



**Centro de Investigación y de
Estudios Avanzados del Instituto
Politécnico Nacional**

Unidad Zacatenco
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Sección Mecatrónica

**Modelado, análisis y evaluación experimental
de vigas de sección transversal variable que
producen agujeros negros acústicos**

Tesis que presenta el :
Ing. Jorge Iván Valdés Cerón

Para obtener el Grado de:
Maestro en Ciencias

En la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Director de tesis:
Dr. Gerardo Silva Navarro

A Citlalli y mi familia

Agradecimientos

Agradezco al CINVESTAV por darme la oportunidad de estudiar y superarme a mí mismo, de manera personal y profesional, resulta un orgullo pertenecer a esta institución y representar a la ciencia en México.

Agradezco al CONACYT por brindarme la oportunidad de estudiar la maestría con beca, de otra manera esto no hubiera sido posible.

Agradezco a los profesores y colegas de la Sección de Mecatrónica que contribuyeron a mi formación.

Agradezco a mi director de tesis el Dr. Gerardo Silva Navarro por su instrucción y apoyo durante la elaboración de esta tesis.

Resumen

Esta tesis es un trabajo de investigación alrededor de la teoría que describe el fenómeno conocido como Agujero Negro Acústico, que se produce en una viga cuya sección transversal es variable y en función de su longitud, generando una interfaz cuya diferencia de impedancias mecánicas provoca que las velocidades de onda decrezcan a cero evitando la reflexión de las vibraciones incidentes, lo que concentra las vibraciones en el segmento de viga de sección variable permitiendo una disipación de energía más rápida y focalizada. De esta forma, como posible uso potencial es en los absorbedores pasivos de vibraciones mecánicas. Además de un marco teórico se desarrolla un análisis teórico y experimental en el que se estudian las propiedades de estos elementos culminando en la presentación de los experimentos que validan el modelado y análisis teórico mediante el ensayo de unas probetas.

Palabras clave: Agujero negro acústico, Propagación de ondas, Vibraciones mecánicas, Viga de sección transversal variable.

Abstract

This thesis is a research work about the theory that describes the phenomenon known as Acoustic Black Hole, which occurs in a beam whose cross section is variable and depending on its length, generating an interface whose difference in mechanical impedances causes the wave speeds decrease to zero avoiding the reflection of incident vibrations, which concentrates the vibrations in the segment with variable section beam, thus allowing a faster and more focused energy dissipation. Thus, as a possible potential use is on passive vibration absorbers. In addition to a theoretical framework, a theoretical and experimental analysis is developed in which the properties of these elements are studied, culminating in the presentation of the experiments that validate the theoretical modeling and analysis through the testing of test specimens.

Keywords: Acoustic black hole, Mechanical vibrations, Variable section beam, Wave propagation.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Índice de figuras	VII
Capítulo 1 Introducción.....	1
1.1 Vibraciones mecánicas y estructurales.....	1
1.1.1 Propagación de ondas mecánicas y sonido.....	2
1.1.1.1 Onda sinusoidal.....	2
1.1.1.2 Fase y constante de fase	2
1.1.1.3 Interferencia de ondas	2
1.1.2 Modos de Vibración y resonancia.....	3
1.2 Importancia del estudio de las vibraciones mecánicas	3
1.3 Soluciones al problema de vibraciones mecánicas.....	4
1.3.1 Control pasivo de vibraciones	4
1.3.2 Control activo de vibraciones.....	5
1.4 Agujeros Negros Acústicos (ANA).....	5
1.5 Breve estado del arte	6
1.6 Motivación del proyecto.....	8
1.7 Objetivos de la tesis.....	9
1.7.1 Objetivo general	9
1.7.2 Objetivos particulares.....	9
1.8 Organización de la tesis.....	9
Capítulo 2 Preliminares.....	11
2.1 Antecedentes	11
2.2 Teoría preliminar importante	12
2.2.1 Modelado de vigas tipo Euler-Bernoulli y Timoshenko	12
2.2.2 Definición geométrica del ANA.....	18
2.2.3 Coeficiente de reflexión del ANA [6, 18].	19
2.2.4 Frecuencia de corte del ANA	21
Capítulo 3 Desarrollo del trabajo	23
3.1 Descripción de los materiales.....	23
3.2 Procesos.....	24

3.3	Desarrollo teórico.....	25
3.3.1	Viga uniforme	25
3.3.1.1	Modelado de una viga uniforme.....	25
3.3.1.2	Solución analítica la viga uniforme.....	26
3.3.1.3	Frecuencias naturales de la viga uniforme	28
3.3.1.4	Simulación de la viga uniforme con el método analítico/numérico	28
3.3.1.5	Simulación viga uniforme por método de elemento finito	29
3.3.2	Viga con Agujero Negro Acústico	34
3.3.2.1	Modelado de viga con Agujero Negro Acústico	34
3.3.2.2	Solución analítica viga con Agujero Negro Acústico	35
3.3.2.3	Frecuencia de corte y coeficiente de reflexión del Agujero Negro Acústico.....	36
3.3.2.4	Simulación de la viga con Agujero Negro Acústico vía solución exacta.....	37
3.3.2.5	Simulación viga con ANA por método de elemento finito.....	39
3.3.2.6	Modos de vibración de viga con Agujero Negro Acústico vía solución exacta....	40
3.4	Desarrollo experimental	44
3.4.1	Construcción de las probetas.....	44
3.4.2	Experimento y señales de audio	45
3.4.2.1	Experimento	45
3.4.2.2	Señales de audio de los experimentos	46
3.4.3	Frecuencias naturales	51
3.5	Resultados y discusión	55
3.6	Propuesta de trabajo futuro.	56
3.6.1	Un posible caso de aplicación.....	57
3.7	Una aclaración importante.	57
	Capítulo 4 Conclusiones.....	59
	Bibliografía	61

Índice de figuras

Fig. 1. Diagrama esquemático de un sistema vibratorio de un grado de libertad.....	1
Fig. 2 Elemento infinitesimal de masa.	2
Fig. 3 Diagrama esquemático de los primeros 3 modos de vibración de una cuerda [1].	3
Fig. 4 Puente de Tacoma-Narrows durante vibración [1].	4
Fig. 5 Sistema de control de vibraciones en estructura tipo edificio [4].	5
Fig. 6. Aleta original (b.1), aleta con ANA (b.2), con ANA y viscoelástico (b.3) y (b.4) [9].	7
Fig. 7. ANAs tipo espiral de Arquímedes de diferentes longitudes [11].	7
Fig. 8. Propuesta de ANAS tipo disco y concentración de energía. (a) Probetas con ANAs con orificios tipo disco, y b) Relación de energía [12].	8
Fig. 9. Representación de un segmento de viga flexionada.	12
Fig. 10. Elemento diferencial de viga. a) Momentos y fuerzas, b) Vista de la sección transversal. .	13
Fig. 11. Curvatura del elemento de viga.	14
Fig. 12. Elemento de viga de Timoshenko.	16
Fig. 13. Sección transversal de elemento de viga.....	17
Fig. 14. Geometría del Agujero Negro Acústico.....	19
Fig. 15. Propagación de onda en una interfaz.	20
Fig. 16 Micrófono tipo SF-666 [21].....	23
Fig. 17. Soporte para pruebas.....	24
Fig. 18. Diagrama de bloques del procedimiento del experimento realizado.	24
Fig. 19 Viga de sección constante.	25
Fig. 20. Primeros 5 modos de vibración de la viga uniforme con ambos extremos libres.	29
Fig. 21. Primer, segundo y tercer modo de vibración viga uniforme por (método de elemento finito).	30
Fig. 22. Cuarto y quinto modo de vibración de viga uniforme (método de elemento finito).....	30
Fig. 23. Primer, segundo y tercer modo de la viga uniforme obtenidos por elemento finito (Catia).32	32
Fig. 24. Cuarto y quinto modos de la viga uniforme obtenidos por elemento finito (Catia).....	33
Fig. 25 Viga con ANA.	34
Fig. 26. Coeficiente de reflexión para la viga con ANA de exponente 2.....	37
Fig. 27. Desplazamientos de viga con ANA a 1000Hz.....	38
Fig. 28, Desplazamientos de viga con ANA a 12 kHz.....	39
Fig. 29. Primeros 5 modos de vibración de la viga con ANA (Catia).....	40
Fig. 30. Primer modo de vibración de la viga con ANA a 444 Hz.	41
Fig. 31. Segundo modo de vibración de la viga con ANA a 444Hz.	42
Fig. 32 Tercer modo de vibración de la viga con ANA a 2353Hz.....	42
Fig. 33. Cuarto modo de vibración de la viga con ANA a 3843Hz.	43
Fig. 34. Quinto modo de vibración de la viga con ANA a 5700Hz.	43
Fig. 35. Probetas de viga uniforme y con ANA.	44
Fig. 36. foto del experimento realizado.....	45
Fig. 37. Señales de audio experimento sin viscoelástico.	46
Fig. 38. Vigas con viscoelástico; izquierda: uniforme, derecha: con ANA.	47
Fig. 39 Señales de audio experimento con viscoelástico.	47
Fig. 40. Comparación de audio de vigas uniformes.	48
Fig. 41. Comparación de audio de vigas con ANA.....	49

Fig. 42. Audio de viga uniforme vs ANA y viscoelástico.	50
Fig. 43. Espectro de viga uniforme.	51
Fig. 44. Espectro viga con ANA.	52
Fig. 45. Espectro viga uniforme con viscoelástico.....	53
Fig. 46 Espectro viga con ANA y viscoelástico.....	54
Fig. 47 Diagrama de flujo diseño de un ANA como absorbedor de vibraciones.	56
Fig. 48. Foto de un motor mono cilíndrico de motocicleta Honda cargo [22].	57

Capítulo 1 Introducción

En este Capítulo se tratarán los antecedentes correspondientes a las vibraciones mecánicas y estructurales y la importancia de su estudio y entendimiento, después se introduce el término de agujero negro acústico y funcionamiento de manera general, así como su potencial como disipador de vibraciones y sus posibles aplicaciones.

1.1 Vibraciones mecánicas y estructurales

Las vibraciones mecánicas están presentes en casi cualquier situación alrededor del ser humano, desde el sentido del oído hasta las máquinas y construcciones. En los inicios las primeras vibraciones estudiadas datan de la aparición de los primeros instrumentos musicales como son instrumentos de cuerdas, percusiones y de viento, en cualquier caso, el fenómeno que produce el sonido son las vibraciones mecánicas [1].

Con el antecedente de los instrumentos musicales se empieza a estudiar el origen de los sonidos, actualmente esta disciplina es conocida como acústica: caso particular de las vibraciones mecánicas limitadas al ancho de banda audible, sin embargo, también se fue identificando la presencia de las vibraciones mecánicas en máquinas, estructuras, etc.

Las vibraciones mecánicas son desplazamientos estructurales de los elementos de una máquina o estructura que siguen un patrón repetitivo (armónico). En general un sistema vibratorio ideal consta de un elemento que almacena energía potencial y un elemento que almacena energía cinética, y en el caso práctico se incorpora un elemento que disipa energía por el fenómeno de fricción, de manera simple son masas M , resortes K y amortiguadores B , respectivamente como se ilustra en la Fig. 1. Entonces, las vibraciones mecánicas están presentes en máquinas con movimiento, estructuras civiles como son puentes, edificios, medios de transporte como autos, aviones, etc.

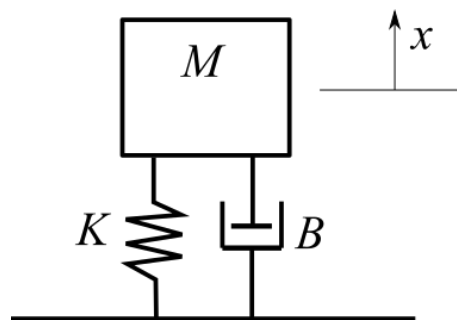


Fig. 1. Diagrama esquemático de un sistema vibratorio de un grado de libertad.

El sistema mostrado en la Fig. 1 se trata como partícula o cuerpo rígido, que resulta una buena aproximación para algunas aplicaciones, en función de las necesidades, sin embargo, en general todos los objetos son elásticos y, por lo tanto, deformables, entonces se pueden modelar como sistemas de parámetros distribuidos, cuyo número de grados de libertad es infinito, ya que cada cuerpo de masa m puede verse compuesto de elementos de masa infinitesimal dm (ver la Fig. 2).

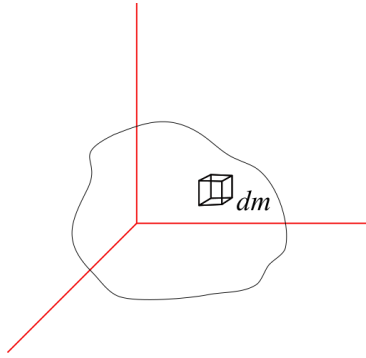


Fig. 2 Elemento infinitesimal de masa.

1.1.1 Propagación de ondas mecánicas y sonido

Las vibraciones mecánicas son desplazamientos armónicos en cuerpos físicos, estos cuerpos vibrando transmiten las vibraciones de forma directa a través de un medio físico, y esto se conoce como propagación de ondas mecánicas. La diferencia entre la propagación de ondas mecánicas en general y el sonido es que el sonido son ondas mecánicas transmitidas a través del aire, que pueden ser percibidas por el oído humano, con frecuencias audibles van de los 30 a 15000 [Hz] aproximadamente [2].

En función de las propiedades elásticas de los medios de propagación, la onda mecánica puede llegar más o menos deformada y/o desfasada.

1.1.1.1 Onda sinusoidal

Por naturaleza las vibraciones son oscilaciones armónicas, que pueden ser complejas, pero siempre podrán descomponerse en componentes sinusoidales y/o cosenoidales (e.g., como en las series de Fourier). La forma básica genérica de onda es de la forma $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$, que depende del tiempo y de la coordenada espacial x , donde A [m] es la amplitud de la onda, k [rad/m] el número de onda y ω [rad/s] la velocidad angular (frecuencia). El número de onda k es un término introducido para compactar la expresión que está ligado a la longitud de onda λ como $k = 2\pi/\lambda$ [3].

1.1.1.2 Fase y constante de fase

Al comparar una onda propagada esta puede ir adelantada o retrasada respecto de la onda original, por eso se introduce el término de constante de fase ϕ [rad], sumándolo en el argumento de la onda. Por otro lado, la fase de onda es el argumento de la función sinusoidal que describe la onda o sea $(kx - \omega t + \phi)$.

1.1.1.3 Interferencia de ondas

Al propagarse las ondas es posible que haya presentes otras ondas, o que la misma onda se refleje (cambio de fase), lo que afectará directamente a la onda transmitida que podrá verse como el resultado de la superposición (sumas y restas en función de la posición de la onda) de todas las componentes presentes con fase igual o distinta, lo cual podría verse análogamente como una serie de Fourier [3].

1.1.2 Modos de Vibración y resonancia

Todos los sistemas de vibratorios tienen modos de vibración que son las formas de onda con las que vibrarán a frecuencias específicas llamadas de *resonancia*. El número de frecuencias de resonancia corresponde directamente con el número de grados de libertad del sistema. Por ejemplo, para el caso de una cuerda, se trata de un sistema de parámetros distribuidos, que tiene un número infinito de grados de libertad, luego, de acuerdo con lo anterior tiene un número infinito de modos de vibración. En la Fig. 3 se muestran los primeros tres modos de vibración.

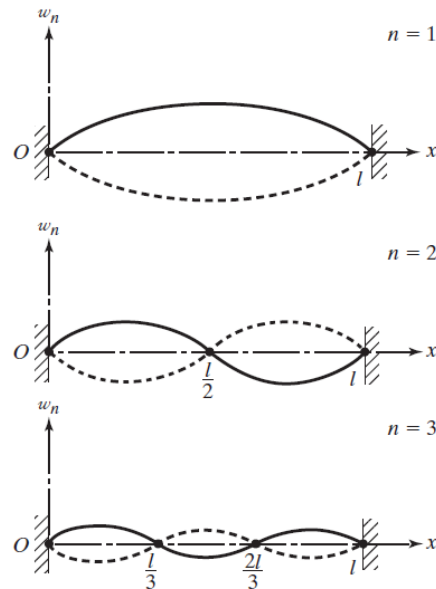


Fig. 3 Diagrama esquemático de los primeros 3 modos de vibración de una cuerda [1].

Los modos de vibración tienen una relación directa con los números de onda y es que cada modo obtenido tendrá un determinado número de onda.

Es importante mencionar que los modos de vibración no solo son como los ilustrados en la Fig. 3 (longitudinales), sino que, dependiendo de la geometría de los cuerpos, sus propiedades mecánicas y las condiciones de frontera con su entorno, los modos podrían ser torsionales, longitudinales o transversales.

1.2 Importancia del estudio de las vibraciones mecánicas

Como se mencionó en la Sección 1.1 las vibraciones están presentes de manera amplia en gran cantidad de aplicaciones y de ahí parte de su relevancia es la presencia de vibraciones con muchas implicaciones importantes en cuestión de estabilidad, mecánica de materiales, diseño de estructuras, etc., y, en general, estas implicaciones tienen que ver directamente con la seguridad.

En cuestiones de estabilidad debe considerarse que todo sistema mecánico tiene frecuencias naturales de oscilación, y es en éstas o cerca de las frecuencias naturales donde un sistema se comporta de manera distinta, ya que aparecen fenómenos como son la resonancia, que trae consigo desplazamientos grandes que pueden superar los aceptables o admitidos por los elementos y

materiales. Un hecho importante que marcó una diferencia para estudiar de manera más detallada estos fenómenos fue el desafortunado incidente del puente de Tacoma-Narrows, el cual colapsó debido a la resonancia alcanzada por la excitación del viento que igualó la frecuencia natural de un modo lateral que provocó autoexcitación de un modo torsional del puente, comenzando a deformarlo drásticamente por cortante, hasta que los materiales fallaron, resultando en la caída catastrófica del puente.



Fig. 4 Puente de Tacoma-Narrows durante vibración [1].

1.3 Soluciones al problema de vibraciones mecánicas

Cuando el diseño lo permite, los problemas debidos a las vibraciones mecánicas se pueden evitar, estableciendo las velocidades de operación de las máquinas lejos de las frecuencias naturales. De igual manera, las estructuras se diseñan para alejar estas frecuencias naturales de las frecuencias que pudieran excitarlas, sin embargo, hay también muchas aplicaciones donde es necesario hacer control de ruido o vibraciones y esto se consigue comúnmente de dos formas, por control activo de vibraciones o por control pasivo de vibraciones.

1.3.1 Control pasivo de vibraciones

Este control se basa principalmente en los comúnmente llamados absorbedores pasivos de vibraciones, que son elementos mecánicos constituidos por masas y/o resortes que cumplen con el objetivo de disipar o disminuir las vibraciones. Como ventajas, tienen un relativo bajo costo, pero como desventajas es que normalmente se sintonizan a frecuencias específicas o en un ancho de banda limitado.

1.3.2 Control activo de vibraciones

Este método de control de vibraciones trabaja con un sistema constituido por un conjunto de transductores y actuadores que, a través de un esquema de control, operan para contrarrestar y disipar las vibraciones.

Un esquema de absorción activa de vibraciones se ha estudiado en el trabajo desarrollado por Enríquez y Silva [4], en el cual se analiza el control activo de vibraciones en estructuras tipo edificio sometidas a sismos, utilizando un control por múltiple retroalimentación positiva de la posición y control por modos deslizantes. La estructura y componentes utilizados se ilustran en la Fig. 5.

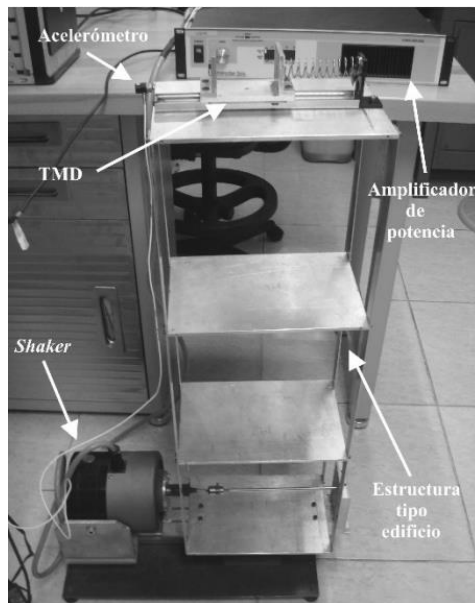


Fig. 5 Sistema de control de vibraciones en estructura tipo edificio [4].

1.4 Agujeros Negros Acústicos (ANA).

Los Agujeros Negros Acústicos (ANA) son un tipo particular de dispositivos mecánicos que logran un efecto de acumulación o concentración de las vibraciones y permiten disipar las vibraciones de otros dispositivos o sistemas mecánicos de una manera más rápida y económica, ya que este efecto es pasivo. Estos dispositivos los hay de distintos tipos y se basan principalmente en geometrías variables, ya sea en forma de barrenos, puntas, espirales o simplemente cambios de sección.

Este fenómeno se basa principalmente en la propagación de ondas en medios sólidos y elásticos, y, por lo tanto, se aplican las propiedades de las guías de onda. Lo que hacen estos ANA es crear una interfaz distinta con el medio, en el que se quiere conseguir disipar las oscilaciones, resultando en la reflexión y absorción de la onda o vibración incidente. Así, una vez concentradas las vibraciones en el ANA, las vibraciones pueden disiparse a partir del amortiguamiento estructural o agregando algún material viscoelástico que se ubique solo en la superficie del ANA, de manera que disipe más rápidamente las vibraciones, en contraste con la técnica tradicional que consistía en cubrir con dichos materiales todo el elemento o estructura mecánica.

El término acústico viene de que mucha de la experimentación y desarrollo se ha presentado para aplicaciones donde las vibraciones a disipar son vibraciones acústicas, como por ejemplo el ruido y los zumbidos originados en maquinaria como, por ejemplo, en ventiladores y cabinas de pasajeros de diversos medios de transporte.

El fenómeno podría teóricamente funcionar también en rangos no acústicos, lo que ha sido investigado más recientemente. En particular, porque las longitudes de los ANA tendrían que ser demasiado grandes, que en la práctica podrían no ser físicamente posibles, por lo que se ha tratado esto último a partir de los ANAs basados en espirales que logran un efecto muy similar en un tamaño más compacto y, aun así, existen claras limitaciones físicas y de manufactura.

1.5 Breve estado del arte

La investigación previa parte de una revisión general de lo que ha sido el estudio y aplicaciones de los ANAs en los últimos años, sirviendo como punto de partida el trabajo sobre agujeros negros acústicos por Pelat et al. [5]. En este trabajo se describe como comenzó el estudio de los ANAs y abarca el período de 1988 hasta 2020. Se trata desde la teoría y aplicaciones iniciales hasta la evolución de los ANAs y la mejora de sus capacidades.

Krylov et al. [6] presentó resultados relacionados con la adición de una capa viscoelástica para contrarrestar el bajo rendimiento que tienen los ANA, debido a los defectos y tolerancias de fabricación. De hecho, se propone truncar la punta de los perfiles de los ANA y añadir una capa de material viscoelástico que, en teoría, disminuye considerablemente el coeficiente de reflexión, lo que resulta viable para disipar las vibraciones.

En otro trabajo Krylov et al. [7] sobre agujeros negros acústicos para vibraciones flexionantes (vigas), se analiza su aprovechamiento más inteligente como son para los absorbedores de vibraciones mecánicas. En este caso se menciona que los ANAs pueden llegar a absorber cerca del 100% de la energía de onda incidente, bajo el principio de un decremento de alto orden en la velocidad de incidencia de la onda a casi cero. El análisis correspondiente lo basa en la teoría de ondas y guías de onda, que permite obtener las velocidades de grupo, fase, coeficiente de reflexión, etc. Posteriormente, en Krylov y Winward. [8] se menciona la utilidad de la acústica geométrica para el análisis de los ANAs en platos con orificios.

Respecto a algunas aplicaciones industriales, Bowyer y Krylov [9] presentan resultados aplicando un ANA al perfil de las aletas de un ventilador, con el fin de reducir las vibraciones y ruido. El ANA se coloca sobre la aleta y se experimentaron casos con capas de materiales viscoelásticos, como se ilustra en la Fig. 6.

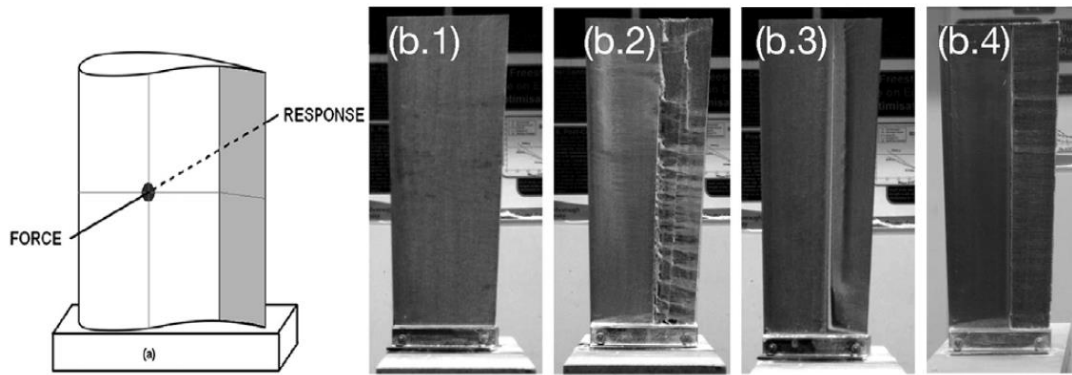


Fig. 6. Aleta original (b.1), aleta con ANA (b.2), con ANA y viscoelástico (b.3) y (b.4) [9].

Un enfoque diferente fue presentado por Lee y Jeon [10], con una solución exacta para la ecuación que describe un agujero negro acústico mediante el modelado de Lagrange-Bernoulli para un perfil exponencial de orden 2 o superior, a través de la llamada ecuación hipergeométrica generalizada. De manera más formal, el análisis de los ANA tipo espiral de Arquímedes fueron estudiados por Park et al. [11], que son una forma de obtener el efecto de un ANA de gran longitud en un espacio más compacto, como se puede ver en la Fig. 7. En general, se logra un resultado similar que simplemente se ve diferenciado por la aparición de armónicos en las frecuencias de resonancia.

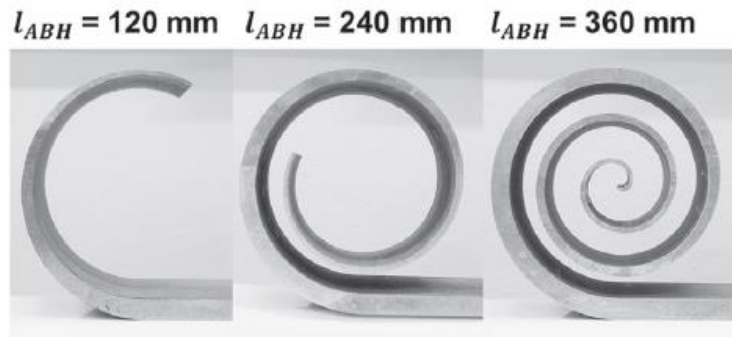


Fig. 7. ANAs tipo espiral de Arquímedes de diferentes longitudes [11].

Un trabajo interesante es el presentado por Zhao, Conlon y Semperlotti [12], donde usan ANAs para potencializar los cosechadores de energía. Como parte del experimento se hacen probetas con ANAs del tipo disco en placas rectangulares, las cuales se instrumentaron con parches piezoeléctricos (ver Fig. 8a) para recuperar o cosechar la energía del movimiento en los mismos. Las placas se excitaron a frecuencias determinadas y se obtuvieron datos de la energía obtenida para diferentes tamaños de ANA y placa sin ANA. Los resultados obtenidos muestran que se recupera un 80% más energía, en el mejor de los casos, y un 20% más energía en el peor caso.

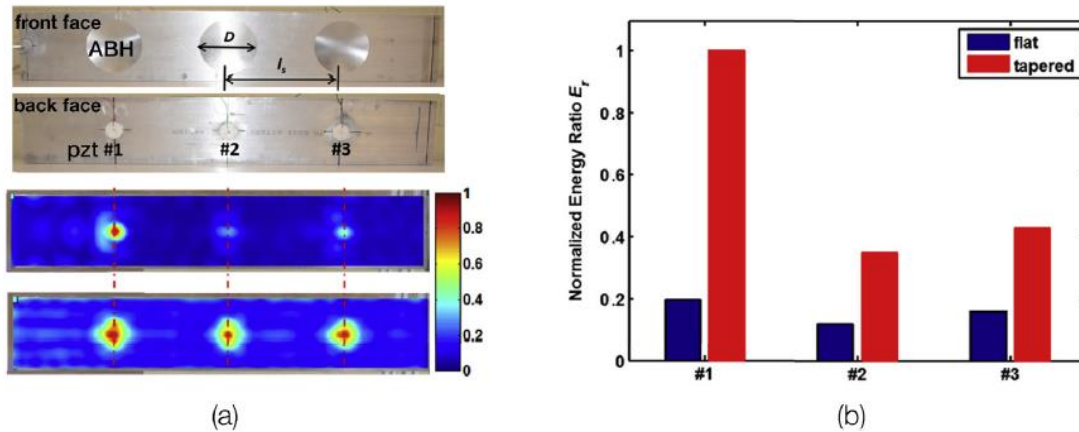


Fig. 8. Propuesta de ANAS tipo disco y concentración de energía. (a) Probetas con ANAs con orificios tipo disco, y b) Relación de energía [12].

Otros autores han abordado algunas mejoras a los ANA, las cuales resuelven sus limitaciones físicas como longitudes, precisión, manufactura, etc. y mejoran su desempeño. Una de estas mejoras es el uso de materiales viscoelásticos sobre su superficie, para absorber de manera más rápida y completa las vibraciones concentradas. Por ejemplo, Tang et al. [13] presenta una mejora del efecto de ANAs en vigas, a través de la modificación del espesor variable (considerando truncamiento) y una extensión constante en la punta. Asimismo, Tang y Cheng [14] han publicado trabajos sobre la caracterización del efecto de los ANAs bajo modificaciones usando modelos semi-analíticos.

Otras líneas de investigación de los ANAs ha sido el uso de patrones o mallas de ANAs en estructuras o superficies, lo cual permite mitigar las vibraciones de baja frecuencia [15].

1.6 Motivación del proyecto

Los agujeros negros acústicos resultan ser dispositivos eficaces en la absorción de vibraciones, y esto permite infinidad de aplicaciones, ya que en general todo cuerpo o máquina tiene masa y rigidez y, por lo tanto, puede vibrar.

Específicamente, para el área de Mecatrónica resultan una idea novedosa que empata perfectamente con el diseño interdisciplinario y concurrente, ya que se pueden realizar diseños mecánicos *que a priori* ya incluyan un esquema de control pasivo de vibraciones (integrado en su propia geometría), que los hará dispositivos más eficientes y económicos y, que posiblemente, no requerían subsistemas extra para el control de vibraciones mecánicas y/o ruido. Por eso es que resulta importante y significativo la investigación y validación experimental de estos dispositivos.

1.7 Objetivos de la tesis

1.7.1 Objetivo general

Modelar, analizar y evaluar experimentalmente vigas de sección transversal variable que producen agujeros negros acústicos.

1.7.2 Objetivos particulares

Algunos de los objetivos particulares que se abordan en el trabajo de tesis son:

- Recopilar los antecedentes y preliminares de los agujeros negros acústicos para obtener una base sólida para su entendimiento y estudio.
- Modelar vigas de sección constante y sección transversal variable correspondientes con agujeros negros acústicos para tener su análisis.
- Analizar, simular y comparar los modelos de vigas.
- Manufacturar las vigas de sección constante y variable para su ensayo experimental.
- Evaluar experimentalmente las vigas fabricadas y recabar resultados.
- Analizar, comparar y concluir con base en los resultados experimentales obtenidos.

1.8 Organización de la tesis

El trabajo de tesis se organiza y reporta de manera que se aborda el modelado, análisis y evaluación experimental de los agujeros negros acústicos en vigas.

El Capítulo 1 describe una introducción breve al tema en cuestión y algunos de los principales resultados disponibles en la literatura, además de las cuestiones propias del trabajo como son la motivación y objetivos.

En el Capítulo 2 se presentan los preliminares que consisten en teorías y conceptos fundamentales que servirán para abordar después el modelado y análisis, las teorías para vigas serán las de Euler-Bernoulli y de Timoshenko. También se verá un poco de acústica geométrica, propagación de ondas y modelado.

El Capítulo 3 es el desarrollo y se compone de dos partes, el desarrollo teórico y el desarrollo experimental. En la primera parte se presenta el modelado de una viga de sección constante, así como de una viga con sección transversal variable, después se analizan las propiedades de estas, así como la realización de simulaciones de los modelos; en la segunda parte, el desarrollo experimental consiste principalmente en la fabricación de las vigas y su instrumentación para después proceder con la recolección de datos bajo condiciones de interés.

El Capítulo 4 contiene algunos resultados y discusión, donde se presentan los resultados experimentales y se compara con los resultados teóricos y su análisis. Se presentan una propuesta de trabajo futuro, una propuesta de investigación y una posible aplicación a una motocicleta.

Por último, el Capítulo 5 describe algunas conclusiones del trabajo realizado.

Capítulo 2 Preliminares

2.1 Antecedentes

Para entender los ANAs es importante conocer primero de las ondas y su propagación, a lo cual se le conoce como mecánica de ondas, que además tiene un subtema conocido como guías de onda, y es donde se estudia cómo se comportan las ondas al propagarse sobre algún medio en función de la geometría, material, etc., esto es importante porque el fenómeno del ANA ocurre debido a la reflexión de las vibraciones incidentes en la viga al pasar por una interfaz, que en este caso es el cambio de sección, entonces en función de la geometría, material y la razón de cambio de la sección se tiene mayor o menor reflexión y, por lo tanto, el ANA absorbe mayor o menor cantidad de energía, lo ideal es que la interfaz sea tal que se transfiera la mayor cantidad de energía para que así las vibraciones queden contenidas en la parte con sección variable (concentración en la punta), donde naturalmente se disipan rápidamente, aunque para acelerar dicho proceso se puede integrar algún material viscoelástico en esta sección.

En un principio se estudiaron estas propiedades con la teoría previamente descrita, sin embargo, se ha enriquecido dicha teoría con la integración de la acústica geométrica, que trae modelos alternos de diferentes características que se han prestado para el análisis de los ANAs. Entonces, tomando en cuenta ambas ramas de conocimiento se tiene un estudio más profundo donde se ve que estos dispositivos pueden absorber un porcentaje muy alto de las vibraciones sin embargo esto solo ocurre en el ancho de banda específico para ese ANA en particular, lo que dicho de otra manera es que un ANA no podrá funcionar ante todo tipo de frecuencias, ya que este está regido por una frecuencia de corte a partir de la cual tendrá mejores efectos de absorción, dada la tecnología actual y materiales, muchas de las aplicaciones de los ANAs quedan limitadas a las ondas sonoras y de ahí su nombre de agujeros negros acústicos.

Por otra parte, desde el punto de vista mecánico los ANAs son vigas de sección transversal variable, los más estudiados son de la forma $h = bx^k$ donde h representa el espesor variable en términos de la coordenada longitudinal x , b representa un factor de forma que ajusta el espesor a una longitud de ANA determinada y k el exponente con que el que varía el espesor. Para que exista el fenómeno k debe ser igual o mayor a dos. Como todas las vigas, las que tienen sección variable también pueden ser modeladas con las teóricas clásicas de vigas (Euler-Bernoulli y Timoshenko) en función de que tan esbeltas sean (relación longitud-espesor) ya que en casos de vigas gruesas o no esbeltas el efecto de los esfuerzos cortantes es significativo y no se puede despreciar como se hace en el caso de las vigas de Euler-Bernoulli.

Como todo dispositivo mecánico se puede hacer un análisis modal a las vigas independientemente de que sean o no un ANA, estos análisis se pueden hacer mediante herramientas numéricas y aproximaciones como son el elemento finito, rutinas de integración, etc. Sin embargo, de la teoría acústica y de ondas se obtienen modelos, y en algunos casos su solución exacta que puede simularse directamente.

En particular, para esta investigación es importante resaltar que a diferencia de las vigas simples (sección constante), en este caso los momentos de inercia no son constantes, ya que la sección varía respecto a la coordenada longitudinal (distribuida) de la viga, y esta variación no es lineal, ya que se

requiere por lo menos una relación cuadrática, por lo que es necesario un análisis más detallado y posiblemente simulaciones o aproximaciones numéricas.

2.2 Teoría preliminar importante

2.2.1 Modelado de vigas tipo Euler-Bernoulli y Timoshenko

El modelado de vigas depende de varios factores, en muchas aplicaciones basta con un modelo estático sin embargo en muchas otras se requiere de un modelo dinámico. Los modelos dependen de las características que se consideren en la viga lo que llevara a tener dos alternativas el modelado de Euler-Bernoulli y el de Timoshenko, cuándo usar una u otra teoría depende principalmente de la esbeltez de la viga, dicho de otra manera que tan delgada sea en comparación con su longitud, ya que para vigas delgadas se desprecia el efecto de los esfuerzos cortantes resultando en la teoría de Euler-Bernoulli, mientras que vigas no delgadas donde no se puede despreciar dicho esfuerzo se modelan mediante la teoría de Timoshenko.

Ecuación de Euler-Bernoulli para vigas [1, 16, 17]

Como se puede ver en la Fig. 9, se supone que los desplazamientos en cada parte de la viga pueden darse verticales (sobre el eje Y), sin dejar de considerar que estos desplazamientos se deben a la flexión de la viga, como se sabe de la mecánica de materiales se tienen esfuerzos cortantes y momentos de flexión, lo cual se ilustrara de mejor manera en la Fig. 10a.

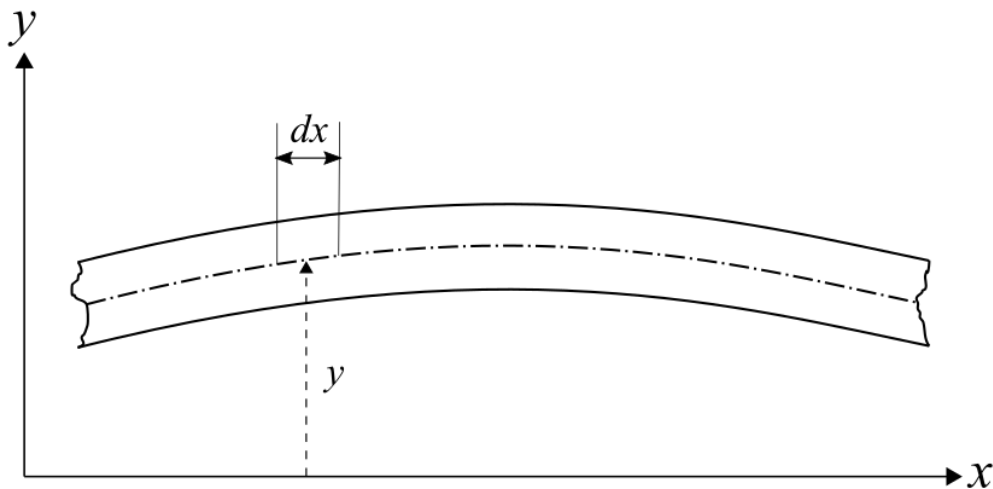


Fig. 9. Representación de un segmento de viga flexionada.

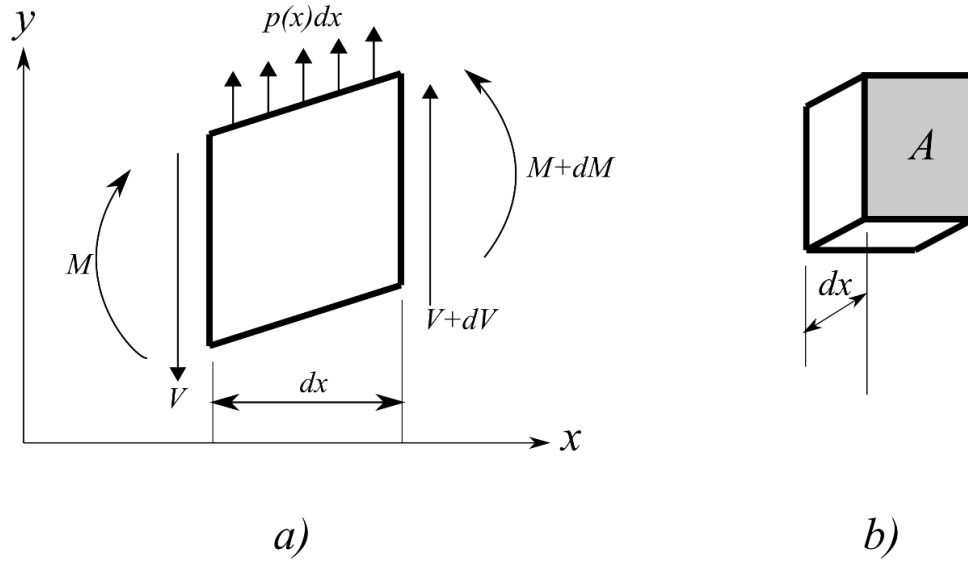


Fig. 10. Elemento diferencial de viga. a) Momentos y fuerzas, b) Vista de la sección transversal.

Del esquema (Fig. 10a) se tienen los momentos M los cortantes V , el elemento diferencial dx y la función de fuerza que representa la carga por unidad de longitud, realizando la sumatoria de las fuerzas verticales considerando además el peso propio del elemento de viga se tiene

$$V - (V + dV) + p(x)dx = m\ddot{x}$$

donde $p(x)$ es una función de x que representa la carga distribuida aplicada al elemento viga. Considerando que se tiene la densidad del material (ρ) de la viga, la masa del elemento de viga se puede expresar como: $m = \rho A dx$ (Fig. 10b) donde A es el área de la sección transversal del elemento viga de la Fig. 10a, y la definición explícita del diferencial de la fuerza cortante $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$, y $\ddot{x} = \frac{d^2 y}{dt^2}$ se puede reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} dx + p(x)dx &= \rho A dx \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \rho A \frac{d^2 y}{dt^2} &= p(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Por otro lado, haciendo la sumatoria de momentos en cualquier parte sobre el extremo derecho del elemento diferencial de la viga se tiene

$$\begin{aligned} M - (M + dM) + Vdx + \frac{dx}{2} p(x)dx &= 0 \\ -dM + Vdx + \frac{1}{2} p(x)dx^2 &= 0 \end{aligned}$$

Despreciando los términos de segundas potencias de dx lo que equivale a despreciar la inercia rotacional (teoría de vigas delgadas de Euler-Bernoulli)

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (2)$$

considerando que el elemento diferencial de la viga flexionada se encuentra en tensión axial (σ), como se ejemplifica en la Fig. 11.

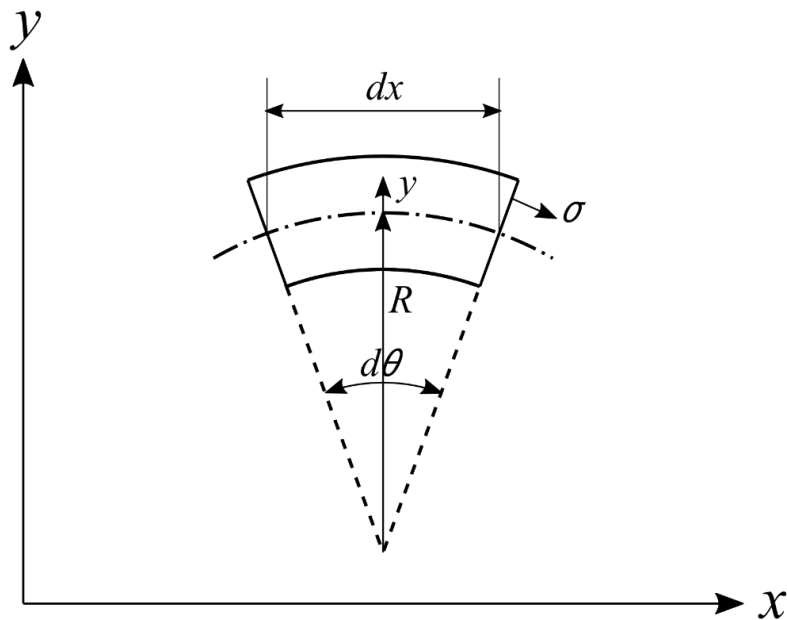


Fig. 11. Curvatura del elemento de viga.

la deformación unitaria (ε) del elemento en términos del diferencial de la pendiente ($d\theta$) a partir del esquema de la Fig. 11 se llega a

$$\varepsilon = \frac{(R + y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{R} \quad (3)$$

donde R es el radio de curvatura del elemento de viga y, por lo tanto, el esfuerzo normal se puede escribir como

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{R} \quad (4)$$

donde E es el módulo de rigidez del material del elemento, entonces el momento de flexión se obtiene como

$$M = \int y\sigma dA = \int \frac{y^2 E}{R} dA = \frac{E}{R} \int y^2 dA$$

La expresión anterior se reduce usando la definición de segundo momento de área (I) de la sección transversal de la viga resultando en la siguiente expresión que relaciona el momento con el radio de curvatura

$$M = \frac{EI}{R} \quad (5)$$

Ahora, la pendiente se obtiene como la primera derivada de la deflexión respecto la coordenada longitudinal

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Entonces, a partir de la expresión anterior se puede calcular el cambio diferencial en la pendiente, derivando θ como sigue

$$d\theta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

y como se sabe que $dx = R d\theta$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} R d\theta \\ \frac{1}{R} &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Sustituyendo (5) en (6) se obtiene la expresión que relaciona el momento con el radio de curvatura, pero en las coordenadas del primer esquema de la Fig. 5, se determina que

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (7)$$

Combinando (2) y (7) se obtiene

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (8)$$

Finalmente, sustituyendo (8) en (1) se tiene la ecuación de los desplazamientos laterales de una viga se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{d^2 y}{dt^2} = p(x) \quad (9)$$

la cual es la ecuación para el caso general, donde la viga puede ser de sección constante o variable, ya dependiendo de la aplicación se podrá o no sacar de la ecuación el momento de inercia de la sección y el área.

Ecuación de Timoshenko para vigas [16, 18].

A diferencia del modelado de vigas delgadas (Euler-Bernoulli), en las vigas gruesas no se pueden despreciar los efectos debidos al esfuerzo cortante y a la inercia rotatoria. Cuando se considera la deformación debida al esfuerzo cortante el elemento de viga tiende a parecer un rombo, esto se debe a que este esfuerzo hace que las caras laterales ya no sean perpendiculares al eje de la viga al flexionarse como lo supone la teoría de vigas delgadas.

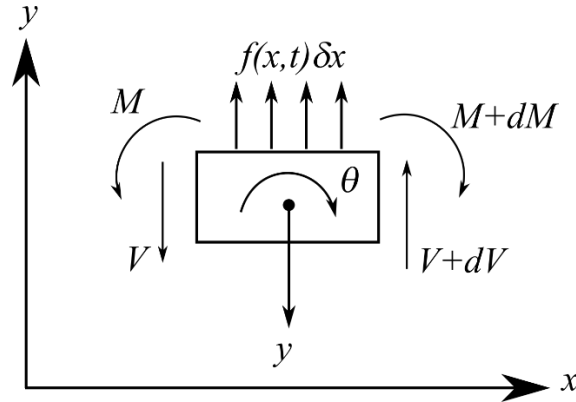


Fig. 12. Elemento de viga de Timoshenko.

Suponiendo que el aumento de deformación debido al esfuerzo cortante (deformación cortante) se denota como ϕ , entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \theta + \phi$$

donde θ es la deformación debida a la flexión, además considerando un elemento de viga δx , y considerando todas las fuerzas y momentos incluyendo los efectos del esfuerzo cortante e inercia rotatoria se muestra en la Fig. 12. Además, se establece que la relación entre el esfuerzo cortante y la deformación se da como

$$V = -kGA\phi$$

donde G es el módulo de cortante y k un factor de forma conocido como coeficiente de cortante de Timoshenko, existen muchas Tablas para estos coeficientes en función de la geometría de la sección sin embargo se tiene la siguiente expresión [10]:

$$k = \frac{\text{esfuerzo cortante promedio en la seccion transversal de la viga en } x}{\text{esfuerzo cortante en el eje neutro en } x}$$

Del esquema del elemento de viga (δx) se obtiene la ecuación de movimiento transversal como

$$(V + dV) - V - f(x, t)\delta x = m\ddot{y}$$

Considerando que $dV = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x$ y $dM = \frac{\partial M}{\partial x}\delta x$, además que la masa descompuesta en términos de la densidad del material ρ , se consigue

$$\frac{\partial V}{\partial x} - f(x, t) = \rho A \ddot{y} \quad (10)$$

Ahora, obteniendo la ecuación para la dinámica rotacional se tiene que

$$(M + dM) - M - V\delta x = J\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} \delta x - V\delta x = J\ddot{\theta} \quad (11)$$

donde J es el momento de inercia rotacional del elemento de viga δx ilustrado en la Fig. 13

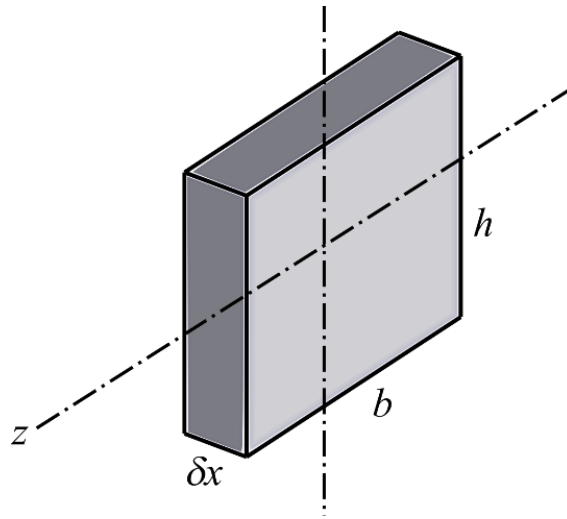


Fig. 13. Sección transversal de elemento de viga.

considerando el elemento como una placa delgada entonces se tiene que

$$J = \frac{1}{12} m h^2$$

De ahí, se puede expresar la masa en términos de la densidad como

$$m = \rho A \delta x$$

Sustituyendo y simplificando se tiene que

$$J = \frac{1}{12} \rho A \delta x h^2 = \frac{1}{12} \rho b h^3 \delta x = \rho \left(\frac{1}{12} b h^3 \right) \delta x = \rho I \delta x$$

donde I es el usual momento de inercia de la sección transversal de la viga. Rescribiendo la ecuación (11) se obtiene

$$\frac{\partial M}{\partial x} \delta x - V \delta x = \rho I \delta x \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = \rho I \ddot{\theta} \quad (12)$$

Ahora, ocupando la relación entre momento y la pendiente (θ)

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - V = \rho I \ddot{\theta} \quad (13)$$

Finalmente, si las ecuaciones para la dinámica traslacional y rotacional, (10) y (13) respectivamente, se escriben sustituyendo $V = -kGA\phi$ y $\frac{\partial y}{\partial x} = \theta + \phi$, entonces

$$-kG \frac{\partial}{\partial x} \left(A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta \right) \right) - f(x, t) = \rho A \ddot{y} \quad (14)$$

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + kGA \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta \right) = \rho I \ddot{\theta} \quad (15)$$

Las ecuaciones (14) y (15) son las ecuaciones dinámicas de una viga gruesa o viga de Timoshenko. En general, por eso no se factorizan el área y momento de inercia, ya que pueden ser o no funciones de la coordenada distribuida o espacial x . En el caso de vigas de sección transversal constante, el área y momento son constantes y, por lo tanto, se pueden sacar de las derivadas parciales respecto de x , simplificando las expresiones en una sola ecuación.

2.2.2 Definición geométrica del ANA

Como se mencionó anteriormente, los ANAs consisten en una reducción de espesor de las vigas de tipo potencia, cuyo exponente debe ser igual o mayor a dos para que el fenómeno ocurra [10]. La función usada es bx^k , cuya definición geométrica se muestra en la Fig. 14.

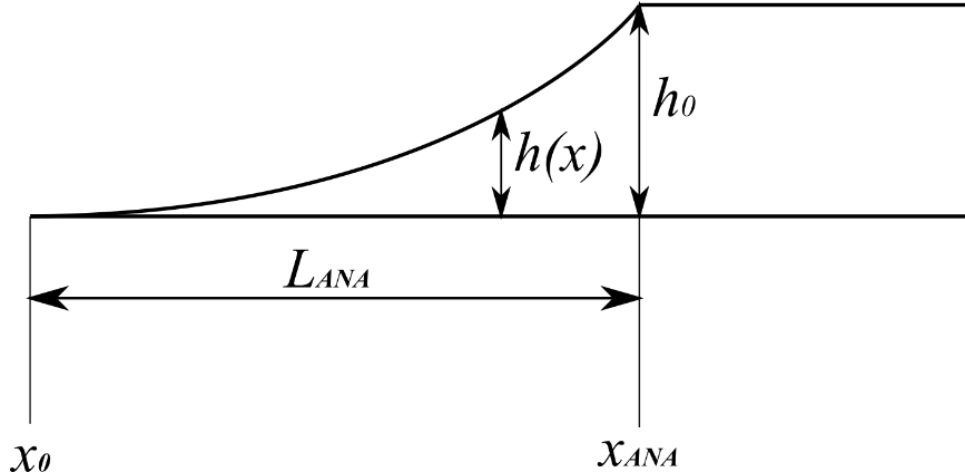


Fig. 14. Geometría del Agujero Negro Acústico.

En esta viga $x_0, x_{ANA}, L_{ANA}, h_0$ denotan la longitud inicial (puede ser diferente de cero para representar truncamiento), la coordenada en x donde el ANA termina, la longitud del ANA y el espesor de la viga constante, respectivamente.

La ecuación que describe la variación del espesor en función de la coordenada longitudinal es

$$h(x) = bx^k \quad (16)$$

$$b = \frac{h_0}{(L_{ANA})^k}$$

donde para normalizar la curva correspondiente al ANA se puede expresar el parámetro constante b en términos de la longitud del ANA y el exponente k [19].

2.2.3 Coeficiente de reflexión del ANA [6, 18].

Como se ha mencionado, una característica muy importante es la capacidad del ANA de concentrar la energía. Para que esto ocurra el coeficiente de reflexión debe ser lo más pequeño posible, teóricamente un coeficiente de reflexión 0 conseguiría concentrar toda la energía en la punta del ANA y disiparla, sin embargo, las limitaciones físicas en la manufactura no permiten llevar el perfil hasta un espesor de cero, por lo cual se considera un truncado que depende de la precisión con la cual se puedan maquinar los ANA. Al hacer esto resulta claro que el coeficiente de reflexión será diferente de cero incluso podría representar un coeficiente de reflexión alto, entonces es cuando se puede emplear una película de material viscoelástico que regresa las propiedades del ANA para disminuir dramáticamente el coeficiente de reflexión.

Para este análisis se parte de aproximaciones de los modelos de vigas, principalmente para vigas delgadas, como la ecuación (9). Una de las aproximaciones más utilizadas corresponde a la geometría que permite obtener una expresión para el coeficiente de reflexión, el cual describe a continuación.

Como una breve introducción se presenta la idea general de la propagación de ondas en sólidos elásticos, donde se habla del término de impedancia mecánica, que en acústica se conoce como impedancia acústica (Z), que es la resistencia de un elemento elástico a moverse y transmitir movimiento al aplicar una fuerza. Esta fuerza está dada en términos de la densidad y la velocidad de onda del material, para casos no acotados, como

$$Z = \rho C_L$$

donde ρ y C_L son la densidad y la velocidad de onda, respectivamente.

Cuando se tiene un cambio de medios se tiene una interfaz, como se muestra en la Fig. 15. Aquí se puede ver como la onda incidente se transmite a la interfaz, aunque existe una porción de ésta que no logra transmitirse y se regresa a la primera parte de la interfaz, porción que se conoce como la componente reflejada.

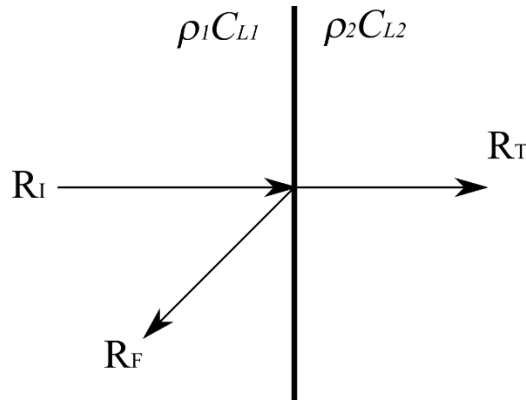


Fig. 15. Propagación de onda en una interfaz.

Luego, se puede definir el coeficiente de reflexión como

$$R = \frac{\rho_2 C_{L2}}{\rho C_L}$$

Como puede notarse, el coeficiente de reflexión anterior solo depende del material. Sin embargo, en condiciones acotadas las velocidades y , por lo tanto, el coeficiente de reflexión depende de la geometría de las interfaces. Para el caso de los ANAs muchos cálculos se basan en aproximaciones, ya que se trata de sistemas complejos y no lineales, una de las más comúnmente aceptadas es el enfoque de la llamada acústica geométrica [6].

Feurtado y Conlon [19] dan el coeficiente de reflexión para un agujero negro acústico como

$$R = e^{-2 \int \text{im } k(x) dx} \quad (17)$$

con

$$k(x) = \sqrt[4]{\frac{12\rho\omega^2(1-v^2)}{E h^2(x)}} \quad (18)$$

donde ρ, ν densidad del material, relación de Poisson, ω la velocidad angular, $h(x)$ la función del espesor de la viga y E el módulo de elasticidad complejo definido como $E = E(1 + \eta i)$, donde η es el factor de pérdida isotrópico que sirve para modelar el amortiguamiento propio del material (amortiguamiento estructural).

Cabe mencionar que la ecuación (18) corresponde con el número de onda de un plato delgado, donde se desprecian algunos factores similar a lo que se hace en el modelo de viga de Euler-Bernoulli, entonces para que esta expresión pueda usarse de manera segura para análisis y diseño de ANAs es necesario satisfacer el “criterio de suavidad” escrito como

$$\frac{dk}{dx} \frac{1}{k^2} \ll 1 \quad (19)$$

la condición anterior también es conocida como la típica condición de aplicabilidad para la geometría acústica [6]. Es importante mencionar que entre más grande sea el factor exponente del ANA más fácilmente se puede no cumplir el criterio anterior, así como que pierde fiabilidad con frecuencias bajas [10].

2.2.4 Frecuencia de corte del ANA

Como se determinó en la Sección 2.2.3, se tienen ciertas condiciones como el criterio de suavidad para que sean válidas algunas aproximaciones, también las hay para determinar una frecuencia de corte.

A través del estudio experimental de los ANA se ha notado que no hay absorción de la onda por debajo de una frecuencia específica conocida como frecuencia de corte del ANA, y ésta se define como la frecuencia por debajo de la cual la longitud de onda incidente es mucho mayor que la longitud característica del ANA [5].

Un trabajo que trató los ANAs circulares determinó una expresión para dicha frecuencia, que a través del tratamiento y simplificación se pudo llevar a una sola dimensión (ANA del tipo viga de sección transversal) [5, 20]:

$$f_c = \frac{h_0}{2\pi L_{ANA}^2} \sqrt{\frac{E(40 - 24\nu)}{12\rho(1 - \nu^2)}} \quad (20)$$

Capítulo 3 Desarrollo del trabajo

Este Capítulo se aborda en tres partes. Primero se describen los materiales e instrumentación a utilizar. Segundo, se describen el desarrollo teórico y experimental para los especímenes de prueba seleccionados. En la tercera parte se describe la fabricación para ensayar y obtener datos experimentales para la validación y comparación con los resultados teóricos.

3.1 Descripción de los materiales

Los materiales para utilizar son principalmente:

- Micrófono para la adquisición de las ondas sonoras emitidas por las probetas al vibrar
- Soporte para suspender las probetas durante las pruebas
- Computadora y software para procesamiento de señales
- Sistema para generar el impacto en las probetas

El micrófono seleccionado es un micrófono de condensador modelo SF-666, con salida tipo estéreo y ancho de banda de 50-16 kHz, ver la Fig. 16.



Fig. 16 Micrófono tipo SF-666 [21].

El soporte se construyó en triplay con una altura de 50 cm, para que la probeta se suspenda mediante unos hilos delgados, ver la Fig. 17.



Fig. 17. Soporte para pruebas.

Con respecto al software, se usa *Matlab* para la adquisición y procesamiento de las señales de audio. Por otro lado, la manera de impactar las probetas es por medio de un péndulo que se suelta desde la misma altura en cada prueba realizada.

3.2 Procesos

Los procesos experimentales consisten en la realización de experimentos vibro acústicos que consisten en impactar las probetas mientras se encuentran suspendidas para hacerlas vibrar y posteriormente adquirir el audio de las ondas sonoras generadas por dichas vibraciones para su procesamiento y análisis (ver Fig. 18).

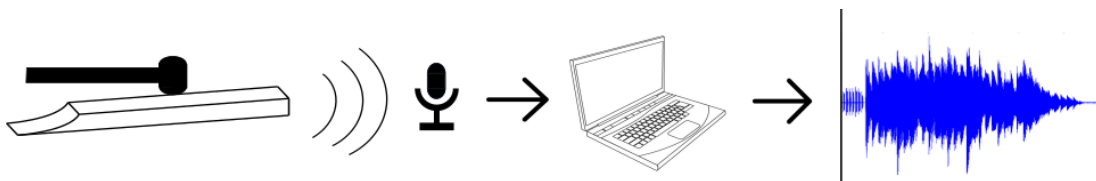


Fig. 18. Diagrama de bloques del procedimiento del experimento realizado.

3.3 Desarrollo teórico

En esta Sección se tratará el modelado y análisis teórico de los especímenes de prueba seleccionados detallados en las Secciones 3.1.1.1 y 3.1.2.1, además se presentan simulaciones mediante software de elemento finito con fines de comparación.

3.3.1 Viga uniforme

Esta Sección corresponde con el análisis teórico de la viga uniforme para obtención de frecuencias naturales teóricas y mediante simulaciones con los métodos de elemento finito.

3.3.1.1 Modelado de una viga uniforme

Como espécimen de estudio se establece una viga de perfil rectangular constante con las características mostradas en la Fig. 19.

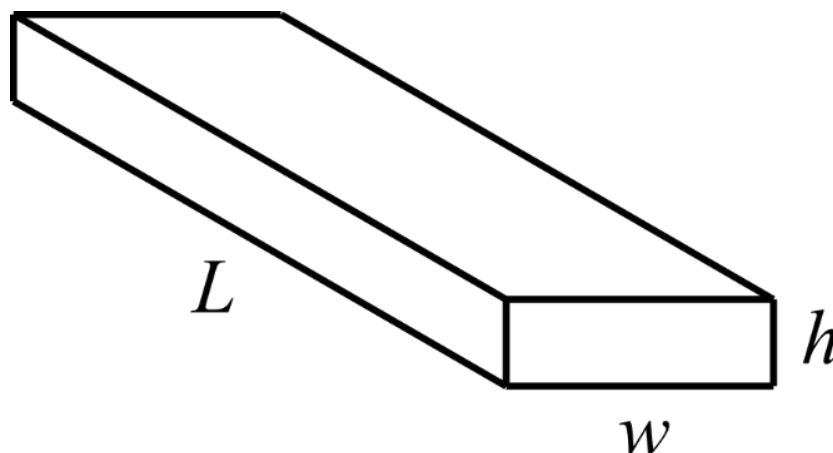


Fig. 19 Viga de sección constante.

Tabla 1. Propiedades de la viga uniforme.

Características viga uniforme	
Material	Acero al carbono AISI 1018 rolado en frio
Módulo de elasticidad o de Young (E)	200 GPa
Razón de Poisson (ν)	0.266
Densidad (ρ)	7860 kg/m ³
Longitud (L)	300 mm
Ancho (W)	25.4 mm
Espesor (h)	6.3 mm
Momento de inercia de la sección (I)	5.2926×10^{-10} m ⁴
Área de la sección transversal (A)	0.00016002 m ²

Dado que la viga es relativamente delgada ya que se tiene una relación de L/h de 47.61, se procederá con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli descrita en la Sección 2.2.1, determinada por la ecuación (9). Es importante notar que la sección es constante y, por lo tanto, el momento de inercia a lo largo de la longitud L también. Además, considerando que el material es homogéneo, constante e isotrópico, entonces el módulo de elasticidad E es constante y, por lo tanto, la ecuación de la viga delgada se puede describir como

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{d^2 y}{dt^2} = p(x) \quad (21)$$

3.3.1.2 Solución analítica la viga uniforme

Una vez obtenido el modelo dinámico de la viga de sección transversal constante (21), se procede a resolverla haciendo uso de una suposición inicial, la cual es considerar que la solución es de la forma $y = \sin \omega t$. En ese caso tendríamos $\ddot{y} = -\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y$, entonces se puede reescribir (21) en términos de lo anterior, con lo que se consigue quitar la dependencia temporal quedando

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho A \omega^2 y = p(x) \quad (22)$$

Ahora se tiene una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden, cuya solución es la suma de la solución homogénea más la solución particular para el término de entrada $p(x)$.

La solución homogénea se obtiene a partir de resolver la ecuación polinómica de cuarto orden asociada a la ecuación diferencial (22) quedando como

$$y_h(x) = c_1 e^{-\sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} x} + c_2 e^{\sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} x} + c_3 \sin\left(\sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} x\right) + c_4 \cos\left(\sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} x\right)$$

para el caso de oscilaciones libres se considera que $p(x) = 0$ y, por lo tanto, corresponde con el caso homogéneo, siendo la solución entonces la previamente calculada como

$$y(x) = c_1 e^{-\sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} x} + c_2 e^{\sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} x} + c_3 \sin\left(\sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} x\right) + c_4 \cos\left(\sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} x\right) \quad (23)$$

donde las c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes que se determinan en función de las condiciones de frontera del sistema.

Manipulando los primeros dos términos de (23) a través del siguiente cambio de variable para las constantes

$$c_1 = \frac{g_1 - g_2}{2}$$

$$c_2 = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} c_1 e^{-4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x} + c_2 e^{4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x} &= \frac{g_1 - g_2}{2} e^{-4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x} + \frac{g_1 + g_2}{2} e^{4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x} \\ &= g_2 \frac{\left(e^{4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x} - e^{-4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x} \right)}{2} + g_1 \frac{\left(e^{4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x} + e^{-4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x} \right)}{2} \\ &= g_2 \sinh\left(4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x\right) + g_1 \cosh\left(4\sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}x\right) \end{aligned}$$

Como g_2 y g_1 siguen siendo constantes desconocidas que se calculan a través de las condiciones de frontera, no está mal renombrarlas como c_1 y c_2 , respectivamente, para mantener la notación, y estableciendo $\lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$ queda entonces (23) como sigue

$$y(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x) + c_3 \sin(\lambda x) + c_4 \cos(\lambda x) \quad (24)$$

La ecuación (24) es la ecuación de los modos de vibración, que da las diferentes formas de onda para cada una de las frecuencias naturales del sistema mecánico.

Ahora se tienen dos análisis restantes, uno es obtener el valor de las constantes para el espécimen de estudio y obtener las frecuencias naturales de la viga. Las constantes para una viga libre (sin apoyos) resultan en las siguientes condiciones de frontera en ambos extremos como

$$\begin{aligned} y''(0) &= M(0) = 0 \\ y'''(0) &= V(0) = 0 \\ y''(L) &= M(L) = 0 \\ y'''(L) &= V(L) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Aplicando las 2 primeras condiciones de (25), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_2 - c_4 &= 0 \\ c_1 - c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Aplicando las segundas condiciones de (25) se obtiene

$$\begin{aligned} c_1 \sinh(\lambda L) + c_2 \cosh(\lambda L) - c_3 \sin(\lambda L) - c_4 \cos(\lambda L) &= 0 \\ c_1 \cosh(\lambda L) + c_2 \sinh(\lambda L) - c_3 \cos(\lambda L) + c_4 \sin(\lambda L) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Como las condiciones de (26) indican que $c_2 = c_4$ y $c_1 = c_3$, entonces (27) se reduce a

$$\begin{aligned} c_1 \sinh(\lambda L) + c_2 \cosh(\lambda L) - c_1 \sin(\lambda L) - c_2 \cos(\lambda L) &= 0 \\ c_1 \cosh(\lambda L) + c_2 \sinh(\lambda L) - c_1 \cos(\lambda L) + c_2 \sin(\lambda L) &= 0 \end{aligned}$$

Queda entonces el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, considerando que ya se conoce λ , lo que significa conocer la frecuencia angular ω , es decir, que

$$\begin{bmatrix} \sinh(\lambda L) - \sin(\lambda L) & \cosh(\lambda L) - \cos(\lambda L) \\ \cosh(\lambda L) - \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

3.3.1.3 Frecuencias naturales de la viga uniforme

Para esto también se puede partir del sistema (28), como se puede ver el sistema es de dos incógnitas y es un sistema homogéneo entonces para que tenga una solución diferente de la trivial es necesario que el determinante sea igual a cero, y esto ocurre cuando

$$\begin{aligned} (\sinh(\lambda L) - \sin(\lambda L))(\sinh(\lambda L) + \sin(\lambda L)) - (\cosh(\lambda L) - \cos(\lambda L))^2 &= 0 \\ \sinh^2(\lambda L) - \sin^2(\lambda L) - \cosh^2(\lambda L) - 2 \cosh(\lambda L) \cos(\lambda L) - \cos^2(\lambda L) &= 0 \end{aligned}$$

que finalmente se reduce a

$$\cosh(\lambda L) \cos(\lambda L) = 1 \quad (29)$$

cuyas soluciones son indirectamente las frecuencias naturales de la viga, ya que se requiere despejar la frecuencia de la expresión para lambda $\lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$.

3.3.1.4 Simulación de la viga uniforme con el método analítico/numérico

Para efectos de comparación y validación se obtendrán las primeras 5 frecuencias naturales a partir de la ecuación (29), para los parámetros dados en la Tabla 1, resolviendo de manera numérica dado que se trata de una ecuación trascendente y los datos obtenidos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2 Frecuencias naturales de la viga uniforme (método analítico).

Frecuencias naturales viga uniforme método analítico			
n	$\lambda_n L$	ω_n [rad/s]	f_n [Hz]
1	4.73	2280	362.96
2	7.8532	6286.41	1000.51
3	10.9956	12323.9	1961.5
4	14.1372	20372.2	3242.3
5	17.2788	30432.2	4843.44

Una vez conocidas las primeras 5 frecuencias naturales, para graficar los modos de vibración solo es necesario evaluar las frecuencias en la ecuación de modos (24), obteniendo las formas ilustradas en la Fig. 20.

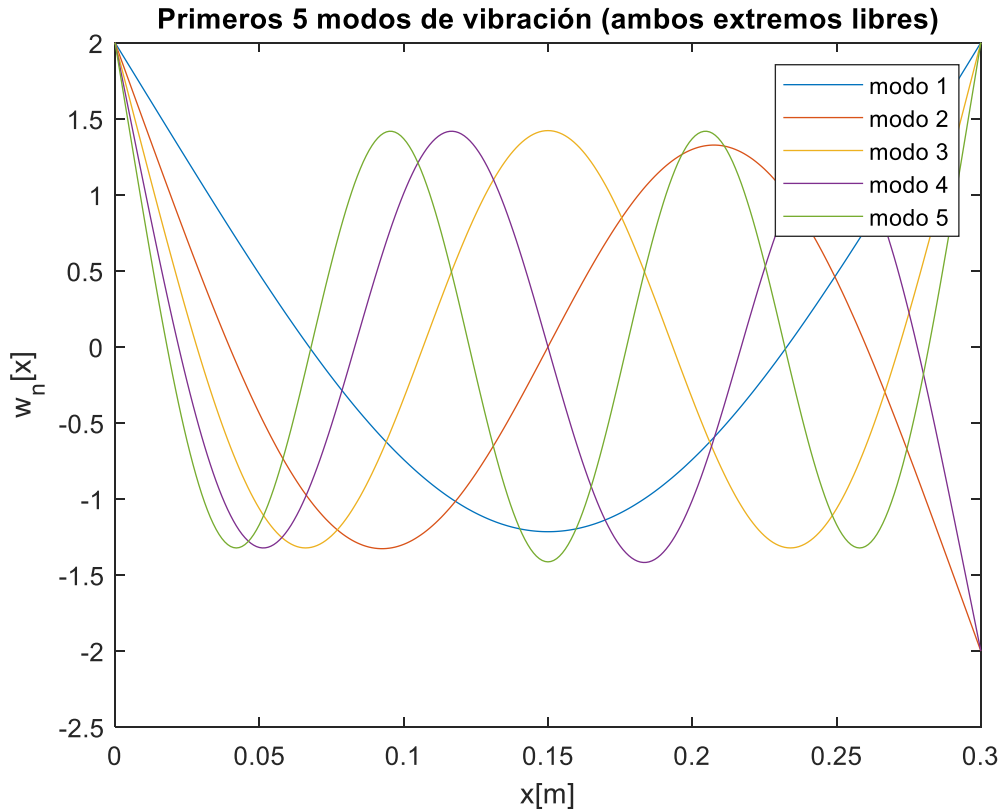


Fig. 20. Primeros 5 modos de vibración de la viga uniforme con ambos extremos libres.

3.3.1.5 Simulación viga uniforme por método de elemento finito

Esta simulación se hizo en *Matlab*, donde se realizó un análisis modal con un mallado de orden geométrico cuadrático y un elemento mínimo de mallado de 0.001 [m] para los datos de la Tabla 1, las primeras 5 frecuencias naturales de la viga uniforme obtenidas se ven en la Tabla 3.

Tabla 3. Frecuencias naturales de la viga uniforme (método de elemento finito).

Frecuencias naturales de la viga uniforme (elemento finito)	
n	f_n [Hz]
1	362.614
2	998.523
3	1954.23
4	3222.77
5	4798.05

Los modos de vibración obtenidos se muestran en las Figs. 21 y 22.

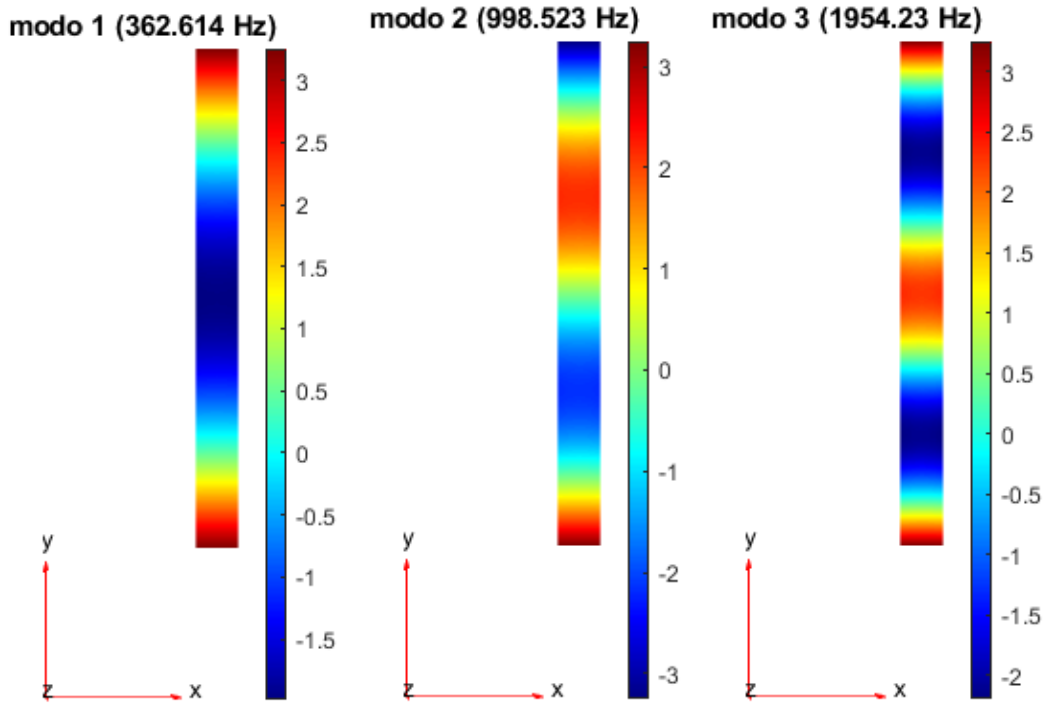


Fig. 21. Primer, segundo y tercer modo de vibración viga uniforme por (método de elemento finito).

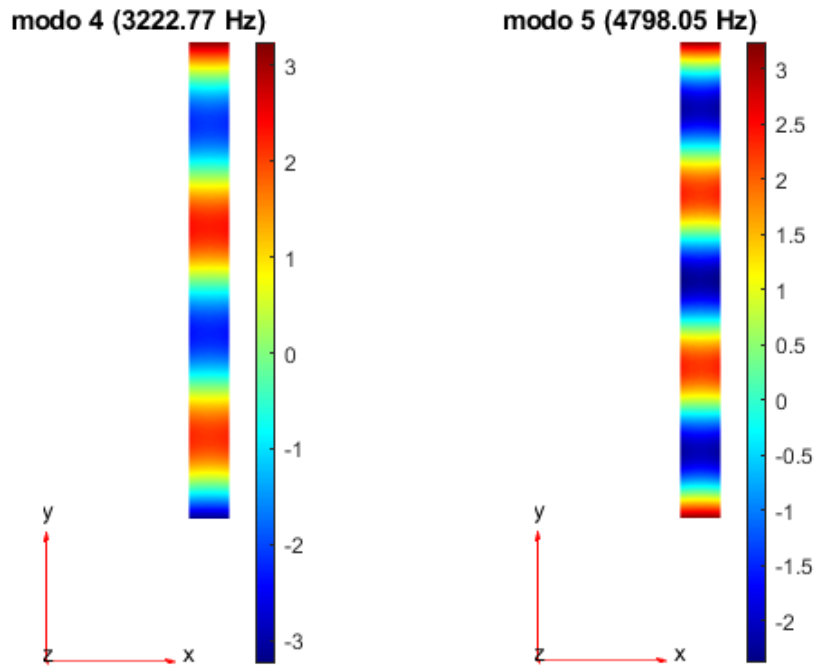


Fig. 22. Cuarto y quinto modo de vibración de viga uniforme (método de elemento finito).

En las Figs. 21 y 22 se ve como en cada modo de vibración aumentan los nodos que son los puntos sin movimiento ilustrados en color verde pálido habiendo 2 nodos para el 1er modo y 6 para el 5° modo.

Para complementar, se procedió a modelar la misma viga en el software *Catia* con un tamaño de elemento lineal de 1 mm obteniendo las frecuencias naturales de la Tabla 4.

Tabla 4. Frecuencias naturales viga uniforme (método de elemento finito).

Frecuencias naturales viga uniforme FEM	
n	f_n [Hz]
1	388.67
2	1068.64
3	2087.15
4	3432.66
5	5094.98

Los modos de vibración obtenidos en la simulación por elemento finito se muestran en las Figs. 23 y 24. Es importante señalar que en todos los modos de vibración se observa como la oscilación está presente a lo largo de toda la viga, manteniendo los mismos desplazamientos en todas las crestas y valles de la forma de onda.

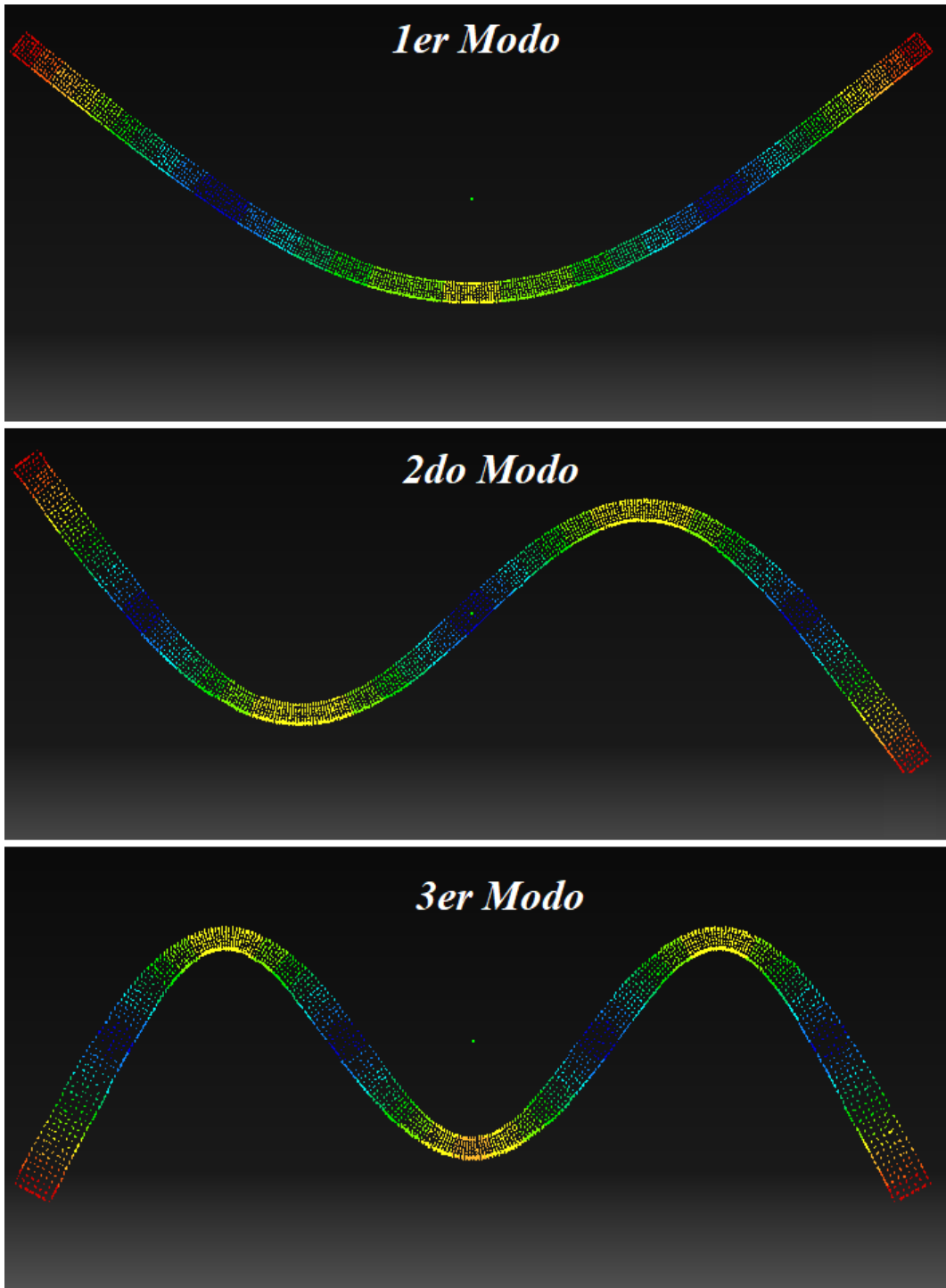


Fig. 23. Primer, segundo y tercer modo de la viga uniforme obtenidos por elemento finito (Catia).

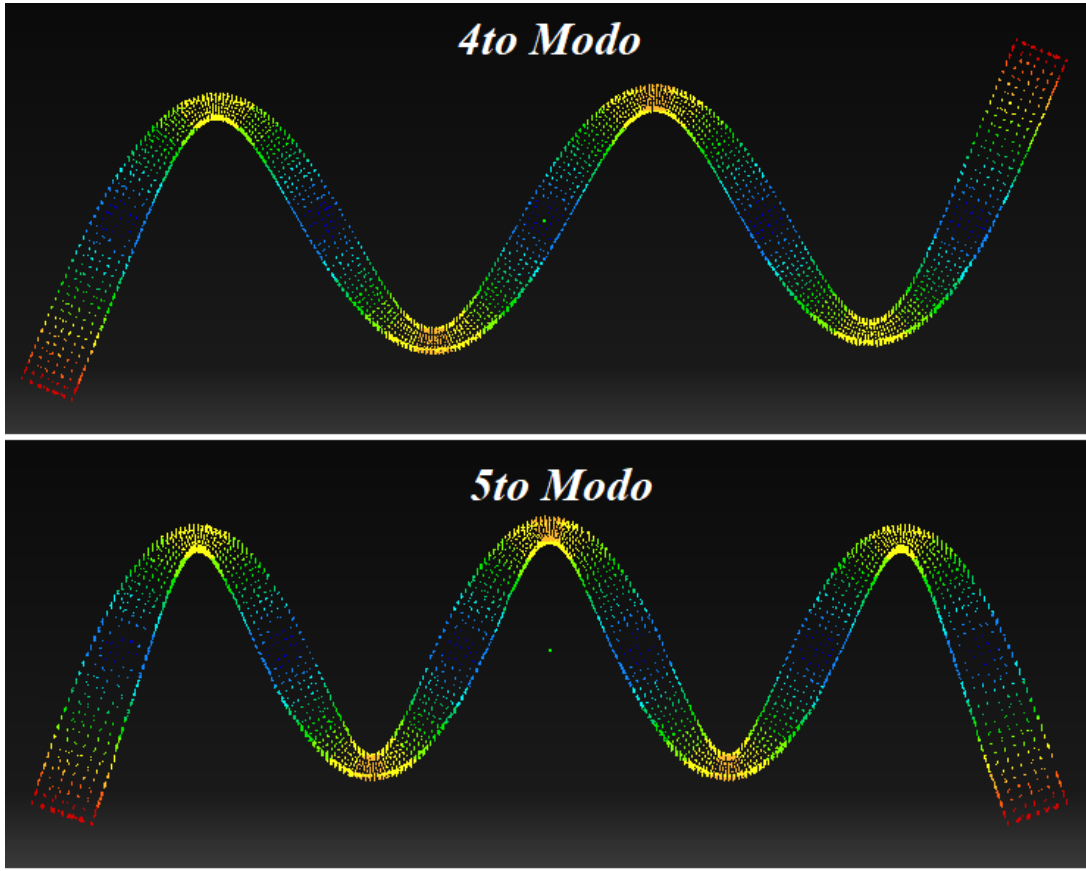


Fig. 24. Cuarto y quinto modos de la viga uniforme obtenidos por elemento finito (Catia).

3.3.2 Viga con Agujero Negro Acústico

Esta Sección corresponde con el análisis teórico de la viga con agujero negro acústico, para la obtención de las frecuencias naturales teóricas y mediante simulación numérica por elemento finito.

3.3.2.1 Modelado de viga con Agujero Negro Acústico

Como espécimen de estudio se establece una viga de perfil rectangular con un ANA en el extremo con las características mostradas en la Fig. 25 y Tabla 5.

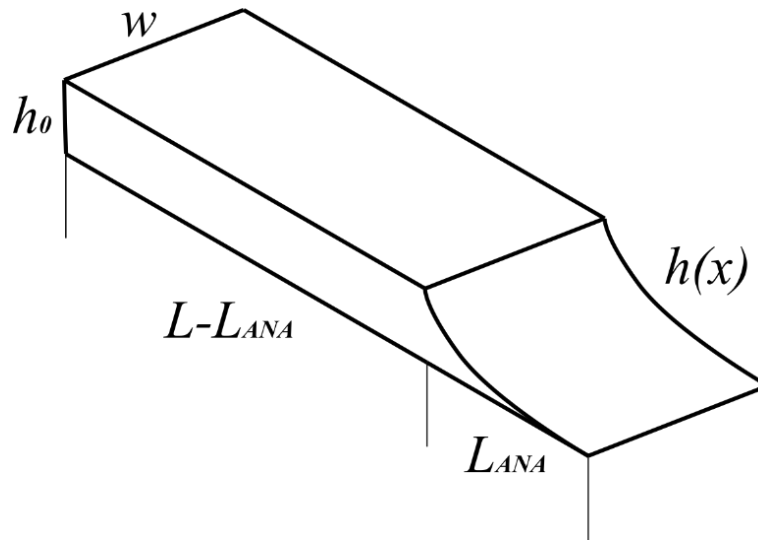


Fig. 25 Viga con ANA.

Tabla 5. Propiedades de la viga con ANA.

Características viga con ANA	
Material	Acero al carbono AISI 1018 rolado en frío
Módulo de elasticidad (E)	200 GPa
Razón de Poisson (ν)	0.266
Factor de pérdida Isotrópico (η)	0.06
Densidad (ρ)	7860 kg/m ³
Longitud (L)	300mm
Ancho (w)	25.4mm
Espesor (h_0)	6.3mm
Momento de inercia de la sección transversal (I)	$5.2926 \times 10^{-10} \text{m}^4$
Área de la sección transversal (A)	0.00016002 m ²
Longitud del ANA (L_{ANA})	30 mm

3.3.2.2 Solución analítica viga con Agujero Negro Acústico

Se aplica el modelo de viga tipo Euler-Bernoulli de la expresión (9), es decir, la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial^2}{dx^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{d^2 y}{dt^2} = p(x)$$

Dado que el área y el momento de inercia no son constantes, entonces se sustituyen dichas cantidades en términos de la coordenada longitudinal x y se hace $p(x) \equiv 0$, debido a que se trata del análisis para vibraciones libres. Luego,

$$\frac{\partial^2}{dx^2} \left(E \left(\frac{w(bx^k)^3}{12} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho(bx^k w) \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

Desarrollando se obtiene

$$\frac{Ewb^3}{12} \frac{\partial^2}{dx^2} \left((x^{3k}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho bx^k w \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{Eb^2}{12} \frac{\partial^2}{dx^2} \left((x^{3k}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho x^k \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

Sí se considera que la solución para los desplazamientos longitudinales es de la forma $y = \sin \omega t$, como se hizo en el caso de la viga uniforme, entonces se tiene que

$$\frac{Eb^2}{12} \frac{\partial^2}{dx^2} \left((x^{3k}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \rho x^k \omega^2 y = 0$$

$$\frac{\partial^2}{dx^2} \left(x^{3k} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \frac{12\rho\omega^2}{b^2 E} x^k y = 0$$

Renombrando el término $\frac{12\rho\omega^2}{b^2 E}$ como α , entonces

$$\frac{\partial^2}{dx^2} \left(x^{3k} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \alpha x^k y = 0$$

Aplicando las derivadas

$$\frac{\partial}{dx} \left(3k x^{3k-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^{3k} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right) - \alpha x^k y = 0$$

$$3k x^{3k-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^{3k} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \alpha x^k y = 0$$

$$3k(3k-1)x^{3k-2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3k x^{3k-1} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3k x^{3k-1} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + x^{3k} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \alpha x^k y = 0$$

$$x^{3k} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 6k x^{3k-1} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3k(3k-1)x^{3k-2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha x^k y = 0$$

$$x^{2k} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 6k x^{2k-1} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3k(3k-1)x^{2k-2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha y = 0$$

Entonces, como en este caso se trata de un exponente de 2 ($k = 2$) la ecuación queda como sigue:

$$x^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 12 x^3 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 30x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha y = 0 \quad (30)$$

La ecuación (30) es un tipo peculiar de ecuación diferencial ordinaria, catalogada como ecuación de Cauchy-Euler. Aplicando la metodología para la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales se tiene que la solución es de la forma

$$y(x) = x^{-\frac{3}{2}} \left(c_1 x^{\frac{1}{2}\sqrt{17-4\sqrt{4+\alpha}}} + c_2 x^{\frac{1}{2}\sqrt{17+4\sqrt{4+\alpha}}} + c_3 x^{\frac{1}{2}\sqrt{17-4\sqrt{4+\alpha}}} + c_4 x^{\frac{1}{2}\sqrt{17+4\sqrt{4+\alpha}}} \right) \quad (31)$$

La ecuación (31) es la solución exacta para una viga de sección transversal variable, correspondiente con un ANA con $k = 2$. Como se puede notar, tiene cuatro constantes que se pueden determinar a través de las condiciones de frontera, sin embargo, es importante mencionar que esta solución corresponde únicamente para el tramo del ANA y dado que estos dispositivos van acompañados de un segmento de viga constante, entonces es necesario acoplar las soluciones.

La forma de acoplar la ecuación del ANA y la viga constante es a través de las condiciones de continuidad en el punto de interfaz. Dichas condiciones no son más que establecer que $y_{ana}, y'_{ana}, y''_{ana}, y_{ana}'''$ de la ecuación (31) son iguales a $y_{unif}, y'_{unif}, y''_{unif}, y_{unif}'''$ de la ecuación (24), en el punto de interfaz, y las condiciones de frontera para los extremos son las usuales, dependiendo del tipo de apoyo o soporte.

3.3.2.3 Frecuencia de corte y coeficiente de reflexión del Agujero Negro Acústico.

La frecuencia de corte se obtuvo a partir de aplicar (20), resultando de 10.025 kHz. Por otro lado, el coeficiente de reflexión se calculó con el enfoque geométrico a través de las expresiones (17) y (18), el cálculo se hizo numérico dados los parámetros de la Tabla 2 y un truncamiento de 0.5 mm, para el intervalo 0-20 kHz resultando la gráfica mostrada en la Fig. 26.

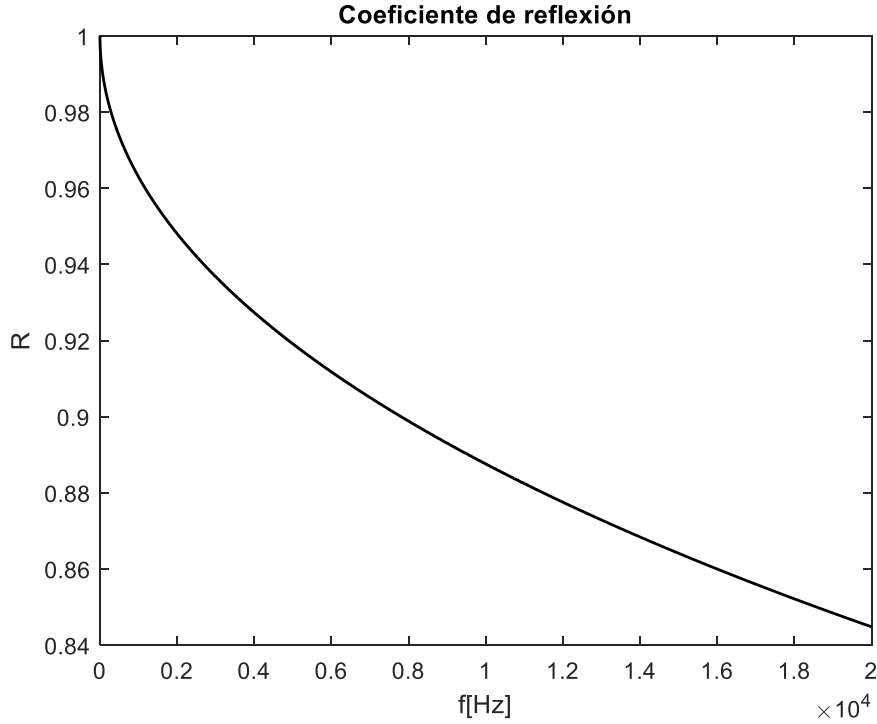


Fig. 26. Coeficiente de reflexión para la viga con ANA de exponente 2.

3.3.2.4 Simulación de la viga con Agujero Negro Acústico vía solución exacta.

Simulación mediante la solución exacta y una frecuencia de excitación arbitraria.

Esta simulación se hace ocupando la solución exacta de la viga con ANA, que consiste en el acoplamiento de las ecuaciones (24) y (31), a través de las condiciones de continuidad y condiciones de frontera.

Las condiciones de continuidad en el punto de interfaz x_{ANA} son

$$\begin{aligned}
 y_{ANA}(x_{ANA}) &= y_{unif}(x_{ANA}) \\
 y'_{ANA}(x_{ANA}) &= y'_{unif}(x_{ANA}) \\
 y''_{ANA}(x_{ANA}) &= y''_{unif}(x_{ANA}) \\
 y'''_{ANA}(x_{ANA}) &= y'''_{unif}(x_{ANA})
 \end{aligned} \tag{32}$$

Las condiciones en (32) son 4 ecuaciones con 8 incógnitas y, para que el sistema tenga solución, se requieren 4 ecuaciones más que se obtienen a partir de las condiciones de frontera, como sigue Para el extremo libre con ANA:

$$\begin{aligned}
 y_{ANA}(x_0) &= M(x_0) = 0 \\
 y'_{ANA}(x_0) &= V(x_0) = 0
 \end{aligned} \tag{33}$$

Para el extremo libre uniforme:

$$\begin{aligned} y''_{unif}(L) &= M(L) = 0 \\ y'''_{unif}(L) &= V(L) = 1 \end{aligned} \quad (34)$$

Nótese que la ecuación de fuerza cortante en (34) está igualada con 1, lo cual es para representar la fuerza puntual armónica, ya que si no se coloca el sistema tendría como solución únicamente la solución trivial, lo cual no sirve para la simulación, además con esto se consigue una solución para cualquier frecuencia de excitación.

Las condiciones anteriores se evaluaron en *Matlab* con los parámetros de la Tabla 5 y se resolvió el sistema de ecuaciones para las 8 constantes necesarias para simular el sistema completo resultando en las gráficas mostradas en las Figs. 27 y 28.

Retomando la frecuencia de corte calculada en la Sección 3.1.2.3, que es de 10.025 kHz, se puede ver como las gráficas de las Figs. 27 y 28 representan dicho fenómeno, ya que a 1000 Hz el sistema sí tiene los desplazamientos máximos en la punta, pero no se presentan oscilaciones en la misma, en comparación como en 12 kHz, donde sí hay varios nodos en la sección con ANA.

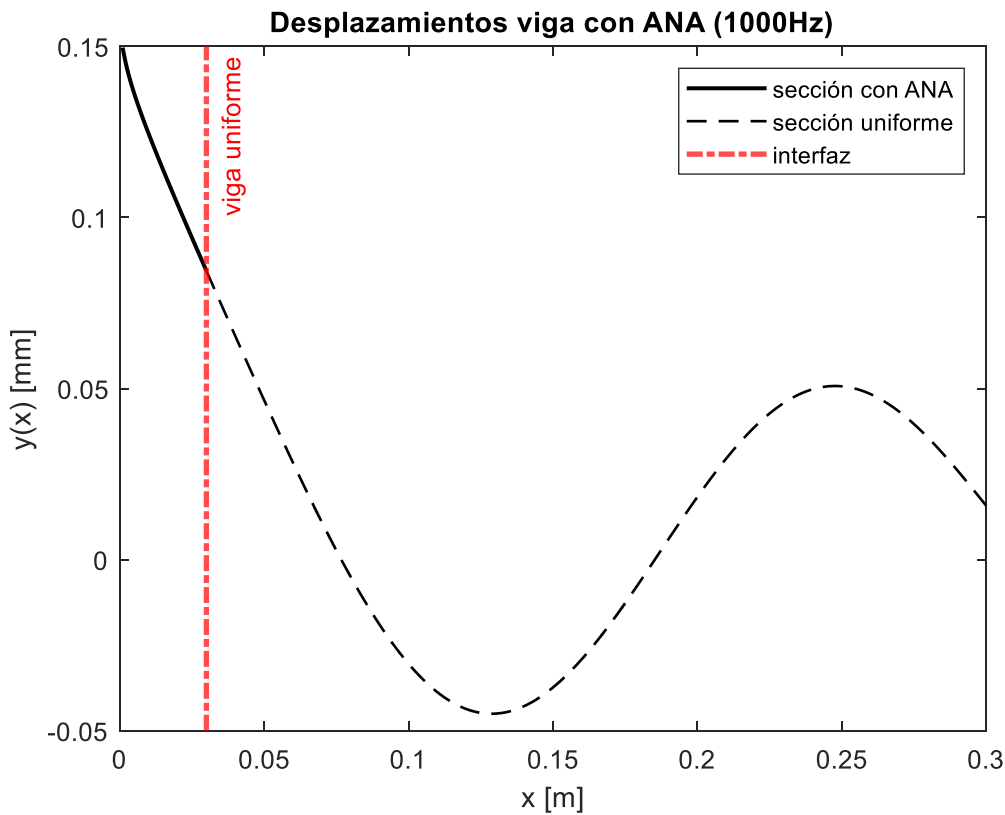


Fig. 27. Desplazamientos de viga con ANA a 1000Hz.

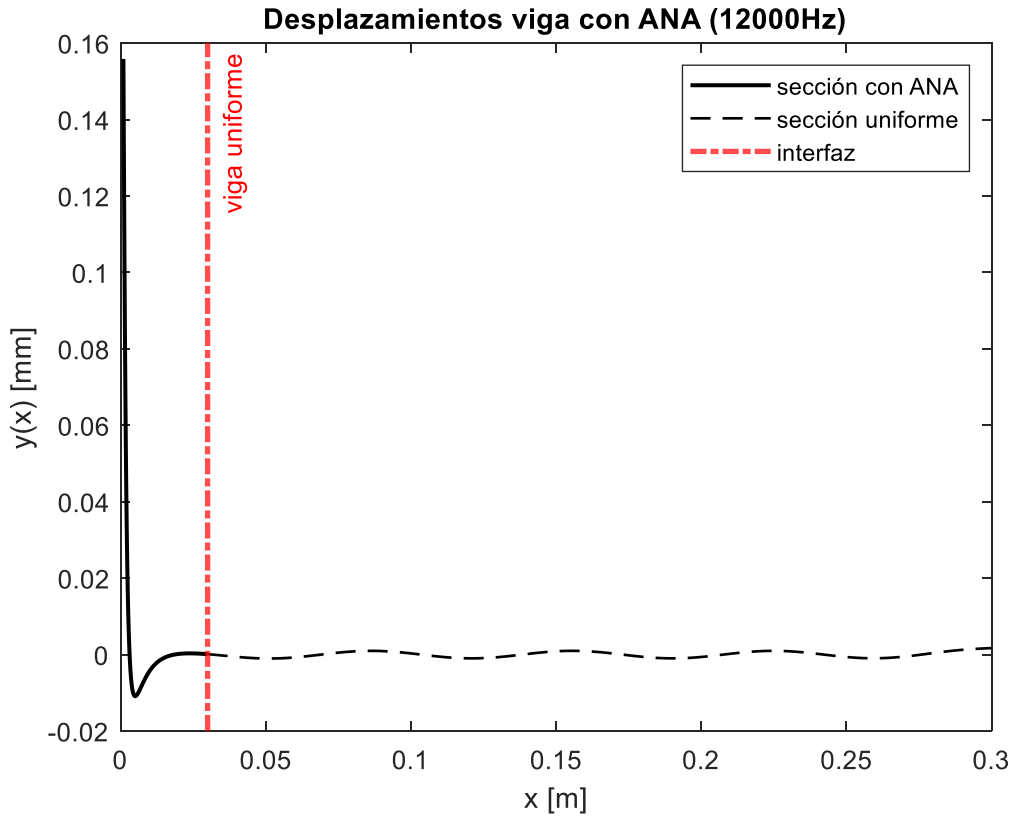


Fig. 28, Desplazamientos de viga con ANA a 12 kHz

3.3.2.5 Simulación viga con ANA por método de elemento finito.

La viga se modela mediante el software de diseño *Catia* y se simula por el método de elemento finito con una discretización de 1 [mm]. Se obtuvieron las primeras 5 frecuencias naturales mostradas en la Tabla 6.

Tabla 6. Frecuencias naturales de la viga con ANA (elemento finito).

Frecuencias naturales viga con ANA por FEM	
n	f_n [Hz]
1	442.99
2	1211.83
3	2353.46
4	3843.03
5	5644.67

Como se puede notar, las frecuencias naturales de la viga con ANA están desplazadas a la derecha respecto de la viga uniforme, lo que como analogía se puede ver como un aumento de la rigidez en la sección constante, aunque físicamente no pasa esto, ya que solo se está haciendo disminuir la amplitud

de la vibración en esta parte, mientras que en la sección con ANA las vibraciones aumentan de amplitud.

Los modos de vibración de la simulación se ilustran en la siguiente Fig. 29.

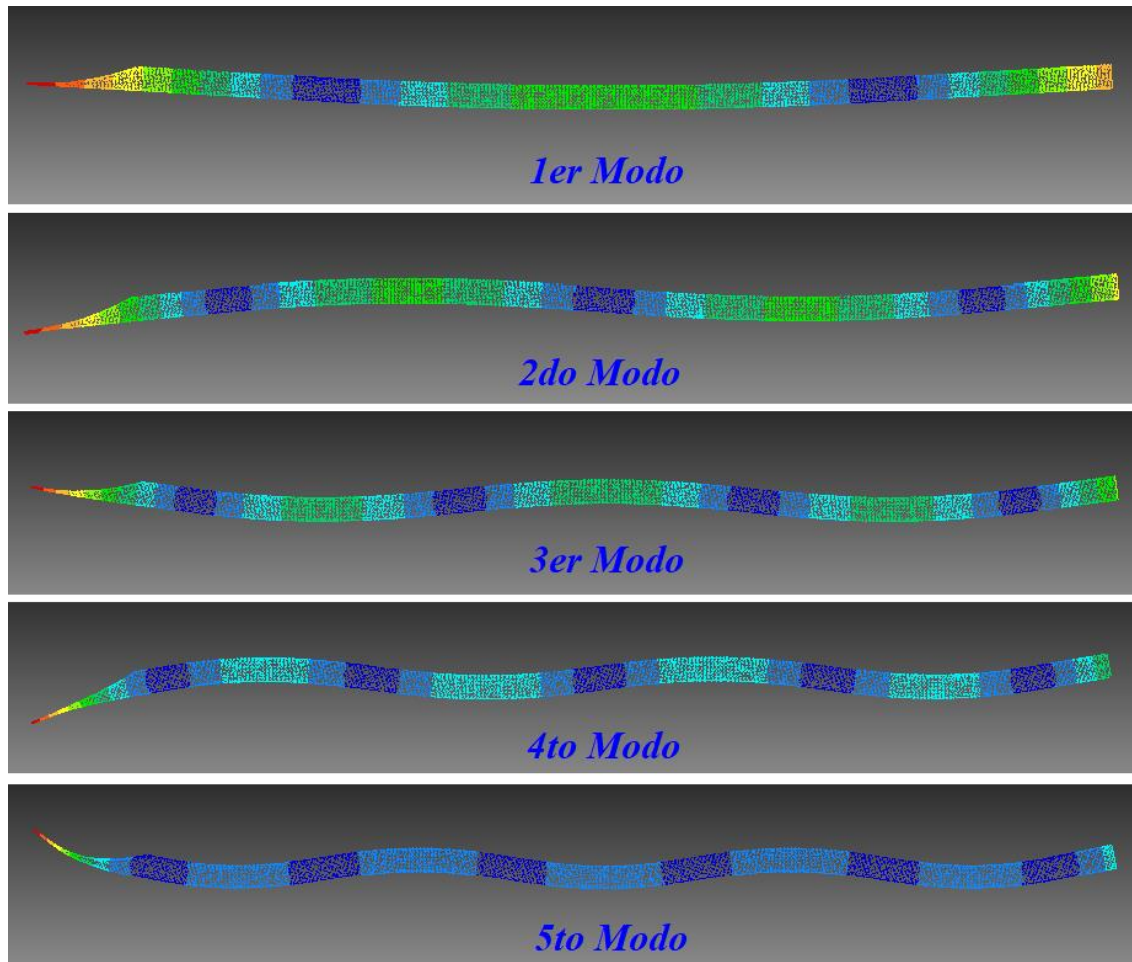


Fig. 29. Primeros 5 modos de vibración de la viga con ANA (Catia).

Se puede observar en la Fig. 29 como la forma del 2o modo de vibración corresponde con la obtenida de la solución exacta mostrada en la Fig. 27, y como los primeros 5 modos no superan los 10 kHz. Entonces, no hay más de un nodo en las secciones con ANA, sin embargo, sí se concentra una mayor energía en forma de desplazamientos más amplios.

3.3.2.6 Modos de vibración de viga con Agujero Negro Acústico vía solución exacta.

Partiendo de frecuencias naturales obtenidas por el método de elemento finito (Tabla 6), se pueden obtener los modos de vibración a partir de la solución exacta y las condiciones de frontera desarrolladas en la Sección 3.1.2.4, resultando las gráficas mostradas en las Figs. 30, 31, 32, 33 y 34

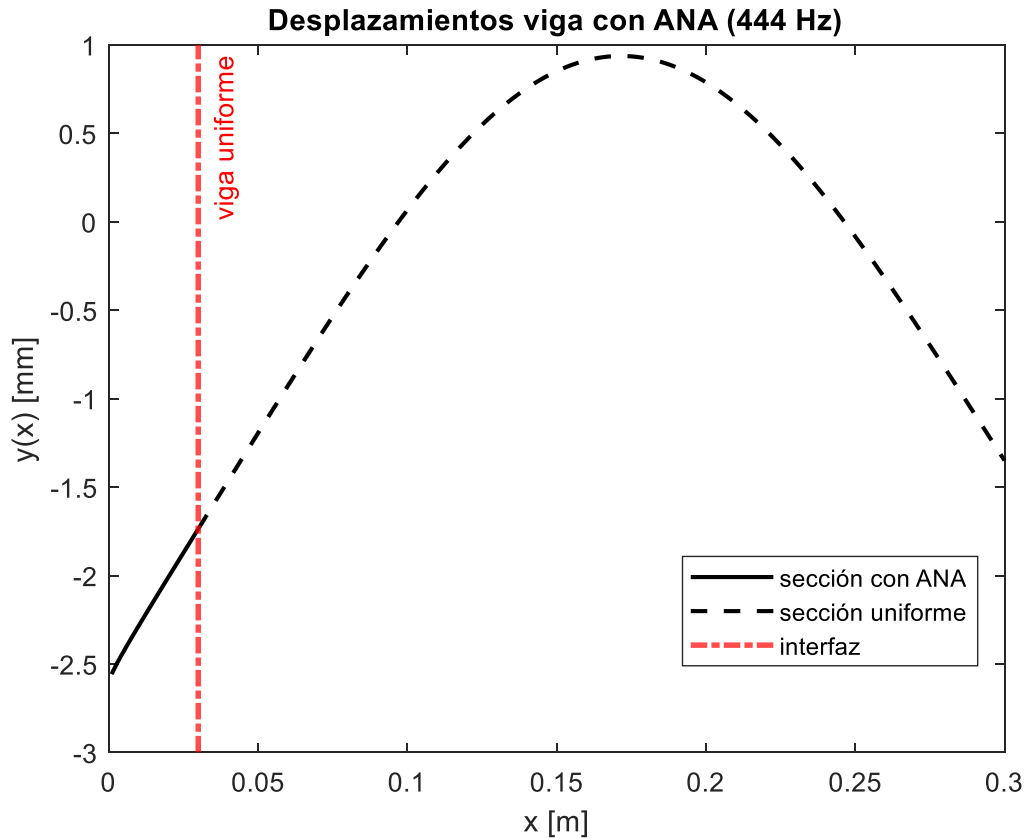


Fig. 30. Primer modo de vibración de la viga con ANA a 444 Hz.

Nótese que los modos de vibración obtenidos a partir de la solución exacta tienen las mismas formas de los modos obtenidos mediante el software *Catia* en la Sección anterior. Esto se puede verificar claramente contando el número de nodos en cada modo, lo cual valida ambos procedimientos que resultan buenas opciones para simular y calcular las frecuencias y los modos de vibración de la viga con ANA.

Resulta importante mencionar que, el modelo por elemento finito es complejo en cuestión de procesamiento, debido a la geometría del ANA, lo que genera problemas de otra naturaleza debido al tipo y tamaño del mallado que por la geometría tiene que ser relativamente más pequeño, lo que se traduce en una exigencia de procesamiento. Por estas razones, la solución exacta resulta una opción más compacta y simple para visualizar los modos de vibración y localizar las frecuencias naturales sin requerir de tanto procesamiento computacional.

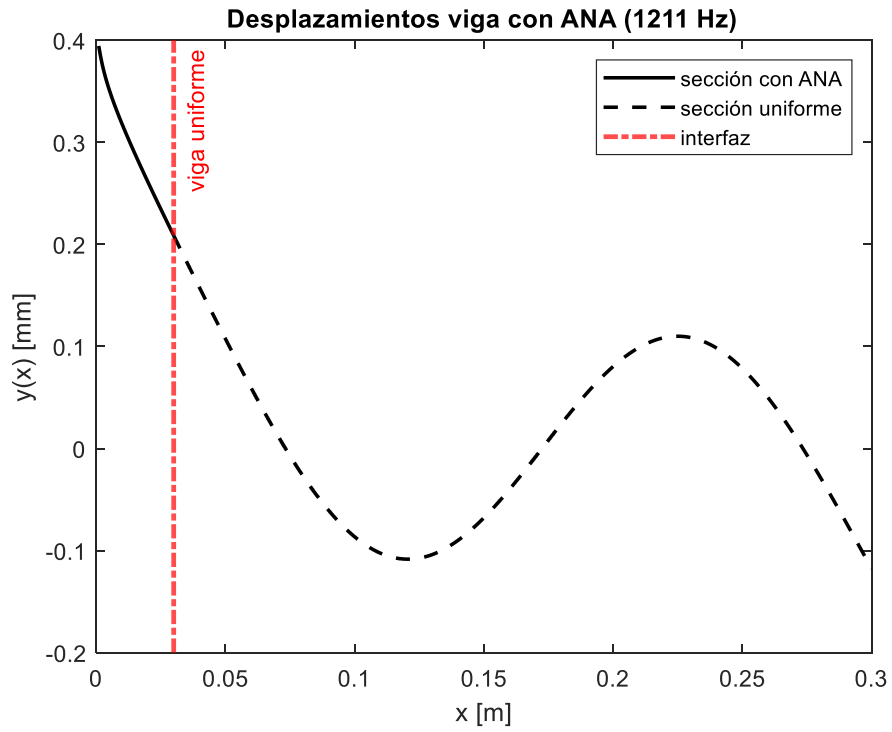


Fig. 31. Segundo modo de vibración de la viga con ANA a 444Hz.

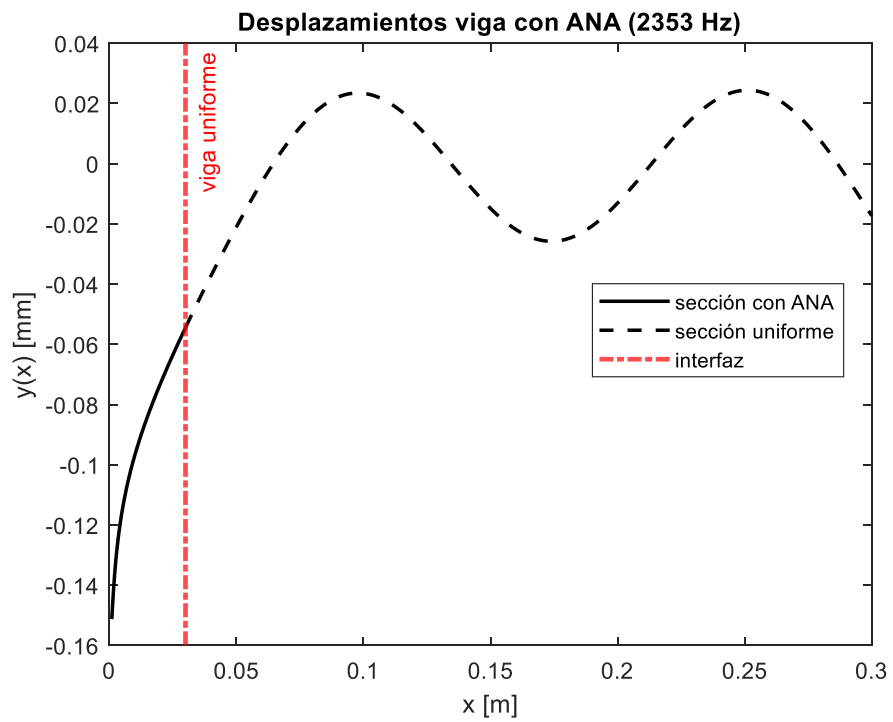


Fig. 32 Tercer modo de vibración de la viga con ANA a 2353Hz.

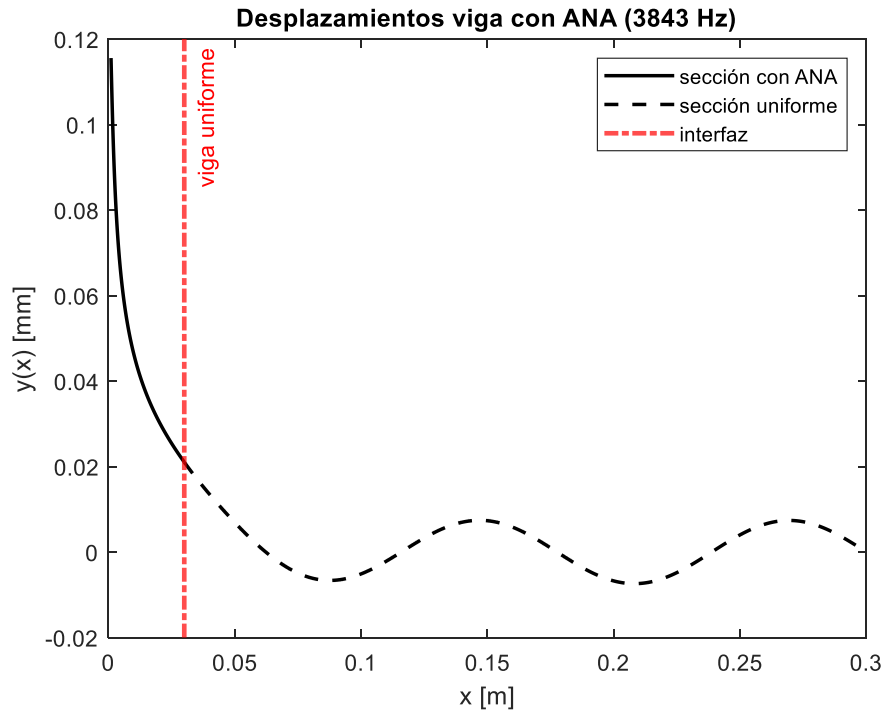


Fig. 33. Cuarto modo de vibración de la viga con ANA a 3843Hz.

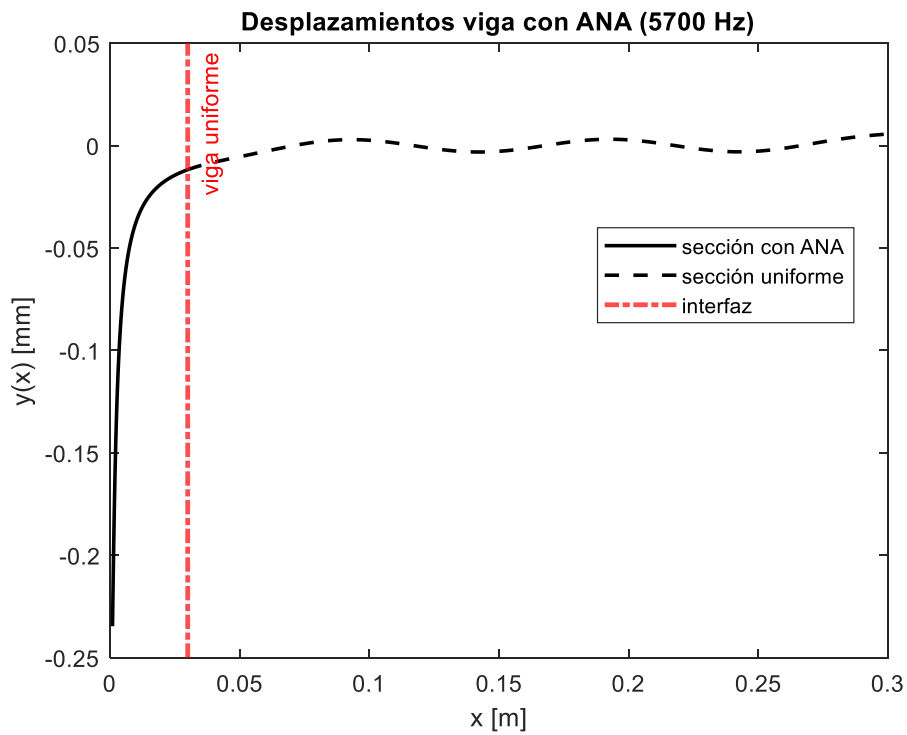


Fig. 34. Quinto modo de vibración de la viga con ANA a 5700Hz.

3.4 Desarrollo experimental

El desarrollo experimental consiste en la fabricación de las probetas de las Fig. 19 y 25 con las características mostradas en las Tablas 1 y 5 y su respectivo ensayo mediante el proceso descrito en la Sección 2.4.

3.4.1 Construcción de las probetas

Las probetas se fabricaron como se indicó en las Tabla 1 y 5, en acero al carbono o estructural tipo AISI 1018 rolando en frío. El perfil correspondiente al ANA se construyó mediante desbaste, limado y lijado, obteniendo como especímenes los mostrados en la Fig. 35.



Fig. 35. Probetas de viga uniforme y con ANA.

3.4.2 Experimento y señales de audio

3.4.2.1 Experimento

El experimento realizado se hizo impactando la probeta suspendida con un péndulo dejado caer desde la misma elevación en cada prueba con el fin de imprimir las mismas energías. La vibración resultante del impacto se registró en forma de audio para su procesamiento y análisis.

El experimento se repitió de 4 formas distintas

- Viga uniforme
- Viga con ANA
- Viga uniforme con elemento viscoelástico en la punta
- Viga con ANA con elemento viscoelástico en la punta

En cada caso se realizaron varias lecturas con el fin de promediar y obtener datos confiables de dichas mediciones.



Fig. 36. foto del experimento realizado.

3.4.2.2 Señales de audio de los experimentos

Señales de audio sin elemento viscoelástico

En la Fig. 37 se traslaparon las señales correspondientes a la viga uniforme en color azul y la viga con ANA en color negro, nótese como la señal de la viga con agujero negro acústico decrece de manera más rápida que la de la viga uniforme, alcanzando el mismo nivel de amplitud aproximadamente a los 8 [s].

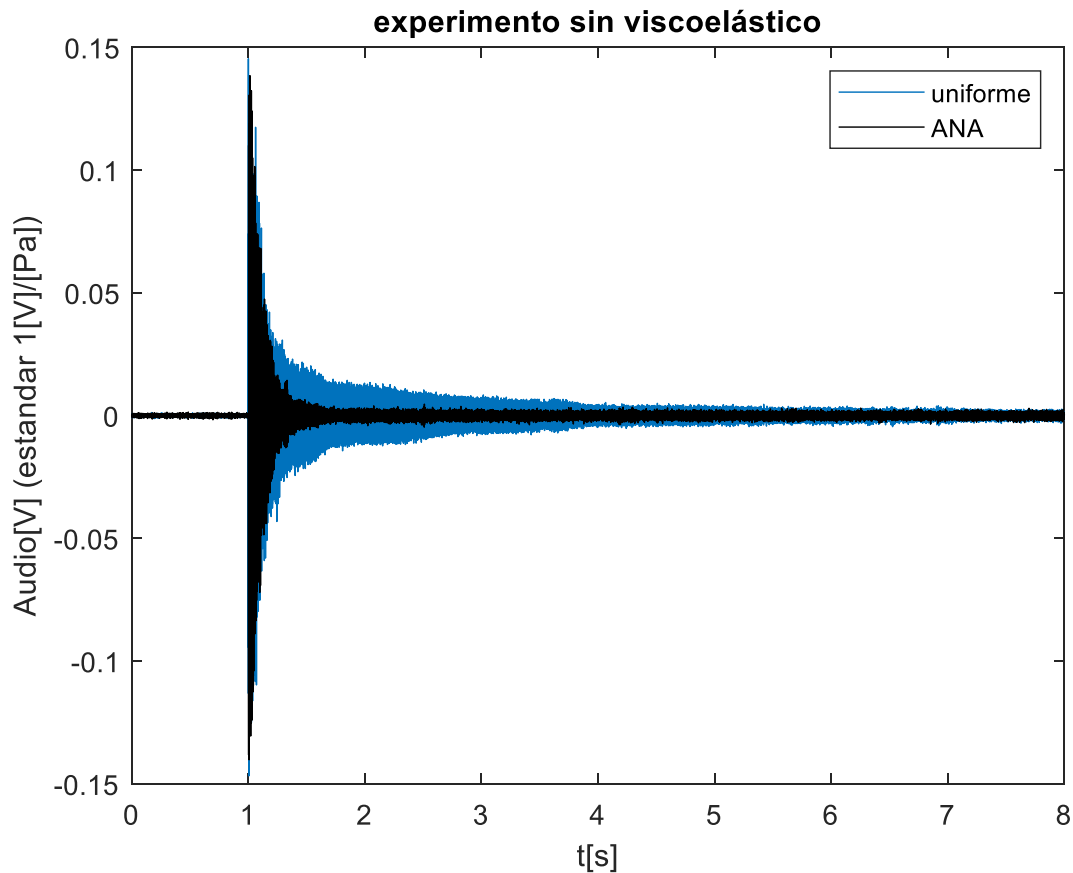


Fig. 37. Señales de audio experimento sin viscoelástico.

De manera visual se tiene una prueba cualitativa de como el ANA permite una disipación de energía más rápida, esto es porque las vibraciones se concentran en una sección más pequeña donde rápidamente se disipan por medio del amortiguamiento estructural.

A simple vista el comportamiento de la señal de la viga con ANA (color negro) es el de una señal atenuada respecto a la señal azul lo que puede verse análogamente como una inyección de amortiguamiento y cabe mencionar que en este experimento no se agregó ningún elemento viscoelástico, lo que significa que este efecto de amortiguamiento está dado solo por la incorporación del ANA en la viga de prueba.

Señales de audio con elemento viscoelástico

En este experimento se incorporó un material viscoelástico en las probetas, esto se consiguió colocando unas bandas de goma en la punta de las probetas como se ilustra en la Fig. 38.

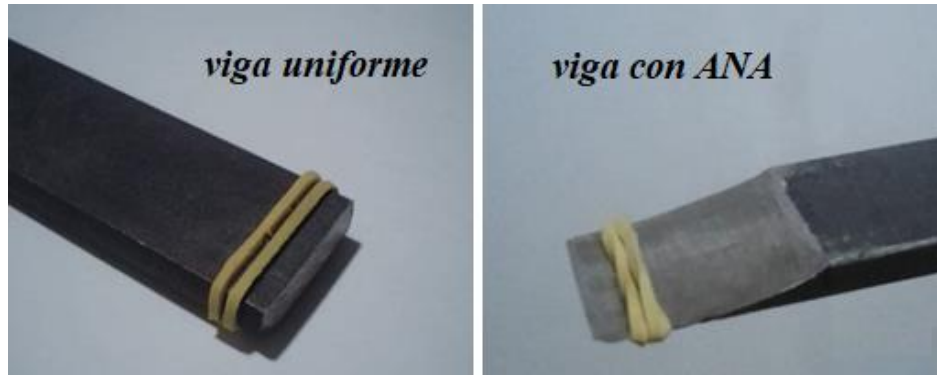


Fig. 38. Vigas con viscoelástico; izquierda: uniforme, derecha: con ANA.

En la Fig. 39 se traslapan las señales correspondientes a la viga uniforme y con ANA con material viscoelástico en la punta en los colores azul y negro respectivamente, nótese que no se consigue el mismo resultado al agregar material viscoelástico en la punta de la viga uniforme que el conseguido al agregarlo en la viga con ANA y esto se debe a que en el caso de la viga uniforme la energía está distribuida a lo largo de toda la viga, lo que significa que para conseguir buenos resultados el material viscoelástico tendría que incorporarse en toda la viga en contraste con la viga con ANA que solo requiere incorporar este material en la sección correspondiente con el ANA.

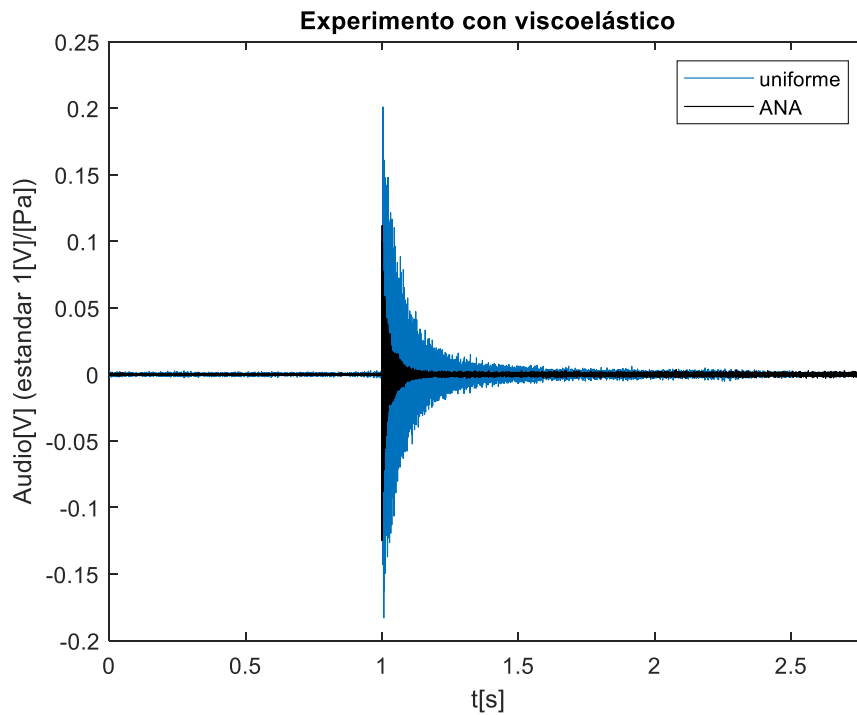


Fig. 39 Señales de audio experimento con viscoelástico.

Con fines de comparación se presentan las gráficas de las Figuras 40, 41 y 42. En la Fig. 40 se muestra el traslape de las señales correspondientes con las vigas uniformes sin y con viscoelástico en los colores azul y negro respectivamente.

Se puede ver claramente que si bien si existe una atenuación de la señal correspondiente a la viga uniforme con viscoelástico es relativamente baja en el intervalo de 1-1.3 [s] y consigue tener más atenuación a partir de 1.3 [s] en contraste con la gráfica de la Fig. 39 donde la viga con ANA se ve muy atenuada prácticamente desde el segundo 1.

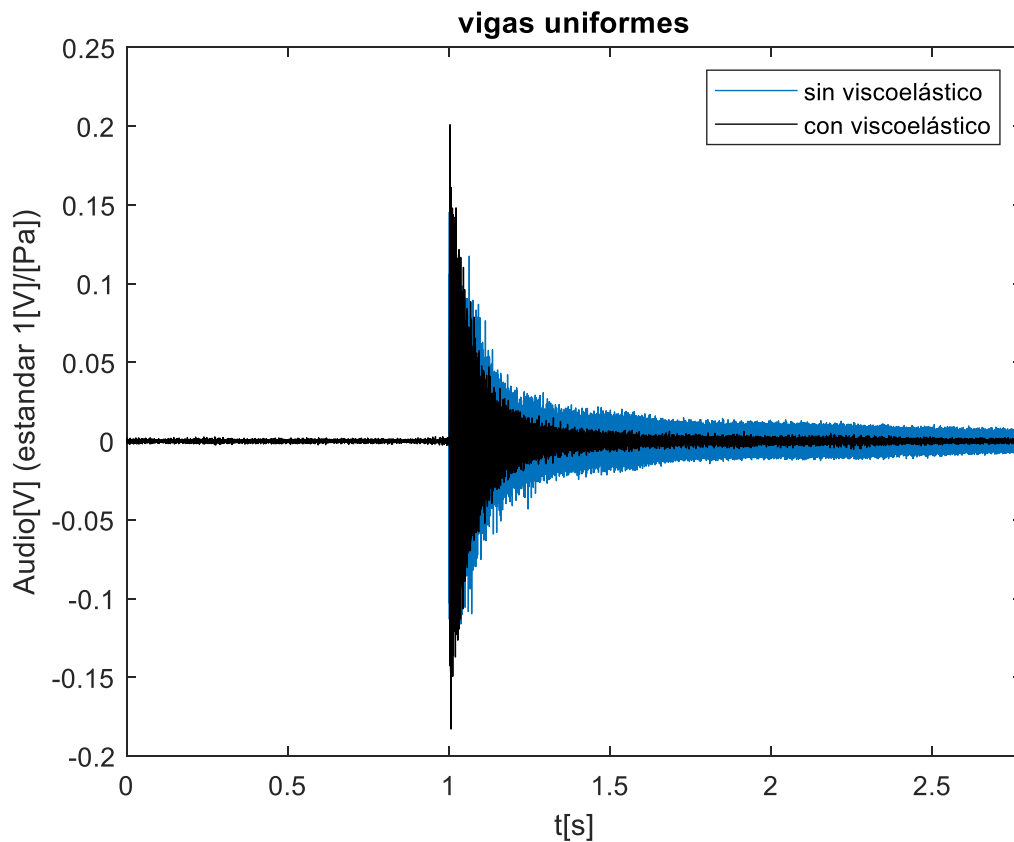


Fig. 40. Comparación de audio de vigas uniformes.

La imagen de la Fig. 41 es la comparación correspondiente a las vigas con agujero negro acústico, se nota de manera más significativa la atenuación de la señal en la viga con ANA y material viscoelástico y aunque ambas señales corresponden con vigas con ANA, el viscoelástico consigue potencializar el efecto como lo muestra la señal en color negro que se ve drásticamente atenuada desde el comienzo.

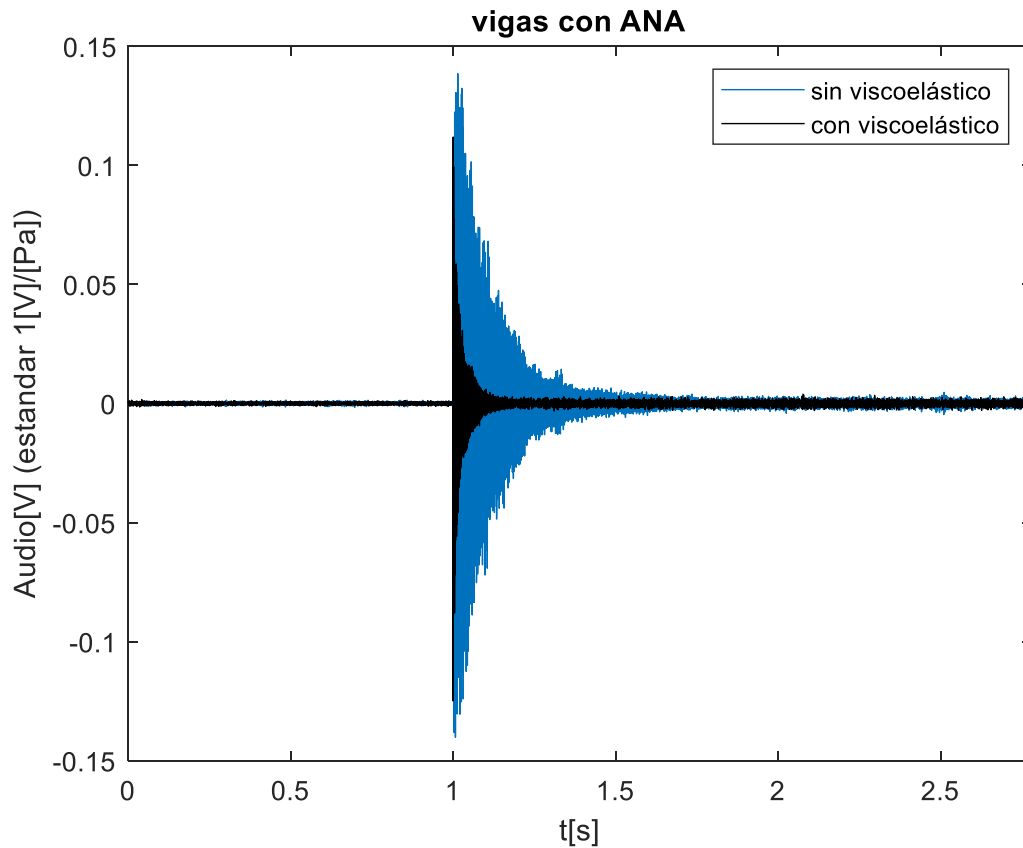


Fig. 41. Comparación de audio de vigas con ANA.

En la Fig. 42 se puede apreciar el potencial real de un agujero negro acústico, ya que como se vio en las Fig. 39, 40 y 41, existe una disipación más rápida de las vibraciones al agregar un ANA o un material viscoelástico, sin embargo, el mejor efecto es la unión de ambos, o sea un ANA con material viscoelástico ya que este último potencializa el efecto del ANA al contrarrestar los efectos debidos a la manufactura y truncamiento del ANA que afectan su efectividad.

Finalmente, para cerrar esta Sección se consiguen resultados cuantitativos de las señales de audio obtenidas de los experimentos, que será la medición de los tiempos en los que las señales se establecen, o dicho de otra manera cuando el sonido termina de disiparse y ya no se escucha para cada caso con el fin de compararlos. El porcentaje de tiempo es una medida proporcional al porcentaje inyectado de amortiguamiento.

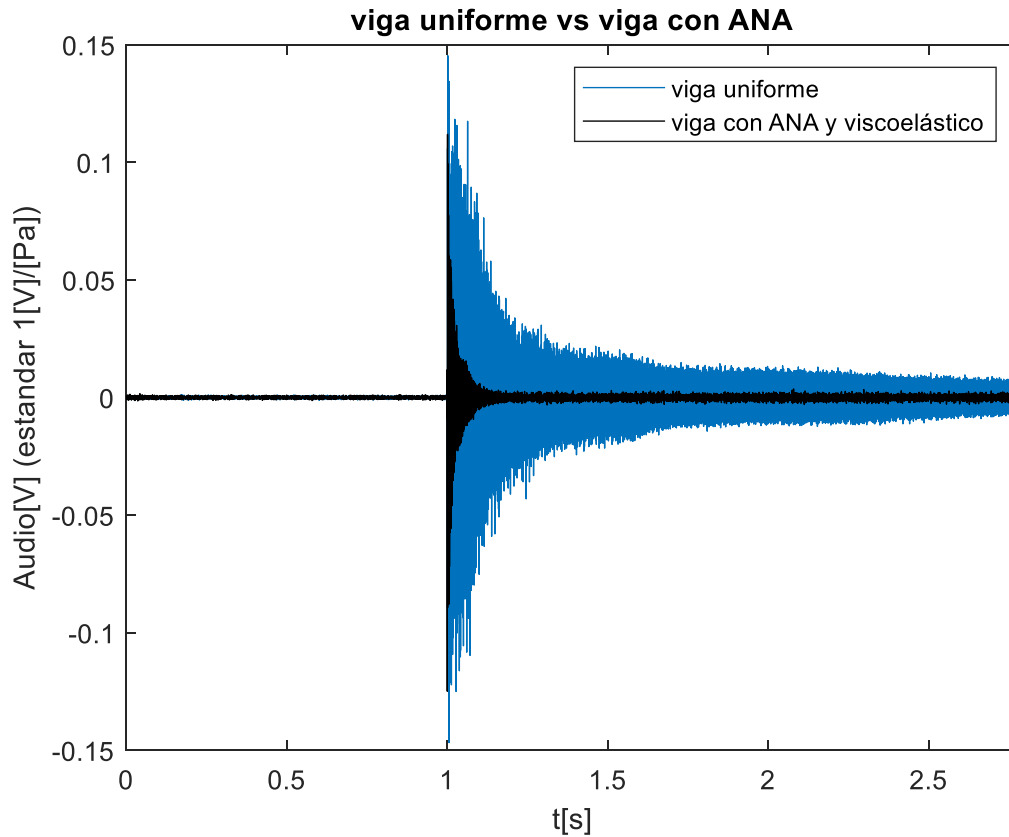


Fig. 42. Audio de viga uniforme vs ANA y viscoelástico.

Del análisis de las señales recopiladas, las señales se establecen en un nivel de amplitud de 2×10^{-3} , que corresponde principalmente con ruido de alta frecuencia que se mantiene constante, entonces se determinó el tiempo de todos los especímenes en llegar a dicho nivel y se registra en la Tabla 7.

Tabla 7. Tiempos de establecimiento experimentales.

Tiempos de establecimiento experimentales		
Especímen	Tiempo de establecimiento [s]	%
Viga uniforme	7.45	100
Viga con ANA	1.84	25
Viga uniforme con viscoelástico	2.44	33
Viga con ANA y viscoelástico	1.26	17

En la misma Tabla se ponen los porcentajes respecto al 100% correspondiente con la viga uniforme y el caso más drástico es el de la viga con ANA y viscoelástico que disipa la energía en tan solo un 17% del tiempo.

3.4.3 Frecuencias naturales

A partir de las señales de audio obtenidas en la Sección 3.2.2 se calculó el espectro a partir de la transformada rápida de Fourier para señales discretas. A continuación de las Fig. 43, 44, 45, y 46 se muestran los espectros correspondientes.

Espectro de viga uniforme

Las frecuencias naturales extraídas del gráfico de la Fig. 43 se enlistan en la Tabla 8.

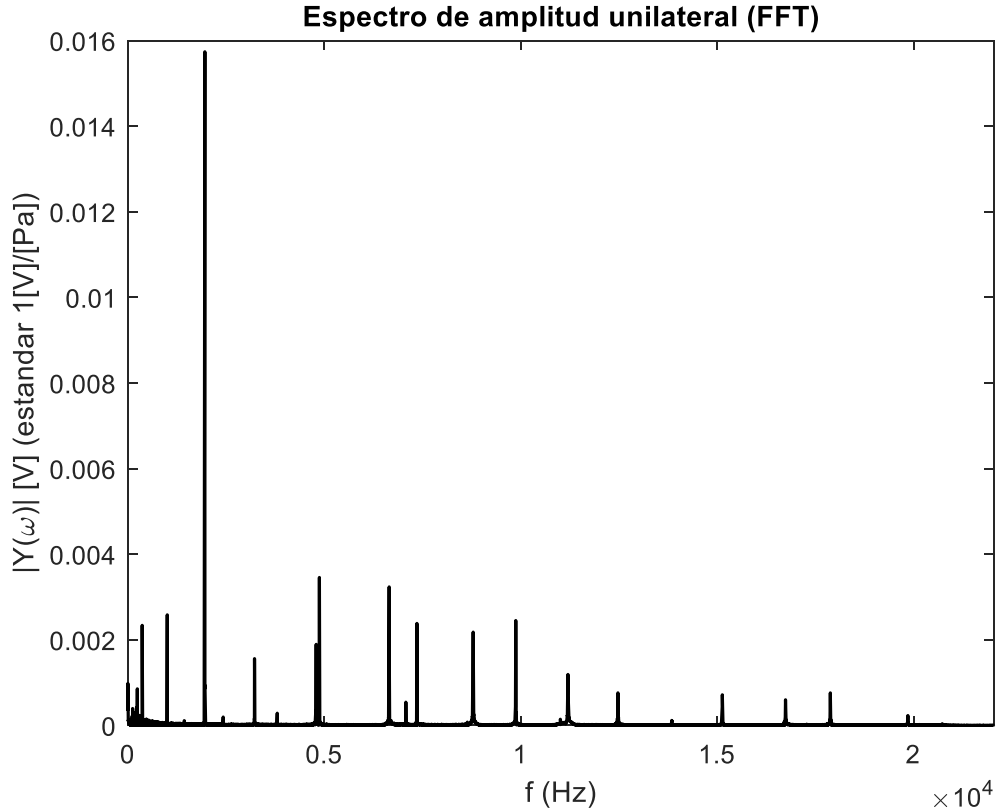


Fig. 43. Espectro de viga uniforme en [V].

Tabla 8. Frecuencias naturales experimento viga uniforme.

Frecuencias naturales experimento viga uniforme	
n	f_n [Hz]
1	364.13
2	1001.96
3	1961.13
4	3223.66
5	4875.72

Espectro de viga con ANA

Las frecuencias naturales extraídas del grafico de la Fig. 44 se enlistan en la Tabla 9

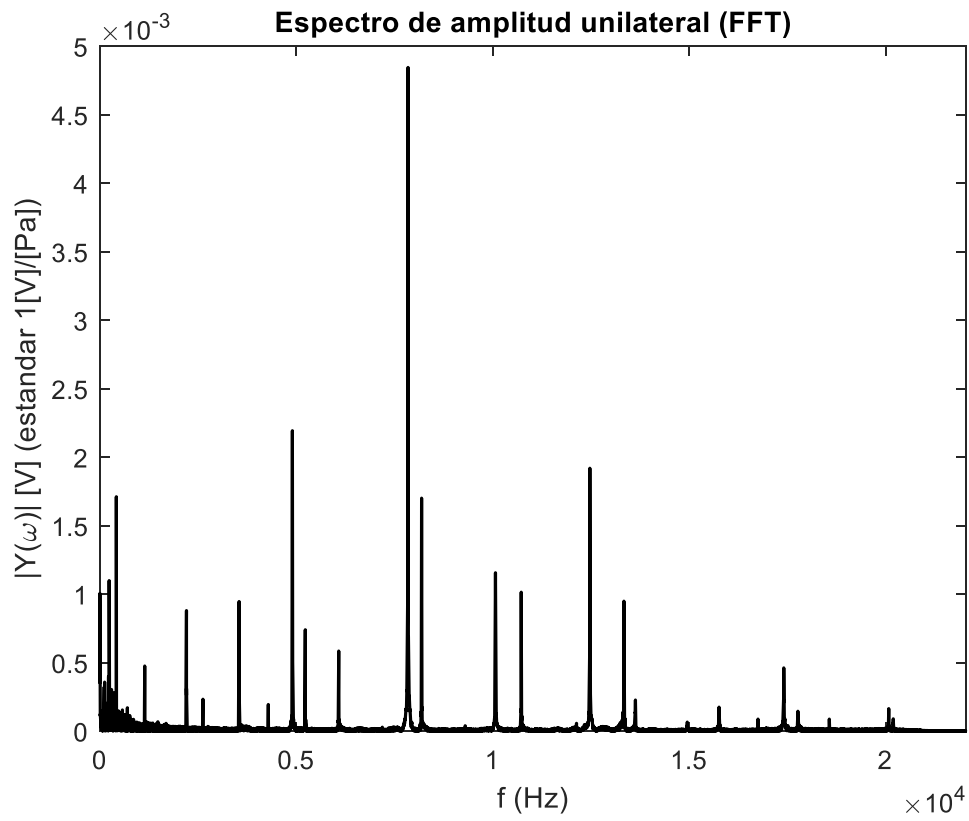


Fig. 44. Espectro viga con ANA.

Tabla 9. Frecuencias naturales experimento viga con ANA.

Frecuencias naturales Experimento viga con ANA	
n	f_n [Hz]
1	418.41
2	1141.29
3	2204.17
4	3543.74
5	5229.12

Espectro viga uniforme con elemento viscoelástico

Las frecuencias naturales extraídas del grafico de la Fig. 45 se enlistan en la Tabla 10

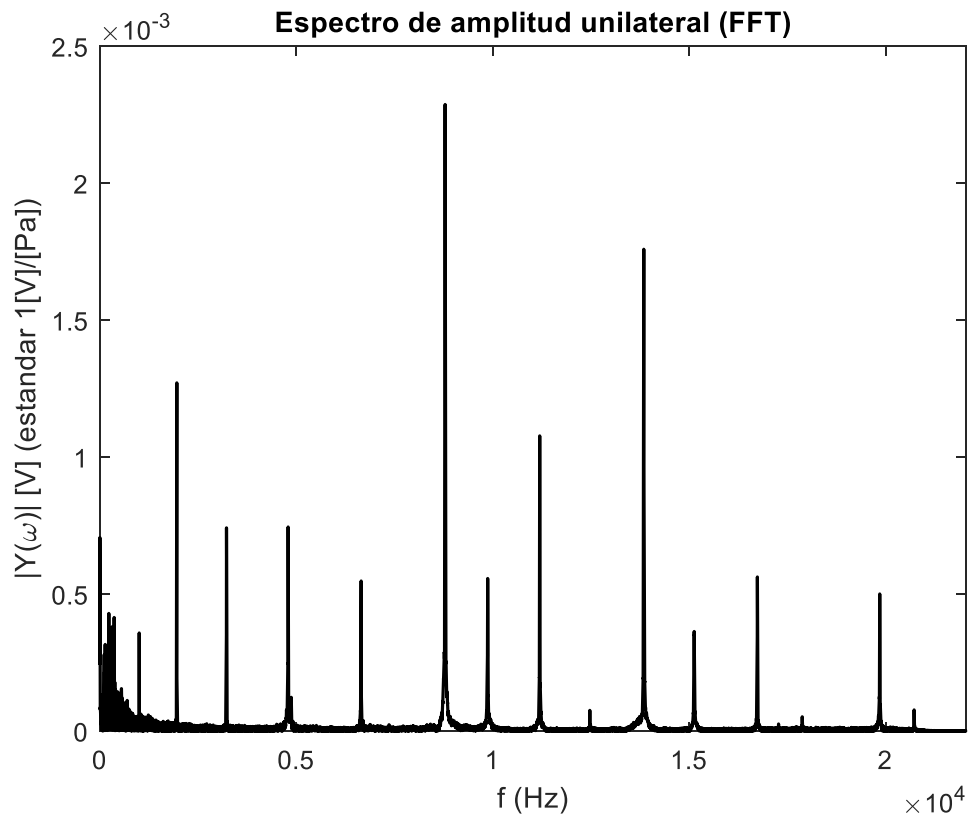


Fig. 45. Espectro viga uniforme con viscoelástico.

Tabla 10. Frecuencias naturales experimento viga uniforme con viscoelástico.

Frecuencias naturales Experimento viga uniforme con viscoelástico	
<i>n</i>	<i>f_n</i> [Hz]
1	363.28
2	1001.11
3	1958.66
4	3222.98
5	4792.21

Espectro viga con ANA y viscoelástico

Las frecuencias naturales extraídas del grafico de la Fig. 46 se enlistan en la Tabla 11

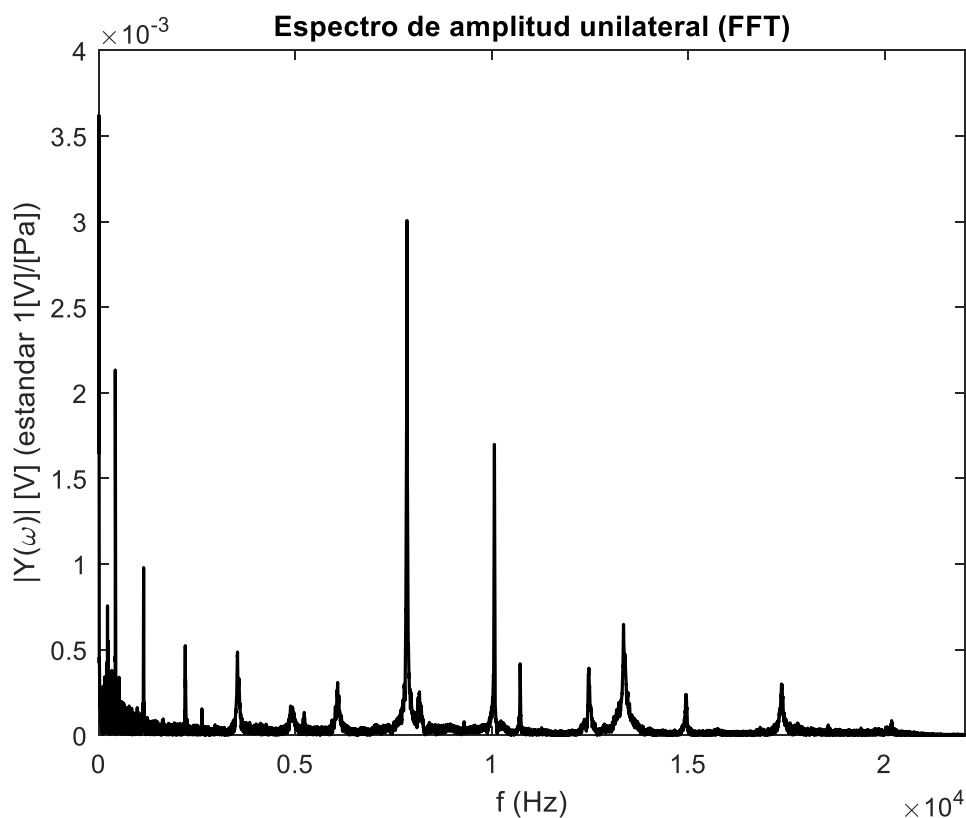


Fig. 46 Espectro viga con ANA y viscoelástico.

Tabla 11 Frecuencias naturales experimento viga con ANA y viscoelástico.

Frecuencia naturales experimento viga con ANA y viscoelástico	
n	f_n[Hz]
1	417.23
2	1139.53
3	2198.29
4	3529.38
5	4879.46

de los espectros y frecuencias naturales de esta Sección se puede validar el desarrollo teórico dado que las frecuencias experimentales coinciden con las frecuencias obtenidas mediante la solución exacta y elemento finito para las probetas de prueba fabricadas en este trabajo.

3.5 Resultados y discusión

De la Sección 3.1 se tiene un análisis teórico de los elementos tipo viga con y sin agujero negro acústico. Se determinó como las frecuencias naturales de la viga con ANA se desplazaron a la derecha respecto de la viga uniforme, lo que coincide con el fenómeno principal del ANA, que es concentrar las vibraciones. Al concentrarse en el ANA se reducen las vibraciones en la sección uniforme de la viga, similar a un aumento en la rigidez de la viga, aunque es importante mencionar que el efecto se parece a un aumento de la rigidez, sin olvidar que esto se debe porque la punta (sección con ANA) es la que vibra más.

Respecto al coeficiente de reflexión, se tiene un análisis basado en el enfoque de la acústica geométrica, en el que se ve que una parte de las vibraciones se quedan confinadas al ANA. Los factores que determinan la calidad de un ANA son el espesor de truncamiento y la calidad del maquinado, sin embargo, en la parte experimental se comprobó como la incorporación de un material viscoelástico mejora el desempeño del ANA, como se puede ver claramente en las Figs. 39, 40 y 41, donde el tiempo de disipación de viga con ANA y viscoelástico mejora un 8% respecto de la viga con ANA sin material viscoelástico.

Retomando los tiempos de disipación de las vibraciones, en las pruebas de la Sección 3.2.2.2, se pudo ver como para las probetas fabricadas se consiguió que las vibraciones se disiparan en un 17% del tiempo que tardan en disiparse en la viga uniforme incorporando un ANA y material viscoelástico. Este resultado es contundente, ya que representa la efectividad práctica del ANA como un absorbedor pasivo de vibraciones.

Tabla 12. Errores en las frecuencias naturales vía teoría y elemento finito con respecto de las experimentales.

Errores en las frecuencias naturales obtenidas vía teoría-FEM contra experimentales				
Viga constante				
<i>n</i>	<i>f_n</i> [Hz] Teórico	<i>f_n</i> [Hz] Elemento finito	<i>f_n</i> [Hz] Experimental	% de error Teórico vs experimental
1	362.96	388.67	364.13	0.32
2	1000.51	1068.64	1001.96	0.14
3	1961.5	2087.15	1961.13	0.02
4	3242.3	3432.66	3223.66	0.58
5	4843.44	5094.98	4875.72	0.66
Viga con ANA				
<i>n</i>	<i>f_n</i> [Hz] Teórico	<i>f_n</i> [Hz] Elemento finito	<i>f_n</i> [Hz] Experimental	% de error Elemento finito vs experimental
1	-	442.99	418.41	5.54
2	-	1211.83	1141.29	5.82
3	-	2353.46	2204.17	6.34
4	-	3843.03	3543.74	7.78
5	-	5644.67	5229.12	7.36

Finalmente, como parte de los mismos experimentos, se determinaron las frecuencias naturales de las probetas, lo cual sirvió para validar tanto los modelos teóricos como los experimentos realizados, experimentos que permitieron medir los tiempos y así representar el fenómeno del ANA de manera física, ya que las frecuencias naturales de las Tablas 2, 5, 7 y 8 coinciden de manera muy cercana, como se ilustra en la Tabla 12.

3.6 Propuesta de trabajo futuro.

Con la elaboración de este trabajo de investigación surge como siguiente paso la aplicación de los ANA, de manera específica como absorbedor pasivo de vibraciones, con la premisa de una solución económica y eficiente para la reducción de vibraciones en algún componente de máquina o estructura.

En este caso se debe realizar un estudio de vibraciones en una máquina o estructura mecánica, para determinar las vibraciones indeseables y, entonces, diseñar uno o un conjunto de ANAs. y analizar con resultados experimentalmente la respuesta frecuencial (frecuencias y amplitudes), en función de dónde y cómo se coloquen sobre la estructura mecánica. En la Fig. 47 se describe un diagrama de flujo general.

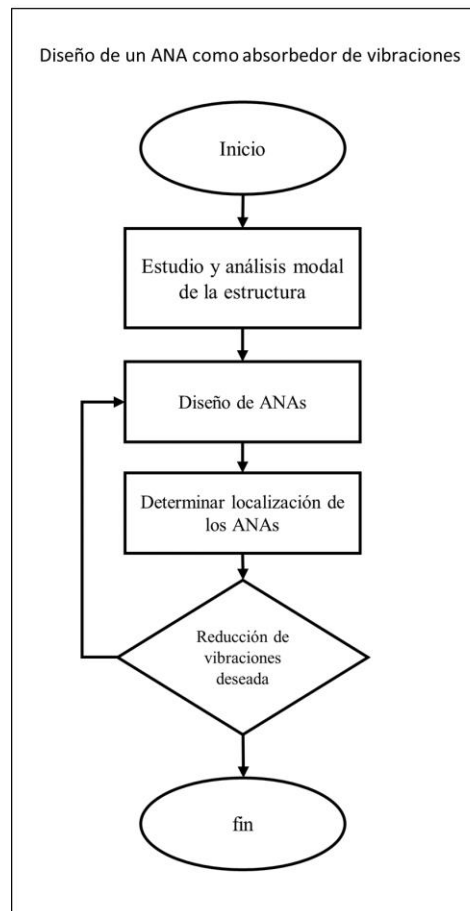


Fig. 47 Diagrama de flujo diseño de un ANA como absorbedor de vibraciones.

3.6.1 Un posible caso de aplicación.

A espera de una evaluación más detallada, como futuro proyecto de aplicación, se propone la reducción de vibraciones en el manillar de motocicletas mono cilindro, de baja cilindrada, mediante la implementación de agujeros negros acústicos. Esta idea surge de que existe un fenómeno común en las motocicletas de un solo cilindro, normalmente motocicletas económicas de baja cilindrada, y que es el de hormigueo y adormecimiento de los brazos del conductor después de trayectos relativamente largos, como consecuencia de las vibraciones generadas por los motores mono cilindro, que al ser de un solo pistón no están balanceados y vibran de una manera muy peculiar.

A este problema se podrían proponer varias opciones. Sin embargo, este fenómeno es propio de las motos de bajo costo, donde los motores no se rediseñan, ya que llevan años siendo los motores destinados a este tipo de vehículos y, entonces, la solución para ser viable requiere ser simple y de bajo costo, como puede ser incorporar uno o varios agujeros negros acústicos en algún o algunos componentes de la motocicleta para reducir las vibraciones y así evitar y/o reducir el adormecimiento en las manos y brazos del conductor.



Fig. 48. Foto de un motor mono cilíndrico de motocicleta Honda cargo [22].

3.7 Una aclaración importante.

Por último, resulta conveniente mencionar que, como consecuencia de la situación de pandemia que persiste y afectó el desarrollo del presente trabajo de tesis, los resultados experimentales reportados constituyen el trabajo realizado con materiales e instrumentación de bajo costo. Es evidente que los resultados se podrían mejorar e incluso potenciar las conclusiones, con las condiciones y herramientas más adecuadas disponibles en los laboratorios del Cinvestav.

Capítulo 4 Conclusiones

El trabajo desarrollado sobre el modelado, análisis y evaluación experimental de los Agujeros Negros Acústicos ha permitido verificar el fenómeno y determinar que constituyen una alternativa como absorbedores pasivos de vibraciones, con buena efectividad y bajo costo, en comparación con otras técnicas de absorción de vibraciones.

Específicamente, se estudiaron y ensayaron probetas con una ANA de grado 2 y longitud de 30 [mm], al cual le corresponde una frecuencia de corte de 10 [kHz], aproximadamente. Esto sirvió para los fines de demostración y evaluación experimental. Sin embargo, es importante mencionar que dependiendo de la aplicación se debe de diseñar el ANA con características particulares, para cumplir con los requerimientos de operación deseados como tamaño, frecuencia de corte y calidad de la manufactura. De hecho, existen diversas alternativas de ANAs con otras geometrías como discos, platos o la espiral de Arquímedes. También es posible combinarlos con materiales inteligentes y, más recientemente, con los denominados metamateriales.

Adicionalmente, como parte del trabajo, se verificó de manera experimental como se puede mejorar el desempeño del ANA, al incorporar un material viscoelástico en la sección donde se encuentra el ANA. Esta práctica hace que los efectos de manufactura (calidad y truncamiento) se aminoren y, de esta manera, se consigue alcanzar porcentajes de efectividad cercanos a los de un ANA ideal.

Finalmente, como muchos autores lo han establecido, se coincide con la idea general del potencial de estos dispositivos para absorber vibraciones, con la ventaja de que su integración es en la misma geometría de los elementos mecánicos, donde se quiere conseguir el efecto. Para complementar, el nombre acústico se origina del ancho de banda sobre el que se han estudiado estos dispositivos. No obstante, físicamente este fenómeno se puede obtener en vibraciones mecánicas en general y no solo en el rango acústico. De tal manera que se ve factible su incorporación no solo para disipar ruidos sino también para la absorción de vibraciones mecánicas propias de numerosas estructuras flexibles, sometidas a fuentes externas de vibraciones.

Bibliografía

- [1] S.S. Rao, *Vibraciones Mecánicas*, 5th ed. México: Pearson, 2012.
- [2] Robert H. Randall, *An Introduction to Acoustics*, 1st ed. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2005.
- [3] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Fundamentos de Física*, 8th ed., Vol. 1, México: Grupo Editorial Patria, 2009.
- [4] J. Enríquez-Zarate, G. Silva-Navarro, “Control activo de vibraciones en estructuras tipo edificio sometidas a sismos utilizando múltiple retroalimentación positiva de la posición y modos deslizantes”, *DYNA*, Vol. 81, No. 188., pp. 83-91, 2014.
- [5] A. Pelat, F. Gautier, S. C. Conlon, F. Semperlotti, “The acoustic black hole: A review of theory and applications”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 476, pp. 605-619, 2004.
- [6] V.V. Krylov, F.J.B.S. Tilman, “Acoustic ‘black holes’ for flexural waves as effective vibration dampers”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 274, pp. 605-619, 2004.
- [7] V.V. Krylov, “Acoustic Black Holes for Flexural Waves: A Smart Approach to Vibration Damping”, *Procedia Engineering*, Vol. 199, pp. 56-61, 2017.
- [8] V.V. Krylov, R.E.T.B. Winward, “Experimental investigation of the acoustic black hole effect for flexural waves in tapered plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 300, pp. 43-49, 2007.
- [9] E.P. Bowyer, V.V. Krylov, “Damping of flexural vibrations in turbofan blades using the acoustic black hole effect”, *Applied Acoustics*, Vol. 76, pp. 359-365, 2014.
- [10] J.Y. Lee, W. Jeon, “Exact solution of Euler-Bernoulli equation for acoustic black holes via generalized hypergeometric differential equation”, *Journal of sound and vibration*, Vol. 452, pp. 191-204, 2019.
- [11] S. Park, M. Kim, W. Jeon, “Experimental validation of vibration damping using an Archimedean spiral acoustic black hole”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 459, No. 114858, 2019.
- [12] L. Zhao, S.C. Conlon, F. Semperlotti, “An experimental study of vibration base energy harvesting in dynamically tailored structures with embedded acoustic black holes”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 24, No. 6, 2015.
- [13] L. Tang, L Cheng, Hongli Ji, J. Qiu, “Characterization of acoustic black hole effect using a one-dimensional fully-coupled and wavelet-decomposed semi-analytical model”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 374, pp. 172-184, 2016.
- [14] L. Tang, L Cheng, “Enhanced Acoustic Black Hole effect in beams with a modified thickness profile and extended platform”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 391, pp. 116-126, 2017.
- [15] L. Tang, L Cheng, “broadband locally resonant band gaps in periodic beam structures with embedded acoustic black holes”, *Journal of Applied Physics*, 2017.
- [16] W.T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*, 5th ed. Pearson, 1997.

- [17] C.W. de Silva, *Vibration, Fundamentals and Practice*, NY: CRC Press, 1999.
- [18] J.D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, 1st ed. Netherlands: Elsevier Science Publishers B.V., 1975.
- [19] P.A. Feurtado, S.C. Conlon, “A normalized wave number variation parameter for acoustic black hole design”, *Journal of Acoustics Society of America*, Vol. 136, pp. 148-152, 2004.
- [20] O. Aklouche, A. Pelat, R. Pico, J. Groby, F. Gautier, “Scattering of flexural waves by a pit of quadratic profile inserted in an infinite thin plate”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 375, pp. 38-52, 2016.
- [21] Micrófono condensador para ordenador SF-666 con trípode para PC (2021, junio), Amazon México [en línea]. Disponible en: <https://www.amazon.com.mx/Mic%C3%B3fono-condensador-profesional-computadora-mic%C3%B3fono/dp/B089LXXZR7>
- [22] CL150 CARGO (2021, junio), Honda México [en línea]. Disponible: <https://www.honda.mx/motos/gl-150-cargo>