

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Teoría de Dirac-Einstein-Born-Infeld
perturbativa y su aplicación en la construcción
de agujeros de gusano atravesables**

Tesis que presenta

Armando Ulises Trápala Ramírez

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Héctor Hugo García Compeán**

Ciudad de México

Febrero, 2022

Dedicada a mi hermana Eréndira

El mundo sería un mejor lugar, si los demonios de todas las personas pudieran hallar un amigo como el que han encontrado en ella los míos.

Ulises, febrero de 2022

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
Introducción	IV
Objetivos	VII
1. Marco teórico	1
1.1. Electrodinámica no-lineal	1
1.1.1. Formalismo de Plebański	2
Monopolos	3
Campo del Dyon en Born-Infeld	4
1.1.2. Teoría de Born-Infeld	6
Aproximación para campos pequeños	7
Dinámica de los campos	8
Carga puntual estática	8
1.1.3. Teoría de Euler - Heisenberg	9
Correspondencia BI-EH	10
1.1.4. Teoría de Dirac - Born - Infeld	11
Partícula relativista	11
Dp -branas	12
1.2. Relatividad general	13
1.2.1. Acción de Einstein-Hilbert	14
1.2.2. Solución con simetría esférica	14
Métrica dinámica	15
Métrica estática	15
1.3. Relatividad general acoplada a NLE	18
1.3.1. Formalismo Einstein - Plebański	18
Monopolos	18
1.3.2. Dyón en la teoría Einstein - Maxwell	20
1.3.3. Dyón en la teoría de Einstein-(Born-Infeld)/(Euler-Heisenberg)	21
1.3.4. Dyón no perturbativo en la teoría de Einstein-Born-Infeld	22
Solución estática	23
Solución dinámica	24

ÍNDICE GENERAL

1.4.	Teoría Einstein - Dirac - Maxwell.	24
1.4.1.	Agujeros de gusano eléctricamente cargados	25
1.4.2.	Agujeros de gusano magnéticamente cargados	26
	Agujero negro magnéticamente cargado	28
	Métrica de agujero de gusano	30
	Unión de las métricas de agujero de gusano y agujero negro	31
	Fermiones en órbitas periódicas	33
	Energía de Casimir	35
	Estabilización del WH	37
	Síntesis y caracterización	40
2.	Teoría DEBI	41
2.1.	Construcción	41
2.2.	Forma perturbativa	46
2.3.	Ecuaciones de movimiento	50
2.3.1.	Campo fermiónico	52
2.3.2.	Campo electromagnético	53
2.3.3.	Campo gravitacional	55
	Contribución electromagnética pura	57
	Contribución EMF	57
	Contribución fermiónica no-lineal	58
	Tensor energía momento	58
3.	Agujeros negros DEBI	61
3.1.	Dyón DEBI	61
3.1.1.	Tensor energía-momento	62
	Planteamiento de los tensores $F_{\mu\nu}$ y $P_{\mu\nu}$	62
	Invariantes DEBI	63
	Funciones Δ , m y \tilde{m}	64
3.1.2.	Solución electromagnética	66
3.1.3.	Métrica	67
	Función de masa DEBI efectiva	68
3.2.	Agujeros negros debidos al Dyón	70
3.2.1.	Agujero negro RN	71
3.2.2.	Agujero negro BI	71
3.2.3.	Agujero negro DEBI	72
	DEBI-P	72
	DEBI-R	73
	DEBI	75
3.2.4.	Casos particulares	76
	Monopolo magnético	76
	Monopolo eléctrico	77
	Dyón balanceado	78
3.2.5.	Agujero negro extremo	79
	Construcción	79
	Análisis gráfico	80

ÍNDICE GENERAL

Región cercana al horizonte de eventos	81
4. Agujero de gusano DEBI	86
4.1. Métrica de WH	87
4.2. Estabilización	88
4.3. Caracterización	91
5. Conclusiones	93
5.1. Teoría debi	93
5.2. Agujero de gusano	94
5.3. Conclusión general	94
6. Bibliografía	96

Agradecimientos

- Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)**: por el apoyo económico otorgado a través de su programa de becas de posgrado.
- Al **Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV)**: por todos los apoyos brindados para realizar este trabajo, incluyendo pero no limitándose al espacio de trabajo, capital académico y administrativo de alto nivel, y por el apoyo económico brindado a través de su programa de apoyos para obtención de grado.
- A mi asesor de tesis, **Dr. Héctor Hugo García Campeán**: por aceptar dirigir mi trabajo, por su infinita paciencia, por permitirme dar rienda suelta a la imaginación sin perder de vista los objetivos que se persiguen y por mostrarme en cada ocasión que, sin importar cuan elevada sea la cúspide de cualquier tema académico, siempre existe uno pico más alto que aguarda por ser escalado.
- A mis sinodales, **Dra. Nora Eva Bretón Báez** y **Dr. Josué de Santiago Sanabria**: por su disposición y su apoyo incluso cuando el reloj perseguía nuestros pasos.
- A **Mariana Isis Del Castillo Sánchez**, secretaria de la coordinación académica: por el gran apoyo que a todos nos brinda en el departamento de física. Siempre he pensado que es gracias a su eficiente e incansable labor que gran parte del departamento de física puede funcionar a ritmo; es el péndulo que mantiene el intrincado engranaje del posgrado trabajando a tiempo.
- A todo el personal técnico, de mantenimiento y administrativo que *tras bambalinas* evitan que el departamento de física arda en caos.

Resumen

En el presente trabajo, se estudia la posibilidad de construir una métrica de agujero de gusano que conecte dos agujeros negros extremos cargados, mediante la implementación de una teoría de gravedad que contemple efectos no-lineales de los campos electromagnético y de materia.

Se propone una acción perturbativa hasta segundo orden que acopla la relatividad general clásica con una teoría tipo Dirac-Born-Infeld; llamada teoría de Dirac-Einstein-Born-Infeld (DEBI) a lo largo de este trabajo. Se calculan las ecuaciones de movimiento para los campos electromagnético, de materia y gravitacional, y se aplican al problema esféricamente simétrico para construir la métrica debida al Dyón.

Posteriormente, se propone una métrica de agujero de gusano compatible con el Dyón y se comparan magnitudes físicas como temperatura, energía, dilatación temporal y longitud de garganta, respecto al resultado que se obtiene al construir un agujero de gusano análogo usando la métrica de Reissner-Nordstöm.

Abstract

In the present work, the possibility of building a wormhole metric that connects two charged extremal black holes, through the implementation of a theory of gravity that contemplates non-linear electromagnetic field and matter effects, is studied.

A perturbative second order action that couples classical general relativity with a Dirac-Born-Infeld theory is proposed; called Dirac-Einstein-Born-Infeld (DEBI) theory throughout this work. The equations of motion for the electromagnetic, matter and gravity fields are calculated, and applied to the spherically symmetric problem in order to build the Dyon metric.

Subsequently, a compatible wormhole-Dyon metric is proposed, and physical quantities like temperature, energy, time dilation and throat length are compared with results obtained from an analogous wormhole, built using a Reissner-Nordström metric.

Introducción

Un agujero de gusano o *wormhole* (en adelante WH) es una estructura particular del espacio-tiempo que resuelve las ecuaciones de Einstein de relatividad general y además, hipotéticamente posee la virtud de conectar regiones de dos universos originalmente desconexos, o bien puntos distantes de un mismo universo.

Esta idea es casi tan antigua como el descubrimiento teórico de los agujeros negros, BH (por sus siglas en inglés, *black hole*). De hecho, uno de los primeros WH estudiados es el llamado *punte Einstein-Rosen*, asociado a la solución de Schwarzschild descubierta en 1916. Tanto el término *wormhole* como la idea de que estas estructuras podrían fungir como *puentes* entre dos regiones muy lejanas de un mismo universo, fueron acuñados en 1957 por el físico John Archibald Wheeler. La figura [1] muestra un dibujo hecho por Wheeler con el fin de esquematizar este concepto.

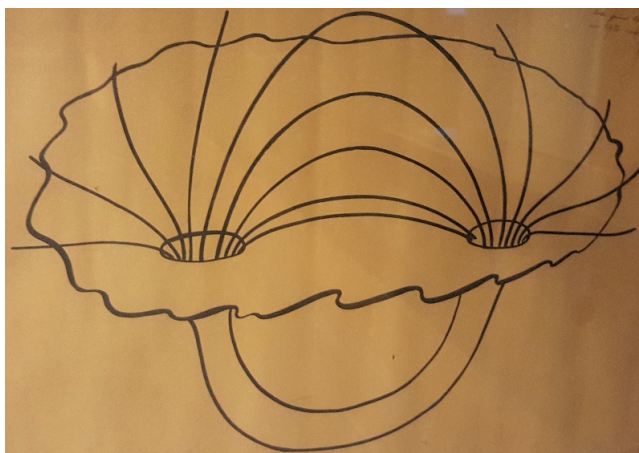


Figura 1: Dibujo esquemático de un agujero de gusano debido a dos agujeros negros cargados, realizado por J.A. Wheeler en 1966, tomado de [20]

El estudio de soluciones tipo WH en relatividad general es un tema que ha causado conmoción en todos los niveles y gremios desde sus inicios y ha penetrado en la cultura popular de forma ampliamente aceptada, debido a que proporciona una fructífera fuente de inspiración para temas diversos, tanto en el cine¹ como en la li-

¹El filme [Interstellar](#) es uno de los trabajos más representativos del medio. Es importante debido a la colaboración artístico-científica entre el estudio productor y el grupo de investigación del físico Kip Stephen Thorne, ganador del premio Nobel de física en 2017 *por sus contribuciones decisivas al detector LIGO y por la observación de ondas gravitatorias*. De hecho el BH supermasivo *Gargantua* que se observa en más de una escena, es el resultado de una simulación de un modelo

teratura de ciencia ficción. Sin embargo, dentro de la comunidad científica, el avance en la investigación de estas estructuras tuvo un breve período de abandono debido a que, si bien estas soluciones son consistentes con la teoría de relatividad general, no son geometrías *atravesables* o requieren de condiciones exóticas de materia y energía para poder existir, mismas que parecían inconsistentes con la física conocida hasta el momento.

Es un hecho reciente que la comunidad retornara la vista hacia los WHs con intenciones de considerarlos no solo como peculiaridades matemáticas, sino como entes físicos reales, esta vez incluyendo la interacción electromagnética y los efectos cuánticos producidos por la dinámica de fermiones dentro de la teoría, siendo este último el ingrediente que permite obtener soluciones que no solo son consistentes con la relatividad general, sino que evitan la necesidad de incorporar materia exótica en la solución, dando paso con ello a la participación de la materia ordinaria descrita por el modelo estándar de partículas. En este tenor, las soluciones de Juan Maldacena y Alexey Milekhin, reportadas en [20] y [19], y la solución de Jose Luis Blázquez-Salcedo, Christian Knoll y Eugen Radu reportada en [4], marcan un parteaguas y punto de partida para un nuevo auge en el estudio de estas peculiares y fascinantes estructuras del espacio-tiempo², no solo por ser **físicamente consistentes**, sino por poseer la cualidad de ser **atravesables**, y en el caso de [19], **humanamente atravesables**³.

En este espíritu, es natural preguntarse por las posibles generalizaciones inmediatas y no inmediatas que puedan construirse a partir de los resultados citados. Una posibilidad es la generalización del componente electromagnético hacia una electrodinámica no-lineal, NLE (por sus siglas en inglés, *non linear electrodynamics*), tema ampliamente estudiado en el CINVESTAV, especialmente por el Dr. Alberto García, la Dra. Nora Bretón [6],[18], el Dr. Jerzy Plebański [21] y el Dr. Eloy Ayón [2].

Para este trabajo se ha optado por utilizar la electrodinámica no-lineal de Born e Infeld, acoplada no-linealmente con un campo espinorial vía una teoría efectiva que preserva la estructura de la acción de Born-Infeld-Dirac en teoría de branas, más la relatividad general clásica en cuatro dimensiones, llamada aquí **Teoría DEBI** (Dirac-Einstein-Born-Infeld). Posteriormente se aplica la teoría DEBI a la solución de Maldacena [20] y se estudian las modificaciones que se obtienen respecto al caso lineal.

Es importante mencionar que, aunque se eligió estudiar el caso particular de la extensión de la solución de Maldacena al régimen no-lineal en la teoría DEBI, esta no se limita al mismo, de modo que en principio es posible estudiar la extensión de solución de Blázquez [4] al caso no-lineal de este formalismo e incluso explorar la posible existencia de soluciones distintas ya sean análogas a las reportadas en la

real de BH y dicha simulación permitió al equipo de Thorne realizar avances en su investigación.

²Para mayor detalle, puede consultarse el siguiente [vínculo](#)

³Esta solución debe tomarse con precaución dado que requiere un espacio-tiempo de cinco dimensiones

literatura o netamente nuevas. Pero dichas posibilidades escapan de los límites que enmarcan la investigación presente.

Objetivos

Los objetivos que dan propósito a esta investigación son los siguientes

Generales

1. Construir una teoría no lineal que contenga la teoría de Einstein-Dirac-Maxwell como aproximación a primer orden.
2. Investigar la posibilidad de existencia de agujeros de gusano en dicha teoría en un régimen perturbativo hasta segundo orden.

Específicos

1. Extender la solución de agujero de gusano debido a dos agujeros negros magnéticamente cargados [20] al caso no lineal propuesto.
2. Estudiar las diferencias entre el resultado lineal y no lineal de dicha solución.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Electrodinámica no-lineal

La electrodinámica no-lineal (NLE)¹ surgió durante la primera mitad de la década de 1930 con las propuestas, primero por Max Born y Leopold Infeld [5]; y luego por Werner Heisenberg y Hans Heinrich Euler [12], de una electrodinámica capaz de remover algunos de los problemas de la teoría de Maxwell; como la divergencia de la autoenergía de la carga puntual. Estos intentos de construcción de una teoría no-lineal para la electrodinámica, inicialmente fueron meramente especulativos. Sin embargo, en el desarrollo de la mecánica cuántica relativista se tiene la necesidad de incluir fenómenos de carácter no-lineal dentro de la descripción del electromagnetismo, especialmente cuando se toman en cuenta las interacciones de creación de pares electrón-positrón (polarización del vacío) y de dispersión fotón - fotón (violación del principio de superposición). Una virtud particular que presenta el lagrangiano propuesto por Born e Infeld, como se explica en [6], es que coincide con la forma del lagrangiano efectivo de la electrodinámica cuántica (QED)² que describe la polarización del vacío en presencia de un campo electromagnético constante; razón por la cual es considerado un modelo clásico de este fenómeno.

Posteriormente hacia la década de 1970, J. Plebański [21] extendió el formalismo, generalizando la teoría vía un lagrangiano arbitrario que solo dependiera de los invariantes electromagnéticos $f_2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $\tilde{f}_2 = F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}$; y que incluyera la electrodinámica Maxwelliana en el régimen de *campo débil*, $f_2, \tilde{f}_2 \rightarrow 0$.

Esta nueva perspectiva respecto a la electrodinámica marcó el comienzo de un área fructífera para la investigación de la física contemporánea, no solo por la evidente generalización de teoría de Maxwell, sino porque el alcance de sus consecuencias abarca tanto la relatividad general [7],[18] (GR)³ como la electrodinámica cuántica [6] e incluso la teoría de cuerdas y branas [3], [17], [8].

¹Por sus siglas en inglés; Non Linear Electrodynamics.

²Por sus siglas en inglés; Quantum Electrodynamics

³Por sus siglas en inglés; General Relativity.

1.1.1. Formalismo de Plebański

El formalismo de Plebański [21] busca englobar todas las posibles NLEs en una sola estructura general mediante la postulación de un lagrangiano arbitrario L_P , que cumpla con las siguientes condiciones

1. L_P debe ser escalar de Lorentz, por lo que debe ser función únicamente de los invariantes $f_2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $\tilde{f}_2 = F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}$, donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de intensidad de campo y A_μ el 4-potencial electromagnético.
2. La acción asociada al lagrangiano debe ser invariante de norma, consecuentemente no debe depender explícitamente del 4-potencial electromagnético A_μ .
3. Toda teoría derivable del formalismo de Plebański debe reducirse a la electrodinámica de Maxwell en el límite de campo débil

$$f_2, \tilde{f}_2 \rightarrow 0 \implies L_P \approx L_M = -\frac{f_2}{4}. \quad (1.1)$$

En consecuencia, la acción de Plebański, en un espacio-tiempo arbitrario con métrica $g_{\mu\nu}$ cuyo determinante es $g = \det(g_{\mu\nu})$, tiene la forma general

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} L_P(f_2, \tilde{f}_2). \quad (1.2)$$

Elegir la forma explícita de L_P equivale a elegir una de las tantas NLEs posibles. Un caso particular de interés para este trabajo de tesis, es aquel en el que el invariante \tilde{f}_2 es nulo. En términos de los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} , esta condición equivale a

$$\tilde{f}_2 = 0 \iff \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.3)$$

El conjunto de situaciones físicas englobadas en este esquema abarca principalmente los casos electrostático, magnetostático y todos los escenarios con campos mutuamente perpendiculares; radiación, por ejemplo. Una vez impuesta esta condición, el conjunto de teorías posibles se reduce a aquellas que solo dependen del invariante f_2 reescalado⁴ via la acción

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} L_P(f) \quad ; \quad f \equiv -\frac{f_2}{4} \quad (1.4)$$

El principio de mínima acción aplicado al L_P y las identidades de Bianchi, proveen las ecuaciones dinámicas para el tensor de intensidad de campo

$$\nabla_\mu (L_f F^{\mu\nu}) = 0 \quad ; \quad \nabla_\mu (\star F^{\mu\nu}) = 0, \quad (1.5)$$

donde se ha definido $L_f \equiv \frac{\partial L}{\partial f}$ y \star es el operador de Hodge. Nótese que en el caso particular en el que $L_P = f$, se recupera la electrodinámica clásica.

⁴Se reescala con el fin de hacer coincidir la dependencia de L_P con el lagrangiano de Maxwell.

Monopolos

Un caso de particular interés para este trabajo de tesis es el campo debido a monopolos eléctricos y magnéticos. Estos pueden entenderse mediante el potencial coulombiano típico y el potencial del monopolo magnético de Dirac [11]. En coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) y en el lenguaje de **formas diferenciales**, la 1-forma de potencial electromagnético es

$$A = A_\mu dx^\mu = \frac{q_e}{r} dt - q_m \cos(\theta) d\phi. \quad (1.6)$$

Aquí q_e corresponde a la carga eléctrica y q_m a la carga magnética. Consecuentemente, la 2-forma de intensidad de campo resulta ser

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dA = \frac{q_e}{r^2} dt \wedge dr + q_m \sin(\theta) d\theta \wedge d\phi, \quad (1.7)$$

donde d el operador de derivada exterior. Luego, las ecuaciones dinámicas adquieren la forma

$$d \star L_f F = 0 \quad ; \quad dF = 0. \quad (1.8)$$

Considerando una métrica general esféricamente simétrica para el espacio-tiempo

$$ds^2 = -g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad ; \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (1.9)$$

donde $g_{tt} = g_{tt}(t, r)$ y $g_{rr} = g_{rr}(t, r)$ son funciones de las coordenadas temporal t y radial r . Se encuentra que las únicas entradas no nulas del tensor de intensidad de campo que resuelve el sistema de ecuaciones son⁵ [7]

$$F_{tr} = -F_{rt} = \frac{q_e}{r^2 L_f} \sqrt{g_{tt} g_{rr}} \quad ; \quad F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = q_m \sin(\theta). \quad (1.10)$$

Esta solución conduce a los campos eléctrico y magnético

$$\mathbf{E} = \frac{q_e}{r^2 L_f} \hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad \mathbf{B} = \frac{q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.11)$$

y, naturalmente, al invariante típico

$$f_2 = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = \frac{2}{r^4} \left(q_m^2 - \frac{q_e^2}{L_f^2} \right) \quad (1.12)$$

Estos resultados muestran que, en toda NLE de cargas puntuales que solo dependa del invariante $f = -\frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4} = -\frac{f_2}{4}$, sólo el **campo eléctrico** se verá afectado por la no-linealidad de la teoría; el campo magnético del monopolo permanece intacto ante los efectos no-lineales.

⁵De hecho, las únicas soluciones compatibles con una métrica esféricamente simétrica son aquellas cuya distribución de carga es análoga a la carga puntual.

Campo del Dyon en Born-Infeld

Un ejemplo sencillo e inmediato de este formalismo, es el campo debido a una carga dyónica⁶ puntual en la teoría de Born e Infeld. Elijamos la siguiente forma para el lagrangiano de Plebański

$$L_P = b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{f_2}{2b^2}} \right) = b^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2f}{b^2}} \right) ; \quad f_2 = 2(B^2 - E^2). \quad (1.13)$$

Este es un caso particular del lagrangiano de Born-Infeld; la constante b se conoce como parámetro de campo máximo. Al aplicarse esta teoría sobre los resultados obtenidos para las cargas puntuales se obtiene el sistema de ecuaciones

$$E = \frac{q_e}{r^2} \sqrt{1 + \frac{B^2 - E^2}{b^2}} ; \quad B = \frac{q_m}{r^2}, \quad (1.14)$$

cuya solución para el campo eléctrico es

$$E = \frac{q_e}{r^2} \sqrt{\frac{q_m^2 + b^2 r^4}{q_e^2 + b^2 r^4}} \quad (1.15)$$

Este resultado deja a la mano algunos casos límites interesantes

- **Región lejana**

Ante la condición de campo débil $\frac{q_e^2}{b^2 r^4} \ll 1$, el campo eléctrico puede expandirse en potencias de b^{-1} y cortarse hasta segundo orden para obtener

$$E = \frac{q_e}{r^2} \left(1 + \frac{q_m^2}{b^2 r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{q_e^2}{b^2 r^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{q_e}{r^2} - \frac{q_e^3}{2r^6} b^{-2} + \frac{q_e q_m^2}{2r^6} b^{-2} \quad (1.16)$$

Esta expresión permite ver que en el límite $r \rightarrow \infty$, el campo eléctrico colapsa en el campo de una carga eléctrica puntual en la teoría maxwelliana

$$r \rightarrow \infty \implies E \approx \frac{q_e}{r^2}. \quad (1.17)$$

Este es un límite esperado, pues la teoría debe reducirse a la electrodinámica lineal en el régimen de campo débil.

A menudo se prefiere considerar el cuadrado del campo, debido a que esta cantidad es la que interviene en el invariante f ; necesario para construir el lagrangiano. Esta cantidad también puede expandirse en potencias de b^{-1} y su forma cortada hasta segundo orden es la siguiente

$$E^2 = \frac{q_e^2}{r^4} \left(1 + \frac{q_m^2}{b^2 r^4} \right) \left(1 + \frac{q_e^2}{b^2 r^4} \right)^{-1} \approx \frac{q_e^2}{r^4} - \frac{q_e^4}{r^8} b^{-2} + \frac{q_e^2 q_m^2}{r^8} b^{-2}. \quad (1.18)$$

⁶Partícula hipotética con carga magnética y eléctrica.

- **Dyón balanceado**

En el caso particular en que las cargas eléctrica y magnética del dyón coinciden exactamente, los efectos no-lineales de la teoría se anulan por completo; ya que al imponer $q_e = q_b$ en la expresión para el campo eléctrico, se obtiene el resultado predicho por la teoría de Maxwell

$$q_e = q_m \implies E = \frac{q_e}{r^2}. \quad (1.19)$$

De modo que, en este caso especial, todo fenómeno asociado al dyón puede modelarse con la electrodinámica clásica.

- **Monopolo magnético**

Si el dyón posee carga magnética pura, el campo eléctrico es nulo; permanece solo el campo magnético

$$q_e = 0 \implies \left\{ E = 0 \ ; \ B = \frac{q_m}{r^2} \right\} \quad (1.20)$$

- **Monopolo eléctrico**

La situación especial en que la carga magnética es nula, probablemente es el resultado más famoso de la teoría de Born e infeld, pues predice la existencia de un valor finito para el campo eléctrico sobre la carga puntual $E(r=0) = E_0$, evitando así la divergencia tanto del campo como de su autoenergía.

Resulta inmediato ver que, al exigir que $q_m = 0$, el campo magnético se anula y el campo eléctrico toma la forma

$$E = \frac{q_e}{\sqrt{r_0^4 + r^4}} \ ; \ r_0^2 = \frac{q_e}{b} \implies E_0 = \frac{q_e}{r_0^2}. \quad (1.21)$$

Puede comentarse además que, en la aproximación de campo débil, el campo del monopolo eléctrico es

$$E \approx \frac{q_e}{r^2} \left(1 - \frac{q_e^2}{2r^4} b^{-2} \right) \quad (1.22)$$

Que es el resultado encontrado en [18] para la electrodinámica de Euler y Heisenberg; via la correspondencia $a \rightarrow b^{-1}$. Este es un resultado esperado, debido a que bajo la condición $\tilde{f}_2 = 0$ y en la aproximación de campo débil hasta segundo orden, ambas NLEs coinciden exactamente. Dicha equivalencia se explica en las secciones siguientes.

Es importante hacer notar que este dyón no corresponde a la teoría completa de Born e Infeld dado que el lagrangiano completo debe depender también del invariante \tilde{f}_2 . No obstante, es un caso bastante ilustrativo que colapsa en la solución conocida para el monopolo eléctrico. La solución completa del dyón en esta teoría puede consultarse en [15].

1.1.2. Teoría de Born-Infeld

La **electrodinámica lineal** o de Maxwell puede derivarse a través del principio de mínima acción partiendo de

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x L_M = -\frac{1}{4\pi} \int d^4x \frac{f_2}{4}, \quad (1.23)$$

donde $f_2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ es un invariante electromagnético y $L_M = -\frac{f_2}{4}$ es el lagrangiano Maxwelliano, cuyo grupo de simetrías corresponde al grupo de Lorentz.

En su teoría [6], [5], [15], Born e Infeld buscaron principalmente extender el lagrangiano de Maxwell hacia uno más general, $L_M \rightarrow L_{BI}$, que evitara la divergencia de la auto-energía de la carga puntual via la existencia de un valor máximo de intensidad de campo b . Sin embargo esta no fué la única de sus motivaciones; adicionalmente buscaban apoyar la visión en que la masa de una partícula puede entenderse como una característica derivada de la intensidad de campo asociado a ella, siendo este último el ente físico fundamental; así como extender el grupo de simetrías del lagrangiano hacia el grupo de Poincaré e incluir la electrodinámica maxwelliana en las condiciones de campo pequeño, es decir

$$\frac{f_2}{b^2}, \frac{\tilde{f}_2}{b^2} \ll 1 \implies L \approx L_M. \quad (1.24)$$

Tomando en cuenta estas consideraciones e inspirados por la acción de la partícula libre relativista⁷

$$L = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right), \quad (1.25)$$

Born e Infeld propusieron la acción [5], [15]

$$S = \frac{b^2}{4\pi} \int d^4x \left[1 - \sqrt{-\det \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu} \right)} \right]. \quad (1.26)$$

Misma que define la **Teoría Born - Infeld** (BI) y de la cual puede extraerse el lagrangiano

$$L_{BI} = b^2 \left[1 - \sqrt{-\det \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu} \right)} \right] \quad (1.27)$$

, donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ corresponde a la métrica de Minkowski y $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético asociado al 4-potencial A_μ . En términos de los invariantes $f_2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $\tilde{f}_2 = F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}$; con \star el operador de Hodge, este lagrangiano toma la forma [15]

$$L_{BI} = b^2 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{f_2}{2b^2} - \left(\frac{\tilde{f}_2}{4b^2} \right)^2} \right]. \quad (1.28)$$

⁷Se usan unidades del SI.

Si adicionalmente se considera la forma explícita de f y \tilde{f} en términos de los campos eléctrico y magnético; \mathbf{E} y \mathbf{B} , respectivamente

$$f_2 = 2(B^2 - E^2) \quad ; \quad \tilde{f}_2 = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.29)$$

se obtiene la forma explícita del lagrangiano de Born e Infeld [6]⁸

$$L_{BI} = b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{B^2 - E^2}{b^2} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{b^4}} \right). \quad (1.30)$$

Aproximación para campos pequeños

Consideremos ahora el regimen de campo débil

$$\frac{f_2}{b^2} \ll 1 \quad ; \quad \frac{\tilde{f}_2}{b^2} \ll 1. \quad (1.31)$$

O equivalentemente

$$\frac{E}{b} \ll 1 \quad ; \quad \frac{B}{b} \ll 1, \quad (1.32)$$

entonces podemos hacer uso de la expansión

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3). \quad (1.33)$$

Para obtener

$$L_{BI} \approx - \left\{ \frac{B^2 - E^2}{2} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{2b^2} - \frac{b^2}{8} \left(\frac{B^2 - E^2}{b^2} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{b^4} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (1.34)$$

Con el fin de estudiar la primera contribución no-lineal del lagrangiano de BI, esta expresión puede expandirse y cortarse hasta orden b^{-2} . Una vez hecho este proceso, se obtiene la siguiente expresión

$$L_{BI} \approx -\frac{B^2 - E^2}{2} + \frac{1}{8b^2} \left[4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2 + (B^2 - E^2)^2 \right] + \mathcal{O}(b^{-4}) = -\frac{f_2}{4} + \frac{1}{32b^2} \left[f_2^2 + \tilde{f}_2^2 \right] + \mathcal{O}(b^{-4}). \quad (1.35)$$

La cual, claramente tiene la forma

$$L_{BI} = L_M + \frac{1}{b^2} L_{bi}, \quad (1.36)$$

donde

$$L_M = -\frac{f_2}{4} \quad ; \quad L_{bi} = \frac{f_2^2 + \tilde{f}_2^2}{32}. \quad (1.37)$$

Esta aproximación pone de manifiesto que a orden cero en b^{-1} se recupera la electrodinámica de Maxwell L_M y la primera contribución no-lineal L_{bi} aparece en el

⁸Se debe tener especial precaución con el signo de L_{BI} puesto que en esta referencia la signatura que se utiliza es $(+, -, -, -)$, contraria a la signatura utilizada en este trabajo $(-, +, +, +)$

orden b^{-2} .

Adicionalmente y con fines ilustrativos, puede verse que, si se define la cantidad $f_4 = F_{\alpha\beta}F^{\beta\gamma}F_{\gamma\delta}F^{\delta\alpha}$ y se hace uso de la identidad

$$f_4 = 2(B^2 - E^2)^2 + 4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2 = \frac{f_2^2}{2} + \frac{\tilde{f}_2^2}{4}, \quad (1.38)$$

la primera contribución no-lineal del lagrangiano de BI se reescribe como [3]

$$L_{bi} = -\frac{f_2^2}{32} + \frac{f_4}{8}, \quad (1.39)$$

prescindiendo así de la operación de Hodge al realizar el cómputo de L_{bi} .

Finalmente, atendiendo el espíritu del formalismo de Plebański, suele escribirse este lagrangiano en términos del invariante f en lugar de f_2 . De este modo el lagrangiano obtiene la forma

$$L = f + \left(\frac{f^2}{2} + \frac{\tilde{f}_2^2}{32} \right) b^{-2} ; \quad f = -\frac{f_2}{4}, \quad (1.40)$$

y en consecuencia

$$L_M = f ; \quad L_{bi} = \frac{f^2}{2} + \frac{\tilde{f}_2^2}{32}. \quad (1.41)$$

Dinámica de los campos

Una vez aplicado el principio de mínima acción al lagrangiano de BI, se obtienen las ecuaciones dinámicas para los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B}

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.42)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 ; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (1.43)$$

Con las ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{H} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}} ; \quad \mathbf{D} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} \quad (1.44)$$

y los campos en términos del 4-potencial $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ dados como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} ; \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (1.45)$$

Carga puntual estática

El caso electrostático con simetría esférica es relativamente sencillo de calcular. Al imponerse las siguientes condiciones sobre las ecuaciones de movimiento de los campos en coordenadas esféricas

$$\mathbf{B} = \mathbf{0} ; \quad \mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (1.46)$$

se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{D} = D\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad D = \frac{e}{r^2} \quad ; \quad D = \frac{E}{1 - \frac{E^2}{b^2}}. \quad (1.47)$$

Cuya solución conduce a

$$E = \frac{e}{r_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^4}}, \quad (1.48)$$

donde se ha definido $r_0^2 \equiv \frac{e}{b} = cte$, con e una constante cuya interpretación física corresponde a la carga de la partícula puntual que produce el campo \mathbf{E} .

Es evidente que el campo no diverge para la carga puntual y que en la lejanía de la carga, se recupera el campo predicho por la electrodinámica lineal

$$E = \frac{e}{r_0^2} \quad ; \quad r = 0, \quad (1.49)$$

$$E \approx \frac{e}{r^2} \quad ; \quad r_0 \ll r. \quad (1.50)$$

Este resultado, aplicado al electrón, en conjunción con la relación para su autoenergía, dada como⁹

$$U_e = m_e c^2 = 1.2361 \frac{e^2}{r_0^2}, \quad (1.51)$$

permite interpretar a $r_0 = 2.8 \times 10^{-13}$ cm, como el radio clásico del electrón y conduce a un valor estimado para la intensidad máxima de de campo de BI [6]

$$b = \frac{e}{r_0^2} \approx 1.8 \times 10^{18} \text{ V/cm}. \quad (1.52)$$

Es importante tener en mente este valor cuando se hacen aproximaciones de *campo débil*, pues muestra que, aunque los valores obtenidos por las aproximaciones deben ser menores que b , no son pequeños comparados con los campos experimentados en la vida cotidiana: $E \sim 10^4 \text{ V/m} = 10^2 \text{ V/cm}$, presente en las líneas de alta tensión de 400 KV.

1.1.3. Teoría de Euler - Heisenberg

En 1936 W. Heisenberg y H. Euler, propusieron una teoría efectiva para la electrodinámica no-lineal que permite estudiar la polarización de vacío (creación de pares electrón - positrón). El lagrangiano de Euler-Heisenberg es el siguiente [12]

$$\mathcal{L} = L_M - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp(-m^2 s) \left[(es)^2 \frac{\text{Re} \cosh\left(es\sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})}\right)}{\text{Im} \cosh\left(es\sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})}\right)} \mathcal{G} - \frac{2}{3}(es)^2 \mathcal{F} - 1 \right] \quad (1.53)$$

⁹En unidades del SI

Donde m corresponde a la masa del electrón, e a su carga, y \mathcal{F} y \mathcal{G} son invariantes electromagnéticos dados por

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad ; \quad \mathcal{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (1.54)$$

En términos de la constante de estructura fina α , esta expresión puede aproximarse en para el límite de campo débil como

$$\mathcal{L} = L_M + \frac{\alpha^2}{45m^4} \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \quad (1.55)$$

Si además se define $a = \frac{8\alpha^2}{45m^4}$, se obtiene [18]

$$\mathcal{L} = L_M + \frac{a}{8} \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \quad (1.56)$$

Considerando los invariantes $f_2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $\tilde{f}_2^2 = F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}$, este lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L} = L_M + \frac{a}{32} \left(f_2^2 + \frac{7}{4} \tilde{f}_2^2 \right) \quad (1.57)$$

Que tiene la forma

$$\mathcal{L} = L_M + aL_{eh} \quad (1.58)$$

Donde

$$L_{eh} = \frac{f_2^2 + \tilde{f}_2^2}{32} + \frac{3}{128} \tilde{f}_2^2 \quad (1.59)$$

Nótese que a orden cero, nuevamente se recupera la electrodinámica linal y la primera contribución no-lineal aparece a primer orden en a .

Correspondencia BI-EH

Es claro que la primera contribución no-lineal del lagrangiano de Euler y Heisenberg tiene una estructura similar a la primera contribución no-lineal del lagrangiano de Born e Infeld, salvo por el segundo término de la última igualdad, es decir

$$L_{bi} - L_{bi} = \frac{3}{128} \tilde{f}_2^2 \quad (1.60)$$

No obstante, ambas expresiones coinciden para el caso en el que $\tilde{f}_2 \sim \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Esta condición se cumple para el monopolo puramente eléctrico o magnético; y cuando los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son mutuamente perpendiculares.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \implies L_{bi} = \frac{f_2^2}{32} = L_{eh} \quad (1.61)$$

Finalmente, la correspondencia entre ambas teorías, BH \rightarrow EH, requiere del cambio de parámetro máximo de intensidad de campo $b^{-1} \rightarrow a$. Usando las definiciones de estas cantidades y de la constnte de estructura fina y radio clásico del electrón puede obtenerse la siguiente relación entre los parámetros a y b en términos del conjunto de constantes $\{e, m_e, c, \hbar\}$; carga y masa del electrón, rapidez de la luz en el vacío y constante de Planck, respectivamente; y en unidades naturales.

$$a = \frac{8}{45} \frac{em_e c^2}{\hbar} b^{-1} \implies a = \frac{8}{45} m_e b^{-1} \quad (1.62)$$

1.1.4. Teoría de Dirac - Born - Infeld

Sin duda, desde su nacimiento en 1934 [5], el modelo de Born e Infeld para la electrodinámica no-lineal, probó ser un gran mérito de inspiración dentro de la física teórica; título que ha mantenido a lo largo del tiempo y que se ha extendido incluso al campo de estudio de la teoría de cuerdas y branas. Este éxito se debe principalmente a que su estructura aparece en la descripción de las teorías efectivas de baja energía para Dp -Branas [17],[8],[22].

La principal virtud de la acción BI radica en el grupo de simetrías que subyace a su estructura; el grupo de Poincaré, característica que permite preservar la total invariancia de Lorentz sin importar la métrica sobre la cual sea escrita la teoría. Esta propiedad y la similitud que guarda con la acción de Nabu - Goto [23],[3], hacen del modelo de BI un fuerte candidato para describir la dinámica de Dp -banas en una teoría de cuerdas de tipo II [3].

Partícula relativista

Para entender la necesidad de una acción tipo BI en teoría de cuerdas, consideremos primero su estructura

$$S \sim \int d^4x \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + \kappa F_{\mu\nu})}, \quad (1.63)$$

donde κ es una constante y $F_{\mu\nu}$ está definido a través de la 1-forma del potencial A del modo siguiente.

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad ; \quad F = dA = d(A_\mu dx^\mu) \quad (1.64)$$

Siendo F la 2-forma de intensidad de campo y A_μ las componentes de la 1-forma de potencial A .

Tomemos el caso de la D1-brana (1+1)-dimensional, supongamos que la coordenada espacial corresponde a un círculo y apliquemos la acción de BI. Una vez evaluado el determinante, se obtiene

$$S \sim \int \sqrt{1 - \kappa^2 F_{01}^2} \quad (1.65)$$

Por otro lado, la T-dualidad [3] asegura que existe una interpretación dual que consiste una D0-brana sobre un círculo dual y, en consecuencia, el potencial está dado por

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^1 \quad (1.66)$$

Aquí X^1 corresponde a la coordenada espacial del círculo dual y α' es la pendiente de Regge, asociada al inverso de la tensión de la cuerda. Se sigue que

$$F_{01} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} v \quad ; \quad v = \dot{X}^1 \quad (1.67)$$

donde es v la velocidad de la D0-brana sobre el círculo dual. Al aplicar estos resultados a la acción de BI e integrar sobre la coordenada espacial se obtiene

$$S \sim -m \int \sqrt{1 - v^2} dt, \quad (1.68)$$

donde $-m$ es una constante debida a la primera integral, cuyo significado físico se asocia con la masa de la D0-Brana; t es la coordenada temporal y se ha elegido la constante $\kappa = 2\pi\alpha'$. Este ejemplo muestra que la dinámica de la partícula relativista puede deducirse a partir de una D1-brana vía la implementación de la acción de BI y la T-dualidad; además, pone de manifiesto la necesidad de utilizar la estructura de esta acción para preservar la invariancia de Lorentz. De forma análoga puede obtenerse la electrodinámica considerando Dp-branas de mayor dimensión, tal es el caso de la NLE de BI.

Dp-branas

Siguiendo este espíritu, es natural suponer la existencia de una generalización en altas dimensiones de la estructura de BI y construir con ella una teoría de super cuerdas. A esta generalización se le conoce como **Teoría Dirac - Born - Infeld** (DBI).

La acción de DBI para la Dp-brana en $p + 1$ dimensiones está dada por [3]

$$S = -T_{D_p} \int d^{p+1}x \sqrt{-\det(G_{\mu\nu} + \kappa\mathcal{F}_{\mu\nu})} \quad (1.69)$$

Donde T_{D_p} es la tensión (o densidad de energía) de la Dp-brana y $\kappa = 2\pi\alpha'$. Para una teoría de supercuerdas tipo II en un espacio-tiempo de Minkowski, la super simetría se incorpora vía la definición de la *métrica*

$$G_{\mu\nu} = \eta_{mn} \Pi_\mu^m \Pi_\nu^n \quad (1.70)$$

Aquí η_{mn} es la métrica de Minkowski en $p + 1$ dimensiones y Π_μ^m los *vielbein*¹⁰. Además, el tensor de intensidad de campo $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ está dada por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + b_{\mu\nu} \quad (1.71)$$

Donde $F = dA$ es la 2-forma maxwelliana usual y la 2-forma b , un término necesario para garantizar la super simetría de \mathcal{F} .

La acción de DBI, contiene como grados de libertad todas las posibles excitaciones de la brana, cuya interpretación física se reflejará en los distintos campos conocidos. Una forma de escribir manifiestamente la dependencia bosónica de la acción en un espacio n -dimensional, consiste en elegir una norma llamada *norma estática* y corresponder los primeros $p + 1$ grados de libertad X^μ con las coordenadas del volumen de mundo x^α , mientras que los restantes $n - p$ grados de libertad restantes sobreviven como campos escalares Φ^i sobre el volumen de mundo y describen excitaciones

¹⁰Generalización de las **vierbein** o tetradas.

perpendiculares a la brana. Al realizar este procedimiento, la acción colapsa en la forma [3]

$$S = -T_{D_p} \int d^{p+1}x \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + \kappa F_{\mu\nu} + \kappa^2 \partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^i)} \quad (1.72)$$

Este proceso de reducción dimensional puede realizarse iterativamente. En general, luego de realizar la reducción, la acción toma la forma

$$S = -T_{D_p} \int d^{p+1}x \sqrt{-\det[\eta_{\mu\nu} + \kappa F_{\mu\nu} + \kappa^2 (K_{\mu\nu} + \mathcal{O}_{\mu\nu}(\kappa))]} \quad (1.73)$$

Donde $F_{\mu\nu}$ corresponde al tensor de Maxwell, η es la métrica de Minkowski y $K_{\mu\nu} + \mathcal{O}_{\mu\nu}(\kappa)$ un campo que posee los grados de libertad restantes de la D_p -brana. Nótese que, en el caso particular de la electrodinámica de BI, este último campo es nulo y la intensidad máxima de campo es inversamente proporcional al parámetro de Regge; $b = \kappa^{-1}$.

1.2. Relatividad general

La llegada de la relatividad general (GR)¹¹, propuesta por Einstein en 1915, sin duda revolucionó la forma en que los físicos concebimos el universo y el *escenario* en el que se desenvuelve; la dinámica del espacio-tiempo. Pues permite entender los campos gravitatorios como un efecto directo de la curvatura del tejido espacio-temporal.

Esta dinámica se encuentra codificada en las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu} \quad (1.74)$$

Siendo $R_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Ricci, R el escalar de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento; al tensor $G_{\mu\nu}$ se le conoce como *tensor de Einstein*.

Esta ecuación tensorial relaciona íntimamente la geometría del espacio-tiempo, codificada en el tensor de Einstein, con la distribución de materia y energía en el universo, representada por tensor de energía-momento. La primera solución exacta a estas ecuaciones, hallada en 1916, se debe al físico alemán Karl Schwarzschild; su solución consiste en la métrica esféricamente simétrica y estática debida a una masa puntal M .

En coordenadas esféricas, métrica de Schwarzschild es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2; \quad ; \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (1.75)$$

Esta solución motivó fuertemente a tratar de incluir de maneras más generales e intrincadas nuevas fuentes de campo gravitacional. Particularmente incluyendo campos electromagnéticos y campos de materia.

¹¹Por sus siglas en inglés; General Relativity.

1.2.1. Acción de Einstein-Hilbert

Naturalmente, las ecuaciones de campo de Einstein son derivables a partir de un principio de mínima acción vía la **acción de Einstein - Hilbert**, hallada por el matemático prusiano David Hilbert en 1915.

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{4} + L_m \right) \quad (1.76)$$

En esta ecuación, R es el escalar de curvatura de Ricci, g el determinante del tensor métrico y L_m un lagrangiano que contiene la información de materia y energía distribuidas en el espacio-tiempo. Aplicar el principio de mínima acción respecto a la métrica produce las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu} \quad (1.77)$$

O bien, si se define la traza del tensor de energía momento como $T = T^\mu{}_\mu$, se tiene

$$R_{\mu\nu} = 2 \left\{ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right\} \quad (1.78)$$

Con el tensor de energía-momento dado entérminos del lagrangiano de materia, según la expresión siguiente¹²

$$T_{\mu\nu} = L_m g_{\mu\nu} - 2 \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.79)$$

1.2.2. Solución con simetría esférica

Un caso de particular interés para este trabajo de tesis es aquel que presenta simetría esférica. Para construirlo, basta con tomar una métrica diagonal arbitraria en coordenadas esféricas

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 \quad (1.80)$$

Y exigir que la parte angular corresponda a una 2-esfera de radio r . De ese modo, la métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad ; \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}(\theta)^2 d\phi^2 \quad (1.81)$$

Aplicar esta forma particular de la métrica, permite resolver las ecuaciones de Einstein a cuadratura para todas las distribuciones de materia y energía que preserven la simetría esférica, al menos localmente.

¹²El operador $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}$ corresponde a la *vaciación* respecto al inverso de la métrica.

Métrica dinámica

Consideremos una parametrización para las componentes radial y temporal de la métrica, definida por la siguiente expresión

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.82)$$

Donde $\alpha(t, r)$ y $\beta(t, r)$ son funciones de los parámetros radial r y temporal t . Entonces el tensor de Ricci adquiere la siguiente estructura

$$R_{\mu\nu} = \text{diag}(R_{tt}, R_{rr}, R_{\theta\theta}, R_{\phi\phi}) \quad (1.83)$$

Con entradas no nulas dadas por [14], [1]

$$R_t^t = -[\partial_t^2 \beta + (\partial_t \beta)^2 - \partial_t \alpha \partial_t \beta] e^{-2\alpha} - \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] e^{-2\alpha} \quad (1.84)$$

$$R_r^r = [\partial_t^2 \beta + (\partial_t \beta)^2 - \partial_t \alpha \partial_t \beta] e^{-2\alpha} - \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta - \frac{2}{r} \partial_r \beta \right] e^{-2\beta} \quad (1.85)$$

$$R_\theta^\theta = R_\phi^\phi = \frac{e^{-2\beta} [r \partial_r (\beta - \alpha) - 1] + 1}{r^2} \quad (1.86)$$

Esta es la forma más general del tensor de Ricci con simetría esférica. Las funciones α y β , que dan solución al sistema de ecuaciones, dependerán de las entradas del tensor energía momento vía las ecuaciones de campo de Einstein.

$$R_{\mu\nu} = 2 \left\{ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right\} \quad (1.87)$$

Nótese que, para que la métrica con simetría esférica sea compatible con el tensor energía momento, debe imponerse que este último sea diagonal y que se cumpla la condición

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi \quad (1.88)$$

En consecuencia, puede asumirse la siguiente forma para $T_{\mu\nu}$

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(T_t^t, T_r^r, T_s, T_s) \quad ; \quad T_s = T_\theta^\theta = T_\phi^\phi \quad (1.89)$$

Métrica estática

Tomando como punto de partida a las ecuaciones de la métrica dinámica, puede imponerse como condición que esta sea estática, es decir $\beta \neq \beta(t), \alpha \neq \alpha(t)$. Esta condición implica que el único grado de libertad corresponde a la coordenada radial. Se sigue que la forma de las entradas del tensor de Ricci en el caso estático colapsa en

$$R_t^t = - \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] e^{-2\beta} \quad (1.90)$$

$$R_r^r = - \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta - \frac{2}{r} \partial_r \beta \right] e^{-2\beta} \quad (1.91)$$

$$R_\theta^\theta = R_\phi^\phi = \frac{e^{-2\beta} [r\partial_r(\beta - \alpha) - 1] + 1}{r^2} \quad (1.92)$$

Este sistema de ecuaciones es *sobre completo* en el sentido en que bastan solo dos de las tres ecuaciones que lo conforman para resolverlo. Tomar las ecuaciones para R_t^t y R_r^r conduce a la solución para α en términos de β (y viceversa) siguiente

$$\alpha = -\beta + \int r e^{2\beta} \tilde{\Delta} dr \quad ; \quad \tilde{\Delta} \equiv \frac{R_r^r - R_t^t}{2} \quad (1.93)$$

Resulta sencillo ver que, al invocar las ecuaciones de Einstein, el factor $\tilde{\Delta}$ coincide con la diferencia de las dos primeras entradas del tensor de energía-momento

$$\tilde{\Delta} = T_r^r - T_t^t \quad (1.94)$$

Retomando la expresión para α y redefiniendo el factor $\tilde{\Delta}$ como $\Delta = r\tilde{\Delta}$, pueden construirse las expresiones para las derivadas de α

$$\alpha = -\beta + \int \Delta e^{2\beta} dr \quad (1.95)$$

$$\partial_r \alpha = -\partial_r \beta + \Delta e^{2\beta} \quad (1.96)$$

$$\partial_r \alpha \partial_r \beta = -(\partial_r \beta)^2 + \Delta e^{2\beta} \partial_r \beta \quad (1.97)$$

$$(\partial_r \alpha)^2 = (\partial_r \beta)^2 - 2\Delta e^{2\beta} \partial_r \beta + \Delta^2 e^{4\beta} \quad (1.98)$$

$$\partial_r^2 \alpha = -\partial_r \beta + 2\Delta e^{2\beta} \partial_r \beta + e^{2\beta} \partial_r \Delta \quad (1.99)$$

Mismas que, en conjunción con la ecuación para R_t^t , producen una ecuación diferencial para β , desacoplada de α

$$\left[\partial_r^2 \beta - 2(\partial_r \beta)^2 + \frac{2}{r} \partial_r \beta \right] e^{-2\beta} = R_t^t + \frac{2}{r} \Delta + \partial_r \Delta + \Delta^2 e^{2\beta} - \Delta \partial_r \beta \quad (1.100)$$

Invocando nuevamente las ecuaciones de Einstein, podemos definir los parámetros $m = m(r)$ y $\tilde{m} = \tilde{m}(r)$ como

$$m = \frac{R_t^t}{2} = T_t^t - \frac{T}{2} = -\frac{\Delta}{2r} - T_s \quad (1.101)$$

$$2\tilde{m} = \frac{2}{r} \Delta + \partial_r \Delta + \Delta^2 e^{2\beta} - \Delta \partial_r \beta \quad (1.102)$$

Si adicionalmente se considera la identidad

$$\partial_r^2 \beta - 2(\partial_r \beta)^2 + \frac{2}{r} \partial_r \beta = \frac{e^{2\beta}}{2r} \partial_r^2 [r(c - e^{-2\beta})] \quad (1.103)$$

, con c una constante arbitraria, entonces la ecuación diferencial para β adquiere la siguiente forma

$$\partial_r^2 [r(c - e^{-2\beta})] = 4r(m + \tilde{m}) \quad (1.104)$$

Esta ecuación diferencial puede integrarse a cuadratura para reescribirse del modo siguiente

$$e^{-2\beta} = c - \kappa_2 - \frac{\kappa_2}{r} - \frac{4}{r} \int dr dx \{x [m(x) + \tilde{m}(x)] \Theta(r-x)\} \quad (1.105)$$

Donde $\Theta(r-x)$ es la función escalón de Heaviside y las constantes κ_1, κ_2 y c quedan determinadas al exigir que la solución en el vacío coincida con la métrica de Schwarzschild para una masa puntual M , produciendo así la siguiente expresión¹³

$$e^{-2\beta} = 1 - \frac{2[M + I(r)]}{r} ; \quad I(r) \equiv 2 \int dr dx \{x [m(x) + \tilde{m}(x)] \Theta(r-x)\} \quad (1.106)$$

Este resultado permite calcular la forma explícita de la entrada temporal de la métrica $g_{rr} = e^{2\alpha}$

$$e^{2\alpha} = \left[1 - \frac{2(M + I)}{r} \right] \exp \left[2 \int \Delta e^{2\beta} dr \right] \quad (1.107)$$

Es importante recalcar que estas expresiones no permiten calcular las funciones α y β directamente, puesto que la función \tilde{m} depende explícitamente de β . No obstante, es posible realizar un cálculo aproximado empleando métodos numéricos e iterativos de integración.

Adicionalmente y con fines de notación, resulta conveniente definir la función

$$f(r) = 1 - \frac{2[M + I(r)]}{r} \quad (1.108)$$

De ese modo, la solución de las ecuaciones de Einstein bajo las condiciones de simetría esférica estática está dada por

$$ds^2 = -f(r) \exp \left[\int \frac{\Delta}{f(r)} dr \right] dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.109)$$

La cual es calculable a partir del tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ vía las definiciones

$$\Delta = r (T_r^r - T_t^t) ; \quad m = -\frac{\Delta}{2r} - T_s ; \quad \tilde{m} = \frac{\Delta}{r} + \frac{\partial_r \Delta + \Delta^2 e^{2\beta} - \Delta \partial_r \beta}{2} \quad (1.110)$$

$$I(r) = 2 \int dr dx \{x [m(x) + \tilde{m}(x)] \Theta(r-x)\} \quad (1.111)$$

Escrita de este modo la solución, es evidente que en el caso particular del vacío $T_{\mu\nu} = 0$, la métrica colapsa en el resultado de Schwarzschild

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 ; \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (1.112)$$

¹³La constante de integración de la integral indefinida de esta ecuación se presupone nula. O, equivalentemente, inmersa en M .

1.3. Relatividad general acoplada a NLE

1.3.1. Formalismo Einstein - Plebański

Una de las múltiples fuentes posibles de campo gravitacional es al campo electromagnético y la forma en que se acopla a la dinámica del espacio-tiempo depende fuertemente de la física que lo gobierna. En consecuencia, diferentes NLEs¹⁴ producirán diferentes acoplamientos y en general serán distintos al acoplamiento de la teoría de Maxwell con la gravedad. La forma más inmediata de considerar todas las teorías puramente electrodinámicas es postular que el lagrangiano de materia es el **lagrangiano de Plebański** [21], de ese modo el tensor de energía-momento toma la forma

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}L_P(f_2, \tilde{f}_2) - 2 \left(\frac{\partial L_P}{\partial f_2} \frac{\delta f_2}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\partial L_P}{\partial \tilde{f}_2} \frac{\delta \tilde{f}_2}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \quad (1.113)$$

Donde f_2 y \tilde{f}_2 corresponden a los invariantes electromagnéticos típicos

$$f_2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad ; \quad \tilde{f}_2 = F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} \quad ; \quad F = dA \quad (1.114)$$

Con F la 2-forma de intensidad de campo, A la 1-forma de potencial electromagnético y \star la operación de Hodge.

Si se reduce el conjunto de teorías posibles a aquellas en que $L_P = L(f) \equiv L$, solo depende de $f = -\frac{f_2}{4}$, entonces el tensor de energía momento toma la forma [7]

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}L + F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha}L_f \quad ; \quad L_f = \frac{\partial L}{\partial f} \quad (1.115)$$

Esta ecuación es válida para toda teoría electromagnética que solo dependa de f , incluyendo los casos particulares de los monopolos eléctrico, magnético y dyónico, mismos que son de particular interés para este trabajo.

Monopolos

Del formalismo de Plebański sabemos que, para el caso de monopolos, el tensor de intensidad de campo en coordenadas esféricas tiene la forma matricial

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & Eh_t h_r & 0 & 0 \\ -Eh_t h_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Bh_{\phi} h_{\theta} \\ 0 & 0 & -Bh_{\phi} h_{\theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

Donde h_{μ} son los factores de escala de la métrica estática esféricamente simétrica dados por

$$h_{tt}^2 = h_t^2(r) \quad ; \quad h_{rr}^2 = h_r^2(r) \quad ; \quad h_{\theta\theta}^2 = r^2 \quad ; \quad h_{\phi\phi}^2 = r^2 \sin^2(\theta) \quad (1.117)$$

$$ds^2 = -h_t^2 dt^2 + h_r^2 dr^2 + h_{\theta}^2 d\theta^2 + h_{\phi}^2 d\phi^2 \quad (1.118)$$

¹⁴Electrodinámica no-lineal, por sus siglas en inglés

Con los campos escritos en términos de las cargas eléctrica q_e y magnética q_m

$$E = \frac{q_e}{r^2 L_f} \quad ; \quad B = \frac{q_m}{r^2} \quad (1.119)$$

Consecuentemente, el tensor de energía-momento monopolar puede escribirse como

$$T_\mu^\nu = L\delta_\mu^\nu + L_f \text{diag}(-E^2, -E^2, B^2, B^2) \quad (1.120)$$

Se sigue que, en términos de los campos y las cargas magnética q_m y eléctrica q_e , las entradas no nulas de este tensor son [7]

$$T_t^t = T_x^x = L - E^2 L_f = L - \frac{q_e^2}{r^4 L_f} \quad (1.121)$$

$$T_s = T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = L + B^2 L_f = L + \frac{q_m^2}{r^4} L_f \quad (1.122)$$

Una vez calculadas estas cantidades, es inmediato obtener las funciones m, \tilde{m} y Δ que permiten calcular la métrica. Estas funciones son

$$\Delta = 0 \implies \tilde{m} = 0 \quad ; \quad m = -(L + B^2 L_f) = -\left(L + \frac{q_m^2}{r^4} L_f\right) \quad (1.123)$$

De modo que la métrica del monopolo obtiene la forma

$$ds^2 = ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.124)$$

Con

$$f(r) = 1 + \frac{2[-M + I(r)]}{r} \quad ; \quad I(r) = 2 \int dr dx \{x\varepsilon(x)\Theta(r-x)\} \quad (1.125)$$

donde se ha definido además, por comodidad de notación, la función

$$\varepsilon(r) = \left[L + \frac{q_m^2}{r^4} L_f \right] \quad (1.126)$$

Tanto el dyón como el monopolo magnético, preservan esta estructura intacta; el caso del monopolo eléctrico solo requiere la condición $q_m = 0$, de modo que la estructura de la métrica se mantiene y el cambio se refleja solo en la función $\varepsilon(r)$.

Una condición importante para que cualquier NLE sea físicamente aceptable es que $E, B \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ y, en consecuencia L debe tener el mismo comportamiento. Dado lo anterior, un caso de particular interés, es aquel en que $\varepsilon(r)$ puede escribirse como suma de potencias de r^{-1} , es decir

$$\varepsilon(r) = \sum_{j \geq 4} \frac{\kappa_j}{r^j} \quad (1.127)$$

Dada esta imposición, la integral $I(r)$ puede calcularse explícitamente, obteniéndose como resultado

$$I(r) = \sum_{j \geq 4} \frac{2\kappa_j}{(j-2)(j-3)r^{j-3}} \quad (1.128)$$

Consecuentemente, la función $f(r)$ de la métrica tiene la forma final

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \sum_{j \geq 4} \frac{4\kappa_j}{(j-2)(j-3)r^{j-2}} \quad (1.129)$$

Esta es la forma general de la métrica del monopolo (magnético, eléctrico o dyónico) estático en cualquier NLE escrita como expansión de potencias de r^{-1} . Elegir una NLE en particular equivale a elegir explícitamente las constantes κ_j .

1.3.2. Dyón en la teoría Einstein - Maxwell

El acoplamiento más sencillo de gravedad con campo electromagnético, consiste en elegir la electrodinámica lineal (de Maxwell) como caso particular de la teoría Einstein- Plebański. De este modo, el lagrangiano de Plebański adquiere la forma explícita

$$L = f \implies L_f = 1 \quad (1.130)$$

De modo que, el lagrangiano del monopolo estático, en términos de las cargas magnética y eléctrica es

$$L = -\frac{q_m^2}{2r^4} + \frac{q_e^2}{2r^4} \quad (1.131)$$

Consecuentemente

$$\varepsilon(r) = \frac{q_m^2 + q_e^2}{2r^4} \quad (1.132)$$

Que, evidentemente, tiene la forma

$$\varepsilon(r) = \frac{\kappa}{r^j} ; \quad j = 4 ; \quad \kappa = \frac{q_m^2 + q_e^2}{2} \equiv \frac{Q^2}{2} \quad (1.133)$$

Imponiendo esta condición en el resultado general para el monopolo estático se obtiene que

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\kappa}{(j-2)(j-3)r^{j-2}} \quad (1.134)$$

De modo que la métrica del monopolo de la electrodinámica de Maxwell acoplada con la relatividad general es

$$ds^2 = ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (1.135)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^4} ; \quad Q^2 = q_m^2 + q_e^2 \quad (1.136)$$

A este resultado se conoce como **métrica de Reissner-Nordström**. Descubierta entre 1916 y 1921 por Hans Reissner, Hermann Weyl, Gunnar Nordström y George Barker Jeffery de forma independiente.

1.3.3. Dyón en la teoría de Einstein-(Born-Infeld)/(Euler-Heisenberg)

Consideremos el lagrangiano de Born e Infeld expandido hasta primer orden de λ , bajo la condición $f_2^2 = 0$. Esta expresión es idéntica a la debida a la teoría de Euler y Heisenberg y tiene la forma

$$L = f + \lambda \frac{f^2}{2} \implies L_f = 1 + \lambda f \quad ; \quad f = -\frac{B^2 - E^2}{2} \quad (1.137)$$

Donde, el parámetro λ selecciona la teoría que se prefiera y actúa como cuadrado inverso de campo máximo del modo siguiente

$$\lambda = \begin{cases} a & ; \quad \text{Euler-Heisenberg} \\ b^{-2} & ; \quad \text{Born-Infeld} \end{cases} \quad (1.138)$$

De la sección del **Campo del Dyón en Born-Infeld** tenemos que los campos eléctrico y magnético del dyón, expandidos hasta primer orden de λ , están dados en términos de las cargas eléctrica q_e y magnética q_m por

$$B^2 = \frac{q_m^2}{r^4} \quad (1.139)$$

$$E^2 = \frac{q_e^2}{r^4} - \lambda \frac{q_e^4}{r^8} + \lambda \frac{q_e^2 q_m^2}{r^8} \quad (1.140)$$

Puede calcularse entonces que, hasta primer orden en λ , la función $\varepsilon(r)$ es

$$\varepsilon(r) = \frac{Q^2}{2r^4} - \lambda \frac{3\tilde{Q}^4}{8r^8} \quad ; \quad \begin{cases} Q^2 \equiv q_e^2 + q_m^2 \\ \tilde{Q}^2 \equiv q_m^2 - q_e^2 \end{cases} \quad (1.141)$$

Que tiene la forma

$$L + \frac{q_m^2}{r^4} L_f = \frac{\kappa_1}{r^j} + \frac{\kappa_2}{r^k} \quad (1.142)$$

Donde

$$\kappa_1 = \frac{Q^2}{2} \quad ; \quad j = 4 \quad (1.143)$$

$$\kappa_2 = -\frac{3\tilde{Q}^4}{8}\lambda \quad ; \quad j = 8 \quad (1.144)$$

Entonces, la función $f(r)$ de la métrica puede calcularse con la expresión

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\kappa_1}{(j-2)(j-3)r^{j-2}} + \frac{4\kappa_2}{(k-2)(k-3)r^{k-2}} \quad (1.145)$$

Consecuentemente, la métrica del Dyón en la teoría BI/EH está dada por

$$ds^2 = ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (1.146)$$

Donde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^4} - \frac{\tilde{Q}^4}{20r^6}\lambda ; \quad \left\{ \begin{array}{l} Q^2 = q_e^2 + q_m^2 \\ \tilde{Q}^2 = q_m^2 - q_e^2 \end{array} \right. \quad (1.147)$$

Este resultado coincide con la solución, reportada en [18], para el monopolo eléctrico en la teoría EH. Esta forma de la métrica para el monopolo eléctrico es un resultado esperado debido a la correspondencia BI→EH. Sin embargo, vale la pena recalcar que el formalismo de Plebański acoplado con relatividad general clásica permite obtener gratuitamente los tres casos posibles (dyón, monopolo eléctrico y monopolo magnético) al calcular la métrica del dyón.

Es claro que las soluciones con carga puramente eléctrica o magnética $q = q_{e/m}$, tienen exactamente la misma forma

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^4} - \frac{q^4}{20r^6}\lambda \quad (1.148)$$

El dyón, por otro lado, presenta una competencia entre cargas a primer orden en λ debido al factor $\tilde{Q}^4 = (q_m^2 - q_e^2)^2$. Esta competencia es simétrica alrededor de la condición $q_e = q_m = q$; misma que implica que la métrica colapse en la solución de Reissner-Nordström

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^4} \quad (1.149)$$

Este hecho se entiende al recordar que el dyón balanceado **aniquila todo efecto no-lineal** de la teoría. De hecho, debe ocurrir (y ocurre) que las perturbaciones de mayor orden en λ tampoco contribuyan a la métrica del dyón balanceado. En consecuencia, puede considerarse a Q como carga total del monopolo, de ese modo el factor \tilde{Q} actúa como un apantallamiento de la función $f_{RN}(r)$ de Reissner-Nordström

$$f(r) = f_{RN}(r) - \frac{\tilde{Q}^4}{20r^6}\lambda \quad (1.150)$$

Obligándola a oscilar entre el dyón lineal y el monopolo puro no-lineal debido a que

$$\left. \begin{array}{l} q_m \ll q_e \\ q_e \ll q_m \end{array} \right\} \implies Q^2 = \tilde{Q}^2 = \left\{ \begin{array}{l} q_e^2 \\ q_m^2 \end{array} \right. \quad (1.151)$$

1.3.4. Dyón no perturbativo en la teoría de Einstein-Born-Infeld

La solución no perturbativa a de métrica debida al acoplamiento de relatividad general con la teoría BI bajo la condición $\tilde{f} = 0$, fue reportada a finales de 2017 y principios de 2018 por K. A. Bronnikov en [7]. En este trabajo reporta soluciones de agujero negro regular para el caso estático y soluciones tipo agujero de gusano en el caso dinámico.

En la construcción de la teoría, se considera el lagrangiano de Born- Infeld que solo depende del invariante f dado en términos de las cargas eléctrica q_e y magnética q_m del dyón por¹⁵

$$L = b^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{2f}{b^2}} \right\} ; \quad f = \frac{2b^2 (q_m^2 - q_e^2)}{4q_e^2 + b^2 r^4} \quad (1.152)$$

Solución estática

La solución estática preserva la estructura encontrada con el formalismo Einstein-Plebański.

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.153)$$

Donde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2I(r)}{r} ; \quad I(r) = \int r^2 \varepsilon(r) dr^2 \quad (1.154)$$

En este caso, la función $\varepsilon(r)$ deja de ser serie de potencias de r^{-1} y adopta la forma cerrada

$$\varepsilon(r) = \frac{4q_e^2}{r^4} S(r) ; \quad S(r) = \sqrt{\frac{4q_m^2 + b^2 r^4}{4q_e^2 + b^2 r^4}} \quad (1.155)$$

En este punto, se hace evidente que, si se impone la condición del dyón balanceado $q_m = q_e = q$, entonces $S(r) = 1$ y se obtiene directamente la solución de Reissner-Nordstrom con carga $Q = 2q$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (1.156)$$

De esta manera se corrobora que **el dyón balanceado cancela todo efecto no-lineal** de la teoría. Consecuentemente, ninguna perturbación de orden mayor al caso lineal contribuye a la métrica de este caso particular.

La solución general para $q_e \neq q_m$ resulta bastante más complicada, aunque sigue siendo analítica. Depende de la función hipergeométrica F_1 y tiene la siguiente forma

$$I(r) = \frac{12q_e^2 S(r) + b^2 r^4 (1 - 3S(r))}{6r} + \frac{b^2 r^3}{42 |q_e q_m|} \left[\begin{aligned} &14 (q_e^2 + q_m^2) F_1 \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \frac{-b^2 r^4}{4q_e^2}, \frac{-b^2 r^4}{4q_m^2} \right) \\ &+ \\ &3br^4 F_1 \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{4}, \frac{-b^2 r^4}{4q_e^2}, \frac{-b^2 r^4}{4q_m^2} \right) \end{aligned} \right] \quad (1.157)$$

Esta solución predice la existencia de agujeros negros regulares, con miras a la posibilidad de soluciones de agujero de gusano. Sin embargo, todas las soluciones de tipo agujero de gusano violan las condiciones de energía $T_t^t - T_r^r \geq 0$, de modo que de antemano, toda solución de gujero de gusano estático en la teoría Einstein-Born-Infel está físicamente prohibida. Los detalles del análisis de esta solución pueden consultarse en [7]

¹⁵Debe tenerse precaución al comparar el trabajo de Bronnikov con los resultados escritos aquí, debido a que es necesario un cambio de unidades y de signatura.

Solución dinámica

Un caso interesante en la búsqueda de estructuras tipo agujero de gusano consiste en considerar soluciones dinámicas que preserven la simetría esférica pero no sean conformalmente estáticas vía la proposición de una métrica con la forma general

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)+2a(t)} dt^2 + e^{2\beta(t)+2b(r)} dr^2 + e^{2\omega_t(t)+2\omega_r(r)} d\Omega^2 \quad (1.158)$$

Esta métrica puede reescribirse para separar las partes temporal y espacial de los factores de escala pidiendo la siguiente reparametrización

$$d\tau = e^{a(t)} dt \quad ; \quad dx = e^{b(r)} dr \quad (1.159)$$

Que conduce a la forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} d\tau^2 + e^{2\beta(t)} dx^2 + e^{2\omega_\tau(\tau)+2\omega_x(x)} d\Omega^2 \quad (1.160)$$

Esta métrica modifica considerablemente el sistema de ecuaciones diferenciales producto de las ecuaciones de campo de Einstein dinámicas, debido a que la componente de la 2-esfera no es estrictamente esférica, sino conformalmente esférica.

La mayor virtud de la proposición de esta métrica es que provee de soluciones cuya geometría corresponde a agujeros de gusano dinámicos físicamente permitidos. Los detalles de este análisis escapan de los límites que enmarcan el presente trabajo de tesis, no obstante es importante tenerlos presentes. La solución de agujero de gusano dinámico puede consultarse en [7].

1.4. Teoría Einstein - Dirac - Maxwell.

Recientemente¹⁶ se ha estudiado la posibilidad de introducir efectos cuánticos en la relatividad general que dan lugar a soluciones tipo agujero de gusano (WH) y que no requieren de materia exótica para existir [20],[19],[4]. Esto se consigue construyendo una teoría que acopla linealmente la relatividad general clásica con la electrodinámica maxwelliana y la mecánica cuántica relativista, vía la superposición de las acciones Einstein-Hilbert, Maxwell y Dirac, llamada en adelante **Teoría Einstein - Maxwell -Dirac** (EDM), cuya forma es la siguiente

$$S_{EDM} = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} - \frac{f_2}{4} + L_D \right\} \quad (1.161)$$

Donde R es el escalar de Ricci debido a la métrica $g_{\mu\nu}$, $f_2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ el invariante electromagnético del tensor de Faraday $F = dA$; con A el 4-potencial electromagnético y L_D un lagrangiano de materia asociado al campo espinorial dado por la acción de Dirac¹⁷

$$L_D = \bar{\chi} (i\gamma^\nu \mathfrak{D}_\nu - m) \chi = \langle \not{P} - m \rangle \quad (1.162)$$

¹⁶ Finales de 2020 - inicios de 2021.

¹⁷ Se adopta la notación de Feynman para el momento de la partícula $\not{P} = i\gamma^\nu \mathfrak{D}_\nu$, y la notación $\langle A \rangle$ para escribir el valor esperado $\bar{\chi}(A)\chi$ de un operador arbitrario A .

Donde m es la masa de los fermiones, γ^μ las matrices de Dirac en espacio-tiempo curvo, χ el espinor asociado al campo fermiónico y $\mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu - iqA$, la derivada covariante espinorial, que incluye la conexión espinorial afín Γ_μ y la conexión de norma iqA , donde q es la carga eléctrica o magnética de las partículas.

Esta acción conduce a las ecuaciones de movimiento

$$(\gamma^\nu \mathfrak{D}_\nu - m) \chi = 0 ; \{ \nabla_\mu F^{\nu\mu} = qj^\nu ; d^2 F = 0 \} ; R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu} \quad (1.163)$$

Que son, respectivamente: ecuación de Dirac, ecuaciones de Maxwell y ecuaciones de Einstein. Aquí ∇_μ es la derivada covariante (sin conexión de norma), $j^\mu = \bar{\chi} \gamma^\mu \chi$ la 4-corriente eléctrica, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento, dado por

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} + T_{\mu\nu}^{(D)} \quad (1.164)$$

Donde $T_{\mu\nu}^{(M)}$ es la contribución maxwelliana al tensor de energía momento y $T_{\mu\nu}^{(D)}$ la contribución debida a la presencia del campo fermiónico. Estas cantidades están dadas por las siguientes expresiones

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} f_2 g_{\mu\nu} \quad (1.165)$$

$$T_{\mu\nu}^{(D)} = 2 \langle i \gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \quad (1.166)$$

Cabe mencionar que en esta formulación se ha considerado signatura $(-, +, +, +)$ y el sistema *natural* de unidades, que toma las constantes fundamentales $\{\hbar, c, G, K_B, e\}$ (constante reducida de Planck, rapidez de la luz en el vacío, constante de gravitación universal, carga eléctrica fundamental y constante del Boltzmann, respectivamente) equivalentes a la unidad, es decir

$$\hbar \rightarrow 1 ; c \rightarrow 1 ; G \rightarrow 1 ; K_B \rightarrow 1 ; e \rightarrow 1 \quad (1.167)$$

1.4.1. Agujeros de gusano eléctricamente cargados

Considremos un objeto compacto eléctricamente cargado, entonces el 4-potencial en coordenadas esféricas tendrá la forma

$$A = V(r) dt \quad (1.168)$$

Si además se pide una métrica estática y esféricamente simétrica

$$ds^2 = -g_{tt}(r) dt^2 + g_{rr}(r) dr^2 + g_{\Omega\Omega}(r) d\Omega^2 \quad (1.169)$$

El problema puede ser resuelto analíticamente en el límite en que la masa de los fermiones y su carga eléctrica son pequeñas; $m \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$, respectivamente. Dando lugar con ello al potencial eléctrico $V(r)$ y métrica ds^2 dados por

$$V(r) = \frac{M}{Q} \sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(1 - \frac{Q^2}{r_0 r}\right)} ; M = \frac{2Q^2 r_0}{Q^2 + r_0} \quad (1.170)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left(1 - \frac{Q^2}{r_0 r}\right)} + r^2 d\Omega \quad (1.171)$$

Esta es la solución encontrada por Blazquez et al. [4] y describe un WH regular atravesable descrito por su carga eléctrica $Q < r_0$, radio de la boca del agujero r_0 y M la masa de Arnowitt-Deser-Misner. Esta métrica es posible gracias a la contribución de los espinores en el tensor de energía-momento. Nótese además que a medida que $Q \rightarrow r_0$ se recupera la solución de Reissner - Nordström para el agujero negro eléctricamente (o magnéticamente) cargado.

Blazquez et al. comentan que, aunque esta solución es un caso límite, ilustra la posibilidad de hallar WHs microscópicos pero atravesables y eléctricamente cargados vía una teoría EDM, que no requiere de materia exótica. La solución tipo WH más allá del caso límite aquí comentado se explora ampliamente en [4] y en [16].

Es claro entonces que la teoría EDM contiene de manera natural WHs para configuraciones de carga puramente eléctrica. Además, dado que la ecuación de movimiento que rige el campo fermiónico es la ecuación de Dirac, se sigue que la materia descrita y necesaria para estos resultados es la materia fermiónica ordinaria.

1.4.2. Agujeros de gusano magnéticamente cargados

El WH magnéticamente cargado y atravesable no se encuentra incluido de manera natural en la teoría EDM, sin embargo es posible construir la solución resolviendo la geometría del espacio-tiempo a trozos partiendo de soluciones de agujero negro (BH) que luego derivan en una métrica de WH. Desde luego, este procedimiento arroja la necesidad de incluir un componente negativo en la energía total del sistema, mismo que clásicamente está prohibido debido a la inexistencia de masas negativas. Sin embargo, este problema se subsana totalmente vía la inclusión de energía de Casimir debida al movimiento periódico en orbitas cerradas de fermiones, este es un efecto meramente cuántico reportado desde 2014, primero estudiado en la dinámica de electrones en nanotubos de carbono y retomado recientemente como aplicación en gravitación [10],[13],[?].

La estrategia que se sigue, de acuerdo con [20] y [19] es la siguiente:

1. Considere dos BHs magnéticamente cargados¹⁸ con cargas opuestas y separados por una distancia d .
2. Considere que fermiones eléctricamente cargados y **no masivos** se encuentren todos uniformemente distribuidos alrededor del BH orbitando las líneas de campo en el **nivel de Landau más bajo**.
3. Proponga una métrica de WH compatible con la métrica del BH cercana el horizonte de eventos.

¹⁸Esto puede conseguirse clásicamente utilizando el potencial del mono polo de Dirac

4. Separe el espacio-tiempo total en tres trozos:
 - a) Espacio-tiempo plano: Región entre ambos BHs.
 - b) Boca del WH: Cercanía al horizonte de eventos del BH original.
 - c) Garganta del WH.

Y *una* estas soluciones en las regiones de intersección de validez de las geometrías correspondientes.

5. Permita que los fermiones puedan viajar en órbitas cerradas entre ambas bocas del WH; primero entrando en una de las bocas, continuando a través de la garganta, saliendo por la segunda boca y luego retornando al punto de partida viajando por la región plana del espacio-tiempo.
6. **Estabilice** el WH minimizando la energía necesaria para enlazar ambas bocas del WH, considerando la energía tipo Casimir que resulta de imponer condiciones **antiperiódicas** de frontera en el tránsito de los fermiones cargados a lo largo de trayectorias cerradas.

La figura (1.1) esquematiza la separación propuesta entre las distintas regiones mencionadas, en verde se observan las líneas de campo magnético que transitan de una boca hacia la otra formando líneas cerradas. De este modo, lo que inicialmente eran dos monopolos de Dirac, se convierte en un dipolo magnético. Los fermiones cargados seguirán las líneas de campo magnético trzando helicoides cerrados entre ambas bocas del WH. Una vez propuesto este camino, es conveniente estudiar por separado

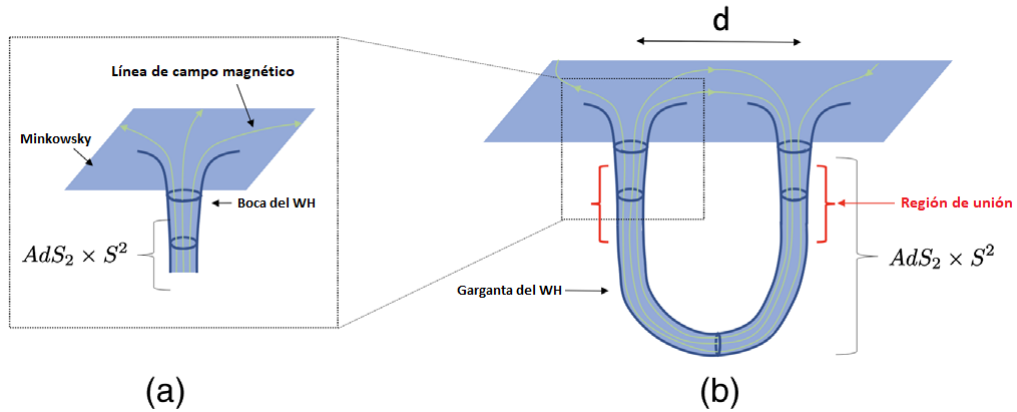


Figura 1.1: Esquema del WH magnéticamente cargado. Las líneas color verde muestran las líneas de campo magnético.

- a) Acercamiento a la zona de cercana a la boca del WH, donde se aprecia la región plana, la boca y la región de unión entre métricas.
- b) Esquema completo del WH, muestra ambas bocas conectadas por debajo a través de la garganta y por arriba a través del espacio tiempo plano.

los distintos componentes del mismo.

Agujero negro magnéticamente cargado

Tomemos ahora un objeto compacto con carga magética, cuyo potencial está descrito por el monopolo de Dirac en coordenadas esféricas

$$A = Q \cos(\theta) d\phi \quad (1.172)$$

Que produce los campos

$$\mathbf{B} = \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.173)$$

Luego, exijamos que los fermiones involucrados sean no masivos $m = 0$ y se encuentren orbitando a distancias constantes $r_f = cte$ en el nivel de Landau más bajo $\mathcal{P} = 0$. Se sigue entonces que la contribución fermiónica de las entradas tt y rr del tensor energía momento es nula $T_{tt}^{(D)} = T_{rr}^{(D)} = 0$. Consecuentemente, la métrica estática esféricamente simétrica, que resuelve las ecuaciones de Einstein bajo estas condiciones es la conocida métrica de Reissner - Nordström (RN)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad ; \quad f(r) = 1 - \frac{M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (1.174)$$

Esta métrica posee dos horizontes de eventos, sin embargo, bajo la condición $M = Q = r_0$ ambos colapsan en un mismo horizonte. Esta solución particular se conoce como el *caso extremo* del BH de RN y la función $f(r)$ de la métrica se reescribe como

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 \quad (1.175)$$

Es importante recalcar que, hasta ahora el **momento lineal** en la dirección $\hat{\mathbf{r}}$ de las partículas cargadas es nulo, de modo que solo poseen **momento angular** paralelo a la dirección $\hat{\mathbf{r}}$. La figura (1.2) esquematiza este hecho; en ella se observan las órbitas de los fermiones, centradas en las líneas de campo magnético fuera del horizonte de eventos. Como es de esperarse, el caso extremo del BH de RN tiene temperatura cero, esto puede verse facilmente a partir de la definición de temperatura [18]

$$T = \frac{1}{4\pi} f'(r_0) \quad (1.176)$$

Mientras que la energía total del sistema así como su entropía son distintas de cero, debido a las relaciones

$$E = M = r_0 \quad ; \quad S = 4\pi r_0^2 \quad (1.177)$$

De modo que todo incremento de materia o energía perturbará al sistema obligándolo a salir de este estado privilegiado. Con el fin de permitir variaciones en el contenido energético del BH, consideremos que una vez alcanzado el caso extremo, el BH se perturba mediante un incremento de temperatura $\Delta T = T$, modificando la energía total, de manera aproximada, como [20]

$$E \approx E_0 + E_{pert} = r_0 + \frac{1}{2}r_0^3 (2\pi T)^2 \quad (1.178)$$

En consecuencia, la masa efectiva sufre una perturbación equivalente

$$M \approx M_0 + M_{pert} = r_0 + \frac{1}{2}r_0^3 (2\pi T)^2 \quad (1.179)$$

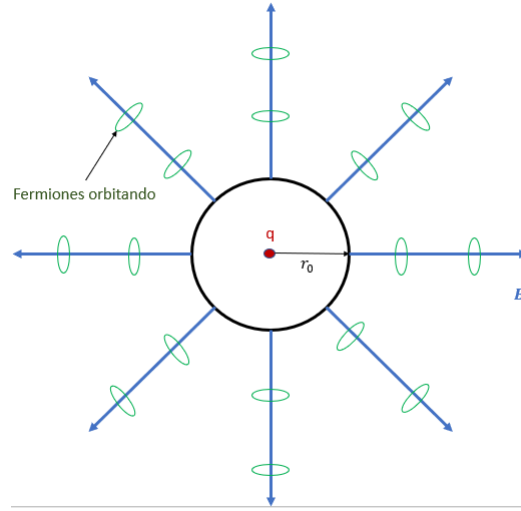


Figura 1.2: BH extremo de RN con carga q y fermiones orbitando alrededor de las líneas de campo magnético \mathbf{B} a distancia fija. En color azul se muestran las líneas de campo magnético, en negro el horizonte de eventos de radio r_0 , y en verde las órbitas de los fermiones no masivos.

O bien, si se define el parámetro $l \equiv \frac{1}{2\pi T}$, entonces

$$E \approx E_0 + E_{pert} = r_0 + \frac{r_0^3}{2l^2} \quad (1.180)$$

$$M \approx M_0 + M_{pert} = r_0 + \frac{r_0^3}{2l^2} \quad (1.181)$$

Donde E_0/M_0 corresponde a la energía/masa del BH extremo de RN, E_{pert}/M_{pert} a la energía/masa de perturbación y $r_0 = M_0 = E_0$ es la distancia a la que se encuentra el horizonte de eventos en el caso extremo. Esta perturbación preserva la forma funcional de la métrica salvo la siguiente modificación de la función $f(r)$

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{r_0^3}{2l^2 r} = \left(\frac{r_0^2}{rl}\right)^2 \left\{ \left[\frac{l(r-r_0)}{r_0^2} \right]^2 - \frac{r}{r_0} \right\} \quad (1.182)$$

Nótese que en la medida en la que $T \rightarrow 0 \implies l \rightarrow \infty$, se recupera el BH extremo y para el caso $r \rightarrow \infty \implies f(r) \rightarrow 1$, se obtiene el espacio-tiempo de Minkowsky.

Nos interesa ahora explorar la forma de la métrica en la zona cercana al horizonte de eventos del BH extremo, $r \approx r_0$. Al imponer esta aproximación y la reparametrización de las coordenadas temporal y radial [20],[19]

$$\tau = \frac{t}{l} ; \quad \rho = \frac{l}{r_0^2} (r - r_0) \quad (1.183)$$

La métrica del BH cercano al caso extremo obtienen la forma

$$ds^2 \approx r_0 \left\{ -(\rho^2 - 1) d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{(\rho^2 - 1)} + d\Omega^2 \right\} \quad (1.184)$$

Que puede reescribirse como un parte conformalmente plana más una esfera de radio r_0

$$ds^2 = r_0 \{ (\rho^2 - 1) (-d\tau^2 + dx^2) + d\Omega^2 \} \quad ; \quad dx = \frac{d\rho}{\rho^2 - 1} \quad (1.185)$$

De este resultado puede verse que cerca del horizonte de eventos $\rho \approx 0$ la métrica conecta con el espacio-tiempo plano vía una geometría $AdS_2 \times S^2$, este hecho se esquematiza en la figura (1.3).

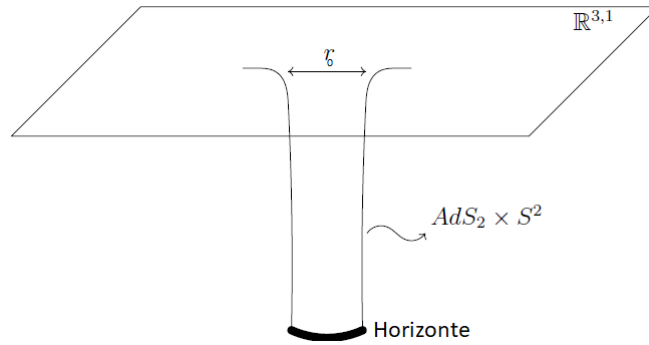


Figura 1.3: Acercamiento de la geometría cercana al horizonte de eventos. El horizonte conecta con el espacio-tiempo plano vía una geometría $AdS_2 \times S^2$.

El caso del BH con carga opuesta es completamente análogo y es trivial suponerlo separado a una distancia d respecto al BH tratado en este apartado. Dicho esto, es evidente que se han cubierto los dos primeros puntos de la estrategia de construcción del WH.

Métrica de agujero de gusano

Dada la conexión $AdS_2 \times S^2$ entre el espacio-tiempo plano y la cercanía al horizonte de eventos, se propone la siguiente métrica para la *garganta* del WH

$$ds^2 = r_0 \left\{ - (\rho^2 + 1) d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{(\rho^2 + 1)} + d\Omega^2 \right\} \quad (1.186)$$

Esta métrica preserva la estructura $AdS_2 \times S^2$ y es también solución de las ecuaciones de Einstein para la cercanía del horizonte de eventos del BH de RN. Sin embargo, requiere de una perturbación negativa de energía, que se traduce en una perturbación imaginaria de la temperatura o bien de la inclusión de masa negativa. Estas afirmaciones pueden entenderse mediante la siguiente construcción; Tomemos el BH extremo de RN y apliquemos una perturbación similar a la realizada en el caso antes discutido pero bajo la transformación $T \rightarrow Ti$

$$E_{pert} = M_{pert} = \frac{1}{2} r_0^3 (2\pi Ti)^2 = -\frac{r_0^3}{2l^2} \quad (1.187)$$

Entonces la función $f(r)$ de la métrica de RN se reescribe como

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 + \frac{r_0^3}{2l^2r} = \left(\frac{r_0^2}{rl}\right)^2 \left\{ \left[\frac{l(r-r_0)}{r_0^2} \right]^2 + \frac{r}{r_0} \right\} \quad (1.188)$$

Imponiendo la aproximación $r \approx r_0$ y la misma reparametrización $(t, r) \rightarrow (\tau, \rho)$ se obtiene la métrica propuesta para el WH. Es claro entonces que la teoría EDM permite la existencia WHs magnéticamente cargados, sin embargo, a diferencia de los WHs eléctricamente cargados, estos no pueden sostenerse por si mismos vía la inclusión de materia ordinaria. Ignoraremos este último hecho por ahora, dado que la contribución negativa a la energía se subsanará posteriormente permitiendo que los fermiones atrapados puedan orbitar entre las bocas del agujero de gusano.

En este punto, las características importantes de la métrica propuesta son las siguientes:

1. La estructura del espacio tiempo descrito es $AdS_2 \times S^2$, de modo que puede *pegarse* con la aproximación de la métrica cercana al horizonte de eventos.
2. La geometría **carece** de horizonte de eventos.
3. Las componentes (g_{tt}, g_{rr}) de la métrica son funciones pares de ρ , válidas (por ahora) para todo $\rho \in \mathbb{R}$.

Estas características hacen de la métrica en cuestión un candidato adecuado para describir la *garganta* del WH.

Unión de las métricas de agujero de gusano y agujero negro

Consideremos ahora que, de algún modo, existen ambas geometrías: BH y WH, superpuestas en una misma región del espacio-tiempo¹⁹ de forma que la garganta del WH conecta dos BH de RN cercanos a la extremalidad que fungen como *bocas* del WH, según se esquematiza en la figura (1.4), de modo que las regiones principales del WH quedan definidas como

- Región plana (Minkowsky)
- Boca del WH
- Garganta del WH

La región plana, obtenida bajo la condición $r \gg r_0$ coincide con la métrica de Minkowsky, mientras que la región de unión se define por un parámetro de corte ρ_0 y la métrica

$$ds^2 = r_0 \left(-f(\rho)d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{f(\rho)} + d\Omega^2 \right) \quad (1.189)$$

¹⁹El mecanismo de formación del WH no se estudia en este trabajo y, de hecho, permanece como un problema abierto. El único argumento para postular su existencia es que la geometría propuesta es solución de las ecuaciones de Einstein en la teoría EDM.

Donde

$$f(\rho) = \left\{ \begin{array}{ll} \rho^2 - 1 & ; \quad \rho > 0 \\ \rho^2 + 1 & ; \quad \{\rho \in \mathbb{R} : \rho \approx 0\} \cup [-\rho_c, \rho_c] \end{array} \right\} \quad (1.190)$$

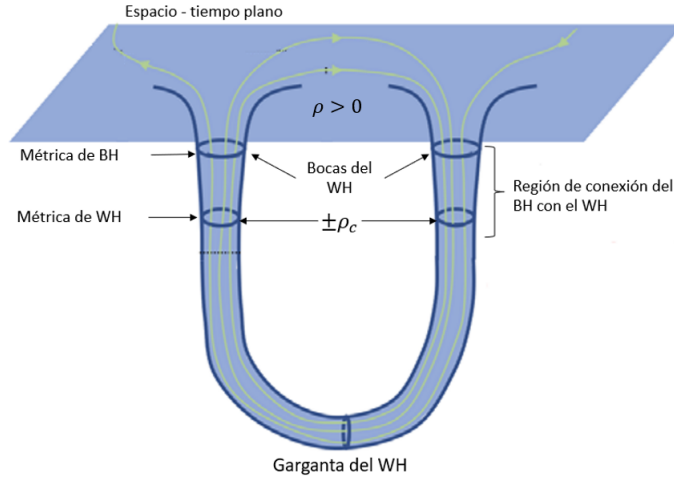


Figura 1.4: Esquema de las regiones principales del WH: Espacio plano, bocas y garganta.

Esta superposición es válida debido a que tanto la métrica de WH como la métrica de BH conectan con el espacio-tiempo plano vía la misma estructura; $AdS_2 \times S^2$. De esta manera, un observador situado en la región intermedia entre los BH medirá una métrica plana. Luego, a medida que se acerca a alguna de las bocas, comenzará a medir la métrica característica del BH. Posteriormente, en la región cercana a $r = r_0$ y dado que las métricas de WH y BH coinciden conforme la coordenada ρ crece, como muestra (1.5), el observador medirá una superposición de ambas métricas; a esta zona la llamaremos *zona de conexión*. Finalmente, una vez atravesada la zona de conexión, el observador medirá únicamente la métrica de WH.

Una vez hecha esta unión, estamos en posición de caracterizar este sistema como un único WH. De las definiciones dadas para τ y ρ puede verse que, toda vez que el parámetro l queda fijo y que se exija que $r \in [0, \infty)$, se obtiene una expresión para el parámetro de corte ρ_c y una relación entre el tiempo coordenado y el tiempo propio dentro de la garganta del WH dadas por

$$\Delta t = l\Delta\tau \quad ; \quad \rho_c = \frac{l}{r_0} \quad (1.191)$$

De aquí que el parámetro l pueda reinterpretarse como la *dilatación* del tiempo coordenado t respecto al tiempo propio τ . En otras palabras, si $l > 1$ entonces el tiempo que tarda un *viajero* en travesar la garganta del WH, visto por un observador externo, es mayor que el tiempo experimentado por el viajero mismo. Por otro lado, la cantidad ρ_c hace evidente que el dominio de la coordenada ρ no corresponde a todos los reales; está acotada por abajo por ρ_c , además en pro de preservar causalidad debe ocurrir que $l > r_0$, consecuente mente el dominio de la métrica de la garganta del WH es el intervalo $[-\rho_c, \rho_c]$.

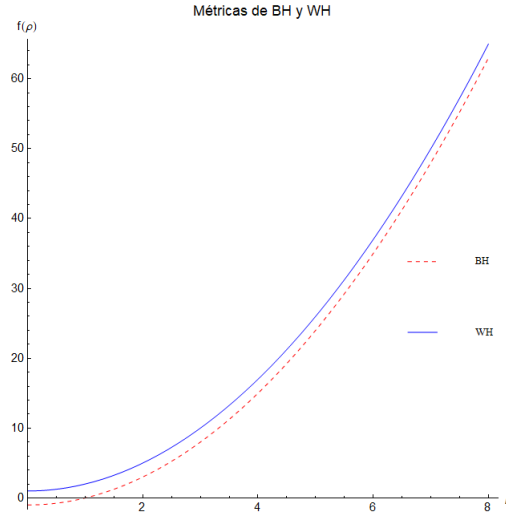


Figura 1.5: La métrica de WH, línea sólida y la métrica de BH, línea punteada, coinciden a medida que ρ se aleja del origen.

Consideremos ahora la métrica de la garganta en su forma **conformalmente plana**.

$$ds^2 = r_0 \left\{ \frac{\rho^2 + 1}{l^2} (-dt^2 + dx^2) + d\Omega^2 \right\} ; \quad dx = \frac{l}{\rho^2 + 1} d\rho \quad (1.192)$$

De este modo podemos definir la **longitud de la garganta** L_g como²⁰

$$L_g = \Delta x = \int_{-\rho_c}^{\rho_c} \frac{l}{\rho^2 + 1} d\rho \approx \pi l \quad (1.193)$$

Esta es la longitud **conformalmente plana** que observa un viajero a través de la garganta del WH. Para el caso de partículas no masivas (i.e. viajando con la rapidez de la luz) esta distancia coincide con el tiempo coordenado que tardarían en ir de una boca a la otra del WH.

Las cantidades (L_g, ρ_c, r_0) ; longitud de la garganta, parámetro de corte y radio de la boca caracterizan el WH, teniendo como parámetro por ajustar la cantidad l , mismo que hasta ahora es un parámetro libre, sin embargo, una vez incluida la contribución de la energía de Casimir, quedará totalmente determinado.

Fermiones en órbitas periódicas

Permitamos ahora que los fermiones no solo se encuentren orbitando alrededor de las líneas de campo, sino que puedan viajar desde una de las bocas del WH hasta la otra siguiendo el espacio-tiempo plano, luego ser devorados por la segunda boca para atravesar la garganta del WH y emerger finalmente en el punto inicial. Para esto, retomemos el potencial magnético del monopolo de Dirac

$$A = Q \cos(\theta) d\phi \quad (1.194)$$

²⁰Se ha tomado la consideración $\frac{l}{r_0} \gg 1$

Se sigue que, dada la carga magnética de ambas bocas del WH, el potencial magnético total se escribe como

$$A = Q [\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)] \quad (1.195)$$

Donde θ_j es el ángulo cenital en coordenadas esféricas con centro en el monopolo j .

Luego, las líneas de campo son tales que el vector tangente a las mismas apunta en la dirección del campo magnético \mathbf{B} . Si consideramos el campo vectorial definido por ∇A , este será normal a las curvas definidas por $A = \nu Q = cte$ y a la vez normal a \mathbf{B} , por tanto las líneas de campo quedan definidas por el parámetro ν del modo siguiente

$$\nu = \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2) \quad (1.196)$$

Para cada valor de ν existe una y solo una línea cerrada de campo, nótese además que el dominio de este parámetro es el intervalo $[0, 2]$. La figura (1.6) muestra una esquematización de las líneas de campo magnético de estos dos monopolos para diferentes valores de ν . Luego, los fermiones no masivos eléctricamente cargados viajarán

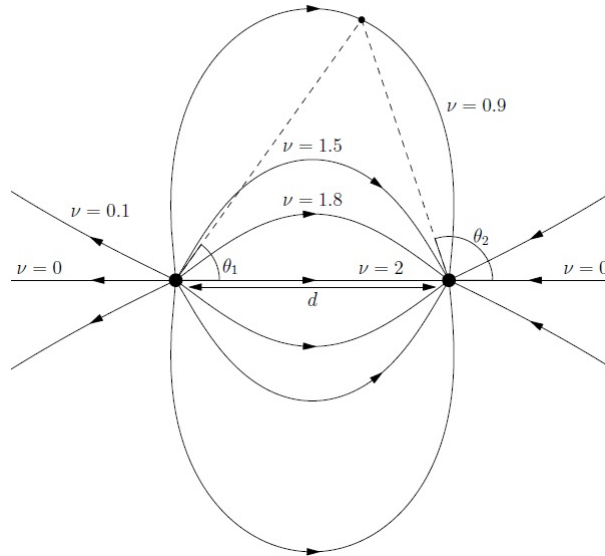


Figura 1.6: Líneas de campo magnético debidas a dos monopolos, para distintos valores de ν

en trayectorias helicoidales centradas en estas líneas de campo. Si consideramos que la distancia d es grande comparada con el tamaño de las bocas del WH; $r_0 \ll d$, podemos considerar que el espacio-tiempo a través del que viajan las partículas es esencialmente plano, además si el momento angular de las partículas corresponde al nivel de Landau más bajo, la longitud de la helicoide es aproximadamente la longitud de la línea de campo en su centro, por lo que la distancia que recorren las partículas al viajar entre las bocas del WH puede escribirse como

$$L_{pl} = dh(\nu) \quad (1.197)$$

Donde $h(\nu)$ es una función estrictamente positiva que depende del parámetro ν y cumple las condiciones $h(2) = 1$; $h(0) \rightarrow \infty$. Es decir, que la longitud total del

viaje a través de la región plana es proporcional a la distancia entre ambas bocas y solo depende de ν .²¹

Como consecuencia de esta discusión, puede concluirse que la longitud total del viaje de los fermiones orbitando entre ambas bocas del WH puede aproximarse como la suma del viaje a través de la sección plana, más la longitud recorrida a través de la garganta

$$L(\nu) = L_{pl} + L_g = \pi l + h(\nu)d \quad (1.198)$$

Es preciso notar en este punto que, una vez que se fija un valor para ν , la trayectoria de cada partícula puede parametrizarse con las coordenadas (t, x) donde x es una coordenada espacial periódica y t corresponde al tiempo coordenado, perpendicular al espacio generado por x . Consecuentemente el espacio de configuraciones sobre el que se desenvuelve la partícula corresponde a un cilindro y la trayectoria describe sobre este espacio, una helicoides con pendiente unitaria. La figura (1.7) esquematiza este espacio de configuraciones y la trayectoria descrita; una parte de la helicoides corresponde al viaje a través del espacio-tiempo plano y la otra a través de la garganta del WH

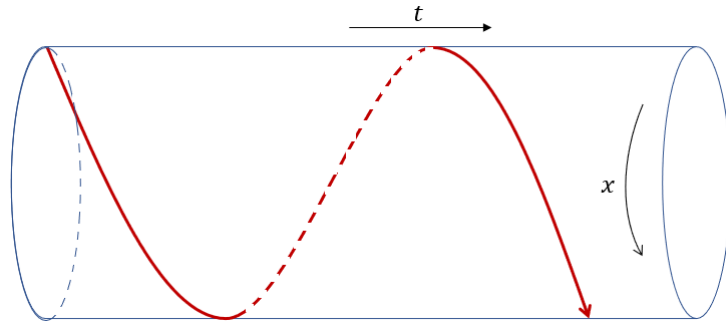


Figura 1.7: espacio de configuraciones de los fermiones no masivos viajando entre bocas del WH. En rojo se muestra la trayectoria descrita sobre este espacio; una helicoides con pendiente unitaria sobre un cilindro circular.

Energía de Casimir

Es un hecho recientemente estudiado que un conjunto de fermiones moviéndose en órbitas cerradas, con condiciones de frontera Quasi-periódicas o Anti-periódicas

$$\chi(x + x_0) = e^{i\theta} \chi(x) \quad (1.199)$$

Dan lugar a energía de Casimir [13],[10],[9]. De modo que, si se toman condiciones de frontera **anti-periódicas** y se permite que los fermiones puedan viajar tanto en una como en otra dirección, la energía de Casimir para cada ν , de acuerdo con [20] es

$$E_{cil}^*(\nu) = -\frac{N\pi}{6L(\nu)} = -\frac{\pi N}{6[h(\nu)d + l\pi]} \quad (1.200)$$

²¹La forma explícita de $h(\nu)$ puede consultarse en [20].

Donde $N = N(\nu)$ es el número de partículas cargadas que viajan en la trayectoria definida por ν y en principio puede depender del parámetro ν , sin embargo, siempre es posible considerar el caso particular $N = cte$; la cantidad de fermiones en cada trayectoria es la misma.

Luego, al tomar en cuenta la contribución de todas las trayectorias posibles, tendremos que

$$E_{cil} = \int_0^2 \frac{d\nu}{2} E_{cil}^* = -\frac{\pi N}{12} \int_0^2 \frac{d\nu}{h(\nu)d + l\pi} \quad (1.201)$$

Recordemos por otro lado, que esta orbita no es estrictamente plana, sino conformalmente plana y en consecuencia la energía de Casimir debe compensarse con la contribución de la anomalía conforme.

$$E_{cas} = E_{cil} - E_{ac} \quad (1.202)$$

Esta anomalía puede entenderse si se observa la descomposición del tensor energía-momento asociado a una métrica $g_{\mu\nu}$ arbitraria conformalmente equivalente a una segunda métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$. Sean estas métricas tales que

$$g_{\mu\nu} = e^\omega \hat{g}_{\mu\nu} \quad ; \quad \omega = \omega(x^\mu) \quad (1.203)$$

Entonces, los tensores energía-momento $T_{\mu\nu}$ y $\hat{T}_{\mu\nu}$ asociados a las métricas $g_{\mu\nu}$ y $\hat{g}_{\mu\nu}$ respectivamente, se relacionan mediante la ecuación [20]

$$T_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{12\pi} \left\{ \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega - \hat{\nabla}_\mu \omega \hat{\nabla}_\nu \omega + \left[\hat{\nabla}^2 \omega - \frac{(\hat{\nabla} \omega)^2}{2} \right] \hat{g}_{\mu\nu} \right\} \quad (1.204)$$

Es decir que

$$T_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{(ac)} \quad (1.205)$$

Donde $T_{\mu\nu}^{(ac)}$ es el término de corrección de anomalía conforme y en consecuencia la energía \hat{E} asociada al tensor $\hat{T}_{\mu\nu}$ se relaciona con la energía de anomalía conforme E_{ac} y la energía E del tensor $T_{\mu\nu}$ vía la ecuación

$$E = \hat{E} - E_{ac} \quad (1.206)$$

Particularmente, si la métrica $g_{\mu\nu}$ es conformalmente plana, $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, el tensor energía-momento se decompone como

$$T_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{12\pi} T^{(ac)} \eta_{\mu\nu} \quad ; \quad T^{(ac)} = \left[\hat{\nabla}^2 \omega - \frac{(\hat{\nabla} \omega)^2}{2} \right] \quad (1.207)$$

Se sigue que la energía de la anomalía conforme coincide con la energía debida a N fermiones moviéndose en una línea recta en la garganta. Además, debido a que se permitió que las partículas pudieran viajar en ambas direcciones posibles, han de imponerse condiciones de frontera reflejantes, esquemáticamente puede visualizarse como en la figura (1.8)

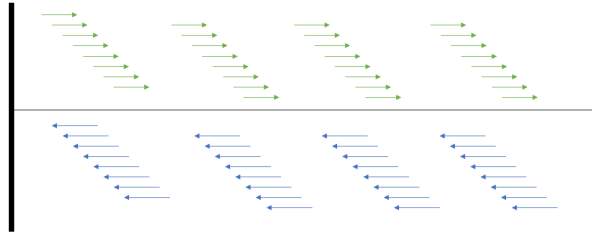


Figura 1.8: Los fermiones dentro de la garganta del WH son un sistema análogo a una caja cerrada con condiciones de frontera reflejantes con las partículas viajando en línea recta.

Esta energía está dada por [20]

$$E_{ac} = E_{lin} = -\frac{N\pi}{24L_g} = -\frac{N}{24l} \quad (1.208)$$

Consecuentemente, la energía total de Casimir del sistema WH más fermiones en trayectorias cerradas entre las bocas del WH es

$$E_{cas} = \frac{N}{24l} - \frac{\pi N}{12} \int_0^2 \frac{d\nu}{h(\nu)d + l\pi} \quad (1.209)$$

Dada esta expresión para la energía de Casimir, se pueden identificar dos casos extremos que acotan los posibles valores de E_{cas} . El primero consiste en suponer que la distancia entre las bocas del WH es muy pequeña $d \approx l_p \approx 0$ con l_p la longitud de planck²². El segundo implica suponer que todas las partículas se concentran en la trayectoria que implica el mínimo desplazamiento entre las bocas del WH $h(\nu) \approx 1$; **aproximación de haz de partículas**.. Tomando en consideración estas aproximaciones se obtiene

$$E_{cas}^{max} = -\frac{N}{8l} \quad ; \quad d \approx 0 \quad (1.210)$$

$$E_{cas}^{min} = -\frac{N}{12l} \left(\frac{2}{1 + \frac{d}{\pi l}} - \frac{1}{2} \right) \quad ; \quad h(\nu) = 1 \quad (1.211)$$

Nótese que dada la condición de causalidad $d \leq L_g = l\pi$, la cantidad mínima de energía de Casimir²³ es siempre negativa y acotada por $E_{cas}^{min} = -\frac{N}{12l}$.

Estabilización del WH

Una vez calculada la contribución de la energía de Casimir debida a los fermiones, estamos en posición de *estabilizar* el WH en el sentido en que podemos buscar las condiciones mínimas de existencia para el mismo. Este proceso puede llevarse a cabo vía un argumento de minimización de la energía de ligadura entre las bocas del WH.

²²Esta afirmación implica que el tamaño de las bocas del WH también son microscópicas y en consecuencia los BHs a partir de los que se contruye deben ser agujeros negros primordiales.

²³Mínima como valor absoluto

Consideremos la energía total que externamente puede colocarse en el sistema de dos BH extremos de RN, esta consiste únicamente del contenido material de los fermiones y la masa de los BHs.

$$E = 2E_0 + E_{cas} \quad (1.212)$$

Aquí E_0 corresponde a la energía del BH extremo de RN y E_{cas} la energía de casimir debida a los fermiones en órbitas periódicas.

Por otro lado, esta energía debe ser suficiente para sostener el WH con ambas bocas y mantenerlas unidas, de modo que

$$E = 2E_{wh} + E_{lig} \quad (1.213)$$

Aquí E_{wh} corresponde a la energía de la métrica del agujero de gusano incluyendo la boca y E_{lig} a la energía de ligadura necesaria para unir ambas geometrías en un solo objeto físico.

De estas dos ecuaciones y retomando las expresiones explícitas para las energías de WH y Casimir se sigue que

$$E_{lig} = \frac{r_0^3}{l^2} + \frac{N}{24l} - \frac{\pi N}{12} \int_0^2 \frac{d\nu}{h(\nu)d + l\pi} \quad (1.214)$$

Es inmediato identificar que el primer término corresponde a la perturbación que debe aplicarse a los BHs extremos de RN para generar el WH, el segundo término es la corrección de anomalía conforme y el tercero la energía de casimir de las partículas moviéndose en el espacio de configuraciones cilíndrico conformalmente plano.

Para estabilizar el agujero de gusano pedimos que E_{lig} sea mínimo local

$$\frac{dE_{lig}}{dl} = -\frac{2r_0^3}{l^3} + \frac{N}{24} \left(-\frac{1}{l^2} + 2\pi^2 \int_0^2 \frac{d\nu}{(l\pi + h(\nu)d)^2} \right) = 0 \quad (1.215)$$

$$\frac{d^2E_{lig}}{dl^2} = \frac{6r_0^4}{l^3} + \frac{N}{12} \left(\frac{1}{l^3} - 2\pi^2 \int_0^2 \frac{d\nu}{(l\pi + h(\nu)d)^3} \right) > 0 \quad (1.216)$$

Este proceso impone las condiciones mínimas necesarias para que el WH se mantenga abierto. Además, dado que la energía de ligadura solo depende del parámetro l , emerge naturalmente una relación entre este parámetro y las constantes asociadas al WH, liberando con ello al sistema, de parámetros libres.

De la primera condición de minimización se tiene que, para que E_{lig} sea un extremo, l debe satisfacer la ecuación:

$$2 \int_0^2 \frac{l^3 d\nu}{(l + h(\nu)\frac{d}{\pi})^2} - l = \frac{48r_0^3}{N} \quad (1.217)$$

La integral involucrada en esta ecuación no es soluble en términos elementales y debe calcularse numéricamente utilizando la forma explícita de $h(\nu)$. Sin bargo, para los

finde de este trabajo podemos considerar los casos extremos estudiados en la sección anterior vía las aproximaciones $d \approx 0$ y $h(\nu) = 1$, con lo que se obtienen las cotas máxima y mínima para el parámetro l dadas por las siguientes relaciones

$$l_0 = 16 \frac{r_0^3}{N} ; \quad d = 0 \quad (1.218)$$

$$4l_1^3 - \left(l_1 + \frac{d}{\pi} \right)^2 \left(l_1 + \frac{48r_0^3}{N} \right) = 0 ; \quad h(\nu) = 1 \quad (1.219)$$

Desde luego, la ecuación algebraica para l_1 puede resolverse analíticamente, pero puede ser mas ilustrativo estudiar gráficamente su dependencia respecto a $\frac{d}{\pi}$ en unidades de l_0 .

Sean

$$l = \frac{l}{l_0} ; \quad \hat{d} = \frac{d}{\pi l_0} \quad (1.220)$$

Entonces podemos construir la ecuación

$$4l^3 - (l + \hat{d})^2 (l + 3) = 0 \quad (1.221)$$

La gráfica (1.9) muestra que el parámetro l crece monotonamente conforme \hat{d} lo hace y corta al eje ordenado en $l = 1$. Consecuentemente l_0 representa el valor mínimo que l puede poseer. Una vez caracterizado el parámetro l , la discusión y construcción

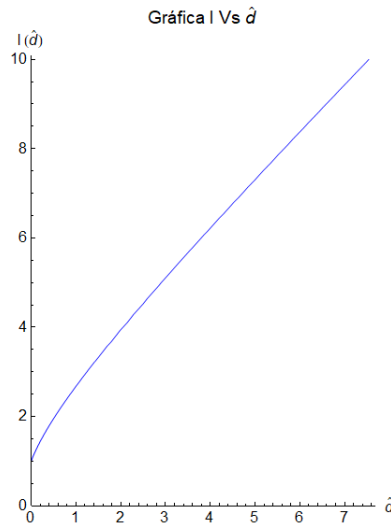


Figura 1.9: Gráfica l Vs \hat{d} . El parámetro l crece monotonamente con \hat{d} y corta el eje ordenado en $(0, 1)$.

del WH llega a su fin. Estos son los resultados hallados por Juan Maldacena et al. en [20] y [19]. La discusión hecha en el presente trabajo de tesis es ligeramente distinta aunque equivalente a la realizada en los artículos mencionados, pero se adecua con mayor naturalidad al estudio principal de la tesis.

Síntesis y caracterización

Es conveniente condensar en una sola sección los parámetros característicos del WH magnéticamente cargado; es este el propósito de la presente sección.

- Radio de la boca del WH:

$$r_0 = M = q \quad (1.222)$$

- Longitud de la garganta:

$$L_g = \pi l \quad (1.223)$$

- Dilatación temporal

$$\Delta t = l \Delta \tau \quad (1.224)$$

- Temperatura del sistema:

$$T = \frac{1}{2\pi l} = \frac{1}{2L} \quad (1.225)$$

- Energía de ligadura:

$$E_{lig} = \frac{r_0^3}{l^2} + \frac{N}{24l} - \frac{\pi N}{12} \int_0^2 \frac{d\nu}{h(\nu)d + l\pi} \quad (1.226)$$

- Métrica de WH:

$$ds^2 = r_0 \left\{ -(\rho^2 + 1) d\tau + \frac{d\rho^2}{(\rho^2 + 1)} + d\Omega^2 \right\} \quad (1.227)$$

$$\rho = \frac{l}{r_0^2} (r - r_0) \quad ; \quad \tau = \frac{t}{l} \quad (1.228)$$

Nótese que todos los parámetros característicos del WH son función únicamente de la cantidad l . Misma que está gobernada por la relación

$$2 \int_0^2 \frac{l^3 d\nu}{(l + h(\nu)\frac{d}{\pi})^2} - l = \frac{48r_0^3}{N} \quad (1.229)$$

Que en la aproximación de haz de partículas se reduce a

$$4l^3 - (l + \hat{d})^2 (l + 3) = 0 \quad (1.230)$$

$$l \rightarrow \frac{l}{l_0} \quad ; \quad \hat{d} = \frac{d}{\pi} \quad ; \quad l_0 = 16 \frac{r_0^3}{N} \quad (1.231)$$

Sumado a estas características, debe reconocerse que las únicas constantes que pueden ser variadas por un agente externo son $M = Q$ y N , relacionadas directamente con la masa/carga del WH y con la cantidad de fermiones orbitándolo, respectivamente.

Capítulo 2

Teoría DEBI

El capítulo anterior pone de manifiesto la creciente necesidad de incluir fenómenos de carácter no-lineal dentro de la electrodinámica. Por otro lado, sus consecuencias en el marco de relatividad general, particularmente en la búsqueda de agujeros de gusano, expanden aún más el panorama de posibilidades.

En ese espíritu, nos interesa construir una acción que preserve la estructura de la teoría Dirac-Born-Infeld y que se acople linealmente con la relatividad general en un espacio-tiempo 4-dimensional para obtener una teoría que no requiera de dimensiones extra y que preserve, de forma efectiva, la no-linealidad heredada de teoría de branas; este es el propósito del presente capítulo.

2.1. Construcción

Consideremos la acción DBI para Dp-branas en $p + 1$ dimensiones

$$S = -T_{D_p} \int d^{p+1}x \sqrt{-\det [\eta_{\mu\nu} + \kappa F_{\mu\nu} + \kappa^2 (K_{\mu\nu} + \mathcal{O}_{\mu\nu}(\kappa))]} \quad (2.1)$$

Supongamos ahora un proceso de reducción dimensional¹ que nos permita extraer linealmente la relatividad general y preserve la estructura no-lineal para el campo electromagnético y el tensor de campo de materia $K_{\mu\nu}$, de modo que se obtiene la siguiente forma para la acción

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \left\{ \frac{\sqrt{-g}R}{4} - \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{-\det (g_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu} + \lambda^2 K_{\mu\nu})} + \sqrt{-g}L_{fr} \right\} \quad (2.2)$$

Donde R es el escalar de Ricci, asociado a la métrica $g_{\mu\nu}$ con determinante g , $F_{\mu\nu}$ el tensor de intensidad de campo electromagnético², $K_{\mu\nu}$ un tensor asociado a los campos de materia, L_{fr} un término global de frontera y λ una constante. Véase que en el término de frontera se ha extraído explícitamente la dependencia respecto al determinante de la métrica, esto con el fin de escribirlo manifiestamente invariante ante reparametrizaciones; la forma explícita de este término de frontera se fija al

¹Cualquiera que esta pueda ser.

²También llamado, indistintamente, *de Maxwell o Faraday*

exuigr que en el espacio-tiempo plano y en ausencia de materia, se recupere la acción de Born e Infeld (BI), es decir

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \ ; \ K_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$\Downarrow \quad (2.4)$$

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \left\{ L_{fr} - \frac{1}{\lambda} \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu})} \right\} \equiv \frac{1}{4\pi} \int d^4x b^2 \left\{ 1 - \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + b^{-1} F_{\mu\nu})} \right\} \quad (2.5)$$

Una vez impuesta esta condición, resulta inmediato hacer la siguiente identificación

$$L_{fr} = \frac{1}{\lambda} \ ; \ \lambda \iff b \quad (2.6)$$

Por lo que la acción se reescribe como

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} + \frac{1}{\lambda^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{-g}} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu} + \lambda^2 K_{\mu\nu})} \right] \right\} \quad (2.7)$$

O bien, si se factoriza al métrica en el radical e invoca la distributividad del producto de determinantes

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} + \frac{1}{\lambda^2} \left[1 - \sqrt{\det(\delta_\mu^\nu + \lambda F_\mu^\nu + \lambda^2 K_\mu^\nu)} \right] \right\} \quad (2.8)$$

De esta expresión puede verse que λ se relaciona directamente con el inverso del parámetro de campo máximo de BI o EH, es decir

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{l} b^{-1} \quad \text{Born-Infeld} \\ \sqrt{a} \quad \text{Euler - Heisenberg} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Naturalmente, debido al acoplamiento no-lineal del campo de materia, el valor explícito de λ podría diferir respecto al producido por b o a . Sin embargo, la interpretación física es la misma; la constante λ^{-1} es un parámetro de campo máximo respecto al cual pueden compararse todos los campos; en este caso particular, $F_{\mu\nu}$ y $K_{\mu\nu}$.

Escrita de este modo, la acción cumple con el requisito de acoplar linealmente relatividad general clásica (GR) con una electrodinámica no-lineal acoplada con materia (NLE+M), pues tiene la forma de la acción de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} + \frac{1}{\lambda^2} L_{NLEM} \right\} \quad (2.10)$$

Donde

$$L_{NLEM} = 1 - \sqrt{\det(\delta_\mu^\nu + \lambda F_\mu^\nu + \lambda^2 K_\mu^\nu)} \quad (2.11)$$

No obstante, para que la teoría sea físicamente consistente, debe reproducir los resultados conocidos en el régimen lineal (orden cero en λ); la teoría EDM. Consecuentemente, el tensor $K_{\mu\nu}$ debe definirse de tal modo que, a orden cero en λ ,

se obtenga el lagrangiano de Dirac para materia fermiónica. Razón por la cual, al expandir L_{NLEM} en potencias de λ , debe obtenerse

$$\frac{1}{\lambda^2} L_{NLE} \approx L_M + L_D + \mathcal{O}(\lambda) \quad (2.12)$$

Donde L_M es el lagrangiano de la electrodinámica clásica y L_D el lagrangiano fermiónico, dados por

$$L_M = -\frac{f_2}{4} ; \quad L_D = \langle \not{P} - m \rangle \quad (2.13)$$

Teniendo en mente esta condición, expandiremos L_{NLEM} en potencias del parámetro λ . Pero antes de realizarlo, resulta conveniente aplicar el cambio de notación siguiente

$$\mathbf{1} \rightarrow \delta_\mu^\nu ; \quad \mathbf{G} \rightarrow g^{\mu\nu} ; \quad \mathbf{F} \rightarrow F_{\mu\nu} ; \quad \mathbf{K} \rightarrow K_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

Las cantidades resaltadas corresponden a las representaciones matriciales de los tensores asociados a las mismas. Esta asignación conduce a que los distintos tensores involucrados en el lagrangiano se reescriban como el producto de las siguientes matrices

$$F_\mu^\nu = F_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \mathbf{F}\mathbf{G} ; \quad K_\mu^\nu = K_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \mathbf{K}\mathbf{G} ; \quad \delta_\mu^\nu = g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \mathbf{1} \quad (2.15)$$

Entonces, el lagrangiano es

$$L_{NLEM} = 1 - \sqrt{\det(\mathbf{1} + \lambda\mathbf{F}\mathbf{G} + \lambda^2\mathbf{K}\mathbf{G})} \quad (2.16)$$

Tomando en cuenta que, para una matriz arbitraria no nula \mathbf{M} , la siguiente identidad es válida [3]

$$\ln[\det(\mathbf{M})] = \text{Tr}[\ln(\mathbf{M})] \iff \det(\mathbf{M}) = \exp\{\text{Tr}[\ln(\mathbf{M})]\} \quad (2.17)$$

Podemos reescribir el lagrangiano como

$$L_{NLEM} = 1 - \exp\left\{\frac{1}{2}\text{Tr}[\ln(\mathbf{1} + \lambda\mathbf{F}\mathbf{G} + \lambda^2\mathbf{K}\mathbf{G})]\right\} \quad (2.18)$$

Tomemos ahora las expansiones en serie de potencias de las funciones exponencial y logarítmica para alguna matriz arbitraria \mathbf{M} y un escalar arbitrario M

$$\exp(M) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M^j}{j!} ; \quad \ln(\mathbf{1} + \mathbf{M}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \mathbf{M}^j \quad (2.19)$$

Se sigue que la expansión en serie de potencias para L_{NLEM} es

$$L_{NLEM} = - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \left[\sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \text{Tr}\left\{(\lambda\mathbf{F}\mathbf{G} + \lambda^2\mathbf{K}\mathbf{G})^k\right\} \right]^j \right\} \quad (2.20)$$

Como perseguimos el término que posea el orden más bajo en $\mathbf{K}\mathbf{G}$, tomamos los términos que resulten de fijar los contadores $j = k = 1$. Extraer de la suma los términos bajo esta condición conduce a

$$L_{NLEM} = -\frac{\lambda}{2}\text{Tr}(\mathbf{F}\mathbf{G}) - \frac{\lambda^2}{2}\text{Tr}(\mathbf{K}\mathbf{G}) + \mathcal{O}\left((\lambda\mathbf{F}\mathbf{G} + \lambda^2\mathbf{K}\mathbf{G})^2\right) \quad (2.21)$$

Luego, al retomar la notación tensorial, es claro que

$$\text{Tr}(\mathbf{FG}) = F_\alpha^\alpha \quad ; \quad \text{Tr}(\mathbf{KG}) = K_\alpha^\alpha \quad (2.22)$$

Sabemos que el tensor de electromagnético es libre de traza, razón por la cual la contribución del mismo en este orden es nula. Por otro lado, de la acción BI esperamos que la electrodinámica clásica surja hasta el orden cuadrático³ de $\lambda\mathbf{FG}$. Estos hechos nos permiten aseverar que la traza del tensor de materia debe coincidir con el lagrangiano de Dirac

$$-\frac{1}{2}K_\alpha^\alpha = \langle \not{P} - m \rangle = \bar{\chi} (i\gamma^\alpha \mathfrak{D}_\alpha - m) \chi \quad (2.23)$$

En consecuencia, el tensor $K_{\mu\nu}$ debe satisfacer la ecuación

$$K_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -2\bar{\chi} (i\gamma^\alpha \mathfrak{D}_\alpha - m) \chi \quad (2.24)$$

Cuya solución más general es

$$K_{\mu\nu} = -2\bar{\chi} \left(i\gamma_\mu \mathfrak{D}_\nu - \frac{m}{4}g_{\mu\nu} \right) \chi \equiv -2 \langle P_{\mu\nu} \rangle \quad (2.25)$$

Donde γ^μ son las matrices gamma en espacio-tiempo curvo, m la masa de los fermiones, χ el espinor asociado a los fermiones y $\mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu - iqA_\mu$, la derivada covariante espinorial definida por la conexión espinorial afín Γ_μ y la conexión de norma iqA_μ , con q la carga eléctrica de los fermiones y A_μ el 4-potencial electromagnético.

Es menester notar en este punto que el tensor $P_{\mu\nu}$ puede separarse como la suma de sus partes antisimétrica $P_{\mu\nu}^{(a)}$, simétrica sin traza $P_{\mu\nu}^{(s)}$ y diagonal $P_{\mu\nu}^{(d)}$

$$P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^{(d)} + P_{\mu\nu}^{(s)} + P_{\mu\nu}^{(a)} \quad (2.26)$$

Cada uno de estos términos puede calcularse a partir de la simetrización o antisimetrización del tensor $P_{\mu\nu}$ de acuerdo con

$$P_{\mu\nu}^{(d)} = \text{diag}(P_{\mu\nu}) \quad (2.27)$$

$$P_{\mu\nu}^{(a)} = P_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(P_{\mu\nu} - P_{\nu\mu}) \quad (2.28)$$

$$P_{\mu\nu}^{(s)} = P_{(\mu\nu)} - P_{\mu\nu}^{(d)} = \frac{1}{2}(P_{\mu\nu} + P_{\nu\mu}) - \text{diag}(P_{\mu\nu}) \quad (2.29)$$

Esta separación expone manifiestamente que solo el termino $P_{\mu\nu}^{(d)}$ es **necesario** para reproducir la teoría EDM en el régimen lineal. En lo que respecta a las partes simétrica y antisimétrica, no tenemos ningún argumento para perservarlas o desecharlas, de modo que su presencia permite la existencia de cuatro posibles teorías para el acoplamiento fermiónico: una general y tres casos particulares

³El cálculo explícito se muestra más adelante.

1. **General:** $P_{\mu\nu}$ no posee simetrías de ninguna clase

$$\{P_{\mu\nu}^{(s)} \neq 0 ; P_{\mu\nu}^{(a)} \neq 0\} \implies P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^{(d)} + P_{\mu\nu}^{(s)} + P_{\mu\nu}^{(a)} \quad (2.30)$$

2. **Simétrica:** El término antisimétrico es nulo y $P_{\mu\nu}$ es totalmente simétrico

$$\{P_{\mu\nu}^{(s)} \neq 0 ; P_{\mu\nu}^{(a)} = 0\} \implies P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^{(d)} + P_{\mu\nu}^{(s)} \quad (2.31)$$

3. **Antisimétrica:** El término simétrico es nulo y $P_{\mu\nu}$ posee un componente antisimétrico

$$\{P_{\mu\nu}^{(s)} = 0 ; P_{\mu\nu}^{(a)} \neq 0\} \implies P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^{(d)} + P_{\mu\nu}^{(a)} \quad (2.32)$$

4. **Diagonal:** Tanto el componente simétrico como antisimétrico son nulos y $P_{\mu\nu}$ es un tensor diagonal

$$\{P_{\mu\nu}^{(s)} = 0 ; P_{\mu\nu}^{(a)} = 0\} \implies P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^{(d)} \quad (2.33)$$

En todo caso, el tensor $P_{\mu\nu}$ puede escribirse como

$$P_{\mu\nu} = \hat{P}_{\mu\nu} + \tilde{P}_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

Donde

$$\tilde{P}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^{(s)} + P_{\mu\nu}^{(a)} ; \hat{P}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^{(d)} = \text{diag} \left(i\gamma_\mu \mathfrak{D}_\nu - \frac{m}{4} g_{\mu\nu} \right) \quad (2.35)$$

De ese modo, \hat{P}_μ contiene la información necesaria para que la teoría sea físicamente consistente con EDM y \tilde{P}_μ elige entre las cuatro posibilidades mencionadas. A lo largo de todo este trabajo se considerará el caso general para $P_{\mu\nu}$ a no ser que se mencione explícitamente lo contrario.

Una vez hallada la forma del tensor de campo de materia $K_{\mu\nu} = -2 \langle P_{\mu\nu} \rangle$, puede sustituirse en la acción para obtener su forma final

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} + \frac{1}{\lambda^2} \left[1 - \sqrt{\det(\delta_\mu^\nu + \lambda F_\mu^\nu - 2\lambda^2 \langle P_\mu^\nu \rangle)} \right] \right\} \quad (2.36)$$

Con

$$P_{\mu\nu} = i\gamma_\mu \mathfrak{D}_\nu - \frac{m}{4} g_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

Cuya expansión en serie de potencias es

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} + \frac{1}{\lambda^2} L_{NLEM} \right\} \quad (2.38)$$

Donde, una vez hecho el cambio de notación a representación matricial $\langle P_{\mu\nu} \rangle \rightarrow \mathbf{P}$, el lagrangiano L_{NLEM} es

$$L_{NLEM} = - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \left[\sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \text{Tr} \left\{ (\lambda \mathbf{F} \mathbf{G} - 2\lambda^2 \mathbf{P} \mathbf{G})^k \right\} \right]^j \right\} \quad (2.39)$$

Esta teoría, en adelante **Teoría DEBI**⁴, se propone para el desarrollo del presente trabajo de tesis.

⁴Dirac-Einstein-Born-Infeld

2.2. Forma perturbativa

Aunque se ha logrado construir una NLE con acoplamiento no-lineal a la materia, la solución para las ecuaciones de campo en general resulta ser altamente no trivial. Debido a ello, es conveniente investigar sus primeros efectos a través del estudio perturbativo de la teoría y de ese modo realizarse una comparativa con los resultados hallados para BI y EDM. Por otro lado, con miras a construir una métrica de WH, es conveniente revisar la forma en que se desvía esta propuesta de teoría respecto a los WHs propuestos en [4], [20] y [19]. En ese espíritu, es natural indagar hasta el primer término perturbativo del campo electromagnético; construir la forma explícita de la acción hasta ese régimen, es el propósito de esta sección.

Como la gravedad se acopla linealmente a los otros campos, podemos centrar la atención completa en el lagrangiano de interacción electro-magneto-fermiónica L_{NLEM} , escrito en serie de potencias. Con motivo de comodidad momentánea en la notación, definamos la matriz \mathbf{M} del modo siguiente

$$\mathbf{M} = \mathbf{FG} - 2\lambda\mathbf{PG} \quad (2.40)$$

En tonces, dado que la traza es un operador lineal, el lagrangiano adopta la forma

$$L_{NLEM} = - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda^{jk}}{j!} \left[\sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \text{Tr} [\mathbf{M}^k] \right]^j \right\} \quad (2.41)$$

Consideremos el régimen de campo débi extendido al campo fermiónico, esta condición nos dice que

$$E, B \ll \lambda^{-1} \quad ; \quad \langle \mathcal{P} \rangle \ll \lambda^{-2} \quad (2.42)$$

Siendo E, B las magnitudes de los campos eléctrico y magnético respectivamente. Se sigue entonces que

$$\lambda \text{Tr} (\mathbf{M}) \ll 1 \quad (2.43)$$

Consecuentemente, podemos cortar la serie en el orden de nuestra conveniencia, en función del detalle con que se quiera estudiar la teoría. Particularmente estamos interesados en los terminos que involucran la primera contribución no-lineal del campo electromagnético, mismos que, de la teoría BI sabemos que aparecen en el orden $\lambda^{-2} L_{NLEM} \sim \lambda^2$. Razón por la cual es necesario expandir el lagrangiano hasta cuarto orden en λ .

Al extraer los primeros cuatro términos de la serie, el lagrangiano se escribe como

$$L_{NLEM} = -\lambda L_1 - \lambda^2 L_2 - \lambda^3 L_3 - \lambda^4 L_4 - \mathcal{O}(\lambda^5) \quad (2.44)$$

Donde los L_j están dados como

$$L_1 = \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}]}{2} \quad (2.45)$$

$$L_2 = \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}]^2}{8} - \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}^2]}{4} \quad (2.46)$$

$$L_3 = \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}]^3}{48} - \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}] \text{Tr} [\mathbf{M}^2]}{8} + \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}^3]}{6} \quad (2.47)$$

$$L_4 = \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}]^4}{384} - \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}]^2 \text{Tr} [\mathbf{M}^2]}{32} + \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}^2]^2}{32} + \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}] \text{Tr} [\mathbf{M}^3]}{12} - \frac{\text{Tr} [\mathbf{M}^4]}{8} \quad (2.48)$$

Tomemos en cuenta que, dada una matriz antisimétrica arbitraria \mathbf{A} , una matriz simétrica \mathbf{S} y dos matrices cuadradas arbitrarias \mathbf{B}, \mathbf{C} , se cumplen las siguientes identidades

$$\text{Tr} [\mathbf{BC}] = \text{Tr} [\mathbf{CB}] \quad ; \quad \text{Tr} [(\mathbf{AS})^{2j+1}] = 0 \quad (2.49)$$

Entonces los L_j , en términos de las matrices originales $\mathbf{F}, \mathbf{P}, \mathbf{G}$, escritos hasta el orden conveniente para mantener el orden λ^4 en el lagrangiano L_{NLEM} , son

$$L_1 = -\lambda \text{Tr} [\mathbf{PG}] \quad (2.50)$$

$$L_2 = -\frac{\text{Tr} [(\mathbf{FG})^2]}{4} + \lambda \text{Tr} [\mathbf{FGPG}] - \lambda^2 \left\{ \text{Tr} [(\mathbf{PG})^2] - \frac{\text{Tr} [\mathbf{PG}]^2}{2} \right\} \quad (2.51)$$

$$L_3 = -\lambda \left(\text{Tr} [(\mathbf{FG})^2 \mathbf{PG}] - \frac{\text{Tr} [(\mathbf{FG})^2] \text{Tr} [\mathbf{PG}]}{4} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.52)$$

$$L_4 = -\frac{\text{Tr} [(\mathbf{FG})^4]}{8} + \frac{\text{Tr} [(\mathbf{FG})^2]^2}{32} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (2.53)$$

Al evaluar las trazas puede regresarse a la notación tensorial y definir algunos nuevos invariantes

- Interacción electromagnética pura (EM)

$$\text{Tr} [(\mathbf{FG})^2] = F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} = -f_2 \quad ; \quad \text{Tr} [(\mathbf{FG})^4] = F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} F_{\gamma\delta} F^{\delta\alpha} = f_4 \quad (2.54)$$

- Interacción electro-magneto-fermiónica (EMF)

$$\text{Tr} [\mathbf{FGPG}] = F_{\nu\mu} \langle P^{\mu\nu} \rangle = -F_{\mu\nu} \langle P^{\mu\nu} \rangle \equiv -f_1 \quad ; \quad \text{Tr} [(\mathbf{FG})^2 \mathbf{PG}] = F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} \langle P_\gamma^\alpha \rangle \equiv f_2 \quad (2.55)$$

- Interacción fermiónica pura (F)

$$\text{Tr} [\mathbf{PG}] = \langle P_\alpha^\alpha \rangle = \langle \not{P} - m \rangle \equiv p_1 \quad ; \quad \text{Tr} [(\mathbf{PG})^2] = \langle P_{\mu\nu} \rangle \langle P^{\nu\mu} \rangle \equiv p_2 \quad (2.56)$$

Se sigue que los L_j adoptan la forma

$$L_1 = -\lambda p_1 \quad (2.57)$$

$$L_2 = \frac{f_2}{4} - \lambda f_1 - \lambda^2 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) \quad (2.58)$$

$$L_3 = -\lambda \left(f_2 + \frac{f_2 p_1}{4} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.59)$$

$$L_4 = -\frac{f_4}{8} + \frac{f_2^2}{32} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (2.60)$$

Consecuentemente, el lagrangiano L_{NLEM} en términos de estos invariantes es

$$L_{NLEM} = \lambda^2 \left(p_1 - \frac{f_2}{4} \right) + \lambda^3 \mathfrak{f}_1 + \lambda^4 \left(\frac{f_4}{8} - \frac{f_2^2}{32} + \mathfrak{f}_2 + \frac{f_2 p_1}{4} + p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) + \mathcal{O}(\lambda^5) \quad (2.61)$$

Así, al desprestigiar los términos $\mathcal{O}(\lambda^5)$, el lagrangiano de la teoría DEBI perturbativa, definido por

$$L_{debi} = \frac{R}{4} + \frac{1}{\lambda^2} L_{NLEM} \quad (2.62)$$

adquiere la siguiente estructura

$$L_{debi} = \frac{R}{4} - \frac{f_2}{4} + p_1 + \lambda \mathfrak{f}_1 + \lambda^2 \left(\frac{f_4}{8} - \frac{f_2^2}{32} + \mathfrak{f}_2 + \frac{f_2 p_1}{4} + p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) \quad (2.63)$$

De esta expresión, es claro que a orden cero en λ , se recupera el lagrangiano de la teoría EDM, cumpliendo con ello la condición impuesta desde el inicio para la teoría DEBI. Luego, los primeros dos términos de la perturbación a segundo orden en λ corresponden a la primera contribución no-lineal de Born e Infeld, L_{bi} , resultado también esperado dada la estructura propuesta.

Por otro lado, la teoría DEBI predice interacciones entre dos componentes adicionales a las ya mencionadas; primero, el invariante p_2 corresponde a una contribución no-lineal puramente fermiónica, físicamente puede interpretarse como un auto acoplamiento del campo fermiónico; segundo, los invariantes \mathfrak{f}_1 y \mathfrak{f}_2 corresponden a un acoplamiento entre el campo fermiónico y el campo electromagnético, físicamente puede interpretarse como una interacción entre ambos campos. Las no linealidades debidas a estos invariantes son las contribuciones de la teoría DEBI al marco teórico conocido.

Nótese además que, si se extingue el campo electromagnético, $f_2 = f_4 = 0$, se obtiene la relatividad general acoplada linealmente con la materia. Por otro lado, si se retira la materia del sistema, $p_1 = p_2 = 0$, entonces se obtiene la acción EBI perturbada hasta segundo orden en λ . Sin embargo, al estar presentes ambos campos, aparecen tanto auto interacciones como interacciones mutuas, debido a este hecho, resulta conveniente separar el lagrangiano del modo siguiente

$$L_{debi} = \frac{R}{4} + L_{em} + L_f + L_{emf} \quad (2.64)$$

Donde L_{em} es un lagrangiano puramente electromagnético, L_f un lagrangiano puramente fermiónico y L_{emf} el lagrangiano que contiene la contribución EMF. Y cada uno de estos términos está dado por las expresiones siguientes

$$L_{em} = -\frac{f_2}{4} + \lambda^2 \left(\frac{f_4}{8} - \frac{f_2^2}{32} \right) \quad (2.65)$$

$$L_f = p_1 + \lambda^2 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) \quad (2.66)$$

$$L_{emf} = \lambda \mathfrak{f}_1 + \lambda^2 \mathfrak{f}_2 + \frac{f_2 p_1}{4} \quad (2.67)$$

O bien, en términos de los invariantes $f = -\frac{f_2}{4}$ y $\tilde{f}_2 = F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}$ se tiene⁵

$$L_{em} = f + \lambda^2 \left(\frac{f^2}{2} - \frac{\tilde{f}_2}{32} \right) \quad (2.68)$$

$$L_f = p_1 + \lambda^2 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) \quad (2.69)$$

$$L_{emf} = \lambda \mathfrak{f}_1 + \lambda^2 (\mathfrak{f}_2 - f p_1) \quad (2.70)$$

En este punto resulta conveniente notar que, si el tensor $P_{\mu\nu}$ se separa en parte simétrica y anti simétrica

$$P_{\mu\nu} = P_{(\mu\nu)} + P_{[\mu\nu]} \quad (2.71)$$

Entonces los invariantes EMF y p_2 toman la forma

$$\mathfrak{f}_1 = F_{\mu\nu} \langle P^{[\mu\nu]} \rangle \quad ; \quad \mathfrak{f}_2 = F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} \langle P_{(\gamma}{}^\alpha) \rangle \quad ; \quad p_2 = \langle P_{(\mu\nu)} \rangle \langle P^{(\mu\nu)} \rangle - \langle P_{[\mu\nu]} \rangle \langle P^{[\mu\nu]} \rangle \quad (2.72)$$

Esto en virtud de que, como consecuencia de la simetría y antisimetría de cada tensor se cumple que

$$F_{\mu\nu} P^{(\mu\nu)} = P_{[\mu\nu]} P^{(\mu\nu)} = F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} P_{[\gamma}{}^\alpha] = 0 \quad (2.73)$$

Puede verse entonces que el invariante f_1 se acopla únicamente con la parte anti-simétrica del campo fermiónico y f_2 con la parte simétrica, de modo que pueden o no desvanecerse en función de la teoría que se elija para $P_{\mu\nu}$ (general, simétrica, antisimétrica y diagonal). Por otro lado, el invariante de interacción fermiónica pura p_2 se mantiene en todos los casos posibles. En el caso más sencillo, la teoría *tipo 4* o *diagonal*, el lagrangiano electromagnético y fermiónico preservan su estructura, mientras que el lagrangiano EMF colapsa en

$$L_{emf} = -\lambda^2 f p_1 \quad (2.74)$$

Por otro lado, el invariante p_2 toma la forma

$$p_2 = \text{diag} \left(i\gamma_\mu \mathfrak{D}_\nu - \frac{m}{4} g_{\mu\nu} \right) \text{diag} \left(i\gamma^\mu \mathfrak{D}^\nu - \frac{m}{4} g^{\mu\nu} \right) \quad (2.75)$$

Consecuentemente la diferencia entre invariantes fermiónicos va como

$$p_2 - p_1^2 \sim \sum_\alpha (\bar{\chi} i\gamma^\alpha \mathfrak{D}_\alpha \chi)^2 - \left(\sum_\alpha \bar{\chi} i\gamma^\alpha \mathfrak{D}_\alpha \chi \right)^2 \sim \sigma_p^2 \quad (2.76)$$

Es decir que el lagrangiano fermiónico puede escribirse como

$$L_f \sim p_1 + \lambda^2 (\sigma_p^2 + \dots) \quad (2.77)$$

⁵Ver la sección correspondiente a la teoría de Born e Infeld.

Donde σ_p corresponde a la incertidumbre del momento \mathcal{P} . Este caso especial nos permite ver que, en virtud de que la componente diagonal permanece en las cuatro posibles teorías, la primera perturbación puramente fermiónica es debida a esta incertidumbre del momento \mathcal{P} .

Otro caso de interés es aquel en el que se elige una teoría *tipo 1 o general* para el campo fermiónico y se exige además que $\tilde{f}_2 = 0$ para conseguir que el lagrangiano electromagnético colapse con la teoría BI/EH. Este caso resulta relevante puesto que el desarrollo de este trabajo se encamina a resolver el monopolo magnético o eléctrico, es decir $E = 0$ o $B = 0$. Una vez aplicada esta condición, las componentes del lagrangiano

$$L_{debi} = \frac{R}{4} + L_{em} + L_f + L_{emf} \quad (2.78)$$

Son

$$L_{em} = f + \lambda^2 \frac{f^2}{2} \quad ; \quad L_f = p_1 + \lambda^2 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) \quad (2.79)$$

$$L_{emf} = \lambda \mathbf{f}_1 + \lambda^2 (\mathbf{f}_2 - f p_1) \quad (2.80)$$

Donde

$$\mathbf{f}_1 = F_{\mu\nu} \langle P^{[\mu\nu]} \rangle \quad ; \quad \mathbf{f}_2 = F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} \langle P_{(\gamma}{}^\alpha) \rangle \quad ; \quad p_2 = \langle P_{(\mu\nu)} \rangle \langle P^{(\mu\nu)} \rangle - \langle P_{[\mu\nu]} \rangle \langle P^{[\mu\nu]} \rangle \quad (2.81)$$

Esta es la forma final que adopta la teoría DEBI perturbativa y la que usaremos en lo que resta del trabajo.

2.3. Ecuaciones de movimiento

Una vez obtenida la forma final del lagrangiano, puede aplicarse el principio de mínima acción para obtener la dinámica de cada uno de los campos.

Esto es

$$\delta S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \delta (\sqrt{-g} L_{debi}) = 0 \implies \delta (\sqrt{-g} L_{debi}) = 0 \quad (2.82)$$

Que puede reescribirse como

$$\delta L_{debi} + \frac{L_{debi}}{2} \delta \ln(g) = 0 \quad (2.83)$$

Invoquemos la identidad que relaciona el logaritmo de una matriz \mathbf{M} no nula arbitraria con el logaritmo de su determinante

$$\ln [\det (\mathbf{M})] = \text{Tr} [\ln (\mathbf{M})] \quad (2.84)$$

Se sigue que la variación del determinante de la métrica es

$$\delta \ln(g) = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \quad (2.85)$$

Luego, como el lagrangiano depende de los invariantes $X^j \in \{R, f, p_1, p_2, f_1, f_2\}$, la variación δL_{debi} debe expandirse mediante la regla de la cadena como

$$\delta L_{debi} = \frac{\partial L_{debi}}{\partial X^j} \delta X^j \quad (2.86)$$

De este modo, la expresión general que engloba las ecuaciones de movimiento para todos los campos es

$$\frac{\partial L_{debi}}{\partial X^j} \delta X^j + \frac{L_{debi}}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.87)$$

Tomemos la expresión para L_{debi} , ordenada en potencias de λ

$$L_{debi} = \frac{R}{4} + f + p_1 + \lambda f_1 + \lambda^2 \left(\frac{f^2 - p_1^2}{2} - f p_1 + p_2 + f_2 \right) \quad (2.88)$$

Se sigue entonces que su variación es

$$\delta L_{debi} = \frac{\delta R}{4} + \delta f + \delta p_1 + \lambda \delta f_1 + \lambda^2 \{ (f - p_1) \delta f - (f + p_1) \delta p_1 + \delta p_2 + \delta f_2 \} \quad (2.89)$$

Puede verse que las ecuaciones de movimiento presentan no-linealidades de tipo electromagnético y fermiónico puros además de EMF, sin embargo también resultan evidentes algunos casos límite.

Por un lado, a orden cero en λ se recuperan las ecuaciones de movimiento para la teoría EDM, dadas por

$$\delta R + \frac{R}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = 2 \{ - (f + p_1) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} - 2 \delta (f + p_1) \} \quad (2.90)$$

Por otro lado, si se impone ausencia de materia, $P_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu}$, entonces se obtiene la teoría EBI/EEH

$$\delta R + \frac{R}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = 2 \left\{ - \left(f + \frac{\lambda^2}{2} f^2 \right) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} - 2 (1 + \lambda^2 f) \delta f \right\} \quad (2.91)$$

Finalmente, el tercer caso límite se obtiene al exigir ausencia de campo electromagnético, $F_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu}$

$$\delta R + \frac{R}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = 2 \left\{ - \left(p_1 - \frac{\lambda^2}{2} p_1^2 + p_2 \right) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} - 2 (1 - \lambda^2 p_1) \delta f + \delta p_2 \right\} \quad (2.92)$$

Este último caso es una de las contribuciones de la teoría DEBI.

Naturalmente, para extraer la forma explícita de las ecuaciones de movimiento, la variación debe aplicarse sobre los distintos grados de libertad del lagrangiano: espinor, 4-potencial electromagnético y métrica; $\{\chi, A_\mu, g_{\mu\nu}\}$ respectivamente. O bien, respecto a los duales $\{\bar{\chi}, A^\mu, g^{\mu\nu}\}$.

2.3.1. Campo fermiónico

Tomemos la variación respecto al espinor dual $\bar{\chi}$. Notemos que tanto la métrica como el tensor electromagnético carecen de dependencia en este grado de libertad, consecuentemente

$$\frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta \bar{\chi}} = \frac{\delta f}{\delta \bar{\chi}} = \frac{\delta R}{\delta \bar{\chi}} = 0 \quad (2.93)$$

Por lo que la ecuación de movimiento es

$$\delta p_1 + \lambda \frac{\delta \mathfrak{f}_1}{\delta \bar{\chi}} + \lambda^2 \left\{ -(f + p_1) \frac{\delta p_1}{\delta \bar{\chi}} + \frac{\delta p_2}{\delta \bar{\chi}} + \frac{\delta \mathfrak{f}_2}{\delta \bar{\chi}} \right\} = 0 \quad (2.94)$$

Luego, tomando las definiciones de los invariantes $\{p_1, p_2, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2\}$, puede verse que las variaciones de estas cantidades son las siguientes.

- Invariantes fermiónicos

$$\frac{\delta p_1}{\delta \bar{\chi}} = P_\alpha^\alpha \chi = (\not{P} - m) \chi \quad ; \quad \frac{\delta p_2}{\delta \bar{\chi}} = 2 \left(\langle P^{(\mu\nu)} \rangle P_{(\mu\nu)} - \langle P^{[\mu\nu]} \rangle P_{[\mu\nu]} \right) \chi \quad (2.95)$$

- Invariantes EMF

$$\frac{\delta \mathfrak{f}_1}{\delta \bar{\chi}} = F_{\mu\nu} P^{[\mu\nu]} \chi \quad ; \quad \frac{\delta \mathfrak{f}_2}{\delta \bar{\chi}} = F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} P_{(\gamma}{}^\alpha) \chi \quad (2.96)$$

Insertando estas expresiones en la ecuación de movimiento se obtiene

$$\left(P_\alpha^\alpha + \lambda F_{\mu\nu} P^{[\mu\nu]} + \lambda^2 \left[F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} P_{(\gamma}{}^\alpha) - f P_\alpha^\alpha + 2 \left(\langle P^{(\mu\nu)} \rangle P_{(\mu\nu)} - \langle P^{[\mu\nu]} \rangle P_{[\mu\nu]} \right) - \langle P_\alpha^\alpha \rangle P_\alpha^\alpha \right] \right) \chi = 0 \quad (2.97)$$

Notemos que, con excepción de los términos evaluados en χ (aquellos entre paréntesis en ángulo $\langle \rangle$), este operador es lineal⁶ en χ . Siendo así, podemos separar las componentes lineales de las no-lineales definiendo los siguientes operadores

$$\mathfrak{L} = (1 - \lambda^2 f) P_\alpha^\alpha + \lambda F_{\mu\nu} P^{[\mu\nu]} + \lambda^2 F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} P_{(\gamma}{}^\alpha) \quad (2.98)$$

$$\mathfrak{N} = \lambda^2 \left(\langle P^{(\mu\nu)} \rangle P_{(\mu\nu)} - \langle P^{[\mu\nu]} \rangle P_{[\mu\nu]} - \frac{\langle P_\alpha^\alpha \rangle P_\alpha^\alpha}{2} \right) \quad (2.99)$$

En consecuencia, la ecuación de movimiento para el espinor χ es

$$(\mathfrak{L} + 2\mathfrak{N}) \chi = 0 \quad (2.100)$$

Nótese que a orden cero en λ se tiene la aproximación

$$\mathfrak{L} \approx P_\alpha^\alpha = \not{P} - m \quad ; \quad \mathfrak{N} \approx 0 \quad (2.101)$$

⁶Lineal en el sentido en que $\hat{O}(\chi_1 + a\chi_2) = \hat{O}\chi_1 + a\hat{O}\chi_2$

De modo que a orden cero se recupera la ecuación de Dirac

$$(\not{P} - m) \chi = 0 \quad (2.102)$$

Por otro lado, la información no-lineal en χ está contenida en el operador \mathfrak{N} , mismo que depende únicamente del tensor de campo fermiónico $P_{\mu\nu}$. Las consecuencias del acomplamiento EMF se encuentran condicadas exclusivamente en el operador \mathfrak{L} , mismo que es lineal en χ .

Resulta interesante notar que, bajo esta definición de operadores, los lagrangianos L_f y L_{emf} pueden escribirse como

$$L_{emf} = \bar{\chi} (\mathfrak{L} - P_\alpha^\alpha) \chi = \langle \mathfrak{L} \rangle - \langle P_\alpha^\alpha \rangle \quad (2.103)$$

$$L_f = \bar{\chi} (\mathfrak{N} + P_\alpha^\alpha) \chi = \langle \mathfrak{N} \rangle + \langle P_\alpha^\alpha \rangle \quad (2.104)$$

Esta separación nos permite reescribir el lagrangiano DEBI separando las contribuciones fermiónicas lineales en el espinor χ de las no-lineales en el mismo. Es decir

$$L_{debi} = \frac{R}{4} + L_{em} + \langle \mathfrak{L} \rangle + \langle \mathfrak{N} \rangle \quad (2.105)$$

Adicionalmente, se puede ver que los operadores \mathfrak{L} y \mathfrak{N} , en términos de los operadores EMF y fermiónicos son

$$\langle \mathfrak{L} \rangle = (1 - \lambda^2 f) p_1 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 \quad ; \quad \langle \mathfrak{N} \rangle = \lambda^2 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) \quad (2.106)$$

Donde se pone de manifiesto que \mathfrak{L} es un operador EMF lineal en χ y \mathfrak{N} corresponde a un operador de autointeracción fermiónica.

2.3.2. Campo electromagnético

Consideremos ahora la variación respecto al 4-potencial A^μ . Como la métrica no depende de este grado de libertad, se tiene que

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta A^\nu} = \frac{\delta R}{\delta A^\nu} = 0 \quad (2.107)$$

De modo que las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{\delta f}{\delta A^\nu} + \frac{\delta p_1}{\delta A^\nu} + \lambda \frac{\delta f_1}{\delta A^\nu} + \lambda^2 \left\{ (f - p_1) \frac{\delta f}{\delta A^\nu} - (f + p_1) \frac{\delta p_1}{\delta A^\nu} + \frac{\delta p_2}{\delta A^\nu} + \frac{\delta f_2}{\delta A^\nu} \right\} = 0 \quad (2.108)$$

$$\nabla_\mu (\star F^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.109)$$

La segunda ecuación de movimiento se obtiene directamente de las relaciones de Bianchi y su origen es consecuencia directa de la definición de la 2-forma de campo electromagnético $F = dA$, mientras que la primera se obtiene del principio variacional y contiene la información física del sistema.

Atendamos la ecuación de movimiento proveniente del principio variacional. Resulta evidente la necesidad de escribir de manera explícita la dependencia respecto a A^ν de los invariantes $\{f, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, p_1, p_2\}$, Para esto es conveniente definir la 4-corriente electromagnética convencional

$$j^\nu = q\bar{\chi}i\gamma^\nu\chi = q\langle i\gamma^\nu \rangle \quad (2.110)$$

Si además separamos la conexión de norma de la derivada convariante, tendremos que

$$\mathfrak{D}_\mu = \nabla_\mu - qA_\mu \quad ; \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \quad (2.111)$$

Tomando en cuenta ambas definiciones, podemos ver que el tensor de campo fermiónico $\langle P_{\mu\nu} \rangle$ puede escribirse como

$$\langle P_{\mu\nu} \rangle = \left\langle i\gamma_\mu \nabla_\nu - \frac{m}{4}g_{\mu\nu} \right\rangle - j_\mu A_\nu \equiv \mathcal{P}_{\mu\nu} - j_\mu A_\nu \quad (2.112)$$

Donde $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ corresponde al tensor de campo fermiónico sin conexión de norma. Se sigue entonces que los invariantes EMF y fermiónicos son

$$p_1 = \mathcal{P}_\alpha^\alpha - j_\alpha A^\alpha \quad ; \quad p_2 = \mathcal{P}^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\mu\nu} + (j_\alpha A^\alpha)^2 \quad (2.113)$$

$$\mathfrak{f}_1 = F_{\mu\nu} (\mathcal{P}^{[\mu\nu]} - j^\mu A^\nu) \quad ; \quad \mathfrak{f}_2 = F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} (\mathcal{P}_{(\gamma}{}^\alpha) - j_\gamma A^\alpha) \quad (2.114)$$

Nótese que la forma de extraer la conexión de norma de los invariantes corresponde al acoplamiento mínimo y como consecuencia, su estructura se preserva aún cuando esta conexión sea nula.

Tomemos ahora el operador variación en la forma correspondiente a las ecuaciones de Euler-Lagrange y el tensor electromagnético en términos del 4-potencial.

$$\frac{\delta}{\delta A^\nu} = \frac{\partial}{\partial A^\nu} - \nabla^\mu \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \quad (2.115)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.116)$$

Se sigue entonces que

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial A^\nu} = \delta_\alpha^\nu \implies \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - \delta_{\nu\mu}^{\beta\alpha} \quad (2.117)$$

y, además

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\alpha}\delta_\nu^\gamma + F_{\nu\alpha}\delta_\mu^\gamma - F_\mu{}^\gamma g_{\nu\alpha} + F_\nu{}^\gamma g_{\mu\alpha} \quad (2.118)$$

De ese modo, las variaciones de los invariantes toman la forma

$$\frac{\delta f}{\delta A^\nu} = \nabla^\mu F_{\mu\nu} \quad ; \quad \frac{\delta p_1}{\delta A^\nu} = -j_\nu \quad ; \quad \frac{\delta p_2}{\delta A^\nu} = 2j_\alpha A^\alpha j_\nu \quad (2.119)$$

$$\frac{\delta \mathfrak{f}_1}{\delta A^\nu} = -j^\alpha F_{\alpha\nu} - 2\nabla^\mu \mathcal{P}_{[\mu\nu]} \quad (2.120)$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta A^\nu} = -F_{\nu\beta} F^{\beta\gamma} j_\gamma - 2\nabla^\mu (\mathcal{P}_{(\mu\alpha)} F_\nu^\alpha - \mathcal{P}_{(\nu\alpha)} F_\mu^\alpha) \quad (2.121)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de movimiento obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \{ [1 + \lambda^2 (f - p_1)] F_{\mu\nu} + 2\lambda \mathcal{P}_{[\mu\nu]} + 2\lambda^2 (\mathcal{P}_{(\mu\alpha)} F_\nu^\alpha - \mathcal{P}_{(\nu\alpha)} F_\mu^\alpha) \} \\ = \\ j_\nu - \lambda j_\alpha F_\nu^\alpha - \lambda^2 [(f + p_1 - j_\alpha A^\alpha) j_\nu + F_\nu^\alpha F_\alpha^\beta j_\beta] \end{aligned} \quad (2.122)$$

Véase que, nuevamente, se obtienen los casos límites esperados. A orden cero en λ se recupera la electrodinámica lineal

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \quad (2.123)$$

Por otro lado, si $P_{\mu\nu} = 0$ entonces los invariantes p_1, p_2, f_1, f_2 se anulan y se recupera la ecuación de campo para la teoría BI

$$\nabla^\mu (1 + \lambda^2 f) F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.124)$$

También es importante notar que las derivadas del campo eléctrico son proporcionales a la 4-corriente j_ν , en consecuencia, si se anula la 4-corriente neta, la ecuación de movimiento para el campo se reduce a

$$\nabla^\mu \{ [1 + \lambda^2 (f - p_1)] F_{\mu\nu} + 2\lambda^2 (\mathcal{P}_{(\mu\alpha)} F_\nu^\alpha - \mathcal{P}_{(\nu\alpha)} F_\mu^\alpha) \} = -2\lambda \nabla^\mu \mathcal{P}_{[\mu\nu]} \quad (2.125)$$

Es decir que, incluso si la 4-corriente neta es nula, existe una fuente de campo electromagnético debida a la divergencia covariante del campo fermiónico $\mathcal{P}_{\mu\nu}$, misma que se revela hasta el primero orden en λ . Puede verse también que el acoplamiento EMF sigue presente en el primer miembro de la ecuación.

2.3.3. Campo gravitacional

Las ecuaciones de movimiento para el campo gravitacional se obtienen al considerar la variación respecto al inverso de la métrica $g^{\mu\nu}$. En este caso ninguna variación es nula, de modo que todos los términos del lagrangiano contribuyen a la ecuación de movimiento.

Al considerar la identidad

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \quad (2.126)$$

Se obtienen las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (2.127)$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y el tensor de energía-momento está dado por

$$T_{\mu\nu} = L g_{\mu\nu} - 2 \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.128)$$

Donde

$$L = f + p_1 + \lambda f_1 + \lambda^2 \left(\frac{f^2 - p_1^2}{2} - f p_1 + p_2 + f_2 \right) \quad (2.129)$$

Y su variación es

$$\frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta f}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta p_1}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda \frac{\delta f_1}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda^2 \left\{ (f - p_1) \frac{\delta f}{\delta g^{\mu\nu}} - (f + p_1) \frac{\delta p_1}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta p_2}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta f_2}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} \quad (2.130)$$

Aunque se tiene una expresión general para el cálculo directo de $T_{\mu\nu}$, vale la pena notar que el lagrangiano L puede escribirse en términos de los operadores \mathfrak{L} y \mathfrak{N} de la ecuación de movimiento del espinor χ y el lagrangiano electromagnético puro como

$$L = L_{em} + \langle \mathfrak{L} \rangle + \langle \mathfrak{N} \rangle \quad (2.131)$$

De modo que el tensor energía momento puede subdividirse en tres contribuciones principales

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{em} + T_{\mu\nu}^{\mathfrak{L}} + T_{\mu\nu}^{\mathfrak{N}} \quad (2.132)$$

Estas corresponden, de izquierda a derecha, a la contribución electromagnética pura, EMF lineal y fermiónica no lienal. Cada contribución T^x tiene la forma

$$T_{\mu\nu}^x = L_x g_{\mu\nu} - 2 \frac{\delta L_x}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.133)$$

Cada una de estas contribuciones pueden calcularse de manera independiente; ese es el camino que seguimos a continuación y para ello es conveniente tener en cuenta lo siguiente.

Sean $A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, C_{\mu\nu}$ tensores arbitrarios que dependen de la métrica $g^{\mu\nu}$ y U^α, V^β vectores arbitrarios, entonces se cumplen las siguientes identidades

- **Variación de la contracción de tres tensores.**

$$-\frac{\delta A^{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} C^\gamma}{\delta g^{\mu\nu}} = A_{\alpha\mu} B_{\nu\beta} C^{\alpha\beta} + B_{\alpha\mu} C_{\nu\beta} A^{\alpha\beta} + C_{\alpha\mu} A_{\nu\beta} B^{\alpha\beta} \quad (2.134)$$

- **Variación de la contracción de dos tensores.**

$$-\frac{\delta A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = A_{\alpha\mu} B_\nu^\alpha + B_{\alpha\mu} A_\nu^\alpha \quad (2.135)$$

- **Variación de la contracción de dos vectores.**

$$-\frac{\delta U^\alpha V_\alpha}{\delta g^{\mu\nu}} = U_{(\mu} V_{\nu)} \quad (2.136)$$

Contribución electromagnética pura

Recordemos que el lagrangiano de interacción electromagnética pura está dado por el lagrangiano BI

$$L_{em} = f + \lambda^2 \frac{f^2}{2} \implies \frac{\delta L_{em}}{\delta g^{\mu\nu}} = (1 + \lambda^2 f) \frac{\delta f}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.137)$$

Tomando en cuenta la definición de f tendremos que

$$\frac{\delta f}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{4} \frac{\delta F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \quad (2.138)$$

Consecuentemente

$$T_{\mu\nu}^{em} = \left(f + \lambda^2 \frac{f^2}{2} \right) g_{\mu\nu} + (1 + \lambda^2 f) F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \quad (2.139)$$

Que es justamente el resultado esperado del formalismo Einstein-Plebansky aplicado al lagrangiano BI.

$$T_{\mu\nu} = L g_{\mu\nu} + \frac{dL}{df} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \quad (2.140)$$

Nótese además que, a orden cero se recupera el tensor de energía-momento de la teoría EDM.

Contribución EMF

Retomemos la definición del operador \mathfrak{L}

$$\langle \mathfrak{L} \rangle = (1 - \lambda^2 f) p_1 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 \quad (2.141)$$

Por otro lado

$$\frac{\delta \langle \mathfrak{L} \rangle}{\delta g^{\mu\nu}} = (1 - \lambda^2 f) \frac{\delta p_1}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda \frac{\delta f_1}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda^2 \left(\frac{\delta f_2}{\delta g^{\mu\nu}} - p_1 \frac{\delta f}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \quad (2.142)$$

Usando las definiciones de los invariantes, puede verse que

$$-\frac{\delta p_1}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \quad (2.143)$$

$$-\frac{\delta f_1}{\delta g^{\mu\nu}} = - (F_{\mu}^{\alpha} \langle P_{[\nu\alpha]} \rangle + F_{\nu}^{\alpha} \langle P_{[\mu\alpha]} \rangle) \quad (2.144)$$

$$-\frac{\delta f_2}{\delta g^{\mu\nu}} = - (F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \langle P^{(\alpha\beta)} \rangle + F_{\mu\alpha} \langle P_{\nu\beta} \rangle F^{(\alpha\beta)} - \langle P_{\mu\alpha} \rangle F_{\nu\beta} F^{(\alpha\beta)}) \quad (2.145)$$

Consecuentemente, la contribución EMF al tensor energía-momento es

$$T_{\mu\nu}^{\mathfrak{L}} = \langle \mathfrak{L} \rangle g_{\mu\nu} + 2(1 - \lambda^2 f) \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle - 2\lambda \left(\begin{array}{c} F_{\mu}^{\alpha} \langle P_{[\nu\alpha]} \rangle \\ + \\ F_{\nu}^{\alpha} \langle P_{[\mu\alpha]} \rangle \end{array} \right) - 2\lambda^2 \left(\begin{array}{c} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \langle P^{(\alpha\beta)} \rangle + F_{\mu\alpha} \langle P_{\nu\beta} \rangle F^{(\alpha\beta)} \\ + \\ - \langle P_{\mu\alpha} \rangle F_{\nu\beta} F^{(\alpha\beta)} + \frac{p_1}{2} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \end{array} \right) \quad (2.146)$$

Contribución fermiónica no-lineal

Retomemos la definición de \mathfrak{N}

$$\langle \mathfrak{N} \rangle = \lambda^2 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) \quad (2.147)$$

Se sigue que

$$\frac{\delta \langle \mathfrak{N} \rangle}{\delta g^{\mu\nu}} = \lambda^2 \left(\frac{\delta p_2}{\delta g^{\mu\nu}} - p_1 \frac{\delta p_1}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \quad (2.148)$$

Luego, de la definición de p_2 es inmediato que

$$-\frac{\delta p_2}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \left(P_{(\mu\alpha)} P_{(\nu}^{\alpha)} + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^{\alpha]} \right) \quad (2.149)$$

Consecuentemente, la contribución fermiónica no-lineal al tensor de energía momento es

$$T_{\mu\nu}^{\mathfrak{N}} = \langle \mathfrak{N} \rangle g_{\mu\nu} + 4\lambda^2 \left(P_{(\mu\alpha)} P_{(\nu}^{\alpha)} + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^{\alpha]} - \frac{1}{2} p_1 \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \right) \quad (2.150)$$

Tensor energía momento

Teniendo en cuenta la discusión anterior se concluye que el tensor energía-momento de la teoría DEBI está dado por

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{em} + T_{\mu\nu}^{\mathfrak{L}} + T_{\mu\nu}^{\mathfrak{N}} \quad (2.151)$$

Donde cada contribución es

$$T_{\mu\nu}^{em} = \left(f + \lambda^2 \frac{f^2}{2} \right) g_{\mu\nu} + (1 + \lambda^2 f) F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \quad (2.152)$$

$$T_{\mu\nu}^{\mathfrak{L}} = \langle \mathfrak{L} \rangle g_{\mu\nu} + 2(1 - \lambda^2 f) \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle - 2\lambda \left(\begin{array}{c} F_{\mu}^{\alpha} \langle P_{[\nu\alpha]} \rangle \\ + \\ F_{\nu}^{\alpha} \langle P_{[\mu\alpha]} \rangle \end{array} \right) \quad (2.153)$$

$$-2\lambda^2 \left(\begin{array}{c} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \langle P^{(\alpha\beta)} \rangle + F_{\mu\alpha} \langle P_{\nu\beta} \rangle F^{(\alpha\beta)} \\ + \\ - \langle P_{\mu\alpha} \rangle F_{\nu\beta} F^{(\alpha\beta)} + \frac{p_1}{2} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \end{array} \right)$$

$$T_{\mu\nu}^{\mathfrak{N}} = \langle \mathfrak{N} \rangle g_{\mu\nu} + 4\lambda^2 \left(P_{(\mu\alpha)} P_{(\nu}^{\alpha)} + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^{\alpha]} - \frac{1}{2} p_1 \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \right) \quad (2.154)$$

Vease que al combinarse las definiciones de \mathfrak{L} y \mathfrak{N} , el tensor de energía momento puede reordenarse en potencias de λ como

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^0 + \lambda T_{\mu\nu}^1 + \lambda^2 T_{\mu\nu}^2 \quad (2.155)$$

Donde las contribuciones de cada orden están dadas por

$$T_{\mu\nu}^0 = (f + p_1) g_{\mu\nu} + F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} + 2 \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \quad (2.156)$$

$$T_{\mu\nu}^1 = \mathfrak{f}_1 g_{\mu\nu} - 2 (F_\mu^\alpha \langle P_{[\nu\alpha]} \rangle + F_\nu^\alpha \langle P_{[\mu\alpha]} \rangle) \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^2 = & \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} + \mathfrak{f}_2 - f p_1 + \frac{f^2}{2} \right) g_{\mu\nu} \\ & - 2 (F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \langle P^{(\alpha\beta)} \rangle + F_{\mu\alpha} \langle P_{\nu\beta} \rangle F^{(\alpha\beta)} - \langle P_{\mu\alpha} \rangle F_{\nu\beta} F^{(\alpha\beta)} + \frac{p_1 - f}{2} F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + f \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle) \\ & + 4 \left(P_{(\mu\alpha)} P_{(\nu}^\alpha) + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^\alpha] + -\frac{p_1}{2} \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.158)$$

Escrito el tensor energía-momento de estas dos maneras, resulta inmediato notar algunos casos límite.

1. Orden cero

Veamos que, si se desprecian las contribuciones de orden λ y superiores, el tensor de energía-momento se reduce a

$$T_{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu}^0 \quad (2.159)$$

Por otro lado, en este régimen la ecuación de movimiento para el espinor χ es

$$P_\alpha^\alpha \chi = 0 \implies p_1 = \bar{\chi} P_\alpha^\alpha \chi = 0 \quad (2.160)$$

Con lo que se recupera el tensor debido a la teoría EDM

$$T_{\mu\nu} \approx f g_{\mu\nu} + F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + 2 \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \quad (2.161)$$

2. Ausencia de materia

Impongamos ahora la condición de ausencia de materia $P_{\mu\nu} = 0$, se sigue entonces que

$$p_1 = p_2 = \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2 = 0 \implies \mathfrak{L} = \mathfrak{N} = 0 \quad (2.162)$$

Consecuentemente

$$T_{\mu\nu}^{\mathfrak{L}} = T_{\mu\nu}^{\mathfrak{N}} = 0 \quad (2.163)$$

Recuperándose así el tensor energía-momento predicho por la teoría EBI/EEH

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{em} = \left(f + \lambda^2 \frac{f^2}{2} \right) g_{\mu\nu} + (1 + \lambda^2 f) F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha \quad (2.164)$$

3. Ausencia de campo electromagnético

Consideremos el caso en el que el tensor electromagnético es nulo, es decir $F_{\mu\nu} = 0$, entonces

$$f = \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2 = 0 \quad (2.165)$$

Consecuentemente

$$T_{mn}^0 = p_1 g_{mn} + 2 \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \quad ; \quad T_{mn}^1 = 0 \quad (2.166)$$

$$T_{\mu\nu}^2 = \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) g_{\mu\nu} + 4 \left(P_{(\mu\alpha)} P_{(\nu}^\alpha) + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^\alpha] - \frac{p_1}{2} \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle \right) \quad (2.167)$$

De modo que el tensor energía-momento se reescribe como

$$T_{\mu\nu} = \left[\left(1 - \frac{\lambda^2 p_1}{2} \right) p_1 + \lambda^2 p_2 \right] g_{\mu\nu} + 2(1 - \lambda^2 p_1) \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle + 4 \left(P_{(\mu\alpha} P_{\nu)}^{\alpha} + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^{\alpha]} \right) \quad (2.168)$$

Resulta interesante notar que esta expresión puede reordenarse como

$$T_{\mu\nu} = \left(p_1 - \lambda^2 \frac{p_1^2}{2} \right) g_{\mu\nu} + 2(1 - \lambda^2 p_1) \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle + 4\lambda^2 \left[\frac{p_2}{4} g_{\mu\nu} + \left(P_{(\mu\alpha} P_{\nu)}^{\alpha} + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^{\alpha]} \right) \right] \quad (2.169)$$

Escrito de esta manera, es claro que $T_{\mu\nu}$ exhibe una estructura tipo EBI/EHH debida al invariante p_1 y otra tipo EM debida al invariante p_2 vía las redefiniciones $p_1 \rightarrow -f$, $p_2 \rightarrow 4f$. Esto es

$$T_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}^{p_1} + 4\lambda^2 T_{\mu\nu}^{p_2} \quad (2.170)$$

$$T_{\mu\nu}^{p_1} = \left(f + \lambda^2 \frac{f^2}{2} \right) g_{\mu\nu} + (1 + \lambda^2 f) (-2 \langle i\gamma_{(\mu} \mathfrak{D}_{\nu)} \rangle) \quad ; \quad p_1 \rightarrow -f \quad (2.171)$$

$$T_{\mu\nu}^{p_2} = f g_{\mu\nu} + \left(P_{(\mu\alpha} P_{\nu)}^{\alpha} + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^{\alpha]} \right) \quad ; \quad p_2 \rightarrow 4f \quad (2.172)$$

Este resultado es consecuencia de la no-linealidad del campo fermiónico inherente a la forma de la acción DEBI. Tomemos la expresión de la acción DEBI en el caso particular $F_{\mu\nu} = 0$

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} + \frac{1}{\lambda^2} \left[1 - \sqrt{\det(\delta_{\mu}^{\nu} + \lambda \langle -2\lambda P_{\mu}^{\nu} \rangle)} \right] \right\} \quad (2.173)$$

Es claro que la estructura de la acción es idéntica a la acción EBI, razón por la cual se espera la forma hallada para $T_{\mu\nu}^{p_1}$. Más aún, vease que, si se impone que $P_{\mu\nu}$ sea totalmente antisimétrico, el tensor de energía momento es idéntico al obtenido con la teoría Einstein-Maxwell

$$T_{\mu\nu}^{p_2} = f g_{\mu\nu} + P_{[\mu\alpha]} P_{[\nu}^{\alpha]} \quad ; \quad f \rightarrow \frac{p_2}{4} \quad (2.174)$$

En ese espíritu, es natural intuir que, de considerarse una expansión hasta λ^6 , debería esperarse hallar una estructura tipo EBI/EHH debida al invariante p_2 . Razón por la cual el tensor general hasta orden λ^6 tendría la forma

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^f - T_{\mu\nu}^{p_1} + 4\lambda^2 T_{\mu\nu}^{p_2} + T_{\mu\nu}^{EMF} \quad (2.175)$$

Donde cada tensor $T_{\mu\nu}^x$, debido al invariante $x \in \{f, p_1, p_2\}$, tiene la forma del tensor energía momento de la teoría EBI⁷ y $T_{\mu\nu}^{EMF}$ contiene toda la información de acoplamiento electromagnético-fermiónico. Sin embargo, este cálculo escapa de los límites de este trabajo.

⁷Salvo los reescalamientos apropiados para los invariantes.

Capítulo 3

Agujeros negros DEBI

Una vez construidas las ecuaciones de movimiento y tensor de energía-momento de la teoría DEBI en su forma general, es natural preguntarse por los casos particulares que pueden encontrarse contenidos en él.

Siendo el propósito de esta tesis construir soluciones de WH análogas a las presentadas en [20] y [19], el caso particular de interés consta de la métrica estática esféricamente simétrica acoplada con fermiones no masivos en estado estacionario. El presente capítulo está dedicado a la discusión de esta solución, así como la construcción de WH que de ella se deriva.

3.1. Dyón DEBI

Consideremos la métrica esféricamente simétrica en coordenadas esféricas

$$ds^2 = -a^2 dt^2 + b^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.1)$$

cuyos factores de escala son

$$h_t = a \quad ; \quad h_r = b \quad ; \quad h_\theta = r \quad ; \quad h_\phi = r \sin(\theta) \quad (3.2)$$

Sabemos que el tensor energía-momento compatible con esta métrica debe tener la forma

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(T_t, T_r, T_s, T_s) \quad (3.3)$$

y que la solución está dada por

$$ds^2 = -f(r) \exp \left[\int \frac{\Delta}{f(r)} dr \right] dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.4)$$

Recordemos que la función $f(r)$ queda determinada por el tensor energía-momento a través de las funciones m, \tilde{m}, Δ definidas como¹

$$\Delta = r (T_r^r - T_t^t) \quad ; \quad m = -\frac{\Delta}{2r} - T_s \quad ; \quad \tilde{m} = \frac{\Delta}{r} + \frac{\partial_r \Delta + \Delta^2 e^{2\beta} - \Delta \partial_r \beta}{2} \quad (3.5)$$

¹REcuérdese que $e^\beta = b$

Estas cantidades permiten construir la función de masa $I(r)$

$$I(r) = 2 \int dr dx \{x [m(x) + \tilde{m}(x)] \Theta(r - x)\} \quad (3.6)$$

que a su vez permite calcular $f(r)$ vía la ecuación

$$f(r) = 1 - \frac{2[M + I(r)]}{r} \quad (3.7)$$

siendo M la masa de Schwarzschild.

Este es el camino que tomaremos para hallar la solución y es claro que la labor principal consiste en hallar la forma explícita del tensor energía-momento.

3.1.1. Tensor energía-momento

Las cantidades medulares de la teoría DEBI son los tensores electromagnético y de materia $F_{\mu\nu}$ y $P_{\mu\nu}$, pues definen la física del caso particular a tratar y todas las cantidades relevantes se calculan a partir de esto dos tensores. De modo que es menester construirlos bajo las condiciones específicas de nuestro problema físico, estas condiciones son las siguientes:

1. Simetría esférica.
2. Fermiones no masivos.
3. Estado estacionario.

Se hará uso de estas condiciones físicas a lo largo de todo el trabajo restante, de modo que vale la pena tenerlas siempre en mente.

Planteamiento de los tensores $F_{\mu\nu}$ y $P_{\mu\nu}$

Tomemos primero el tensor electromagnético. De la teoría Einstein-Plebański sabemos que, para preservar la simetría esférica, este debe tener la forma

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & Eh_t h_r & 0 & 0 \\ -Eh_t h_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Bh_\theta h_\phi \\ 0 & -Bh_\theta h_\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

sonde E y B son las componentes radiales del campo eléctrico y magnético respectivamente, cuya forma explícita queda determinada por las ecuaciones de movimiento halladas en el capítulo anterior. Este cálculo se realizará más adelante.

Tomemos ahora el tensor de materia $P_{\mu\nu}$, recordemos que está dado por

$$P_{\mu\nu} = i\gamma_\mu \mathcal{D}_\nu - \frac{m}{4} g_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

Al aplicar la condición de fermiones no masivos $m = 0$ se reduce a

$$P_{\mu\nu} = i\gamma_{\mu}\mathfrak{D}_{\nu} \quad (3.10)$$

Luego, la condición de simetría esférica exige que el promedio de fermiones que orbiten alrededor del monopolo sea nula. Dicho de otro modo, los fermiones están condicionados a moverse solo en forma radial respecto al Dyón. Esta condición exige que las componentes relacionadas con las coordenadas ϕ y θ sean nulas, preservando así solo las componentes asociadas a las coordenadas t y r , de modo que $P_{\mu\nu}$ adquiere la siguiente forma matricial en coordenadas esféricas

$$P_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P_{tt} & P_{tr} & 0 & 0 \\ P_{rt} & P_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

A partir de esta expresión es sencillo contruir las partes simétrica y antisimétrica del mismo, estas son

$$P_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2P_{tt} & P_{tr} + P_{rt} & 0 & 0 \\ P_{rt} + P_{tr} & 2P_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad P_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & P_{tr} - P_{rt} & 0 & 0 \\ P_{rt} - P_{tr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Invariantes DEBI

Una vez obtenido el conjunto de tensores $\{F_{\mu\nu}, P_{(\mu\nu)}, P_{[\mu\nu]}\}$, puede calcularse el conjunto de invariantes $\{p_1, p_2, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, f\}$ usando directamente las definiciones de los mismos. Al realizar estas operaciones se obtienen las siguientes expresiones

- **Invariantes fermiónicos**

$$p_1 = \langle P_r^r \rangle - \langle P_t^t \rangle \equiv \langle \mathcal{P} \rangle ; \quad p_2 = \langle P_r^r \rangle^2 - 2\langle P_r^t \rangle \langle P_t^r \rangle + \langle P_t^t \rangle^2 \quad (3.13)$$

- **Invariantes EMF**

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{E}{ab} (b^2 \langle P_r^t \rangle - a^2 \langle P_t^r \rangle) ; \quad \mathfrak{f}_2 = E^2 \langle \mathcal{P} \rangle \quad (3.14)$$

- **Invariante electromagnético**

$$f = \frac{-B^2 + E^2}{2} \quad (3.15)$$

Retomando las definiciones de los operadores \mathfrak{L} y \mathfrak{N}

$$\langle \mathfrak{L} \rangle = (1 - \lambda^2 f) p_1 + \lambda \mathfrak{f}_1 + \lambda^2 \mathfrak{f}_2 ; \quad \langle \mathfrak{N} \rangle = \lambda^2 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) \quad (3.16)$$

resulta inmediato construir la ecuación de movimiento para el campo fermiónico

$$\langle \mathfrak{L} + 2\mathfrak{N} \rangle = 0 \quad (3.17)$$

cuya forma explícita es

$$\langle \mathcal{P} \rangle + \frac{E}{ab} (a^2 \langle P_r^t \rangle - b^2 \langle P_t^r \rangle) \lambda + \left[(P_t^t + P_r^r)^2 + \frac{\langle \mathcal{P} \rangle (E^2 + B^2)}{2} - 4P_r^t P_t^r \right] \lambda^2 = 0 \quad (3.18)$$

Funciones Δ, m y \tilde{m}

Tenindo listos todos estos *ingredientes*, podemos usar la ecuación para el tensor energía-momento en su forma

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{em} + T_{\mu\nu}^{\mathfrak{L}} + T_{\mu\nu}^{\mathfrak{N}} \quad (3.19)$$

para encontrar que tiene la forma siguiente

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} T_t & T_r^t & 0 & 0 \\ T_r^t & T_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_s \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

De este tensor pueden extraerse las cantidades de interés $\{\Delta, T_s, T_t^r\}$

$$\Delta = -r (\langle P_r^r \rangle + \langle P_t^t \rangle) [2 + (B^2 - 7E^2) \lambda^2] \quad (3.21)$$

$$T_t^r = \langle P_{(t}^r) \rangle [2 + (B^2 - 7E^2) \lambda^2] \quad (3.22)$$

$$T_s = T_{s0} + T_{s1} \lambda + T_{s2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \langle \mathfrak{L} + 2\mathfrak{N} \rangle \quad (3.23)$$

con las contribuciones T_{sx} dadas por

$$T_{s0} = \frac{B^2 + E^2 + \langle \mathcal{P} \rangle}{2} \quad (3.24)$$

$$T_{s1} = -E \frac{\langle P_{[tr]} \rangle}{ab} \equiv -ER \quad (3.25)$$

$$T_{s2} = \frac{-3B^4 + 2B^2E^2 + E^4}{8} + \frac{(-3B^2 + E^2) \langle \mathcal{P} \rangle}{4} \quad (3.26)$$

Donde se ha definido

$$R \equiv \frac{\langle P_{[tr]} \rangle}{ab} \quad (3.27)$$

Este factor puede relacionarse con el flujo de energía en la dirección radial, debida al componente antisimétrico del campo fermiónico. En adelante nos tomaremos la libertad de llamarlo *término de radiación fermiónica*.

En este punto es interesante remarcar que, después de invocar la ecuación de movimiento del campo fermiónico $\langle \mathfrak{L} + 2\mathfrak{N} \rangle = 0$, la componente T_s puede reordenarse como

$$T_s = T^{BI} + T_a^{DEBI} + T_s^{DEBI} \quad (3.28)$$

donde

$$T^{BI} = \frac{B^2 + E^2}{2} + \frac{-3B^4 + 2B^2E^2 + E^4}{8} \lambda^2 \quad (3.29)$$

$$T_a^{DEBI} = -ER \lambda \quad (3.30)$$

$$T_s^{DEBI} = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{2} \left(1 + \frac{-3B^2 + E^2}{4} \lambda^2 \right) \quad (3.31)$$

Reordenar T_s de este modo pone de manifiesto la separación de las distintas clases contribuciones presentes, mismas que serán heredadas a la métrica.

Por un lado tenemos el esperado resultado de la teoría EBI/EEH, englobado en T^{BI} . Por otro lado tenemos las contribuciones de T_x^{DEBI} que son aportación de la no linealidad fermiónica inherente a la teoría DEBI, siendo T_a^{DEBI} la consecuencia de una teoría DEBI antisimétrica y T_s^{DEBI} la proveniente de una teoría DEBI simétrica. Nótese que las aportaciones simétrica y antisimétrica no se mezclan; la contribución antisimétrica hace aparición en el orden λ , mientras que la simétrica lo hace hasta el orden λ^2 . Sin embargo, ambos términos exhiben interacción mútua entre los campos electromagnético y fermiónico.

Retomando el objetivo principal de esta sección, veamos que en el espíritu de obtener una métrica estacionaria que eventualmente pueda ser conformalmente plana [20] [19], es necesario que se cumplan las condiciones

$$\Delta = T_t^r = 0 \quad (3.32)$$

Físicamente estas condiciones implican que la solución sea tipo Schwarzschild y que el flujo neto radial de energía sea nulo, ya sea por compensación o por inexistencia del mismo. De las ecuaciones para Δ y T_t^r podemos ver que ambas condiciones pueden conseguirse de dos modos distintos:

1. Ajustando los campos E y B de modo que

$$2 + (B^2 - 7E^2) \lambda^2 = 0 \quad (3.33)$$

2. Ajustando el campo de materia de modo que

$$\langle P_r^r \rangle + \langle P_t^t \rangle = \langle P_{(t}^r) \rangle = 0 \quad (3.34)$$

Siendo el campo electromagnético una cantidad intrínseca del Dyón y el campo de materia un ente que puede ser manipulado por un agente externo, optamos por la segunda opción, misma que nos lleva a las condiciones

$$\langle P_r^r \rangle = -\langle P_t^t \rangle \quad ; \quad \langle P_{rt} \rangle = -\langle P_{tr} \rangle \quad (3.35)$$

Físicamente, la primera de las condiciones nos dice que la densidad de energía en cada punto del espacio debe compensarse con el flujo la presión radial. La segunda condición nos dice que la métrica no debe ser radiativa.

Estos resultados nos permiten fijar $\Delta = 0$ y escribir las funciones m y \tilde{m} como

$$\tilde{m} = 0 \quad (3.36)$$

$$m = -T^{BI} - T_a^{DEBI} - T_s^{DEBI} \quad (3.37)$$

Además, en virtud de la anulación de la parte simétrica del valor esperado del tensor de materia, el término de radiación fermiónica se reduce a

$$R = \langle P_{tr} \rangle = \bar{\chi}^i \gamma_t \mathfrak{D}_r \chi = -\bar{\chi}^i \gamma_r \mathfrak{D}_t \chi \quad (3.38)$$

Que puede interpretarse como la cantidad de momento convertido en radiación o, equivalentemente, como la cantidad de energía radiada.

3.1.2. Solución electromagnética

Corresponde ahora hallar la forma explícita de los campos eléctrico y magnético en términos de sus monopolos y para ello, es necesario resolver las ecuaciones de movimiento que los gobiernan. Recordemos que estas ecuaciones son

$$\nabla_\mu (\star F^{\mu\nu}) = 0 \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \{ [1 + \lambda^2 (f - p_1)] F_{\mu\nu} + 2\lambda \mathcal{P}_{[\mu\nu]} + 2\lambda^2 (\mathcal{P}_{(\mu\alpha)} F_\nu^\alpha - \mathcal{P}_{(\nu\alpha)} F_\mu^\alpha) \} \\ = \\ j_\nu - \lambda j_\alpha F_\nu^\alpha - \lambda^2 [(f + p_1 - j_\alpha A^\alpha) j_\nu + F_\nu^\alpha F_\alpha^\beta j_\beta] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si se impone la condición de 4-corriente nula $j^\mu = 0$ en conjunción con el potencial para los monopolos eléctrico y magnético²

$$A = \frac{q_e}{r} dt - q_m \cos(\theta) d\phi \quad (3.41)$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para los campos E y B

$$B = \frac{q_m}{r^2} \quad (3.42)$$

$$E \left[1 + \left(\frac{E^2 - B^2}{2} + \langle \mathcal{P} \rangle \right) \lambda^2 \right] + 2R\lambda = \frac{q_e}{r^2} \quad (3.43)$$

Aunque en principio es posible resolver el sistema de ecuaciones de manera exacta, estamos interesados en las contribuciones solo hasta potencias λ^2 , razón por la cual, podemos aproximar la solución para E^2 y a partir de ella obtener una aproximación para E , de modo que obtengamos

$$E \approx \frac{q_e}{r^2} - 2R\lambda + \left(-\frac{q_e^3}{2r^6} + \frac{q_e q_m^2}{2r^6} - \frac{\langle \mathcal{P} \rangle q_e}{r^2} \right) \lambda^2 \quad (3.44)$$

$$E^2 \approx \frac{q_e^2}{r^4} - \frac{4q_e R}{r^2} \lambda + \left(-\frac{q_e^4}{r^8} + \frac{q_e^2 q_m^2}{r^8} - \frac{2\langle \mathcal{P} \rangle q_e^2}{r^4} + 4R^2 \right) \lambda^2 \quad (3.45)$$

Como es de esperarse, esta solución contiene el campo eléctrico debido a la electrodinámica de Born e Infeld más las respectivas aportaciones de la interacción EMF de la teoría DEBI. Es decir que puede reordenarse como

$$E = E_{BI} + E_{DEBI} \quad (3.46)$$

deond

$$E_{BI} = \frac{q_e}{r^2} - \frac{q_e^3}{2r^6} + \frac{q_e q_m^2}{2r^6} \quad (3.47)$$

$$E_{DEBI} = -2R\lambda - \frac{2q_e^2 \langle \mathcal{P} \rangle}{r^4} \lambda^2. \quad (3.48)$$

²Monopolo de Dirac.

Resulta interesante notar que en el caso en el que la carga eléctrica del Dyón es Nula, el campo eléctrico no necesariamente es cero puesto que

$$q_e = 0 \implies E = -2R \quad (3.49)$$

Este término permanece debido a que proviene de la no linealidad del campo de materia y no es propiedad intrínseca del Dyón. Véase que, si se considera solo el régimen lineal $\lambda = 0$ o la ausencia de materia $P_{\mu\nu} = 0$, el campo es nulo y se recupera con ello el resultado clásico.

3.1.3. Métrica

Una vez calculada la forma explícita de los campos eléctrico y magnético en términos de las cargas monopoles del Dyón nos encontramos en posición de hallar la forma de la métrica asociada al mismo. Veamos primero que las contribuciones T^{BI} y T_x^{DEB} hasta orden λ^2 son

$$T^{BI} = \frac{q_e^2 + q_m^2}{2r^4} - \frac{3(q_e^2 - q_m^2)^2}{8r^8} \lambda^2 - \frac{2q_e R}{r^2} \lambda - \frac{q_e^2 \langle \mathcal{P} \rangle}{r^4} \lambda^2 + 2R^2 \lambda^2 \quad (3.50)$$

$$T_a^{DEBI} = -\frac{q_e R}{r^2} \lambda + 2R^2 \lambda^2 \quad (3.51)$$

$$T_s^{DEBI} = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{2} - \frac{\langle \mathcal{P} \rangle (3q_m^2 - q_e^2)}{8r^4} \lambda^2 \quad (3.52)$$

Consecuentemente, la componente T_s del tensor energía-momento es

$$T_s = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{2} + \frac{Q^2}{2r^4} - \frac{3q_e R}{r^2} \lambda - \left(\frac{3\tilde{Q}^4}{8r^8} + \frac{\hat{Q}^2 \langle \mathcal{P} \rangle}{8r^4} - 4R^2 \right) \lambda^2 \quad (3.53)$$

Donde se han definido las cantidades

$$Q^2 = q_e^2 + q_m^2 \quad ; \quad \tilde{Q}^2 = q_e^2 - q_m^2 \quad ; \quad \hat{Q}^2 = 7q_e^2 + 3q_m^2 \quad (3.54)$$

Insertando este resultado en la función $m = -T_s$ podemos escribir

$$m = m_{BI} + m_{DEBI} \quad (3.55)$$

donde se ha separado el resultado esperado por la teoría de Born e Infeld de la contribución extra debida a la teoría DEBI, estos términos están dados por

$$m_{BI} = -\frac{Q^2}{2r^4} + \frac{3\tilde{Q}^4}{8r^8} \lambda^2 \quad (3.56)$$

$$m_{DEBI} = -\frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{2} + \frac{3q_e R}{r^2} \lambda + \left(\frac{\hat{Q}^2 \langle \mathcal{P} \rangle}{8r^4} - 4R^2 \right) \lambda^2 \quad (3.57)$$

Consecuentemente, la función de masa $I(r)$ también puede separarse como

$$I(r) = I(r)_{BI} + I(r)_{DEBI} \quad (3.58)$$

Luego, conocemos la solución del Dyón en la teoría EBI, esta es

$$I(r)_{BI} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{r^2} - \frac{\tilde{Q}^4}{20r^6} \lambda^2 \right) \quad (3.59)$$

Usando estos resultados en conjunción con $\Delta = 0$ obtenemos que la métrica del Dyón DEBI está dada por

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.60)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\tilde{Q}^4}{20r^6} \lambda^2 - 2 \frac{I(r)_{DEBI}}{r} \quad (3.61)$$

y la función de masa $I(r)_{DEBI}$ dada por

$$I(r)_{DEBI} = 2 \int dr dx \{ x [m(x)_{DEBI}] \Theta(r-x) \} \quad (3.62)$$

Nótese que, en ausencia de materia se tiene que $m_{DEBI} = 0 \implies I_{DEBI} = 0$ y se recupera el Dyón perturbativo EBI. Por otro lado, si se toma el régimen lineal, se tiene que $\langle \mathcal{P} \rangle = 0$ y $\lambda = 0$ recuperándose con ello la solución de Reissner-Nordström.

Función de masa DEBI efectiva

Aunque se ha encontrado acuatratura la métrica del Dyón, es claro que para tener una forma explícita de esta es necesario conocer la dependencia en la coordenada r de las cantidades $\langle \mathcal{P} \rangle$ y R , mismas que resultan de la ecuación de movimiento para el espinor χ

$$(\mathfrak{L} + 2\mathfrak{N}) \chi = 0 \quad (3.63)$$

Resolver esta ecuación resulta complicado incluso en el caso esféricamente simétrico, debido a la intensa no linealidad del operador \mathfrak{N} . Sin embargo, es posible proponer una forma *efectiva* para las cantidades $\langle \mathcal{P} \rangle$ y R , basada en el análisis dimensional.

Notemos que las cantidades en cuestión pueden relacionarse como

$$R \sim \langle \mathcal{P} \rangle \sim E^2 \sim B^2 \quad (3.64)$$

y como el campo electromagnético varía como $E, B \sim r^{-2}$, proponemos que las cantidades R y $\langle \mathcal{P} \rangle$ se escriban de manera efectiva como

$$R(r) = \frac{R_c}{r^4} ; \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{P}{r^4} \quad (3.65)$$

donde P_r y P son constantes que condensan toda la información del campo de materia.

Teniendo en cuenta la forma propuesta para R y $\langle \mathcal{P} \rangle$, la función m_{DEBI} se reescribe en potencias de r^- como

$$m_{DEBI} = -\frac{P}{2r^4} + \frac{3q_e R_c}{r^6} \lambda + \left(\frac{\hat{Q}^2 P}{8r^8} - 4 \frac{R_c^2}{r^8} \right) \lambda^2. \quad (3.66)$$

Esta expresión tiene la forma

$$m_{DEBI} = \sum_{j \geq 4} \frac{\kappa_j}{r^j} = \frac{\kappa_4}{r^4} + \frac{\kappa_6}{r^6} \lambda + \frac{\kappa_8}{r^8} \lambda^2 \quad (3.67)$$

donde

$$\kappa_4 = -\frac{P}{2} \quad ; \quad \kappa_6 = 3q_e R_c \quad ; \quad \kappa_8 = \frac{\hat{Q}^2 P}{8} - 4R_c^2 \quad (3.68)$$

Consecuentemente, la función de masa toma la forma

$$I(r)_{DEBI} = \sum_{j \geq 4} \frac{2\kappa_j}{(j-2)(j-3)r^{j-3}} = \frac{\kappa_4}{r} + \frac{\kappa_6}{6r^3} \lambda + \frac{\kappa_8}{15r^5} \lambda^2 \quad (3.69)$$

Luego, haciendo uso de la forma explícita de las κ_j podemos escribir

$$-\frac{2I(r)_{DEBI}}{r} = \frac{P}{r^2} - \frac{q_e R_c}{r^4} \lambda - \left(\frac{\hat{Q}^2 P}{60} - \frac{8R_c^2}{15} \right) \frac{\lambda^2}{r^6} \quad (3.70)$$

Consecuentemente, la forma final de la métrica del Dyón DEBI es

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.71)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P}{r^2} - \frac{q_e R_c}{r^4} \lambda - \left(\frac{\tilde{Q}^4}{20} + \frac{\hat{Q}^2 P}{60} - \frac{8R_c^2}{15} \right) \frac{\lambda^2}{r^6} \quad (3.72)$$

O, si se prefiere, puede escribirse con la dependencia explícita de las cargas monopulares

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q_e^2 + q_m^2 + P}{r^2} - \frac{q_e R_c}{r^4} \lambda - \left(\frac{(q_e^2 - q_m^2)^2}{20} + \frac{(7q_e^2 + 3q_m^2)P}{60} - \frac{8R_c^2}{15} \right) \frac{\lambda^2}{r^6} \quad (3.73)$$

Esta ecuación pone de manifiesto tres modificaciones que la teoría DEBI impone sobre la teoría EBI/EEH. Antes de comentar estas modificaciones, recordemos que la métrica debida a la teoría EBI/EEH tiene la estructura

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + A \frac{1}{r^2} - C \frac{\lambda^2}{r^6} \quad (3.74)$$

donde $A = Q^2$ corresponde al coeficiente de Reissner-Nordstrom y $C = \frac{\tilde{Q}^4}{20}$ el coeficiente EBI/EEH.

Por otro lado, la métrica DEBI tiene la estructura

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + A\frac{1}{r^2} - B\frac{\lambda}{r^4} - C\frac{\lambda^2}{r^6} \quad (3.75)$$

Es claro entonces que la teoría DEBI modifica a EBI/EEH en los siguientes tres aspectos

1. Se incluye el coeficiente

$$B = q_e R_c \quad (3.76)$$

que permite modificar la métrica de Schwarzschild con una suma de potencias pares de r^{-1} . Además, este término puede ser positivo o negativo, según el signo de q_e y R ; puede interpretarse como un término de apantallamiento de campo eléctrico: si ambas cantidades tienen el mismo signo, los campos apuntan en la misma dirección y se refuerzan mutuamente, en el caso contrario se apantallan mutuamente.

2. El coeficiente de Reissner-Nordström difiere por P , es decir

$$\Delta A = P \quad ; \quad \Delta A = A_{DEBI} - A_{EBI/EEH} \quad (3.77)$$

3. La diferencia entre ambas teorías del coeficiente EBI/EEH es proporcional a P y R_c , es decir

$$\Delta C = \frac{\hat{Q}^2 P}{60} - \frac{8R_c^2}{15} \quad ; \quad \Delta C = C_{DEBI} - C_{EBI/EEH} \quad (3.78)$$

Naturalmente, en el caso particular de ausencia de masa, se tiene que $P = R_c = 0$ y estas condiciones aniquilan las diferencias entre ambas teorías

$$\Delta A = B = \Delta C = 0 \quad (3.79)$$

recuperándose con ello el resultado conocido del Dyón EBI/EEH.

3.2. Agujeros negros debidos al Dyón

Una vez obtenida la métrica DEBI resulta natural preguntarse si como consecuencia de esta es posible hallar agujeros negros y, si es así, cómo se modifican conforme cambian los distintos parámetros que caracterizan a la métrica.

Estudiar el graficamente el comportamiento de la métrica conforme varían los parámetros permite comprender de manera sencilla el papel de cada término involucrado en ella conforme se hace presente, además de mostrar la existencia de horizontes de eventos sin la necesidad de calcularlos analíticamente.

Con el fin de realizar este análisis, es conveniente reescalar la función $f(r)$ en términos del radio de Schwarzschild $r_s = 2M$, de ese modo, $f(r)$ toma la forma

$$f(r) \rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{x_e^2 + x_m^2 + x_p^2}{x^2} - \frac{x_e x_r^2}{x^4} \lambda - \left(\frac{(x_e^2 - x_m^2)^2}{20} + \frac{(7x_e^2 + 3x_m^2)x_p^2}{60} - \frac{8x_r^4}{15} \right) \frac{\lambda^2}{x^6} \quad (3.80)$$

Donde se han definido las cantidades reescaladas

$$r = x r_s ; \quad q_e = x_e r_s ; \quad q_m = x_m r_s ; \quad P = \pm (x_p r_s)^2 ; \quad R = \pm (x_r r_s)^2 ; \quad \lambda \rightarrow \lambda r_s. \quad (3.81)$$

De este modo, podemos variar cada parámetro x_j en el intervalo $[0, 1]$ y fijar λ en algún punto del mismo intervalo para observar el comportamiento presenta $f(x)$. Nótese que el signo de x_r^2 y x_p^2 debe elegirse de acuerdo al signo de R_c y P respectivamente.

3.2.1. Agujero negro RN

Tomemos como punto de partida la métrica de Reissner-Nordström (RN); esta se consigue imponiendo las condiciones $x_p = x_r = \lambda = 0$. Además, dada la simetría entre q_m y q_e presente en esta métrica, podemos condensar toda la información en una solo parámetro $x_q^2 = x_e^2 + x_m^2$, de modo que la métrica resultante es

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{x_e^2 + x_m^2}{x^2} \quad (3.82)$$

cuya gráfica es la siguiente La figura (3.1) muestra que el comportamiento característico de la métrica RN consiste en la presencia de un punto crítico que coincide con un mínimo global que asciende conforme x_q crece, hasta desvanecerse. La gráfica también muestra que la métrica posee en general dos cortes asociados a horizontes de eventos, mismos que eventualmente colapsan en un solo horizonte cuando el agujero negro se convierte en agujero negro extremo; esta solución se comentó en el marco teórico.

3.2.2. Agujero negro BI

Tomemos ahora la métrica de Born-Infeld variando $x_e \neq x_m$ y fijando el valor del parámetro³ $\lambda = 0.25$, pero manteniendo inactivas las contribuciones x_r y x_p , es decir

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{x_e^2 + x_m^2}{x^2} - \frac{(x_e^2 - x_m^2)^2 \lambda^2}{20 x^6} ; \quad \lambda = 0.25. \quad (3.83)$$

³El valor exacto de este parámetro debería poder hallarse al resolver analíticamente la ecuación de movimiento electromagnética de la teoría DEBI completa, como se hizo en el caso de la teoría BI, sin embargo, como el propósito de este valor es meramente comparativo, basta con fijar un valor arbitrario menor que la unidad.

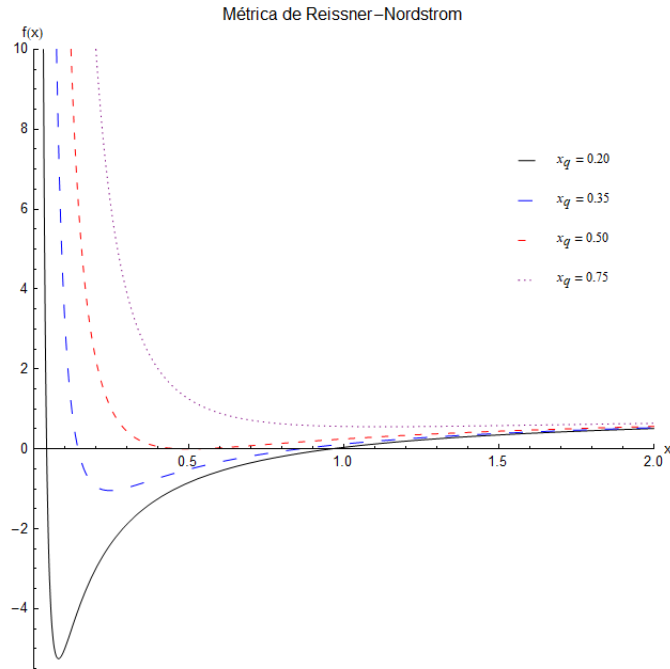


Figura 3.1: Métrica de Reissner-Nordstrom para distintos valores de $x_q^2 = x_e^2 + x_m^2$. El mínimo local asciende hasta desvanecerse. Exhibe de forma genérica dos horizontes de eventos y un caso crítico.

La figura (3.2) muestra la gráfica de la métrica BI para distintos valores de x_e y x_m . Las gráficas punteadas muestran que la métrica presenta un máximo local que crece a medida que lo hace uno de los parámetros de carga, mientras el otro se mantiene fijo, la línea sólida marca la solución particular en que $x_e = x_m$, en la que la solución BI colapsa en la solución RN. El gráfico muestra además que esta métrica exhibe de forma genérica tres horizontes de eventos y la posibilidad de un agujero negro extremo, caracterizado por el colapso de dos horizontes de eventos en un solo horizonte.

3.2.3. Agujero negro DEBI

Veamos ahora el efecto que tienen las contribuciones DEBI sobre la métrica, fijando nuevamente $\lambda = 0.25$. Es conveniente estudiar la acción de x_p y x_r por separado, dado que la acción simultánea de estos parámetros puede entenderse como la supersposición de sus efectos aislados.

DEBI-P

Tomemos $x_r = 0$, llamaremos a esta métrica *DEBI - P* y tiene la forma

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{x_e^2 + x_m^2 + x_p^2}{x^2} - \left(\frac{(x_e^2 - x_m^2)^2}{20} + \frac{(7x_e^2 + 3x_m^2)x_p^2}{60} \right) \frac{\lambda^2}{x^6}. \quad (3.84)$$

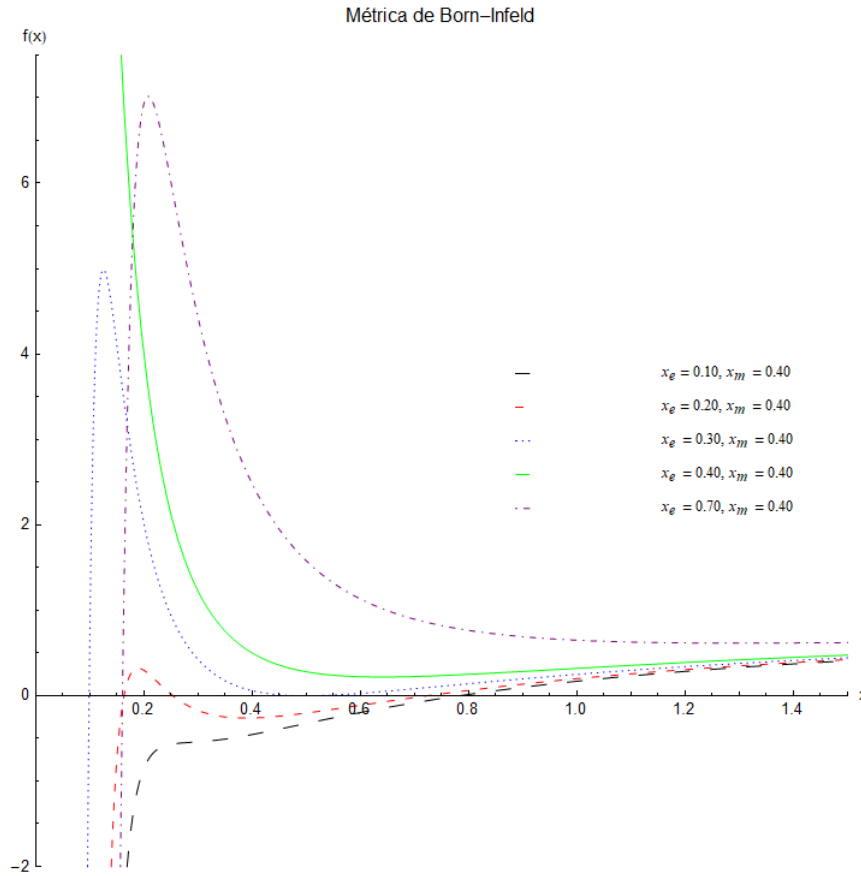


Figura 3.2: Métrica BI para distintos valores de x_e y x_m . El máximo local crece a medida que x_e aumenta. Exhibe de forma genérica tres horizontes de eventos y un caso crítico.

Véase que esta métrica preserva la estructura de la métrica BI

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + A\frac{1}{r^2} - C\frac{\lambda^2}{r^4}, \tag{3.85}$$

de modo que se espera que la forma de la gráfica mantenga similitudes con BI; y de hecho así sucede, como puede verse a continuación.

Puede verse en la figura (3.3) que el máximo local y los tres horizontes de eventos característicos de la métrica BI, así como la posibilidad de obtener un agujero negro crítico se preservan y el efecto que variar x_p manteniendo fijos los parámetros de carga electromagnética consiste en hacer oscilar la altura del máximo local alrededor de una distancia $x_0 \approx 0.2$, además de inducir la existencia de un mínimo local que se decae conforme x_p crece.

DEBI-R

Consideremos ahora que $x_p = 0$ y variemos x_r manteniendo fijos los parámetros de carga electromagnética. Llamaremos a esta métrica DEBI-R y tiene la siguiente

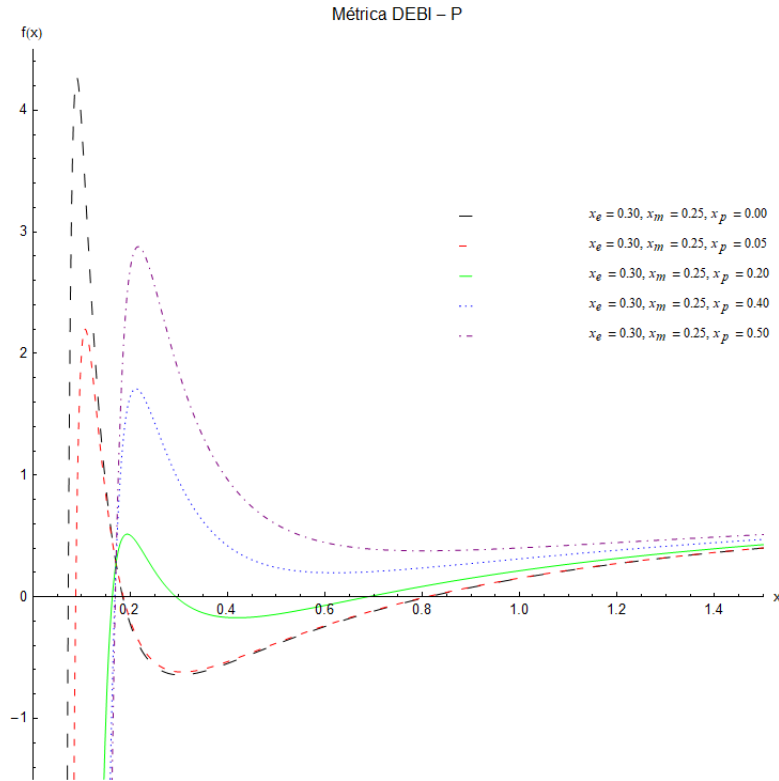


Figura 3.3: Métrica DEBI-P para distintos valores de x_p con x_m y x_e fijos. Se preserva la forma de la métrica BI, el máximo local oscila en altura alrededor de un punto $x_0 \approx 0.2$

forma

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{x_e^2 + x_m^2}{x^2} - \frac{x_e x_r^2}{x^4} \lambda - \left(\frac{(x_e^2 - x_m^2)^2}{20} - \frac{8x_r^4}{15} \right) \frac{\lambda^2}{x^6} \quad (3.86)$$

Nótese que la estructura de esta métrica es la que posee la métrica DEBI en general

$$f(r) = 1 - \frac{1}{x} + A \frac{1}{x^2} - B \frac{\lambda}{x^4} - C \frac{\lambda^2}{x^6}, \quad (3.87)$$

de modo que la forma de la gráfica de la métrica DEBI-R condensa la esencia de la métrica DEBI. La figura siguiente muestra la gráfica de esta métrica para distintos valores de x_r . Puede verse en la figura (3.4) que la métrica DEBI-R puede presentar entre dos y cuatro horizontes de eventos, además de dos mínimos locales y un máximo local. El primero de los mínimos (de izquierda a derecha) así como el máximo tienden a desaparecer conforme x_r . Este proceso termina con una gráfica cuya forma asemeja fuertemente a la debida a la métrica RN.

Por otro lado, dada la forma de la métrica en cuestión, es claro que para valores $x_r \approx 0$ debe tenerse una gráfica similar a la debida a la métrica BI⁴. Se sigue entonces que, a medida que x_r se hace presente, la métrica DEBI debe atravesar por tres etapas distintas, estas son:

⁴Esta gráfica no se muestra en la figura (3.4) para evitar la saturación de la misma.

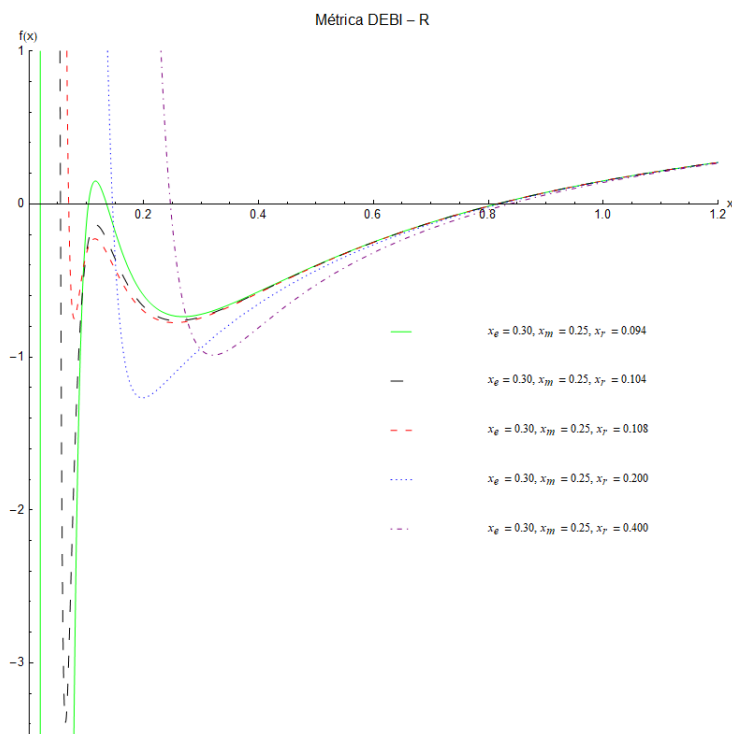


Figura 3.4: Métrica DEBI-R para distintos valores de x_r . Presenta entre dos y cuatro horizontes de eventos, además de un máximo local que se desvanece a medida que x_r crece, así como dos mínimos locales, de los cuales el más cercano a cero termina por desaparecer.

1. Métrica tipo BI
2. Métrica tipo DEBI-R (línea sólida en de la figura (3.4)).
3. Métrica tipo RN

DEBI

El análisis gráfico muestra que la métrica DEBI evoluciona de la métrica tipo BI a la métrica tipo RN pasando por las formas DEBI-P y DEBI-R. Presenta entre dos y cuatro horizontes de eventos, dos de los cuales tienen la posibilidad de colapsar en un solo horizonte de eventos dando lugar con ello a un agujero negro extremo.

La figura (3.5) muestra una gráfica genérica de la métrica DEBI, en ella pueden apreciarse los dos mínimos locales así como el máximo local característicos. También puede apreciarse la oscilación entre dos y cuatro horizontes de eventos, así como la posibilidad de tener un agujero negro extremo para algún valor particular de los parámetros $\{x_j\}$, que debe estar presente en el intervalo $x \in (0.4, 0.5)$

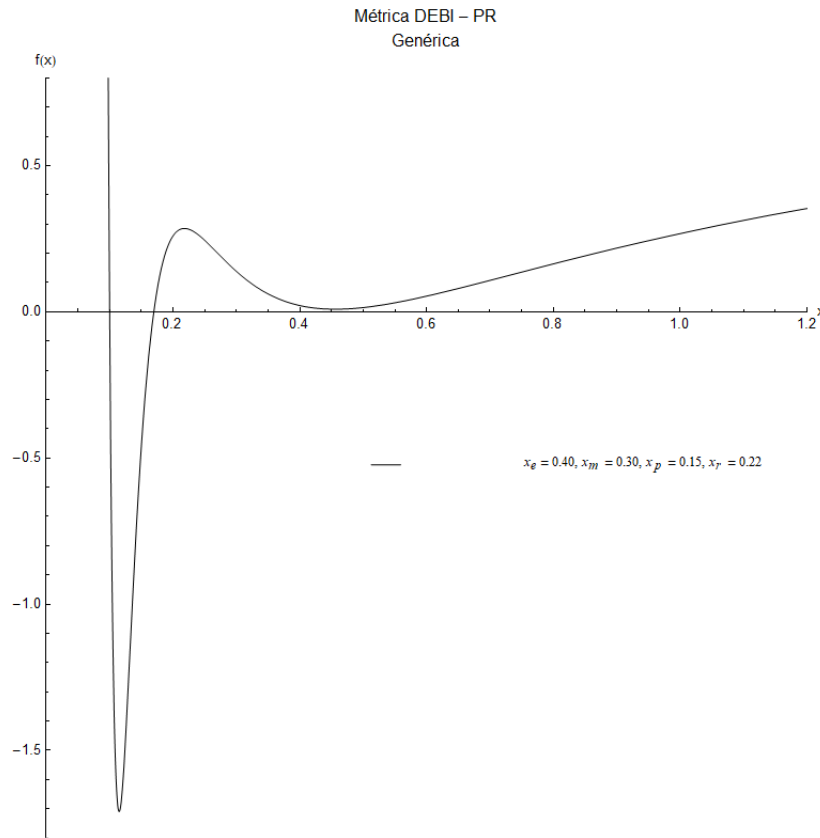


Figura 3.5: Métrica DEBI para valores particulares de x_j , muestra la forma característica de la métrica así como la posibilidad de tener un agujero negro extremo.

3.2.4. Casos particulares

Una vez estudiado el comportamiento de la métrica del Dyón DEBI ante la variación de los parámetros que la gobiernan, el paso siguiente en su caracterización consiste en estudiar algunos posibles casos límites como son: el monopolo magnético, el monopolo eléctrico y el dyón equilibrado. Esta sección se dedica a presentar la forma de la métrica.

Monopolo magnético

Consideremos nula la carga eléctrica, $x_e = 0$, entonces la métrica DEBI toma la estructura de la métrica BI

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + A \frac{1}{r^2} - C \frac{\lambda^2}{r^4}, \quad (3.88)$$

donde

$$A = x_m^2 + x_p^2 ; \quad C = \frac{x_m^4 + x_m^2 x_p^2}{20} - \frac{8x_r^4}{15}. \quad (3.89)$$

Ahora, recordemos que los parámetros x_r y x_p pueden ajustarse externamente, de modo que podemos ajustarlos para conseguir que el parámetro de BI se anule, $C = 0$.

Esto se consigue fijando x_r de tal manera que

$$x_r^4 = \frac{3}{32} \left(1 + \frac{x_p^2}{x_m^2} \right) x_m^4 = \frac{3}{32} A x_m^2. \quad (3.90)$$

Se concluye entonces que la métrica del monopolo magnético DEBI con x_r balanceado tiene la estructura de la métrica RN

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + A \frac{1}{r^2}. \quad (3.91)$$

A primera vista, puede pensarse que este caso particular anula las contribuciones no-lineales de la teoría, como sucede en el caso del monopolo balanceado en BI, sin embargo, recordemos que el parámetro A contiene la contribución de x_p , mismo que solo se anula de facto en el caso lineal. De modo que la no linealidad de la teoría persiste en este término.

Un caso límite interesante ocurre cuando la carga magnética es mucho mayor que el momento de los fermiones, veamos que

$$x_p \ll x_m \implies x_r \approx x_m \ ; \ A \approx x_m^2. \quad (3.92)$$

En cuyo caso se recupera legítimamente la métrica RN del monopolo magnético.

Monopolo eléctrico

Consideremos ahora que la carga magnética es nula, entonces la métrica DEBI preserva los parámetros A , B y C

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + A \frac{1}{x^2} - B \frac{\lambda}{x^4} - C \frac{\lambda^2}{x^6}, \quad (3.93)$$

donde

$$A = x_e^2 + x_p^2 \ ; \ B = x_e x_r^2 \quad (3.94)$$

$$C = \frac{3x_e^4 + 7x_e^2 x_p^2}{60} - \frac{8}{15} x_r^4. \quad (3.95)$$

Nuevamente, el término BI puede anularse con la correcta elección de x_r

$$x_r^4 = \frac{x_e^4}{32} \left(3 + 7 \frac{x_p^2}{x_e^2} \right). \quad (3.96)$$

Con este resultado, la métrica del monopolo eléctrico toma la forma

$$f(r) = 1 - \frac{1}{x} + A \frac{1}{x^2} - B \frac{\lambda}{x^4} \quad (3.97)$$

donde

$$A = x_e^2 + x_p^2 \ ; \ B = \pm |x_e^3| \sqrt{\frac{3}{32} + \frac{7x_p^2}{32x_e^2}}. \quad (3.98)$$

El signo del parámetro B debe elegirse de acuerdo a la dirección relativa entre los campos producidos por q_e y R .

El caso límite en el que la carga eléctrica es mucho mayor que el momento de los fermiones permite prescindir de esta última cantidad, sin embargo el término de apantallamiento persiste puesto que

$$x_p \ll x_e \implies A = x_e^2 ; B = \pm \sqrt{\frac{3}{32}} |x_e^3| \quad (3.99)$$

Dyón balanceado

El caso del Dyón balanceado consiste, igualar las cargas electromagnéticas, es decir $q_m = q_e \equiv q \implies x_e = x_m \equiv x_q$. Al imponer esta condición la métrica DEBI preserva su estructura, igual que en el monopolo eléctrico, pero los términos A, B y C toman valores distintos, dados como sigue

$$f(r) = 1 - \frac{1}{x} + A \frac{1}{x^2} - B \frac{\lambda}{x^4}, \quad (3.100)$$

donde

$$A = 2x_q^2 + x_p^2 ; B = x_q x_r^2 \quad (3.101)$$

$$C = \frac{x_q^2 x_p^2}{6} - \frac{8}{15} x_r^4. \quad (3.102)$$

Nuevamente, el término BI puede ser anulado con la correcta elección de x_r

$$x_r^4 = \frac{5}{16} x_q^2 x_p^2. \quad (3.103)$$

De este modo, los parámetros A, B se reescriben como

$$A = 2x_q^2 + x_p^2 ; B = \pm \frac{\sqrt{5}}{4} x_q^2 x_p, \quad (3.104)$$

donde el signo de B nuevamente debe tomarse de acuerdo a la dirección relativa de los campos producidos por q_e y R .

Si se toma el límite en el que la carga es mucho mayor que el momento, solo el parámetro A se afecta, reduciéndose al término esperado de la métrica RN

$$A = 2x_q^2. \quad (3.105)$$

Es interesante notar que, a diferencia de la teoría EBI, equilibrar las cargas para el Dyón no reduce la métrica al resultado RN debido a la presencia del término de apantallamiento B . Sin embargo, si se pide la ausencia de materia, o bien que el momento neto sea nulo, se recupera francamente la métrica RN, como es de esperarse.

3.2.5. Agujero negro extremo

Construcción

Dado el interés de construir un agujero de gusano análogo al estudiado en [20] y [19]⁵, es necesario hallar la forma que presenta un agujero negro extremo en la teoría DEBI.

Recordemos que un BH de este tipo está definido por las siguientes condiciones físicas.

1. Existe r_0 tal que es el radio del horizonte de eventos más lejano.
2. La temperatura del BH es cero.
3. El horizonte de eventos es un mínimo local de la métrica.

Como ya hemos visto, la métrica del Dyón DEBI tiene la forma general

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\Omega^2, \quad (3.106)$$

donde

$$f(r) \rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{x} + A\frac{1}{x^2} - B\frac{\lambda}{x^4} - C\frac{\lambda^2}{x^6} \quad ; \quad x = \frac{r}{2M}. \quad (3.107)$$

De modo que el BH extremo lo define el conjunto de cantidades $\{A, B, C; r_0 = 2Mx_0\}$ tales que se cumplen las siguientes tres condiciones

1. Condición de horizonte de eventos

$$f(x_0) = f(r_0) = 0 \quad (3.108)$$

2. Condición de temperatura cero

$$f'(x_0) = f'(r_0) = 0 \quad (3.109)$$

3. Condición de mínimo local

$$f''(x_0), f''(r_0) > 0. \quad (3.110)$$

Estas condiciones se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{x_0^6} (x_0^6 - x_0^5 + Ax_0^4 - B\lambda x_0^2 - C\lambda^2) = 0 \quad (3.111)$$

$$\frac{1}{x_0^7} (x_0^5 - 2Ax_0^4 + 4B\lambda x_0^2 + 6C\lambda^2) = 0 \quad (3.112)$$

$$\frac{1}{x_0^8} (-2x_0^5 + 6Ax_0^4 - 20B\lambda x_0^2 - 42C\lambda^2) > 0. \quad (3.113)$$

⁵Esta solución ya se discutió en el marco teórico

Desde luego, este sistema de ecuaciones no permite hallar el conjunto $\{A, B, C, x_0\}$ de manera única; a lo más, dados dos de estos valores, podrán hallarse los dos restantes. Otro inconveniente es la imposibilidad de obtener x_0 como función de los parámetros $\{A, B, C\}$ debido al grado de los polinomios involucrados. Sin embargo, el sistema puede estudiarse de manera numérica para hallar algunas posibles soluciones.

Una manera de realizar este estudio consiste en tomar las primeras dos ecuaciones y considerar la pareja (x_0, C) como abscisa y ordenada, respectivamente en cada una de ellas, y luego hallar gráficamente los puntos de intersección entre ambas gráficas al asignar valores arbitrarios para A y B .

Esto es, consideremos las funciones C_1 y C_2 dadas por

$$C_1 \equiv C_1(x_0) = \frac{x_0^6 - x_0^5 + Ax_0^4 - B\lambda x_0^2}{\lambda^2} \quad (3.114)$$

$$C_2 \equiv C_2(x_0) = \frac{x_0^5 - 2Ax_0^4 + 4B\lambda x_0^2}{-6\lambda^2}. \quad (3.115)$$

Tomemos, como se ha hecho a lo largo de las últimas secciones, el valor $\lambda = 0.25$ y fijemos arbitrariamente $A = 0.12$. De este modo podemos construir tres casos distintos: $B < 0$, $B = 0$ y $B > 0$, y buscar las intersecciones de las funciones C_j . Estas tres condiciones para B son permitidas en la teoría DEBI gracias a las contribuciones EMF de la teoría, esto puede verse directamente de la definición de B

$$B = x_e x_r^2 = \frac{q_e R_r}{(2M)^4}. \quad (3.116)$$

donde, el signo de x_r^2 depende, por definición, del signo de R_c , por lo que B . Algo similar ocurre con la definición del parámetro C

$$C = \frac{(x_e^2 - x_m^2)^2}{20} + \frac{(7x_e^2 + 3x_m^2)x_p^2}{60} - \frac{8x_r^4}{15}. \quad (3.117)$$

Véase que en ausencia de interacción EMF, se tiene el resultado EBI y C es estrictamente positivo, sin embargo, la presencia de los parámetros x_r y x_p permiten que C pueda ser una cantidad positiva, negativa o nula.

Análisis gráfico

La figura (3.6) muestra que el conjunto de valores $\{A = 0.12, B = -0.2, C = 0.031, x_0 = 0.65\}$ es un caso particular que permite construir un BH extremo con parámetro B negativo. Podemos apreciar en (3.6a) que fijar $B = -0.2$ predice la existencia de dos soluciones para C , mismas que están asociadas a dos horizontes de eventos, de los cuales, siendo consistentes con la definición de x_0 , se ha elegido el de mayor tamaño para construir la gráfica mostrada en la figura (3.7b). Esta última figura, pone de manifiesto que el horizonte de eventos $x_0 = 0.65$ asociado a las cantidades mencionadas para A, B y C es un mínimo local de la métrica, cumpliendo así todos los

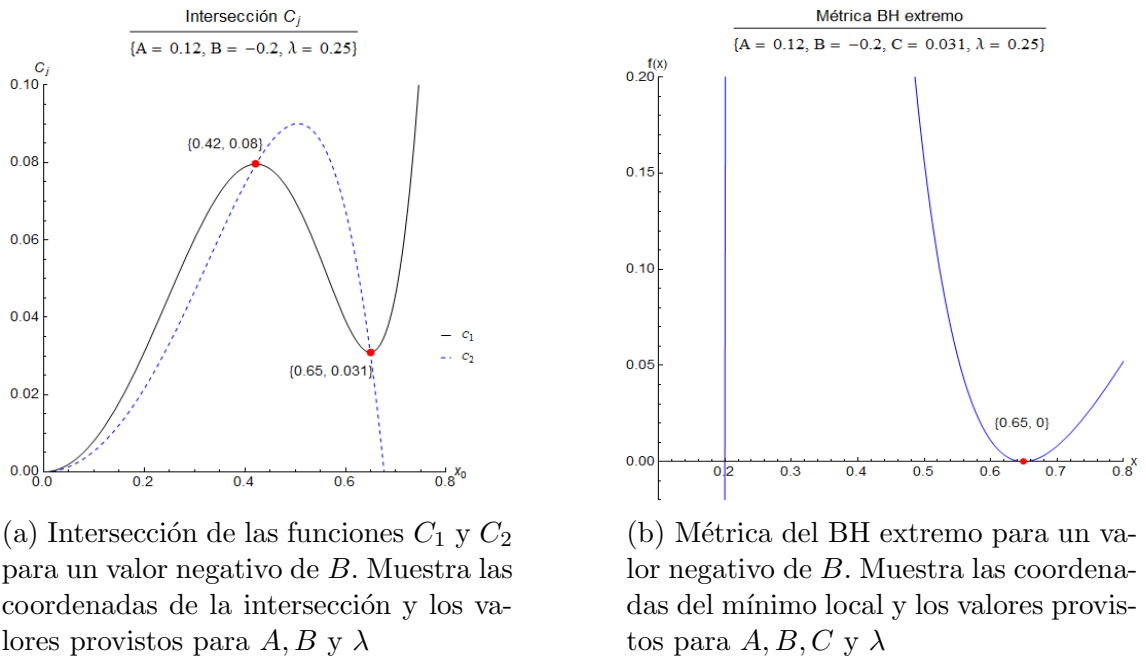


Figura 3.6: Métrica del BH y la intersección de las funciones C_1 y C_2 . Muestra que el conjunto $\{A = 0.12, B = -0.2, C = 0.031, x_0 = 0.65\}$ define un BH extremo-

puntos de la definición de BH extremo.

Tomemos ahora $B = 0$, la figura 3.7a predice dos valores posibles de C para la construcción del BH, nuevamente elegimos el valor asociado al horizonte de eventos de mayor tamaño para construir la gráfica mostrada en (3.7b), misma que pone de manifiesto que el horizonte $x_0 = 0.72$ es un mínimo local de la métrica. De modo que el conjunto $\{A = 0.12, B = 0, C = -0.35, x_0 = 0.72\}$ define un agujero negro extremo.

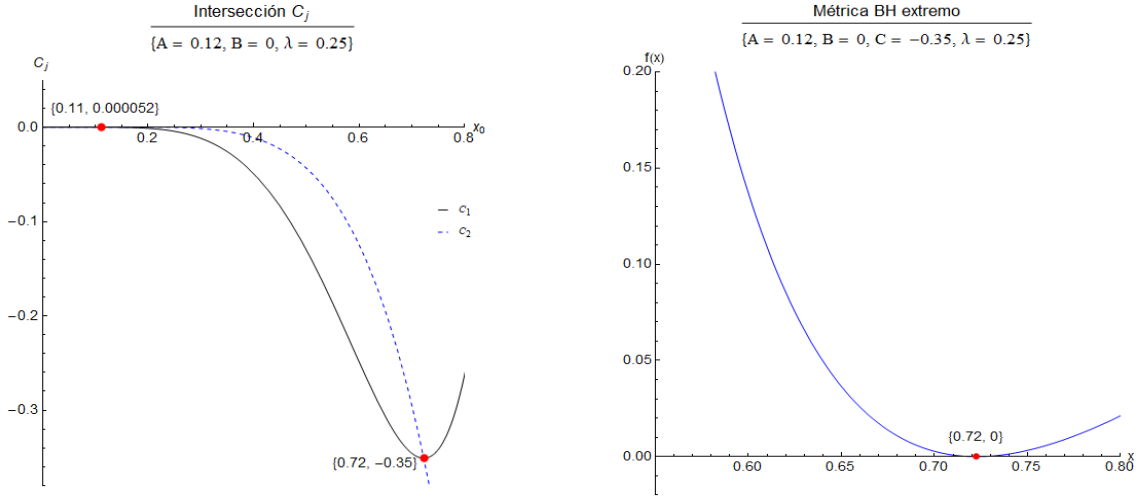
Finalmente, el caso para $0 < B = 0.05$ puede verse en la figura (3.8). Un análisis completamente análogo al realizado para las figuras (3.6) y (3.7) muestra que el conjunto $\{A = 0.12, B = 0.05, C = -0.46, x_0 = 0.73\}$ también define un BH extremo. Este análisis permite ver que siempre es posible halar un conjunto de parámetros A, B, C, x_0 que conduzca a un agujero negro extremo por lo que el conjunto de condiciones

$$f(x_0) = f'(x_0) = 0 \quad ; \quad f''(x_0) > 0 \quad (3.118)$$

puede suponerse cierto y esta condición se hereda en su análogo para la coordenada r .

Región cercana al horizonte de eventos

Consideremos ahora un BH extremo arbitrario definido por el horizonte de eventos r_0 . Nos interesa conocer el comportamiento que presenta en la región cercana al horizonte de eventos. Teniendo esto en mente, consideremos la expansión de la métrica



(a) Intersección de las funciones C_1 y C_2 para un valor nulo de B . Muestra las coordenadas de la intersección y los valores provistos para A, B y λ

(b) Métrica del BH extremo para un valor nulo de B . Muestra las coordenadas del mínimo local y los valores provistos para A, B, C y λ

Figura 3.7: Métrica del BH y la intersección de las funciones C_1 y C_2 . Muestra que el conjunto $\{A = 0.12, B = 0, C = -0.35, x_0 = 0.72\}$ define un BH extremo.

en serie de potencias hasta segundo orden alrededor del punto r_0 , estos es

$$f(r) \approx f(r_0) + f'(r_0)(r - r_0) + \frac{f''(r_0)}{2}(r - r_0)^2. \quad (3.119)$$

Luego, como el BH en cuestión es extremo, los primeros dos términos son nulos y podemos escribir

$$f(r) = \frac{a^2}{r_0^2}(r - r_0)^2 \quad (3.120)$$

donde a^2 es un número estrictamente positivo dado por

$$a^2 = r_0^2 \frac{f''(r_0)}{2} = x_0^2 \frac{f''(x_0)}{2} = -\frac{1}{x_0} + \frac{3A}{x_0^2} - \frac{10B\lambda}{x_0^4} - \frac{21C\lambda^2}{x_0^6}. \quad (3.121)$$

Es importante comentar en este punto que, para una métrica tipo RN, $B = C = 0$, las cantidades x_0 y A satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_0^2 - x_0 + A = 0 \quad ; \quad x_0 - 2A = 0 \quad (3.122)$$

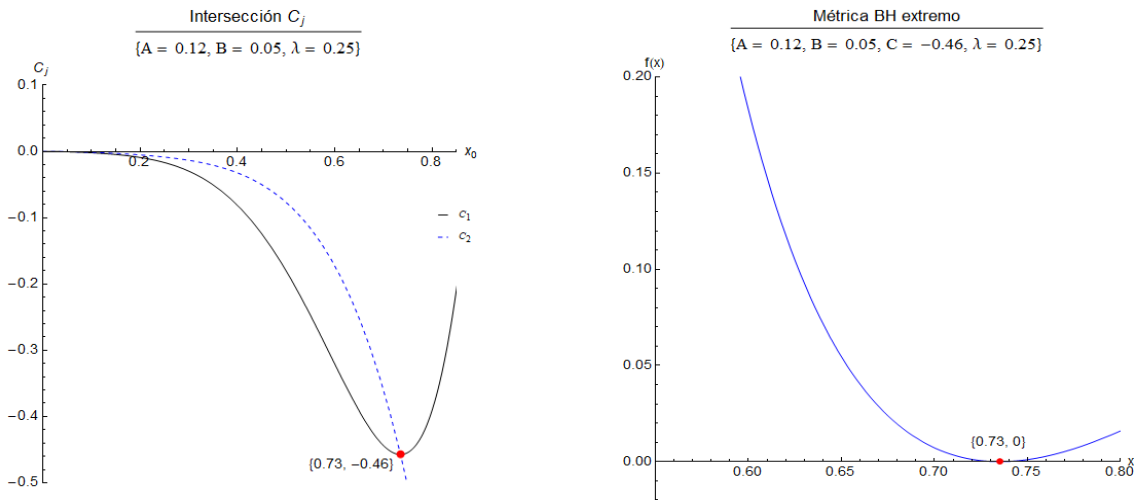
cuya solución no trivial es

$$A = \frac{1}{4} \quad ; \quad x_0 = \frac{1}{2}. \quad (3.123)$$

Desde luego, en términos de las variables originales, este resultado es equivalente al predicho por RN

$$r_0 = M = q_e^2 + q_e^2 + P. \quad (3.124)$$

Por otro lado, si se ocupan estos valores en la definición de a^2 se obtiene que $a^2 = 1$. De modo que este parámetro mide cuanto se desvía la métrica DEBI respecto a la



(a) Intersección de las funciones C_1 y C_2 para un valor positivo de B . Muestra las coordenadas de la intersección y los valores provistos para A, B y λ

(b) Métrica del BH extremo para un valor positivo de B . Muestra las coordenadas del mínimo local y los valores provistos para A, B, C y λ

Figura 3.8: Métrica del BH y la intersección de las funciones C_1 y C_2 . Muestra que el conjunto $\{A = 0.12, B = 0.05, C = -0.46, x_0 = 0.73\}$ define un BH extremo.

métrica RN por efecto de las no-linealidades contenidas en B y C .

A modo de ejemplo, puede calcularse el valor de a^2 para los tres casos discutidos anteriormente

- $B < 0$

$$\{A = 0.12, B = -0.2, C = 0.031, x_0 = 0.65; \lambda = 0.25\} \implies a^2 \approx 1.58 \quad (3.125)$$

- $B = 0$

$$\{A = 0.12, B = 0, C = -0.35, x_0 = 0.72; \lambda = 0.25\} \implies a^2 \approx 2.51 \quad (3.126)$$

- $B > 0$

$$\{A = 0.12, B = 0.05, C = -0.46, x_0 = 0.73; \lambda = 0.25\} \implies a^2 \approx 3.29 \quad (3.127)$$

Estos valores muestran que, dado un valor fijo de A , la métrica se desvía respecto a RN a medida que el parámetro B decrece o, equivalentemente, si C decrece.

Otra tendencia interesante que puede intuirse de estos datos es que el horizonte de eventos crece a medida que la métrica se desvía respecto al caso RN.

Por otro lado, dado que la función $f(r)$ de ma métrica es tipo RN, la energía asociada al BH extremo es

$$E = r_0. \quad (3.128)$$

Luego, en el espíritu de mimetizar el BH magnéticamente cargado desicutado en [20], perturbaremos el BH extremo para obligarlo a tener temperatura distinta de cero siguiendo un procedimiento análogo al ya discutido en el marco teórico de este trabajo.

Tomemos la función $f(r)$ y perturbémosla sumando una cantidad δ^2 , $f(r) \rightarrow f(r) + \delta^2$, entonces

$$f(r) = \frac{a^2 (r - r_0)^2}{r_0^2} - \delta^2. \quad (3.129)$$

Se sigue que entonces que puede reescribirse como

$$f(r) = \left(\frac{ar}{r_0}\right)^2 \left[1 - \frac{2r_0}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right] \quad (3.130)$$

donde

$$q = r_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{a^2}} \approx r_0 \left(1 - \frac{\delta^2}{2a^2}\right) \quad (3.131)$$

Se sigue entonces que, si $q = E_0$ la energía del BH de RN, entonces la energía del BH perturbado es

$$E = E_0 + r_0 \frac{\delta^2}{2a^2} \quad (3.132)$$

Por otro lado, sabemos que perturbar el BH de este modo equivale a perturbar la energía del modo siguiente

$$E \approx E_0 + E_{pert} = E_0 + \frac{r_0^3}{2l^2} \quad (3.133)$$

Comparando ambas ecuaciones obtenemos

$$\delta^2 = a^2 \frac{r_0^2}{l^2} \quad (3.134)$$

Al incertar este resultado en la métrica perturbada obtenemos

$$f(r) = \frac{a^2 r_0^2}{l^2} \left\{ \left[\frac{l(r - r_0)}{r_0^2} \right]^2 - 1 \right\}. \quad (3.135)$$

Tomemos ahora la reparametrización hecha en [20] y en el marco teórico para el BH magnéticamente cargado

$$\rho = \frac{l^2 (r - r_0)}{r_0^2} \quad ; \quad \tau = \frac{t}{l}. \quad (3.136)$$

Se sigue que la forma completa de la métrica se reescribe de la forma siguiente

$$ds^2 = r_0^2 \left[-a^2 (\rho^2 - 1) d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{a^2 (\rho^2 - 1)} + d\Omega \right] \quad (3.137)$$

Nótese que para el BH de RN (i.e. el caso lienal), se tiene $a = 1$ y en consecuencia, la métrica del BH DEBI colapsa en la métrica RN cercana al horizonte de eventos.

Además, puede verse que la parte temporal-radial de la métrica es conformalmente plana dado que puede escribirse como

$$ds^2 = r_0^2 \left\{ \frac{a^2 (\rho^2 - 1)}{l^2} [-dt^2 + dx^2] + d\Omega \right\} \quad (3.138)$$

donde

$$dx = \frac{l}{a^2 (\rho^2 - 1)} d\rho. \quad (3.139)$$

Es claro entonces que, igual que en el caso lineal, la geometría del BH extremo DEBI, cercana al horizonte de eventos tiene una estructura $AdS_2 \times S^2$.

Capítulo 4

Agujero de gusano DEBI

El propósito final de este trabajo de tesis consiste en contruir un agujero de gusano análogo al estudiado en [20] y [19], y previamente discutido en el marco teórico de este trabajo.

REcordemos que el algoritmo de construcción el WH es

1. Considere dos BHs con cargas opuestas y separados por una distancia d .
2. Considere que fermiones eléctricamente cargados y **no masivos** se encuentren todos uniformemente distribuidos alrededor del BH orbitando las líneas de campo en el **nivel de Landau más bajo**.
3. Proponga una métrica de WH compatible con la métrica del BH cercana el horizonte de eventos.
4. Separe el espacio-tiempo total en tres trozos:
 - a) Espacio-tiempo plano: Región entre ambos BHs.
 - b) Boca del WH: Cercanía al horizonte de eventos del BH original.
 - c) Garganta del WH.

Y *una* estas soluciones en las regiones de intersección de validez de las geometrías correspondientes.

5. Permita que los fermiones puedan viajar en órbitas cerradas entre ambas bocas del WH; primero entrando en una de las bocas, continuando a través de la garganta, saliendo por la segunda boca y luego retornando al punto de partida viajando por la región plana del espacio-tiempo.
6. **Estabilice** el WH minimizando la energía necesaria para enlazar ambas bocas del WH, considerando la energía tipo Casimir que resulta de imponer condiciones **antiperiódicas** de frontera en el tránsito de los fermiones cargados a lo largo de trayectorias cerradas.

Seguir este camino de construcción inevitablemente nos conduce a la ecuación para la energía de ligadura entre los BHs y el WH

$$E_{lig} = E_{bh} - E_{wh} - E_{ac} + E_{cas}. \quad (4.1)$$

Recordemos también que E_{bh} es la energía del agujero negro utilizado, E_{wh} la energía del agujero de gusano propuesto, E_{ac} corrección de energía por anomalía conforme y E_{cas} la energía de Casimir debida a los fermiones orbitando entre las bocas del WH. Las últimas dos cantidades en cuestión se escriben en términos de la longitud de la garganta del WH, L , de acuerdo con las siguientes expresiones¹

$$E_{ac} = \frac{N\pi}{24L} \quad ; \quad E_{cas} = -\frac{N\pi}{12} \int_0^2 \frac{d\nu}{h(\nu)d + L}. \quad (4.2)$$

Se sigue entonces que las cantidades que deben calcularse para hallar la energía de ligadura son E_{bh} , E_{wh} y L mismas que dependen del tipo de BH y WH que se desee utilizar. Si consideramos al BH DEBI cercano a la extremalidad como candidato para formar las bocas de l WH, tendremos que la energía de ligadura es Y la forma explícita de E_{lig} es

$$E_{lig} = E_0 + \frac{r_0^3}{2l^2} - E_{wh} + \frac{N\pi}{24L} - \frac{N\pi}{12} \int_0^2 \frac{d\nu}{h(\nu)d + L}. \quad (4.3)$$

Una vez hecha esta elección, solo resta proponer una métrica del WH compatible con la geometría $AdS_2 \times S^2$ descrita por la métrica del BH

$$ds^2 = r_0^2 \left\{ \frac{a^2(\rho^2 - 1)}{l^2} [-dt^2 + dx^2] + d\Omega \right\} \quad ; \quad dx = \frac{l}{a^2(\rho^2 - 1)} d\rho. \quad (4.4)$$

4.1. Métrica de WH

Dada la fuerte similitud que el BH DEBI guarda con el BH magnéticamente cargado, es razonable construir una métrica de WH de forma completamente análoga al construido en el marco teórico. Es decir, aplicar el cambio en la temperatura $T \rightarrow iT$ para el BH. Es sencillo ver que este cambio nos permite escribir la siguiente métrica de WH

$$ds^2 = r_0^2 \left\{ \frac{a^2(\rho^2 + 1)}{l^2} [-dt^2 + dx^2] + d\Omega \right\} \quad ; \quad dx = \frac{l}{a^2(\rho^2 + 1)} d\rho. \quad (4.5)$$

Nótese que la parte conformalmente plana es idéntica a la métrica del WH propuesto en [20] y [19], salvo por el factor a^2 .

Recordemos que en el caso RN, $a = 1$ y la métrica del WH DEBI coincide exactamente con el WH que conecta con la métrica RN, de modo que este resultado nos

¹Véase la sección del WH magnéticamente cargado para aclarar el significado dísico de $h(\nu)$ y N .

muestra que el parámetro a , también codifica cuanto se aleja el WH DEBI respecto al WH RN. Un hecho similar ocurre con la longitud de la garganta

$$L = \Delta x = \frac{1}{a^2} \int_{d_{\rho_c}}^{\rho_c} \frac{\rho}{\rho^2 + 1} = \frac{1}{a^2} L_{lin}, \quad (4.6)$$

Donde L_{lin} es, precisamente, la longitud de la garganta del WH del caso lineal, de modo que la longitud de la garganta del WH DEBI es

$$L = \frac{\pi l}{a^2} \quad (4.7)$$

Nótese que, si $a^2 \geq 1$, entonces, las longitudes de garganta cumplen la relación siguiente

$$\frac{L_{lin}}{L} = a^2 \geq 1 \implies L_{lin} \geq L \quad (4.8)$$

Es decir que, mientras mayor sea la desviación del BH Debi respecto al BH RN, más corta será la longitud de la garganta del WH.

En lo que respecta a la energía del WH, el cambio $T \rightarrow iT$ solo implica un cambio de signo en la energía de perturbación del BH², de modo que

$$E_{bh} = E_0 - \frac{r_0^2}{2l^2}. \quad (4.9)$$

Consecuentemente, la energía de ligadura de este WH es

$$E_{lig} = \frac{r_0^3}{l^2} + \frac{Na^2}{24l} - \frac{N\pi}{12} \int_0^2 \frac{d\nu}{h(\nu)d + \frac{\pi l}{a^2}}. \quad (4.10)$$

Nótese que, nuevamente, el único parámetro libre en E_{lig} es l , de modo que este debe ser determinado vía la estabilización del WH.

4.2. Estabilización

En atención al último paso del algoritmo de construcción del WH, estabilizamos el WH exigiendo que el parámetro l sea tal que la energía de ligadura sea un mínimo local. Esto equivale a exigir que se cumplan las siguientes dos condiciones

$$\frac{dE_{lig}}{dl} = -2\frac{r_0^3}{l^3} - \frac{Na^2}{24l^2} + \frac{N\pi^2}{12a^2} \int_0^2 \frac{d\nu}{[h(\nu)d + \frac{\pi l}{a^2}]^2} = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2E_{lig}}{dl^2} = 6\frac{r_0^3}{l^4} + \frac{Na^2}{12l^3} - \frac{N\pi^3}{6a^4} \int_0^2 \frac{d\nu}{[h(\nu)d + \frac{\pi l}{a^2}]^3} > 0. \quad (4.12)$$

De la primera condición de minimización es claro que para que E_{lig} sea un mínimo, l debe satisfacer la ecuación

$$2 \int_0^2 \frac{l^3 d\nu}{[l + a^2 h(\nu) \frac{d}{\pi}]^2} - l = \frac{48r_0^3}{Na^2}. \quad (4.13)$$

²Recuerde que por definición $l^{-1} = 2\pi T$

Es evidente que, igual que en laso lineal, la integral involucrada no puede resolverse en términos elementales y debe hacerse numéricamente utilizando la forma explícita de $h(\nu)$. Sin embargo, como se mencionó en el marco teórico, podemos estudiar dos casos límites que permiten acotar l entre sus valores máximo y mínimo.

Veamos primero que, si los BH se superponen, $d = 0$, se obtiene el valor mínimo de l , dado por

$$l \equiv l_0 = \frac{16r_0^3}{Na^2}. \quad (4.14)$$

Véase que, esta l_0 , guarda la misma ración de el caso lineal que la longitud de la garganta L . Es decir

$$\frac{l_0^{lin}}{l_0} = a^2 \quad ; \quad l_0^{lin} = \frac{16r_0^3}{N}. \quad (4.15)$$

Tomemos ahora la aproximación de haz de partículas, $h(\nu) = 1$. En este caso, l resuelve la siguiente ecuación de tercer grado

$$4l^3 - (l + 3l_0) \left(l + a^2 \frac{d}{\pi} \right)^2 = 0. \quad (4.16)$$

Consideremos ahora el siguiente concatenación de cambios de variable. Primero

$$\hat{d} = \frac{d}{\pi} \quad ; \quad \hat{l} = \frac{l}{a^2}, \quad (4.17)$$

entonces

$$4\hat{l}^3 - (\hat{l} + 3\hat{l}_0) (\hat{l} + \hat{d})^2 = 0. \quad (4.18)$$

Luego

$$l = \frac{\hat{l}}{\hat{l}_0}, \quad (4.19)$$

entonces la ecuación que resuelve \tilde{l} es

$$4\tilde{l}^3 - (\tilde{l} + \hat{d})^2 (\tilde{l} + 3) = 0. \quad (4.20)$$

Nótese que esta es **exactamente** la ecuación que resuelve el parámetro l escalado por l_0 en el caso lineal, de modo que el análisis gráfico realizado para l en el caso lineal es absolutamente análogo para nuestro caso. Además, hallar esta ecuación nos permite construir una relación entre los parámetros l de la teoría lineal y la teoría DEBI.

Sea la cantidad y el homólogo a l en la teoría lineal, entonces se satisfacen las siguientes relaciones

$$4\tilde{y}^3 - (\tilde{y} + \hat{d})^2 (\tilde{y} + 3) = 0 \quad ; \quad \tilde{y} = \frac{y}{y_0} \quad ; \quad y_0 = l_0^{lin} = 16 \frac{r_0^3}{N}. \quad (4.21)$$

Se sigue que, para un valor fijo de \hat{d} , las variables \tilde{l} y \tilde{y} toman exactamente el mismo valor, es decir

$$\tilde{y}(\hat{d}) = n = \tilde{l}(\hat{d}), \quad (4.22)$$

donde n resuelve una ecuación análoga a la que gobierna a y y l

$$4n^3 - (n + \hat{d})^2 (n + 3) = 0. \quad (4.23)$$

Este hecho nos permite escribir escribir la siguiente relación entre l y y

$$a^2 = \frac{y}{l}. \quad (4.24)$$

Además, podemos generalizar la forma de l al escribirla en términos de y_0 y n

$$l = \frac{ny_0}{a^2} \quad (4.25)$$

Escrito de este modo, puede asociarse un significado físico a cada variable

- $n \rightarrow$ codifica la dependencia con la distancia.
- $y_0 \rightarrow$ fija la estabilidad del WH vía la razón entre materia N y tamaño de la boca del WH r_0 .
- $a^2 \rightarrow$ codifica la no-linealidad del sistema.

Aunque el conjunto (a, n, y_0) es el conjunto natural de parámetros necesarios para describir el WH, puede resultar más útil tomar el valor de y_0 en términos de r_0 y N , pues estas son cantidades físicas que en principio pueden medirse, esto es

$$l = 16 \frac{nr_0^3}{a^2 N}. \quad (4.26)$$

Debe notarse que, escrito de este modo, l depende del conjunto de parámetros $\mathcal{N} = \{n, N, r_0, a^2\}$ que puede subdividirse en dos conjuntos uno que contiene los parámetros intrínsecos de la boca del WH y otro que contiene los parámetros extrínsecos a él, es decir aquellos que pueden manipularse por una gente externo.

$$Int = \{r_0, a^2\} \quad ; \quad Ext = \{N, n\}. \quad (4.27)$$

$$\mathcal{N} = Int \cup Ext \quad (4.28)$$

El conjunto Int define el tamaño de la boca, r_0 , así como el tipo de no-linealidad inherente al WH, a^2 . Por otro lado, el conjunto Ext contiene la información del número de partículas que se suministran al WH, N así como la distancia a que se para ambas bocas, n .

Otro punto importante que debe notarse es que, aunque el parámetro n se ha cosn-truido usando como modelo la aproximación de haz de partículas, puede hacerse exactamente el mismo análisis sin recurrir a esta aproximación y concluir que n satisface la ecuación

$$2 \int_0^2 \frac{n^3 d\nu}{[n + h(\nu)\hat{d}]^2} - (n + 3) = 0. \quad (4.29)$$

De este modo, toda la información referente a la variación del WH con la distancia queda codificada en n y la forma de l se preserva.

4.3. Caracterización

Una vez estabilizado el WH con el valor de l , es inmediato que la longitud de la garganta y la temperatura toman la siguiente forma

$$L = \frac{16\pi nr_0^3}{a^2 N} \quad ; \quad T = \frac{a^2 N}{32\pi nr_0^3} \quad (4.30)$$

Es importante tener estas cantidades en términos del conjunto \mathcal{N} , pues nos permite encontrar cantidades físicas de interés como la dilatación temporal y energía en términos de las cantidades intrínsecas y extrínsecas del WH y compararlas respecto al caso lineal. La tabla (4.1) condensa las expresiones para estas cantidades en cada una de las representaciones de interés.

Caracterización del HW				
Cantidad física	Garganta	Temperatura	Dilatación temporal	Energía del WH
Magnitud	L	T	$\frac{\Delta t}{\Delta \tau}$	E_{wh}
Dependencia en L	L	$\frac{1}{2L}$	$\frac{L}{\pi}$	$r_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_0 \pi}{L} \right)^2 \right]$
Dependencia en T	$\frac{1}{2T}$	T	$\frac{1}{2\pi T}$	$r_0 \left[1 - \frac{1}{2} (2\pi T r_0)^2 \right]$
Dependencia en \mathcal{N}	$\frac{16\pi nr_0^3}{a^2 N}$	$\frac{a^2 N}{32\pi nr_0^3}$	$\frac{16nr_0^3}{a^2 N}$	$r_0 \left[1 - \frac{a^4 N^2}{512n^2 r_0^4} \right]$
Relación DEBI-Lineal	$L_{debi} = \frac{1}{a^2} L_{lin}$	$T_{debi} = a^2 T_{lin}$	$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_{debi} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_{lin}$	$E_{pert}^{debi} = a^4 E_{pert}^{lin}$

Cuadro 4.1: Condensado de cantidades físicas de interés del WH DEBI. Las representaciones en T y L son invariantes y el caso lineal se recupera con $a = 1$

Se sigue del último renglón de la tabla (4.1) que el caso lineal se recupera directamente al tomar la condición $a = 1$, este resultado es esperado dado que a^2 mide la desviación de la teoría respecto al caso lineal. Por otro lado, puede verse también que la acción de la no-linealidad sobre el WH es relativamente simple; acorta o agranda las cantidades originales proporcionalmente a a^2 o a su inverso, según sea el caso. Otro resultado importante es la modificación que sufre el número máximo de materia que puede viajar a través del WH. Para estudiar esta cantidad, debemos recordar que cuando se construyó el BH, se pidió que este fuera extremo y luego se aplicó una perturbación a la energía, es decir.

$$E = E_0 + E_{pert}. \quad (4.31)$$

Luego, esta perturbación es válida siempre y cuando se cumpla la relación

$$E_{pert} \ll E_0 \implies \frac{a^4 N^2}{512n^2 r_0^4} \ll 1 \quad (4.32)$$

Esta relación se traduce en una cota superior para la cantidad de materia que puede enviarse a través del WH dada por la siguiente expresión

$$N_{max} = \frac{16\sqrt{2}}{a^2}nr_0^2 \approx \frac{22.61}{a^2}nr_0^2. \quad (4.33)$$

Véase que mientras mayor el tamaño de las bocas del WH o su separación, mayor es la cantidad de materia que admite. Por otro lado, si $a = 1$, entonces la cota superior de materia en el caso lineal es

$$N_{max} = 16\sqrt{2}nr_0^2 \approx \frac{22.61}{a^2}nr_0^2, \quad (4.34)$$

Consecuentemente, podemos escribir la relación entre cotas como

$$N_{max}^{debi} = \frac{N_{max}^{lin}}{a^2}. \quad (4.35)$$

La ecuación anterior muestra que si la no linealidad es mayor a uno, entonces se restringe la cantidad de materia que se puede enviar a través del WH, caso opuesto si es menor que uno. A modo de ejemplo pueden tomarse los valores para los BHs extremos estudiados en el capítulo anterior

- $B < 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A = 0.12 & B = -0.2 \\ C = 0.031 & x_0 = 0.65 \\ \lambda = 0.25 & a^2 \approx 1.5 \end{array} \right\} \implies N_{max} = \frac{50}{79}N_{max}^{lin} \approx 0.6N_{max}^{lin} \quad (4.36)$$

- $B = 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A = 0.12 & B = 0 \\ C = -0.35 & x_0 = 0.72 \\ \lambda = 0.25 & a^2 \approx 2.51 \end{array} \right\} \implies N_{max} = \frac{100}{251}N_{max}^{lin} \approx 0.4N_{max}^{lin} \quad (4.37)$$

- $B > 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A = 0.12 & B = 0.05 \\ C = -0.46 & x_0 = 0.73 \\ \lambda = 0.25 & a^2 \approx 3.29 \end{array} \right\} \implies N_{max} = \frac{100}{329}N_{max}^{lin} \approx 0.3N_{max}^{lin} \quad (4.38)$$

Finalmente, es importante señalar que la formulación que se ha hecho para el WH es aplicable a todo tipo de BH que contenga al menos un caso extremo, la teoría que se ocupe para describirlo determinará el valor de las cantidades a^2 y r_0 , que son las cantidades intrínsecas del WH.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo de tesis se realizaron dos desarrollos principales

1. Se construyó y desarrolló una teoría no-lineal para describir el acoplamiento de la materia y el campo electromagnético con la gravedad que permitiera la construcción de un agujero de gusano análogo al construido en [20] y [19].
2. Se construyó un agujero de gusano que admitiera desviaciones de la métrica de Reissner-Nordström vía una no-linealidad de la métrica original.

Los resultados más relevantes se comentan a continuación.

5.1. Teoría debi

Los objetivos alcanzados en lo tocante a la teoría DEBI son los siguientes

1. Construcción de la acción en forma perturbativa hasta orden λ^2
2. Calculo de las ecuaciones de movimiento.
 - Campo de materia
 - Campo electromagnético
 - Campo gravitacional
3. Se aplicaron las ecuaciones de movimiento al caso esféricamente simétrico para construir la métrica del Dyón DEBI.
4. Se probó que la métrica del Dyón DEBI cumple con las siguientes características
 - Contiene el Dyón de la teoría EBI/EHH y EN
 - Permite la existencia de BH extremos

5.2. Agujero de gusano

Respecto al a la métrica de agujero de gusano se alcanzaron los siguientes resultados

1. Se propone una métrica análoga al WH reportado en [20] y [19] con las siguientes características
 - Es compatible con una estructura $AdS_2 \times S^2$ del espacio-tiempo
 - Contiene el caso lineal reportado en [20] y [19]
 - Considera efectos no-lineales debidos a la teoría DEBI, mismos que se hallan totalmente contenidos en el parámetro a^2
2. Se condensan y comparan las implicaciones de la no-linealidad de la teoría DEBI en el WH, respecto al caso lineal.
3. Se calculan y aplican tres ejemplos de BH compatibles con el WH construido.

5.3. Conclusión general

Se concluye que acoplar una teoría tipo Dirac-Born-Infeld generaliza el lagrangiano de la teoría EDM al incluir linealidades de tipo electromagnética, fermiónica y electromagnético-fermiónica vía la existencia de nuevos invariantes en el lagrangiano, esto es

$$L(R, f, p_1) \rightarrow L(R, f, f_1, f_2, p_1, p_2). \quad (5.1)$$

Esta construcción permite hallar una métrica para el Dyón más general que la obtenida en la teoría EBI/EHH, dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (5.2)$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x^4}\lambda - \frac{C}{x^6}\lambda^2 \quad ; \quad r = 2Mx \quad (5.3)$$

La existencia de esta métrica permite una mayor riqueza de posibles BH, particularmente aquellos que son compatibles con la métrica de agujero de gusano

$$ds^2 = r_0^2 \left\{ \frac{a^2(\rho^2 + 1)}{l^2} [-dt^2 + dx^2] + d\Omega \right\} \quad ; \quad dx = \frac{l}{a^2(\rho^2 + 1)}d\rho. \quad (5.4)$$

Misma que colapsa en la solución reportada en [20] para el caso lineal cuando $a = 1$. Esto permite hacer una comparativa de las cantidades físicas más relevantes del WH reportadas en la tabla 4.1 e impone una modificación en la cota superior de la cantidad de materia que puede viajar a través del WH.

$$N_{max}^{debi} = \frac{N_{max}^{lin}}{a^2}. \quad (5.5)$$

Caracterización del HW				
Cantidad física	Garganta	Temperatura	Dilatación temporal	Energía del WH
Magnitud	L	T	$\frac{\Delta t}{\Delta \tau}$	E_{wh}
Dependencia en L	L	$\frac{1}{2L}$	$\frac{L}{\pi}$	$r_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_0 \pi}{L} \right)^2 \right]$
Dependencia en T	$\frac{1}{2T}$	T	$\frac{1}{2\pi T}$	$r_0 \left[1 - \frac{1}{2} (2\pi T r_0)^2 \right]$
Dependencia en \mathcal{N}	$\frac{16\pi n r_0^3}{a^2 N}$	$\frac{a^2 N}{32\pi n r_0^3}$	$\frac{16n r_0^3}{a^2 N}$	$r_0 \left[1 - \frac{a^4 N^2}{512 n^2 r_0^4} \right]$
Relación DEBI-Lineal	$L_{debi} = \frac{1}{a^2} L_{lin}$	$T_{debi} = a^2 T_{lin}$	$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_{debi} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_{lin}$	$E_{pert}^{debi} = a^4 E_{pert}^{lin}$

Capítulo 6

Bibliografía

- [1] Iftikhar Ahmad, Maqsoom Fatima, et al. Static solutions of Einstein's equations with spherical symmetry. *arXiv preprint arXiv:1308.1233*, 2013.
- [2] Eloy Ayon-Beato and Alberto Garcia. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5056–5059, 1998.
- [3] Katrin Becker, Melanie Becker, and John H Schwarz. *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge university press, 2006.
- [4] Jose Luis Blázquez-Salcedo, Christian Knoll, and Eugen Radu. Traversable wormholes in Einstein-Dirac-Maxwell theory. *Phys. Rev. Lett.*, 126(10):101102, 2021.
- [5] Max Born and Leopold Infeld. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 144(852):425–451, 1934.
- [6] N. Bretón. Lagrangiano efectivo en qed y lagrangiano de Born-Infeld. *Revista Mexicana de Física*, Noviembre 2016.
- [7] K. A. Bronnikov. Nonlinear electrodynamics, regular black holes and wormholes. *Int. J. Mod. Phys. D*, 27(06):1841005, 2018.
- [8] Martin Cederwall, Alexander von Gussich, Ar Miković, Bengt EW Nilsson, and Anders Westerberg. On the Dirac-Born-Infeld action for D-branes. *Physics Letters B*, 390(1-4):148–152, 1997.
- [9] V. De La Hoz-Coronell, A. E. Gonçalves, M. C. Baldiotti, and R. C. Batista. Repulsive Casimir force in stationary axisymmetric spacetimes. *Eur. Phys. J. C*, 82(1):50, 2022.
- [10] Chao-Jun Feng, Xin-Zhou Li, and Xiang-Hua Zhai. Casimir Effect under Quasi-Periodic Boundary Condition Inspired by Nanotubes. *Mod. Phys. Lett. A*, 29:1450004, 2014.
- [11] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*, Prentice Hall, 2005.

- [12] Werner Heisenberg and Heinrich Euler. Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons. *Zeitschrift für Physik*, 98(11-12):714–732, 1936.
- [13] Tsutomu Ishikawa, Katsumasa Nakayama, and Kei Suzuki. Lattice-fermionic Casimir effect and topological insulators. *Phys. Rev. Res.*, 3(2):023201, 2021.
- [14] Nada Khaled and Mohamed Elashri. Magnetically charged black hole. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1253, page 012008. IOP Publishing, 2019.
- [15] Hongsu Kim. Genuine dyons in Born-Infeld electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 61:085014, 2000.
- [16] R. A. Konoplya and A. Zhidenko. Traversable wormholes in General Relativity without exotic matter. *arXiv*, 6 2021.
- [17] Robert G Leigh. Dirac-Born-Infeld action from Dirichlet σ -model. *Modern Physics Letters A*, 4(28):2767–2772, 1989.
- [18] Daniela Magos and Nora Breton. Thermodynamics of the Euler-Heisenberg-AdS black hole. *Phys. Rev. D*, 102:084011, Oct 2020.
- [19] Juan Maldacena and Alexey Milekhin. Humanly traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, 103(6):066007, 2021.
- [20] Juan Maldacena, Alexey Milekhin, and Fedor Popov. Traversable wormholes in four dimensions. *arXiv preprint arXiv:1807.04726*, 2018.
- [21] Jerzy Plebanski. Lectures on non linear electrodynamics, Nordita. 1970.
- [22] Arkady A Tseytlin. Born-Infeld action, supersymmetry and string theory. *The many faces of the superworld*, pages 417–452, 2000.
- [23] Barton Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge university press, 2004.