



CENTRO
DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

Departamento física

**“Electrón de Dirac-Weyl en grafeno y mecánica
cuántica supersimétrica”**

T E S I S

Que presenta

Miguel Fernando Castillo Celeita

Para obtener el grado de

Doctor en ciencias

con especialidad en física

Directores de la Tesis:

Dr. David José Fernández Cabrera

Ciudad de México

Diciembre, 2021

Agradecimientos

Para la elaboración del proyecto correspondiente a este trabajo, recibí el apoyo de muchas personas, quienes contribuyeron en menor o mayor medida a lo que se presenta en esta tesis y sin quienes no habría sido posible lograr este objetivo. Porque todo va acompañado de un gran esfuerzo, que se aligera en el camino por la contribución de mucha gente, quiero mencionar y expresar mi más sincero agradecimiento a las siguientes personas:

Al Dr. David José Fernández, porque es y ha sido un gran guía en esta experiencia profesional, por toda la sabiduría que me ha compartido y por la confianza que ha depositado en mi. Quiero agradecerle especialmente por todo el tiempo invertido en el desarrollo de este proyecto, ya que con su gran enseñanza me ha dirigido por el camino de la investigación y por que con todo ello me ha llenado de gran admiración como persona y como tutor.

Al Dr. Alonso Contreras, por su dedicación y tiempo a la hora de desarrollar la última etapa de mi doctorado.

Al Dr. Vít Jakubský y al “Department of Physics of the Nuclear Physics Institute of CAS” por su hospitalidad y ayuda en mi estancia de investigación. A mis Padres y Hermanos por su apoyo moral y económico en toda mi carrera.

A Isela Padilla por su ayuda y apoyo emocional en cada año de doctorado.

Gracias al CONACYT por su apoyo económico a través del proyecto FORDECYT-PRONACES/61533/2020. También agradezco al CONACYT por la beca 301117, brindada en los últimos cuatro años.

Tabla de contenido

Agradecimientos	v
Resumen	1
Introducción	5
1. Ecuación de Dirac-Weyl para el grafeno	7
1.1. Bandas de energía	7
1.1.1. Aproximación de amarre fuerte a primeros vecinos	8
2. Mecánica cuántica supersimétrica	15
2.0.2. Método supersimétrico iterativo	17
2.0.3. Relaciones de orden k -ésimo	18
3. Ecuación de Dirac-Weyl y SUSY-QM	19
3.0.4. Potenciales invariantes de forma	21
3.1. Relación de entrelazamiento generalizada	22
3.1.1. Entrelazamiento de primer orden	22
3.2. Iteración del método	24
3.2.1. Entrelazamiento de orden k -ésimo	27
3.3. Ejemplos	29
3.3.1. Campo magnético constante	29
3.3.1.1. Campo magnético de segundo-orden	34
3.3.2. Campo que decae exponencialmente	35
3.3.2.1. Campo magnético de segundo orden	38
4. Mecánica cuántica supersimétrica compleja en el grafeno	41
4.1. SUSY QM compleja en el cuadro de Schrödinger	41
4.1.1. Iteración del método en el caso complejo	43

4.1.2.	SUSY-QM compleja aplicada a la ecuación de Dirac . .	44
4.1.3.	Ejemplo: grafeno en un campo magnético hiperbólico .	47
5.	Energías de factorización mayores que la energía del estado base	53
5.1.	Ejemplo: Oscilador armónico	56
5.2.	Algoritmo confluyente	58
5.2.1.	Ejemplo	62
6.	Conclusiones	67
6.1.	Perspectivas	69
6.1.1.	Trabajos publicados en el doctorado relacionados con la tesis	69
	Bibliografía	75

Índice de figuras

1.1. Red hexagonal del grafeno. Se muestran los vectores \mathbf{a}_i que definen a las subredes y los vectores δ_i que conectan a los vecinos más cercanos	8
1.2. Red recíproca del grafeno, en donde se observan los puntos no equivalentes K_+ y K_-	9
1.3. Energía como función de \mathbf{k} en el espacio de momentos	13
3.1. Esquema grafico del sistema bajo estudio	20
3.2. Espectro de energías del sistema inicial (izquierda) y del nuevo sistema (derecha).	24
3.3. Espectro de energías del sistema original (izquierda), del sistema resultante del primer paso SUSY (centro) y del segundo paso SUSY (derecha)	25
3.4. Primer paso SUSY para el campo magnético constante: (a) potencial generado $V_1(x, \epsilon_1)$ (línea continua) e inicial \tilde{V}_0 (línea punteada), así como los niveles de energía (líneas horizontales) ubicados en $\mathcal{E}_0^{(1)} = 0$, $\mathcal{E}_1^{(1)} = \frac{1}{5}\omega$, $\mathcal{E}_2^{(1)} = \frac{6}{5}\omega$, $\mathcal{E}_3^{(1)} = \frac{11}{5}\omega$; (b) campos magnéticos generado $B_1(x, \epsilon_1)$ e inicial B_0 (línea horizontal) tomando $\omega = 1$	32
3.5. (a) densidad de probabilidad para el estado base (GS, azul) y los estados excitados con $n = 0, 1, 2$ (rojo, verde, purpura); (b) corriente de probabilidad para los estados excitados con $n = 0, 1, 2$ usando los mismos colores que en (a). Se ha tomado $\omega = c = \hbar = e = 1$	33

- 3.6. Segundo paso SUSY para el campo magnético constante con $\nu_1 = 0, \nu_2 = \frac{3}{2}, \epsilon_1 = -\frac{1}{5}\omega, \epsilon_2 = -3\omega, \omega = 1$: (a) potenciales generados $V_2(x, \epsilon_2)$ (línea continua) y $\tilde{V}_1(x, \epsilon_1)$ (línea punteada), así como los niveles de energía $\mathcal{E}_0^{(2)} = 0, \mathcal{E}_1^{(2)} = 3\omega, \mathcal{E}_2^{(2)} = \frac{16}{5}\omega, \mathcal{E}_3^{(2)} = \frac{21}{5}\omega$; (b) Campos magnéticos de segundo orden $B_2(x, \epsilon_2)$ (azul) e inicial (línea horizontal). 35
- 3.7. (a) densidad de probabilidad para el estado base (GS, azul) y los estados excitados con $n = 0, 1, 2$ (rojo, verde, púrpura); (b) corriente de probabilidad para los estados excitados con $n = 0, 1, 2$ usando los mismos colores que en (a). 36
- 3.8. Primer paso SUSY para el potencial de Morse con $\nu_1 = -\frac{3}{2}, k = 6\alpha, \epsilon_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_1^- = -\frac{11\alpha^2}{2}, \alpha = 1$. (a) Potenciales nuevo $V_1(x, \epsilon_1)$ (línea continua) e inicial $\tilde{V}_0(x)$ (línea punteada), así como los niveles de energía $\mathcal{E}_0^{(1)} = 0, \mathcal{E}_1^{(1)} = \frac{11}{2}\alpha^2, \mathcal{E}_2^{(1)} = \frac{33}{2}\alpha^2, \mathcal{E}_3^{(1)} = \frac{51}{2}\alpha^2$; (b) campos magnéticos de primer orden $B_1(x, \epsilon_1)$ (línea continua) y el inicial que decae exponencialmente (línea punteada). 37
- 3.9. (a) Densidad de probabilidad para el estado base (GS, azul) y los estados excitados con $n = 1, 2, 3$ (rojo, verde, púrpura); (b) corriente de probabilidad para los estados excitados con $n = 1, 2, 3$ usando los mismos colores que en (a). Se ha tomado $k = 6\alpha, \epsilon_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_1^- = -\frac{11\alpha^2}{2}, \alpha = 1$ 39
- 3.10. Segundo paso SUSY para el potencial de Morse con $k = 6\alpha, \nu_1 = -\frac{3}{2}, \nu_2 = -\frac{1}{2}, \epsilon_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_1^- = -\frac{11\alpha^2}{2}, \epsilon_2 = -\mathcal{E}_1^- = -11\alpha^2$: (a) potenciales generados $V_2(x, \epsilon_2)$ (línea continua) y $\tilde{V}_1(x, \epsilon_1)$ (línea punteada), así como los niveles de energía $\mathcal{E}_0^{(2)} = 0, \mathcal{E}_1^{(2)} = 11\alpha^2, \mathcal{E}_2^{(2)} = \frac{33\alpha^2}{2}, \mathcal{E}_3^{(2)} = \frac{55\alpha^2}{2}$; (b) campos magnéticos generado $B_2(x, \epsilon_2)$ y el inicial que decae exponencialmente (línea punteada); (c) densidad de probabilidad para el estado base (GS, azul) y los estados excitados con $n = 1, 2, 3$ (rojo, verde, púrpura); (d) corriente de probabilidad usando los mismos colores que en (c). 40

4.1. Primer paso SUSY: (a) gráfica del potencial $V_1(x, \epsilon_1)$, parte real en azul y parte imaginaria en verde; la línea segmentada corresponde a V_0^- . (b) Gráfica del potencial vectorial A_1 , parte real en azul y parte imaginaria en verde; se muestra también el campo magnético B_1 , parte real en rojo y parte imaginaria en gris. Se usó la constante de factorización $\epsilon_1 = k^2\nu^2 - k^2(\nu+2i)^2$, con $k = 1$ y $\nu = 6$	49
4.2. Segundo paso SUSY: (a) gráfica del potencial $V_2(x, \epsilon_2)$, parte real en azul y parte imaginaria en verde, la cual se anula en este paso. En gris se grafican algunas densidades de probabilidad, las líneas punteadas corresponden al potencial V_1^- . (b) Gráfica del campo magnético B_2 , parte imaginaria en gris y parte real en rojo; se muestra el correspondiente potencial vectorial, parte imaginaria en verde y parte real en azul. Se usó la constante de factorización $\epsilon_2 = \epsilon_1^* = k^2\nu^2 - k^2(\nu - 2i)^2$ con $k = 1$ y $\nu = 6$	50
4.3. Tercer paso SUSY (a) Gráfica del potencial V_3^- , parte real en azul e imaginaria en verde, junto con V_2^- en líneas segmentadas. La densidad de probabilidad se muestra en gris. (b) Campo magnético de tercer orden (línea roja) y potencial vectorial de tercer orden (línea azul), los cuales son puramente reales. La constante de factorización se escoge como $\epsilon_3 = k^2\nu^2 - k^2(\nu + 2/3)^2$ con $k = 1$, $\nu = 6$ y $\epsilon_3 \in \mathbb{R}$	51
5.1. Primer paso SUSY, en donde se usa una energía de factorización por encima del estado base, $\mathcal{E}_1 < \epsilon_1 = 1.7 < \mathcal{E}_2$. A la izquierda se observa el potencial generado y a la derecha el campo magnético asociado.	57
5.2. Gráfica de $u_1^{(0)}$ (a) y $u_2^{(0)}$ (b), en donde se observa el número de nodos en cada caso. Se eligió $\epsilon_1 = 1.7$, $\nu_1 = 0.1$ y $\epsilon_2 = 1.5$, $\nu_2 = 1.1$, lo cual garantiza la regularidad del potencial de segundo orden.	58
5.3. Segundo paso SUSY: potencial regular de segundo orden $V_2^-(x)$ en azul e inicial V_0^- en rojo (izquierda). Campo magnético divergente (derecha). Se escogió $\epsilon_1 = 1.7$, $\epsilon_2 = 1.5$, $\nu_1 = 0.1$ y $\nu_2 = 1.1$	59

5.4.	Densidad de probabilidad para los eigenestados de H_2^- con $n = 0$ (línea verde continua), $n = 1$ (línea roja segmentada) y $n = 2$ (línea azul punteada). Se usó $\epsilon_1 = 1.7$, $\epsilon_2 = 1.5$, $\nu_1 = 0.1$ y $\nu_2 = 1.1$	60
5.5.	Tercer paso SUSY: a la izquierda se observan los potenciales V_3^\pm y a la derecha el campo magnético asociado B_3 , los cuales son ambos regulares. Se usaron la energía de factorización $\epsilon_3 = -0.5$ y el parámetro $\nu_3 = 0.5$	61
5.6.	Densidad de probabilidad para el estado base de H_3 (línea verde continua) y los estados excitados con $n = 1$ (línea roja segmentada) y $n = 2$ (línea azul punteada).	62
5.7.	Solución semilla $u_1^{(0)}$ usada en el algoritmo confluyente.	63
5.8.	Segundo paso SUSY: potenciales V_2^- y V_0^- (arriba, izquierda) y el campo magnético asociado B_2 (arriba, derecha), el cual diverge. Densidad de probabilidad (abajo) para los eigenestados de H_2^- con $n = 0$ (línea verde continua), $n = 1$ (línea roja segmentada) y $n = 2$ (línea punteada). Se usó $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4\omega$ con $\omega = 1$, $k = 1$	65
5.9.	Tercer paso SUSY: potenciales V_3^- y $V_3^+ = V_2^- - \epsilon_3$ (izquierda, arriba), campo magnético asociado B_3 (arriba, derecha) y densidades de probabilidad $\Psi^\dagger\Psi$ (abajo). Al nuevo estado base con energía cero le corresponde la densidad de probabilidad en verde, la línea roja segmentada al estado excitado con $n = 0$ y la punteada a $n = 1$. Se usó $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$, $\epsilon_3 = -0.5$, $\omega = 1$, $k = 1$ y $\nu = 0$	66

Resumen

En el presente trabajo se estudia el comportamiento de un electrón de Dirac-Weyl en el material bidimensional llamado grafeno, el cual a su vez está inmerso en un campo magnético ortogonal a la superficie del material. El problema de eigenvalores del sistema de Dirac-Weyl bidimensional inicial se reduce a dos sistemas de Schrödinger unidimensionales equivalentes, a los cuales se les aplica la mecánica cuántica supersimétrica con la ayuda de un operador de entrelazamiento diferencial de primer orden que permite la introducción de un parámetro conocido como energía de factorización. Posteriormente se generaliza esta técnica iterando el método introducido previamente.

Se muestra que el aumento en los órdenes de iteración modifica el campo magnético al deformarlo, de tal forma que el nuevo sistema consiste de uno modificado básicamente en el centro, pero que converge asintóticamente al sistema inicial.

A continuación se discute la forma de trasladar el método al plano complejo, por medio de una energía de factorización a su vez compleja. En este caso se muestra que es necesario iterar tres veces la técnica supersimétrica para poder retornar a un sistema que no tenga parte imaginaria alguna.

Por último se estudia el método usando energías de factorización que están por encima del estado base del sistema inicial, lo cual produce singularidades en el potencial y el campo magnético generado por la mecánica cuántica supersimétrica. Nuevamente, la iteración del método hasta la tercera ocasión nos conduce finalmente a sistemas sin singularidades.

Abstract

In the present work, the behavior of a Dirac electron in the two-dimensional material called graphene, which in turn is immersed in a field orthogonal to the surface of the material, is studied. The eigenvalue problem of the original two-dimensional Dirac-Weyl system reduces to two equivalent one-dimensional Schrödinger systems, to which supersymmetric quantum mechanics is applied with that of a differential entanglement helper operator of first order and with the introduction of a parameter known as factorization energy. This technique is then generalized by iterating the previously introduced method.

It is shown that the increase in the iteration orders modifies the magnetic field by deforming it, in such a way that the new system consists of a modified system basically in the center, but which converge asymptotically to the initial system.

The way to change the method to the complex plane, by means of a complex factorization energy, is discussed below. In this case it is shown that it is necessary to iterate the supersymmetric technique three times in order to return to a system that has no imaginary part.

Finally, the method is studied using factorization energies that are above the ground state of the initial system, which produces singularities in the potential and magnetic field generated by supersymmetric quantum mechanics. In this case the iteration of the method until the third time finally leads us to systems without singularities.

Introducción

El grafeno es un material en dos dimensiones, el cual se compone de una capa de átomos de carbono que se distribuyen en forma hexagonal formando una estructura similar a la de un panal de abejas. Es importante resaltar algunas de las propiedades mecánicas y eléctricas de este material, como son su resistencia mecánica, la cual es mayor que la del acero, su flexibilidad, su alta conductividad eléctrica y su transparencia [1].

Este material se estudió de forma teórica en los años cincuenta del siglo pasado, cuando Wallace analizó las bandas de energía del mismo [2]. Esta descripción pasó desapercibida por un tiempo, ya que se pensaba que no era posible aislar un material bidimensional a temperatura ambiente, hasta que en 2004 Geim y Novoselov lograron producir una capa de grafeno en el laboratorio [3, 4, 5].

Desde entonces la comunidad científica ha modificado y mejorado con éxito las formas de producción del grafeno y del óxido de grafeno [6, 7]. Por otro lado, el grafeno ha revolucionado diferentes áreas de la física, como el estado sólido, la física de partículas y la mecánica cuántica, ya que a bajas energías este material se describe teóricamente como un electrón de Dirac sin masa con una velocidad trecientas veces menor que la velocidad de la luz ($\sim 10^{-2}c$) [8, 9]. Lo anterior permite poner a prueba distintos fenómenos, como el tunelamiento Klein y el efecto Hall cuántico [10, 11, 12, 13]; este último fenómeno se produce por la introducción de un campo magnético externo.

Un campo magnético es ideal para confinar electrones en una región del espacio [14, 15, 16, 17]. En el caso del grafeno podemos modelar el comportamiento de un electrón de Dirac en este material por medio de la ecuación de Dirac-Weyl (DWE) con acoplamiento mínimo; lo mismo pasa con otros alótropos del carbono, como los nanotubos de carbono y los fullerenos [18, 19, 20, 21]. Notemos que este problema ha sido resuelto de forma exac-

ta para el grafeno en campos magnéticos inhomogéneos usando la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY QM) de primer orden [22, 23, 24, 25, 26].

Una generalización de este método fue hecha por Midya y Fernández [27], quienes deformaron supersimétricamente los potenciales y campos magnéticos asociados a un sistema dado introduciendo un parámetro λ . En ese trabajo es posible volver a los potenciales invariantes de forma iniciales en el límite $\lambda \rightarrow \infty$. Otra característica importante de ese trabajo es la introducción de otro parámetro δ , el cual mueve las energías del sistema que se está generando en la misma cantidad δ .

En esta tesis queremos dar un tratamiento mas extenso y general al trabajo hecho en [27]: usando las soluciones de la ecuación de Schrödinger queremos generar distintas familias de potenciales, además de iterar el método con el fin de generar nuevos pasos SUSY y con esto diferentes potenciales y campos magnéticos. En esta tesis generalizaremos el método a un orden k arbitrario. Además, incluiremos el caso complejo, generando nuevos potenciales por medio de una transformación SUSY compleja y analizaremos también los potenciales generados con energías de factorización que están por encima del estado base. Como un caso especial surge el algoritmo confluyente, donde se itera el método SUSY dos veces usando una misma energía de factorización ubicada por encima del estado base del sistema inicial.

Esta tesis estará organizada de la siguiente manera: en el primer capítulo se dará un esbozo general de cómo se llega a la ecuación de Dirac-Weyl en la descripción teórica del grafeno. En el capítulo dos explicaremos el método SUSY en el marco de Schrödinger. En el capítulo 3 aplicaremos el método SUSY al problema del grafeno, generalizándolo para un orden k arbitrario. En el capítulo cuatro se extenderá lo anterior al caso complejo y en el capítulo cinco se desarrollará el método para energías de factorización que están por encima del estado base, así como el algoritmo confluyente. El último capítulo contendrá nuestras conclusiones.

Capítulo 1

Ecuación de Dirac-Weyl para el grafeno

En este capítulo se describirá el grafeno desde el punto de vista de las interacciones a primeros vecinos, después nos enfocaremos en la derivación del Hamiltoniano de Dirac-Weyl del grafeno.

1.1. Bandas de energía

El grafeno consiste de una red bidimensional de átomos de carbono, los cuales están organizados de manera hexagonal. Una red hexagonal no se puede ver como una red de Bravais, debido a que los átomos A y B no son equivalentes entre sí, ver Figura 1.1. Sin embargo, el grafeno se puede analizar como dos subredes triangulares equivalentes, una formada por los átomos A y la otra por los átomos B . Esta descripción se basa en los dos vectores

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{3}{2}a \right), \quad \mathbf{a}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{3}{2}a \right), \quad (1.1)$$

donde $a = 1.42\text{\AA}$ corresponde a la distancia interatómica entre dos átomos de carbono. De esta manera es posible definir la red del grafeno por el conjunto de vectores $\mathbf{R}_n = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2$, donde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Otra forma de describir la red de grafeno es mediante una red triangular que conecta a un átomo (por ejemplo del tipo A) con sus tres primeros vecinos (del tipo B) por los vectores δ_j .

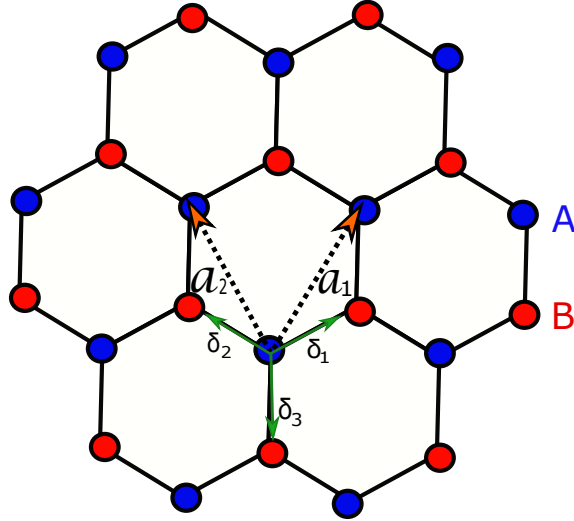


Figura 1.1: Red hexagonal del grafeno. Se muestran los vectores \mathbf{a}_i que definen a las subredes y los vectores δ_i que conectan a los vecinos más cercanos

Para completar ahora la descripción de la red del grafeno, se debe construir otra red en el espacio de momentos, llamada red recíproca, la cual tiene como base los siguientes vectores

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{3a} (\sqrt{3}, 1), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{3a} (-\sqrt{3}, 1). \quad (1.2)$$

Estos vectores cumplen la condición $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Entonces, para una red real hexagonal su correspondiente red recíproca también es hexagonal pero rotada 90° , como se muestra en la Figura 1.1.

Esta configuración en el espacio de momentos va a ser importante para la descripción analítica de la capa de grafeno.

1.1.1. Aproximación de amarre fuerte a primeros vecinos

La ecuación de Schrödinger que describe el comportamiento de los átomos en la red de grafeno se expresa como

$$H\Psi_{\mathbf{k}} = E(\mathbf{k})\Psi_{\mathbf{k}}. \quad (1.3)$$

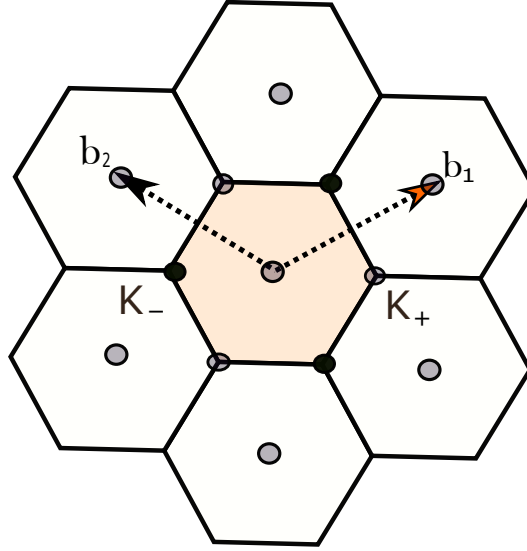


Figura 1.2: Red recíproca del grafeno, en donde se observan los puntos no equivalentes K_+ y K_- .

La simetría de translación impone que los estados electrónicos $\Psi_{\mathbf{k}}$ tengan la forma

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

que son conocidos como estados de Bloch, en donde $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ es una función periódica con el mismo período de la red. Los vectores independientes \mathbf{k} que determinan a los estados de Bloch se encuentran en la primera zona de Brillouin. Para el caso del grafeno, que es una red hexagonal, se tiene que la primera zona de Brillouin también es hexagonal. Los vértices del hexágono no son todos independientes, ya que algunos están conectados por un vector de la red recíproca, pero podemos determinar dos vértices que sí son independientes, por ejemplo K_+ y K_- , como se observa en la Figura 1.2. Las funciones de Bloch para cada \mathbf{k} en la primera zona de Brillouin, bajo la aproximación de amarre fuerte a primeros vecinos, están dadas por

$$|\Psi_{\mathbf{k}}\rangle = c_{\mathbf{k}}^{(1)} |\Psi_{\mathbf{k}}^{(1)}\rangle + c_{\mathbf{k}}^{(2)} |\Psi_{\mathbf{k}}^{(2)}\rangle, \quad (1.5)$$

donde

$$|\Psi_{\mathbf{k}}^{(j)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} |\Phi_n^{(j)}\rangle, \quad j = 1, 2. \quad (1.6)$$

Notar que $|\Phi_n^{(j)}\rangle$ corresponde al orbital $2pz$ del átomo tipo j de la celda unitaria n . Proyectando ahora el Hamiltoniano de Schrödinger sobre cada uno de los estados $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(j)}\rangle$ tenemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}}^{(1)} \\ c_{\mathbf{k}}^{(2)} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}}^{(1)} \\ c_{\mathbf{k}}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

donde los elementos de matriz H_{jl} están dados por

$$H_{jl} = \langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(j)} | H | \Psi_{\mathbf{k}}^{(l)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_n \sum_m e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)} \langle \Phi_m^{(j)} | H | \Phi_n^{(l)} \rangle. \quad (1.8)$$

Como podemos ver, los elementos de matriz involucran a integrales que se conocen como “integrales de salto”,

$$\langle \Phi_m^{(j)} | H | \Phi_n^{(l)} \rangle \equiv \beta_{mn}^{jl}, \quad (1.9)$$

que se interpretan como la energía necesaria para destruir un electrón en el j -ésimo orbital de la m -ésima celda y crearlo en el l -ésimo orbital de la n -ésima celda. En el caso de que $j = l$ y $m = n$ tal cantidad se conoce como integral de energía de sitio

$$\langle \Phi_n^{(j)} | H | \Phi_n^{(j)} \rangle \equiv \beta_{nn}^{jj} \equiv \alpha. \quad (1.10)$$

Estas cantidades corresponden a los elementos de la diagonal en la base de orbitales atómicos; ya que el grafeno consiste de átomos de carbono únicamente, entonces todas las integrales de sitio tienen el mismo valor.

La aproximación de amarre fuerte consiste en considerar únicamente las integrales de salto a primeros vecinos, así que los elementos de matriz en la base de orbitales estarán dados por

$$H_{jj} = \frac{1}{N} \sum_n \left(\langle \Phi_n^{(j)} | H | \Phi_n^{(j)} \rangle + \sum_{n \neq m} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)} \langle \Phi_m^{(j)} | H | \Phi_n^{(j)} \rangle \right). \quad (1.11)$$

Teniendo en cuenta que el segundo término corresponde a integrales entre átomos a segundos vecinos, entonces el elemento de matriz H_{jj} se reduce a:

$$H_{jj} = \frac{1}{N} \sum_n \langle \Phi_n^{(j)} | H | \Phi_n^{(j)} \rangle = \alpha. \quad (1.12)$$

Para los elementos fuera de la diagonal se tiene que

$$H_{12} = \frac{1}{N} \sum_n \left(\langle \Phi_n^{(1)} | H | \Phi_n^{(2)} \rangle + \sum_{n \neq m} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)} \langle \Phi_m^{(1)} | H | \Phi_n^{(2)} \rangle \right). \quad (1.13)$$

Notar que cada átomo de carbono en el grafeno tiene tres primeros vecinos, uno en la misma celda y dos en celdas contiguas. Teniendo en cuenta que todos ellos se encuentran a la misma distancia del átomo considerado, entonces la integral de salto β es la misma para los tres vecinos, por lo que la suma en el segundo término se simplifica a dos celdas

$$H_{12} = \frac{1}{N} \sum_n \left(\beta + \sum_{m=1}^2 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)} \beta \right). \quad (1.14)$$

Como se puede observar en la Figura 1.1, los vectores de posición de las celdas contiguas a la n -ésima celda son $\mathbf{R}_m = \mathbf{R}_n - \mathbf{a}_{1,2}$, así que el término fuera de la diagonal se puede escribir como sigue

$$H_{12} = \beta(1 + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2}) = \beta F(\mathbf{k}). \quad (1.15)$$

Teniendo en cuenta que el Hamiltoniano es hermítico se tiene que $H_{21} = H_{12}^*$, lo cual implica que los eigenvalores del Hamiltoniano matricial están dados por

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(H_{11} + H_{22}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}H_{21}}, \quad (1.16)$$

es decir, hay dos eigenvalores para cada \mathbf{k} . Es posible escoger $\alpha = 0$, con lo cual se está eligiendo el origen de la energía, por lo que

$$E_{\pm}(\alpha = 0) = \pm |H_{12}|, \quad (1.17)$$

donde se ha usado el carácter hermitiano del Hamiltoniano. De esta manera el Hamiltoniano matricial queda como:

$$\begin{pmatrix} 0 & H_{12} \\ H_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}+}^{(1)} \\ c_{\mathbf{k}+}^{(2)} \end{pmatrix} = E_{\pm} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}+}^{(1)} \\ c_{\mathbf{k}+}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Ya que los elementos de matriz del Hamiltoniano pertenecen a los números complejos, se tiene que $|H_{12}| = e^{i\theta} |H_{12}|$; de esta manera los eigenestados de

la matriz que permiten construir los eigenestados del Hamiltoniano toman la forma

$$\begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}+}^{(1)} \\ c_{\mathbf{k}+}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}-}^{(1)} \\ c_{\mathbf{k}-}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

con lo cual los estados de Bloch quedan expresados como sigue

$$|\Psi_{\mathbf{k}+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\Psi_{\mathbf{k}}^{(1)}\rangle + e^{i\theta} |\Psi_{\mathbf{k}}^{(2)}\rangle \right), \quad |\Psi_{\mathbf{k}-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\Psi_{\mathbf{k}}^{(1)}\rangle - e^{i\theta} |\Psi_{\mathbf{k}}^{(2)}\rangle \right), \quad (1.20)$$

los cuales son las soluciones en la primera zona de Brillouin. La forma explícita de los correspondientes eigenvalores es

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = \pm\beta \sqrt{1 + 4 \cos\left(\frac{3a}{2}k_x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}k_y\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}k_y\right)}, \quad (1.21)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ es el vector de onda en la primera zona de Brillouin. Una grafica de esta expresión como función de \mathbf{k} se muestra en la Figura 1.3.

Ahora podemos hacer el análisis en la vecindad de los puntos K_+ y K_- mediante un desarrollo en serie de Taylor alrededor de alguno de esos puntos, digamos K_+ , $\mathbf{k} = K_+ + q$,

$$H_{12}(K_+ + q) = \beta(F(k) + q \cdot \nabla F(k)) = \frac{3a}{2}\beta(iq_x + q_y). \quad (1.22)$$

Realizando ahora el mismo procedimiento para el otro punto no-equivalente K_- se llega a

$$H_{12}(K_- + q) = \beta(F(k') + q \cdot \nabla F(k')) = \frac{3a}{2}\beta(iq_x - q_y). \quad (1.23)$$

Es conveniente hacer el cambio de coordenadas $y \rightarrow x$, $x \rightarrow y$, quedando expresada la matriz del Hamiltoniano en estos puntos como sigue

$$H(K_+ + q) = \frac{3a\beta}{2} \begin{pmatrix} 0 & q_x - iq_y \\ q_x + iq_y & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$H(K_- + q) = \frac{3a\beta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -q_x - iq_y \\ -q_x + iq_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

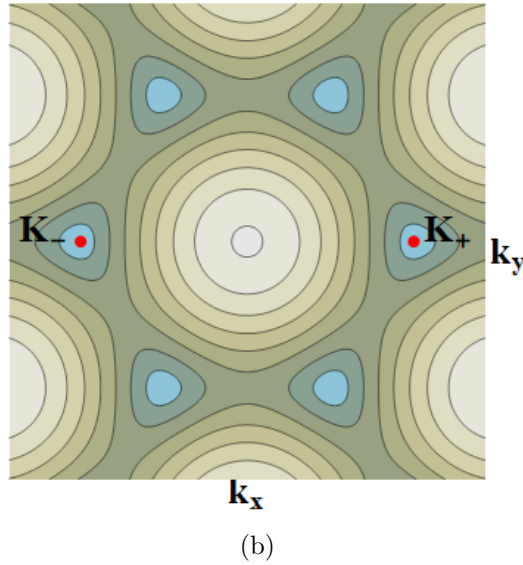
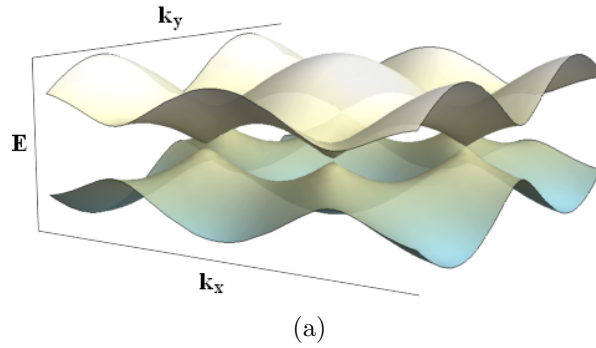


Figura 1.3: Energía como función de \mathbf{k} en el espacio de momentos

En la vecindad de los puntos K_+ y K_- sus eigenvalores están dados por

$$E_{\pm}(q) = \pm \frac{3a\beta}{2} \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = \pm \frac{3a\beta}{2\hbar} \sqrt{(\hbar q_x)^2 + (\hbar q_y)^2}, \quad (1.26)$$

que se pueden reescribir en la forma

$$E_{\pm}(q) = \pm v_F \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \pm v_F |\mathbf{p}|, \quad (1.27)$$

donde $v_F \equiv 3a\beta/2\hbar$ es una constante que tiene unidades de velocidad y es llamada “velocidad de Fermi”.

Capítulo 2

Mecánica cuántica supersimétrica

En este capítulo daremos un esbozo general del método de la mecánica cuántica supersimétrica basandonos en el trabajo de “Férrnandez y Fernández-García” [28] (ver también [29, 30, 31, 32]), el cual implementaremos más adelante para un sistema de Dirac. El punto de partida en este caso es un par de Hamiltonianos de Schrödinger

$$H_i = -\frac{d^2}{dx^2} + V_i(x), \quad i = 0, 1. \quad (2.1)$$

Suponemos ahora la existencia de un operador de entrelazamiento diferencial de primer orden L_1^\dagger , que permite establecer una relación entre ambos Hamiltonianos, como se muestra enseguida

$$H_1 L_1^\dagger = L_1^\dagger H_0. \quad (2.2)$$

Se pide que el operador de entrelazamiento tenga la siguiente forma

$$L_1^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_1(x), \quad (2.3)$$

donde el conocido como superpotencial $W(x)$ es una función por determinar. Ahora, con el operador L_1^\dagger (2.3) y la relación de entrelazamiento (2.2) podemos establecer las siguientes ecuaciones

$$V_1 = V_0 - 2W_1', \quad W_1 V_1 - W_1'' = W_1 V_0 - V_0', \quad (2.4)$$

las cuales relacionan entre sí a los potenciales y también nos permiten encontrar una ecuación para W_1 . De hecho, substituyendo la primera ecuación en la segunda e integrando obtenemos

$$W_1' + W_1^2 = V_0 - \epsilon, \quad (2.5)$$

que es conocida como ecuación de Riccati [33]. Con el fin de llevar esta ecuación a una forma más conocida, se realizará el siguiente cambio de variable

$$W_1(x, \epsilon) = \frac{d}{dx} \ln u(x, \epsilon), \quad (2.6)$$

lo cual conduce a la ecuación de Schrödinger para la función u :

$$-u''(x, \epsilon) + V_0(x)u(x, \epsilon) = \epsilon u(x, \epsilon), \quad (2.7)$$

donde el potencial V_1 está relacionado con V_0 , en términos de la función u , en la forma

$$V_1(x, \epsilon) = V_0(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln u(x, \epsilon). \quad (2.8)$$

La función $u(x, \epsilon)$ es solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria para el potencial V_0 , pero no es necesariamente una solución física, que cumpla con las condiciones de frontera del problema.

Hay que resaltar que los operadores de entrelazamiento L_1, L_1^\dagger factorizan a los dos Hamiltonianos $H_{0,1}$ de la siguiente manera

$$H_0 = L_1 L_1^\dagger + \epsilon, \quad H_1 = L_1^\dagger L_1 + \epsilon, \quad (2.9)$$

donde L_1 es el operador adjunto de L_1^\dagger , que está definido como

$$L = \frac{d}{dx} + W_1. \quad (2.10)$$

Se supone ahora que el potencial V_0 es soluble, que tiene eigenfunciones $\psi_n^{(0)}$ y eigenvalores E_n , con $n = 0, 1, 2 \dots$. Asumimos además que es posible hallar la función $u_1(x, \epsilon)$ sin nodos y consecuentemente el superpotencial $W_1(x, \epsilon)$. Entonces, para cualquier $\epsilon < E_0$ se tendrá un potencial $V_1(x, \epsilon)$ libre de singularidades, donde E_0 corresponde al estado base de H_0 . Las eigenfunciones normalizadas de H_1 , correspondientes a los eigenvalores $\{\epsilon, E_n, n = 0, 1, 2 \dots\}$, vienen dadas por

$$\begin{aligned} \psi_\epsilon &\sim e^{-\int W(x, \epsilon) dx} = \frac{1}{u(x, \epsilon)}, \\ \psi_n^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{E_n - \epsilon_1}} L_1^\dagger \psi_n^{(0)}(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.0.2. Método supersimétrico iterativo

Para generar una vez más nuevos potenciales, lo que se hará es iterar este método de forma consecutiva, así que para el nuevo paso SUSY surge la ecuación de entrelazamiento

$$H_2 L_2^\dagger = L_2^\dagger H_1, \quad (2.12)$$

la cual nos lleva a las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} W_2^2 + W_2' &= V_1 - \epsilon_2, \\ V_2(x, \epsilon_2) &= V_1(x, \epsilon_1) - 2 \frac{d}{dx} \ln W_2(x, \epsilon_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hacemos nuevamente el cambio de variable $W(x, \epsilon_2) = (\ln u_2^{(1)}(x, \epsilon_2))'$, lo que nos conduce a la siguiente ecuación de Schrödinger

$$-u_2^{(1)''}(x, \epsilon_2) + V_1(x, \epsilon_1)u_2^{(1)}(x, \epsilon_2) = \epsilon_2 u_2^{(1)}(x, \epsilon_2), \quad (2.14)$$

así como al nuevo potencial

$$V_2(x, \epsilon_2) = V_1(x, \epsilon_1) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln u_2^{(1)}(x, \epsilon_2). \quad (2.15)$$

Es importante recalcar que el operador de entrelazamiento L_1^\dagger relaciona también a las funciones de transformación $u_i(x, \epsilon)$ del primero y segundo paso para $\epsilon \neq \epsilon_1$:

$$u_2^{(1)} \sim L_1^\dagger u_2^{(0)} \sim -u_2^{(0)'} + W_1(x, \epsilon_1)u_2^{(0)} = \frac{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})}{u_1^{(0)}}, \quad (2.16)$$

donde $W(f, g)$ simboliza el wronskiano entre las funciones f y g . La función de transformación $u_2^{(0)}$ es solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria

$$H_0 u_2^{(0)} = \epsilon_2 u_2^{(0)}. \quad (2.17)$$

De este modo, es posible construir el nuevo potencial como sigue:

$$V_2(x, \epsilon_2) = V_0(x) - 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{W_1(x, \epsilon_1) - W_1(x, \epsilon_2)} \right). \quad (2.18)$$

Los eigenvalores asociados son $\{\epsilon_2, \epsilon_1, E_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ y los correspondientes eigenvectores serán

$$\begin{aligned}\psi_{\epsilon_2}^{(2)}(x) &\sim \frac{1}{u_2^{(1)}}, \\ \psi_{\epsilon_1}^{(2)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}} L_2^\dagger \psi_{\epsilon_1}^{(1)}(x), \\ \psi_n^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{(E_n - \epsilon_1)(E_n - \epsilon_2)}} L_2^\dagger L_1^\dagger \psi_n^{(0)}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Para este caso se exige que $\epsilon_2 < \epsilon_1 < E_n$.

2.0.3. Relaciones de orden k -ésimo

La relación de entrelazamiento en este caso es

$$H_i L_i^\dagger = L_i^\dagger H_{i-1}.\tag{2.20}$$

Para este orden se tiene la siguiente relación entre los potenciales

$$V_k(x, \epsilon_k) = V_{k-1}(x, \epsilon_{k-1}) - 2 \frac{d}{dx} W_k(x, \epsilon_k) = V_0(x) - 2 \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^k W_i(x, \epsilon_i),\tag{2.21}$$

donde $W_i(x, \epsilon_i)$ está dado por la siguiente formula de recurrencia

$$W_{i-1}(x, \epsilon_{i-1}) = -W_i(x, \epsilon_i) - \frac{\epsilon_i - \epsilon_{i-1}}{W_i(x, \epsilon_i) - W_i(x, \epsilon_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.\tag{2.22}$$

Los eigenestados del Hamiltoniano H_k están dados por

$$\begin{aligned}\psi_{\epsilon_k}^{(k)}(x) &\sim e^{-\int W_k(x, \epsilon_k) dx}, \\ \psi_{\epsilon_{k-1}}^{(k)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{k-1} - \epsilon_k}} L_k^\dagger \psi_{\epsilon_{k-1}}^{(k-1)}(x), \\ &\vdots \\ \psi_{\epsilon_1}^{(k)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \dots (\epsilon_1 - \epsilon_k)}} L_k^\dagger \dots L_2^\dagger \psi_{\epsilon_1}^{(1)}(x), \\ \psi_n^{(k)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(E_n - \epsilon_1) \dots (E_n - \epsilon_k)}} L_k^\dagger \dots L_1^\dagger \psi_n^{(0)}(x),\end{aligned}\tag{2.23}$$

y los correspondientes eigenvalores son $\{\epsilon_i, E_n, i = k, \dots, 1, n = 0, \dots\}$.

Capítulo 3

Ecuación de Dirac-Weyl y SUSY-QM

La ecuación de Dirac-Weyl describe el comportamiento de fermiones sin masa, lo cual la hace adecuada para describir a un electrón en una red de grafeno, que a bajas energías satisface

$$H\Psi(x, y) = v_f(\sigma \cdot \mathbf{p})\Psi(x, y), \quad (3.1)$$

donde $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$ corresponde a las matrices de Pauli y $\mathbf{p} = -i\hbar(\partial_x, \partial_y)$ es el operador momento en dos dimensiones. Cuando aplicamos un campo magnético externo a una capa de grafeno, es posible describir el sistema mediante el Hamiltoniano resultante del acoplamiento mínimo,

$$H\Psi(x, y) = v_f\sigma \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\Psi(x, y), \quad (3.2)$$

con $v_f = c/300$ siendo la velocidad de Fermi [34, 35, 36, 37]. El potencial vectorial aplicado lo vamos a tomar en el Gauge de Landau, el cual para un campo magnético perpendicular a la superficie del grafeno se expresa como

$$\mathbf{A} = (0, A_y(x), 0), \quad B = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{z}\frac{\partial A_y(x)}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta la elección anterior, es claro que el electrón que estamos analizando se comportará como una partícula libre en la dirección y , con lo cual podemos escribir el vector de onda del sistema como

$$\Psi(x, y) = e^{iky} \begin{pmatrix} \psi^+(x) \\ i\psi^-(x) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

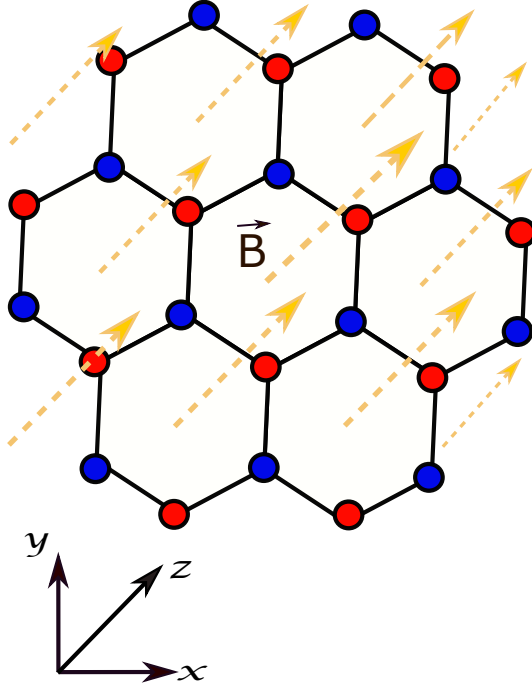


Figura 3.1: Esquema grafico del sistema bajo estudio

Escribiendo entonces la ecuación matricial de forma explicita

$$(-i\sigma_x\partial_x + \sigma_y \left(-i\partial_y + \frac{e}{c\hbar}A_y(x)\right))\Psi \quad (3.5)$$

$$= \left(-i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \left(k + \frac{e}{c\hbar}A_y(x)\right)\right) \begin{pmatrix} \psi^+(x) \\ i\psi^-(x) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & \partial_x + \left(k + \frac{e}{c\hbar}A_y(x)\right) \\ \partial_x - \left(k + \frac{e}{c\hbar}A_y(x)\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+(x) \\ i\psi^-(x) \end{pmatrix} = \frac{E}{v_f\hbar} \begin{pmatrix} \psi^+(x) \\ i\psi^-(x) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

se obtienen dos ecuaciones acopladas

$$\left(\partial_x + k + \frac{e}{c\hbar}A_y(x)\right) \psi^-(x) = \frac{E}{v_f\hbar} \psi^+(x), \quad (3.8)$$

$$\left(-\partial_x + k + \frac{e}{c\hbar}A_y(x)\right) \psi^+(x) = \frac{E}{v_f\hbar} \psi^-(x). \quad (3.9)$$

Cuando desacoplamos este sistema, llegamos a dos ecuaciones de Schrödinger estacionarias,

$$H^\pm \psi^\pm(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V^\pm(x) \right) \psi^\pm(x) = \mathcal{E} \psi^\pm(x), \quad (3.10)$$

donde

$$V^\pm(x) = \left(k + \frac{eA_y}{c\hbar} \right)^2 \pm \frac{e}{c\hbar} \frac{dA_y(x)}{dx}, \quad \mathcal{E} = \frac{E^2}{v_f^2 \hbar^2}. \quad (3.11)$$

Al par de potenciales $V^\pm(x)$ se les conoce como socios supersimétricos y típicamente se les escoge como potenciales invariantes de forma, lo cual describiremos a continuación [22, 29, 32].

3.0.4. Potenciales invariantes de forma

Como en el caso del oscilador armónico, en general tales Hamiltonianos se pueden factorizar por medio de los operadores de entrelazamiento en la forma

$$H^\pm = L_0^\mp L_0^\pm, \quad (3.12)$$

donde los operadores L_0^\pm cumplen las siguientes relaciones de entrelazamiento

$$H^\pm L_0^\mp = L_0^\mp H^\mp, \quad (3.13)$$

y tienen la forma

$$L_0^\pm = \mp \frac{d}{dx} + W_0(x). \quad (3.14)$$

Ya habíamos visto anteriormente que a $W_0(x)$ se le conoce como superpotencial y en este caso tiene la forma:

$$W_0(x) = \frac{e}{c\hbar} A_y(x) + k. \quad (3.15)$$

En términos del superpotencial, los potenciales auxiliares V^\pm se expresan como

$$V^\pm = W_0^2(x) \pm W_0'(x). \quad (3.16)$$

Por otro lado, los operadores de entrelazamiento nos permiten relacionar a las eigenfunciones de los dos hamiltonianos supersimétricos en la forma

$$\psi_n^+(x) = \frac{L_0^- \psi_{n+1}^-(x)}{\sqrt{\mathcal{E}_{n+1}^-}}, \quad \psi_{n+1}^-(x) = \frac{L_0^+ \psi_n^+(x)}{\sqrt{\mathcal{E}_n^+}}, \quad \psi_0^- \sim e^{-\int W_0(x) dx}. \quad (3.17)$$

El operador de entrelazamiento L_0^- aniquila al estado base de H^- , es decir, $L_0^- \psi_0^-(x) = 0$, lo cual implica que

$$W_0(x) = -\frac{\psi_0^-(x)'}{\psi_0^-(x)}. \quad (3.18)$$

Los eigenvalores del sistema están dados por

$$\mathcal{E}_n^+ = \mathcal{E}_{n+1}^-, \quad \mathcal{E}_0^- = 0. \quad (3.19)$$

Para el caso invariante de forma el operador de entrelazamiento relaciona a dos potenciales que tienen esencialmente la misma forma, es decir, uno de ellos se obtiene del otro mediante un cambio en los parámetros del primero y un desplazamiento constante, que depende también de los parámetros del potencial inicial.

Por otro lado, el campo magnético $B_0(x)$ se puede calcular mediante el superpotencial como se muestra enseguida

$$B_0 = \frac{dA_y(x)}{dx} = \frac{c\hbar}{e} \frac{dW_0(x)}{dx} = -\frac{c\hbar}{e} \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^-(x)). \quad (3.20)$$

3.1. Relación de entrelazamiento generalizada

3.1.1. Entrelazamiento de primer orden

Para implementar la relación de entrelazamiento generalizada vamos a seguir una serie de pasos que nos permiten construir Hamiltonianos que en general no son invariantes de forma. El primer paso consiste en desplazar los niveles de energía de H^- hacia arriba en una cantidad $-\epsilon_1$,

$$\tilde{H}_0 \equiv H^- - \epsilon_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V^-(x) - \epsilon_1, \quad (3.21)$$

por lo que se define el potencial desplazado como

$$\tilde{V}_0(x) \equiv V^-(x) - \epsilon_1, \quad (3.22)$$

donde $\epsilon_1 < \mathcal{E}_0^- = 0$, es decir, la energía de factorización ϵ_1 es menor que la del estado base del grafeno, que como se explicó anteriormente es cero ya que

indica la intersección entre las bandas de valencia y de conducción.

Para determinar el nuevo hamiltoniano H_1 se usa la relación de entrelazamiento,

$$H_1 L_1^+ = L_1^+ \tilde{H}_0, \quad (3.23)$$

lo cual implica que ambos Hamiltonianos se factorizan como

$$\tilde{H}_0 = L_1^- L_1^+, \quad H_1 = L_1^+ L_1^-, \quad (3.24)$$

donde H_1 y L_1^+ tienen la forma

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, \epsilon_1), \quad L_1^\pm = \mp \frac{d}{dx} + W_1(x, \epsilon_1). \quad (3.25)$$

A diferencia del caso invariante de forma, en donde el superpotencial está determinado por el estado base de H^- , aquí no se conoce aún el superpotencial [38, 39]. Sin embargo, la relación de entrelazamiento (3.23) nos conduce a la ecuación de Riccati correspondiente y a la relación entre ambos potenciales

$$W_1^2(x, \epsilon_1) + W_1'(x, \epsilon_1) = \tilde{V}_0(x), \quad (3.26)$$

$$V_1(x, \epsilon_1) = \tilde{V}_0(x) - 2W_1'(x, \epsilon_1). \quad (3.27)$$

Como se explicó en el capítulo 2, se realiza ahora el cambio de variable en el superpotencial $W_1(x, \epsilon_1) = u_1^{(0)'}/u_1^{(0)}$, con el fin de arriar a una ecuación lineal para $u_1^{(0)}$,

$$-u_1^{(0)''} + \tilde{V}_0(x)u_1^{(0)} = 0, \quad (3.28)$$

la cual es la ecuación de Schrödinger estacionaria asociada a \tilde{H}_0 para una energía de factorización nula. Una solución sin nodos de esta ecuación constituye la semilla necesaria para construir el nuevo potencial $V_1(x, \epsilon_1)$. Además, dicha solución nos permite también determinar el campo magnético asociado al nuevo sistema:

$$B_1(x, \epsilon_1) = \frac{c\hbar}{e} \frac{dW_1(x, \epsilon_1)}{dx} = -B_0 + \frac{c\hbar}{e} \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\frac{u_1^{(0)}}{\psi_0^-} \right). \quad (3.29)$$

Notar que los eigenvalores de \tilde{H}_0 están desplazados hacia arriba en una cantidad $-\epsilon_1$ con respecto a los de H^- , mientras que el hamiltoniano H_1 tendrá su

energía del estado base en el cero, con sus demás eigenvalores coincidiendo con los de \tilde{H}_0 , como se muestra en la figura 3.2,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_n^{(0)} &= \mathcal{E}_n^- - \epsilon_1, \\ \mathcal{E}_0^{(1)} &= 0, \quad \mathcal{E}_{n+1}^{(1)} = \tilde{\mathcal{E}}_n^{(0)}, \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{3.30}$$

Recordar que la energía de factorización ϵ_1 debe cumplir que $\epsilon_1 < \mathcal{E}_0^- = 0$. Los eigenestados asociados a las energías $\mathcal{E}_n^{(1)}$ están dados por

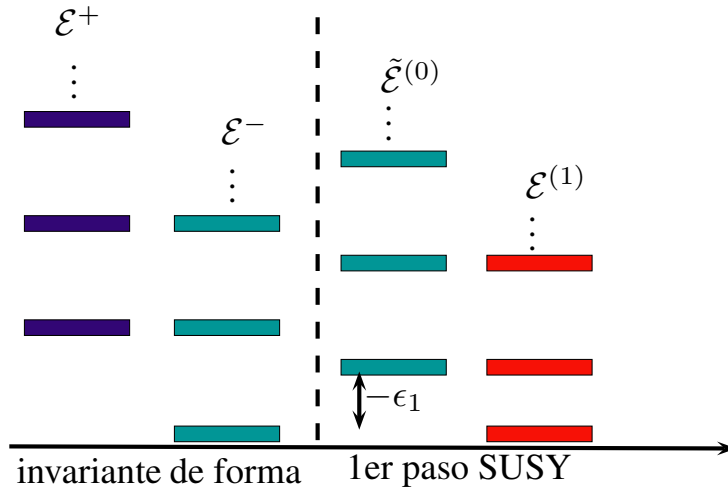


Figura 3.2: Espectro de energías del sistema inicial (izquierda) y del nuevo sistema (derecha).

$$\psi_0^{(1)}(x) \sim e^{-\int W_1(x, \epsilon_1) dx} = \frac{1}{u_1^{(0)}}, \quad \psi_{n+1}^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_n^{(0)}}} L_1^+ \psi_n^-(x), \tag{3.31}$$

en donde las eigenfunciones de H^- , en consecuencia las de \tilde{H}_0 , se supone que son conocidas. Debe notarse que el operador de entrelazamiento L_1^- aniquila al estado base de H_1 , es decir, $L_1^- \psi_0^{(1)}(x) = 0$.

3.2. Iteración del método

Para iterar el método se deben repetir los pasos de la sección anterior, por lo que nuestro hamiltoniano de partida será ahora H_1 . Lo primero que se debe

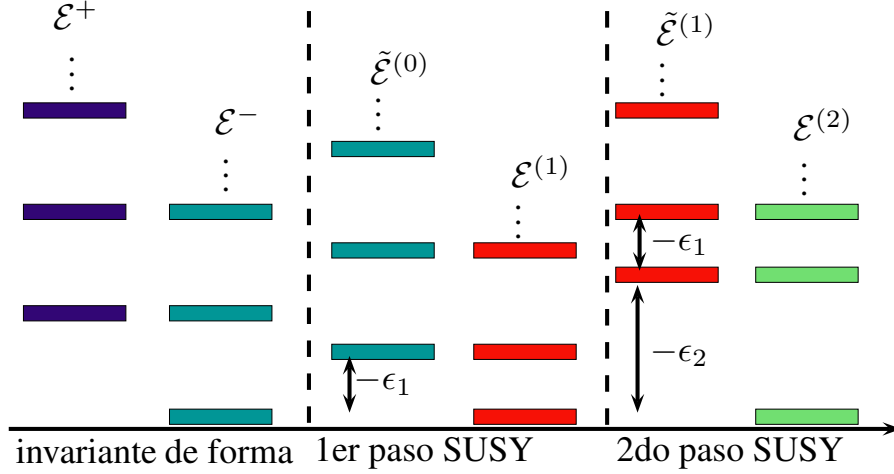


Figura 3.3: Espectro de energías del sistema original (izquierda), del sistema resultante del primer paso SUSY (centro) y del segundo paso SUSY (derecha)

realizar es sumarle la energía de factorización $-\epsilon_2$ (ver figura 3.3), es decir,

$$\tilde{H}_1 \equiv H_1 - \epsilon_2, \quad (3.32)$$

lo cual hace que el estado base de \tilde{H}_1 cumpla que $\tilde{\mathcal{E}}_0^{(1)} = -\epsilon_2 > 0$, donde la energía de factorización ϵ_2 está condicionada por $\epsilon_2 < \epsilon_1$. Al potencial trasladado lo denotaremos también como

$$\tilde{V}_1(x, \epsilon_1) \equiv V_1(x, \epsilon_1) - \epsilon_2. \quad (3.33)$$

Para construir el siguiente Hamiltoniano H_2 debemos proponer la nueva relación de entrelazamiento

$$H_2 L_2^+ = L_2^+ \tilde{H}_1. \quad (3.34)$$

La forma del nuevo hamiltoniano y de los operadores de entrelazamiento del segundo paso se definen como

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, \epsilon_2), \quad L_2^\pm = \mp \frac{d}{dx} + W_2(x, \epsilon_2). \quad (3.35)$$

Los operadores de entrelazamiento L_2^\pm factorizan a los hamiltonianos \tilde{H}_1 y H_2 en la forma

$$\tilde{H}_1 = L_2^- L_2^+, \quad H_2 = L_2^+ L_2^-. \quad (3.36)$$

De manera análoga al primer paso SUSY, se tienen ahora las siguientes relaciones

$$W_2^2(x, \epsilon_2) + W_2'(x, \epsilon_2) = \tilde{V}_1(x, \epsilon_1), \quad (3.37)$$

$$V_2(x, \epsilon_2) = \tilde{V}_1(x, \epsilon_1) - 2W_2'(x, \epsilon_2). \quad (3.38)$$

Una vez más pasamos de la ecuación de Riccati a la de Schrödinger mediante el cambio de variable,

$$W_2(x, \epsilon_2) = \frac{u_2^{(1)'}}{u_2^{(1)}}, \quad (3.39)$$

lo cual conduce a

$$-u_2^{(1)''} + \tilde{V}_1(x, \epsilon_1)u_2^{(1)} = 0. \quad (3.40)$$

Para encontrar a $u_2^{(1)}$ usamos el operador de entrelazamiento L_1^+ , el cual relaciona a esta solución con $u_2^{(0)}$,

$$u_2^{(1)} \propto L_1^+ u_2^{(0)} = -\frac{W[u_1^{(0)}, u_2^{(0)}]}{u_1^{(0)}}, \quad (3.41)$$

donde $W[u_1^{(0)}, u_2^{(0)}]$ representa al wronskiano entre $u_1^{(0)}$ y $u_2^{(0)}$. Notar que la solución semilla $u_2^{(0)}$ está asociada a la ecuación de Schrödinger para el potencial original,

$$-u_2^{(0)''} + V^-(x)u_2^{(0)} = (\epsilon_1 + \epsilon_2)u_2^{(0)}. \quad (3.42)$$

Por lo tanto, es posible expresar el nuevo potencial en términos de las dos funciones de transformación $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}$:

$$V_2(x, \epsilon_2) = V^- - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln W[u_1^{(0)}, u_2^{(0)}] - (\epsilon_1 + \epsilon_2). \quad (3.43)$$

De la misma manera el campo magnético de segundo orden estará dado por la siguiente expresión

$$B_2(x, \epsilon_2) = \frac{c\hbar}{e} \frac{dW_2(x, \epsilon_2)}{dx} = -B_1(x, \epsilon_1) + \frac{c\hbar}{e} \frac{d^2}{dx^2} \ln W[u_1^{(0)}, u_2^{(0)}]. \quad (3.44)$$

Por último, los eigenvalores y eigenvectores de los Hamiltonianos \tilde{H}_1 y H_2 están dados por:

$$\tilde{\mathcal{E}}_n^{(1)} = \mathcal{E}_n^{(1)} - \epsilon_2, \quad (3.45)$$

$$\mathcal{E}_0^{(2)} = 0, \quad \mathcal{E}_{n+1}^{(2)} = \tilde{\mathcal{E}}_n^{(1)}, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}\psi_0^{(2)}(x) &\sim e^{-\int W_2(x, \epsilon_2) dx} = \frac{1}{u_2^{(1)}}, & \psi_1^{(2)}(x) &= \frac{L_2^+ \psi_0^{(1)}(x)}{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_0^{(1)}}}, \\ \psi_{n+2}^{(2)}(x) &= \frac{L_2^+ \psi_{n+1}^{(1)}(x)}{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}^{(1)}}} = \frac{L_2^+ L_1^+ \psi_n^-(x)}{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}^{(1)} \tilde{\mathcal{E}}_n^{(0)}}},\end{aligned}\tag{3.47}$$

donde $n = 0, 1, \dots$

Para recuperar la forma matricial del sistema calculamos el nuevo superpotencial

$$W_2(x, \epsilon_2) = \frac{\partial_x W[u_1^{(0)}, u_2^{(0)}]}{W[u_1^{(0)}, u_2^{(0)}]} - \frac{\partial_x u_1^{(0)}}{u_1^{(0)}},\tag{3.48}$$

de donde construimos el Hamiltoniano de Dirac de segundo orden

$$H_D^{(2)} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} 0 & -i(W_2(x, \epsilon_2) - k) \\ i(W_2(x, \epsilon_2) - k) & 0 \end{pmatrix}.\tag{3.49}$$

En forma compacta se tiene que:

$$H_D^{(2)} = -i\sigma_x \partial_x - i\sigma_y \partial_y + \sigma_y (W_2(x, \epsilon_2) - k)\tag{3.50}$$

$$= -i\sigma_x \partial_x + \sigma_y (-i\partial_y - k + W_2(x, \epsilon_2)).\tag{3.51}$$

3.2.1. Entrelazamiento de orden k -ésimo

Para el paso k -ésimo del entrelazamiento se sigue el mismo esquema de la sección anterior, es decir, primeramente el hamiltoniano H_{k-1} es desplazado por una cantidad $-\epsilon_k$

$$\tilde{H}_{k-1} = H_{k-1} - \epsilon_k,\tag{3.52}$$

con $\epsilon_k < \epsilon_{k-1} < \dots < \epsilon_2 < \epsilon_1 \leq 0$. La k -ésima relación de entrelazamiento está ahora dada por

$$H_k L_k^+ = L_k^+ \tilde{H}_{k-1},\tag{3.53}$$

donde los hamiltonianos H_k , \tilde{H}_{k-1} y los operadores de entrelazamiento L_k^\pm se expresan como:

$$\begin{aligned}H_k &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_k, & \tilde{H}_{k-1} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_{k-1} - \epsilon_k, \\ L_k^\pm &= \mp \frac{d}{dx} + W_k(x, \epsilon_k).\end{aligned}\tag{3.54}$$

De esta manera los hamiltonianos serán factorizados en la forma

$$\tilde{H}_{k-1} = L_k^- L_k^+, \quad H_k = L_k^+ L_k^-. \quad (3.55)$$

Por otro lado, la relación de entrelazamiento nos lleva a las siguientes ecuaciones

$$W_k^2(x, \epsilon_k) + W_k'(x, \epsilon_k) = \tilde{V}_{k-1}, \quad (3.56)$$

$$V_k = \tilde{V}_{k-1} - 2W_k'(x, \epsilon_k). \quad (3.57)$$

Si expresamos el superpotencial como

$$W_k(x, \epsilon_k) = \frac{u_k^{(k-1)'}}{u_k^{(k-1)}}, \quad (3.58)$$

llegamos a la siguiente ecuación de Schrödinger con energía de factorización nula

$$-u_k^{(k-1)''} + \tilde{V}_{k-1} u_k^{(k-1)} = 0. \quad (3.59)$$

El operador de entrelazamiento L_{k-1}^+ permite hallar la relación entre $u_k^{(k-1)}$ y su predecesor $u^{(k-2)}$, $u_k^{(k-1)} \propto L_{k-1}^+ u_k^{(k-2)}$, donde $u_k^{(k-2)}$ satisface la siguiente ecuación de Schrödinger

$$-u_k^{(k-2)''} + V_{k-2} u_k^{(k-2)} = (\epsilon_k + \epsilon_{k-1}) u_k^{(k-2)}. \quad (3.60)$$

Iterando esta expresión para índices decrecientes llegamos a la formula $u_k^{(k-1)} \propto L_{k-1}^+ L_{k-2}^+ \dots L_1^+ u_k^{(0)}$, donde

$$-u_k^{(0)''} + V^-(x) u_k^{(0)} = \left(\sum_{i=1}^k \epsilon_i \right) u_k^{(0)}, \quad (3.61)$$

lo cual permite encontrar todos los superpotenciales y el nuevo potencial

$$V_k = V^-(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(u_1^{(0)}, \dots, u_k^{(0)}) - \left(\sum_{i=1}^k \epsilon_i \right). \quad (3.62)$$

El campo magnético asociado al k -ésimo paso SUSY será

$$B_k(x, \epsilon_k) = \frac{c\hbar}{e} \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\frac{W(u_1^{(0)}, \dots, u_k^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, \dots, u_{k-1}^{(0)})} \right). \quad (3.63)$$

Además, los eigenvalores de H_k y \tilde{H}_{k-1} estarán dados por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_n^{(k-1)} &= \mathcal{E}_n^{(k-1)} - \epsilon_k, \\ \mathcal{E}_0^{(k)} &= 0, \quad \mathcal{E}_{n+1}^{(k)} = \tilde{\mathcal{E}}_n^{(k-1)}.\end{aligned}\tag{3.64}$$

Por analogía con los pasos previos, podemos ver que las eigenfunciones para el k -ésimo paso están dadas por:

$$\begin{aligned}\psi_0^{(k)}(x) &\sim e^{-\int W_k(x, \epsilon_k) dx}, \\ \psi_1^{(k)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0^{(k-1)} - \epsilon_k}} L_k^+ \psi_0^{(k-1)}(x), \\ &\vdots \\ \psi_{k-1}^{(k)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{E}_{k-2}^{(k-1)} - \epsilon_k) \dots (\mathcal{E}_0^{(1)} - \epsilon_2)}} L_k^+ \dots L_2^+ \psi_0^{(1)}(x), \\ \psi_{k+n}^{(k)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{E}_{k+n-1}^{(k-1)} - \epsilon_k) \dots (\mathcal{E}_n^- - \epsilon_1)}} L_k^+ \dots L_1^+ \psi_n^-(x).\end{aligned}\tag{3.65}$$

Por lo tanto, las eigenfunciones para el electrón de Dirac del grafeno en el campo magnético (3.63) se expresan como:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\psi_0^{(k)}(x) \end{pmatrix}, \dots, \Psi_{k-1} = \begin{pmatrix} \psi_{k-2}^{(k-1)}(x) \\ i\psi_{k-1}^{(k)}(x) \end{pmatrix}, \dots, \Psi_{n+k} = \begin{pmatrix} \psi_{k+n-1}^{(k-1)}(x) \\ i\psi_{k+n}^{(k)}(x) \end{pmatrix}.\tag{3.66}$$

3.3. Ejemplos

En esta sección vamos a aplicar el método anterior a dos ejemplos específicos interesantes: el primero es una red de grafeno en un campo magnético constante y el segundo es la misma red bajo un campo magnético que decae exponencialmente.

3.3.1. Campo magnético constante

El campo magnético constante se obtiene a partir del potencial vectorial lineal $\mathbf{A} = B_0 x \hat{y}$, $B_0 > 0$, que en el problema de Schrödinger equivalente se traduce

en un potencial de oscilador armónico. En términos del superpotencial se tiene que

$$W_0(x) = \frac{\omega}{2}x + k, \quad (3.67)$$

con $\omega = 2eB_0/c\hbar$. Nosotros decidimos tomar como punto de partida la entrada inferior del espinor, la cual tiene asociada el hamiltoniano H^- ,

$$H^- = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{4}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2 - \frac{\omega}{2}, \quad (3.68)$$

cuyos eigenvalores y eigenfunciones son bien conocidos en la literatura,

$$\mathcal{E}_n^- = \omega n, \quad \psi_n^-(x) = N_n e^{-\frac{\omega}{4}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2} H_n\left[\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)\right], \quad (3.69)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, H_n son los polinomios de Hermite y el factor de normalización esta dado por

$$N_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}. \quad (3.70)$$

Para aplicar ahora el método descrito anteriormente, lo primero que se hace es desplazar el espectro de energía en la cantidad $-\epsilon_1$,

$$\tilde{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{4}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2 - \frac{\omega}{2} - \epsilon_1, \quad (3.71)$$

donde ϵ_1 está por debajo del estado base de H^- , $\epsilon_1 < \mathcal{E}_0^- = 0$. El superpotencial del primer paso SUSY se puede expresar como $W_1(x, \epsilon_1) = u_1^{(0)'}/u_1^{(0)}$, donde la solución semilla $u_1^{(0)}$ satisface la ecuación de Schrödinger asociada al potencial de oscilador, que tiene como solución general a

$$u_1^{(0)} = e^{-\frac{\omega}{4}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2} \left({}_1F_1\left[a, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2\right] + 2\nu_1 \frac{\Gamma\left[a + \frac{1}{2}\right]}{\Gamma[a]} \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right) {}_1F_1\left[a + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\omega}{2}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2\right] \right), \quad (3.72)$$

con $a = -\epsilon_1/2\omega$. Para evitar la aparición de singularidades en el nuevo potencial $V_1(x, \epsilon_1)$ debemos elegir a $u_1^{(0)}$ de tal manera que no tenga nodos, lo cual se cumple restringiendo el parámetro ν_1 al intervalo $(-1, 1)$. Entonces, si elegimos la energía de factorización como $\epsilon_1 = -\omega/5$ y escogemos $\nu_1 = 0$, el superpotencial toma la siguiente forma:

$$W_1(x, \epsilon_1) = \frac{\omega}{2}(x + \frac{2k}{\omega}) \left(-1 + \frac{2 {}_1F_1[\frac{11}{10}, \frac{3}{2}, \frac{\omega}{2}(x + \frac{2k}{\omega})^2]}{5 {}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}(x + \frac{2k}{\omega})^2]} \right), \quad (3.73)$$

lo cual nos lleva al nuevo potencial

$$V_1(x, \epsilon_1) = \tilde{V}_0 - 2 \frac{d}{dx} \left[\frac{\omega}{2}(x + \frac{2k}{\omega}) \left(-1 + \frac{2 {}_1F_1[\frac{11}{10}, \frac{3}{2}, \frac{\omega}{2}(x + \frac{2k}{\omega})^2]}{5 {}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}(x + \frac{2k}{\omega})^2]} \right) \right]. \quad (3.74)$$

Es conveniente definir la variable $\zeta = \sqrt{\omega/2}(x + 2k/\omega)$, con lo cual se obtiene la siguiente expresión para el nuevo potencial,

$$V_1(\zeta, \epsilon_1) = \frac{\omega}{2} \zeta^2 \left[1 + \frac{8}{25} \left(\frac{{}_1F_1[\frac{11}{10}, \frac{3}{2}, \zeta^2]}{{}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \zeta^2]} \right)^2 - \frac{88 {}_1F_1[\frac{21}{10}, \frac{5}{2}, \zeta^2]}{75 {}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \zeta^2]} \right] - \frac{2}{5} \omega \frac{{}_1F_1[\frac{11}{10}, \frac{3}{2}, \zeta^2]}{{}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \zeta^2]} + \frac{7}{10} \omega, \quad (3.75)$$

que de forma más compacta se expresa como

$$V_1(\zeta, \epsilon_1) = \frac{\omega}{2} \zeta^2 + \frac{3}{10} \omega - 16 \omega \zeta^2 \left[\frac{{}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{3}{2}, \zeta^2]}{5({}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \zeta^2])^2} \left({}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \zeta^2] - \frac{4}{5} {}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{3}{2}, \zeta^2] \right) \right]. \quad (3.76)$$

El nuevo campo magnético en este caso se obtiene de $B_1(x, \epsilon_1) = \nabla \times A_1(x, \epsilon_1)$ con $A_1(x, \epsilon_1) \propto dW_1(x, \epsilon_1)/dx$, lo cual conduce a

$$B_1(x, \epsilon_1) = -B_0 + \frac{2B_0}{5} \frac{d}{dx} \left[(x + \frac{2k}{\omega}) \frac{{}_1F_1[\frac{11}{10}, \frac{3}{2}, \frac{\omega}{2}(x + \frac{2k}{\omega})^2]}{{}_1F_1[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}(x + \frac{2k}{\omega})^2]} \right]. \quad (3.77)$$

Graficas del nuevo potencial $V_1(x, \epsilon_1)$ y el campo magnético asociado $B_1(x, \epsilon_1)$ se muestran en la Figura 3.4. En este ejemplo elegimos la energía de factorización muy cerca de la energía del estado base de H^- ; con esta elección el nuevo potencial $V_1(x, \epsilon_1)$ adquiere la forma del tradicional sombrero mexicano, que en teoría de campos representa al rompimiento espontáneo de la simetría. En nuestro caso el sombrero mexicano representa una mayor probabilidad de que el electrón pase del estado base al primer estado excitado, en comparación con cualesquiera otro par de estados. Así, la libre elección

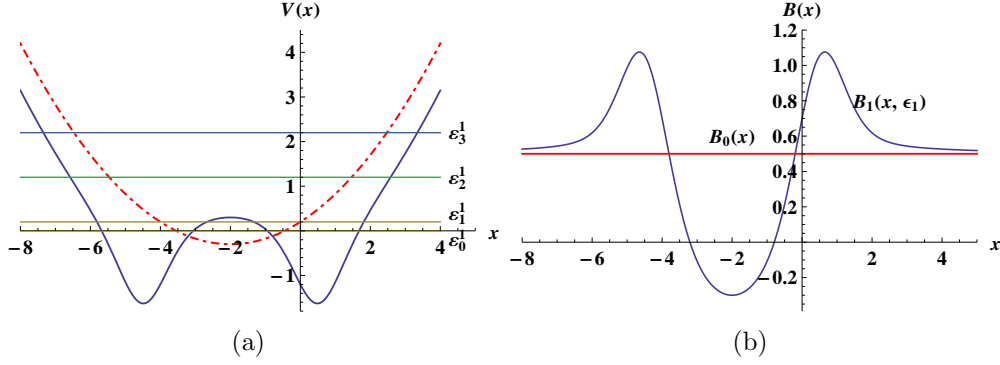


Figura 3.4: Primer paso SUSY para el campo magnético constante: (a) potencial generado $V_1(x, \epsilon_1)$ (línea continua) e inicial V_0 (línea punteada), así como los niveles de energía (líneas horizontales) ubicados en $\mathcal{E}_0^{(1)} = 0$, $\mathcal{E}_1^{(1)} = \frac{1}{5}\omega$, $\mathcal{E}_2^{(1)} = \frac{6}{5}\omega$, $\mathcal{E}_3^{(1)} = \frac{11}{5}\omega$; (b) campos magnéticos generado $B_1(x, \epsilon_1)$ e inicial B_0 (línea horizontal) tomando $\omega = 1$.

de ϵ_1 nos permite recrear distintos comportamientos del electrón de Dirac en la capa de grafeno.

Las energías asociadas a nuestro sistema están dadas por:

$$E_0^{(1)} = 0, \quad E_{n+1}^{(1)} = \hbar v_F \sqrt{\omega \left(n + \frac{1}{5} \right)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.78)$$

Los correspondientes vectores de onda normalizados son de la forma:

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, y) &= e^{iky} \begin{bmatrix} 0 \\ i\psi_0^{(1)}(x) \end{bmatrix} \sim e^{iky} \begin{bmatrix} 0 \\ i \frac{1}{{}_1F_1\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}(x+\frac{2k}{\omega})^2\right]} e^{\frac{\omega}{4}(x+\frac{2k}{\omega})^2} \end{bmatrix}, \\ \Psi_{n+1}(x, y) &= e^{iky} \begin{bmatrix} \psi_n^-(x) \\ i\psi_{n+1}^{(1)}(x) \end{bmatrix} = e^{iky} \begin{bmatrix} \psi_n^-(x) \\ i \frac{1}{\sqrt{\omega(n+1/5)}} L_1^+ \psi_n^-(x) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Con estas eigenfunciones se puede construir la corriente de probabilidad y la densidad de probabilidad del sistema. La densidad de probabilidad para los estados excitados se puede calcular mediante

$$\rho_{n+1}(x) = |\psi_n^{(0)}(x)|^2 + |\psi_{n+1}^{(1)}(x)|^2, \quad (3.80)$$

mientras que para el estado base se tiene que

$$\rho_0(x) = |\psi_0^{(1)}(x)|^2. \quad (3.81)$$

Por otro lado, para la corriente de probabilidad tenemos que

$$j^{(x,y)} = \Psi^\dagger \sigma_{x,y} \Psi, \quad (3.82)$$

ya que en el plano sólo es posible calcular la corriente en las direcciones x, y . Sin embargo, la corriente de probabilidad en la dirección x se desvanece por lo que sólo calcularemos $j^{(y)}$. Para el estado base se tiene que $j_0(x) = 0$, mientras que para los demás estados excitados resulta que

$$j_{n+1}(x) = ev_F \psi_n^{(0)}(x) \psi_{n+1}^{(1)}(x). \quad (3.83)$$

Graficas de la densidad de probabilidad y corriente se muestran en la Figura 3.5.

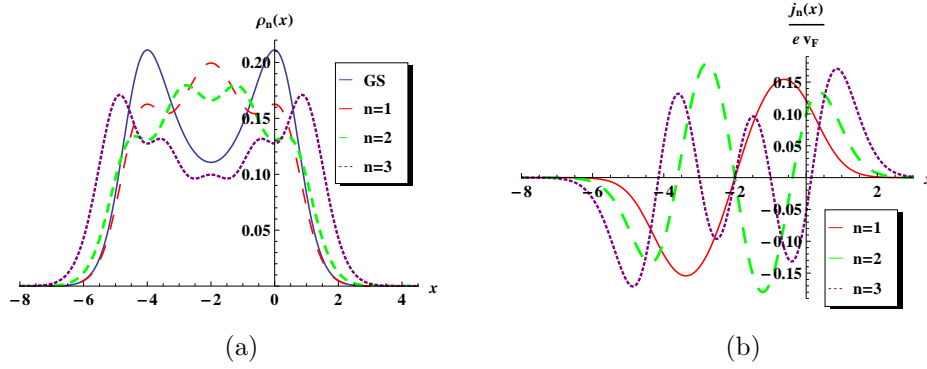


Figura 3.5: (a) densidad de probabilidad para el estado base (GS, azul) y los estados excitados con $n = 0, 1, 2$ (rojo, verde, purpura); (b) corriente de probabilidad para los estados excitados con $n = 0, 1, 2$ usando los mismos colores que en (a). Se ha tomado $\omega = c = \hbar = e = 1$.

Se puede notar que los picos de probabilidad máxima aparecen donde están los mínimos del potencial. Además, el potencial es simétrico alrededor del punto $-2k/\omega$ y la misma simetría se observa en la densidad de probabilidad.

3.3.1.1. Campo magnético de segundo-orden

Para el segundo paso del entrelazamiento se desplaza primero el potencial $V_1(x, \epsilon_1)$ en la cantidad $-\epsilon_2$,

$$\tilde{V}_1(x, \epsilon_1) = \left[\frac{\omega^2}{4} \left(x + \frac{2k}{\omega} \right)^2 - \frac{\omega}{2} - \epsilon_1 - 2 \frac{d}{dx} W_1(x, \epsilon_1) \right] - \epsilon_2. \quad (3.84)$$

Se usa ahora el operador de entrelazamiento L_2^+ para construir el nuevo Hamiltoniano H_2 , donde

$$L_2^\pm = \mp \frac{d}{dx} + \frac{u_2^{(1)'}}{u_2^{(1)}}. \quad (3.85)$$

Podemos emplear la relación entre las soluciones semilla de distinto orden, $u_2^{(1)} \propto L_1^+ u_2^{(0)}$, lo cual nos conducirá al nuevo potencial:

$$V_2(x, \epsilon_2) = \tilde{V}_0 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \mathcal{W}[u_1^{(0)}, u_2^{(0)}] - \epsilon_2. \quad (3.86)$$

Es necesario hallar la solución semilla $u_2^{(0)}$, la cual satisface la ecuación de Schrödinger con el potencial V_0 . En este caso $u_2^{(0)} = u_1^{(0)}(a \rightarrow a_1)$, es decir, se cambia el parámetro a por $a_1 = -(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2\omega$. En este ejemplo nosotros escogimos los valores particulares $\epsilon_1 = -\omega/5$ y $\epsilon_2 = -3\omega$, por lo que las energías del sistema estarán dadas por:

$$E_0^{(2)} = 0, \quad E_{n+1}^{(2)} = \hbar v_F \sqrt{\mathcal{E}_n^{(1)} + 3\omega}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.87)$$

Los correspondientes spinores tienen la forma,

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, y) &= e^{iky} \begin{pmatrix} 0 \\ i\psi_0^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \\ \Psi_{n+1}(x, y) &= e^{iky} \begin{pmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ i\psi_{n+1}^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \dots \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde

$$\psi_{n+1}^{(2)}(x) = \frac{L_2^+ \psi_n^{(1)}(x)}{\sqrt{(\mathcal{E}_n^{(1)} - \epsilon_2)}}, \quad \psi_0^{(2)}(x) \sim \frac{1}{u_2^{(1)}}. \quad (3.89)$$

Graficas del potencial V_2 y el campo magnético B_2 se muestran en la Figura 3.6, donde se observan deformaciones con respecto a la parábola y a la línea recta inicial, aunque asintóticamente convergen a $V_0(x)$ y $B_0(x)$. Las figuras para la densidad de probabilidad y de corriente de segundo orden

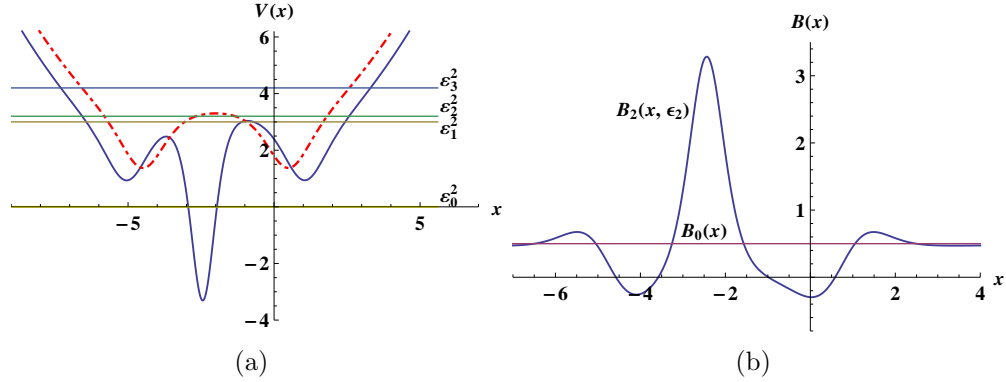


Figura 3.6: Segundo paso SUSY para el campo magnético constante con $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \frac{3}{2}$, $\epsilon_1 = -\frac{1}{5}\omega$, $\epsilon_2 = -3\omega$, $\omega = 1$: (a) potenciales generados $V_2(x, \epsilon_2)$ (línea continua) y $\tilde{V}_1(x, \epsilon_1)$ (línea punteada), así como los niveles de energía $\mathcal{E}_0^{(2)} = 0$, $\mathcal{E}_1^{(2)} = 3\omega$, $\mathcal{E}_2^{(2)} = \frac{16}{5}\omega$, $\mathcal{E}_3^{(2)} = \frac{21}{5}\omega$; (b) Campos magnéticos de segundo orden $B_2(x, \epsilon_2)$ (azul) e inicial (línea horizontal).

se muestran en la Figura 3.7.

Notar que, para evitar singularidades en el potencial V_2 , el parámetro ν_2 está restringido al conjunto de valores $\nu_2 \in \mathbb{R} - \{(-1, 1)\}$, el cual es el dominio complementario que surge en la SUSY de primer orden para ν_1 . Esta elección garantiza un potencial V_2 que es regular en todo el eje x .

3.3.2. Campo que decae exponencialmente

Para este segundo ejemplo usamos el potencial vectorial $\mathbf{A}(x) = -(B_0/\alpha)e^{-\alpha x}\hat{y}$, con $B_0 > 0$, $\alpha > 1$, de donde el campo magnético resultante $\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x)$ se convierte en $B_0(x) = B_0e^{-\alpha x}$. El superpotencial en este caso está dado por:

$$W_0 = k - De^{-\alpha x}, \quad D = eB_0/c\hbar\alpha, \quad (3.90)$$

el cual produce dos potenciales de Schrödinger de tipo Morse:

$$V^\pm(x) = k^2 + D^2e^{-2\alpha x} - 2D\left(k \mp \frac{\alpha}{2}\right)e^{-\alpha x}. \quad (3.91)$$

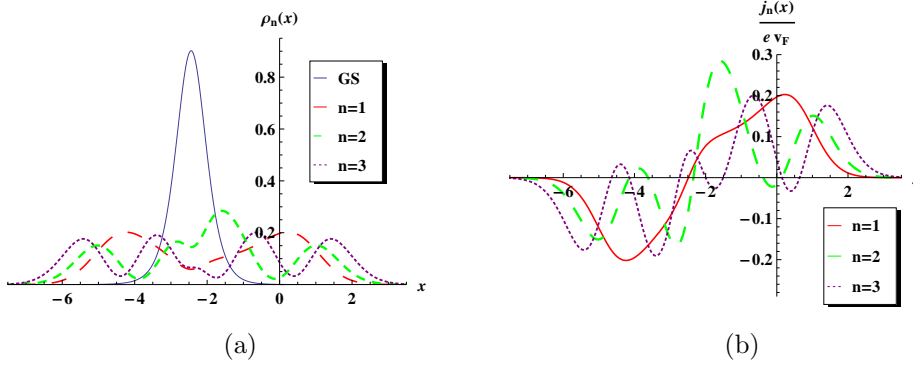


Figura 3.7: (a) densidad de probabilidad para el estado base (GS, azul) y los estados excitados con $n = 0, 1, 2$ (rojo, verde, púrpura); (b) corriente de probabilidad para los estados excitados con $n = 0, 1, 2$ usando los mismos colores que en (a).

Al igual que en el caso del oscilador, escogemos ahora el potencial $V^-(x)$ y lo desplazamos en la cantidad $-\epsilon_1$ para definir el potencial inicial $\tilde{V}_0(x)$. El nuevo potencial $V_1(x, \epsilon_1)$ dependerá de $W_1(x, \epsilon_1)$, ya que ambos están relacionados mediante la ecuación de Riccati $V_1(x, \epsilon_1) = W_1^2(x, \epsilon_1) + W_1'(x, \epsilon_1)$. Posteriormente realizamos el cambio de variable $W_1(x, \epsilon_1) = u_1^{(0)'}/u_1^{(0)}$, donde $u_1^{(0)}$ satisface la ecuación de Schrödinger asociada a \tilde{V}_0 cuya solución general ya ha sido estudiada en la literatura,

$$u_1^{(0)} = e^{-\frac{D}{\alpha}e^{-\alpha x}} e^{-\sqrt{k^2 - \epsilon_1}x} \left({}_1F_1\left[a, b, \frac{2D}{\alpha}e^{-\alpha x}\right] + \left(\frac{2k}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\nu_1}\right)U\left[a, b, \frac{2D}{\alpha}e^{-\alpha x}\right] \right), \quad (3.92)$$

donde $\nu_1 \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ y los parámetros a, b de las funciones hipergeométricas están definidos como:

$$a = -\frac{k}{\alpha} + \frac{\sqrt{k^2 - \epsilon_1}}{\alpha}, \quad b = 1 + 2\frac{\sqrt{k^2 - \epsilon_1}}{\alpha}. \quad (3.93)$$

El superpotencial se puede expresar en forma explícita como:

$$W_1(x, \epsilon_1) = De^{-\alpha x} - \sqrt{k^2 - \epsilon_1} + \mathcal{F}(x), \quad (3.94)$$

donde para simplificar esta expresión hemos usado la función $\mathcal{F}(x)$ siguiente:

$$\mathcal{F}(x) = - \left(\frac{2aDe^{-\alpha x}}{b} \right) \frac{{}_1F_1[1+a, 1+b, z] - b\left(\frac{2k}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\nu_1}\right)U[1+a, 1+b, z]}{{}_1F_1[a, b, z] + \left(\frac{2k}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\nu_1}\right)U[a, b, z]}. \quad (3.95)$$

con $z \equiv \frac{2D}{\alpha}e^{-\alpha x}$. El nuevo potencial y el campo magnético resultante del primer paso SUSY están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} V_1(x, \epsilon_1) &= \tilde{V}_0(x) - 2\frac{d}{dx}[\mathcal{F}(x) + De^{-\alpha x}], \\ B_1(x, \epsilon_1) &= -B_0e^{-\alpha x} + \frac{c\hbar}{e} \frac{d}{dx}\mathcal{F}(x). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Para realizar las graficas escogimos como energía de factorización $\epsilon_1 = -\mathcal{E}_1^-/2 = -\alpha(2k - \alpha)/2$, las cuales se muestran en la Figura 3.8.

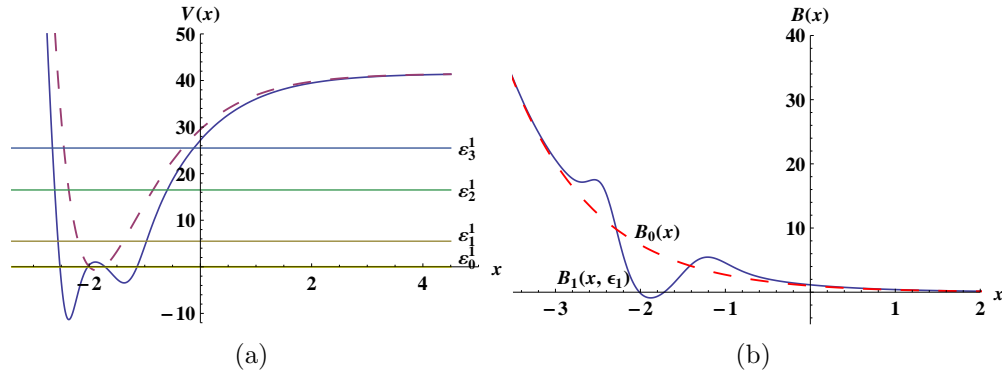


Figura 3.8: Primer paso SUSY para el potencial de Morse con $\nu_1 = -\frac{3}{2}$, $k = 6\alpha$, $\epsilon_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_1^- = -\frac{11\alpha^2}{2}$, $\alpha = 1$. (a) Potenciales nuevo $V_1(x, \epsilon_1)$ (línea continua) e inicial $\tilde{V}_0(x)$ (línea punteada), así como los niveles de energía $\mathcal{E}_0^{(1)} = 0$, $\mathcal{E}_1^{(1)} = \frac{11}{2}\alpha^2$, $\mathcal{E}_2^{(1)} = \frac{33}{2}\alpha^2$, $\mathcal{E}_3^{(1)} = \frac{51}{2}\alpha^2$; (b) campos magnéticos de primer orden $B_1(x, \epsilon_1)$ (línea continua) y el inicial que decae exponencialmente (línea punteada).

El espectro de energía de H_1 está formado por los niveles

$$\mathcal{E}_0^{(1)} = 0, \quad \mathcal{E}_{n+1}^{(1)} = \tilde{\mathcal{E}}_n^{(0)} = \alpha n(2k - \alpha n) + \frac{\alpha}{2}(2k - \alpha), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.97)$$

Las correspondientes eigenfunciones tienen la forma:

$$\begin{aligned}\psi_0^{(1)}(x) &\sim \frac{e^{\frac{D}{\alpha}e^{-\alpha x}} e^{\sqrt{k^2 - \epsilon_1}x}}{{}_1F_1[a, b, \frac{2D}{\alpha}e^{-\alpha x}] + (\frac{2k}{\alpha})(1 + \frac{1}{\nu_1})U[a, b, \frac{2D}{\alpha}e^{-\alpha x}]}, \\ \psi_{n+1}^{(1)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha[n(2k - \alpha n) + \frac{1}{2}(2k - \alpha)]}} L_1^+(x, \epsilon_1) \psi_n^-(x), \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{3.98}$$

siendo $\psi_n^-(x)$ una eigenfunción del Hamiltoniano H^- desplazado, \tilde{H}_0 , dada por:

$$\psi_n^-(x) = N_n e^{-\frac{D}{\alpha}e^{-\alpha x} - (k - \alpha n)x} L_n^{2(k/\alpha) - 2n}(\frac{2D}{\alpha}e^{-\alpha x}),\tag{3.99}$$

donde $L_n^{(\alpha)}(x)$ representa a los polinomios de Laguerre, $n = 0, 1, 2 \dots \leq k$ y N_n es la constante de normalización dada por

$$N_n = (2D/\alpha)^{(k/\alpha - n)} \sqrt{2\alpha(k/\alpha - n)n!/(2k/\alpha - n)!}.\tag{3.100}$$

Los espinores del sistema son idénticos a los del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}\Psi_0(x, y) &= e^{iky} \begin{pmatrix} 0 \\ i\psi_0^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \\ \Psi_{n+1}(x, y) &= e^{iky} \begin{pmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ i\psi_{n+1}^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{3.101}$$

Graficas de la densidad de probabilidad y la corriente se muestran en la Figura 3.9.

3.3.2.1. Campo magnético de segundo orden

Usamos ahora el segundo operador de entrelazamiento L_2^+ para obtener el nuevo Hamiltoniano H_2 y por consiguiente el nuevo potencial $V_2(x, \epsilon_2)$. En este caso desplazamos primero al potencial generado en el paso anterior $V_1(x, \epsilon_1)$ en una cantidad $-\epsilon_2 = \mathcal{E}_1^-$. Elegimos también la energía de factorización del primer paso como $-\epsilon_1 = \mathcal{E}_1^-/2$, donde \mathcal{E}_1^- es la energía del primer estado excitado asociado a $V^-(x)$. Los parámetros para producir la deformación en este caso son tomados como $\nu_1 = -3/2$ y $\nu_2 = -1/2$. Notar

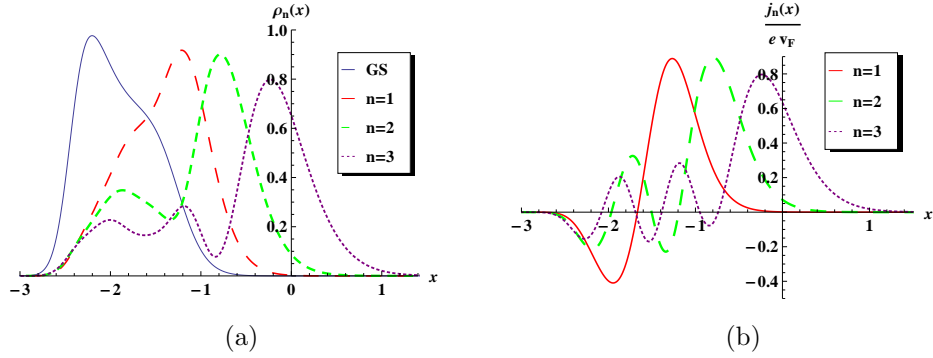


Figura 3.9: (a) Densidad de probabilidad para el estado base (GS, azul) y los estados excitados con $n = 1, 2, 3$ (rojo, verde, púrpura); (b) corriente de probabilidad para los estados excitados con $n = 1, 2, 3$ usando los mismos colores que en (a). Se ha tomado $k = 6\alpha$, $\epsilon_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_1^- = -\frac{11\alpha^2}{2}$, $\alpha = 1$.

que el parámetro ν_2 está limitado al intervalo $\nu_2 \in [-1, 0]$, el cual es el dominio complementario que aparece para ν_1 en el primer paso SUSY. Las gráficas de los potenciales, campos magnéticos, densidad de probabilidad y corriente de probabilidad se muestran en la Figura 3.10.

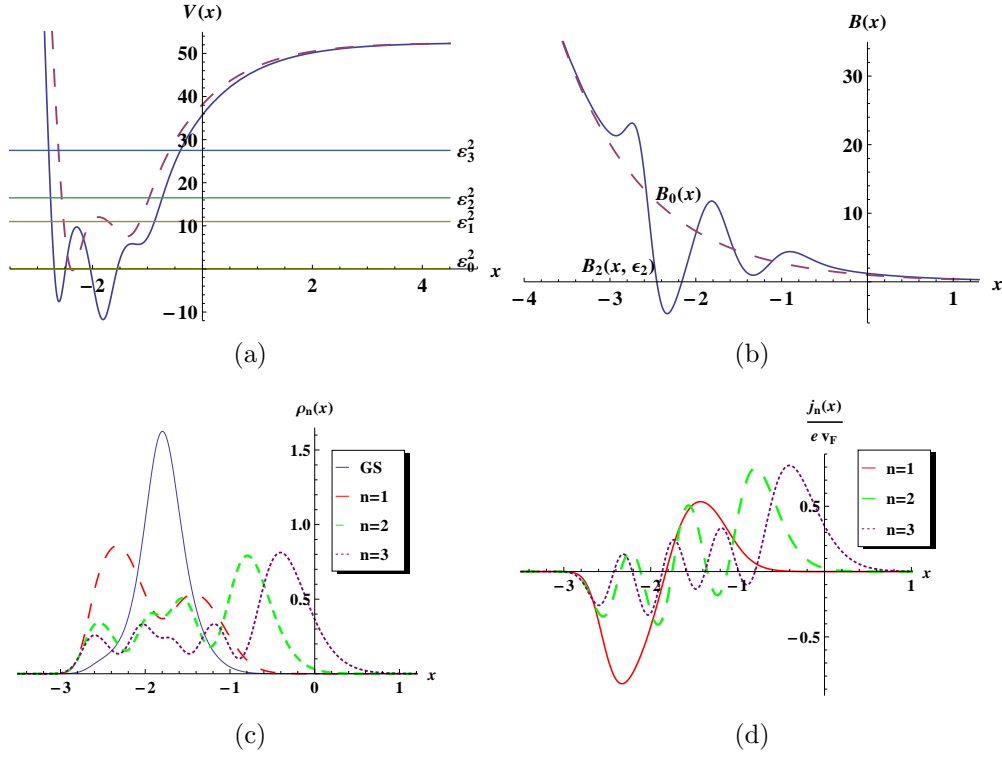


Figura 3.10: Segundo paso SUSY para el potencial de Morse con $k = 6\alpha$, $\nu_1 = -\frac{3}{2}$, $\nu_2 = -\frac{1}{2}$, $\epsilon_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_1^- = -\frac{11\alpha^2}{2}$, $\epsilon_2 = -\mathcal{E}_1^- = -11\alpha^2$: (a) potenciales generados $V_2(x, \epsilon_2)$ (línea continua) y $\tilde{V}_1(x, \epsilon_1)$ (línea punteada), así como los niveles de energía $\mathcal{E}_0^{(2)} = 0$, $\mathcal{E}_1^{(2)} = 11\alpha^2$, $\mathcal{E}_2^{(2)} = \frac{33\alpha^2}{2}$, $\mathcal{E}_3^{(2)} = \frac{55\alpha^2}{2}$; (b) campos magnéticos generado $B_2(x, \epsilon_2)$ y el inicial que decae exponencialmente (línea punteada); (c) densidad de probabilidad para el estado base (GS, azul) y los estados excitados con $n = 1, 2, 3$ (rojo, verde, púrpura); (d) corriente de probabilidad usando los mismos colores que en (c).

Capítulo 4

Mecánica cuántica supersimétrica compleja en el grafeno

En este capítulo vamos a trabajar la mecánica cuántica supersimétrica desde un enfoque distinto, al introducir constantes de factorización complejas $\epsilon \in \mathbb{C}$ [40, 41, 42]. Lo anterior hará necesario escoger las soluciones semilla $u_i^{(0)}$ de una manera particular. Para simplificar los cálculos se hará $\hbar = |e| = c = 1$.

4.1. SUSY QM compleja en el cuadro de Schrödinger

Consideremos como punto de partida un Hamiltoniano de Schrödinger unidimensional que denominaremos H_0 ,

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x). \quad (4.1)$$

Sobre este Hamiltoniano, que suponemos hermítico por lo que $V_0(x)$ es un potencial real, vamos a aplicar el método supersimétrico discutido anteriormente para ligar el Hamiltoniano inicial H_0 con a un nuevo Hamiltoniano H_1 por medio de un operador de entrelazamiento L_1^+ :

$$H_1 L_1^+ = L_1^+ H_0, \quad (4.2)$$

donde definimos el operador de entrelazamiento de primer orden L_1^+ y el Hamiltoniano H_1 como sigue,

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad L_1^+ = -\frac{d}{dx} + \frac{u_1^{(0)'}}{u_1^{(0)}}. \quad (4.3)$$

Se mostró anteriormente que $u_1^{(0)}$ debe ser solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria con el potencial V_0 :

$$-u_1^{(0)''} + V_0 u_1^{(0)} = \epsilon_1 u_1^{(0)}. \quad (4.4)$$

En este capítulo vamos a suponer que la constante de factorización es compleja, $\epsilon_1 \in \mathbb{C}$, lo cual implica que la solución semilla tendrá una parte imaginaria no-nula, $u_1^{(0)} \in \mathbb{C}$. Esto traslada el problema al plano complejo, ya que tanto L_1^+ como H_1 serán operadores no hermíticos. Recordemos que el potencial para el Hamiltoniano H_1 está dado por:

$$V_1(x) = V_0(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln u_1^{(0)}. \quad (4.5)$$

De la ecuación (4.4) se observa que $u_1^{(0)}$ satisface la ecuación de Schrödinger inicial, pero no exigimos aún condición de frontera alguna para esta solución semilla. En el caso real, para evitar singularidades en el nuevo potencial, se exige que la función de transformación $u_1^{(0)}$ no tenga nodos, lo cual garantiza que el potencial $V_1(x, \epsilon_1)$ es regular. Vamos a asumir esta condición una vez más en el caso complejo.

Notemos que, en el caso de una transformación SUSY real, L_1^+ corresponde al operador adjunto de L_1 y viceversa, es decir, $L_1 = (L_1^+)^\dagger$. Sin embargo, en el caso complejo esto no es así, $L_1 \neq (L_1^+)^\dagger$. En nuestro caso vamos a tomar L_1 como sigue:

$$L_1 = \frac{d}{dx} + \frac{u_1^{(0)'}}{u_1^{(0)}}. \quad (4.6)$$

Esta forma del operador L_1 es muy útil, porque preserva la factorización de los hamiltonianos H_0 y H_1 ,

$$L_1 L_1^+ = H_0 - \epsilon_1, \quad L_1^+ L_1 = H_1 - \epsilon_1. \quad (4.7)$$

Recordar que para el caso real si las eigenfunciones del Hamiltoniano inicial H_0 son de cuadrado integrable, suponemos que cumplen $\|\psi\|^2 = 1$, entonces

las eigenfunciones normalizadas de H_1 se expresan como

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E} - \epsilon_1}} L_1^+ \psi^{(0)}. \quad (4.8)$$

Nosotros extenderemos a partir de ahora la validez de esta expresión para el caso complejo.

En la SUSY QM compleja también se genera un eigenestado formal extra para H_1 ,

$$H_1 \psi_{\epsilon_1} = \epsilon_1 \psi_{\epsilon_1}. \quad (4.9)$$

La forma más simple de calcular ψ_{ϵ_1} es por medio de la ecuación diferencial de primer orden $L_1 \psi_{\epsilon_1} = 0$, lo cual nos lleva al resultado ya conocido previamente,

$$\psi_{\epsilon_1} \propto \frac{1}{u_1^{(0)}}. \quad (4.10)$$

En este caso vamos a pedir que la función $u_1^{(0)}(x)$ tienda a cero cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$ y que crezca a infinito en el otro extremo. Esto hace que ψ_{ϵ_1} diverja en el extremo del dominio donde $u_1^{(0)}$ se desvanece, lo cual implica que ψ_{ϵ_1} no es un estado físico y en consecuencia ϵ_1 no pertenece al espectro de energía de H_1 .

4.1.1. Iteración del método en el caso complejo

Al igual que en los capítulos anteriores, vamos a iterar ahora el método para generar un nuevo Hamiltoniano H_2 partiendo de H_1 por medio de un operador de entrelazamiento L_2^+ :

$$H_2 L_2^+ = L_2^+ H_1. \quad (4.11)$$

De la sección anterior podemos ver que también se cumple la relación

$$H_2 L_2^+ L_1^+ = L_2^+ L_1^+ H_0. \quad (4.12)$$

donde

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad L_2^+ = -\frac{d}{dx} + \frac{u_2^{(1)'}}{u_2^{(1)}}. \quad (4.13)$$

Recordemos que $u_2^{(1)}$ es eigenfunción formal de H_1 con eigenvalor ϵ_2 , $H_1 u_2^{(1)} = \epsilon_2 u_2^{(1)}$. Además, $u_2^{(1)} = L_1^+ u_2^{(0)}$, donde $u_2^{(0)}$ satisface la ecuación de Schrödinger inicial asociada a ϵ_2 , así que el nuevo potencial se expresa como:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln u_2^{(1)} \\ &= V_0 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln [u_1^{(0)} u_2^{(1)}] \\ &= V_0 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

En el caso real supusimos que $\epsilon_2 \neq \epsilon_1$. En nuestro caso queremos construir un potencial de Schrödinger V_2 que sea real, entonces pediremos que $W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$ sea real o puramente imaginario. Esto se puede conseguir mediante la elección de las soluciones semilla en la forma $u_2^{(0)} = u_1^{(0)*} = u^*$ y $\epsilon_2 = \epsilon_1^* = \epsilon^* \in \mathbb{C}$. Además, notemos que el operador de entrelazamiento $L_2^+ L_1^+$ mapea soluciones de $H_0 \psi^{(0)} = \mathcal{E} \psi^{(0)}$ en soluciones de $H_2 \psi^{(2)} = \mathcal{E} \psi^{(2)}$, donde $\psi^{(2)} \propto L_2^+ L_1^+ \psi^{(0)}$:

$$\psi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{E} - \epsilon)(\mathcal{E} - \epsilon^*)}} L_2^+ L_1^+ \psi^{(0)}. \quad (4.15)$$

El coeficiente que multiplica al término $L_2^+ L_1^+ \psi^{(0)}$ se ha incluido para garantizar la normalización de $\psi^{(2)}$. Como se explicó antes, existen dos eigenestados formales de H_2 asociados a ϵ y ϵ^* . El primero surge del cálculo del primer paso SUSY, $\psi_\epsilon^{(2)} = L_2^+(1/u)$; el otro es característico del segundo paso SUSY, $\psi_{\epsilon^*}^{(2)} = 1/u_2^{(1)}$. Estos dos estados se expresan en la forma

$$\psi_\epsilon^{(2)} \propto \frac{u^*}{W(u, u^*)}, \quad \psi_{\epsilon^*}^{(2)} \propto \frac{u}{W(u, u^*)}. \quad (4.16)$$

Si pedimos que H_2 sea un operador hermítico, entonces $\psi_\epsilon^{(2)}$, $\psi_{\epsilon^*}^{(2)}$ no pueden ser funciones de cuadrado integrable. Recordando que se ha requerido que la función $u(x)$ se desvanezca en uno de los extremos del dominio del potencial V_0 , resulta que $\psi_\epsilon^{(2)}$, $\psi_{\epsilon^*}^{(2)}$ no son de cuadrado integrable, como era de esperarse.

4.1.2. SUSY-QM compleja aplicada a la ecuación de Dirac

A partir de ahora se usará una notación distinta: en el enfoque de Schrödinger se usará H_i^\pm , ψ_i^\pm y en el de Dirac H_i , Ψ_i ; además, existirán las variables B_i ,

A_i comunes a ambos enfoques.

La ecuación de Dirac estacionaria si se aplica un campo magnético externo ortogonal al plano $x - y$ está dada por:

$$H_0\Psi = (\sigma_1(-i\partial_x + A_x) + \sigma_2(-i\partial_y + A_y) + m\sigma_3)\Psi = E\Psi, \quad (4.17)$$

donde m representa la interacción de los átomos de carbono con el substrato donde se deposita, la cual casi siempre se supone que es cero, σ_i , $i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli y A_x , A_y son las componentes del potencial vectorial tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Para simplificar el problema escogemos el gauge de Landau $\vec{A} = (0, A_0(x), 0)$, con $A_y(x) \equiv A_0(x)$. Como se discutió en el capítulo anterior, una solución natural a este problema es de la forma $\Psi_0 = \exp(iky) (\psi_0^+(x), \psi_0^-(x))^T$. Desacoplando las ecuaciones resultantes, obtenemos las dos ecuaciones de Schrödinger:

$$H_0^\pm \psi_0^\pm = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0^\pm \right) \psi_0^\pm = \mathcal{E} \psi_0^\pm, \quad \mathcal{E} = E^2 - m^2, \quad (4.18)$$

donde

$$V_0^\pm = \pm A_0' + (k + A_0)^2. \quad (4.19)$$

Partiendo ahora de estos Hamiltonianos es posible encontrar los V_i de primero y segundo orden mediante el formalismo SUSY. Así, si realizamos una primera transformación SUSY compleja usando $\epsilon_1 \in \mathbb{C}$ y la correspondiente solución semilla $u_1^{(0)}$ se llega a

$$V_1^- = V_0^- - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln u_1^{(0)} = -\left(\frac{u_1^{(0)'}}{u_1^{(0)}} \right)' + \left(\frac{u_1^{(0)'}}{u_1^{(0)}} \right)^2 + \epsilon_1, \quad (4.20)$$

donde la segunda expresión se desprende de la ecuación de Schrödinger para $u_1^{(0)}$. Por analogía con el potencial vectorial magnético inicial, podemos identificar al potencial vectorial magnético de primer orden recordando que éste último está relacionado directamente con el sistema de Dirac a través del superpotencial,

$$A_1 + k = \frac{u_1^{(0)'}}{u_1^{(0)}}. \quad (4.21)$$

Notemos que tanto el campo magnético como el potencial de Schrödinger generados son complejos.

Aplicamos ahora el segundo paso SUSY con $u_2^{(0)} = u_1^{(0)*} = u^*$ y $\epsilon_2 = \epsilon_1^* = \epsilon^*$, de donde se llega a

$$V_2^- = V_0^- - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(u, u^*), \quad (4.22)$$

el cual es un potencial real. Al analizar el potencial vectorial magnético asociado a este paso nos damos cuenta de que aún es complejo,

$$A_2 + k = \frac{d}{dx} \ln \frac{W(u, u^*)}{u}. \quad (4.23)$$

Es por esta razón que decidimos implementar un nuevo paso SUSY con el Hamiltoniano H_2^- para conseguir un sistema que tenga cantidades puramente reales. Esta tercera transformación SUSY la aplicamos usando una energía de factorización real, $\epsilon_3 \in \mathbb{R}$. Entonces, si se desea crear un nuevo estado base y cambiar el espectro de energía, se debe proceder como en el capítulo 3. Primero sumamos la cantidad $-\epsilon_3$

$$H_3^+ = H_2^- - \epsilon_3. \quad (4.24)$$

A continuación se establece la tercera relación de entrelazamiento

$$H_3^- L_3^+ = L_3^+ H_3^+, \quad (4.25)$$

donde el operador de entrelazamiento está dado por $L_3^+ = -d/dx + u_3^{(2)'}/u_3^{(2)}$ y la función $u_3^{(2)}$ se puede expresar en términos de su preimagen, $u_3^{(2)} \propto L_2^+ L_1^+ u_3^{(0)}$, siendo esta última una solución de la ecuación de Schrödinger inicial $-u_3^{(0)''} + (V_0^- - \epsilon_3)u_3^{(0)} = 0$. Teniendo en cuenta lo anterior, el tercer paso SUSY nos lleva al siguiente potencial V_3 y al potencial vectorial magnético A_3 siguientes:

$$V_3^- = (V_0^- - \epsilon_3) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(u, u^*, u_3^{(0)}), \quad (4.26)$$

$$= -A_3' + (k + A_3)^2, \quad \mathcal{E} = E^2 - m^2. \quad (4.27)$$

$$A_3 + k = \frac{d}{dx} \ln \frac{W(u, u^*, u_3^{(0)})}{W(u, u^*)}. \quad (4.28)$$

Notar que este potencial vectorial ya es real, $A_3 \in \mathbb{R}$, lo cual se verá claramente más adelante con un ejemplo.

Si asumimos que $u_3^{(0)}$ no es de cuadrado integrable pero genera un estado ligado en H_3^- , entonces siguiendo el procedimiento del capítulo 3 se debe agregar un estado físico al sistema relacionado con ϵ_3 , el cual tiene la forma:

$$\Psi_{\epsilon_3} = e^{iky} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{W(u, u^*)}{W(u, u^*, u_3^{(0)})} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

La ecuación de eigenvalores para el Hamiltoniano de Dirac del nuevo sistema se puede escribir como

$$H_3 \Psi_3 = (-i\sigma_1 \partial_x + \sigma_2 (-i\partial_y + A_3) + m\sigma_3) \Psi_3 = E \Psi_3, \quad (4.30)$$

donde

$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{iky} \begin{pmatrix} N_3^+ (L_2^+ L_1^+ \psi_0^-) \\ N_3^- (L_3^+ L_2^+ L_1^+ \psi_0^-) \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

con N_3^\pm siendo constantes de normalización dadas por:

$$N_3^+ = \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{E} - \epsilon_1)(\mathcal{E} - \epsilon_2)}}, \quad N_3^- = \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{E} - \epsilon_1)(\mathcal{E} - \epsilon_2)(\mathcal{E} - \epsilon_3)}}. \quad (4.32)$$

Se supone además que ψ_0^- está normalizado.

4.1.3. Ejemplo: grafeno en un campo magnético hiperbólico

Para ejemplificar lo discutido en la sección anterior proponemos ahora el potencial vectorial hiperbólico $\vec{A} = (0, A_0(x), 0)$, donde $A(x) = -k\nu \tanh(kx) - k$ con $\nu > 0$, el cual produce el campo magnético hiperbólico $\vec{B} = (0, 0, -\nu k^2 \text{sech}^2(kx))$. Para resolver el sistema de Dirac es necesario desacoplar las ecuaciones resultantes, lo cual en el marco de Schrödinger nos lleva al potencial de Pöschl-Teller

$$V_0^- = k^2 \nu^2 - k^2 \nu (\nu + 1) \text{sech}^2(kx). \quad (4.33)$$

La solución general de la ecuación de Schrödinger asociada a este potencial está dada por la superposición de las soluciones par e impar:

$$\psi_{0,n}^- = \begin{cases} \psi_o, & n \text{ impar}, \\ \psi_e, & n \text{ par}. \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\psi_e = \cosh^{\nu+1}(kx) {}_2F_1\left(a, b, \frac{1}{2}, -\sinh^2(kx)\right), \quad (4.35)$$

$$\psi_o = \cosh^{\nu+1}(kx) \sinh(kx) {}_2F_1\left(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\sinh^2(kx)\right), \quad (4.36)$$

donde

$$a = \frac{1}{2}\left(\nu + 1 - \frac{\eta}{k}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(\nu + 1 + \frac{\eta}{k}\right), \quad \eta = \sqrt{k^2\nu^2 - \mathcal{E}}. \quad (4.37)$$

Los niveles de energía para este potencial están dados por

$$\mathcal{E}_n = k^2\nu^2 - k^2(\nu - n)^2, \quad (4.38)$$

siendo n un estero no-negativo que cumple la condición $n < \nu$. Para el sistema de Dirac las correspondientes energías se expresan como $E_n = \pm\sqrt{k^2\nu^2 - k^2(\nu - n)^2}$. Con la finalidad de aplicar la técnica SUSY más general, se escoge como solución semilla $u_1^{(0)}(x, \epsilon) = \psi_e + C_{\pm}\psi_o$, la cual satisface $H_0^- u_1^{(0)} = \epsilon_1 u_1^{(0)}$,

$$u_1^{(0)}(x, \epsilon) = \cosh^{-\nu}(kx) \left({}_2F_1\left[a_1, b_1, \frac{1}{2}, -\sinh^2(kx)\right] + C_{\pm} \sinh(kx) {}_2F_1\left[a_1 + \frac{1}{2}, b_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\sinh^2(kx)\right] \right), \quad (4.39)$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\left(\nu - \frac{\eta_1}{k}\right), \quad b_1 = -\frac{1}{2}\left(\nu + \frac{\eta_1}{k}\right), \quad \eta_1 = \sqrt{k^2\nu^2 - \epsilon_1}. \quad (4.40)$$

Las constantes C_{\pm} hacen posible que la solución semilla se desvanezca en uno de los extremos del dominio del potencial V_0^- . De hecho, C_{\pm} condiciona a la solución semilla como sigue: $u_1^{(0)}(x, \epsilon, C_+) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $u_1^{(0)}(x, \epsilon, C_-) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Tales constantes vienen dadas explícitamente por $C_{\pm} = (\pm 1)C_o/C_e$, donde:

$$C_o = 2^{\nu+4b_1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(a_1 - b_1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - b_1\right) \Gamma(a_1)}, \quad C_e = 2^{\nu+4b_1+1} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\Gamma(a_1 - b_1)}{\Gamma(1 - b_1) \Gamma\left(a_1 + \frac{1}{2}\right)}. \quad (4.41)$$

y a_1, b_1, η_1 están dadas en (4.40) con $\mathcal{E} \rightarrow \epsilon, \epsilon \in \mathbb{C}$. El primer paso SUSY nos lleva al potencial

$$V_1^-(x, \epsilon_1) = k^2\nu^2 - k^2\nu(\nu - 1)\text{sech}^2(kx) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \mathcal{F}(x), \quad (4.42)$$

donde para simplificar se ha definido

$$\mathcal{F}(x) = {}_2F_1[a_1, b_1, \frac{1}{2}, -z^2] + \frac{C_o}{C_e} z {}_2F_1[a_1 + \frac{1}{2}, b_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -z^2], \quad (4.43)$$

con $z \equiv \sinh(kx)$. El nuevo potencial V_1^- se muestra en la Figura 4.1, donde también se puede observar el campo magnético $B_1(x, \epsilon_1)$ aplicado al sistema, el cual se deduce del potencial vectorial $A_1(x, \epsilon_1)$ dado por

$$A_1(x, \epsilon_1) = -k\nu \tanh(kx) + \frac{d}{dx} \ln \mathcal{F}(x) - k. \quad (4.44)$$

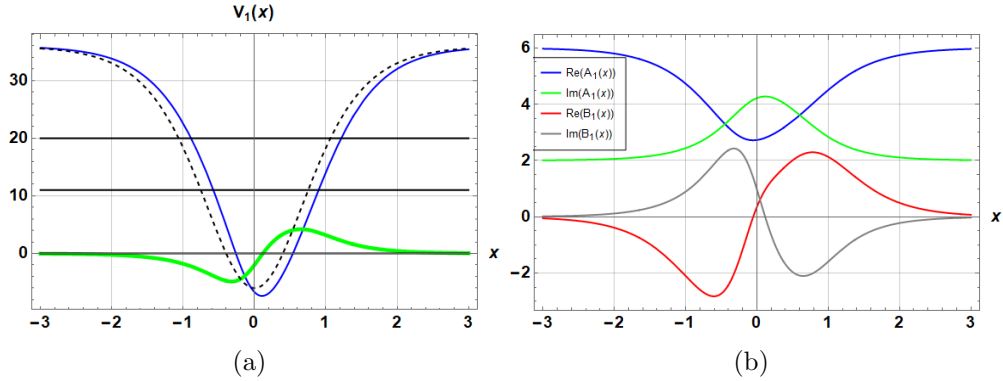


Figura 4.1: Primer paso SUSY: (a) gráfica del potencial $V_1(x, \epsilon_1)$, parte real en azul y parte imaginaria en verde; la línea segmentada corresponde a V_0^- . (b) Gráfica del potencial vectorial A_1 , parte real en azul y parte imaginaria en verde; se muestra también el campo magnético B_1 , parte real en rojo y parte imaginaria en gris. Se usó la constante de factorización $\epsilon_1 = k^2\nu^2 - k^2(\nu + 2i)^2$, con $k = 1$ y $\nu = 6$.

El segundo paso SUSY produce el potencial V_2^- y el potencial vectorial de segundo orden A_2 dados por

$$V_2^- = k^2\nu^2 - k^2\nu(\nu - 1)\text{sech}^2(kx) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln W[\mathcal{F}(x), \mathcal{F}^*(x)], \quad (4.45)$$

$$A_2(x, \epsilon_2) = \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{W[\mathcal{F}(x), \mathcal{F}^*(x)]}{\mathcal{F}(x)} \right) - k. \quad (4.46)$$

Para crear este segundo potencial se ha elegido la solución semilla como $u_2^{(0)}(\epsilon_2, x) = u_1^{(0)}(\epsilon_1, x)^* = u^*$, lo cual genera un potencial $V_2^-(x, \epsilon_2)$ que es real regular. Sin embargo, como se puede observar en la figura 4.1 el campo magnético de segundo orden $B_2(\epsilon_2, x)$ tiene aún una parte imaginaria no nula.

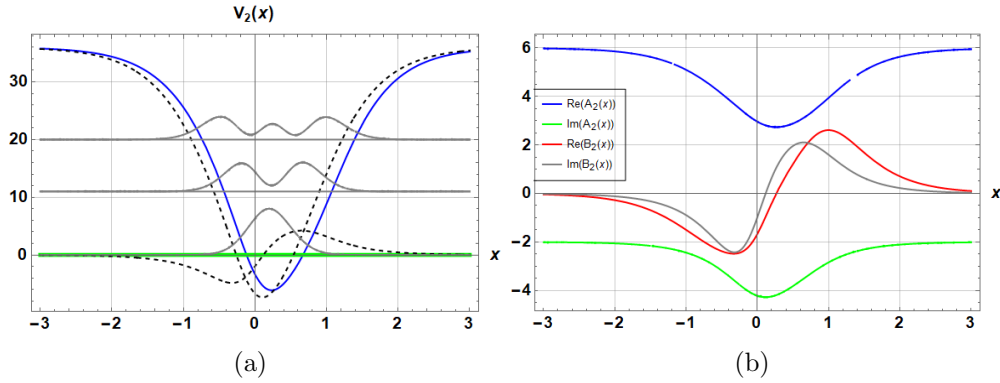


Figura 4.2: Segundo paso SUSY: (a) gráfica del potencial $V_2(x, \epsilon_2)$, parte real en azul y parte imaginaria en verde, la cual se anula en este paso. En gris se gráficán algunas densidades de probabilidad, las líneas punteadas corresponden al potencial V_1^- . (b) Gráfica del campo magnético B_2 , parte imaginaria en gris y parte real en rojo; se muestra el correspondiente potencial vectorial, parte imaginaria en verde y parte real en azul. Se usó la constante de factorización $\epsilon_2 = \epsilon_1^* = k^2\nu^2 - k^2(\nu - 2i)^2$ con $k = 1$ y $\nu = 6$.

Lo anterior nos motiva a implementar un tercer paso SUSY, en el cual elegimos como solución semilla

$$u_3^{(0)}(x, \epsilon_3) = \cosh^{-\nu}(kx) \left({}_2F_1 \left[a_3, b_3, \frac{1}{2}, -\sinh^2(kx) \right] + \tilde{C}_{\pm} \sinh(kx) {}_2F_1 \left[a_3 + \frac{1}{2}, b_3 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\sinh^2(kx) \right] \right), \quad (4.47)$$

donde se escogió $\epsilon_3 = k^2\nu^2 - k^2(\nu + 2/3)^2$, lo cual hace que los parámetros a, b, η de la función hipergeométrica sean reales y por consiguiente las constantes \tilde{C}_{\pm} son reales.

Si expresamos la tercera solución semilla como $u_3^{(0)} = \cosh^{-\nu}(kx)\mathcal{F}_3(x)$, resulta que el potencial V_3 y el potencial vectorial de tercer orden A_3 se pueden expresar en la forma

$$V_3^- = k^2\nu^2 - k^2\nu(\nu - 1)\operatorname{sech}^2(kx) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln W[\mathcal{F}(x), \mathcal{F}^*(x), \mathcal{F}_3(x)] - \epsilon_3, \quad (4.48)$$

$$A_3(x, \epsilon_3) = \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{W[\mathcal{F}(x), \mathcal{F}^*(x), \mathcal{F}_3(x)]}{W[\mathcal{F}(x), \mathcal{F}^*(x)]} \right) - k. \quad (4.49)$$

El potencial V_3^- y el potencial vectorial A_3 asociados a este tercer paso SUSY se han graficado en la Figura 4.3, donde se observa que el campo magnético $B_3(x, \epsilon_3)$ ya es real.

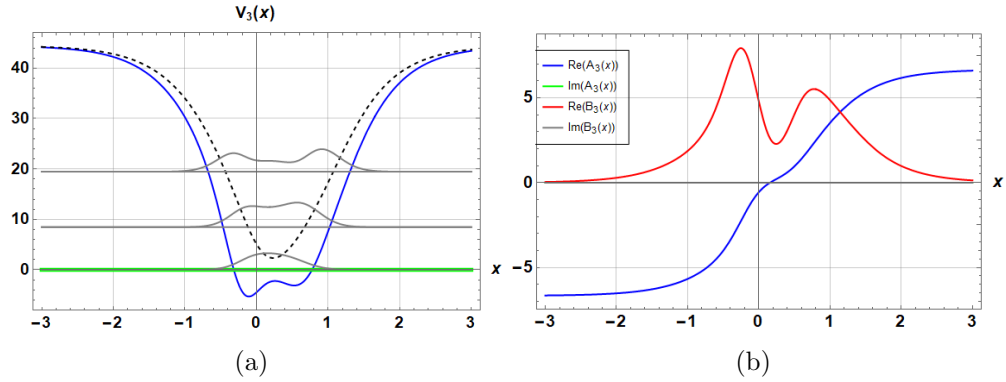


Figura 4.3: Tercer paso SUSY (a) Gráfica del potencial V_3^- , parte real en azul e imaginaria en verde, junto con V_2^- en líneas segmentadas. La densidad de probabilidad se muestra en gris. (b) Campo magnético de tercer orden (línea roja) y potencial vectorial de tercer orden (línea azul), los cuales son puramente reales. La constante de factorización se escoge como $\epsilon_3 = k^2\nu^2 - k^2(\nu + 2/3)^2$ con $k = 1$, $\nu = 6$ y $\epsilon_3 \in \mathbb{R}$.

Capítulo 5

Energías de factorización mayores que la energía del estado base

En los capítulos anteriores se aplicó el método supersimétrico para construir nuevos potenciales y campos magnéticos usando primero energías de factorización menores que la energía del estado base $\epsilon < E_0$ y posteriormente se emplearon energías de factorización complejas $\epsilon \in \mathbb{C}$. Esto deja aún por explorar el caso cuando las energías de factorización son mayores que la energía del estado base, $\epsilon > E_0$, lo cual abordamos a continuación.

Consideremos nuevamente la ecuación de DW, que describe a un electrón de Dirac en el grafeno en un campo magnético perpendicular a la superficie,

$$H_0\Psi = -i\sigma_1\partial_x\Psi - i\sigma_2(\partial_y + A_0(x))\Psi = E\Psi. \quad (5.1)$$

Usando una solución del tipo $\Psi = \exp(iky)(\psi^+, \psi^-)^T$ y desacoplando el sistema de ecuaciones resultante llegamos a dos ecuaciones de Schrödinger,

$$H_0^\pm\psi^\pm = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0^\pm\right)\psi^\pm = \mathcal{E}\psi^\pm, \quad (5.2)$$

con $\mathcal{E} = E^2$ y $V_0^\pm = \pm A'_0 + (A_0 + k)^2$. Procediendo de manera análoga a lo realizado previamente, para generar el nuevo sistema primero se establece una relación de entrelazamiento tomando alguno de los dos hamiltonianos desacoplados H^\pm como el inicial; nosotros elegiremos H_0^- ,

$$H_1^-L_1^+ = L_1^+H_0^-, \quad (5.3)$$

donde

$$L_1^+ = -\frac{d}{dx} + \frac{u_1'^{(0)}}{u_1^{(0)}}. \quad (5.4)$$

Como se mostró anteriormente, la solución semilla $u_1^{(0)}(x)$ satisface la ecuación de Schrödinger inicial,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0^-\right) u_1^{(0)} = \epsilon_1 u_1^{(0)}. \quad (5.5)$$

En virtud del teorema oscilatorio, cuando usamos energías de factorización mayores que la energía del estado base de H_0^- , $\epsilon_1 > \mathcal{E}_0$ la función de transformación $u_1^{(0)}(x)$ tendrá por lo menos un nodo, lo cual generará divergencias en el nuevo potencial. Este comportamiento no deseado nos impulsa a aplicar nuevamente el método supersimétrico con la esperanza de eliminar tales divergencias, como se hizo en el capítulo anterior con las partes imaginarias de los potenciales. Elegimos por tanto como potencial de partida a $V_1^-(x, \epsilon_1)$,

$$H_2^- L_2^+ = L_2^+ H_1^-. \quad (5.6)$$

En este segundo paso SUSY es muy importante que el Wronskiano de las dos soluciones semilla $W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$ no tenga nodos, las cuales están asociados a las energías de factorización ϵ_1, ϵ_2 . Para evitar las singularidades en el nuevo potencial se ubicarán las energías de factorización en la forma $\mathcal{E}_0 < \dots < \mathcal{E}_i < \epsilon_2 < \epsilon_1 < \mathcal{E}_{i+1} < \dots < \mathcal{E}_n$. Notar que ϵ_1 y ϵ_2 no pertenecen al espectro de energías de H_0^- ya que las soluciones semilla asociadas no son de cuadrado integrable. Además, se deben elegir los nodos de tales soluciones de forma muy específica: $u_2^{(0)}$ debe tener $i + 2$ nodos mientras que $u_1^{(0)}$ tiene $i + 1$ nodos, lo cual evitará el surgimiento de nodos en el Wronskiano y consecuentemente la aparición de divergencias en el potencial de segundo orden V_2^- .

No obstante, al igual que en el caso complejo el campo magnético de segundo orden $B_2 = \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) / u_1^{(0)} \right)$ tiene en este caso el problema de la persistencia de singularidades, ya que $u_1^{(0)}$ posee nodos que inducen tales divergencias. Por lo tanto, el nuevo hamiltoniano de Dirac H_2 tendrá singularidades debidas a A_2 .

Por lo anterior se opta nuevamente por hacer el tercer paso SUSY con los

siguientes hamiltonianos de Schrödinger:

$$\begin{aligned} H_3^+ &= H_2^- - \epsilon_3 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) - \epsilon_3, \\ H_3^- &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}) - \epsilon_3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

El campo magnético asociado al sistema de tercer orden tiene la forma:

$$B_3 = \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\frac{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})} \right), \quad (5.8)$$

el cual ya es un campo magnético regular, que permite describir a un nuevo hamiltoniano de Dirac en dos dimensiones en dicho campo magnético perpendicular:

$$H_3 = -i\sigma_1 \partial_x - i\sigma_2 (\partial_y + A_3(x) + k), \quad (5.9)$$

donde

$$A_3 + k = \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})} \right). \quad (5.10)$$

Las eigenfunciones y eigenvalores de H_3 están dados por

$$\Psi_{\epsilon_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{\epsilon_3}^- \frac{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})} \end{pmatrix}, \quad E_{\epsilon_3} = 0, \quad (5.11)$$

$$\Psi_{\epsilon_2} = \begin{pmatrix} N_{\epsilon_2}^+ \frac{u_1^{(0)}}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})} \\ N_{\epsilon_2}^- \frac{W(u_1^{(0)}, u_3^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})} \end{pmatrix}, \quad E_{\epsilon_2} = \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_3}, \quad (5.12)$$

$$\Psi_{\epsilon_1} = \begin{pmatrix} N_{\epsilon_1}^+ \frac{u_2^{(0)}}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})} \\ N_{\epsilon_1}^- \frac{W(u_2^{(0)}, u_3^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})} \end{pmatrix}, \quad E_{\epsilon_1} = \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_3}, \quad (5.13)$$

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} N_n^+ L_2^+ L_1^+ \psi_n^- \\ N_n^- L_3^+ L_2^+ L_1^+ \psi_n^- \end{pmatrix}, \quad E_n = \sqrt{\mathcal{E}_n - \epsilon_3}, \quad (5.14)$$

donde $N_{\epsilon_i}^\pm$ y N_n^\pm son constantes de normalización.

5.1. Ejemplo: Oscilador armónico

En esta sección se ilustrarán los anteriores resultados generales a través del oscilador armónico, el cual ya se usó en el capítulo 3. Iniciamos considerando un hamiltoniano de DW en un campo magnético constante perpendicular al plano $x - y$,

$$H_0 = -i\sigma_1\partial_x - i\sigma_2(\partial_y + B_0x), \quad (5.15)$$

del cual se desprenden los dos hamiltonianos de Schrödinger,

$$H_0^\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{4} \left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2 \pm \frac{\omega}{2}, \quad (5.16)$$

con $\omega = 2B_0$. Se escoge ahora H^- como el hamiltoniano de partida, del cual generamos el primer paso SUSY usando la solución semilla

$$u_1^{(0)} = e^{-\frac{\omega}{4}(x+\frac{2k}{\omega})^2} \left({}_1F_1\left[a, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2\right] + 2\nu_1 \frac{\Gamma[a + \frac{1}{2}]}{\Gamma[a]} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x + \frac{2k}{\omega}\right) {}_1F_1\left[a + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\omega}{2}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2\right] \right), \quad (5.17)$$

con $a = -\epsilon_1/2\omega$ y $\mathcal{E}_1 < \epsilon_1 \equiv 1.7 < \mathcal{E}_2$. El campo magnético asociado a este sistema tiene la forma

$$B_1 = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{u_1^{(0)'}}{u_1^{(0)}} \right). \quad (5.18)$$

Como se esperaba, el potencial V_1^- y el campo magnético B_1 divergen con este primer paso SUSY, lo cual se ve reflejado en la figura 5.1.

Procedemos ahora a aplicar la segunda transformación SUSY con la energía de factorización ϵ_2 tal que $\mathcal{E}_1 < \epsilon_2 < \epsilon_1 < \mathcal{E}_2$, cuidando que el número de nodos de $u_2^{(0)}$ sea el adecuado,

$$u_2^{(0)} = e^{-\frac{\omega}{4}(x+\frac{2k}{\omega})^2} \left({}_1F_1\left[a_2, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2\right] + 2\nu_2 \frac{\Gamma[a_2 + \frac{1}{2}]}{\Gamma[a_2]} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x + \frac{2k}{\omega}\right) {}_1F_1\left[a_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\omega}{2}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2\right] \right), \quad (5.19)$$

donde $a_2 = -\epsilon_2/2\omega$. Así, si elegimos $\nu_2 = 1.1$ y $\nu_1 = 0.1$ vamos a obtener tres y dos nodos para $u_2^{(0)}$ y $u_1^{(0)}$ respectivamente, como se observa en la

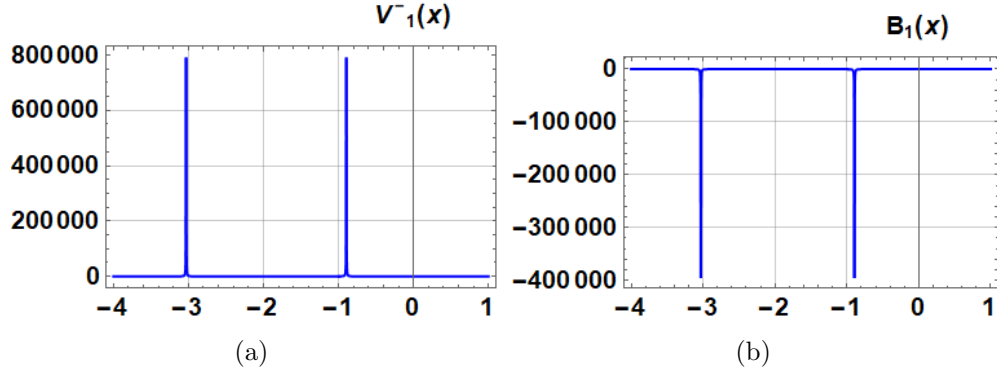


Figura 5.1: Primer paso SUSY, en donde se usa una energía de factorización por encima del estado base, $\mathcal{E}_1 < \epsilon_1 = 1.7 < \mathcal{E}_2$. A la izquierda se observa el potencial generado y a la derecha el campo magnético asociado.

Figura 5.2. Además, hemos graficado el potencial en la Figura 5.3 usando la ecuación

$$V_2^- = V_0^- - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}). \quad (5.20)$$

Se ha construido también la densidad de probabilidad asociada a los eigenestados del Hamiltoniano de Schrödinger de segundo orden $H_2^- = H_3^+ + \epsilon_3$,

$$\rho_n = |N_n^+ L_2^+ L_1^+ \psi_n^-|^2, \quad (5.21)$$

donde N_n^+ es una constante de normalización. La gráfica de tales densidades de probabilidad se observa en la Figura 5.4. La densidad de probabilidad completa $\Psi^\dagger \Psi$ para el sistema de Dirac diverge, ya que incluye las densidades de los eigenestados del sistema de primer orden directamente.

Por último, para el tercer paso SUSY elegimos una energía de factorización menor que la del estado base, $\epsilon_3 < \mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_1 < \epsilon_2 < \epsilon_1 < \mathcal{E}_2$, lo cual nos lleva a un sistema que ya no tiene ninguna divergencia. En este paso la solución semilla $u_3^{(0)}$ tiene la misma forma que $u_1^{(0)}$ y $u_2^{(0)}$, sólo se debe cumplir que $|\nu_3| < 1$. Ya que se desea crear un nuevo nivel para H_3^- , se debe realizar primero una traslación en la energía del sistema de partida,

$$H_3^+ = H_2^- - \epsilon_3. \quad (5.22)$$

Generamos ahora el nuevo hamiltoniano H_3^- a través del operador de entrelazamiento L_3^+ ,

$$H_3^- L_3^+ = L_3^+ H_3^+. \quad (5.23)$$

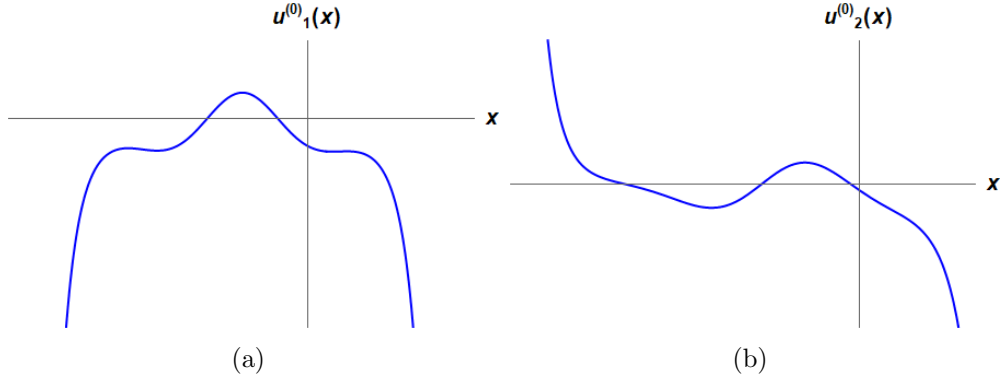


Figura 5.2: Gráfica de $u_1^{(0)}$ (a) y $u_2^{(0)}$ (b), en donde se observa el número de nodos en cada caso. Se eligió $\epsilon_1 = 1.7$, $\nu_1 = 0.1$ y $\epsilon_2 = 1.5$, $\nu_2 = 1.1$, lo cual garantiza la regularidad del potencial de segundo orden.

Los potenciales V_3^\pm se han graficado en la Figura 5.5, en donde se muestra también el campo magnético asociado, el cual ahora es regular. La densidad de probabilidad para el sistema de Dirac de tercer orden descrito por H_3 se construye a través de los eigenestados de los Hamiltonianos de Schrödinger H_3^\pm . Las ecuaciones para la densidad de probabilidad se dividen en varios casos, uno de los cuales conduce a

$$\rho_n = |N_n^+ L_2^+ L_1^+ \psi_n^-|^2 + |N_n^- L_3^+ L_2^+ L_1^+ \psi_n^-|^2, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (5.24)$$

mientras que para el “missing state” se tiene que

$$\rho_{\epsilon_3} = \left| N_{\epsilon_3}^- \frac{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})} \right|^2. \quad (5.25)$$

Gráficas de algunas de estas densidades de probabilidad se muestran en la Figura 5.6.

5.2. Algoritmo confluyente

En esta sección trataremos el algoritmo confluyente, el cual se basa en primero borrar un nivel de energía del sistema original y reintroducirlo después en el mismo lugar [43, 44, 45].

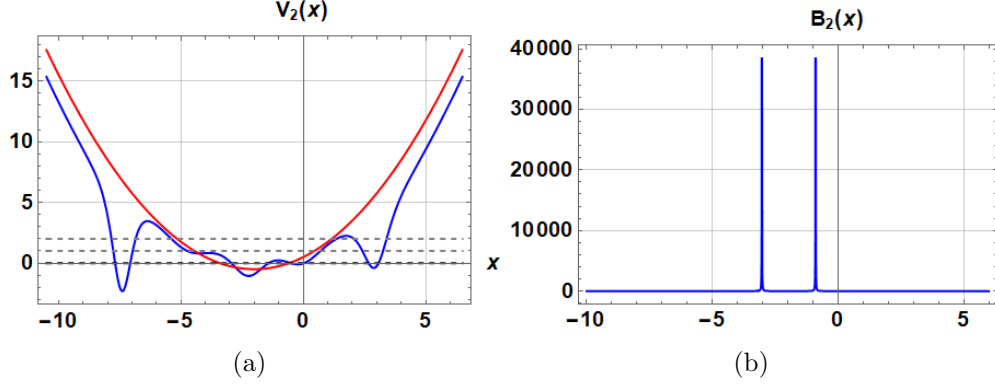


Figura 5.3: Segundo paso SUSY: potencial regular de segundo orden $V_2^-(x)$ en azul e inicial V_0^- en rojo (izquierda). Campo magnético divergente (derecha). Se escogió $\epsilon_1 = 1.7$, $\epsilon_2 = 1.5$, $\nu_1 = 0.1$ y $\nu_2 = 1.1$.

Partimos entonces del sistema de Dirac inicial

$$H_0\Psi = (-i\sigma_1\partial_x - i\sigma_2(\partial_y + A_0))\Psi = E\Psi. \quad (5.26)$$

Al desacoplar el sistema resultante encontramos dos ecuaciones de Schrödinger de la forma

$$H_0^\pm\psi_0^\pm = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0^\pm\right)\psi_0^\pm = \mathcal{E}\psi_0^\pm, \quad (5.27)$$

donde $V_0^\pm = \pm A_0' + (k + A_0)^2$. Se elige el Hamiltoniano correspondiente al potencial V_0^- para aplicar el primer paso SUSY, por lo que se debe cumplir

$$H_1^-L_1^+ = L_1^+H_0^-, \quad L_1^+ = -\frac{d}{dx} + \frac{u_1^{(0)'}}{u_1^{(0)}}, \quad (5.28)$$

donde $H_0^-u_1^{(0)} = \epsilon_1u_1^{(0)}$. Vamos a escoger nuevamente una energía de factorización que esté por encima de la del estado base pero que coincida con algún nivel de energía excitado de H_0^- , es decir, $\epsilon_1 = \mathcal{E}_j$, $j \neq 0$ y $u_1^{(0)}$ se desvanece en ambos extremos del dominio del potencial. Esto nos llevará a un potencial de primer orden singular de la forma

$$V_1^- = V_0^- - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln u_1^{(0)}, \quad (5.29)$$

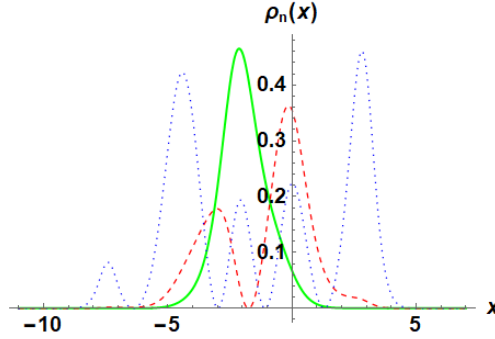


Figura 5.4: Densidad de probabilidad para los eigenestados de H_2^- con $n = 0$ (línea verde continua), $n = 1$ (línea roja segmentada) y $n = 2$ (línea azul punteada). Se usó $\epsilon_1 = 1.7$, $\epsilon_2 = 1.5$, $\nu_1 = 0.1$ y $\nu_2 = 1.1$.

y al potencial vectorial de primer orden singular

$$A_1 + k = \frac{d}{dx} \ln u_1^{(0)}. \quad (5.30)$$

A primera vista este sistema de primer orden no es de gran interés, al tener cantidades físicas no regulares. No obstante, aplicamos un segundo paso SUSY usando la misma energía de factorización $\epsilon_2 = \epsilon_1$. Es importante notar que la solución semilla $u_2^{(0)}$ debe ser una eigenfunción generalizada de segundo orden del Hamiltoniano H_0^- , $(H_0^- - \epsilon_1)^2 u_2^{(0)} = 0$, que se puede determinar resolviendo la ecuación $(H_0^- - \epsilon_1)u_2^{(0)} = u_1^{(0)}$ lo cual conduce a

$$u_2^{(0)} = u_1^{(0)} \left(\beta + \int_0^x \frac{w(\zeta)}{(u_1^{(0)}(\zeta))^2} d\zeta \right), \quad (5.31)$$

donde

$$w(x) = w_0 - \int (u_1^{(0)})^2 dx. \quad (5.32)$$

La construcción del nuevo potencial V_2 se obtiene del wronskiano de las dos soluciones semilla,

$$V_2^-(x, \epsilon_2) = V_0^- - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}). \quad (5.33)$$

Calculando dicho wronskiano se llega a

$$W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) = w(x), \quad (5.34)$$

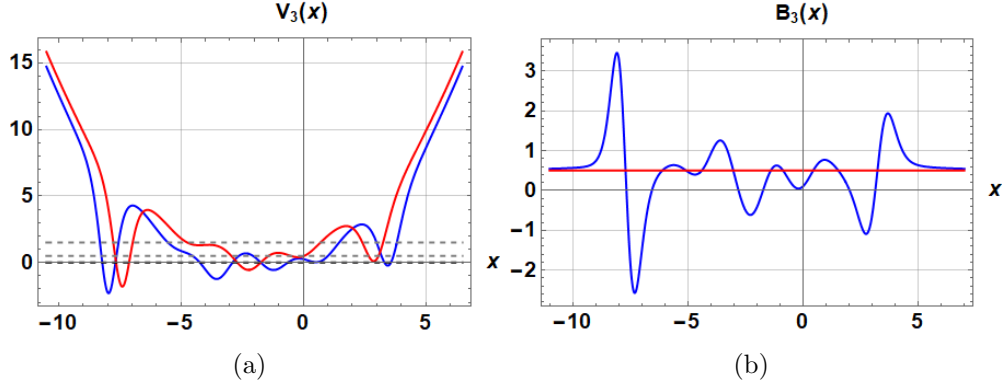


Figura 5.5: Tercer paso SUSY: a la izquierda se observan los potenciales V_3^\pm y a la derecha el campo magnético asociado B_3 , los cuales son ambos regulares. Se usaron la energía de factorización $\epsilon_3 = -0.5$ y el parámetro $\nu_3 = 0.5$.

con lo cual podemos expresar el nuevo potencial en la forma:

$$V_2^-(x, \epsilon_2) = V_0^- - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln w(x). \quad (5.35)$$

El potencial vectorial correspondiente se expresa como

$$A_2 + k = \frac{d}{dx} \left(\frac{w(x)}{u_1^{(0)}} \right), \quad (5.36)$$

el cual es singular debido a los ceros de $u_1^{(0)}$. Para tratar de eliminar dichas singularidades hacemos un tercer paso SUSY siguiendo los pasos indicados en el capítulo 3 para crear un nuevo estado base. Al final, construimos el potencial de tercer orden V_3^- junto con el potencial vectorial correspondiente A_3 , ambos no singulares, los cuales están dados por:

$$V_3^-(x, \epsilon_2) = V_0^- - \epsilon_3 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}), \quad (5.37)$$

$$A_3 + k = \frac{d}{dx} \left(\frac{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})}{w(x)} \right). \quad (5.38)$$

Con lo anterior es posible construir ahora el nuevo hamiltoniano de Dirac no singular H_3 , el cual satisface la siguiente ecuación de eigenvalores:

$$H_3 \Psi_3 = (-i\sigma_1 \partial_x - i\sigma_2 (\partial_y + A_3)) \Psi_3 = \sqrt{E^2 - \epsilon_3} \Psi_3. \quad (5.39)$$

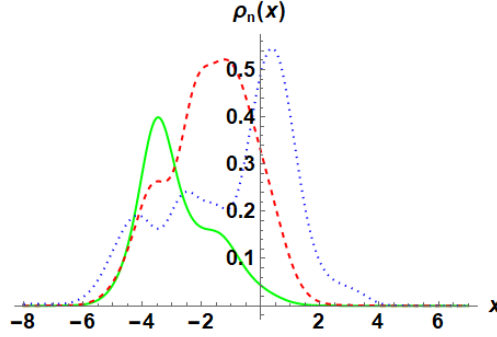


Figura 5.6: Densidad de probabilidad para el estado base de H_3 (línea verde continua) y los estados excitados con $n = 1$ (línea roja segmentada) y $n = 2$ (línea azul punteada).

Las eigenfunciones y eigenvalores resultantes se expresan como:

$$\Psi_{\epsilon_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ N_{\epsilon_3}^- \frac{w(x)}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})} \end{pmatrix}, \quad E_{\epsilon_3} = 0, \quad (5.40)$$

$$\Psi_{\epsilon_1} \equiv \Psi_j = \begin{pmatrix} N_j^+ \frac{u_1^{(0)}}{w(x)} \\ N_j^- \frac{W(u_2^{(0)}, u_3^{(0)})}{W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})} \end{pmatrix}, \quad E_{\epsilon_1} \equiv E_j = \sqrt{\epsilon_j - \epsilon_3}, \quad (5.41)$$

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} N_n^+ L_2^+ L_1^+ \psi_n^- \\ N_n^- L_3^+ L_2^+ L_1^+ \psi_n^- \end{pmatrix}, \quad E_n = \sqrt{\mathcal{E}_n - \epsilon_3}, \quad n \neq j, \quad (5.42)$$

donde $N_{\epsilon_3}^-$ y N_n^\pm son constantes de normalización.

5.2.1. Ejemplo

En este caso vamos a emplear nuevamente el oscilador armónico. Para el primer paso SUSY vamos a usar la solución semilla:

$$u_1^{(0)} = e^{-\frac{\omega}{4}(x + \frac{2k}{\omega})^2} \left({}_1F_1\left[a, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2\right] + 2\nu_1 \frac{\Gamma[a + \frac{1}{2}]}{\Gamma[a]} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x + \frac{2k}{\omega}\right) {}_1F_1\left[a + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\omega}{2}\left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2\right] \right), \quad (5.43)$$

donde $\nu_1 = 1$ y $\epsilon_1 = 4\omega$, con lo cual $u_1^{(0)}$ se reduce a:

$$u_1^{(0)} = e^{-\frac{\omega}{4}\left(x+\frac{2k}{\omega}\right)^2} \left(1 - 2\omega \left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^2 + \frac{\omega^2}{3} \left(x + \frac{2k}{\omega}\right)^4 \right), \quad (5.44)$$

la cual se desvanece en ambos extremos del eje x , $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_1^{(0)} = 0$. Los parámetros seleccionados implican que la solución semilla $u_1^{(0)}$ de la ecuación (5.44) es proporcional al cuarto estado excitado de H_0^- , como se muestra gráficamente en la Figura 5.7. Esta elección de la primera solución semilla

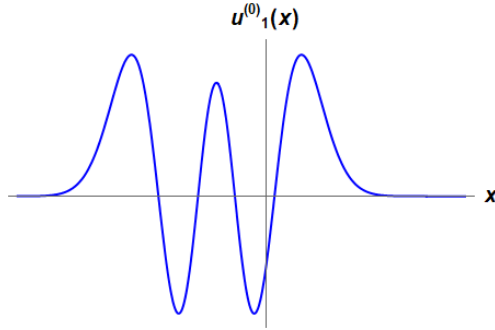


Figura 5.7: Solución semilla $u_1^{(0)}$ usada en el algoritmo confluyente.

produce divergencias en el potencial V_1^- , en el campo magnético B_1 y en las densidades de probabilidad de las eigenfunciones asociadas al sistema. Se realiza a continuación un segundo paso SUSY, tomando nuevamente la energía de factorización del primer paso SUSY, $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 4\omega$, pero usando ahora la eigenfunción generalizada de segundo orden asociada a ϵ_1 :

$$u_2^{(0)} = u_1^{(0)} \left(\beta + \int \frac{w(x)}{(u_1^{(0)}(x))^2} dx \right). \quad (5.45)$$

En este ejemplo la función $w(x)$ está dada por

$$\begin{aligned}
w(x) = w_0 - \frac{1}{9\omega^4} & \left[12\sqrt{2\pi}\omega^{7/2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{2k+x\omega}{\sqrt{2}\sqrt{\omega}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\omega}}\right) \right) \right. \\
& - e^{-\frac{\omega}{2}\left(x+\frac{2k}{\omega}\right)^2} (\omega x + 2k) \left(64k^6 + 16k^4\omega(12kx - 5) + 4k^2\omega^2(20kx(3kx - 2) + 17) \right. \\
& + x^4\omega^5(12kx - 5) + x^2\omega^4(20kx(3kx - 2) + 17) + \omega^3(4kx(10kx(4kx - 3) + 17) \\
& \left. \left. + 15) + x^6\omega^6 \right) + 2ke^{-\frac{2k^2}{\omega}} (64k^6 - 80k^4\omega + 68k^2\omega^2 + 15\omega^3) \right]. \tag{5.46}
\end{aligned}$$

Sabiendo ahora que el potencial de segundo orden está determinado por el wronskiano de las soluciones semilla, $W(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) = w(x)$, al conocer $w(x)$ es posible calcular el potencial V_2^- , el campo magnético B_2 y la densidad de probabilidad para los eigenestados de H_2^- , $\rho \propto |L_2 L_2 \psi_0^-|^2$, como se muestra en la Figura 5.8.

Por último, el tercer paso SUSY se construye con una energía de factorización menor que la del estado base inicial, con lo cual se modifica el espectro de energía inicial en la forma $E_n = \sqrt{\mathcal{E}_n - \epsilon_3}$, $n = 0, 1, \dots$. Notar que aparece un nuevo estado base con energía cero, $E_0 = 0$. En nuestro ejemplo, para el tercer paso SUSY se usó $\epsilon_3 = -0.5$ y la siguiente solución semilla par

$$u_1^{(0)} = e^{-\frac{\omega}{4}\left(x+\frac{2k}{\omega}\right)^2} {}_1F_1 \left[a, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2} \left(x + \frac{2k}{\omega} \right)^2 \right]. \tag{5.47}$$

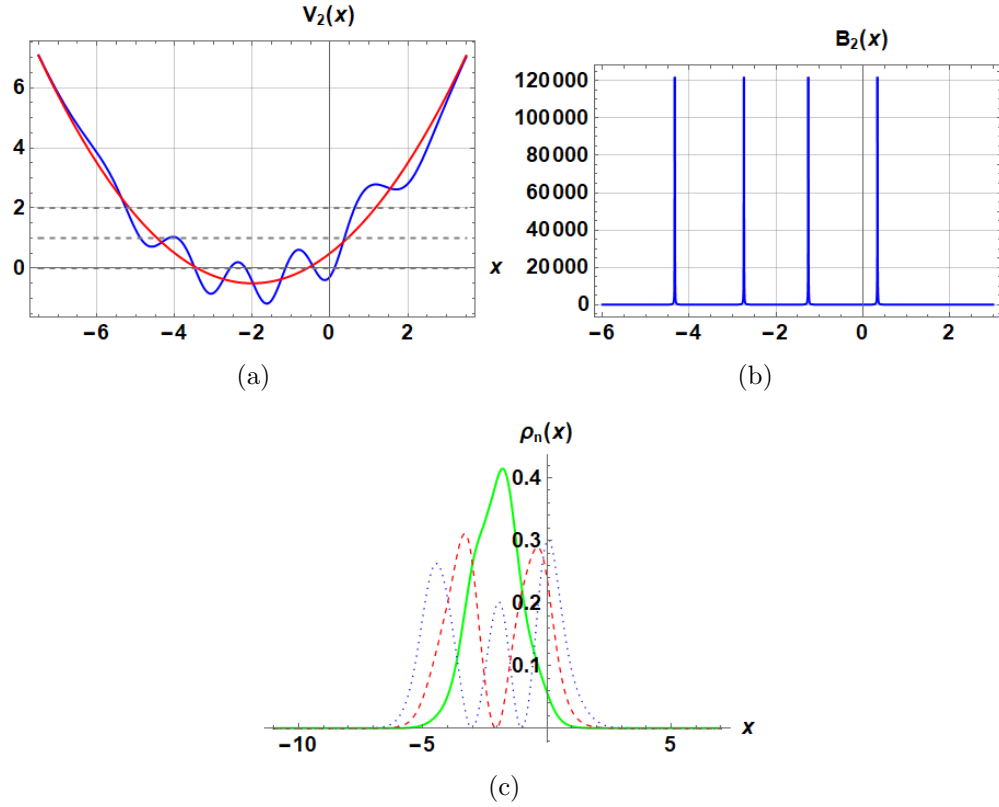


Figura 5.8: Segundo paso SUSY: potenciales V_2^- y V_0^- (arriba, izquierda) y el campo magnético asociado B_2 (arriba, derecha), el cual diverge. Densidad de probabilidad (abajo) para los eigenestados de H_2^- con $n = 0$ (línea verde continua), $n = 1$ (línea roja segmentada) y $n = 2$ (línea punteada). Se usó $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4\omega$ con $\omega = 1$, $k = 1$.

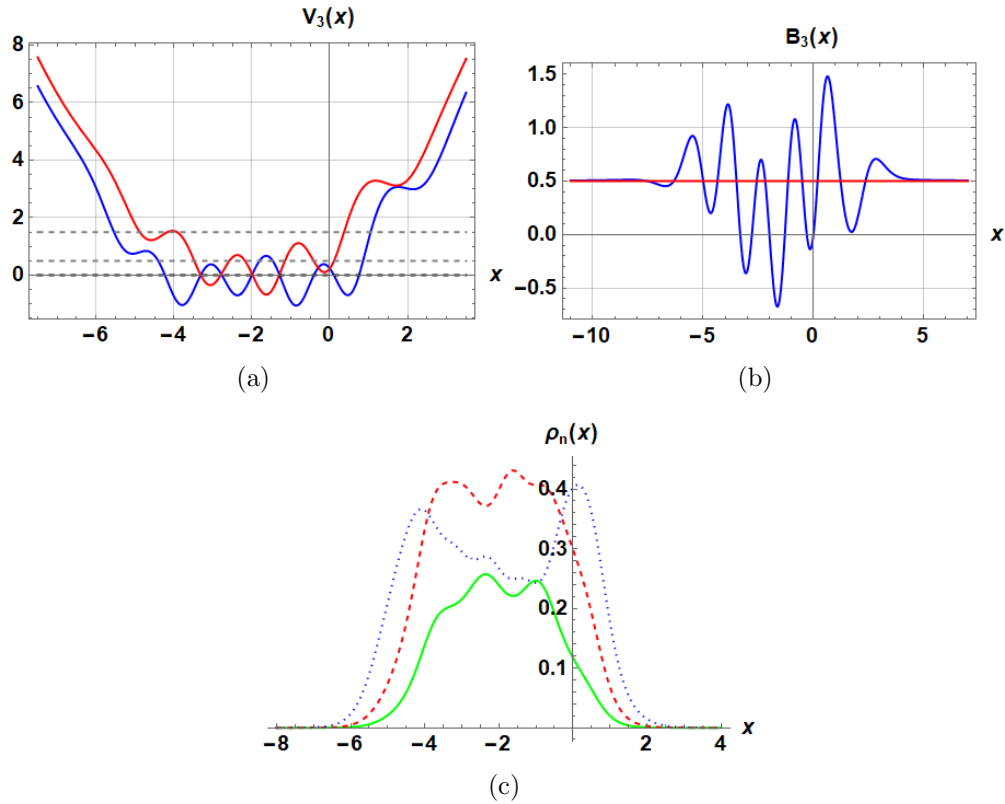


Figura 5.9: Tercer paso SUSY: potenciales V_3^- y $V_3^+ = V_2^- - \epsilon_3$ (izquierda, arriba), campo magnético asociado B_3 (arriba, derecha) y densidades de probabilidad $\Psi^\dagger\Psi$ (abajo). Al nuevo estado base con energía cero le corresponde la densidad de probabilidad en verde, la línea roja segmentada al estado excitado con $n = 0$ y la punteada a $n = 1$. Se usó $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$, $\epsilon_3 = -0.5$, $\omega = 1$, $k = 1$ y $\nu = 0$.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se mostró la forma en que se relaciona la mecánica cuántica supersimétrica de primer orden y la ecuación de Dirac-Weyl, que describe a electrones de baja energía en grafeno. Además, se introdujo la forma de iterar este procedimiento y su conexión con la SUSY-QM para órdenes mayores que uno.

Este trabajo mostró que es posible generar teóricamente una familia de soluciones exactas para la ecuación de Dirac-Weyl, con los correspondientes campos magnéticos inhomogéneos externos, por medio del método SUSY. Dichas soluciones se extendieron grandemente mediante la iteración del método SUSY un número de veces arbitrario.

Se mostró también cómo implementar una SUSY compleja de dos pasos de manera que no se afecte el espectro de energía del sistema. Además, se encontró que es necesario hacer una tercera transformación SUSY real para eliminar completamente la parte imaginaria del campo magnético que se genera. Es importante resaltar que al iterar por tercera vez la técnica SUSY es posible agregar un nuevo estado base, modificando además el espectro de energía del sistema inicial. Se remarcó también la diferencia con la SUSY-QM del caso de Schrödinger, en donde basta la aplicación del método una sola vez para que no haya parte imaginaria en el campo magnético.

De igual forma que en el caso complejo, se generaron nuevos potenciales con el método SUSY usando energías de factorización que están por encima de la energía del estado base inicial, pero sin afectar el espectro del sistema. En este

caso se observó también la necesidad de hacer una tercera transformación SUSY para construir un sistema de Dirac que no tenga divergencias en el potencial vectorial. Es importante notar que en la tercera transformación SUSY se introdujo un nuevo estado base, que modificó el espectro del sistema. Por último, en este trabajo se implementó también el algoritmo confluyente, en el cual se usan las mismas dos energías de factorización ubicadas por encima del estado base y que genera potenciales con múltiples deformaciones. Este caso también requirió de una tercera transformación SUSY para eliminar las singularidades inducidas en el campo magnético, la cual generará un nuevo estado base \tilde{A} como modificaciones en el espectro del sistema inicial.

6.1. Perspectivas

- Estudio completo de la mecánica cuántica supersimétrica de tercer orden desde un punto de vista matricial, con lo cual se mostraría la equivalencia entre la SUSY matricial y la SUSY-QM de Schrödinger.
- Estudio y determinación de los estados coherentes para un sistema de Dirac-Weyl que describa una capa de grafeno en un campo magnético perpendicular externo que decae exponencialmente.

6.1.1. Trabajos publicados en el doctorado relacionados con la tesis

- “*Polynomial Heisenberg algebras, multiphoton coherent states and geometric phases*”, en colaboración con E. Díaz-Bautista y D.J. Fernández, Phys. Scr. 94(2019) 045203.
- “*Dirac electron in graphene with magnetic fields arising from first-order intertwining operators*”, en colaboración con D.J. Fernández, J. Phys. A: Math. Theor. 53(2020) 035302.
- “*Coherent states for graphene under the interaction of crossed electric and magnetic fields*”, en colaboración con E. Díaz-Bautista y M. Oliva-Leyva, Ann. Phys. 421(2020) 168287.
- “*Reduction scheme for coupled Dirac systems*”, en colaboración con V. Jakubský, J. Phys. A: Math. Theor. 54(2021) 455301.

Bibliografía

- [1] Gerardo G Naumis, Salvador Barraza-Lopez, Maurice Oliva-Leyva, and Humberto Terrones. Electronic and optical properties of strained graphene and other strained 2d materials: a review. *Reports on Progress in Physics*, 80(9):096501, 2017.
- [2] Philip Richard Wallace. The band theory of graphite. *Physical review*, 71(9):622, 1947.
- [3] Kostya S Novoselov, Andre K Geim, Sergei V Morozov, De-eng Jiang, Yanshui Zhang, Sergey V Dubonos, Irina V Grigorieva, and Alexandr A Firsov. Electric field effect in atomically thin carbon films. *science*, 306(5696):666–669, 2004.
- [4] Mikhail I Katsnelson. Graphene: carbon in two dimensions. *Materials today*, 10(1-2):20–27, 2007.
- [5] AH Castro Neto, Francisco Guinea, Nuno MR Peres, Kostya S Novoselov, and Andre K Geim. The electronic properties of graphene. *Reviews of modern physics*, 81(1):109, 2009.
- [6] Yenny Hernandez, Valeria Nicolosi, Mustafa Lotya, Fiona M Blighe, Zhenyu Sun, Sukanta De, IT McGovern, Brendan Holland, Michele Byrne, Yurii K Gun'Ko, et al. High-yield production of graphene by liquid-phase exfoliation of graphite. *Nature nanotechnology*, 3(9):563–568, 2008.
- [7] Songfeng Pei and Hui-Ming Cheng. The reduction of graphene oxide. *Carbon*, 50(9):3210–3228, 2012.
- [8] Konstantin S Novoselov and AK Geim. The rise of graphene. *Nat. Mater*, 6(3):183–191, 2007.

- [9] Kostya S Novoselov, Andre K Geim, Sergei Vladimirovich Morozov, Dingde Jiang, Michail I Katsnelson, IVa Grigorieva, SVb Dubonos, Firsov, and AA. Two-dimensional gas of massless dirac fermions in graphene. *nature*, 438(7065):197–200, 2005.
- [10] MI Katsnelson, KS Novoselov, and AK Geim. Chiral tunnelling and the klein paradox in graphene. *Nature physics*, 2(9):620–625, 2006.
- [11] Vít Jakubský, Luis-Miguel Nieto, and Mikhail S Plyushchay. Klein tunneling in carbon nanostructures: a free-particle dynamics in disguise. *Physical Review D*, 83(4):047702, 2011.
- [12] Yuanbo Zhang, Yan-Wen Tan, Horst L Stormer, and Philip Kim. Experimental observation of the quantum hall effect and berry’s phase in graphene. *nature*, 438(7065):201–204, 2005.
- [13] JR Williams, L DiCarlo, and CM Marcus. Quantum hall effect in a gate-controlled pn junction of graphene. *Science*, 317(5838):638–641, 2007.
- [14] A De Martino, L Dell’Anna, and R Egger. Magnetic confinement of massless dirac fermions in graphene. *Physical review letters*, 98(6):066802, 2007.
- [15] Claire Berger, Zhimin Song, Xuebin Li, Xiaosong Wu, Nate Brown, Cécile Naud, Didier Mayou, Tianbo Li, Joanna Hass, Alexei N Marchenkov, et al. Electronic confinement and coherence in patterned epitaxial graphene. *Science*, 312(5777):1191–1196, 2006.
- [16] Gabriela Murguía, Alfredo Raya, Ángel Sánchez, and Edward Reyes. The electron propagator in external electromagnetic fields in low dimensions. *American Journal of Physics*, 78(7):700–707, 2010.
- [17] Alfredo Raya and Edward Reyes. Fermion condensate and vacuum current density induced by homogeneous and inhomogeneous magnetic fields in $(2+1)$ dimensions. *Physical Review D*, 82(1):016004, 2010.
- [18] Erik Díaz-Bautista and David J Fernández. Graphene coherent states. *The European Physical Journal Plus*, 132(11):499, 2017.

- [19] V Jakubský, Ş Kuru, J Negro, and S Tristao. Supersymmetry in spherical molecules and fullerenes under perpendicular magnetic fields. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 25(16):165301, 2013.
- [20] V Jakubský, Ş Kuru, and Javier Negro. Carbon nanotubes in an inhomogeneous transverse magnetic field: exactly solvable model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(11):115307, 2014.
- [21] Ş Kuru, J Negro, and Sandro Tristao. Degeneracy in carbon nanotubes under transverse magnetic δ -fields. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 27(28):285501, 2015.
- [22] Ş Kuru, J Negro, and LM Nieto. Exact analytic solutions for a dirac electron moving in graphene under magnetic fields. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 21(45):455305, 2009.
- [23] Enrique Milpas, Manuel Torres, and Gabriela Murguía. Magnetic field barriers in graphene: an analytically solvable model. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23(24):245304, 2011.
- [24] Mahdi Eshghi and Hosein Mehraban. Exact solution of the dirac–weyl equation in graphene under electric and magnetic fields. *Comptes Rendus Physique*, 18(1):47–56, 2017.
- [25] Y Concha, A Huet, A Raya, and D Valenzuela. Supersymmetric quantum electronic states in graphene under uniaxial strain. *Materials Research Express*, 5(6):065607, 2018.
- [26] D Jahani, F Shahbazi, and MR Setare. Magnetic dispersion of dirac fermions in graphene under inhomogeneous field profiles. *The European Physical Journal Plus*, 133(8):1–11, 2018.
- [27] Bikashkali Midya and David J Fernández. Dirac electron in graphene under supersymmetry generated magnetic fields. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(28):285302, 2014.
- [28] D.J. Fernández and N. Fernández-García. Higher-order supersymmetric quantum mechanics. *AIP Conf. Proc.*, 744:236–273, 2005.
- [29] Fred Cooper, Avinash Khare, and Uday Sukhatme. Supersymmetry and quantum mechanics. *Physics Reports*, 251(5-6):267–385, 1995.

- [30] D.J. Fernández and V. Hussin. Higher-order susy, linearized non-linear heisenberg algebras and coherent states. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32(4-6):3603–3619, 1999.
- [31] A Andrianov, F Cannata, M Ioffe, and D Nishnianidze. Systems with higher-order shape invariance: spectral and algebraic properties. *Physics Letters A*, 266(4-6):341–349, 2000.
- [32] Bijan Kumar Bagchi. *Supersymmetry in quantum and classical mechanics*. CRC Press, 2000.
- [33] José F Carinena and Arturo Ramos. Riccati equation, factorization method and shape invariance. *Reviews in Mathematical Physics*, 12(10):1279–1304, 2000.
- [34] Vít Jakubský and David Krejčířík. Qualitative analysis of trapped dirac fermions in graphene. *Annals of Physics*, 349:268–287, 2014.
- [35] Vít Jakubský. Spectrally isomorphic dirac systems: Graphene in an electromagnetic field. *Physical Review D*, 91(4):045039, 2015.
- [36] Miguel Castillo-Celeita, Erik Díaz-Bautista, and Maurice Oliva-Leyva. Coherent states for graphene under the interaction of crossed electric and magnetic fields. *Annals of Physics*, 421:168287, 2020.
- [37] Miguel Castillo-Celeita and Vít Jakubský. Reduction scheme for coupled dirac systems. *Journal Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(3):455301, 2021.
- [38] David J Fernández C. Sususy quantum mechanics. *International Journal Modern Physics A*, 12(01):171–176, 1997.
- [39] J David and C Fernández. Supersymmetric quantum mechanics. *AIP Conf. Proc.*, 1287(1):3–36, 2010.
- [40] Alexander A Andrianov, MV Ioffe, F Cannata, and J-P Dedonder. Susy quantum mechanics with complex superpotentials and real energy spectra. *International Journal of Modern Physics A*, 14(17):2675–2688, 1999.
- [41] Bijan Bagchi, S Mallik, and Christiane Quesne. Generating complex potentials with real eigenvalues in supersymmetric quantum mechanics. *International Journal of Modern Physics A*, 16(16):2859–2872, 2001.

- [42] David Bermudez, Nicolás Fernández-García, and DJ. Fernández. Wronskian differential formula for confluent supersymmetric quantum mechanics. *Physics Letters A*, 376(5):692–696, 2012.
- [43] Encarnacion Salinas-Hernández and David Fernández. The confluent algorithm in second-order supersymmetric quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 36(10):2537, 2003.
- [44] Encarnacion Salinas-Hernández and DJ. Fernández. Wronskian formula for confluent second-order supersymmetric quantum mechanics. *Physics Letters A.*, 338(1):13–18, 2005.
- [45] Alonso Contreras-Astorga and Axel Schulze-Halberg. Recursive representation of wronskians in confluent supersymmetric quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(10):105301, 2017.