



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA**

**CONTROL DE UNA GRÚA VIAJERA DE PUENTE MEDIANTE
SINCRONIZACIÓN DE MOTORES A IMANES PERMANENTES**

T E S I S

**QUE PRESENTA:
FERNANDO DÁVILA SAMANO**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE:
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. HEBERTT JOSÉ SIRA RAMÍREZ**

CIUDAD DE MÉXICO

Febrero, 2022

Dedicado con cariño a mis padres Miguel Ángel y María de Jesús.

Agradecimientos

Dios padre celestial, no tengo palabras para expresar mi sentir, solo por ti estoy aquí este día.

A mi padre, por compartir mis sueños, mis ilusiones, mis angustias y mis tristezas. Por ser mi mentor intelectual y espiritual.

A mi madre, cuya presencia ilumina mi vida. Por protegerme y velar por mí cual si fuera un ave cuidando a su polluelo.

A mi familia y mis amigos más cercanos, porque siempre han creído en mí. Por compartir un trocito de su vida, dando regocijo a la mía.

Al Dr. Hebertt Sira, por su enorme paciencia y sentido humanitario hacia mí. Por darme la oportunidad de trabajar con él, por sus doctrinas primordiales que soportan este trabajo y mi entendimiento del control automático.

A los grandes hombres de mi país; hombres de libertad, hombres ilustres, gracias a esos proceres que me dieron libertad e individualidad en mi México que siempre ha sido víctima de la injusticia en todo sentido, gracias a esos hombres ilustres que han hecho florecer el entender de mi gente, que nos han dado la luz de los que piensan.

A los miembros del jurado, por sus valiosos aportes en el mejoramiento de este trabajo, por su paciencia en la revisión minuciosa de este escrito.

A los profesores de la sección de mecatrónica, por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo. Por darme la oportunidad de ingresar al programa de maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme otorgado una beca para poder realizar mis estudios de maestría en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (CINVESTAV).

Resumen

El presente trabajo de tesis aborda el siguiente problema de control: consideramos una plataforma o carro que se desplaza sobre el eje horizontal, equipada con un cilindro (cabrestante) alrededor del cual se enrolla un cable, en el cual se encuentra anclada una carga. Se desea posicionar la carga de un punto a otro mediante un movimiento rápido y suave que evite las oscilaciones inducidas por el movimiento pendular de la carga. A partir del conocimiento del modelo matemático del sistema se desarrollan las estrategias de análisis y control.

La estabilización de una trayectoria de referencia se estudia mediante retroalimentación estática y retroalimentación dinámica. Mostramos que el sistema se puede linealizar mediante retroalimentación dinámica, como una consecuencia de que es diferencialmente plano. Se estudian las actuaciones mediante el diseño e implementación del control proporcional integral generalizado en su versión robusta. Dicho control permite la estimación total del vector estado del sistema cuando solo se tiene acceso a la medición de la salida. Además, es un control caracterizado por su robustez frente a perturbaciones que pueden modelarse como funciones acotadas del tiempo, por lo que, se ofrecen pruebas de robustez ante perturbaciones de baja frecuencia.

Seguidamente, se aborda el problema del acoplamiento de motores síncronos de imanes permanentes, como actuadores del sistema mecánico, considerando el problema de seguimiento de trayectorias, al mismo conjunto de salidas especiales. Se considera un movimiento sincronizado de los motores en las ruedas que desplazan horizontalmente al mecanismo, todo lo anterior, mediante el diseño e implementación del control proporcional integral generalizado en su versión robusta, a la linealización exacta del sistema electro-mecánico.

Los temas abordados en este trabajo son los siguientes:

1. Modelado del sistema.
2. Linealización exacta del sistema.
3. Diseño de la estrategia de control.
4. Simulación del sistema en lazo cerrado.
5. Desempeño del controlador ante perturbaciones acopladas al sistema.

Por último, se ofrece un diseño del control proporcional integral generalizado en su versión robusta en el enfoque de una linealización aproximada para el modelo matemático del sistema mecánico y el acoplamiento de la parte de eléctrico-mecánica (motores).

El trabajo muestra gráficos de las simulaciones las cuales se realizan mediante la vía computacional.

Abstract

This thesis project addresses the following control problem: we consider a platform or car that moves on the horizontal axis, equipped with a cylinder (winch) around which a cable is wound, and a load is anchored. It is desired to position the load from one point to another by means of a fast and smooth motion that avoids the oscillations induced by the pendular movement of the load. From the knowledge of the mathematical model of the system, the analysis and control strategies are developed.

Stabilization of a reference trajectory is studied via static and dynamic state feedback. We show that the system can be linearized by dynamic state feedback as a consequence of its differential flatness. The performances are studied through the design and implementation of the generalized integral proportional control in its robust version. Such control allows the total estimation of the state vector of the system when only measurement of the output are accessible. In addition, it is a control characterized by its robustness against disturbances that can be modeled as bounded functions of time, for which, are offered robustness tests against low-frequency disturbances.

Next, the problem of coupling permanent magnet synchronous motors, as actuators of the mechanical system, considering the trajectory tracking problem, to the same set of special outputs, is addressed. It is considered a synchronized movement of the motors in the wheels that move the mechanism horizontally, all of the above, through the design and implementation of the generalized integral proportional control in its robust version, to the exact linearization of the electro-mechanical system.

The topics addressed in this thesis project are the following:

1. System modeling.
2. Exact linearization of the system.
3. Control strategy design.
4. Simulation of the closed loop system.
5. Performance of the controller in the presence of disturbances coupled to the system.

Finally, a generalized integral proportional control design is offered, in its robust version, the approach of an approximate linearization for the mathematical model of the mechanical system and the coupling of the electro-mechanical part (motors).

The text shows graphs of the simulations which are carried out by computational means.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VII
Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XV
1. Introducción	1
Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Preguntas de investigación	5
1.4. Motivación y justificación	6
1.5. Objetivos	6
1.5.1. Objetivo general	6
1.5.2. Objetivos particulares	7
1.6. Alcances	7
1.7. Estructura del documento	8
1.8. Resumen del capítulo	9
2. Marco teórico	11
Marco teórico	11
2.1. Formalismo matemático	11
2.1.1. Difeomorfismos	12
2.1.2. El teorema de Frobenius	13
2.2. Linealización por retroalimentación de sistemas no lineales MIMO	14
2.2.1. Transformaciones de coordenadas locales	14
2.2.2. Linealización exacta por retroalimentación estática	17
2.2.3. Problema del control no interactuante	20
2.2.4. Lograr un grado relativo bien definido a través de la extensión dinámica	21
2.3. Planitud diferencial	24
2.4. Control proporcional integral generalizado y filtros planos	28
2.4.1. Control proporcional integral generalizado	28
2.4.2. El problema de la robustez	32
2.5. Resumen del capítulo	35
3. Modelado del sistema	37
Modelado del sistema	37
3.1. La grúa viajera, un modelo simplificado	37
3.1.1. Modelo matemático mediante Euler-Lagrange	37
3.1.2. Sistema diferencialmente plano	39
3.1.3. Linealización exacta mediante retroalimentación y transformación de coordenadas	40

3.2. La grúa viajera, un modelo refinado	45
3.2.1. Modelo matemático mediante Euler-Lagrange	45
3.2.2. Sistema diferencialmente plano	47
3.2.3. Linealización exacta mediante retroalimentación y transformación de coordenadas	48
3.2.4. Reubicación de las singularidades de la matriz de desacoplo para el modelo refinado de la grúa viajera (sin considerar el momento de inercia del cilindro)	52
3.2.5. Reubicación de las singularidades de la matriz de desacoplo para el modelo refinado de la grúa viajera (considerando el momento de inercia del cilindro)	55
3.3. El motor síncrono de imanes permanentes	57
3.3.1. Sistema diferencialmente plano	59
3.3.2. Linealización exacta mediante retroalimentación y transformación de coordenadas	60
3.4. Acoplamiento de los motores	61
3.5. Resumen del capítulo	62
4. Estrategia de control	65
Estrategia de control	65
4.1. Control GPI a la linealización exacta del modelo simplificado	65
4.1.1. Diseño del controlador	65
4.1.2. Simulaciones	68
4.2. Control GPI a la linealización exacta del modelo refinado	75
4.2.1. Simulaciones	77
4.3. Control GPI para el motor síncrono de imanes permanentes	80
4.3.1. Diseño del controlador	80
4.3.2. Simulaciones	84
4.4. Resumen del capítulo	89
5. Conclusiones	91
Conclusiones	91
5.1. Conclusión del trabajo	91
5.2. Aportaciones	92
5.3. Trabajos futuros	93
Bibliografía	97
A. Generación de trayectoria	99
B. Control GPI en enfoque de una linealización aproximada	103
B.1. Linealización tangente de sistemas lagrangianos controlados	103
B.2. Modelo simplificado desde un punto de vista de entrada-salida	105
B.3. Control GPI en el enfoque de la linealización tangente	107
B.3.1. Simulaciones	108
B.4. Control GPI aplicado al modelo de la grúa viajera con motores	112
B.4.1. Simulaciones	115

Índice de figuras

2.1. Imagen de un difeomorfismo Φ aplicado a un vector \mathbf{x} transformando las coordenadas y la imagen de un campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$	13
2.2. Desacoplamiento de los canales de entrada de un sistema no lineal desde un punto de vista entrada-salida.	22
2.3. Extensión dinámica en un orden del primer canal de entrada de un sistema sin grado relativo bien definido.	23
2.4. El monociclo.	26
2.5. Diagrama de bloques del controlador GPI para un sistema de orden n	30
2.6. Red de compensación clásica para un controlador GPI de orden n	32
2.7. Diagrama de bloques de un controlador GPI de segundo orden con un término integral extra aplicado a un sistema lineal puramente integrador de segundo orden.	35
3.1. Modelo simplificado de la grúa viajera.	37
3.2. Diagrama esquemático que representa el proceso de linealización exacta para el modelo simplificado de la grúa viajera. El proceso consiste en una retroalimentación de estado estático regular para el aislamiento de los canales, una extensión dinámica con dos integradores iterados en el primer canal de entrada que define la primer retroalimentación dando como resultado un sistema extendido que es linealizable mediante retroalimentación de estado estático regular y transformación de coordenadas.	45
3.3. Modelo refinado de la grúa viajera.	46
3.4. Circuito equivalente del motor síncrono de imanes permanentes.	57
4.1. Diagrama de bloques del controlador GPI de cuarto orden con un término integral extra aplicado a un sistema puramente integrador de cuarto orden.	68
4.2. Dos controladores GPI robustos aplicados al sistema lineal equivalente al sistema extendido, el cual consiste en dos sistemas puramente integradores de cuarto orden totalmente sin interacción.	68
4.3. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectoria mediante la aplicación de los controladores GPI robustos al sistema extendido del modelo simplificado de la grúa viajera.	70
4.4. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del sistema lineal equivalente al sistema extendido del modelo simplificado de la grúa viajera.	70
4.5. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectoria.	71
4.6. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las componentes del vector de estado \mathbf{x} del modelo simplificado de la grúa viajera.	71
4.7. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del modelo simplificado de la grúa viajera (fuerza aplicada la carro y par mecánico aplicado al cilindro).	72
4.8. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de la singularidad del difeomorfismo establecido entre el sistema extendido y el sistema lineal que es equivalente.	72

4.9. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento del carro y la carga de la grúa viajera en el plano (X, Z)	72
4.10. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Perturbaciones de baja frecuencia donde la perturbación $\xi_F(t)$ se suma a la fuerza F y la perturbación $\xi_\tau(t)$ se suma al par mecánico τ	73
4.11. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectoria para el sistema perturbado.	74
4.12. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Respuesta de los controladores GPI robustos a las perturbaciones acopladas al sistema.	74
4.13. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectoria para el sistema perturbado.	75
4.14. Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del modelo simplificado de la grúa viajera (fuerza aplicada la carro y par mecánico aplicado al cilindro) a las cuales se le han acoplado perturbaciones de baja frecuencia, respectivamente.	75
4.15. Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectoria mediante la aplicación de los controladores GPI robustos al sistema extendido del modelo refinado de la grúa viajera.	78
4.16. Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectoria.	78
4.17. Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Comportamiento de las componentes del vector de estado \mathbf{x} del modelo refinado de la grúa viajera.	79
4.18. Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del sistema lineal equivalente al sistema refinado del modelo simplificado de la grúa viajera.	79
4.19. Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del modelo refinado de la grúa viajera (fuerza aplicada la carro y par mecánico aplicado al cilindro).	80
4.20. Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Comportamiento de la singularidad del difeomorfismo establecido entre el sistema extendido del modelo refinado de la grúa viajera y el sistema lineal equivalente.	80
4.21. Diagrama esquemático de un controlador GPI con doble integral para el control de un sistema puramente integrador de primer orden.	82
4.22. Diagrama esquemático de un controlador GPI de tercer orden con un término integral extra para el control de un sistema puramente integrador de tercer orden.	84
4.23. Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados a las ruedas del carro de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Seguimiento de trayectoria.	86
4.24. Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados a las ruedas del carro de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Voltajes de control.	86
4.25. Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados a las ruedas del carro de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Errores de seguimiento de trayectoria.	87
4.26. Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes a las ruedas del carro de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Corrientes directa y de cuadratura.	87
4.27. Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados al cilindro de enrollamiento de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Seguimiento de trayectoria.	88
4.28. Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados al cilindro de enrollamiento de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Voltajes de control.	88
4.29. Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados al cilindro de enrollamiento de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Error de seguimiento de trayectoria.	89

4.30. Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados al cilindro de enrollamiento de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Corrientes directa y de cuadratura.	89
A.1. Comportamiento del polinomio de Bézier $f(t)$ de noveno orden.	101
A.2. Derivadas del polinomio de Bézier $f(t)$ de noveno orden, hasta un cuarto orden, observe que se cumplen las condiciones de que las derivadas son cero en las condiciones $t = t_i$ y $t = t_f$	101
B.1. Esquema de la implementación de los controladores GPI robustos al modelo no lineal de la grúa viajera, diseñados en un enfoque de una linealización tangente.	107
B.2. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectoria.	108
B.3. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).	109
B.4. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).	109
B.5. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).	110
B.6. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las componentes de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).	110
B.7. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).	110
B.8. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).	111
B.9. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).	111
B.10. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las componentes de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).	111
B.11. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Desempeño del seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).	115
B.12. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Voltajes de control del motor acoplado a la rueda del carro en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).	116

B.13. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Corrientes directa y de cuadratura del motor acoplado a la rueda del carro en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).	116
B.14. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Voltajes de control del motor acoplado al cilindro en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).	116
B.15. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Corrientes directa y de cuadratura del motor acoplado al cilindro en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga). . .	117
B.16. Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Desempeño del seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).	117

Índice de tablas

4.1. Parámetros físicos usados en la simulación del sistema en lazo cerrado para el modelo simplificado de la grúa viajera.	69
4.2. Parámetros físicos usados en la simulación del sistema en lazo cerrado para el modelo refinado de la grúa viajera.	77
4.3. Parámetros físicos usados en la simulación del sistema en lazo cerrado para el modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$	85

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo de tesis se considera una grúa viajera tipo puente, constituida por un carro o plataforma que se mueve a lo largo del eje horizontal, equipada con un cilindro alrededor del cual se enrolla un cable, terminado por la carga.

El control de las grúas tipo puente generalmente se lleva a cabo manualmente. Sin embargo, las mejoras en el posicionamiento preciso para manipulaciones en entornos hostiles y en las ganancias de productividad (alta velocidad, múltiples tareas) son muy necesarias y motivan el desarrollo de algoritmos de control automático.

Más precisamente, nuestro objetivo es conducir el sistema a lo largo de trayectorias rápidas con estabilidad y llegar al punto final con una precisión relativamente alta. Además, ofrecer robustez de la ley de control.

En el modelo de la grúa puente suponemos que el cable y la masa de carga se pueden considerar como un péndulo rígido. Así, la grúa puente puede verse como un sistema mecánico controlado, con 3 grados de libertad (2 prismáticos, 1 rotacional) y 2 actuadores (fuerza y par mecánico), donde el número de actuadores siendo menor que el número de grados de libertad hace que el sistema sea subactuado. El sistema no permite una linealización de estado completo por retroalimentación estática tal y como se muestra en este trabajo. No obstante, se muestra que el sistema sí se puede linealizar mediante una linealización de retroalimentación dinámica demostrándose, como una consecuencia, de que el sistema es diferencialmente plano.

De hecho se puede deducir que si la linealización de estado completo no es posible por retroalimentación estática, se puede sacar provecho de ciertas salidas especiales con el fin de obtener un enfoque de entrada-salida para una linealización aproximada (linealización tangente) del sistema y obtener una estabilidad en lazo cerrado al menos alrededor de un punto de equilibrio mediante el uso de un controlador robusto, es necesario aclarar que: el sistema linealizado, alrededor de un punto de equilibrio, debe ser controlable. Ofrecemos un desarrollo completo de todo esto, en un apéndice adicional anexo a este trabajo.

Por último, se presenta la adición de motores síncronos de imanes permanentes al modelo de la grúa viajera tipo puente y se aborda el problema de lograr un seguimiento de trayectoria para el desplazamiento horizontal del carro y ayudado por la posibilidad de controlar la longitud del cable, respectivamente. El modelo con la inclusión de los motores resulta ser un sistema diferencialmente plano el cual, además, admite una linealización exacta directamente por retroalimentación estática.

1.1. Estado del arte

A lo largo de los años el control de sistemas no lineales subactuados ha representado una ardua tarea en la comunidad científica dedicada a los sistemas de control. No obstante, se han desarrollado técnicas de control y análisis de sistemas no lineales, las cuales, en conjunto han ofrecido resultados positivos que han dado un avance significativo al desarrollo del control de los sistemas mencionados. Entre uno de los muchos sistemas subactuados, que es de gran interés, se encuentran los sistemas de las grúas viajeras, los cuales han sido motivo de investigación en el desarrollo de estrategias de control durante los últimos 60 años. El motivo de interés en su estudio, es que estas grúas son utilizadas

en numerosas aplicaciones industriales, tal como la carga y descarga de contenedores, el manejo de cargas de gran peso, y básicamente en tareas donde se requiere mover objetos de un lado a otro de una manera suave. Los esfuerzos por mejorar el desempeño han hecho que los sistemas de las grúas viajeras sean más rápidas y ofrezcan una mayor estabilidad al momento de realizar alguna maniobra.

La primera vez que se propuso el control de la grúa fue en un trabajo propuesto por Beeston (1969), véase [1]. En este trabajo se propone una ley de control en tiempo óptimo, minimizando el tiempo de la trayectoria considerando las condiciones que acotan la oscilación de la carga. Mas tarde en un trabajo realizado por Ridout (1989), véase [2], el cual propone un esquema de control lineal usando un modelo del sistema en variables de estado. Ridout resuelve el problema de la oscilación de la grúa y el posicionamiento del carro, sin embargo, no considera la longitud del cable como un grado de libertad del sistema y, por consecuencia, no es posible controlar dicho parámetro siendo un punto crítico en la aplicación práctica de la grúa viajera. Más tarde Burg *et al.* (1996), véase [3], extiende el trabajo de Ridout eh incluye la longitud del cable como un grado de libertad adicional al modelo, especificando un modelo dinámico para la grúa viajera en el cual la dinámica del carro es influenciada por el cambio en la longitud del cable. El trabajo utiliza el mismo controlador lineal con la mejora de una simple ganancia, sin embargo, su estrategia de control carece de robustez y la operación del controlador está dada para una región muy limitada.

En un trabajo realizado por B. d'Andrea-Novel y Levine (1990), véase [4], describen el modelo de una grúa puente en variables de estado en 6 dimensiones y linealizan el sistema mediante las técnicas de retroalimentación y transformación de coordenadas. En este trabajo, se intenta una linealización tangente del sistema en un punto de equilibrio y afirman que existen salidas tal que se puede obtener un esquema de entrada-salida, no obstante solo es posible linealizar 4 dimensiones por retroalimentación ya que una subvariedad de 2 dimensiones se vuelve inobservable por retroalimentación, en este mismo trabajo se demuestra que el sistema es linealizable por retroalimentación dinámica extendiendo el sistema a 8 dimensiones, afirmando que el posicionamiento de la grúa de un punto a otro se puede lograr de forma rápida mediante la estabilización y el seguimiento de trayectorias suaves aplicando un controlador no lineal al sistema linealizado, sin embargo, los resultados de la simulación no están disponibles. En el mismo año B. d'Andrea-Novel *et al.* (1990), véase [5], presentan un nuevo artículo donde trata de la estabilización de las oscilaciones inducidas en el cable de una grúa puente por retroalimentación del modelo mediante la posición de la plataforma, estableciendo la posición correcta del sistema en lazo cerrado con control de límite y la condición de homogeneidad de Neumann, la estabilización asintótica se prueba mediante el principio de invarianza de Lasalle. En otros trabajos presentados por B. d'Andrea-Novel y Boustany (1991) [6] y (1992) [7], se describe el modelo matemático y se aplican controladores adaptable y no adaptable, comparando sus respectivos desempeños, los cuales, se derivan de una aproximación de Lyapunov y de las técnicas de linealización por retroalimentación, donde, la adaptación está en la carga. Para el método adaptable se muestra que, usando la aproximación de Lyapunov para derivar el controlador adaptable, esto no lleva a alguna mejora en particular, con respecto al control no adaptable, el cual, resulta ser muy robusto ante incertidumbre de los parámetros. Además, se muestra que, en un control adaptable basado en la linealización por retroalimentación dinámica, se obtiene como resultado, una estabilidad superior en un rango de oscilación de la carga, en comparación con el controlador no adaptable.

Fliess *et al.* (1991), véase [8], sugieren una nueva representación en variables de estado donde, en oposición a la representación clásica, se introducen derivadas de las variables de control, ellos describen el modelo de la grúa mediante las leyes de Newton y obtiene una parametrización completa de todas las variables del sistema en términos de un conjunto de salidas y sus derivadas, igual al número de entradas de control, obteniendo así, dos relaciones cinemáticas las cuales expresan el desplazamiento horizontal del carro y la longitud del cable, respectivamente, en términos de las salidas y sus segundas derivadas, obteniendo así, mediante un cambio de variable, dos sistemas lineales de segundo orden, así mismo obtienen dos relaciones dinámicas las cuales expresan la fuerza aplicada al carro y el par mecánico aplicado al cilindro de enrollamiento en términos del desplazamiento horizontal del carro y

la longitud del cable. En este trabajo se propone un controlador lineal (alto nivel) en las relaciones cinemáticas para el seguimiento de trayectoria de las salidas y, un controlador PI (bajo nivel) a las relaciones dinámicas para la estabilización asintótica, el desempeño de la fuerza y el par mecánico se obtiene mediante, las referencias del comportamiento del desplazamiento horizontal del carro y la longitud del cable, calculados por el control de alto nivel, como resultado, obtienen una dinámica rápida y estable. La sencillez y la independencia de las relaciones cinemáticas con respecto a las constantes físicas del sistema constituyen sus principales intereses prácticos. Fliess *et al.* (1995) generalizan estas ideas y en un importante artículo, véase [9], exponen las ideas de la planitud diferencial siendo uno de los conceptos con mayor repercusión y avance dado que ofrece grandes herramientas en el análisis de los sistemas dinámicos. Mediante una serie de ejemplos ellos muestran la estructura natural de los sistemas planos como cadenas de integración pura, presentando nuevamente como uno de los ejemplos la grúa viajera.

Yu *et al.* (1996), véase [10], usan el método de las perturbaciones singulares, para separar la dinámica de la grúa en dos subsistemas interactuantes; un sistema lento que describe el movimiento promedio del carro y un sistema rápido que describe el movimiento de la oscilación de la carga. En este trabajo, se utilizan técnicas LQR para diseñar el controlador para cada uno de los subsistemas, los cuales se combinan en una forma única para el controlador de la grúa. El controlador del sistema lento controla la posición del carro, el cual sigue una trayectoria establecida, mientras que el controlador del sistema rápido minimiza la oscilación de la carga. Yu *et al.* sólo consideran el caso donde la carga se fija sin considerar el control de la elevación de la carga, por lo que no hay garantía en el desempeño del controlador cuando la altura de la carga es variable.

Trabajos más recientes tal como el que presenta Yi *et al.* (2003), véase [11], proponen un controlador basado en “conjuntos nebulosos” o “conjuntos difusos”, para el control de posición y anti-oscilación de una grúa puente basado en el modelo de inferencia difusa conectando dinámicamente módulos de reglas de entrada única (SIRM). La posición y velocidad del carro, el ángulo de oscilación de la cuerda y la velocidad angular se seleccionan como elementos de entrada y la aceleración del carro como elemento de salida donde cada elemento de entrada se da con un SIRM y un grado de importancia dinámica. En este trabajo se muestra que el sistema de control es asintóticamente estable con respecto al destino de la grúa, además el controlador es robusto para diferentes longitudes del cable y tiene capacidad de generalización para diferentes posiciones iniciales. Otro trabajo interesante es el que propone Yu *et al.* (2006), véase [12], el cual mediante el uso de redes neuronales, de función de base radial, disminuyen el error del estado controlado por un controlador PD garantizando la estabilidad a través de la compensación neuronal. Ellos demuestran que el método de Lyapunov y la técnica de estabilidad entrada-estado en conjunto con los compensadores neuronales producen un controlador robusto que es estable, además ellos presentan experimentos en tiempo real. Otros trabajos similares interesantes pueden verse en [13] y [14].

Es claro que los sistemas de las grúas viajeras han sido ampliamente estudiados en la literatura buscando nuevas estrategias de control y análisis que exhiban cada vez un mejor desempeño como la supresión de las oscilaciones inducidas en la carga por el movimiento del propio sistema, a su vez la estabilización de trayectorias más rápidas, esquemas de control más robustos ante perturbaciones externas, etc., siendo sistemas que siguen en constante investigación y mejoramiento. Es por ello por lo que, nos surge la motivación de diseñar de un esquema de control robusto que permita el manejo de una grúa viajera tipo puente de manera rápida, estable, fácil y confiable, que sea capaz de trabajar en ambiente hostil. Como se verá en este trabajo de tesis, un esquema de control robusto basado en GPI, en conjunto con las técnicas de la linealización por retroalimentación, nos dará una un control estable, que además es robusto frente a perturbaciones externas presentes en el sistema.

Ahora consideremos el otro sistema que se aborda en este trabajo; el motor síncrono de imanes permanentes. Los motores síncronos de imanes permanentes son extensivamente usados en servomotores, accionamientos eléctricos para posicionamiento, robótica, máquinas herramienta, ascensores, etc. Se

han llegado a construir máquinas de una potencia por encima de 1 MW por ejemplo para el accionamiento de submarinos. También es posible su aplicación en generación y bombeo a partir de energía solar fotovoltaica o energía eólica. Más recientemente se usan en la propulsión de trenes de alta velocidad y, por lo general, es el tipo de motor que se usan en los vehículos eléctricos. Como podemos notar, las aplicaciones de estos motores eléctricos son muy variadas debido a las grandes capacidades que ofrecen y su alto rendimiento en tareas que demandan gran potencia.

En muchas de las aplicaciones de estos motores eléctricos es necesario controlar de manera suave la posición angular al igual que la velocidad angular. Existen diversas técnicas que permiten el control de máquinas eléctricas; una de ellas es la técnica de control por campo orientado o control vectorial el cual se modela el sistema el motor en el eje de referencia $D - Q$ para implementar controles con efectos lineales sobre las corrientes del motor, trabajos como los de Zhang *et al.* (2008), véase [15], basan sus esfuerzos en el control de motores eléctricos mediante el control indirecto basado en el esquema por campo orientado con la teoría del control sinérgico. Un trabajo más reciente del control directo de motores de inducción en el esquema por campo orientado es propuesto por Kumar y Ramesh (2015), véase [16].

Una de las técnicas más utilizadas en el control de máquinas eléctricas es el control por regímenes deslizantes, esta metodología consiste en considerar el control del sistema como un conmutador (switch) y, ejercer una ley de retroalimentación con naturaleza discontinua [17]. El control por regímenes deslizantes se trata de una técnica discontinua que es caracterizada por llevar la trayectoria del estado del sistema a una región “llamada superficie de deslizamiento”, la cual define el comportamiento deseado del sistema. Dado que el control solo puede adquirir valores discontinuos, el estado del sistema se encuentra oscilando en una región muy cercana a la superficie de deslizamiento. Esta técnica proporciona grandes ventajas en las aplicaciones prácticas a las maquinas eléctricas debido a su naturaleza de conmutación, los actuadores y circuitos eléctricos encargados de manejar maquinas eléctricas de gran potencia disipan muy poca potencia y, por ende, su rendimiento no se ve afectado por el aumento de temperatura que es crucial, sobre todo, en los circuitos a base de semiconductores. Un trabajo reciente donde se utiliza esta técnica para el control del motor síncrono de imanes permanentes es propuesto por Solea *et al.* (2014), véase [18].

Un trabajo propuesto por Sira *et al.* (2014), véase [19], en el cual emplean el control por rechazo activo de perturbaciones o bien “ADRC” por sus siglas en inglés (*Active Disturbance Rejection Control*). Se trata de un controlador robusto desarrollado en un esquema entrada-salida con una variable de estado adicional, que representa todo lo que se ignora en la descripción matemática del sistema, es decir, dicha variable representa toda la influencia de incertidumbres de perturbación y términos dinámicos ignorados en el esquema entrada-salida del sistema, así como, perturbaciones externas que puedan ser introducidas al sistema. Dicha variable se considera como una perturbación total, donde, mediante un observador de orden extendido que además de estimar los estados del sistema estima esta perturbación total. Mediante una ley de control se intentan compensar los efectos de dicha perturbación en tiempo real [20]. En este trabajo se intenta aplicar un controlador al modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$, obteniendo un esquema entrada-salida basado en la planitud diferencial. Se considera la presencia de pares mecánicos desconocidos presentes en la dinámica del motor y, solo consideran la medición de las salidas conformadas por la posición angular y la corriente directa como variables medibles, la robustez del controlador permite la compensación de las perturbaciones presentes en el sistema, así como, el desconocimiento de términos dinámicos por incertidumbre paramétrica en el sistema. La robustez y la capacidad de adaptación de este esquema de control lo convierte en una solución interesante en escenarios donde no se dispone de un conocimiento completo del sistema.

En la tesis de maestría de Escobar (2015), véase [21], se presenta el análisis y la implementación de un control para el seguimiento de trayectoria en la velocidad para el motor síncrono de imanes permanentes. En este trabajo se propone un controlador lineal donde sólo se utilizan las mediciones

de las corrientes de fase del motor. La estimación de las funciones de la fuerza contraelectromotriz, en el marco de referencia ortogonal, se hace a través de observadores lineales con extensiones dinámicas. La estimación de la posición y velocidad angular se calculan mediante un observador basado en un Lazo de Amarre de Fase o bien “PLL” por sus siglas en inglés (*Phase Locked Loop*). En la tesis doctoral de Zurita (2019), véase [22], se contempla el arranque suave de un motor síncrono de imanes permanentes mediante un esquema de control robusto sin utilizar sensor mecánico, en este trabajo se propone el control ADRC y el control por filtrado plano “FFC” por sus siglas en inglés (*Flat Filtering Controller*), obteniendo un esquema entrada-salida del sistema basado en la planitud diferencial, demostrando experimentalmente la equivalencia entre los dos esquemas de control, también véase [23].

1.2. Planteamiento del problema

En los trabajos citados anteriormente, se presentan muchos modelos similares de grúas viajeras tipo puente, donde, se usan diferentes estrategias de control y análisis en el modelo matemático del sistema. El propósito fundamental del problema es; el traslado de la carga de un punto a otro, siguiendo una trayectoria suave, evitando al máximo las oscilaciones inducidas por el movimiento pendular. Nuestro propósito será el mismo y, como herramientas fundamentales, se usará al máximo las técnicas de la planitud diferencial, las técnicas de linealización por retroalimentación y el uso de un esquema de control robusto que aproveche al máximo la representación del sistema desde un punto de vista entrada-salida. El planteamiento del problema es el siguiente:

Mediante la consideración de un modelo específico de una grúa puente viajera, obtener las ecuaciones dinámicas mediante la formulación de Euler-Lagrange y, demostrar que el sistema es diferencialmente plano, es decir, obtener un conjunto de salidas especiales llamadas “salidas planas”, igual al número de entradas control, las cuales, logran una parametrización diferencial de todas las variables del sistema, estableciendo así la planitud. Luego, la linealización completa del sistema de forma exacta mediante retroalimentación dinámica y, el desacoplamiento de este, como subsistemas en forma de cadena de integradores totalmente sin interacción. Dicha forma es conocida en la literatura como: la forma canónica de Brunowsky. A partir de los subsistemas lineales de integración pura, resultantes de resolver el problema de la linealización exacta y la planitud diferencial, se diseñará un esquema de control robusto, el cual, está basado en el esquema de control GPI, que permita el seguimiento de una trayectoria suave de tipo descanso-descanso del mismo conjunto particular de salidas planas. Así mismo, se considera un nuevo modelo de la grúa con un pequeño refinamiento, considerando la tangencia del cable sobre el cilindro o cabestrante (en las figuras de los modelos se muestra dicha consideración en la tangencia). Se aplicará el mismo tratamiento que en considerando las restricciones regidas por su naturaleza. Además, se consideran pruebas de la robustez del esquema de control frente a posibles perturbaciones externas que pudieran afectar al sistema.

Por último, se plantea la adición de motores síncronos de imanes permanentes al sistema mecánico de la grúa, considerando un problema de seguimiento de trayectorias de la posición horizontal de la grúa, para los motores acoplados en las ruedas que mueven el mecanismo del carro, moviéndose de manera sincronizada y, un seguimiento de trayectoria en la longitud del cable para el motor acoplado al cabestrante. Para lograr dicho objetivo se obtendrá una linealización exacta del modelo matemático del motor síncrono de imanes permanentes, descrito en el eje de referencia $D-Q$, demostrando primero que el sistema es diferencialmente plano. Se diseña un control GPI robusto apropiado a partir de los subsistemas lineales de integración pura, obtenidos de la linealización exacta.

1.3. Preguntas de investigación

- ¿Es posible demostrar que el modelo de la grúa viajera obtenido mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange es diferencialmente plano?
- ¿Hay alguna relación directa entre la planitud diferencial y la linealización por retroalimentación?

- ¿Qué condiciones debe cumplir un sistema para que pueda linealizarse de forma exacta por retroalimentación estática regular?
- Si el sistema no tiene un grado relativo bien definido. ¿Es posible modificarlo y bajo qué condiciones, con el fin de obtener un sistema que si tenga un grado relativo bien definido?
- Si tenemos una importante singularidad en la matriz de desacoplo del sistema. ¿Es posible eliminar o mover dicha singularidad a otra región, de modo que no represente un obstáculo a la equivalencia entre el sistema no lineal y su sistema lineal equivalente?
- ¿El esquema de control GPI robusto aplicado al sistema no lineal y diseñado en el esquema del sistema lineal equivalente de la grúa, tiene un buen desempeño en el seguimiento de trayectorias suaves de tipo descanso-descanso que conlleve al traslado suave, rápido y la supresión de oscilaciones en la carga?
- ¿Qué robustez presenta el esquema de control GPI robusto frente a perturbaciones ajenas al sistema?
- ¿El esquema de control GPI robusto aplicado al sistema no lineal y diseñado a partir de modelo lineal de los motores síncronos de imanes permanentes tiene un buen desempeño en el seguimiento de trayectoria y, que robustez presenta ante cargas desconocidas no modeladas al sistema?

1.4. Motivación y justificación

El gran impacto que ha tenido el uso de grúas viajeras en la industria ha motivado a desarrollar estrategias de control automático que permitan el posicionamiento seguro, preciso y confiable, para la manipulación de cargas en entornos peligrosos y hostiles o, el simple hecho de obtener una mayor productividad. Como todos los sistemas subactuados, tal y como lo es la grúa puente viajera, tienen más grados de libertad que numero de variables de control, propio de la naturaleza del sistema, los cuales representan complicaciones considerables en el desarrollo de estrategias de control. Además de esto, muchos sistemas que son utilizados en la industria están expuestos constantemente a cambios en sus condiciones de operación como; perturbaciones externas que no son consideradas en el modelo del sistema, parámetros físicos que son susceptibles a los cambios del medio ambiente, así como posibles desajustes, entre otros. Debido a todas las circunstancias mencionadas, la comunidad científica se ha dado a la tarea de desarrollar nuevas técnicas de análisis de sistemas no lineales y, estrategias de control que permitan el control preciso, confiable y robusto.

Con base a estos preliminares, este trabajo presenta un tratamiento del sistema de una grúa viajera tipo puente, haciendo uso de en un conjunto de técnicas desarrolladas para el análisis y, el diseño de estrategias de control, que se basa en resultados matemáticos derivados de la geometría diferencial, exponiendo la teoría desde un punto de vista formal axiomático. Por otra parte, se hace uso del esquema de control GPI, el cual basa sus esfuerzos en la retroalimentación y estimación de los estados del sistema cuando sólo se tiene acceso a la medición de la salida. A su vez presenta una gran robustez frente a perturbaciones externas no modeladas mediante el uso del control GPI. Todo esto con el motivo de obtener un posicionamiento rápido, preciso y estable, de la carga que transporta la grúa viajera.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Diseñar una estrategia de control robusto a partir del esquema de control GPI, para dos modelos apropiados de una grúa viajera tipo puente, incluyendo los modelos de la parte electro-mecánica (motores), esto con el objetivo de realizar una seguimiento de trayectoria suave de tipo descanso a descanso, de un conjunto de salidas especialmente seleccionadas, evitando las oscilaciones inducidas por el movimiento pendular de la carga, aun bajo condiciones de perturbaciones externas al sistema.

1.5.2. Objetivos particulares

- Obtener un sistema lineal que sea equivalente mediante una transformación invertible al sistema no lineal que describe el modelo de la grúa viajera, dicha transformación debe ser no singular en cualquier punto de equilibrio del sistema extendido al sistema original, con el motivo de poder operar la grúa en cualquier punto de equilibrio de este. Hacer esto para ambos modelos propuestos para la grúa.
- Diseñar un esquema de control GPI robusto basado en el sistema lineal que es equivalente al sistema no lineal de la grúa viajera para el seguimiento de trayectorias de la salida plana. Hacer esto para ambos modelos propuestos para la grúa.
- Simular, por la vía computacional, el sistema en lazo cerrado, el cual consta del sistema extendido del sistema original no lineal de la grúa viajera y, el esquema de control. Hacer esto para ambos modelos propuestos para la grúa.
- Validar la robustez del esquema de control frente a perturbaciones externas, generalmente estas perturbaciones se presentan como fuerzas y pares mecánicos en un sistema mecánico.
- Obtener un sistema lineal que sea equivalente al sistema no lineal que describe el modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$.
- Diseñar un esquema de control GPI robusto basado en el sistema lineal que es equivalente al sistema no lineal del motor síncrono de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$.
- Hacer un seguimiento de trayectoria de la posición horizontal del carro para cada motor acoplado a las ruedas de forma sincronizada, repartiendo la fuerza requerida para realizar la maniobra en ambos motores. Así mismo, hacer un seguimiento de trayectoria de la longitud del cable para cada motor acoplado al cilindro.

1.6. Alcances

- Proponer dos modelos matemáticos que describen una grúa viajera puente.
- Demostrar que los modelos de una grúa viajera, obtenidos mediante la formulación de Euler-Lagrange, son diferencialmente planos.
- Obtener un sistema extendido, mediante una extensión dinámica al sistema no lineal original que describe la grúa viajera, tal que el sistema extendido sea linealizabile de forma exacta por retroalimentación estática regular y transformación de coordenadas. Esto se considera para ambos modelos.
- Demostrar que es posible reubicar una singularidad presente en la matriz de desacoplo del sistema extendido, mediante una retroalimentación de estado estático regular apropiada, aplicada al sistema antes de realizar la extensión dinámica. Dicha retroalimentación tiene que ser no singular en cualquier punto de equilibrio del sistema original. De este modo, poder obtener una transformación invertible entre el sistema extendido y su sistema lineal equivalente, que sea válida en todos los puntos de equilibrio de dichos sistemas. Esto se considera solo para el segundo modelo.
- Obtener un sistema lineal y controlable que sea equivalente al sistema extendido. Esto se considera para ambos modelos.
- Diseñar un esquema de control GPI robusto para el sistema lineal equivalente al sistema extendido que cumpla con el objetivo de control. Debido a la equivalencia legítima entre el sistema extendido y su sistema lineal equivalente, el controlador se aplica directamente al sistema extendido.

- Presentar una demostración que valide la robustez del esquema de control frente a perturbaciones externas no modeladas, estas perturbaciones se presentan como fuerzas y pares mecánicos acoplados al sistema de la grúa.
- Diseñar un esquema de control GPI robusto para los motores síncronos de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$, una vez obtenida la representación del sistema como un conjunto de subsistemas de integración pura en una versión perturbada, que cumpla con el objetivo como un sistema de bajo nivel para el problema de seguimiento de trayectorias.
- Se dará una demostración, en un apéndice, del poder de estimación y robustez del controlador GPI robusto, cuando no se tiene acceso al modelo exacto del sistema, es decir, el control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada para el modelo no lineal del sistema, exponiendo las ventajas y desventajas que conlleva la estrategia de control y el análisis del sistema desde este punto de vista.

1.7. Estructura del documento

En el capítulo 1 se da una introducción al trabajo de tesis, evidenciando algunos trabajos previos existentes en la literatura referentes al control y análisis de sistema de la grúa viajera, así mismo, para al motor síncrono de imanes permanentes. Esto servirá como punto de partida, se ofrecen los problemas concretos a resolver, los objetivos y los alcances de este trabajo.

En el capítulo 2 se exponen los conceptos y herramientas teóricas que se emplean y basa sus esfuerzos este trabajo de tesis, tales como la linealización por retroalimentación y transformación de coordenadas, la planitud diferencial y el esquema de control GPI robusto, aclarando el contenido de la teoría mediante una serie de ejemplos simples.

En el capítulo 3 se presenta un análisis completo de los modelos mecánico y eléctrico que se desarrollan en este trabajo. El capítulo se divide en cuatro secciones, la primera considera un modelo simplificado de una grúa viajera tipo puente, obteniendo el modelo matemático mediante la formulación de Euler-Lagrange y, probando que, el sistema es diferencialmente plano. Mediante el uso de las técnicas de linealización por retroalimentación y transformación de coordenadas, se obtiene un sistema lineal en la forma canónica de Brunowsky, que es difeomorfo al sistema extendido del modelo simplificado de la grúa viajera en la representación de espacio de estados. En la segunda sección se considera un modelo refinado de la grúa viajera y, se procede a realizar un tratamiento similar al primer modelo con un argumento adicional, dedicado a la reubicación de una singularidad presente en la matriz de desacoplo. La tercera sección está dedicada al modelado del motor síncrono de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$, para así obtener una linealización exacta del sistema. La cuarta sección se considera el acoplamiento de los motores al modelo mecánico de la grúa viajera.

En el capítulo 4 se diseñan los esquemas de control GPI robusto para los sistemas lineales en la forma canónica de Brunowsky que son difeomorfos a los sistemas extendidos de los modelos (simplificado y refinado) de la grúa viajera. Se muestra el desempeño de los sistemas en lazo cerrado mediante la vía computacional, dando un análisis y discusión de los resultados. Además, se ofrecen gráficos del desempeño de los esquemas de control frente a perturbaciones externas, acopladas a la fuerza y al par mecánico, como señales de baja frecuencia, muy comunes en los sistemas mecánicos. Por último, se diseñan y se aplican esquemas de control GPI robusto para los motores síncronos de imanes permanentes, en un problema de seguimiento de trayectoria de la posición angular deseada para el desplazamiento horizontal del carro y, la longitud del cable, considerando la fuerza y pares mecánicos como perturbaciones externas.

Finalmente, en el capítulo 5 se dan las conclusiones para este trabajo de tesis, las aportaciones y posibles trabajos futuros.

1.8. Resumen del capítulo

El presente capítulo da una introducción al trabajo de tesis propuesto y realizado a lo largo de este escrito. Se presentan los antecedentes y algunos trabajos previos existentes en la literatura, que sirven como base y punto de partida. Así mismo, se exponen el problema fundamental a resolver, los objetivos, motivaciones y, los alcances que ofrece este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Marco teórico

En los últimos años, la geometría diferencial ha demostrado ser una herramienta eficaz de análisis y diseño de sistemas de control no lineales como lo fue en el pasado para la transformada de Laplace, la teoría de variables complejas y el álgebra lineal en relación con los sistemas lineales. Los problemas de síntesis de interés desde hace mucho tiempo, como el desacoplamiento de perturbaciones, el control sin interacción, la regulación de la salida y la configuración de la respuesta entrada-salida, pueden tratarse con relativa facilidad mediante técnicas basadas en la geometría diferencial.

El tema principal que se aborda en este trabajo es la linealización exacta de un sistema no lineal por retroalimentación y transformación de coordenadas [24], donde solo se verá el caso de múltiples entradas, múltiples salidas, no obstante, el caso de una entrada y una salida se puede ver como un caso particular. La idea principal de la linealización por retroalimentación es la de transformar, o, en otras palabras, obtener un sistema lineal que sea totalmente equivalente (al menos en una región del espacio de estados) al sistema no lineal de interés, lo cual permite aplicar técnicas lineales de control para obtener un desempeño deseado del sistema en lazo cerrado. La idea central del desarrollo y la síntesis de las técnicas de linealización por retroalimentación se basa en el concepto de grado relativo de un sistema en el espacio de estados, respecto a un vector de salida. El concepto de grado relativo, para sistemas no lineales, fue introducido por A. Isidori en 1989, véase [25]. Se introduce la definición de la matriz de desacoplo que permite el desacoplamiento de entradas y salidas, como subsistemas independientes de entrada única y salida única, es decir, un control sin interacción. Por otro lado, se expondrá una forma de obtener un grado relativo bien definido cuando el sistema no lo tiene. Es importante recalcar que esto solo se puede lograr en sistemas de múltiples entradas, múltiples salidas. Seguidamente se presenta un concepto tan poderoso que ha tenido un gran auge y aceptación en los últimos años: la planitud diferencial, o en inglés; *Differential flatness*, a su vez, se ofrece la relación tan estrecha que tiene con la linealización por retroalimentación. Por último, se presenta el control proporcional integral generalizado GPI y una versión robusta de este mismo esquema de control.

2.1. Formalismo matemático

La teoría de la linealización por retroalimentación se basa en varios conceptos matemáticos de geometría diferencial.

A continuación, se presentan conceptos matemáticos como el gradiente de una función escalar, la matriz Jacobiana de una función vectorial y la derivada direccional de un campo escalar también conocida como derivada de Lie. Se define también el concepto de difeomorfismo y se expone el teorema de Frobenius, el cual se refiere a la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

A continuación, se expondrán algunos conceptos básicos

- Gradiente de una función escalar
- Matriz Jacobiana de una función vectorial

Si $h(\mathbf{x})$ es una función escalar del estado (n -dimensional), su gradiente es un vector de dimensión $(1 \times n)$ definido por:

$$\nabla h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$$

Si $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una función vectorial del estado (n -dimensional) también llamada campo vectorial, la matriz Jacobiana está dada por una matriz de dimensiones $(n \times n)$

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definición 2.1.1. Sea una función escalar $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se define la derivada de Lie o derivada direccional de $h(\mathbf{x})$ en la dirección de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, como la función escalar dada por

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \nabla h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Definimos las derivadas de Lie múltiples, recursivamente según

$$L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = \nabla(L_{\mathbf{f}}^{i-1} h(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots$$

del mismo modo, si $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es otro campo vectorial, entonces la función escalar doble derivada de Lie de $h(\mathbf{x})$ respecto de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ viene dada por

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \nabla(L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Definición 2.1.2. Sean $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ dos campos vectoriales en \mathbb{R}^n . Se define el campo adjunto de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ respecto de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ o corchete de Lie, como

$$ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = (\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

y de forma recursiva

$$ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad ad_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^{i-1} \mathbf{g}], \quad i = 1, 2, \dots$$

2.1.1. Difeomorfismos

Se puede describir un cambio de coordenadas no lineal en la forma

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$$

donde $\Phi(\mathbf{x})$ una función en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de n variables, es decir

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \phi_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \phi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \phi_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

con las siguientes propiedades

1. $\Phi(\mathbf{x})$ es invertible, es decir, existe una función $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$ tal que

$$\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

para todo \mathbf{x} en Ω .

2. $\Phi(\mathbf{x})$ y $\Phi^{-1}(\mathbf{x})$ son ambos mapeos suaves, es decir, tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden.

Una transformación de este tipo se denomina difeomorfismo local en Ω . La primera de las dos propiedades es claramente necesaria para tener la posibilidad de revertir la transformación y recuperar el vector de estado original

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z})$$

mientras que la segunda garantiza que la descripción del sistema en las nuevas coordenadas sigue siendo suave. Si Ω resulta ser todo el espacio \mathbb{R}^n , entonces $\Phi(\mathbf{x})$ se denomina difeomorfismo global.

Lema 2.1.1. Sea $\Phi(\mathbf{x})$ una función suave definida en una región Ω de \mathbb{R}^n . Si la matriz Jacobiana $\nabla\Phi(\mathbf{x})$ es no singular en un punto \mathbf{x}^o de Ω entonces $\Phi(\mathbf{x})$ es un difeomorfismo local en una subregión de Ω .

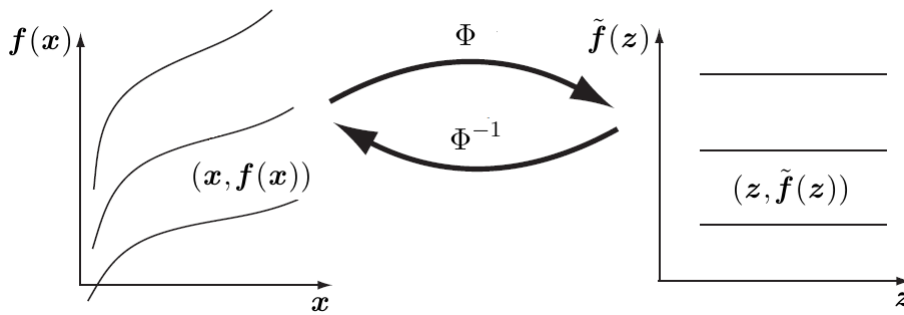


Figura 2.1: Imagen de un difeomorfismo Φ aplicado a un vector \mathbf{x} transformando las coordenadas y la imagen de un campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

2.1.2. El teorema de Frobenius

El teorema de Frobenius se refiere a la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Este teorema será usado en el tratamiento formal de la linealización por retroalimentación completa de sistemas de orden n . Antes de enunciar el teorema de Frobenius es necesario definir que son distribuciones completamente integrables y distribuciones involutivas.

Definimos una distribución suave

$$G = \text{gen}\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\}$$

como un subespacio de \mathbb{R}^n generado por $\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\}$, un conjunto linealmente independiente de campos vectoriales en \mathbb{R}^n .

Definición 2.1.3. Se dice que una distribución $G = \{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\}$ en \mathbb{R}^n es completamente integrable si y solo si existen $n - m$ funciones escalares $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_{n-m}(\mathbf{x})$, donde \mathbf{x} es el estado del sistema, tales que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$L_{\mathbf{f}_j} h_i(\mathbf{x}) = \nabla h_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n - m, \quad 1 \leq j \leq m$$

y los gradientes $\nabla h_i(\mathbf{x})$ son linealmente independientes.

Notemos que al ser m el número de campos vectoriales y n la dimensión del espacio asociado, el número de funciones escalares incógnitas $h_i(\mathbf{x})$ es $n - m$ y, por lo tanto, el número de ecuaciones en derivadas parciales será el producto del número de campos vectoriales por el número de funciones incógnitas, esto es: $m(n - m)$.

Definición 2.1.4. Se dice que una distribución $G = \{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\}$ en \mathbb{R}^n es involutiva si y solo si existen funciones escalares $\alpha_{ijk}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{f}_k(\mathbf{x}), \quad \text{para todo } i, j$$

Involutividad significa que si se forman los corchetes de Lie de cualquier par de campos vectoriales del conjunto $\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\}$, entonces el campo vectorial resultante puede ser expresado como una combinación lineal del conjunto original de campos vectoriales. Nótese que

- Los campos vectoriales constantes son siempre involutivos. De hecho, el corchete de Lie de dos vectores constantes es el vector cero, que puede ser trivialmente expresado como combinación lineal de los campos vectoriales.
- Un conjunto compuesto de un solo vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es involutivo. De hecho,

$$[\mathbf{f}, \mathbf{f}] = (\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

Visto lo anterior, se presenta el teorema de Frobenius.

Teorema 2.1.1. Una distribución no singular $G = \text{gen}\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\}$ en R^n es completamente integrable si y solo si es involutiva.

2.2. Linealización por retroalimentación de sistemas no lineales de múltiples entradas, múltiples salidas

2.2.1. Transformaciones de coordenadas locales

Los sistemas no lineales multivariables que consideramos se describen en forma de espacio de estados mediante ecuaciones del siguiente tipo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ &\dots \\ y_m &= h_m(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})$ son campos vectoriales suaves, y $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})$ funciones suaves definidas en un conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Siempre que sea posible y conveniente, estas ecuaciones se reescribirán en la forma más condensada

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

habiendo establecido

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \text{col}(u_1, \dots, u_m) \\ \mathbf{y} &= \text{col}(y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

y donde

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \text{col}(h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

son respectivamente una matriz $n \times m$ y un m -vector.

El punto de partida del análisis es una versión multivariable apropiada de la noción de grado relativo, que de hecho, identifica la clase de sistemas no lineales multivariables que se estudiarán en este trabajo. Un sistema no lineal multivariable de la forma (2,1) tiene grado relativo (vector) $\{r_1, \dots, r_m\}$ en un punto \mathbf{x}^o sí

(i)

$$L_{g_j} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0$$

para todo $1 \leq j \leq m$, para todo $k < r_i - 1$, para todo $1 \leq i \leq m$, y para toda \mathbf{x} en una vecindad de \mathbf{x}^o .

(ii)

La matriz $m \times m$

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Es no singular en $\mathbf{x} = \mathbf{x}^o$.

Tengamos en cuenta que cada entero r_i esta asociado con el i -ésimo canal de salida del sistema. Por definición, para todo $k \leq r_i - 1$, el vector renglón

$$(L_{g_1} L_f^k h_i(\mathbf{x}) \quad L_{g_2} L_f^k h_i(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_f^k h_i(\mathbf{x}))$$

es cero para toda \mathbf{x} en una vecindad de \mathbf{x}^o y, para $k = r_i - 1$, este vector renglón es distinto de cero, dado que asumimos que la matriz $A(\mathbf{x}^o)$ es no singular.

Notemos, finalmente, que r_i es exactamente el número de veces que uno tiene que diferenciar la i -ésima salida y_i , para tener al menos un componente del vector de entrada \mathbf{u} que aparezca explícitamente.

Proposición 2.2.1. Suponga que un sistema tiene un grado relativo (vector) $\{r_1, \dots, r_m\}$ en \mathbf{x}^o . Entonces

$$r_1 + \dots + r_m \leq n$$

Establecemos para $1 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned} \phi_1^i(\mathbf{x}) &= h_i(\mathbf{x}) \\ \phi_2^i(\mathbf{x}) &= L_f h_i(\mathbf{x}) \\ &\cdots \\ \phi_{r_i}^i(\mathbf{x}) &= L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Sí $r = r_1 + \dots + r_m$ es estrictamente menor que n , siempre es posible encontrar $n - r$ más funciones $\phi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ tales que el mapeo

$$\Phi(\mathbf{x}) = \text{col}(\phi_1^1(\mathbf{x}), \dots, \phi_{r_1}^1(\mathbf{x}), \dots, \phi_1^m(\mathbf{x}), \dots, \phi_{r_m}^m(\mathbf{x}), \phi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x}))$$

tiene una matriz jacobiana que es no singular en \mathbf{x}^o y, por lo tanto, califica como una transformación de coordenadas locales en una vecindad de \mathbf{x}^o . El valor en \mathbf{x}^o de estas funciones adicionales se puede elegir arbitrariamente. Además, si la distribución

$$G = \text{gen}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$$

es involutiva en una vecindad de \mathbf{x}^o , siempre es posible elegir $\phi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ de tal manera que

$$L_{g_j} \phi_i(\mathbf{x}) = 0$$

para todo $r + 1 \leq i \leq n$, para todo $1 \leq j \leq m$, y para todo \mathbf{x} en una vecindad de \mathbf{x}^o .

A continuación, se presentan los cálculos que conducen a la descripción del sistema en nuevas coordenadas. Diferenciando con respecto al tiempo se obtiene, por ejemplo, para el primer conjunto de nuevas coordenadas

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1^1}{dt} &= \phi_1^1(t) \\ \dots \\ \frac{d\phi_{r_1-1}^1}{dt} &= \phi_{r_1-1}^1(t) \\ \frac{d\phi_{r_1}^1}{dt} &= L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}(t)) u_j(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Introduciendo la siguiente notación

$$\xi^i = \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \dots \\ \xi_{r_i}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^i(\mathbf{x}) \\ \phi_2^i(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \phi_{r_i}^i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

para todo $1 \leq i \leq m$,

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_{m-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \phi_{r+2}(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned}a_{ij}(\xi, \eta) &= L_{g_j} L_f^{r_1-1} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq m \\ b_i(\xi, \eta) &= L_f^{r_1} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad \text{para } 1 \leq i \leq m\end{aligned}$$

Por lo que, las ecuaciones en cuestión se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ \dots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j \\ y_i &= \xi_1^i\end{aligned} \tag{2.3}$$

para $1 \leq i \leq m$. En lo que respecta al conjunto restante de nuevas coordenadas, no podemos esperar ninguna forma especial para las ecuaciones correspondientes. Si la distribución generada por los campos vectoriales $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})$ no es involutiva, solo podemos escribir genéricamente, con una notación vectorial,

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i(\xi, \eta) u_i = \mathbf{q}(\xi, \eta) + \mathbf{p}(\xi, \eta) \mathbf{u} \tag{2.4}$$

En caso contrario, si la distribución en cuestión es involutiva, siempre es posible elegir el conjunto restante de coordenadas $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$ de tal forma que se obtenga una ecuación del tipo

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}(\xi, \eta)$$

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) caracterizan la forma normal de las ecuaciones que describen (localmente alrededor de un punto \mathbf{x}^o) un sistema no lineal, con m entradas y m salidas, que tienen un grado relativo (vector) $\{r_1, \dots, r_m\}$ en \mathbf{x}^o . Notemos que, en la ecuación (2.3), los coeficientes $a_{ij}(\xi, \eta)$ son

exactamente las entradas de la matriz (2.2), con \mathbf{x} reemplazado por $\Phi^{-1}(\xi, \eta)$, y los coeficientes $b_j(\xi, \eta)$, son las entradas del vector

$$b(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_f^{r_2} h_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

de nuevo \mathbf{x} reemplazado por $\Phi^{-1}(\xi, \eta)$.

2.2.2. Linealización exacta por retroalimentación estática

La versión multivariable apropiada de la retroalimentación de estado es aquella en la que cada entrada u_i depende del estado \mathbf{x} del sistema y de unas nuevas entradas de control v_1, \dots, v_m tal como

$$u_i = \alpha_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(\mathbf{x}) v_j \quad (2.6)$$

donde $\alpha_i(\mathbf{x})$ y $\beta_{ij}(\mathbf{x})$, para (2.6) son funciones suaves definidas en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n donde el número de componentes de la nueva entrada

$$\mathbf{v} = \text{col}(v_1, \dots, v_m)$$

es exactamente igual al número de componentes de la entrada original \mathbf{u} .

Usando para (2.6) la expresión más condensada

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (2.7)$$

en el cual

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \alpha_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \beta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(\mathbf{x}) & \dots & \beta_{1m}(\mathbf{x}) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \beta_{m1}(\mathbf{x}) & \dots & \beta_{mm}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Aseguramos que la matriz $\beta(\mathbf{x})$ es no singular para todo \mathbf{x} en una vecindad de \mathbf{x}^o . En consecuencia, la retroalimentación (2.6) se denomina una retroalimentación de estado estático regular. El principal problema es utilizar la retroalimentación y la transformación de coordenadas con el propósito de cambiar un sistema no lineal en uno lineal y controlable. Por lo general, el problema en cuestión se puede plantear de la siguiente manera.

Problema de linealización exacta del espacio de estados. Dado un conjunto de campos vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})$ y un estado inicial \mathbf{x}_o , encontrar (sí es posible), una vecindad U de \mathbf{x}_o , un par de funciones de retroalimentación $\alpha(\mathbf{x})$ y $\beta(\mathbf{x})$ definidas en U , una transformación de coordenadas $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ también definida en U , una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, tal que

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})) \right]_{\mathbf{x}=\Phi^{-1}(\mathbf{z})} = A\mathbf{z} \quad (2.8)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{g}(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})) \right]_{\mathbf{x}=\Phi^{-1}(\mathbf{z})} = B \quad (2.9)$$

y

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

Consideremos un sistema no lineal que tiene grado relativo (vector) $\{r_1, \dots, r_m\}$ en \mathbf{x}^o y suponemos que la suma $r = r_1 + \dots + r_m$ es exactamente igual a la dimensión del espacio de estados n . Si este es el caso, el conjunto de funciones

$$\phi_k^i(\mathbf{x}) = L_f^{k-1} h_i(\mathbf{x}) \quad \text{para } 1 \leq k \leq r_i, 1 \leq i \leq m$$

define completamente una transformación de coordenadas locales en \mathbf{x}^o . En las nuevas coordenadas el sistema se describe mediante m conjuntos de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi) u_j \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq m$.

Recordamos que en una vecindad del punto $\xi^o = \Phi^{-1}(\mathbf{x}^o)$ la matriz $A(\xi)$ es no singular y, por lo tanto, las ecuaciones

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix} = b(\xi) + A(\xi) \mathbf{u}$$

pueden ser resueltas para \mathbf{u} . De hecho, la entrada \mathbf{u} para resolver estas ecuaciones tiene la forma de una retroalimentación de estado.

$$\mathbf{u} = A^{-1}(\xi)[-b(\xi) + \mathbf{v}]$$

al imponer esta retroalimentación produce un sistema caracterizado por los m conjuntos de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= v_i \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq m$, que es claramente un sistema lineal y controlable.

A partir de estos cálculos, vemos que las condiciones en las que el sistema para alguna elección de funciones de salida $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})$ tiene un grado relativo (vector) $\{r_1, \dots, r_m\}$ en \mathbf{x}^o y que $r_1 + \dots + r_m = n$ implica la existencia de una transformación de coordenadas y una retroalimentación de estado definida localmente alrededor de \mathbf{x}^o que resuelve el problema de linealización exacta del espacio de estados. La linealización por retroalimentación tiene la forma

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \mathbf{v} \tag{2.10}$$

con $\alpha(\mathbf{x})$ y $\beta(\mathbf{x})$ dados por

$$\alpha(\mathbf{x}) = -A^{-1}(\mathbf{x})b(\mathbf{x}) \quad \beta(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x}) \tag{2.11}$$

con $A(\mathbf{x})$ y $b(\mathbf{x})$ como en (2.2) y (2.5), mientras que las coordenadas de linealización se definen como

$$\xi_k^i(\mathbf{x}) = L_f^{k-1} h_i(\mathbf{x}) \quad \text{para } 1 \leq k \leq r_i, 1 \leq i \leq m. \tag{2.12}$$

Mostramos ahora que las condiciones en cuestión también son necesarias.

Lema 2.2.1. Suponemos que la matriz $\mathbf{g}(\mathbf{x}^o)$ es de rango m . Entonces, el problema de la linealización exacta del espacio de estados tiene solución si y solo si existe una vecindad U de \mathbf{x}^o y m funciones de valor real $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})$, definidas en U , tal que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

tiene grado relativo (vector) $\{r_1, \dots, r_m\}$ en \mathbf{x}^o y $r_1 + \dots + r_m = n$.

Demostración. Nosotros solo necesitamos mostrar la necesidad. primero que todo se muestra que los números enteros r_i , $1 \leq i \leq m$, son invariantes bajo una retroalimentación regular. Recordemos que para todo $\alpha(\mathbf{x})$

$$L_{\mathbf{f}+\mathbf{g}\alpha}^k h_i(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq r_i - 1, 1 \leq i \leq m$$

De esto, uno deduce que

$$L_{(g\beta)_j} L_{\mathbf{f}+\mathbf{g}\alpha}^k h_i(\mathbf{x}) = L_{(g\beta)_j} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^m L_{g_s} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) \beta_{sj}(\mathbf{x}) = 0$$

para todo $0 \leq k \leq r_i - 1$, para todo $1 \leq i, j \leq m$ y para todo \mathbf{x} alrededor de \mathbf{x}^o . Además

$$\begin{aligned}& \left(L_{(g\beta)_1} L_{\mathbf{f}+\mathbf{g}\alpha}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}^o) \quad \cdots \quad L_{(g\beta)_m} L_{\mathbf{f}+\mathbf{g}\alpha}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}^o) \right) = \\ & \left(L_{g_1} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}^o) \quad \cdots \quad L_{g_m} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}^o) \right) \beta(\mathbf{x}^o)\end{aligned}$$

y así, si la matriz $\beta(\mathbf{x}^o)$ es no singular,

$$\left(L_{(g\beta)_1} L_{\mathbf{f}+\mathbf{g}\alpha}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}^o) \quad \cdots \quad L_{(g\beta)_m} L_{\mathbf{f}+\mathbf{g}\alpha}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}^o) \right) \neq (0 \quad \cdots \quad 0)$$

Esto completa la prueba del hecho de que los enteros r_i , $1 \leq i \leq m$, son invariantes bajo una retroalimentación regular.

Volvamos ahora a la prueba de la necesidad. Dado que por supuesto la matriz $\mathbf{g}(\mathbf{x}^o)$ tiene rango m , de (2.9) deducimos que cualquier B que satisfaga esta relación también tiene rango m . Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que las matrices A y B consideradas en el enunciado anterior del problema tienen forma (forma canónica de Brunowsky)

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m) \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_m) \quad (2.13)$$

Donde A_i es una matriz $\kappa_i \times \kappa_i$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

y b_i es un vector $\kappa_i \times 1$

$$b_i = \text{col}(0, \dots, 0, 1) \quad (2.15)$$

Ahora, descomponemos el vector $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ en la forma

$$\mathbf{z} = \text{col}(z^1, \dots, z^m)$$

y establecemos

$$y_1 = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) z^i \quad (2.16)$$

con $\dim(z^i) = \kappa_i$, para $1 \leq i \leq m$. Un cálculo sencillo muestra que el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\mathbf{v}$$

con funciones de salida definidas como en (2.16) tiene un grado relativo (vector) $\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ y $\kappa_1 + \dots + \kappa_m = n$. Por lo tanto, dado que un grado relativo (vector) es invariante bajo retroalimentación regular y transformación de coordenadas, la demostración está completa. \square

2.2.3. Problema del control no interactuante

En un sistema multivariable, además de los problemas de síntesis estándar como la linealización exacta, la estabilización asintótica, el desacoplamiento de perturbaciones, el seguimiento de trayectoria de la salida, es posible que desee utilizar la retroalimentación para reducir el sistema, al menos desde un punto de vista, entrada-salida, en un sistema de canales independientes de entrada y salida únicas. Este problema se conoce como el problema del control no interactuante. Por conveniencia, partimos de una definición formal. Suponemos que el punto \mathbf{x}^o sobre el cual se va a resolver el problema es un punto de equilibrio del campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, es decir, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^o) = 0$, además suponemos que $h_i(\mathbf{x}^o) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$, y que la retroalimentación (2.6) preserva este equilibrio. Además, sin pérdida de generalidad, asumimos $\mathbf{x}^o = 0$.

Dado un sistema no lineal de la forma (2.1) y encontrando una ley de control de retroalimentación estática regular (2.6) definimos una vecindad U de $\mathbf{x} = 0$, con $\alpha(0) = 0$, tal que el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})\alpha_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})\beta_{ij}(\mathbf{x}) \right) v_j \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ &\dots \\ y_m &= h_m(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

tiene un vector de grado relativo en el punto de equilibrio $\mathbf{x} = 0$ y, para cada $1 \leq i \leq m$, la salida y_i se ve afectada solo por la entrada correspondiente v_i y no por v_j , sí $j \neq i$.

La propiedad de que el sistema en lazo cerrado tiene algún grado relativo vectorial en el punto de equilibrio $\mathbf{x} = 0$ se encarga de evitar soluciones triviales, es decir, soluciones en las que, en el sistema en lazo cerrado, alguna salida no se ve afectada por ninguna entrada.

El resultado principal sobre el problema del control no interactuante es que este problema se puede resolver si y solo si el sistema tiene algún grado relativo vectorial. Supongamos que al sistema se le ha dado la forma normal ilustrada en la subsección 2.2.1 y supongamos que se impone la siguiente ley de retroalimentación

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = -A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) + A^{-1}(\xi, \eta) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Un cálculo inmediato muestra que la imposición de esta retroalimentación produce un sistema caracterizado por los m conjuntos de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= v_i \\ y_i &= \xi_1^i \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq m$, junto con un conjunto adicional de ecuaciones

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}(\xi, \eta) - \mathbf{p}(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)b(\xi, \eta) + \mathbf{p}(\xi, \eta)A^{-1}(\xi, \eta)\mathbf{v}$$

La estructura de estas ecuaciones (que corresponden al diagrama de bloques de la figura 2.2) muestra que se ha cumplido el requisito de no interacción. De hecho, la entrada v_1 controla solo la salida y_1 ,

a lo largo de una cadena de r_1 integradores, la entrada v_2 controla solo la salida y_2 , a través de una cadena de r_2 integradores, etc. Si $r = r_1 + \dots + r_m$ no es igual a n , el sistema en lazo cerrado presenta una parte no observable que se comporta como un "sumidero", es decir, se ve afectada por todas las entradas y todos los estados, pero no tiene ningún efecto en las salidas. Si, por el contrario, $r = n$, no hay tal sumidero presente y el sistema en lazo cerrado consiste, solo de m cadenas de r_i integradores cada una. Observamos también que en ambos casos el comportamiento entrada-salida del sistema en lazo cerrado así obtenido, es el de un sistema lineal, caracterizado por una matriz de función de transferencia de la forma

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^{r_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{r_2}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s^{r_m}} \end{pmatrix}$$

Aunque el uso de la forma normal es muy útil para comprender cómo se puede resolver el problema de control de no interacción, está claro que el logro de una conducta de entrada-salida no interactiva es independiente de las coordenadas utilizadas en la descripción del espacio de estado. Por lo tanto, deducimos que una retroalimentación de la forma

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{v}$$

con $\alpha(\mathbf{x})$ y $\beta(\mathbf{x})$ dados por

$$\alpha(\mathbf{x}) = -A^{-1}(\mathbf{x})b(\mathbf{x}) \quad \beta(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x})$$

con $A(\mathbf{x})$ y $b(\mathbf{x})$ como en (2.2) y (2.5) resuelve el problema del control no interactuante. Nos referiremos a esto como a la retroalimentación no interactiva estándar.

De la discusión anterior se desprende claramente que para cualquier sistema en el que la matriz $A(\mathbf{x})$ no sea singular en $\mathbf{x} = 0$, es decir, cualquier sistema que tenga un grado relativo (vectorial) en este punto, el problema de control no interactuante puede resolverse por medio de una retroalimentación de estado estático que se define para todo \mathbf{x} en una vecindad del punto $\mathbf{x} = 0$.

Proposición 2.2.2. Considere un sistema no lineal multivariable con m entradas y m salidas

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ &\dots \\ y_m &= h_m(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

El problema del control no interactuante se puede resolver si y solo si la matriz $A(0)$ es no singular, y si el sistema tiene algún grado relativo (vector) $\{r_1, \dots, r_m\}$ en $\mathbf{x} = 0$.

En vista de su importancia en relación con la solución del problema del control no interactuante, la matriz $A(\mathbf{x})$ a veces se denomina matriz de desacoplamiento del sistema. De la proposición anterior vemos que la clase de sistemas que tienen un grado relativo vectorial en el punto $\mathbf{x} = 0$ y el tipo de sistemas en los que el problema del control no interactuante puede resolverse, localmente alrededor de $\mathbf{x} = 0$, mediante realimentación estática, coinciden realmente.

2.2.4. Lograr un grado relativo bien definido a través de la extensión dinámica

El análisis desarrollado en las subsecciones anteriores ha mostrado que un sistema no lineal de la forma (2.1) que tiene un grado relativo (vectorial) en el punto \mathbf{x}^o se presta a la implementación de algunas estrategias de control relevantes. Por ejemplo, este sistema puede volverse no interactivo (desde un punto de vista de entrada-salida) a través de la retroalimentación de estado. Si, además, la igualdad $r_1 + \dots + r_m = n$ se satisface, este sistema puede transformarse en un sistema totalmente lineal y controlable mediante retroalimentación y transformación de coordenadas. Veremos que, bajo ciertos

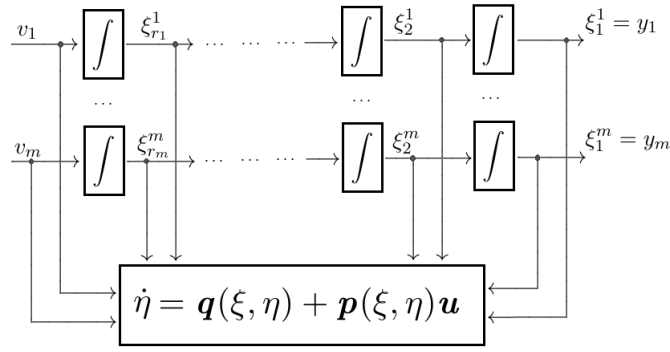


Figura 2.2: Desacoplamiento de los canales de entrada de un sistema no lineal desde un punto de vista entrada-salida.

supuestos, es posible modificar por medio de leyes de control que son más generales que las consideradas hasta ahora, un sistema que no tiene un grado relativo vectorial en un nuevo sistema que tiene un grado relativo bien definido. Por supuesto, esto no se puede lograr mediante la retroalimentación de estado estático de la forma (2.6) porque, como se vio en la demostración del Lema 2.2.1, la propiedad, para un sistema, de tener un grado relativo es invariante en este tipo de retroalimentación. Más bien usaremos una estructura de retroalimentación que incorpora un conjunto adicional de variables de estado, a saber, una retroalimentación de estado dinámica. Este tipo de retroalimentación se modela mediante ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \alpha(\mathbf{x}, \zeta) + \beta(\mathbf{x}, \zeta)\mathbf{v} \\ \dot{\eta} &= \gamma(\mathbf{x}, \zeta) + \delta(\mathbf{x}, \zeta)\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.18)$$

La razón por la que la adición de variables de estado auxiliares puede ser útil para lograr un grado relativo se puede motivar fácilmente con la ayuda de un simple ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos un sistema de la forma (2.1), con dos entradas y dos salidas, definido en \mathbb{R}^4 , con

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_4 \\ \lambda x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= x_1 \\ h_2(\mathbf{x}) &= x_2 \end{aligned}$$

Este sistema no tiene grado relativo, porque la matriz de desacoplo (2.2), que en este caso tiene la forma

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} h_1(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{g}_1} h_2(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

es singular para todo \mathbf{x} en \mathbb{R}^4 .

La razón por la que este sistema no tiene grado relativo es que las derivadas de menor orden de y_1 y y_2 que se ven afectadas por las entradas (en este caso $y_1^{(1)}$ y $y_2^{(1)}$) son afectadas ambas por u_1 pero no por u_2 . Por lo tanto, con el fin de obtener un grado relativo, se podría intentar hacer $y_1^{(1)}$ y $y_2^{(1)}$ independientes de u_1 , es decir, retrasar la aparición de u_1 a derivadas de orden superior de y_1 y y_2 . y esperar que cuando esto suceda también u_2 aparezca. Para hacer $y_1^{(1)}$ y $y_2^{(1)}$ independiente u_1 , basta con igualar u_1 a la salida de otro sistema dinámico auxiliar, con algún estado interno ζ , manejado por una nueva entrada de referencia v_1 . La forma más sencilla en la que se puede lograr este resultado es establecer u_1 igual a la salida de un integrador controlado por v_1 , es decir.

$$\begin{aligned} u_1 &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= v_1 \end{aligned}$$

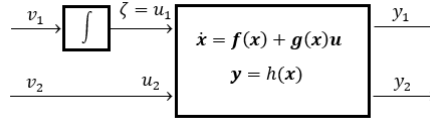


Figura 2.3: Extensión dinámica en un orden del primer canal de entrada de un sistema sin grado relativo bien definido.

Para mantener la coherencia de la notación, también se establece, para el segundo canal de entrada que se ha dejado sin cambios,

$$u_2 = v_2$$

El sistema extendido así obtenido se describe mediante ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}})v_1 + \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}})v_2 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

con $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \zeta)$ y

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \zeta \\ x_4 + x_3\zeta \\ \lambda x_3 + x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cálculos sencillos muestran que ahora

$$L_{\tilde{\mathbf{g}}_i} h_j(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$$

Con $i = 1, 2, j = 1, 2$, y

$$A(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}} h_1(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}} h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}} h_2(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}} h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, que el sistema extendido tiene un grado relativo (vector) $\{r_1, r_2\} = \{2, 2\}$.

Algoritmo de extensión dinámica. Consideremos la matriz $A(\mathbf{x})$ definida por (2.2) y supongamos que el rango de $A(\mathbf{x})$ es constante en una vecindad de \mathbf{x}^o . Si el rango en cuestión es igual a m , el sistema tiene un grado relativo (vector) en \mathbf{x}^o . Suponga que este no es el caso, y sea $a_i(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq m$ la cual denota la i -ésima fila de $A(\mathbf{x})$. Sin pérdida de generalidad (después de posiblemente haber reorganizado el orden de los canales de la salida), es posible encontrar un número entero $1 \leq p \leq m$, un conjunto de $p-1$ funciones suaves $c_1(\mathbf{x}), \dots, c_{p-1}(\mathbf{x})$ (definidas en una vecindad de \mathbf{x}^o) y dos enteros i_o, j_o tales que $c_{i_o}(\mathbf{x})$ sea diferente de cero,

$$a_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x})$$

y

$$a_{i_o j_o}(\mathbf{x}) = L_{g_{j_o}} L_f^{r_{i_o}-1} h_{i_o}(\mathbf{x}^o) \neq 0 \quad (2.19)$$

Definimos la retroalimentación dinámica

$$u_j = v_j, \quad \text{para } j \neq j_o$$

$$u_{j_o} = \frac{1}{a_{i_o j_o}(\mathbf{x})} (p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\xi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_o}}^m a_{i_o j}(\mathbf{x})v_j) \quad (2.20)$$

$$\dot{\xi} = v_{j_o},$$

Donde $p(\mathbf{x})$ y $q(\mathbf{x})$ son funciones arbitrarias que satisfacen $p(\mathbf{x}^o) = 0$ y $q(\mathbf{x}^o) = 1$

La composición de (2.1) y (2.20) definen un nuevo sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_o}}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x})v_j + \frac{\mathbf{g}_{j_o}(\mathbf{x})}{a_{i_o j_o}(\mathbf{x})} (p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\xi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_o}}^m a_{i_o j}(\mathbf{x})v_j) \\ \dot{\xi} &= v_{j_o} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$y_1 = h_1(\mathbf{x})$$

...

$$y_m = h_m(\mathbf{x})$$

Remplazando el sistema (2.1) por el sistema (2.21) y repetimos el procedimiento el número de veces que sea necesario hasta obtener un grado relativo (vector).

Las dos funciones $p(\mathbf{x})$ y $q(\mathbf{x})$ consideradas en la definición de u_{j_o} a veces pueden ayudar a obtener expresiones más simples en el sistema compuesto (2.21). En particular, observe que, por definición, la derivada r_{i_o} -ésima de $y_{i_o}(t)$ se puede expresar en la forma

$$y_{i_o}^{(r_{i_o})} = L_{\mathbf{f}}^{r_{i_o}} h_{i_o}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m a_{i_o j}(\mathbf{x})u_j$$

Por lo tanto, eligiendo

$$p(\mathbf{x}) = -L_{\mathbf{f}}^{r_{i_o}} h_{i_o}(\mathbf{x})$$

y $q(\mathbf{x}) = 1$ en la ley (2.20) produce, para la r_{i_o} -ésima derivada de $y_{i_o}(t)$, la expresión simple

$$y_{i_o}^{(r_{i_o})} = \xi$$

Esta última a su vez proporciona

$$y_{i_o}^{(r_{i_o}+1)} = v_{j_o}$$

El propósito del algoritmo de extensión dinámica es construir, comenzando con un sistema en el que el rango de la matriz (2.2) no es igual a m , un sistema extendido (y modificado por retroalimentación) en el que el rango de la matriz correspondiente es posiblemente mayor, y, por lo tanto, posiblemente después de varias iteraciones, igual a m .

2.3. Planitud diferencial

El concepto de planitud diferencial fue introducido por Fliess *al. et* (1995), en [9], en el cual, se exponen las ideas fundamentales de la planitud desarrolladas a través de resultados y herramientas de la geometría diferencial. En el mismo artículo, se presentan varios ejemplos de sistemas planos incluyendo

el modelo de la grúa viajera el cual se desarrolla en este trabajo. En palabras simples, se entiende por planitud diferencial, una propiedad de un sistema de ecuaciones diferenciales controladas, tal que es posible expresar todas las variables del sistema (estados y entradas de control) en términos de un conjunto de funciones independientes (que satisfacen por sí mismas ecuaciones diferenciales) llamadas componentes de un vector de salidas planas y, de un número finito de sus derivadas [26]. La propiedad de planitud diferencial en los sistemas lineales es equivalente a la propiedad de controlabilidad establecida por Kalman [27], es decir, un sistema lineal que es plano es controlable y viceversa. No obstante, la propiedad de planitud diferencial atesora una riqueza mucho mayor, esta riqueza se ve reflejada en los sistemas no lineales, inclusive en sistemas tan complejos como lo son los sistemas no lineales con retardo, la propiedad de planitud diferencial da como ventajas, por mencionar algunas; la capacidad de poder expresar un sistema en un esquema de entrada-salida el cual trivializa el problema de la planeación de trayectorias, la propiedad de accesibilidad fuerte en un sistema no lineal, que puede interpretarse como una propiedad análoga a la controlabilidad en los sistemas lineales, las propiedades de fase mínima de las salidas [28] y, la propiedad más importante para este trabajo; la relación entre planitud y la linealización por retroalimentación la cual se presentara más adelante. A continuación, daremos una definición formal de la planitud diferencial para sistemas de múltiples entradas, múltiples salidas, no obstante, el caso de una entrada y una salida puede ser visto como un caso particular.

Consideremos un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{y} &\in \mathbb{R}^k\end{aligned}\quad (2.22)$$

Sean γ, α, β múltiples índices finitos, es decir, vectores de componentes enteros, respectivamente, $(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ y $(\beta_1, \dots, \beta_r)$. Se dice que el sistema es diferencialmente plano, o, simplemente plano, si existe un vector que es función de las componentes del estado

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) \in \mathbb{R}^m \quad (2.23)$$

cuyos componentes son diferencialmente independientes (es decir, no satisfacen las ecuaciones diferenciales por sí mismos), tales que hay funciones ψ y θ para las cuales

$$\mathbf{x} = \psi(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\alpha)}), \quad \mathbf{u} = \theta(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dots, \mathbf{z}^{(\beta)}) \quad (2.24)$$

El vector $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ es llamado una salida plana.

Dado un sistema plano, el número de componentes de una salida plana es igual al número de entradas independientes. La planitud implica que todas las variables del sistema (estados, entradas y salidas) pueden parametrizarse diferencialmente en términos de los componentes de la salida plana \mathbf{z} y un número finito de sus derivadas en el tiempo.

La salida plana de hecho no es única: si (h_1, h_2) es una salida plana de un sistema con 2 entradas, entonces la salida $(z_1, z_2) = (h_1 + h_2^{(k)}, h_2)$ para k un entero arbitrario es también una salida plana.

Para precisar un resultado muy importante que relaciona la propiedad de la planitud diferencial con la teoría de la linealización por retroalimentación, introducimos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Se dice que un sistema es linealizable por retroalimentación dinámica endógena si existe una retroalimentación dinámica endógena de la forma (2.18) y una transformación de coordenadas (difeomorfismo) del sistema extendido que transforma el correspondiente sistema en lazo cerrado, en un sistema lineal y controlable.

Corolario 2.3.1. Cada sistema plano es linealizable por retroalimentación dinámica endógena. Por el contrario, todo sistema linealizable por retroalimentación dinámica endógena es plano.

Una demostración formal de este importante resultado puede verse en [29].

El conjunto de transformaciones de coordenadas (difeomorfismos) y la retroalimentación de estado

estático es obviamente un subconjunto estricto del conjunto de retroalimentaciones dinámicas endógenas, los sistemas que son linealizables por transformaciones de coordenadas y retroalimentación de estado estático, son, por lo tanto, un subconjunto estricto del conjunto de sistemas diferencialmente planos. Por lo tanto, la propiedad de planitud solo revela su riqueza en el caso de múltiples entradas, donde la linealización de retroalimentación de estado estático y la linealización de retroalimentación dinámica endógena ya no son equivalentes.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos el sistema del monociclo, que se muestra en la figura 2.4.

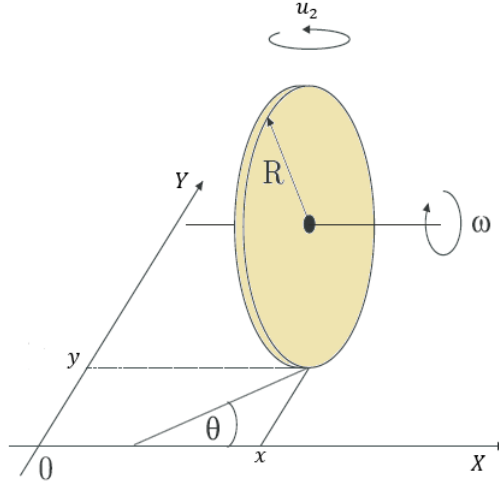


Figura 2.4: El monociclo.

El modelo cinemático se describe como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u_2\end{aligned}$$

Donde $\{x, y\}$ son las coordenadas cartesianas del monociclo en el plano, y θ es el desplazamiento angular relacionado con la orientación del móvil con respecto al eje de coordenadas X positivo. Las variables de control $\{u_1, u_2\}$ son las entradas de control que representan, respectivamente, la velocidad tangencial de la rueda y la velocidad del cambio de orientación.

En este sistema de 2 entradas, se puede ver fácilmente que el sistema es diferencialmente plano, cuyas componentes de la salida plana (h_1, h_2) , son las coordenadas cartesianas del sistema en el plano

$$h_1 = x, \quad h_2 = y$$

Esta salida plana parametriza completamente al sistema, ya que todos los estados, y entradas de control se pueden expresar en términos de las componentes de la salida plana y un número finito de sus derivadas, tal y como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}x &= h_1, \quad y = h_2, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\dot{h}_2}{\dot{h}_1}\right) \\ u_1 &= \sqrt{\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2}, \quad u_2 = \frac{\ddot{h}_2 \dot{h}_1 - \dot{h}_1 \ddot{h}_2}{\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2}\end{aligned}$$

Podemos representar al sistema de la forma (2.1), definido en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) = x \\ y_2 &= h_2(\mathbf{x}) = y\end{aligned}\tag{2.25}$$

con el vector de estado definido como

$$\mathbf{x} = (x \quad y \quad \theta)^T$$

Los campos vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ se describen como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con el Corolario 2.3.1, el sistema (2.25) es linealizable de forma exacta por retroalimentación dinámica endógena. Podemos observar que no es posible linealizar de forma exacta al sistema directamente por una retroalimentación de estado estático regular, ya que el sistema no tiene grado relativo, porque su matriz de desacoplo (2.2), que en este caso tiene la forma

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} h_1(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{g}_1} h_2(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

es singular para todo \mathbf{x} en \mathbb{R}^3 .

Sin necesidad de utilizar el algoritmo de la extensión dinámica, notamos que las derivadas de menor orden de y_1 y y_2 que se ven afectadas por la entrada (en este caso $y_1^{(1)}$ y $y_2^{(1)}$) son afectadas ambas por u_1 pero no por u_2 . Por lo tanto, se puede obtener un grado relativo sí establecemos u_1 igual a la salida de un integrador, controlado por v_1 , es decir,

$$\begin{aligned} u_1 &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= v_1 \end{aligned}$$

Y de manera similar al ejemplo 2.2.1 establecemos para el segundo canal de entrada

$$u_2 = v_2$$

El sistema extendido así obtenido, en \mathbb{R}^4 , se describe mediante ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}})v_1 + \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}})v_2 \\ y_1 &= h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ y_2 &= h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \tag{2.26}$$

con $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \zeta)$, y

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \zeta \cos \theta \\ \zeta \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para el nuevo sistema extendido tenemos las siguientes condiciones

$$L_{\tilde{\mathbf{g}}_i} h_j(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$$

Con $i = 1, 2, j = 1, 2$, y

$$A(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}} h_1(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}} h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}} h_2(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}} h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\zeta \sin \theta \\ \sin \theta & \zeta \cos \theta \end{pmatrix}$$

Que es no singular para $\tilde{\mathbf{x}} \in U$ donde $U = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 | \zeta \neq 0\}$.

El sistema tiene grado relativo (vector) $\{r_1, r_2\} = \{2, 2\}$, para $\zeta \neq 0$, además, se tiene que la suma de las componentes del grado relativo (vector) $r = r_1 + r_2$ es igual a la dimensión del espacio de estados n del sistema extendido. Por el Lema 2.2.1 el sistema es linealizable de forma exacta por retroalimentación de estado estático regular y una transformación de coordenadas. La retroalimentación tiene la forma

$$\mathbf{v} = \alpha(\tilde{\mathbf{x}}) + \beta(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{v}} \quad (2.27)$$

con $\alpha(\tilde{\mathbf{x}})$ y $\beta(\tilde{\mathbf{x}})$ dados por

$$\alpha(\tilde{\mathbf{x}}) = -A^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})b(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \beta(\tilde{\mathbf{x}}) = A^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})$$

con

$$b(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} L_f^2 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ L_f^2 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mientras las nuevas coordenadas se definen como

$$\xi_k^i(\mathbf{x}) = L_f^{k-1} h_i(\mathbf{x}) \quad \text{para } k = 1, 2, \quad i = 1, 2 \quad (2.28)$$

La retroalimentación (2.27) y la transformación de coordenadas (2.28) aplicadas al sistema extendido (2.26) producen un sistema caracterizado por 2 conjuntos de ecuaciones totalmente desacopladas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i &= \tilde{v}_i \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$y_i = \xi_1^i$$

para $i = 1, 2$, que es claramente un sistema lineal y controlable. El difeomorfismo establecido entre el sistema (2.26) y el sistema lineal (2.29) es singular cuando $\zeta = 0$, por lo tanto, el problema de linealización por retroalimentación y el problema del control no interactuante, no tienen solución cuando se cumple dicha condición.

2.4. Control robusto. Control proporcional integral generalizado y filtros planos

El control proporcional integral generalizado, o bien, ‘‘GPI’’ por sus siglas en inglés (*Generalized Proportional Integral controller*), fue propuesto por primera vez en el trabajo [30] por Fliess *et al.* (1998) enfocado a sistemas lineales. La idea básica de este controlador, es producir estimaciones del vector de estado de un sistema puramente integrador a través de un número finito de combinaciones lineales de integrales iteradas de la entrada y la salida. Sin embargo, el controlador GPI carece de robustez ante perturbaciones, es por ello que, mediante la adición de una combinación lineal finita de integrales de la salida se construye una versión robusta del controlador GPI, este tipo de controlador suele encontrarse en la literatura como; control por filtrado plano, o bien, ‘‘FFC’’ por sus siglas en inglés (*Flat Filtering Controller*) en cual fue introducido por Sira *et al.* (2016), véase [31]. A continuación, se presenta la construcción del esquema de control GPI, para después generalizar la versión robusta mediante la adición de filtros planos en el esquema.

2.4.1. Control proporcional integral generalizado

Consideremos un sistema de integración pura de orden n

$$y^{(n)} = u \quad (2.30)$$

Supongamos que se quiere seguir una trayectoria de referencia de salida suave y^* . La dinámica del error de seguimiento correspondiente a la trayectoria y^* viene dada por

$$e_y^{(n)} = e_u, \quad e_y = y - y^*, \quad e_u = u - u^*, \quad u^* = [y^*]^{(n)}$$

El control GPI evita la necesidad de utilizar observadores de estado asintóticos, empleando a su vez, reconstructores integrales para estimar el vector de estados al integrar iteradamente la entrada y la salida del sistema, esto es posible gracias a la naturaleza del sistema, el cual se trata como se consideró en este caso, un sistema puramente integrador, los estados del sistema son la salida y derivadas de esta misma.

Los reconstructores integrales de los estados de la dinámica del error de seguimiento $\dot{e}_y, \dots, e_y^{(n-1)}$ se proponen como

$$\widehat{e_y^{(n-i)}} = \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{i-1}} e_u(\sigma_i) d\sigma_i \cdots d\sigma_1, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.31)$$

El uso de tales reconstructores integrales producen errores, cometidos en la estimación de las derivadas del error de seguimiento, estos están dados según el orden de los reconstructores integrales, los cuales son

$$\sum_{j=1}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.32)$$

Por lo que los podemos obtener una estimación de los estados, tal como

$$e_y^{(n-i)} = \widehat{e_y^{(n-i)}} + \sum_{j=1}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.33)$$

Por comodidad adoptamos, de ahora en adelante, la siguiente notación para integraciones múltiples en una función del tiempo $\phi(t)$,

$$\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{i-1}} \phi(\sigma_i) d\sigma_i \cdots d\sigma_1 = \int^{(i)} \phi(t), \quad \int_0^t \phi(\sigma_1) d\sigma_1 = \int \phi$$

Por lo que para los reconstructores integrales adoptaremos la siguiente notación

$$\widehat{e_y^{(n-i)}} = \int^{(i)} e_u \quad (2.34)$$

Como se mencionó anteriormente, los reconstructores integrales producen errores, cometidos en la estimación de la derivada del error de seguimiento, se puede ver que dichos errores de la forma (2.32), se pueden compensar mediante integrales iteradas realizadas en la señal del error de seguimiento de salida e_y , tal como:

$$\int^{(i-1)} e_y, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

Si proponemos un controlador por retroalimentación total del estado, empleando los reconstructores integrales, y a su vez utilizando las integrales iteradas con el fin de compensar los errores producidos por los mismos reconstructores, este tiene una estructura tal como se muestra continuación

$$\begin{aligned} e_u &= - \sum_{i=1}^{n-1} k_{2n-i-1} \widehat{e_y^{(n-i)}} - \sum_{i=1}^n k_{n-i} \left(\int^{(i-1)} e_y \right) \\ &= - \left[\sum_{i=1}^{n-1} k_{2n-i-1} \left(\int_0^{(i)} e_u \right) \right] - \sum_{i=1}^n k_{n-i} \left(\int^{(i-1)} e_y \right) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int^{(i)} (k_{2n-i-1} e_u + k_{n-i-1} e_y) \right) - k_{n-1} e_y \end{aligned}$$

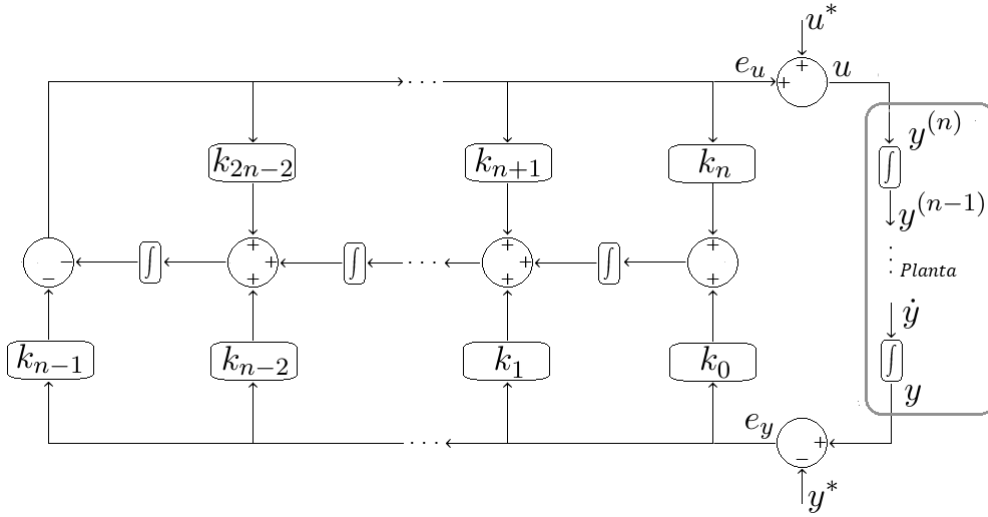


Figura 2.5: Diagrama de bloques del controlador GPI para un sistema de orden n .

De las expresiones anteriores, la dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado es

$$e_y^{(n)} = -k_{2n-2}\widehat{e_y^{(n-1)}} - k_{2n-3}\widehat{e_y^{(n-2)}} - \dots - k_n\widehat{e_y} - k_{n-1}e_y \\ - k_{n-2}\left(\int^{(1)} e_y\right) - \dots - k_1\left(\int^{(n-2)} e_y\right) - k_0\left(\int^{(n-1)} e_y\right)$$

Sustituyendo las variables de los estados estimados de acuerdo con (2.33) en la expresión anterior, obtenemos la siguiente dinámica perturbada que incluye los efectos de las condiciones iniciales desatendidas, las cuales se consideran como los errores producidos por los reconstructores integrales. De lo anterior obtenemos la siguiente expresión

$$e_y^{(n)} = -k_{2n-2}e_y^{(n-1)} - k_{2n-3}e_y^{(n-2)} - \dots - k_n\dot{e}_y - k_{n-1}e_y - k_{n-2}\left(\int^{(1)} e_y\right) - \dots - k_1\left(\int^{(n-2)} e_y\right) \\ - k_0\left(\int^{(n-1)} e_y\right) + \left[\sum_{i=1}^{n-1} k_{2n-i-1} \left(\sum_{j=1}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\right)\right]$$

Ahora definimos las siguientes variables auxiliares

$$z_1 = \left(\int^{(1)} e_y\right) + \frac{k_{n-3}}{k_{n-2}}\left(\int^{(2)} e_y\right) + \dots + \frac{k_1}{k_{n-2}}\left(\int^{(n-2)} e_y\right) + \frac{k_0}{k_{n-2}}\left(\int^{(n-1)} e_y\right) \\ - \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_{2n-i-1}}{k_{n-2}} \left(\sum_{j=1}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\right)\right]$$

$$z_1(0) = \frac{k_{2n-2}}{k_{n-2}}e_y^{(n-1)}(0)$$

$$z_2 = \left(\int^{(1)} e_y\right) + \frac{k_{n-4}}{k_{n-3}}\left(\int^{(2)} e_y\right) + \dots + \frac{k_1}{k_{n-3}}\left(\int_0^{(n-3)} e_y\right) + \frac{k_0}{k_{n-3}}\left(\int^{(n-2)} e_y\right) \\ - \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_{2n-i-1}}{k_{n-3}} \left(\sum_{j=2}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-2}}{(j-2)!}\right)\right]$$

$$z_2(0) = \frac{k_{2n-2}}{k_{n-3}}e_y^{(n-2)}(0) + \frac{k_{2n-3}}{k_{n-3}}e_y^{(n-1)}(0)$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
z_{n-2} &= \left(\int^{(1)} e_y \right) + \frac{k_0}{k_1} \left(\int^{(2)} e_y \right) - \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_{2n-i-1}}{k_1} \left(\sum_{j=n-2}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-n+2}}{(j-n+2)!} \right) \right] \\
z_{n-2}(0) &= \frac{k_{2n-2}}{k_1} e_y^{(2)}(0) + \frac{k_{2n-3}}{k_1} e_y^{(3)}(0) + \dots + \frac{k_{n+1}}{k_1} e_y^{(n-1)}(0) \\
z_{n-1} &= \left(\int^{(1)} e_y \right) \\
z_{n-1}(0) &= \frac{k_{2n-2}}{k_0} e_y^{(1)}(0) + \frac{k_{2n-3}}{k_0} e_y^{(2)}(0) + \dots + \frac{k_n}{k_0} e_y^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Podemos definir la dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado en términos de las nuevas variables auxiliares, tal como

$$\begin{aligned}
e_y^{(n)} &= -k_{2n-2} e_y^{(n-1)} - \dots - k_n \dot{e}_y - k_{n-1} e_y - k_{n-2} z_1 \\
\dot{z}_1 &= e_y + \frac{k_{n-i-2}}{k_{n-i-1}} z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \\
& \vdots \\
\dot{z}_{n-1} &= e_y
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Eliminando las variables z mediante la diferenciación directa de la primera ecuación $n-1$ veces, obtenemos la ecuación diferencial de la dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado, como

$$e_y^{(2n-1)} + k_{2n-2} e_y^{(2n-2)} + \dots + k_1 \dot{e}_y + k_0 e_y = 0 \tag{2.37}$$

cuyo polinomio característico es simplemente

$$p(s) = s^{2n-1} + k_{2n-2} s^{2n-2} + \dots + k_1 s + k_0 \tag{2.38}$$

Por lo tanto, un conjunto adecuado de coeficientes de diseño $\{k_{2n-2}, k_{2n-1}, \dots, k_1, k_0\}$ se puede prescribir para garantizar que la ubicación de todas las raíces del polinomio en la ecuación (2.38) están estrictamente ubicados en la mitad izquierda del plano complejo, lo que garantiza la estabilidad asintótica de la trayectoria del error de seguimiento de la salida del sistema en lazo cerrado.

Tomando en cuenta que la transformada de Laplace de la integral iterada $\left(\int^{(j)} \phi(t) \right)$ está dada por $\frac{\phi(s)}{s^j}$. De la expresión

$$e_y^{(n)} = e_u = - \left[\sum_{i=1}^{n-1} k_{2n-i-1} \int^{(i)} e_u \right] - \sum_{i=1}^n k_{n-i} \left(\int^{(i-1)} e_y \right) \tag{2.39}$$

obtenemos, después de recurrir al dominio de la frecuencia y reorganizar términos, que el controlador puede ser descrito por la siguiente red de compensación clásica

$$e_u(s) = - \left(\frac{k_{n-1} s^{n-1} + k_{n-2} s^{n-2} + \dots + k_0}{s^{n-1} + k_{2n-2} s^{n-2} + \dots + k_n} \right) e_y(s) \tag{2.40}$$

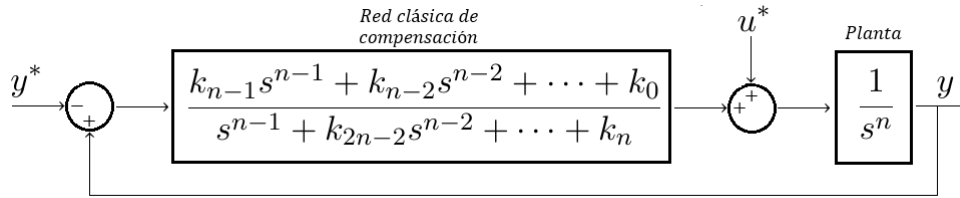


Figura 2.6: Red de compensación clásica para un controlador GPI de orden n .

2.4.2. El problema de la robustez

Suponga que deseamos controlar el mismo sistema que (2.30) en una versión perturbada de la forma

$$y^{(n)} = u + \xi(t) \quad (2.41)$$

donde $\xi(t)$ solo se sabe que es una señal absolutamente acotada, además de ser exponencialmente integrable; es decir, admite una transformación de Laplace. Un compensador intentaría superar la perturbación desconocida con tantas integraciones en el compensador como sea razonablemente posible con la esperanza de enfrentar una perturbación clásica de tipo polinomial o manejar un modelo ultra local polinomial dependiente del tiempo de dicha perturbación con suficientes diferenciaciones respecto al tiempo. Tengamos en cuenta, sin embargo, que cualquier perturbación variable en el tiempo delimitada uniforme se aproxima de manera ultra local y eficiente mediante un polinomio dependiente del tiempo de grado arbitrario (constante a trozos, lineal a trozos, parabólico, etc.). Cualquier aproximación polinomial dependiente del tiempo de grado finito, tomada como modelo interno de la perturbación aditiva no estructurada, puede entonces ser también localmente aproximadamente cancelada por un número suficiente de diferenciaciones. Estas diferenciaciones, que actúan como aniquiladores de perturbaciones, se realizan fácilmente como potencias de las variables complejas s que aparecen como factores en el denominador de la red de compensación [32].

Recordemos que, respectivamente, en los observadores de estado extendido y en los observadores de GPI, un solo integrador adicional o un número finito de integraciones que extienden el espacio de estados del observador son suficientes para tener una estimación arbitrariamente cercana a la perturbación real. De manera similar, en los filtros basados en GPI, la adición adecuada de uno o un número finito de integradores en el denominador de la red de compensación dará como resultado, en condiciones de lazo cerrado, al menos el mismo número de diferenciaciones respecto al tiempo de la perturbación aditiva. Esta simple dualidad está en el centro de considerar las perturbaciones dependientes del estado no lineal, e incluso dependientes de la entrada, como modelos polinomiales del tiempo no estructurados [33] cuyos efectos pueden identificarse en línea [34], estimarse [35] o cancelarse de manera aproximada. El hecho de que esta filosofía funcione incluso para no linealidades aditivas dependientes de la entrada y del estado no lineal, se basa en el hecho de que, en última instancia, mientras el sistema está funcionando en línea, tales perturbaciones son, de hecho, señales que varían en el tiempo, véase [36].

Como una generalización adicional, supongamos que se desea diseñar un controlador que resuelva el problema de seguimiento de trayectoria, de una salida de referencia y^* , el cual no emplee observadores de estado, para una cadena de n integradores de la forma

$$y^{(n)} = \alpha u + \xi(t), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.42)$$

y que experimenta los efectos de una perturbación $\xi(t)$ uniforme y absolutamente acotada. Se supone que la perturbación $\xi(t)$ se modela ultra localmente como un polinomio dependiente del tiempo de $(m-1)$ -ésimo grado. Abusando de la notación al mezclar variables dependientes del tiempo con variables en el dominio de Laplace, un controlador de filtrado plano, o controlador de red de compensación clásica, viene dado por

$$u(t) = u^*(t) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{k_{n+m-1}s^{n+m-1} + k_{n+m-2}s^{n+m-2} + \dots + k_0}{s^m(s^{n-1} + k_{2n+m-2}s^{n+m-2} + \dots + k_{n+m})} \right) (y(t) - y^*(t)) \quad (2.43)$$

con $u^*(t) = \frac{1}{\alpha}[y^*(t)]^{(n)}$. El polinomio característico del sistema en lazo cerrado está dado por

$$p(s) = s^{2n+m-1} + k_{2n+m-2}s^{2n+m-2} + k_{2n+m-3}s^{2n+m-3} + \dots + k_2s^2 + k_1s + k_0 \quad (2.44)$$

Dado que el orden mínimo de derivación, inducido por el controlador propuesto en el término de la perturbación $\xi(t)$, es m . El modelo de perturbación se aniquila ultra localmente.

Ejemplo 2.4.1. Consideremos el ejemplo 2.3.1 del monociclo, donde su linealización exacta se trata de un sistema caracterizado por 2 conjuntos de ecuaciones lineales, desacopladas, de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i &= \tilde{v}_i \\ y_i &= \xi_1^i \end{aligned}$$

Con $i = 1, 2$. Se puede ver claramente, que cada conjunto de ecuaciones lineales se puede escribir en forma de un sistema puramente integrador de orden 2, es decir,

$$\ddot{y}_1 = \tilde{v}_1, \quad \ddot{y}_2 = \tilde{v}_2 \quad (2.45)$$

Consideremos un conjunto de dichas ecuaciones, y supongamos que se desea seguir una trayectoria de referencia y_i^* , donde solo se tiene acceso a la medición de la salida del sistema y_i . La dinámica del error de seguimiento correspondiente a la trayectoria y_i^* viene dada por

$$\ddot{e}_{y_i} = e_{\tilde{v}_i}, \quad e_{y_i} = y_i - y_i^*, \quad e_{\tilde{v}_i} = \tilde{v}_i - \tilde{v}_i^*, \quad \tilde{v}_i^* = [y_i^*]^{(2)}$$

Proponemos un controlador lineal por retroalimentación completa del estado para la dinámica del error de seguimiento del sistema, tal como

$$e_{\tilde{v}_i} = -k_3^i \dot{e}_{y_i} - k_2^i e_{y_i} \quad (2.46)$$

Sin embargo no tenemos acceso a la primer derivada temporal del error de seguimiento \dot{e}_{y_i} . Sin necesidad de implementar un observador de estado para la estimación de la primera derivada temporal de la salida, podemos estimar esta misma mediante el uso del siguiente reconstructor integral $\widehat{\dot{e}_{y_i}}$, el cual según (2.31), está dado como

$$\widehat{\dot{e}_{y_i}} = \int_0^t \dot{e}_{y_i}(\sigma) d\sigma$$

Dicho reconstructor integral produce un error debido a la condición inicial desconocida (constante), generado por al proceso de integración del reconstructor. La máxima potencia de los errores en función de t , como una perturbación clásica, se puede predecir fácilmente y, dado el orden máximo de tal potencia, se propone concordantemente el número de integrales reiteradas de compensación a base del error de seguimiento.

Con el propósito de superar asintóticamente los efectos del error constante cometido en la estimación de la derivada del error de seguimiento, se hace el uso de un término de compensación integral del error de salida, además, es conveniente añadir un término integral extra de segundo orden con el fin de suprimir posibles perturbaciones modeladas ultra localmente de un orden superior al error introducido por el reconstructor integral, dicho esto, el controlador lineal propuesto queda modificado de la siguiente manera

$$e_{\tilde{v}_i} = -k_3^i \widehat{\dot{e}_{y_i}} - k_2^i e_{y_i} - k_1^i \left(\int e_{y_i} \right) - k_0^i \left(\int^{(2)} e_{y_i} \right) \quad (2.47)$$

donde el conjunto de coeficientes constantes $\{k_3^i, k_2^i, k_1^i, k_0^i\}$ debe elegirse para garantizar la estabilidad asintótica del error de seguimiento e_{y_i} .

La dinámica del error de seguimiento del sistema en lazo cerrado viene dada por,

$$\ddot{e}_{y_i} = -k_3^i \left(\int_0^t e_{\tilde{v}_i}(\sigma) d\sigma \right) - k_2^i e_{y_i} - k_1^i \left(\int e_{y_i} \right) - k_0^i \left(\int^{(2)} e_{y_i} \right) \quad (2.48)$$

De (2.36), podemos reescribir, después de definir

$$\begin{aligned} z_1^i &= \left(\int e_{y_i} \right) + \frac{k_0^i}{k_1^i} \left(\int^{(2)} e_{y_i} \right) \\ \ddot{e}_{y_i} &= -k_3^i \dot{e}_{y_i} - k_2^i e_{y_i} - k_1^i z_1^i \end{aligned} \quad (2.49)$$

con

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^i &= e_{y_i} + \frac{k_0^i}{k_1^i} z_2^i, & z_1^i(0) &= -\frac{k_2^i}{k_1^i} e_{y_i}(0) \\ \dot{z}_2^i &= e_{y_i} \end{aligned}$$

Se encuentra fácilmente que el polinomio característico del sistema (2.49) es

$$p(s) = s^4 + k_3^i s^3 + k_2^i s^2 + k_1^i s + k_0^i \quad (2.50)$$

cuyas raíces se garantiza que se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo, dicho esto, proponemos al polinomio característico como el producto de dos polinomios Hurwitz de segundo orden

$$s^4 + k_3^i s^3 + k_2^i s^2 + k_1^i s + k_0^i = (s^2 + 2\zeta_i \omega_n^i s + (\omega_n^i)^2)^2$$

Podemos obtener los coeficientes del polinomio característico a través de los valores de ζ_i y ω_n^i , tal como

$$k_0^i = (\omega_n^i)^4, \quad k_1^i = 4\zeta_i (\omega_n^i)^3, \quad k_2^i = 4\zeta_i^2 (\omega_n^i)^2 + 2(\omega_n^i)^2, \quad k_3^i = 4\zeta_i \omega_n^i \quad (2.51)$$

Retornando a la expresión para el controlador de retroalimentación lineal (2.47), y utilizando la definición para el reconstructor integral

$$\begin{aligned} e_{\tilde{v}_i} &= -k_3^i \left(\int_0^t e_{\tilde{v}_i}(\sigma) d\sigma \right) - k_2^i e_{y_i} - k_1^i \left(\int e_{y_i} \right) - k_0^i \left(\int^{(2)} e_{y_i} \right) \\ &= -k_2^i e_{y_i} - \left(\int (k_3^i e_{\tilde{v}_i} + k_1^i e_{y_i}) \right) - k_0^i \left(\int^{(2)} e_{y_i} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Tomando la transformada de Laplace de (2.52), y después de algunos reordenamientos y simplificaciones, obtenemos la siguiente expresión mixta en el dominio del tiempo y en el dominio de Laplace del controlador en forma de una red de comprensión clásica

$$\tilde{v}_i(t) = \tilde{v}_i^*(t) - \left(\frac{k_2^i s^2 + k_1^i s + k_0^i}{s(s + k_3^i)} \right) (y_i(t) - y_i^*(t)) \quad (2.53)$$

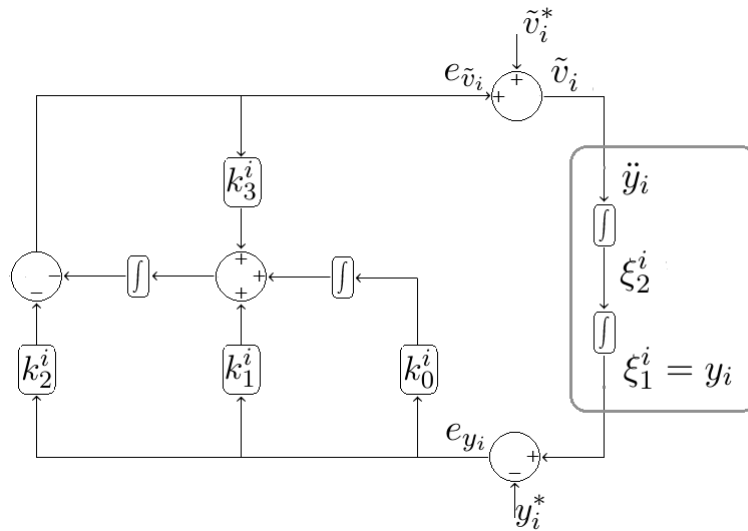


Figura 2.7: Diagrama de bloques de un controlador GPI de segundo orden con un término integral extra aplicado a un sistema lineal puramente integrador de segundo orden.

2.5. Resumen del capítulo

En el presente capítulo se exponen las herramientas matemáticas desde un punto de vista formal axiomático, en las cuales, se basa el desarrollo completo de este trabajo. Comenzamos por exponer el formalismo matemático necesario para exponer las teorías de la linealización exacta por retroalimentación, tal y como la definición de la derivada de Lie, el corchete de Lie, difeomorfismos, distribuciones integrales y distribuciones involutivas, así como el teorema de Frobenius, el cual se refiere a la existencia de soluciones para sistemas en derivadas parciales. Se expone la teoría de linealización exacta por retroalimentación y transformación de coordenadas (difeomorfismos) de sistemas no lineales de múltiples entradas, múltiples salidas, comenzando con el concepto de grado relativo, así como la forma normal de las ecuaciones que describen un sistema no lineal, se ofrecen las condiciones necesarias y suficientes para linealizar de forma exacta por retroalimentación, un sistema no lineal en un sistema lineal y controlable, el cual, se representa en la forma canónica de Brunowsky. Se aborda el problema del control que no interactúa así como las condiciones necesarias y suficientes para su solución, en el cual un sistema no lineal puede reducirse al menos desde un punto de vista entrada-salida, en sistemas de canales independientes de entrada y salida únicas, se ofrecen la forma de la retroalimentación dinámica endógena, así como el algoritmo de extensión dinámica, los cuales, bajo ciertos supuestos, es posible modificar un sistema que no tiene grado relativo vectorial en un sistema que si tiene grado relativo. Se expone el concepto de planitud diferencial, así como algunas propiedades de la planitud y un importante resultado que asegura que cada sistema plano es linealizable por retroalimentación dinámica endógena y viceversa. Por último, se muestra el desarrollo del esquema de control proporcional integral generalizado GPI y su versión robusta mediante la adición de filtros planos.

Capítulo 3

Modelado del sistema

3.1. La grúa viajera, un modelo simplificado

3.1.1. Modelo matemático mediante Euler-Lagrange

Consideremos una grúa viajera con elevador de carga como se muestra en la figura 3.1. El desplazamiento horizontal del carro con masa M lo denotamos por x . El carro es accionado por una fuerza F considerándola una de las entradas del sistema. La carga pequeña de masa m que tiene por coordenadas (x_m, z_m) , la cual viaja suspendida mediante un cable de longitud ρ , variable a voluntad, el cual está unido a un cilindro de radio R que es accionado por una par mecánico τ , el movimiento de la carga se supone restringido al plano XZ . El ángulo entre la cuerda y el eje vertical lo denotamos por φ , e imaginando que al enrollar el cable, este siempre será tangente al cilindro en el punto $(x + R, 0)$, es decir, el punto $(x + R, 0)$ se está tomado como un pivote para el cable. En la siguiente sección de este capítulo, se ofrece una refinación de este modelo en la consideración de la tangencia del cable. Denotamos por J el momento de inercia del cilindro y suponiendo que ambas ruedas del carro son iguales, denotamos por R_o el radio de las ruedas y J_o como su momento de inercia.

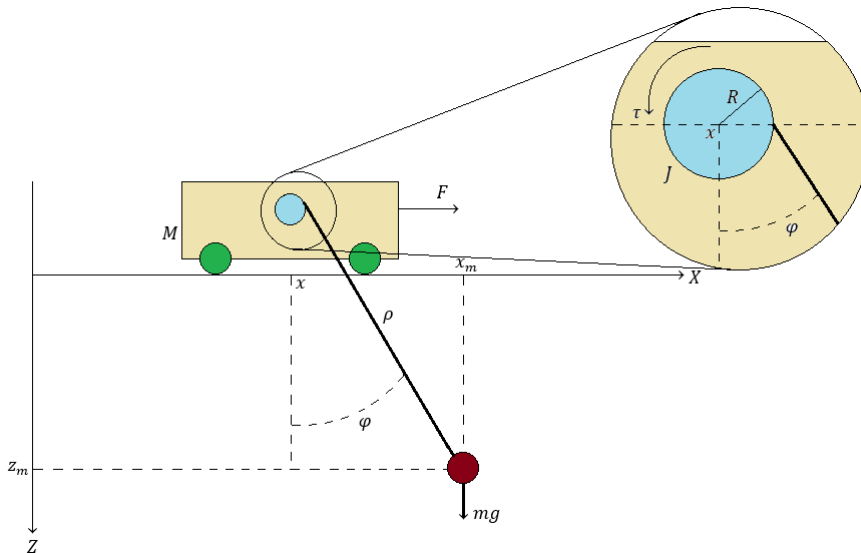


Figura 3.1: Modelo simplificado de la grúa viajera.

Las coordenadas cartesianas del carro y la carga respectivamente son

$$x_M = x \tag{3.1}$$

$$x_m = x + R + \rho \sin \varphi, \quad z_m = \rho \cos \varphi \tag{3.2}$$

donde sus respectivas velocidades son

$$\dot{x}_M = \dot{x}$$

$$\dot{x}_m = \dot{x} + \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{z}_m = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi$$

Para obtener el conjunto de las ecuaciones de movimiento del sistema, empleamos la formulación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (3.3)$$

Donde \mathcal{L} es el lagrangiano del sistema, el cual se define como la energía cinética \mathcal{K} , menos la energía potencial \mathcal{V} , estas, a su vez, se describen en términos de las coordenadas generalizadas q_i , donde, para nuestra grúa viajera son $\{x, \varphi, \rho\}$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} \frac{J_o}{R_o^2} \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} \frac{J_o}{R_o^2} \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_m^2 + \dot{z}_m^2) + \frac{1}{2} \frac{J}{R^2} \dot{\rho}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{J_o}{R_o^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\rho} \sin \varphi + 2\rho\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} \frac{J}{R^2} \dot{\rho}^2 \\ \mathcal{V} &= -Fx + \frac{\rho}{R} \tau - mg\rho \cos \varphi \end{aligned}$$

Definiendo

$$M_o = M + 2 \frac{J_o}{R_o^2} \quad (3.4)$$

el lagrangiano del sistema queda expresado como

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} M_o \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\rho} \sin \varphi + 2\rho\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} \frac{J}{R^2} \dot{\rho}^2 + Fx - \frac{\rho}{R} \tau + mg\rho \cos \varphi \quad (3.5)$$

con g la aceleración gravitatoria. Así, empleando (3.3) a cada una de las coordenadas generalizadas $\{x, \varphi, \rho\}$, obtenemos el conjunto de las ecuaciones de movimiento

$$(m + M_o)\ddot{x} + m\rho\ddot{\varphi} \cos \varphi + m\ddot{\rho} \sin \varphi + 2m\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \varphi - m\rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F \quad (3.6)$$

$$m\rho\ddot{x} \cos \varphi + m\rho^2\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + mg\rho \sin \varphi = 0 \quad (3.7)$$

$$m\ddot{x} \sin \varphi + \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi = -\frac{\tau}{R} \quad (3.8)$$

las cuales describen completamente la dinámica de nuestro sistema. Se puede expresar el sistema de la forma generalizada

$$\mathcal{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}) = \mathcal{B}\mathbf{u} \quad (3.9)$$

donde el vector de coordenadas generalizadas es: $\mathbf{q} = (x \ \varphi \ \rho)^T$, y el vector $\mathbf{u} = (F \ \tau)^T$. Las matrices $\mathcal{M}(\mathbf{q})$, $\mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathcal{G}(\mathbf{q})$ y \mathcal{B} se describen como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} m + M_o & m\rho \cos \varphi & m \sin \varphi \\ m\rho \cos \varphi & m\rho^2 & 0 \\ m \sin \varphi & 0 & m + \frac{J}{R^2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 & m\dot{\rho} \cos \varphi - m\rho\dot{\varphi} \sin \varphi & m\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & m\rho\dot{\rho} & m\rho\dot{\varphi} \\ 0 & -m\rho\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{G}(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ mg\rho \sin \varphi \\ -mg \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.1.2. Sistema diferencialmente plano

De acuerdo con las ecuaciones de movimiento de la grúa viajera (3.9), tenemos un sistema que consta de 2 entradas $\{F, \tau\}$, y 3 grados de libertad $\{x, \varphi, \rho\}$. Es deseable saber si dicho sistema es plano, por lo que, de acuerdo con nuestra definición de planitud diferencial, si el sistema es plano, este estará dotado de alguna salida plana con dos componentes (h_1, h_2) .

Para que el sistema sea plano debemos ser capaces de parametrizar todas las variables del sistema en términos de las componentes de la salida plana y un número finito de sus derivadas. Una inspección minuciosa de las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8), nos muestra que existe una salida plana (h_1, h_2) para el mismo sistema, donde sus componentes son las coordenadas cartesianas de la masa m , es decir,

$$h_1 = x_m = x + R + \rho \sin \varphi, \quad h_2 = z_m = \rho \cos \varphi \quad (3.10)$$

Podemos expresar todas las variables del sistema en términos de los componentes de esta salida y de un número finito de sus derivadas, esta parametrización se puede ver a continuación.

Tenemos las siguientes expresiones debido a la geometría del sistema

$$\sin \varphi = \frac{h_1 - x - R}{\rho}, \quad \cos \varphi = \frac{h_2}{\rho}, \quad (h_1 - x - R)^2 + h_2^2 = \rho^2 \quad (3.11)$$

Ahora, consideremos la segunda derivada de las componentes de la salida plana, estas están dadas como

$$\ddot{h}_1 = \ddot{x} + \ddot{\rho} \sin \varphi + \rho \ddot{\varphi} \cos \varphi + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \varphi - \rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

$$\ddot{h}_2 = \ddot{\rho} \cos \varphi - \rho \ddot{\varphi} \sin \varphi - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi - \rho\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$$

y consideremos los siguientes productos

$$\begin{aligned} \ddot{h}_1 h_2 &= (\ddot{x} + \ddot{\rho} \sin \varphi + \rho \ddot{\varphi} \cos \varphi + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \varphi - \rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi)(\rho \cos \varphi) \\ &= \rho \ddot{x} \cos \varphi + \rho \ddot{\rho} \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi + 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \cos^2 \varphi - \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ddot{h}_2 - g)(h_1 - x - R) &= (\ddot{\rho} \cos \varphi - \rho \ddot{\varphi} \sin \varphi - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi - \rho\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - g)(\rho \sin \varphi) \\ &= \rho \ddot{\rho} \cos \varphi \sin \varphi - \rho^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \sin^2 \varphi - \rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi - g\rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Si restamos los productos anteriores obtenemos la siguiente expresión,

$$\ddot{h}_1 h_2 - (\ddot{h}_2 - g)(h_1 - x - R) = \rho \ddot{x} \cos \varphi + \rho^2 \ddot{\varphi} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + g\rho \sin \varphi$$

la expresión anterior es igual a cero dado que esta equivale a la ecuación (3.7) dividida entre la masa m , es decir,

$$\ddot{h}_1 h_2 - (\ddot{h}_2 - g)(h_1 - x - R) = \rho \ddot{x} \cos \varphi + \rho^2 \ddot{\varphi} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + g\rho \sin \varphi = 0$$

de donde

$$(\ddot{h}_2 - g)(h_1 - x - R) = \ddot{h}_1 h_2 \quad (3.12)$$

Por lo que, despejando x y ρ^2 de (3.11) y (3.12) respectivamente, podemos expresar las variables x y ρ^2 en términos de las componentes de la salida plana y un número finito de sus derivadas tal como

$$x = h_1 - R - \frac{\ddot{h}_1 h_2}{\ddot{h}_2 - g}, \quad \rho^2 = h_2^2 + \left(\frac{\ddot{h}_1 h_2}{\ddot{h}_2 - g} \right)^2$$

De la discusión anterior, concluimos que el sistema descrito por las ecuaciones (3.9) es plano.

3.1.3. Linealización exacta mediante retroalimentación y transformación de coordenadas

Anteriormente vimos que nuestro sistema de la grúa viajera goza de la propiedad de planitud diferencial, esta propiedad implica que el sistema se puede linealizar de forma exacta por retroalimentación dinámica endógena y mediante una transformación de coordenadas (difeomorfismo). En este apartado se abordará con sumo detalle el proceso de linealización de forma exacta para el sistema descrito por las ecuaciones (3.9), además de las consecuencias que esto conlleva y posiblemente ciertas limitaciones que el sistema posee.

Primeramente, es preciso expresar el sistema descrito por las ecuaciones (3.9) en el espacio de estado, el sistema posee 2 entradas y, como salidas definimos las componentes de la salida plana (3.10), es posible expresar dicho sistema mediante ecuaciones del tipo (2.1), definido en \mathbb{R}^6 , es decir,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) = x + R + \rho \sin \varphi \\ y_2 &= h_2(\mathbf{x}) = \rho \cos \varphi\end{aligned}\tag{3.13}$$

donde el vector de estado está definido como

$$\mathbf{x} = (x \quad \dot{x} \quad \varphi \quad \dot{\varphi} \quad \rho \quad \dot{\rho})^T$$

además, definimos las entradas de nuestro sistema como la fuerza F ejercida en el carro y el par mecánico τ aplicado al cilindro de enrollamiento: $u_1 = F$, $u_2 = \tau$.

Los campos vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ se describen como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \frac{mJ\rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + mgJ \sin \varphi \cos \varphi}{D} \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{2\rho\dot{\varphi}D + g \sin \varphi (mM_oR^2 + mJ + M_oJ) + mJ\rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho D} \\ \dot{\rho} \\ \frac{mM_oR^2(\rho\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi)}{D} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{mR^2 + J}{D} \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi (mR^2 + J)}{\rho D} \\ 0 \\ -\frac{mR^2 \sin \varphi}{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{mR \sin \varphi}{D} \\ 0 \\ -\frac{mR \sin \varphi \cos \varphi}{\rho D} \\ 0 \\ -\frac{R(m \sin^2 \varphi + M)}{D} \end{pmatrix}$$

Con $D = M_oJ + mJ \sin^2 \varphi + mM_oR^2$.

Como se mencionó anteriormente, dado que nuestro modelo de la grúa viajera es plano, del Corolario 2.3.1, existe una retroalimentación dinámica endógena tal que el sistema (3.13) es linealizable

de forma exacta. Además, los sistemas que son linealizables por transformaciones de coordenadas y retroalimentación de estado estático son un subconjunto de los sistemas planos.

Para el sistema (3.13), tenemos que, no es posible linealizarlo directamente por una retroalimentación de estado estático regular (2.6), ya que este sistema, no tiene grado relativo bien definido, dado que su matriz de desacoplo, definida en (2.2), que en este caso tiene la forma

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_f h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} L_f h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J \sin^2 \varphi}{D} & -\frac{M_o R \sin \varphi}{D} \\ \frac{J \sin \varphi \cos \varphi}{D} & -\frac{M_o R \cos \varphi}{D} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

es singular para todo \mathbf{x} en \mathbb{R}^6 .

Sin embargo, de la discusión anterior, el sistema puede linealizarse de forma exacta mediante la obtención de un grado relativo a través de la extensión dinámica, donde usaremos una estructura de retroalimentación mediante ecuaciones de la forma (2.7).

Antes de construir una extensión dinámica apropiada para sistema (3.13), lo dotaremos de una retroalimentación de estado estático regular con el fin de obtener nuevos canales de entrada donde alguno de ellos pueda ser aislado, es decir, que las derivadas de menor orden de y_1 y y_2 (en este caso $y_1^{(2)}$ y $y_2^{(2)}$) no se vean afectadas por algún canal de entrada, para así poder aplicar el algoritmo de extensión dinámica, dicho esto, proponemos una retroalimentación de la forma (2.7), basado en el trabajo de B. d'Andréa Novel y J. Levine (1992), véase [4], dicha retroalimentación se describe como

$$\mathbf{u} = \alpha_c(\mathbf{x}) + \beta_c(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (3.15)$$

Definiendo $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$, $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)^T$ y, con

$$\alpha_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -mg \sin \varphi \cos \varphi \\ mgR \cos \varphi - \frac{J}{R} \rho \dot{\varphi}^2 \end{pmatrix}, \quad \beta_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} m \sin \varphi & M_o \\ -\frac{mR^2 + J}{R} & \frac{J}{R} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

De la demostración del Lema 2.2.1 sabemos que una retroalimentación de estado estático regular no cambia la naturaleza del grado relativo del sistema ya que esta propiedad es invariante ante este tipo de retroalimentación, aun así la retroalimentación (3.15) lograr aislar los canales de entrada mediante la matriz $\beta_c(\mathbf{x})$, además de que la matriz $\alpha_c(\mathbf{x})$ hace más simple la descripción matemática del sistema en el espacio de estado gracias a que elimina el desempeño que tiene el momento de inercia J y, además, elimina la dinámica en el cilindro presente en las ecuaciones debido a la fuerza gravitacional ejercida sobre la masa m . Podemos interpretar a v_1 como la tensión en el cable dividida por la masa de la carga m . La composición de (3.13) y (3.15) definen un nuevo sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x})v_1 + \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x})v_2 \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ y_2 &= h_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

con

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{2\rho\dot{\varphi} + g \sin \varphi}{\rho} \\ \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

El sistema (3.13) y el nuevo sistema es válido para todo \mathbb{R}^6 debido a que la matriz $\beta_c(\mathbf{x})$ es no singular para todo \mathbb{R}^6 , por lo que, el nuevo sistema es completamente equivalente a (3.13), y por lo tanto, ambos gozan de la misma naturaleza. Notamos que el nuevo sistema es independiente de la masa M

del carro, de la masa m de la carga y de todos los parámetros físicos del sistema original a excepción de la constante de la aceleración gravitacional g .

Ahora la matriz de desacoplo para el sistema (3.16) tiene la forma

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{\hat{g}_1} L_{\hat{f}} h_1(\mathbf{x}) & L_{\hat{g}_2} L_{\hat{f}} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\hat{g}_1} L_{\hat{f}} h_2(\mathbf{x}) & L_{\hat{g}_2} L_{\hat{f}} h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

esto nos muestra que, de los nuevos canales de entrada hemos logrado aislar v_2 , siendo más específicos, las derivadas de menor orden de y_1 y y_2 (en este caso $y_1^{(2)}$ y $y_2^{(2)}$) son afectadas ambas por v_1 pero no por v_2 . Como podemos observar, la retroalimentación de estado estático regular (2.6) no modifica la naturaleza del grado relativo, ya que la matriz (3.17) sigue siendo singular para todo \mathbb{R}^6 .

Aplicación del algoritmo de extensión dinámica. Consideremos la matriz $A(\mathbf{x})$ dada por (3.17), el rango de la matriz $A(\mathbf{x})$ es 1, constante para todo \mathbb{R}^6 . Deseamos obtener una matriz $A(\mathbf{x})$ de rango igual a m , que en este caso sea 2 y, por lo tanto, que el sistema (3.16) tenga un grado relativo (vector) en una vecindad de algún $\mathbf{x}^o \in \mathbb{R}^6$.

Primeramente, debemos encontrar dos enteros i_o, j_o tal que

$$a_{i_o j_o}(\mathbf{x}) = L_{\hat{g}_{j_o}} L_{\hat{f}}^{r_{i_o}-1} h_{i_o}(\mathbf{x}^o) \neq 0$$

eligiendo $i_o = 1, 2$, y $j_o = 1$, con $r_1 = 2, r_2 = 2$, tenemos que

$$a_{11}(\mathbf{x}) = L_{\hat{g}_1} L_{\hat{f}} h_1(\mathbf{x}^o) = \sin \varphi \neq 0$$

$$a_{21}(\mathbf{x}) = L_{\hat{g}_2} L_{\hat{f}} h_2(\mathbf{x}^o) = \cos \varphi \neq 0$$

para alguna vecindad de algún $\mathbf{x}^o \in \mathbb{R}^6$, en ambos casos.

De la definición de la retroalimentación dinámica (2.20), la cual nos define los nuevos canales de entrada tal como

$$\begin{aligned} v_2 &= \hat{v}_2 \\ v_1 &= \frac{1}{a_{11}(\mathbf{x})} (p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\zeta) \\ \dot{\zeta} &= \hat{v}_1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donde $p(\mathbf{x})$ y $q(\mathbf{x})$ son funciones arbitrarias que satisfacen $p(\mathbf{x}^o) = 0$ y $q(\mathbf{x}^o) = 1$. Podemos elegir $q(\mathbf{x}) = a_{11}(\mathbf{x})$ y $p(\mathbf{x}) = 0$, obteniendo así v_1 igual a la salida de un integrador controlado por \hat{v}_1 , es decir,

$$\begin{aligned} v_1 &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= \hat{v}_1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

El sistema (3.16) extendido mediante la definición de los nuevos canales de entrada (3.18) y (3.19), definido en \mathbb{R}^7 , toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{g}}_1(\hat{\mathbf{x}})\hat{v}_1 + \hat{\mathbf{g}}_2(\hat{\mathbf{x}})\hat{v}_2 \\ y_1 &= h_1(\hat{\mathbf{x}}) \\ y_2 &= h_2(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

con $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \zeta)$, y

$$\widehat{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{2\dot{\rho}\dot{\varphi} + g \sin \varphi}{\rho} \\ \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi}^2 + \zeta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{g}}_1(\widehat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{g}}_2(\widehat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

el cual, tiene una matriz de desacoplo $A(\widehat{\mathbf{x}})$, dada como

$$A(\widehat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} L_{\widehat{\mathbf{g}}_1} L_{\widehat{\mathbf{f}}}^2 h_1(\widehat{\mathbf{x}}) & L_{\widehat{\mathbf{g}}_2} L_{\widehat{\mathbf{f}}}^2 h_1(\widehat{\mathbf{x}}) \\ L_{\widehat{\mathbf{g}}_1} L_{\widehat{\mathbf{f}}}^2 h_2(\widehat{\mathbf{x}}) & L_{\widehat{\mathbf{g}}_2} L_{\widehat{\mathbf{f}}}^2 h_2(\widehat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

La matriz $A(\widehat{\mathbf{x}})$ en este caso, es singular para todo \mathbb{R}^7 y por lo tanto, el nuevo sistema extendido (3.20) no tiene un grado relativo (vector) bien definido.

Aplicando nuevamente el algoritmo de extensión dinámica al sistema (3.20), de forma análoga, tal y como se hizo en el sistema (3.16), obtenemos una nueva definición de extensión dinámica, la cual define nuevos canales de entrada

$$\begin{aligned} \widehat{v}_1 &= \tilde{\zeta} \\ \dot{\tilde{\zeta}} &= \tilde{v}_1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\widehat{v}_2 = \tilde{v}_2$$

Podemos sintetizar de forma más compacta las dos extensiones dinámicas iteradas (3.19) y (3.22) al sistema (3.16), definiendo los nuevos canales de entrada como una cadena de dos integradores en el primer canal, es decir,

$$\begin{aligned} v_1 &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= \tilde{v}_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$v_2 = \tilde{v}_2$$

La extensión dinámica (3.23) produce un nuevo sistema extendido, definido en \mathbb{R}^8 , el cual tomo la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{v}_1 + \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{v}_2 \\ y_1 &= h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ y_2 &= h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

con $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \zeta, \dot{\zeta})$, y

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{2\dot{\rho}\dot{\varphi} + g \sin \varphi}{\rho} \\ \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi}^2 + \zeta \\ \dot{\zeta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ -\sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cálculos sencillos muestran que ahora

$$L_{\tilde{\mathbf{g}}_i} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^k h_j(\tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad (3.25)$$

para $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$ y

$$A(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}}^3 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}}^3 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}}^3 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}}^3 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{\rho} (g \cos(2\varphi) - \zeta \cos \varphi) \\ \cos \varphi & \frac{\cos \varphi}{\rho} (\zeta \sin \varphi - g \sin(2\varphi)) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

La matriz $A(\tilde{\mathbf{x}})$ es no singular en $S = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^8 \mid \cos \varphi (g \cos \varphi - \zeta) \neq 0\}$.

El sistema extendido (3.24) tiene un grado relativo (vector) $\{r_1, r_2\} = \{4, 4\}$, para todo $\tilde{\mathbf{x}} \in S$. Ahora, dado que se cumple la igualdad $r_1 + r_2 = n$ con $n = 8$, del Lema 2.2.1, el problema de la linealización exacta del espacio de estados tiene solución en S , es decir, el sistema extendido (3.24) puede transformarse en un sistema lineal y controlable mediante una retroalimentación del estado estático regular y una transformación de coordenadas. Tal como en (2.10), proponemos la siguiente retroalimentación

$$\tilde{\mathbf{v}} = \alpha_l(\tilde{\mathbf{x}}) + \beta_l(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{w} \quad (3.27)$$

con $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2)^T$, $\mathbf{w} = (w_1 \quad w_2)^T$ y, con $\alpha_l(\tilde{\mathbf{x}})$ y $\beta_l(\tilde{\mathbf{x}})$ dados por

$$\alpha_l(\tilde{\mathbf{x}}) = -A(\tilde{\mathbf{x}})^{-1}b(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \beta_l(\tilde{\mathbf{x}}) = A(\tilde{\mathbf{x}})^{-1}$$

donde $b(\tilde{\mathbf{x}})$ está definida como en (2.5), es decir,

$$b(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} L_{\tilde{f}}^4 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ L_{\tilde{f}}^4 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g\dot{\varphi} \sin(2\varphi) - \zeta\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2\zeta\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{2\rho\dot{\varphi} + g \sin \varphi}{\rho} (g \cos(2\varphi) - \zeta \cos \varphi) \\ 2g\dot{\varphi} \cos(2\varphi) - \zeta\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - 2\zeta\dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{2\rho\dot{\varphi} + g \sin \varphi}{\rho} (\zeta \sin \varphi - g \sin(2\varphi)) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

La transformación de coordenadas dada como

$$\xi_k^i = L_{\tilde{f}}^{k-1} h_i(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.29)$$

con $k = 1, 2, 3, 4$ e $i = 1, 2$, junto con la retroalimentación (3.27) aplicadas al sistema extendido (3.24) producen un sistema caracterizado por 2 conjuntos de ecuaciones totalmente desacopladas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i &= \xi_3^i \\ \dot{\xi}_3^i &= \xi_4^i \\ \dot{\xi}_4^i &= w_i \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$y_i = \xi_1^i$$

con $i = 1, 2$, que es claramente un sistema lineal y controlable. De la transformación (3.29) y de la condición (3.25) podemos ver que los estados del sistema lineal pueden expresarse como

$$\xi_k^i = h_i^{(k-1)}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.31)$$

con $k = 1, 2, 3, 4$ e $i = 1, 2$.

El difeomorfismo establecido entre el sistema extendido (3.24) y el sistema lineal (3.30) es singular en

$$\cos \varphi (g \cos \varphi - \zeta) = 0 \quad (3.32)$$

y por lo tanto, el problema de la linealización exacta no tiene solución cuando se cumple esta condición.

El proceso completo de la linealización para el modelo simplificado de la grúa viajera se puede apreciar en la figura 3.2. Nótese que el difeomorfismo que resuelve el problema de la linealización exacta es,

como se mencionó anteriormente, entre el sistema lineal (3.30) y el sistema extendido (3.24) y, no entre el sistema lineal (3.30) y el sistema original (3.13). A pesar de que existe una relación invertible entre dichos sistemas, que se puede expresar en la forma de un compensador dinámico (véase [4]), las dimensiones del espacio de estado de ambos sistemas no son iguales. Por lo tanto, no puede establecerse un difeomorfismo entre ellos, ya que una propiedad del difeomorfismo es la preservación de la dimensión entre ambos sistemas. Sin embargo, esto no quiere decir que estos sistemas no sean equivalentes y, no se pueda establecer una relación entre ellos. Sistemas de este tipo que son planos y, por lo tanto, linealizables de forma exacta por retroalimentación dinámica endógena son equivalentes a un sistema lineal y controlable mediante un isomorfismo llamado “isomorfismo de Lie-Bäcklund” que, aunque no preserva la dimensión del sistema, existe una relación invertible entre el sistema original y el sistema lineal. Esto permite transformar y deshacer la transformación entre ambos sistemas en alguna vecindad de sus respectivos espacios de estado y de sus entradas de control. Para más detalles y profundidad acerca de los isomorfismos de Lie-Bäcklund se consiguen en [37], así como algunos trabajos interesantes de Fliess *et al.* (1994) [38], (1999) [39].

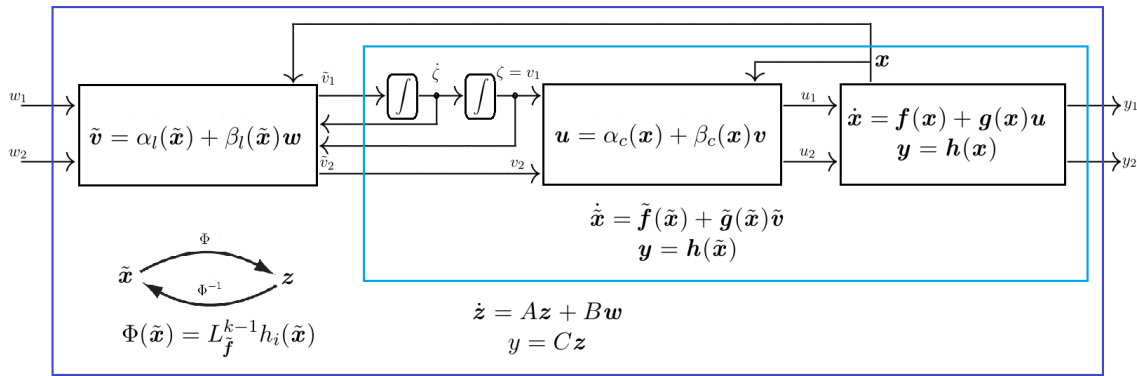


Figura 3.2: Diagrama esquemático que representa el proceso de linealización exacta para el modelo simplificado de la grúa viajera. El proceso consiste en una retroalimentación de estado estático regular para el aislamiento de los canales, una extensión dinámica con dos integradores iterados en el primer canal de entrada que define la primer retroalimentación dando como resultado un sistema extendido que es lineizable mediante retroalimentación de estado estático regular y transformación de coordenadas.

3.2. La grúa viajera, un modelo refinado

3.2.1. Modelo matemático mediante Euler-Lagrange

Consideremos el modelo de una grúa viajera como se muestra en la figura 3.3. Consideramos los mismos parámetros que en el modelo de la grúa de la subsección 3.1.1, y definiendo de manera análoga los grados de libertad del sistema $\{x, \varphi, \rho\}$.

El cambio radical en este modelo consiste en que ahora consideramos que la magnitud de ρ se mide desde el punto de tangencia del cilindro del elevador, es decir, las coordenadas cartesianas de la carga m se definen como

$$x_m = x + \rho \sin \varphi + R \cos \varphi, \quad z_m = \rho \cos \varphi - R \sin \varphi \quad (3.33)$$

La coordenada horizontal del carro se define de igual forma que en el modelo simplificado

$$x_M = x \quad (3.34)$$

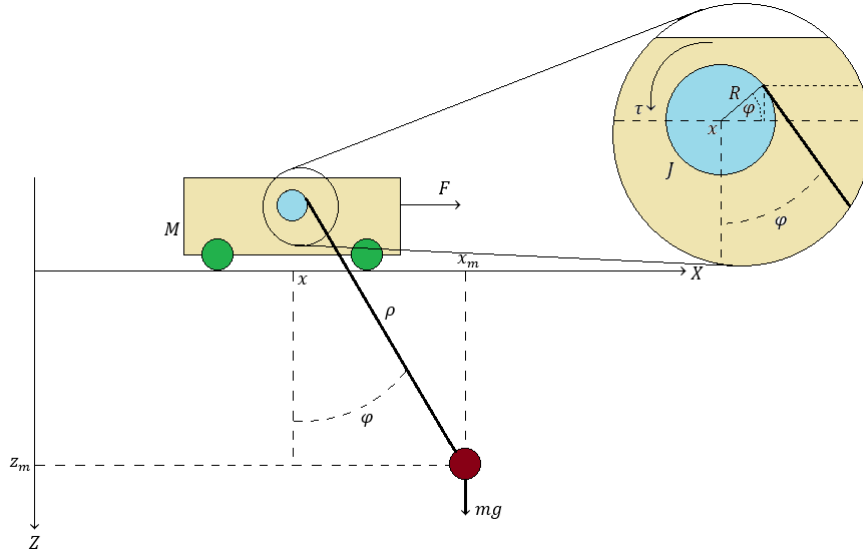


Figura 3.3: Modelo refinado de la grúa viajera.

Las velocidades son

$$\dot{x}_M = \dot{x}$$

$$\dot{x}_m = \dot{x} + \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi - R \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{z}_m = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi - R \dot{\varphi} \cos \varphi$$

La energía cinética \mathcal{K} y energía potencial \mathcal{V} respectivamente, en términos de las coordenadas generalizadas $\{x, \varphi, \rho\}$, están dadas como

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} \frac{J_o}{R_o^2} \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} \frac{J_o}{R_o^2} \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_m^2 + \dot{z}_m^2) + \frac{1}{2} \frac{J}{R^2} \dot{\rho}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{J_o}{R_o^2} \dot{x}^2 \\ &+ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\rho \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi - 2R \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + 2\dot{x} \dot{\rho} \sin \varphi - 2R \dot{\rho} \dot{\varphi} + (\rho^2 + R^2) \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2) + \frac{1}{2} \frac{J}{R^2} \dot{\rho}^2 \\ \mathcal{V} &= -Fx + \frac{\tau}{R} \rho - mg(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) \end{aligned}$$

El lagrangiano del sistema es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V} &= \frac{1}{2} M_o \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\rho \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi - 2R \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + 2\dot{x} \dot{\rho} \sin \varphi - 2R \dot{\rho} \dot{\varphi} + (\rho^2 + R^2) \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{J}{R^2} \dot{\rho}^2 + Fx - \frac{\tau}{R} \rho + mg(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Donde M_o está definido de igual forma que en (3.4). Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.3) a cada uno de las coordenadas generalizadas del sistema $\{x, \varphi, \rho\}$, obtenemos las ecuaciones de movimiento que describen completamente la dinámica del nuevo sistema

$$(m + M_o) \ddot{x} + m \ddot{\varphi} (\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + m \ddot{\rho} \sin \varphi + 2m \dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \varphi - m \dot{\varphi}^2 (\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) = F \quad (3.36)$$

$$m \ddot{x} (\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + m \ddot{\varphi} (\rho^2 + R^2) - m R \ddot{\rho} + 2m \rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + mg(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) = 0 \quad (3.37)$$

$$m\ddot{x} \sin \varphi - mR\ddot{\varphi} + \left(m + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi = -\frac{\tau}{R} \quad (3.38)$$

Expresando el sistema de la forma (3.9), es decir

$$\mathcal{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}) = \mathcal{B}\mathbf{u} \quad (3.39)$$

donde, de igual manera, el vector de coordenadas generalizadas es: $\mathbf{q} = (x \ \varphi \ \rho)^T$, y el vector $\mathbf{u} = (F \ \tau)^T$. Las matrices $\mathcal{M}(\mathbf{q})$, $\mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathcal{G}(\mathbf{q})$ y \mathcal{B} se describen como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} m + M_o & m(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) & m \sin \varphi \\ m(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) & m(\rho^2 + R^2) & -mR \\ m \sin \varphi & -mR & m + \frac{J}{R^2} \end{pmatrix} \\ \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 & m\dot{\rho} \cos \varphi - m\rho\dot{\varphi} \sin \varphi - mR\dot{\varphi} \cos \varphi & m\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & m\rho\dot{\varphi} & m\rho\dot{\varphi} \\ 0 & -m\rho\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{G}(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ mg(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) \\ -mg \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2.2. Sistema diferencialmente plano

De acuerdo con las ecuaciones de movimiento del nuevo modelo de la grúa viajera (3.39), tenemos un sistema con 2 entradas $\{F, \tau\}$ y tres grados de libertad $\{x, \varphi, \rho\}$. Si el sistema es plano, entonces debemos encontrar alguna salida plana con dos componentes (h_1, h_2) . Notamos que, de igual manera que en el modelo simplificado de la grúa viajera, una salida plana (h_1, h_2) para este nuevo sistema, donde sus componentes son, las coordenadas cartesianas de la masa m , es decir,

$$h_1 = x_m = x + \rho \sin \varphi + R \cos \varphi, \quad h_2 = z_m = \rho \cos \varphi - R \sin \varphi \quad (3.40)$$

La parametrización total de las variables de las ecuaciones de movimiento de nuestro nuevo modelo se muestra a continuación.

Tenemos las siguientes expresiones debido a la geometría del sistema

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\rho(h_1 - x) - Rh_2}{\rho^2 + R^2}, \quad \cos \varphi = \frac{R(h_1 - x) + \rho h_2}{\rho^2 + R^2} \\ (h_1 - x)^2 + h_2^2 &= \rho^2 + R^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ahora, consideremos la segunda derivada de las componentes de la salida plana

$$\ddot{h}_1 = \ddot{x} + \ddot{\rho} \sin \varphi + \ddot{\varphi}(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)$$

$$\ddot{h}_2 = \ddot{\rho} \cos \varphi - \ddot{\varphi}(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi)$$

y consideremos los siguientes productos

$$\begin{aligned} \ddot{h}_1 h_2 &= (\ddot{x} + \ddot{\rho} \sin \varphi + \ddot{\varphi}(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi))(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) \\ &= \ddot{x}(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + \rho\ddot{\rho} \sin \varphi \cos \varphi - R\ddot{\rho} \sin^2 \varphi + \rho^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - 2\rho R \ddot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + R^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \varphi \\ &\quad + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos^2 \varphi - 2R\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \dot{\varphi}^2(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\ddot{h}_2 - g)(h_1 - x) \\
= & (\ddot{\rho} \cos \varphi - \ddot{\varphi}(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) - g)(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) \\
= & \rho \ddot{\rho} \cos \varphi \sin \varphi + R \ddot{\rho} \cos^2 \varphi - \rho^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - 2\rho R \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi - R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi - 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \sin^2 \varphi \\
& - 2R \dot{\rho} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \dot{\varphi}^2(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) - g(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)
\end{aligned}$$

Sí restamos los productos anteriores obtenemos la siguiente expresión,

$$\ddot{h}_1 h_2 - (\ddot{h}_2 - g)(h_1 - x) = \ddot{x}(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + (\rho^2 + R^2)\ddot{\varphi} - R\ddot{\rho} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + g(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)$$

la expresión anterior es igual a cero dado que esta equivale a la ecuación (3.37) dividida entre la masa m , es decir,

$$\ddot{h}_1 h_2 - (\ddot{h}_2 - g)(h_1 - x) = \ddot{x}(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + (\rho^2 + R^2)\ddot{\varphi} - R\ddot{\rho} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + g(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) = 0$$

de donde, podemos expresar la siguiente ecuación

$$(\ddot{h}_2 - g)(h_1 - x) = \ddot{h}_1 h_2 \quad (3.42)$$

Despejando x y ρ^2 de (3.41) y (3.42) respectivamente, podemos expresar la variables x y ρ^2 en términos de las componentes de la salida plana y un numero finito de sus derivadas tal como

$$x = h_1 - \frac{\ddot{h}_1 h_2}{\ddot{h}_2 - g} \quad (3.43)$$

$$\rho^2 = h_2^2 + \left(\frac{\ddot{h}_1 h_2}{\ddot{h}_2 - g} \right)^2 - R^2 \quad (3.44)$$

De la discusión anterior, concluimos que es sistema descrito por las ecuaciones (3.39) es plano.

3.2.3. Linealización exacta mediante retroalimentación y transformación de coordenadas

Como se mencionó anteriormente, un sistema plano es linealizable de forma exacta por retroalimentación dinámica endógena, por lo que, mediante una extensión dinámica, es posible encontrar un nuevo sistema extendido que sea difeomorfo y, por lo tanto, equivalente a un sistema lineal y controlable.

Expresamos el sistema descrito por las ecuaciones (3.39) en el espacio de estados, definido en \mathbb{R}^6 , mediante ecuaciones del tipo (2.1), es decir,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \\
y_1 &= h_1(\mathbf{x}) = x + \rho \sin \varphi + R \cos \varphi \\
y_2 &= h_2(\mathbf{x}) = \rho \cos \varphi - R \sin \varphi
\end{aligned} \quad (3.45)$$

donde el vector de estado está definido como

$$\mathbf{x} = (x \quad \dot{x} \quad \varphi \quad \dot{\varphi} \quad \rho \quad \dot{\rho})^T$$

además, de igual forma que en el modelo simplificado de la grúa viajera, definimos las entradas como la fuerza F ejercida en el carro y el par mecánico τ aplicado al cilindro de enrollamiento: $u_1 = F$, $u_2 = \tau$.

Los campos vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ se describen como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \frac{(m\dot{\varphi}J(R^2\dot{\varphi}+\rho^2\dot{\varphi}-2R\dot{\rho})+mgJ(\rho\cos\varphi-R\sin\varphi))(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)}{D} \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{mM_o\rho R^2(g\sin\varphi-R\dot{\varphi}^2)+J(g(m+M_o)+2m\dot{\rho}\dot{\varphi}J\sin\varphi+m\dot{\varphi}^2(\rho\cos\varphi-R\sin\varphi))(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)+2\rho\dot{\rho}M_o(mR^2+J)}{D} \\ \dot{\rho} \\ \frac{mM_o\rho R^2(R^2\dot{\varphi}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2-2R\dot{\rho}\dot{\varphi}+g\rho\cos\varphi-gR\sin\varphi)}{D} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m\rho^2R^2+(\rho^2+R^2)J}{D} \\ 0 \\ -\frac{m\rho R^2\cos\varphi+J(\rho\cos\varphi-R\sin\varphi)}{D} \\ 0 \\ -\frac{m\rho R^2(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)}{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m\rho R(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)}{D} \\ 0 \\ -\frac{mR\cos\varphi(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)+M_oR^2}{D} \\ 0 \\ -\frac{R(\rho^2M_o+R^2M_o+m(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)^2)}{D} \end{pmatrix}$$

Con $D = \rho^2M_oJ + R^2M_oJ + mM_o\rho^2R^2 + mJ(\rho\sin\varphi + R\cos\varphi)^2$.

El sistema no es linealizabile de forma exacta directamente por una retroalimentación de estado estático regular, tal y como sucedió en el modelo simplificado, ya que su matriz de desacoplo $A(\mathbf{x})$,

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{g_1}L_f h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2}L_f h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1}L_f h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2}L_f h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)^2}{D} & \frac{-M_o\rho R(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)}{D} \\ \frac{J(\rho\sin\varphi+R\cos\varphi)(\rho\cos\varphi-R\sin\varphi)}{D} & \frac{-M_o\rho R(\rho\cos\varphi-R\sin\varphi)}{D} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

es singular para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$, por lo que el sistema no tiene grado relativo bien definido.

Sin embargo, dado que el sistema es plano, es posible utilizar la extensión dinámica, de tal forma que, podemos obtener un nuevo sistema extendido que tenga un grado relativo bien definido y sea difeomorfo a un sistema lineal y controlable. Proponemos una retroalimentación de la forma (2.7) con el fin de obtener nuevos canales de entrada de tal forma que las derivadas de menor orden de y_1 y y_2 (en este caso $y_1^{(2)}$ y $y_2^{(2)}$) no se vean afectadas por alguno de los nuevos canales de entrada, dicha retroalimentación está definida como

$$\mathbf{u} = \alpha_c(\mathbf{x}) + \beta_c(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (3.47)$$

Definiendo $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$, $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)^T$ y, con

$$\alpha_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\dot{\varphi}\dot{\rho}J}{\rho} - \frac{gJ(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + (\rho^2 + R^2)\dot{\varphi}^2 J}{\rho R} \end{pmatrix}$$

$$\beta_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} m\rho \sin \varphi + mR \cos \varphi & M_o \\ -\frac{m\rho^2 R^2 + (\rho^2 + R^2)J}{\rho R} & \frac{\rho J \sin \varphi + RJ \cos \varphi}{\rho R} \end{pmatrix}$$

La matriz $\beta_c(\mathbf{x})$ de la retroalimentación (3.47) propone nuevos canales de entrada, donde estos están aislados, es decir, alguno de ellos no depende de las derivadas de menor orden de y_1 y y_2 , tal y como se quería. La matriz $\alpha_c(\mathbf{x})$ hace más simple la descripción matemática de nuestro sistema en el espacio de estados, ya que como sucedió en el modelo simplificado de la grúa viajera, elimina el desempeño que tiene el momento de inercia J sobre el sistema.

La composición de las ecuaciones de estado (3.45) con la retroalimentación (3.47) producen un nuevo sistema, el cual se describe por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x})v_1 + \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x})v_2 \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ y_2 &= h_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.48}$$

con

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ \frac{\dot{\varphi}^2 R - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} - g \sin \varphi}{\rho} \\ \dot{\rho} \\ \frac{\dot{\varphi}^2(\rho^2 + R^2) + g(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) - 2R\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{R}{\rho} \\ 0 \\ \frac{\rho^2 + R^2}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ -\frac{\rho \sin \varphi + R \cos \varphi}{\rho} \end{pmatrix}$$

El sistema (3.45) es equivalente al sistema (3.48) en donde la matriz $\beta_c(\mathbf{x})$ de (3.47) sea no singular, esto es para todo $\mathbf{x} \in U$, donde $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | \rho \neq 0\}$. Similar a como ocurrió en el sistema 3.16, el nuevo sistema (3.48) es independiente de los parámetros físicos del sistema a excepción de la constante de aceleración gravitacional g y el radio R del cilindro de enrollamiento, la consideración de R debido a la presencia dinámica de segundo orden en la desviación angular φ .

Ahora, el sistema (3.48) tiene por matriz de desacoplo

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{\hat{\mathbf{g}}_1} L_{\hat{\mathbf{f}}} h_1(\mathbf{x}) & L_{\hat{\mathbf{g}}_2} L_{\hat{\mathbf{f}}} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\hat{\mathbf{g}}_1} L_{\hat{\mathbf{f}}} h_2(\mathbf{x}) & L_{\hat{\mathbf{g}}_2} L_{\hat{\mathbf{f}}} h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + (\rho^2 + R^2) \sin \varphi}{\rho} & 0 \\ -\frac{R(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) + (\rho^2 + R^2) \cos \varphi}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

La cual sigue siendo singular para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$. Sin embargo el nuevo canal de entrada v_2 no está siendo afectado por las derivadas de menor orden de y_1 y y_2 , por lo que es posible aplicar el algoritmo de extensión dinámica con el fin de obtener un nuevo sistema extendido que tenga un grado relativo bien definido (vector).

Aplicación del algoritmo de extensión dinámica. Un tratamiento similar al que se llevó a cabo en el modelo simplificado de la grúa viajera sobre el algoritmo de la extensión dinámica nos da como resultado dos extensiones dinámicas en el primer canal de entrada v_1 del sistema (3.48), donde dicha extensión dinámica es igual a la salida de un integrador seguido de otro integrador, donde este último es controlado por un nuevo canal de entrada \hat{v}_1 , dicho lo anterior, podemos representar las dos extensiones dinámicas iteradas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} v_1 &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= \tilde{v}_1 \end{aligned} \quad (3.50)$$

El segundo canal de entrada se deja sin cambios, y se iguala al nuevo canal de entrada \tilde{v}_2

$$v_2 = \tilde{v}_2 \quad (3.51)$$

El sistema extendido así obtenido por la extensión dinámica, definido en \mathbb{R}^8 , se describe mediante ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{v}_1 + \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{v}_2 \\ y_1 &= h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ y_2 &= h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

con $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \zeta, \dot{\zeta})$, y donde los nuevos campos vectoriales $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}})$ y $\tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}})$ toman la forma

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ \frac{(\zeta + \dot{\varphi}^2)R - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} - g \sin \varphi}{\rho} \\ \dot{\rho} \\ \frac{(\zeta + \dot{\varphi}^2)(\rho^2 + R^2) + g(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) - 2R\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho} \\ \dot{\zeta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ -\frac{\rho \sin \varphi + R \cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuidadosos cálculos muestran que ahora

$$L_{\tilde{\mathbf{g}}_i} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^k h_j(\tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad (3.53)$$

para $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$ y

$$A(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^3 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^3 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^3 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^3 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin \varphi + R \cos \varphi & -\zeta \\ \rho \cos \varphi - R \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

La matriz $A(\tilde{\mathbf{x}})$ es no singular en $S = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^8 \mid \zeta(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) \neq 0\}$.

El sistema extendido (3.52) tiene un grado relativo (vector) $\{r_1, r_2\} = \{4, 4\}$ en S . Por lo que, el sistema extendido es linealizable de forma exacta en S mediante una retroalimentación de estado estático regular y una transformación de coordenadas, sin embargo, hay un punto muy importante a considerar; la matriz $A(\tilde{\mathbf{x}})$ es singular cuando; $\zeta(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) = 0$, por consecuencia, es singular cuando $\zeta = 0$, dicha condición implica que la matriz $A(\tilde{\mathbf{x}})$ es singular cuando el sistema extendido se encuentra en cualquier punto de equilibrio, y por la Proposición 2.2.2, el problema del control que no interactúa no tiene solución, además de que el problema de la linealización exacta es irresoluble en cualquier punto de equilibrio de (3.52).

Debido a los obstáculos que conlleva tener una singularidad en la matriz de desacoplo en, todos los puntos de equilibrio del sistema, no es posible obtener comportamientos donde, el sistema extendido se vea obligado a descansar en algún punto de equilibrio o, evolucionar de forma que, tenga que tomar valores de estos mismos. Es claro que, no podemos obtener ventaja alguna, de la linealización del sistema extendido (3.52), a pesar de que cumple las condiciones descritas en el Lema 2.2.1, no obstante, se buscara una forma de obtener un nuevo sistema que sea linealizable de forma exacta y, además cumpla con la condición de que su matriz de desacoplo sea no singular en todos sus puntos de equilibrio. De la demostración del Lema 2.2.1 se sabe que una retroalimentación de estado estático regular no modifica la naturaleza del grado relativo del sistema, sin embargo, como se verá a continuación, en algunos

casos, una retroalimentación de este tipo, tiene la capacidad de poder reubicar singularidades que se presentan en la matriz de desacoplo, las cuales impiden establecer un difeomorfismo invertible entre el sistema extendido y un sistema lineal y controlable, en algún punto de operación de las entradas de control.

3.2.4. Reubicación de las singularidades de la matriz de desacoplo para el modelo refinado de la grúa viajera (sin considerar el momento de inercia del cilindro)

Consideremos el modelo refinado de la grúa viajera con la consideración de que se ignorará el momento de inercia del cilindro denotado por J , las ecuaciones dinámicas expresadas en la forma generalizada (3.9) están dadas como

$$\mathcal{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}) = \mathcal{B}\mathbf{u} \quad (3.55)$$

donde los vectores \mathbf{q} y \mathbf{u} están definidos de la misma forma, las matrices $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $G(\mathbf{q})$ y B son

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} m + M_o & m(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) & m \sin \varphi \\ m(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) & m(\rho^2 + R^2) & -mR \\ m \sin \varphi & -mR & m \end{pmatrix} \\ \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 & m\dot{\rho} \cos \varphi - m\rho\dot{\varphi} \sin \varphi - mR\dot{\varphi} \cos \varphi & m\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & m\rho\dot{\varphi} & m\rho\dot{\varphi} \\ 0 & -m\rho\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{G}(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ mg(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) \\ -mg \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, expresando el sistema descrito por (3.55) en el espacio de estados, definido en \mathbb{R}^6 , obteniendo las siguientes ecuaciones;

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ y_2 &= h_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Los campos vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ se describen como

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ \frac{\dot{\varphi}^2 R - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} - g \sin \varphi}{\rho} \\ \dot{\rho} \\ \frac{\dot{\varphi}^2(\rho^2 + R^2) + g(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) - 2R\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho} \end{pmatrix} \\ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_o} \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho M_o} \\ 0 \\ -\frac{\rho \sin \varphi + R \cos \varphi}{\rho M_o} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho \sin \varphi + R \cos \varphi}{\rho R M_o} \\ 0 \\ -\frac{R M_o + m \cos \varphi (\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)}{\rho^2 R m M_o} \\ 0 \\ -\frac{(\rho^2 + R^2) M_o + m(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)^2}{\rho^2 R m M_o} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como podemos notar, los campos vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ de los sistemas (3.48) y (3.56) respectivamente, son idénticos, de esta manera se corrobora que la matriz $\alpha_c(\mathbf{x})$ de la retroalimentación (3.47) elimina el desempeño del momento de inercia J en el sistema (3.45). El sistema (3.56) tiene por matriz de desacoplo

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{\hat{\mathbf{g}}_1} L_{\hat{\mathbf{f}}} h_1(\mathbf{x}) & L_{\hat{\mathbf{g}}_2} L_{\hat{\mathbf{f}}} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\hat{\mathbf{g}}_1} L_{\hat{\mathbf{f}}} h_2(\mathbf{x}) & L_{\hat{\mathbf{g}}_2} L_{\hat{\mathbf{f}}} h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) + (\rho^2 + R^2) \sin \varphi}{\rho^2 R m} \\ 0 & \frac{R(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) - (\rho^2 + R^2) \cos \varphi}{\rho^2 R m} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

que es singular para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$, siendo así, el sistema no tiene grado relativo bien definido, por lo que no es linealizable de forma exacta directamente por retroalimentación de estado estático regular. Se observa que las derivadas de menor orden de y_1 y y_2 (en este caso $y_1^{(2)}$ y $y_2^{(2)}$) no se ven afectadas por el canal de entrada u_1 , es claro que ya es posible aplicar el algoritmo de la extensión dinámica debido a que los canales de entrada están aislados, no obstante, proponemos una retroalimentación de la forma (2.7) con el motivo de eliminar el desempeño de los parámetros mecánicos en los campos vectoriales $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$, la retroalimentación se expresa a continuación

$$\mathbf{u} = \alpha_c(\mathbf{x}) + \beta_c(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (3.58)$$

Definiendo $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$, $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)^T$ y, con

$$\alpha_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} m\rho \sin \varphi + mR \cos \varphi & M_o \\ -m\rho R & 0 \end{pmatrix}$$

La composición de las ecuaciones de estado (3.56) con la retroalimentación (3.58) producen un nuevo sistema, el cual se describe por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x})v_1 + \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x})v_2 \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ y_2 &= h_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

con

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ \frac{\dot{\varphi}^2 R - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} - g \sin \varphi}{\rho} \\ \dot{\rho} \\ \frac{\dot{\varphi}^2(\rho^2 + R^2) + g(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) - 2R\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{R}{\rho} \\ 0 \\ \frac{\rho^2 + R^2}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ -\frac{\rho \sin \varphi + R \cos \varphi}{\rho} \end{pmatrix}$$

Como podemos notar, el nuevo sistema (3.59) es idéntico al sistema (3.48) que se obtuvo de la composición de las ecuaciones de estado (3.45) con la retroalimentación (3.47) y, es claro que era de esperarse debido a la equivalencia entre los modelos considerados, sin embargo, dado que se obtuvo el mismo sistema en el espacio de estados, tendremos el mismo resultado, y las mismas complicaciones con respecto a la singularidad de la matriz de desacoplo (3.54), siendo así, intentaremos evadir la singularidad proponiendo otra retroalimentación de estado estático regular aplicada al sistema (3.56), la cual se muestra a continuación

$$\mathbf{u} = \alpha_c(\mathbf{x}) + \beta_c(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (3.60)$$

Definiendo $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$, $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1 \ \hat{v}_2)^T$ y, con

$$\alpha_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{\rho} \cos \varphi (\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) \\ mgR \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \beta_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} m\rho \sin \varphi + mR \cos \varphi & M_o \\ -m\rho R & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, la composición de las ecuaciones de estado (3.56) con la retroalimentación (3.60) producen el siguiente sistema en el espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x})\hat{v}_1 + \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x})\hat{v}_2 \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ y_2 &= h_2(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{3.61}$$

con

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ \frac{\dot{\varphi}^2 R - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} - g \sin \varphi}{\rho} - \frac{gR \cos \varphi}{\rho^2} \\ \dot{\rho} \\ \frac{\dot{\varphi}^2(\rho^2 + R^2) - gR \sin \varphi - 2R\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho} - \frac{gR^2 \cos \varphi}{\rho^2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{R}{\rho} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\rho^2 + R^2}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ -\frac{\rho \sin \varphi + R \cos \varphi}{\rho} \end{pmatrix}$$

El cambio entre los sistemas (3.59) y (3.61) se da en los campos vectoriales $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ y $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})$ respectivamente, debido a que las retroalimentaciones (3.58) y (3.60) se diferencian en las matrices $\alpha_c(\mathbf{x})$ donde dichas matrices como se mencionó anteriormente, no afectan a los campos vectoriales asociados a las entradas de control. El nuevo sistema tiene la misma matriz de desacoplo que se indica en (3.49), de modo que; una extensión dinámica donde se definen nuevos canales de entrada de igual manera que en (3.50) y (3.51) produce un sistema extendido, definido en \mathbb{R}^8 , el cual se describe a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{v}_1 + \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{v}_2 \\ y_1 &= h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ y_2 &= h_2(\tilde{\mathbf{x}})\end{aligned}\tag{3.62}$$

con $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \zeta, \dot{\zeta})$, y donde los nuevos campos vectoriales $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}})$ y $\tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}})$ se describen como

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \\ \frac{(\zeta + \dot{\varphi}^2)R - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} - g \sin \varphi}{\rho} - \frac{gR \cos \varphi}{\rho^2} \\ \dot{\rho} \\ \frac{(\zeta + \dot{\varphi}^2)(\rho^2 + R^2) - gR \sin \varphi - 2R\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho} - \frac{gR^2 \cos \varphi}{\rho^2} \\ \dot{\zeta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ -\frac{\rho \sin \varphi + R \cos \varphi}{\rho} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuidadosos cálculos muestran que

$$L_{\tilde{\mathbf{g}}_i} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^k h_j(\tilde{\mathbf{x}}) = 0\tag{3.63}$$

para $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$ y

$$\begin{aligned}A(\tilde{\mathbf{x}}) &= \begin{pmatrix} L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^3 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^3 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ L_{\tilde{\mathbf{g}}_1} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^3 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) & L_{\tilde{\mathbf{g}}_2} L_{\tilde{\mathbf{f}}}^3 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho \sin \varphi + R \cos \varphi & \frac{(g\rho \cos(2\varphi) - gR \sin(2\varphi) - \zeta\rho(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi)) \cos \varphi}{\rho^2} - \frac{(gR \cos^2 \varphi + \zeta\rho^2 \sin \varphi)(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)}{\rho^3} \\ \rho \cos \varphi - R \sin \varphi & \frac{(\zeta\rho(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi) - g\rho \sin(2\varphi) - gR \cos(2\varphi)) \cos \varphi}{\rho^2} + \frac{(gR \sin \varphi \cos \varphi - \zeta\rho^2 \cos \varphi)(\rho \sin \varphi + R \cos \varphi)}{\rho^3} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.64}$$

Ahora, la matriz $A(\tilde{\mathbf{x}})$ es no singular en $S = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^8 \mid \frac{(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi)(g \cos \varphi - \rho \zeta)}{\rho} \neq 0\}$.

Del resultado anterior, se muestra que la retroalimentación (3.60) es capaz de evadir la singularidad que se presentó en la matriz (3.54) y que hereda el sistema (3.59), la nueva matriz de desacoplo (3.64) no presenta singularidades en puntos de equilibrio del sistema extendido (3.62), con $\rho \neq 0$, siendo esta condición ya excluida por el mismo sistema, por lo tanto, el problema del control que no interactúa tiene solución en cualquier punto de equilibrio del sistema extendido.

El sistema extendido (3.62) tiene un grado relativo (vector) $\{r_1, r_2\} = \{4, 4\}$ para todo $\tilde{\mathbf{x}} \in S$, tal y como se prueba en la demostración del Lema 2.2.1, los números enteros r_i (componentes del vector grado relativo) son invariantes bajo una retroalimentación regular, teniendo el mismo vector grado relativo que el sistema (3.52), como consecuencia, el sistema extendido (3.62) es lineizable de forma exacta mediante una retroalimentación de estado estático regular y una transformación de coordenadas.

3.2.5. Reubicación de las singularidades de la matriz de desacoplo para el modelo refinado de la grúa viajera (considerando el momento de inercia del cilindro)

Con el resultado anterior se mostró que es posible encontrar una retroalimentación de estado estático regular para el sistema (3.56), tal que el sistema extendido (3.62), resultante de aplicar una extensión dinámica al sistema (3.61) que a su vez resulta de aplicar la retroalimentación (3.60) al sistema (3.56), posee una matriz desacoplo $A(\tilde{\mathbf{x}})$ libre de singularidades en los puntos de equilibrio del sistema extendido, ahora ya estamos en condiciones de poder generalizar el resultado para el modelo refinado de la grúa viajera considerando el momento de inercia del cilindro denotado por J donde, dicho modelo es descrito por las ecuaciones (3.39), dichas ecuaciones son expresadas en el espacio de estados por las ecuaciones (3.45), al aplicar la retroalimentación (3.47) obtenemos un nuevo sistema descrito por las ecuaciones (3.48), el cual, como se mencionó anteriormente; es idéntico al sistema (3.59). Ahora, dado que el sistema (3.59) resulta de aplicar una retroalimentación regular al sistema (3.56), y a su vez, el sistema (3.61) resulta de igual manera de aplicar una retroalimentación regular al sistema (3.56), se deduce que es posible encontrar una retroalimentación de estado estático regular, invertible, tal que el sistema (3.45) sea equivalente al sistema (3.61), con el objetivo de obtener el mismo sistema extendido (3.62) el cual goza de todas las propiedades mencionadas anteriormente, es fácil ver que la retroalimentación

$$\mathbf{v} = \alpha_c(\mathbf{x}) + \beta_c(\mathbf{x})\hat{\mathbf{v}} \quad (3.65)$$

Con $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)^T$, $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1 \ \hat{v}_2)^T$ y con

$$\alpha_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{g \cos \varphi}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_c(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aplicada al sistema (3.45) nos da como resultado el sistema (3.61), obteniendo así, mediante la extensión dinámica descrita anteriormente, el sistema extendido (3.62).

Ahora, proponemos una retroalimentación de la forma (2.10), la cual esta descrita como

$$\tilde{\mathbf{v}} = \alpha_l(\tilde{\mathbf{x}}) + \beta_l(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{w} \quad (3.66)$$

con $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1 \ \tilde{v}_2)^T$, $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2)^T$ y, con $\alpha_l(\tilde{\mathbf{x}})$ y $\beta_l(\tilde{\mathbf{x}})$ dados por

$$\alpha_l(\tilde{\mathbf{x}}) = -A(\tilde{\mathbf{x}})^{-1}b(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \beta_l(\tilde{\mathbf{x}}) = A(\tilde{\mathbf{x}})^{-1}$$

donde $A(\tilde{\mathbf{x}})$ es descrita en (3.64) y $b(\tilde{\mathbf{x}})$ es de la forma (2.5)

$$b(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} L_{\tilde{f}}^4 h_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ L_{\tilde{f}}^4 h_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

La transformación de coordenadas

$$\xi_k^i = L_{\tilde{f}}^{k-1} h_i(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.68)$$

con $k = 1, 2, 3, 4$ e $i = 1, 2$, junto con la retroalimentación (3.66) aplicadas al sistema extendido (3.62) producen un sistema caracterizado por 2 conjuntos de ecuaciones totalmente desacopladas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i &= \xi_3^i \\ \dot{\xi}_3^i &= \xi_4^i \\ \dot{\xi}_4^i &= w_i \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$y_i = \xi_1^i$$

con $i = 1, 2$, que es claramente un sistema lineal y controlable. De la transformación (3.68) y de la condición (3.63) podemos ver que los estados del sistema lineal pueden expresarse como

$$\xi_k^i = h_i^{(k-1)}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.70)$$

con $k = 1, 2, 3, 4$ e $i = 1, 2$.

El difeomorfismo establecido entre el sistema extendido (3.62) y el sistema lineal (3.69) es singular en

$$\frac{(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi)(g \cos \varphi - \rho \zeta)}{\rho} = 0 \quad (3.71)$$

y por lo tanto, el problema de la linealización exacta para el sistema extendido (3.62) no tiene solución cuando se cumple esta condición, con la consideración de que esta singularidad no está en ningún punto de equilibrio del nuevo sistema extendido tal y como se quería.

Se ha demostrado, al menos para este caso, que una retroalimentación de estado estático regular es capaz de reubicar singularidades presentes en la matriz de desacoplo del sistema extendido, sin modificar la naturaleza del grado relativo y, por defecto, los índices r_i (componentes del vector grado relativo), los cuales son invariantes ante retroalimentaciones de este tipo. Es importante señalar que, las retroalimentaciones regulares solo pueden reubicar singularidades en la matriz de desacoplo, cuando estas anteceden a un sistema que permite una extensión dinámica, por lo que, una retroalimentación regular aplicada a un sistema que ya tiene un grado relativo bien definido, con el fin de reubicar singularidades presentes en su matriz de desacoplo, no será capaz de reubicarlas, sin importar la retroalimentación regular que sea. La equivalencia entre sistemas relacionados mediante una retroalimentación regular es legítima siempre y cuando esta sea invertible en alguna región S del espacio de estado y, por lo tanto, las técnicas de control desarrolladas para uno de los sistemas son válidas para el otro sistema en S .

Como se puede observar, los sistemas lineales (3.30) y (3.69) son exactamente iguales, donde el proceso de linealización para cada modelo (simplificado y refinado) es similar. El sistema lineal que es equivalente a los sistemas extendidos de cada uno de los modelos esta dado en la forma canónica de Brunowsky, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{z} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Con el vector de estado definido como

$$\mathbf{z} = \left(h_1 \quad h_1^{(1)} \quad h_1^{(2)} \quad h_1^{(3)} \quad h_2 \quad h_2^{(1)} \quad h_2^{(2)} \quad h_2^{(3)} \right)^T$$

y las matrices A , B y C de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3. El motor síncrono de imanes permanentes

El modelo del motor síncrono de imanes permanentes podemos obtenerlo mediante la formulación de Euler-Lagrange. Consideremos el circuito equivalente del motor síncrono de imanes permanentes que se muestra en la figura 3.4, donde i_a representa la corriente en la fase A del motor, i_b es la corriente en la fase B del motor, ω es la velocidad angular del eje del motor, v_a y v_b , representan, respectivamente, el voltaje aplicado en los devanados de la fase A y la fase B . Los parámetros R_m y L , la resistencia e inductancias en cada uno de los devanados de fase, son conocidos y constantes. N_r representa el número de polos que tiene la armadura del motor que también se supone es constante. De manera similar, la constante de par contraelectromotriz del motor K_m , la inercia de la carga del rotor J_m y la fricción viscosa B_m se suponen conocidos y constantes. La perturbación del par de carga, lo denotaremos por τ_L .

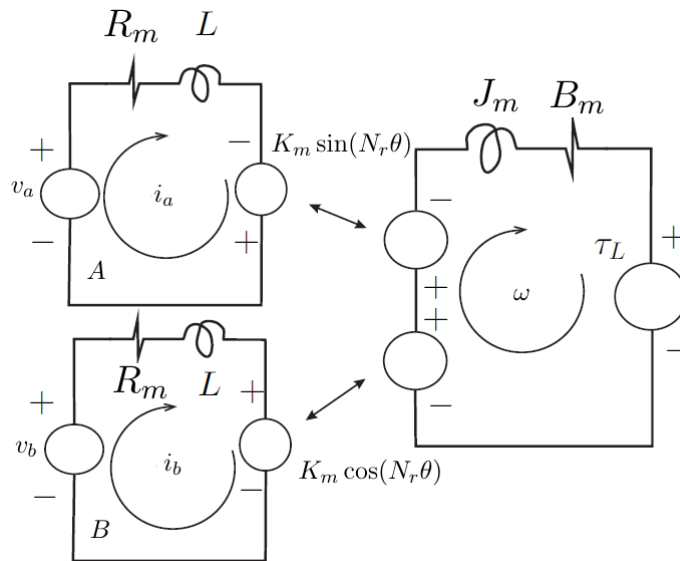


Figura 3.4: Circuito equivalente del motor síncrono de imanes permanentes.

Consideremos las siguientes relaciones que definen las corrientes i_a e i_b en términos de las variaciones de sus respectivas cargas eléctricas; q_a y q_b , y la relación de la velocidad angular ω con el ángulo mecánico medido en el eje del motor θ ,

$$i_a = \frac{dq_a}{dt}, \quad i_b = \frac{dq_b}{dt} \quad (3.73)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

La energía cinética \mathcal{K} asociada al motor, descrita en términos de las variables generalizadas $\{q_a, q_b, \theta\}$, la cual corresponde con la naturaleza mecánica del tipo rotacional y la energía electrodinámica, es

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}L\left(\frac{dq_a}{dt} + \frac{\lambda_m}{L}\cos(N_r\theta)\right)^2 + \frac{1}{2}L\left(\frac{dq_b}{dt} + \frac{\lambda_m}{L}\sin(N_r\theta)\right)^2$$

donde λ_m es una constante asociada a la densidad de flujo magnético determinada por el imán y cuyo valor cumple; $K_m = N_r\lambda_m$. Por otra parte, la energía potencial del sistema \mathcal{V} está dada como

$$\mathcal{V} = -v_a q_a - v_b q_b + \tau_L \theta$$

Obtenemos el lagrangiano el sistema tal como

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}L\left(\frac{dq_a}{dt} + \frac{\lambda_m}{L}\cos(N_r\theta)\right)^2 + \frac{1}{2}L\left(\frac{dq_b}{dt} + \frac{\lambda_m}{L}\sin(N_r\theta)\right)^2 + v_a q_a + v_b q_b - \tau_L \theta$$

La formulación de Euler-Lagrange no contempla términos disipativos que afecten al sistema, sin embargo, es importante tomarlos en cuenta en el modelo. Estos efectos son debidos: por la parte eléctrica; la resistencia R_m presente en los devanados del motor, y en la parte mecánica; la fricción viscosa B_m considerada en el modelo, de lo anterior, la función de disipación de Rayleigh es, simplemente:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2}R_m i_a^2 + \frac{1}{2}R_m i_b^2 + \frac{1}{2}B_m \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}R_m \left(\frac{dq_a}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}R_m \left(\frac{dq_b}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}B_m \dot{\theta}^2$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, tomando artificiosamente en cuenta los términos de disipación, resultan ser

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.74)$$

con $q_i = \{q_a, q_b, \theta\}$.

Así, el modelo obtenido para el motor síncrono de imanes permanentes es descrito por las siguientes ecuaciones

$$L\left(\frac{d^2 q_a}{dt^2}\right) = -R_m \left(\frac{dq_a}{dt}\right) + K_m \dot{\theta} \sin(N_r \theta) + v_a$$

$$L\left(\frac{d^2 q_b}{dt^2}\right) = -R_m \left(\frac{dq_b}{dt}\right) - K_m \dot{\theta} \cos(N_r \theta) + v_b$$

$$J_m \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2}\right) = -B_m \dot{\theta} - K_m \left(\frac{dq_a}{dt}\right) \sin(N_r \theta) + K_m \left(\frac{dq_b}{dt}\right) \cos(N_r \theta) - \tau_L$$

Sí sustituimos las relaciones (3.73) de las corrientes i_a , i_b , obtenemos las ecuaciones en términos más familiares

$$L\left(\frac{di_a}{dt}\right) = -R_m i_a + K_m \dot{\theta} \sin(N_r \theta) + v_a$$

$$L\left(\frac{di_b}{dt}\right) = -R_m i_b - K_m \dot{\theta} \cos(N_r \theta) + v_b$$

$$J_m \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2}\right) = -B_m \dot{\theta} - K_m i_a \sin(N_r \theta) + K_m i_b \cos(N_r \theta) - \tau_L$$

El modelo no lineal descrito por las ecuaciones anteriores se considera inconveniente debido a su inherente complejidad, dada, quizás, por la naturaleza trascendental de las funciones trigonométricas que entran en la descripción del sistema. Este hecho ha llevado a la denominada transformación $D-Q$, que es una transformación de coordenadas de estado parcial en combinación con una transformación

de coordenadas de la entrada. Esta transformación, que elimina las funciones trigonométricas, viene dada por

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(N_r\theta) & \sin(N_r\theta) \\ -\sin(N_r\theta) & \cos(N_r\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(N_r\theta) & \sin(N_r\theta) \\ -\sin(N_r\theta) & \cos(N_r\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix}$$

Ahora, la corriente i_d es la corriente continua e i_q es la corriente en cuadratura. Además, v_d y v_q se tratan como voltajes directo y en cuadratura, respectivamente, los cuales, actúan como las nuevas entradas de control al sistema. El sistema transformado está dado por las siguientes ecuaciones

$$L \left(\frac{di_d}{dt} \right) = -R_m i_d + N_r \dot{\theta} L i_q + v_d \quad (3.75)$$

$$L \left(\frac{di_q}{dt} \right) = -R_m i_q - (N_r L i_d + K_m) \dot{\theta} + v_q \quad (3.76)$$

$$J_m \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = K_m i_q - B_m \dot{\theta} - \tau_L \quad (3.77)$$

3.3.1. Sistema diferencialmente plano

Consideremos las ecuaciones del motor síncrono de imanes permanentes (3.75), (3.76) y (3.77), para el siguiente análisis supongamos que la perturbación del par de carga, denotado por τ_L es cero. El sistema consta de dos entradas $\{v_d, v_q\}$ y las tres variables generalizadas $\{i_q, i_d, \theta\}$. Es deseable saber si el sistema es diferencialmente plano. De acuerdo con [40] el sistema es diferencialmente plano, donde todas las variables en el sistema pueden ser completamente parametrizadas en términos de los componentes de alguna salida (h_1, h_2) y un número finito de sus derivadas, dichas componentes de la salida plana pueden elegirse como la corriente continua i_d y el ángulo mecánico medido en el eje del motor θ , es decir,

$$h_1 = i_d, \quad h_2 = \theta \quad (3.78)$$

A continuación presentamos la parametrización completa de las variables de la ecuaciones (3.75), (3.76) y (3.77) en términos de las componentes de la salida plana (h_1, h_2) y un número finito de sus derivadas

$$i_d = h_1; \quad \theta = h_2, \quad i_q = \frac{J_m}{K_m} \ddot{h}_2 + \frac{B_m}{K_m} \dot{h}_1$$

además, la parametrización de las entradas es

$$v_d = L \dot{h}_1 + R_m h_1 - N_r L \dot{h}_2 \left(\frac{J_m}{K_m} \ddot{h}_2 + \frac{B_m}{K_m} \dot{h}_1 \right)$$

$$v_q = \frac{L J_m}{K_m} h_2^{(3)} + \frac{L B_m}{K_m} \ddot{h}_2 R_m \left(\frac{J_m}{K_m} \ddot{h}_2 + \frac{B_m}{K_m} \dot{h}_1 \right) + N_r \dot{h}_2 h_1 + K_m \dot{h}_2$$

Es claro que, gracias a que se tiene una representación explícita de las entradas de control en términos de las componentes de la salida plana el sistema se puede representar como un sistema lineal totalmente desacoplado, de la forma

$$\dot{h}_1 = v_1, \quad h_2^{(3)} = v_2 \quad (3.79)$$

Con

$$v_1 = \frac{1}{L} v_d - \frac{R_m}{L} h_1 + N_r \dot{h}_2 \left(\frac{J_m}{K_m} \ddot{h}_2 + \frac{B_m}{K_m} \dot{h}_1 \right)$$

$$v_2 = \frac{K_m}{LJ_m} v_q - \frac{B_m}{J_m} \ddot{h}_2 - \frac{R_m}{L} \ddot{h}_2 - \frac{R_m B_m}{LJ_m} \dot{h}_1 - \frac{N_r K_m}{LJ_m} \dot{h}_2 h_1 - \frac{K_m^2}{LJ_m} \dot{h}_2$$

A continuación, mostraremos que el sistema, en efecto, también es linealizable de forma exacta mediante retroalimentación y transformación de coordenadas.

3.3.2. Linealización exacta mediante retroalimentación y transformación de coordenadas

Dado que el modelo del motor síncrono de imanes permanentes descrito por las ecuaciones (3.75), (3.76) y (3.77) es plano, es posible aplicar la técnica de linealización exacta mediante retroalimentación y transformación de coordenadas. Primeramente, es preciso expresar el sistema en forma de espacio de estados mediante ecuaciones del tipo (2.1), definido en \mathbb{R}^4 . La representación se expresa a continuación

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}) = i_q \\ y_2 &= h_2(\mathbf{x}) = \theta \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde el vector de estado está definido como

$$\mathbf{x} = (i_d \quad i_q \quad \theta \quad \dot{\theta})^T$$

las entradas de nuestro sistema son: el voltaje directo: $u_1 = v_d$, y el voltaje de cuadratura: $u_2 = v_q$. Los campos vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ se describen como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{R_m}{L}i_d + N_r\dot{\theta}i_q \\ -\frac{R_m}{L}i_q - N_r\dot{\theta}i_d - \frac{K_m}{L}\dot{\theta} \\ \dot{\theta} \\ \frac{K_m}{J_m}i_q - \frac{B_m}{J_m}\dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es linealizable de forma exacta por retroalimentación de estado estático regular ya que su matriz de desacoplo que está dada como

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{g_1}h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2}h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1}L_f^2h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2}L_f^2h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{K_m}{LJ_m} \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

es no singular para todo \mathbf{x} en \mathbb{R}^4 y tiene un grado relativo (vector) $\{r_1, r_2\} = \{1, 3\}$, cumpliéndose la igualdad $r_1 + r_2 = n$, con n la dimensión del espacio de estados.

Proponemos una retroalimentación de la forma (2.10), tal como

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (3.82)$$

con $\mathbf{u} = u_1 \quad u_2^T$, $\mathbf{v} = v_1 \quad v_2^T$ y, con

$$\alpha(\mathbf{x}) = -A(\mathbf{x})^{-1}b(\mathbf{x}), \quad \beta(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})^{-1}$$

donde $b(\mathbf{x})$ es de la forma (2.5), es decir,

$$b(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_f h_1(\mathbf{x}) \\ L_f^3 h_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_m}{L}i_d + N_r\dot{\theta}i_q \\ -\frac{R_m K_m}{LJ_m}i_q - \frac{N_r K_m}{J_m}\dot{\theta}i_d - \frac{K_m^2}{LJ_m}\dot{\theta} - \frac{B_m K_m}{J_m^2}i_q + \left(\frac{B_m}{J_m}\right)^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

La transformación de coordenadas

$$\xi_1^1 = h_1(\mathbf{x}), \quad \xi_k^2 = L_f^{k-1} h_2(\mathbf{x}) = h_2^{(k-1)}(\mathbf{x})$$

con $k = 1, 2, 3$, junto con la retroalimentación (3.82) aplicadas al sistema (3.80) producen un sistema caracterizados por 2 conjuntos de ecuaciones totalmente desacopladas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^1 &= v_1 \\ y_1 &= \xi_1^1 \end{aligned} \tag{3.83}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^2 &= \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_2^2 &= \xi_3^2 \\ \dot{\xi}_3^2 &= v_2 \\ y_2 &= \xi_1^2 \end{aligned} \tag{3.84}$$

que claramente, son congruentes al conjunto de sistemas lineales (3.79).

Ahora, hagamos ciertas consideraciones. Es claro que para tener una equivalencia entre los sistemas lineales (3.83) y (3.84) con el sistema (3.80) se debe tener un total conocimiento de la retroalimentación (3.82) y, por lo tanto, tener acceso a la medición de todas las componentes del vector de estado \mathbf{x} , sin embargo, en muchos casos de la práctica, esto no es posible o a veces resulta más práctico dejar la estimación de dichos parámetros a ciertas estrategias de control como lo es el controlador ADRC, véase [41], [42], o, como se verá en este trabajo, el controlador GPI robusto.

Consideremos nuevamente la retroalimentación (3.82), podemos ver que la matriz $\alpha(\mathbf{x})$ es la única que depende de las componentes del vector de estado \mathbf{x} , siendo las entradas de la matriz $\beta(\mathbf{x})$ parámetros constantes, esto resulta ser una ventaja, ya que podemos ignorar el desempeño de la matriz $\alpha(\mathbf{x})$ en la retroalimentación (3.82), al hacer esto, evidentemente ya no hay una equivalencia total entre los sistemas lineales (3.83) y (3.84) con el sistema (3.80), no obstante, podemos escribir los sistemas lineales en un esquema de entrada-salida en una versión perturbada de la forma (2.41), los cuales se muestran a continuación

$$\dot{y}_1 = v_1 + \xi_1(t) \tag{3.85}$$

$$y_2^{(3)} = v_2 + \xi_2(t) \tag{3.86}$$

Los términos $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ representan los términos la matriz $\alpha(\mathbf{x})$ que han sido ignorados. los controles v_1 y v_2 están dados en términos de las entradas de control v_d y v_q como

$$v_1 = \frac{1}{L} v_d, \quad v_2 = \frac{K_m}{L J_m} v_q \tag{3.87}$$

3.4. Acoplamiento de los motores al modelo simplificado de la grúa viajera

Se quiere acoplar los motores síncronos de imanes permanentes al sistema de la grúa viajera, de esta forma, siendo los actuadores del sistema. Consideremos el modelo simplificado de la grúa viajera estudiado en la sección 3.1.1, supongamos que se acopla un motor a cada una de las ruedas del carro y un motor al cilindro que enrolla el cable para la elevación de la carga, ambos sin un acoplamiento de alguna transmisión mecánica. Es claro que la acción de los motores acoplados a las ruedas se verá reflejada directamente en un desplazamiento a lo largo del eje horizontal donde se mueve el carro, representado por x . Por otra parte, una acción del motor acoplado al cilindro de enrollamiento se verá reflejada directamente en una variación en la longitud del cable denotada por ρ . Podemos relacionar

los ángulos mecánicos θ_o medidos en el eje de los motores acoplados a las ruedas con el desplazamiento x mediante:

$$\theta_o = \frac{x}{R_o} \quad (3.88)$$

donde R_o es el radio de las ruedas. Es claro que ambos motores están sincronizados en la posición angular ya las ruedas del carro tienen el mismo radio y comparten el mismo desplazamiento. De manera análoga, la relación entre el ángulo mecánico θ_c medido en el eje del motor acoplado al cilindro de enrollamiento con la longitud del cable ρ , está dada como

$$\theta_c = \frac{\rho}{R} \quad (3.89)$$

con R el radio del cilindro. Ahora, sabemos que los dos motores acoplados a las ruedas del carro ejercen ciertos pares mecánicos en las ruedas, los cuales se ven reflejados como una fuerza F que actúa en el carro, y que en el modelo simplificado de la grúa viajera visto en la subsección 3.1.1 dicha fuerza fue considerada como una de las entradas de control del sistema, la relación entre la fuerza que actúa sobre el carro y los pares mecánicos τ_{o1} y τ_{o2} que ejercen los motores respectivamente a cada una de las ruedas está dada como

$$F = \frac{\tau_{o1}}{R_o} + \frac{\tau_{o2}}{R_o} \quad (3.90)$$

Ahora, la relación entre el par mecánico τ_c ejercido por el motor acoplado a cilindro de enrollamiento y el par mecánico τ considerado como una de las entradas de control del sistema de la grúa viajera, considerando que no hay transmisión mecánica, es simplemente

$$\tau = \tau_c \quad (3.91)$$

De esta manera, podemos relacionar todas las variables que comparten los motores acoplados, a sus respectivas entradas de control y variables del estado, con el modelo de la grúa viajera. Es claro que se puede hacer un acoplamiento directo de los modelos de los motores con el modelo de la grúa viajera, de esta forma, obtener un solo sistema que considera la parte mecánica y la parte eléctrica, sin embargo, hay dos desventajas importantes. La primera es que; los sistemas que representan los modelos (simplificado y refinado) de la grúa viajera, necesitan de una extensión dinámica para poder llevar a cabo su linealización exacta y, por lo tanto, la necesidad de definir nuevos canales de entrada que ya no se relacionan directamente con las variables disponibles de los motores. La segunda es que; no podemos intentar una retroalimentación dinámica endógena al sistema completo, ya que, como podemos notar, las nuevas entradas de control del sistema completo, serían los voltajes de control de cada uno de los motores, donde, para reducir el sistema y más importante, aislar los canales para así, aplicar el algoritmo de extensión dinámica, situación que no es posible, ya que una retroalimentación de estado estático regular no afectará la dinámica asociada a la parte mecánica, en vista de que no existen canales de entrada que afecten directamente a esta parte. Por último, no podemos considerar más entradas que salidas disponibles en el sistema, siendo una condición importante para la planitud diferencial y la linealización exacta por retroalimentación.

Por otra parte, consideraremos llevar a cabo el control de ambos sistemas mediante un control de alto nivel para el control de la grúa viajera, donde, la posición horizontal el carro y la longitud del cable servirán como trayectorias de referencia para un controlador de bajo nivel para cada uno de los motores. En el siguiente capítulo se abordará con detalle el diseño y las simulaciones de los sistemas por la vía computacional.

3.5. Resumen del capítulo

En este capítulo se expone el desarrollo completo de la linealización exacta por retroalimentación para dos modelos de la grúa viajera; simplificado y refinado. Se obtiene el modelo simplificado de la grúa viajera derivado mediante la formulación de Euler-Lagrange. Se demuestra que el sistema descrito

por las ecuaciones dinámicas obtenidas es diferencialmente plano. Se inicia el proceso de linealización exacta expresando al sistema en el espacio de estados mostrando que el sistema no es linealizable por retroalimentación de estática del estado. Se propone una retroalimentación regular con el propósito de aislar los canales de entrada para aplicar el algoritmo de extensión dinámica, una vez hecho esto, se aplica dos veces el algoritmo de extensión dinámica, dando como resultado un sistema extendido que es linealizable por retroalimentación de estado estático regular. Se obtiene así, un sistema lineal y controlable el cual está descrito en la forma canónica de Brunowsky. Después, se considera el modelo refinado de la grúa viajera y se procede a realizar un tratamiento similar al primer modelo de la grúa viajera, con el objetivo de obtener un sistema lineal y controlable que sea equivalente al sistema extendido de ese modelo. Se propone un tratamiento adicional mediante la adición de una nueva retroalimentación regular con el objetivo de reubicar la singularidad presente en la matriz de desacoplo del primer sistema extendido resultante. Se modela y obtiene el modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$, luego de aplicar una transformación de coordenadas de estado parcial a las ecuaciones de naturaleza trigonométricas obtenidas de la formulación de Euler-Lagrange. Se muestra que el modelo del motor es diferencialmente plano y se obtiene una linealización exacta del mismo. Por último, se aborda el problema del acoplamiento de los motores al modelo mecánico de la grúa viajera, obteniendo las relaciones entre las variables del sistema mecánico (grúa) y el sistema electro-mecánico (motores).

Capítulo 4

Estrategia de control

Como vimos en el capítulo anterior, dado que los modelos (simplificado y refinado) construidos para la grúa viajera resultan ser planos, es posible linealizarlos de forma exacta mediante una retroalimentación dinámica endógena. Fue posible encontrar un sistema lineal y controlable que es totalmente equivalente al sistema extendido del modelo de la grúa viajera, es decir, existe un difeomorfismo, invertible, que permite ir del modelo extendido al modelo lineal y viceversa. Además, existe un isomorfismo invertible entre el sistema original de cada uno de los modelos y el sistema lineal de estos mismos. Dicho lo anterior, el problema de control para cada uno de los modelos de la grúa viajera se reduce a controlar un sistema lineal, por lo que es evidente que el uso de una estrategia de control para sistemas lineales resultaría eficiente, sin la necesidad de utilizar un controlador robusto que estime posibles no linealidades ignoradas al momento de construir el modelo a controlar, ya que como se menciona, el sistema extendido es totalmente equivalente a un sistema lineal y gozan de la misma naturaleza. No obstante, es posible proponer un esquema de control GPI robusto que está basado en ignorar dinámicas internas y tratarlas como perturbaciones endógenas.

En este capítulo, se utilizará un esquema de control GPI robusto a la linealización exacta de los sistemas considerados en este trabajo (mecánico y electro-mecánico). La ventaja de utilizar este esquema de control es que permite la estimación y, la cancelación de perturbaciones externas (exógenas) al sistema. Además, es posible en muchos casos, aplicarlo a sistemas no lineales que no pueden ser linealizados de forma exacta, optando por una linealización aproximada del modelo no lineal en alguna región de un punto de operación del sistema, siempre y cuando la linealización aproximada sea controlable. De esta forma, se pretende obtener un esquema lineal del sistema, desde un punto de vista de entrada-salida basado en la planitud diferencial de sistemas lineales. El controlador GPI robusto este es capaz de estimar las no linealidades ignoradas en la linealización aproximada considerándolas como perturbaciones acotadas externas al sistema, dando como resultado un buen desempeño del sistema en lazo cerrado. Trabajos muy interesantes sobre esquemas de control robusto en el enfoque de una linealización aproximada pueden verse en [43], [44], [45]. Además, como se vio anteriormente, el control GPI evita la necesidad de utilizar observadores de estado asintóticos, empleando a su vez, reconstructores integrales cuando no se tiene acceso a la medición de los estados del sistema y solo se tiene disponible la medición de la salida. Otra ventaja es que la aplicación de este esquema de control resulta ser bastante simple. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, *no* tenemos la necesidad de estimar alguna no linealidad ignorada en nuestro sistema lineal, pero aprovecharemos la robustez y la simplicidad de construcción que ofrece el controlador GPI en su versión robusta.

4.1. Esquema de control GPI robusto aplicado a la linealización exacta del modelo simplificado de la grúa viajera

4.1.1. Diseño del controlador

Consideremos el sistema lineal (3.30) que es isomórfico al sistema original del modelo simplificado de la grúa viajera, el cual se trata de un sistema caracterizado por 2 conjuntos de ecuaciones lineales,

desacopladas, de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i &= \xi_3^i \\ \dot{\xi}_3^i &= \xi_4^i \\ \dot{\xi}_4^i &= w_i\end{aligned}$$

$$y_i = \xi_1^i$$

con $i = 1, 2$. Claramente el sistema es plano y se puede escribir como dos sistemas de integración de orden 4, es decir,

$$y_1^{(4)} = w_1, \quad y_2^{(4)} = w_2 \quad (4.1)$$

Dado que los dos sistemas considerados son del mismo orden, construiremos un controlador GPI robusto para uno de ellos y, este mismo controlador se aplicará a ambos subsistemas. Consideremos uno de los sistemas y supongamos que se desea seguir una trayectoria de referencia y_i^* , donde solo se tiene acceso a la medición de la salida plana del sistema y_i . La dinámica del error de seguimiento correspondiente a la trayectoria y_i^* viene dada por

$$e_{y_i}^{(4)} = e_{w_i}, \quad e_{y_i} = y_i - y_i^*, \quad e_{w_i} = w_i - w_i^*, \quad w_i^* = [y_i^*]^{(4)}$$

Proponemos un controlador lineal por retroalimentación completa del estado para la dinámica del error de seguimiento del sistema, tal como

$$e_{w_i} = -k_7^i e_{y_i}^{(3)} - k_6^i \ddot{e}_{y_i} - k_5^i \dot{e}_{y_i} - k_4^i e_{y_i} \quad (4.2)$$

Sin embargo, no tenemos acceso a las derivadas temporales del error de seguimiento. Sin necesidad de implementar un observador de estado para la estimación de los estados $e_{y_i}^{(3)}$, \ddot{e}_{y_i} y \dot{e}_{y_i} , podemos estimar estados mismos mediante el uso de los siguientes reconstructores integrales, véase (2.31) y, haciendo uso de la notación (2.34), está dados por:

$$\widehat{e_{y_i}^{(3)}} = \int e_{w_i}, \quad \widehat{\ddot{e}_{y_i}} = \int^{(2)} e_{w_i}, \quad \widehat{\dot{e}_{y_i}} = \int^{(3)} e_{w_i}$$

Dichos reconstructores integrales producen errores clásicos debido a las condiciones iniciales desconocidas (constante, tipo rampa, parabólico), generado por al proceso de integración. La máxima potencia de los errores en función de t , como una perturbación clásica, se puede predecir fácilmente y, dado el orden máximo de tal potencia, se propone concordantemente el número de integrales reiteradas de compensación a base del error de seguimiento.

Con el propósito de superar asintóticamente los efectos de los errores cometidos en la estimación de las derivadas del error de seguimiento, se hace el uso de términos de compensación integral reiterada del error de salida, sabiendo que un término integral compensa un error constante, dos integrales reiteradas compensan un error tipo rampa, tres integrales reiteradas compensan un error cuadrático, etc. Para mejorar la robustez del controlador es conveniente añadir un término integral extra del error de salida, de cuarto orden, con el fin de suprimir posibles perturbaciones adicionales, de un orden superior al error de mayor orden introducido por los reconstructores integrales, dicho esto, el controlador lineal propuesto queda modificado de la siguiente manera

$$e_{w_i} = -k_7^i \widehat{e_{y_i}^{(3)}} - k_6^i \widehat{\ddot{e}_{y_i}} - k_5^i \widehat{\dot{e}_{y_i}} - k_4^i e_{y_i} - k_3^i \left(\int e_{y_i} \right) - k_2^i \left(\int^{(2)} e_{y_i} \right) - k_1^i \left(\int^{(3)} e_{y_i} \right) - k_0^i \left(\int^{(4)} e_{y_i} \right) \quad (4.3)$$

donde el conjunto de coeficientes constantes $\{k_7^i, k_6^i, k_5^i, k_4^i, k_3^i, k_2^i, k_1^i, k_0^i\}$ debe elegirse para garantizar la estabilidad asintótica del error de seguimiento e_{y_i} .

La dinámica del error de seguimiento del sistema en lazo cerrado viene dada por,

$$\begin{aligned}
e_{y_i}^{(4)} &= -k_7^i \left(\int e_{w_i} \right) - k_6^i \left(\int^{(2)} e_{w_i} \right) - k_5^i \left(\int^{(3)} e_{w_i} \right) - k_4^i e_{y_i} \\
&- k_3^i \left(\int e_{y_i} \right) - k_2^i \left(\int^{(2)} e_{y_i} \right) - k_1^i \left(\int^{(3)} e_{y_i} \right) - k_0^i \left(\int^{(4)} e_{y_i} \right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

De (2.36), podemos reescribir, después de definir

$$z_1^i = \left(\int e_{y_i} \right) + \frac{k_2^i}{k_3^i} \left(\int^{(2)} e_{y_i} \right) + \frac{k_1^i}{k_3^i} \left(\int^{(3)} e_{y_i} \right) + \frac{k_0^i}{k_3^i} \left(\int^{(4)} e_{y_i} \right)$$

tal como

$$e_{y_i}^{(4)} = -k_7^i e_{y_i}^{(3)} - k_6^i \ddot{e}_{y_i} - k_5^i \dot{e}_{y_i} - k_4^i e_{y_i} - k_3^i z_1^i \tag{4.5}$$

con

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1^i &= e_{y_i} + \frac{k_2^i}{k_3^i} z_2^i, & z_1^i(0) &= -\frac{k_7^i}{k_3^i} e_{y_i}^{(3)}(0) \\
\dot{z}_2^i &= e_{y_i} + \frac{k_1^i}{k_2^i} z_3^i, & z_2^i(0) &= -\frac{k_6^i}{k_2^i} e_{y_i}^{(3)}(0) - \frac{k_7^i}{k_2^i} e_{y_i}^{(2)}(0) \\
\dot{z}_3^i &= e_{y_i} + \frac{k_0^i}{k_1^i} z_4^i, & z_3^i(0) &= -\frac{k_5^i}{k_1^i} e_{y_i}^{(3)}(0) - \frac{k_6^i}{k_1^i} e_{y_i}^{(2)}(0) - \frac{k_7^i}{k_1^i} e_{y_i}^{(1)}(0) \\
\dot{z}_4^i &= e_{y_i}
\end{aligned}$$

Se encuentra que el polinomio característico del sistema (4.5) es

$$p(s) = s^8 + k_7^i s^7 + k_6^i s^6 + k_5^i s^5 + k_4^i s^4 + k_3^i s^3 + k_2^i s^2 + k_1^i s + k_0^i \tag{4.6}$$

cuyas raíces se garantiza que se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo, dicho esto, proponemos a nuestro polinomio característico como el producto de cuatro polinomios Hurwitz de segundo orden

$$s^8 + k_7^i s^7 + k_6^i s^6 + k_5^i s^5 + k_4^i s^4 + k_3^i s^3 + k_2^i s^2 + k_1^i s + k_0^i = (s^2 + 2\zeta_i \omega_n^i s + (\omega_n^i)^2)^4$$

Podemos obtener los coeficientes del polinomio característico a través de los valores de ζ_i y ω_n^i , tal como

$$\begin{aligned}
k_0^i &= (\omega_n^i)^8 \\
k_1^i &= 8\zeta_i (\omega_n^i)^7 \\
k_2^i &= 24\zeta_i^2 (\omega_n^i)^6 + 4(\omega_n^i)^6 \\
k_3^i &= 24\zeta_i (\omega_n^i)^5 + 32\zeta_i^3 (\omega_n^i)^5 \\
k_4^i &= 48\zeta_i^2 (\omega_n^i)^4 + 16\zeta_i^4 (\omega_n^i)^4 + 6(\omega_n^i)^4 \\
k_5^i &= 24\zeta_i (\omega_n^i)^3 + 32\zeta_i^3 (\omega_n^i)^3 \\
k_6^i &= 24\zeta_i^2 (\omega_n^i)^2 + 4(\omega_n^i)^2 \\
k_7^i &= 8\zeta_i \omega_n^i
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Expresando el control en términos de los reconstructores integrales en su forma explícita, además de los términos integrales del error de salida

$$e_{w_i} = - \left(\int (k_7^i e_{w_i} + k_3^i e_{y_i}) \right) - \left(\int^{(2)} (k_6^i e_{w_i} + k_2^i e_{y_i}) \right) - \left(\int^{(3)} (k_5^i e_{w_i} + k_1^i e_{y_i}) \right) - \left(\int^{(4)} k_0^i e_{y_i} \right) - k_4^i e_{y_i} \tag{4.8}$$

Tomando la transformada de Laplace de (4.8), y después de algunos reordenamientos y simplificaciones, obtenemos la siguiente expresión mixta en el dominio del tiempo y en el dominio de Laplace, del controlador en forma de una red de comprensión clásica

$$w_i(t) = w_i^*(t) - \left(\frac{k_4^i s^4 + k_3^i s^3 + k_2^i s^2 + k_1^i s + k_0^i}{s(s^3 + k_7^i s^2 + k_6^i s + k_5^i)} \right) (y_i(t) - y_i^*(t)) \quad (4.9)$$

Podemos apreciar el diagrama esquemático del controlador GPI robusto para alguno de los sistemas lineales (4.1) puramente integradores de cuarto orden en la figura 4.1.

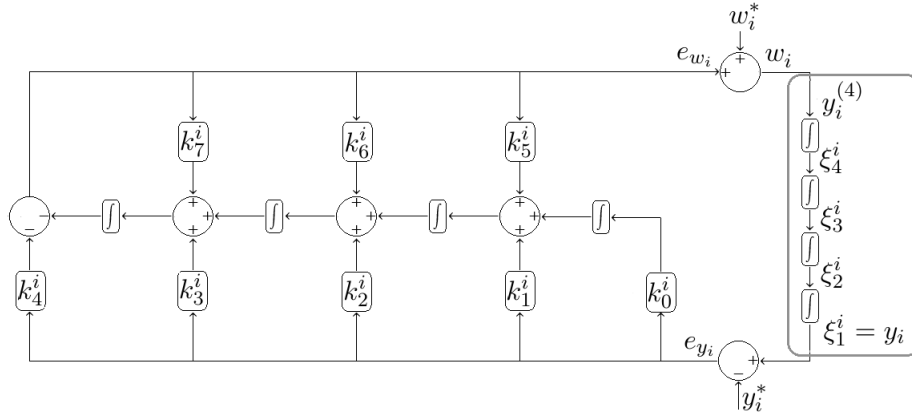


Figura 4.1: Diagrama de bloques del controlador GPI de cuarto orden con un término integral extra aplicado a un sistema puramente integrador de cuarto orden.

EL sistema en lazo cerrado de cada uno de los controladores GPI robusto junto con el sistema lineal de la forma (3.72), que es equivalente a cada uno de los sistemas extendidos (3.24) y (3.62) se puede apreciar en la figura 4.2. Nótese que el sistema lineal (3.72) se puede interpretar como dos sistemas de integración pura de cuarto orden totalmente desacoplados, es decir, sin interacción alguna. El controlador $GPI_1^{(4)}$ afecta únicamente a la salida y_1 y el controlador $GPI_2^{(4)}$ afecta únicamente a la salida y_2 , esto se debe, gracias a la solución del problema del control que no interactúa debido a la estructura que da la retroalimentación de estado estático regular tal y como se vio en la subsección 2.2.3.

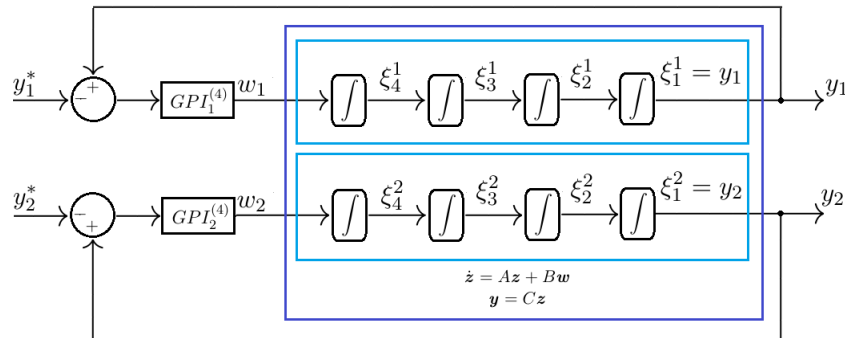


Figura 4.2: Dos controladores GPI robustos aplicados al sistema lineal equivalente al sistema extendido, el cual consiste en dos sistemas puramente integradores de cuarto orden totalmente sin interacción.

4.1.2. Simulaciones

El objetivo de control es hacer un seguimiento de trayectoria de tipo descanso-descanso, es decir, poder llevar la carga de masa m de una posición inicial a una posición final de manera suave, evitando oscilaciones pendulares en el cable o movimientos bruscos. La trayectoria es generada mediante los polinomios de Bézier de ordenes apropiados, el cálculo y la planeación de las trayectorias se muestra en el apéndice A.

Para la salida $y_1(t)$ consideramos una trayectoria de descanso a descanso tal que los valores inicial y final son

$$y_{1_i} = 0 [m], \quad y_{1_f} = 5 [m] \quad (4.10)$$

De manera similar, para la salida la salida $y_2(t)$ consideramos una trayectoria de descanso a descanso tal que los valores inicial y final son

$$y_{2_i} = 3 [m], \quad y_{2_f} = 0,5 [m] \quad (4.11)$$

ambas con un tiempo inicial y final en

$$t_i = 1 [s], \quad t_f = 8 [s] \quad (4.12)$$

La elección de que la salida y_2 no considere valores que sean iguales a cero, es debido a que la naturaleza del sistema extendido (3.24) impide valores del vector de estado $\tilde{\mathbf{x}}$ tal que $\rho = 0$, es decir, cuando la carga está en el mismo nivel horizontal que el carro. Por lo que además, proponemos como condiciones iniciales del vector de estado

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad (4.13)$$

Aunque, como se puede apreciar en los parámetros del modelo extendido (3.24), solo se tiene como parámetro la aceleración gravitacional g y, este es suficiente para lograr el objetivo de seguimiento de trayectoria, sin embargo, para poder obtener el comportamiento de las acciones de la fuerza mecánica aplicada al carro y el par mecánico para la elevación de la carga se usaran los siguientes parámetros que se presentan en la tabla 4.1.

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidad
Masa del carro	M	5	$[Kg]$
Masa de la carga	m	5	$[Kg]$
Radio del cilindro	R	0.1	$[m]$
Radio de las ruedas	R_o	0.04	$[m]$
Momento de inercia del cilindro	J	0.1	$[Kg \cdot m^2]$
Momento de inercia de las ruedas	J_o	5×10^{-3}	$[Kg \cdot m^2]$
Aceleración gravitacional	g	9.81	$[m/s^2]$

Tabla 4.1: Parámetros físicos usados en la simulación del sistema en lazo cerrado para el modelo simplificado de la grúa viajera.

Los parámetros de sintonización para cada uno de los controladores son

$$w_n^1 = 10, \quad \zeta_1 = 1 \quad (4.14)$$

$$w_n^2 = 10, \quad \zeta_2 = 1 \quad (4.15)$$

En la figura 4.3 se observa el seguimiento de trayectoria para cada una de las salidas y_1 y y_2 . Claramente, se logra el objetivo de control, con un desempeño bastante satisfactorio, las trayectorias de las salidas planas están prácticamente empalmadas con sus respectivas trayectorias de referencia sin presentar oscilaciones ni comportamientos bruscos. En la figura 4.4 se presentan las señales de las entradas de control \tilde{v}_1 y \tilde{v}_2 para el sistema lineal dado por el conjunto de ecuaciones 4.1. Notemos que el desempeño del controlador es independiente de los parámetros mecánicos mostrados en la tabla 4.1 a excepción de la aceleración gravitacional g y esta solamente definido en términos de las trayectorias de referencia, por lo que estos parámetros o un posible desajuste en ellos durante los transitorios no afectan la robustez del sistema.

En la figura 4.5 presentamos el comportamiento de las variables del error de seguimiento para cada una de las salidas y_1 y y_2 . Como se puede observar, los órdenes de magnitud de los errores de seguimiento son significativamente pequeños en comparación con las magnitudes de sus respectivas salidas,

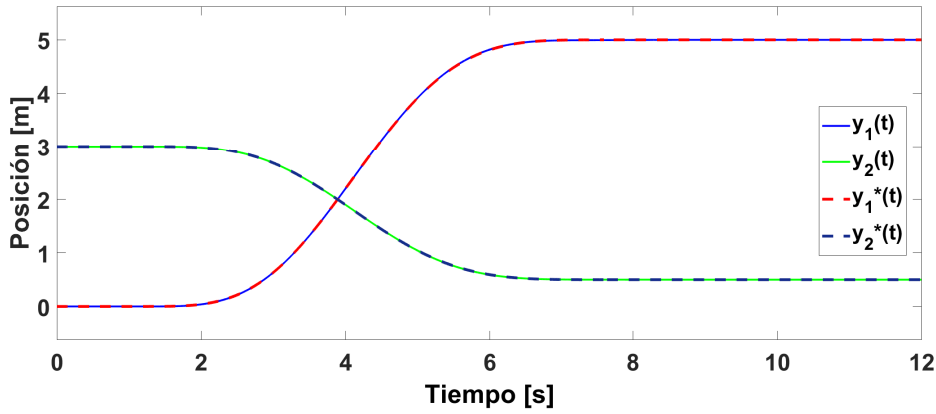


Figura 4.3: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectoria mediante la aplicación de los controladores GPI robustos al sistema extendido del modelo simplificado de la grúa viajera.

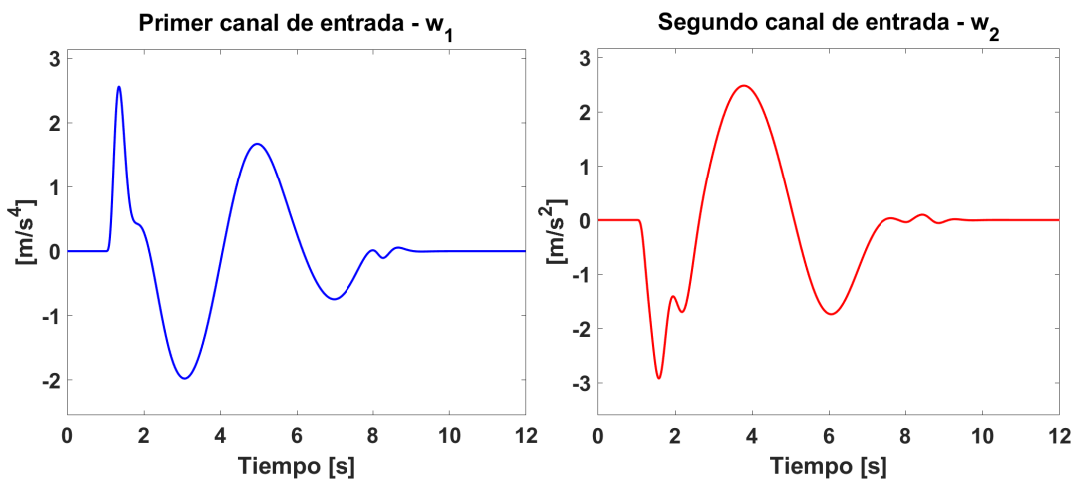


Figura 4.4: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del sistema lineal equivalente al sistema extendido del modelo simplificado de la grúa viajera.

obteniendo una magnitud del error de seguimiento de 0,003 % para la salida y_1 y una magnitud del error de seguimiento de 0,0075 % para la salida y_2 . El desempeño obtenido se debe a que el controlador GPI robusto está actuando sobre un sistema exactamente lineal, y no está siendo sometido a perturbaciones, ya sean internas (endógenas) o externas (exógenas), dado que a pesar de que el sistema (3.13) es no lineal, y a su vez, lo es el sistema extendido (3.24), el sistema extendido es completamente equivalente al sistema lineal descrito por el conjunto de ecuaciones (4.1).

En la figura 4.6 mostramos las componentes del vector de estado \mathbf{x} del sistema (3.13). Podemos ver el comportamiento de la desviación angular φ , la cual presenta un mínimo número de oscilaciones, de magnitud significativamente pequeña. Así mismo, el comportamiento del desplazamiento de carro x y la variación de la longitud de la carga ρ , se comportan como funciones suaves, sin presentar desvíos en la trayectoria al final de la maniobra. Las velocidades de los desplazamientos y la velocidad de la desviación angular reflejan el comportamiento suave de la maniobra. Debemos notar que, el sistema extendido (3.24) no depende de los parámetros mecánicos mostrados en la tabla 4.1 a excepción de la aceleración gravitacional g , tal y como se mencionó anteriormente. Por lo que, el comportamiento, tanto del vector de estado \mathbf{x} , como de las salidas y_1 y y_2 , solo depende de las trayectorias de referencia. Es claro que, el cesamiento de las oscilaciones en la desviación angular φ es únicamente debido a la acción de los controladores dado que el modelo simplificado de la grúa viajera carece de términos disipativos que pudieran ir disipando energía y, por consecuencia, el movimiento angular de la carga.

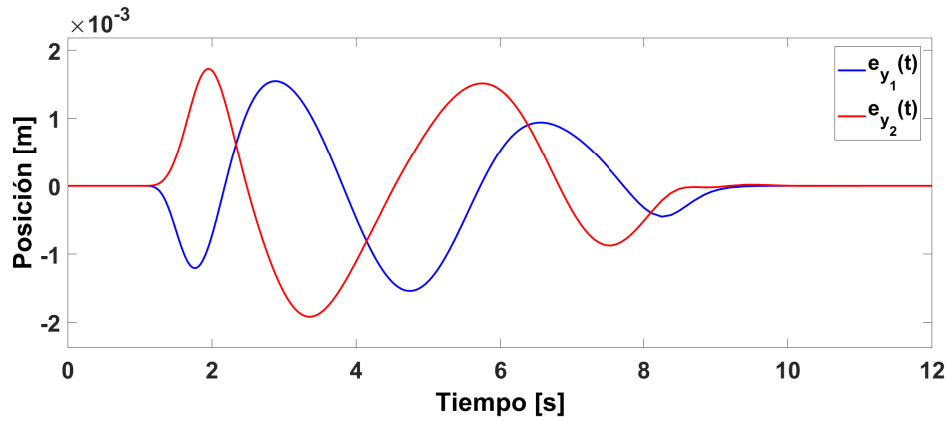


Figura 4.5: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectoria.

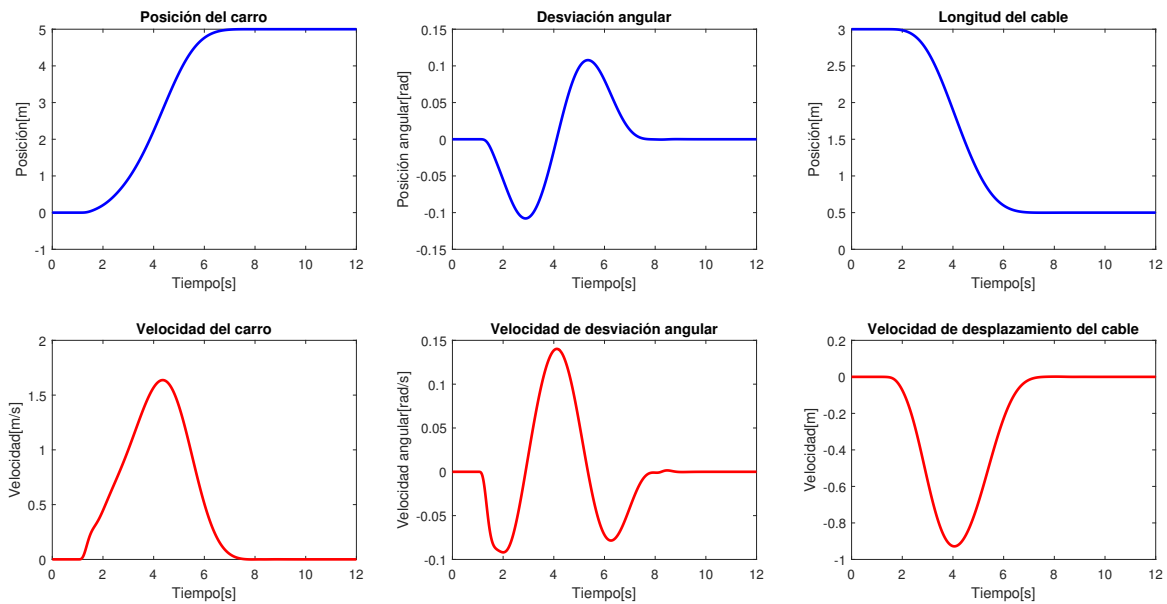


Figura 4.6: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las componentes del vector de estado \mathbf{x} del modelo simplificado de la grúa viajera.

De la retroalimentación (3.15) podemos obtener el comportamiento de la fuerza aplicada al carro F y el par mecánico τ aplicado al cilindro de enrollamiento los cuales se muestran en la figura 4.7, estas variables claramente dependen de los parámetros mecánicos de la tabla 4.1.

En la figura 4.8 mostramos el comportamiento de la relación: $\cos \varphi (g \cos \varphi - \zeta)$, vease (3.32), que define la singularidad en el difeomorfismo establecido entre el sistema lineal (3.30) y el sistema extendido (3.24). Notamos que esta se comporta alejada de valores cercanos a cero, por lo que los sistemas son equivalentes en toda la maniobra de descanso a descanso de la grúa.

En la figura 4.9 podemos observar la trayectoria de la carga y del carro de la grúa viajera en el plano (X, Z) , podemos apreciar un comportamiento pendular en el transitorio de la maniobra y una vez que se ha llegado a la posición final, la pequeña oscilación que presenta la carga, cesa, llegando a un estado de reposo.

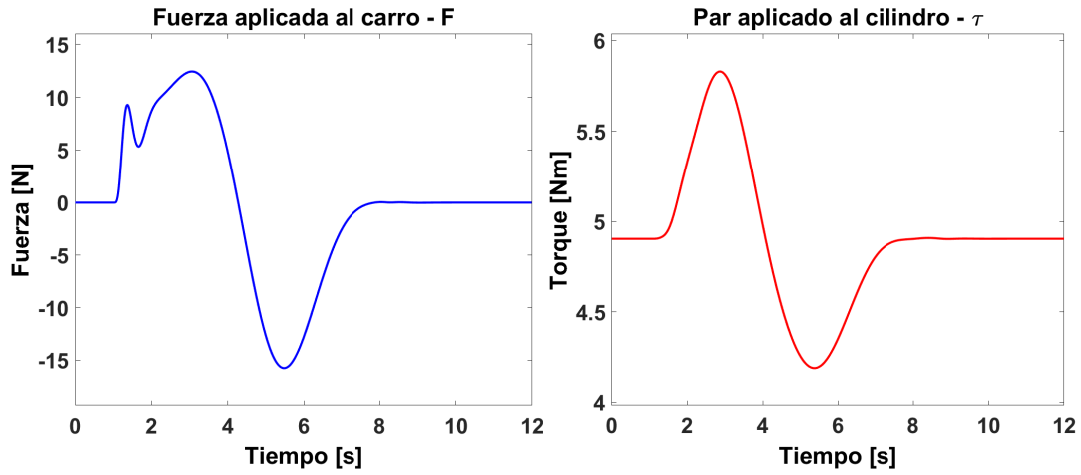


Figura 4.7: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del modelo simplificado de la grúa viajera (fuerza aplicada la carro y par mecánico aplicado al cilindro).

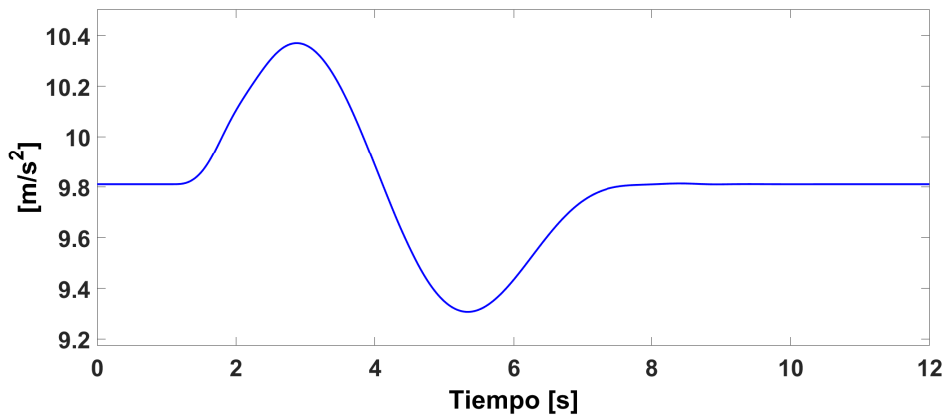


Figura 4.8: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de la singularidad del difeomorfismo establecido entre el sistema extendido y el sistema lineal que es equivalente.

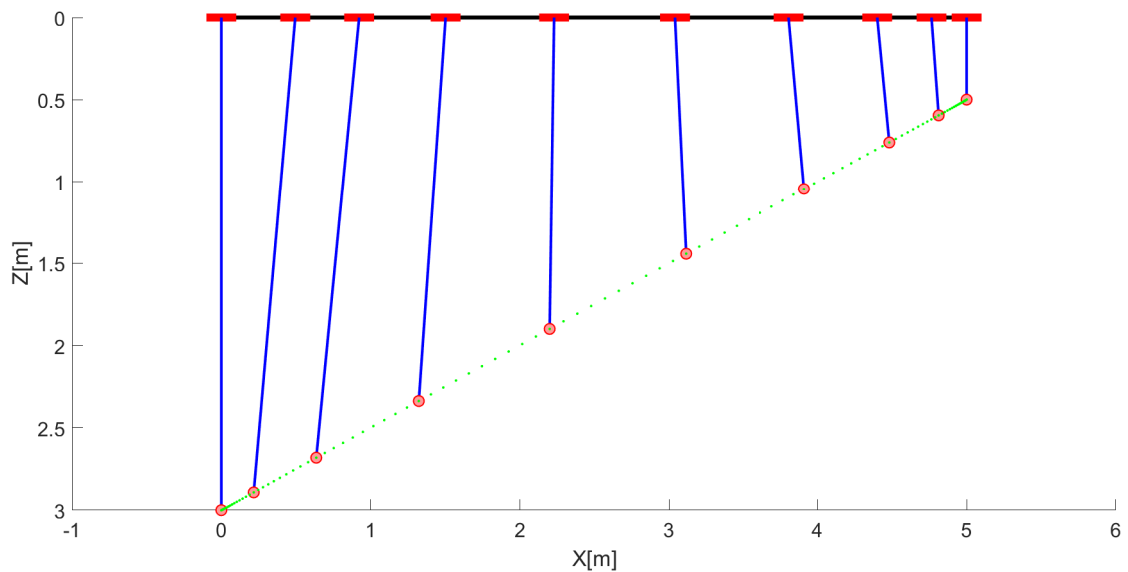


Figura 4.9: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento del carro y la carga de la grúa viajera en el plano (X, Z) .

Ahora consideremos una prueba de robustez, supongamos que sometemos al sistema a ciertas perturbaciones externas, en un sistema mecánico dichas perturbaciones son de baja frecuencia debido a la naturaleza de los sistemas mecánicos, tales que estos evolucionan de forma relativamente lenta. Normalmente este tipo de perturbaciones se ven reflejadas como fuerzas y pares mecánicos, que en muchos casos, afectan directamente a las entradas de control del sistema, en nuestro caso las perturbaciones entrarán por los canales de entrada del sistema (3.13), que son la fuerza F aplicada al carro y el par mecánico τ aplicado al cilindro de enrollamiento, sin embargo, tanto F como τ no son las entradas de control del sistema lineal (4.1) que es equivalente al sistema extendido (3.24).

Para una acción significativa en los controladores, consideremos perturbaciones de magnitud comparable a las magnitudes de la fuerza F y el par mecánico τ que actúan en el sistema, mostradas en la figura 4.7. En la figura 4.10 se muestran las perturbaciones aplicadas al sistema, donde, la perturbación $\xi_F(t)$ se suma a la fuerza F y, la perturbación $\xi_\tau(t)$ se suma al par mecánico τ .

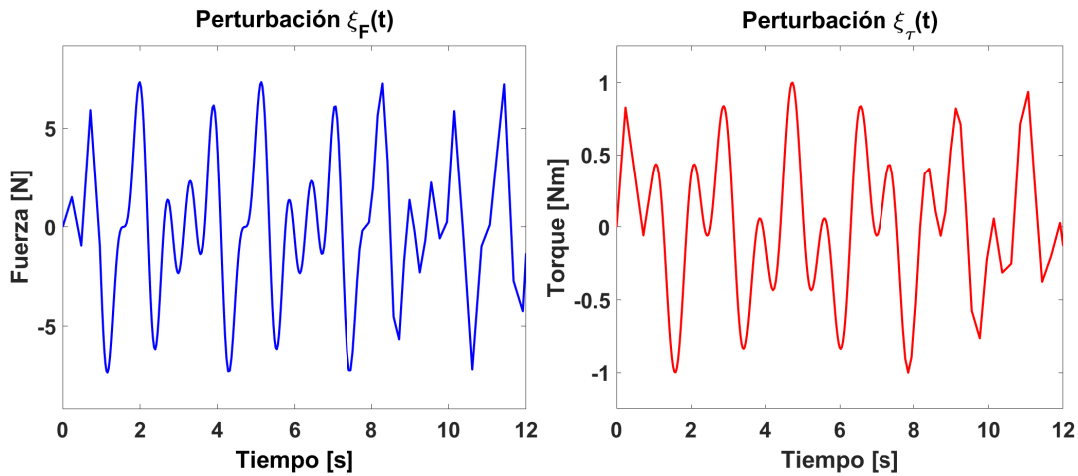


Figura 4.10: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Perturbaciones de baja frecuencia donde la perturbación $\xi_F(t)$ se suma a la fuerza F y la perturbación $\xi_\tau(t)$ se suma al par mecánico τ .

Los parámetros de sintonización se modifican con el fin de obtener un buen desempeño del sistema ante la presencia de las perturbaciones, estos se muestran a continuación:

$$w_n^1 = 20, \quad \zeta_1 = 1 \quad (4.16)$$

$$w_n^2 = 20, \quad \zeta_2 = 1 \quad (4.17)$$

En la figura 4.11 se muestra el seguimiento de trayectoria. Las perturbaciones a pesar de tener magnitudes comparables con los órdenes de la fuerza F y el par mecánico τ no reflejan una respuesta considerable en el seguimiento de trayectoria, siendo prácticamente inapreciables, sin embargo, en la figura 4.12, podemos ver una respuesta considerable de los controladores en las entradas de control \tilde{v}_1 y \tilde{v}_2 , esto se debe a la respuesta de los controladores con el fin de corregir y suprimir dichas perturbaciones, todo esto, debido a la acción integral de los controladores, donde los compensadores integrales intentan superar las perturbaciones que son desconocidas para los controladores y, dado que son acotadas, pueden modelarse ultra localmente como funciones polinomiales, recordando que los filtros planos basados en GPI, la adición de un número apropiado de integradores, dará como resultado, al menos, el mismo número de diferenciaciones respecto al tiempo de la perturbación aditiva, las cuales actúan como aniquiladores de perturbaciones.

Una evaluación desempeño del seguimiento de trayectoria se puede apreciar a partir de los errores de seguimiento mostrados en la figura 4.13. Aunque los órdenes de magnitud de los errores de seguimiento son significativamente pequeños en comparación con las magnitudes de sus respectivas salidas, es posible ver la respuesta de las perturbaciones, aunque su implicación en el seguimiento de trayectoria sea mínima. Ahora, dado que las perturbaciones acopladas al sistema son persistentes en el tiempo,

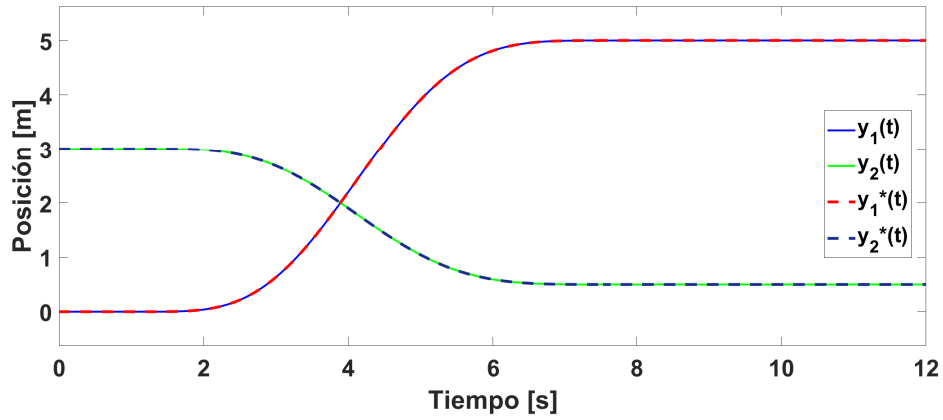


Figura 4.11: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectoria para el sistema perturbado.

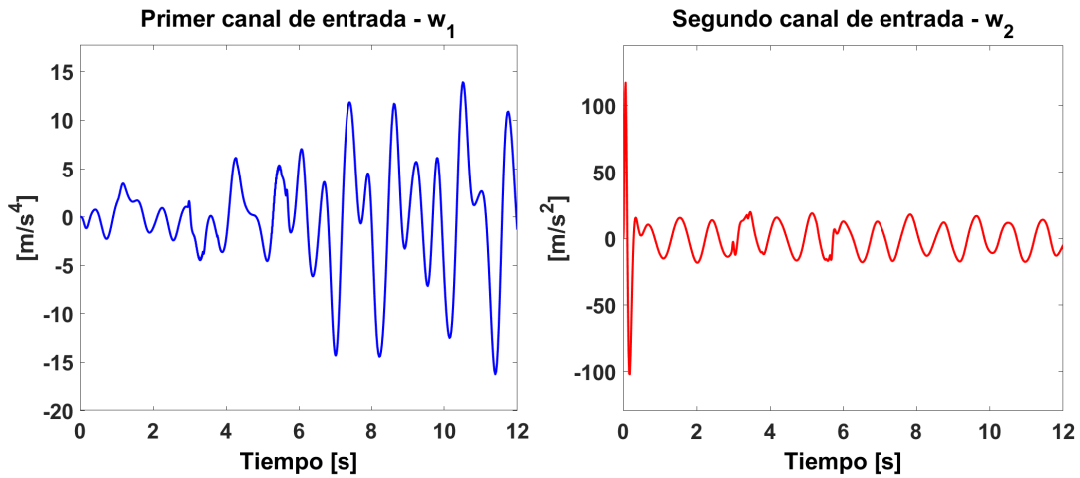


Figura 4.12: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Respuesta de los controladores GPI robustos a las perturbaciones acopladas al sistema.

no es posible llevar a los errores de seguimiento a un valor de cero, dado que dichas perturbaciones son desconocidas y por tanto no fueron modeladas en el sistema, sin embargo, como se mencionó anteriormente, los órdenes de magnitud de los errores de seguimiento son pequeños, por lo que se corrobora un buen desempeño del sistema y, por tanto, un trabajo satisfactorio de los controladores ante las perturbaciones externas, donde, aun cuando, ni siquiera, están acopladas directamente a los canales de control.

En la figura 4.14 se muestra el comportamiento de la fuerza aplicada al carro F y el par mecánico τ aplicado al cilindro de enrollamiento, donde se puede apreciar claramente la respuesta a las perturbaciones $\xi_F(t)$ y $\xi_\tau(t)$ que están acopladas directamente a F y τ , respectivamente.

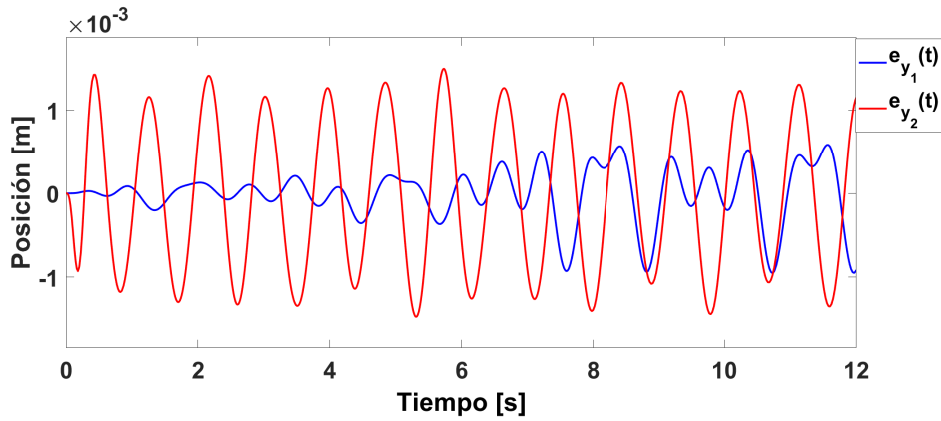


Figura 4.13: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectoria para el sistema perturbado.

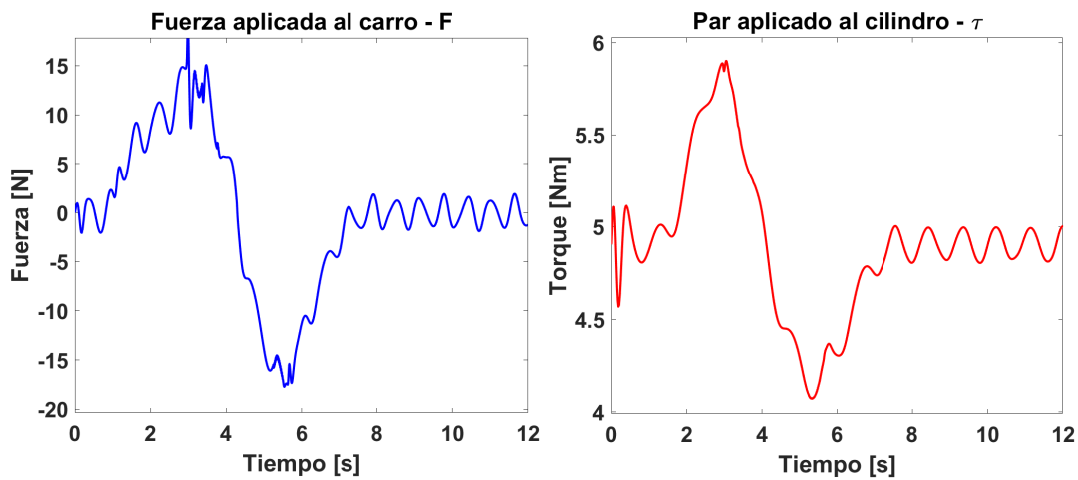


Figura 4.14: Simulaciones para el modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del modelo simplificado de la grúa viajera (fuerza aplicada la carro y par mecánico aplicado al cilindro) a las cuales se le han acoplado perturbaciones de baja frecuencia, respectivamente.

4.2. Esquema de control GPI robusto aplicado a la linealización exacta del modelo refinado de la grúa viajera

Ahora, aplicamos un esquema de control robusto al sistema lineal que es isomórfico al modelo refinado de la grúa viajera con el propósito de lograr un seguimiento de trayectoria en las salidas del sistema. Consideremos el sistema lineal (3.69), el cual, se trata de un sistema caracterizado por 2 conjuntos de ecuaciones lineales, desacopladas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i &= \xi_3^i \\ \dot{\xi}_3^i &= \xi_4^i \\ \dot{\xi}_4^i &= w_i\end{aligned}$$

$$y_i = \xi_1^i$$

con $i = 1, 2$. Claramente el sistema se puede escribir como dos sistemas lineales, puramente integradores de orden 4, es decir,

$$y_1^{(4)} = w_1, \quad y_2^{(4)} = w_2 \quad (4.18)$$

Tal y como se mencionó al final de la sección 3.2, el sistema lineal (3.69) es exactamente igual al sistema

lineal (3.30), por lo que claramente, el esquema de control desarrollado en la sección 4.1, el cual se expresado como una red clásica de compensación descrito por (4.9) es un controlador apropiado para el conjunto de sistemas (4.18). Antes de aplicar el esquema de control a los sistemas lineales y observar el desempeño de este, se harán ciertas consideraciones importantes con respecto a las relaciones entre las salidas planas de los sistemas y los parámetros del mismo sistema.

Consideremos las salidas del sistema (3.45) el cual es isomórfico al sistema extendido (3.62), las cuales se presentan nuevamente

$$y_1 = x + \rho \sin \varphi + R \cos \varphi, \quad y_2 = \rho \cos \varphi - R \sin \varphi$$

tenemos que el vector de estado \mathbf{x} del sistema (3.45) en algún punto de equilibrio está dado como

$$\mathbf{x}_{eq} = (x_{eq} \ 0 \ 0 \ 0 \ \rho_{eq} \ 0)^T$$

entonces, el valor de las salidas en el punto de equilibrio, son

$$y_1(\mathbf{x}_{eq}) = x_{eq} + R \tag{4.19}$$

$$y_2(\mathbf{x}_{eq}) = \rho_{eq} \tag{4.20}$$

Supongamos que el objetivo de control es hacer que las salidas sigan una trayectoria del tipo descanso-descanso, es decir, llevar al sistema de un punto de equilibrio hacia otro punto de equilibrio mediante el seguimiento de una trayectoria suave, por lo que, una vez terminada la trayectoria y, al superar los transitorios, el sistema se encuentra en reposo y en algún punto de equilibrio \mathbf{x}_{eq} permanentemente, hasta que se considere alguna acción adicional, por lo tanto, las salidas y_1 y y_2 toman los valores indicados en las ecuaciones (4.19) y (4.20), respectivamente.

Como se demostró en la subsección 3.2.2, las salidas $y_1 = h_1$ y $y_2 = h_2$ son componentes de un vector de salidas planas del sistema, es decir, todas las variables del sistema se pueden expresar en términos de los componentes de la salida plana y un número finito de sus derivadas, ahora, prestemos especial atención a las parametrizaciones diferenciales (3.43) y (3.44), consideremos la primera de ellas la cual se muestra a continuación

$$x = h_1 - \frac{\ddot{h}_1 h_2}{\ddot{h}_2 - g}$$

Cuando la dinámica del sistema se hace cero, es decir, cuando el sistema está en reposo y ha llegado a un punto de equilibrio; por definición; sus derivadas respecto al tiempo se hacen cero debido a la ausencia de movimiento, es decir,

$$\dot{h}_1 = \ddot{h}_1 = 0 \tag{4.21}$$

$$\dot{h}_2 = \ddot{h}_2 = 0 \tag{4.22}$$

Entonces, según (3.43), en estado en reposo y en algún punto de equilibrio

$$h_1(\mathbf{x}_{eq}) = y_1(\mathbf{x}_{eq}) = x_{eq} \tag{4.23}$$

contradiendo la condición mostrada en la ecuación (4.19). Ahora despejemos el término ρ de la parametrización diferencial (3.44), se obtiene

$$\rho = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{\ddot{h}_1 h_2}{\ddot{h}_2 - g} \right)^2} - R^2$$

De forma análoga, considerando las condiciones (4.21) y (4.22) las cuales se cumplen cuando el sistema está en reposo y ha llegado a un punto de equilibrio, obtenemos la siguiente relación

$$\rho_{eq} = \sqrt{h_2(\mathbf{x}_{eq})^2 - R^2} \quad (4.24)$$

contradiendo la condición mostrada en la ecuación (4.20). Además, podemos ver que una condición impuesta por el radical anterior es que; $h_2(\mathbf{x}_{eq})^2 - R^2 \geq 0$, debido a que se quieren soluciones reales positivas y, considerando que R el radio del cilindro de enrollamiento siempre es positivo se impone que

$$h_2(\mathbf{x}_{eq}) \geq R$$

es decir, la magnitud de la salida $y_2 = h_2$ siempre tiene que ser mayor a la magnitud del radio del cilindro de enrollamiento en el equilibrio.

Las ecuaciones (4.19) y (4.20) están en concordancia con las ecuaciones (4.23) y (4.24) respectivamente sí se cumple que; $R = 0$, esta condición no puede ser impuesta ya que la retroalimentación (3.47) es singular cuando $R = 0$ y, en consecuencia, se perdería la equivalencia entre los sistemas (3.45) y (3.48). Dicho lo anterior, para poder obtener simulaciones del comportamiento en el modelo refinado de la grúa viajera, se consideran valores muy pequeños de R , esto con el fin de demostrar las conclusiones obtenidas en este análisis, donde obviamente, dichos valores no corresponden con magnitudes de R utilizadas en la práctica.

4.2.1. Simulaciones

Al igual que en el caso del modelo simplificado de la grúa viajera se propone una trayectoria de descanso a descanso generada por polinomios de Bézier, con las mismas condiciones (4.10) y (4.11) para $y_1(t)$ y $y_2(t)$, respectivamente y con las mismas condiciones en el tiempo (4.12). Las condiciones iniciales son las mismas que se muestran en (4.13). Los parámetros físicos utilizados para las simulaciones se presentan en la tabla 4.2.

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidad
Masa del carro	M	5	[Kg]
Masa de la carga	m	5	[Kg]
Radio del cilindro	R	0.001	[m]
Radio de las ruedas	R_o	0.04	[m]
Momento de inercia del cilindro	J	0.001	[Kg · m ²]
Momento de inercia de las ruedas	J_o	5×10^{-3}	[Kg · m ²]
Aceleración gravitacional	g	9.81	[m/s ²]

Tabla 4.2: Parámetros físicos usados en la simulación del sistema en lazo cerrado para el modelo refinado de la grúa viajera.

Los parámetros de sintonización para cada uno de los controladores son

$$w_n^1 = 7, \quad \zeta_1 = 1 \quad (4.25)$$

$$w_n^2 = 7, \quad \zeta_2 = 1 \quad (4.26)$$

En la figura 4.15 se observa el seguimiento de trayectoria para cada una de las salidas y_1 y y_2 , respectivamente. A simple vista se ve que el desempeño del sistema en lazo cerrado es bastante satisfactorio, con un seguimiento de trayectoria aceptable, además de que las magnitudes de los errores de seguimiento de las salidas, mostrados en la figura 4.16, son considerablemente pequeñas en comparación con los órdenes de magnitud de sus respectivas salidas, sin embargo esto no quiere decir que el comportamiento del sistema sea el adecuado, es decir en concordancia con comportamientos esperados en la práctica real. Para empezar, consideremos el comportamiento de las componentes del vector de estado \mathbf{x} del sistema (3.45) mostrados en la figura 4.17, se pueden observar oscilaciones bruscas al inicio de

la trayectoria en la desviación angular y en todas las velocidades de los grados de libertad del sistema; $\{x, \varphi, \rho\}$, sin embargo, el comportamiento más desconcertante es que; al finalizar la maniobra, la desviación angular no toma un valor de cero, lo cual debería de ser, sí el sistema se encuentra en algún punto de equilibrio, tal y como se espera. Dicho comportamiento está muy alejado de una situación de la práctica real, ya que la carga se encuentra libre de fuerzas externas en alguna dirección distinta a la acción gravitacional, tomando en cuenta que incluso la fuerza F que actúa en dirección horizontal al carro toma valores de cero al finalizar la maniobra, y aunque los controles del sistema coloquen la desviación angular en un valor distinto de cero al finalizar la maniobra, el movimiento natural de la carga sería pendular, es decir, no se pueden mantener valores de φ y mantenerse constantemente distintos a cero correspondiente al punto de equilibrio. Este comportamiento no natural es debido a las anomalías en el modelo del sistema, las cuales fueron analizadas anteriormente.

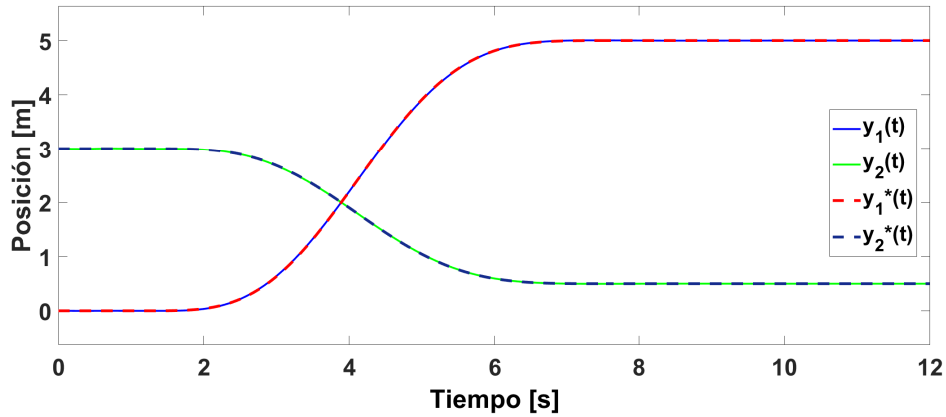


Figura 4.15: Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectoria mediante la aplicación de los controladores GPI robustos al sistema extendido del modelo refinado de la grúa viajera.

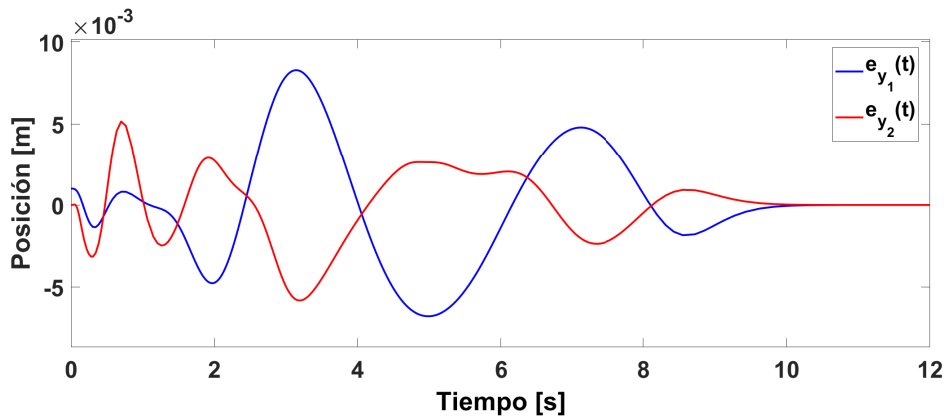


Figura 4.16: Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectoria.

En la figura 4.18 mostramos el comportamiento de las entradas de control para los sistemas lineales (4.18), podemos notar una saturación por parte de los controladores al iniciar la trayectoria debido a que intentan superar el comportamiento contradictorio del sistema. En la figura 4.19 se muestra el comportamiento de la fuerza F aplicada al carro y el par mecánico τ aplicado al cilindro de enrollamiento obtenidos según la definición de las retroalimentaciones (3.47) y (3.65), se observa una saturación considerable al inicio de la trayectoria en la fuerza F .

En la figura 4.20 se muestra el comportamiento de la relación: $\frac{(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi)(g \cos \varphi - \rho \zeta)}{\rho}$, véase (3.71), para distintos valores de R , la cual define a la singularidad en el difeomorfismo establecido entre el sistema lineal (3.69) y el sistema extendido (3.62). Se observa que conforme se consideran valores relativamente más grandes de R el valor de la relación al inicio de la trayectoria se acerca cada vez

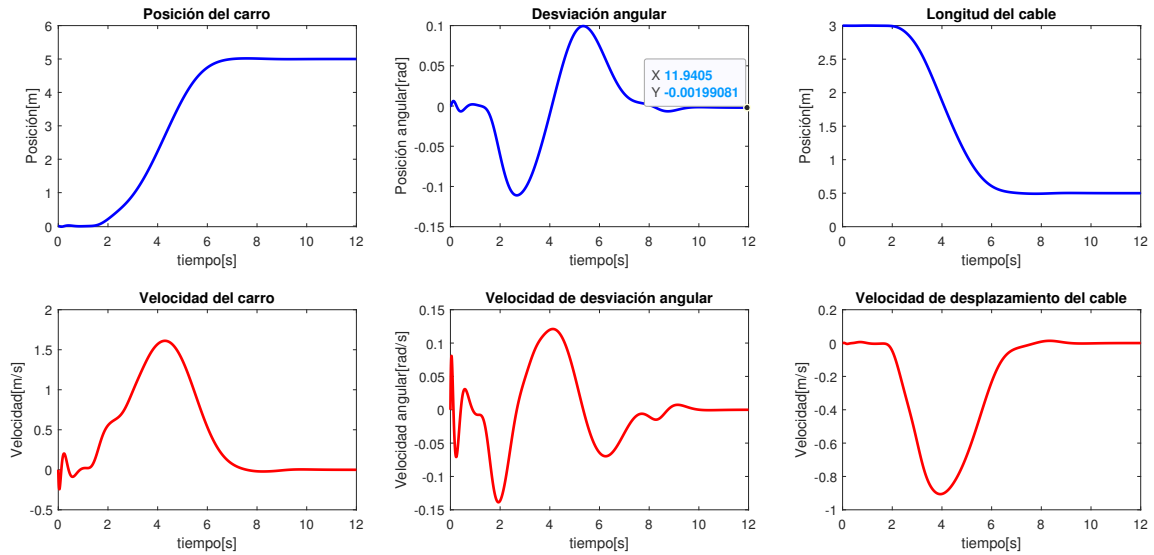


Figura 4.17: Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Comportamiento de las componentes del vector de estado x del modelo refinado de la grúa viajera.

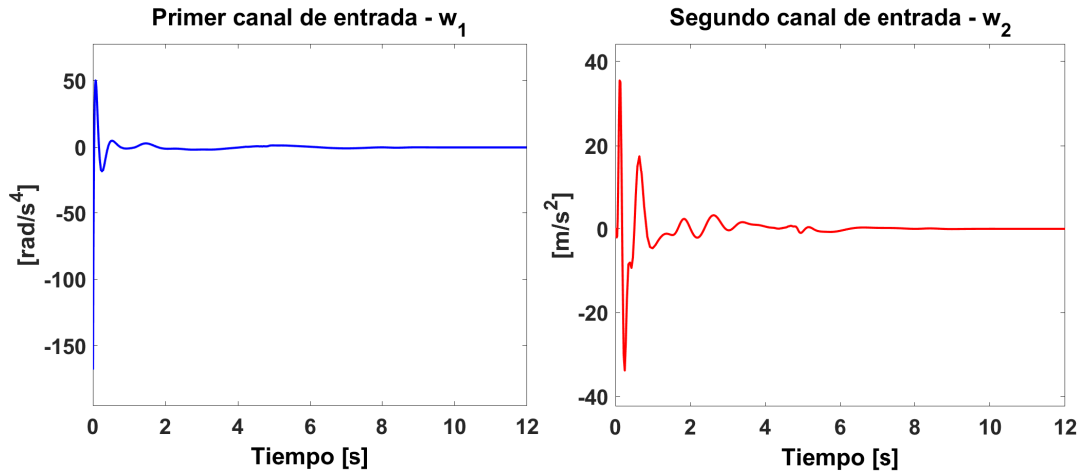


Figura 4.18: Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del sistema lineal equivalente al sistema refinado del modelo simplificado de la grúa viajera.

más a valores de cero para después converger a un valor constante, siendo que, cuando esta misma toma valores de cero, no existe ninguna equivalencia entre (3.69) y (3.62) y el difeomorfismo se vuelve inconsistente. Para valores de $R > 0,00302 m$ la equivalencia de los sistemas se rompe y no es posible obtener algún comportamiento del sistema (3.62) en lazo cerrado. Nótese que para valores de R cercanos a cero el comportamiento de la singularidad es similar al comportamiento de la singularidad en el caso del modelo simplificado de la grúa viajera, véase figura 4.8.

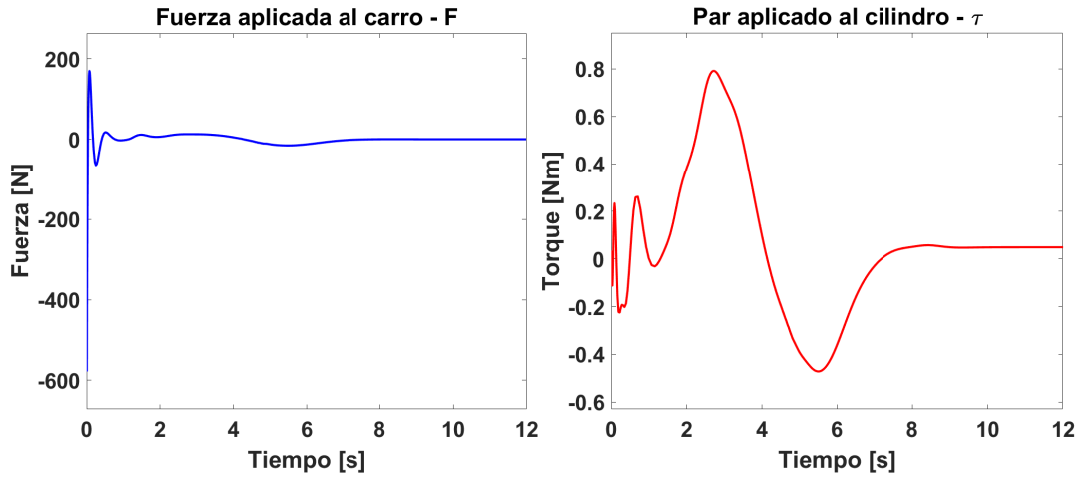


Figura 4.19: Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control del modelo refinado de la grúa viajera (fuerza aplicada la carro y par mecánico aplicado al cilindro).

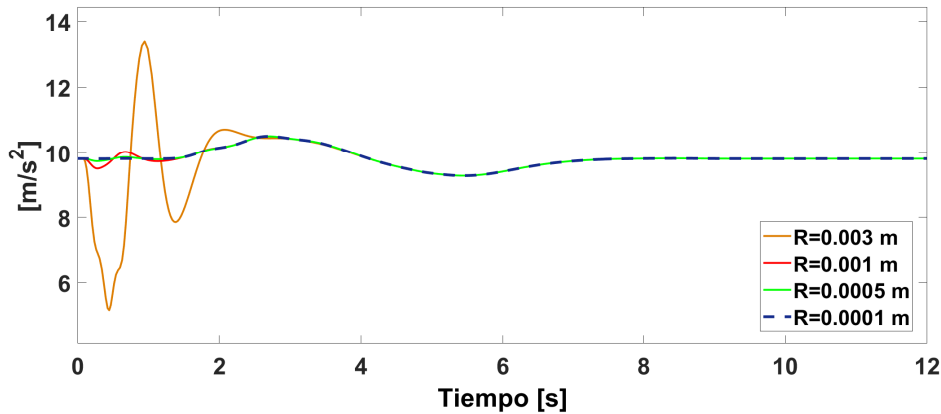


Figura 4.20: Simulaciones para el modelo refinado de la grúa viajera. Comportamiento de la singularidad del difeomorfismo establecido entre el sistema extendido del modelo refinado de la grúa viajera y el sistema lineal equivalente.

4.3. Esquema de control GPI robusto para el seguimiento de trayectoria del motor síncrono de imanes permanentes

Tal y como en el caso de la grúa viajera, el modelo del motor síncrono de imanes permanentes es un sistema que es diferencialmente plano y, por lo tanto, admite una linealización exacta por retroalimentación. En esta sección diseñaremos un esquema de control GPI robusto para los sistemas puramente integradores en una versión perturbada que describen al modelo del motor en el esquema $D-Q$, con el objetivo de lograr un seguimiento de trayectoria. Se aprovechará la robustez del esquema de control GPI robusto ante perturbaciones acotadas para un acoplamiento fácil de los motores a los actuadores de la grúa viajera.

4.3.1. Diseño del controlador

Consideremos el sistema lineal que es isomórfico al modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el esquema $D-Q$, este sistema está compuesto por 2 conjuntos de ecuaciones lineales, descritas por (3.83) y (3.84). Dichas ecuaciones lineales se pueden interpretar como dos sistemas lineales, desacoplados, puramente integradores, de la forma

$$\dot{y}_1 = v_1 \quad (4.27)$$

$$y_2^{(3)} = v_2 \quad (4.28)$$

Primeramente consideremos el sistema (4.27) y supongamos que se desea seguir una trayectoria de referencia y_1^* . La dinámica del error de seguimiento correspondiente a la trayectoria y_1^* está dada por

$$\dot{e}_{y_1} = e_{v_1}, \quad e_{y_1} = y_1 - y_1^*, \quad e_{v_1} = v_1 - v_1^*, \quad v_1^* = [y_1^*]^{(1)}$$

Proponemos un controlador con la retroalimentación del error de la salida e_{y_1} , además de añadir dos términos integrales extras del error de salida de primer y de segundo orden, esto es con el fin de hacer robusto el controlador con el fin de suprimir perturbaciones modeladas ultra localmente, el controlador queda dado de la forma

$$e_{v_1} = -k_2 e_{y_1} - k_1 \left(\int e_{y_1} \right) - k_0 \left(\int^{(2)} e_{y_1} \right) \quad (4.29)$$

La dinámica del error de seguimiento del sistema en lazo cerrado viene dada como

$$\dot{e}_{y_1} = -k_2 e_{y_1} - k_1 \left(\int e_{y_1} \right) - k_0 \left(\int^{(2)} e_{y_1} \right) \quad (4.30)$$

Podemos rescribir, después de definir

$$z = \left(\int e_{y_1} \right) + \frac{k_0}{k_1} \left(\int^{(2)} e_{y_1} \right)$$

tal como

$$\dot{e}_{y_1} = -k_2 e_{y_1} - k_1 z \quad (4.31)$$

con

$$\dot{z} = e_{y_1} + \frac{k_0}{k_1} z_1, \quad \dot{z}_1 = e_{y_1}$$

El polinomio característico del sistema (4.32) es

$$p(s) = s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0$$

cuyas raíces se garantiza se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo, dicho lo anterior, proponemos al polinomio característico como siguiente producto

$$s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 = (s^2 + 2\zeta_1 \omega_n^1 s + (\omega_n^1)^2) (s - r)$$

Podemos obtener los coeficientes del polinomio característico a través de los valores de ζ_1 , ω_n^1 y r tal como

$$k_2 = \zeta \omega_n^1 + r, \quad k_1 = (\omega_n^1)^2 + \zeta \omega_n^1 r, \quad k_0 = (\omega_n^1)^2 r \quad (4.32)$$

Tomando la transformada de Laplace de (4.29) y después de algunos reordenamientos obtenemos la siguiente expresión mixta del controlador en el dominio del tiempo y en el dominio de Laplace

$$v_1(t) = v_1^*(t) - \left(\frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2} \right) (y_1(t) - y_1^*(t)) \quad (4.33)$$

Ahora consideremos el sistema (4.28). De igual manera, la dinámica del error de seguimiento correspondiente a la trayectoria y_2^* está dada como

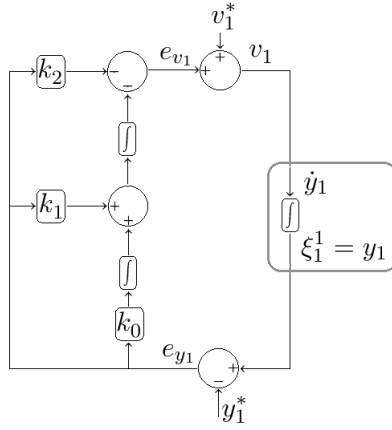


Figura 4.21: Diagrama esquemático de un controlador GPI con doble integral para el control de un sistema puramente integrador de primer orden.

$$e_{y_2}^{(3)} = e_{v_2}, \quad e_{y_2} = y_2 - y_2^*, \quad e_{v_2} = v_2 - v_2^*, \quad v_2^* = [y_2^*]^{(3)}$$

Proponemos un controlador lineal por retroalimentación completa del estado para la dinámica del error de seguimiento tal como

$$e_{v_2} = -k_5 \ddot{e}_{y_2} - k_4 \dot{e}_{y_2} - k_3 e_{y_2} \quad (4.34)$$

Para poder estimar los estados del sistema usados en el controlador hacemos uso de los siguientes reconstructores integrales, los cuales según (2.31) y haciendo uso de la notación (2.34) están dados como

$$\widehat{\ddot{e}}_{y_2} = \left(\int e_{v_2} \right), \quad \widehat{\dot{e}}_{y_2} = \left(\int^{(2)} e_{v_2} \right)$$

Como se vio en la construcción del controlador GPI, dichos reconstructores producen errores debido a las condiciones iniciales desconocidas en el proceso de integración de los reconstructores. La máxima potencia de los errores en función de t , como una perturbación clásica, se puede predecir fácilmente y, dado el orden máximo de tal potencia, se propone concordantemente el número de integrales reiteradas de compensación a base del error de seguimiento.

De igual manera, con el propósito de superar asintóticamente los efectos de los errores cometidos en la estimación de las derivadas del error de seguimiento, se hace el uso de ciertos términos de compensación integral del error de salida, además, para mejorar la robustez del controlador se añade un término integral extra del error de salida de tercer orden con el fin de suprimir posibles perturbaciones modeladas ultra localmente de un orden superior al error de mayor orden introducido por los reconstructores integrales, por lo que, el controlador lineal propuesto queda modificado de la siguiente manera

$$e_{v_2} = -k_5 \widehat{\ddot{e}}_{y_2} - k_4 \widehat{\dot{e}}_{y_2} - k_3 e_{y_2} - k_2 \left(\int e_{y_2} \right) - k_1 \left(\int^{(2)} e_{y_2} \right) - k_0 \left(\int^{(3)} e_{y_2} \right) \quad (4.35)$$

donde el conjunto de coeficientes constantes $\{k_5, k_4, k_3, k_2, k_1, k_0\}$ deben elegirse para garantizar la estabilidad asintótica del error de seguimiento. La dinámica del error de seguimiento del sistema en lazo cerrado es

$$e_{y_2}^{(3)} = -k_5 \left(\int e_{v_2} \right) - k_4 \left(\int^{(2)} e_{v_2} \right) - k_3 e_{y_2} - k_2 \left(\int e_{y_2} \right) - k_1 \left(\int^{(2)} e_{y_2} \right) - k_0 \left(\int^{(3)} e_{y_2} \right) \quad (4.36)$$

Podemos reescribir, después de definir

$$z_1 = \left(\int e_{y_2} \right) + \frac{k_1}{k_2} \left(\int^{(2)} e_{y_2} \right) + \frac{k_0}{k_2} \left(\int^{(3)} e_{y_2} \right)$$

tal como

$$e_{y_2}^{(3)} = -k_5 \ddot{e}_{y_2} - k_4 \dot{e}_{y_2} - k_3 e_{y_2} - k_2 z_1 \quad (4.37)$$

con

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= e_{y_2} + \frac{k_1}{k_2} z_2, & z_1(0) &= -\frac{k_5}{k_2} e_{y_2}^{(2)}(0) \\ \dot{z}_2 &= e_{y_2} + \frac{k_0}{k_1} z_3, & z_2(0) &= -\frac{k_4}{k_1} e_{y_2}^{(2)}(0) - \frac{k_5}{k_1} e_{y_2}^{(1)}(0) \\ \dot{z}_3 &= e_{y_2} \end{aligned}$$

El polinomio característico del sistema (4.37) es

$$p(s) = s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \quad (4.38)$$

cuyas raíces se garantiza que se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo, proponemos a nuestro polinomio característico como el producto de tres polinomios Hurwitz de segundo orden, es decir,

$$s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 = (s^2 + 2\zeta_2 \omega_n^2 s + (\omega_n^2)^2)^3$$

Los coeficientes del polinomio característico expresados en términos de los valores ζ_2 y ω_n^2 están dados como

$$\begin{aligned} k_0 &= (\omega_n^2)^6 \\ k_1 &= 6\zeta_2 (\omega_n^2)^5 \\ k_2 &= 12\zeta_2^2 (\omega_n^2)^4 + 3(\omega_n^2)^4 \\ k_3 &= 8\zeta_2^3 (\omega_n^2)^3 + 12\zeta_2 (\omega_n^2)^3 \\ k_4 &= 12\zeta_2^2 (\omega_n^2)^2 + 3(\omega_n^2)^2 \\ k_5 &= 6\zeta_2 \omega_n^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Expresando el controlador en términos de los reconstructores integrales en su forma explícita, además de los términos integrales del error de salida, tenemos

$$e_{v_2} = - \left(\int (k_5 e_{v_2} + k_2 e_{y_2}) \right) - \left(\int^{(2)} (k_4 e_{v_2} + k_1 e_{y_2}) \right) - \left(\int^{(3)} k_0^i e_{y_2} \right) - k_3 e_{y_2} \quad (4.40)$$

Tomando la transformada de Laplace de (4.40), y después de algunos reordenamientos y simplificaciones, obtenemos la siguiente expresión mixta en el dominio del tiempo y en el dominio de Laplace, del controlador en forma de una red de comprensión clásica

$$v_2(t) = v_2^*(t) - \left(\frac{k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s(s^2 + k_5 s + k_4)} \right) (y_2(t) - y_2^*(t)) \quad (4.41)$$

y (3.77) del modelo del motor, donde la fuerza que se ejerce sobre el carro denotada por F fue obtenida mediante el controlador desarrollado en la sección 4.1 y mostrado en la figura 4.7. Las corriente directas de referencia $y_1^* = i_d^*$ se eligen a un nivel nulo debido a que estas están alineadas con el flujo magnético de sus respectivos imanes.

En la tabla 4.3 mostramos los parámetros físicos usados para las simulaciones que corresponden a los motores acoplados a las ruedas del carro, dado que se consideran motores iguales, dichos parámetros fueron tomados de [46]

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidad
Inductancia del devanado	L	6.365×10^{-3}	$[H]$
Resistencia del devanado	R_m	1.6	$[\Omega]$
Número de par de polos	N_r	2	
Constante de par	K_m	0.468	$[V \cdot s/rad]$
Inercia del eje	J_m	0.182×10^{-3}	$[Kg \cdot m^2]$
Fricción viscosa	B	8.708×10^{-5}	$[Kg \cdot m^2/s]$

Tabla 4.3: Parámetros físicos usados en la simulación del sistema en lazo cerrado para el modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$.

Los parámetros de sintonización para cada uno los motores acoplados a las ruedas son:

$$\omega_n^1 = 100, \quad r = 100, \quad \zeta_1 = 1 \quad (4.47)$$

$$\omega_n^2 = 200; \quad \zeta_2 = 1 \quad (4.48)$$

En la figura 4.23 se muestran los seguimientos de trayectoria de cada uno de los motores acoplados a las ruedas, respectivamente, como se puede apreciar, el seguimiento de trayectoria es el mismo dado que las ruedas tienen el mismo radio y comparten el mismo desplazamiento. El desempeño es bastante satisfactorio siendo que las trayectorias del posicionamiento angular de cada uno de los motores están prácticamente empalmadas con sus respectivas trayectorias de referencia, esta demuestra una robustez notable del esquema de control GPI robusto, dado que es capaz de corregir las perturbaciones presentes en el sistema, por una parte; el desconocimiento de los términos ignorados en la retroalimentación (3.82) que son considerados por el controlador como perturbaciones, así como, el roce de las ruedas presentes con la plataforma, los cuales, se traducen como la fuerza F que debe ejercerse en el carro y que se presentan como una perturbación a la dinámica de los motores. El comportamiento de las entradas de control al sistema (3.80) y que son obtenidas mediante las ecuaciones (3.87), entre los controles de los sistemas lineales y las entradas de control del sistema no lineal, se presentan en la figura 4.24.

En la figura 4.25 se muestra el comportamiento de las variables del error de seguimiento de las posiciones angulares de cada uno de los motores, el comportamiento es idéntico dado que se ha considerado que ambos funcionan bajo las mismas condiciones, como podemos observar, la magnitud de los errores es pequeña comparado con los órdenes de magnitud de las salidas, con órdenes del 0.8 % en ambos motores, observamos un comportamiento con una envolvente similar a la forma de la señal de la fuerza F mostrada en la figura 4.7, esto refleja la presencia de la fuerza F presente en el sistema como una perturbación externa, no obstante la acción del control minimiza de forma eficiente el desempeño de la misma.

Por último, mostramos las corrientes directa i_d y la corriente de cuadratura i_q para cada uno de los motores en la figura 4.26. Como podemos observar, la corriente directa i_d de cada uno de los motores se mantiene en valores muy cercanos a cero, mientras que la corriente de cuadratura tiene un comportamiento envolvente similar a la perturbación debida a la fuerza F .

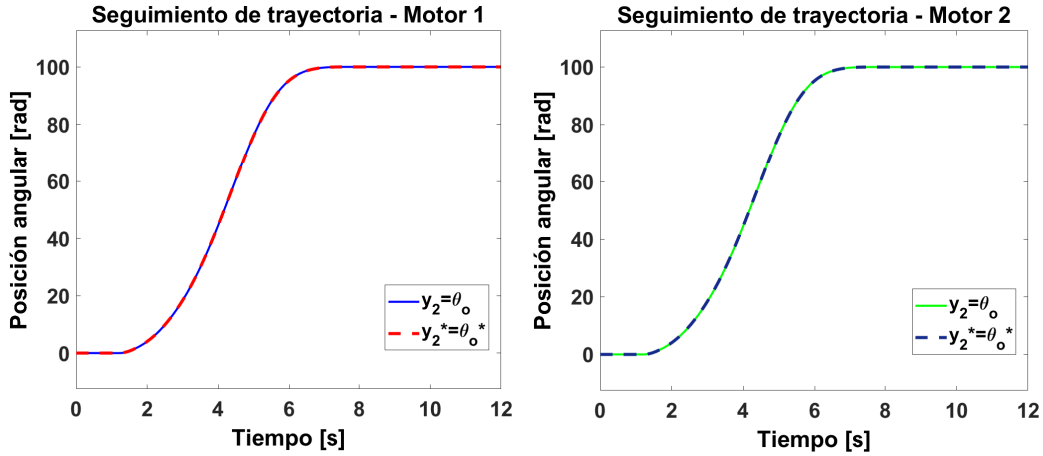


Figura 4.23: Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados a las ruedas del carro de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Seguimiento de trayectoria.

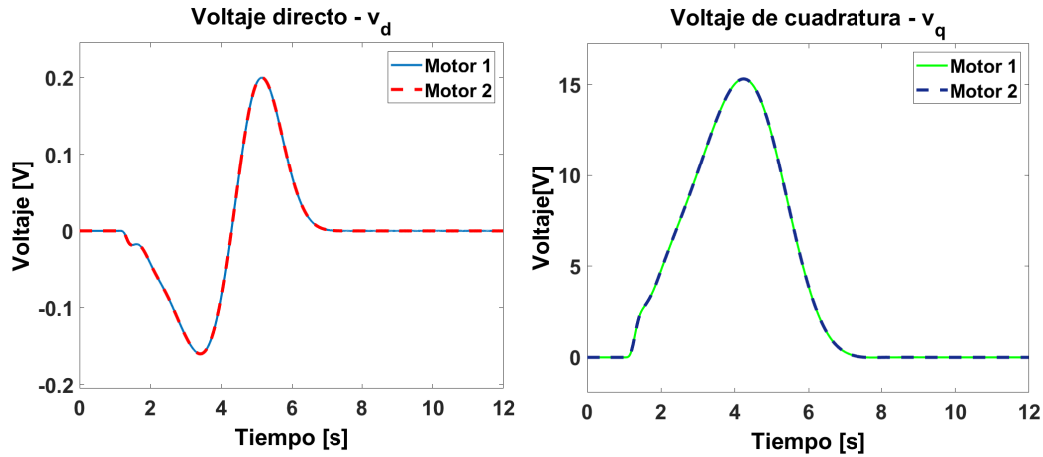


Figura 4.24: Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados a las ruedas del carro de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Voltajes de control.

Ahora consideremos el problema de seguimiento de trayectoria para el motor acoplado al cilindro de enrollamiento de la grúa, de la ecuación (3.89), la cual relaciona la posición angular θ_c del cilindro, y por consecuencia, la posición angular del eje del motor con la longitud del cable denotada por ρ

$$\theta_c = \frac{\rho}{R} \quad (4.49)$$

Por lo que, la trayectoria deseada $y_2^* = \theta_c^*$ para el motor acoplado al cilindro, está dada como

$$\theta_c^* = \frac{\rho^*}{R} \quad (4.50)$$

Donde ρ^* es la trayectoria del desplazamiento del cable que eleva la carga, y que fue obtenida mediante el controlador desarrollado en 4.1 y mostrado en la figura 4.6. Ahora, el par mecánico τ necesario para la elevación de la carga, el cual, que a su vez, es desarrollado por el motor y que se presenta en el modelo descrito en las ecuaciones dinámicas (3.75), (3.76) y (3.77) como una la perturbación externa del par de carga denotado por τ_L , dicho par mecánico τ fue obtenido mediante el controlador desarrollado en la sección 4.1 y mostrado en la figura 4.7.

Los parámetros físicos considerados para el motor acoplado al cilindro de enrollamiento son los mismos que se utilizaron en los motores acoplados a las ruedas y que son presentados en la tabla 4.2.

Los parámetros de sintonización para el motor acoplado al cilindro son:

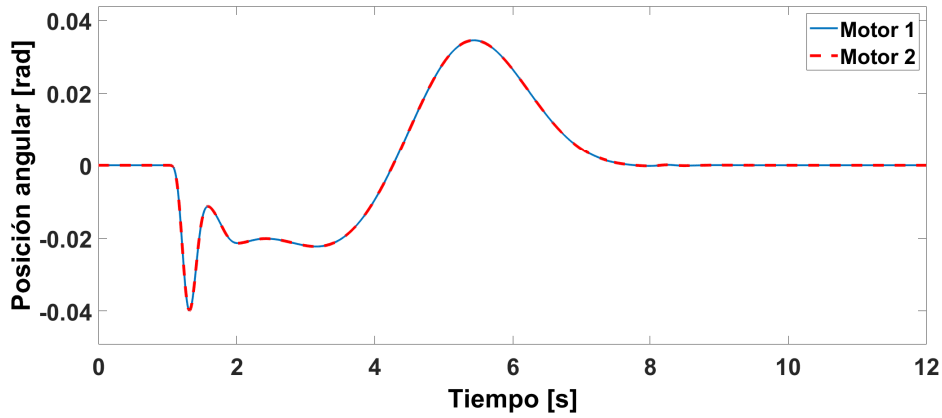


Figura 4.25: Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados a las ruedas del carro de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Errores de seguimiento de trayectoria.

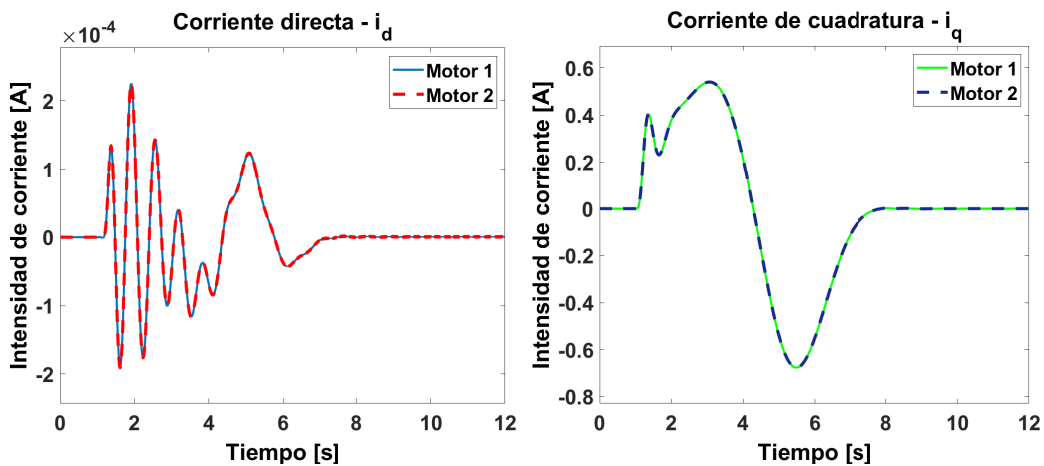


Figura 4.26: Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes a las ruedas del carro de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Corrientes directa y de cuadratura.

$$\omega_n^1 = 100, \quad r = 100, \quad \zeta_1 = 1 \quad (4.51)$$

$$\omega_n^2 = 200; \quad \zeta_2 = 1 \quad (4.52)$$

En la figura 4.27 se puede mostrar el seguimiento de trayectoria de la posición angular del eje del motor, a pesar de que no se logra apreciar, existe una ligera oscilación al inicio de la trayectoria, un acercamiento más al desempeño del seguimiento de trayectoria se puede apreciar en la figura 4.29, la cual muestra el error de seguimiento e_{y2} , podemos observar un desvío pronunciado al inicio, lo cual se debe a la acción de los controles con el propósito de superar la perturbación del par mecánico τ , considerando que este inicia en un valor distinto de cero, debido a la aceleración gravitacional presente en la carga y reflejado como una acción en el cilindro de enrollamiento, no obstante, el desempeño por parte de los controladores es satisfactorio considerando que el orden de magnitud del error de seguimiento son pequeños en comparación con la salida. Una observación notoria con el error de seguimiento es que este converge a valores cercanos a cero una vez que el seguimiento de trayectoria a concluido, a pesar de que la perturbación se mantiene persistente, contrario a lo ocurrido en el caso del modelo simplificado de la grúa viajera cuando se le acoplaron ciertas perturbaciones a la fuerza F y al par mecánico τ , tal y como se observa en la figura 4.7. La razón de tal comportamiento es debido el par mecánico τ acoplado al modelo del motor como una perturbación externa, se mantiene persistente, una vez concluida la trayectoria.

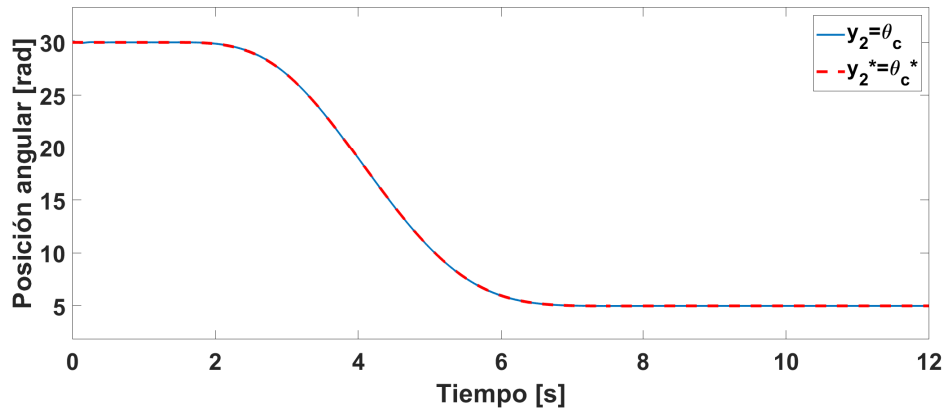


Figura 4.27: Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados al cilindro de enrollamiento de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Seguimiento de trayectoria.

El comportamiento de las entradas de control se muestran en la figura 4.28, se puede apreciar cómo se disparan al inicio, tanto el voltaje directo v_d como el voltaje de cuadratura v_q por las razones ya mencionadas anteriormente, el voltaje directo se estabiliza a cero, sin embargo, el voltaje de cuadratura v_q se mantiene a un valor constante diferente de cero, con el objetivo de crear un par mecánico en el motor que mantenga en reposo a la carga después de haber terminado la maniobra, notamos un comportamiento similar en las corrientes; directa v_d y de cuadratura v_q , respectivamente, las cuales se muestran en la figura 4.30.

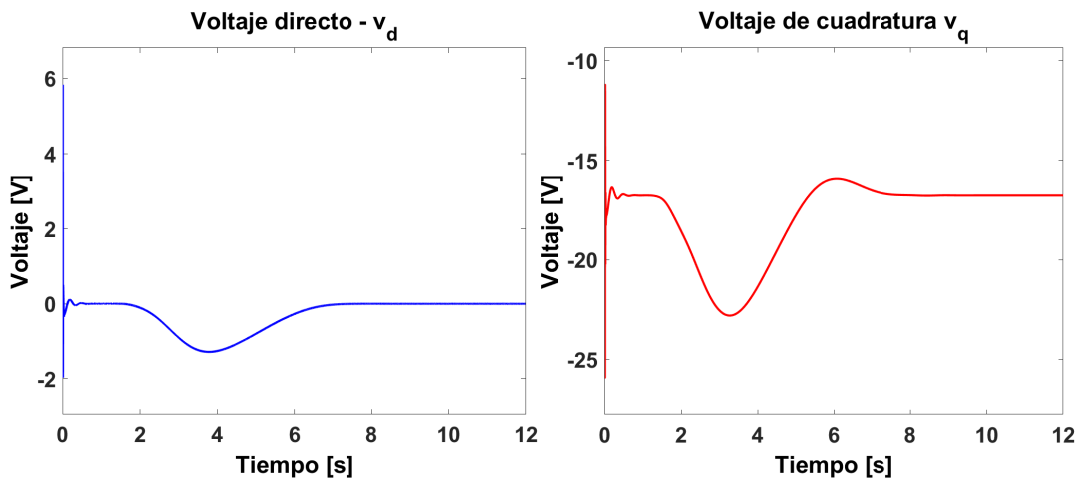


Figura 4.28: Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados al cilindro de enrollamiento de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Voltajes de control.

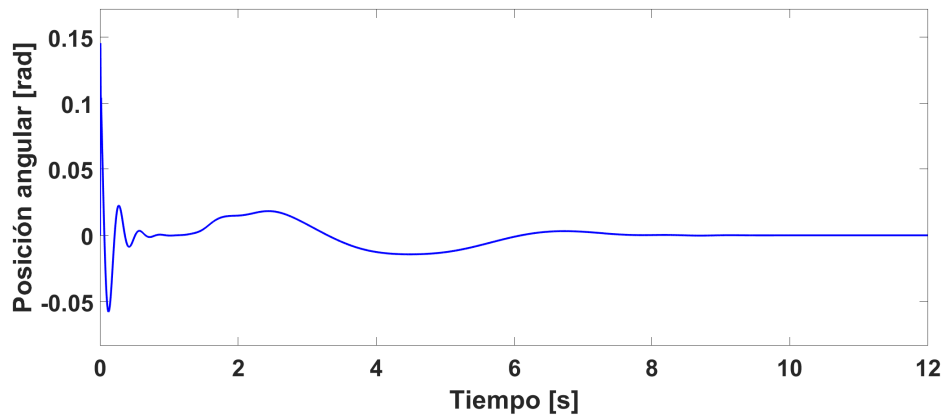


Figura 4.29: Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados al cilindro de enrollamiento de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Error de seguimiento de trayectoria.

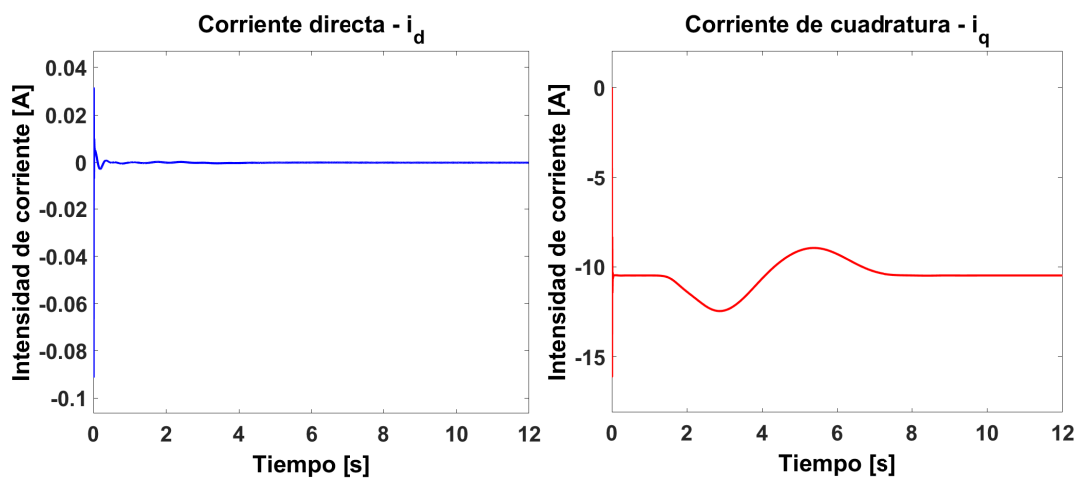


Figura 4.30: Simulaciones para los motores síncronos a imanes permanentes acoplados al cilindro de enrollamiento de la grúa (modelo simplificado de la grúa viajera). Corrientes directa y de cuadratura.

4.4. Resumen del capítulo

El presente capítulo muestra el proceso del diseño del esquema de control GPI robusto propuesto para los sistemas extendidos de los modelos (simplificado y refinado) de la grúa viajera obtenidos en el capítulo 3. Se muestra en detalle el diseño de los controladores, obteniendo la representación en forma de una red clásica de compensación, así como la selección de los parámetros de diseño para obtener estabilidad asintótica en el sistema en lazo cerrado dado por los sistemas extendidos y sus respectivos controladores. Se presentan simulaciones obtenidas por la vía computacional para el desempeño de cada uno de los sistemas en lazo cerrado de los modelos simplificado y refinado de la grúa viajera, dando un análisis y discusión de los resultados. Además, se ofrece una prueba de robustez para el esquema de control GPI robusto en el modelo simplificado de la grúa viajera frente a perturbaciones externas, acopladas a la fuerza y al par mecánico como señales de baja frecuencia. Por último, se diseña un esquema de control GPI robusto para los motores síncronos de imanes permanentes, realizando un seguimiento de trayectoria como un controlador de bajo nivel al desplazamiento horizontal del carro y a la longitud del cable del modelo simplificado de la grúa viajera, considerando la fuerza y pares mecánicos como perturbaciones externas, una vez computado el comportamiento de dichas variables por el sistema en lazo cerrado de la parte mecánica y sus controladores.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusión del trabajo

Es claro que las dos técnicas fundamentales que soportan este trabajo es la linealización por retroalimentación y el esquema de control GPI en su versión robusta. La planitud diferencial es una propiedad que atesora una gran riqueza en el análisis de sistemas no lineales y, más aún, trivializa muchos problemas del control automático. Es claro que en muchos casos de sistemas no lineales que son diferencialmente planos, la planitud diferencial ofrece la posibilidad de obtener una linealización exacta, obteniendo un conjunto de subsistemas desde un punto de vista de entrada-salida, mediante la manipulación algebraica de las variables en términos de las componentes de alguna salida plana. Sin embargo, en otros casos la obtención de dicho conjunto de subsistemas se vuelve muy complicado cuando el tratamiento algebraico requiere de resolver ecuaciones muy complejas o en ocasiones trascendentales, tal fue nuestro caso en el tratamiento del modelo de la grúa viajera. Es por ello que, mediante la fuerte conexión entre la planitud diferencial y la linealización por retroalimentación, pudimos recurrir a esta última técnica para poder obtener un conjunto de subsistemas lineales desde un punto de vista entrada-salida totalmente desacoplados, además, las técnicas de linealización por retroalimentación afloran explícitamente las propiedades intrínsecas del sistema, tal es el caso de la forma normal de un sistema no lineal, la cual trivializa el problema de la dinámica de los ceros, ofrece las condiciones necesarias y suficientes para la linealización exacta del sistema, así como un método para modificar un sistema que no tiene grado relativo bien definido en un nuevo sistema que si lo tiene, todo esto mediante un tratamiento completamente sistemático. Es importante recalcar que la propiedad de la planitud diferencial posee propiedades que son más generales que las técnicas clásicas del control.

En el tratamiento de la linealización exacta por retroalimentación del modelo refinado de la grúa viajera se nos presentó un gran problema, el cual fue la aparición de una singularidad en la matriz de desacoplo que comprende en todos los puntos de equilibrio del sistema extendido. Por lo que, no podíamos obtener ninguna ventaja de la linealización exacta del sistema, al no existir una transformación invertible en los puntos de equilibrio del este. Afortunadamente, mediante una composición apropiada de una retroalimentación regular invertible, fue posible evadir dicha singularidad, es decir que, aun cuando las retroalimentaciones de estado estático regular no modifican la naturaleza del sistema, en el sentido de la invarianza del grado relativo del este, estas pueden reubicar la región de trabajo en el espacio de estados del sistema. Es decir, las leyes clásicas de control por retroalimentación modifican las direcciones en las que evoluciona el sistema, pero no su morfología.

La existencia de anomalías que presenta el sistema del modelo refinado de la grúa viajera es clara mediante una inspección de las relaciones clásicas del sistema y las obtenidas por la planitud diferencial, obteniendo razones del comportamiento anormal de este. Esto no se hubiera podido lograr solo con la información que ofrece la representación clásica del sistema, una ventaja más que ofrece la planitud diferencial.

Por otra parte, el desempeño que ofrece el esquema de control GPI robusto es excelente por dos razones; la primera y más crucial es que está actuando sobre un sistema completamente lineal que

aparenta una naturaleza lo lineal, es decir que la retroalimentación y la estimación de los estados resulta ser de naturaleza lineal. La segunda razón es que el controlador resulta ser muy robusto ante perturbaciones ya sean internas o externas al sistema, ya que para el controlador no hay una diferencia en ellas y para el solo se trata de señales acotadas que se van aniquilando en línea en el proceso de estimación del estado. El poder de estimación y cancelación de perturbaciones se pudo ver con más contundencia cuando el sistema en lazo cerrado fue sometido a perturbaciones acopladas como señales de baja frecuencia, dando como resultado, un buen desempeño en el objetivo de control, así como también en el control de los motores, siendo que estos están sometidos a las perturbaciones de los pares mecánicos que representan una carga en la dinámica del sistema.

Como pudimos apreciar a lo largo de este trabajo, en cuestión de desempeño, la mejor opción cuando el sistema es diferencialmente plano es, la linealización exacta del sistema, siendo una desventaja de las técnicas de linealización por retroalimentación la exigencia de disponer de un modelo exacto del sistema, por consiguiente, tener acceso a la medición de todos los estados de este. Por fortuna, en nuestro caso solo necesitamos del conocimiento de dos variables; las salidas planas del sistema, donde el conocimiento de los estados para la implementación de la ley de control, son estimados por el mismo controlador, a su vez que, las ganancias en la matriz de desacoplo dependientes del estado del sistema, las cuales pueden ser obtenidas mediante la parametrización diferencial del vector de estado por parte de las salidas planas, siendo una propiedad y ventaja que ofrece la planitud diferencial.

5.2. Aportaciones

Las principales aportaciones de este trabajo son:

- Mostrar que los modelos propuestos (simplificado y refinado) para una grúa viajera de puente obteniendo su descripción matemática mediante la formulación de Euler Lagrange son diferencialmente planos.
- Mostrar que, al menos para el sistema del modelo refinado de la grúa viajera, una retroalimentación de estado estático regular en composición con un sistema que antecede una extensión dinámica, puede reubicar singularidades presentes en la matriz de desacoplo de un primer sistema extendido, como consecuencia de que dicha retroalimentación reubica la región del espacio de estados donde evoluciona el sistema. Todo esto con el motivo de obtener una transformación que sea invertible en todos los puntos de equilibrio del sistema extendido, entre un sistema lineal y controlable y, el sistema extendido
- Propuesta de un esquema de control GPI robusto para los sistemas extendidos de cada uno de los modelos (simplificado y refinado), diseñados en el sistema lineal que tiene la forma canónica de Brunowsky, que es equivalente a los sistemas extendidos considerados.
- Pruebas de la robustez del esquema de control GPI robusto aplicado sistema extendido del modelo simplificado de la grúa viajera, mediante el acoplo de perturbaciones externas como señales de baja frecuencia.
- Propuesta de un esquema de control GPI robusto para el modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el esquema de campo orientado o en el eje de referencia $D - Q$.
- Propuesta de un esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera, esto con el motivo de una demostración del poder de robustez, estimación y retroalimentación no lineal del esquema de control GPI robusto, así como una comparación en el desempeño del controlador aplicado a la linealización exacta de la grúa viajera. Esto se ofrece en el apéndice B anexo a este trabajo.

5.3. Trabajos futuros

Para posibles trabajos futuros basados en los resultados y en la investigación que soportan este trabajo, se propone:

- Diseñar una planta física adecuada para pruebas de laboratorio, con el motivo de obtener resultados experimentales.
- Realizar una sintonización adecuada del controlador propuesto para la planta física, así como un ajuste adecuado de los sensores requeridos.
- Implementación física del sistema completo, planta, controladores y sensores como prueba definitiva en el desempeño del sistema completo.
- Extender el modelo de la grúa viajera a una tercera dimensión, es decir, proponer un modelo que considere el movimiento de la grúa en el espacio mediante la adición de un segundo eje en la plataforma del carrito donde la posición también pueda ser controlada a voluntad, además el modelo en tercera dimensión tiene que ser diferencialmente plano para poder realizar un tratamiento similar con las técnicas de análisis y control de sistemas no lineales expuestas en este trabajo.
- Generalizar y formalizar las condiciones necesarias y suficientes para que una linealización de estado estático regular pueda reubicar la región del espacio de estados donde evoluciona el sistema, con el motivo de evadir singularidades que puedan presentarse y ser críticas en la matriz de desacople de un sistema que es linealizable por las técnicas de linealización por retroalimentación, además ofrecer un proceso sistemático para lograr dicho objetivo.

Bibliografía

- [1] J. W. Beeston. “Closed-loop time optimal control of a suspended payload—a design study”. En: *4th IFAC World Congress*. Warsaw Poland, 1969, págs. 85-99.
- [2] A. J. Ridout. “Anti-swing control of the over head crane using linear feedback”. En: *Journal of Electrical and Electronic Engineering*. Australia, 1989, págs. 17-26.
- [3] T. Burg, D. Dawson, C. Rahn y W. Rhodes. “Nonlinear Control of an Overhead Crane via the saturating control approach of Teel”. En: *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation* (1996). 3155-3160.
- [4] B. d’Andrea Nobel y J. Levine. “Modelling and Nonlinear Control of an Overhead Crane”. En: *Robust Control of Linear Systems Nonlinear Control*. Birkhäuser Boston, 1990, págs. 523-529.
- [5] B. d’Andrea Nobel, F. Boustany y F. Conrad. “Control of an Overhead Crane: Stabilization of Flexibilities”. En: *Boundary Control and Boundary Variation*. Springer-Verlag, 1990, págs. 1-26.
- [6] B. d’Andrea Nobel y F. Boustany. “Adaptive control of a class of mechanical system using linearization and Lyapunov methods. A comparative study on the overhead crane example”. En: *IEEE Decision and Control* (1991), págs. 120-125.
- [7] B. d’Andrea Nobel y F. Boustany. “Adaptive control of an overhead crane using dynamic feedback linearization and estimation design”. En: *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation* (1992). 1963-1968.
- [8] J. Lévine M. Fliess y P. Rouchon. “A Simplified Approach of Crane via a Generalized State-Space Model”. En: *IEEE Decision and Control* (1991), págs. 736-741.
- [9] Michael Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin y Pierre Rouchon. “Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples”. En: *International Journal of Control* (1995). 61(6).
- [10] J. Yu, F. L. Lewis y T. Huang. “Nonlinear feedback control of a gantry crane”. En: *American Control Conference* (1995). 4310-4315.
- [11] Jianqiang Yi, Naoyoshi Yubazaki y Kaoru Hirota. “Anti-swing and positioning control of overhead traveling crane”. En: *Information Sciences* (2003), págs. 19-42.
- [12] Wen Yu y Rigoberto Toxqui. “PD Control of Overhead Crane Systems with Neuronal Compensation”. En: *Advances in Neuronal Networks* (2006). 1110-1115.
- [13] Wen Yu y Rigoberto Toxqui. “Anti-swing control for overhead crane with neuronal compensation”. En: *International Joint Conference on Neuronal Networks* (2006). 9478-9453.
- [14] Wen Yu y Rigoberto Toxqui. “PD control of overhead crane systems with velocity estimation and uncertainties compensation”. En: *The 6th World Congress on Control and Automation* (2006). 139-143.
- [15] Yu Zhang, Zhehua Jiang y Xunwei Yu. “Indirect field-orient control of induction machines based on synergetic control theory”. En: *In Power and Energy Society General Meeting Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21th Century IEEE* (2009), págs. 1-7.
- [16] Amit Kumar y Tejavathu Ramesh. “Direct field orient control of induction motor drive”. En: *In Advances in Computing and Communications. Engineering (ICACCE)*. 219-223. 2015.
- [17] Vadim I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer Science & Business Media, 1992.

- [18] Rasvan Solea, Marian Gaicenu, Bogdan Cortes y Cristinel Eni. “Nonlinear sliding-mode control for permanent magnet synchronous machine”. En: *In Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM), 2014 International Conference IEEE*. 2014, págs. 312-317.
- [19] H. Sira Ramírez, J. Linares Flores, C. Garcia Rodriguez y M. A. Contreras Ordaz. “On the control on the permanent magnet synchronous motor: An active disturbance rejection control approach”. En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (2014). 22(5):2056-2063.
- [20] Zhiqiang Gao, Yi Huang y Jingqing Han. “An alternative paradigm for control system design”. En: *IEEE Conference on Decision and Control* 5 (2001).
- [21] Carlos Escobar Noriega. “Control de seguimiento de velocidad basado en pasividad de un motor síncrono de imanes permanentes, sin sensor de posición”. Tesis de maestría. Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2015.
- [22] Eric William Zurita Bustamante. “Control Proporcional Integral Generalizado Robusto en Motores Síncronos de Imanes Permanentes sin Sensor Mecánico”. Tesis doct. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., 2019.
- [23] Hebertt Sira Ramírez, Eric William Zurita Bustamante y Congzhi Huang. “Equivalence among flat filters, dirty derivative-based PID controllers, ADRC, and integral reconstructor-based sliding mode control”. En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (2020). 28(5):1696-1710.
- [24] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Third Edition. Springer Science & Business Media, 1995.
- [25] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Second Edition. Springer Science & Business Media, 1989.
- [26] Hebertt Sira Ramirez y Sunil K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Taylor & Francis Group, 2004.
- [27] R. H. Kalman. “Contributions to the theory of time-optimal control”. En: *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 5:102-119. 1960.
- [28] Jean Levine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [29] Jean Levine. “Differentially Flat Systems”. En: *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. Springer Science & Business Media, 2009. Cap. 6, págs. 143-144.
- [30] M. Fliess, H. Sira Ramírez y R. Márquez. “Regulation of non-minimum phase outputs: A flatness based approach”. En: *Perspectives in Control*. Springer Science & Business Media, 1998, págs. 143-163.
- [31] H. Sira Ramírez, A. Luviano Juarez, M. Ramírez Neria y R. Garrido Moctezuma. “Flat filtering: A classical approach to robust control of nonlinear systems”. En: *Proceedings of the 2016 American Control Conference*. 2016, págs. 3844-3849.
- [32] H. Sira Ramírez, A. Luviano Juarez, M. Ramírez Neria y Eric William Zurita Bustamante. “Generalized Proportional Integral Control”. En: *Active disturbance Rejection Control of Dynamic Systems: A Flatness-Based Approach*. Butterworth-Heinemann, 2017, págs. 299-338.
- [33] J. Han. “From PID to active disturbance rejection control”. En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (2009). 56(3) 900-906.
- [34] M. Fliess y C. Join. “Model-Free Control”. En: *International Journal of Control* (2013). 86(12) 2228-2252.
- [35] H. Sira Ramírez, J. Linares Flores, A. Luviano Juarez y J. Cortés Romero. “Ultramodelos Globales y el Control por Rechazo Activo de Perturbaciones en Sistemas No Lineales Diferencialmente Planos”. En: *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* (2015). 12(2) 133-144.
- [36] R. Madonski y P. Herman. “Survey on methods of increasing the efficiency of extended state disturbance observers”. En: *ISA Transactions* 56 (2015), págs. 18-27.

- [37] Jean Levine. “Jets of Infinite Orden, Lie-Bäcklund’s Equivalence”. En: *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. Springer Science & Business Media, 2009. Cap. 5, págs. 107-130.
- [38] Michael Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin y Pierre Rouchon. “Nonlinear control and Lie-Bäcklund transformations: towards a new differential geometric standpoint”. En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 1. 1994.
- [39] Michael Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin y Pierre Rouchon. “A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems”. En: *IEEE Transactions on Automatic Control* (1999). 44(5):992-937.
- [40] Hebertt Sira Ramirez y Sunil K. Agrawal. “A permanent magnet stepping motor”. En: *Differentially Flat Systems*. Taylor & Francis Group, 2004, págs. 222-225.
- [41] Qing Zheng, Linda Q. Gaol y Zhiqiang Gao. “On stability analysis active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics”. En: *46th IEEE Conf. Decision and Control* (2007), págs. 3501-3506.
- [42] H. Sira Ramírez, M. Ramírez Neria, R. Garrindo Moctezuma y A. Luviano Juarez. “Linear robust generalized proportional integral control of a ball and beam system for trajectory tracking tasks”. En: *American Control Conference (ACC) IEEE* (2016), págs. 4719-4724.
- [43] H. Sira Ramírez y Z. Gao. “Flatness based ADRC Control of Lagrangian Systems: A moving crane”. En: *21st IFAC World Congress* (2020). 53(2):1337-1342.
- [44] Hebertt Sira Ramírez, Mario Andres Agiular Orduña y Brian C. Gomez León. “Active disturbance rejection control of nonlinear SISO Lagrangian systems via endogenous injections and exogenous feedback for trajectory tracking”. En: *Control Theory and Technology* (2021).
- [45] Hebertt Sira Ramírez, Mario Ramírez Neria, Rubén Garrindo Moctezuma y Alberto Luviano Juarez. “On the Linear Control of Underactuated Nonlynear Systems Via Tangent Flatness and Active Disturbance Rejection Control: The Case of the Ball and Beam System”. En: *Journal of Dinamics Systems, Measurement and Control* (2016). 138(10).
- [46] H. Sira Ramírez, A. Luviano Juarez, M. Ramírez Neria y Eric William Zurita Bustamante. “A Single-Link Manipulator Driven by a Synchronous Motor”. En: *Active disturbance Rejection Control of Dinamic Systems: A Flatness-Based Approach*. Butterworth-Heinemann, 2017, pág. 189.

Apéndice A

Generación de trayectoria

La generación de una trayectoria suave es fundamental en el diseño de control, tanto para el cumplimiento del objetivo de control como para el buen funcionamiento de este mismo. Para lograr el objetivo de crear una trayectoria adecuada, se hace uso de los polinomios de Bézier, los cuales definen una nueva función polinomial $f(t)$ definida en un intervalo de tiempo $[t_i, t_f] \subset \mathbb{R}$, tal que satisface ciertas condiciones.

Dado que se requiere una trayectoria de descanso a descanso, se requiere que las k -ésimas derivadas de la trayectoria en los tiempos inicial t_i y final t_f de la maniobra, sean cero. Dicho lo anterior consideremos una trayectoria, tal que está definida por la siguiente función definida en \mathbb{R}

$$y(t) = \begin{cases} y_i & \text{si } t < t_i \\ y_i + (y_f - y_i) \cdot f(t) & \text{si } t_i \leq t \leq t_f \\ y_f & \text{si } t > t_f \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Donde

- y_i es el valor inicial de la trayectoria deseada
- y_f es el valor final de la trayectoria deseada

Se plantea una función polinomial $f(t)$ basada en los polinomios de Bézier de la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^p \left(\sum_{j=0}^{q-1} a_j \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} a_j \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^{j+p} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Donde p y q son constantes que determinan el orden del polinomio, a_j son los coeficientes del polinomio que dependen de las condiciones iniciales y finales que se desea que el polinomio satisfaga. Notemos que la función polinomial $f(t)$ tiene por imagen el intervalo $[0, 1]$ para $t \in [t_i, t_f]$, es decir,

$$f : [t_i, t_f] \longrightarrow [0, 1] \quad (\text{A.3})$$

de tal forma que $f(t_i) = 0$ y $f(t_f) = 1$. Supóngase que se desea que las k -ésimas derivadas de la función polinomial $f(t)$ sean cero para t_i y para t_f , se puede ver que para $t = t_i$, la condición de que las k -ésimas derivadas de $f(t)$ sean cero se puede satisfacer haciendo $p = k + 1$. Sin embargo para $t = t_f$ es necesario derivar la función $f(t)$ e igualarla a cero para $t = t_f$, de esta forma, obtenemos k -ésimas ecuaciones lineales y, considerando la condición $f(t_f) = 1$, se deben obtener $k + 1$ -ésimos coeficientes a_j para así, obtener un sistema consistente, por lo que, como consecuencia; $q = k + 1$.

Recuérdese que la r -ésima derivada de t^n es

$$\frac{d^r}{dt^r} t^n = \frac{n!}{(n-r)!} t^{n-r}$$

Por lo que la r -ésima derivada de $f(t)$ es

$$\frac{d^r}{dt^r} f(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{a_j (j+p)!}{(j+p-r)! (t_f - t_i)^{j+p}} (t - t_i)^{j+p-r}$$

Recordando que $p = q = k + 1$, y que las k -ésimas derivadas de $f(t)$ en $t = t_f$ son iguales a cero, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=0}^k \frac{a_j (j+k+1)!}{(j+k+1-r)! (t_f - t_i)^r} = 0 \quad \text{para } r = 1, \dots, k$$

considerando la condición $f(t_f) = 1$ junto con el conjunto anterior de ecuaciones, se tiene un conjunto de ecuaciones lineales de la forma

$$C_{(k+1) \times (k+1)} \cdot a_{(k+1) \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{k \times 1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Donde las entradas de la matriz C están dadas como

$$C_{(k+1) \times (k+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{1 \times (k+1)} \\ Cd_{k \times (k+1)} \end{pmatrix}$$

y donde las entradas de la matriz Cd están dadas como

$$cd_{ij} = \frac{(j+k)!}{(j+k-i)! (t_f - t_i)^i}$$

Debido a la naturaleza del sistema de ecuaciones (A.4), la definición de las entradas cd_{ij} se puede reducir de la forma

$$cd_{ij} = \frac{(j+k)!}{(j+k-i)!}$$

siendo independientes de los valores de t_i y t_f y, en consecuencia, los coeficientes a_j de la función polinomial $f(t)$ son independientes de la elección de los valores de t_i y t_f y, solamente dependen de las condiciones de las k -ésimas derivadas.

Como caso particular, consideremos una trayectoria $y(t)$ tal que se requiere que; las cuatro primeras derivadas sean cero en los tiempos t_i y t_f , es decir,

$$\dot{y}(t_i) = \ddot{y}(t_i) = y^{(3)}(t_i) = y^{(4)}(t_i) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{y}(t_f) = \ddot{y}(t_f) = y^{(3)}(t_f) = y^{(4)}(t_f) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Considerando una valor inicial $y(t_i) = y_i$, y un valor final $y(t_f) = y_f$. Para la construcción de la polinomial $f(t)$, sabemos que esta es independiente de los valores y_i y y_f , tal que se cumple (A.3). Un cálculo inmediato de los coeficientes a_j de (A.2), mediante la solución del sistema de ecuaciones (A.4), nos da como resultado los siguientes valores

$$a_0 = 126, \quad a_1 = -420, \quad a_2 = 540, \quad a_3 = -315, \quad a_4 = 70$$

obteniendo el siguiente polinomio de noveno orden

$$f(t) = 126 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^5 - 420 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^6 + 540 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^7 - 315 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^8 + 70 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^9 \quad (\text{A.7})$$

Cálculos sencillos muestran que el polinomio (A,7) cumple con las condiciones (A,5) y (A,6). Para evidenciar un comportamiento adecuado de nuestro polinomio (A,7), asignemos los siguientes valores

$$t_i = 1, \quad t_f = 8$$

A continuación, mostramos las gráficas del comportamiento de (A,7) y de sus respectivas derivadas hasta un cuarto orden.

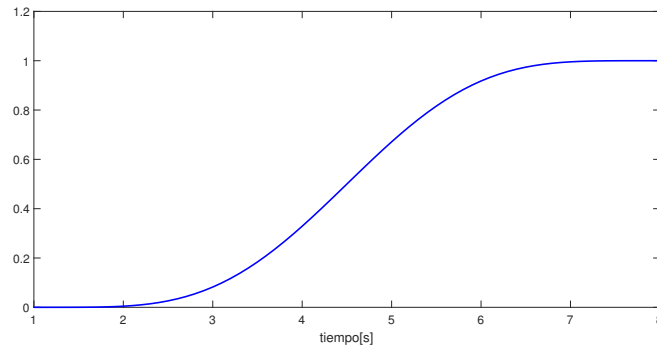


Figura A.1: Comportamiento del polinomio de Bézier $f(t)$ de noveno orden.

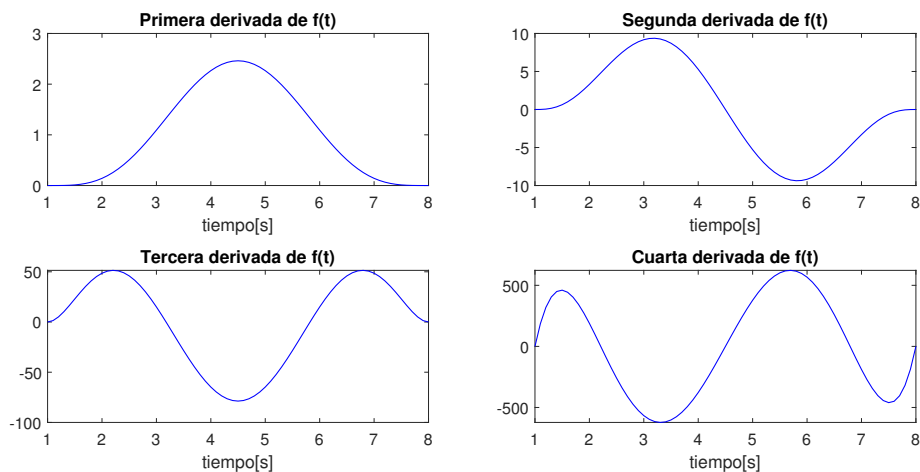


Figura A.2: Derivadas del polinomio de Bézier $f(t)$ de noveno orden, hasta un cuarto orden, observe que se cumplen las condiciones de que las derivadas son cero en las condiciones $t = t_i$ y $t = t_f$.

Para la obtención de la trayectoria deseada $y(t)$ se hace uso de la definición (A,1).

Apéndice B

Control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera

Cuando un sistema no lineal, no resulta ser plano, no es posible realizar en él una linealización exacta, por lo que, en muchos casos se opta por realizar una metodología que permita obtener un enfoque de entrada-salida al menos en una región de algún punto de equilibrio, tal es el caso de una linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio. Si la linealización tangente del sistema resulta ser controlable y por lo tanto plano, es posible diseñar un esquema de control robusto en un enfoque de entrada-salida que sea válido para la región considerada y en casos más benevolentes, válido en distintos puntos de operación.

El sistema de la grúa viajera presente en este trabajo es plano y, por lo tanto, admite una linealización exacta por retroalimentación dinámica endógena. El desempeño del sistema extendido linealizado, en lazo cerrado con el controlador GPI robusto es excelente y, la linealización es válida para una región muy grande del espacio de estado, sin embargo, el principal inconveniente del método es que exige disponer de un modelo exacto del sistema, donde en muchas aplicaciones prácticas no es posible tener acceso a la medición de todos los estados de este mismo.

En este apartado se dará una demostración de como el controlador GPI robusto adopta el poder de la retroalimentación no lineal y la aprovecha al máximo para poder obtener estabilidad del sistema en lazo cerrado al menos en una región de algún punto de equilibrio sin necesidad de recurrir a la linealización exacta del sistema.

B.1. Linealización tangente de sistemas lagrangianos controlados

Consideremos el lagrangiano de un sistema controlado dado por $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$ con $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ el vector de posiciones generalizadas del sistema, donde, la dimensión de este vector coincide con el número de grados de libertad del sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ el vector de entradas de control, con $m \leq n$, tal que es representado de forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - (\mathcal{V}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}^T B \mathbf{u}) \quad (\text{B.1})$$

Donde $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ representa la energía cinética del sistema, $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ la energía potencial y B una matriz relacionada con el trabajo realizado por las entradas de control sobre el sistema. Consideremos un punto de equilibrio del sistema, es decir, para el vector $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$, se define un punto de equilibrio dado por el vector $(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})$. Definamos vectores de variables incrementales dadas por las pequeñas variaciones del vector general alrededor del punto de equilibrio, como:

$$\mathbf{q}_\delta = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}}_\delta = \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{u}_\delta = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{B.2})$$

Consideremos una expansión en series de Taylor de la función $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$ alrededor del punto de equilibrio, sea

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) &= \mathcal{L}(\mathbf{q}_\delta + \bar{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_\delta, \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}) = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^T} \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} \mathbf{q}_\delta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} \dot{\mathbf{q}}_\delta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}^T} \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} \mathbf{u}_\delta \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\delta & \dot{\mathbf{q}}_\delta & \mathbf{u}_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{u}^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \mathbf{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \mathbf{u}^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}^T} \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\delta \\ \dot{\mathbf{q}}_\delta \\ \mathbf{u}_\delta \end{pmatrix} + t.o.s. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

De las condiciones generales para el equilibrio se tiene que se cumplen las siguientes relaciones consideradas por las ecuaciones de Euler-Lagrange, véase la ecuación (3.3) de la sección 3.1,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} = \mathbf{0}$$

con $\bar{\mathbf{p}}$ el vector momento en el punto de equilibrio. De las relaciones de equilibrio anteriores, se tiene que:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - B\mathbf{u} \right) \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} = \mathbf{0}$$

Lo cual implica que todos los términos lineales en la expresión (B.3) desaparecen en el equilibrio, a excepción del término asociado con el vector de entradas de control incremental \mathbf{u}_δ . En el equilibrio las fuerzas elásticas y las fuerzas gravitacionales son contrarrestadas por las entradas de control en el equilibrio $\bar{\mathbf{u}}$. De las condiciones de equilibrio descritas, la expresión (B.3) se reduce de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}_\delta + \bar{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_\delta, \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}) &= \bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}^T} \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} \mathbf{u}_\delta \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\delta & \dot{\mathbf{q}}_\delta & \mathbf{u}_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{u}^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \mathbf{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \mathbf{u}^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u} \partial \dot{\mathbf{q}}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}^T} \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\delta \\ \dot{\mathbf{q}}_\delta \\ \mathbf{u}_\delta \end{pmatrix} + t.o.s. \end{aligned}$$

Por definición, una función lineal T cumple que; $T(a+b) = T(a) + T(b)$, si ignoramos los términos de orden superior (t.o.s.) de la expresión anterior, tomando en cuenta que dicho términos son pequeños en una región cercana al punto de equilibrio $(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})$, se cumple la siguiente condición de linealidad

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) = \mathcal{L}(\mathbf{q}_\delta + \bar{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_\delta, \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}) = \mathcal{L}_\delta(\mathbf{q}_\delta, \dot{\mathbf{q}}_\delta, \mathbf{u}_\delta) + \bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})$$

El procedimiento de la linealización tangente y la determinación de la dinámica linealizada aproximada, en términos del Lagrangiano incremental, se deriva de las siguientes identidades

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial (\mathcal{L}_\delta + \bar{\mathcal{L}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\delta} \right) \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_\delta^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\delta} \right) \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\delta}$$

así mismo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial (\mathcal{L}_\delta + \bar{\mathcal{L}})}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \mathbf{q}_\delta} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{q}_\delta^T}{\partial \mathbf{q}} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \mathbf{q}_\delta} \right) \left(\frac{\partial (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})^T}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \mathbf{q}_\delta}$$

Es decir, que si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema incremental obtenemos directamente una expresión isomorfa al formalismo tradicional

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\delta} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \mathbf{q}_\delta} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Consideremos el caso de un sistema lagrangiano controlado simple tal y como lo es el modelo simplificado de la grúa viajera. El lagrangiano puede ser descrito como

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{V}(\mathbf{q}) + \mathbf{q}^T B \mathbf{u} \quad (\text{B.5})$$

Con $\mathcal{M}(\mathbf{q})$ la matriz de inercia. En el punto de equilibrio $(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})$, el Lagrangiano es reducido a

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{q}}^T B \bar{\mathbf{u}} - \mathcal{V}(\bar{\mathbf{q}})$$

Una expansión del lagrangiano alrededor del punto de equilibrio hasta un segundo orden, resulta en la siguiente función en términos incrementales

$$\mathcal{L}_\delta(\mathbf{q}_\delta, \dot{\mathbf{q}}_\delta, \mathbf{u}_\delta) = \bar{\mathbf{q}}^T B \mathbf{u}_\delta + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\delta & \dot{\mathbf{q}}_\delta & \mathbf{u}_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^T} & 0 & B \\ 0 & \mathcal{M}(\mathbf{q}) & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\delta \\ \dot{\mathbf{q}}_\delta \\ \mathbf{u}_\delta \end{pmatrix}$$

El primer sumando; $\bar{\mathbf{q}}^T B \mathbf{u}_\delta$, puede ser eliminado en virtud de que no depende de las variables incrementales consideradas en las ecuaciones de Euler-Lagrange; posición y velocidad. Siendo este el caso, el Lagrangiano incremental esta dado como

$$\mathcal{L}_\delta(\mathbf{q}_\delta, \dot{\mathbf{q}}_\delta, \mathbf{u}_\delta) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_\delta^T \mathcal{M}(\bar{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_\delta - \frac{1}{2} \mathbf{q}_\delta^T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^T} \Bigg|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})} \right) \mathbf{q}_\delta + \mathbf{q}_\delta^T B \mathbf{u}_\delta$$

De forma general para sistemas lagrangianos controlados simples, al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene el siguiente sistema dinámico referente a la linealización tangente de (B.5),

$$\mathcal{M} \ddot{\mathbf{q}}_\delta + \Gamma \mathbf{q}_\delta = B \mathbf{u}_\delta \quad (\text{B.6})$$

Donde $M = \mathcal{M}(\bar{\mathbf{q}})$, denota el valor de $\mathcal{M}(\mathbf{q})$ en el punto de equilibrio $\bar{\mathbf{q}}$. La matriz Γ por su parte, está dada como:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^T} \Bigg|_{(\bar{\mathbf{q}}, 0, \bar{\mathbf{u}})}$$

la cual es una matriz simétrica.

B.2. Modelo simplificado desde un punto de vista de entrada-salida

Consideremos las ecuaciones (3.9) de la forma generalizada, que describen la dinámica del modelo simplificado de la gura viajera presentado en la sección 3.1. Consideremos un punto de equilibrio del sistema controlado, el cual está dado como

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{eq} \\ 0 \\ \rho_{eq} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\dot{x}} \\ \bar{\dot{\varphi}} \\ \bar{\dot{\rho}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{F} \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mgR \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

con x_{eq} y ρ_{eq} posiciones arbitrarias pero fijas y conocidas. Definimos las variables incrementales de la forma (B.2), es decir,

$$\begin{aligned} x_\delta &= x - x_{eq} & \dot{x}_\delta &= \dot{x} & F_\delta &= F \\ \varphi_\delta &= \varphi & \dot{\varphi}_\delta &= \dot{\varphi}, & \tau_\delta &= \tau - mgR \\ \rho_\delta &= \rho - \rho_{eq} & \dot{\rho}_\delta &= \dot{\rho} \end{aligned}$$

Podemos obtener la linealización tangente del sistema (3.9) alrededor del punto de equilibrio (B.7) en términos de las variables incrementales, mediante la ecuación (B.6), la cual puede expresarse mediante el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} m + M_o & m\rho_{eq} & 0 \\ m\rho_{eq} & m\rho_{eq}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m + \frac{J}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_\delta \\ \ddot{\varphi}_\delta \\ \ddot{\rho}_\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mg\rho_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\delta \\ \varphi_\delta \\ \rho_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_\delta \\ \tau_\delta \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Ahora obtengamos un conjunto de modelos simplificados en un punto de vista de entrada-salida. En un sistema lineal esto siempre es posible si resulta ser plano, por consecuencia controlable, tal y como se vio en la sección 2.3. Una inspección rápida de las ecuaciones (B.8) nos muestra que la linealización tangente del sistema resulta ser plana, considerando como una salida plana, la linealización tangente alrededor del punto de equilibrio (B.7) de la salida plana propuesta en la subsección 3.1.2, donde sus componentes se dan en las expresiones (3.10), es decir

$$y_{1\delta} = x_\delta + \rho_{eq}\varphi_\delta, \quad y_{2\delta} = \rho_\delta \quad (\text{B.9})$$

son las componentes de una salida plana del sistema lineal (B.8). Podemos expresar fácilmente la derivada de mayor orden de $y_{1\delta}$ dependiendo explícitamente de las entrada de control incremental F_δ , como

$$y_{1\delta}^{(4)} = \frac{g}{\rho_{eq}M_o}F_\delta - \frac{g(m + M_o)}{\rho_{eq}M_o}\ddot{y}_{1\delta} \quad (\text{B.10})$$

así mismo, expresamos la derivada de mayor orden de $y_{2\delta}$ dependiendo explícitamente de las entrada de control incremental τ_δ ,

$$\ddot{y}_{2\delta} = -\frac{R}{mR^2 + J}\tau_\delta \quad (\text{B.11})$$

Como podemos notar, hemos obtenido dos sistemas con grados relativos 4 y 2, respectivamente, siendo la suma de ellos dos igual al orden total del sistema lineal (B.8). Ahora, adoptamos la forma (2.41) presentada en la subsección 2.4.2 para cada una de las derivadas de mayor orden de $y_{1\delta}$ y $y_{2\delta}$, respectivamente, obtenemos dos sistemas puramente integradores con ganancias no unitarias en una versión perturbada

$$y_{1\delta}^{(4)} = \beta_1 F_\delta + \xi_1(t) \quad (\text{B.12})$$

$$\ddot{y}_{2\delta} = \beta_2 \tau_\delta + \xi_2(t) \quad (\text{B.13})$$

donde las ganancias de las entradas de control son:

$$\beta_1 = \frac{g}{\rho_{eq}M_o}, \quad \beta_2 = -\frac{R}{mR^2 + J}$$

Ah pesar de que $\xi_2(t) = 0$ para el sistema (B.11), hemos decidido incluirlo, ya que, aun cuando los esquemas de control GPI robusto se diseñan en el enfoque de entrada-salida de la linealización tangente del sistema no lineal, estos se aplican al sistema no lineal y *no* al sistema lineal resultante de la linealización tangente. Por lo que los términos de perturbación $\xi(t)$ no solamente incluyen los términos lineales adicionales al esquema entrada-salida, sino que además incluyen perturbaciones relacionadas a no linealidades no modeladas, términos de interacción con otros sistemas, posibles perturbaciones externas ajenas al modelo, en otras palabras, todo lo que no se incluye en la descripción del esquema entrada-salida.

B.3. Control GPI robusto aplicado al sistema no lineal en el enfoque de la linealización tangente

Hemos obtenido dos sistemas puramente integradores en una versión perturbada, los cuales describen la dinámica del sistema no lineal en una región del punto de equilibrio (B.7), ahora es posible diseñar un esquema de control GPI robusto en un enfoque de entrada-salida de cada uno de los sistemas. Consideremos la dinámica del error de seguimiento correspondiente a las trayectorias $y_{1\beta}^*$ y $y_{2\beta}^*$ para cada uno de los sistemas (B.12) y (B.13), respectivamente. Ignorando los términos de perturbación, obtenemos las siguientes expresiones para el sistema (B.12)

$$e_{y_{1\delta}}^{(4)} = e_{\tau_\delta}, \quad e_{y_{1\delta}} = y_{1\delta} - y_{1\delta}^*, \quad e_{F_\delta} = F_\delta - F_\delta^*, \quad F_\delta^* = [y_{1\delta}^*]^{(4)} \quad (\text{B.14})$$

así mismo, para el sistema (B.13) se tiene

$$\ddot{e}_{y_{2\delta}} = e_{\tau_\delta}, \quad e_{y_{2\delta}} = y_{2\delta} - y_{2\delta}^*, \quad e_{\tau_\delta} = \tau_\delta - \tau_\delta^*, \quad \tau_\delta^* = [y_{2\delta}^*]^{(2)} \quad (\text{B.15})$$

Se sabe que para el diseño de un controlador GPI en un sistema puramente integrador solo es necesario conocer el orden del sistema y la ganancia que acompaña a la entrada de control, la robustez de un controlador se consigue añadiendo términos integrales extra llamados filtros planos los cuales puedan aniquilar posibles perturbaciones modeladas ultra localmente donde solo se sabe que son funciones uniformes y absolutamente acotadas. El controlador GPI robusto dado en la expresión (4.9) diseñado para un sistema lineal de orden 4 en la sección 4.1, puede implementarse fácilmente a la dinámica del error de seguimiento (B.14), con una ligera modificación en la ganancia, es decir,

$$F_\delta(t) = F_\delta^*(t) - \frac{1}{\beta_1} \left(\frac{k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s(s^3 + k_7 s^2 + k_6 s + k_5)} \right) (y_{1\delta}(t) - y_{1\delta}^*(t)) \quad (\text{B.16})$$

Donde el polinomio característico en lazo cerrado es el mismo que se presenta en expresión (4.6) y los parámetros de sintonización se relacionan como en (4.7), todo de la sección 4.1.

Para la dinámica del error de seguimiento (B.15) se implementa el control GPI robusto (2.53) diseñado para un sistema lineal de orden 2 en la sección 2.4, con una modificación, así mismo, en la ganancia

$$\tau_\delta(t) = \tau_\delta^*(t) - \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s(s + k_3)} \right) (y_{2\delta}(t) - y_{2\delta}^*(t)) \quad (\text{B.17})$$

Donde el polinomio característico en lazo cerrado es el mismo que se presenta en expresión (2.50) y los parámetros de sintonización se relacionan como en (2.51), todo de la sección 2.4.

La implementación de los controladores al sistema no lineal (3.9), se aprecia en la figura B.1.

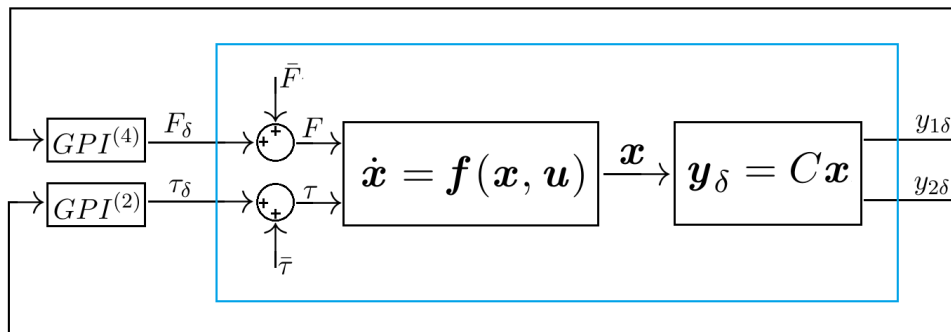


Figura B.1: Esquema de la implementación de los controladores GPI robustos al modelo no lineal de la grúa viajera, diseñados en un enfoque de una linealización tangente.

B.3.1. Simulaciones

Se desea realizar un seguimiento de trayectoria tal y como se hizo en la sección 4.1, proponiendo trayectorias de tipo descanso-descanso generadas por los polinomios de Bézier con los mismos valores inicial y final (4.10) para $y_{1\delta}(t)$, los valores inicial y final (4.11) para $y_{2\delta}(t)$ y, con una rapidez igual (4.12). Los parámetros físicos que se usan en las simulaciones son los mismos que se presentan en la tabla 4.1. Es claro que $x_{eq} = y_{1\delta_i}$ y $\rho_{eq} = y_{2\delta_f}$, con $y_{1\delta_i}$ y $y_{2\delta_f}$ los valores iniciales de $y_{1\delta}(t)$ y $y_{2\delta}(t)$, respectivamente.

Los parámetros de sintonización para cada uno de los controladores son:

$$w_n^1 = 20, \quad \zeta_1 = 1$$

$$w_n^2 = 20, \quad \zeta_2 = 1$$

El desempeño del sistema en lazo cerrado, de ningún modo es el deseado. Tal y como se puede apreciar en la figura B.2, el sistema en lazo cerrado es muy inestable, siendo que; los errores de seguimiento de ningún modo convergen a cero, además hay una saturación considerable por parte de los controladores, por motivos de brevedad no se muestra el comportamiento de las entradas de control.

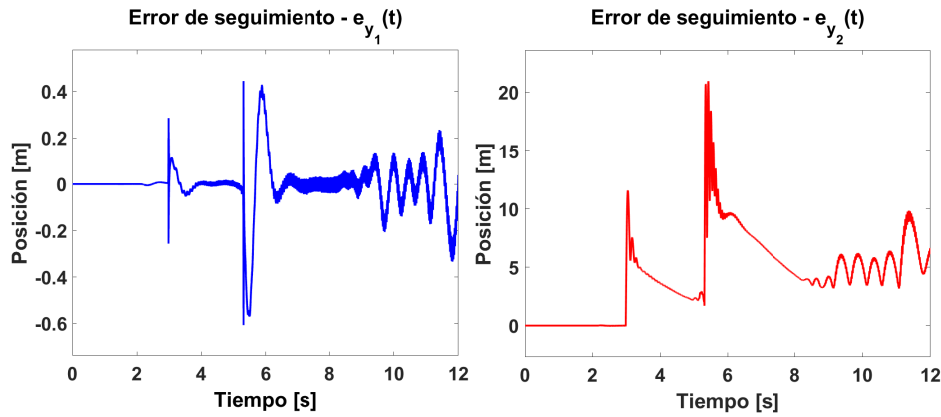


Figura B.2: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectoria.

Recordemos que se impuso un seguimiento de trayectoria en dos movimientos simultáneos, es decir, el desplazamiento del carro en el eje horizontal y la elevación de la carga. La salida $y_{1\delta}$ depende de la componente ρ_{eq} del punto de equilibrio, el cual corresponde al valor de la longitud del cable ρ en condiciones iniciales en equilibrio (B.7), al elevarse la carga, el sistema lineal comienza alejarse de la región del punto de equilibrio donde hay una cierta validez con el sistema no lineal y los controladores son capaces de estimar no linealidades e interacciones entre los sistemas virtualmente desacoplados. En palabras más concretas, al haber un cambio en la longitud del cable, la dinámica del carro que es influenciada por el cambio en la longitud del cable se vuelve inobservable para el controlador aplicado en la fuerza F . Así mismo, la inestabilidad en la trayectoria de la salida $y_{1\delta}(t)$, se ve reflejada en el desempeño del segundo controlador aplicado a τ debido al alejamiento del sistema lineal de la región de validez. Además, la única variable observable para el segundo controlador es la longitud del cable, por lo que no es posible para este, estimar la posición vertical de la carga influenciada por la desviación angular φ cuando esta es muy grande. Podemos asumir que el desempeño por parte de los controladores se ve afectado considerablemente cuando el sistema no lineal se aleja mucho de la región de validez con el sistema lineal.

Consideremos trayectorias donde el sistema permanezca en una región cercana al punto de equilibrio, como, por ejemplo: el desplazamiento del carro sin la elevación de la carga, así mismo, una segunda forma, considerando la elevación de la carga sin el desplazamiento del carro. En la figura B.3

se muestra el seguimiento de trayectoria para el primer caso. El sistema se estabiliza rápidamente a las trayectorias deseadas. Podemos ver que, para un rango de una variación pequeña en la longitud del cable, el primer controlador es capaz de estimar el comportamiento no lineal del sistema y estabilizarlo rápidamente. Esto se puede ver más claro en la figura B.6 la cual muestra las componentes de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ del sistema no lineal, donde puede verse un rápida estabilización a cero en las pequeñas oscilaciones de la desviación angular φ . Las pequeñas variaciones de magnitud insignificante presentes en la longitud del cable debido al movimiento pendular de la carga son rápidamente suprimidas, esto se refleja en la acción del segundo control presentado en la figura B.4.

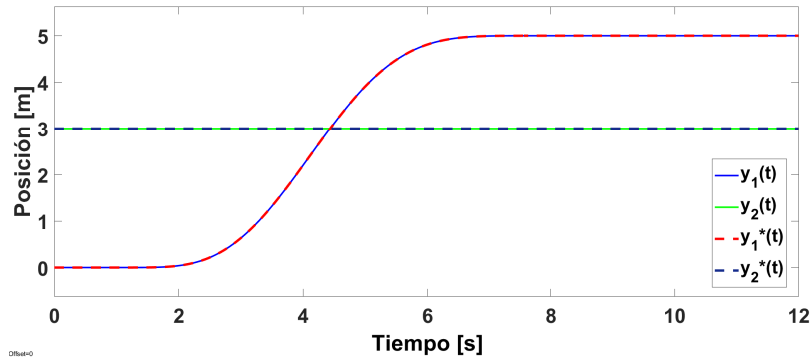


Figura B.3: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

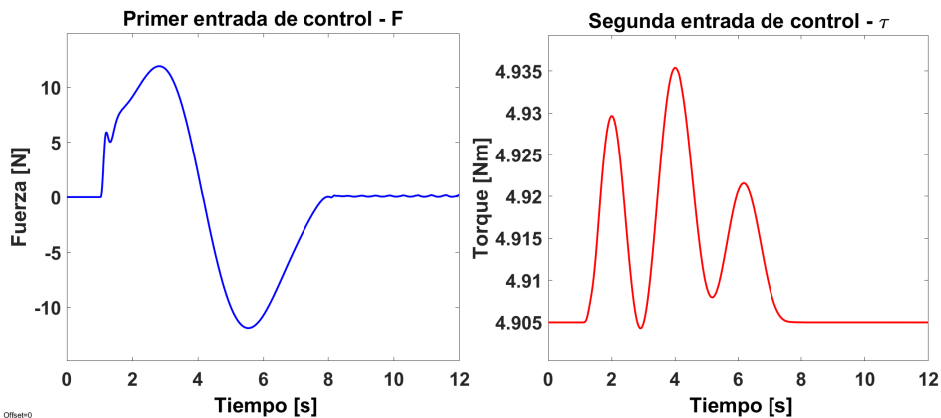


Figura B.4: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

Ahora consideremos un seguimiento de trayectoria considerando la elevación de la carga sin el desplazamiento del carro. En la figura B.7 se muestra el seguimiento de trayectoria. Es claro que el sistema en lazo cerrado alcanza una estabilidad de forma rápida. En la figura B.10 podemos apreciar que el movimiento en la elevación de la carga no perturba de ninguna manera a la dinámica del carro, este hecho se puede apreciar también en el comportamiento del error de seguimiento $e_{y_1}(t)$ presentado en la figura B.9, el cual siempre permanece con valor cero, así mismo, se puede ver en la figura B.8 que la acción del control en la fuerza F es nula.

Como podemos apreciar, el desempeño de los controladores es muy satisfactorio cuando se consideran trayectorias donde impliquen movimientos horizontales y verticales independientes en la carga.

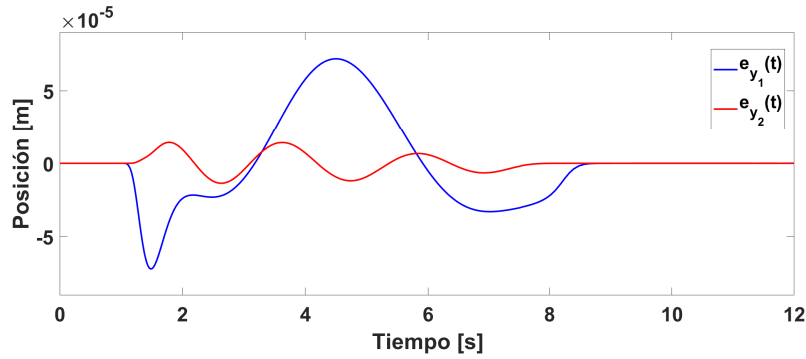


Figura B.5: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectorias no simultáneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

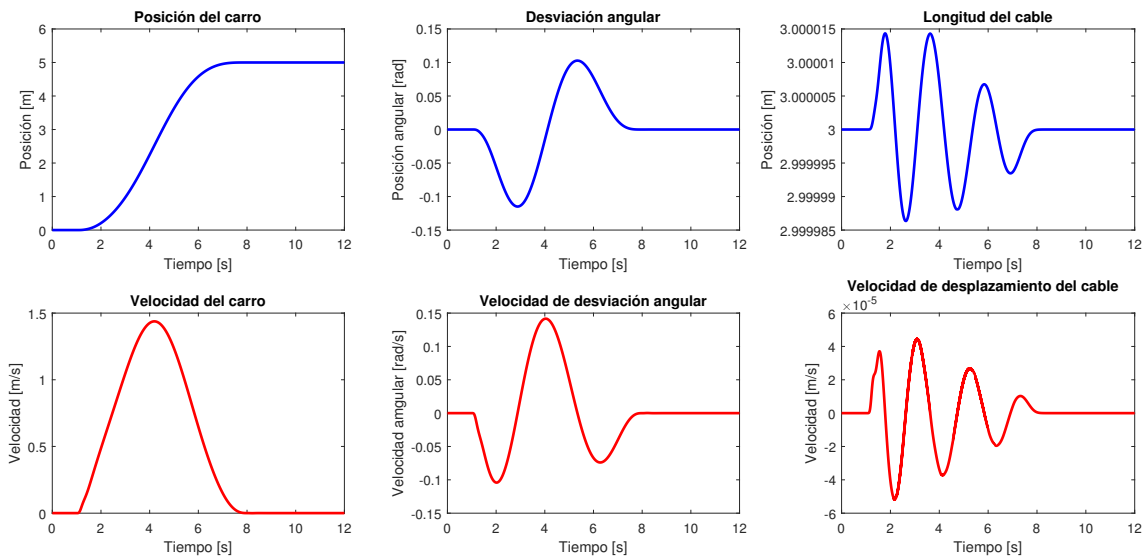


Figura B.6: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las componentes de q y \dot{q} en el seguimiento de trayectorias no simultáneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

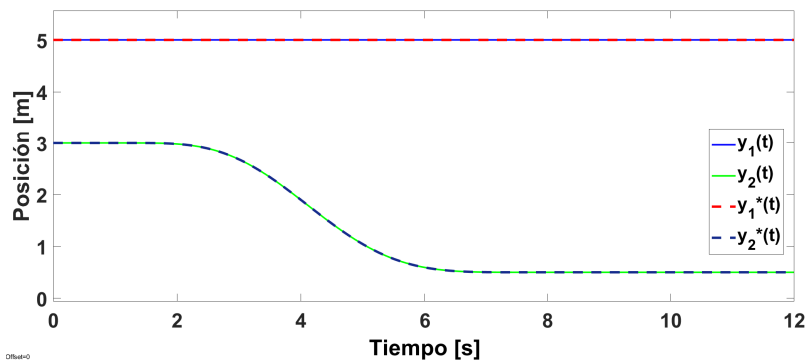


Figura B.7: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Desempeño del seguimiento de trayectorias no simultáneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).

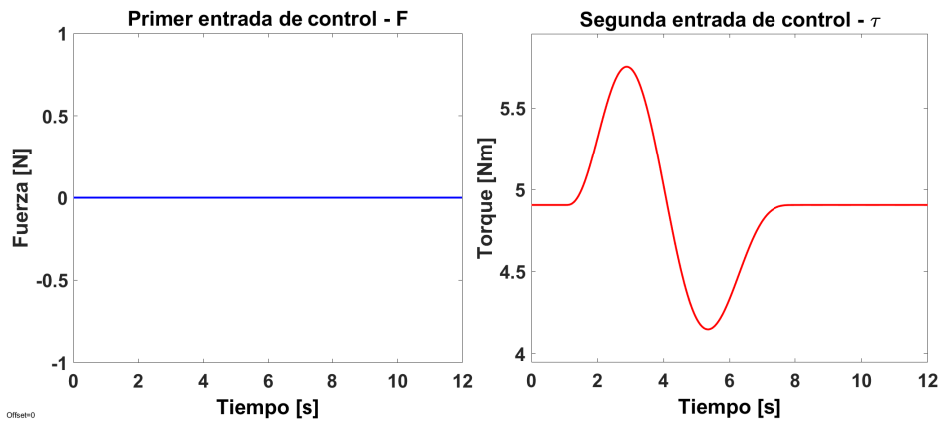


Figura B.8: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las entradas de control en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).

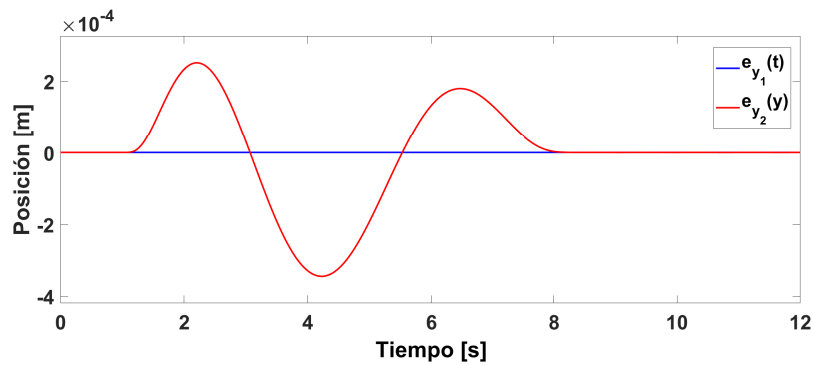


Figura B.9: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Errores de seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).

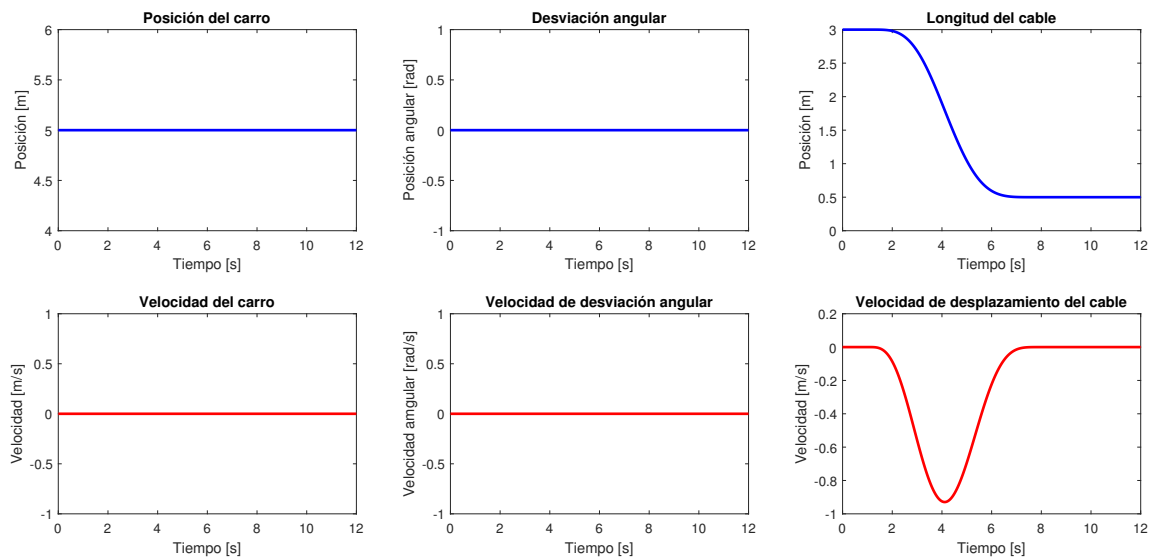


Figura B.10: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera. Comportamiento de las componentes de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).

B.4. Control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada aplicado al modelo simplificado de la grúa viajera con motores usando acoplamiento de los modelos

Como un último punto, se considera el sistema del modelo simplificado de la grúa viajera con motores mediante el acoplamiento de los modelos, partiendo de la linealización tangente del modelo de la grúa viajera obtenida en la sección anterior para luego incluir la dinámica de los motores como una extensión del sistema mecánico de la grúa. Consideremos el modelo del motor síncrono de imanes permanentes en el eje de referencia $D - Q$ presentado en las ecuaciones (3.75), (3.76) y (3.77) de la sección 3.3.

Consideremos primero un único motor acoplado a una rueda del carro. Por las mismas razones que se explican en la sección 3.4, sabemos que existe una relación entre el ángulo mecánico θ_o medido en el eje del motor, con el desplazamiento horizontal del carro x , la cual es: $\theta = \frac{x}{R_o}$. Como solo se considera un motor acoplado a una rueda del carro, la relación entre la fuerza F y el par mecánico τ_o ejercido por el motor, es: $F = \frac{\tau_o}{R_o}$.

Escribimos las ecuaciones del motor síncrono de imanes permanentes en términos de las variables x y F para el motor acoplado a la rueda

$$\begin{aligned} L \left(\frac{di_{d_F}}{dt} \right) &= -R_m i_{d_F} + \frac{N_r \dot{x} L i_{q_F}}{R_o} + v_{d_F} \\ L \left(\frac{di_{q_F}}{dt} \right) &= -R_m i_{q_F} - (N_r L i_{d_F} + K_m) \frac{\dot{x}}{R_o} + v_{q_F} \\ J_m \frac{\ddot{x}}{R_o} &= K_m i_{q_F} - B_m \frac{\dot{x}}{R_o} - F R_o \end{aligned}$$

Ahora consideremos el motor acoplado al cilindro de enrollamiento. Por las mismas razones que se explican en la sección 3.4, sabemos que existe una relación entre el ángulo mecánico θ_c medido en el eje del motor, con la longitud del cable ρ , la cual es: $\theta = \frac{x}{R_o}$. La relación entre el par mecánico de control τ y el par mecánico τ_c ejercido por el motor, es simplemente: $\tau = \tau_c$.

Escribimos las ecuaciones del motor síncrono de imanes permanentes en términos de las variables ρ y τ para el motor acoplado al cilindro, considerando la convención del signo asignado al par mecánico τ

$$\begin{aligned} L \left(\frac{di_{d_\tau}}{dt} \right) &= -R_m i_{d_\tau} + \frac{N_r \dot{\rho} L i_{q_\tau}}{R} + v_{d_\tau} \\ L \left(\frac{di_{q_\tau}}{dt} \right) &= -R_m i_{q_\tau} - (N_r L i_{d_\tau} + K_m) \frac{\dot{\rho}}{R} + v_{q_\tau} \\ J_m \frac{\ddot{\rho}}{R} &= K_m i_{q_\tau} - B_m \frac{\dot{\rho}}{R} + \tau \end{aligned}$$

Despejando F y τ de las terceras ecuaciones del motor acoplado a la rueda y el motor aplicado al cilindro, respectivamente, y sustituyendo ambas ecuaciones en las ecuaciones (2.51) del modelo simplificado de la grúa viajera, obtenemos las siguientes ecuaciones con algunas simplificaciones

$$(m + M_O) \ddot{x} + m \rho \ddot{\varphi} \cos \varphi + m \ddot{\rho} \sin \varphi + 2m \dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \varphi - m \rho \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \frac{K_m i_{q_F}}{R_o} - B_m \frac{\dot{x}}{R_o}$$

$$m \rho \ddot{x} \cos \varphi + m \rho^2 \ddot{\varphi} + 2m \rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + m g \rho \sin \varphi = 0$$

$$m \ddot{x} \sin \varphi + \left(m + \frac{J_O}{R^2} \right) \ddot{\rho} - m \rho \dot{\varphi}^2 - m g \cos \varphi = \frac{K_m i_{q_\tau}}{R} - B_m \frac{\dot{\rho}}{R^2}$$

con $M_O = M_o + \frac{J_m}{R_o^2}$, y $J_O = J + J_m$.

Consideremos una linealización tangente de las ecuaciones anteriores, alrededor de un punto de equilibrio, el cual está dado como

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{eq} \\ 0 \\ \rho_{eq} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{\varphi}} \\ \dot{\bar{\rho}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{i}_{qF} \\ \bar{i}_{q\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{mgR}{K_m} \end{pmatrix}$$

La linealización tangente en términos de las variables incrementales es

$$(m + M_O)\ddot{x}_\delta + m\rho_{eq}\ddot{\varphi}_\delta = \frac{K_m i_{qF\delta}}{R_o}$$

$$m\rho_{eq}\ddot{x}_\delta + m\rho_{eq}^2\ddot{\varphi}_\delta + mg\rho_{eq}\varphi_\delta = 0$$

$$\left(m + \frac{J_O}{R^2}\right)\ddot{\rho}_\delta = \frac{K_m i_{q\tau\delta}}{R}$$

Ahora consideremos obtener un conjunto de modelos simplificados, en un punto de vista de entrada-salida con la inclusión de los motores, considerando como salidas las mismas que se presentan en (B.9). Expresemos $i_{qF\delta}$ en términos de la salida $y_{1\delta}$ y sus derivadas,

$$i_{qF\delta} = \frac{(m + M_O)R_o}{K_m}\ddot{y}_{1\delta} + \frac{M_O\rho_{eq}R_o}{gK_m}y_{1\delta}^{(4)} \quad (\text{B.18})$$

derivando una vez respecto al tiempo la ecuación anterior, obtenemos

$$\frac{di_{qF\delta}}{dt} = \frac{(m + M_O)R_o}{K_m}y_{1\delta}^{(3)} + \frac{M_O\rho_{eq}R_o}{gK_m}y_{1\delta}^{(5)} \quad (\text{B.19})$$

Sustituyendo (B.18) y (B.19) en la segunda ecuación del motor acoplado a la rueda, obtenemos

$$\begin{aligned} & L \left(\frac{(m + M_O)R_o}{K_m}y_{1\delta}^{(3)} + \frac{M_O\rho_{eq}R_o}{gK_m}y_{1\delta}^{(5)} \right) \\ &= -R_m \left(\frac{(m + M_O)R_o}{K_m}\ddot{y}_{1\delta} + \frac{M_O\rho_{eq}R_o}{gK_m}y_{1\delta}^{(4)} \right) - (N_r L i_{dF} + K_m) \frac{\dot{\rho}}{R} + v_{qF} \end{aligned}$$

Adoptando la forma de un sistema puramente integrador con ganancia no unitaria en una versión perturbada para la derivada de mayor orden de $y_{1\delta}$ dependiendo explícitamente de la entrada de control v_{qF} , obtenemos el modelo simplificado como

$$y_{1\delta}^{(5)} = \beta_{F_1} v_{qF} + \xi_{F_1}(t) \quad (\text{B.20})$$

A saber, de la subsección 3.3.1, que i_d es la otra componente de la salida plana del motor síncrono de imanes permanentes, para la primer ecuación del motor acoplado a la rueda, podemos escribir el modelo simplificado relacionado con la salida i_{dF} , como

$$i_{dF}^{(1)} = \beta_{F_2} v_{dF} + \xi_{F_2}(t) \quad (\text{B.21})$$

Ahora, expresemos $i_{q\tau\delta}$ en términos de la salida $y_{2\delta}$ y sus derivadas,

$$i_{q\tau\delta} = \frac{mR^2 + J_O}{RK_m}\ddot{y}_{2\delta} \quad (\text{B.22})$$

derivando una vez respecto al tiempo la ecuación anterior, obtenemos

$$\frac{di_{q\tau\delta}}{dt} = \frac{mR^2 + J_O}{RK_m}y_{2\delta}^{(3)} \quad (\text{B.23})$$

y sustituyendo (B.22) y (B.23) en la segunda ecuación del motor acoplado al cilindro, obtenemos

$$L \left(\frac{mR^2 + J_O}{RK_m} y_{2\delta}^{(3)} \right) = -R_m \left(\frac{mR^2 + J_O}{RK_m} \ddot{y}_{2\delta} \right) - (N_r L i_{d_r} + K_m) \frac{\dot{\rho}}{R} + v_{q_r}$$

De forma análoga, obtenemos un sistema puramente integrador con ganancia no unitaria en una versión perturbada para la derivada de mayor orden de $y_{2\delta}$ dependiendo explícitamente de la entrada de control v_{q_r} , como

$$y_{2\delta}^{(3)} = \beta_{\tau_1} v_{q_r} + \xi_{\tau_1}(t) \quad (\text{B.24})$$

Y de forma análoga, para la primera ecuación del motor acoplado a la rueda, podemos escribir el modelo simplificado relacionado con la salida i_{d_r} , como

$$i_{d_r}^{(1)} = \beta_{\tau_2} v_{d_r} + \xi_{\tau_2}(t) \quad (\text{B.25})$$

Las ganancias de las entradas de control para cada uno de los modelos simplificados (B.20), (B.21), (B.24) y (B.25) respectivamente, son:

$$\beta_{F_1} = \frac{gK_m}{M_O \rho_{eq} R_o L}, \quad \beta_{F_2} = \frac{1}{L}, \quad \beta_{\tau_1} = \frac{RK_m}{(mR^2 + J)L}, \quad \beta_{\tau_2} = \frac{1}{L}$$

Hemos obtenido cuatro modelos simplificados debido a que, disponemos de 4 entradas de control y por consecuencia 4 salidas. Tenemos que, el sistema (B.20) es de orden 5, el sistema (B.24) de orden 3, y los sistemas (B.21) y (B.25) de orden 1.

Hemos diseñado a lo largo de este trabajo, controladores GPI robustos para sistemas puramente integradores de orden 1, orden 2, orden 3 y orden 4, pero no tenemos ningún controlador GPI robusto para un sistema de orden 5. Sin mostrar el desarrollo completo, para el sistema (B.20) proponemos el siguiente controlador GPI robusto para la dinámica del error de seguimiento correspondiente a la trayectoria $y_{1\delta}^*$,

$$v_{q_r}(t) = v_{q_r}^*(t) - \frac{1}{\beta_{F_1}} \left(\frac{k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s(s^4 + k_9 s^3 + k_8 s^2 + k_7 s + k_6)} \right) (y_{1\delta}(t) - y_{1\delta}^*(t))$$

derivado de la forma (2.43) mostrado en la subsección 2.4.2, con $v_{q_r}^* = [y_{1\delta}^*]^{(5)}$. El polinomio característico en lazo cerrado es de la forma

$$p(s) = s^9 + k_8 s^8 + k_7 s^7 + k_6 s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0$$

tal y como lo propone la expresión (2.44) de la subsección 2.4.2. Podemos obtener expresiones similares tal y como se propuso en los otros controladores, de los coeficientes del polinomio característico en función de los valores de coeficientes de polinomios Hurwitz de segundo orden; ζ y ω_n , tal y como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} k_0 &= (\omega_n)^{10} \\ k_1 &= 10\zeta(\omega_n)^9 \\ k_2 &= 40\zeta^2(\omega_n)^8 + 5(\omega_n)^8 \\ k_3 &= 80\zeta^3(\omega_n)^7 + 40\zeta(\omega_n)^7 \\ k_4 &= 80\zeta^4(\omega_n)^6 + 120\zeta^2(\omega_n)^6 + 10(\omega_n)^6 \\ k_5 &= 32\zeta^5(\omega_n)^5 + 160\zeta^3(\omega_n)^5 + 60\zeta(\omega_n)^5 \\ k_6 &= 80\zeta^4(\omega_n)^4 + 120\zeta^2(\omega_n)^4 + 10(\omega_n)^4 \\ k_7 &= 80\zeta^3(\omega_n)^3 + 40\zeta(\omega_n)^3 \\ k_8 &= 40\zeta^2(\omega_n)^2 + 5(\omega_n)^2 \\ k_9 &= 10\zeta\omega_n \end{aligned}$$

Es fácil ver que el controlador GPI robusto dado en la expresión (4.41), diseñado para un sistema puramente integrador de orden 3, en la sección 4.3, puede implementarse fácilmente a la dinámica del error de seguimiento del sistema (B.24), con una modificación análoga en la ganancia, así mismo, el controlador (4.33) para los sistemas (B.21) y (B.25).

B.4.1. Simulaciones

Al igual que en la sección anterior, consideremos un seguimiento de trayectoria análogo, es decir; no consideraremos el desplazamiento del carro y la elevación de la carga en forma simultánea, lo haremos en dos movimientos independientes. Las corrientes directas i_d se fijan a un nivel cero, por las mismas razones que se mencionaron en la sección 4.3. Los parámetros que se usan en las simulaciones para la parte mecánica (grúa) son los mismos que se presentan en la tabla 4.1, mientras que los parámetros para la parte eléctrica (motores) son los mismos que se presentan en la tabla 4.3, para ambos motores. Los parámetros de sintonización para el controlador propuesto en el sistema (B.20) son:

$$\omega_n = 17, \quad \zeta = 1$$

para el controlador propuesto en el sistema (B.21):

$$\omega_n = 100, \quad r = 100, \quad \zeta = 1$$

para el controlador propuesto en el sistema (B.24):

$$\omega_n = 200, \quad \zeta = 1$$

y para el controlador propuesto en el sistema (B.25):

$$\omega_n = 100, \quad r = 100, \quad \zeta = 1$$

En la figura B.11 mostramos el seguimiento de trayectoria para un desplazamiento del carro sin la elevación de la carga. El desempeño del sistema en lazo cerrado es aceptable, pero no óptimo. Como podemos apreciar, se eligió una trayectoria más lenta con el motivo de obtener un buen desempeño, pero sin sacrificar mucho la rapidez de la maniobra.

En la figura B.16 se muestra el seguimiento de trayectoria para la elevación de la carga sin el desplazamiento del carro. Como podemos apreciar en este caso, el desempeño es bastante satisfactorio debido al alto valor en los parámetros de sintonización del controlador aplicado al motor acoplado en el cilindro. Por motivos de brevedad, no mostramos el comportamiento de los voltajes y las corrientes de los motores para este caso.

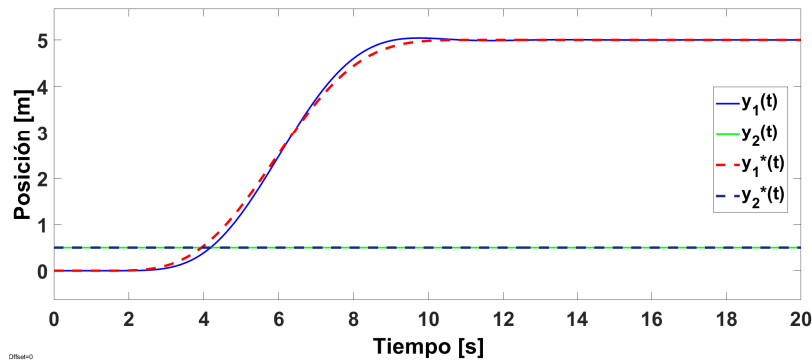


Figura B.11: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Desempeño del seguimiento de trayectorias no simultáneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

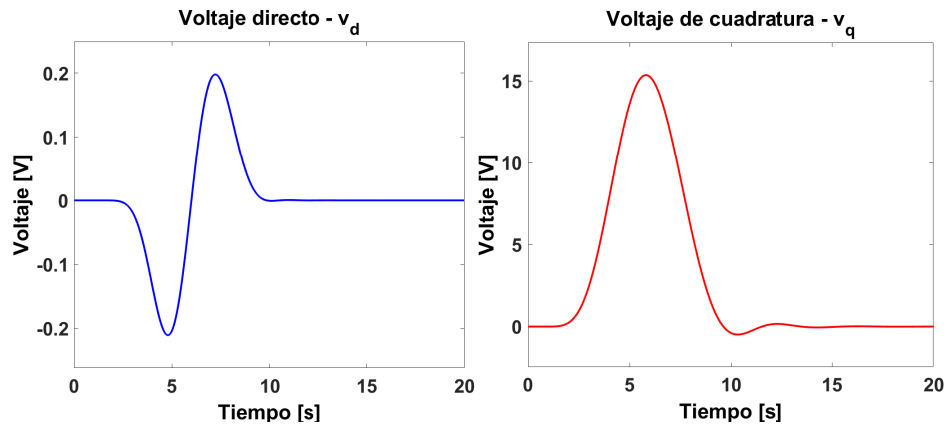


Figura B.12: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Voltajes de control del motor acoplado a la rueda del carro en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

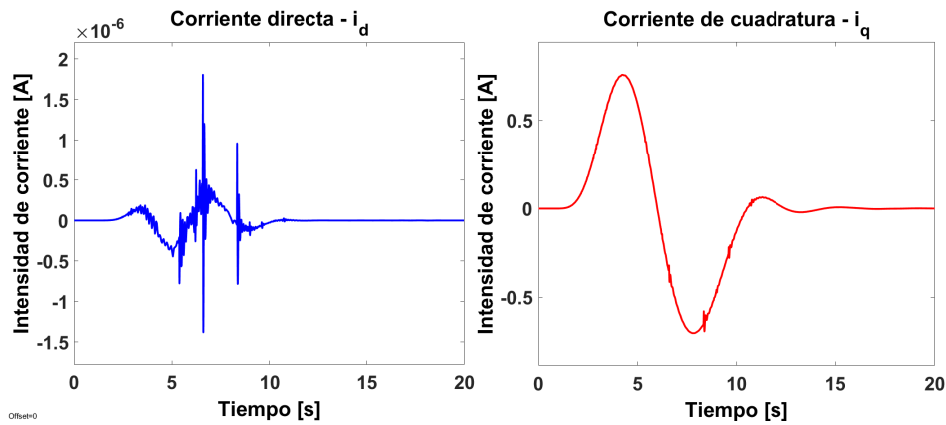


Figura B.13: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Corrientes directa y de cuadratura del motor acoplado a la rueda del carro en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

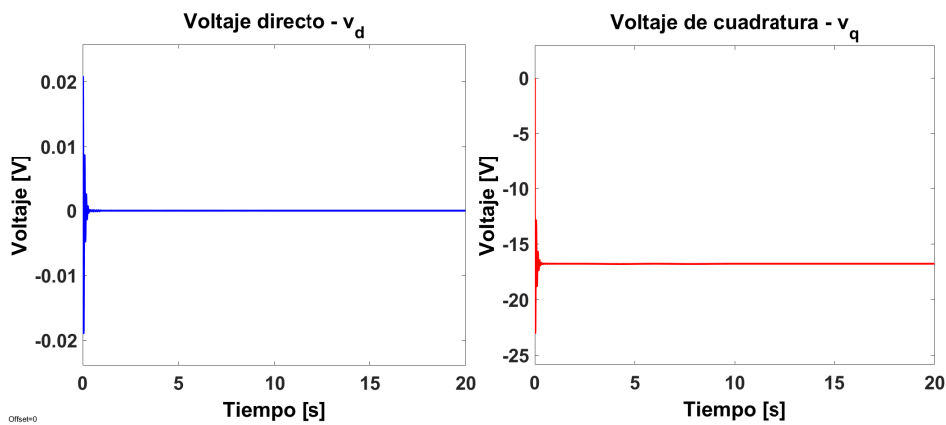


Figura B.14: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Voltajes de control del motor acoplado al cilindro en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

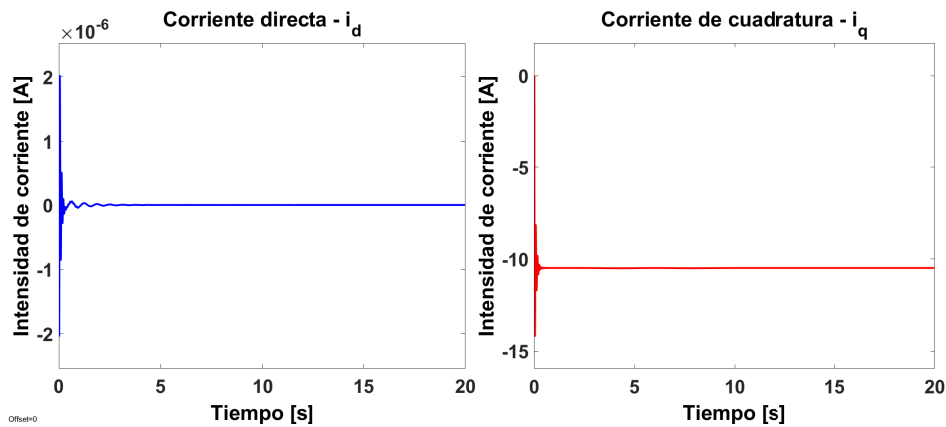


Figura B.15: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Corrientes directa y de cuadratura del motor acoplado al cilindro en el seguimiento de trayectorias no simultaneas (desplazamiento del carro sin la elevación de la carga).

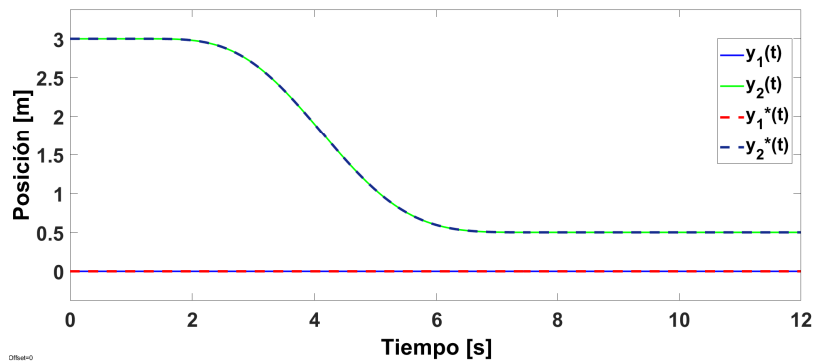


Figura B.16: Simulaciones para el desempeño del esquema de control GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera con motores. Desempeño del seguimiento de trayectorias no simultaneas (elevación de la carga sin el desplazamiento del carro).

Las ventajas del controlador GPI robusto en el enfoque de una linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera se revelan en una exigencia mínima del conocimiento del modelo del sistema, no obstante, el desempeño del controlador en este enfoque es muy inferior al caso del controlador aplicado a la linealización exacta del sistema en el sentido de que solo admite trayectorias en las cuales el sistema se mantenga en la región de validez entre el sistema no lineal y su linealización aproximada, esto es claro, debido a que en el caso del controlador aplicado a la linealización exacta, el controlador está actuando sobre un sistema completamente lineal que aparenta una naturaleza no lineal. Los resultados obtenidos en este apartado no minimizan las capacidades de estimación y robustez del controlador GPI robusto, sino que es debido a la naturaleza inobservable intrínseca que presenta la linealización aproximada del modelo simplificado de la grúa viajera.

Los esquemas de control robusto como el ADRC, FFC, entre otros, diseñados en un enfoque de una linealización aproximada, son invaluable cuando los sistemas no admiten una linealización exacta.