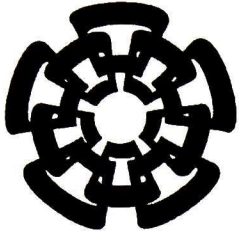


CT-834-SS1

DOO. 7015



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Regulador por Modos Deslizantes para Sistemas Mecánicos Subactuados

Tesis que presenta:

Jorge Enrique Ruiz Duarte

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
LIBROS**

Dr. Alexander Georgievich Loukianov

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

CLASIP..	OT00735
ADQUIS..	OT-834.SSI
FECHA:	29-05-2015
PROCED..	DDO. 2015
\$	

Regulador por Modos Deslizantes para Sistemas Mecánicos Subactuados

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Jorge Enrique Ruiz Duarte

Ingeniero en Electrónica con Especialidad en Mecatrónica
Instituto Tecnológico Superior de Cajeme 2007-2011

Becario de Conacyt, expediente no. 282119

Directores de Tesis

Dr. Alexander Georgievich Loukianov

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto de 2014.

Para mi hijo(a) que viene en camino.

RESUMEN

En el presente trabajo se aborda el problema de regulación por modos deslizantes para sistemas mecánicos subactuados. En los algoritmos aquí desarrollados, se emplean metodologías más sencillas que las disponibles en la literatura para resolver tres problemas: la solución de las ecuaciones de regulación, el diseño de un regulador por modos deslizantes con retroalimentación de estados y el diseño de un regulador por modos deslizantes con retroalimentación del error.

Para dar solución a las ecuaciones del regulador para sistemas mecánicos subactuados, se construye un sistema dinámico que describe dicha solución a partir de las mismas ecuaciones y se diseña un observador de estados para dicho sistema dinámico, con el propósito de lograr que éste tienda a la solución real.

En cuanto al regulador por modos deslizantes con retroalimentación de estados, se diseña una variedad deslizante dinámica mediante un término integral, el cual es utilizado para estabilizar la ecuación de modos deslizantes y no para eliminar perturbaciones como se utilizan los modos deslizantes integrales originales.

En el caso del regulador por modos deslizantes con retroalimentación del error, primero se diseña un observador de estados para estimar los errores de seguimiento a partir de la salida del sistema. Luego se diseña una variedad deslizante igual que la del caso anterior pero en término de los errores estimados en lugar de los medidos.

Los algoritmos desarrollados se aplican en simulación a tres sistemas mecánicos subactuados para probar su eficiencia.

ABSTRACT

In this work, the sliding mode regulation problem for underactuated mechanical systems is addressed. In the algorithms here developed, methodologies simpler than the available in literature are used in order to solve three problems: the solution of the regulator equations, the design of a state feedback sliding mode regulator and the design of an error feedback sliding mode regulator.

In order to find the solution of the regulator equations, a dynamic system which describes such solution is constructed based on the same equations and a state observer which achieves such system to tends to the real solution is designed.

Regarding the state feedback sliding mode regulator, a dynamic sliding manifold is designed by means of an integral term which is used to stabilize the sliding mode equation instead of use it to eliminate disturbances as the original integral sliding mode.

In the case of the error feedback sliding mode regulator, first, a state observer is designed to estimate the tracking errors based on the system output. Then it is designed a sliding manifold such as the previous case but in terms of the estimated errors instead of the measured ones.

The developed algorithms were applied in simulation to three underactuated mechanical systems in order to prove their efficiency.

AGRADECIMIENTOS

A mis asesores, los Drs. Alexander Loukianov y Eduardo Bayro por el apoyo y guía que me han brindado durante todo el camino para la realización de la tesis.

A mi amor Eymi Ramos por su compañía y apoyo incondicional.

A mis padres por que sin ellos nada de esto hubiera sido posible.

A mis compañeros por su amistad y apoyo durante este tiempo.

A CINVESTAV por el apoyo a mi formación y a la culminación de esta tesis.

A CONACYT por el apoyo económico brindado para mis estudios y creación de esta tesis.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Índice de Figuras	XI
Índice de Cuadros	XIII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	1
1.2. Antecedentes	2
1.2.1. Trabajos Previos en Control por Modos Deslizantes	2
1.2.2. Trabajos Previos en Regulación	3
1.2.3. Trabajos Previos en Regulación por Modos Deslizantes	3
1.3. Objetivos	3
1.4. Estructura del Documento	4
2. Preliminares Matemáticos	5

2.1. Control por Modos Deslizantes .	5
2.1.1. Procedimiento de Diseño	5
2.1.2. Método de Control Equivalente	6
2.1.3. Problema de “Chattering”	7
2.1.4. Algoritmo de “Supertwisting”	7
2.2. Regulación No Lineal	9
2.2.1. Caso de Información Completa	10
2.2.2. Caso de Retroalimentación del Error	12
2.3. Regulación por Modos Deslizantes	15
2.4. Modelo Dinámico de Sistemas Mecánicos Subactuados	16
3. Estimador de la Solución de las Ecuaciones del Regulador	19
3.1. Planteamiento del Problema	19
3.2. Diseño del Estimador	20
3.2.1. Consideraciones y Primeros Cálculos	20
3.2.2. Construcción del Sistema Dinámico	21
3.2.3. Diseño del Observador	25
3.3. Problema de Regulación en Ausencia de Exosistema	27
4. Regulación por Modos Deslizantes	29
4.1. Caso de Información Completa	29
4.1.1. Planteamiento del Problema	29
4.1.2. Superficie Deslizante	30
4.1.3. Estabilización de la Ecuación de Modos Deslizantes	32
4.2. Caso de Retroalimentación del Error	33
4.2.1. Planteamiento del Problema	33
4.2.2. Diseño del Observador	34
4.2.3. Diseño del Control	35
4.2.4. Sistema Observador-Controlador	36

ÍNDICE GENERAL

5. Aplicaciones	39
5.1. Sistema Pendubot	39
5.1.1. Estimador de la Solución de las Ecuaciones del Regulador	42
5.1.2. Regulador por Modos Deslizantes y Retroalimentación de Estados	45
5.1.3. Caso de Ausencia de Exosistema	50
5.1.4. Problema del Modelo del Motor	53
5.1.5. Regulador por Modos Deslizantes y Retroalimentación del Error	61
5.2. Sistema Pelota-Balancín	65
5.2.1. Estimador de la Solución de las Ecuaciones de Regulación	67
5.2.2. Regulador por Modos Deslizantes y Retroalimentación de Estados	69
5.3. Sistema Carro-Péndulo	72
5.3.1. Estimador de la Solución de las Ecuaciones del Regulador	73
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	75
6.1. Conclusiones	75
6.2. Trabajo Futuro	76

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Diagrama a Bloques de la Ley de Retroalimentación para Regulación	12
5.1. Diagrama esquemático del sistema Pendubot	39
5.2. Estimación de $\pi_1(\omega)$ y $\pi_3(\omega)$ para el sistema Pendubot.	44
5.3. Desempeño del ESER comparado con una aproximación polinomial.	45
5.4. Comparación de la salida (x_2) con su referencia ($\pi_2(\omega)$).	48
5.5. Comparación de estados con su respectiva referencia.	49
5.6. Ley de control (u).	49
5.7. Errores de seguimiento (ε).	50
5.8. Salida del Pendubot. Ausencia de exosistema.	51
5.9. Estados del Pendubot. Ausencia de exosistema.	51
5.10. Ley de control (u). Ausencia de Exosistema.	52
5.11. Errores de seguimiento (ε). Ausencia de Exosistema.	52
5.12. Salida del Pendubot. Medición de corriente.	55
5.13. Estados del Pendubot. Medición de corriente.	56
5.14. Corriente en el motor (x_5). Motor modelado con medición de corriente.	56
5.15. Ley de control (u). Motor modelado con medición de corriente.	57
5.16. Errores de seguimiento (ε). Motor modelado con medición de corriente.	57

5.17. Salida del Pendubot. Sin medición de corriente.	59
5.18. Estados del Pendubot. Sin medición de corriente.	59
5.19. Corriente en el motor (x_5). Motor no modelado sin medición de corriente.	60
5.20. Ley de control (u). Motor no modelado sin medición de corriente.	60
5.21. Errores de seguimiento (ε). Motor no modelado sin medición de corriente.	61
5.22. Salida del Pendubot. Retroalimentación del error.	63
5.23. Estados del Pendubot. Retroalimentación del error.	63
5.24. Ley de control (u). Retroalimentación del error.	64
5.25. Errores de seguimiento (ε). Retroalimentación del error.	64
5.26. Errores de estimación ($\tilde{\varepsilon}$). Retroalimentación del error.	65
5.27. Diagrama esquemático del sistema Pelota-Balancín	66
5.28. Estimación para $\pi_1(\omega)$ y $\pi_3(\omega)$ para el sistema Pelota-Balancín.	68
5.29. Salida del sistema Pelota-Balancín	69
5.30. Estados del sistema Pelota-Balancín	70
5.31. Ley de control (u).	71
5.32. Errores de seguimiento (ε) para el sistema Pelota-Balancín.	71
5.33. Diagrama esquemático del sistema Carro-Péndulo	72

ÍNDICE DE CUADROS

5.1. Variaciones paramétricas introducidas en el sistema Pendubot

47

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los sistemas mecánicos han tenido gran importancia en el desarrollo industrial y social de los últimos años. La amplia cantidad de aplicaciones con que cuenta esta clase de sistemas ha generado un gran interés en el estudio de técnicas de control capaces de generar un seguimiento de trayectorias por parte del sistema.

Básicamente los sistemas mecánicos que son de relevancia para este trabajo se componen de eslabones y actuadores. Un caso clásico y más complejo de sistema mecánico son los llamados sistemas mecánicos subactuados (UAMS por sus siglas en inglés - *underactuated mechanical systems*), los cuales cuentan con menor número de actuadores que de grados de libertad.

En el presente trabajo en particular se utilizará la regulación por modos deslizantes para lograr el seguimiento de trayectorias por parte de UAMS, debido a sus propiedades de robustez e invarianza.

1.1. Planteamiento del Problema

El modelo que describe las dinámicas de los sistemas mecánicos subactuados resulta ser en general inestable; además, dichos sistemas cuentan con dinámica interna, la cual es igualmente inestable. Debido a esto, se puede decir que el modelo de los UAMS es de fase no mínima.

Al intentar diseñar un controlador para un sistema de fase no mínima, surgen varios problemas con diferentes controladores conocidos como la linealización entrada-salida por

retroalimentación de estados [5], en dónde sólo es posible estabilizar la dinámica r dónde r es el grado relativo del sistema, mientras que la dinámica interna resulta inestable.

Cuando se requiere que un UAMS siga una referencia, es necesario encontrar un estado estable para la dinámica interna y diseñar un controlador que estabilice el sistema en dicho estado estable; este problema es conocido como Regulación a la Salida [6] (en adelante se llamará simplemente regulación). El principal problema en teoría de regulación es encontrar el estado estable para el estado del sistema; esto requiere resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales y un sistema de ecuaciones algebraicas. En general, no es posible encontrar una solución explícita para este sistema de ecuaciones.

Una estrategia de control que ha sido utilizada para tratar con el problema de regulación es el Control por Modos Deslizantes (CMD). La regulación por modos deslizantes aprovecha la propiedad del CMD de rechazar cierta clase de perturbaciones para introducir algo de robustez y también evita el cálculo del estado estado estable para la ley de control, ya que dicho estado estable es generado por el control equivalente.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Trabajos Previos en Control por Modos Deslizantes

El control por modos deslizantes ha sido ampliamente utilizado desde que su diseño paso de términos puramente matemáticos a términos más fácilmente comprendidos a nivel de ingeniería. Este cambio se debió a la introducción del concepto de control equivalente. El trabajo más importante en el ámbito de modos deslizantes se presenta en [15].

Las metodologías de diseño de control por modos deslizantes comenzaron con [9]; en dicho trabajo se va diseñando paso a paso el control para cierto bloque del sistema basado en un control virtual, proveniente del siguiente bloque. Finalmente se diseña una superficie deslizante en donde el último bloque del sistema alcanza en tiempo finito el valor del control virtual para el penúltimo bloque, el cual tiende asintóticamente al control virtual para el bloque anterior y así sucesivamente.

Como se verá más adelante el principal problema de los modos deslizantes clásicos es el llamado “chattering” Este problema consiste en pequeñas vibraciones en la planta debido a las altas frecuencias a las que es sometida por medio del control. En este trabajo será utilizado el algoritmo de “supertwisting” [3], el cual mantiene muchas de las propiedades deseadas de los modos deslizantes clásicos, pero genera una señal de control continua, con lo que se evitan los componentes de alta frecuencia y ayuda a reducir el efecto indeseado del “chattering”

1.2.2. Trabajos Previos en Regulación

La teoría clásica de regulación fue presentada en [6]. En dicho trabajo se muestran las condiciones bajo las cuales el problema de regulación tiene solución. Una de dichas condiciones es la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, el cual no es nada sencillo de resolver, y en caso general no es posible encontrar una solución explícita.

Para dar una solución aproximada a las ecuaciones diferenciales antes mencionadas, en [4] es introducida una aproximación polinomial de k –ésimo orden y es mostrado como mediante dicha aproximación polinomial se logra un seguimiento con error casi cero de la referencia. En [5], se muestra la regulación estructuralmente estable, la cual es robusta ante pequeñas variaciones paramétricas en la planta. En [10] se logra el seguimiento de una señal arbitraria no necesariamente producida por un exosistema para sistemas de fase no mínima. En [11] se trata el problema de regulación lineal con el exosistema en presencia de incertidumbre. Se considera que tanto la señal de referencia como las perturbaciones se componen de una sumatoria de señales senoidales de amplitud, fase y frecuencia desconocidas. Bajo ciertas condiciones, se propone un estimador de los parámetros de dichas señales. Se introduce dicho estimador en el diseño del regulador robusto clásico y como resultado se obtiene un controlador adaptable.

1.2.3. Trabajos Previos en Regulación por Modos Deslizantes

En [8], se estudia el problema de regulación por modos deslizantes. La solución propuesta para el caso lineal se basa en un conjunto de ecuaciones matriciales lineales de orden reducido. Para el caso de sistema no lineales, se diseña un regulador por modos deslizantes mediante una transformación del sistema a su forma regular. También en [12] se trata el problema de regulación mediante la transformación a forma regular, pero se incluye el control por bloques. En [2] se trata igualmente el problema de regulación por modos deslizantes pero solamente para sistemas con grado relativo uno. En [14] y [13], el sistema también es transformado a su forma regular y el control por modos deslizantes es diseñado mediante una superficie deslizante estática, como en los casos anteriores.

1.3. Objetivos

A continuación se presentan los objetivos generales del proyecto de tesis; todos ellos se aplican a Sistemas Mecánicos Subactuados.

- Resolver el problema de regulación no lineal mediante un estimador de la solución

de las ecuaciones del regulador construido a partir de un sistema dinámico.

- Diseñar un regulador por modos deslizantes mediante retroalimentación de estados, con una superficie deslizante dinámica y sencilla de diseñar.
- Diseñar un regulador por modos deslizantes mediante retroalimentación del error.
- Aplicar los tres puntos anteriores a algunos sistemas mecánicos subactuados para mostrar su eficiencia.

1.4. Estructura del Documento

La estructura de este documento se presenta a continuación. En el Capítulo 2 se introduce la teoría de control por modos deslizantes, se explica brevemente en que consiste el proceso de diseño y se muestra el algoritmo “supertwisting”, el cual será el utilizado en capítulos posteriores. En seguida se muestra la teoría básica de regulación no lineal tanto en el caso de retroalimentación de estados como retroalimentación del error. Por último se introducen las condiciones para afrontar el problema de regulación por modos deslizantes.

En el Capítulo 3 se muestran las condiciones y el desarrollo del diseño de un estimador para generar la solución de las ecuaciones del regulador para UMAS mediante un sistema dinámico y un observador de estados. Luego se muestra como dicho estimador es útil también en el caso cuando la referencia no es generada por un exosistema como en el caso clásico de regulación.

En el Capítulo 4 se considera que ya se cuenta con la solución de las ecuaciones del regulador y se procede a diseñar un controlador por modos deslizantes y retroalimentación de estados para llevar a cabo la regulación en UAMS. Se propone una variedad deslizante dinámica mediante un término integral el cual se usa en la ecuación de modos deslizantes como un control virtual para lograr la estabilización. En seguida se considera el problema en el que sólo la salida del sistema esta disponible para su medición y se diseña un regulador por modos deslizantes y retroalimentación del error, ésto mediante el diseño de un observador de estados y un controlador por modos deslizantes con la misma variedad que en el Capítulo 4 pero ahora en término de los errores estimados.

En el Capítulo 5 se aplican el estimador, el control por retroalimentación de estados y error a algunos UAMS específicos. Para probar su eficiencia, se muestran resultados en simulación.

Finalmente en el Capítulo 6 se discuten las conclusiones a las que se llega luego del desarrollo del trabajo, así como el trabajo futuro para mejorar los algoritmos diseñados.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.1. Control por Modos Deslizantes

Los modos deslizantes (MD) [15] son una herramienta efectiva para el control de *estructura variable* para sistemas no lineales. En los últimos años se han desarrollado diversos trabajos en donde el empleo de modos deslizantes juega un papel primordial. Debido a su baja sensibilidad ante perturbaciones externas y variaciones paramétricas el control por modos deslizantes (SMC *por sus siglas en inglés*) es muy utilizado para el control de sistemas dinámicos complejos y bajo condiciones de incertidumbres.

La idea básica de los modos deslizantes es forzar a los estados del sistema a “deslizarse” a través de una variedad en donde su respuesta depende únicamente del gradiente de la variedad deslizante y se mantiene insensible a perturbaciones que cumplen con la condición *matching*.

2.1.1. Procedimiento de Diseño

Considere por simplicidad un sistema dinámico no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

Un control por modos deslizantes se diseña en dos etapas

- Se determina una superficie deslizante $\sigma(x) = 0$, como un subespacio del espacio de estados del sistema, tal que el sistema presente propiedades deseadas en ella

(estabilidad, seguimiento de trayectorias, robustez, etc.).

- Se aplica un control discontinuo tal que se cumpla $\sigma(x) = 0$ en tiempo finito. El control es del tipo

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } \sigma(x) < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1.2. Método de Control Equivalente

Las propiedades de los sistemas controlados mediante modos deslizantes en lazo cerrado no pueden ser analizadas fácilmente debido a que el comportamiento de sistemas sobre límites de discontinuidades no puede ser estudiado en forma correcta por medios de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales. Para simplificar este problema se introduce la regularización del sistema, lo cual consiste en cambiar o reducir el sistema a uno que se comporte de manera bastante similar. El principal método de regularización es llamado control equivalente.

Considere un sistema no lineal afín del tipo

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (2.3)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathfrak{R}^m$ es un vector de entradas de control y $\text{rango}(B(x)) = m$.

Al calcular la derivada de la superficie deslizante e igualarla a cero es posible determinar un control que consiga que dicha superficie y su derivada se mantengan en cero; este control es llamada *control equivalente*. Para el caso del sistema (2.3) se tiene

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x)u_{eq} = 0 \quad (2.4)$$

y el control equivalente queda descrito por

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) \right] \quad (2.5)$$

el cual es considerado como un control clásico continuo y con él se analiza el sistema. Al sustituir (2.5) en (2.3) se obtienen las llamadas ecuaciones de modos deslizantes

$$\dot{x} = f(x) - B(x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) \right] \quad (2.6)$$

Con este nuevo sistema (2.6) se pueden analizar las propiedades deseadas para el sistema original (2.3) ya que, con el uso del control por modos deslizantes se logra $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ en tiempo finito T , y para un tiempo $t > T$, el sistema se comporta de manera similar a las ecuaciones de modos deslizantes. Entonces la parte del diseño de la superficie deslizante debe enfocarse a que el sistema (2.6) tenga las propiedades deseadas en ella.

2.1.3. Problema de “Chattering”

El término “chattering” se utiliza para describir oscilaciones de alta frecuencia que aparecen en los sistemas bajo una ley de control por modos deslizantes. Éstas se deben principalmente a las altas frecuencias de conmutación, las cuales excitan dinámicas no modeladas del sistema. Estas dinámicas no son consideradas generalmente en el modelo del sistema debido a que sus dinámicas son mucho más rápidas que las de dicho sistema. Otra de las causas del “chattering” es la imposibilidad de generar frecuencias infinitas en la implementación real de los controladores diseñados.

El problema de “chattering” genera poca precisión en el control, pérdida de energía por calentamiento en circuitos eléctricos, un desgaste en partes de los sistemas, principalmente partes móviles de sistemas mecánicos, entre otros fenómenos perjudiciales.

2.1.4. Algoritmo de “Supertwisting”

Para disminuir el problema de “chattering” se han creado los llamados Modos Deslizantes del Orden Alto, los cuales mantienen muchas de las propiedades deseadas en los modos deslizantes normales, pero son aplicados mediante señales continuas, evitando de esta forma las altas frecuencias que generan el problema antes mencionado. En este trabajo se utiliza el algoritmo conocido como “Supertwisting” [3], cuyos principios básicos se muestran a continuación:

Considere el sistema dinámico “SISO”

$$\dot{\sigma} = f(t, \sigma) + u. \tag{2.7}$$

La ley de control del algoritmo “Supertwisting” es

$$\begin{aligned} u &= -k_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) + v \\ v &= -k_2 \text{sign}(\sigma). \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$k_1 > 0 \text{ y } k_2 > 0.$$

El sistema en lazo cerrado (2.7)-(2.8) queda de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= f(t, \sigma) - k_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) + v \\ v &= -k_2 \text{sign}(\sigma).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned}V &= 2k_2|\sigma| + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}(k_1|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) - v)^2 \\ &= \xi^T P \xi\end{aligned}\tag{2.10}$$

donde $\xi^T = [|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) \quad v]$ y

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4k_2 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix}$$

Al tomar derivar (2.10) se obtiene

$$\dot{V} = -\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} \xi^T Q \xi + \frac{f(t, \sigma)}{|\sigma|^{1/2}} q_1^T \xi$$

donde

$$\begin{aligned}Q &= \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} 2k_2 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 1 \end{bmatrix}, \\ q_1^T &= \left[2k_2 + \frac{1}{2}k_1^2 \quad -\frac{1}{2}k_1 \right]\end{aligned}$$

Considerando que la función $f(\cdot)$ está acotada por

$$|f(t, \sigma)| \leq \delta_i |\sigma_i|^{1/2}, \quad \delta_i > 0\tag{2.11}$$

la derivada se puede reducir a

$$\dot{V} = -\frac{k_1}{2|\sigma|^{1/2}} \xi^T \tilde{Q} \xi$$

donde

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 2k_2 + k_1^2 - \left(\frac{4k_2}{k_1} + k_1\right)\delta & -k_1 + 2\delta \\ -k_1 + 2\delta & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces para que \dot{V} sea definida negativa es necesario que \tilde{Q} sea definida positiva lo que se consigue con

$$k_1 > 2\delta, \quad k_2 > k_1 \frac{5\delta k_1 + 4\delta^2}{2(k_1 - 2\delta)}.$$

2.2. Regulación No Lineal

Un problema clásico en teoría de control es el diseñar una ley de control que garantice un comportamiento deseado en un sistema, ya sea lograr que la salida del sistema siga asintóticamente un referencia dada o bien rechazar asintóticamente una perturbación no deseada $\omega(\cdot)$. En ambos casos la meta es lograr que el error de seguimiento, dado por la diferencia entre la salida del sistema y la referencia sea una función del tiempo

$$e(t) = y(t) - y_{ref}(t) \quad (2.12)$$

tienda a cero cuando el tiempo tiende a infinito, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (2.13)$$

Se considera que la familia de entradas exógenas $\omega(\cdot)$, generan las perturbaciones y la referencia a seguir y se define como la familia de todas las funciones del tiempo que son soluciones de de una ecuación diferencial homogénea

$$\dot{\omega} = s(\omega) \quad (2.14)$$

con ω definido en alguna vecindad W del origen de \mathfrak{R}^r . Este sistema se conoce como exosistema. Se asume que el punto $\omega = 0$ es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov. Para imponer que las perturbaciones y referencias sean persistentes y así no tiendan a cero cuando el tiempo tienda a infinito se asume también que el exosistema es estable en el sentido de Poisson. Por conveniencia se tomarán estas dos propiedades juntas como la propiedad de *estabilidad neutral*.

El exosistema (2.14) debe satisfacer la condición de estabilidad neutral, i.e.

$$S = \left. \frac{\partial s(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0}$$

tiene todos sus valores propios en el eje imaginario.

Se pueden considerar los problemas de seguimiento asintótico de una referencia y el rechazo de perturbaciones no deseadas antes mencionados en un solo problema y considerar los sistemas no lineales modelados por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \omega, u) \\ e &= h(x, \omega) \end{aligned} \quad (2.15)$$

La primera ecuación de (2.15) describe la dinámica de la planta con el estado definido en una vecindad U del origen en \mathfrak{R}^n , entrada de control $u \in \mathfrak{R}^m$ y las entradas exógenas $\omega \in \mathfrak{R}^r$. La segunda ecuación define una variable de error $e \in \mathfrak{R}^m$ expresada como función del estado x y las entradas exógenas ω . Se considera que $f(x, u, \omega)$, $h(x, \omega)$ y $s(\omega)$ son funciones suaves y cumplen con $f(0, 0, 0) = 0$, $h(0, 0) = 0$, $s(0) = 0$.

La ley de control debe ser una función dependiente tanto del estado de la planta como del exosistema

$$u = \alpha(x, \omega) \quad (2.16)$$

$\alpha(0, 0) = 0$, tal que el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \omega, \alpha(x, \omega)) \\ \dot{\omega} &= s(\omega) \end{aligned} \quad (2.17)$$

con punto de equilibrio en $(x, \omega) = (0, 0)$, cumpla con (2.13).

2.2.1. Caso de Información Completa

En este caso se considera que se tienen disponibles todos los estados, tanto de la planta a controlar como del exosistema.

Dado un sistema no lineal de la forma (2.15) y un exosistema neutralmente estable (2.14) se debe encontrar, de ser posible, un mapeo $\alpha(x, \omega)$ tal que:

S_{FI} el punto de equilibrio $x = 0$ de

$$\dot{x} = f(x, 0, \alpha(x, 0)) \quad (2.18)$$

sea asintóticamente estable en la primera aproximación.

R_{FI} existe una vecindad $V \subset U \times W$ de $(0, 0)$ tal que, para cada condición inicial $(x(0), \omega(0)) \in V$ la solución de (2.17) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), \omega(t)) = 0 \quad (2.19)$$

Lema 2.1. *Considere que, para algún $\alpha(x, \omega)$, se satisface la condición S_{FI} . Entonces, la condición R_{FI} también se satisface si y solo si existe un mapeo $x = \pi(\omega)$, con $\pi(0) = 0$,*

definido en una vecindad $W^\circ \subset W$ del origen, que satisface las condiciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= f(\pi(\omega), \omega, \alpha(\pi(\omega), \omega)) \\ 0 &= h(\pi(\omega), \omega)\end{aligned}\tag{2.20}$$

para todo $\omega \in W^\circ$

Prueba. Ver [6].

Dado que las propiedades de la aproximación lineal de la planta controlada juegan un papel determinante en la solución del problema de regulación, es conveniente introducir una notación apropiada en donde los parámetros de dicha aproximación queden descritos en forma explícita. Para este fin, el sistema en lazo cerrado (2.17) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x + (P + BL)\omega + \phi(x, \omega) \\ \dot{\omega} &= S\omega + \psi(\omega)\end{aligned}\tag{2.21}$$

donde $\phi(x, \omega)$ y $\psi(\omega)$ desvanecen al origen y se definen

$$\begin{aligned}A &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(0,0,0)} & B &= \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{(0,0,0)} & P &= \left[\frac{\partial f}{\partial \omega} \right]_{(0,0,0)} \\ K &= \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right]_{(0,0)} & S &= \left[\frac{\partial s}{\partial \omega} \right]_{(0)} & L &= \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \right]_{(0,0)}\end{aligned}$$

A partir del lema (2.1), se pueden obtener condiciones necesarias y suficientes para dar solución al problema de regulación en caso de información completa.

Teorema 2.1. *El problema de regulación en el caso de información completa tiene solución si y solo si el par (A, B) es estabilizable y existen mapeos $x = \pi(\omega)$ y $u = c(\omega)$, con $\pi(0) = 0$ y $c(0) = 0$, ambos definidos en una vecindad $W^\circ \subset W$ del origen, los cuales satisfacen las condiciones*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= f(\pi(\omega), \omega, c(\omega)) \\ 0 &= h(\pi(\omega), \omega)\end{aligned}\tag{2.22}$$

para todo $\omega \in W^\circ$.

Prueba. Ver [6].

Observación 2.1. *El mapeo $x_{ss} = \pi(\omega)$ representa la variedad de estado estable donde el error es cero y $u_{ss} = c(\omega)$ representa la entrada en estado estable que hace invariante la variedad de error cero.*

Las ecuaciones (2.22) son conocidas como las ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes o ecuaciones del regulador (como se nombrarán en adelante) y su solución constituye el principal y más complejo problema en teoría de regulación.

En regulación clásica, la ley de control que resuelve el problema de regulación es

$$u = \alpha(x, \omega) = c(\omega) + K(x - \pi(\omega))$$

donde K es tal que la matriz

$$[A + BK]$$

es Hurwitz para lograr que la variedad $\pi(\omega)$ sea localmente atractiva. Dicha ley de control se puede interpretar en un diagrama a bloques como en la Figura 2.1.

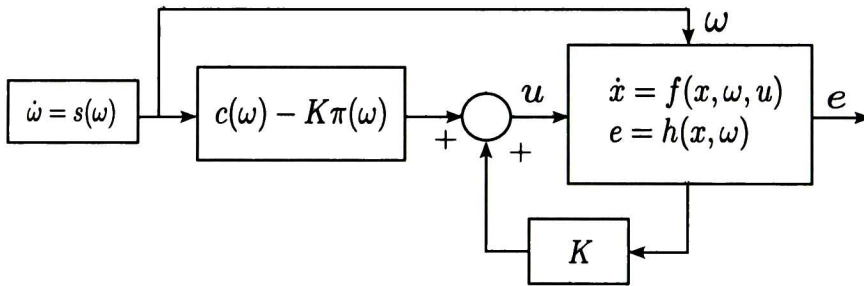


Figura 2.1. Diagrama a Bloques de la Ley de Retroalimentación para Regulación

2.2.2. Caso de Retroalimentación del Error

En la versión clásica de la regulación por retroalimentación del error propuesta por Isidori [6], se considera que solamente se tiene medible el error de seguimiento; esto es, la diferencia entre la salida del sistema y la referencia producida por el exosistema. En este caso, el controlador es un sistema dinámico no lineal, modelado por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, e) \\ u &= \theta(\xi) \end{aligned} \tag{2.23}$$

CAPÍTULO 2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

con estado interno ξ definido en una vecindad Ξ del origen en \mathfrak{R}^v . La interconexión de (2.15) y (2.23) produce un sistema en lazo cerrado caracterizado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \omega, \theta(\xi)) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, \omega)) \\ \dot{\omega} &= s(\omega)\end{aligned}\tag{2.24}$$

Dado un sistema no lineal de la forma (2.15) y un exosistema neutralmente estable (2.14) se debe encontrar de ser posible, un entero v y dos mapeos $\theta(\xi)$ y $\eta(\xi, e)$, tal que: S_{EF} el punto de equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, 0, \theta(\xi)) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, 0))\end{aligned}\tag{2.25}$$

es asintóticamente estable en la primera aproximación.

R_{EF} existe una vecindad $V \subset U \times \Xi \times W$ de $(0, 0, 0)$ tal que, para cada condición inicial $(x(0), \xi(0), \omega(0)) \in V$. la solución de (2.24) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), \omega(t)) = 0$$

Lema 2.2. *Considere que, para algún $\eta(\xi, e)$, $\theta(\xi)$ se satisface la condición S_{EF} . Entonces, la condición R_{EF} también se satisface sí y solo sí existen mapeos $x = \pi(\omega)$ y $\xi = \sigma(\omega)$, con $\pi(0) = 0$ y $\sigma(0) = 0$, definidos en una vecindad $W^o \subset W$ del origen, que satisfacen las condiciones*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial \omega} s(\omega) &= f(\pi(\omega), \omega, \theta(\sigma(\omega))) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \omega} s(\omega) &= \eta(\sigma(\omega), 0) \\ 0 &= h(\pi(\omega), \omega)\end{aligned}\tag{2.26}$$

para todo $\omega \in W^o$

Prueba. Ver [6].

Al igual que en (2.21), se introduce la notación de la aproximación lineal aplicada al caso del sistema en lazo cerrado (2.24), el cual se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BH\xi + P\omega + \phi(x, \xi, \omega) \\ \dot{\xi} &= F\xi + GCx + GQ\omega + \chi(x, \xi, \omega) \\ \dot{\omega} &= S\omega + \psi(\omega)\end{aligned}\tag{2.27}$$

donde $\phi(x, \xi, \omega)$, $\chi(x, \xi, \omega)$ y $\psi(\omega)$ desvanecen en el origen y se definen las nuevas matrices como

$$C = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]_{(0,0)} \quad Q = \left[\frac{\partial h}{\partial \omega} \right]_{(0,0)} \quad F = \left[\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right]_{(0,0)}$$

$$G = \left[\frac{\partial \eta}{\partial e} \right]_{(0,0)} \quad H = \left[\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]_{(0)}$$

Ahora, al igual que en el caso de información completa, Isidori [6] da condiciones necesarias y suficientes para que el problema de regulación en el caso de retroalimentación del error tenga solución en el siguiente teorema

Teorema 2.2. *El problema de regulación en caso de retroalimentación del error tiene solución sí y solo sí existen mapeos $x = \pi(\omega)$ y $u = c(\omega)$, con $\pi(0) = 0$ y $c(0) = 0$, ambos definidos en una vecindad $W^o \subset W$ del origen, los cuales satisfacen las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= f(\pi(\omega), \omega, c(\omega)) \\ 0 &= h(\pi(\omega), \omega) \end{aligned} \quad (2.28)$$

para todo $\omega \in W^o$, y tal que el sistema autónomo con salida $\{W^o, s, c\}$ está inmerso en un sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi(\xi) \\ u &= \gamma(\xi) \end{aligned}$$

definido en una vecindad Ξ^o del origen en \mathfrak{R}^v en donde $\varphi(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$, y las matrices

$$\Phi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} \quad \Gamma = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}$$

son tales que el par

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ NC & \Phi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

es estabilizable para alguna elección de la matriz N , y el par

$$\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B\Gamma \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}$$

es detectable.

Prueba. Ver [6]. En la parte de suficiencia de dicha prueba, se menciona que, para dar

solución al problema, basta con elegir matrices K, L, M tal que

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} A & B\Gamma \\ NC & \Phi \end{array} \right] \\ L \left[\begin{array}{cc} C & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B \\ 0 \end{array} \right] M \left[\begin{array}{c} \\ K \end{array} \right] \quad (2.29)$$

tenga todos los valores propios con parte real negativa, para lo cual se considera un controlador del tipo

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= K\xi_0 + Le \\ \dot{\xi}_1 &= \varphi(\xi_1) + Ne \\ u &= M\xi_0 + \gamma(\xi_1). \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.3. Regulación por Modos Deslizantes

Es posible definir el problema de regulación por modos deslizantes como el problema de encontrar una variedad deslizante

$$\sigma(x, \omega) = 0 \quad (2.31)$$

y un control por modos deslizantes que logre dicha variedad en tiempo finito de la forma (2.2), tal que se satisfagan las siguientes condiciones:

- El estado del sistema en lazo cerrado (2.17) con el controlador (2.2) converge a la variedad (2.31) en tiempo finito.
- El punto de equilibrio $x = 0$ de la dinámica de modos deslizantes (2.6) es asintóticamente estable.
- Existe una vecindad $V \subset X \times W$ de $(0, 0)$ tal que, para cada condición inicial $x_0, \omega_0 \in V$, el error de seguimiento (2.12) decaiga asintóticamente a cero, es decir, que se cumpla (2.13).

2.4. Modelo Dinámico de Sistemas Mecánicos Subactuados

La dinámica de los sistema mecánicos de varios eslabones se describe por medio de la ecuación de Euler-Lagrange

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) + F(\dot{q}) = \tau$$

donde $q \in D_0 \subset \mathfrak{R}^n$, $D(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{2n}$ es el vector de fuerzas de Coriolis y centrípetas, $G(q) \in \mathfrak{R}^{2n}$ contiene los términos gravitatorios, $F(\dot{q}) \in \mathfrak{R}^{2n}$ es el vector de términos de fricción viscosa, y $\tau \in \mathfrak{R}^m$ es el vector de torques de entrada.

Un sistema mecánico subactuado (UAMS) es aquel que tiene menos actuadores que eslabones o uniones. Sea n el número de eslabones del sistema y m el número de actuadores, un UAMS puede ser representado en dos clases de eslabones como

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad q_1 \in \mathfrak{R}^m, \quad q_2 \in \mathfrak{R}^{n-m}$$

donde q_1 y q_2 representan las uniones actuadas y no actuadas respectivamente. La ecuación de Euler-Lagrange para estos sistemas se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} D_{11}(q) & D_{12}(q) \\ D_{21}(q) & D_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(\dot{q}) \\ F_2(\dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Considere la inversa de la matriz $D(q)$ como

$$D^{-1}(q) = M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}$$

donde $M_{ij}(q)$ tiene la misma dimensión que $D_{ij}(q)$, $i, j = 1, 2$. Se despeja la segunda derivada de la posición de (2.32) obteniendo

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(\dot{q}) \\ F_2(\dot{q}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.33)$$

Para representar el sistema en espacio de estados, se definen las variables de estado

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Entonces el modelo dinámico que describe a los UAMS es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_3 \\ \dot{z}_2 &= z_4 \\ \dot{z}_3 &= f_3(z) + B_3(z)u \\ \dot{z}_4 &= f_4(z) + B_4(z)u \\ y &= h(z_1, z_2) = Cz \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde $u = \tau$, $C \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$, $f_3(z) = -M_{11}(z_1, z_2)f_{11}(z) - M_{12}(z_1, z_2)f_{22}(z)$, $f_4(z) = -M_{21}(z_1, z_2)f_{11}(z) - M_{22}(z_1, z_2)f_{22}(z)$, $B_3(z) = M_{11}(z_1, z_2)$, $B_4(z) = M_{21}(z_1, z_2)$, con $f_{11}(z) = C_1(z) + G_1(z_1, z_2) + F_1(z_3, z_4)$ y $f_{22}(z) = C_2(z) + G_2(z_1, z_2) + F_2(z_3, z_4)$.

En los siguientes Capítulos se consideran perturbaciones de tipo “matched”, por lo que se considera el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_3 \\ \dot{z}_2 &= z_4 \\ \dot{z}_3 &= f_3(z) + B_3(z)(u - \delta(z, \omega, t)) \\ \dot{z}_4 &= f_4(z) + B_4(z)(u - \delta(z, \omega, t)) \\ y &= h(z_1, z_2) = Cz \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde el término $\delta(z, \omega, t)$ contiene variaciones paramétricas y algunas perturbaciones externas.

2.4. MODELO DINÁMICO DE SISTEMAS MECÁNICOS SUBACTUADOS

CAPÍTULO 3

ESTIMADOR DE LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL REGULADOR

3.1. Planteamiento del Problema

Como ya se ha mencionado la parte más complicada en el problema de regulación no lineal consiste en la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales y un sistema de ecuaciones algebraicas conocidas como las ecuaciones del regulador (2.22).

Como ya se mencionó en el Capítulo 1, trabajos anteriores en el área de regulación han tratado de dar solución a este problema mediante aproximaciones polinomiales en el caso general, mientras que para casos específicos, se han propuesto métodos para estimar la solución a partir de transformaciones en el sistema.

En el presente capítulo se estudian las condiciones bajo las cuales es posible construir un estimador de la solución de estas ecuaciones para cierta clase de sistema mecánicos subactuados y se procede a su diseño.

Otro problema en teoría de regulación es cuando no se cuenta con un exosistema el cual genere la referencia a seguir; es decir, lograr el seguimiento de una señal aleatoria en el tiempo. Al final del presente Capítulo se presenta una generalización del estimador diseñado para resolver dicho problema.

3.2. Diseño del Estimador

Las ecuaciones del regulador (2.22) para el sistema (2.35) son

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \pi_1(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= \pi_3(\omega) \\
 \frac{\partial \pi_2(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= \pi_4(\omega) \\
 \frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= f_3(\pi(\omega)) + B_3(\pi(\omega))(c(\omega) - \delta(\pi(\omega), \omega, t)) \\
 \frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= f_4(\pi(\omega)) + B_4(\pi(\omega))(c(\omega) - \delta(\pi(\omega), \omega, t)) \\
 0 &= C\pi(\omega) - q(\omega)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \pi_1(\omega), \pi_3(\omega) &\in \mathfrak{R}^m \\
 \pi_2(\omega), \pi_4(\omega) &\in \mathfrak{R}^{n-m}
 \end{aligned}$$

$$\pi(\omega) = \begin{bmatrix} \pi_1(\omega) \\ \pi_2(\omega) \\ \pi_3(\omega) \\ \pi_4(\omega) \end{bmatrix}$$

Para construir un estimador de la solución de las ecuaciones del regulador (ESER) se debe encontrar un sistema dinámico que no incluya el término $c(\omega)$ (llámese sistema dinámico no forzado) y que describa el comportamiento de las soluciones $\pi(\omega)$ reales.

Para lograr que el sistema converja a dichas soluciones se debe diseñar un observador de estados y utilizar como salidas medidas, tantas soluciones como sea posible encontrar explícitamente mediante las ecuaciones algebraicas de salida y algunas de las ecuaciones diferencias parciales de (3.1).

3.2.1. Consideraciones y Primeros Cálculos

Considere que la matriz de salida del sistema (2.35) C es de la forma

$$C = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

CAPÍTULO 3. ESTIMADOR DE LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL REGULADOR

donde $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ es una matriz de renglones fila elementales, tal que cada salida es una posición angular de algún eslabón individual, esto es:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

Se tiene por lo tanto que las ecuaciones algebraicas para la salida quedan descritas como

$$H \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = q(\omega). \quad (3.3)$$

De (3.3), m elementos de los mapeos $\pi(\omega)$ se obtienen directamente. Al sustituir dichos elementos en las primeras dos ecuaciones de (3.1), se pueden calcular otros m elementos simplemente como su derivada

$$H \begin{bmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix} = \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} s(\omega). \quad (3.4)$$

Luego de realizados estos cálculos se tienen disponibles $2m$ elementos de los mapeos $\pi(\omega)$, los cuales pueden ser considerados -como ya se dijo- como salidas medidas. La salida virtual del sistema se puede representar como

$$y_\pi = C_\pi \pi(\omega) \quad (3.5)$$

donde

$$C_\pi = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$$

3.2.2. Construcción del Sistema Dinámico

Considere que la siguiente hipótesis se cumple

H1. $\text{rango}[B_3(z)] = \text{rango}[B_4(z)] = m, \forall z_1, z_2$ en una vecindad del origen correspondiente a la región de interés.

Si H1 se cumple, es posible despejar $c(\omega)$ de la tercera y cuarta ecuación de (3.1) como

$$c(\omega) = \delta(\pi(\omega), \omega, t) + B_3^{-1}(\pi(\omega)) \left[\frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) - f_3(\pi(\omega)) \right] \quad (3.6)$$

y

$$c(\omega) = \delta(\pi(\omega), \omega, t) + B_4^+(\pi(\omega)) \left[\frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) - f_4(\pi(\omega)) \right] \quad (3.7)$$

donde $B_4^+(\pi(\omega)) = [B_4^T(\pi(\omega))B_4(\pi(\omega))]^{-1}B_4^T(\pi(\omega))$ es la pseudoinversa de $B_4(\pi(\omega))$.

Al sustituir (3.7) y (3.6) en la tercera y cuarta ecuación de (3.1) respectivamente, resulta

$$\frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) = f_3(\pi(\omega)) + B_3(\pi(\omega))B_4^+(\pi(\omega)) \left[\frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) - f_4(\pi(\omega)) \right] \quad (3.8)$$

y

$$\frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) = f_4(\pi(\omega)) + B_4(\pi(\omega))B_3^{-1}(\pi(\omega)) \left[\frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) - f_3(\pi(\omega)) \right] \quad (3.9)$$

Debido a que ω depende a su vez del tiempo es posible considerar

$$\pi(\omega) = \pi(t), \quad \frac{\partial \pi_i(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) = \dot{\pi}_i(t), \quad i = 1, \dots, 4.$$

El sistema dinámico que describe los mapeos $\pi(\omega)$ puede ser descrito como

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1(t) &= \pi_3(t) \\ \dot{\pi}_2(t) &= \pi_4(t) \\ \dot{\pi}_3(t) - B_3(\pi(t))B_4^+(\pi(t))\dot{\pi}_4(t) &= f_3(\pi(t)) - B_3(\pi(t))B_4^+(\pi(t))f_4(\pi(t)) \\ -B_4(\pi(t))B_3^{-1}(\pi(t))\dot{\pi}_3(t) + \dot{\pi}_4(t) &= f_4(\pi(t)) - B_4(\pi(t))B_3^{-1}(\pi(t))f_3(\pi(t)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se observa claramente que el sistema (3.10) no puede ser representado en forma normal con respecto a $\dot{\pi}(t)$ debido a que la matriz

$$\begin{bmatrix} I_m & -B_3(\cdot)B_4^+(\cdot) \\ -B_4(\cdot)B_3^{-1}(\cdot) & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

es singular.

Observación 3.1. *Esta clase de sistemas (3.10) generalmente son conocidos como sistemas singulares y han sido estudiados en [1]. Considere la representación de un sistema lineal singular como*

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + D\mu(t) \\ y &= Cx + F\mu(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

CAPÍTULO 3. ESTIMADOR DE LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL REGULADOR

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t)$ es una entrada desconocida, A , B , C y D son matrices constantes de dimensiones apropiadas y $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz singular de rango ρ_E .

En [1] se propone encontrar matrices T y S tal que se cumpla

$$TES = \begin{bmatrix} I_{\rho_E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego se define el vector de variables de estado $z := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = S^{-1}x$, donde $z_1 \in \mathbb{R}^{\rho_E}$ y $z_2 \in \mathbb{R}^{n-\rho_E}$. En esas nuevas coordenadas, el sistema es descrito como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}TESz(t) &= TAsz(t) + TD\mu(t) \\ y &= CSz(t) + F\mu(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dicho sistema se describe de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= T_1AS_1z_1 + T_1AS_2z_2 + T_1D\mu(t) \\ 0 &= T_2AS_1z_1 + T_2AS_2z_2 + T_2D\mu(t) \\ y &= CS_1z_1 + CS_2z_2 + F\mu(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

En seguida se analiza la observabilidad del sistema de orden reducido, tomando el vector z_2 como parte de las entradas desconocidas:

$$v(t) = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$$

y el sistema resultante es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{A}z_1 + \bar{D}v(t) \\ \bar{y} &= \bar{C}z_1 + \bar{F}v(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde las matrices \bar{A} , \bar{D} , \bar{C} y \bar{F} se definen como sigue

$$\bar{A} = T_1AS_1, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} T_1AS_2 & T_1D \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} T_2AS_1 \\ CS_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} T_2AS_2 & T_2D \\ CS_2 & F \end{bmatrix}$$

Para el sistema que se tiene en este caso (3.10) se define

$$E(\pi(t)) = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & -B_3(\cdot)B_4^+(\cdot) \\ 0 & 0 & -B_4(\cdot)B_3^{-1}(\cdot) & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

y se representa en la forma

$$E(\pi(t))\dot{\pi}(t) = f_\pi(\pi(t)). \quad (3.15)$$

A continuación se encuentran las matrices $T(\pi(t))$ y $S(\pi(t))$ como

$$T(\pi(t)) = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & -I_m & -B_3(\cdot)B_4^+(\cdot) \end{bmatrix} \quad S(\pi(t)) = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & B_3(\cdot)B_4^+(\cdot) \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

Luego de realizar la transformación del sistema, se obtiene

$$T(z(t))E(z(t))S(z(t))\dot{z} = T(z(t))f_\pi(z(t)). \quad (3.16)$$

Entonces, el sistema (3.10) se transforma en

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 + B_3(z)B_4^+(z)z_4 \\ z_4 \\ f_3(z) - B_3(z)B_4^+(z)f_4(z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Se observa que la cuarta ecuación de (3.17) (correspondiente a la segunda ecuación de (3.13)), no permite realizar una conversión apropiada a las nuevas variables y eliminar la necesidad de conocer la dinámica de $z_4(t)$.

Debido a lo mencionado anteriormente, el método para trabajar con sistemas singulares presentado en [1] no es aplicable en el presente trabajo. En adelante se trabajará con la representación implícita del sistema (3.10), la cual es

$$\begin{aligned}
 \dot{\pi}_1(t) &= \pi_3(t) \\
 \dot{\pi}_2(t) &= \pi_4(t) \\
 \dot{\pi}_3(t) &= f_3(\pi(t)) + B_3(\pi(t))B_4^+(\pi(t)) [\dot{\pi}_4(t) - f_4(\pi(t))] \\
 \dot{\pi}_4(t) &= f_4(\pi(t)) + B_4(\pi(t))B_3^{-1}(\pi(t)) [\dot{\pi}_3(t) - f_3(\pi(t))].
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

o en forma general

$$\dot{\pi}(t) = f_\pi(\pi(t)) + B_\pi(\pi(t))\dot{\pi}(t). \tag{3.19}$$

3.2.3. Diseño del Observador

Para finalizar el diseño del estimador es necesario diseñar un observador de estados que logre que dicho estimador (3.19) converja a la solución real. En este trabajo se propone el diseño de un observador no lineal de estados mediante las salidas medidas, producto de los primeros cálculos realizados.

Para el diseño del observador, se linealiza el sistema en el punto de equilibrio de interés π_0 y se representa el sistema (3.19) junto con su salida (3.5) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \dot{\pi}(t) &= A_\pi \pi(t) + \phi_\pi(\pi(t)) + B_\pi(\pi(t))\dot{\pi}(t). \\
 y_\pi(t) &= C_\pi \pi(t)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

con

$$A_\pi = \left. \frac{\partial f_\pi(\pi(t))}{\partial \pi(t)} \right|_{\pi(0)=\pi_0}$$

Si el par (A_π, C_π) es detectable es posible calcular una matriz L_π tal que la matriz $[A_\pi - L_\pi C_\pi]$ tenga valores propios con parte real negativa. Considerando la dificultad para analizar la estabilidad del sistema (3.19) debido a la dependencia implícita de $\dot{\pi}(t)$ en el lado derecho de la ecuación, se propone aproximar dichas derivadas por medio de n filtros de primer orden con función de transferencia

$$G(s) = \frac{s}{\tau s + 1} \tag{3.21}$$

con τ una constante suficientemente pequeña.

El observador se diseña de la siguiente forma:

$$\dot{\hat{\pi}}(t) = f_\pi(\hat{\pi}(t)) + B_\pi(\hat{\pi}(t))y_f + v_\pi \tag{3.22}$$

donde

$$v_\pi = L_\pi(y_\pi - C_\pi \hat{\pi}) \quad (3.23)$$

$\hat{\pi}(t) \in \mathfrak{R}^{2n} = [\hat{\pi}_1(t) \ \hat{\pi}_2(t) \ \hat{\pi}_3(t) \ \hat{\pi}_4(t)]^T$ representa es la estimación de $\pi(t)$ y y_f es producto de representar los n filtros en espacio de estados de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^e(t) &= -\frac{1}{\tau} \pi^e(t) - \frac{1}{\tau^2} \hat{\pi}_{34}(t) \\ y_{f_1} &= \pi^e(t) + \frac{1}{\tau} \hat{\pi}_{34}(t) \\ y_f &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ y_{f_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

con $\pi^e(t) \in \mathfrak{R}^n$ y $\hat{\pi}_{34}(t) = [\hat{\pi}_3(t) \ \hat{\pi}_4(t)]^T$

Ya se ha mencionado la dificultad de analizar la estabilidad del sistema original (3.19), por lo que en este trabajo se propone analizar la estabilidad del estimador (3.22) directamente. Para ello se expande dicho sistema con los filtros y se representado como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\pi}}(t) &= f_\pi(\hat{\pi}(t)) + B_\pi(\hat{\pi}(t))y_f + v_\pi \\ \dot{\pi}^e(t) &= -\frac{1}{\tau} \pi^e(t) - \frac{1}{\tau^2} \hat{\pi}_{34}(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Utilizando (3.20) se analiza la estabilidad de (3.25) mediante su linealización:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\pi}}(t) \\ \dot{\pi}^e(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A_\pi - L_\pi C_\pi + B^*) & B^e \\ -\frac{1}{\tau^2} [0_n \ I_n] & -\frac{1}{\tau} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\pi}(t) \\ \pi^e(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_r(\hat{\pi}(t), \pi^e(t)) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_\pi C_\pi \pi(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde

$$B^* = \left. \frac{\partial B_\pi^e(\hat{\pi}(t), \pi^e(t))}{\partial \hat{\pi}(t)} \right|_{(\pi_0, 0)}, \quad B^e = \left. \frac{\partial B_\pi^e(\hat{\pi}(t), \pi^e(t))}{\partial \pi^e(t)} \right|_{(\pi_0, 0)}$$

y $B_r(\hat{\pi}(t), \pi^e(t))$ contiene términos de orden alto. El término $L C_\pi \pi(t)$ puede ser considerado como una perturbación no desvaneciente acotada en la región admisible, entonces, se puede concluir que, eligiendo la matriz L_π y la constante τ tal que la matriz

$$\begin{bmatrix} (A_\pi - L_\pi C_\pi + B^*) & B^e \\ -\frac{1}{\tau^2} [0_n \ I_n] & -\frac{1}{\tau} I_n \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

sea Hurwitz, la solución del estimador (3.22) es localmente últimamente acotada y dicha cota puede ser arbitrariamente pequeña con la elección adecuada de las ya mencionadas L_π y τ , dando una aproximación cercana a la solución real de las ecuaciones del regulador.

3.3. Problema de Regulación en Ausencia de Exosistema

En términos generales cualquier señal puede ser generada por un exosistema, ya que al aplicar la Transformada de Fourier puede ser representada en funciones de senos y cosenos. Sin embargo, dicho exosistema puede ser infinito por lo que se considerará una señal aleatoria en el tiempo como no generada por dicho exosistema y se representará como

$$y_{ref} = q(t). \quad (3.28)$$

También se considera el estado estable para los estados del sistema (2.35) como

$$z_{ss} = \pi(t). \quad (3.29)$$

Al definir los errores de seguimiento para los estados de (2.35) como

$$\varepsilon = z - \pi(t) \quad (3.30)$$

y el error de seguimiento en la salida como

$$e = y - q(t), \quad (3.31)$$

las dinámicas que describen el sistema de errores se representa como

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_3 + \pi_3(t) - \dot{\pi}_1(t) \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_4 + \pi_4(t) - \dot{\pi}_2(t) \\ \dot{\varepsilon}_3 &= f_3(\varepsilon + \pi(t)) + B_3(\varepsilon + \pi(t))(u - \delta(\varepsilon + \pi(t), t)) - \dot{\pi}_3(t) \\ \dot{\varepsilon}_4 &= f_4(\varepsilon + \pi(t)) + B_4(\varepsilon + \pi(t))(u - \delta(\varepsilon + \pi(t), t)) - \dot{\pi}_4(t) \\ e &= C[\varepsilon + \pi(t)] - q(t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Se define el estado estable para el control como $u_{ss} = c(t)$ y al evaluar los errores de seguimiento (3.30)-(3.31) en cero, las ecuaciones diferenciales que se deben cumplir para

lograr el seguimiento son:

$$\begin{aligned}
 \dot{\pi}_1(t) &= \pi_3(t) \\
 \dot{\pi}_2(t) &= \pi_4(t) \\
 \dot{\pi}_3(t) &= f_3(\pi(t)) + B_3(\pi(t))(c(t) - \delta(\pi(t), t)) \\
 \dot{\pi}_4(t) &= f_4(\pi(t)) + B_4(\pi(t))(c(t) - \delta(\pi(t), t)) \\
 0 &= C\pi(t) - q(t).
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

En seguida se consideran las ecuaciones para la salida y su derivada como

$$H \begin{bmatrix} \pi_1(t) \\ \pi_2(t) \end{bmatrix} = q(t) \tag{3.34}$$

y

$$H \begin{bmatrix} \pi_3(t) \\ \pi_4(t) \end{bmatrix} = \dot{q}(t). \tag{3.35}$$

Nuevamente el sistema dinámico que describe a los mapeos $\pi(t)$ es

$$\dot{\pi}(t) = f_\pi(\pi(t)) + B_\pi(\pi(t))\dot{\pi}.$$

y el estimador es igual a (3.22):

$$\dot{\hat{\pi}}(t) = f_\pi(\hat{\pi}(t)) + B_\pi(\hat{\pi}(t))y_f + v_\pi.$$

Por lo tanto, se puede llegar a la conclusión que el estimador diseñado en este Capítulo da solución al problema de regulación tanto en los casos donde la referencia es generada por un exosistema como en los casos en los que se desea seguir una señal aleatoria del tiempo. Únicamente es necesario tener disponible dicha señal de referencia para su medición y obtener su derivada.

CAPÍTULO 4

REGULACIÓN POR MODOS DESLIZANTES

4.1. Caso de Información Completa

En esta Sección se supone que las siguientes consideraciones se cumplen para el sistema (2.35):

- La solución de las ecuaciones del regulador ya ha sido calculada o aproximada.
- Tanto el estado del exosistema como el de la planta están disponibles para su medición.
- La linealización de la planta es estabilizable.
- Debido a que el estimador propuesto en el capítulo anterior (3.22) no depende del estado de la planta z , para simplificar el análisis de la estabilidad en lazo cerrado, se supone que luego de un pequeño tiempo de asentamiento, se tiene $\hat{\pi}(t) = \pi(\omega(t))$.

4.1.1. Planteamiento del Problema

Generalmente para aplicar regulación por modos deslizantes a sistemas de fase no mínima es necesario realizar una transformación del sistema de errores a su forma regular o en dado caso a su forma controlable por bloques como en [12]. Luego de realizada

alguna de estas transformaciones, se procede a diseñar una superficie deslizante en donde la dinámica de las ecuaciones de modos deslizantes sea localmente asintóticamente estable.

En este trabajo se plantea una nueva metodología de diseño, en donde el primer paso es proponer una superficie deslizante con un término lineal de los errores más un término integral de una nueva variable. Posteriormente se investigan las condiciones de estabilidad de las ecuaciones de modos deslizantes y se propone dicho término integral. Considere nuevamente que *H1* se cumple.

Considere el sistema (2.35), el error de seguimiento se define como

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = z - \pi(\omega) \quad (4.1)$$

y se representa por el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_3 + \pi_3(\omega) - \frac{\partial \pi_1(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_4 + \pi_4(\omega) - \frac{\partial \pi_2(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\ \dot{\varepsilon}_3 &= f_3(\varepsilon + \pi(\omega)) + B_3(\varepsilon + \pi(\omega))(u - \delta(\varepsilon + \pi(\omega), \omega, t)) - \frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\ \dot{\varepsilon}_4 &= f_4(\varepsilon + \pi(\omega)) + B_4(\varepsilon + \pi(\omega))(u - \delta(\varepsilon + \pi(\omega), \omega, t)) - \frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\ e &= C[\varepsilon + \pi(\omega)] - q(\omega) = C\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Una vez conocidas las referencias $\pi(\omega)$ el problema de regulación se ve reducido a la estabilización de este sistema.

4.1.2. Superficie Deslizante

Considere la superficie deslizante dada por

$$\sigma = s - s_d \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} s &= C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + C_4 \varepsilon_4 \\ \dot{s}_d &= u_p \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\sigma, s, s_d &\in \mathfrak{R}^m \\ C_1 &\in \mathfrak{R}^{m \times m} \\ C_2, C_4 &\in \mathfrak{R}^{m \times (n-m)}\end{aligned}$$

Al derivar (4.3) se tiene

$$\dot{\sigma} = f_{\sigma}(\varepsilon + \pi(\omega), \omega, u_p) + G_{\sigma}(\varepsilon + \pi(\omega))(u - \delta(\varepsilon + \pi(\omega), \omega, t)). \quad (4.4)$$

donde $f_{\sigma}(\cdot)$ es una función continua y diferenciable y $\text{rank}[G_{\sigma}(\cdot)] = m$

La ley de control se diseña por medio del algoritmo de “supertwisting” y está dado por

$$u = u_{eq} + G_{\sigma}^{-1}(\varepsilon + \pi(\omega))\nu \quad (4.5)$$

donde $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_m]^T$ y

$$\begin{aligned}\nu_j &= -k_j \sqrt{|\sigma_j|} \text{sign}(\sigma_j) + \rho_j \\ \dot{\rho}_j &= -k_{m+j} \text{sign}(\sigma_j), \quad j = 1, \dots, m.\end{aligned} \quad (4.6)$$

El término u_{eq} se calcula de (4.4) cuando $\sigma = 0$ y en ausencia de perturbaciones como

$$u_{eq} = -G_{\sigma}^{-1}(\varepsilon + \pi(\omega))f_{\sigma}(\varepsilon + \pi(\omega), \omega, u_p) \quad (4.7)$$

y permite que las constantes k sean más pequeñas y den algo de suavidad al control.

El término real para u_{eq} es

$$u_{eqr} = \delta(\varepsilon + \pi(\omega), \omega, t) - G_{\sigma}^{-1}(\varepsilon + \pi(\omega))f_{\sigma}(\varepsilon + \pi(\omega), \omega, u_p). \quad (4.8)$$

Suponiendo que la perturbación $\delta(\cdot)$ y su derivada son acotadas, existen constantes k_j tal que la ley de control (4.5)-(4.6) logra

$$\sigma = 0$$

en tiempo finito o

$$\varepsilon_3 = s_d - C_1\varepsilon_1 - C_2\varepsilon_2 - C_4\varepsilon_4. \quad (4.9)$$

4.1.3. Estabilización de la Ecuación de Modos Deslizantes

Considere un nuevo vector de estados de la forma

$$\varepsilon_T = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ s_d \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

y considere $\dot{s}_d = u_p$ como una pseudo entrada al nuevo sistema. Las dinámicas que describen dicho sistema son

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= s_d - C_1\varepsilon_1 - C_2\varepsilon_2 - C_4\varepsilon_4 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_4 \\ \dot{s}_d &= u_p \\ \dot{\varepsilon}_4 &= \bar{f}_4(\varepsilon_T, \pi(\omega), \omega) + \bar{B}_4(\varepsilon_T, \pi(\omega))u_p. \end{aligned} \tag{4.10}$$

El sistema (4.10) se puede representar en forma general como

$$\dot{\varepsilon}_T = f_T(\varepsilon_T, \pi(\omega), \omega) + G_T(\varepsilon_T, \pi(\omega))u_p. \tag{4.11}$$

Para estabilizar el sistema de errores transformados (4.11) se pueden aplicar varias estrategias de control; la más sencilla es un control lineal que logre estabilidad local. Para aplicar dicho control es necesario linealizar el sistema (4.11) en

$$\varepsilon_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

y representarlo como

$$\dot{\varepsilon}_T = A_T\varepsilon_T + B_Tu_p + \Psi(\varepsilon_T, \pi(\omega), \omega, u_p) \tag{4.12}$$

donde

$$A_T = \left. \frac{\partial f_T(\varepsilon_T, \pi(\omega), \omega)}{\partial \varepsilon_T} \right|_{[0, \pi_0, 0]} \quad B_T = G_T(0, \pi_0)$$

π_0 es el punto de equilibrio de interés y $\Psi(\varepsilon_T, \pi(\omega), \omega, u_p)$ contiene términos de orden alto. Las matrices constantes C_1 , C_2 y C_4 se proponen tal que el par (A_T, B_T) sea estabilizable.

Luego la pseudo entrada se propone como

$$u_p = -K\varepsilon_T$$

y la matriz K se calcula tal que la matriz $[A_T - B_T K]$ sea Hurwitz. Al sustituir dicha pseudo entrada en (4.12) se tiene

$$\dot{\varepsilon}_T = (A_T - B_T K)\varepsilon_T + \Psi(\varepsilon_T, \pi(\omega), \omega) \quad (4.13)$$

donde el término $\Psi(\varepsilon_T, \pi(\omega), \omega)$ desvanece a cero cuando $\varepsilon_T = 0$ de acuerdo a la teoría de regulación. Por lo tanto la solución del sistema (4.13) es localmente asintóticamente estable.

4.2. Caso de Retroalimentación del Error

4.2.1. Planteamiento del Problema

Como ya se ha visto en la introducción, uno de los principales retos de la teoría de regulación no lineal es lograr resolver el problema en el caso de contar solamente con la información de la salida del sistema. Isidori y Byrnes realizan en [6] un planteamiento teórico basado en que, para un sistema que cumple las condiciones del Teorema 2.2, un controlador del tipo (2.30) o cualquier otro que logre que la matriz (2.29) sea Hurwitz, resuelve el problema localmente.

En este trabajo se utiliza un enfoque algo diferente; se toman en cuenta las siguientes condiciones para el sistema (2.35):

- Se cuenta *a priori* con la solución de las ecuaciones del regulador (2.22), ya sea mediante cálculo exacto, aproximación de cualquier clase o mediante un estimador como el desarrollado en el capítulo anterior de este trabajo.
- Se cuenta solamente con la salida del sistema para su medición, mientras que todo el estado del exosistema está disponible.
- La linealización de la planta es estabilizable y detectable.
- La planta no tiene perturbaciones, esto es: $\delta(\cdot) = 0$.

El sistema exógeno que genera la ley de control en este trabajo es un observador de estados (en este caso, los errores de seguimiento).

4.2.2. Diseño del Observador

Considere nuevamente el sistema de errores (4.2) en ausencia de perturbaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_3 + \pi_3(\omega) - \frac{\partial \pi_1(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\
 \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_4 + \pi_4(\omega) - \frac{\partial \pi_2(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\
 \dot{\varepsilon}_3 &= f_3(\varepsilon + \pi(\omega)) + B_3(\varepsilon + \pi(\omega))u - \frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\
 \dot{\varepsilon}_4 &= f_4(\varepsilon + \pi(\omega)) + B_4(\varepsilon + \pi(\omega))u - \frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\
 e &= C[\varepsilon + \pi(\omega)] - q(\omega) = C\varepsilon
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

el cual se describirá en forma general como

$$\dot{\varepsilon} = f(\varepsilon + \pi(\omega), \omega) + B(\varepsilon + \pi(\omega))u. \tag{4.15}$$

Se diseña un observador para este sistema del tipo

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = f(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega), \omega) + B(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega))u + v \tag{4.16}$$

donde

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = L(e - C\hat{\varepsilon})$$

y $L \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ es una matriz de ganancia de observador. Dicho observador genera el estimado del estado de la planta.

Los errores de estimación se definen como

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \tilde{\varepsilon}_3 \\ \tilde{\varepsilon}_4 \end{bmatrix} = \varepsilon - \hat{\varepsilon}$$

y sus dinámicas quedan descritas por

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = f'(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \pi(\omega), \omega) + B'(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \pi(\omega))u - v \tag{4.17}$$

donde

$$\begin{aligned} f'(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \pi(\omega), \omega) &= f(\varepsilon + \pi(\omega), \omega) - f(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega), \omega) \\ B'(\varepsilon, \hat{\varepsilon}, \pi(\omega)) &= B(\varepsilon + \pi(\omega)) - B(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega)). \end{aligned}$$

4.2.3. Diseño del Control

Debido a que, para sistemas no lineales no aplica el principio de separación como en el caso de sistemas lineales, es necesario analizar el comportamiento del sistema de errores de seguimiento junto con el sistemas de errores de estimación de estados. En este trabajo se utiliza un método similar al de Isidori, en donde se analiza la linealización de ambos errores mediante una matriz del doble de magnitud de la planta y la condición de estabilidad se analiza mediante los valores propios de dicha matriz, es decir, si ésta es Hurwitz o no.

La ley de control para regulación se calcula en términos de los errores estimados (4.16). Se tiene entonces la superficie deslizante

$$\hat{\sigma} = \hat{s} - \hat{s}_d \quad (4.18)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{s} &= C_1 \hat{\varepsilon}_1 + C_2 \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3 + C_4 \hat{\varepsilon}_4 \\ \hat{s}_d &= u_p. \end{aligned}$$

La dinámica de la superficie deslizante queda descrita ahora por

$$\dot{\hat{\sigma}} = f_\sigma(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega), \omega, u_p) + G_\sigma(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega))u \quad (4.19)$$

y el término u_{eq} está dado por

$$u_{eq} = -G_\sigma^{-1}(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega))f_\sigma(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega), \omega, u_p). \quad (4.20)$$

Al igual que en la sección anterior, la ley de control queda dada como (4.5)

$$u = u_{eq} + G_\sigma^{-1}(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega))\nu \quad (4.21)$$

con ν definida como en (4.6).

Para obtener las ecuaciones de modos deslizantes, se sustituye el término u_{eq} (4.20) en el sistema de errores (4.14)

$$\dot{\varepsilon} = f(\varepsilon + \pi(\omega)) + B(\varepsilon + \pi(\omega))u_{eq}. \quad (4.22)$$

Se considera la equivalencia para $\hat{\varepsilon}$ como

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \tilde{\varepsilon} \quad (4.23)$$

y ahora la igualdad en modos deslizantes es

$$\varepsilon_3 = \tilde{\varepsilon}_3 + s_d - C_1(\varepsilon_1 - \tilde{\varepsilon}_1) - C_2(\varepsilon_2 - \tilde{\varepsilon}_2) - C_4(\varepsilon_4 - \tilde{\varepsilon}_4). \quad (4.24)$$

Nuevamente se cambia el sistema a las variables

$$\varepsilon_T = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ s_d \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

y, como el sistema (4.22) es afín con respecto a u_p , el sistema transformado se describe como

$$\dot{\varepsilon}_T = f^*(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega), \omega) + B^*(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega))u_p. \quad (4.25)$$

El término u_p será nuevamente una retroalimentación lineal de los estados estimados, i.e.

$$u_p = -K \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ s_d \\ \hat{\varepsilon}_4 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \tilde{\varepsilon}_1 \\ \varepsilon_2 - \tilde{\varepsilon}_2 \\ s_d \\ \varepsilon_4 - \tilde{\varepsilon}_4 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

donde $K \in \mathfrak{R}^{m \times 2n} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix}$

4.2.4. Sistema Observador-Controlador

Las dinámicas del sistema en lazo cerrado (4.17)-(4.25)-(4.26), se describen en término de las variables de estado $\begin{bmatrix} \varepsilon_T & \tilde{\varepsilon} \end{bmatrix}$ como

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_T &= f^*(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega), \omega) - B^*(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega))K\varepsilon_T + B^*(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega))K_o\tilde{\varepsilon} \\ \dot{\tilde{\varepsilon}} &= f_e(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega), \omega) + B_e(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega))u_{eq} - v \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde $K_o \in \mathfrak{R}^{m \times 2n} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & 0 & K_4 \end{bmatrix}$.

Para llevar a cabo el análisis de la estabilidad del sistema completo (4.27), éste se

linealiza en el origen y se representa como

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_T \\ \dot{\tilde{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{Tc} - B_{Tc}K & A_{To} + B_{Tc}K_o \\ 0 & A_o - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_T \\ \tilde{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega), \omega) \\ \phi_2(\varepsilon_T, \tilde{\varepsilon}, \pi(\omega), \omega) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

donde

$$A_{Tc} = \left. \frac{\partial f^*(\cdot)}{\partial \varepsilon_T} \right|_{[0,0,\pi_0,0]}, \quad B_{Tc} = B^*(0,0,\pi_0), \quad A_o = \left. \frac{\partial f_\varepsilon(\cdot)}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right|_{[0,0,\pi_0,0]}, \quad A_{To} = \left. \frac{\partial f^*(\cdot)}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right|_{[0,0,\pi_0,0]}$$

Entonces para lograr estabilidad local se necesita

- Elegir las matrices C_1 , C_2 y C_4 tal que el par (A_{Tc}, B_{Tc}) sea estabilizable y el par (A_o, C) sea detectable.
- Calcular una matriz K tal que la matriz $[A_{Tc} - B_{Tc}K]$ sea Hurwitz.
- Calcular una matriz L tal que la matriz $[A_o - LC]$ sea Hurwitz, con valores propios entre 10 y 20 veces mayores a los de $[A_{Tc} - B_{Tc}K]$.

Observación 4.1. Solución de Ecuación Diferencial para Retroalimentación del Error

Como ya se mencionó en la Sección 2.2.2, en el caso de la regulación por retroalimentación del error, es necesario cumplir con la segunda ecuación diferencial parcial de (2.26):

$$\frac{\partial \sigma(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) = \eta(\sigma(\omega), 0). \quad (4.29)$$

En este trabajo se ha utilizado un observador de estado para generar la ley de control, pero el exosistema (2.14) se supone disponible para medición, por lo que se tiene:

$$\xi = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

el cual es el estado del sistema exógeno (2.23), que en este caso tiene dinámicas

$$\dot{\xi} = \eta(\xi, e) = \begin{bmatrix} f(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega), \omega) + B(\hat{\varepsilon} + \pi(\omega))u + L(e - C\hat{\varepsilon}) \\ s(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

El término $\hat{\varepsilon}$ es la estimación del error de seguimiento, por lo que su estado estable

resulta ser cero. Claramente el estado estable para ω es él mismo, entonces se tiene

$$\xi_{ss} = \sigma(\omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Es claro que la ecuación (4.29) es directamente satisfecha como

$$\frac{\partial \sigma(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ s(\omega) \end{bmatrix} = \eta(\sigma(\omega), 0) \quad (4.33)$$

mientras el término $c(\omega)$, o $\theta(\sigma(\omega))$ es generado por el estado estable de u_{eq} , esto es:

$$\theta(\sigma(\omega)) = c(\omega) = u_{eqss} = -G_{\sigma}^{-1}(\pi(\omega)) f_{\sigma}(\pi(\omega), \omega, 0). \quad (4.34)$$

En el siguiente capítulo se muestran aplicaciones de los controladores diseñados en este capítulo, así como simulaciones que muestran su correcto funcionamiento.

CAPÍTULO 5

APLICACIONES

En este Capítulo se aplican tanto el Estimador para la Solución de las Ecuaciones del Regulador (ESER) como el regulador por modos deslizantes desarrollados previamente en este trabajo a tres Sistemas Mecánicos Subactuados (UAMS), el sistema Pendubot, el sistema Pelota-Balancín y el sistema Carro-Péndulo. Luego de analizar su aplicabilidad, se realizan simulaciones para probar su correcto funcionamiento.

5.1. Sistema Pendubot

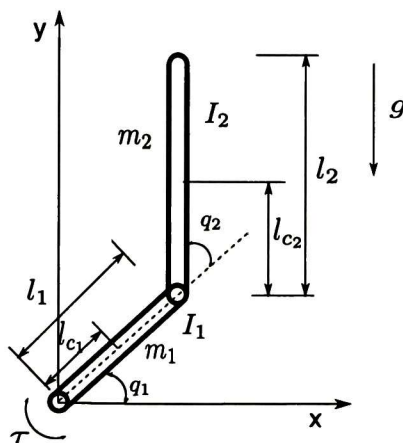


Figura 5.1. Diagrama esquemático del sistema Pendubot

El Pendubot (Figura 5.1) es un ejemplo típico de sistema mecánico subactuado. Dicha planta puede ser modelado por las ecuaciones de Euler-Lagrange para UAMS (2.32) con $n = 2$, $m = 1$ y las funciones

$$\begin{aligned}
 D_{11}(q_2) &= m_1 l_{c_1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c_2}^2 + 2l_1 l_{c_2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2, \\
 D_{12}(q_2) &= m_2(l_{c_2}^2 + l_1 l_{c_2} \cos(q_2)) + I_2, \\
 D_{21}(q_2) &= D_{12}(q_2), \\
 D_{22} &= m_2 l_{c_2}^2 + I_2, \\
 C_1(q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) &= -2m_2 l_1 l_{c_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) - m_2 l_1 l_{c_2} \dot{q}_2^2 \sin(q_2), \\
 C_2(q_2, \dot{q}_1) &= m_2 l_1 l_{c_2} \dot{q}_1^2 \sin(q_2), \\
 G_1(q_1, q_2) &= m_1 g l_{c_1} \cos(q_1) + m_2 g(l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)), \\
 G_2(q_1, q_2) &= m_2 g l_{c_2} \cos(q_1 + q_2), \\
 F_1(\dot{q}_1) &= \mu_1 \dot{q}_1, \\
 F_2(\dot{q}_2) &= \mu_2 \dot{q}_2.
 \end{aligned}$$

Las constantes l_1 y l_2 representan la longitud del primer y segundo eslabón respectivamente, l_{c_1} y l_{c_2} son las distancias al centro de masa de cada eslabón, m_1 y m_2 son las masas de los eslabones, I_1 e I_2 son los momentos de inercia de cada eslabón, μ_1 y μ_2 son los coeficientes de fricción y g es la constante de gravedad. Los valores numéricos de dichas constantes son $l_1 = 0.203 \text{ m}$, $l_{c_1} = 0.155 \text{ m}$, $l_2 = 0.384 \text{ m}$, $l_{c_2} = 0.164 \text{ m}$, $m_1 = 0.829 \text{ kg}$, $m_2 = 0.34 \text{ kg}$, $I_1 = 0.0055 \text{ kg} - \text{m}^2$, $I_2 = 0.0041 \text{ kg} - \text{m}^2$, $\mu_1 = 0.00545 \text{ Ns/rad}$, $\mu_2 = 0.00047 \text{ Ns/rad}$ y $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Se definen las variables de estado

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

y el modelo en espacio de estados se representa de manera similar a (2.35) como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_1(x) \\ b_2(x) \end{bmatrix} u \quad (5.1)$$

$$y = x_2 \quad (5.2)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{D_{22}f_{11}(x) - D_{12}(x_2)f_{22}(x)}{D_{12}^2(x_2) - D_{11}(x_2)D_{22}} \\ f_2(x) &= \frac{D_{11}(x_2)f_{22}(x) - D_{12}(x_2)f_{11}(x)}{D_{12}^2(x_2) - D_{11}(x_2)D_{22}} \\ f_{11}(x) &= C_1(x_2, x_3, x_4) + F_1(x_3) + G_1(x_1, x_2) \\ f_{22}(x) &= C_2(x_2, x_3) + F_2(x_4) + G_2(x_1, x_2) \\ b_1(x) &= \frac{D_{22}}{D_{12}^2(x_2) - D_{11}(x_2)D_{22}} \\ b_2(x) &= \frac{D_{12}(x_2)}{D_{12}^2(x_2) - D_{11}(x_2)D_{22}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, para mostrar la eficiencia, tanto del control por modos deslizantes como de la teoría de regulación en cuanto al rechazo de perturbaciones, se introducen perturbaciones desconocidas “matched” que pueden contener tanto variaciones en parámetros de la planta como perturbaciones externas, dichas perturbaciones deben ser rechazadas por los modos deslizantes, también se introducen perturbaciones conocidas “unmatched” generadas por un exosistema, las cuales deben ser incluidas en las ecuaciones de regulación para poder ser rechazadas. El modelo perturbado queda de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_1(x) \\ b_2(x) \end{bmatrix} (u - \delta(x, t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$y = x_2. \quad (5.4)$$

5.1.1. Estimador de la Solución de las Ecuaciones del Regulador

La referencia considerada para la salida del sistema es una se'nal senoidal de frecuencia α y amplitud ω_{02} . Además, las perturbaciones ω_3 y ω_4 son en este caso también señales senoidales y cosenoidales respectivamente de frecuencia β y amplitud ω_{04} . Entonces, el exosistema que genera la referencia a seguir por la salida del sistema y las perturbaciones es

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_4 \end{bmatrix} = s(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{02} \\ 0 \\ \omega_{04} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$q(\omega) = \omega_1, \quad \omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T \quad (5.6)$$

Se eligen en este caso $\omega_{02} = 1.396$, $\omega_{04} = 0.2$, $\alpha = 0.2$ y $\beta = 0.6283$. Para la perturbación "matched" se utiliza $\delta(x, t) = -0.3\cos(2.5x_2) - 0.3$.

Las ecuaciones del regulador para este sistema son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= \pi_3(\omega) \\ \frac{\partial \pi_2(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= \pi_4(\omega) \\ \frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= f_1(\pi(\omega)) - b_1(\pi(\omega))(c(\omega) - \delta(\pi(\omega), t)) + \omega_3 \\ \frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) &= f_2(\pi(\omega)) + b_2(\pi(\omega))(c(\omega) - \delta(\pi(\omega), t)) + \omega_4. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en la Sección 3, se obtiene la referencia para la salida y su derivada

$$\pi_2(\omega) = \omega_1 \quad (5.8)$$

$$\pi_4(\omega) = \alpha\omega_2. \quad (5.9)$$

El ESER es diseñado de la misma forma que en (3.22), pero tomando en cuenta las perturbaciones "unmatched" con lo que resulta

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\pi}}_1(t) &= \hat{\pi}_3(t) + v_1 \\ \dot{\hat{\pi}}_2(t) &= \hat{\pi}_4(t) + v_2 \\ \dot{\hat{\pi}}_3(t) &= -\frac{1}{D_{12}(\hat{\pi}(t))} \left[f_{22}(\hat{\pi}(t)) + D_{22}(\hat{\pi}(t))(\dot{\hat{\pi}}_4(t) - \omega_4) \right] + \omega_3 + v_3 \\ \dot{\hat{\pi}}_4(t) &= -\frac{1}{D_{22}(\hat{\pi}(t))} \left[f_{22}(\hat{\pi}(t)) + D_{12}(\hat{\pi}(t))(\dot{\hat{\pi}}_3(t) - \omega_3) \right] + \omega_4 + v_4 \end{aligned} \quad (5.10)$$

CAPÍTULO 5. APLICACIONES

donde $v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$ se define como en (3.23) con

$$C_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el sistema (5.10) se puede observar que la perturbación “matched” no afecta al ESER debido a que ésta es rechazada directamente por el control, es decir que en la teoría clásica de regulación, el término $\delta(\pi(\omega), t)$ solamente está presente en $c(\omega)$.

El Jacobiano de (5.10) en el punto de equilibrio $\pi_0 = [\frac{\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ es

$$A_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 22.2687 & 22.2687 & 0 & -0.0191 \\ 41.3 & 41.3 & 0 & -0.0355 \end{bmatrix}$$

Al elegir la constante del tiempo para el filtro (3.21) como $\tau = 0.05$ y la matriz L_π (3.23) como

$$L_\pi = \begin{bmatrix} 406 & 116.8 \\ 12.2 & 1 \\ 767.2 & 94 \\ 908.8 & 27.8 \end{bmatrix}$$

la matriz

$$\begin{bmatrix} (A_\pi - L_\pi C_\pi + B^*) & B^e \\ -\frac{1}{\tau^2} \begin{bmatrix} 0_n & I_n \end{bmatrix} & -\frac{1}{\tau} I_n \end{bmatrix}$$

tiene valores propios en $-19.9487 + 57.8209i$, $-19.9487 - 57.8209i$, $-0.4799 + 4.6114i$, $-0.4799 - 4.6114i$, -22.3792 y -12.2 .

En la Figura 5.2 se muestra la simulación de una comparación del desempeño del ESER en presencia y en ausencia de perturbación para los mapeos desconocidos $\pi_1(\omega)$ y $\pi_3(\omega)$.

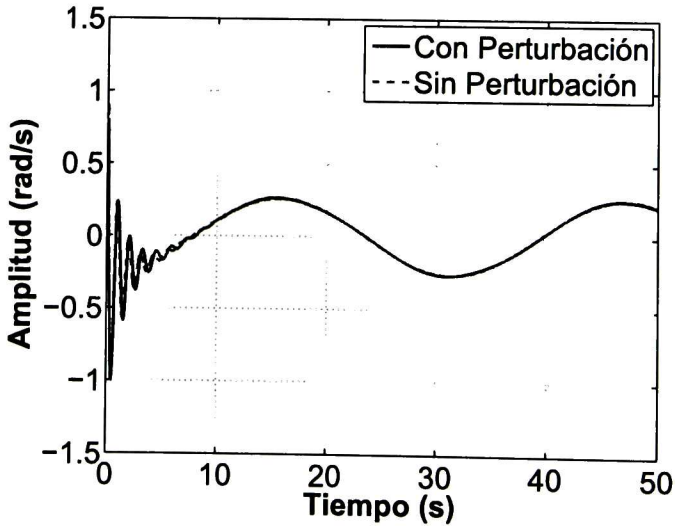
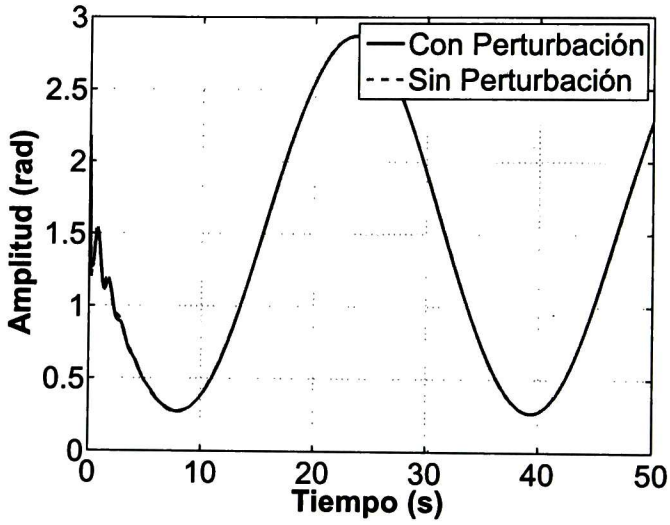


Figura 5.2. Estimación de $\pi_1(\omega)$ y $\pi_3(\omega)$ para el sistema Pendubot.

Para conseguir el objetivo de la regulación, i.e. $\varepsilon_T(t) = 0$, la ecuación

$$\bar{f}_4(0, \pi(\omega), \omega) = 0 \tag{5.11}$$

dentro de la ecuación de modos deslizantes (4.10) debe ser satisfecha. Para probar el correcto funcionamiento del ESER propuesto, la función $\bar{f}_4(0, \pi(\omega(t)), \omega(t))$ en (5.11) es simulada usando tanto los mapeos obtenidos con dicho ESER (5.10) en ausencia de perturbaciones como con mapeos obtenidos mediante una aproximación polinomial como en [12]. La Figura 5.3 muestra que el ESER aproxima la función $\bar{f}_4(0, \pi(\omega), \omega)$ (5.11) de una mejor manera a cero que la aproximación polinomial.

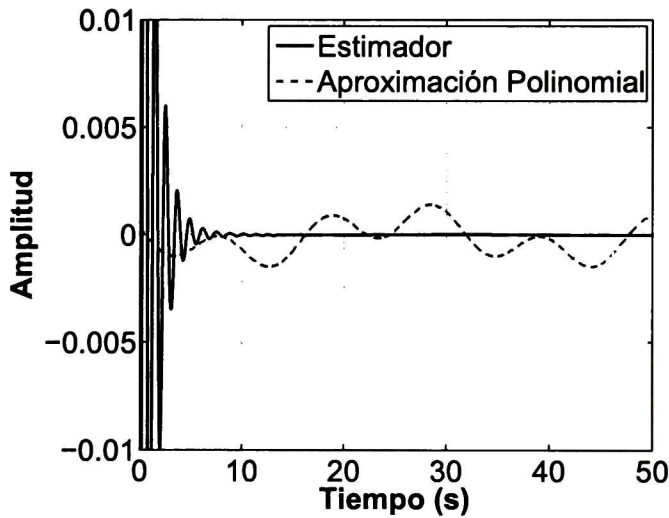


Figura 5.3. Desempeño del ESER comparado con una aproximación polinomial.

5.1.2. Regulador por Modos Deslizantes y Retroalimentación de Estados

El error de seguimiento para el Pendubot se define como $\varepsilon = x - \pi(\omega)$ y, tomando en cuenta que ya se han solucionado las ecuaciones del regulador, queda descrito por el

sistema dinámico

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_3 \\
 \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_4 \\
 \dot{\varepsilon}_3 &= f_1(\varepsilon, \pi(\omega)) - b_1(\varepsilon, \pi(\omega))(u - \delta(\varepsilon, \pi(\omega), t)) + \omega_3 - \frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\
 \dot{\varepsilon}_4 &= f_4(\varepsilon, \pi(\omega)) + b_2(\varepsilon, \pi(\omega))(u - \delta(\varepsilon, \pi(\omega), t)) + \omega_4 - \frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

La superficie deslizante se define como en (4.3)

$$\sigma = s - s_d \tag{5.13}$$

donde

$$\begin{aligned}
 s &= c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + c_4 \varepsilon_4 \\
 \dot{s}_d &= u_p
 \end{aligned}$$

La dinámica para σ se obtiene de la misma manera que en (4.4)

$$\dot{\sigma} = f_\sigma(\varepsilon, \pi(\omega), \omega, u_p) + G_\sigma(\varepsilon, \pi(\omega))(u - \delta(\varepsilon, \pi(\omega), t)). \tag{5.14}$$

El término $f_\sigma(\cdot)$ contiene para este caso las perturbaciones ω_3 y ω_4 . Se obtiene el término u_{eq} como en (4.7)

$$u_{eq} = -G_\sigma^{-1}(\varepsilon, \pi(\omega))f_\sigma(\varepsilon, \pi(\omega), \omega, u_p) \tag{5.15}$$

mientras que u_{egr} denota el término real, el cuál es

$$u_{egr} = \delta(\varepsilon, \pi(\omega), t) - G_\sigma^{-1}(\varepsilon, \pi(\omega))f_\sigma(\varepsilon, \pi(\omega), \omega, u_p). \tag{5.16}$$

Dicho término contiene a la perturbación “matched” y, aunque no se considere para el diseño del control, la ley de control aplicada lo generará para lograr $\sigma = 0$. La ley de control se diseña de manera similar a (4.5) como

$$u = u_{eq} + G_\sigma^{-1}(\varepsilon, \pi(\omega))w \tag{5.17}$$

donde

$$\begin{aligned}
 w &= -k_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) + q \\
 \dot{q} &= -k_2 \text{sign}(\sigma)
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

CAPÍTULO 5. APLICACIONES

Al sustituir (5.16) en (5.12) y cambiar la variable ε_3 mediante la igualdad

$$\varepsilon_3 = s_d - c_1\varepsilon_1 - c_2\varepsilon_2 - c_4\varepsilon_4 \quad (5.19)$$

se obtienen las ecuaciones de modos deslizantes con las variables $\varepsilon_T = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ s_d \ \varepsilon_4]^T$ como en (4.11)

$$\dot{\varepsilon}_T = f_T(\varepsilon_T, \pi(\omega), \omega) + G_T(\varepsilon_T, \pi(\omega))u_p \quad (5.20)$$

donde la función $f_T(\cdot)$ incluye también las perturbaciones ω_3 y ω_4 pero no la perturbación “matched” $\delta(\cdot)$. Cabe mencionar que para el caso del Pendubot, dicha perturbación $\delta(\cdot)$ incluye variaciones en cuatro de los parámetros de la planta (m_1 , l_{c1} , I_1 y μ_1), por lo que es permisible cierta incertidumbre en éstos mientras las constantes del control sean suficientemente grandes.

Para la simulación se eligen las constantes $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ y $c_4 = 0.9$, las ganancias del control $k_1 = 30$ y $k_2 = 15$. La linealización del sistema (5.20) resulta

$$A_T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & -0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36.7747 & -45.0894 & -8.3146 & 1.9931 \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2.7715 \end{bmatrix}$$

y al elegir valores propios en $-2 + 2i$, $-2 - 2i$, $-2 + 0.5i$ y $-2 - 0.5i$, la matriz K resulta

$$K = \begin{bmatrix} 3.6270 & 8.1395 & 5.0634 & 0.6962 \end{bmatrix}$$

Además de la perturbación $\delta(\cdot)$ se introducen variaciones, modificando los cuatro parámetros mencionados luego de cierto tiempo como se muestra en la Tabla 5.1.

Cuadro 5.1. Variaciones paramétricas introducidas en el sistema Pendubot

Parámetro	Valor Original	Valor Modificado
m_1	0.829	0.959
l_1	0.203	0.223
l_{c1}	0.155	0.195
μ_1	0.00545	0.145

La Figura 5.4 muestra la comparación entre la salida del sistema (y o x_2) y su referencia

$(q(\omega)$ o $\pi_2(\omega)$). Se observa que el control logra el seguimiento asintótico.

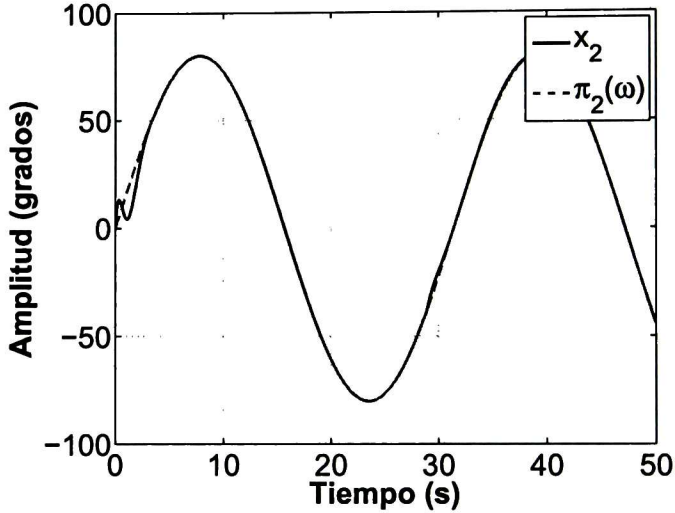


Figura 5.4. Comparación de la salida (x_2) con su referencia ($\pi_2(\omega)$).

En la Figura 5.5 se observa la comparación de los cuatro estados del sistema con su respectiva referencia. En las Figuras 5.5(c) y 5.5(d) se observa de manera clara como luego de que ocurre la variación paramétrica, el control logra llevar nuevamente los estados a su referencia.

La Figura 5.6 muestra la ley de control aplicada al sistema y finalmente la Figura 5.7 muestra los errores de seguimiento (ϵ) de los cuatro estados y como dichos errores vuelven a cero luego de la variación paramétrica.

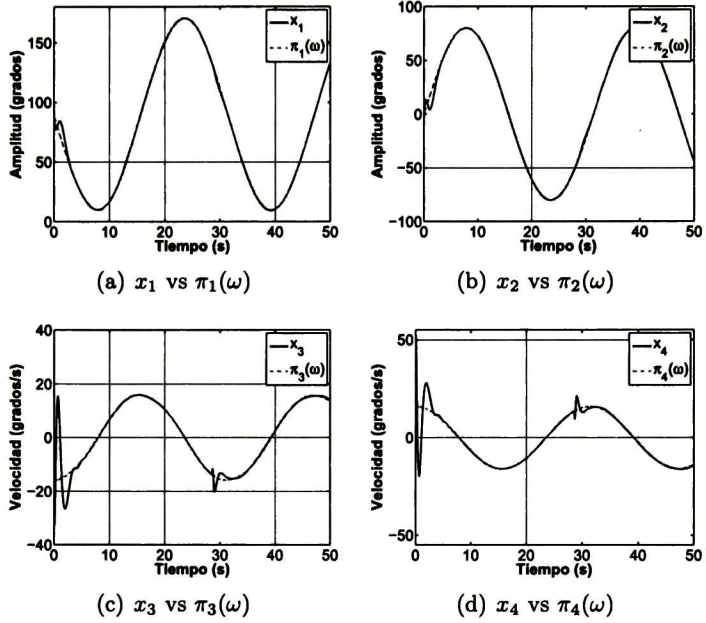


Figura 5.5. Comparación de estados con su respectiva referencia.

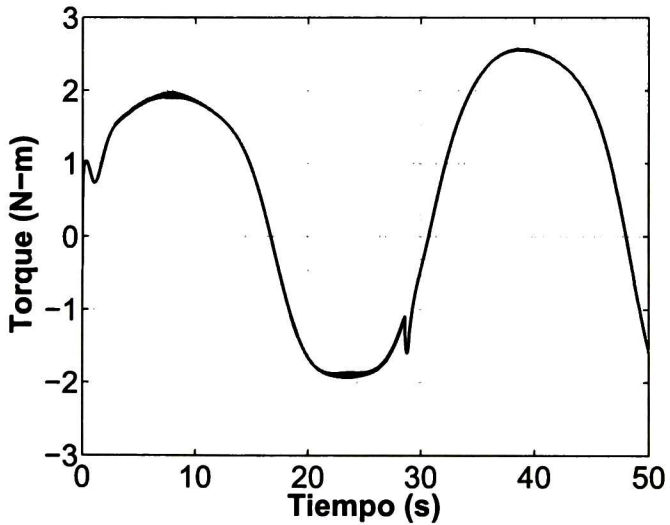


Figura 5.6. Ley de control (u).

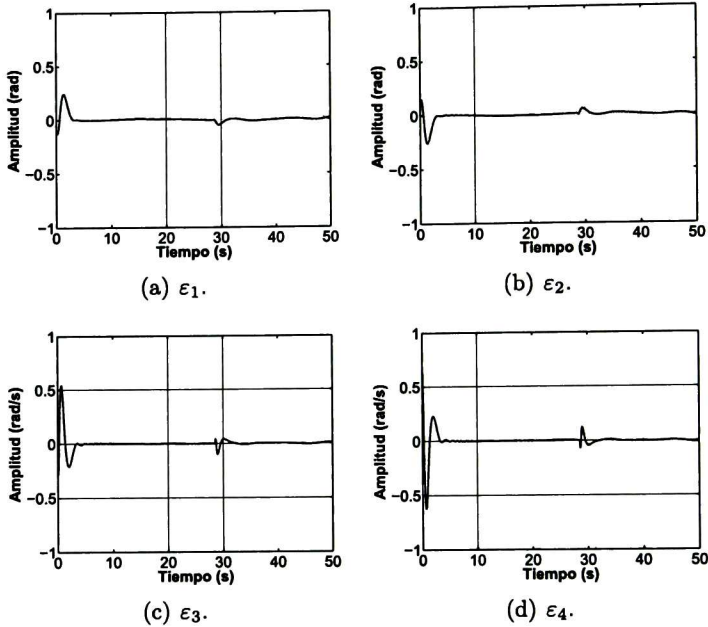


Figura 5.7. Errores de seguimiento (ε).

5.1.3. Caso de Ausencia de Exosistema

Como ya se vió, el estimador diseñado en el Capítulo 3 es capaz de seguir señales que no son generadas por un exosistema. La referencia a seguir en este caso es una señal aleatoria en el tiempo filtrada a través de un filtro pasabajas.

La Figura 5.8 muestra la comparación entre la salida del sistema (y o x_2) y su referencia ($q(\omega)$ o $\pi_2(\omega)$). Se observa que el control logra el seguimiento asintótico.

En la Figura 5.9 se observa la comparación de los cuatro estados del sistema con su respectiva referencia.

La Figura 5.10 muestra la ley de control aplicada al sistema y finalmente la Figura 5.11 muestra los errores de seguimiento (ε) de los cuatro estados y como dichos errores vuelven a cero luego de la variación paramétrica.

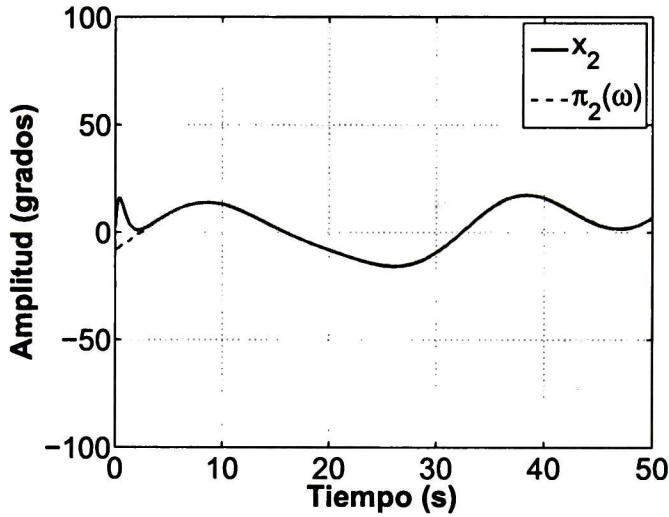


Figura 5.8. Comparación de la salida (x_2) con su referencia ($\pi_2(\omega)$). Ausencia de Exosistema.

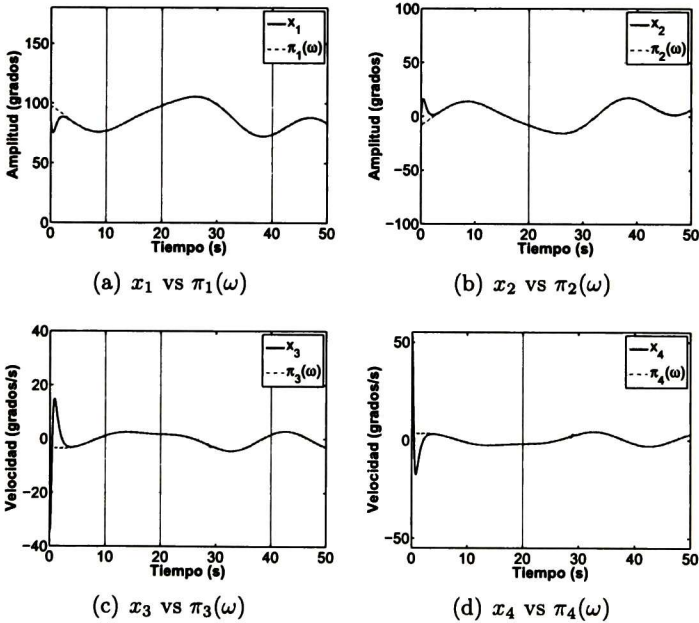


Figura 5.9. Comparación de estados con su respectiva referencia. Ausencia de Exosistema.

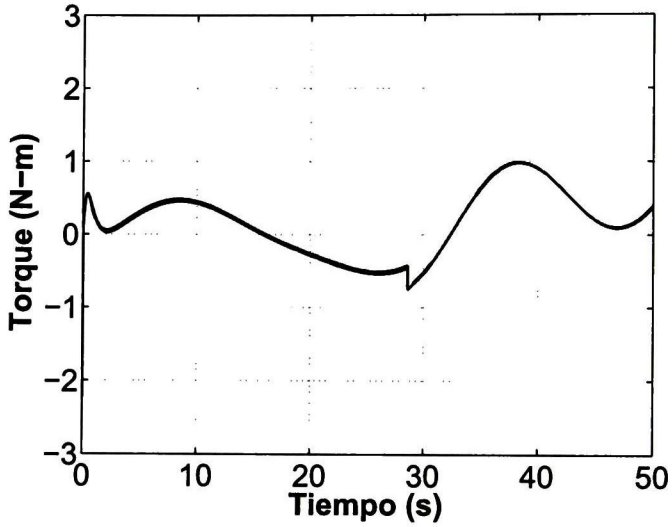


Figura 5.10. Ley de control (u). Ausencia de Exosistema.

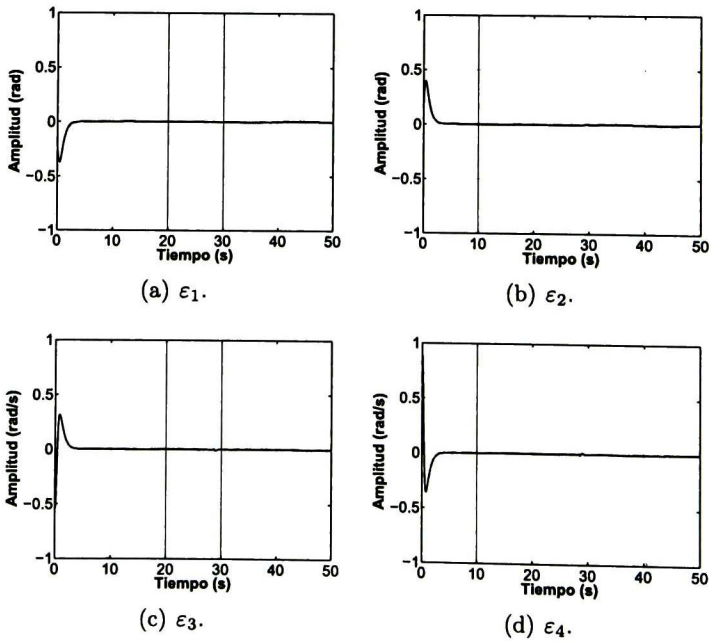


Figura 5.11. Errores de seguimiento (ϵ). Ausencia de Exosistema.

5.1.4. Problema del Modelo del Motor

La entrada de control para el Pendubot es generalmente considerada como el torque, sin embargo, dicho torque es generado a su vez por un motor, el cual tiene su propia dinámica. se tienen tres maneras de analizar el sistema mecánico junto con el motor, el cual es un sistema electromecánico. La primer manera es introducir la ecuación de error para la corriente y resolver las ecuaciones del regulador considerándola. Sin embargo, si se realizara de esta forma, se perdería la propiedad de los modos deslizantes en cuanto a la robustez ante perturbaciones “matched” en el UAMS y dicha propiedad solo sería útil ante incertidumbres en el modelo del motor; a menos, claro, que la perturbación fuera conocida, por ello no se analizará este enfoque. La segunda manera de llevar a cabo la regulación tomando en cuenta el problema del motor es como pseudo control mediante la dinámica modelada y la tercera es mediante análisis como dinámica no modelada. Vale la pena mencionar que para estas dos últimas, no es necesario tener un conocimiento exacto de los parámetros del motor; es suficiente con conocer los rangos en los que pueden oscilar sus valores numéricos.

Dinámica Modelada: Medición de Corriente

Para la dinámica modelada se introduce la corriente del motor como una nueva variable de estado, obteniendo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ i \end{bmatrix}$$

La ecuación dinámica de dicha corriente es

$$L \frac{di}{dt} = -Ri - k_L \Omega + u \tag{5.21}$$

mientras que el torque del motor es

$$\tau = K_\tau i \tag{5.22}$$

donde $L = 0.05H$ es la inductancia del motor, $R = 0.3\Omega$ es su resistencia, $k_L = 2Vs$ es la constante de fuerza contraelectromotriz, Ω es la velocidad angular del motor, u es el voltaje de entrada y $K_\tau = 10Nm/A$ es la constante de proporcionalidad entre la corriente y el torque.

Se considerará la ecuación de errores (5.12) en lugar de (5.3) y se expande con la ecuación (5.21), con lo que resulta un sistema dinámico de orden cinco. Ya que el motor controla directamente al primer eslabón, su velocidad angular es $\Omega = x_3$, entonces el sistema dinámico con el motor modelado resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_3 \\
 \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_4 \\
 \dot{\varepsilon}_3 &= f_1(\varepsilon, \pi(\omega)) - b_1(\varepsilon, \pi(\omega))(K_\tau x_5 - \delta(\varepsilon, \pi(\omega), t)) + \omega_3 - \frac{\partial \pi_3(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\
 \dot{\varepsilon}_4 &= f_4(\varepsilon, \pi(\omega)) + b_2(\varepsilon, \pi(\omega))(K_\tau x_5 - \delta(\varepsilon, \pi(\omega), t)) + \omega_4 - \frac{\partial \pi_4(\omega)}{\partial \omega} s(\omega) \\
 \dot{x}_5 &= -\frac{R}{L}x_5 - \frac{k_L}{L}(\varepsilon_3 + \pi_3(\omega)) + \frac{1}{L}u
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Como se observa en (5.23), la dinámica de la corriente se utiliza directamente en lugar de plantear un estado estable para ella e introducir una ecuación de error. Esto se hace para utilizar la corriente como un pseudo control para el sistema, como ya se había mencionado.

Considere la superficie deslizante (5.13), su dinámica en este caso queda descrita como

$$\dot{\sigma} = f_\sigma(\varepsilon, \pi(\omega), \omega, u_p) + G_\sigma(\varepsilon, \pi(\omega))(K_\tau x_5 - \delta(\varepsilon, \pi(\omega), t)), \tag{5.24}$$

para lograr que dicha superficie llegue a cero tiempo finito, se utiliza x_5 como pseudo control y se plantea una función deseada para esta variable. Como es necesario que la función deseada sea diferenciable, se utilizan modos pseudo deslizantes mediante la función $\tanh(\cdot)$ y se propone dicha función deseada como

$$x_{5d} = -G_\sigma^{-1}(\varepsilon, \pi(\omega))k_3 \tanh(k_4 \sigma) \tag{5.25}$$

donde $K_\tau k_3$ da la ganancia de control y $k_4 \gg 1$ da la pendiente de los modos pseudo deslizantes.

Se debe lograr convergencia en tiempo finito de x_5 a x_{5d} , para ello se plantea una nueva superficie deslizante como

$$\sigma_i = x_5 - x_{5d} \tag{5.26}$$

cuya dinámica resulta de la forma

$$\dot{\sigma}_i = -\frac{R}{L}x_5 - \frac{k_L}{L}(\varepsilon_3 + \pi_3(\omega)) + \frac{1}{L}u - \dot{x}_{5d} \tag{5.27}$$

y se utiliza nuevamente “supertwisting” entonces la ley de control queda de la forma

$$\begin{aligned} u &= -k_1\sqrt{|\sigma_i|}\text{sign}(\sigma_i) + \dot{q} \\ \dot{q} &= -k_2\text{sign}(\sigma_i). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Se llevan a cabo las respectivas simulaciones introduciendo el modelo del motor y las mismas perturbaciones utilizadas anteriormente para $\delta(\cdot)$ y variaciones paramétricas. Las constantes del control son elegidas como: $k_1 = 15$, $k_2 = 8$, $k_3 = 15$, $k_4 = 100$.

La Figura 5.12 muestra el desempeño del control en el seguimiento de la salida (x_2) a su referencia ($\pi_2(\omega)$).

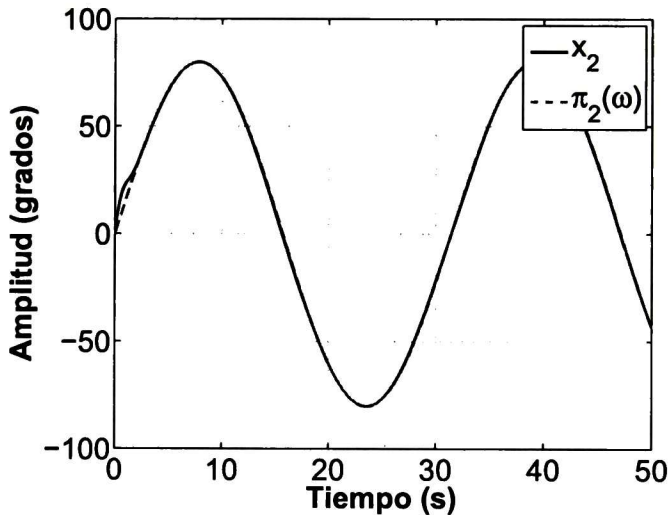


Figura 5.12. Comparación de la salida (x_2) con su referencia ($\pi_2(\omega)$). Motor modelado con medición de corriente.

En la Figura 5.13 se observa la comparación de los cuatro estados del Pendubot con su respectiva referencia, mientras que en la Figura 5.14 se muestra el resultado de la simulación para la corriente en el motor, a la cuál no ha sido necesario calcular su respectiva referencia, sin embargo se observa que ésta tiende a un estado estable.

La Figura 5.15 muestra la ley de control, esta vez representada por el voltaje aplicado al motor. Se observa que el ajuste de dicha ley de control una vez que ocurren las variaciones paramétricas es mucho más rápido debido a que el motor cuenta con dinámicas mucho más rápidas que los sistemas mecánicos.

Finalmente la Figura 5.16 muestra los cuatro errores de seguimiento de los estados con sus referencias.

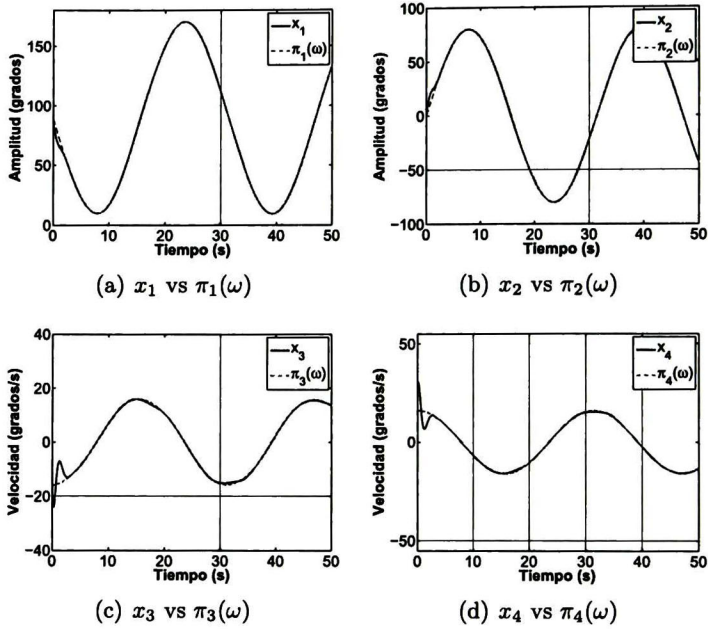


Figura 5.13. Comparación de estados con su respectiva referencia. Motor modelado con medición de corriente.

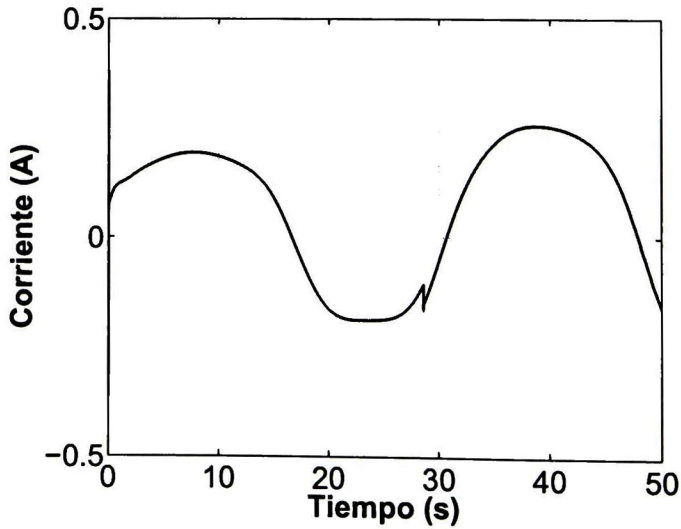


Figura 5.14. Corriente en el motor (x_5). Motor modelado con medición de corriente.

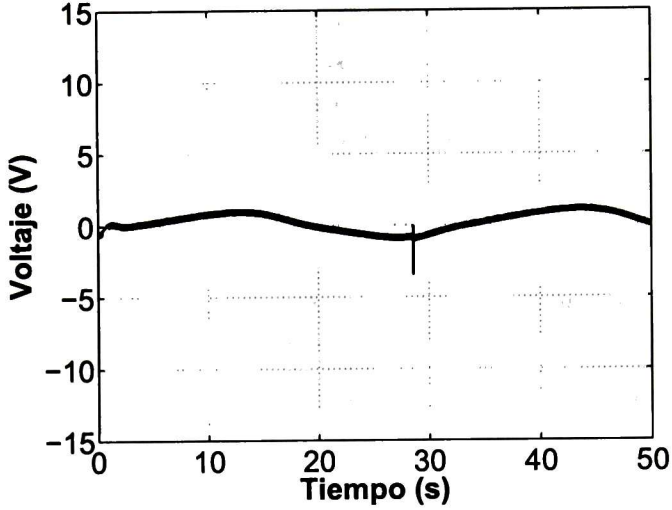


Figura 5.15. Ley de control (u). Motor modelado con medición de corriente.

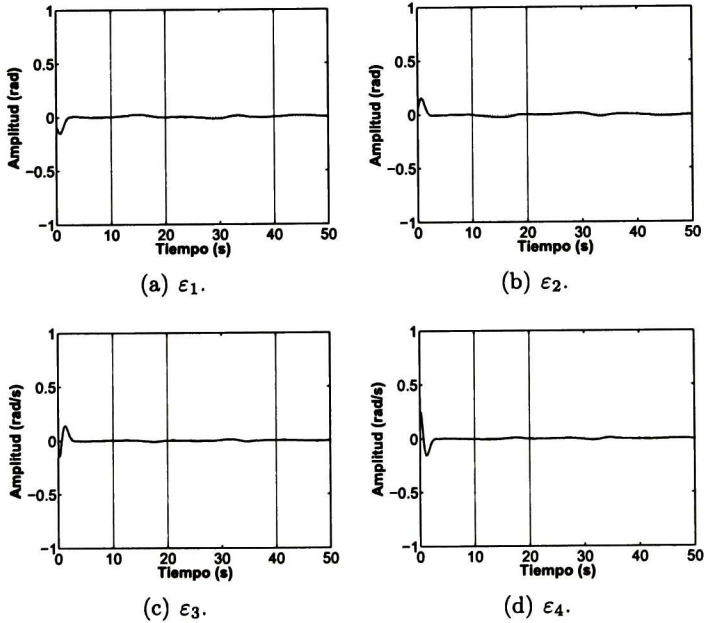


Figura 5.16. Errores de seguimiento (ϵ). Motor modelado con medición de corriente.

Dinámica No Modelada: Sin Medición de Corriente

Debido a que, posiblemente no se cuente con la corriente en el motor para su medición, el método de dinámica no modelada se basa en la teoría de perturbaciones singulares [7]. Considere nuevamente la ecuación dinámica de la corriente en el motor (5.21). Se sabe por la física de los sistemas que la dinámica de la corriente es mucho más rápida que la dinámica de los sistemas mecánicos, esto se ve desde los posibles valores numéricos de la constante L , la cual es pequeña. Entonces dicha constante L puede jugar el rol de ϵ y al ser aproximada a cero, la ecuación dinámica (5.21) puede ser también aproximada a una ecuación algebraica como

$$0 \approx -Ri - k_L\Omega + u \quad (5.29)$$

De la ecuación (5.29) se puede obtener una solución para i de la forma

$$i = -\frac{k_L}{R}\Omega + \frac{1}{R}u \quad (5.30)$$

y al sustituir (5.30) en (5.24) con las variables correspondientes se obtiene

$$\dot{\sigma} = f_\sigma(\epsilon, \pi(\omega), \omega, u_p) + G_\sigma(\epsilon, \pi(\omega)) \left(-\frac{K_\tau k_L}{R}(\epsilon_3 + \pi_3(\omega)) + \frac{K_\tau}{R}u - \delta(\epsilon, \pi(\omega), t) \right) \quad (5.31)$$

y, como las nuevas funciones introducidas en (5.31) cumplen con la condición “matched” el sistema de errores en las ecuaciones de modos deslizantes (5.20) es el mismo, por lo que lo único que se debe ajustar es la ley de control que logre $\sigma = 0$ en tiempo finito.

Como se planteó anteriormente, no se tiene conocimiento de los parámetros del motor, por lo que no se utilizará el control equivalente para la ley de control. Se tiene $G_\sigma(\cdot) < 0 \forall \epsilon, \pi(\omega) \in D \subset E \times \Pi$, entonces dicha ley de control se propone como

$$\begin{aligned} u &= k_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) - q \\ \dot{q} &= -k_2 \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (5.32)$$

De nuevo la Figura 5.17 muestra la comparación entre la salida del sistema y su referencia.

La Figura 5.18 muestra la comparación entre los cuatro estados del sistema y su referencia.

En la Figura 5.19 se muestra la corriente en el motor (x_5) mientras que la Figura 5.20 muestra la ley de control aplicada.

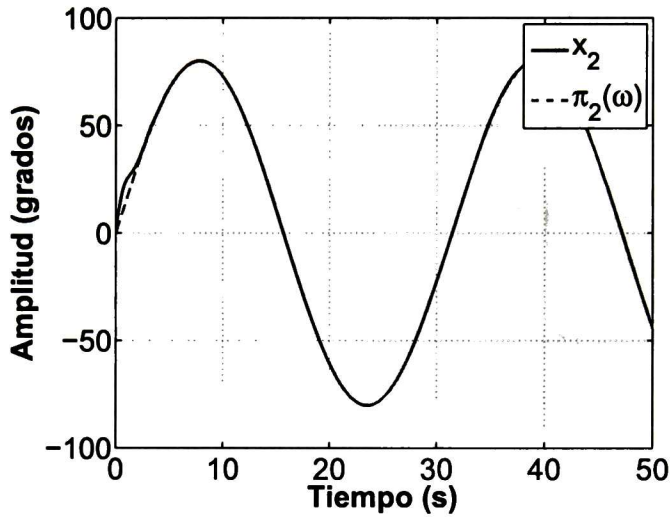


Figura 5.17. Comparación de la salida (x_2) con su referencia ($\pi_2(\omega)$). Motor no modelado sin medición de corriente.

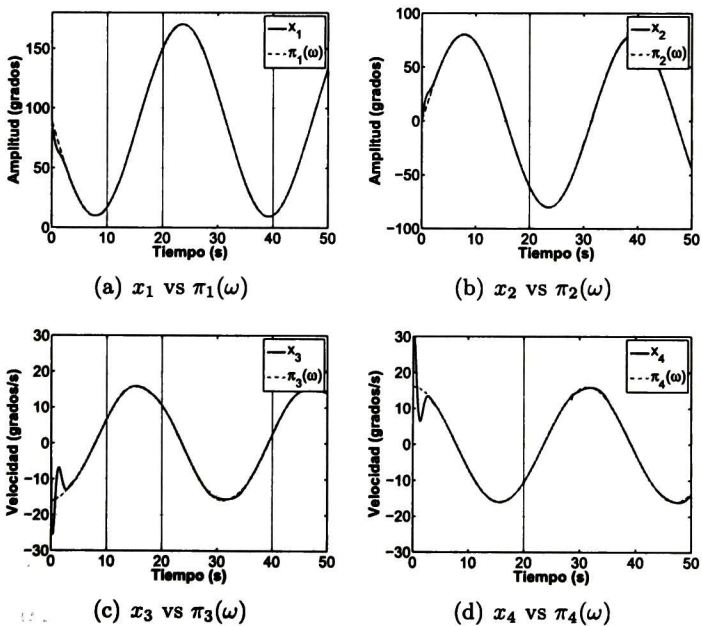


Figura 5.18. Comparación de estados con su respectiva referencia. Motor no modelado sin medición de corriente.

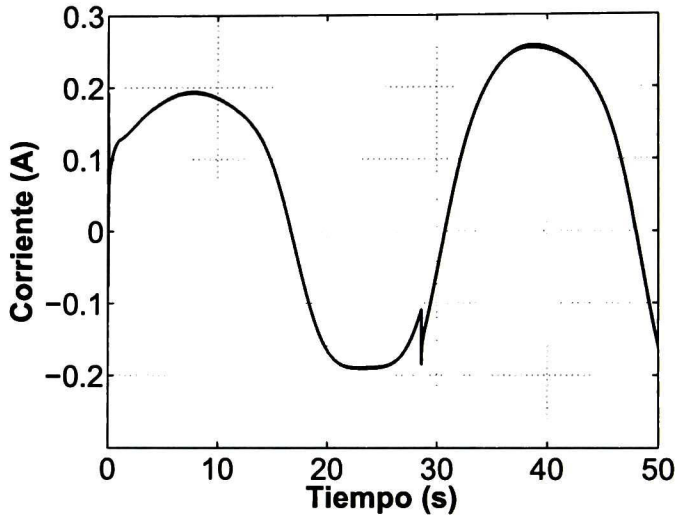


Figura 5.19. Corriente en el motor (x_5). Motor no modelado sin medición de corriente.

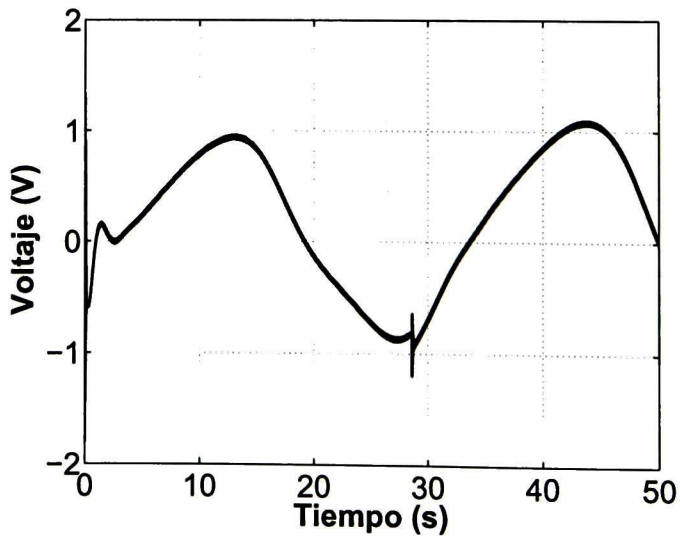


Figura 5.20. Ley de control (u). Motor no modelado sin medición de corriente.

Finalmente la Figura 5.21 muestra los errores de seguimiento de cada estado individual.

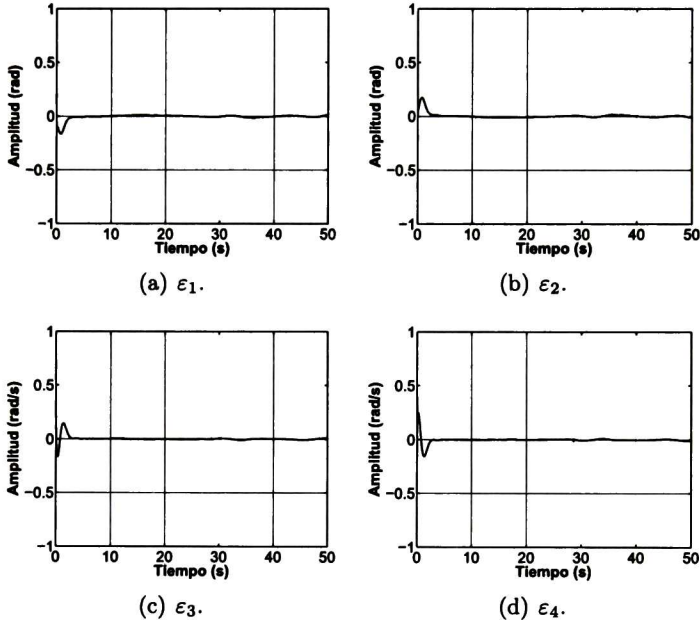


Figura 5.21. Errores de seguimiento (ε). Motor no modelado sin medición de corriente.

Como se observó en las simulaciones, ambos métodos de afrontar el problema del motor funcionan correctamente.

5.1.5. Regulador por Modos Deslizantes y Retroalimentación del Error

Como ya se ha mencionado, el problema de la regulación por retroalimentación del error se lleva a cabo desde un enfoque en donde el exosistema esta disponible para su medición y no se consideran perturbaciones en la planta.

En esta Sección no se llevará a cabo todo el desarrollo del diseño del control, simplemente se muestran los resultados numéricos y en simulación.

Nuevamente se eligen las constantes de la variedad deslizante como $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ y $c_4 = 0.9$. Las ganancias del control se eligen como $k_1 = 5$ y $k_2 = 2$.

Para la linealización de 4.27 se tienen

$$A_{Tc} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & -0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42.5114 & -50.8261 & -8.3146 & -1.9931 \end{bmatrix} \quad B_{Tc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2.7715 \end{bmatrix}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & -20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 49.9592 & -15.3454 & 0.1832 & 0.1941 \\ -51.3557 & 69.7603 & -0.3397 & -0.3956 \end{bmatrix}$$

y al elegir las matrices

$$K = \begin{bmatrix} 3.627 & 8.1395 & 5.0634 & 0.6962 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 3395 \\ 134 \\ -32847 \\ 6811 \end{bmatrix}$$

la matriz

$$\begin{bmatrix} A_{Tc} - B_{Tc}K & A_{Tc} + B_{Tc}K_o \\ 0 & A_o - LC \end{bmatrix}$$

tiene valores propios en $-1.8042 + 2.3360i$, $-1.8042 - 2.3360i$, -1.4502 , -2.9413 , -70.9085 , $-25.6568 + 30.9421i$, $-25.6568 - 30.9421i$ y -11.9903 .

De nuevo se muestra en la Figura 5.22 la comparación entre la salida y su referencia, esta vez obteniendo un seguimiento de 45° .

En la Figura 5.23 se muestran los cuatro estados comparados con su respectiva referencia. La Figura 5.24 muestra la ley de control aplicada al sistema.

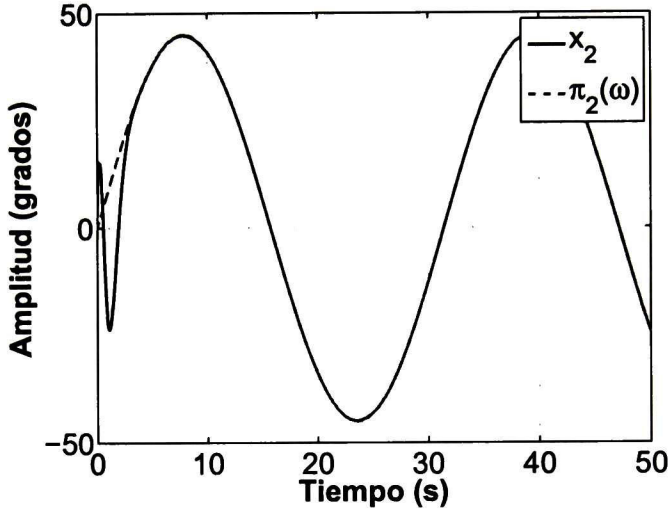


Figura 5.22. Comparación de la salida (x_2) con su referencia ($\pi_2(\omega)$). Retroalimentación del error.

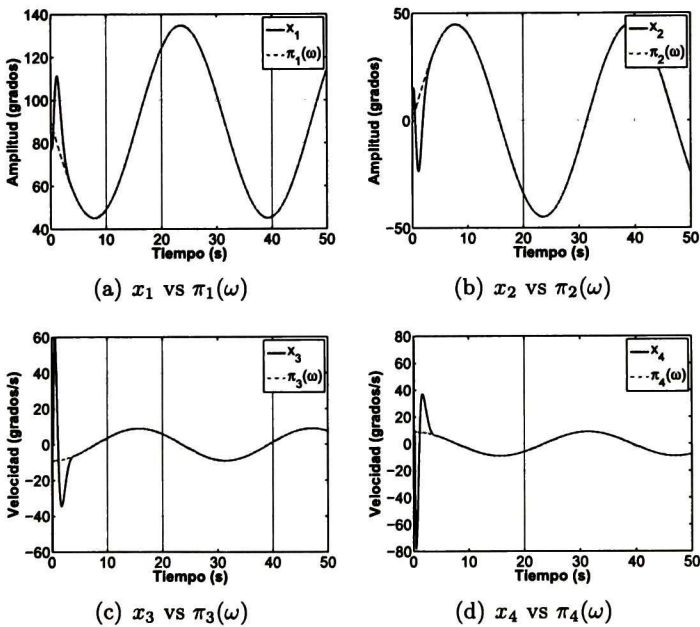


Figura 5.23. Comparación de estados con su respectiva referencia. Retroalimentación del error.

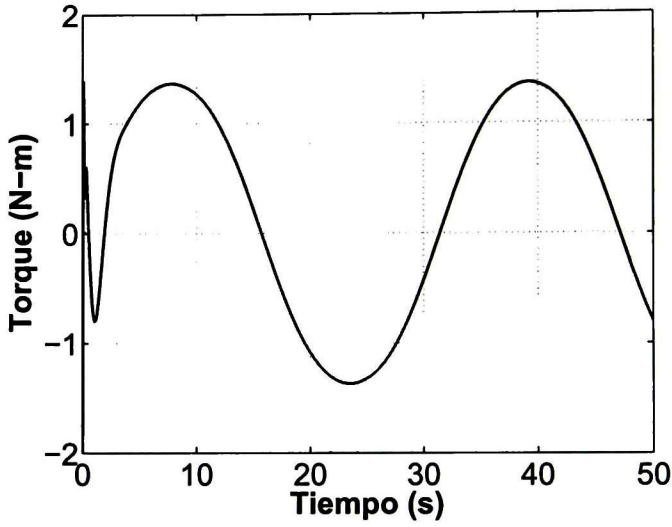


Figura 5.24. Ley de control (u). Retroalimentación del error.

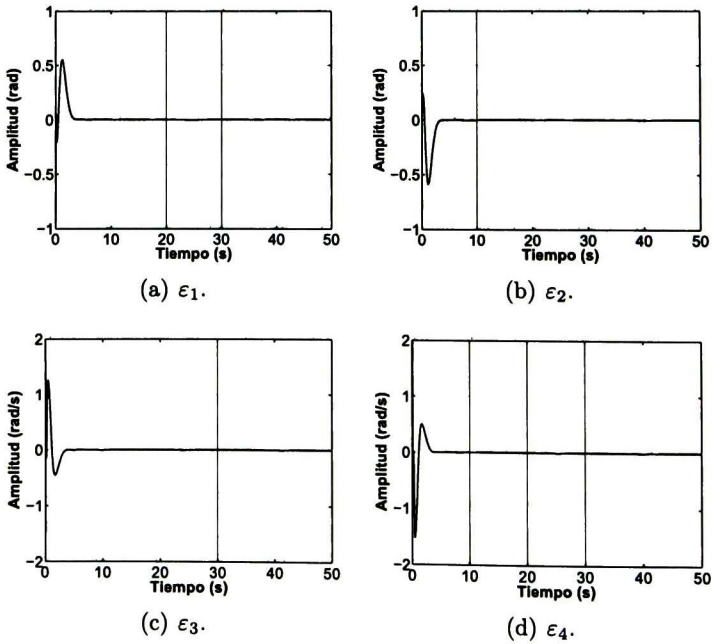


Figura 5.25. Errores de seguimiento (ϵ). Retroalimentación del error.

En la Figura 5.25 se observan los errores de seguimiento de los cuatro estados y por último en la Figura 5.26 se muestran los errores de estimación del observador.

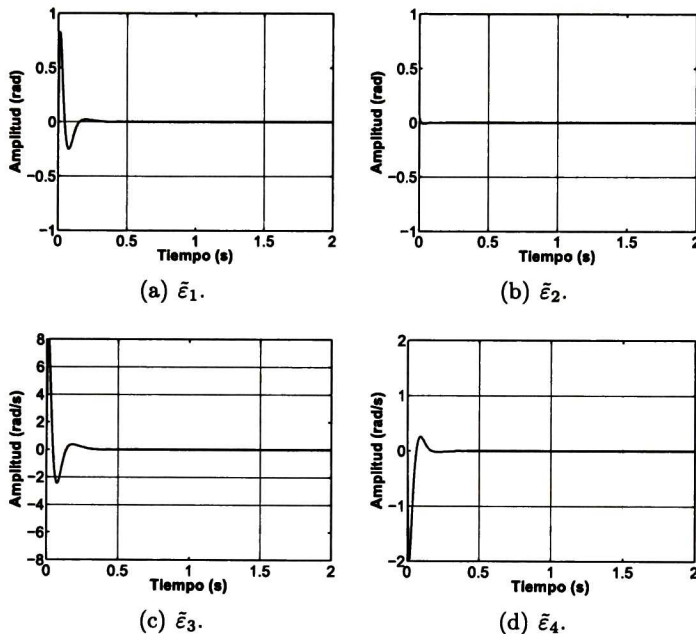


Figura 5.26. Errores de estimación ($\tilde{\epsilon}$). Retroalimentación del error.

5.2. Sistema Pelota-Balancín

El sistema Pelota-Balancín (Figura 5.27) es otro buen ejemplo de UAMS en donde el objetivo del control es mantener en equilibrio la pelota a partir de movimientos en el balancín o en el caso de este trabajo, conseguir el seguimiento de alguna trayectoria por medio de la pelota.

El modelo del sistema Pelota-Balancín es igual que el del Pendubot (5.1)-(5.2) pero con las variables de estado

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ r \\ \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

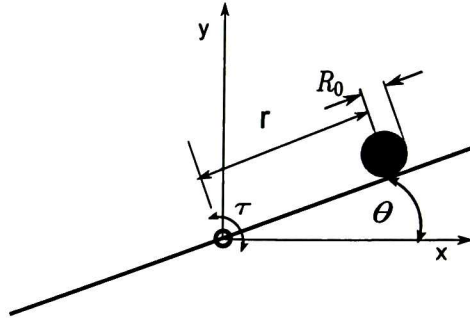


Figura 5.27. Diagrama esquemático del sistema Pelota-Balancín

y los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(r) &= \bar{I} + \frac{7}{5}mR_o^2 + mr^2, \\
 D_{12} &= -\frac{7}{5}mR_o, \\
 D_{21} &= D_{12}, \\
 D_{22} &= \frac{7}{5}m, \\
 C_1(r, \dot{\theta}, \dot{r}) &= 2rm\dot{r}\dot{\theta}, \\
 C_2(r, \dot{\theta}, \dot{r}) &= -mr\dot{\theta}^2 + C_d\dot{r}, \\
 G_1(\theta, r) &= rmg\cos(\theta) - R_o mgsin(\theta), \\
 G_2(\theta) &= mgsin(\theta), \\
 F_1(\dot{\theta}) &= \mu_1\dot{\theta}, \\
 F_2(\dot{r}) &= \mu_2\dot{r}.
 \end{aligned}$$

donde $\bar{I} = 2.1kgm^2$ representa el momento de inercia del balancín, $m = 0.1kg$ es la masa de la pelota, $R_o = 0.02m$ es el radio de la pelota, $C_d = 0.05kgm/s$ es el coeficiente de fricción viscosa de la pelota y $g = 9.81m/s^2$ es la constante de gravedad. En este caso se supondrán $\mu_1 = 0$ ya que como ya se vió, no afecta el control y $\mu_2 = 0$ ya que puede ser considerado como C_d .

En esta Sección no se llevará a cabo el desarrollo o diseño del ESER ni del regulador por modos deslizantes ya que son exactamente igual que los del Pendubot, simplemente se mostrarán los resultados numéricos y en simulación. Tampoco se tomarán en cuenta el problema del motor ni el de regulación por retroalimentación del error.

5.2.1. Estimador de la Solución de las Ecuaciones de Regulación

Para el sistema Pelota-Balancín, la matriz A_π resulta

$$A_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 350.3571 & 0 & 0 & 17.8571 \\ -7.0071 & 0 & 0 & -0.3571 \end{bmatrix}$$

Al elegir la constante del tiempo para el filtro (3.21) como $\tau = 0.05$ y la matriz L_π como

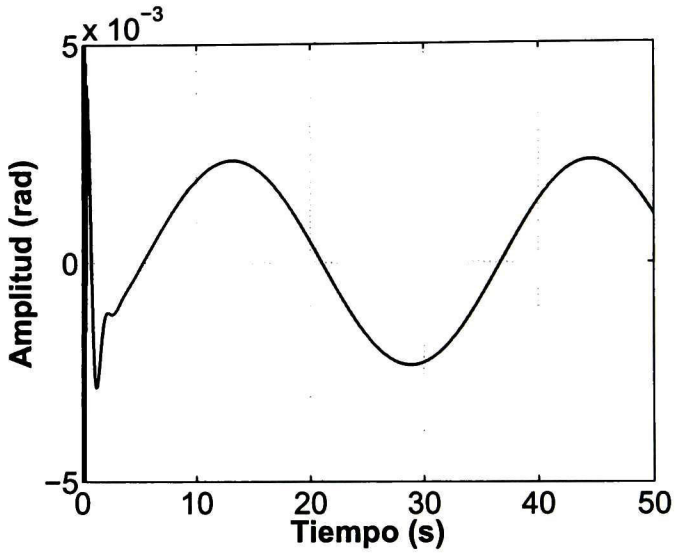
$$L_\pi = \begin{bmatrix} -85.3 & -245.2 \\ 11.2 & -59 \\ -2687.3 & -2936.1 \\ 57.6 & 28.1 \end{bmatrix}$$

la matriz

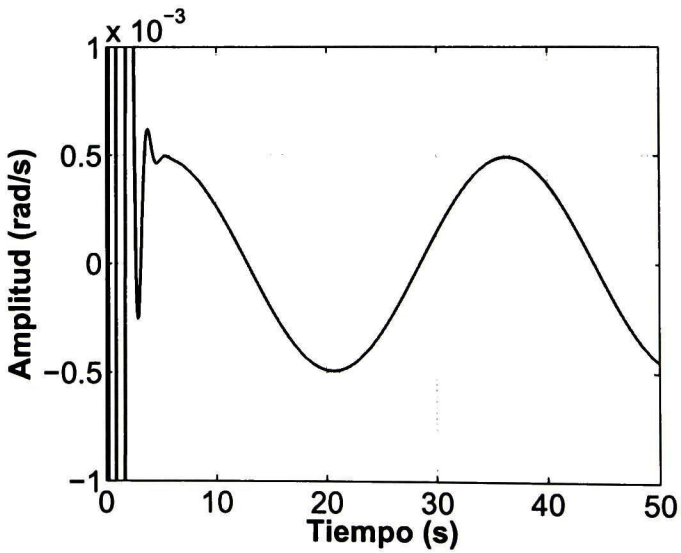
$$\begin{bmatrix} (A_\pi - L_\pi C_\pi + B^*) & B^e \\ -\frac{1}{\tau^2} \begin{bmatrix} 0_n & I_n \end{bmatrix} & -\frac{1}{\tau} I_n \end{bmatrix}$$

tiene valores propios en $-21.3826 + 55.9358i$, $-21.3826 - 55.9358i$, -22.6855 , -10.0119 , $-2.0973 + 3.8504i$ y $-2.0973 - 3.8504i$.

En la Figura 5.28 se observa la estimación para los mapeos $\pi_1(\omega)$ y $\pi_3(\omega)$.



(a) $\hat{\pi}_1(\omega)$



(b) $\hat{\pi}_3(\omega)$

Figura 5.28. Estimación para $\pi_1(\omega)$ y $\pi_3(\omega)$ para el sistema Pelota-Balancín.

5.2.2. Regulador por Modos Deslizantes y Retroalimentación de Estados

Se eligen las constantes de la variedad deslizante como $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ y $c_4 = 0.9$, las ganancias del control $k_1 = 5$ y $k_2 = 2$. La linealización del sistema resulta

$$A_T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & -0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6.7064 & 0.1179 & -0.0589 & -0.6879 \end{bmatrix} \quad B_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0.0196 \end{bmatrix}$$

y al elegir valores propios en $-2 + 2i$, $-2 - 2i$, $-2 + 0.5i$ y $-2 - 0.5i$, la matriz K resulta

$$K = [16.2645 \quad -13.9622 \quad 4.5113 \quad -10.1414]$$

Se eligen la frecuencia de la referencia como $\alpha = 0.2 \text{ rad/s}$ y la amplitud $\omega_{02} = 0.2 \text{ m}$. La Figura 5.29 muestra la comparación entre la salida del sistema (y o x_2) y su referencia ($q(\omega)$ o $\pi_2(\omega)$). Se observa que el control logra el seguimiento asintótico.

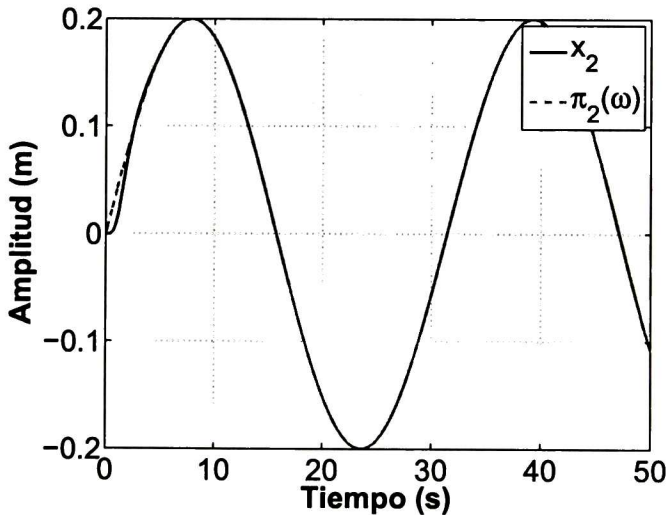


Figura 5.29. Comparación de la salida (x_2) con su referencia ($\pi_2(\omega)$) para el sistema Pelota-Balancín.

En la Figura 5.30 se observa la comparación de los cuatro estados del sistema con su respectiva referencia.

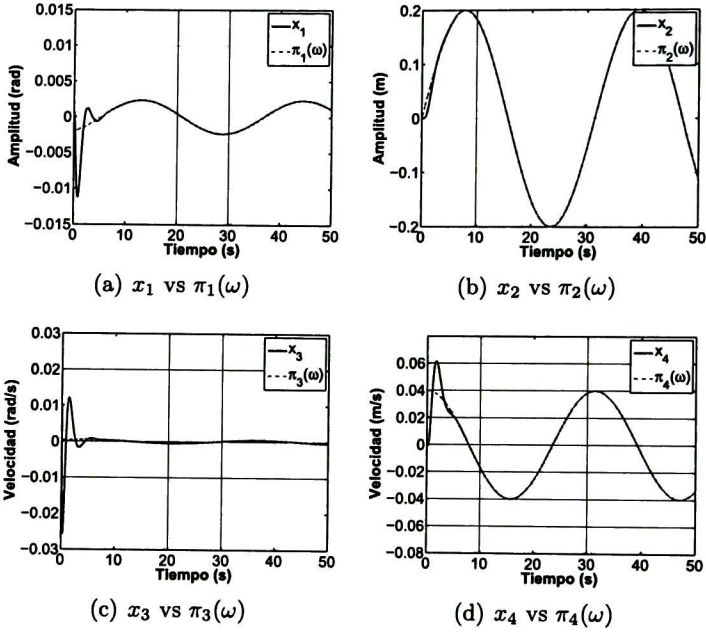


Figura 5.30. Comparación de estados con su respectiva referencia para el sistema Pelota-Balancín.

La Figura 5.31 muestra la ley de control aplicada al sistema y finalmente la Figura 5.32 muestra los errores de seguimiento (ϵ) de los cuatro estados.

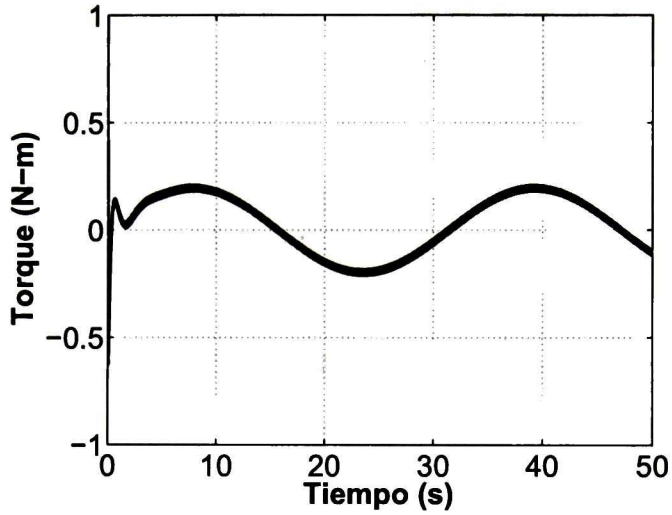


Figura 5.31. Ley de control (u).

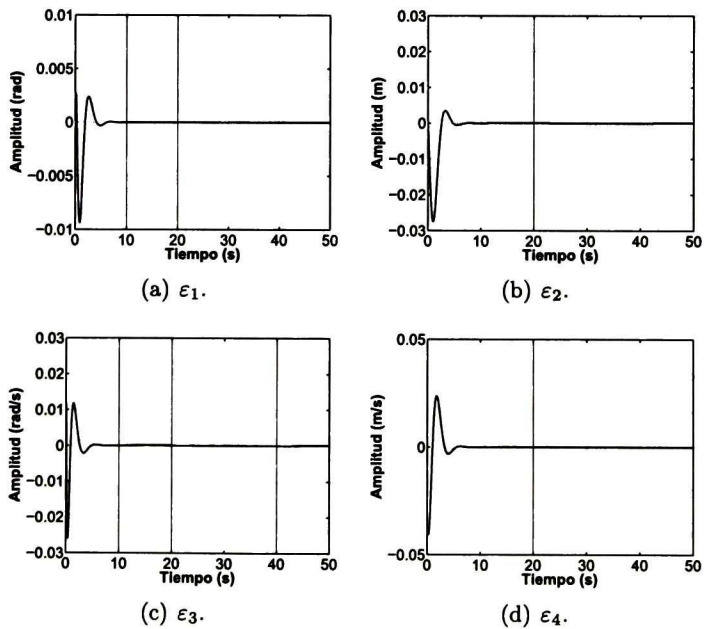


Figura 5.32. Errores de seguimiento (ϵ) para el sistema Pelota-Balancín.

5.3. Sistema Carro-Péndulo

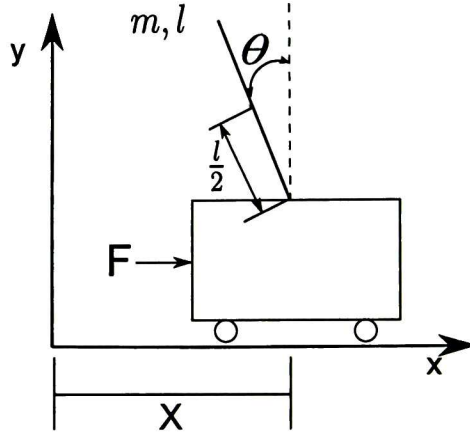


Figura 5.33. Diagrama esquemático del sistema Carro-Péndulo

El sistema Carro-Péndulo (Figura 5.33) es otro ejemplo de UAMS, así como también es un ejemplo de un sistema en donde el ESER no es aplicable; por ende en esta sección no se muestran las respectivas simulaciones.

Se definen las variables de estado

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ \dot{X} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

y los términos que describen el modelo del sistema son:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \bar{m}, \\ D_{12}(\theta) &= -\frac{ml}{2} \cos(\theta), \\ D_{21}(\theta) &= D_{12}(\theta), \\ D_{22} &= J, \\ C_1(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{ml}{2} \sin(\theta) \dot{\theta}^2, \\ C_2 &= 0, \\ G_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$G_2(\theta) = \frac{mgl}{2} \sin(\theta),$$

$$F_1(\dot{X}) = \mu_1 \dot{X},$$

$$F_2(\dot{\theta}) = \mu_2 \dot{\theta}.$$

donde $\bar{m} = 2.1kg$ representa la suma de las masas del carro y el péndulo, $m = 0.1kg$ es la masa del péndulo, $J = 0.002kgm$ es la inercia del péndulo, $l = 0.15m$ es la longitud del péndulo, $g = 9.81m/s^2$ es la constante de gravedad, $\mu_1 = 0.2kg/s$ es la constante de fricción del carro con la superficie y $\mu_2 = 0.05kg/s^2$ es la fricción del péndulo con el carro.

5.3.1. Estimador de la Solución de las Ecuaciones del Regulador

Para el sistema Carro-Péndulo, la linealización resulta

$$A_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9.8100 & 0 & 6.6667 \\ 0 & 36.7875 & 0 & -25.0000 \end{bmatrix}$$

y tomando en cuenta que la matriz C_π está definida como

$$C_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el par $\{A, C\}$ resulta ser no observable. Esta no observabilidad se puede entender fácilmente ya que se desea obtener un estado estable para la posición horizontal del carro que logre que el péndulo lleve a cabo el seguimiento; sin embargo, dicho estado estable no es único, ya que el carro se puede desplazar en el eje x libremente sin que el valor de dicha posición afecte la estabilidad del péndulo. En la matriz A_π se observa como no hay dependencia de la posición x_1 por lo antes mencionado ni de su velocidad x_3 ya que dicha variable sólo afecta al estado estable del control, al estar sólo en la parte “matched” del modelo.

5.3. SISTEMA CARRO-PÉNDULO

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

6.1. Conclusiones

En este trabajo se ha diseñado un controlador por modos deslizantes y retroalimentación de estados. Con el uso de control por modos deslizantes se logra robustez ante perturbaciones “matched” las cuales incluyen a menudo variaciones paramétricas en el modelo y algunas perturbaciones externas. El control se diseña utilizando una variedad dinámica con un término integral, el cual es utilizado para estabilizar la variedad deslizante. Esta variedad es fácil de diseñar y evita la necesidad de transformaciones complejas.

El control antes mencionado ha sido adaptado para el caso de regulación por retroalimentación del error, en donde se utiliza un observador de los errores de seguimiento y se analiza el comportamiento del sistema extendido para obtener las condiciones de estabilidad y así obtener las ganancias del observador y el controlador.

Se diseñó un estimador para la solución de las ecuaciones de regulación mediante un sistema dinámico y un observador para asegurar su convergencia. El problema de encontrar dicha solución es sumamente complicado, pero con la utilización de este estimador se ha evitado el problema de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales o encontrar alguna aproximación explícita. Además que el mismo estimador puede ser utilizado con diferentes plantas, simplemente cambiando los parámetros de la misma o las funciones que describen el modelo matemático, lo cual lo hace flexible.

6.2. Trabajo Futuro

Para mejorar el presente trabajo, como parte del trabajo futuro se plantea analizar el sistema completo Planta-Estimador-Controlador para así poder analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

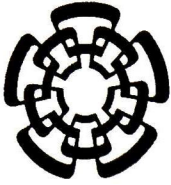
Al llevar a cabo el análisis antes mencionado se propone conseguir cierta robustez mediante adaptación de parámetros o estimación de perturbaciones por medio de diversos métodos.

Una vez que se cuente con dicha robustez, los algoritmos deben ser implementados en tiempo real para asegurar su correcto funcionamiento.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BEJARANO, F., FLOQUET, T., PERRUQUETTI, W., AND ZHENG, G. Observability and detectability analysis of singular linear systems with unknown inputs. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 50th IEEE Conference on* (Orlando, FL, USA, Dec 2011), pp. 4005–4010.
- [2] BONIVENTO, C., MARCONI, L., AND ZANASI, R. Output regulation of nonlinear systems by sliding mode. *Automatica* 37, 4 (2001), 535–542.
- [3] FRIDMAN, L., AND LEVANT, A. *Sliding Mode Control in Engineering*. New York: Marcel Dekker, 2002, ch. Higher order sliding modes, pp. 53–102.
- [4] HUANG, J., AND RUGH, W. An approximation method for the nonlinear servomechanism problem. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37, 9 (Sep 1992), 1395–1398.
- [5] ISIDORI, A. *Nonlinear control systems*, vol. 1. Springer, London, 1995.
- [6] ISIDORI, A., AND BYRNES, C. I. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35, 2 (1990), 131–140.
- [7] KHALIL, H. K., AND GRIZZLE, J. *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, USA, 2002.
- [8] LOUKIANOV, A., CASTILLO-TOLEDO, B., AND GARCIA-ROCHA, R. Output regulation in sliding mode. In *American Control Conference* (San Diego, California, USA, Jun 1999), vol. 2, pp. 1037–1041.

- [9] LOUKIANOV, A. G. Nonlinear block control with sliding modes. *Automation and Remote Control* 59, 7 (1998), 916–933.
- [10] MEMON, A., AND KHALIL, H. Lyapunov redesign approach to output regulation of nonlinear systems using conditional servocompensators. In *American Control Conference, 2008* (Seattle, Washington, USA, June 2008), pp. 395–400.
- [11] OBREGÓN-PULIDO, G., CASTILLO-TOLEDO, B., AND LOUKIANOV, A. A structurally stable globally adaptive internal model regulator for mimo linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 56, 1 (Jan 2011), 160–165.
- [12] SERRANO-HEREDIA, J., LOUKIANOV, A. G., AND BAYRO-CORROCHANO, E. State feedback block control regulation of the pendubot. In *8th International Conference on Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE)* (Merida City, Mexico, Oct 2011), pp. 1–6.
- [13] SHTESSEL, Y. Nonlinear output tracking via nonlinear dynamic sliding manifolds. In *Proceedings of the 1994 IEEE International Symposium on Intelligent Control* (Columbus, Ohio, USA, Aug 1994), pp. 297–302.
- [14] SHTESSEL, Y., AND SHKOLNIKOV, I. Causal nonminimum phase output tracking in mimo nonlinear systems in sliding mode: stable system center technique. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* (Phoenix, Arizona USA, December 1999), vol. 5, pp. 4790–4795 vol.5.
- [15] UTKIN, V., GULDNER, J., AND SHIJUN, M. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, vol. 34. CRC Press, Florida, USA, 1999.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

**Regulador por Modos Deslizantes para Sistemas Mecánicos
Subactuados**

del (la) C.

Jorge Enrique RUIZ DUARTE

el día 22 de Agosto de 2014.

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos
Investigador CINVESTAV 3E
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano
Investigador CINVESTAV 3D
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Bernardino Castillo Toledo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0012497