

CINVESTAV

TESIS DOCTORAL EN FÍSICA

Termodinámica de sistemas de agujeros negros y Temperatura de Hawking promedio

Autor:

Carlos Jonathan Ramírez Valdez

Director de tesis:

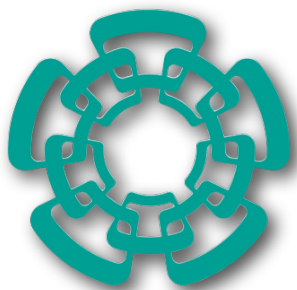
Dr. Héctor Hugo García Compeán

Director de tesis:

Dr. Vladimir Semionovich Manko

Departamento de Física

CINVESTAV - IPN



A mi familia y amigos

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi gratitud a mis asesores el Dr. Hugo García Compeán y el Dr. Vladimir Semionovich Manko, así como a mis sinodales.

Igualmente agradezco CONACYT por el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado y al Departamento de Física del CINVESTAV-IPN donde los llevé a cabo.

RESUMEN

Se revisa el *método de la acción euclidiana*, a través del cual se obtiene la *energía libre y temperatura* de las soluciones de agujero negro de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman. En el caso de la solución de Kerr-Newman se muestra paso a paso la obtención de la *energía libre* ya que dicha deducción detallada hacía falta en la literatura.

Se obtiene la *energía libre y temperatura* para dos agujeros negros de Schwarzschild en equilibrio estático; donde introducimos el reciente concepto de *longitud termodinámica*, a través del cual se encuentra el valor correcto para la entropía.

Usando la *longitud termodinámica* se obtiene de forma consistente *la primera ley de la termodinámica* para soluciones de dihayos de Kerr y dihayos de Kerr-Newman.

Se introduce por primera vez la *temperatura de Hawking promedio*, la cual permite generalizar el método de la acción euclidiana para estudiar sistemas de varios agujeros negros arbitrarios, resolviendo con esto el problema de como asociar una única temperatura a sistemas de varios horizontes con diferentes gravedades superficiales.

Finalmente, se aplica el método generalizado a un sistema formado por N agujeros negros de Kerr-Newman, obteniendo su *energía libre y temperatura de Hawking promedio*.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1. Gravitación y Termodinámica	3
1.1. Termodinámica de agujeros negros	3
1.2. Acción Euclidiana y Función de Partición	5
2. Soluciones con un solo horizonte	9
2.1. Schwarzschild	9
2.2. Reissner-Nordström	16
2.3. Kerr-Newman	18
3. Diihoyo de Schwarzschild	25
3.1. Diihoyos de Schwarzschild	25
3.1.1. Temperatura en presencia de dos horizontes	26
3.1.2. Energía Libre	28

4. Primera Ley y Longitud Termodinámica	33
4.1. Soluciones Exactas	33
4.1.1. Formalismo de Ernst	34
4.1.2. Método de Sibgatullin	35
4.2. Longitud Termodinámica	37
4.2.1. Dihoyos de Kerr	37
4.2.2. Dihoyos Kerr-Newman	44
5. Temperatura Promedio de Hawking	51
5.1. Temperatura en sistemas con varios horizontes	51
5.2. Dihoyos de Schwarzschild Arbitrarios	54
5.3. N-hoyos Kerr-Newman	55
Conclusiones	67

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Dihoyo de Schwarzschild con masas m_1 y m_2	26
4.1. Dihoyo de Kerr contrarotante con la misma masa m y momentos angulares con signo contrario ma y $-ma$	38
4.2. Dihoyo de Kerr corotante con la misma masa m y el mismo momento angular j	40
4.3. Dihoyo de Kerr con masas m_1 y m_2 , momento angular j_1 y j_2 respectivamente.	42
4.4. Dihoyo de Kerr-Newman contrarotante con la misma masa m , misma carga q y rotación con signo contrario j y $-j$	45
4.5. Dihoyo de Kerr-Newman contrarotante con la misma masa m , carga con signo contrario q y $-q$ y rotación con signo contrario j y $-j$	48
5.1. Posición de agujeros negros de Kerr-Newman en el eje de simetría.	56

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales retos en el campo de la Física, es la unificación de la Relatividad General y la Teoría Cuántica de Campos, por separado ambas disciplinas han generados numerosas predicciones con gran precisión. Desafortunadamente unificarlas ha evadido a las mentes más brillantes por más de 100 años. Incluso el desarrollar experimentos donde ambas teorías coexistan está fuera del alcance tecnológico actual. Afortunadamente, existe un fenómeno teórico que puede ayudarnos a entender más sobre las propiedades que debería tener esta teoría de unificación, el cual goza de una gran aceptación a pesar de no existir experimentos que lo respalden. Este fenómeno es la *radiación Hawking* [1], en el cual podemos ver efectos de la cuántica y la gravedad interactuando.

La radiación Hawking pertenece a un campo de estudio con gran riqueza que ha venido creciendo desde los años 70's, denominado *termodinámica de agujeros negros*. Esta disciplina comenzó su desarrollo a partir de similitudes encontradas entre propiedades de los agujeros negros y conceptos termodinámicos, como la relación entre la entropía y el área del horizonte; en un principio dichas similitudes se consideraron simplemente analogías, pero después de descubrimientos como la radiación Hawking, quedo demostrado que no se trataba de analogías sino de propiedades termodinámicas de los agujeros negros.

Un acercamiento a la termodinámica de los agujeros negros es a través del método de la acción euclidiana desarrollado por Gibbons y Hawking [2]. Método que usaremos para obtener la información termodinámica de los sistemas gravitatorios estudiados en esta tesis.

La mayoría de estudios termodinámicos se enfocan en sistemas con un solo agujero negro, principalmente porque soluciones con varios agujeros negros con rotación y carga son complicadas de obtener y requieren de métodos avanzados de soluciones exactas como lo son el formalismo de Ernst [3, 4] y el método de Sibgatullin [5]. Incluso la solución para dos agujeros negros de Kerr arbitrarios, fue encontrada solo recientemente en [6].

Así en este trabajo se estudio la termodinámica de sistemas con dos agujeros negros a los cuales nos

referiremos como dihojos, comenzando con el estudio del dihojo de Schwarzschild, prosiguiendo con soluciones recientes de dihojo como lo son el dihojo de Kerr [6-9] y el dihojo de Kerr-Newman [10, 11]. En estos sistemas introducimos el concepto de *longitud termodinámica* [12], el cuál es de suma importancia para obtener la termodinámica correcta en dichos sistemas.

Por otra parte, el método euclidiano tiene la inconveniencia de requerir que los agujeros negros tengan la misma gravedad superficial en sus horizontes, lo que restringe los sistemas a los que se les puede aplicar el método, dejando fuera incluso al dihojo de Schwarzschild con agujeros negros de diferente masa. En este trabajo mostramos como extender el método euclidiano para abarcar sistemas con varios agujeros negros arbitrarios. Fruto de esta extensión es la introducción de una nueva temperatura más robusta que la temperatura de Hawking, la cual hemos denominado *temperatura de Hawking promedio*. Así mismo mostramos una aplicación de este método extendido.

Específicamente en este trabajo, se revisa el como obtener la *energía libre y temperatura* para la soluciones Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman. Siguiendo con el estudio termodinámico de la solución del dihojo Schwarzschild y la introducción de la longitud termodinámica. Posteriormente, se obtiene la primera ley de la termodinámica para el dihojo de Kerr y el dihojo de Kerr-Newman. Finalmente, se extiende el método euclidiano y se introduce la *temperatura de Hawking promedio*, para en seguida aplicar la teoría al calculo de la energía libre y *temperatura de Hawking promedio* para un sistema formado por N agujeros negros de Kerr-Newman.

La tesis está organizada de la siguiente forma, en el capítulo 1 se describen las leyes termodinámicas que rigen a los agujeros negros y se introduce el método euclidiano. En el capítulo 2 se estudia la termodinámica de soluciones de un solo agujero negro. En el capítulo 3 se obtiene la energía libre y temperatura del dihojo de Schwarzschild. En el capítulo 4 introducimos soluciones de dihojo con carga y rotación, para las cuales obtenemos la primera ley de la termodinámica. Finalmente, en el capítulo 5 generalizamos la temperatura de Hawking para sistemas con varios agujeros negros y mostramos su aplicación.

CAPÍTULO 1

GRAVITACIÓN Y TERMODINÁMICA

En este capítulo describiremos brevemente los principales hallazgos que llevaron al surgimiento de la termodinámica de los agujeros negros e introduciremos para finalizar con la introducción de sus leyes. Posteriormente revisaremos como la acción euclidiana se relaciona con la termodinámica de agujeros negros.

1.1. Termodinámica de agujeros negros

Es bien sabido en nuestros tiempos que los agujeros negros tiene temperatura y entropía, sin embargo como todos los avances científicos, no fue así en el inicio. Posiblemente uno de los primeros hallazgos que llevo al nacimiento de esta disciplina se llevo a cabo en 1971 con el artículo [13] escrito por Hawking en el que se describe la cantidad de energía que se puede extraer como ondas gravitatorias en el colapso de dos agujeros negros, particularmente se muestra que el área del horizonte resultante después del colapso es mayor o igual a la suma de las áreas de los horizontes antes del colapso, podemos escribir esta afirmación en forma de ecuación como sigue

$$\mathcal{A}_f \geq \mathcal{A}_i \tag{1.1}$$

donde \mathcal{A}_f es el área del horizonte final y \mathcal{A}_i la suma de las áreas de los horizontes antes del colapso.

Siguiendo esta línea otro hallazgo importante viene siendo el descrito en [14], donde a través de la teoría de información e inspirado en la resolución de la paradoja del demonio de Maxwell propuesta por Brillouin [15], se define la entropía asociada a un agujero negro siendo esta proporcional al área de su horizonte.

Es importante notar que con la definición de entropía y el teorema del área queda establecida la segunda ley de la termodinámica.

Posteriormente a los resultados de Bekenstein, se publicó un artículo [16] escrito por Bardeen, Carter y Hawking donde se establecieron la 4 leyes de la termodinámica, no precisamente en su forma final, pero en una forma muy cercana. En el artículo mencionado se argumenta que los resultados son solo analogías, principalmente porque los agujeros negros no pueden tener asociada una temperatura física ya que de ser así emitirían radiación.

Sin embargo, Bekenstein en favor de tomar la termodinámica literalmente, generalizó la definición de la entropía, estableciendo que “la entropía común más la entropía del agujero negro no decrece” [17]. Desafortunadamente el problema de la temperatura continuaba, hasta que Hawking descubrió que los agujeros negros sí radian [1, 18], lo que lo llevo a cambiar su postura y mostrarse a favor de que los agujeros negros poseen propiedades termodinámicas.

Así podemos concluir esta narrativa con *las cuatro leyes de la termodinámica de agujeros negros* en su forma final, las cuales enunciamos a continuación:

- *Ley cero de la termodinámica:* La gravedad superficial κ de un agujero negro estacionario es constante sobre el horizonte [16, 19, 20].
- *Primera ley de la termodinámica:* Establece la conservación de energía en la siguiente forma [20]

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (1.2)$$

donde M es la masa del agujero negro, T su temperatura, S su entropía, Ω la velocidad angular, J el momento angular, Φ el potencial eléctrico y Q la carga eléctrica.

Es importante señalar que la temperatura y entropía están dadas como

$$T := \frac{\kappa}{2\pi}, \quad S := \frac{\mathcal{A}}{4} \quad (1.3)$$

donde \mathcal{A} es el área del horizonte.

- *Segunda ley de la termodinámica:* Es básicamente el teorema del área del horizonte de Hawking [13] estableciendo que la entropía de un agujero negro no decrece con el tiempo.

$$dS \geq 0. \quad (1.4)$$

- *Tercera ley de la termodinámica:* Establece que es imposible llegar a la temperatura (gravedad superficial) cero en una cantidad finita de pasos [21].

Estas cuatro leyes establecen la base del estudio termodinámico de agujeros negros, el cual ha continuado hasta nuestros tiempos debido a que el entendimiento de las propiedades termodinámicas de los sistemas gravitatorios se sigue enriqueciendo, desde el estudio de soluciones asintóticamente AdS, como la introducción de la constante cosmológica en la primera ley de la termodinámica, hasta el descubrimiento del diccionario AdS/CFT. Una buena revisión de estos temas se pueden encontrar en [22].

1.2. Acción Euclidiana y Función de Partición

En la actualidad existen varias propuestas a la gravedad cuántica, todas con sus limitantes y ventajas. Entre estas se encuentra el método de la integral de camino euclidiana, una de sus aplicaciones más importante es la obtención de la función de partición de sistemas gravitatorios con agujeros negros, esto nos permite estudiar la termodinámica de dichos sistemas. En esta sección mostraremos como obtener la función de partición por medio de este método.

En el formalismo de la integral de camino, uno puede escribir la amplitud de probabilidad de que un campo ϕ_1 a un tiempo t_1 pase a una configuración ϕ_2 a un tiempo t_2 como se muestra en la siguiente ecuación,

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iI}, \quad (1.5)$$

donde la integral de camino es tomada sobre las configuraciones que satisfacen las condiciones de frontera $\phi = \phi_2$ al tiempo t_2 y $\phi = \phi_1$ al tiempo t_1 .

Por otro lado el lado izquierdo de (1.5) puede reescribirse en términos del operador de evolución temporal como se muestra a continuación,

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \langle \phi_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | \phi_1 \rangle, \quad (1.6)$$

justo aquí es donde entra la importancia de la rotación de Wick, relacionando la cuántica con la física estadística, específicamente realizando la rotación de Wick $-i\beta = (t_2 - t_1)$, el lado derecho de (1.6) puede reescribirse como

$$\langle \phi_2 | e^{-\beta H} | \phi_1 \rangle, \quad (1.7)$$

así la integral de camino queda con la forma siguiente,

$$\langle \phi_2 | e^{-\beta H} | \phi_1 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-I_E}, \quad (1.8)$$

donde I_E representa la acción euclidiana.

Así, la función de partición del sistema se puede reescribir en términos de la integral de camino como

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}\phi e^{-I_E}, \quad (1.9)$$

donde la integral se realiza sobre los campos que cumplen con la igualdad $\phi_1 = \phi_2$ y que tienen periodo β en el tiempo imaginario.

Es importante resaltar que la ecuación (1.9) está construida para el ensamble canónico. En el caso del ensamble gran canónico se tendrán cantidades conservadas C_i y variables conjugadas μ . Para este ensamble la función de partición se escribiría como se muestra a continuación,

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta W} = \int \mathcal{D}\phi e^{-I_E}, \quad (1.10)$$

donde W representa el gran potencial, el cual es usualmente llamado “energía libre”, matemáticamente esta cantidad se escribe de la siguiente manera,

$$W = H - \sum_i \mu_i C_i. \quad (1.11)$$

Es útil tener en mente el agujero negro de Kerr-Newman, para esta solución se tiene un sistema con carga eléctrica Q y momento angular J como cantidades termodinámicas conservadas y el potencial eléctrico Φ y la velocidad angular Ω como sus potenciales químicos respectivamente.

Teniendo la función de partición en términos de la acción euclidiana se podría proseguir a calcularla, desafortunadamente esto no es posible, por lo que asumiremos que la mayor contribución de la acción está dada por la solución clásica. Bajo esta suposición la función de partición (1.10) se puede aproximar a través de la siguiente relación

$$Z \approx e^{-I_E}, \quad (1.12)$$

la cual es llamada *aproximación semiclásica*.

Así una vez obtenida la acción euclidiana del sistema es inmediato el calculo de la función de partición y con esta última se tiene toda la información termodinámica del sistema.

De la función de partición podemos extraer la energía libre del sistema W , la cual está dada por

$$W = -\beta^{-1} \ln Z \quad (1.13)$$

y dado que la función de partición está dada directamente por la acción euclidiana (1.12), la energía libre queda dada por la simple relación

$$W = \beta^{-1} I_E. \quad (1.14)$$

Por otra parte, la energía libre W se relaciona con la energía del sistema a través de la transformación de Legendre correspondiente,

$$M = W + TS + \sum_i \mu_i C_i, \quad (1.15)$$

más aún si consideramos (1.15) junto con la primera ley de la termodinámica tenemos la siguiente relación [23],

$$dW = -SdT - \sum_i \mu_i dC_i, \quad (1.16)$$

la cual resulta muy útil, ya que es la energía libre la que se obtiene directamente al calcular la acción euclidiana.

Directamente de (1.16) se pueden extraer las siguientes relaciones,

$$S = -\left. \frac{\partial W}{\partial T} \right|_{\{C_i\}}, \quad \mu_i = -\left. \frac{\partial W}{\partial C_i} \right|_{T, \{C_{j \neq i}\}}, \quad (1.17)$$

1.2. ACCIÓN EUCLIDIANA Y FUNCIÓN DE PARTICIÓN

las cuales facilitan el cálculo de varias cantidades termodinámicas una vez obtenida la energía libre del sistema, particularmente el cálculo de la entropía.

Así tenemos los elementos necesarios para comenzar nuestro estudio termodinámico de agujeros negros a través del método euclidiano, el cual reduce el problema al cálculo explícito de la acción I_E .

CAPÍTULO 2

SOLUCIONES CON UN SOLO HORIZONTE

En esta sección aplicaremos el método euclidiano para analizar soluciones de agujeros negros. Iniciaremos con la primera solución encontrada de agujero negro, la métrica de Schwarzschild. Posteriormente añadiremos carga eléctrica al sistema, lo que nos llevará a analizar la métrica de Reissner-Nordström. Finalmente añadiremos rotación al sistema, obteniendo un agujero negro con carga eléctrica y momento angular, por lo que haremos uso de la métrica de Kerr-Newman. Cabe mencionar que todas estas soluciones serán estudiadas en su versión con tiempo imaginario i.e. en su versión euclidiana.

Cabe señalar que no tomaremos en cuenta el interior del agujero negro como parte del espacio-tiempo, por lo que en todos los casos estudiados en este capítulo, solo contaremos con el horizonte exterior del agujero negro.

2.1. Schwarzschild

Comenzaremos por analizar la termodinámica de la primera solución descubierta de agujero negro, la bien conocida métrica de Schwarzschild [24]. Para nuestros fines consideremos dicha métrica en signatura euclidiana, para llegar a dicha solución se realiza una rotación de Wick, i.e. la transformación $\tau = it$,

obteniendo el siguiente resultado

$$g = f(r)d\tau^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.1a)$$

$$f(r) := 1 - \frac{2m}{r}, \quad (2.1b)$$

donde la función f está en su forma usual y m es la masa del agujero negro.

Como se mostró previamente los estados permitidos en el sistema deben de ser periódicos en el tiempo, esto lleva a cambiar los valores que puede tomar el tiempo de \mathbb{R} a un círculo S^1 , cambiando así la topología del espacio-tiempo, resultando en $S^1 \times \mathbb{R} \times S^2$.

Temperatura

Para obtener el valor de la temperatura asociada al sistema se puede recurrir a la relación (1.3) y calcular la gravedad superficial en el horizonte del agujero negro. Sin embargo con el fin de mostrar la relación entre la temperatura y las singularidades cónicas tomaremos un camino menos directo.

Antes de comenzar a determinar la temperatura del sistema en cuestión, debemos de percatarnos de un fenómeno que surge en el espacio-tiempo euclídeo, para esto analizaremos el comportamiento de la métrica cerca del horizonte del agujero negro $r = r_H$ ($r_H := 2m$), esto se traduce en expandir la función $f(r)$ en una serie de Taylor alrededor de r_H ,

$$f(r) \approx f(r_H) + f'(r_H)(r - r_H) = f'(r_H)(r - r_H) \quad (2.2)$$

así podemos escribir la métrica cerca del horizonte como se muestra a continuación

$$g_{2D} = f'(r_H)(r - r_H)d\tau^2 + \frac{1}{f'(r_H)(r - r_H)}dr^2 \quad (2.3)$$

donde nos hemos concentraremos en la métrica 2-dimensional generada por las coordenadas (τ, r) con topología $S^1 \times \mathbb{R}$, ya que la parte con simetría esférica no es relevante para el análisis. Enfocaremos nuestra atención en la búsqueda de ángulos de exceso o déficit cerca del horizonte, esta peculiaridad es llamada *singularidad cónica*. La forma de detectar singularidades cónicas es determinar la parte 2-dimensional del espacio que contiene la singularidad cónica y analizar la métrica restringida a este espacio de dos dimensiones. El análisis consiste en comparar la métrica reducida con una métrica plana en dos dimensiones, particularmente es útil compararla con la métrica plana en coordenadas polares, para que el déficit o exceso angular quede reflejado en forma explícita.

Con el fin de comparar la métrica reducida (2.3) con la métrica plana en polares definamos una nueva coordenada ξ , a través de la siguiente ecuación

$$d\xi^2 = \frac{dr^2}{f'(r_H)(r - r_H)}, \quad (2.4)$$

no es complicado resolver esta ecuación para ξ , obteniendo

$$\xi = \int \frac{dr}{[f'(r_H)(r - r_H)]^{1/2}} = 2 \left(\frac{r - r_H}{f'(r_H)} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

2.1. SCHWARZSCHILD

donde hemos tomado $\xi(r_H) = 0$.

De esta forma la métrica reducida en las nuevas coordenadas queda como se muestra a continuación

$$g = d\xi^2 + \left(\frac{f'(r_H)}{2} \right)^2 \xi^2 d\tau^2, \quad (2.6)$$

en esta forma es directo comparar la métrica reducida con la métrica plana en polares,

$$g_{\text{polares}} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad (2.7)$$

ya que ξ juega el papel de ρ y τ el papel de φ , esto debido a que τ es una coordenada que vive en un círculo S^1 , por lo que juega el papel de un ángulo.

Antes de proseguir es instructivo resaltar que en las nuevas coordenadas el espacio-tiempo reducido toma la forma de un puro. Si uno se pregunta por el el espacio-tiempo completo solo basta con añadir en cada punto del puro una esfera S^2 .

Regresando al análisis, si no tuviéramos la presencia de una singularidad cónica en $r = r_H$, la métrica alrededor de r_H debería coincidir con la métrica plana localmente, esto es consecuencia del principio de equivalencia. Por simple inspección de (2.6) podemos observar que tenemos un término extra en la métrica, intuitivamente es posible absorber este término en la parte angular y las métricas serían similares, analicemos esto rigurosamente.

En el espacio plano 2-dimensional se tiene que si integramos la parte angular debemos obtener 2π , esto es

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad (2.8)$$

lo cual se traduce para la métrica reducida y la variable τ de la siguiente manera

$$\int_0^\beta \frac{f'(r_H)}{2} d\tau = \frac{f'(r_H)}{2} \beta, \quad (2.9)$$

así el exceso o déficit en la parte angular, al cual denominaremos δ , esta dado por la diferencia entre (2.8) y (2.9),

$$\delta = 2\pi \left(1 - \frac{f'(r_H)}{4\pi} \beta \right), \quad (2.10)$$

si $\delta < 0$ tenemos un exceso, si $\delta > 0$ tenemos un déficit.

Recordando que para el caso de la métrica de Schwarzschild la gravedad superficial esta dada por

$$\kappa = \frac{f'(r_H)}{2} = \frac{1}{4m} \quad (2.11)$$

podemos reescribir la ecuación (2.10) en una forma más general,

$$\delta = 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa}{2\pi} \right), \quad (2.12)$$

la cual seguirá siendo válida para casos más generales.

En este punto se lleva a cabo uno de los pasos más importantes para definir la temperatura asociada al sistema, la cual es tener un espacio-tiempo libre de singularidades cónicas. Afortunadamente esto se puede realizar a través de fijar β , lo cual es equivalente a determinar el valor de la temperatura T , así tenemos

$$\beta = \frac{2\pi}{\kappa}, \quad (2.13)$$

en términos de la temperatura ($\beta^{-1} = T$),

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2.14)$$

con lo que hemos obtenido la fórmula para la temperatura de Hawking a través del método euclidiano [2].

La ecuación (2.14) es un resultado genérico, siendo una forma práctica para obtener la temperatura de Hawking.

Para nuestro caso particular podemos usar (2.11), obteniendo

$$T = \frac{1}{8\pi m}, \quad (2.15)$$

aquí podemos observar que la temperatura T va como el inverso de la masa m , lo que quiere decir que mientras menos masa, más grande la radiación que produce [1].

Energía Libre

En la sección 1.2 vimos que para obtener la energía libre W se requiere calcular la acción euclidiana del sistema. En este capítulo mostraremos como se realiza dicho cálculo para la solución de Schwarzschild.

Tenemos que la acción está dada como

$$I_E = -\frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} R - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} [K], \quad (2.16)$$

dado que estamos en el caso de vacío tenemos $R = 0$, con lo que el problema se reduce a calcular el término de frontera de Gibbons-Hawking [2, 25],

$$I_E = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} [K], \quad (2.17)$$

es interesante darse cuenta que la termodinámica está codificada en el término de frontera Gibbons-Hawking y que la parte de la acción Einstein-Hilbert no juega ningún papel relevante.

El término de frontera Gibbons-Hawking consiste en dos partes $[K] := K - K_o$, con K la traza de la curvatura extrínseca de $\partial\mathcal{M}$ y K_o la traza de la curvatura extrínseca de la superficie $\partial\mathcal{M}$ embebida en espacio plano

2.1. SCHWARZSCHILD

Antes de proseguir hay que realizar unos comentarios sobre ∂M , la ecuación (2.17) está escrita para variedades compactas, por lo que para el espacio tiempo de Schwarzschild la frontera consistiría en dos superficies, una en el horizonte y la otra para distancias lejanas espacialmente. Esto no crea ningún conflicto, ya que como veremos el límite de la integral que tiende al infinito espacial está bien definido.

Comenzaremos obteniendo el resultado de la primera integral

$$\int_{\partial M} K = n (Vol \partial M), \quad (2.18)$$

afortunadamente para no es necesario calcularla explícitamente, ya que podemos hacer uso de la siguiente identidad [2, 26]

$$\int_{\partial M} K = n (Vol \partial M), \quad (2.19)$$

donde n un vector unitario perpendicular a ∂M y el término $Vol \partial M$ indica el volumen de ∂M .

Así para la solución de Schwarzschild nuestra frontera está formada por dos hipersuperficies, una en el horizonte y otra situada en el infinito espacial. Para calcular estas contribuciones consideraremos una hipersuperficie \mathcal{N} definida por $r = \text{constante}$ y $r_H < r < \infty$, posteriormente calcularemos (2.18) y tomaremos los límites correspondientes.

Para calcular el volumen de \mathcal{N} , necesitamos la métrica inducida h sobre \mathcal{N} , la cual está dada por

$$h = f d\tau^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.20)$$

con esta métrica el volumen de \mathcal{N} se calcula directamente,

$$Vol \mathcal{N} = \int_{\mathcal{N}} \sqrt{|h|} = \int_{\mathcal{N}} f^{1/2} r^2 \sin \theta = 4\pi r^2 f^{1/2}. \quad (2.21)$$

El vector unitario normal n se puede construir rápidamente ya que la métrica es diagonal y queda dado como

$$n = g_{rr}^{-1/2} \partial_r = f^{1/2} \partial_r \quad (2.22)$$

con lo que podemos calcular la integral (2.19) sobre \mathcal{N} ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} K &= n (Vol \mathcal{N}) \\ &= \beta f^{1/2} \partial_r (4\pi r^2 f^{1/2}) \\ &= 4\pi \beta f^{1/2} \partial_r (r^2 f^{1/2}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ahora prosigamos con el cálculo de la segunda integral en (2.17) sobre \mathcal{N} i.e.,

$$\int_{\mathcal{N}} K_o, \quad (2.24)$$

donde K_o esta dada por la traza de la curvatura extrínseca de \mathcal{N} calculada en un fondo plano. Es por esta razón que no es posible calcular esta integral a través de (2.18) y se tiene que calcular explícitamente.

Comenzaremos calculando la curvatura extrínseca la cual está dada por [27],

$$K_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} n_{\nu} - \sigma n_{\mu} a_{\nu}, \quad (2.25)$$

donde ∇ es la derivada covariante, n el vector unitario normal a la superficie \mathcal{N} ; a y σ están pueden ser calculadas a través de las siguientes relaciones,

$$a^{\mu} = n^{\nu} \nabla_{\nu} n^{\mu}, \quad (2.26a)$$

$$\sigma = n^{\nu} n_{\nu}. \quad (2.26b)$$

Dado que la cantidad de interés es la traza de la curvatura extrínseca, esta se calcula a contrayendo el $K_{\mu\nu}$ con la inversa de la métrica $g^{\mu\nu}$, i.e.,

$$K_o = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

donde la métrica esta dada por,

$$g = d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.28)$$

y dado que \mathcal{N} tiene topología $S^1 \times S^2$ el vector normal vendría siendo $n = \partial_r$.

De esta forma es directo calcular K_o ,

$$\begin{aligned} K_o &= g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\nu} (\nabla_{\mu} n_{\nu} - n_{\mu} n^{\lambda} \nabla_{\lambda} n_{\nu}) \\ &= \frac{2}{r}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Introduciendo este resultado en (2.24) y calculando la integral, obtenemos

$$\int_{\mathcal{N}} K_o = 4\pi\beta f^{1/2} 2r, \quad (2.30)$$

de aquí podemos observar que en el límite $r \rightarrow \infty$ la integral diverge esto es debido a que esta parte del término de frontera es básicamente un contratérmino, el cual se elimina con la parte divergente de (2.18) quedando un resultado finito para (2.17).

Veamos explícitamente que esto es así juntando los resultados obtenidos (2.23) y (2.29) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} [K] &= 4\pi\beta f^{1/2} [\partial_r (r^2 f^{1/2}) - 2r] \\ &= 4\pi\beta f^{1/2} [2r (f^{1/2} - 1) + r^2 \partial_r f^{1/2}]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.1. SCHWARZSCHILD

Ahora tomemos los límites correspondientes para obtener las integrales sobre la frontera de \mathcal{M} i.e.,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} [K] = \lim_{r \rightarrow r_H} \int_{\mathcal{N}} [K] + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{N}} [K], \quad (2.32)$$

para la frontera que se encuentra en el horizonte $r = r_H$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow r_H} \int_{\mathcal{N}} [K] &= \lim_{r \rightarrow r_H} 4\pi\beta f^{1/2} [2r(f^{1/2} - 1) + r^2 \partial_r f^{1/2}] \\ &= 4\pi\beta \left(\lim_{r \rightarrow r_H} f^{1/2} \right) \lim_{r \rightarrow r_H} (2r(f^{1/2} - 1) + r^2 \partial_r f^{1/2}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

esto debido a que $f \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow r_H$, con lo que nos quedamos solo con el valor de la integral en el infinito espacial, esto es $r \rightarrow \infty$, así (2.32) queda como

$$\int_{\partial\mathcal{M}} [K] = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{N}} [K], \quad (2.34)$$

para calcular este término término expandimos $f^{1/2}$ en serie de potencias despreciando términos de orden cuadrático

$$f^{1/2} \approx 1 - \frac{m}{r}, \quad (2.35)$$

a través de esta aproximación podemos reescribir (2.31) como sigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} [K] &\approx 4\pi\beta \left(1 - \frac{m}{r}\right) \left[2r\left(-\frac{m}{r}\right) + r^2 \partial_r \left(1 - \frac{m}{r}\right)\right] \\ &= 4\pi\beta \left(1 - \frac{m}{r}\right) (-2m + m) \\ &= -4\pi\beta m + O(1/r), \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por lo tanto solo queda tomar el límite en (2.32), teniendo como resultado final

$$\int_{\partial\mathcal{M}} [K] = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{N}} [K] = -4\pi\beta m \quad (2.37)$$

Finalmente,

$$I_E = I_{GH} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} [K] = \frac{1}{2} \beta m. \quad (2.38)$$

Con lo que la energía libre de la solución de Schwarzschild queda dada por (1.13),

$$W = \frac{1}{2} m. \quad (2.39)$$

2.2. Reissner-Nordström

En esta sección estudiaremos el agujero negro de Reissner-Nordström [28, 29], el cual posee carga eléctrica, lo cual nos añadirá nuevas variables termodinámicas.

La métrica de Reissner-Nordström es la siguiente,

$$g = f(r)d\tau^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.40a)$$

$$f(r) := 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (2.40b)$$

la inclusión de carga eléctrica genera un potencial electromagnético

$$A = -\frac{q}{r}dt = i\frac{q}{r}d\tau, \quad (2.41)$$

donde la última igualdad viene de la rotación temporal $t \rightarrow -i\tau$.

Temperatura

Similarmente que en la sección 2.1 tenemos una métrica diagonal, con funciones componentes dependientes solo de la variable r . Por lo cual los resultados obtenidos siguen siendo validos. Así para calcular la temperatura basta con usar la ecuación (2.14).

La gravedad superficial para el agujero negro de Reissner-Nordström esta dado por

$$\kappa = \frac{f'(r_+)}{2} = \frac{m}{r_+^2} - \frac{q^2}{r_+^3} = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad (2.42)$$

$$r_{\pm} := m \pm \sqrt{m^2 - q^2}, \quad (2.43)$$

dando como resultado la temperatura siguiente,

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+}. \quad (2.44)$$

Energía libre

Del mismo modo que en la sección 2.1 para obtener la energía libre hay que calcular el valor de la acción euclidiana. Similarmente se tiene $R = 0$ para esta solución por lo cual tenemos,

$$I_E = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} [K] + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} F \wedge \star F. \quad (2.45)$$

2.2. REISSNER-NORDSTRÖM

Para el término de Gibbons-Hawking el procedimiento es idéntico a la solución de Schwarzschild ya que $f^{1/2} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow r_+$ y la métrica es diagonal. Así simplemente se tiene que substituir el valor f correspondiente a la métrica de Reissner-Nordström y quedarnos con términos de orden $1/r$. Donde observamos que

$$f \approx 1 - \frac{m}{r} \quad (2.46)$$

siendo el mismo valor que se obtuvo para la métrica de Schwarzschild, esto debido a que el término de carga se comporta como $1/r^2$ siendo despreciable para distancias largas. Con lo que la parte correspondiente a la acción de Gibbons-Hawking queda

$$I_{GB} = \frac{1}{2} \beta m. \quad (2.47)$$

La diferencia relevante para el estudio de este caso es el segundo término de (2.45), para calcularlo lo reescribiremos como una integral de frontera,

$$\begin{aligned} I_{em} &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} F \wedge \star F \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} dA \wedge \star F \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} [d(A \wedge \star F) + A \wedge d \star F] \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} d(A \wedge \star F) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{M}} A \wedge \star F. \end{aligned} \quad (2.48)$$

El valor de A está dado por (2.41), para el cálculo de la integral nos hace falta determinar $\star F$, para esto obtengamos primero F , para esto basta con calcular la derivada exterior de la ecuación (2.41),

$$F = dA = d \left(i \frac{q}{r} d\tau \right) = -i \frac{q}{r^2} dr \wedge d\tau, \quad (2.49)$$

ahora apliquemos el operador estrella de Hodge a F ,

$$\begin{aligned} \star F &= \star \left(-i \frac{q}{r^2} dr \wedge d\tau \right) \\ &= -i \frac{q}{r^2} \star dr \wedge d\tau \\ &= -i \frac{q}{r^2} \sqrt{|g|} g^{rr} g^{\tau\tau} \epsilon_{r\tau\theta\phi} d\theta \wedge d\phi \\ &= i \frac{q}{r^2} \sqrt{|g|} d\theta \wedge d\phi \\ &= i \frac{q}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ &= iq \sin \theta d\theta \wedge d\phi. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ya que la frontera de \mathcal{M} está formada por dos superficies una en $r \rightarrow \infty$ y la otra en $r = r_+$, se tiene

$$\int_{\partial M} A \wedge \star F = \int_{r=r_+} A \wedge \star F + \int_{r \rightarrow \infty} A \wedge \star F, \quad (2.51)$$

por lo que calcularemos primero calcularemos la integral sobre una hipersuperficie \mathcal{N} definida por $r = \text{constante}$ con $r_+ < r < \infty$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} A \wedge \star F &= \int_{\mathcal{N}} i \frac{q}{r} d\tau \wedge (iq \sin \theta d\theta \wedge d\varphi) \\ &= \int_{\mathcal{N}} -\frac{q^2}{r} \sin \theta d\tau \wedge d\theta \wedge d\varphi \\ &= -\frac{q^2}{r} \int_0^\beta d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= -4\pi\beta \frac{q^2}{r}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

ahora calculando los límites correspondientes tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} A \wedge \star F &= \lim_{r \rightarrow r_+} \int_{\mathcal{N}} A \wedge \star F + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{N}} A \wedge \star F \\ &= \lim_{r \rightarrow r_+} \left(-4\pi\beta \frac{q^2}{r} \right) + \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-4\pi\beta \frac{q^2}{r} \right) \\ &= -4\pi\beta \frac{q^2}{r_+} \\ &= -4\pi\beta q\Phi, \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde se ha introducido $\Phi := q/r$. Multiplicando por el coeficiente correspondiente, obtenemos la siguiente forma para I_{em} ,

$$I_{em} = -\frac{1}{2}\beta q\Phi. \quad (2.54)$$

Finalmente podemos obtener la energía libre W del sistema,

$$W = \beta^{-1} (I_{GH} + I_{em}) = \frac{1}{2} (m - q\Phi) \quad (2.55)$$

2.3. Kerr-Newman

En esta sección estudiaremos la solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica, esto es la solución Kerr-Newman [30, 31]. La métrica para esta solución está dada por

$$g = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} d\tau^2 + 2i \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) d\tau d\varphi + \frac{C}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \quad (2.56)$$

2.3. KERR-NEWMAN

donde las funciones Δ , Σ y C están dados por las siguientes relaciones,

$$\Delta := r^2 + a^2 - 2mr + q^2, \quad (2.57a)$$

$$\Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.57b)$$

$$C := (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (2.57c)$$

además tenemos un potencial eléctrico dado por

$$A = \frac{qr}{\Sigma} (id\tau + a \sin^2 \theta d\varphi). \quad (2.58)$$

Temperatura

Es posible mostrar siguiendo el procedimiento en [32] que la métrica efectiva 2-dimensional alrededor del horizonte para el caso Kerr-Newman se puede escribir como sigue,

$$g|_H = d\xi^2 + \xi^2 \kappa^2 d\tau, \quad (2.59)$$

donde $\xi \in [0, \infty]$ es una coordenada radial (con el horizonte exterior en $\xi = 0$) y $\tau \in S^1$ una coordenada angular; además κ es la gravedad superficial, la cual está dada por

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}, \quad (2.60a)$$

$$r_{\pm} := m \pm \sqrt{m^2 - q^2 - a^2}, \quad (2.60b)$$

donde a es el momento angular por unidad de masa $a = j/m$.

Obteniendo la temperatura

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 + a^2)}. \quad (2.61)$$

Energía Libre

La energía libre como es usual se calcula a través de la acción euclidiana dada por

$$I_E = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} [K] + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} A \wedge \star F, \quad (2.62)$$

donde $R = 0$ como en los casos previos.

Para calcular el término de Gibbons-Hawking hay que analizar el comportamiento de la forma de volumen inducida sobre una superficie \mathcal{N} definida por $r = \text{constante}$, sin olvidar que estamos interesados en el límite

$r \rightarrow \infty$. Así que analicemos los términos en (2.56) a distancias a largas,

$$g_{\tau\tau} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} = 1 - \frac{2mr - q^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \approx 1 - \frac{2m}{r}, \quad (2.63a)$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{r^2 + a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 - 2mr + q^2} \approx \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (2.63b)$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \approx r^2, \quad (2.63c)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{C}{\Sigma} \sin^2 \theta = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 (r^2 + a^2 - 2mr + q^2) \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \sin^2 \theta \approx r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.63d)$$

esto para los términos diagonales de la métrica, para los términos cruzados tenemos,

$$g_{\varphi\tau} = g_{\tau\varphi} = 2i \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) = 2i \frac{a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (2mr - q^2) \approx O(1/r), \quad (2.64)$$

lo cual es consistente con el hecho que la solución es asintóticamente plana.

Como podemos ver los términos diagonales reproducen la métrica de Schwarzschild, por lo que uno esperaría el mismo resulta para el término Gibbons-Hawking, sino tuviéramos los términos cruzados en la métrica, por lo que si podemos mostrar que estos no contribuyen al resultado final, habremos acabado.

Veamos como los términos cruzados contribuyen al volumen de \mathcal{N} , para esto necesitamos la métrica inducida sobre \mathcal{N} ,

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} d\tau^2 + 2i \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) d\tau d\varphi + \frac{C}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \Sigma d\theta^2 \\ &\approx 1 - \frac{2m}{r} d\tau^2 + O(1/r) d\tau d\varphi + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2, \end{aligned} \quad (2.65)$$

así el determinante de h queda como

$$|h| = r^2 \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) r^2 \sin^2 \theta + O(1/r^2) \right] = \left(1 - \frac{2m}{r} + O(1/r^4)\right) r^4 \sin^2 \theta \approx |h_S| \quad (2.66)$$

donde $|h_S|$ se refiere al resultado que se obtiene para Schwarzschild i.e.,

$$|h_S| := \left(1 - \frac{2m}{r}\right) r^4 \sin^2 \theta, \quad (2.67)$$

por lo cual tenemos el mismo resultado para el volumen que en los casos anteriores, lo que implica que el término Gibbons-Hawking de la acción queda como

$$I_{GH} = \frac{1}{2} \beta m. \quad (2.68)$$

Ahora analicemos la componente electromagnética, como vimos para la solución de Reissner-Nordström se tiene

$$I_{em} = \frac{1}{8\pi} \int_{r=r_+} A \wedge \star F, \quad (2.69)$$

2.3. KERR-NEWMAN

con un potencial electromagnético dado por (2.58), el cual tiene la estructura

$$A = A_\tau(r, \theta)d\tau + A_\varphi(r, \theta)d\varphi, \quad (2.70)$$

es útil no introducir la forma explícita del potencial electromagnético desde el inicio.

Comencemos calculando F ,

$$F = dA = \partial_r A_\tau dr \wedge d\tau + \partial_r A_\varphi dr \wedge d\varphi, \quad (2.71)$$

donde hemos omitido los términos con $\partial_\theta A_\tau$ y $\partial_\theta A_\varphi$, ya que estos no contribuyen al resultado final, debido a que la superficie de integración es a $r = \text{constante}$ y términos con factores dr no contribuirán a la integral.

Habiendo obtenido F , tenemos que $\star F$ está dado como

$$\star F = \partial_r A_\tau \star dr \wedge d\tau + \partial_r A_\varphi \star dr \wedge d\varphi, \quad (2.72)$$

donde $\star dr \wedge d\tau$ y $\star dr \wedge d\varphi$ tienen la forma

$$\begin{aligned} \star dr \wedge d\tau &= \sqrt{|g|} g^{rr} (g^{\tau\tau} \epsilon_{r\tau\theta\varphi} d\theta \wedge d\varphi + g^{\tau\varphi} \epsilon_{r\varphi\tau\theta} d\tau \wedge d\theta) \\ &= -\sqrt{|g|} g^{rr} (g^{\tau\tau} d\theta \wedge d\varphi + g^{\tau\varphi} d\tau \wedge d\theta), \end{aligned} \quad (2.73a)$$

$$\begin{aligned} \star dr \wedge d\varphi &= \sqrt{|g|} g^{rr} (g^{\varphi\varphi} \epsilon_{r\varphi\tau\theta} d\tau \wedge d\theta + g^{\varphi\tau} \epsilon_{r\tau\theta\varphi} d\theta \wedge d\varphi) \\ &= -\sqrt{|g|} g^{rr} (g^{\varphi\varphi} d\tau \wedge d\theta + g^{\varphi\tau} d\theta \wedge d\varphi), \end{aligned} \quad (2.73b)$$

con lo que podemos escribir $\star F$ como sigue,

$$\star F = -\sqrt{|g|} g^{rr} [(g^{\tau\varphi} \partial_r A_\tau + g^{\varphi\varphi} \partial_r A_\varphi) d\tau \wedge d\theta + (g^{\tau\tau} \partial_r A_\tau + g^{\varphi\tau} \partial_r A_\varphi) d\theta \wedge d\varphi]. \quad (2.74)$$

Reescribamos $\star F$ en términos de las componentes de la métrica y no de las componentes de la métrica inversa g^{-1} . Los términos diagonales son directos de calcular

$$g^{rr} = 1/g_{rr}, \quad (2.75a)$$

$$g^{\theta\theta} = 1/g_{\theta\theta}, \quad (2.75b)$$

para los términos cruzados utilizaremos la siguiente matriz,

$$M = \begin{pmatrix} g_{\tau\tau} & g_{\tau\varphi} \\ g_{\varphi\tau} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

con la cual los términos con partes cruzadas están dados por

$$g^{\tau\tau} = g_{\varphi\varphi}/|M|, \quad (2.77a)$$

$$g^{\varphi\varphi} = g_{\tau\tau}/|M|, \quad (2.77b)$$

$$g^{\tau\varphi} = -g_{\tau\varphi}/|M|, \quad (2.77c)$$

$|M|$ indica el determinante de M .

Vale la pena escribir $|g|$ como

$$|g| = g_{rr}g_{\theta\theta}|M|, \quad (2.78)$$

con lo que $\star F$ puede reescribirse de la siguiente forma,

$$\star F = -\sqrt{\frac{g_{\theta\theta}}{g_{rr}|M|}} [(g_{\tau\tau}\partial_r A_\varphi - g_{\tau\varphi}\partial_r A_\tau) d\tau \wedge d\theta + (g_{\varphi\varphi}\partial_r A_\tau - g_{\varphi\tau}\partial_r A_\varphi) d\theta \wedge d\varphi], \quad (2.79)$$

realizando el producto exterior con el potencial electromagnético A se obtiene,

$$\begin{aligned} A \wedge \star F &= -\sqrt{\frac{g_{\theta\theta}}{g_{rr}|M|}} [(g_{\tau\tau}\partial_r A_\varphi - g_{\tau\varphi}\partial_r A_\tau) A_\varphi + (g_{\varphi\varphi}\partial_r A_\tau - g_{\varphi\tau}\partial_r A_\varphi) A_\tau] d\tau \wedge d\theta \wedge d\varphi \\ &= -\sqrt{\frac{g_{\theta\theta}}{g_{rr}|M|}} [(g_{\varphi\varphi}A_\tau - g_{\tau\varphi}A_\varphi) \partial_r A_\tau + (g_{\tau\tau}A_\varphi - g_{\varphi\tau}A_\tau) \partial_r A_\varphi] d\tau \wedge d\theta \wedge d\varphi. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Escribamos $A \wedge \star F$ explícitamente en las coordenadas de Boyer-Linquist, comencemos con el determinante de M ,

$$\begin{aligned} |M| &= g_{\tau\tau}g_{\varphi\varphi} - g_{\tau\varphi}^2 \\ &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta}{\Sigma} - (-i)^2 \left(\frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} \right)^2 (r^2 + a^2 - \Delta)^2 \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma^2} [(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) ((r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta) + a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)] \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma^2} [\Delta^2 (-a^2 \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) + \Delta ((r^2 + a^2)^2 + a^4 \sin^4 \theta - 2a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2)) \\ &\quad + (-a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2 + a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2)] \\ &= \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Sigma^2} (r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta)^2 \\ &= \Delta \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.81)$$

con lo que tenemos,

$$\sqrt{\frac{g_{\theta\theta}}{g_{rr}|M|}} = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma \frac{-\Delta \sin^2 \theta}{\Delta}}} = \frac{1}{|\sin \theta|} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad (2.82)$$

Para el cálculo de $\partial_r A_\tau$ y $\partial_r A_\varphi$ es útil calcular primero

$$\partial_r \left(\frac{r}{\Sigma} \right) = \frac{1}{\Sigma} - \frac{2r}{\Sigma^2} = \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2}, \quad (2.83)$$

con lo que las parciales quedan de la siguiente forma,

$$\partial_r A_\tau = iq \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2}, \quad (2.84a)$$

$$\partial_r A_\varphi = aq \sin^2 \theta \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2}. \quad (2.84b)$$

Prosigamos con los términos en (2.80) que se encuentran entre paréntesis,

$$\begin{aligned}
 g_{\varphi\varphi}A_\tau - g_{\tau\varphi}A_\varphi &= \sin^2\theta \frac{C}{\Sigma} \left(i \frac{qr}{\Sigma} \right) - i \frac{a \sin^2\theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) aq \frac{r \sin^2\theta}{\Sigma} \\
 &= i \frac{qr \sin^2\theta}{\Sigma^2} [C - a^2 \sin^2\theta (r^2 + a^2 - \Delta)] \\
 &= i \frac{qr \sin^2\theta}{\Sigma^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2\theta \Delta - a^2 \sin^2\theta (r^2 + a^2 - \Delta)] \\
 &= i \frac{qr \sin^2\theta}{\Sigma^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2\theta (r^2 + a^2)] \\
 &= i \frac{qr \sin^2\theta}{\Sigma^2} (r^2 + a^2) [r^2 + a^2 - a^2 \sin^2\theta] \\
 &= i \frac{qr \sin^2\theta}{\Sigma} (r^2 + a^2), \tag{2.85a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{\tau\tau}A_\varphi - g_{\varphi\tau}A_\tau &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} aq \frac{r \sin^2\theta}{\Sigma} - i \frac{a \sin^2\theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) \left(i \frac{qr}{\Sigma} \right) \\
 &= \frac{aqr \sin^2\theta}{\Sigma^2} [(\Delta - a^2 \sin^2\theta) + (r^2 + a^2 - \Delta)] \\
 &= \frac{aqr \sin^2\theta}{\Sigma}. \tag{2.85b}
 \end{aligned}$$

Con lo que podemos escribir $A \wedge \star F$ en coordenadas Boyer-Linquist,

$$\begin{aligned}
 A \wedge \star F &= -\frac{1}{\sin\theta} \left[\left(i \frac{qr \sin^2\theta}{\Sigma} (r^2 + a^2) \right) \left(iq \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{aqr \sin^2\theta}{\Sigma} \right) \left(aq \sin^2\theta \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2} \right) \right] d\tau \wedge d\theta \wedge d\varphi \\
 &= -q^2 r \sin\theta \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^3} [-(r^2 + a^2) + a^2 \sin^2\theta] d\tau \wedge d\theta \wedge d\varphi \\
 &= q^2 r \sin\theta \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2} d\tau \wedge d\theta \wedge d\varphi. \tag{2.86}
 \end{aligned}$$

Integremos la cantidad obtenida sobre una hypersuperficie \mathcal{N} definida por $r = \text{constante}$,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{N}} A \wedge \star F &= \int_{\mathcal{N}} q^2 r \sin \theta \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2} d\tau \wedge d\theta \wedge d\varphi \\
 &= 2\pi\beta q^2 r \int_0^\pi \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2} \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi\beta q^2 r \int_0^\pi \partial_r \left(\frac{r}{\Sigma} \right) \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi\beta q^2 r \partial_r \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\Sigma} d\theta \\
 &= 2\pi\beta q^2 r \partial_r \arctan \left(-\frac{a \cos \theta}{r} \right) \Big|_0^\pi \\
 &= 4\pi\beta q^2 r \partial_r \arctan \frac{a}{r} \\
 &= -4\pi\beta q^2 \frac{r}{r^2 + a^2}, \tag{2.87}
 \end{aligned}$$

claramente esta integral en infinito desvanece por lo cual solo contribuye el término en el horizonte,

$$\int_{r=r_+} A \wedge \star F = -4\pi\beta q^2 \frac{r_+}{r_+^2 + a^2} = -4\pi\beta q \Phi, \tag{2.88a}$$

$$\Phi := \frac{qr_+}{r_+^2 + a^2}. \tag{2.88b}$$

Por lo tanto el valor de la parte electromagnética de la acción (2.69), queda dado como

$$I_{em} = -\frac{1}{2}\beta q \Phi. \tag{2.89}$$

Finalmente, con I_{GH} y I_{em} podemos obtener la energía libre para el agujero negro de Kerr-Newman,

$$W = \beta^{-1} (I_{GH} + I_{em}) = \frac{1}{2}(m - q\Phi), \tag{2.90}$$

es interesante observar que la rotación del agujero negro solo modifica en forma implícita la energía libre, a través del momento angular por unidad de masa a del cual depende Φ .

CAPÍTULO 3

DIHOYO DE SCHWARZSCHILD

En este capítulo se describe como obtener la temperatura para un sistema con más de un agujero negro. La solución que estudiaremos consiste en dos agujeros negros de Schwarzschild colineales, para el cual obtendremos su energía libre y su entropía.

3.1. Dihoyos de Schwarzschild

Es bien sabido que toda métrica estática y con simetría axial en el vacío, se puede escribir de la siguiente forma [33],

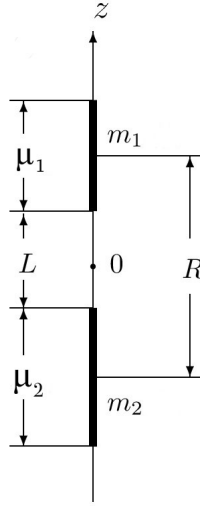
$$g = f d\tau^2 + f^{-1} (e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2), \quad (3.1)$$

donde f y γ son funciones de ρ y z ; también se ha realizado una rotación de Wick para tener la métrica en signatura euclidiana.

Para el caso de N Schwarzschild colineales la función f y γ toman la forma [34, 35]

$$f = \prod_{n=1}^N \frac{r_n^+ + r_n^- - 2m_n}{r_n^+ + r_n^- + 2m_n}, \quad (3.2a)$$

$$\gamma = \frac{1}{4} \sum_{n,m=1}^N \ln \left(\frac{r_n^+ r_m^- + z_n^+ z_m^- + \rho^2}{r_n^+ r_m^+ + z_n^+ z_m^+ + \rho^2} \cdot \frac{r_n^- r_m^+ + z_n^- z_m^+ + \rho^2}{r_n^- r_m^- + z_n^- z_m^- + \rho^2} \right), \quad (3.2b)$$


 Figura 3.1: Dihoyo de Schwarzschild con masas m_1 y m_2 .

donde r_n^\pm y z_n^\pm están dadas por

$$r_n^\pm = \sqrt{\rho^2 + (z_n^\pm)^2}, \quad (3.3a)$$

$$z_n^\pm = z - (z_n \pm m_n), \quad (3.3b)$$

con m_n y z_n la masa y posición sobre el eje z del n -ésimo agujero negro respectivamente.

El caso en el que estamos interesados es el dihojo de Schwarzschild, por lo que nos restringiremos al caso $N = 2$ (Bach-Weyl [36]). Esta solución describe dos agujeros negros colineales de masa m_1 y m_2 separados por una región denominada *strut* como se muestra en la figura 3.1, dicha región es necesaria para que el sistema esté en equilibrio, sin su presencia los agujeros negros colapsarían. El strut es una parte importante para la termodinámica como veremos en secciones siguientes.

Cabe resaltar que para $N = 1$ tenemos un solo agujero negro, lo que corresponde al agujero negro de Schwarzschild, para tener la métrica en la forma usual (2.1a) basta con realizar las siguientes transformaciones de coordenadas,

$$\rho = r \sqrt{1 - \frac{2m_1}{r}} \sin \theta, \quad (3.4a)$$

$$z - z_1 = (r - m_1 \cos \theta). \quad (3.4b)$$

3.1.1. Temperatura en presencia de dos horizontes

Como ya hemos visto para el caso de un solo agujero negro al realizar la rotación de Wick $\tau = -it$ se generan singularidades cónicas sobre los horizontes, para determinar el ángulo cónico basta con expandir la

3.1. DIHOYOS DE SCHWARZSCHILD

métrica alrededor de cada horizonte.

Comenzaremos calculando el ángulo cónico δ_1^h alrededor del horizonte $r = \mu_1 := 2m_1$ [34],

$$g_{2D} \approx F^2(\theta) \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{r}\right) d\tau^2 + \left(\frac{L + \mu_1 + \mu_2}{L + \mu_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{r}\right)^{-1} dr^2 \right], \quad (3.5)$$

donde se ha omitido la parte angular y $F(\theta)$ esta dado por

$$F(\theta) = \sqrt{\frac{L + \mu_1(\cos \theta + 1)/2}{L + \mu_2 + \mu_1(\cos \theta + 1)/2}}, \quad (3.6)$$

donde $\mu_2 = 2m_2$.

De (3.5) podemos ver que la superficie $r = \mu_1$ y $\tau = \text{constante}$ tiene una gravedad superficial

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\mu_1} \frac{L + \mu_1}{L + \mu_1 + \mu_2} \quad (3.7)$$

y una singularidad cónica

$$\delta_1^h = 2\pi - \int_0^\beta \kappa_1 d\tau = 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa_1}{2\pi}\right), \quad (3.8)$$

equivalentemente si se desarrolla la métrica alrededor del segundo agujero negro se tiene

$$\kappa_2 = \frac{1}{2\mu_2} \frac{L + \mu_2}{L + \mu_1 + \mu_2} \quad (3.9)$$

y por lo tanto

$$\delta_2^h = 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa_2}{2\pi}\right). \quad (3.10)$$

Así para eliminar las singularidades cónicas se deben satisfacer simultáneamente

$$\beta = \frac{2\pi}{\kappa_1} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2\pi}{\kappa_2}, \quad (3.11)$$

lo que implica $\kappa_1 = \kappa_2$, esto a su vez nos lleva a concluir de (3.7) y (3.9) que los agujeros negros tienen la misma masa, la cual denotaremos por m , así el método euclidiano queda restringido a un sistema de agujeros negros con la misma masa y una temperatura dada por la siguiente ecuación,

$$T = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{L + \mu}{L + 2\mu}, \quad (3.12)$$

donde $\mu = 2m$.

El mismo fenómeno ocurre para sistemas con N horizontes, para este caso se tendría un sistema de N ecuaciones a satisfacer, terminando en la necesidad de fijar la misma gravedad superficial en cada horizonte.

3.1.2. Energía Libre

Como vimos en la sección anterior para no tener singularidades cónicas en el sistema es necesario que los agujeros negros en el dihojo tengan la misma masa, sin embargo calcularemos la acción euclidiana para el dihojo de Schwarzschild en su forma genérica, i.e. con masas m_1 y m_2 , aplicando la condición $m_1 = m_2$ hasta el final. Así la acción euclidiana en nuestro caso está dada por

$$I_E = -\frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} R - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} [K] \quad (3.13)$$

Einstein-Hilbert

Primero analizaremos el término Einstein-Hilbert, en todos los casos analizados en el capítulo anterior se cumple la condición $R = 0$, por lo que el término Einstein-Hilbert no contribuía al valor de la acción euclidiana; sin embargo esto no es así para el dihojo de Schwarzschild ya que en la región del strut podemos encontrar una singularidad cónica y en presencia de estas singularidades tenemos que se cumple la siguiente identidad [37, 38],

$$\int_{\mathcal{M}} R = 2 \sum_i \delta_i A_i, \quad (3.14)$$

donde la suma es sobre todas las regiones con singularidad cónica, δ_i el ángulo de déficit de la i -ésima región y A_i el área de la misma.

En nuestro caso la región del strut es la región con singularidad cónica, por lo que el término de la integral del escalar de curvatura quedaría como sigue,

$$\int_{\mathcal{M}} R = 2\delta^\varphi A^s \quad (3.15)$$

donde A^s es el área del strut y δ^φ el ángulo de déficit o exceso generado por la singularidad cónica.

Para hallar el valor del ángulo δ^φ se realiza una reducción dimensional en las variables ρ y φ , para posteriormente analizarla alrededor de la región del strut, la métrica reducida quedaría como,

$$g_{strut} = f^{-1} (e^{2\gamma} d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2) \quad (3.16)$$

con lo que podemos calcular el ángulo δ^φ ,

$$\delta^\varphi = 2\pi - \int_0^{2\pi} e^{-\gamma_0} d\varphi = 2\pi(1 - e^{-\gamma_0}), \quad (3.17)$$

donde γ_0 es la función γ valuada en la sección que corresponde al strut,

$$\gamma_0 = \ln \left(\frac{L + \mu_1 + \mu_2}{L + \mu_1} \frac{L}{L + \mu_2} \right), \quad (3.18)$$

3.1. DIHOYOS DE SCHWARZSCHILD

con $\mu_1 = 2m_1$, $\mu_2 = 2m_2$ y L es la separación entre los agujeros de negros, la cual se muestra en la figura 3.1.

Usando (3.18) en (3.17) tenemos,

$$\delta^\varphi = -2\pi \frac{\mu_1 \mu_2}{L(L + \mu_1 + \mu_2)} = -8\pi \mathcal{F}, \quad (3.19)$$

donde se ha introducido la *fuerza de interacción* entre los agujeros negros,

$$\mathcal{F} := \frac{\mu_1 \mu_2}{4L(L + \mu_1 + \mu_2)}. \quad (3.20)$$

El área generada por la singularidad cónica viene dada por la evolución del strut en el tiempo euclidiano, i.e. $\mathcal{L} \times S^1$, donde \mathcal{L} es la región del strut y el S^1 es la topología del tiempo euclidiano τ . Así la métrica para calcular el área de la singularidad cónica es la siguiente,

$$g|_{\mathcal{L} \times S^1} = f d\tau^2 + f^{-1} e^{2\gamma} dz^2. \quad (3.21)$$

Integrando la forma de volumen generada por la métrica (3.21) tenemos,

$$A^s = \int_{\mathcal{L} \times S^1} e^{\gamma_0} dz d\tau = \beta e^{\gamma_0} L = \beta l, \quad (3.22)$$

donde hemos introducido $l := e^{\gamma_0} L$, denominada *longitud termodinámica* [39, 40], está cantidad mostrará ser la correcta variable termodinámica asociada al strut con \mathcal{F} su variable conjugada.

Teniendo todos los ingredientes necesarios, usamos (5.5), obteniendo

$$\int_{\mathcal{M}} R = 2\delta^\varphi A^s = 2(-8\pi \mathcal{F})(\beta l) = -16\pi \beta \mathcal{F} l, \quad (3.23)$$

con lo que el término Einstein-Hilbert queda

$$I_{EH} = \beta \mathcal{F} l. \quad (3.24)$$

Gibbons-Hawking

Proseguiremos con el término de frontera Gibbons-Hawking, para esto definamos una hiper-superficie \mathcal{N} a través del encaje

$$i(\tau, \theta, \varphi) = (\tau, \xi \sin \theta, \xi \cos \theta, \varphi), \quad (3.25)$$

donde $\theta \in [0, \pi]$ y $\xi = \text{constante}$. Con este encaje podemos calcular la métrica inducida sobre \mathcal{N} , la cual esta dada por

$$h := i^* g = f d\tau^2 + f^{-1} (e^{2\gamma} \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)|_{\xi}. \quad (3.26)$$

Teniendo en mente que estamos interesados en el límite $\xi \rightarrow \infty$, en lo que sigue nos enfocaremos en términos que no desvanezcan en dicho límite.

Similarmente al caso de un solo agujero negro primero calculemos el volumen de \mathcal{N} , para esto requerimos el determinante de h ,

$$|h| = f^{-1} e^{2\gamma} \xi^4 \sin^2 \theta, \quad (3.27)$$

con lo que podemos calcular el volumen de \mathcal{N} ,

$$\begin{aligned} Vol \mathcal{N} &= \int_{\mathcal{N}} \sqrt{|h|} d\tau d\theta d\varphi = 4\pi\beta\xi^2 e^\gamma f^{-1/2} \\ &\approx 4\pi\beta (\xi^2 + (m_1 + m_2) \xi), \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde se han despreciado términos de orden $O(1/\xi^2)$.

Así la primera parte de la integral del término Gibbons-Hawking viene dado como

$$\int_{\mathcal{N}} K = f^{1/2} \partial_\xi Vol \mathcal{N} \approx 4\pi\beta(2\xi - m_1 - m_2), \quad (3.29)$$

en cuanto a la segunda parte de la integral (\mathcal{N} embebida en espacio plano) se tiene

$$\int_{\mathcal{N}} K_o = 4\pi\beta(2\xi), \quad (3.30)$$

Así la integral del término completo $[K] = K - K_o$ queda

$$\int_{\mathcal{N}} [K] = -4\pi\beta(m_1 + m_2), \quad (3.31)$$

y con esto el término Gibbons-Hawking,

$$I_{GH} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\infty} [K] = -\frac{1}{8\pi} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{N}} [K] = \frac{1}{2} \beta(m_1 + m_2). \quad (3.32)$$

Así la acción euclidiana está dada por la relación

$$\beta^{-1} I_E = \frac{m_1 + m_2}{2} + \mathcal{F}l. \quad (3.33)$$

Energía libre y entropía

Teniendo en cuenta la condición de masas iguales para eliminar las singularidades cónicas, tenemos que la energía libre del dihojo de Schwarzschild queda como

$$W = \frac{\mu}{2} + \mathcal{F}l, \quad (3.34)$$

3.1. DIHOYOS DE SCHWARZSCHILD

con $\mu = 2m$.

Es útil volver a escribir la temperatura del sistema, así como reescribir \mathcal{F} y l con $\mu = \mu_1 = \mu_2$,

$$T = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{L + \mu}{L + 2\mu}, \quad (3.35a)$$

$$\mathcal{F} = \frac{\mu^2}{4L(L + 2\mu)}, \quad (3.35b)$$

$$l = \frac{L^2(L + 2\mu)}{(L + \mu)^2}. \quad (3.35c)$$

Como vimos en el capítulo 1, podemos usar la energía libre para calcular la entropía del sistema, a través de (1.17), primero necesitamos poner W en función de las variables termodinámicas adecuadas, las cuales para nuestro caso son la temperatura T ($\beta^{-1} = T$) y la longitud termodinámica l . Para esto usaremos las siguientes transformaciones [39]

$$\mu = \frac{1}{8\pi T} \left(1 + \pi l T - \sqrt{\pi l T (1 + \pi l T)} \right)^{-1} \quad (3.36)$$

$$L = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1 + 2\pi l T}{\sqrt{4\pi l T (1 + \pi l T)}} \right) \quad (3.37)$$

con lo que la energía libre W queda como

$$W = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2\pi T} - l + \sqrt{\frac{l}{\pi T} + l^2} \right), \quad (3.38)$$

de donde podemos obtener la entropía como se muestra a continuación,

$$S = - \left. \frac{\partial W}{\partial T} \right|_l = \frac{1}{16\pi T^2} + \frac{l}{16T \sqrt{\pi l T (1 + \pi l T)}}, \quad (3.39)$$

regresando a las variables L y μ , la entropía queda como sigue,

$$S = 2\pi\mu^2 \frac{L + 2\mu}{L + \mu}, \quad (3.40)$$

además el área del horizonte está dada por

$$A^h = 4\pi\mu^2 \frac{L + 2\mu}{L + \mu}, \quad (3.41)$$

con lo que la entropía del sistema se puede reescribir de forma compacta,

$$S = 2 \frac{A^h}{4}, \quad (3.42)$$

recuperando así la relación usual de Bekestein-Hawking.

Así queda demostrada la importancia de la longitud termodinámica l , ya que si no se considera como una variable termodinámica del sistema, no se recupera la entropía como un cuarto del área de los horizontes [34].

A pesar de que este acercamiento recupera el valor correcto de la entropía, tiene la dificultad de tener que cambiar la energía libre de los parámetros (μ, L) a los parámetros (T, l) , para posteriormente volver de nuevo a los parámetros (μ, L) ; lo que es redundante.

A continuación veamos un procedimiento más directo que simplifica los cálculos y permite obtener las cantidades termodinámicas para sistemas aún más complejos que el dihojo de Schwarzschild.

Tomando la diferencial de la energía libre (3.34), tenemos

$$dW = \frac{d\mu}{2} + \mathcal{F}dl + ld\mathcal{F} \quad (3.43)$$

y recordando que la diferencial de la energía libre como transformación de Legendre de la primera Ley tiene la forma

$$dW = -SdT + \mathcal{F}dl, \quad (3.44)$$

podemos usar las diferenciales de las ecuaciones (3.35) (el cual es un sistema lineal en los diferenciales), para reescribir (3.43) en la forma (3.44) obteniendo

$$dW = -2\pi\mu^2 \frac{L+2\mu}{L+\mu} dT + \frac{\mu^2}{4L(L+2\mu)} dl, \quad (3.45)$$

de donde se extrae la entropía S directamente, obteniendo el valor esperado (3.40), la cual reproduce la formula de Bekenstein-Hawking (3.42).

CAPÍTULO 4

PRIMERA LEY Y LONGITUD TERMODINÁMICA

En este capítulo obtendremos la primera ley de la termodinámica para soluciones de sistemas binarios de Kerr y Kerr-Newman, determinando el papel que juega la longitud termodinámica.

Las soluciones estudiadas en este capítulo fueron descubiertas recientemente y se obtienen a través de la aplicación de métodos de soluciones exactas.

Es importante mencionar que los resultados mostrados en este capítulo fueron publicados en [41, 42].

4.1. Soluciones Exactas

Las soluciones utilizadas en este capítulo se obtienen a través del formalismo de Ernst y el método de Sibgatullin. Estos paradigmas son un punto de inflexión en la historia de soluciones exactas, ya que antes de su desarrollo no existía un procedimiento sistemático para la obtención de soluciones de las ecuaciones de Einstein.

4.1.1. Formalismo de Ernst

Es bien sabido que las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el caso estacionario y con simetría axial se pueden describir a través de una métrica con la forma [43]

$$ds^2 = f^{-1} [e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt - \omega d\varphi)^2, \quad (4.1)$$

donde ρ, z, φ son las coordenadas de Weyl-Lewis-Papapetrou y t la coordenada temporal. Debido a las simetrías las funciones f, γ y ω solo dependen de ρ y z .

Ernst mostró en 1968 [3] que cualquier sistema con simetría axial que sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, puede describirse a través de una función compleja \mathcal{E} independiente del ángulo azimutal y que satisface la siguiente ecuación

$$\text{Re}(\mathcal{E})\nabla^2\mathcal{E} = \nabla\mathcal{E} \cdot \nabla\mathcal{E} \quad (4.2)$$

donde ∇ es el gradiente en tres dimensiones y ∇^2 el laplaciano. Recordando que las ecuaciones de Einstein en el vacío se escriben como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (4.3)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci. Es usual escribir el lado izquierdo de (4.3) como $G_{\mu\nu}$, denominado tensor de Einstein, con lo que las ecuaciones de vacío se pueden reescribir como

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (4.4)$$

Por otro lado el mismo Ernst mostró en [4] que cualquier solución a las ecuaciones Einstein-Maxwell con simetría axial y estacionaria,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu}, \\ \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) &= 0, \\ F_{\mu\nu,\gamma} + F_{\nu\gamma,\mu} + F_{\gamma\mu,\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento del campo electromagnético definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\gamma}F_{\nu}^{\gamma} - \frac{1}{4}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}), \quad (4.6)$$

puede describirse en términos de un par de funciones complejas (\mathcal{E}, Φ) , independientes del ángulo azimutal que satisfacen una generalización de (4.2),

$$(\text{Re}(\mathcal{E}) + |\Phi|^2)\nabla^2\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi^*\nabla\Phi) \cdot \nabla\mathcal{E}, \quad (4.7a)$$

$$(\text{Re}(\mathcal{E}) + |\Phi|^2)\nabla^2\Phi = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi^*\nabla\Phi) \cdot \nabla\Phi. \quad (4.7b)$$

4.1. SOLUCIONES EXACTAS

donde $\Phi = A_4 + iA'_3$, $\mathcal{E} = f - \Phi\Phi^* + i\Omega$, con A'_3 , Ω definidos a través de las ecuaciones diferenciales

$$A'_{3,\rho} = \rho^{-1}f(A_{3,z} - \omega A_{4,z}), \quad (4.8a)$$

$$A'_{3,z} = -\rho^{-1}f(A_{3,\rho} - \omega A_{4,\rho}), \quad (4.8b)$$

$$\omega_{,\rho} = -\rho f^{-2} \left(\Omega_{,z} + 2\text{Im}[(A_4 - iA'_3)(A_{4,z} + iA'_{3,z})] \right), \quad (4.8c)$$

$$\omega_{,z} = \rho f^{-2} \left(\Omega_{,\rho} + 2\text{Im}[(A_4 - iA'_3)(A_{4,\rho} + iA'_{3,\rho})] \right). \quad (4.8d)$$

A_3, A_4 son las componentes magnética y eléctrica del potencial electromagnético

$$A_\mu = (0, 0, A_3, -A_4). \quad (4.9)$$

Para obtener la solución de las ecuaciones (4.7a) y (4.7b) se deben calcular las funciones métricas f , γ y ω , las cuales satisfacen las siguientes ecuaciones,

$$f = \text{Re } \mathcal{E} + \Phi\Phi^*, \quad (4.10a)$$

$$\omega_{,\rho} = -\rho f^{-2} \text{Im}(\mathcal{E}_{,z} + 2\Phi^*\Phi_{,z}),$$

$$\omega_{,z} = \rho f^{-2} \text{Im}(\mathcal{E}_{,\rho} + 2\Phi^*\Phi_{,\rho}), \quad (4.10b)$$

$$\gamma_{,\rho} = \frac{\rho}{4(\text{Re } \mathcal{E} + \Phi\Phi^*)^2} [(\mathcal{E}_{,\rho} + 2\Phi^*\Phi_{,\rho})(\mathcal{E}_{,\rho}^* + 2\Phi\Phi_{,\rho}^*)$$

$$- (\mathcal{E}_{,z} + 2\Phi^*\Phi_{,z})(\mathcal{E}_{,z}^* + 2\Phi\Phi_{,z}^*)] - \frac{\rho(\Phi_{,\rho}\Phi_{,\rho}^* - \Phi_{,z}\Phi_{,z}^*)}{\text{Re } \mathcal{E} + \Phi\Phi^*}, \quad (4.10d)$$

$$\gamma_{,z} = \frac{\rho \text{Re}[(\mathcal{E}_{,\rho} + 2\Phi\Phi_{,\rho}^*)(\mathcal{E}_{,z}^* + 2\Phi\Phi_{,z}^*)]}{2(\text{Re } \mathcal{E} + \Phi\Phi^*)^2} - \frac{2\rho \text{Re}(\Phi_{,\rho}^*\Phi_{,z})}{\text{Re } \mathcal{E} + \Phi\Phi^*}. \quad (4.10e)$$

4.1.2. Método de Sibgatullin

El método de Sibgatullin [5] es un método integral que hace uso de la continuación analítica del análisis complejo para generar soluciones de la pareja $(\mathcal{E}(\rho, z), \Phi(\rho, z))$ a partir del valor de una pareja $(e(z), f(z))$ definida en el eje de simetría. La relación entre mencionados pares viene dada por $e(z) = \mathcal{E}(0, z)$ y $f(z) = \Phi(0, z)$. Los detalles pueden ser consultados en [44].

Los potenciales de Ernst en el plano complejo se obtienen de las formulas integrales

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)e(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma \quad (4.11a)$$

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)f(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma \quad (4.11b)$$

con la función $\mu_1(\sigma)$ por determinar a través de la condición integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1[e(\xi) + \check{e}(\eta) + 2f(\xi)\check{f}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0 \quad (4.12)$$

y la condición de normalización

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = \pi. \quad (4.13)$$

En las ecuaciones anteriores $\xi = z + i\rho\sigma$, $\eta = z + i\rho\lambda$ siendo ρ y z las coordenadas de Weyl-Lewis-Papapetrou y $\sigma, \lambda \in [-1, 1]$. Las funciones $e(\xi)$ y $f(\xi)$ son continuaciones holomorfas locales en el plano $z + i\rho$ de las funciones $e(z)$ y $f(z)$. Además se tiene $\tilde{e}(\xi) := (e(\xi^*))^*$, $\tilde{f}(\xi) := (f(\xi^*))^*$ y el símbolo \int denota el valor principal de la integral.

Una relación importante entre los parámetros de la solución viene dada por la ecuación de Sibgatullin

$$e(\xi) + \tilde{e}(\xi) + 2f(\xi)f(\tilde{\xi}) = 0, \quad (4.14)$$

cuyas raíces pueden ser escogidas de tal forma que las soluciones resultantes correspondan a objetos subextremos (raíces reales distintas), extremos (raíces reales iguales) y superextremos (raíces complejas conjugadas).

Una vez han sido calculadas \mathcal{E} y Φ la función f de la métrica (4.1) puede obtenerse a través de la relación (4.10a) i.e.,

$$f = \text{Re } \mathcal{E} + \Phi\Phi^*. \quad (4.15)$$

El método de Sibgatullin también permite calcular la función métrica ω ,

$$f\omega = \frac{1}{2}(H_{12} + H_{21}^*) + \Phi\Phi_2^* - iz, \quad (4.16)$$

con H_{12} , H_{21} y Φ_2 definidas mediante las formulas integrales

$$H_{12} = \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi\mu_1(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (4.17a)$$

$$H_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)e(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma, \quad (4.17b)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)f(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma. \quad (4.17c)$$

En las ecuaciones (4.17b) y (4.17c) se introdujo una nueva función $\mu_2(\sigma)$ que debe satisfacer las condiciones

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2[e(\xi) + \tilde{e}(\eta) + 2f(\xi)\tilde{f}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = -2\pi i, \quad (4.18a)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0. \quad (4.18b)$$

La función γ de la métrica se puede obtener de las ecuaciones (4.10c) y (4.10e) después de haber resuelto las condiciones de integrabilidad (4.7a) y (4.7b) que nos dan los potenciales de Ernst \mathcal{E} y Φ .

Finalmente para obtener las soluciones que se estudiarán en este capítulo se proponen las semillas de los potenciales de Ernst sobre el eje de simetría de la siguiente forma,

$$e(z) = 1 + \frac{e_1}{z - \beta_1} + \frac{e_2}{z - \beta_2}, \quad (4.19a)$$

$$f(z) = \frac{f_1}{z - \beta_1} + \frac{f_2}{z - \beta_2}, \quad (4.19b)$$

donde $e_1, e_2, f_1, f_2, \beta_1$ y β_2 son parámetros complejos que se eligen de tal forma que se obtenga la solución buscada.

4.2. Longitud Termodinámica

En esta sección centraremos nuestra atención al concepto de *longitud termodinámica*, el cual fue de suma importancia en el capítulo 3 para el estudio del dihojo de Schwarzschild.

El concepto de *longitud termodinámica* fue introducido en [12] por primera vez, donde se analizó agujeros negros con singularidades cónicas con ángulos de déficit. Posteriormente en [40] se comprobó la consistencia de la *longitud termodinámica* con la primera ley termodinámica para dos agujeros negros en equilibrio estático. Ciertamente indicios de esta cantidad se puede encontrar en trabajos previos como [39], donde se introdujo como una corrección a la masa asociada al sistema con el fin de obtener el valor correcto de entropía para el dihojo de Schwarzschild, debido a que un resultado incorrecto había sido obtenido en [34].

Así el determinar las variables termodinámicas correctas no es trivial. Debido a esto se decidió investigar el rol que juega la *longitud termodinámica* en sistemas binarios con mayor complejidad que el dihojo de Schwarzschild y a las estudiadas en [40]. Para esto se usaron soluciones que fueron descubiertas recientemente, obtenidas a través de la aplicación de los métodos de soluciones exactas expuestos en la sección 4.1.

4.2.1. Dihoyos de Kerr

En esta sección obtendremos la primera ley de la termodinámica para tres configuraciones de dos agujeros negros colineales con rotación. Comenzaremos con el caso de dos agujeros negros contrarotantes, posteriormente estudiaremos el caso de dos agujeros negros corotantes y finalizaremos con el caso de dos agujeros negros rotantes arbitrarios.

Los tres sistemas gozan de simetría axial y son soluciones estacionarias, pueden ser descritos con una métrica de la forma [43]

$$g = -f(id\tau - \omega d\varphi)^2 + f^{-1} (e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2), \quad (4.20)$$

donde la forma de cada función métrica depende de las características particulares a analizar.

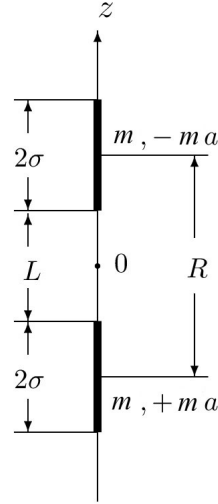


Figura 4.1: Dihoyo de Kerr contrarotante con la misma masa m y momentos angulares con signo contrario ma y $-ma$.

Dihoyo de Kerr contrarotante

El dihoyo de Kerr a analizar se muestra en la figura 4.1, consiste de dos agujeros negros con la misma masa m separados por un strut con momentos angulares contrarios ma y $-ma$; con a el momento angular por unidad de masa.

Los coeficientes f , γ y ω de la métrica (4.20), están dados por [9]

$$f = \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A + B|^2}, \quad e^{2\gamma} = \frac{|A|^2 - |B|^2}{16R^4\sigma^4 R_+ R_- r_+ r_-}, \quad \omega = -\frac{2\text{Im}[G(A + B)^*]}{|A|^2 - |B|^2}, \quad (4.21)$$

donde A , B y G vienen dados como

$$\begin{aligned} A = & m^2[4\sigma^2(R_+ R_- + r_+ r_-) + R^2(R_+ r_+ + R_- r_-)] \\ & + [(R - 2m)(R(\sigma^2 - a^2) + 2m^3) + 4m^2 a^2 \mu](R_+ r_- + R_- r_+) \\ & - 2ia\sigma R(R - 2m)(R_+ r_- - R_- r_+), \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$B = 2m\sigma R[\sigma R(R_+ + R_- + r_+ + r_-) - (2m^2 + ia(R - 2m))(R_+ - R_- - r_+ + r_-)], \quad (4.22b)$$

$$\begin{aligned} G = & -zB + m\sigma R[2m(2\sigma(r_+ r_- - R_+ R_-) + R(R_- r_- - R_+ r_+)) \\ & + (R + 2\sigma)(R\sigma - 2m^2 - ia(R - 2m))(R_+ - r_-) \\ & + (R - 2\sigma)(R\sigma + 2m^2 + ia(R - 2m))(R_- - r_+)], \end{aligned} \quad (4.22c)$$

R_{\pm} y r_{\pm} corresponden a las distancia desde los extremos de las barras que corresponden a los horizontes de los agujeros negros a la posición determinada por las coordenadas (ρ, z) , explícitamente están determinadas

4.2. LONGITUD TERMODINÁMICA

por

$$R_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{1}{2}R \pm \sigma\right)^2}, \quad r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{1}{2}R \pm \sigma\right)^2}, \quad (4.23)$$

como se muestra en la figura 4.1 ma el momento angular del agujero negro en $z < 0$ ($-ma$ del agujero negro en $z > 0$), R la distancia entre los centros de los agujeros negros, 2σ la longitud de la barra que representa el horizonte de cada agujero negro, σ esta dada por

$$\sigma = \sqrt{m^2 - a^2\mu}, \quad \mu := \frac{R - 2m}{R + 2m}. \quad (4.24)$$

Con estas formulas fue obtenida [9] la bien conocida formula de Smarr [45],

$$m = \frac{\kappa}{4\pi} \mathcal{A} + 2\Omega j \quad (4.25)$$

donde κ es la gravedad superficial, \mathcal{A} el área del horizonte; Ω la velocidad angular y $j := ma$ el momento angular del agujero negro en $z < 0$ ($-\Omega$ la velocidad angular y $-j = ma$ el momento angular del agujero negro en $z > 0$). Las cantidades \mathcal{A} , κ y Ω están dadas por [9]

$$\mathcal{A} = 8\pi m(m + \sigma) \left(1 + \frac{2m}{R}\right), \quad (4.26a)$$

$$\kappa = \frac{R\sigma}{2m(m + \sigma)(R + 2m)}, \quad (4.26b)$$

$$\Omega = \frac{a\mu}{2m(2 + \sigma)}, \quad (4.26c)$$

mientras la fuerza de interacción \mathcal{F} tiene la forma [46]

$$\mathcal{F} = \frac{m^2}{R^2 - 4m^2}. \quad (4.27)$$

Las identidades (4.26a) y (4.27), junto con $j = ma$ y la definición de σ nos permiten escribir la primera ley de la termodinámica a través de un procedimiento análogo al llevado a cabo en [40],

$$dm = \frac{R\sigma}{4\pi m(R + 2m)(m + \sigma)} dS + \frac{j\mu}{2m^2(m + \sigma)} dj - \frac{(R - 2\sigma)(R^2 - 4m^2)}{2R^2} d\mathcal{F} \quad (4.28)$$

donde sea a tomado la entropía S como un cuarto del área \mathcal{A} .

De (4.28) podemos identificar la temperatura

$$T = \left. \frac{\partial m}{\partial S} \right|_{j, \mathcal{F}} = \frac{R\sigma}{4\pi m(R + 2m)(m + \sigma)}, \quad (4.29)$$

la cual coincide con la temperatura de Hawking $T = \kappa/(2\pi)$; introduciendo la velocidad angular Ω y la longitud termodinámica l se puede reescribir (4.29), dando como resultado la primera ley de termodinámica

$$dM = 2TdS + 2\Omega dj - ld\mathcal{F}, \quad (4.30)$$

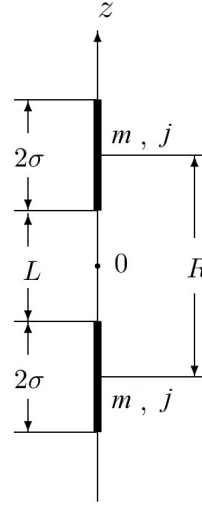


Figura 4.2: Dihoyo de Kerr corotante con la misma masa m y el mismo momento angular j .

donde $M = 2m$ y la longitud termodinámica tiene la forma

$$l = \frac{(R - 2\sigma)(R^2 - 4m^2)}{R^2}. \quad (4.31)$$

Es importante resaltar que la longitud termodinámica se puede reescribir como

$$l = L e^{\gamma_0}, \quad (4.32)$$

con $L = R - 2\sigma$ (ver fig. 4.1) y e^{γ_0} coincide precisamente con $(R^2 - 4m^2)/R^2$, donde γ_0 es el valor de γ en la región del strut.

La forma en (4.32) es exactamente la encontrada en [40], para el caso estático. Sin embargo, es prematuro pensar que es la forma genérica para l , por lo que analizaremos más sistemas binarios.

Dihoyo de Kerr corotantes

Prosigamos con el análisis de dos agujeros negros de Kerr con la misma masa m y el mismo momento angular j ; el cual se muestra en la figura 4.2.

Para este caso los coeficientes en (4.20) están dados por [7, 8]

$$f = \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A + B|^2}, \quad e^{2\gamma} = \frac{|A|^2 - |B|^2}{K_o^2 R_+ R_- r_+ r_-}, \quad \omega = 4a - \frac{2\text{Im}[G(A + B)^*]}{|A|^2 - |B|^2} \quad (4.33)$$

4.2. LONGITUD TERMODINÁMICA

en este caso los coeficientes A , B y G son

$$A = R^2(R_+ - R_-)(r_+ - r_-) - 4\sigma^2(R_+ - r_+)(R_- - r_-), \quad (4.34a)$$

$$B = 2R\sigma[(R + 2\sigma)(R_- - r_+) - (R - 2\sigma)(R_+ - r_-)], \quad (4.34b)$$

$$G = -zB + R\sigma[2R(R_-r_- - R_+r_+) + 4\sigma(R_+R_- - r_+r_-) - (R^2 - 4\sigma^2)(R_+ - R_- - r_+ + r_-)] \quad (4.34c)$$

y en este caso

$$R_{\pm} = \frac{-m(\pm 2\sigma + R) + id}{2m^2 + (R + 2ia)(\pm\sigma + ia)} \sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{1}{2}R \pm \sigma\right)^2}, \quad (4.35a)$$

$$r_{\pm} = \frac{-m(\pm 2\sigma - R) + id}{2m^2 - (R - 2ia)(\pm\sigma + ia)} \sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{1}{2}R \pm \sigma\right)^2} \quad (4.35b)$$

con las constantes K_o , d y σ

$$K_o = \frac{4\sigma^2[(R^2 + 2mR + 4a^2)^2 - 16m^2a^2]}{m^2[(R + 2m)^2 + 4a^2]}, \quad (4.36a)$$

$$d = \frac{2ma(R^2 - 4m^2 + 4a^2)}{R^2 + 2mR + 4a^2}, \quad (4.36b)$$

$$\sigma = \sqrt{m^2 - a^2 + d^2(R^2 - 4m^2 + 4a^2)^{-1}}. \quad (4.36c)$$

donde m corresponde a la masa del agujero negro como en el caso anterior, pero en este caso, j y a están relacionadas por la siguiente ecuación

$$j = \frac{ma[(R + 2m)^2 + 4a^2]}{R^2 + 2mR + 4a^2}, \quad (4.37)$$

prosigamos a investigar si se sigue cumpliendo la formula (4.32) para la longitud termodinámica en este sistema binario.

Similarmente, a los demás casos se puede mostrar que S , T , Ω y \mathcal{F} tienen la forma,

$$S = \frac{2\pi m[(R + 2m)^2 + 4a^2][(R + 2m)(m + \sigma) - 2a^2]}{(R + 2\sigma)(R^2 + 2mR + 4a^2)} \quad (4.38a)$$

$$T = \frac{\sigma(R + 2\sigma)(R^2 + 2mR + 4a^2)}{4\pi m[(R + 2m)^2 + 4a^2][(R + 2m)(m + \sigma) - 2a^2]} \quad (4.38b)$$

$$\Omega = \frac{(m - \sigma)(R^2 + 2mR + 4a^2)}{2ma[(R + 2m)^2 + 4a^2]} \quad (4.38c)$$

$$\mathcal{F} = \frac{m^2[(R + 2m)^2 - 4a^2]}{(R^2 - 4m^2 + 4a^2)[(R + 2m)^2 + 4a^2]} \quad (4.38d)$$

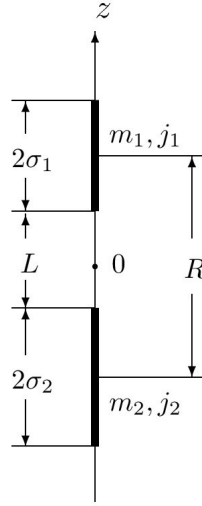


Figura 4.3: Dihoyo de Kerr con masas m_1 y m_2 , momento angular j_1 y j_2 respectivamente.

con estas cantidades y la diferencial de (4.37)

$$\begin{aligned}
 da &= \left(m[R(R+2m)^3 + 8a^2(R^2 + mR - 2m^2 + 2a^2)] \right)^{-1} \\
 &\times \left((R^2 + 2mR + 4a^2)^2 dj + 2m^2 a[(R+2m)^2 - 4a^2] dR \right. \\
 &\quad \left. - a[(R+2m)^2(R^2 + 4mR + 8a^2) + 16a^2(m^2 + a^2)] dm \right)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

podemos recuperarla primera ley de la termodinámica con la siguiente forma

$$dM = 2T dS + 2\Omega dj - l d\mathcal{F}, \tag{4.40}$$

donde $M = 2m$ y la longitud termodinámica l dada por

$$l = \frac{(R - 2\sigma)(R^2 - 4m^2 + 4a^2)[(R + 2m)^2 + 4a^2]}{(R^2 + 2mR + 4a^2)^2 - 16m^2 a^2}. \tag{4.41}$$

, reescribiendo l , obtenemos de nuevo la identidad

$$l = L e^{\gamma_0}. \tag{4.42}$$

Dihoyo de Kerr arbitrarios

Ahora pasaremos al caso del dihojo de Kerr arbitrario [6, 47], mostrado en la figura 4.3. En principio la solución puede derivarse de la solución de Kramer y Neugebauer [48].

4.2. LONGITUD TERMODINÁMICA

En este caso los coeficientes f , γ y ω en (4.20) están dados por las siguientes relaciones [6, 47]

$$f = \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A + B|^2}, \quad e^{2\gamma} = \frac{|A|^2 - |B|^2}{16|\sigma_1|^2|\sigma_2|^2 K_o^2 \tilde{R}_+ \tilde{R}_- \tilde{r}_+ \tilde{r}_-}, \quad \omega = 2a - \frac{2\text{Im}[G(A + B)^*]}{|A|^2 - |B|^2} \quad (4.43)$$

donde las constantes A , B y G están dadas por

$$A = (R^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2))(R_+ - R_-)(r_+ - r_-) - 4\sigma_1\sigma_2(R_+ - r_-)(R_- - r_+), \quad (4.44a)$$

$$B = 2\sigma_1(R^2 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2)(R_- - R_+) + 2\sigma_2(R^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2)(r_- - r_+) + 4R\sigma_1\sigma_2(R_+ + R_- - r_+ - r_-), \quad (4.44b)$$

$$G = -zB + \sigma_1(R^2 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2)(R_- - R_+)(r_+ + r_- + R) + \sigma_2(R^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2)(r_- - r_+)(R_+ + R_- - R) - 2\sigma_1\sigma_2[2R(r_+r_- - R_+R_- - \sigma_1(r_- - r_+) + \sigma_2(R_- - R_+) + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)(r_+ + r_- - R_+ - R_-)], \quad (4.44c)$$

donde r_\pm y R_\pm tienen la forma,

$$r_\pm = \mu_o^{-1} \frac{(\pm\sigma_1 - m_1 - ia_1)[(R + M)^2 + a^2] + 2a_1[m_1a + iM(R + M)]}{(\pm\sigma_1 - m_1 + ia_1)[(R + M)^2 + a^2] + 2a_1[m_1a - iM(R + M)]} \tilde{r}_\pm, \quad (4.45a)$$

$$R_\pm = -\mu_o \frac{(\pm\sigma_2 - m_2 - ia_2)[(R + M)^2 + a^2] - 2a_2[m_2a - iM(R + M)]}{(\pm\sigma_2 - m_2 + ia_2)[(R + M)^2 + a^2] - 2a_2[m_2a + iM(R + M)]} \tilde{R}_\pm, \quad (4.45b)$$

y las constantes K_o y μ_o

$$K_o = \frac{((R + M)^2 + a^2)(R^2 - (m_1 - m_2)^2 + a^2) - 8m_1m_2a^2}{m_1m_2((R + M)^2 + a^2)}, \quad \mu_o = \frac{R + M - ia}{R + M + ia}, \quad (4.46)$$

donde σ_1 y σ_2 son las longitudes medias de los agujeros negros, dadas por

$$\sigma_1 = \sqrt{m_1 - a_1 + 4m_2a_1d_1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{m_2 - a_2 + 4m_1a_2d_2}, \quad (4.47)$$

con d_1 y d_2 definidas como sigue

$$d_1 := \frac{(m_1(a_1 - a_2 + a) + Ra)[(R + M)^2 + a^2] + m_2a_1a^2}{[(R + M)^2 + a^2]^2} \quad (4.48a)$$

$$d_2 := \frac{(m_2(a_2 - a_1 + a) + Ra)[(R + M)^2 + a^2] + m_1a_2a^2}{[(R + M)^2 + a^2]^2}. \quad (4.48b)$$

Teniendo de esta forma un total de cinco parámetros libres, los cuales son m_1 , m_2 , a_1 , a_2 y R . La masa del agujero negro en $z > 0$ siendo m_1 y su momento angular por unidad de masa $a_1 = j_1/m_1$, para el agujero negro en $z < 0$ se tienen las correspondientes cantidades m_2 y $a_2 = j_2/m_2$; notemos que estas son cantidades de Komar. Como es usual R es la distancia entre los centros de los agujeros negros. La masa total, así como el momento angular total quedan determinados por

$$M = m_1 + m_2, \quad J = m_1a_1 + m_2a_2 \quad (4.49)$$

recordando que el parámetro a esta relacionado con los parámetros libres a través de la siguiente ecuación cúbica

$$(R^2 - M^2 + a^2)(a_1 + a_2 - a) + 2(R + M)(J - Ma) = 0. \quad (4.50)$$

Se puede mostrar que las entropías (S_1, S_2), temperaturas (T_1, T_2), velocidades angulares en los horizontes (Ω_1, Ω_2) de cada agujero negro y la fuerza de interacción \mathcal{F} tienen la forma

$$\frac{S_1}{\pi} = \frac{\sigma_1}{2\pi T_1} = \frac{[(m_1 + \sigma_1) [(R + M)^2 + a^2] - 2m_1 a_1 a]^2 + a_1^2 (R^2 - M^2 + a^2)^2}{[(R + M)^2 + a^2][(R + \sigma_1)^2 - \sigma_1^2]} \quad (4.51a)$$

$$\frac{S_2}{\pi} = \frac{\sigma_2}{2\pi T_2} = \frac{[(m_2 + \sigma_2) [(R + M)^2 + a^2] - 2m_2 a_2 a]^2 + a_2^2 (R^2 - M^2 + a^2)^2}{[(R + M)^2 + a^2][(R + \sigma_2)^2 - \sigma_2^2]} \quad (4.51b)$$

$$\Omega_1 = \frac{m_1 - \sigma_1}{2m_1 a_1}, \quad \Omega_2 = \frac{m_2 - \sigma_2}{2m_2 a_2} \quad (4.51c)$$

$$\mathcal{F} = \frac{m_1 m_2 [(R + M)^2 - a^2]}{(R^2 - M^2 + a^2)[(R + M)^2 + a^2]} \quad (4.51d)$$

teniendo las expresiones explícitas de las cantidades termodinámicas involucradas en la primera ley de la termodinámica es directo pero laborioso mostrar la validez de la siguiente igualdad,

$$dm_1 + dm_2 = T_1 dS_1 + T_2 dS_2 + \Omega_1 dj_1 + \Omega_2 dj_2 - l d\mathcal{F} \quad (4.52)$$

donde la cantidad l es la longitud termodinámica,

$$l = \frac{(R - \sigma_1 - \sigma_2)(R^2 - M^2 + a^2)[(R + M)^2 + a^2]}{(R^2 + MR + a^2)^2 - (m_1 - m_2)^2(R + M)^2 - 4m_1 m_2 a^2}, \quad (4.53)$$

el procedimiento para llegar a dicho resultado es simplemente algebraico.

Finalmente, l se puede expresar en la misma forma

$$l = L e^{\gamma_0}, \quad (4.54)$$

donde $L = R - \sigma_1 - \sigma_2$.

4.2.2. Dihoyos Kerr-Newman

Ahora se consideraran sistemas carga eléctrica y se obtendrá la forma que toma la longitud termodinámica en la primera ley para estas soluciones.

Debido a que la solución para dos agujeros negros de Kerr-Newman arbitrarios no existe, proseguiremos al análisis de dos soluciones particulares, la primera siendo un sistema formado por dos agujeros negros contrarotantes con la misma carga eléctrica y la segunda el caso con cargas opuestas. para después analizar el caso cuando se tienen cargas opuestas.

Dado que ambos casos tienen simetría axial y son soluciones estacionarias se pueden escribir por medio de la métrica usual

$$g = -f(id\tau - \omega d\varphi)^2 + f^{-1} (e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2). \quad (4.55)$$

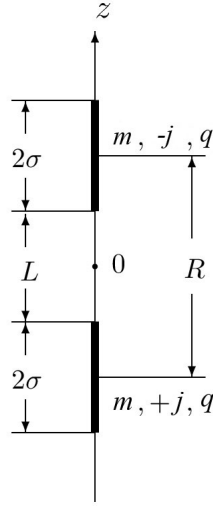


Figura 4.4: Dihoyo de Kerr-Newman contrarotante con la misma masa m , misma carga q y rotación con signo contrario j y $-j$.

Caso cargas iguales

Comenzando con el caso de dos agujeros negros con masa m , carga q y momento angular j como se muestra en 4.4.

Las funciones f , γ y ω tienen la forma siguiente [10]

$$f = \frac{|A|^2 - |B|^2 + |C|^2}{|A + B|^2}, \quad e^{2\gamma} = \frac{|A|^2 - |B|^2 + |C|^2}{16R^4\sigma^4 R_+ R_- r_+ r_-}, \quad \omega = -\frac{\text{Im}[2G(A + B)^* + CI^*]}{|A|^2 - |B|^2 + |C|^2} \quad (4.56)$$

donde los coeficientes A , B , C , G e I están dados por

$$A = (m^2 - q^2)[4\sigma^2(R_+ R_- + r_+ r_-) + R^2(R_+ r_+ + R_- r_-)] \\ + [\sigma^2(R^2 - 4m^2 + 4q^2) - j^2 R^2 \mu](R_+ r_- + R_- r_+) \\ - 2ijR\sigma\mu(mR + 2m^2 - q^2)(R_+ r_- - R_- r_+), \quad (4.57a)$$

$$B = 2mR\sigma[R\sigma(R_+ + R_- + r_+ r_-) - \lambda(R_+ - R_- - r_+ + r_-)], \quad (4.57b)$$

$$C = qB/M, \quad (4.57c)$$

$$G = -zB + R\sigma[(2m^2 - q^2)[2\sigma(r_+ r_- - R_+ R_-) + R(R_- r_- - R_+ r_+)] \\ + m(R + 2\sigma)(R\sigma - \lambda)(R_+ - r_-) + m(R - 2\sigma)(R\sigma + \lambda)(R_- - r_+)], \quad (4.57d)$$

$$I = \frac{q}{m}[G + Rq^2\sigma[2\sigma(r_+ r_- - R_+ R_-) + R(R_- r_- - R_+ r_+)], \quad (4.57e)$$

R_{\pm} y r_{\pm} son coordenadas determinadas por las siguientes ecuaciones

$$R_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z + \frac{1}{2}R \pm \sigma)^2}, \quad r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z - \frac{1}{2}R \pm \sigma)^2} \quad (4.58)$$

con m y q siendo la masa y carga eléctrica de cada agujero negro, mientras j es el momento angular del agujero negro en $z < 0$ (el momento angular del agujero en $z > 0$ siendo $-j$); R denota la distancia entre los centros de los hoyos negros.

Finalmente σ , μ y λ se definen como sigue

$$\sigma := \sqrt{m^2 - q^2 - j^2\mu} \quad (4.59a)$$

$$\mu := \frac{R^2 - 4m^2 + 4q^2}{(mR + 2m^2 - q^2)^2} \quad (4.59b)$$

$$\lambda := 2(m^2 - q^2) + ij\mu(R + 2m^2 - q^2). \quad (4.59c)$$

Por otro lado el potencial electromagnético viene dado por

$$A = -\text{Re} \left(\frac{C}{A+B} \right) dt + \text{Im} \left(\frac{I}{A+B} \right) d\varphi. \quad (4.60)$$

Es directo mostrar que cada agujero negro satisface la formula de Smarr

$$m = 2TS + 2\Omega j + \Phi_e q \quad (4.61)$$

donde la temperatura T , entropía S , velocidad angular Ω , potencial eléctrico sobre el horizonte Φ_e y fuerza entre los agujeros negros \mathcal{F} tienen la forma

$$T = \frac{R\sigma}{2\pi\Delta}, \quad S = \frac{\pi\Delta}{R}, \quad \Omega = \frac{j\mu(mR + 2m^2 - q^2)}{\Delta}, \quad (4.62a)$$

$$\Phi_e = \frac{q[(R + 2m)(m + \sigma) - 2q^2]}{\Delta}, \quad \mathcal{F} = \frac{m^2 - q^2}{R^2 - 4m^2 + 4q^2}, \quad (4.62b)$$

con el parámetro Δ dado por

$$\Delta := 2m(R + 2m)(m + \sigma) - q^2(R + 4m + 2\sigma). \quad (4.63)$$

teniendo a través de estas identidades,

$$dm = TdS + \Omega dj + \Phi_e dQ - \frac{1}{2R^2}(R - 2\sigma)(R^2 - 4m^2 + 4q^2)d\mathcal{F} \quad (4.64)$$

con lo que se obtiene la siguiente forma para la primera ley

$$dM = 2TdS + 2\Omega dj + 2\Phi_e dQ - ld\mathcal{F} \quad (4.65)$$

tomando las siguientes definiciones

$$M := 2m, \quad l := (R - 2\sigma) \left(1 - \frac{4(m^2 - q^2)}{R^2} \right). \quad (4.66)$$

Así podemos identificar la longitud termodinámica con la forma usual

$$l = Le^{\gamma_0}. \quad (4.67)$$

Caso cargas opuestas

Ahora estudiaremos el caso con cargas opuestas que se muestra en la figura 4.5); para el cual tenemos los parámetros f , γ y ω están dados por [11]

$$f = \frac{|A|^2 - |B|^2 + |C|^2}{|A + B|^2}, \quad e^{2\gamma} = \frac{|A|^2 - |B|^2 + |C|^2}{16R^4\sigma^4 R_+ R_- r_+ r_-}, \quad \omega = -\frac{\text{Im}[2G(A + B)^* + CI^*]}{|A|^2 - |B|^2 + |C|^2} \quad (4.68)$$

donde A , B , C , G e I tienen la forma

$$A = R^2(m^2 - q^2\nu)(R_+ - R_-)(r_+ - r_-) + 4\sigma^2(m^2 + q^2\nu)(R_+ - r_+(R_- - r_-)) + 2R\sigma[R\sigma(R_+ r_- + R_- r_+) + ij\mu(R_+ r_- - R_- r_+)], \quad (4.69a)$$

$$B = 2mR\sigma[R\sigma(R_+ + R_- + r_+ + r_-) - (2m^2 - ij\mu)(R_+ - R_- - r_+ + r_-)], \quad (4.69b)$$

$$C = 2C_o R\sigma[(R + 2\sigma)(R\sigma - 2m^2 - ij\mu)(r_+ - R_-) + (R - 2\sigma)(R\sigma + 2m^2 + ij\mu)(r_- - R_+)], \quad (4.69c)$$

$$G = -zB + R\sigma[R(2m^2 - q^2\nu)(R_- r_- - R_+ r_+) + 2\sigma(2m^2 + q^2\nu)(r_+ r_- - R_+ R_-) + m[(R + 2\sigma)(R\sigma - 2m^2 + ij\mu) - 2(R - 2\sigma)q^2\nu](R_+ - r_-) + m[(R - 2\sigma)(R\sigma + 2m^2 - ij\mu) - 2(R + 2\sigma)q^2\nu](R_- - r_+)], \quad (4.69d)$$

$$I = -C + 2C_o m[R^2(2m^2 - 2\sigma^2 + ij\mu)(R_+ r_+ + R_- r_-) + 2\sigma^2(R^2 - 4m^2 - 2ij\mu)(R_+ R_- + r_+ r_-)] - C_o(R_2 - 4\sigma^2)\left(2m[R\sigma(R_+ r_- - R_- r_+) + (2m^2 + ij\mu)(R_+ r_- + R_- r_+)] + R\sigma[R\sigma(R_+ + R_- + r_+ + r_-) + (6m^2 + ij\mu)(R_+ - R_- - r_+ + r_-) + 8mR\sigma]\right). \quad (4.69e)$$

con coordenadas R_{\pm} y r_{\pm} dadas por

$$R_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z + \frac{1}{2}R \pm \sigma)^2}, \quad r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z - \frac{1}{2}R \pm \sigma)^2} \quad (4.70)$$

y constantes μ , ν y C_o definidas por las siguientes ecuaciones

$$\mu = \frac{R^2 - 4m^2}{m(R + 2m) + q^2}, \quad \nu = \frac{R^2 - 4m^2}{(R + 2m)^2 + 4q^2}, \quad C_o = -\frac{q(R^2 - 4m^2 + 2ij\mu)}{(R + 2m)(R^2 - 4\sigma^2)}, \quad (4.71)$$

finalmente σ siendo la mitad de la longitud del horizonte esta dada por la expresión,

$$\sigma = \sqrt{m^2 - \left(\frac{j^2((R + 2m)^2 + 4q^2)}{(m(R + 2m) + q^2)^2} + q^2\right) \frac{R - 2m}{R + 2m}}. \quad (4.72)$$

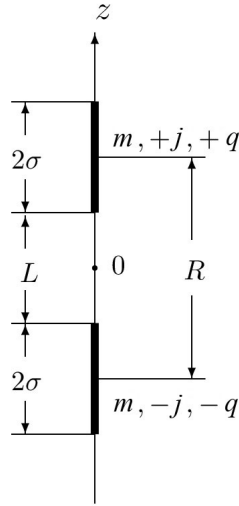


Figura 4.5: Dihoyo de Kerr-Newman contrarotante con la misma masa m , carga con signo contrario q y $-q$ y rotación con signo contrario j y $-j$.

Se puede mostrar que las cantidades termodinámicas T , S , Ω , Φ_e y \mathcal{F} se escriben como

$$T = \frac{R\sigma[(R+2m)^2 + 4q^2]}{2\pi(R+2m)^2[2(m+\sigma)(mR+2m^2+q^2) - q^2(R-2m)]}, \quad (4.73a)$$

$$S = \frac{\pi}{R(R+2\sigma)} \left[(R+2m)^2(m+\sigma)^2 + \frac{j^2(R^2 - 4m^2)^2}{(mR+2m^2+q^2)^2} \right], \quad (4.73b)$$

$$\Omega = \frac{j[2(m-\sigma)(mR+2m^2+q^2) - q^2(R-2m)]}{(4j^2+q^4)(mR+2m^2+q^2)}, \quad (4.73c)$$

$$\Phi_e = \frac{q[q^2(m-\sigma)(mR+2m^2+q^2) + 2j^2(R-2m)]}{(4j^2+q^4)(mR+2m^2+q^2)}, \quad (4.73d)$$

$$\mathcal{F} = \frac{m^2(R+2m)^2 + q^2R^2}{(R+2m)^2(R^2 - 4m^2)}. \quad (4.73e)$$

lo que nos lleva a una primera ley de la forma

$$dM = 2TdS + 2\Omega dj + 2\Phi_e dQ - l d\mathcal{F} \quad (4.74)$$

donde similarmente al caso anterior $M = 2m$ y el coeficiente de la diferencial $d\mathcal{F}$ en la primera ley coincide de nuevo con la longitud termodinámica

$$l = \frac{(R-2\sigma)(R+2m)^2(R^2 - 4m^2)}{R^2[(R+2m)^2 + 4q^2]}. \quad (4.75)$$

Así mostramos que la longitud termodinámica es un concepto robusto e indispensable, válido para el caso

de dihojos con carga eléctrica y con rotación; definido en forma genérica por

$$l = Le^{\gamma_o}, \quad (4.76)$$

donde L es la longitud del strut y γ_o la función gamma evaluada en la región del strut.

Primera Ley y Energía Libre

Es posible deducir la energía libre para los sistemas estudiados en este capítulo, sin embargo en el capítulo 5 se obtendrá el resultado para un sistema mucho más general, para el cual la energía libre para los dihojos de Kerr-Newman y Kerr, son corolarios. Por lo cual, nos restringiremos a escribir el resultado de la energía libre para los dihojos de Kerr-Newman directamente, la cuál es la siguiente,

$$W = M - \Phi_e Q + l\mathcal{F}, \quad (4.77)$$

con esta ecuación se puede mostrar explícitamente la relación que satisface la diferencial de la energía libre [42].

El procedimiento para obtener la relación (3.44) es análogo a la deducción de la primera ley de la termodinámica para los agujeros negros de Kerr-Newman, esto es a través de los diferenciales de las ecuaciones (4.62) para el caso de cargas iguales y de los diferenciales de (4.73), para el caso de cargas opuestas; por supuesto añadiendo el diferencial de , obteniendo

$$dW = -2SdT - 2jd\Omega - 2Qd\Phi_e + \mathcal{F}dl. \quad (4.78)$$

CAPÍTULO 5

TEMPERATURA PROMEDIO DE HAWKING

En esta capítulo describiremos nuestro resultado más importante el cual denominamos temperatura de Hawking promedio [49], este nuevo concepto generaliza la temperatura de Hawking y extiende el método de la acción euclidiana a sistemas con agujeros negros con diferentes gravedades superficiales sobre sus respectivos horizontes.

Es importante resaltar que tratar de definir una temperatura para horizontes con diferentes gravedades superficiales ha sido intentado previamente [50-52], principalmente para sistemas de agujero negro asintóticamente de Sitter, para los cuales se tiene un horizonte cosmológico y uno de agujero negro.

Terminaremos, aplicando el método euclidiano generalizado a un sistema formado por N agujeros negros colineales de Kerr-Newman.

5.1. Temperatura en sistemas con varios horizontes

Como hemos mostrado, en presencia de varios agujeros negros se requiere tener la misma gravedad superficial sobre cada horizonte, con el fin de eliminar las singularidades cónicas sobre los mismos. En el caso de N horizontes uno llega a N ecuaciones que aproximan la métrica cerca de cada horizonte,

$$g|_{H_i} = d\xi^2 + \xi^2 \kappa_i^2 d\tau^2, \quad (5.1)$$

donde se ha omitido la parte de la métrica que no juega ningún papel relevante para determinar la singularidad cónica.

Claramente alrededor de cada horizonte se han generado singularidades cónicas, y para eliminarlas se tendrían que eliminar simultáneamente a través de fijar el periodo de τ sobre cada horizonte,

$$\beta = \frac{2\pi}{\kappa_i} \quad i = 1, \dots, N \quad (5.2)$$

lo que lleva a concluir que $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_N$, así nos vemos forzados a tener horizontes con la misma gravedad superficial.

En lo que sigue mostraremos como podemos evitar esta restricción, generalizando el método euclidiano de forma que es posible incluir diferentes gravedades superficiales. La idea principal es no requerir la eliminación de las singularidades cónicas de manera local, sino a nivel “termodinámico”.

En dos dimensiones \mathcal{M}_{2D} se puede mostrar que si existe una singularidad cónica, se tiene [37, 38, 53]

$$\int_{\mathcal{M}_{2D}} R = 2\delta, \quad (5.3)$$

donde δ es el ángulo cónico.

Consideremos una variedad \mathcal{M} con singularidades cónicas, la cual corresponderá a nuestro espacio-tiempo euclidiano. Podemos pensar \mathcal{M} formada por dos conjuntos disjuntos, uno formado por todas las singularidades cónicas Σ y el otro por la variedad excluyendo las singularidades cónicas \mathcal{M}/Σ , de esta forma [37]

$$\int_{\mathcal{M}} R = 2\delta A_{\Sigma} + \int_{\mathcal{M}/\Sigma} R, \quad (5.4)$$

donde A_{Σ} es el área generada por el conjunto Σ donde se encuentran las singularidades cónicas. Los casos en los que estamos interesados cumplen $R = 0$ sobre \mathcal{M}/Σ , con lo que tenemos

$$\int_{\mathcal{M}} R = 2\delta A_{\Sigma}. \quad (5.5)$$

Es directo recuperar el resultado usual para la temperatura de Hawking para un solo agujero negro, para esto consideremos la métrica efectiva cerca del horizonte

$$g = d\xi^2 + \xi^2 \kappa^2 d\tau^2, \quad (5.6)$$

la cual implica un ángulo cónico

$$\delta = 2\pi - \int_0^{\beta} \kappa d\tau = 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa}{2\pi}\right). \quad (5.7)$$

Así la integral de R puede obtenerse usando (5.5) y (5.7), dando como resultado

$$\int_{\mathcal{M}} R = 4\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa}{2\pi}\right) A_H, \quad (5.8)$$

5.1. TEMPERATURA EN SISTEMAS CON VARIOS HORIZONTES

donde A_H es el área del horizonte.

Evidentemente el no tener un resultado nulo en el término Einstein-Hilbert cambia la energía libre, lo cual se resuelve recordando que una de las prescripciones del método euclidiano es la eliminación de las singularidades cónicas sobre los horizontes a través de la fijación del parámetro β .

Por lo cual fijaremos el parámetro β a través de requerir que se eliminen todas las contribuciones debidas a las singularidades cónicas sobre los horizontes al nivel de la acción, esto es requerir que (5.8) se anule, obteniendo

$$\beta = \frac{2\pi}{\kappa}, \quad (5.9)$$

lo que implica una temperatura

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (5.10)$$

la cuál es la temperatura usual de Hawking.

En el caso de N horizontes, tendríamos N singularidades cónicas dadas como

$$\delta_i = 2\pi - \int_0^\beta \kappa_i d\tau = 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa_i}{2\pi}\right), \quad (5.11)$$

con lo que la integral de R queda

$$\int_{\mathcal{M}} R = \sum_i 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa_i}{2\pi}\right) A_{H_i}, \quad (5.12)$$

donde la suma corre sobre todos los horizontes y se ha supuesto que no hay más singularidades cónicas aparte de las que se encuentran en los horizontes.

Aplicando la condición de eliminar los términos correspondientes a las singularidades cónicas sobre los horizontes, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa_i}{2\pi}\right) A_{H_i} \\ &= 2\pi \left(\sum_i A_{H_i} - \beta \sum_i A_{H_i} \frac{\kappa_i}{2\pi} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

lo cual se satisface si β cumple con la relación

$$\beta = \frac{\sum A_{H_i}}{\sum A_{H_i} \frac{\kappa_i}{2\pi}} = 2\pi \frac{\sum A_{H_i}}{\sum A_{H_i} \kappa_i}, \quad (5.14)$$

esta ecuación es la que nos permite introducir el concepto de temperatura de Hawking promedio

$$\hat{T} := \frac{1}{2\pi} \frac{\sum A_{H_i} \kappa_i}{\sum A_{H_i}}, \quad (5.15)$$

la cual generaliza la temperatura de Hawking y permite extender el método de la acción euclidiana para sistemas con diferentes gravedades superficiales.

Si postulamos las temperaturas de Hawking $T_i = \kappa_i/2\pi$ y entropías $S_i = A_{H_i}/4$ podemos reescribir la temperatura de Hawking promedio como

$$\hat{T} = \frac{1}{S} \sum S_i T_i, \quad (5.16)$$

donde $S := \sum_i S_i$.

5.2. Dihoyos de Schwarzschild Arbitrarios

En el capítulo 3 analizamos el sistemas de dos agujeros negros de Schwarzschild, para el cual tuvimos que restringirnos al caso con la misma masa para ambos agujeros negros, esto con la finalidad de eliminar las singularidades cónicas sobre los horizontes. En esta sección veremos como prescindir de esta restricción usando la temperatura de Hawking promedio \hat{T} .

Einstein-Hilbert

Con la finalidad de recalcular el término Einstein-Hilbert sin restringir de antemano los valores de la gravedad superficial sobre los horizonte, usaremos (5.5), de esta manera tenemos como resultado

$$\int_{\mathcal{M}} R = 2 \sum_i \delta_i A_i, \quad (5.17)$$

donde la suma es sobre todas las regiones con singularidad cónica.

Para el sistema en cuestión se tienen tres regiones con singularidades cónicas, los horizontes de los agujeros negros y la región que corresponde al strut, con lo que tenemos

$$\int_{\mathcal{M}} R = 2 \sum_{i=1}^2 \delta_i^\tau A_{H_i} + 2\delta_s^\varphi A_s, \quad (5.18)$$

donde A_{H_i} es el área del i -ésimo horizonte y A_s el área del strut; las δ 's indican las singularidades cónicas en sus respectivas regiones.

En cuanto a los ángulos cónicos tenemos las siguientes identidades para los horizontes

$$\delta_1^\tau = 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa_1}{2\pi}\right), \quad (5.19a)$$

$$\delta_2^\tau = 2\pi \left(1 - \beta \frac{\kappa_2}{2\pi}\right) \quad (5.19b)$$

y para la región del strut

$$\delta_s^\varphi = 2\pi(1 - e^{-\gamma_0}). \quad (5.20)$$

En cuanto a las áreas de los horizontes, consideremos la métrica alrededor de $r = r_1^+$,

$$g|_{H_1} \approx 4m_1^2 \left[\left(\frac{z_1 - z_2 + m_1 + m_2}{z_1 - z_2 + m_1 - m_2} \right)^2 F^2(\theta) d\theta^2 + F^{-2}(\theta) \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (5.21)$$

con la cual podemos calcular el área del horizonte correspondiente, obteniendo

$$A_{H_1} = \int_{H_1} \sqrt{g|_{H_1}} = 16\pi m_1^2 \left(\frac{z_1 - z_2 + m_1 + m_2}{z_1 - z_2 + m_1 - m_2} \right), \quad (5.22)$$

análogamente para el horizonte en $r = r_2^+$ tenemos

$$A_{H_2} = 16\pi m_2^2 \left(\frac{z_1 - z_2 + m_2 + m_1}{z_1 - z_2 + m_2 - m_1} \right). \quad (5.23)$$

Eliminando las contribuciones generadas por la transformación $t \rightarrow -i\tau$ a través de fijar el valor de β a través de (5.14), recuperamos el resultado

$$\int_{\mathcal{M}} R = 2\delta_s^\rho A_s = 2(-8\pi\mathcal{F})(\beta l) = -16\pi\beta\mathcal{F}l, \quad (5.24)$$

pero con una nueva temperatura dada por

$$\hat{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{A_{H_1}\kappa_1 + A_{H_2}\kappa_2}{A_{H_1} + A_{H_2}}. \quad (5.25)$$

5.3. N-hoyos Kerr-Newman

En esta sección analizaremos un sistema de N agujeros negros con rotación y carga eléctrica separados por $N - 1$ struts como muestra la figura 5.1. Dicha configuración es estacionaria y goza de simetría axial por lo cual la métrica del sistema se puede escribir en la forma usual

$$g = -f(id\tau - \omega d\varphi)^2 + f^{-1} (e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2), \quad (5.26)$$

donde se ha realizado una rotación en la parte temporal $\tau = it$.

El sistema antes de la transformación $\tau = it$ es descrito por una subfamilia de la solución N-solitónica [54] construida a través del método de Sibgatullin [5]. Los potenciales de Ernst para la solución [54] viene dados por las expresiones

$$\mathcal{E} = E_+/E_-, \quad \Phi = F/E_-, \quad (5.27)$$

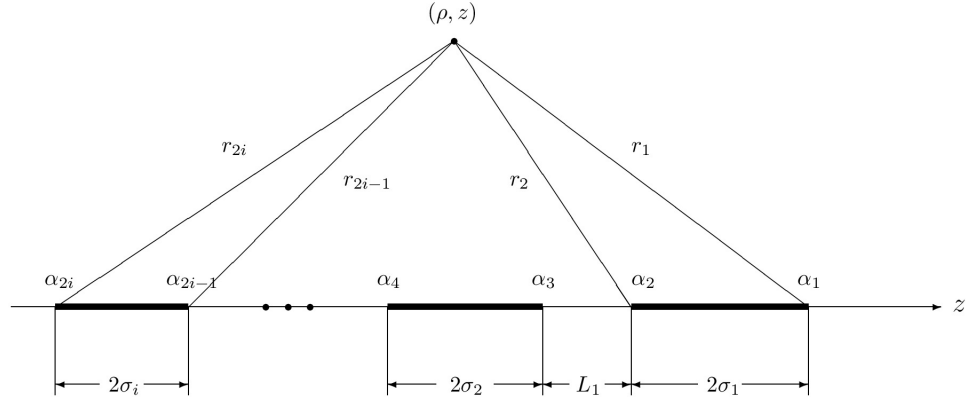


Figura 5.1: Posición de agujeros negros de Kerr-Newman en el eje de simetría.

donde E_{\pm} y F están dados por los siguientes determinantes $(2N + 1) \times (2N + 1)$

$$E_{\pm} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \pm 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \dots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_1^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_N^*} & \dots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_N^*} \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} 0 & f(\alpha_1) & \dots & f(\alpha_{2N}) \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \dots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \dots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_1^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_N^*} & \dots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_N^*} \end{vmatrix}, \quad (5.28)$$

aquí $h_l(\alpha_n)$ y $f(\alpha_n)$ son constantes dadas por las siguientes identidades

$$h_l(\alpha_n) = e_l^* + 2f_l^* f(\alpha_n), \quad f(\alpha_n) = \sum_{l=1}^N \frac{f_l}{\alpha_n - \beta_l},$$

$$e_l = \frac{2 \prod_{n=1}^{2N} (\beta_l - \alpha_n)}{\prod_{k \neq l}^N (\beta_l - \beta_k) \prod_{k=1}^N (\beta_l - \beta_k^*)} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{f_l f_k^*}{\beta_l - \beta_k^*}, \quad (5.29)$$

y las únicas funciones dependientes de las variables ρ y z son las funciones r_n , las cuales tienen la forma

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha_n)^2}. \quad (5.30)$$

El conjunto de parámetros arbitrarios en las formulas (5.28) y (5.29) consiste de N constantes complejas β_l , N constantes complejas f_l y $2N$ parámetros reales α_n .

5.3. N-HOYOS KERR-NEWMAN

Como comentamos en el sección 4.1, a través de estos potenciales se puede determinar las funciones f , γ y ω de la métrica, quedando estas con la forma

$$f = \frac{D}{2E_+E_-^*}, \quad e^{2\gamma} = \frac{D}{2K_0K_0^* \prod_{n=1}^{2N} r_n}, \quad \omega = -\frac{2\text{Im}[E_-^*(G+H) + FI^*]}{D},$$

$$D = E_+E_-^* + E_+^*E_- + 2FF^*, \quad (5.31)$$

donde I , G , H y K_0 [54], están dadas por

$$G = \begin{pmatrix} 0 & r_1 + \alpha_1 - z & \cdots & r_{2N} + \alpha_{2N} - z \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \cdots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_1^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_N^*} & \cdots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_N^*} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} z & 1 & \cdots & 1 \\ -\beta_1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_N & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ e_1^* & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \cdots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_1^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_N^* & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_N^*} & \cdots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_N^*} \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^N f_l & 0 & f(\alpha_1) & \cdots & f(\alpha_{2N}) \\ z & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\beta_1 & -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_N & -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ e_1^* & 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \cdots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_1^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_N^* & 0 & \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_N^*} & \cdots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_N^*} \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 - \beta_1 & \cdots & \alpha_{2N} - \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 - \beta_N & \cdots & \alpha_{2N} - \beta_N \\ \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \cdots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_1^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_N(\alpha_1)}{\alpha_1 - \beta_N^*} & \cdots & \frac{h_N(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N} - \beta_N^*} \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

La solución que describe N agujeros negros de Kerr-Newman localizados en el eje de simetría y separados por struts sin masa esta contenida en las formulas generales como un caso especial asintóticamente plano caracterizado por $4N - 1$ parámetros reales los cuales son las N masas, los N momentos angulares, N cargas eléctricas de cada agujero negro y $N - 1$ distancias relativas entre los mismos. Dado que la solución N solitónica cuenta con $6N$ parámetros reales arbitrarios implica que se tienen que imponer $2N + 1$ restricciones. La primera siendo un espacio-tiempo asintóticamente plano, o en otras palabras la ausencia de parámetro de NUT; la función métrica ω debe cumplir $N - 1$ condiciones en el eje de simetría en las partes que separan cada agujero negro, y dado que no tenemos carga magnética en los agujeros negros tenemos N condiciones más. Así tenemos $2N$ restricciones, la condición faltante es la traslación a lo largo del eje z , la cual se resuelve fijando el origen de coordenadas.

Las condiciones descritas anteriormente expresadas matemáticamente son las siguientes,

- Condición de espacio-tiempo asintóticamente plano

$$\text{Im} \left(\sum_{l=1}^N e_l \right) = 0. \quad (5.33)$$

- Condiciones para ω en el eje de simetría

$$\omega(\rho = 0, \alpha_{2k+1} \leq z \leq \alpha_{2k}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.34)$$

- No cargas magnéticas

$$\text{Re}[\Phi(\rho = 0, z = \alpha_{2k-1}) - \Phi(\rho = 0, z = \alpha_{2k})] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.35)$$

- Condición de fijación del origen de coordenadas

$$\sum_{n=1}^{2N} \alpha_n = 0. \quad (5.36)$$

Cabe resaltar que la forma explícita de la métrica no es necesaria para los resultados generales, ya que estos pueden ser derivados del comportamiento de las funciones métricas en la frontera.

Proseguiremos con el cálculo de los términos I_{EH} , I_{GH} y I_{em} de la acción.

Einstein-Hilbert

Comenzaremos analizando el término Einstein-Hilbert de la acción euclidiana I_{EH} .

En nuestro enfoque cada agujero negro puede tener diferente gravedad superficial sobre su horizonte, como consecuencia tendremos singularidades cónicas en los horizontes de los agujeros negros, además de las singularidades cónicas asociadas a cada strut. Es importante resaltar que las singularidades cónicas de horizontes y struts existen en diferentes planos 2-dimensionales; y solo las singularidades cónicas en los horizontes incluyen la coordenada temporal euclidiana τ , provocando que solo este tipo de singularidades cónicas intervengan en el cálculo de la temperatura.

Con el fin de calcular (5.5) necesitamos las áreas de los struts evolucionadas en el tiempo euclidiano A_i^s y la áreas de los horizontes A_i^h ; así como los ángulos cónicos respectivos a cada región δ_i^φ para el i -ésimo strut y δ_i^τ para el i -ésimo horizonte.

En cuanto al área correspondiente al i -ésimo strut A_i^s tenemos,

$$\begin{aligned} A_i^s &= \int_{\mathcal{L}_i \times S^1} e^\gamma |_{\mathcal{L}_i} dz d\tau \\ &= \beta e^{\gamma_i} L_i \\ &= \beta l_i, \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.3. N-HOYOS KERR-NEWMAN

la integral se realiza sobre la superficie generada por la evolución en el tiempo euclidiano del strut $\mathcal{L}_i \times \mathcal{S}^1$; donde también hemos reconocido la longitud termodinámica l_i .

En cuanto al ángulo cónico asociado al strut tenemos,

$$\delta_i^\varphi = 2\pi - \int_0^{2\pi} e^{-\gamma}|_{\mathcal{L}_i} d\varphi = -8\pi\mathcal{F}_i. \quad (5.38)$$

El área de los horizontes es mejor dejarlo simplemente como A_i^h , a pesar de esto si uno requiere calcularla a través de las funciones en la métrica se puede obtener como

$$A_i^h = \int_{H_i} \sqrt{-e^{2\gamma_i}\omega_i^2} dz d\varphi = 4\pi\sigma_i \sqrt{-e^{2\gamma_i}\omega_i^2} \quad (5.39)$$

donde γ_i y ω_i son las funciones γ y ω valuadas en el i -ésimo horizonte.

Para ángulo cónico δ_i^τ asociado a los horizontes tenemos,

$$\begin{aligned} \delta_i^\tau &= 2\pi - \int_0^\beta \kappa_i d\tau \\ &= 2\pi - \kappa_i \beta \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{\kappa_i}{2\pi} \beta\right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} I_{EH} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_i^{N-1} A_i^s \delta_i^\varphi - \frac{1}{8\pi} \sum_i^N A_i^h \delta_i^\tau \\ &= \beta \sum_{i=1}^{N-1} l_i \mathcal{F}_i - \frac{1}{8\pi} \sum_i^N A_i^h \delta_i^\tau. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Temperatura

Para obtener la temperatura del sistema sin la necesidad de igualar el valor de la gravedad superficial sobre todos los horizontes, basta con desvanecer el segundo término que aparece en (5.41), el cual proviene de las singularidades cónicas sobre los horizontes, con lo que tendríamos que resolver la relación

$$\sum_{i=1}^N A_i^h \delta_i^\tau = 0, \quad (5.42)$$

donde el ángulo cónico se puede obtener como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned}\delta_i^{\tau} &= 2\pi - \int \kappa_i d\tau \\ &= 2\pi - \kappa_i \beta \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{\kappa_i}{2\pi} \beta\right).\end{aligned}\tag{5.43}$$

Con lo que (5.42) se puede reescribir como

$$\sum_{i=1}^N A_i^h \left(1 - \frac{\kappa_i}{2\pi} \beta\right) = 0,\tag{5.44}$$

de donde se puede deducir la *temperatura promedio de Hawking*, como ya hemos mostrado previamente

$$\hat{T} = \frac{1}{S} \sum_i T_i S_i,\tag{5.45}$$

donde $S = \sum_i S_i$, T_i es la temperatura usual de Hawking de cada agujero negro y S_i su entropía. Es importante resaltar que \hat{T} representa la temperatura asociada a todo el sistema.

Gibbons-Hawking

Proseguiremos a analizar el término Gibbons-Hawking de la acción euclidiana I_{GH} , para lo cual introduciremos un nuevo conjunto de coordenadas $(\tau, \zeta, \theta, \varphi)$, con τ y φ definidas como antes (coordenadas de Weyl-Papapetrou), ζ y θ definidas como sigue

$$\zeta = \sqrt{\rho^2 + z^2},\tag{5.46a}$$

$$\theta = \tan^{-1}(z/\rho),\tag{5.46b}$$

con este nuevo conjunto de coordenadas podemos definir una hipersuperficie \mathcal{N} , a través de la ecuación $\zeta = \text{constante}$.

Una de las propiedades que nos permite estudiar la termodinámica sin necesidad de entrar en detalles específicos de la métrica, es tener una solución asintóticamente plana, ya que el $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} g_{\tau\varphi} = 0$, con lo que tenemos que $g_{\tau\varphi}$ es de orden $O(\zeta^{-1})$, lo que implica que la métrica inducida sobre \mathcal{N} puede escribirse de la siguiente forma

$$g_{\mathcal{N}} = \left[f d\tau + f^{-1} \zeta^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{2\gamma} d\theta^2) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\tau d\varphi \right]_{\mathcal{N}},\tag{5.47}$$

donde el subíndice \mathcal{N} denota restricción a la hipersuperficie \mathcal{N} .

Para obtener el volumen de \mathcal{N} , necesitamos el determinante de la métrica (5.47), el cual tiene la forma

$$\det g_{\mathcal{N}} = \begin{vmatrix} f_{\mathcal{N}} & 0 & 0 \\ 0 & f_{\mathcal{N}}^{-1} \zeta^2 \sin^2 \theta & O(1/\zeta) \\ 0 & O(1/\zeta) & f_{\mathcal{N}}^{-1} \zeta^2 e^{2\gamma_{\mathcal{N}}} \end{vmatrix} = f_{\mathcal{N}}^{-1} e^{2\gamma_{\mathcal{N}}} \zeta^4 \sin^2 \theta + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),\tag{5.48}$$

dado que estamos interesados en el límite $\zeta \rightarrow \infty$, podemos despreciar los términos de orden $O(1/\zeta^2)$. Es importante resaltar que los términos imaginarios son de este orden, por lo cual no contribuyen al resultado final.

Una vez calculado el determinante de $g_{\mathcal{N}}$, el volumen de \mathcal{N} se puede calcular directamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Vol \mathcal{N} &= \int_{\mathcal{N}} \sqrt{\det g_{\mathcal{N}}} d\tau d\varphi d\theta \\ &= 4\pi\beta\zeta^2 f_{\mathcal{N}}^{-1/2} e^{\gamma_{\mathcal{N}}}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde $f_{\mathcal{N}}$ así como $e^{2\gamma_{\mathcal{N}}}$ son constantes sobre \mathcal{N} para ζ suficientemente grande. En el caso de $f_{\mathcal{N}}$ se tiene

$$f_{\mathcal{N}} \approx 1 - \frac{2\mathbf{m}}{\zeta}, \quad (5.50)$$

donde la cantidad \mathbf{m} es la conocida masa ADM del sistema [55].

Análogamente a los casos previos para el cálculo de la integral de K , usaremos la identidad.(2.18),

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} K &= g_{\zeta\zeta}^{-1/2} \partial_{\zeta} Vol \mathcal{N} \\ &= 4\pi\beta \left(1 + \frac{2\mathbf{m}}{\zeta}\right)^{-1/2} \partial_{\zeta} \left[\left(1 + \frac{2\mathbf{m}}{\zeta}\right)^{1/2} \zeta^2 \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$= 4\pi\beta (2\zeta - \mathbf{m}) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad (5.52)$$

adicionalmente, es necesario calcular la integral de K_o , esto es la traza de la curvatura extrínseca de \mathcal{N} , embebida en espacio plano,

$$\int_{\mathcal{N}} K_o = 4\pi\beta(2\zeta) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right). \quad (5.53)$$

Así la integral de $[K] = K - K_o$ queda,

$$\int_{\mathcal{N}} [K] = -4\pi\beta\mathbf{m} + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad (5.54)$$

por lo tanto el término Gibbons-Hawking tiene la forma

$$I_{GH} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\infty} [K] = -\frac{1}{8\pi} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{N}} [K] \sqrt{h} = \frac{1}{2} \beta \mathbf{m}. \quad (5.55)$$

Término Electromagnético

Ahora enfocaremos nuestra atención en calcular la parte electromagnética de la acción, la cual corresponde al siguiente término,

$$I_{em} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} F \wedge \star F, \quad (5.56)$$

el cual puede reescribirse como una integral en la frontera de \mathcal{M} ,

$$I_{em} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} A \wedge \star dA. \quad (5.57)$$

donde el potencia electromagnético tiene la forma genérica para sistemas estacionarios con simetría axial,

$$A = A_\tau d\tau + A_\varphi d\varphi, \quad (5.58)$$

el cual desvanece en infinito.

Debido a que el potencial desvanece en infinito solo es necesario calcular la integral de I_{em} sobre $\sum_i H_i \times S^1$, donde H_i son los horizontes de los agujeros negros y S^1 el tiempo euclídeo,

$$I_{em} = \frac{1}{8\pi} \sum_i \int_{H_i \times S^1} A \wedge \star dA. \quad (5.59)$$

Con el fin de realizar la integración correspondiente, definamos una familia de hipersuperficies cilíndricas \mathcal{N}_i con radio $\rho = \epsilon$ ($\epsilon > 0$) entre z_i y z_{i+1} . Considerando que las integrales sobre las tapas no contribuyen al resultado final en el límite $\rho \rightarrow 0$; \mathcal{N}_i puede considerarse solo la superficie del cilindro sin tapas evolucionada en el tiempo euclidiano. Con lo que tendremos $N_i \rightarrow H_i \times S^1$ en el límite $\rho \rightarrow 0$.

Así el integrando de (5.59) sobre N_i toma la forma

$$A \wedge \star dA|_{N_i} = \rho^{-1} [A_\tau (g_{\varphi\varphi} \partial_\rho A_\tau - g_{\varphi\tau} \partial_\rho A_\varphi) + A_\varphi (g_{\tau\tau} \partial_\rho A_\varphi - g_{\tau\varphi} \partial_\rho A_\tau)] d\tau \wedge d\varphi \wedge dz|_{N_i}, \quad (5.60)$$

reescribiendo la función A_τ como $A_\tau - i\Omega_{H_i} A_\varphi + i\Omega_{H_i} A_\varphi$ donde $\Omega_{H_i} := -ig_{\tau\varphi}/g_{\varphi\varphi}|_{H_i}$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{N_i} A \wedge \star dA &= \beta \int_{N_i - S^1} \rho^{-1} (A_\tau - i\Omega_{H_i} A_\varphi) [g_{\varphi\varphi} \partial_\rho A_\tau - g_{\varphi\tau} \partial_\rho A_\varphi] d\varphi dz \\ &\quad + 2\pi\beta \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho^{-1} A_\varphi [(g_{\tau\tau} - i\Omega_{H_i} g_{\varphi\tau}) \partial_\rho A_\varphi - (g_{\tau\varphi} - i\Omega_{H_i} g_{\varphi\varphi}) \partial_\rho A_\tau] dz. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Ahora mostraremos que la solución de esta integral puede ser derivada del comportamiento en los horizontes de la solución,

$$g_{\tau\varphi} - i\Omega_{H_i} g_{\varphi\varphi} \approx 0 \quad (5.62a)$$

$$g_{\tau\tau} - i\Omega_{H_i} g_{\varphi\tau} \approx \frac{\rho^2}{g_{\varphi\varphi}}, \quad (5.62b)$$

con lo que tenemos,

$$\begin{aligned}
 & \int_{H_i \times S^1} A \wedge \star dA \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{N_i} A \wedge \star dA \\
 &= -\beta i \Phi_i \int_{H_i} \star F + 2\pi\beta \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho^{-1} A_\varphi \left[(g_{\tau\tau} - i\Omega_{H_i} g_{\varphi\tau}) \partial_\rho A_\varphi - (g_{\tau\varphi} - i\Omega_{H_i} g_{\varphi\varphi}) \partial_\rho A_\tau \right] dz \\
 &= -\beta \Phi_i \left(i \int_{H_i} \star F \right), \tag{5.63}
 \end{aligned}$$

donde hemos introducido el potencial eléctrico en el horizonte

$$\Phi_i := (iA_\tau + \Omega_{H_i} A_\varphi)|_{H_i}, \tag{5.64}$$

además de usar la identidad

$$\star F|_{H_i} = \star dA|_{H_i} = \rho^{-1} [g_{\varphi\varphi} \partial_\rho A_\tau - g_{\varphi\tau} \partial_\rho A_\varphi] d\varphi \wedge dz|_{H_i}. \tag{5.65}$$

Reconociendo que el resultado en (5.63) es proporcional a la carga [20] en el i -ésimo horizonte H_i , explícitamente tenemos

$$i \int_{H_i} \star F = 4\pi Q_i, \tag{5.66}$$

con lo que llegamos a la expresión final para la parte electromagnética de la acción,

$$I_{em} = -\frac{1}{2} \beta \sum_{i=1}^N Q_i \Phi_i. \tag{5.67}$$

Energía Libre

Habiendo calculado todos los términos de la acción euclidiana podemos escribir la energía libre

$$W = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{m} - \sum_{i=1}^N Q_i \Phi_i \right) + \sum_{i=1}^{N-1} l_i \mathcal{F}_i, \tag{5.68}$$

siendo este el resultado esperado, pero con la importante diferencia que en cada horizonte tenemos valores arbitrarios para la gravedad superficial.

Por otro lado la fórmula de Smarr para nuestro sistema de estudio está dada por [56]

$$\mathfrak{m} = 2 \sum_{i=1}^N T_i S_i + \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i + 2 \sum_{i=1}^N \Omega_i J_i, \tag{5.69}$$

dicha identidad puede reescribirse como

$$\mathbf{m} = 2\hat{T}S + \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i + 2 \sum_{i=1}^N \Omega_i J_i, \quad (5.70)$$

donde S está dada por

$$S := \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N \frac{A_i^h}{4}. \quad (5.71)$$

Con esto podemos reescribir (5.68) como sigue

$$W = \mathbf{m} - \hat{T}S + \sum_{i=1}^{N-1} l_i \mathcal{F}_i - \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i - \sum_{i=1}^N \Omega_i J_i, \quad (5.72)$$

en esta forma la naturaleza de W como transformación de Legendre es explícita.

Además, si considerando que la energía libre cumple con la relación

$$dW = -S d\hat{T} - \sum_{i=1}^N J_i d\Omega_i - \sum_{i=1}^N Q_i d\Phi_i + \sum_{i=1}^{N-1} \mathcal{F}_i dl_i, \quad (5.73)$$

y tomando el diferencial de (5.70), se puede deducir la primera ley de la termodinámica

$$\mathbf{m} = \hat{T}dS + \sum_{i=1}^N \Omega_i dJ_i + \sum_{i=1}^N \Phi_i dQ_i - \sum_{i=1}^{N-1} l_i d\mathcal{F}_i. \quad (5.74)$$

Formulas promediadas

Es interesante resaltar que el hecho que la temperatura \hat{T} pueda ser escrita como (5.16) motiva a realizar las siguientes definiciones

$$\hat{\Phi} := \frac{1}{Q} \sum_i \Phi_i Q_i \quad \hat{\Omega} := \frac{1}{J} \sum_i \Omega_i, \quad (5.75)$$

donde Ω y J están dadas por

$$J := \sum_i J_i, \quad Q := \sum_i Q_i. \quad (5.76)$$

Así la formula de Smarr (5.69) puede reescribirse de forma simple y elegante como

$$\mathbf{m} = 2\hat{T}S + \hat{\Phi}Q + 2\hat{\Omega}J. \quad (5.77)$$

Claramente podemos hacer lo mismo para la energía libre incluyendo

$$\mathcal{F} := \frac{1}{l} \sum_i \mathcal{F}_i l_i, \quad l := \sum_i l_i, \quad (5.78)$$

con lo que la energía libre quedaría como

$$W = \mathbf{m} - \hat{T}S - \hat{\Phi}Q - \hat{\Omega}J - \hat{\mathcal{F}}l, \quad (5.79)$$

siendo clara su naturaleza como potencial termodinámico.

CONCLUSIONES

Se mostró como obtener la energía libre y temperatura para las soluciones de agujero negro de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman, usando el método euclidiano. En particular para el agujero negro de Kerr-Newman se introdujo una deducción original, cuyo detalle hacía falta en la literatura.

Además, se obtuvo la energía libre y temperatura para el dihoyo de Schwarzschild, donde se mostró la importancia de introducir la longitud termodinámica como variable termodinámica del sistema, encontrando el valor correcto de la entropía, la cual coincide con la formula de Bekenstein-Hawking.

Se obtuvo la primera ley de la termodinámica para soluciones obtenidas recientemente a través del formalismo de Ernst y el método de Sibgatullin:

- Dihoyo de Kerr contrarotante
- Dihoyo de Kerr corotante
- Dihoyo de Kerr arbitrario
- Dihoyo de Kerr- Newman cargas iguales
- Dihoyo de Kerr-Newman cargas opuestas

donde se mostró que la longitud termodinámica l es la variable termodinámica correcta para el strut y la fuerza de interacción \mathcal{F} su variable conjugada. Así mismo, se encontró que la longitud termodinámica está determinada genéricamente por la relación $l = Le^{\gamma_0}$.

Por otro lado, se introdujo el concepto de *Temperatura de Hawking promedio* del cuál se recupera la temperatura de Hawking usual para sistemas con solo agujero negro. Esta nueva temperatura es más general, ya que permite extender el método euclidiano y asociar una única temperatura a soluciones de varios

agujeros negros con diferentes gravedades superficiales, lo cuál no era posible previamente. Es interesante el preguntarse si estas ideas se pueden extender a geometrías asintóticamente de Sitter, donde las soluciones de agujero negro contienen horizontes con diferentes gravedades superficiales y hasta donde sabemos es la geometría correspondiente a nuestro universo.

Finalmente, se aplicó el formalismo generalizado para obtener la temperatura de Hawking promedio para un sistema de N -hoyos de Kerr-Newman arbitrarios y se obtuvo la energía libre. Donde el cálculo de la acción euclidiana es totalmente original y generalizable.

ATESTACIÓN

Los resultados en esta tesis fueron publicados en los siguientes artículos:

- C. J. Ramírez-Valdez, H. García-Compeán y V. S. Manko, Thermodynamics of two aligned Kerr black holes, *Phys. Rev. D* **102**, 024084 (2020)
- H. García-Compeán, V. S. Manko y C. J. Ramírez-Valdez, Thermodynamics of two aligned Kerr-Newman black holes, *Phys. Rev. D* **103**, 104001 (2021)
- C. J. Ramírez-Valdez, H. García-Compeán y V. S. Manko, Temperature and free energy of multi-black-hole systems, *Phys. Rev. D* **105**, 024004 (2022).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. W. Hawking, Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199-220 (1975).
- [2] G. W. Gibbons y S. W. Hawking, Action integrals and partition functions in quantum gravity, *Phys. Rev. D* **15**, 2752-2756 (1977).
- [3] F. J. Ernst, New formulation of the axially symmetric gravitational field problem, *Phys. Rev.* **167**, 1175-1178 (1968).
- [4] F. J. Ernst, New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. II, *Phys. Rev.* **168**, 1415-1417 (1968).
- [5] N. R. Sibgatullin, *Oscillations and Waves in Strong Gravitational and Electromagnetic Fields* (Berlin: Springer, 1991).
- [6] V. Manko y E. Ruiz, Metric for two arbitrary Kerr sources, *Physics Letters B* **794**, 36-40 (2019).
- [7] V. S. Manko y E. Ruiz, Metric for two equal Kerr black holes, *Phys. Rev. D* **96**, 104016 (2017).
- [8] I. Cabrera-Munguia, V. Ceron, L. López y O. Pedraza, Corotating two-body system of identical Kerr sources, *Physics Letters B* **772**, 10-15 (2017).
- [9] V. S. Manko, E. D. Rodchenko, E. Ruiz y B. I. Sadovnikov, Exact solutions for a system of two counter-rotating black holes, *Phys. Rev. D* **78**, 124014 (2008).
- [10] V. S. Manko, R. I. Rabadán y E. Ruiz, The Bretón-Manko equatorially antisymmetric binary configuration revisited, *Class. Quantum Grav.* **30**, 145005 (2013).
- [11] V. S. Manko, R. I. Rabadán y J. D. Sanabria-Gómez, Stationary black diholes, *Phys. Rev. D* **89**, 064049 (2014).
- [12] M. Appels, R. Gregory y D. Kubizňák, Black hole thermodynamics with conical defects, *J. High Energy Phys.* **2017**, 116 (2017).
- [13] S. W. Hawking, Gravitational Radiation from Colliding Black Holes, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344-1346 (1971).
- [14] J. D. Bekenstein, Black Holes and Entropy, *Phys. Rev. D* **7**, 2333-2346 (1973).

- [15] L. Brillouin, Thermodynamics and Information Theory, *American Scientist* **38**, 594-599 (1950).
- [16] J. M. Bardeen, B. Carter y S. W. Hawking, The Four laws of black hole mechanics, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161-170 (1973).
- [17] J. Bekenstein, Black holes and the second law, *Lettere Al Nuovo Cimento Series* **4**, 737-740 (1972).
- [18] S. Hawking, Black Hole Explosions?, *Nature* **248**, 30-31 (1974).
- [19] B. Carter, Black Hole Equilibrium States Part I. Analytic and geometric properties of Kerr solutions (republicación), *General Relativity and Gravitation* **41**, 2873-2938 (2009).
- [20] B. Carter, Black Hole Equilibrium States Part II. General theory of stationary black hole states (republicación), *General Relativity and Gravitation* **42**, 653-744 (2010).
- [21] W. Israel, Third Law of Black-Hole Dynamics: A Formulation and Proof, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 397-399 (1986).
- [22] D. Kubizňák, R. B. Mann y T. Mae, Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda, *Class. Quantum Grav.* **34**, 063001 (2017).
- [23] C. Herdeiro, E. Radu y C. Rebelo, Thermodynamical description of stationary, asymptotically flat solutions with conical singularities, *Phys. Rev. D* **81**, 104031 (2010).
- [24] K. Schwarzschild, On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **7**, 189-196 (1916).
- [25] J. W. York, Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1082-1085 (1972).
- [26] S. R. Coleman, J. Preskill y F. Wilczek, Quantum hair on black holes, *Nucl. Phys. B* **378**, 175-246 (1992).
- [27] S. Carroll, *Spacetime and Geometry* (Pearson, 2014).
- [28] H. Reissner, Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie, *Ann. Physik* **50**, 106-120 (1916).
- [29] G. Nordström, On the energy of the gravitational field in Einstein's theory, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20**, 1238-1245 (1918).
- [30] R. P. Kerr, Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237-238 (1963).
- [31] E. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash y R. Torrence, Metric of a rotating charged mass, *J. Math. Phys.* **6**, 918-919 (1965).
- [32] K. Murata y J. Soda, Hawking radiation from rotating black holes and gravitational anomalies, *Phys. Rev. D* **74**, 044018 (2006).
- [33] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers y E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations* (Cambridge University Press, 2009).
- [34] M. S. Costa y M. J. Perry, Interacting black holes, *Nuclear Physics B* **591**, 469-487 (2000).
- [35] W. Israel y K. A. Khan, Collinear Particles and Bondi Dipoles in General Relativity, *Nuovo Cim* **33**, 331-344 (1964).
- [36] R. Bach y H. Weyl, New solutions to Einstein's equations of gravitation. B. Explicit determination of static, axially symmetric fields. By Rudolf Bach. With a supplement on the static two-body problem. By H. Weyl. (republicación), *Gen Relativ Gravit* **44**, 817-832 (2012).

- [37] D. V. Fursaev y S. N. Solodukhin, Description of the Riemannian geometry in the presence of conical defects, *Phys. Rev. D* **52**, 2133-2143 (1995).
- [38] T. Regge, General Relativity without Coordinates, *Nuovo Cim.* **19**, 558-571 (1961).
- [39] C. Herdeiro, B. Kleihaus, J. Kunz y E. Radu, Bekenstein-Hawking area law for black objects with conical singularities, *Phys. Rev. D* **81**, 064013 (2010).
- [40] P. Krtouš y A. Zelnikov, Thermodynamics of two black holes, *J. High Energy Phys.* **2020**, 164 (2020).
- [41] C. J. Ramírez-Valdez, H. García-Compeán y V. S. Manko, Thermodynamics of two aligned Kerr black holes, *Phys. Rev. D* **102**, 024084 (2020).
- [42] H. García-Compeán, V. S. Manko y C. J. Ramírez-Valdez, Thermodynamics of two aligned Kerr-Newman black holes, *Phys. Rev. D* **103**, 104001 (2021).
- [43] A. Papapetrou, Eine rotationssymmetrische Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. Phys. (Leipzig)* **12**, 309-315 (1953).
- [44] V. S. Manko y N. R. Sibgatullin, Construction of exact solutions of the Einstein-Maxwell equations corresponding to a given behaviour of the Ernst potentials on the symmetry axis, *Classical and Quantum Gravity* **10**, 1383-1404 (1993).
- [45] L. Smarr, Mass Formula for Kerr Black Holes, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 521-521 (1973).
- [46] G. Varzugin, The interaction force between rotating black holes at equilibrium, *Theor Math Phys* **116**, 1024-1033 (1998).
- [47] I. Cabrera-Munguía, Unequal binary configurations of interacting Kerr black holes, *Physics Letters B* **786**, 466-471 (2018).
- [48] D. Kramer y G. Neugebauer, The superposition of two Kerr solutions, *Physics Letters A* **75**, 259-261 (1980).
- [49] C. J. Ramírez-Valdez, H. García-Compeán y V. S. Manko, Temperature and free energy of multi-black-hole systems, *Phys. Rev. D* **105**, 024004 (2022).
- [50] S. Shankaranarayanan, Temperature and entropy of Schwarzschild-de Sitter space-time, *Phys. Rev. D* **67**, 084026 (2003).
- [51] B. P. Dolan, D. Kastor, D. Kubizňák, R. B. Mann y J. Traschen, Thermodynamic volumes and isoperimetric inequalities for de Sitter black holes, *Phys. Rev. D* **87**, 104017 (2013).
- [52] T. Pappas y P. Kanti, Schwarzschild–de Sitter spacetime: The role of temperature in the emission of Hawking radiation, *Physics Letters B* **775**, 140-146 (2017).
- [53] T. Eguchi, P. B. Gilkey y A. J. Hanson, Gravitation, gauge theories and differential geometry, *Physics Reports* **66**, 213-393 (1980).
- [54] E. Ruiz, V. S. Manko y J. Martín, Extended N-soliton solution of the Einstein-Maxwell equations, *Phys. Rev. D* **51**, 4192-4197 (1995).
- [55] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity, *Phys. Rev.* **116**, 1322-1330 (1959).
- [56] G. G. Varzugin y A. S. Chistyakov, Charged rotating black holes in equilibrium, *Class. Quantum Grav.* **19**, 4553 (2002).