partes y por lo tanto $f \in b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. □

Por la Proposición 2.13, para cada $z \in \mathbb{B}^n$ la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & b^2_\mu(\mathbb{B}^n) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(z) \end{array}$$

es un funcional lineal acotado en el espacio de Hilbert $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. Por el Teorema de Representación de Riesz existe una única función R^μ_z en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ tal que $\varphi(f) = \langle f, R^\mu_z\rangle$, esto es,

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}^n} f\overline{R^\mu_z}\, dv_\mu \tag{2.18}$$

para cada $f \in b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. La función $R_\mu(z,w) = \overline{R^\mu_z(w)}$ se llama **núcleo de Bergman pluriarmónico** de $\mathbb{B}^n$.

Damos una base ortonormal explícita para $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ para encontrar una expresión del núcleo de Bergman pluriarmónico de $\mathbb{B}^n$. Sean

$$e_{\alpha,0}(z) = \sqrt{\frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!}} \left(2n\int_0^1 t^{2|\alpha|+2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}} z^\alpha = \varphi_\alpha(z),$$

$$e_{0,\beta}(z) = \sqrt{\frac{(n-1+|\beta|)!}{(n-1)!\beta!}} \left(2n\int_0^1 t^{2|\beta|+2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-\frac{1}{2}} \overline{z}^\beta = \overline{\varphi_\beta}(z) \tag{2.19}$$

para $|\alpha|, |\beta| \in \mathbb{Z}_+$ y $z \in \mathbb{B}^n$, donde $\{\varphi_\alpha\}_{|\alpha|\in\mathbb{Z}_+}$ es base ortonormal para el espacio de Bergman anlítico con peso $A^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. Notemos que para $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$,

$$\int_{\mathbb{B}^n} z^\alpha \overline{z}^\beta \, dv(z) = 2n \int_0^1 r^{|\alpha|+|\beta|+2n-1} \mu(r) \, dr \int_{S^{2n-1}} w^\alpha \overline{w}^\beta \, d\sigma(w), \tag{2.20}$$

$$\int_{\mathbb{B}^n} z^\alpha z^\beta \, dv(z) = 2n \int_0^1 r^{|\alpha|+|\beta|+2n-1} \mu(r) \, dr \int_{S^{2n-1}} w^\alpha w^\beta \, d\sigma(w), \tag{2.21}$$

$$\int_{\mathbb{B}^n} \overline{z}^\alpha \overline{z}^\beta \, dv(z) = 2n \int_0^1 r^{|\alpha|+|\beta|+2n-1} \mu(r) \, dr \int_{S^{2n-1}} \overline{w}^\alpha \overline{w}^\beta \, d\sigma(w), \tag{2.22}$$

donde (2.20) se anula para $\alpha \neq \beta$, (2.21) y (2.22) se anulan para todo α, β distintos de $(0, \dots, 0)$ por la invarianza de σ bajo rotaciones. Además,

$$\int_{\mathbb{B}^n} z^\alpha \overline{z}^\alpha \, dv(z) = 2n \int_0^1 r^{2|\alpha|+2n-1} \mu(r) \, dr \int_{S^{2n-1}} |w^\alpha|^2 \, d\sigma(w) \tag{2.23}$$

para $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, donde

$$\int_{S^{2n-1}} |w^\alpha|^2 \, d\sigma(w) = \frac{(n-1)!\alpha!}{(n-1+\alpha)!}, \tag{2.24}$$

ya que por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-|z|^2} \, dV(z) &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)^{\alpha_k} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \\
&= \prod_{k=1}^n \int_0^\infty r^{\alpha_k} e^{-r} \left(\frac{1}{2}\right) dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \prod_{k=1}^n \pi \int_0^\infty r^{\alpha_k} e^{-r} \, dr \\
&= \pi^n \prod_{k=1}^n \Gamma(\alpha_k + 1) \\
&= \pi^n \alpha! \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

donde V es la medida de Lebesgue en $\mathbb{B}^n$; es decir,

$$dV = V(\mathbb{B}^n) \, dv.$$

Por otro lado, integrando en coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-|z|^2}\, dV(z) &= 2nV(\mathbb{B}^n) \int_0^\infty r^{2|\alpha|+2n-1} e^{-r^2}\, dr \int_{S^{2n-1}} |w^\alpha|^2\, d\sigma(w) \\
&= 2nV(\mathbb{B}^n) \int_0^\infty t^{|\alpha|+n-\frac{1}{2}} e^{-t} \left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2}\right) dt \int_{S^{2n-1}} |w^\alpha|^2\, d\sigma(w) \\
&= nV(\mathbb{B}^n)\Gamma(|\alpha|+n) \int_{S^{2n-1}} |w^\alpha|^2\, d\sigma(w) \\
&= nV(\mathbb{B}^n)(|\alpha|+n-1)! \int_{S^{2n-1}} |w^\alpha|^2\, d\sigma(w). \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Comparando (2.25) y (2.26) obtenemos

$$\int_{S^{2n-1}} |w^\alpha|^2\, d\sigma(w) = \frac{\pi^n \alpha!}{nV(\mathbb{B}^n)(|\alpha|+n-1)!}. \qquad (2.27)$$

Tomando $\alpha = (0, \cdots, 0)$ en (2.27) tenemos

$$1 = \frac{\pi^n}{nV(\mathbb{B}^n)(n-1)!}.$$

Es decir, $V(\mathbb{B}^n) = \frac{\pi^n}{n!}$. Sustituyendo en (2.27) obtenemos (2.24) y por lo tanto, (2.23) se puede escribir como

$$\int_{\mathbb{B}^n} |z^\alpha|^2\, dv(z) = \frac{(n-1)!\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!}(2n) \int_0^1 r^{2|\alpha|+2n-1} \mu(r)\, dr, \qquad (2.28)$$

para $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Estos cálculos junto con la Proposición 1.17 muestran que $\{e_{\alpha,\beta}\}_{|\alpha|+|\beta|\in\mathbb{Z}_+}$ es una base ortonormal para $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$.

Teorema 2.15. *El núcleo de Bergman pluriarmónico se expresa en términos del núcleo de Bergman del espacio $A^2_\mu(\mathbb{B})$:*

$$R_\mu = K_\mu + \overline{K_\mu} - \left(2n \int_0^1 t^{2n-1} \mu(t)\, dt\right)^{-1},$$

donde K_μ es el núcleo de Bergman analítico con peso del espacio $A^2_\mu(\mathbb{B})$.

Demostración. Recordemos $\{\varphi_\alpha\}_{|\alpha|\in\mathbb{Z}_+} \cup \{\overline{\varphi_\alpha}\}_{|\alpha|\in\mathbb{N}}$ ordenados como en (2.19) es una base ortonormal para $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. Así, dados $z, w \in \mathbb{B}^n$,

$$R_\mu(z,w) = \overline{R^\mu_z(w)} = \sum_{|\alpha|\in\mathbb{Z}_+} \overline{\langle R^\mu_z, \varphi_\alpha\rangle \varphi_\alpha(w)} + \sum_{|\alpha|\in\mathbb{N}} \overline{\langle R^\mu_z, \overline{\varphi_\alpha}\rangle \overline{\varphi_\alpha}(w)}.$$

Observemos que para $|\alpha| \in \mathbb{Z}_+$

$$\langle R_z^\mu, \varphi_\alpha \rangle = \overline{\langle \varphi_\alpha, R_z^\mu \rangle} = \overline{\varphi_\alpha}(z) \quad \text{y} \quad \langle R_z^\mu, \overline{\varphi_\alpha} \rangle = \overline{\langle \overline{\varphi_\alpha}, R_z^\mu \rangle} = \varphi_\alpha(z).$$

Entonces

$$\begin{aligned} R_\mu(z,w) &= \sum_{|\alpha|\in\mathbb{Z}_+} \varphi_\alpha(z)\overline{\varphi_\alpha}(w) + \sum_{|\alpha|\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_\alpha}(z)\varphi_\alpha(w) \\ &= \sum_{|\alpha|\in\mathbb{Z}_+} \frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!} \left(2n \int_0^1 t^{2|\alpha|+2n-1}\mu(t)\,dt \right)^{-1} (z\overline{w})^\alpha \\ &\quad + \sum_{|\alpha|\in\mathbb{N}} \frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!} \left(2n \int_0^1 t^{2|\alpha|+2n-1}\mu(t)\,dt \right)^{-1} (\overline{z}w)^\alpha \\ &= K_\mu(z,w) + \overline{K_\mu}(z,w) - \left(2n \int_0^1 t^{2n-1}\mu(t)\,dt \right)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

para $w, z \in \mathbb{B}^n$. □

El núcleo de Bergman pluriarmónico en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ es real valuada y simétrico como se muestra a continuación:

Dado $z \in \mathbb{B}^n$, sea $u = \operatorname{Im} R_z^\mu$. Tenemos que $u \in b^2_\mu(\mathbb{B})$ es real valuada y por (2.18),

$$0 = \operatorname{Im} u(z) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{B}^n} u\overline{R_z^\mu}\,dv_\mu = -\int_{\mathbb{B}^n} u \operatorname{Im} R_z^\mu\,dv_\mu = -\int_{\mathbb{B}^n} (\operatorname{Im} R_z^\mu)^2\,dv_\mu.$$

Por lo que $\operatorname{Im} R_z^\mu = 0$; es decir, R_z^μ es real valuada para cada $z \in \mathbb{B}^n$.

Consideremos la base ortonormal $\{e_{\alpha,\beta}\}_{|\alpha|+|\beta|\in\mathbb{Z}_+}$ para $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ descrita en (2.19). Entonces, para todo $w, z \in \mathbb{B}^n$,

$$\begin{aligned} R_w^\mu(z) &= \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} \langle R_w^\mu, e_{\alpha,\beta}\rangle e_{\alpha,\beta}(z) \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} \overline{e_{\alpha,\beta}}(w) e_{\alpha,\beta}(z) \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} e_{\alpha,\beta}(z)\overline{e_{\alpha,\beta}}(w) \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} \overline{e_{\alpha,\beta}}(z) e_{\alpha,\beta}(w) \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} \langle R_z^\mu, e_{\alpha,\beta}\rangle e_{\alpha,\beta}(w) \\ &= R_z^\mu(w). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Es decir, $R_\mu(w,z) = \overline{R_\mu(z,w)}$ para todo $w, z \in \mathbb{B}^n$.

Además,

$$\|R_z^\mu\|^2 = \langle R_z^\mu, R_z^\mu \rangle = R_z^\mu(z)$$

para todo $z \in \mathbb{B}^n$.

La proyección ortogonal Q_μ de $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ sobre su subespacio cerrado $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ se llama **la proyección de Bergman pluriarmónica** en $\mathbb{B}^n$ y por el Teorema 2.15 se puede representar en términos de las proyecciones ortogonales de Bergman en los espacios analítico y anti-analítico con peso de $\mathbb{B}^n$:

Teorema 2.16. *La proyección de Bergman pluriarmónica Q_μ tiene la representación*

$$Q_\mu f = B_\mu f + \overline{B_\mu} f - \left(2n \int_0^1 t^{2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1} \int_{\mathbb{B}^n} f\,dv_\mu,$$

para $f \in L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$, donde B_μ es la proyección de Bergman analítica sobre $A^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ y $\overline{B_\mu}$ la proyección de Bergman anti-analítica sobre $\overline{A}^2_\mu(\mathbb{B}^n)$.

Demostración. Sean $z \in \mathbb{B}^n$ y $f \in L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. Entonces de la propiedad reproductora del núcleo, tenemos

$$\begin{aligned}
(Q_\mu f)(z) &= \langle Q_\mu f, R_z^\mu \rangle \\
&= \langle f, Q_\mu R_z^\mu \rangle \\
&= \langle f, R_z^\mu \rangle \\
&= \int_{\mathbb{B}^n} f(w) R_\mu(z,w)\,dv_\mu(w) \\
&= \int_{\mathbb{B}^n} f(w) \left(K_\mu(z,w) + \overline{K_\mu}(z,w) - \left(2n \int_0^1 t^{2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1} \right) dv_\mu(w) \\
&= \int_{\mathbb{B}^n} f(w) K_\mu(z,w)\,dv_\mu(w) + \int_{\mathbb{B}^n} f(w)\overline{K_\mu}(z,w)\,dv_\mu(w) \\
&\quad - \left(2n \int_0^1 t^{2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1} \int_{\mathbb{B}^n} f(w)\,dv_\mu(w) \\
&= (B_\mu f)(z) + (\overline{B_\mu} f)(z) - \left(2n \int_0^1 t^{2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1} \int_{\mathbb{B}^n} f(w)\,dv_\mu(w).
\end{aligned}$$

□

Esto es, Q_μ puede escribirse como

$$Q_\mu = B_\mu + \overline{B_\mu} + S_\mu,$$

donde B_μ y $\overline{B_\mu}$ son las proyecciones de Bergman en $A^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ y $\overline{A}^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ respectivamente y S_μ es el operador integral unidimensional dado por

$$(S_\mu f)(z) = -\left(2n\int_0^1 t^{2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1}\int_{\mathbb{B}^n} f(w)\,dv_\mu(w).$$

Notemos que si

$$\begin{array}{rccc} \mu\colon & (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & r & \mapsto & \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}(1-r^2)^\lambda \end{array}$$

con $\lambda > -1$, entonces $\{r \in (0,1) : \mu(r) > 0\}$ tiene medida igual a uno y

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}^n} \mu(|z|)\,dv(z) &= \frac{2n\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}\int_0^1 (1-r^2)^\lambda r^{2n-1}\,dr\int_{S^{2n-1}} d\sigma \\ &= \frac{2n\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}\int_0^1 (1-r^2)^\lambda r^{2n-1}\,dr \\ &= \frac{n\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}\cdot\frac{\Gamma(n)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

En este caso, la base ortonormal para $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ descrita en (2.19) toma la forma

$$\begin{aligned} e_{\alpha,0}(z) &= \sqrt{\frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!}}\left(\frac{2n\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}\int_0^1 t^{2|\alpha|+2n-1}(1-t^2)^\lambda\,dt\right)^{-\frac{1}{2}} z^\alpha \\ &= \sqrt{\frac{\Gamma(n+|\alpha|+\lambda+1)}{\alpha!\Gamma(n+\lambda+1)}}z^\alpha \\ e_{0,\beta}(z) &= \sqrt{\frac{(n-1+|\beta|)!}{(n-1)!\beta!}}\left(\frac{2n\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}\int_0^1 t^{2|\beta|+2n-1}(1-t^2)^\lambda\,dt\right)^{-\frac{1}{2}} \overline{z}^\beta \\ &= \sqrt{\frac{\Gamma(n+|\beta|+\lambda+1)}{\beta!\Gamma(n+\lambda+1)}}\overline{z}^\beta \end{aligned}$$

De (2.29) vemos que el núcleo de Bergman pluriarmónico es

$$
\begin{aligned}
R_\mu(z,w) &= \sum_{|\alpha|\in\mathbb{Z}_+} \frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!}\left(2n\int_0^1 t^{2|\alpha|+2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1}(z\overline{w})^\alpha \\
&\quad + \sum_{|\alpha|\in\mathbb{N}} \frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!}\left(2n\int_0^1 t^{2|\alpha|+2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1}(\overline{z}w)^\alpha \\
&= \sum_{|\alpha|\in\mathbb{Z}_+} \frac{\Gamma(n+|\alpha|+\lambda+1)}{\alpha!\Gamma(n+\lambda+1)}(z\overline{w})^\alpha + \sum_{|\alpha|\in\mathbb{N}} \frac{\Gamma(n+|\alpha|+\lambda+1)}{\alpha!\Gamma(n+\lambda+1)}(\overline{z}w)^\alpha \\
&= \frac{1}{\big(1-\langle z,w\rangle\big)^{n+\lambda+1}} + \frac{1}{\big(1-\langle w,z\rangle\big)^{n+\lambda+1}} - 1,
\end{aligned}
$$

para $w, z \in \mathbb{B}^n$. En este caso la proyección de Bergman pluriarmónica puede escribirse como

$$
Q_\mu = B_\mu + \overline{B_\mu} + S_\mu,
$$

donde B_μ y $\overline{B_\mu}$ son las proyecciones de Bergman sobre $A^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ y $\overline{A}^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ respectivamente y S_μ es el operador integral unidimensional dado por

$$
(Sf)(z) = -\int_{S^{2n-1}} f(w)\,dv_\mu(w).
$$

Capítulo 3

Operadores radiales en el espacio de Bergman armónico

Una de las clases más importantes de operadores en la teoría de espacios de Bergman son los operadores de Toeplitz, los cuales están definidos en términos del núcleo reproductor. En este capítulo estudiamos operadores de Toeplitz radiales actuando en el espacio de Bergman armónico. Demostramos que un operador acotado que actúa sobre este espacio es radial si y sólo si se diagonaliza con respecto a la base canónica. Esto es, existe un isomorfismo isométrico entre los operadores radiales y sus sucesiones de valores propios. En este capítulo nos basamos principalmente en [11].

Como antecedentes de estos resultado tenemos que en [10], Boris Korenblum y Kehe Zhu demuestran que los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado en el espacio de Bergman analítico del disco unitario son diagonales respecto a la base polinómica estándar en $A^2(\mathbb{D})$ y obtienen criterios de compacidad para este tipo de operadores. Posteriormente, en [2], S. Axler y D. Zheng estudian a operadores que se pueden expresar como sumas finitas de productos finitos de operadores de Toeplitz con símbolos acotados. En espacios de Bergman analíticos en la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$, esto es realizado por K. Stroethoff en [19]. Jie Miao y Karel Stroethoff extienden estos criterios de compacidad para el espacio de Bergman armónico en la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$ en [14] y [20], respectivamente.

Por lo que vemos, la caracterización de los operadores de Toeplitz compactos con símbolo radial se ha tratado en el espacio de Bergman analítico en [2], [10], [19] y [25]. En [20] se muestra que si a es un símbolo radial acotado, T_a es compacto en $b^2(\mathbb{B}^n)$ si y sólo si su transformada de Berezin tiende a cero cuando $|z| \to 1$.

3.1. Operadores radiales y de Toeplitz

Para $a \in L^\infty(\mathbb{D})$, definimos el **operador de Toeplitz con símbolo** a por $T_a = QM_a$, donde Q es la proyección de Bergman sobre $b^2(\mathbb{D})$. Es decir,

$$\begin{array}{rccc} T_a\colon & b^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & b^2(\mathbb{D}) \\ & f & \mapsto & Q(af). \end{array}$$

El operador T_a es un operador lineal y acotado con norma menor o igual que $\|a\|$, pues $\|T_a f\| = \|QM_a f\| \leq \|Q\|\|M_a\|\|f\| = \|a\|\|f\|$ para $f \in b^2(\mathbb{D})$. Además, por el Teorema 2.16 el operador de Toeplitz T_a tiene la representación integral

$$\begin{aligned}(T_a f)(z) &= \int_{\mathbb{D}} a(w)f(w)R(z,w)\,dv(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{a(w)f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\,dv(w) + \int_{\mathbb{D}} \frac{a(w)f(w)}{(1-\overline{z}w)^2}\,dv(w) - \int_{\mathbb{D}} a(w)f(w)\,dv(w)\end{aligned}$$

para $f \in b^2(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$.

Al igual que en el espacio de Bergman analítico $A^2(\mathbb{D})$, los operadores de Toeplitz sobre $b^2(\mathbb{D})$ cumplen las siguientes propiedades.

Proposición 3.1. *Si $a, b \in L^\infty(\mathbb{D})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces:*

a) $T_{\alpha a+\beta b} = \alpha T_a + \beta T_b$,

b) $T_a^* = T_{\overline{a}}$ *y* T_a *es autoadjunto cuando* a *es real valuado,*

c) $\|T_a\| \leq \|a\|$,

d) $T_a = 0$ *si y sólo si* $a = 0$ *casi en todas partes,*

e) *si* a *es radial,* T_a *es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación.*

Dada una función $a \in L^1(\mathbb{D})$, el operador de Toeplitz T_a con símbolo a está definido por

$$(T_a f)(z) = \int_{\mathbb{D}} a(w)f(w)R(z,w)\,dv(w)$$

para $f \in b^2(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$. Por el Lema 2.10, T_a está densamente definido en $b^2(\mathbb{D})$. Si a es un símbolo acotado, entonces T_a es acotado en $b^2(\mathbb{D})$. Sin embargo, en [7] y [6] se muestra que existen símbolos no acotados que inducen operadores de Toeplitz acotados.

Los operadores de Toeplitz sobre $b^2(\mathbb{D})$ cumplen claramente las primeras tres propiedades de la Proposición 3.1, la cuarta condición está establecida en el Lema 3.6 y la última propiedad de dicha proposición la revisaremos en el siguiente capítulo.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos al operador $U_t \colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ por

$$(U_t f)(z) = f(e^{-it}z)$$

para $z \in \mathbb{D}$ y $f \in b^2(\mathbb{D})$.

Notemos que $U_{t+2\pi} = U_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y que si $f \in b^2(\mathbb{D})$ es una función radial, entonces

$$(U_t f)(z) = f(e^{-it}z) = f(z)$$

para $z \in \mathbb{D}$ y $t \in \mathbb{R}$. Además, cada U_t es un operador unitario con $U_t^{-1} = U_t^* = U_{-t}$.

Dado un operador acotado $T\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$, definimos el funcional $\psi\colon b^2(\mathbb{D}) \times b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\psi(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_t^* T U_t f, g\rangle \, dt \tag{3.1}$$

para $f, g \in b^2(\mathbb{D})$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f_1, f_2, g_1, g_2 \in b^2(\mathbb{D})$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha f_1 + f_2, g_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_t^* T U_t(\alpha f_1 + f_2), g_1\rangle \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \alpha U_t^* T U_t f_1 + U_t^* T U_t f_2, g_1\rangle \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\alpha\langle U_t^* T U_t f_1, g_1\rangle + \langle U_t^* T U_t f_2, g_1\rangle\big) \, dt \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_t^* T U_t f_1, g_1\rangle \, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_t^* T U_t f_2, g_1\rangle \, dt \\
&= \alpha\psi(f_1, g_1) + \psi(f_2, g_1); \\
\psi(f_1, \beta g_1 + g_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_t^* T U_t f_1, \beta g_1 + g_2\rangle \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f_1, U_t^* T^* U_t(\beta g_1 + g_2)\rangle \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f_1, \beta U_t^* T^* U_t g_1 + U_t^* T^* U_t g_2\rangle \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\overline{\beta}\langle f_1, U_t^* T^* U_t g_1\rangle + \langle f_1, U_t^* T^* U_t g_2\rangle\big) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\overline{\beta}\langle U_t^* T U_t f_1, g_1\rangle + \langle U_t^* T U_t f_1, g_2\rangle\big) \, dt \\
&= \frac{\overline{\beta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_t^* T U_t f_1, g_1\rangle \, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_t^* T U_t f_1, g_2\rangle \, dt \\
&= \overline{\beta}\psi(f_1, g_1) + \psi(f_1, g_2).
\end{aligned}$$

Así, ψ es un funcional sesquilineal. Además ψ es acotado, pues

$$\begin{aligned} |\psi(f,g)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\langle U_t^* T U_t f, g\rangle\right| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|U_t^*\|\|T\|\|U_t\|\|f\|\|g\|\, dt \\ &= \|T\|\|f\|\|g\| \end{aligned}$$

para $f, g \in b^2(\mathbb{D})$. Por el Teorema de Representación de Riesz-Fréchet para funcionales sesquilineales acotados, existe un operador $R\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ tal que

$$\psi(f,g) = \langle Rf, g\rangle \tag{3.2}$$

para $f, g \in b^2(\mathbb{D})$. Llamamos a dicho operador R la **radialización** de T y lo denotamos por

$$\operatorname{Rad}(T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_t^* T U_t\, dt. \tag{3.3}$$

Esta integral la podemos pensar definida en el sentido débil, ya que por (3.1), (3.2) y (3.3) podemos escribir

$$\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_t^* T U_t\, dt f, g \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle U_t^* T U_t f, g\rangle\, dt \tag{3.4}$$

para $f, g \in b^2(\mathbb{D})$.

Decimos que un operador acotado $T\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ es **radial** si

$$T = \operatorname{Rad}(T).$$

Recordemos que la sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ definida en (2.3):

$$\begin{aligned} e_0(w) &= 1, \\ e_{2n-1}(w) &= \sqrt{n+1}w^n, \\ e_{2n}(w) &= \sqrt{n+1}\overline{w}^n \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \mathbb{D}$, forma una base ortonormal para $b^2(\mathbb{D})$.

Para un operador acotado $T\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$, definimos

$$\begin{aligned} a_n(T) &= (n+1)\langle Tw^n, w^n\rangle, \\ \widetilde{a}_n(T) &= (n+1)\langle T\overline{w}^n, \overline{w}^n\rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

para $n \in \mathbb{Z}_+$.

Proposición 3.2. *Sea T un operador radial y acotado de $b^2(\mathbb{D})$. Entonces T es un operador diagonal con respecto a la base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.*

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} U_t(e_0) &= 1, \\ U_t(e_{2n-1}) &= e^{-int}e_{2n-1}, \\ U_t(e_{2n}) &= e^{int}e_{2n} \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tenemos para $n \neq m$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle TU_t e_n, U_t e_m\rangle \, dt = 0.$$

Como T es radial se sigue que

$$\langle Te_n, e_m\rangle = \langle \mathrm{Rad}(T)(e_n), e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle U_t^* TU_t e_n, e_m\rangle \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle TU_t e_n, U_t e_m\rangle \, dt = 0$$

cuando $n \neq m$. Por lo tanto T es un operador diagonal con respecto a la base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ y los elementos de la diagonal están dados por $\langle Te_n, e_n\rangle$. □

3.2. Compacidad de operadores radiales

En esta sección estudiamos el problema de caracterización de la compacidad de los operadores radiales en el espacio de Bergman armónico y describimos los operadores de Toeplitz compactos con símbolo radial en el espacio de Bergman armónico. La demostración del siguiente lema puede encontrarse en [15].

Lema 3.3. *Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ una sucesión acotada de números complejos. Si*

$$\lim_{t\to 1}(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0,$$

entonces se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} c_k = 0.$$

Dada una función $a \in L^1(\mathbb{D})$, su **transformada de Berezin** $\widetilde{a}$ está definida por

$$\widetilde{a}(z) = \int_{\mathbb{D}} a(w)|r_z(w)|^2 \, dv(w)$$

para $z \in \mathbb{D}$, donde $r_z = \frac{R_z}{\|R_z\|}$ es el núcleo reproductor armónico normalizado con R_z dado por (2.8).

Para demostrar el siguiente teorema, el cual es uno de los resultados más importantes de este capítulo, recordemos de la Sección 2.1 que el núcleo reproductor analítico normalizado k_z se puede expresar como

$$k_z(w) = (1 - |z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w^n \overline{z}^n$$

para todo $w \in \mathbb{D}$. Por lo que para todo operador $T\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ y todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$\langle T k_z, k_z \rangle = (1 - |z|^2)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} (n+1)(m+1) \langle T w^n, w^n \rangle \overline{z}^n z^m, \tag{3.6}$$

$$\langle T \overline{k}_z, \overline{k}_z \rangle = (1 - |z|^2)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} (n+1)(m+1) \langle T \overline{w}^n, \overline{w}^n \rangle z^n \overline{z}^m. \tag{3.7}$$

Teorema 3.4. *Sea $T\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ un operador radial acotado tal que las sucesiones $\{n\big(a_n(T) - a_{n-1}(T)\big)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ y $\{n\big(\widetilde{a}_n(T) - \widetilde{a}_{n-1}(T)\big)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ son acotadas. Entonces T es compacto si y sólo si $\langle T k_z, k_z \rangle \to 0$ y $\langle T \overline{k}_z, \overline{k}_z \rangle \to 0$ cuando $|z|$ tiende a 1.*

Demostración. Si T es compacto, dado que los núcleos normalizados k_z y $\overline{k}_z$ convergen débilmente a 0 en $b^2(\mathbb{D})$ cuando $|z|$ tiende a 1, entonces $\langle T k_z, k_z \rangle \to 0$ y $\langle T \overline{k}_z, \overline{k}_z \rangle \to 0$ cuando $|z| \to 1$.

Supongamos ahora que $\langle T k_z, k_z \rangle \to 0$ y $\langle T \overline{k}_z, \overline{k}_z \rangle \to 0$ cuando $|z|$ tiende a 1. Como T es un operador radial acotado en $b^2(\mathbb{D})$, la prueba de la Proposición 3.2 muestra que $\langle T w^n, w^m \rangle = 0$ para todo $m \neq n$. Se sigue de (3.6) que para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
\langle T k_z, k_z \rangle &= (1 - |z|^2)^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} (n+1)(m+1) \langle T w^n, w^m \rangle \overline{z}^n z^m \\
&= (1 - |z|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n(T) |z|^{2n} \\
&= (1 - |z|^2) \left\{ a_0(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \big[(n+1) a_n(T) - n a_{n-1}(T) \big] |z|^{2n} \right\}.
\end{aligned}$$

Como $\langle T k_z, k_z \rangle \to 0$ cuando $|z|$ tiende a 1, entonces

$$\lim_{t \to 1} (1 - t) \left\{ a_0(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \big[(n+1) a_n(T) - n a_{n-1}(T) \big] t^n \right\} = 0.$$

Además,

$$(n+1) a_{n+1}(T) - n a_{n-1}(T) = n\big(a_n(T) - a_{n-1}(T)\big) + a_n(T),$$

para $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\big\{n\big(a_n(T) - a_{n-1}(T)\big)\big\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es acotada por hipótesis y

$$|a_n(T)| = (n+1)|\langle Tw^n, w^n\rangle| \le \|T\|$$

para $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la sucesión $\{(n+1)a_{n+1}(T) - na_{n-1}(T)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es acotada. Por el Lema 3.3 se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left\{a_0(T) + \sum_{k=1}^{n}\big[(k+1)a_k(T) - ka_{k-1}(T)\big]\right\} = 0.$$

Pero para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1}\left\{a_0(T) + \sum_{k=1}^{n}\big[(k+1)a_k(T) - ka_{k-1}(T)\big]\right\} = a_n(T),$$

por lo que $a_n(T)$ converge a cero cuando $n \to \infty$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \langle Te_{2n-1}, e_{2n-1}\rangle = \lim_{n\to\infty} (n+1)\langle Tw^n, w^n\rangle = 0. \tag{3.8}$$

Análogamente para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\langle T\overline{k}_z, \overline{k}_z\rangle = (1-|z|^2)\left\{\widetilde{a}_0(T) + \sum_{n=1}^{\infty}\big[(n+1)\widetilde{a}_n(T) - n\widetilde{a}_{n-1}(T)\big]|z|^{2n}\right\}.$$

Como $\langle T\overline{k}_z, \overline{k}_z\rangle \to 0$ cuando $|z| \to 1$, utilizando el mismo argumento tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \langle Te_{2n}, e_{2n}\rangle = 0. \tag{3.9}$$

Por (3.8) y (3.9), los elementos en la diagonal de T bajo la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tienden a cero cuando $n \to \infty$. Por la Proposición 3.2, esto implica que T es compacto. □

3.3. Compacidad de operadores de Toeplitz radiales

La **radialización** $\mathrm{Rad}(a)$ de una función $a \in L^1(\mathbb{D})$ está definida por

$$\mathrm{Rad}(a)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(e^{it}z)\,dt$$

para $z \in \mathbb{D}$.

El operador Rad está bien definido ya que, por la invarianza bajo rotaciones de la medida dt, para toda $a \in L^1(\mathbb{D})$ se tiene $\mathrm{Rad}(a) \in L^1(\mathbb{D})$. Además, si

$T_a\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ es acotado, entonces $T_{\mathrm{Rad}(a)}\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ también es acotado.

Decimos que una función $a \in L^1(\mathbb{D})$ es **radial** si $a = \mathrm{Rad}(a)$. Es decir, a es una función radial si $a(z) = a(|z|)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

La radialización del operador de Toeplitz con símbolo $a \in L^1(\mathbb{D})$ es otro operador de Toeplitz, con símbolo $\mathrm{Rad}(a)$:

Proposición 3.5. *Sea $a \in L^1(\mathbb{D})$ tal que $T_a\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ es acotado. Entonces $\mathrm{Rad}(T_a) = T_{\mathrm{Rad}(a)}\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sean f, g dos polinomios armónicos en $b^2(\mathbb{D})$. Por el Teorema de Fubini vemos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Rad}(T_a)f, g\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle U_t^* T_a U_t f, g\rangle\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle Q(aU_t f), U_t g\rangle\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{D}} a(w) f(e^{-it}w)\overline{g}(e^{-it}w)\, dv(w)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{D}} a(e^{it}w) f(w)\overline{g}(w)\, dv(w)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g}(w)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(e^{it}w)\, dt\, dv(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g}(w)\,\mathrm{Rad}(a)(w)\, dv(w) \\
&= \langle T_{\mathrm{Rad}(a)} f, g\rangle.
\end{aligned}$$

Esto es, $\langle \mathrm{Rad}(T_a)f, g\rangle = \langle T_{\mathrm{Rad}(a)} f, g\rangle$ para todos los polinomios armónicos f, g. Como el conjunto de todos los polinomios armónicos es denso en $b^2(\mathbb{D})$ por el Lema 2.10, entonces $\mathrm{Rad}(T_a) = T_{\mathrm{Rad}(a)}$. □

Lema 3.6. *Sea $a \in L^1(\mathbb{D})$. Entonces $T_a = 0$ en $b^2(\mathbb{D})$ si y sólo si $a = 0$.*

Demostración. Si $T_a = 0$, entonces $Q(az^n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, usando la representación integral de la proyección Q del Teorema 2.6, tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{(1 - z\overline{w})^2} + \frac{1}{(1 - \overline{z}w)^2} - 1\right) a(w) w^n\, dv(w) = 0$$

para $z \in \mathbb{D}$ y $n \in \mathbb{N}$. Derivando m veces con respecto a z tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(m+1)!\overline{w}^m}{(1-z\overline{w})^{m+2}} a(w)w^n \, dv(w) = 0,$$

y evaluando en $z = 0$ obtenemos

$$(m+1)! \int_{\mathbb{D}} a(w)w^n\overline{w}^m \, dv(w) = 0$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Como el conjunto de todos los polinomios en z y $\overline{z}$ es denso en $C(\mathbb{D})$ y $C(\mathbb{D})$ es denso en $L^1(\mathbb{D})$, tenemos que $a = 0$. □

Proposición 3.7. *Sea $a \in L^1(\mathbb{D})$ tal que $T_a \colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ es un operador acotado. Entonces T_a es un operador radial si y sólo si a es una función radial en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Si a es radial, es decir, $a = \mathrm{Rad}(a)$, por la Proposición 3.5 tenemos

$$T_a = T_{\mathrm{Rad}(a)} = \mathrm{Rad}(T_a),$$

esto es que T_a es un operador radial. Para la implicación recíproca, sea T_a un operador radial. Por la Proposición 3.5 tenemos

$$T_a = \mathrm{Rad}(T_a) = T_{\mathrm{Rad}(a)},$$

por lo que $T_{a-\mathrm{Rad}(a)} = 0$ en $b^2(\mathbb{D})$ y por lo tanto $a = \mathrm{Rad}(a)$ por el Lema 3.6, es decir, el símbolo a es radial. □

Lema 3.8. *Sea $a \in L^1(\mathbb{D})$ una función radial. Entonces*

$$\widetilde{a}(z) = \frac{2\langle T_a K_z, K_z\rangle - \langle a, 1\rangle}{\|R_z\|^2} \tag{3.10}$$

para $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Recordemos que el núcleo de Bergman armónico de $\mathbb{D}$ es real valuado y se escribe en términos del núcleo de Bergman analítico como lo establece (2.9):

$$R_z = K_z + \overline{K}_z - 1,$$

para $z \in \mathbb{D}$. Por lo que

$$\begin{aligned} \|R_z\|^2\widetilde{a}(z) &= \langle T_a R_z, R_z\rangle \\ &= \langle T_a(K_z + \overline{K}_z - 1), K_z + \overline{K}_z - 1\rangle \\ &= \langle T_a K_z, K_z\rangle + \langle T_a K_z, \overline{K}_z\rangle - \langle T_a K_z, 1\rangle + \langle T_a \overline{K}_z, K_z\rangle \\ &\quad + \langle T_a \overline{K}_z, \overline{K}_z\rangle - \langle T_a \overline{K}_z, 1\rangle - \langle T_a, K_z\rangle - \langle T_a, \overline{K}_z\rangle + \langle T_a, 1\rangle, \end{aligned} \tag{3.11}$$

para $z \in \mathbb{D}$. Como $a \in L^1(\mathbb{D})$ es radial, utilizando coordenadas polares en cada término de (3.11) tenemos

$$\|R_z\|^2\widetilde{a}(z) = 2\langle aK_z, K_z\rangle - \langle a, 1\rangle.$$

para $z \in \mathbb{D}$, de donde se obtiene (3.10). □

Aplicando el Teorema 3.4 a operadores de Toeplitz radiales obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.9. *Sea $a \in L^1(\mathbb{D})$ una función radial para la cual $T_a \colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ es acotado y*

$$M = \sup_{0 \le r < 1} \left| a(r) - \frac{1}{1-r^2} \int_r^1 a(t)t\,dt \right| < \infty \tag{3.12}$$

Entonces T_a es compacto si y sólo si $\widetilde{a}(z)$ converge a cero cuando $|z|$ tiende a 1.

Demostración. Si T_a es compacto, dado que el núcleo de Bergman armónico normalizado converge débilmente a 0 en $b^2(\mathbb{D})$ cuando $|z|$ tiende a 1, entonces $\widetilde{a}(z) = \langle T_a r_z, r_z \rangle \to 0$ cuando $|z| \to 1$.

Para la implicación recíproca, por (2.1) y la Proposición 2.4, para $z \in \mathbb{D}$ tenemos

$$\|K_z\| = \frac{1}{1-|z|^2} < \|R_z\| < \frac{\sqrt{2}}{1-|z|^2} = \sqrt{2}\|K_z\|,$$

por lo que

$$\frac{1}{2\|K_z\|^2} \le \frac{1}{\|R_z\|^2} \le \frac{1}{\|K_z\|^2},$$

$$\frac{(C_1)(2\langle T_a K_z, K_z\rangle - \langle a, 1\rangle)}{\|K_z\|^2} \le \frac{2\langle T_a K_z, K_z\rangle - \langle a, 1\rangle}{\|R_z\|^2} \le \frac{(C_2)(2\langle T_a K_z, K_z\rangle - \langle a, 1\rangle)}{\|K_z\|^2},$$

con C_1 y C_2 constantes positivas. Así, por el Lema 3.8,

$$(C_1)(2\langle T_a k_z, k_z\rangle - \langle a, 1\rangle(1-|z|^2)^2) \le \widetilde{a}(z) \le (C_2)(2\langle T_a k_z, k_z\rangle - \langle a, 1\rangle(1-|z|^2)^2).$$

Por lo tanto, $\widetilde{a}(z) \to 0$ cuando $|z| \to 1$ si y sólo si $\langle T_a k_z, k_z\rangle = \langle T_a \overline{k}_z, \overline{k}_z\rangle \to 0$ cuando $|z| \to 1$.

Como a es una función radial, T_a es radial por la Proposición 3.7. Además,

$$a_n(T_a) = (n+1)\langle T_a w^n, w^n\rangle = (n+1)\int_{\mathbb{D}} a(w)|w|^{2n}\,dv(w) = (n+1)\langle T_a \overline{w}^n, \overline{w}^n\rangle = \widetilde{a}_n(T_a)$$

para $n \in \mathbb{Z}_+$.

Por el Teorema 3.4, basta probar que la sucesión $\{n\big(a_n(T_a) - a_{n-1}(T_a)\big)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es acotada. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$ y notemos que

$$|a_n(T_a)| = |\widetilde{a}_n(T_a)| = |\langle T_a e_{2n}, e_{2n}\rangle| \le \|T_a\|. \tag{3.13}$$

Además, integrando en coordenadas polares obtenemos

$$\begin{aligned} a_n(T_a) &= (n+1)\int_{\mathbb{D}} a(w)|w|^{2n}\,dv(w) \\ &= \frac{n+1}{\pi}\int_0^1 a(r)r^{2n+1}\,dr\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2(n+1)\int_0^1 a(r)r^{2n-1}\,dr. \end{aligned} \tag{3.14}$$

De (3.14) obtenemos que $na_{n-1}(T_a) = 2n(n)\int_0^1 u(r)r^{2n-1}\,dr$, por lo que

$$\begin{aligned} \left|n\big(a_n(T_a) - a_{n-1}(T_a)\big)\right| &= \left|-2n^2\int_0^1 a(r)r^{2n-1}(1-r^2)\,dr + 2n\int_0^1 a(r)r^{2n+1}\,dr\right| \\ &\le \left|2n^2\int_0^1\left[a(r) - \frac{1}{1-r^2}\int_r^1 a(t)t\,dt\right]r^{2n-1}(1-r^2)\,dr\right| \\ &+ \left|2n^2\int_0^1\frac{1}{1-r^2}\int_r^1 a(t)t\,dt r^{2n-1}(1-r^2)\,dr\right| + \left|2n\int_0^1 a(r)r^{2n+1}\,dr\right|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Además,

$$2n^2\int_0^1 r^{2n-1}(1-r^2)\,dr = 2n^2\int_0^1 r^{2n-1}\,dr - 2n^2\int_0^1 r^{2n+1}\,dr = \frac{2n^2}{2n} - \frac{2n^2}{2n+2} = \frac{n}{n+1}. \tag{3.16}$$

Por el Teorema de Fubini y (3.14),

$$\begin{aligned} 2n^2\int_0^1 r^{2n-1}\int_r^1 a(t)t\,dt\,dr &= 2n^2\int_0^1\int_0^t r^{2n-1}\,dr a(t)t\,dt \\ &= n\int_0^1 t^{2n}a(t)t\,dt \\ &= n\int_0^1 a(t)t^{2n+1}\,dt \\ &= \frac{n}{2(n+1)}a_n(T_a). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Utilizando (3.12), (3.14), (3.15), (3.16) y (3.17) obtenemos

$$\left|n\big(a_n(T_a) - a_{n-1}(T_a)\big)\right| \le \frac{n}{n+1}(M) + \frac{n}{2(n+1)}|a_n(T_a)| + \frac{n}{n+1}|a_n(T_a)| \le M + 2|a_n(T_a)|.$$

Finalmente, por (3.13), la sucesión $\{n\big(a_n(T_a) - a_{n-1}(T_a)\big)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ está acotada por $M + 2\|T_a\|$. Utilizando el Teorema 3.4, T es compacto. $\square$

Toda función radial acotada satisface (3.12), por lo que se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.10. *Sea a una función radial y acotada en $\mathbb{D}$. Entonces $T_a\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ es compacto si y sólo si la transformada de Berezin de su símbolo converge a 0 cuando $|z|$ tiende a 1.*

3.3.1. En el espacio de Bergman armónico sobre $\mathbb{B}^n$

Sea $\{p_{k,j}\}_{j=1}^{h_k}$ una base ortonormal de H_k para $k \in \mathbb{Z}_+$ y $h_k = \dim H_k$, cuyo valor está dado por (1.24). Definimos

$$\phi_{k,j} = \left(\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)\widetilde{p}_{k,j} \tag{3.18}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$ y $j = 1,\dots,h_k$, donde $\widetilde{p}_{k,j} \in H_k(\mathbb{R}^{2n})$ es la extensión homogénea del armónico esférico $p_{k,j} \in H_k$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{p}_{m,l}, \widetilde{p}_{k,j}\rangle &= \int_{\mathbb{B}^n} \widetilde{p}_{m,l}(z)\overline{\widetilde{p}_{k,j}}(z)\,dv(z)\\
&= \int_{\mathbb{B}^n} |z|^m|z|^k p_{m,l}\left(\frac{z}{|z|}\right)\overline{p_{k,j}}\left(\frac{z}{|z|}\right)\,dv(z)\\
&= 2n\int_0^1 r^{m+k+2n-1}\,dr \int_{S^{2n-1}} p_{m,l}(w)\overline{p_{k,j}}(w)\,d\sigma(w), \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

para $k,m \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1,\dots,h_k$ y $l = 1,\dots,h_m$. Por lo que $\langle \widetilde{p}_{m,l}, \widetilde{p}_{k,j}\rangle = 0$ para $(m,l) \neq (k,j)$ y

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{p}_{k,j}, \widetilde{p}_{k,j}\rangle &= 2n\int_0^1 r^{2k+2n-1}\,dr \int_{S^{2n-1}} |p_{k,j}(w)|^2\,d\sigma(w)\\
&= 2n\int_0^1 r^{2k+2n-1}\,dr\\
&= \frac{n}{k+n}, \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$ y $j = 1,\dots,h_k$. Así, utilizando el Lema 2.10, tenemos que

$$\{\phi_{k,j} : j = 1,\dots,h_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$$

es una base ortonormal de $b^2(\mathbb{B}^n)$.

Para $a \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, definimos el **operador de Toeplitz con símbolo** a por $T_a = QM_a$, donde Q es la proyección de Bergman sobre $b^2(\mathbb{B}^n)$. Es decir,

$$\begin{array}{rccc} T_a\colon & b^2(\mathbb{B}^n) & \longrightarrow & b^2(\mathbb{B}^n) \\ & f & \mapsto & Q(af) \end{array}$$

El operador T_a es un operador lineal y acotado con norma menor o igual que $\|a\|$, pues $\|T_a f\| = \|QM_a f\| \leq \|Q\|\|M_a\|\|f\| = \|a\|\|f\|$ para $f \in b^2(\mathbb{B}^n)$.

Proposición 3.11. *Sea un símbolo radial $a \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$. Entonces T_a es un operador diagonal con respecto a la base ortonormal $\{\phi_{k,j} : j = 1, \ldots, h_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle T_a\phi_{m,l}, \phi_{k,j}\rangle &= \langle Q(a\phi_{m,l}), \phi_{k,j}\rangle \\
&= \langle a\phi_{m,l}, Q(\phi_{k,j})\rangle \\
&= \langle a\phi_{m,l}, \phi_{k,j}\rangle \\
&= \Big(1 + \frac{k}{n}\Big)\langle a\widetilde{p}_{m,l}, \widetilde{p}_{k,j}\rangle \\
&= \Big(1 + \frac{k}{n}\Big)\int\limits_{\mathbb{B}^n} a(z)\widetilde{p}_{m,l}(z)\overline{\widetilde{p}_{k,j}}(z)\, dv(z) \\
&= \Big(1 + \frac{k}{n}\Big)\int\limits_{\mathbb{B}^n} a(z)|z|^m|z|^k p_{m,l}\left(\frac{z}{|z|}\right)\overline{p_{k,j}}\left(\frac{z}{|z|}\right)\, dv(z) \\
&= \Big(1 + \frac{k}{n}\Big)(2n)\int\limits_0^1 a(r)r^{m+k+2n-1}\, dr \int\limits_{S^{2n-1}} p_{m,l}(w)\overline{p_{k,j}}(w)\, d\sigma(w)
\end{aligned}$$

para $k, m \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, h_k$ y $l = 1, \ldots, h_m$. Por lo que $\langle T_a\phi_{m,l}, \phi_{k,j}\rangle = 0$ para $(m, l) \neq (k, j)$ y

$$\begin{aligned}
\langle T_a\phi_{k,j}, \phi_{k,j}\rangle &= \Big(1 + \frac{k}{n}\Big)(2n)\int\limits_0^1 a(r)r^{2k+2n-1}\, dr \int\limits_{S^{2n-1}} |p_{k,j}(w)|^2\, d\sigma(w) \\
&= 2(k+n)\int\limits_0^1 a(r)r^{2k+2n-1}\, dr
\end{aligned} \tag{3.21}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$ y $j = 1, \ldots, h_k$. $\square$

Lema 3.12. *Existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$C_1(m+1)^{2n-1} \leq 2(m+n)h_m \leq C_2(m+1)^{2n-1}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración. Recordemos que para $n = 1$, $1 = h_0 < 2 = h_1 = h_2 = \dots$ y bastaría tomar $C_1 = 2$ y $C_2 = 4$.

De (1.24), para $n > 1$, $1 = h_0 < 2n = h_1 < h_2 < \dots$ y para $m \geq 2$ tenemos $h_m = \frac{[2m+(2n-2)][m+(2n-2)-1][m+(2n-2)-2]\cdots[m+1]}{(2n-2)!}$, por lo que

$$\frac{2(m+n)h_m}{(m+1)^{2n-1}} = \left(\frac{2(m+n)}{m(2n-2)!}\right)\left(\frac{2m+(2n-2)}{m}\right)\left(\frac{m+(2n-2)-1}{m}\right)\cdots\left(\frac{m+1}{m}\right).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2(m+n)h_m}{(m+1)^{2n-1}} = \frac{4}{(2n-2)!}.$$

Luego, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1(m+1)^{2n-1} \leq 2(m+n)h_m \leq C_2(m+1)^{2n-1}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$. □

Lema 3.13. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$4(m+n)^2(h_{m+1} - h_m) \leq C(m+1)^{2n-1}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración. Recordemos que para $n = 1$, $1 = h_0 < 2 = h_1 = h_2 = \dots$ y bastaría tomar $C = 4$.

De (1.24), para $n > 1$, $1 = h_0 < 2n = h_1 < h_2 < \dots$ y para $m \geq 2$ tenemos

$$h_{m+1} - h_m = \binom{2n+m-1}{2n-2} + \binom{2n+m-2}{2n-2} - \binom{2n+m-2}{2n-2} - \binom{2n+m-3}{2n-2}.$$

Por el triángulo de Pascal sabemos que $\binom{k+1}{l} = \binom{k}{l} + \binom{k}{l-1}$. Así,

$$\begin{aligned}
\binom{2n+m-1}{2n-2} &= \binom{2n+m-2}{2n-2} + \binom{2n+m-2}{2n-3}\\
\binom{2n+m-3}{2n-2} &= \binom{2n+m-2}{2n-2} - \binom{2n+m-3}{2n-3}\\
h_{m+1} - h_m &= \binom{2n+m-2}{2n-3} + \binom{2n+m-3}{2n-3}\\
h_{m+1} - h_m &= \binom{2n+m-3}{2n-3}\left[\frac{2n+m-2}{m+1} + 1\right]\\
h_{m+1} - h_m &= \binom{2n+m-3}{2n-3}\left[\frac{2n+2m-1}{m+1}\right]
\end{aligned}$$

para $m \geq 2$. Es decir, $h_{m+1} - h_m = \frac{[2m+2n-1][m+(2n-3)][m+(2n-3)-1]\cdots[m+2]}{(2n-3)!}$, por lo que

$$\frac{4(m+n)^2(h_{m+1}-h_m)}{(m+1)^{2n-1}} = \left(\frac{4(m+n)^2}{m^2(2n-3)!}\right)\left(\frac{2m+2n-1}{m}\right)\left(\frac{m+(2n-3)}{m}\right)\cdots\left(\frac{m+2}{m}\right).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{4(m+n)^2(h_{m+1}-h_m)}{(m+1)^{2n-1}} = \frac{8}{(2n-3)!}.$$

Luego, existe una constante $C>0$ tal que

$$4(m+n)^2(h_{m+1}-h_m) \leq C(m+1)^{2n-1}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

Dado el símbolo radial $a \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$ consideramos la sucesión $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ definida por $a_m = 4(m+n)^2 h_m \int_0^1 a(r) r^{2m+2n-1}\, dr$ para $m \in \mathbb{Z}_+$ y estimamos $|a_{m+1}-a_m|$:

$$\begin{aligned}
|a_{m+1}-a_m| &= \left| 4(m+n+1)^2 h_{m+1} \int_0^1 a(r) r^{2k+2n+1}\, dr - 4(m+n)^2 h_m \int_0^1 a(r) r^{2k+2n-1}\, dr \right| \\
&\leq \left| \left[4(m+n+1)^2 h_{m+1} - 4(m+n)^2 h_m\right] \int_0^1 a(r) r^{2k+2n+1}\, dr \right| \\
&\quad + \left| 4(m+n)^2 h_m \int_0^1 a(r)(r^{2m+2n+1} - r^{2m+2n-1})\, dt \right|. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Denotamos por $I = \left[4(m+n+1)^2 h_{m+1} - 4(m+n)^2 h_m\right] \int_0^1 a(r) r^{2k+2n+1}\, dr$. Como

$$4(m+n+1)^2 h_{m+1} - 4(m+n)^2 h_m = 4(m+n)^2(h_{m+1}-h_m) + 8(m+n)h_{m+1} + 4h_{m+1},$$

utilizando el Corolario 1.10 y el Lema 3.13 existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \left(\frac{\|a\|}{2(m+n+1)}\right) \left|4(m+n)^2(h_{m+1}-h_m) + 8(m+n)h_{m+1} + 4h_{m+1}\right| \\
&\leq C_1 (m+1)^{2n-2} \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$. Además, denotando $J = 4(m+n)^2 h_m \int_0^1 a(r)(r^{2m+2n+1} - r^{2m+2n-1})\, dt$, por el Lema 3.12 existe $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|J| &\leq 4(m+n)^2 h_m \|a\| \left| \frac{1}{2m+2n+2} - \frac{1}{2m+2n} \right| \\
&= \frac{2(m+n)h_m}{m+n+1} \\
&\leq C_2 (m+1)^{2n-2} \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$. Por (3.22), (3.23) y (3.24), existe $C > 0$ tal que

$$|a_{m+1}-a_m| \leq C(m+1)^{2n-2} \qquad (3.25)$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$.

El siguiente lema nos ayudará a establecer un criterio de compacidad para los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado actuando en $b^2(\mathbb{B}^n)$.

Lema 3.14. *Sea $k \leq 1$ y $\{c_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ una sucesión de números complejos tal que existe $C > 0$ con $|a_{m+1} - a_m| \leq C(m+1)^{k-2}$ para $m \in \mathbb{Z}_+$. Entones*

$$\lim_{t\to 1}(1-t)^k \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m = 0,$$

si y sólo si

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{(m+1)^{k-1}} = 0.$$

Dada una función $a \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, su **transformada de Berezin** $\widetilde{a}$ está definida por

$$\widetilde{a}(z) = \int_{\mathbb{B}^n} a(w)|r_z(w)|^2\, dv(w)$$

para $z \in \mathbb{B}^n$, donde $r_z = \frac{R_z}{\|R_z\|}$ es el núcleo reproductor armónico normalizado con R_z dado en el Teorema 2.11.

Teorema 3.15. *Sea a una función radial y acotada en $\mathbb{B}^n$. Entonces $T_a\colon b^2(\mathbb{B}^n) \longrightarrow b^2(\mathbb{B}^n)$ es compacto si y sólo si la transformada de Berezin de su símbolo converge a 0 cuando $|z|$ tiende a 1.*

Demostración. Por el Teorema 2.11, el Lema 2.9, (1.16) y (1.21)

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}(z) &= \frac{1}{\|R_z\|^2}\int_{\mathbb{B}^n} a(z)|R(z,w)|^2\, dv(w) \\
&= \frac{1}{\|R_z\|^2}\int_{\mathbb{B}^n} a(z)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}(2n+2m)^2(\widetilde{Z}_m(z,w))^2\, dv(w) \\
&= \frac{1}{\|R_z\|^2}\int_{\mathbb{B}^n} a(z)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}4(n+m)^2|z|^{2m}|w|^{2m}\left[Z_m\left(\frac{z}{|z|},\frac{w}{|w|}\right)\right]^2 dv(w) \\
&= \frac{1}{\|R_z\|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(n+m)^2|z|^{2m}}{(2n)^2}(2n)\int_0^1 a(r)r^{2m+2n-1}\,dr\int_{S^{2n-1}}\left[Z_m\left(\frac{z}{|z|},\zeta\right)\right]^2 d\sigma(\zeta) \\
&= \frac{1}{\|R_z\|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{4(n+m)^2|z|^{2m}}{2n}\right]Z_m\left(\frac{z}{|z|},\frac{z}{|z|}\right)\int_0^1 a(r)r^{2m+2n-1}\,dr \\
&= \frac{1}{2n\|R_z\|^2}\sum_{m=0}^{\infty}4(n+m)^2|z|^{2m}h_m\int_0^1 a(r)r^{2m+2n-1}\,dr \\
&= \frac{1}{2n\|R_z\|^2}\sum_{m=0}^{\infty}a_m|z|^{2m},
\end{aligned}$$

donde $a_m = 4(m+n)^2 h_m \int_0^1 a(r)r^{2m+2n-1}\,dr$ para $m \in \mathbb{Z}_+$. Como existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $\frac{C_1}{(1-|z|^2)^{2n}} \leq \|R_z\|^2 \leq \frac{C_2}{(1-|z|^2)^{2n}}$ para $z \in \mathbb{B}^n$, entonces $\lim\limits_{|z|\to 1}\widetilde{a}(z) = 0$ si y sólo si

$$\lim_{|z|\to 1} (1-|z|^2)^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} a_m |z|^{2m} = 0.$$

Por (3.25) y el Lema 3.14, esto equivale a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{(m+1)^{2n-1}} = 0. \tag{3.26}$$

Por el Lema 3.12, la Ecuación 3.26 es equivalente a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{2(m+n)h_m} = 0;$$

es decir,

$$\lim_{m\to\infty} 2(m+n) \int_0^1 a(r) r^{2m+2n-1}\, dr = 0,$$

lo cual se cumple si y sólo si el operador T_a es compacto utilizando (3.21) y la Proposición 3.11. □

Capítulo 4

Valores propios de operadores de Toeplitz radiales

En el espacio de Bergman armónico en $\mathbb{D}$, la Proposición 3.2 muestra que todo operador radial y acotado T en $b^2(\mathbb{D})$ es un operador diagonal con respecto a la base ortonormal $\{e_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ definida en (2.3):

$$\begin{aligned} e_{0,0}(z) &:= e_0(z) = 1, \\ e_{m,0}(z) &:= e_{2m-1}(z) = \sqrt{m+1}z^m, \\ e_{0,m}(z) &:= e_{2m}(z) = \sqrt{m+1}\overline{z}^m \end{aligned} \tag{4.1}$$

para $m \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}$. Los elementos de su diagonal están dados por $\langle Te_m, e_m\rangle$. Para el caso de operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado actuando en el espacio de Bergman analítico sobre el disco unitario, este hecho es establecido en [10].

Sea $T_a\colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ el operador de Toeplitz con símbolo radial $a \in L^\infty(\mathbb{D})$. En (3.14) se determinó que

$$\begin{aligned} \langle T_a e_{2m}, e_{2m}\rangle &= \langle QM_a e_{2m}, e_m\rangle \\ &= \langle M_a e_{2m}, e_m\rangle \\ &= (m+1)\int\limits_{\mathbb{D}} a(z)\overline{z}^m z^m \, dv(z) \\ &= (m+1)\int\limits_{\mathbb{D}} a(w)|w|^{2m} \, dv(w) \\ &= \frac{m+1}{\pi}\int\limits_0^1 a(r)r^{2m+1}\, dr \int\limits_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2(m+1)\int\limits_0^1 a(r)r^{2m+1}\, dr. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\langle T_a e_{0,m}, e_{0,m}\rangle = \langle T_a e_{2m}, e_{2m}\rangle = (m+1)\int\limits_0^1 a(\sqrt{t})t^m\,dt \tag{4.2}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$. Análogamente,

$$\langle T_a e_{m,0}, e_{m,0}\rangle = \langle T_a e_{2m-1}, e_{2m-1}\rangle = (m+1)\int\limits_0^1 a(\sqrt{t})t^m\,dt \tag{4.3}$$

para $m \in \mathbb{N}$. A cada símbolo radial $a \in L^\infty(\mathbb{D})$, le asociamos la sucesión $\gamma_a = \{\gamma_a(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, donde

$$\gamma_a(k) = (k+1)\int\limits_0^1 a(\sqrt{t})t^k\,dt. \tag{4.4}$$

Notemos que (4.2) y (4.3) implican

$$T_a e_{p,q} = \gamma_a(p+q)e_{p,q}$$

para $p, q \in \mathbb{Z}_+$ con $pq = 0$.

En este capítulo estudiamos el álgebra C^* generada por el conjunto

$$\Gamma := \{\gamma_a : a \in L^\infty(\mathbb{D}) \text{ es radial }\} \subseteq l^\infty(\mathbb{Z}_+) \tag{4.5}$$

con base en el trabajo de Grudsky, Maximenko y Vasilevski en [8].

4.1. Espacio de sucesiones lentamente oscilantes

La función $\rho\colon \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$\rho(m, k) = |\ln(m+1) - \ln(k+1)|$$

es una métrica en $\mathbb{Z}_+$ porque es obtenida de la composición de la métrica euclidiana en $\mathbb{R}$ con una función inyectiva. Llamamos a la función ρ la **métrica logarítmica** en $\mathbb{Z}_+$.

Dada una sucesión $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, definimos el **módulo de continuidad** de x con respecto a la métrica logarítmica como la función $\omega_{\rho,x}\colon [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$\omega_{\rho,x}(\delta) = \sup\{|x_k - x_m| : k, m \in \mathbb{Z}_+, \rho(m, k) \le \delta\}$$

Sea $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ el conjunto de todas las sucesiones que son uniformemente continuas con respecto a la métrica logarítmica. Es decir,

$$\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+) = \{x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+) : \lim_{\delta\to 0^+} \omega_{\rho,x}(\delta) = 0\}.$$

A cada elemento de $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ lo llamamos **sucesión lentamente oscilante** en el sentido de Schmidt [18].

Para cada sucesión $x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+)$, la función $\omega_{\rho,x}\colon [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty]$ es no decreciente por lo que la condición

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_{\rho,x}(\delta) = 0$$

es equivalente a

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \omega_{\rho,x}(\delta) < \epsilon.$$

Proposición 4.1. *La función $\rho_1 \colon \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por*

$$\rho_1(m,k) = \frac{|m-k|}{\text{máx}(m+1,k+1)} = 1 - \frac{\text{mín}(m+1,k+1)}{\text{máx}(m+1,k+1)}$$

es una métrica en $\mathbb{Z}_+$.

Demostración. De la definición tenemos que ρ_1 es no negativa, simétrica y $\rho_1(m,k) = 0$ si y sólo si $m = k$. Para probar la desigualdad del triángulo:

$$\rho_1(m,k) + \rho_1(k,j) - \rho_1(m,j) \geq 0, \tag{4.6}$$

usando la simetría entre m y j podemos considerar solamente tres casos: $m \leq j \leq k$, $m \leq k \leq j$, $k \leq m \leq j$. Si $m \leq j \leq k$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_1(m,k) + \rho_1(k,j) - \rho_1(m,j) &= \frac{k-m}{k+1} + \frac{k-j}{k+1} - \frac{j-m}{j+1} \\ &= \frac{kj - mj + k - m + kj - j^2 + k - j - kj + km - j + m}{(k+1)(j+1)} \\ &= \frac{km + kj + 2k - jm - j^2 - 2j}{(k+1)(j+1)} \\ &= \frac{(k-j)(m+j+2)}{(k+1)(j+1)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Si $m \leq k \leq j$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_1(m,k) + \rho_1(k,j) - \rho_1(m,j) &= \frac{k-m}{k+1} + \frac{j-k}{j+1} - \frac{j-m}{j+1} \\ &= \frac{jk - jm + k - m + jk + j - k^2 - k - jk + km - j + m}{(k+1)(j+1)} \\ &= \frac{jk - jm - k^2 + km}{(k+1)(j+1)} \\ &= \frac{(j-k)(k-m)}{(k+1)(j+1)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Si $k \leq m \leq j$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_1(m,k) + \rho_1(k,j) - \rho_1(m,j) &= \frac{m-k}{m+1} + \frac{j-k}{j+1} - \frac{j-m}{j+1} \\ &= \frac{mj - jk + m - k + mj - km + j - k - mj + m^2 - j + m}{(k+1)(j+1)} \\ &= \frac{m^2 + mj + 2m - km - kj - 2k}{(k+1)(j+1)} \\ &= \frac{(m-k)(m+j+2)}{(k+1)(j+1)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Notemos que (4.7), (4.8) y (4.9) son no negativas y por lo tanto se satisface (4.6). □

Proposición 4.2. *Para todo $m, k \in \mathbb{Z}_+$ la siguiente desigualdad es válida*

$$\rho_1(m,k) \leq \rho(m,k).$$

Además, para todo $m, k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $\rho_1(m,k) \leq \frac{1}{2}$,

$$\rho(m,k) \leq 2\ln(2)\rho_1(m,k).$$

Demostración. Como ρ y ρ_1 son simétricas y $\rho(m,m) = 0 = \rho_1(m,m)$, basta considerar que $m < k$. Sea $t = \frac{k+1}{m+1} - 1$, entonces

$$\rho(m,k) = \ln(k+1) - \ln(m+1) = \ln\left(\frac{k+1}{m+1}\right) = \ln(1+t) \tag{4.10}$$

y

$$\rho_1(m,k) = 1 - \frac{m+1}{k+1} = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}. \tag{4.11}$$

Sea $f\colon (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ definida por $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{1-\frac{1}{1+t}}$, entonces

$$f'(t) = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} > 0.$$

Por lo tanto f es creciente en $(0,+\infty)$. Por la Regla de L'Hopital,

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1.$$

Además $f(1) = 2\ln(2)$. Así,

$$f(t) > 1 \text{ para todo } t > 0, \tag{4.12}$$

$$f(t) \leq 2\ln(2) \text{ para todo } t \in (0,1]. \tag{4.13}$$

Por (4.10) y (4.11) tenemos que $f(t) = \frac{\rho(m,k)}{\rho_1(m,k)}$. Por lo tanto, el resultado se sigue de (4.12) y (4.13). $\square$

Por lo tanto, $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ puede ser definido como la clase de sucesiones que son uniformemente continuas respecto a la métrica ρ_1:

$$\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+) = \left\{\lambda \in l^\infty(\mathbb{Z}_+) : \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{\rho_1(m,k)\leq\delta} |\lambda_m - \lambda_k| = 0\right\}.$$

Proposición 4.3. $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ *es una subálgebra C^* de $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$.*

Demostración. Usando las siguientes propiedades elementales del módulo de continuidad se demuestra que $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ es cerrado respecto a las operaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
\omega_{\rho,f+g} &\leq \omega_{\rho,f} + \omega_{\rho,g},\\
\omega_{\rho,\lambda f} &= |\lambda|\omega_{\rho,f},\\
\omega_{\rho,fg} &\leq \|g\|\omega_{\rho,f} + \|f\|\omega_{\rho,g},\\
\omega_{\rho,\overline{f}} &= \omega_{\rho,f}.
\end{aligned}$$

De la desigualdad

$$|f(m) - f(k)| \leq |f(m) - g(m)| + |g(m) - g(k)| + |g(k) - f(k)|$$

se obtiene que

$$\omega_{\rho,f}(\delta) \leq 2\|f - g\| + \omega_{\rho,g}(\delta);$$

es decir, $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ es topológicamente cerrado en $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$ y por lo anterior una subálgebra C^*. $\square$

Proposición 4.4. *El conjunto de sucesiones convergentes $c(\mathbb{Z}_+)$ está contenido propiamente en $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.*

Demostración. Sea $\overline{\mathbb{Z}_+} = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ la compactificación a un punto de $\mathbb{Z}_+$. La topología en $\overline{\mathbb{Z}_+}$ es inducida por la métrica

$$d_{\overline{\mathbb{Z}_+}}(m,k) = \left|\frac{m}{m+1} - \frac{k}{k+1}\right|.$$

Sea $\lambda \in c(\mathbb{Z}_+)$, entonces λ es uniformemente continua con respecto a la métrica $d_{\overline{\mathbb{Z}_+}}$.

Para $m, k \in \mathbb{Z}_+$,

$$d_{\overline{\mathbb{Z}_+}}(m,k) = \frac{|m-k|}{(m+1)(k+1)} \leq \frac{|m-k|}{\text{máx}\{m+1, k+1\}} = \rho_1(m,k) \leq \rho(m,k),$$

entonces $c(\mathbb{Z}_+)$ es subconjunto de $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Sea $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ con $x_k = \cos(\ln(k))$.

$$|x_m - x_k| = |\cos\ln(m) - \cos\ln(k)| \leq |\ln(m) - \ln(k)| = \rho(m,k)$$

y por lo tanto $x \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ y $x \notin c(\mathbb{Z}_+)$. $\square$

Denotemos por R y L a los operadores lineales de $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$ definidos por

$$(Lx)_k = x_{k+1},$$

$$(Rx)_k = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ x_{k-1}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Estos operadores son llamados **corrimiento a la izquierda** y **corrimiento a la derecha** respectivamente. Notemos que $\|Rx\| = \|x\|$, $\|Lx\| \leq \|x\|$ y $LR(x) = x$ para toda sucesión x. En la siguiente proposición se muestra que $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ es invariante respecto a estos operadores.

Proposición 4.5. *Para todo $x \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$, $Rx, Lx \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$, $m, k \in \mathbb{Z}_+$, con $m < k$ y $\rho(m,k) \leq \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho(m+1, k+1) &= \ln\frac{k+2}{m+2} \\
&= \ln\left(\Big(\frac{k+1}{m+1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{k+1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{m+1}\Big)^{-1}\right) \\
&= \ln\Big(\frac{k+1}{m+1}\Big) + \ln\Big(1 + \frac{1}{k+1}\Big) - \ln\Big(1 + \frac{1}{m+1}\Big) \\
&< \ln\frac{k+1}{m+1} \\
&= \rho(m,k) \\
&\leq \delta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\omega_{\rho,Lx}(\delta) \leq \omega_{\rho,x}(\delta)$ y $Lx \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Sea $0 < \delta < \frac{1}{3}$, $m, k \in \mathbb{Z}_+$, con $m < k$ y $\rho(m,k) \leq \delta$, entonces $0 < m < k$ y

$$\begin{aligned}
\rho_1(m-1,k-1) &= \frac{(k-1)-(m-1)}{k} \\
&= \frac{k+1}{k}\Big(\frac{k-m}{k+1}\Big) \\
&= \Big(1+\frac{1}{k}\Big)\rho_1(m,k) \\
&\leq \frac{3}{2}\rho_1(m,k). \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 4.2 y (4.14) tenemos

$$\rho_1(m-1,k-1) \leq \frac{3}{2}\rho_1(m,k) \leq \frac{3}{2}\rho(m,k) \leq \frac{3}{2}\delta < \frac{1}{2}$$

y

$$\rho(m-1,k-1) \leq 2\ln(2)\rho_1(m-1,k-1) \leq 2\ln(2)\frac{3}{2}\delta = 3\ln(2)\delta.$$

Así, para todo $0 < \delta < \frac{1}{3}$,

$$\omega_{\rho,Rx}(\delta) \leq \omega_{\rho,x}(3\ln(2)\delta).$$

Por lo tanto $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_{\rho,Rx}(\delta) = 0$, es decir, $Rx \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. $\square$

Como consecuencia de la siguiente proposición tenemos que $\Gamma \subseteq \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$, donde Γ es el conjunto definido en (4.5).

Proposición 4.6. *Sea $a \in L^\infty([0,1])$, entonces $\|\gamma_a\| \leq \|a\|$ y γ_a es Lipschitz continua con respecto a la métrica ρ.*

Demostración. Recordemos que actuando en el espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{D})$, $T_a e_{p,q} = \gamma_a(p+q)e_{p,q}$ para $p, q \in \mathbb{Z}_+$ con $pq = 0$, donde

$$\gamma_a(m) = (m+1)\int_0^1 a(\sqrt{r})r^m\,dr = 2(m+1)\int_0^1 a(r)r^{2m+1}\,dr$$

y por lo tanto

$$|\gamma_a(m)| \leq 2(m+1)\int_0^1 r^{2m+1}\|a\|\,dr = \|a\|.$$

Esto implica que $\|\gamma_a\| \leq \|a\|$.

Además; para $m < k$,

$$\begin{aligned}
|\gamma_a(m) - \gamma_a(k)| &= 2\left|\int_0^1 (m+1)a(r)r^{2m+1} - (k+1)a(r)r^{2k+1}\,dr\right| \\
&\leq 2\int_0^1 \left|(m+1)r^{2m+1} - (k+1)r^{2k+1}\right||a(r)|\,dr \\
&\leq 2\|a\|\int_0^1 \left|(m+1)r^{2m+1} - (k+1)r^{2k+1}\right|dr.
\end{aligned}$$

Sea $r_0 = \left(\frac{m+1}{k+1}\right)^{\frac{1}{2(k-m)}}$. Entonces $r_0 < 1$ y

$$\begin{aligned}
|\gamma_a(m) - \gamma_a(k)| \leq 2\|a\| &\int_0^{r_0} [(m+1)r^{2m+1} - (k+1)r^{2k+1}]\,dr \\
&+ 2\|a\|\int_{r_0}^1 [(k+1)r^{2k+1} - (m+1)r^{2m+1}]\,dr \\
&= 2\|a\|\left[\frac{1}{2}r_0^{2m+2} - \frac{1}{2}r_0^{2k+2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_0^{2k+2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_0^{2m+2}\right)\right] \\
&= 2\|a\|\left[r_0^{2m+2} - r_0^{2k+2}\right] \\
&= 2\|a\|r_0^{2m+2}\left[1 - r_0^{\frac{k+1}{m+1}}\right] \\
&\leq 2\|a\|r_0^{2m+2}\left[1 - \left(\frac{m+1}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(m+1)(k-m)}}\right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Como $m < k$, notemos que

$$\begin{aligned}
0 < \frac{k+1}{2(m+1)(k-m)} &= \frac{1+m-m+k}{2(m+1)(k-m)} \\
&= \frac{1+m}{2(m+1)(k-m)} + \frac{-m+k}{2(m+1)(k-m)} \\
&= \frac{1}{2(k-m)} + \frac{1}{2(m+1)} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Dado que $0 < \frac{m+1}{k+1} < 1$, entonces (4.16) implica

$$\left(\frac{m+1}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(m+1)(k-m)}} \geq \frac{m+1}{k+1}. \tag{4.17}$$

Por (4.15) y (4.17),

$$\begin{aligned}|\gamma_a(m)-\gamma_a(k)| &\le 2\|a\|r_0^{2m+2}\rho_1(m,k)\\ &\le 2\|a\|\rho_1(m,k)\\ &\le 2\|a\|\rho(m,k).\end{aligned}$$

Es decir, γ_a es Lipschitz continua con respecto a la métrica ρ. □

Sea $d_1(\mathbb{Z}_+)$ el conjunto de todas las sucesiones acotadas $x=\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ tales que

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}_+}\big((m+1)|x_{m+1}-x_m|\big) \text{ es finito.}$$

Proposición 4.7. *El conjunto $d_1(\mathbb{Z}_+)$ está contenido propiamente en* $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Demostración. Sea $x\in d_1(\mathbb{Z}_+)$ y $M=\sup_{m\in\mathbb{Z}_+}\big((m+1)|x_{m+1}-x_m|\big)$. Entonces, para todo $m,k\in\mathbb{Z}_+$ con $m<k$ tenemos

$$\begin{aligned}|x_k-x_m| &\le \sum_{j=m}^{k-1}|x_{j+1}-x_j|\\ &\le M\sum_{j=m}^{k-1}\frac{1}{j+1}\\ &\le M\sum_{j=m}^{k-1}\ln\left(\frac{j+1}{j}\right)\\ &= M\ln\left(\prod_{j=m}^{k-1}\frac{j+1}{j}\right)\\ &= M\ln\frac{k}{m}\\ &< M\rho(m,k),\end{aligned}$$

por lo tanto $d_1(\mathbb{Z}_+)\subseteq\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Encontremos ahora un elemento de $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ que no pertenezca a $d_1(\mathbb{Z}_+)$. Sea $x=\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ la sucesión definida por

$$x_m=\operatorname{sen}\frac{\pi\lfloor\log_2(m+2)\rfloor}{\sqrt{\log_2(m+2)}},$$

donde $\lfloor x\rfloor$ denota el máximo entero menor o igual a x.

Para todo $m, k \in \mathbb{Z}_+$ con $k > m$,

$$\begin{aligned}
|x_k - x_m| &\le \frac{\pi\lfloor \log_2(k+2)\rfloor}{\sqrt{\log_2(k+2)}} - \frac{\pi\lfloor \log_2(m+2)\rfloor}{\sqrt{\log_2(m+2)}} \\
&\le \frac{\pi \log_2(k+2)}{\sqrt{\log_2(k+2)}} - \frac{\pi(\log_2(m+2)-1)}{\sqrt{\log_2(m+2)}} \\
&= \pi(\sqrt{\log_2(k+2)} - \sqrt{\log_2(m+2)}) + \frac{\pi}{\sqrt{\log_2(m+2)}} \\
&= \frac{\pi(\log_2(k+2) - \log_2(m+2))}{\sqrt{\log_2(k+2)} + \sqrt{\log_2(m+2)}} + \frac{\pi}{\sqrt{\log_2(m+2)}} \\
&= \frac{\pi \log_2 \frac{k+2}{m+2}}{\sqrt{\log_2(k+2)} + \sqrt{\log_2(m+2)}} + \frac{\pi}{\sqrt{\log_2(m+2)}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Por otro lado, si $m = 2^{k^2} - 3$ con $k > 1$, entonces

$$\begin{aligned}
|x_{m+1} - x_m| &= \left| \operatorname{sen} \frac{\pi\lfloor \log_2(2^{k^2}-2+2)\rfloor}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-2+2)}} - \operatorname{sen} \frac{\pi\lfloor \log_2(2^{k^2}-3+2)\rfloor}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-3+2)}} \right| \\
&= \left| \operatorname{sen}(k\pi) - \operatorname{sen} \frac{\pi\lfloor \log_2(2^{k^2}-1)\rfloor}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}} \right| \\
&= \left| \operatorname{sen} \frac{\pi\lfloor \log_2(2^{k^2}-1)\rfloor}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}} \right|. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Como $2^{k^2} \ge 2^{k^2} - 1$, entonces

$$k^2 - 1 \ge \log_2(2^{k^2} - 1) - 1. \qquad (4.19)$$

Además, $2\left(1 - \frac{1}{2^{k^2}}\right) \ge 1$, por lo que $2(2^{k^2} - 1) \ge 2^{k^2}$. Es decir, $2^{k^2} - 1 \ge 2^{k^2-1}$ y por lo tanto

$$\log_2(2^{k^2} - 1) \ge k^2 - 1. \qquad (4.20)$$

Notemos que de (4.19) y (4.20) tenemos

$$k^2 - 1 = \lfloor \log_2(2^{k^2} - 1)\rfloor. \qquad (4.21)$$

Por (4.18) y (4.21),

$$|x_{m+1} - x_m| = \left| \operatorname{sen} \frac{\pi(k^2-1)}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}} \right| = \left| \operatorname{sen}\left(k\pi - \frac{\pi(k^2-1)}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}} \right) \right|.$$

Utilizando (4.19),

$$k\pi - \frac{\pi(k^2-1)}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}} \le \pi k - \frac{\pi(k^2-1)}{\sqrt{k^2}} = \frac{\pi}{k} \le \frac{\pi}{2}.$$

De la desigualdad $|\operatorname{sen}(t)| \geq \frac{2|t|}{\pi}$, la cual se cumple para todo t con $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ y de (4.20), obtenemos

$$|x_{m+1} - x_m| \geq 2\left(k - \frac{k^2-1}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}}\right) \geq 2(k - \sqrt{k^2-1}) \geq \frac{1}{k},$$

Así,

$$(m+1)|x_{m+1} - x_m| \geq \frac{m+1}{k} = \frac{2^{k^2}-2}{k}.$$

Por lo tanto, $x \notin d_1(\mathbb{Z}_+)$. □

Lema 4.8. *Sea*

$$y_j = \frac{1}{1+\lfloor j\delta \rfloor} \sum_{k=j}^{j+\lfloor j\delta \rfloor} x_k \tag{4.22}$$

con $x = \{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+} \in l^\infty(\mathbb{Z}_+)$ *y* $\delta \in (0,1)$*, entonces* $y \in d_1(\mathbb{Z}_+)$ *y* $\|y - x\| \leq \omega_{\rho,x}(\delta)$*.*

Demostración. Notemos que

$$|y_j| \leq \frac{1}{1+\lfloor j\delta \rfloor} \sum_{k=j}^{j+\lfloor j\delta \rfloor} \|x\| = \frac{1+\lfloor j\delta \rfloor}{1+\lfloor j\delta \rfloor}\|x\| = \|x\|.$$

Sea $j \in \mathbb{Z}_+$. Entonces

$$\begin{aligned}
|y_{j+1} - y_j| &= \left| \frac{1}{1+\lfloor (j+1)\delta \rfloor} \sum_{k=j}^{j+\lfloor (j+1)\delta \rfloor} x_k - \frac{1}{1+\lfloor j\delta \rfloor} \sum_{k=j}^{j+\lfloor j\delta \rfloor} x_k \right| \\
&\leq \frac{\lfloor (j+1)\delta \rfloor - \lfloor j\delta \rfloor}{(1+\lfloor (j+1)\delta \rfloor)(1+\lfloor j\delta \rfloor)} \sum_{k=j}^{j+\lfloor j\delta \rfloor} |x_k| + \frac{1}{1+\lfloor (j+1)\delta \rfloor}|x_{j+\lfloor (j+1)\delta \rfloor}| \\
&\leq \frac{\|x\|(\lfloor j\delta \rfloor + 1)(1+\delta)}{(j+1)\delta(1+\lfloor j\delta \rfloor)} + \frac{\|x\|}{(j+1)\delta} \\
&\leq \frac{3\|x\|}{(j+1)\delta}.
\end{aligned}$$

Así, $y \in d_1(\mathbb{Z}_+)$. Además, para $j \leq k \leq j + \lfloor j\delta \rfloor$ se tiene

$$\rho(j,k) = \ln\frac{k+1}{j+1} \leq \ln\frac{k}{j} \leq \ln(1+\delta) \leq \delta.$$

Por lo tanto

$$|y_j - x_j| \leq \frac{1}{1+\lfloor j\delta \rfloor} \sum_{k=j}^{j+\lfloor j\delta \rfloor} |x_k - x_j| \leq \omega_{\rho,x}(\delta).$$

□

Proposición 4.9. *$d_1(\mathbb{Z}_+)$ es un subconjunto denso de* $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $x \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. Como $\omega_{\rho,x}(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$, podemos elegir $\delta > 0$ tal que $\omega_{\rho,x} < \epsilon$. Sea y como en (4.22). Entonces $y \in d_1(\mathbb{Z}_+)$ y $\|x - y\| < \omega_{\rho,x} < \epsilon$ por el Lema 4.8. □

La demostración del siguiente lema se puede consultar en [21].

Lema 4.10. *El álgebra C^* generada por Γ coincide con la cerradura topológica de Γ en $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$, la cual coincide con la cerradura topológica de $d_1(\mathbb{Z}_+)$ en $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$.*

Del Lema 4.10 y de la Proposición 4.9 concluimos el siguiente resultado.

Teorema 4.11. *El álgebra C^* generada por Γ coincide con la cerradura topológica de Γ en $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$, la cual es* $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Demostración. La Proposición 4.6 implica que $\Gamma \subseteq \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. Solo resta probar que Γ es denso en $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. Sea $x \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ y $\epsilon > 0$. Por la Proposición 4.9 podemos encontrar una sucesión $y \in d_1(\mathbb{Z}_+)$ tal que $\|y - x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Por el Teorema 4.10 existe una función $a \in L^\infty([0,1])$ tal que $\|\gamma_a - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$\|\gamma_a - x\| \leq \|\gamma_a - y\| + \|y - x\| < \epsilon.$$

□

4.2. Sucesiones lentamente oscilantes y su relación con los operadores de Toeplitz radiales en el espacio de Bergman armónico

Una consecuencia del Teorema 4.11 es el siguiente resultado.

Corolario 4.12. *El álgebra C^* generada por*

$$\{T_a \colon b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D}) : a \in L^\infty(\mathbb{D}) \text{ es radial } \}$$

es $*-$isomorfa a $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

En el espacio de Bergman armónico en $\mathbb{B}^n$, la Proposición 3.11 muestra que todo operador de Toeplitz con símbolo radial y acotado T_a en $b^2(\mathbb{B}^n)$ es un operador diagonal con respecto a la base ortonormal $\{\phi_{k,j} : j = 1, \ldots, h_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ definida en (3.18). Los elementos de su diagonal están dados por $\langle T_a\phi_{k,j}, \phi_{k,j}\rangle$.

En (3.21) se estableció que

$$\langle T_a\phi_{k,j}, \phi_{k,j}\rangle = 2(k+n)\int_0^1 a(r) r^{2k+2n-1}\, dr. \tag{4.23}$$

A cada símbolo radial $a \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, le asociamos la sucesión $\gamma_{n,a} = \{\gamma_{n,a}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, donde

$$\gamma_{n,a}(k) = 2(k+n)\int_0^1 a(r) r^{2k+2n-1}\,dr = (k+n)\int_0^1 a(\sqrt{t})t^{k+n-1}\,dt, \tag{4.24}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$. Notemos que (4.23) y (4.24) implican

$$T_a\phi_{k,j} = \gamma_{n,a}(k)\phi_{k,j}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$ y $j = 1, \ldots, h_k$.

Determinemos el álgebra C^* generada por el conjunto

$$\Gamma_n := \{\gamma_{n,a} : a \in L^\infty(\mathbb{B}^n) \text{ es radial }\} \subseteq l^\infty(\mathbb{Z}_+).$$

Es claro de (4.4) y (4.24) que $\gamma_{1,a} = \gamma_a$ y $\Gamma_1 = \Gamma$. Además, $\gamma_{n,a} = L^{n-1}(\gamma_{1,a})$ para cada símbolo radial $a \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, donde L es el corrimiento a la izquierda estudiado en la Proposición 4.5.

Teorema 4.13. *El álgebra C^* generada por Γ_n coincide con la cerradura topológica de Γ_n en $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$, la cual es* $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Demostración. Por la Proposición 4.6, $\Gamma_1 \subseteq \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ y por la Proposición 4.5, $\Gamma_n = L^{n-1}(\Gamma_1) \subseteq \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. Sea $x \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$ y $\epsilon > 0$. Utilizando la Proposición 4.5, $y := R^{n-1}(x) \in \mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. Aplicando el Teorema 4.11, existe un símbolo radial $a \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$ tal que $\|y - \gamma_{1,a}\| < \epsilon$. Por lo tanto,

$$\|x - \gamma_{n,a}\| = \|L^{n-1}(y) - L^{n-1}(\gamma_{1,a})\| = \|L^{n-1}(y - \gamma_{1,a})\| \leq \|y - \gamma_{1,a}\| < \epsilon;$$

es decir, Γ_n es denso en $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. □

Por lo tanto, tenemos una generalización del Corolario 4.12:

Corolario 4.14. *El álgebra C^* generada por*

$$\{T_a\colon b^2(\mathbb{B}^n) \longrightarrow b^2(\mathbb{B}^n) : a \in L^\infty(\mathbb{B}^n) \text{ es radial }\}$$

es $*-$isomorfa a $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Capítulo 5

Operadores de Toeplitz con símbolo radial en el espacio de Bergman pluriarmónico con peso

Recordemos de la Sección 2.4 que el espacio de Bergman pluriarmónico con peso $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ es el espacio de las funciones pluriarmónicas en $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. En el Teorema 2.14 se demuestra que $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ es un subespacio cerrado de $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ con núcleo reproductor R_μ, el cual vimos que es simétrico y real valuado. De acuerdo con el Teorema 2.16, la proyección ortogonal Q_μ de $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ sobre $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ se puede representar en términos de las proyecciones ortogonales de Bergman B_μ y $\overline{B}_\mu$:

$$Q_\mu f = B_\mu f + \overline{B_\mu} f - \left(2n \int\limits_0^1 t^{2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1} \int\limits_{\mathbb{B}^n} f\,dv_\mu,$$

para $f \in L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. Dada una función $a \in L^1_\mu(\mathbb{B}^n)$, el operador de Toeplitz T_a con símbolo a está definido por

$$(T_a f)(z) = \int\limits_{\mathbb{B}^n} a(w) f(w) R_\mu(z,w)\,dv(w)$$

para $f \in b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \cap L^\infty_\mu(\mathbb{B}^n)$. Por el Lema 2.10, el operador T_a está densamente definido en $b^2(\mathbb{B}^n)$. Si a es un símbolo acotado, entonces T_a es acotado en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$.

En este capítulo trabajamos con operadores de Toeplitz con símbolo radial en el espacio de Bergman pluriarmónico con peso $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. Construimos un operador R cuya restricción al espacio de Bergman pluriarmónico con peso $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ es un isomorfismo isométrico entre $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ y un subespacio de $l^2 := l^2(\mathbb{Z})$ con $RR^* = I$ y $R^*R = Q_\mu$. Usando al operador R probamos que cada operador de Toeplitz T_a con símbolo radial acotado es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación con símbolo $\gamma^\mu_{n,a}$ actuando en un subespacio de l^2.

5.1. Representación del espacio de Bergman pluriarmónico con peso

En esta sección seguimos los trabajos de Sun y Lu en [22] y de Grudsky, Karapetyants y Vasilevski en [6].

Por (1.10) y (1.12), toda función $f \in L^2(S^{2n-1})$ se puede representar como serie de polinomios armónicos homogéneos y

$$L^2(S^{2n-1}) = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}_+} H_{p,q},$$

donde $H_{p,q}$ es el espacio vectorial de todos los polinomios homogéneos armónicos que tienen grado total p en las variables $z = (z_1, \dots, z_n)$ y grado total q en las variables $\overline{z} = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n)$ restringidos a la esfera S^{2n-1}, para $p, q \in \mathbb{Z}_+$

El espacio de Hardy $H^2(\mathbb{B}^n)$ en la bola unitaria $\mathbb{B}^n$ es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $L^2(S^{2n-1})$ tal que $H^2(\mathbb{B}^n) = \oplus_{p=0}^{\infty} H_{p,0}$. Una base ortonormal para $H^2(\mathbb{B}^n)$ es $\{\psi_\alpha\}_{|\alpha|\in\mathbb{Z}_+}$, donde

$$\psi_\alpha(w) = \sqrt{\frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!}}w^\alpha$$

para $|\alpha| \in \mathbb{Z}_+$ y $w \in S^{2n-1}$. Sea $\{\psi_{\alpha,\beta}\}_{|\alpha|+|\beta|\in\mathbb{Z}_+}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ una base ortonormal para el espacio $L^2(S^{2n-1})$ tal que

$$\psi_{\alpha,0}(w) = \psi_\alpha(w),$$
$$\psi_{0,\alpha}(w) = \overline{\psi_\alpha(w)}$$

para $|\alpha| \in \mathbb{Z}_+$ y $w \in S^{2n-1}$.

Utilizando coordenadas polares de la bola unitaria tenemos

$$L^2_\mu(\mathbb{B}^n) = L^2((0,1), \mu(r)r^{2n-1}\,dr) \otimes L^2(S^{2n-1}). \tag{5.1}$$

Por lo que cualquier función $f \in L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ tiene la descomposición

$$f(z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} c_{\alpha,\beta}(r)\psi_{\alpha,\beta}(w) \tag{5.2}$$

con $z \in \mathbb{B}^n$, $r = |z|$ y $w = \frac{z}{r}$. Los coeficientes $c_{\alpha,\beta}(r)$ cumplen

$$\|f\|^2_{L^2_\mu(\mathbb{B}^n)} = \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} \int_0^1 |c_{\alpha,\beta}(r)|^2 \mu(r) r^{2n-1}\,dr < \infty.$$

Utilizando (5.1), (5.2) y la desigualdad de Parseval, el siguiente operador es unitario.

$$\begin{aligned} U_1\colon L^2\big((0,1),\mu(r)r^{2n-1}dr\big) \otimes L^2(S^{2n-1}) &\longrightarrow L^2\big((0,1),\mu(r)r^{2n-1}dr\big) \otimes l^2 \\ &= l^2\Big(L^2\big((0,1),\mu(r)r^{2n-1}dr\big)\Big), \end{aligned}$$

definido por $(U_1 f)(z) = \{c_{\alpha,\beta}(r)\}$ y

$$\|f\|^2_{L^2_\mu(\mathbb{B}^n)} = \|c_{\alpha,\beta}(r)\|^2_{l^2\left(L^2((0,1),\mu(r)r^{2n-1}dr)\right)} = \sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} \|c_{\alpha,\beta}(r)\|^2_{L^2\left((0,1),\mu(r)r^{2n-1}dr\right)}.$$

Sea f una función pluriarmónica en la bola unitaria $\mathbb{B}^n$. Entonces, por la Proposición 1.17 f se puede expresar como

$$f = g + \overline{h},$$

donde las funciones g, h son analíticas en $\mathbb{B}^n$ con $g(0) = h(0)$. Sean

$$g(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha z^\alpha, \qquad h(z) = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} c_\beta z^\beta$$

las representaciones en series de potencias de g y h respectivamente. Estas convergen absoluta y uniformemente en compactos de $\mathbb{B}^n$. Además, tenemos

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha z^\alpha + \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \overline{c_\beta z^\beta} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha(r)\psi_\alpha(w) + \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \overline{c_\beta(r)\psi_\beta(w)},$$

donde $c_\alpha(r) = c_\alpha \sqrt{\frac{(n-1)!\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!}} r^{|\alpha|}$, $c_\beta(r) = c_\beta \sqrt{\frac{(n-1)!\beta!}{(n-1+|\beta|)!}} r^{|\beta|}$, $r = |z|$ y $w = \frac{z}{|z|}$.

Así, para caracterizar las funciones f en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ consideremos la representación

$$f(z) = g(z) + \overline{h(z)} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,0}(r)\psi_{\alpha,0}(w) + \sum_{|\beta|=0}^{\infty} c_{0,\beta}(r)\psi_{0,\beta}(w),$$

donde g y h satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} g(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) g(z) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} h(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) h(z) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{B}^n$.

Aplicando $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$ y $\frac{\partial}{\partial z_k}$ a g y a $\overline{h}$ respectivamente, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,0}(r)\psi_{\alpha,0}(w) = \frac{z_k}{2r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dr} c_{\alpha,0}(r) - \frac{|\alpha|}{r} c_{\alpha,0}(r)\right) \psi_{\alpha,0}(w),$$
$$\frac{\partial}{\partial z_k} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} c_{0,\beta}(r)\psi_{0,\beta}(w) = \frac{\overline{z}_k}{2r} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dr} c_{0,\beta}(r) - \frac{|\beta|}{r} c_{0,\beta}(r)\right) \psi_{0,\beta}(w),$$

para $k \in \mathbb{N}$. De aquí obtenemos el sistema infinito de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias

$$\frac{d}{dr} c_{\alpha,0}(r) - \frac{|\alpha|}{r} c_{\alpha,0}(r) = 0, \qquad |\alpha| \in \mathbb{Z}_+,$$
$$\frac{d}{dr} c_{0,\beta}(r) - \frac{|\beta|}{r} c_{0,\beta}(r) = 0, \qquad |\beta| \in \mathbb{Z}_+.$$

La solución general a este sistema de ecuaciones diferenciales tiene la forma

$$c_{\alpha,0}(r) = b_\alpha r^{|\alpha|} = \left(\int_0^1 t^{2|\alpha|+2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1/2} c_{\alpha,0} r^{|\alpha|},$$

$$c_{0,\beta}(r) = b_\beta r^{|\beta|} = \left(\int_0^1 t^{2|\beta|+2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1/2} c_{0,\beta} r^{|\beta|}.$$

Por lo tanto, para todo $f \in b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ tenemos

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,0}\lambda(n,|\alpha|) r^{|\alpha|}\psi_{\alpha,0}(w) + \sum_{|\beta|=0}^{\infty} c_{0,\beta}\lambda(n,|\beta|) r^{|\beta|}\psi_{0,\beta}(w),$$

para $z \in \mathbb{B}^n$ y $w = \frac{z}{|z|}$, donde $\lambda(n,m) = \left(\int_0^1 t^{2m+2n-1}\mu(t)\,dt\right)^{-1/2}$. Además,

$$\|f\|^2_{L^2_\mu(\mathbb{B}^n)} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |c_{\alpha,0}|^2 + \sum_{|\beta|=0}^{\infty} |c_{0,\beta}|^2.$$

Entonces

$$b^2_{1,\mu}(\mathbb{B}^n) := U_1(b^2_\mu(\mathbb{B}^n))$$

es el subespacio cerrado de $L^2\big((0,1),\mu(r)r^{2n-1}\,dr\big) \otimes l^2 = l^2\Big(L^2\big((0,1),\mu(r)r^{2n-1}\,dr\big)\Big)$ que consiste de las sucesiones $\{c_{\alpha,\beta}(r)\}$ de la forma

$$c_{\alpha,\beta}(r) = \begin{cases} c_{\alpha,0}\lambda(n,|\alpha|)r^{|\alpha|}, & |\beta| = 0, \\ c_{0,\beta}\lambda(n,|\beta|)r^{|\beta|}, & |\alpha| = 0, \\ 0, & |\alpha||\beta| \neq 0. \end{cases}$$

Además,

$$\|f\|_{L^2_\mu(\mathbb{B}^n)} = \|c_{\alpha,\beta}(r)\|_{l^2\left(L^2((0,1),\mu(r)r^{2n-1}dr)\right)} = \left(\sum_{|\alpha|+|\beta|=0}^{\infty} |c_{\alpha,\beta}|^2\right)^{1/2}.$$

Consideramos un operador unitario $u_m\colon L^2((0,1),\mu(r)r^{2n-1}) \longrightarrow L^2((0,1),r^{2n-1}\,dr)$ para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, tal que

$$(u_m f)(r) = \psi_m(r) f(\phi_m(r)), \tag{5.3}$$

con $\psi_m(r) \geq 0$, $0 < r < 1$, ϕ_m biyectiva y continua en $[0,1]$ con inversa φ_m en $(0,1)$, de tal forma que

$$u_m(\lambda(n,m)r^m) = \sqrt{2n}. \tag{5.4}$$

Al ser u_m unitario, se tiene

$$|\psi_m(\varphi_m(\rho))|^2 \varphi_m^{2n-1}(\rho)\varphi_m'(\rho) = \rho^{2n-1}\mu(\rho). \tag{5.5}$$

Además, de (5.3) y (5.4)

$$\psi_m(r)\lambda(n,m)\phi_m^m(r) = \sqrt{2n}.$$

Elevando al cuadrado y tomando $\rho = \phi_m(r)$ obtenemos

$$\big[\psi_m(\varphi_m(\rho))\big]^2 \lambda(n,m)^2 \rho^{2m} = 2n,$$

lo cual, junto con (5.5) implica

$$2n\varphi_m^{2n-1}(\rho)\varphi_m'(\rho) = \lambda(n,m)^2 \rho^{2n+2m-1}\mu(\rho);$$

es decir,

$$\varphi_m^{2n}(\rho) = \lambda^2(n,m)\int_0^\rho r^{2n+2m-1}\mu(r)\,dr.$$

Así, para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, podemos definir la función φ_m por

$$\varphi_m(\rho) = \lambda(n,m)^{\frac{1}{n}}\left(\int_0^\rho r^{2m+2n-1}\mu(r)\,dr\right)^{\frac{1}{2n}}$$

para todo $\rho \in [0,1]$. La función inversa de φ_m en $[0,1]$ la denotamos por $\phi_m(r)$ y definimos el operador

$$(u_m f)(r) = \frac{\sqrt{2n}}{\lambda(n,m)}\phi_m^{-m}(r) f(\phi_m(r)).$$

El operador u_m es unitario de $L^2((0,1),\mu(r)r^{2n-1})$ sobre $L^2((0,1),r^{2n-1}\,dr)$ de tal forma que

$$u_m(\lambda(n,m)r^m) = \sqrt{2n}, \tag{5.6}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$. Definimos al operador unitario

$$\begin{array}{rccc} U_2\colon & l^2\Big(L^2((0,1),\mu(r)r^{2n-1})\Big) & \longrightarrow & l^2\Big(L^2((0,1),r^{2n-1}\,dr)\Big) \\ & \{c_{\alpha,\beta}(r)\} & \mapsto & \{(u_{|\alpha|+|\beta|}c_{\alpha,\beta})(r)\}. \end{array}$$

Por (5.6), tenemos que el espacio $b^2_{2,\mu}(\mathbb{B}^n) := U_2(b^2_{1,\mu}(\mathbb{B}^n))$ coincide con el espacio de todas las sucesiones $\{k_{\alpha,\beta}\}$ tales que

$$k_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \sqrt{2n}c_{\alpha,0}, & |\beta| = 0, \\ \sqrt{2n}c_{0,\beta}, & |\alpha| = 0, \\ 0, & |\alpha||\beta| \neq 0. \end{cases}$$

Sea $l_0(r) = \sqrt{2n}$. Tenemos que $l_0(r) \in L^2((0,1),r^{2n-1}\,dr)$ con $\|l_0\|_{L^2((0,1),r^{2n-1}\,dr)} = 1$. Denotamos por L_0 al subespacio de dimensión 1 de $L^2((0,1),r^{2n-1}\,dr)$ generado por $l_0(r)$. La proyección ortogonal P_0 de $L^2((0,1),r^{2n-1}\,dr)$ sobre L_0 tiene la forma

$$(P_0 f)(r) = \langle f, l_0\rangle l_0 = \sqrt{2n}\int_0^1 f(\rho)\sqrt{2n}\rho^{2n-1}\,d\rho, \tag{5.7}$$

para $0 < r < 1$. Sea
$$d_{\alpha,\beta} = \frac{k_{\alpha,\beta}}{\sqrt{2n}}.$$
Denotemos por $l^2_{\#}$ al subespacio de l^2 que consiste en todas las sucesiones $\{d_{\alpha,\beta}\}$ y sea $p^{\#}$ la proyección ortogonal de l^2 sobre $l^2_{\#}$. Entonces $p^{\#} = \chi_+(\alpha,\beta)I$, donde
$$\chi_+(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & |\alpha||\beta| > 0, \\ 1, & |\alpha||\beta| = 0. \end{cases}$$

Observemos que $b^2_{2,\mu}(\mathbb{B}^n) = L_0 \otimes l^2_{\#}$ y que la proyección ortogonal B_2 de
$$l^2\Big(L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr)\Big) = L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr) \otimes l^2$$
sobre $b^2_{2,\mu}(\mathbb{B}^n)$ es $B_2 = P_0 \otimes p^{\#}$. Esto prueba el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *El operador unitario $U := U_1U_2$ es un isomorfismo isométrico de $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ sobre $l^2\Big(L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr)\Big) = L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr) \otimes l^2$ tal que*

a) *La imagen del espacio de Bergman pluriarmónico $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ es $L_0 \otimes l^2_{\#}$:*
$$U\big(b^2_\mu(\mathbb{B}^n)\big) = L_0 \otimes l^2_{\#},$$
donde L_0 es el subespacio uno-dimensional de $L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr)$ generado por la función $l_0(r) = \sqrt{2n}$;

b) *La proyección de Bergman pluriarmónica Q_μ es unitariamente equivalente a $P_0 \otimes p^{\#}$:*
$$UQ_\mu U^{-1} = P_0 \otimes p^{\#},$$
donde P_0 es la proyección unidimensional de $L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr)$ sobre L_0 definida en (5.7).

Definimos
$$\begin{array}{rccl} R_0\colon & l^2_{\#} & \longrightarrow & L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr)) \otimes l^2 \\ & \{d_{\alpha,\beta}\} & \mapsto & l_0(r)\{\chi_+(\alpha,\beta)d_{\alpha,\beta}\}. \end{array}$$
El operador R_0 es un morfismo isométrico cuyo Rango coincide con el espacio $b^2_{2,\mu}(\mathbb{B}^n)$. El operador adjunto
$$R_0^*\colon L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr) \otimes l^2 \longrightarrow l^2_{\#}$$
está dado por
$$R_0^*(\{c_{\alpha,\beta}(r)\}) = \left\{ \chi_+(\alpha,\beta) \int_0^1 c_{\alpha,\beta}(\rho)\sqrt{2n}\rho^{2n-1}\,d\rho \right\},$$
con
$$R_0^*R_0 = I\colon l^2_{\#} \longrightarrow l^2_{\#},$$
$$R_0R_0^* = B_2\colon L^2((0,1), r^{2n-1}\,dr) \otimes l^2 \longrightarrow b^2_{2,\mu}(\mathbb{B}^n) = L_0 \otimes l^2_{\#}.$$

Además, el operador $R := R_0^* U$ mapea el espacio $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ sobre $l^2_\#$ y su restricción

$$R|_{b^2_\mu(\mathbb{B}^n)} \colon b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \longrightarrow l^2_\#$$

es un isomorfismo isométrico. El operador adjunto

$$R^* = U^* R_0 \colon l^2_\# \longrightarrow b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \subseteq L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$$

es un isomorfismo isométrico de $l^2_\#$ sobre el subespacio $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ de $L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} RR^* &= I \colon l^2_\# \longrightarrow l^2_\#, \\ R^*R &= Q_\mu \colon L^2_\mu(\mathbb{B}^n) \longrightarrow b^2_\mu(\mathbb{B}^n). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Teorema 5.2. *El isomorfismo isométrico $R^* = U^* R_0 \colon l^2_\# \longrightarrow b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ está dado por*

$$R^*\big(\{d_{\alpha,\beta}\}\big) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \lambda(n,|\alpha|) c_{\alpha,0} r^{|\alpha|} \psi_{\alpha,0}(w) + \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \lambda(n,|\beta|) c_{0,\beta} r^{|\beta|} \psi_{0,\beta}(w).$$

Demostración. Sea $\{d_{\alpha,\beta}\} \in l^2_\#$. Entonces

$$\begin{aligned} R^*\big(\{d_{\alpha,\beta}\}\big) &= U_1^* U_2^* R_0\big(\{d_{\alpha,\beta}\}\big) \\ &= U_1^* U_2^* \big(\{\sqrt{2n}\chi_+(\alpha,\beta) d_{\alpha,\beta}\}\big) \\ &= U_1^* \big(\{\lambda(n,|\alpha|) c_{\alpha,0} r^{|\alpha|}\} + \{\lambda(n,|\beta|) c_{0,\beta} r^{|\beta|}\}\big) \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \lambda(n,|\alpha|) c_{\alpha,0} r^{|\alpha|} \psi_{\alpha,0}(w) + \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \lambda(n,|\beta|) c_{0,\beta} r^{|\beta|} \psi_{0,\beta}(w). \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 5.3. *El isomorfismo $R \colon b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \longrightarrow l^2_\#$ está dado por $R(\varphi) = \{\frac{k_{\alpha,\beta}}{\sqrt{2n}}\}$, donde*

$$\frac{k_{\alpha,0}}{\sqrt{2n}} = c_{\alpha,0} = \langle \varphi, e^\mu_{\alpha,0} \rangle = \lambda(n,|\alpha|) d_{n,\alpha} \int_{\mathbb{B}^n} \varphi(z) \overline{z}^\alpha \, dv(z);$$

$$\frac{k_{0,\beta}}{\sqrt{2n}} = c_{0,\beta} = \langle \varphi, e^\mu_{0,\beta} \rangle = \lambda(n,|\beta|) d_{n,\beta} \int_{\mathbb{B}^n} \varphi(z) z^\beta \, dv(z);$$

$|\alpha|, |\beta| \in \mathbb{Z}_+$ y $\{e^\mu_{\alpha,0}\}_{|\alpha|=0}^\infty \cup \{e^\mu_{0,\beta}\}_{|\beta|=1}^\infty$ es la base ortonormal del espacio de Bergman pluriarmónico $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ dada en (2.19):

$$e^\mu_{\alpha,0} = d_{n,\alpha} \lambda(n,|\alpha|) z^\alpha = \sqrt{\frac{(n-1+|\alpha|)!}{(n-1)!\alpha!}} \left(2n \int_0^1 t^{2|\alpha|+2n-1} \mu(t) \, dt \right)^{-\frac{1}{2}} z^\alpha,$$

$$e^\mu_{0,\beta} = d_{n,\beta} \lambda(n,|\beta|) \overline{z}^\beta = \sqrt{\frac{(n-1+|\beta|)!}{(n-1)!\beta!}} \left(2n \int_0^1 t^{2|\beta|+2n-1} \mu(t) \, dt \right)^{-\frac{1}{2}} \overline{z}^\beta.$$

5.2. Operadores de Toeplitz radiales y sucesiones lentamente oscilantes

Recordemos que dado $a \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, definimos el operador de Toeplitz con símbolo a por $T_a = Q_\mu M_a$, donde Q_μ es la proyección de Bergman sobre $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$. Es decir,

$$\begin{array}{rccc} T_a\colon & b^2_\mu(\mathbb{B}^n) & \longrightarrow & b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \\ & f & \mapsto & Q_\mu(af). \end{array}$$

El operador T_a es un operador lineal y acotado con norma menor o igual que $\|a\|$.

Dada una función $a \in L^1_\mu(\mathbb{B}^n)$, el operador de Toeplitz T_a con símbolo a está definido por

$$(T_a f)(z) = \int\limits_{\mathbb{B}^n} a(w) f(w) R_\mu(z,w)\, dv(w)$$

para $f \in b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \cap L^\infty_\mu(\mathbb{B}^n)$. Por el Lema 2.10, el operador T_a está densamente definido en $b^2(\mathbb{B}^n)$. Si a es un símbolo acotado, entonces T_a es acotado en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$.

Teorema 5.4. *Sea un símbolo radial $a \in L^\infty_\mu(\mathbb{B}^n)$. Entonces el operador de Toeplitz T_a actuando en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación con símbolo $\gamma^\mu_{n,a}$ actuando en $l^2_\#$. La sucesión $\{\chi_+(\alpha,\beta)\gamma^\mu_{n,a}(|\alpha|+|\beta|)\}$ está dada por*

$$\gamma^\mu_{n,a}(m) = \lambda^2(n,m) \int\limits_0^1 a(r) r^{2m+2n-1} \mu(r)\, dr \tag{5.9}$$

para $m \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración. Utilizando (5.8), el operador T_a es unitariamente equivalente al operador

$$\begin{aligned} RT_aR^* &= RQ_\mu a Q_\mu R^* \\ &= R(R^*R)a(R^*R)R^* \\ &= (RR^*)RaR^*(RR^*) \\ &= RaR^* \\ &= R_0^* U_2 U_1 a(r) U_1^{-1} U_2^{-1} R_0 \\ &= R_0^* U_2 \{a(r)\} U_2^{-1} R_0 \\ &= R_0^* \{\chi_+(\alpha,\beta) a(\phi_{|\alpha|+|\beta|}(r))\} R_0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Además, dada $\{d_{\alpha,\beta}\}$ una sucesión de $l^2_{\#}$. Por (5.1), tenemos

$$
\begin{aligned}
R_0^*\{\chi_+(\alpha,\beta)a(\phi_{|\alpha|+|\beta|}(r))\}R_0\{d_{\alpha,\beta}\} \\
&= R_0^*\{\sqrt{2n}d_{\alpha,\beta}\chi_+(\alpha,\beta)a(\phi_{|\alpha|+|\beta|}(r))\} \\
&= \left\{\int_0^1 \chi_+(\alpha,\beta)a(\phi_{|\alpha|+|\beta|}(r))2nd_{\alpha,\beta}r^{2n-1}\,dr\right\} \\
&= \left\{\chi_+(\alpha,\beta)d_{\alpha,\beta}\int_0^1 a(y), d\varphi^{2n}_{|\alpha|+|\beta|}(y)\right\} \\
&= \left\{\chi_+(\alpha,\beta)d_{\alpha,\beta}\lambda^2(n,|\alpha|+|\beta|)\int_0^1 a(y)y^{2(|\alpha|+|\beta|)+2n-1}\mu(y)\,dy\right\} \\
&= \{\chi_+(\alpha,\beta)\gamma^\mu_{n,a}(|\alpha|+|\beta|)d_{\alpha,\beta}\}. \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

□

Notemos que el teorema anterior se puede generalizar a símbolos radiales $a \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{B}^n)$ con $\mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{B}^n) = \{a \in L^1_\mu(\mathbb{B}^n) : af \in L^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ para toda $f \in b^2_\mu(\mathbb{B}^n)\}$.

Corolario 5.5. *El operador de Toeplitz T_a con símbolo radial $a \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{B}^n)$, es acotado en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ si y sólo si $\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} |\gamma^\mu_{n,a}(k)| < \infty$. Además,*

$$\|T_a\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} |\gamma^\mu_{n,a}(k)|. \qquad (5.12)$$

Corolario 5.6. *El operador de Toeplitz T_a con símbolo radial $a \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{B}^n)$ es compacto en $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ si y sólo si $\lim_{k\to\infty} \gamma^\mu_{n,a}(k) = 0$. En este caso, el espectro del operador acotado T_a está dado por*

$$\sigma(T_a) = \overline{\{\gamma^\mu_{n,a}(k) : k \in \mathbb{Z}_+\}} \qquad (5.13)$$

y su espectro esencial coincide con el conjunto de puntos límite de la sucesión

$$\{\gamma^\mu_{n,a}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}.$$

Denotamos por $L^\mu_\alpha(\mathbb{B}^n)$ al subespacio unidimensional de $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ generado por los elementos base $e^\mu_{\alpha,0}$, $|\alpha| \in \mathbb{Z}_+$. Entonces las proyecciones ortogonales P^μ_α de $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ sobre $L^\mu_\alpha(\mathbb{B}^n)$ tienen la forma

$$P^\mu_\alpha f = \langle f, e^\mu_{\alpha,0}\rangle e^\mu_{\alpha,0} = e^\mu_{\alpha,0}(z)\int_{\mathbb{B}^n} f(w)\overline{e^\mu_{\alpha,0}(w)}\mu(|w|)\,dv(w). \qquad (5.14)$$

De manera similar, denotamos por $\overline{L^\mu_\beta}(\mathbb{B}^n)$ al subespacio unidimensional de $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ generado por los elementos base $e^\mu_{0,\beta}$, $|\beta| \in \mathbb{Z}_+$. Entonces las proyecciones ortogonales $\overline{P^\mu_\beta}$ de $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ sobre $\overline{L^\mu_\beta}(\mathbb{B}^n)$ tienen la forma

$$\overline{P^\mu_\beta} f = \langle f, e^\mu_{0,\beta}\rangle e^\mu_{0,\beta} = e^\mu_{0,\beta}(z)\int_{\mathbb{B}^n} f(w)\overline{e^\mu_{0,\beta}}(w)\mu(|w|)\,dv(w). \qquad (5.15)$$

Teorema 5.7. *Sea T_a un operador de Toeplitz acotado con símbolo radial $a \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{B}^n)$. Entonces la descomposición espectral del operador T_a es*

$$T_a = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \gamma^\mu_{n,a}(|\alpha|)P^\mu_\alpha + \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \gamma^\mu_{n,a}(|\beta|)\overline{P^\mu_\beta} - \gamma^\mu_{n,a}(0)P^\mu_0. \tag{5.16}$$

Recordemos que el valor $\gamma^\mu_{n,a}(|\alpha|+|\beta|)$ depende solamente de $|\alpha|+|\beta|$. Usando la fórmula

$$(z \cdot \overline{w})^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} z^\alpha \overline{w}^\alpha, \tag{5.17}$$

la proyección ortogonal de $b^2_\mu(\mathbb{B}^n)$ sobre el subespacio generado por todos los elementos $e^\mu_{\alpha,\beta}$ con $|\alpha| + |\beta| = k$, $|\alpha||\beta| = 0$ y $k \in \mathbb{N}$ es

$$(Q^\mu_{(k)} f)(z) = l(k,n) \int_{\mathbb{B}^n} f(w)(z \cdot \overline{w})^k \mu(|w|)\, dv(w) + l(k,n) \int_{\mathbb{B}^n} f(w)(w \cdot \overline{z})^k \mu(|w|)\, dv(w);$$

Por lo tanto la descomposición espectral de T_a puede ser escrita como

$$T_a = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^\mu_{n,a}(k) Q^\mu_{(k)}.$$

Finalmente, determinemos el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado para el peso radial $\mu(|z|) = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}(1-|z|^2)^\lambda$ con $\lambda > -1$.

En [3, Teorema 5.4] se muestra que el álgebra C^* generada por

$$\Gamma^\lambda_n := \{\gamma^\mu_{n,a} : a \in L^\infty_\mu(\mathbb{B}^n) \text{ es radial } \}$$

coincide con su cerradura topológica en $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$, la cual es $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. Por lo tanto, tenemos otra generalización del Corolario 4.12:

Corolario 5.8. *Para $\mu(|z|) = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}(1-|z|^2)^\lambda$ con $\lambda > -1$, el álgebra C^* generada por*

$$\{T_a \colon b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \longrightarrow b^2_\mu(\mathbb{B}^n) : a \in L^\infty_\mu(\mathbb{B}^n) \textit{ es radial } \}$$

es $*-$isomorfa a $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$.

Con la notación:

$$\tau_n := \{T_a \colon b^2(\mathbb{B}^n) \longrightarrow b^2(\mathbb{B}^n) : a \in L^\infty(\mathbb{B}^n) \text{ es radial } \}$$

$$\mathcal{T}^\lambda_n := \{T_a \colon b^2_\mu(\mathbb{B}^n) \longrightarrow b^2_\mu(\mathbb{B}^n) : a \in L^\infty_\mu(\mathbb{B}^n) \text{ es radial}\},$$

con $\mu(|z|) = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda+1)}(1-|z|^2)^\lambda$ y $\lambda > -1$, al igual que en los casos analítico y anti-analítico, del Corolario 4.14 y del Corolario 5.8 nos damos cuenta que la estructura de álgebra C^* de $C^*(\tau_n)$ y $C^*(\mathcal{T}^\lambda_n)$ no depende de la dimensión n ni del peso λ. Para todos $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda > -1$, $C^*(\tau_n)$ y $C^*(\mathcal{T}^\lambda_n)$ son $*-$isomorfos a $\mathrm{SO}(\mathbb{Z}_+)$. Sin embargo, los operadores de multiplicación unitariamente equivalentes a cada operador de Toeplitz de τ_n y $\mathcal{T}^\lambda_n$ sí dependen de la dimensión n de la bola unitaria:

En el caso pluriarmónico, los valores propios $\gamma^{\mu}_{n,a}(k)$ se repiten en la diagonal

$$2\binom{n+k-1}{n-1}$$

veces para $k \in \mathbb{N}$ y $\gamma^{\mu}_{n,a}(0)$ aparece sólo una vez.

En el caso armónico, los valores propios $\gamma_{n,a}(k)$ se repiten en la diagonal

$$\left[\frac{2n+2k-2}{k}\right]\binom{2n+k-3}{2n-2}$$

veces para $k \in \mathbb{N}$ y $\gamma_{n,a}(0)$ aparece sólo una vez.

En particular para $n = 1$ y $\mu = 1$, $b^2(\mathbb{D}) = b^2_1(\mathbb{D})$ y por lo tanto, $\gamma_a(0)$ aparece sólo una vez en la diagonal y $\gamma_a(k)$ se repite dos veces para cada $k \in \mathbb{N}$.

Bibliografía

[1] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic Function Theory.* Springer-Verlag, second edition, 2000.

[2] S. Axler and D. Zheng. Compact operators via the Berezin transform. *Indiana Univ. Math. J.*, 47:387–400, 1998.

[3] W. Bauer, C. Herrera-Yañez, and N. Vasilevski. Eigenvalue characterization of radial operators on weighted Bergman spaces over the unit ball. *Integral Equations and Operator Theory*, 78:271–300, 2014.

[4] J. B. Conway. *A Course in Operator Theory*, volume 21 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, United States of America, 1999.

[5] J. Dixmier. *C^*-algebras*, volume 15 of *North-Holland mathematical library.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

[6] S. Grudsky, A. Karapetyants, and N. Vasilevski. Toeplitz operators on the unit ball in C^n with radial symbols. *J. Operator Theory*, 49:325–346, 2003.

[7] S. Grudsky and N. Vasilevski. Bergman-Toeplitz operators: Radial component influence. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 40(1):16–33, 2001.

[8] S. M. Grudsky, E. A. Maximenko, and N. L. Vasilevski. Radial Toeplitz operators on the unit ball and slowly oscillating sequences. *Communications in Mathematical Analysis*, 14(2):77–94, 2013.

[9] J. A. Hernández-Hermida. *El teorema espectral.* Instituto Politécnico Nacional, 2012.

[10] B. Korenblum and K. Zhu. An application of Taubererian theorems to Toeplitz operators. *J. Operator Theory*, 33:353–361, 1995.

[11] Y. J. Lee. Compact radial operators on the harmonic Bergman space. *J. Math. Kyoto Univ.*, 44(4):769–777, 2004.

[12] M. Loaiza and C. Lozano. On C^*-algebras of Toeplitz operators on the harmonic Bergman space. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 76:105–130, 2013.

[13] M. Loaiza and C. Lozano. Commutative algebras of Toeplitz operators on the pluriharmonic Bergman space. *Communications in Mathematical Analysis*, 17(2):239–252, 2014.

[14] J. Miao. Toeplitz operators with bounded radial symbols on the harmonic Bergman space of the unit ball. *Acta Sci. Math*, 63:639–645, 1997.

[15] A. G. Postnikov. Tauberian theory and its applications. *Proc. Steklov Inst. Math. Amer. Math. Soc.*, 144, 1980.

[16] W. Rudin. Pluriharmonic functions in balls. *American Mathematical Society*, 62(1):44–46, 1977.

[17] W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of C^n*, volume 241 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, New York, 1980.

[18] R. Schmidt. Über divergence Folgen and lineare Mittelbildungen. *Math. Z.*, 22:89–152, 1925.

[19] K. Stroethoff. Compact Toeplitz operators on Bergman spaces. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 124:151–160, 1998.

[20] K. Stroethoff. Compact Toeplitz operators on weighted harmonic Bergman spaces. *J. Austral. Math. Soc.*, 64:136–148, 1998.

[21] D. Suárez. The eigenvalues of limits of radial Toeplitz operators. *Bull. London Math. Soc.*, 40:631–641, 2008.

[22] Z. L. Sun and Y. F. Lu. Toeplitz operators on the weighted pluriharmonic Bergman space with radial symbols. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, 2011:1–15, 2011.

[23] N. L. Vasilevski. *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space*, volume 185 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2008.

[24] Z.-H. Zhou, W.-L. Chen, and X.-T. Dong. The Berezin transform and radial operators on the Bergman space of the unit ball. *Complex Anal. Oper. Theory*, 7:313–329, 2013.

[25] N. Zorboska. The Berezin transform and radial operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131(3):793–800, 2002.