



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Estimación y evaluación experimental de fisuras en
estructuras mecánicas**

Tesis que presenta el:

Ing. Irvin Jesús Navarrete García

Para obtener el Grado de
Maestro en Ciencias

En la Especialidad de
Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis:
Dr. Gerardo Silva Navarro
Dr. Francisco Beltrán Carbajal

"No busco, en efecto, entender para creer, sino que creo para entender. Pues creo esto, porque si no creyere, no entendería."

San Anselmo de Canterbury

Agradecimientos

A mis Padres

Por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida, enseñarme a trabajar, enseñarme a siempre seguir adelante y por darme buenos consejos.

A mis Hermanos

Por las palabras que constantemente me motivan a ser mejor persona y por el apoyo que en todo momento me brindan.

A mi hijo

Por la motivación que me genera para ser mejor persona y para crecer profesionalmente..

A mis Compañeros de generación

Por brindarme todo su apoyo en los momentos difíciles y por todas las experiencias compartidas.

A los doctores Gerardo Silva Navarro y Francisco Beltrán Carbajal

Por sus consejos, su apoyo y las revisiones que hicieron que esta tesis llegara a buen término.

Al CINVESTAV

Por darme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría.

Al CONACYT

Por proporcionarme una beca de tiempo completo para poder realizar mis estudios de maestría.

Resumen

En este trabajo se analiza y estudia el comportamiento dinámico de una viga en cantilever, a través de la teoría de vigas tipo Euler-Bernoulli, logrando obtener la función característica y los desplazamientos modales de la viga. Utilizando métodos de elemento finito se discretiza la viga en cantilever en 100 elementos y 101 nodos con 200 grados de libertad y se desarrollan las matrices globales de masa y rigidez para construir la ecuación de movimiento de la viga. Además, a través de un ejemplo se ilustra el diseño y aplicación de la identificación algebraica para sistemas dinámicos. Con el fin de modelar una viga agrietada, se discretiza la viga en N elementos y utilizando conceptos como la energía de deformación y factores de intensidad de esfuerzos se obtiene la matriz de rigidez del elemento agrietado, donde finalmente esta matriz se ensambla a la matriz global de rigidez de la viga. También, debido a la presencia de una grieta, se obtiene información sobre los cambios en las frecuencias naturales y en las formas modales de la viga, y para verificar los resultados obtenidos se simula la viga con y sin grieta con herramientas computacionales de elemento finito, para comparar los resultados. Se evalúa una técnica de identificación algebraica que estime frecuencias naturales para que, con dichas frecuencias estimadas, se logre aproximar la ubicación de la grieta. Se presentan algunos resultados experimentales obtenidos en laboratorio, con datos de diversas pruebas de análisis modal con martillo de impacto.

Abstract

In this work the dynamic behavior of a cantilever beam is analyzed and studied through the Euler-Bernoulli beam theory, obtaining the characteristic function and modal displacements of the beam. By using finite element methods the cantilever beam is discretized into 100 elements and 101 nodes with 200 degrees of freedom and global matrices of mass and stiffness are developed to construct the equations of motion of the beam. Furthermore, an illustrative example for the design and application of algebraic identification for dynamic systems is presented. In order to model a cracked beam, the beam is discretized in N elements and employing concepts such as deformation energy and stress intensity factors, the stiffness matrix of the cracked element, where is obtained where this matrix is finally assembled to the global stiffness matrix of the beam. Also, due to the presence of a crack, information such as changes on natural frequencies and modal shapes, and to verify the results obtained, the beam with and without crack is simulated through computational finite element software to compare the results. An algebraic identification technique is evaluated to estimate natural frequencies, such that, through these estimated frequencies, the location of the crack can be approximated. Some experimental results obtained in laboratory are presented, with data from several modal analysis tests using an impact hammer.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Estimación de los parámetros de una grieta en una viga	2
1.3. Importancia del análisis y diagnóstico de fallas en estructuras	3
1.4. Motivación	5
1.5. Objetivo de la tesis	5
1.5.1. Objetivos específicos	5
1.6. Organización de la tesis	6
2. Preliminares	7
2.1. Teoría de vigas de Euler-Bernoulli	7
2.2. Vibración lateral de vigas de sección transversal uniforme	8
2.2.1. Formas modales de una viga en cantilever	11
2.2.2. Frecuencias naturales de una viga en cantilever	13
2.3. Aplicación del método de elemento finito	14
2.3.1. Elemento tipo viga	14
2.3.2. Agrupamiento de matrices de masa y rigidez para un elemento tipo viga	17
2.3.3. Ecuación de movimiento de un elemento tipo viga	19
2.3.4. Viga en cantilever	20
2.4. Fallas en estructuras	22
2.4.1. Fracturas en elementos estructurales	23
2.4.2. Modos de desplazamiento de una grieta	23
2.4.3. Tasa de liberación de energía de Griffith	24
2.4.4. Factores de intensidad del esfuerzo	25
2.5. Aplicación de las técnicas de identificación algebraica	26
3. Análisis de una viga fisurada	33
3.1. Matriz de flexibilidad de una viga agrietada	33
3.2. Matriz de rigidez de una viga agrietada	35
3.3. Comportamiento dinámico de una viga en cantilever con grieta	36
3.3.1. Análisis estructural	37
3.3.2. Análisis modal	38
3.3.3. Análisis estructural y función característica de la viga	42
4. Identificación algebraica de parámetros modales	47
4.1. Estimación de las frecuencias naturales de una viga en cantilever	48
4.2. Generalización del método de identificación algebraica	50

4.3. Resultados en simulación	51
5. Caso de estudio	55
5.1. Análisis modal	57
5.2. Validación experimental	61
5.3. Estimación de frecuencias naturales con datos experimentales	63
6. Conclusiones	67
6.1. Conclusiones generales	67
6.2. Trabajo futuro	67
Bibliografía	68

Lista de Figuras

1.1. Edificios dañados en la Ciudad de México por el sismo del 19 de septiembre de 2017 [3].	1
1.2. México tiene parte de su territorio en el Cinturón de Fuego [3].	3
1.3. Zonas sísmicas de México [23].	4
1.4. Riesgos de colapso en inmuebles [25].	5
2.1. Diagrama de una viga.	7
2.2. Viga tipo Euler-Bernoulli.	8
2.3. Viga deformada [28].	9
2.4. Viga con un extremo empotrado y el otro libre.	11
2.5. Primeros 3 modos de vibración.	13
2.6. Elemento tipo viga [30].	14
2.7. Matrices globales de masa y rigidez [31].	17
2.8. Viga discretizada en 3 elementos.	18
2.9. Viga en cantilever discretizada en 3 elementos.	20
2.10. Primeros 3 modos de vibración.	22
2.11. Elemento mecánico agrietado [34].	23
2.12. a) Modo I, b) Modo II, y c) Modo III [34].	24
2.13. a)Elemento con grieta de longitud $2a$. y b)Elemento con grieta de longitud a [33].	25
2.14. Sistema mecánico de n grados de libertad.	26
2.15. Estimación de masa.	30
2.16. Estimación de rigidez.	31
3.1. Viga agrietada.	33
3.2. Elemento agrietado de la viga.	35
3.3. Viga agrietada	37
3.4. Frecuencias provocadas por las grietas en los 3 primeros modos de vibración.	38
3.5. Primeros 3 modos de vibración con grietas.	39
3.6. Modos de vibración en ANSYS [©] de la viga sagrietada a) Modo I, b) Modo II c) Modo III.	40
3.7. Respuesta frecuencial.	41
3.8. Modo I de vibración para una viga sana y dos vigas agrietadas.	42
3.9. Modo III de vibración para una viga sana y dos vigas agrietadas.	43
3.10. Viga agrietada	43
3.11. a) Modo I, b) Modo II y c) Modo III.	44
4.1. Viga discretizada en $n - 1$ elementos	47
4.2. Viga discretizada en un elemento	48

4.3. Viga empotrada [29].	51
4.4. Señal de salida.	52
4.5. a) ω_1 y b) ω_2	52
5.1. a) Modo I, b) Modo II y c) Modo III.	55
5.2. Viga agrietada	56
5.3.	57
5.4. Modos de vibración en ANSYS [©] de la viga agrietada a) Modo I, b) Modo II c) Modo III d) Modo IV.	58
5.5. Respuesta frecuencial.	59
5.6. Frecuencias naturales a) Modo I, b) Modo II, c) Modo III, d) Modo IV.	60
5.7. Sensor en el extremo libre de la viga.	62
5.8. a) Respuesta en terminos de aceleración de la viga sana y b) Respuesta en terminos de aceleración de la viga agrietada.	62
5.9. a) FRF de la viga sana y b) FRF de la viga agrietada.	63
5.10. Galga extensiométrica colocada en el extremo empotrado y a la mitad de la viga.	64
5.11. a) Respuesta en terminos de desplazamiento de la viga sana b) Respuesta en terminos de desplazamiento de la viga agrietada.	64
5.12. a) Estimación de la primer frecuencia natural de ambas vigas b) Estimación de la segunda frecuencia natural de ambas vigas.	65

Lista de Tablas

2.1. Condiciones de frontera.	11
2.2. Propiedades de la viga.	13
2.3. Datos del sistema mecanico.	29
2.4. Valor real vs valor estimado.	32
3.1. Propiedades de la viga.	37
3.2. Frecuencias naturales.	41
4.1. Valor real vs valor estimado.	53
5.1. Propiedades de la viga.	56
5.2. Frecuencias naturales.	59
5.3. Características de los instrumentos de medición.	61
5.4. Frecuencias naturales.	65

Capítulo 1

Introducción

Los daños y destrucción causados por las fuerzas sísmicas o fuerzas eólicas generan repercusiones en carreteras, puentes, sistemas sociales y naturales, bienes, estructuras civiles, en las personas, entre otros. Desde el punto de vista estructural, tras una fuerza externa, dichas estructuras pueden llegar a colapsar o dañarse de forma irreparable. Por tal motivo, dentro de la República Mexicana existen normas (para el caso de la Ciudad e México son [1, 2]) que se emplean para el diseño de la estructura y para la definición de las cargas. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que no siempre es obligatorio el uso de dichas normas.

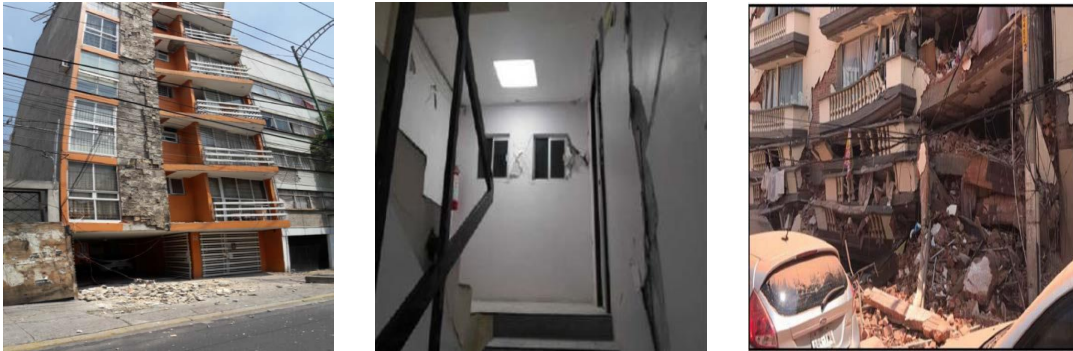


Figura 1.1: Edificios dañados en la Ciudad de México por el sismo del 19 de septiembre de 2017 [3].

Al dañarse una estructura, sin llegar a colapsar, comúnmente presenta fisuras y grietas. Con el fin de atender la estructura de manera oportuna, resulta necesario inspeccionar e identificar la ubicación y magnitud de las fisuras o grietas, para poder interpretar posibles afectaciones que traen consigo y, de esta manera, diagnosticar y aportar soluciones para el diseño o mantenimiento de una estructura.

1.1. Antecedentes

La mecánica de la fractura surgió con los trabajos fundamentales de Griffith (1921,1924) [36] sobre criterios de propagación de grietas en sólidos.

Irwin (1957) [36] introdujo un avance importante en la mecánica de la fractura, ya que planteó el análisis en términos de esfuerzos.

En los años 70's se realizaron las primeras investigaciones para desarrollar algunos métodos para la detección y el seguimiento de fisuras, principalmente en álabes de turbinas, ejes agrietados y vigas agrietadas [4]. Con el fin de obtener información de la grieta, a través de métodos más eficaces que modelen y estimen parámetros de la misma dentro del elemento mecánico, en los años recientes se siguen buscando maneras que contribuyan al desarrollo de dichos métodos. Gran parte de los trabajos va enfocado a elementos mecánicos simples como vigas o estructuras, para nuestro caso de estudio es una viga tipo cantilever, siendo ésta un elemento de gran importancia en la ingeniería, utilizada para aviones de ala fija, estructuras civiles, entre otros.

1.2. Estimación de los parámetros de una grieta en una viga

Una grieta en un elemento mecánico genera localmente aumento de flexibilidad y, debido a esto, da como resultado cambios en la frecuencia natural de dicho elemento. Los parámetros obtenidos ante cambios en la dinámica de la viga ayudan a implementar métodos para estimar la ubicación y la profundidad de una grieta. Algunos de los métodos más utilizados para resolver este problema son: flexibilidad local y cambios en la frecuencia natural.

En [5] se utiliza un método basado en el método de elemento finito, comparando datos modales con respecto a datos propuestos para poder evaluar errores de aproximación. En [6] se utiliza un método que analiza la flexibilidad local a través de conceptos de resorte elástico, y de esta manera estimar parámetros asociados a la grieta. En [7] se utilizan las mediciones de las amplitudes de la viga y sus cambios de frecuencia para estimar la ubicación y profundidad de la grieta. En [8] se utiliza el uso de las llamadas ondeletas o *wavelets* para estimar parámetros de la grieta.

El análisis modal permite interpretar la información acerca de la dinámica de la viga, para poder obtener parámetros como frecuencias naturales, formas modales y desplazamientos, y con estos valores poder formular modelos matemáticos. Los métodos de elemento finito son una herramienta que permite generar los parámetros requeridos para el análisis modal. Con la información que resulta del análisis modal se puede estudiar el comportamiento dinámico de una viga agrietada, como en [9]-[15] y, de esta manera, aplicar o desarrollar algún método para estimar parámetros de una grieta.

La identificación de parámetros es la obtención de modelos representativos de algún sistema dinámico y, a través de ello, encontrar las ecuaciones para describir la dinámica del sistema en un punto específico. Algunas técnicas de identificación de parámetros son: el método por mínimos cuadrados [16], filtros de Kalman [17], método de identificación algebraica de parámetros [18, 19], entre otros.

La identificación algebraica de parámetros es un método que permite realizar la identificación de parámetros en línea, que puede implementarse en tiempo real, y que se utiliza a través de algoritmos y programas computacionales. Los resultados obtenidos tienen un margen de error mínimo y su convergencia al valor deseado es muy rápida.

Como ya se mencionó, la identificación de parámetros modales ayuda a estimar la ubicación y magnitud de la grieta, por lo que, la aplicación de un algoritmo de identificación de parámetros

contribuye a analizar el comportamiento de la grieta dentro de la estructura y de esta manera atenderse de manera oportuna.

1.3. Importancia del análisis y diagnóstico de fallas en estructuras

Por sus características geológicas, la República Mexicana está catalogada como un país con zonas altamente sísmicas, con cientos de temblores al año. La mayoría no son perceptibles, pero algunos resultan devastadores.

México tiene un extenso litoral sobre el Cinturón de Fuego del Pacífico, se asienta sobre 5 placas tectónicas (Placa de Rivera, Placa del Pacífico, Placa de Cocos, Placa del Caribe y Placa de Norteamérica) y cuenta con innumerables fallas [21].

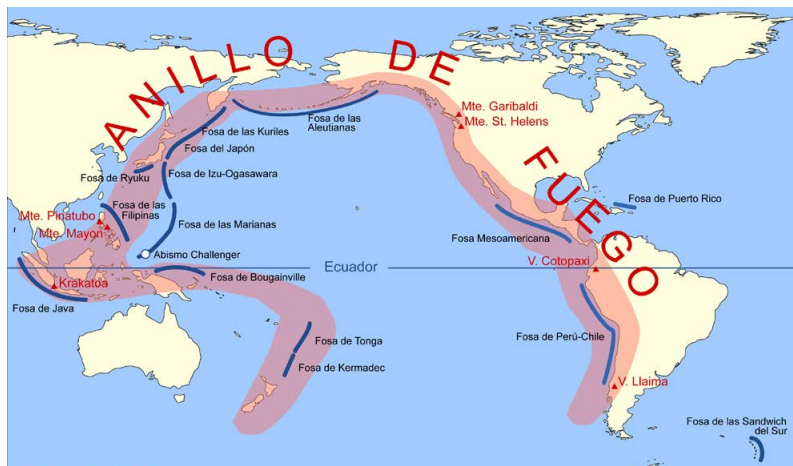


Figura 1.2: México tiene parte de su territorio en el Cinturón de Fuego [3].

La República Mexicana está dividida en cuatro zonas sísmicas, zona A, zona B, zona C y zona D, siendo la zona D donde ocurre mayor actividad sísmica (ver Fig. 1.3). El 90 % de los sismos en el país ocurre frente a las costas del pacífico, lugar donde se juntan las placas llamadas de Cocos y de Norteamérica [22], tan solo el cuadro de sismos de 1900 a 2018 comprende los 305 terremotos de 6 y más grados ocurridos durante esos 118 años, con 102 sismos ocurridos en los estados de Guerrero y Oaxaca.

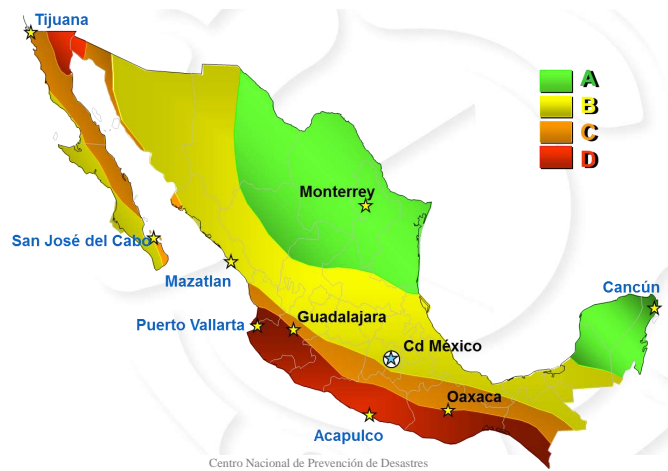


Figura 1.3: Zonas sísmicas de México [23].

Las repercusiones generadas por un sismo se ven reflejadas en la sociedad, en la salud de las personas, en estructuras civiles, entre otros. Para el caso de estructuras civiles, después de la presencia de un sismo, se realiza la evaluación del nivel de daño en dos procedimientos a seguir: la evaluación inmediata del nivel de riesgo de una edificación y la evaluación del nivel de daño estructural y su clasificación [24].

En particular, son importantes los siguientes pasos:

- La evaluación inmediata del nivel de riesgo consiste de una serie de procesos de evaluación posterior al sismo, donde se definirá si la estructura dañada puede constituir un peligro para la vida humana.
- La evaluación del nivel de daño y su clasificación se basa en los resultados de la inspección sobre las condiciones y características de daño que exhiba el edificio, a fin de determinar las condiciones del inmueble.

EERI (1994) adopta una escala de 5 estados de dichas estructuras [25].

- Sin daño.
- Leve. Daños menores en elementos no estructurales. La estructura continua funcionando con normalidad en menos de una semana.
- Moderados. Daños no estructurales considerables, se producen pequeños daños estructurales. La estructura puede estar cerrada hasta por 3 meses. El riesgo que se produzcan pérdidas humanas es mínimo.
- Severos. Los daños estructurales aumentan y es posible que la estructura deba estar cerrada por un periodo largo de tiempo. En el peor de los casos puede ser necesario demoler la estructura. Hay un alto riesgo que se produzcan pérdidas de vidas humanas.
- Total-Colapso o muy severo. Los daños son irreparables y hay la probabilidad muy alta que se produzcan pérdidas de vidas humanas.

Por ejemplo, se muestra en la Fig. 1.4 la cantidad de daños en inmuebles que provocó el sismo del 19 de septiembre de 2017 en la Ciudad de México.



Figura 1.4: Riesgos de colapso en inmuebles [25].

Para disminuir el nivel de impacto destructivo en las estructuras, provocadas tras de un sismo, se requiere de un buen diseño de la construcción y la aplicación de normas como las mencionadas en la Sección 1. Además, es importante evaluar periódicamente las estructuras a través de inspecciones detalladas para conocer su magnitud y nivel de riesgo en el que se encuentran. Todo lo anterior se debe aplicar con el fin prevenir accidentes que perjudiquen a los habitantes.

En este contexto, resulta importante la aplicación de técnicas experimentales y numéricas para la inspección, diagnóstico de fallas y estimación de parámetros asociados a las fallas, como es la determinación y dimensionamiento de fisuras y grietas en diversos elementos estructurales.

1.4. Motivación

La motivación más relevante del presente trabajo es aplicar una técnica de identificación de parámetros que contribuya a obtener información de un elemento mecánico fisurado, en este caso una viga empotrada, y de esta manera interpretar dichas estimaciones para que en un futuro se desarrolle un algoritmo y tecnología para determinar oportunamente la ubicación y magnitud de la grieta dentro de la viga. Por lo tanto, primeramente se necesita conocer el comportamiento dinámico de una viga sana, posteriormente el comportamiento dinámico de una viga agrietada y por último desarrollar una técnica de identificación de parámetros que brinde información del estado real de una viga agrietada.

El trabajo constituye la continuación de la investigación realizada por Jiménez-Sánchez [20].

1.5. Objetivo de la tesis

El objetivo general consiste en desarrollar y evaluar técnicas de identificación de parámetros que generen información del comportamiento dinámico de una viga en cantilever agrietada y, de esta manera, aproximar la ubicación y magnitud de la grieta.

1.5.1. Objetivos específicos

Algunos de los objetivos específicos del trabajo son:

- Conocer el comportamiento dinámico de una viga en cantilever a través de la función característica desarrollada por la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.
- Obtener la matriz de rigidez de un elemento agrietado dentro de la viga.

- Con ayuda de los métodos de elemento finito comparar y evaluar las formas modales de una viga agrietada con respecto de una viga sana.
- Desarrollar y aplicar técnicas de identificación algebraica de parámetros, que brinden información de una viga en cantilever agrietada.
- Realizar pruebas experimentales de análisis modal para validar los resultados.

1.6. Organización de la tesis

El trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se realiza una breve descripción de la teoría de vigas tipo Euler-Bernoulli y, posteriormente, a través del método de elemento finito se modela una viga empotrada y se obtiene su ecuación característica. Además se presenta una breve introducción de elementos mecánicos fracturados y, por último, mediante un ejemplo se describe el diseño y desarrollo de una técnica de identificación algebraica para estimar sus parámetros. En el Capítulo 3 se desarrolla el modelado de una viga agrietada, se obtiene la matriz de rigidez debida a la presencia de una grieta, se presentan los efectos provocados por la grieta sobre el comportamiento dinámico de la viga y, con el fin de comparar resultados, se obtienen las frecuencias naturales y formas modales en la plataforma ANSYS[®]. Además, a través de la función característica de la viga se obtiene una aproximación gráfica de la grieta para varios casos. En el Capítulo 4 se estudia e implementa una técnica de identificación algebraica para estimar las frecuencias naturales y con un programa en Matlab[®] se realizan simulaciones. En el Capítulo 5 se aborda el caso de estudio, por lo que se obtienen las frecuencias naturales y formas modales de dicha viga de forma analítica y en ANSYS[®]. Asimismo, se presentan algunos resultados experimentales aplicando la técnica de análisis modal experimental, para obtener datos de una viga sana y una agrietada a partir de pruebas con martillo de impacto. Finalmente, en el Capítulo 6 se describen algunas de las conclusiones del trabajo y sus perspectivas.

Capítulo 2

Preliminares

Una viga es un elemento estructural lineal, su material es elástico lineal y pueden modelarse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Comúnmente la viga se utiliza para soportar esfuerzos a flexión por lo que en gran medida, su diseño se realiza para soportar cargas grandes. La forma geométrica de la viga está representada en 3 dimensiones, siendo (L_T) la parte más larga y otras (b, h). Algunas máquinas y ciertas estructuras civiles están conformadas con vigas, tales como, carrocerías de automóvil, alas de avión, edificios, puentes viales, vías de ferrocarril, etc.

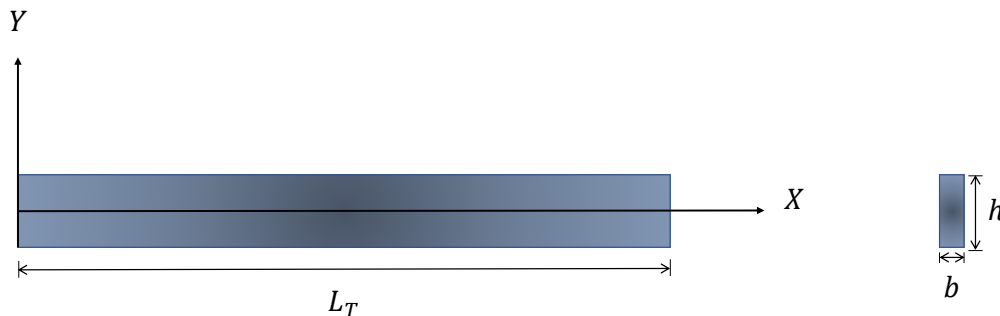


Figura 2.1: Diagrama de una viga.

La teoría de vigas es una herramienta importante en el estudio de la dinámica de vigas, ya que estando una viga sometida a diferentes tipos de carga nos permite calcular los desplazamientos, esfuerzos y tensiones de manera más simple. Existen varias teorías, una de las más sencillas y ampliamente utilizada es la de Euler-Bernoulli, desarrollada por Leonhard Euler y Daniel Bernoulli, que es recomendable para vigas largas y delgadas [27].

2.1. Teoría de vigas de Euler-Bernoulli

La teoría de vigas de Euler-Bernoulli que es válida para vigas largas y delgadas, hace la suposición de que la sección transversal perpendicular al eje neutro x de la viga permanece sin alteración después de que ha sido deformada por flexión (ver Fig. 2.2). Debido a esta suposición, se considera que el esfuerzo cortante transversal es cero.

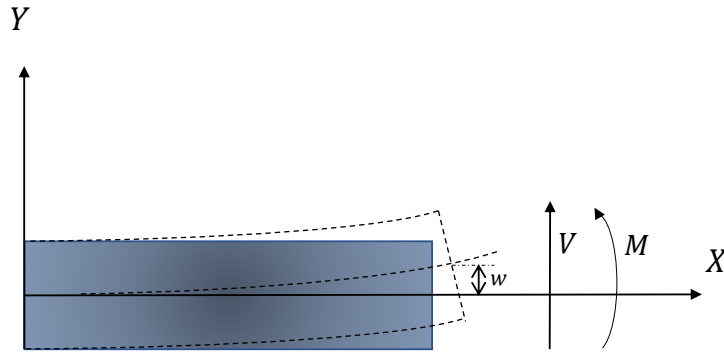


Figura 2.2: Viga tipo Euler-Bernoulli.

Para desarrollar la ecuación de Euler-Bernoulli que describe la relación entre la deflexión de la viga y la carga aplicada considere una viga en flexión en el plano (x,y) (ver Fig. 2.3), con x como eje longitudinal y y como eje transversal de deflexión. Además, la ecuación utiliza la relación momento flector-deflexión, equilibrio rotacional y dinámica transversal de un elemento viga [28]. Siendo $w(x, t)$ la deflexión en la dirección y , $M(x, t)$ el momento sobre la viga y q la carga aplicada. Su rigidez por flexión está definida por $EI(x)$, donde E es el módulo de Young e $I(x)$ es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje z . Quedando la siguiente ecuación

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q \quad (2.1)$$

donde

$$M(x, t) = EI(x) \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} \quad (2.2)$$

2.2. Vibración lateral de vigas de sección transversal uniforme

La solución de vibración de flexión o vibración lateral de vigas puede ser obtenida al aplicar las condiciones de frontera, encontrar las frecuencias naturales y desarrollar sus formas modales. Para el análisis de la viga, se tiene la Fig. 2.3 donde, adicional a lo que ya se mencionó en la Sección 2.1, $V(x, t)$ es la fuerza cortante y $f(x, t)$ es la fuerza por unidad de longitud [28].

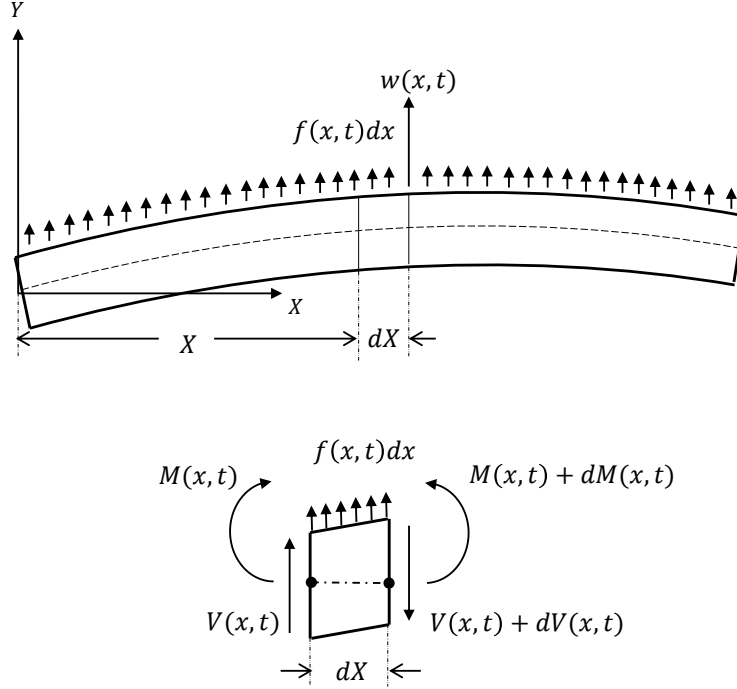


Figura 2.3: Viga deformada [28].

Se sabe que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad y \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

La fuerza de inercia que actúa en el elemento viga es:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.3)$$

donde ρ es igual a la densidad de la masa y $A(x)$ es el área transversal de la viga. Ejerciendo sumatoria de fuerzas en y , se obtiene

$$V + f(x, t)dx - (V + dV) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.4)$$

Desarrollando la Ec. (2.4), obtenemos

$$f(x, t)dx - dV = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.5)$$

La ecuación de movimiento angular viene dada por la condición de equilibrio de momentos con respecto a y , resultando la siguiente ecuación

$$M + Vdx - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0 \quad o \quad V = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.6)$$

Sustituyendo la Ec. (2.6) en la Ec. (2.5), se obtiene

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = f(x, t) \quad (2.7)$$

Considerando libre movimiento, esto es $f(x, t) = 0$, la Ec. (2.7) queda como:

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Transformando la Ec. (2.8) a ecuaciones diferenciales ordinarias, con el método de separación de variables, donde $w(x, t) = W(x)T(t)$, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} = W^{iv}(x)T(t) \quad y \quad \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} = W(x)T''(t)$$

Desarrollando la Ec. (2.8), obtenemos

$$c^2 W^{iv}(x)T(t) + W(x)T''(t) = 0 \quad (2.9)$$

Igualando la Ec. (2.9) a una constante ω^2 , se llega a lo siguiente:

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \omega^2 \quad (2.10)$$

Reescribiendo la Ec. (2.10), se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (2.12)$$

donde

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (2.13)$$

De la Ec. (2.13), se tiene

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta L_T)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L_T^4}} \quad (2.14)$$

donde ω es la frecuencia natural. La solución de la Ec. (2.12) está dada como:

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.15)$$

donde A y B son constantes que se obtienen aplicando las condiciones iniciales de la viga. La solución de la Ec. (2.11) está dada como:

$$W(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) + C_3 \cosh(\beta x) + C_4 \sinh(\beta x) \quad (2.16)$$

Aplicando las condiciones de frontera pueden encontrarse las constantes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , al igual que β .

La función $W(x)$ se conoce como *modo normal de vibración* o función característica de la viga. Para cualquier viga habrá un número infinito de modos normales de vibración con una frecuencia natural asociada a cada modo normal.

2.2.1. Formas modales de una viga en cantilever

Para obtener las frecuencias naturales y formas modales de una viga en cantilever (ver Fig. 2.4), se deben aplicar condiciones de frontera y desarrollar la ecuación característica de una viga.

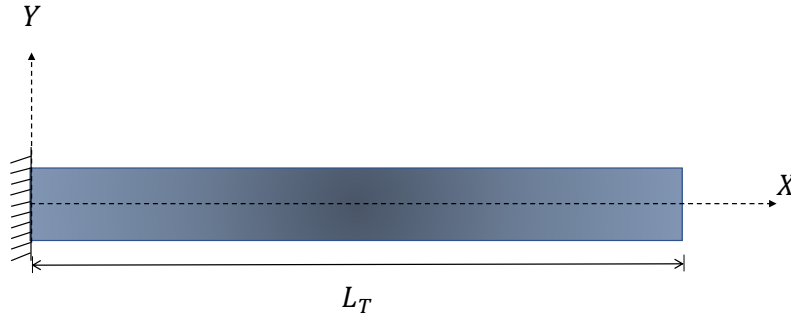


Figura 2.4: Viga con un extremo empotrado y el otro libre.

Si una viga sometida a vibración transversal está libre en un extremo, la deflexión y la pendiente en ese extremo no tienen restricciones, por lo que el momento y la fuerza cortante son cero. Por otro lado, si el extremo de la viga está sujeto, la deflexión y la pendiente deben desaparecer en ese extremo [28] (ver Tabla 2.1).

Condición de frontera	Restricción	
Libre	Momento	$EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0$
	Fuerza cortante	$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0$
Empotramiento	Deflexión	$w(0) = 0$
	Pendiente	$\frac{\partial w(0)}{\partial x} = 0$

Tabla 2.1: Condiciones de frontera.

Al derivar la Ec. (2.16) respecto a x tres veces, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x} = -C_1 \beta \sin(\beta x) + C_2 \beta \cos(\beta x) + C_3 \beta \sinh(\beta x) + C_4 \beta \cosh(\beta x) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = -C_1 \beta^2 \cos(\beta x) - C_2 \beta^2 \sin(\beta x) + C_3 \beta^2 \cosh(\beta x) + C_4 \beta^2 \sinh(\beta x) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} = C_1 \beta^3 \sin(\beta x) - C_2 \beta^3 \cos(\beta x) + C_3 \beta^3 \sinh(\beta x) + C_4 \beta^3 \cosh(\beta x) \quad (2.19)$$

- Para el extremo empotrado

$$w(0) = C_1 + C_3 = 0$$

$$\frac{\partial w(0)}{\partial x} = C_2\beta + C_4\beta = 0$$

- Para el extremo libre

$$EI \frac{\partial^2 w(L_T)}{\partial x^2} = -C_1\beta^2 \cos(\beta L_T) - C_2\beta^2 \sin(\beta L_T) + C_3\beta^2 \cosh(\beta L_T) + C_4\beta^2 \sinh(\beta L_T) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w(L_T)}{\partial x^2} \right) = C_1\beta^3 \sin(\beta L_T) - C_2\beta^3 \cos(\beta L_T) + C_3\beta^3 \sinh(\beta L_T) + C_4\beta^3 \cosh(\beta L_T) = 0$$

Sustituyendo las ecuaciones obtenidas por el extremo libre, en las ecuaciones por el extremo empotrado, se obtiene

$$C_3\beta^2 \cos(\beta L_T) + C_4\beta^2 \sin(\beta L_T) + C_3\beta^2 \cosh(\beta L_T) + C_4\beta^2 \sinh(\beta L_T) = 0 \quad (2.20)$$

$$-C_3\beta^3 \sin(\beta L_T) + C_4\beta^3 \cos(\beta L_T) + C_3\beta^3 \sinh(\beta L_T) + C_4\beta^3 \cosh(\beta L_T) = 0 \quad (2.21)$$

Reescribiendo las Ecs. (2.20) y (2.21) de forma matricial, queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \beta^2 \cos(\beta L_T) + \beta^2 \cosh(\beta L_T) & \beta^2 \sin(\beta L_T) + \beta^2 \sinh(\beta L_T) \\ -\beta^3 \sin(\beta L_T) + \beta^3 \sinh(\beta L_T) & \beta^3 \cos(\beta L_T) + \beta^3 \cosh(\beta L_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Para un sistema vibratorio, en general $W(x)$ debe ser diferente de cero, por lo tanto C_3 y C_4 son distintos a cero, por lo que el determinante de la matriz en la Ec. (2.22) es igual a cero. El determinante de dicha matriz es

$$\beta^5 [\cos^2(\beta L_T) + \sin^2(\beta L_T) + 2 \cos(\beta L_T) \cosh(\beta L_T) + \cosh^2(\beta L_T) - \sinh^2(\beta L_T)] = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \cos^2(\beta L_T) + \sin^2(\beta L_T) &= 1 & y & & \cosh^2(\beta L_T) - \sinh^2(\beta L_T) &= 1 \\ \cos(\beta L_T) \cosh(\beta L_T) &= -1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se observa que la Ec. (2.23) conocida como ecuación de frecuencia, satisface para un número infinito de valores $\beta_n L_T$. De Rao [29] se obtienen las primeras cuatro soluciones:

$$\begin{aligned} \beta_1 L_T &= 1.875104 \\ \beta_2 L_T &= 4.694091 \\ \beta_3 L_T &= 7.854757 \\ \beta_4 L_T &= 10.995541 \end{aligned}$$

Para obtener el resto de los valores de $\beta_n L_T$ se utiliza la siguiente expresión [30]

$$\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

Utilizando los valores de $\beta_n L_T$, se pueden desarrollar los modos de vibración. Para obtener $W(x)$ representada por una constante C_4 se despejan las constantes bajo las condiciones de frontera, obteniendo

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_3 \\ C_2 &= -C_4 \\ C_3 &= -\frac{C_4 [\sinh(\beta L_T) + \sin(\beta L_T)]}{\cosh(\beta L_T) + \cos(\beta L_T)} \end{aligned}$$

Sustituyendo las constantes C_1, C_2 y C_3 en la Ec. (2.16), se obtienen los modos de vibración de la viga dada por la siguiente ecuación

$$W_n(x) = C_{4n} \left\{ \frac{\sinh(\beta_n L_T) + \sin(\beta_n L_T)}{\cosh(\beta_n L_T) + \cos(\beta_n L_T)} [\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)] - \sin(\beta_n x) + \sinh(\beta_n x) \right\} \quad (2.24)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

La constante C_4 se toma como un valor arbitrario. En la Fig. 2.5 se observan las primeras tres formas modales para una viga en cantilever, siendo en el eje x los valores x/L_T y en y los valores de los modos de vibración $W(x)$.

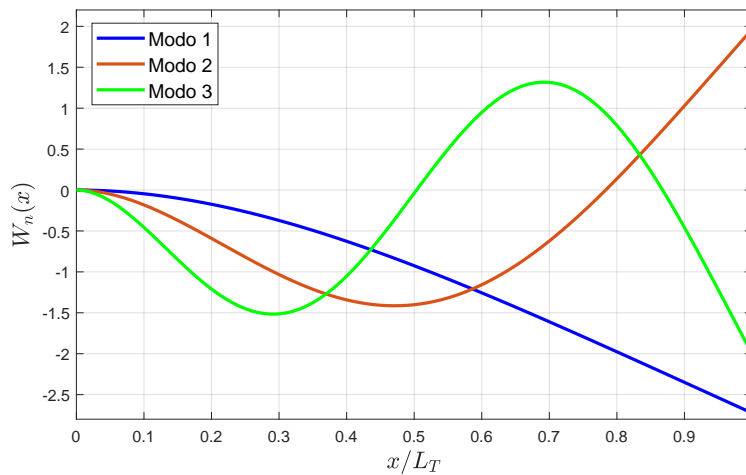


Figura 2.5: Primeros 3 modos de vibracion.

2.2.2. Frecuencias naturales de una viga en cantilever

Para obtener los valores de las frecuencias naturales ω de la viga, consideramos las propiedades geométricas y del material de la Tabla 2.2.

Acero estructural	Sección transversal rectangular
$E = 200 \text{ GPa}$	$A = 0.0381 \text{ m} \times 0.003175 \text{ m}$
$\nu = 0.3$	$I = 1.0161 \times 10^{-10} \text{ m}^4$
$\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$L_T = 0.5 \text{ m}$

Tabla 2.2: Propiedades de la viga.

Con la Ec. (2.14), se obtienen las cuatro primeras frecuencias naturales

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 65.0616 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_2 &= 407.7341 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_3 &= 1141.6672 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_4 &= 2237.2125 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Para obtener las frecuencias naturales en H_z , se aplica la siguiente ecuación

$$f_{ni} = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}f_1 &= 10.3548 Hz \\ f_2 &= 64.8928 Hz \\ f_3 &= 181.7019 Hz \\ f_4 &= 356.0634 Hz\end{aligned}$$

2.3. Aplicación del método de elemento finito

El método de elemento finito es un método numérico que usa funciones locales para obtener la solución de problemas de vibración. Dichas funciones comúnmente conocidas como funciones de interpolación son utilizadas en pequeños elementos llamados elementos finitos. El procedimiento empieza por discretizar una estructura en N elementos finitos. Cada elemento puede representarse por una ecuación de movimiento. Cada elemento tiene puntos terminales denominados nodos, que conectan cada elemento con el que sigue. Al conjunto de elementos y nodos se les llama malla de elementos finitos. Se derivan matrices de masa y rigidez, que describen la vibración de la estructura en su conjunto [30].

2.3.1. Elemento tipo viga

Para la descripción de un elemento tipo viga sometida a vibración transversal con elemento finito se muestra de la Fig. 2.6. Cada nodo experimenta tanto desplazamientos traslacionales w_i como rotacionales ϕ_i , por lo que se modelan con dos grados de libertad. Por lo tanto, el vector de desplazamiento nodal debe tener cuatro componentes.

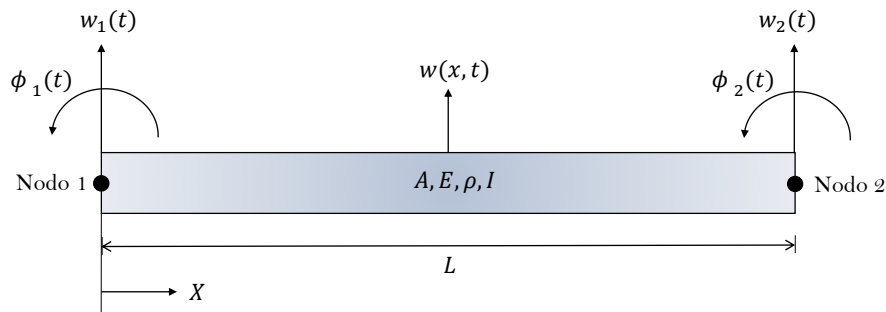


Figura 2.6: Elemento tipo viga [30].

En el análisis de vigas de Euler-Bernoulli la ecuación diferencial de movimiento es de cuarto orden. El desplazamiento estático transversal debe satisfacer:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad o \quad EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.26)$$

Integrando cuatro veces la Ec. (2.26) respecto a x , se obtiene

$$w(x, t) = c_1(t)x^3 + c_2(t)x^2 + c_3(t)x + c_4(t) \quad (2.27)$$

donde $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son constantes de integración con respecto de la variable x . Los desplazamientos nodales w_i y ϕ_i deben satisfacer las condiciones de frontera, quedando de la siguiente manera

- Para $x = 0$

$$w(0, t) = w_1(t) \quad (2.28)$$

La rotación ϕ_1 es igual a la derivada del desplazamiento w_1 respecto a x , resultando la siguiente ecuación

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \phi_1(t) \quad (2.29)$$

Desarrollando las Ecs. (2.28) y (2.29), obtenemos

$$w_1(t) = c_1(t)x^3 + c_2(t)x^2 + c_3(t)x + c_4(t) = c_4(t) \quad (2.30)$$

$$\phi_1(t) = 3c_1(t)x^2 + 2c_2(t)x + c_3(t) = c_3(t) \quad (2.31)$$

- Para $x = L$

$$w(L, t) = w_2(t) \quad (2.32)$$

y

$$\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = \phi_2(t) \quad (2.33)$$

Desarrollando las Ecs. (2.32) y (2.33), se llegan a las siguientes ecuaciones

$$w_2(t) = c_1(t)x^3 + c_2(t)x^2 + c_3(t)x + c_4(t) = c_1(t)L^3 + c_2(t)L^2 + c_3(t)L + w_1(t) \quad (2.34)$$

$$\phi_2(t) = 3c_1(t)x^2 + 2c_2(t)x + c_3(t) = 3c_1(t)L^2 + 2c_2(t)L + \phi_1(t) \quad (2.35)$$

Resolviendo las Ecs. (2.30-2.35), se obtiene

$$c_1(t) = \frac{1}{L^3} [L(\phi_1 + \phi_2) + 2(w_1 - w_2)]$$

$$c_2(t) = \frac{1}{L^2} [-L(2\phi_1 + \phi_2) + 3(-w_1 + w_2)]$$

$$c_3(t) = \phi_1(t)$$

$$c_4(t) = w_1(t)$$

Reemplazando las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4 en la Ec. (2.27), resulta la siguiente ecuación

$$w(x, t) = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right] w_1(t) + \left[\frac{x}{L} - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right] L\phi_1(t) + \left[\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right] w_2(t)$$

$$+ \left[-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right] L\phi_2(t) \quad (2.36)$$

Para determinar la matriz de masa se considera la energía cinética del elemento viga, por lo tanto

$$T(t) = \frac{1}{2}\rho A \int_0^L \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (2.37)$$

donde ρ es la densidad de la masa del material y A el área de la sección transversal. Sustituyendo e integrando respectivamente, la Ec. (2.37) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(t) = \frac{1}{2}\rho A \left[\frac{L^3}{105} \dot{\phi}_1^2(t) - \frac{L^3}{70} \dot{\phi}_1(t)\dot{\phi}_2(t) + \frac{11L^2}{105} \dot{w}_1(t)\dot{\phi}_1(t) + \frac{13L^2}{210} \dot{\phi}_1(t)\dot{w}_2(t) + \frac{L^3}{105} \dot{\phi}_2^2(t) \right. \\ \left. - \frac{13L^2}{210} \dot{w}_1(t)\dot{\phi}_2(t) - \frac{11L^2}{105} \dot{w}_2(t)\dot{\phi}_2(t) + \frac{13L}{35} \dot{w}_1^2(t) + \frac{9L}{35} \dot{w}_1(t)\dot{w}_2(t) + \frac{13L}{35} \dot{w}_2^2(t) \right] \quad (2.38) \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial, la Ec. (2.38) queda de la siguiente manera:

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T M \dot{\mathbf{w}} \quad (2.39)$$

donde M es la matriz de masa y \dot{w} es la derivada del vector $w = [w_1 \ \phi_1 \ w_2 \ \phi_2]$. Reescribiendo la Ec. (2.39), se obtiene la siguiente ecuación

$$T(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 & \dot{\phi}_1 & \dot{w}_2 & \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

cuya matriz de masa de un elemento viga es:

$$M_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Para determinar la matriz de rigidez se considera la energía potencial del elemento viga, por lo tanto

$$V(t) = \frac{1}{2}EI \int_0^L \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (2.42)$$

donde E es el módulo de Young del material y I es el momento de inercia de la sección transversal. Sustituyendo e integrando la Ec. (2.42), obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{1}{2}EI \left[\frac{4}{L} \phi_1^2(t) + \frac{4}{L} \phi_1(t)\phi_2(t) + \frac{12}{L^2} w_1(t)\phi_1(t) - \frac{12}{L^2} \phi_1(t)w_2(t) + \frac{4}{L} \phi_2^2(t) + \frac{12}{L^2} w_1(t)\phi_2(t) \right. \\ \left. - \frac{12}{L^2} w_2(t)\phi_2(t) + \frac{12}{L^3} w_1^2(t) - \frac{24}{L^3} w_1(t)w_2(t) + \frac{12}{L^3} w_2^2(t) \right] \quad (2.43) \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial, la Ec. (2.43) queda de la siguiente manera:

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T K \mathbf{w} \tag{2.44}$$

donde K es la matriz de rigidez y w es el vector $w = [w_1 \ \phi_1 \ w_2 \ \phi_2]$. Reescribiendo la Ec. (2.44), llegamos a la siguiente ecuación

$$V(t) = \frac{1}{2} [w_1 \ \phi_1 \ w_2 \ \phi_2] \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

cuya matriz de rigidez de un elemento viga es:

$$k_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

2.3.2. Agrupamiento de matrices de masa y rigidez para un elemento tipo viga

El proceso de ensamblaje para la derivación de las matrices de rigidez global y masa global, así como su desarrollo en una computadora se muestra en la Fig. (2.7), donde hay una matriz global formada por matrices de n elementos. Su matriz de cada elemento es de 4×4 y la suma involucra matrices de 2×2 . Debemos tachar filas y columnas de las matrices globales, ya que las condiciones de contorno lo requieren [29].

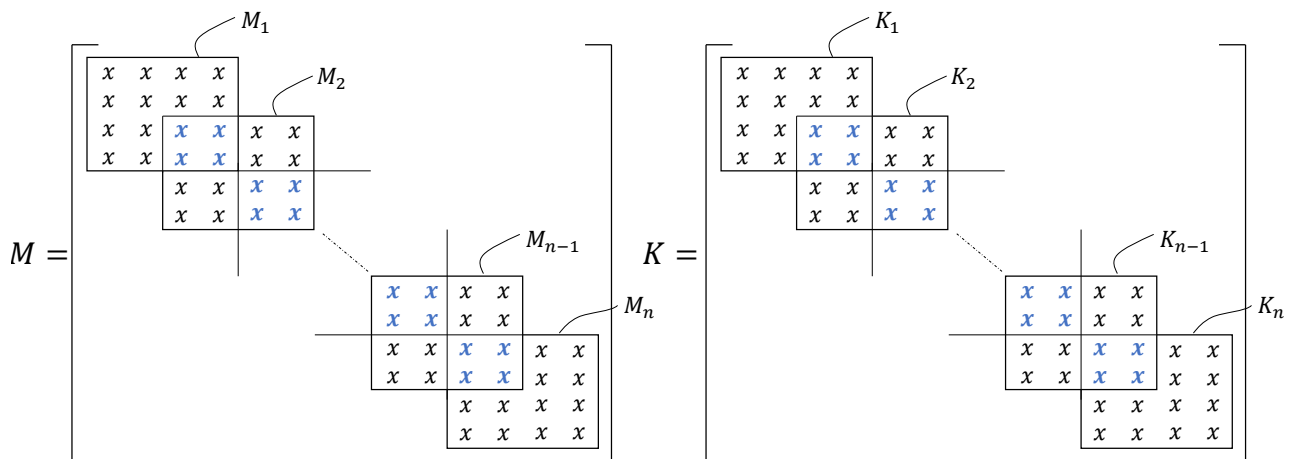


Figura 2.7: Matrices globales de masa y rigidez [31].

Considerando una viga discretizada en 3 elementos en donde resultan 4 nodos distribuidos en toda la viga (ver Fig. 2.8).

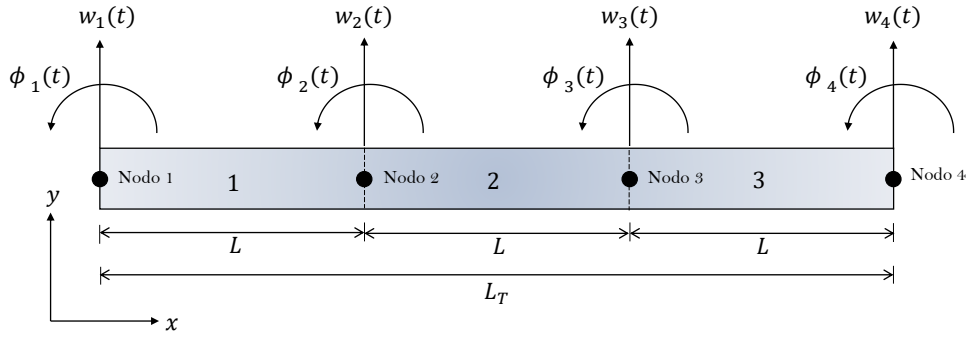


Figura 2.8: Viga discretizada en 3 elementos.

Las matrices de masa y rigidez ($M_{e1}, M_{e2}, M_{e3}, K_{e1}, K_{e2}, K_{e3}$) de cada elemento son:

$$M_{e1} = M_{e2} = M_{e3} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$k_{e1} = k_{e2} = k_{e3} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Para desarrollar las matrices globales de masa y rigidez, se realiza la suma correspondiente de matrices de 2×2 como se mostró en la Fig. 2.7, resultando lo siguiente:

$$m_1 = m_2 = \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 156 & 22L \\ 22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 312 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix}$$

y

$$k_1 = k_2 = \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, al ensamblar las matrices de masa y rigidez ($M_{e1}, M_{e2}, M_{e3}, K_{e1}, K_{e2}, K_{e3}$), resultan

las matrices globales de 8×8 , como se muestra en las siguientes ecuaciones

$$M = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 13L & 312 & 0 & 54 & -13L & 0 & 0 \\ -13L & -3L^2 & 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 13L & 312 & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13L & 156 & -22L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2.3.3. Ecuación de movimiento de un elemento tipo viga

El modelo dinámico de una viga esta representado de la siguiente manera:

$$M\ddot{X}(t) + KX(t) = F(t)$$

donde M es la matriz de masa, K es la matriz de rigidez, $X(t) = [w_1 \ \phi_1 \ w_2 \ \phi_2]^T$ es el vector de desplazamiento, $\ddot{X}(t)$ es la segunda derivada respecto al tiempo del vector de desplazamiento y $F(t)$ es el vector de fuerzas externas. Ahora, considerando una viga en libre movimiento donde $F(t) = 0$, obtenemos

$$M\ddot{X}(t) + KX(t) = 0 \quad (2.51)$$

El vector de desplazamiento $X(t)$ se puede expresar como:

$$X(t) = \psi \cos(\omega t) \quad (2.52)$$

donde ψ representa el vector modal y ω la frecuencia natural. Derivando la Ec. (2.52) respecto al tiempo dos veces, se llega a

$$\ddot{X}(t) = -\psi\omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.53)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.52) y (2.53) en la Ec. (2.51), se llega a la siguiente representación matemática

$$(K - \omega^2 M) \psi = 0 \quad o \quad (K - \lambda M) \psi = 0 \quad (2.54)$$

en el caso del modelo de un elemento finito y dos grados de libertad resultan dos ω_n

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2$$

Observe que, a cada frecuencia natural o frecuencia característica ω_i le corresponde un vector característico ψ_i , que satisface el sistema de ecuaciones lineales. Para soluciones no triviales se tiene que cumplir lo siguiente

$$\det(K - \lambda M) = 0 \quad (2.55)$$

2.3.4. Viga en cantilever

La Sección 2.3.2 supone que ninguna parte de la viga esta fija. Por lo tanto, la viga es capaz de experimentar movimiento de cuerpo rígido bajo las frecuencias que actúan en toda la viga. Esto significa que las matrices M y K son singulares. Una viga en cantilever tiene un extremo empotrado y el otro libre, por lo que los desplazamientos en la parte empotrada son cero. Un método simple de incorporar las condiciones de desplazamiento cero es eliminar las filas y columnas correspondientes de las matrices M y K de ese extremo fijo. Las ecuaciones de movimiento finales de la viga en cantilever se expresan como:

$$M \ddot{X} + K X = 0 \quad (2.56)$$

$n \times n$ $n \times 1$ $n \times n$ $n \times 1$

donde n indica cuantos desplazamientos libres de la viga en cantilever hay. Ahora, para analizar el comportamiento de dicha viga, consideramos una viga en cantilever discretizada en 3 elementos como se muestra en la Fig. 2.9.

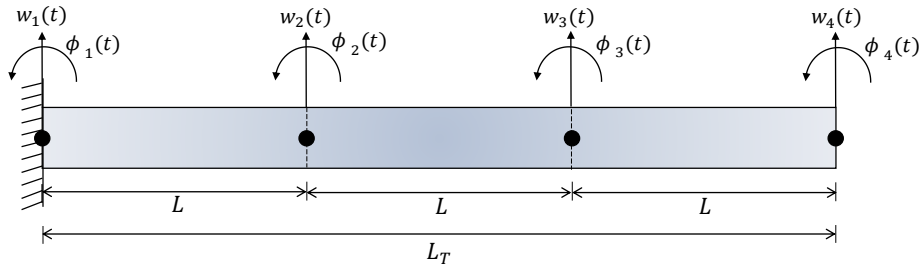


Figura 2.9: Viga en cantilever dicretizada en 3 elementos.

Los desplazamientos w_1 y ϕ_1 son cero. Resultando las matrices de masa M y rigidez K de la siguiente manera:

$$M_{e1} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & -22L \\ 0 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$M_{e2} = M_{e3} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$K_{e1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$K_{e2} = K_{e3} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Ahora, la matriz global de masa M y rigidez K queda de la siguiente manera:

$$M = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13L & 0 & 0 \\ 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13L & 312 & 0 & 54 & -13L \\ -13L & -3L^2 & 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13L & 156 & -22L \\ 0 & 0 & -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

De la Sección 2.2.2 (Tabla 2.2), se utilizan las propiedades geométricas y del material de una viga en cantilever. Donde $L_T = 0.5m$, $\frac{\rho AL}{420} = 0.000376823363k_g$ y $\frac{EI}{L^3} = 4389.552\frac{N}{m}$. Por lo que, la matriz global de masa M , la matriz global de rigidez K y el vector de desplazamiento $X(t)$ son las siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} 0.11757 & 0 & 0.020348 & -8.1645 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 8.3739 \times 10^{-5} & 0.0008164 & -3.1402 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0.020348 & 8.1645 \times 10^{-4} & 0.11757 & 0 & 0.020348 & -8.1645 \times 10^{-4} \\ -0.000816 & -3.1402 \times 10^{-5} & 0 & 8.3739 \times 10^{-5} & 0.0008164 & -3.1402 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0.020348 & 8.1645 \times 10^{-4} & 0.058784 & -1.3817 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & -0.000816 & -3.1402 \times 10^{-5} & -0.001381 & 4.1869 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.0535 \times 10^5 & 0 & -52675 & 4389.6 & 0 & 0 \\ 0 & 975.46 & -4389.6 & 243.86 & 0 & 0 \\ -52675 & -4389.6 & 1.0535 \times 10^5 & 0 & -52675 & 4389.6 \\ 4389.6 & 243.86 & 0 & 975.46 & -4389.6 & 243.86 \\ 0 & 0 & -52675 & -4389.6 & 52675 & -4389.6 \\ 0 & 0 & 4389.6 & 243.86 & -4389.6 & 487.73 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = [w_2 \ \phi_2 \ w_3 \ \phi_3 \ w_4 \ \phi_4]^T$$

Resultando matrices globales M y K de dimensión 6×6 y un vector de desplazamiento de 6×1 . Con la Ec. (2.54) se logran obtener las frecuencias naturales ω_n , quedando de la siguiente manera

$$\omega_1 = \sqrt{4240.092} = 65.11599 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{166514.677} = 408.0621 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_3 = \sqrt{1305347.38} = 1142.528 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_4 = \sqrt{5011992.6} = 2238.748 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_5 = \sqrt{13693863.07} = 3700.522 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_6 = \sqrt{30553256.25} = 5527.5 \frac{rad}{s}$$

Para obtener las frecuencias en H_z se aplica la Ec. (2.25), quedandonos lo siguiente

$$f_{n1} = 10.364Hz$$

$$f_{n2} = 64.945Hz$$

$$f_{n3} = 181.84Hz$$

$$f_{n4} = 356.31Hz$$

$$f_{n5} = 588.96Hz$$

$$f_{n6} = 879.73Hz$$

Se observa que a cada frecuencia natural ω , le corresponde un vector x llamado forma modal. Por lo tanto la viga tiene un número de frecuencias naturales y formas modales igual a las dimensiones de las matrices M y K , y que además coincide con los grados de libertad de la viga. En la Fig. 2.10 se muestran los 3 primeros modos de vibración correspondientes a las primeras 3 frecuencias naturales.

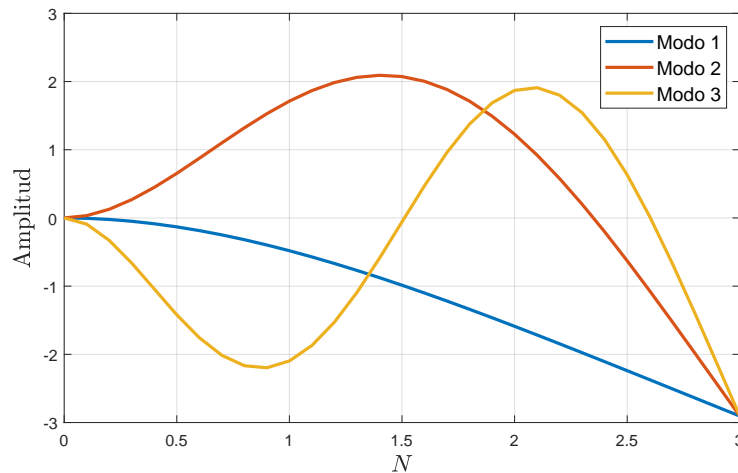


Figura 2.10: Primeros 3 modos de vibración.

2.4. Fallas en estructuras

Una estructura es un conjunto de elementos colocados de tal forma que permanezcan sin deformarse ni desplomarse. Las estructuras son diseñadas para soportar fuerzas como su propio peso, cargas, fuerzas de inercia, la fuerza del viento, entre otros. Al diseñar una estructura debemos tomar en cuenta las deformaciones permisibles y los esfuerzos admisibles de cada elemento estructural.

Cuando una estructura deja de cumplir con su función de una manera adecuada se dice que ha fallado. En muchos de los casos estas fallas surgen cuando los elementos estructurales están fracturados, deformados o cuando existe un desacoplamiento entre ellos. Las principales razones para que un elemento estructural se dañe [32] son:

- Diseño de la estructura (errores de cálculo, errores de dibujo, materiales incorrectos, etc.).
- Materiales de los elementos estructurales (fatiga elástica, calidad del material, etc.).

- Factores incontrolables (vientos, inundaciones, terremotos, etc.).

2.4.1. Fracturas en elementos estructurales

Se puede definir a la fractura como la culminación del proceso de deformación plástica. Se manifiesta como la separación de un cuerpo sólido en dos o más partes bajo la acción de cargas.

Irwin (1957) plantea que el proceso de fractura no puede concentrarse en un solo punto, sino que se presenta en una zona pequeña pero finita (zona plástica) en la cual, las tensiones ya dejan de ser infinitas porque parte de la energía elástica se consume en la deformación plástica del material próximo a la punta. El concepto principal introducido aquí es el de factor de intensidad de esfuerzos K y la tasa de liberación de energía G . La ciencia que estudia los mecanismos y procesos de propagación de grietas en sólidos es la mecánica de fractura [33].

El conocimiento de la mecánica de fractura mejoran las condiciones de diseño donde los efectos de los defectos y las condiciones de operación son explícitamente tomados en cuenta para reducir las consecuencias de una posible fractura. Principalmente los parámetros que analiza la mecánica de la fractura [34] son:

- El esfuerzo global aplicado sobre el elemento σ .
- Las propiedades de resistencia a la fractura (características del material).
- El tamaño de cualquier defecto presente semejante a una fisura a .

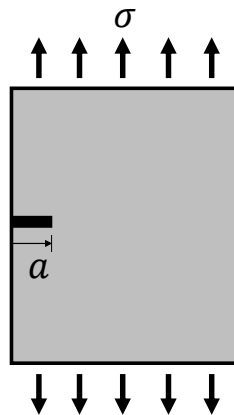


Figura 2.11: Elemento mecánico agrietado [34].

2.4.2. Modos de desplazamiento de una grieta

De acuerdo con Broek (1986), una grieta en un sólido puede verse sometida a esfuerzos en tres modos diferentes (ver Fig. 2.12) [35].

- Modo I o modo de apertura, en el cual la grieta se abre debido a la aplicación de esfuerzos normales al plano de fractura.

- Modo II o modo deslizante, en el que debido a la aplicación de esfuerzo cortante en el plano de fractura, se producen desplazamientos longitudinales de las superficies en dicho plano.
- Modo III o modo de rotura transversal que corresponde al desplazamiento de las superficies de fractura en sentidos opuestos, debido a la aplicación de esfuerzo cortante en planos diferentes al plano de fractura.

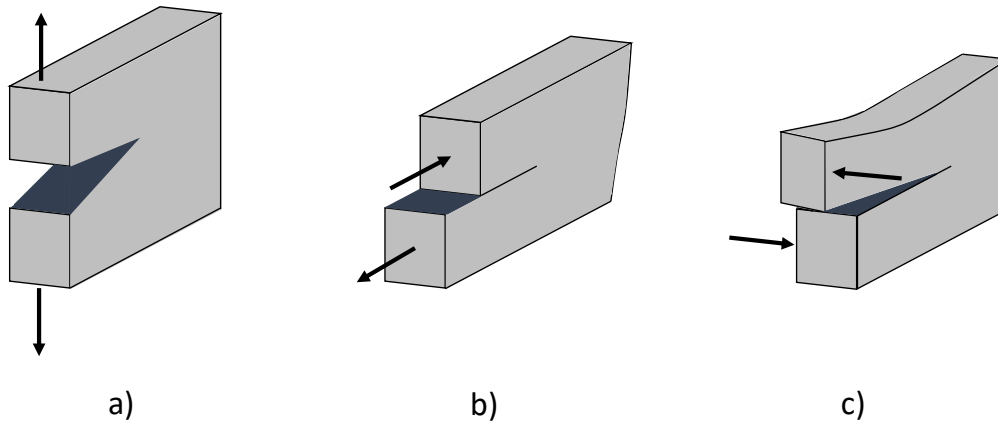


Figura 2.12: a) Modo I, b) Modo II, y c) Modo III [34].

2.4.3. Tasa de liberación de energía de Griffith

El análisis de Griffith establece que en un sistema cerrado la energía se conserva. Griffith considera dos tipos de energía, energía de deformación y energía de superficie.

Para analizar la formulación de Griffith se considera una placa homogénea e isotrópica, de módulo elástico E , con una grieta central de forma elíptica de longitud $2a$, que es deformada por esfuerzos σ como se muestra en la Fig. 2.13a. Griffith encontró que la energía elástica U almacenada en una placa por unidad de longitud es:

$$U = \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} \quad (2.63)$$

y definió la energía de superficie W como:

$$W = 4a\gamma_s \quad (2.64)$$

donde γ_s es la energía específica de superficie, $4a$ corresponde a la doble longitud de la grieta $2a$ (debido a que se contempla el número de caras que tiene la grieta).

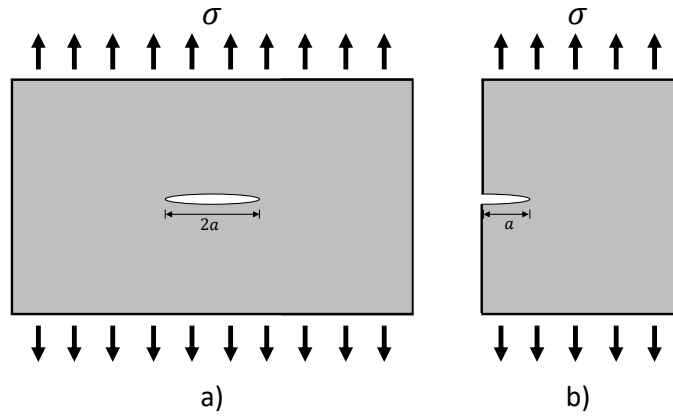


Figura 2.13: a)Elemento con grieta de longitud $2a$. y b)Elemento con grieta de longitud a [33].

Cuando comienza a incrementar la longitud de la grieta, el sistema mecánico transfiere energía de la zona no fracturada a la fracturada. Esta equivalencia se puede expresar matemáticamente como:

$$\frac{dU}{da} = \frac{dW}{da} \quad (2.65)$$

Derivando las Ecs. (2.63) y (2.64) respecto a la longitud de la grieta a , se llega a las siguientes ecuaciones

$$\frac{dU}{da} = \frac{2\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.66)$$

$$\frac{dW}{da} = 4\gamma_s \quad (2.67)$$

Reemplazando las Ecs. (2.66) y (2.67) en la Ec. (2.65) se puede despejar el esfuerzo, quedando de la siguiente manera:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi a}} \quad (2.68)$$

Para el caso de la mitad de la placa como se muestra en la Fig. 2.13 (b), las Ecs. (2.66) y (2.67) queda de la siguiente manera:

$$\frac{dU}{da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.69)$$

$$\frac{dW}{da} = 2\gamma_s \quad (2.70)$$

La energía disponible para la extensión de la grieta se denomina como tasa de liberación de energía G y, como lo estableció Griffith, es igual a $\frac{dU}{da}$, quedando la siguiente ecuación

$$\frac{dU}{da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} = G \quad (2.71)$$

2.4.4. Factores de intensidad del esfuerzo

Los factores de intensidad del esfuerzo k_i son parámetros de gran importancia, ya que al conocerse es posible determinar completamente el campo de esfuerzos alrededor de la grieta. Estos factores dependen de la configuración geométrica y la carga aplicada al elemento [36].

Dichos factores corresponden a cada uno de los modos de fractura descritos en la Sección 2.4.2 y se pueden representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_{yy} \sqrt{\pi a} F_I(r) \\ K_{II} &= \tau_{xy} \sqrt{\pi a} F_{II}(r) \\ K_{III} &= \tau_{yz} \sqrt{\pi a} F_{III}(r) \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde $r = a/h$ es la razón de profundidad de la grieta, σ_{yy} , τ_{xy} y τ_{yz} son los esfuerzos normal y cortante, y F_I , F_{II} y F_{III} son factores de corrección definidos por la forma del elemento y las condiciones de frontera.

De las Ecs. (2.72) se despejan los esfuerzos y se sustituyen en la Ec. (2.71) obteniendo la relación entre la tasa de liberación de energía y el factor de intensidad de esfuerzo en condición de esfuerzo plano, quedando la siguiente ecuación

$$G_i = \frac{K_i^2}{E'} \quad (2.73)$$

donde $E' = E$ y $i = I, II$ y III . Para el caso de deformación plana la relación es $E' = E/(1 - \nu^2)$, donde ν es la relación de Poisson.

2.5. Aplicación de las técnicas de identificación algebraica

La identificación algebraica en línea [18] es una herramienta matemática que hace uso del cálculo operacional [37, 38], con el objetivo de estimar parámetros en sistemas dinámicos de manera rápida y efectiva.

La identificación algebraica se emplea para estimar la masa, la rigidez y el amortiguamiento viscoso en sistemas dinámicos simples usando solo mediciones de posición [19, 39]. Además, también se utiliza en la identificación de frecuencia, fase y magnitud de vibraciones exógenas que afectan a un sistema mecánico [19, 40].

Es posible aplicar técnicas de identificación algebraica para sistemas de n grados de libertad [41], por lo que bajo un contexto modal, se pueden estimar los parámetros de la matriz de masa y matriz de rigidez.

Para ilustrar las ideas de la identificación algebraica se considera un procedimiento de identificación para estimar parámetros de masa y de rigidez en un sistema mecánico de n grados de libertad masa-resorte como se muestra en la Fig. 2.14.

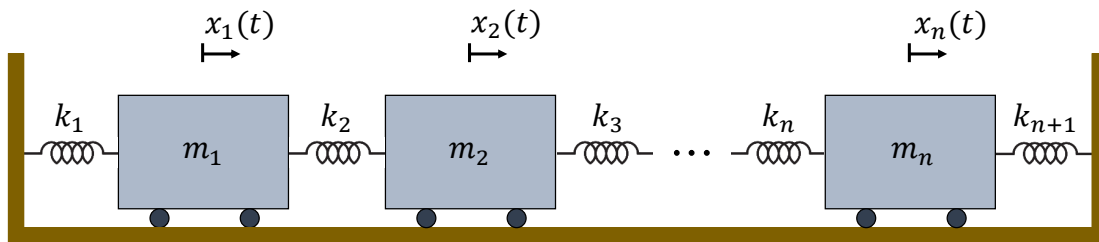


Figura 2.14: Sistema mecánico de n grados de libertad.

El modelo matemático está representado por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_0) + k_2(x_1 - x_2) &= u_1 \\ \vdots \\ m_n \ddot{x}_n + k_n(x_n - x_{n-1}) + k_{n+1}(x_n - x_{n+1}) &= u_n \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = 0$. Reescribiendo las Ecs. (2.74) en forma matricial, obtenemos

$$M\ddot{x} + Kx = u, \quad x, u \in R^n \quad (2.75)$$

donde M es la matriz de masa del sistema, K representa la matriz de rigidez, x es el vector de desplazamiento y u es el vector de fuerzas exógenas. Escribiendo las Ecs. (2.74) en términos de cálculo operacional, llegamos a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} m_i [s^2 X_i(s) - s x_i(0) - \dot{x}_i(0)] + k_i [X_i(s) - X_{i-1}(s)] + k_{i+1} [X_i(s) - X_{i+1}(s)] \\ = u_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde $x_i(0)$ y $\dot{x}_i(0)$ representan las condiciones iniciales del sistema. Con el fin de eliminar las condiciones iniciales, la Ec. (2.76) se deriva respecto a s dos veces, obteniendo la siguiente ecuación

$$m_i \left(2X_i + 4s \frac{dX_i}{ds} + s^2 \frac{d^2 X_i}{d^2 s} \right) + k_i \left(\frac{d^2 X_i}{d^2 s} - \frac{d^2 X_{i-1}}{d^2 s} \right) + k_{i+1} \left(\frac{d^2 X_i}{d^2 s} - \frac{d^2 X_{i+1}}{d^2 s} \right) = \frac{d^2 u_i}{d^2 s} \quad (2.77)$$

Ahora, multiplicando la Ec. (2.77) por s^{-2} , resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} m_i \left(2s^{-2} X_i + 4s^{-1} \frac{dX_i}{ds} + \frac{d^2 X_i}{d^2 s} \right) + k_i \left(s^{-2} \frac{d^2 X_i}{d^2 s} - s^{-2} \frac{d^2 X_{i-1}}{d^2 s} \right) + k_{i+1} \left(s^{-2} \frac{d^2 X_i}{d^2 s} - s^{-2} \frac{d^2 X_{i+1}}{d^2 s} \right) \\ = s^{-2} \frac{d^2 u_i}{d^2 s} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Transformando la Ec. (2.78) al dominio del tiempo, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} m_i \left[2 \int_{t_0}^{(2)} x_i(t) - 4 \int_{t_0} (\Delta t) x_i(t) + (\Delta t)^2 x_i(t) \right] + k_i \int_{t_0}^{(2)} (\Delta t)^2 [x_i(t) - x_{i-1}(t)] \\ + k_{i+1} \int_{t_0}^{(2)} (\Delta t)^2 [x_i(t) - x_{i+1}(t)] = \int_{t_0}^{(2)} (\Delta t)^2 u_i(t) \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde $\Delta t = t - t_0$ y $\int_0^{(n)} \phi(t)$ es la integral iterada de la forma

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\alpha_1} \dots \int_{t_0}^{\alpha_{n-1}} \phi(\alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_1$$

Ahora, es posible obtener un sistema de ecuaciones linealmente independientes cuya solución es el vector de parámetros buscados por lo que, se utiliza la siguiente representación matemática

$$A_i(t)\theta_i = D_i(t) \quad (2.80)$$

donde $\theta_i = [m_i \ k_i \ k_{i+1}]^T$ es el vector solución, $A_i(t)$ es una matriz 3×3 y $D_i(t)$ es una matriz 3×1 , cuyos valores son

$$A_i(t) = \begin{bmatrix} a_{11,i} & a_{12,i} & a_{13,i} \\ a_{21,i} & a_{22,i} & a_{23,i} \\ a_{31,i} & a_{32,i} & a_{33,i} \end{bmatrix}, \quad D_i(t) = \begin{bmatrix} d_{1,i} \\ d_{2,i} \\ d_{3,i} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11,i} &= 2 \int_{t_0}^{(2)} x_i(t) - 4 \int_{t_0} (\Delta t) x_i(t) + (\Delta t)^2 x_i(t), & a_{21,i} &= \int_{t_0} a_{11,i}, & a_{31,i} &= \int_{t_0}^{(2)} a_{11,i} \\ a_{12,i} &= \int_{t_0}^{(2)} (\Delta t)^2 [x_i(t) - x_{i-1}(t)], & a_{22,i} &= \int_{t_0} a_{12,i}, & a_{32,i} &= \int_{t_0}^{(2)} a_{12,i} \\ a_{13,i} &= \int_{t_0}^{(2)} (\Delta t)^2 [x_i(t) - x_{i+1}(t)], & a_{23,i} &= \int_{t_0} a_{13,i}, & a_{33,i} &= \int_{t_0}^{(2)} a_{13,i} \\ d_{1,i} &= \int_{t_0}^{(2)} (\Delta t)^2 u_i(t), & d_{2,i} &= \int_{t_0} d_{1,i}, & d_{3,i} &= \int_{t_0}^{(2)} d_{1,i} \end{aligned}$$

La solución de la Ec. (2.80) se encuentra por medio de la regla de Cramer, quedando la siguiente expresión

$$\hat{m}_i = \frac{\Delta_{1,i}}{\Delta_i}, \quad \hat{k}_i = \frac{\Delta_{2,i}}{\Delta_i}, \quad \hat{k}_{i+1} = \frac{\Delta_{3,i}}{\Delta_i} \quad (2.81)$$

donde \hat{m}_i , \hat{k}_i y \hat{k}_{i+1} son los parámetros buscados y los determinantes quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= a_{11,i}a_{22,i}a_{33,i} - a_{11,i}a_{23,i}a_{32,i} - a_{12,i}a_{21,i}a_{33,i} + a_{12,i}a_{31,i}a_{23,i} + a_{21,i}a_{13,i}a_{32,i} - a_{13,i}a_{22,i}a_{31,i} \\ \Delta_{1,i} &= d_{1,i}a_{22,i}a_{33,i} - d_{1,i}a_{23,i}a_{32,i} - d_{2,i}a_{12,i}a_{33,i} + d_{2,i}a_{13,i}a_{32,i} + d_{3,i}a_{12,i}a_{23,i} - d_{3,i}a_{13,i}a_{22,i} \\ \Delta_{2,i} &= -d_{1,i}a_{21,i}a_{33,i} + d_{1,i}a_{31,i}a_{23,i} + d_{2,i}a_{11,i}a_{33,i} - d_{2,i}a_{13,i}a_{31,i} - d_{3,i}a_{11,i}a_{23,i} + d_{3,i}a_{13,i}a_{21,i} \\ \Delta_{3,i} &= d_{1,i}a_{21,i}a_{32,i} - d_{1,i}a_{22,i}a_{31,i} - d_{2,i}a_{11,i}a_{32,i} + d_{2,i}a_{12,i}a_{31,i} + d_{3,i}a_{11,i}a_{22,i} - d_{3,i}a_{12,i}a_{21,i} \end{aligned}$$

Dado que los parámetros estimados de la Ec. (2.81) son valores positivos, es conveniente obtener el valor absoluto de cada determinante y es posible aplicar una integración iterada n veces al numerador y al denominador debido a que la integración es un operador lineal y no afecta el resultado de la estimación, y se evitan singularidades, obteniendo la siguiente expresión matemática

$$\hat{m}_i = \frac{\int_{t_0}^{(n)} |\Delta_{1,i}|}{\int_{t_0}^{(n)} |\Delta_i|}, \quad \hat{k}_i = \frac{\int_{t_0}^{(n)} |\Delta_{2,i}|}{\int_{t_0}^{(n)} |\Delta_i|}, \quad \hat{k}_{i+1} = \frac{\int_{t_0}^{(n)} |\Delta_{3,i}|}{\int_{t_0}^{(n)} |\Delta_i|}$$

Con el fin de conocer la aproximación de los parámetros estimados con respecto a los reales en el sistema masa-resorte de la Fig. 2.14, se realiza la simulación para un sistema de 6 grados de libertad con $u_i(t) = 5N$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, el resto de los valores se muestran en la Tabla 2.3. Para la simulación numérica se utilizó el método de Runge-Kutta Fehlberg [42] con un paso de integración de $1ms$, logrando obtener las gráficas de los parámetros estimados de masa y rigidez en la Fig. 2.15 y en la Fig. 2.16 respectivamente.

$m_1 = 5kg$	$k_1 = 2000N/m$
$m_2 = 6kg$	$k_2 = 1800N/m$
$m_3 = 7kg$	$k_3 = 1600N/m$
$m_4 = 8kg$	$k_4 = 1400N/m$
$m_5 = 9kg$	$k_5 = 1200N/m$
$m_6 = 10kg$	$k_6 = 1000N/m$
-	$k_7 = 800N/m$

Tabla 2.3: Datos del sistema mecanico.

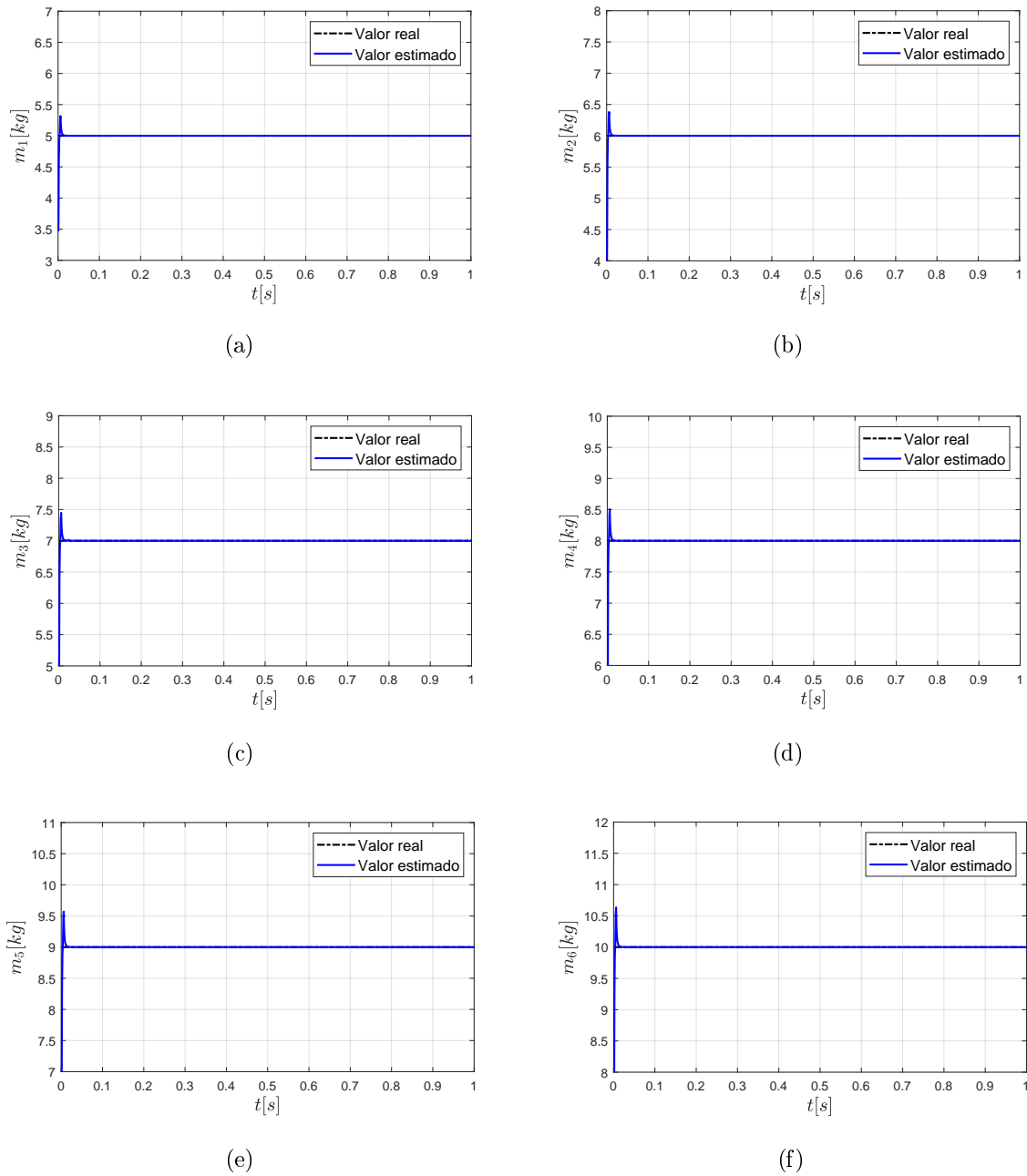
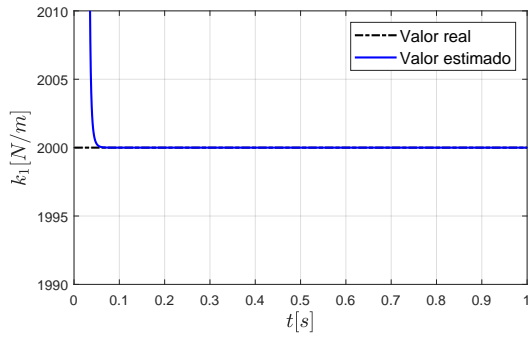
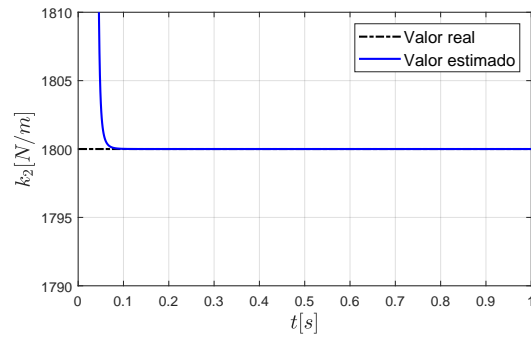


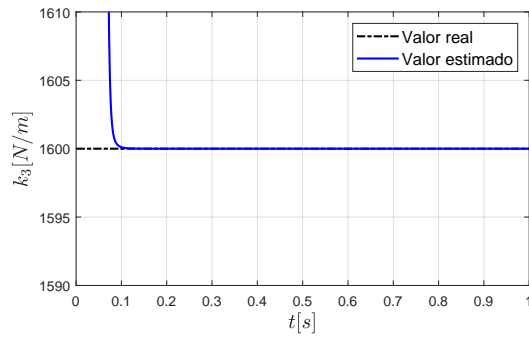
Figura 2.15: Estimación de masa.



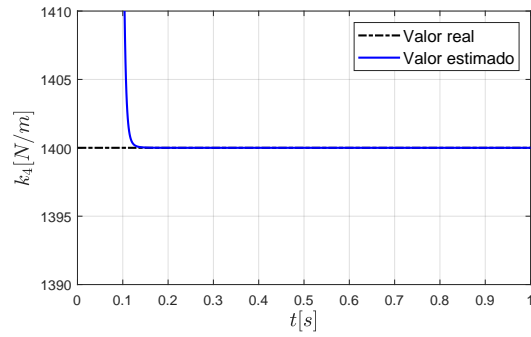
(a)



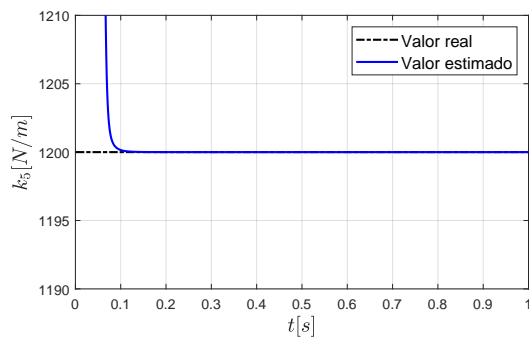
(b)



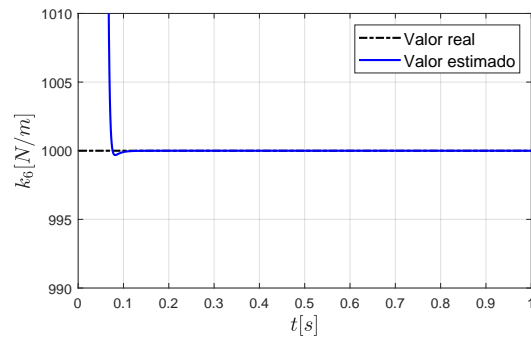
(c)



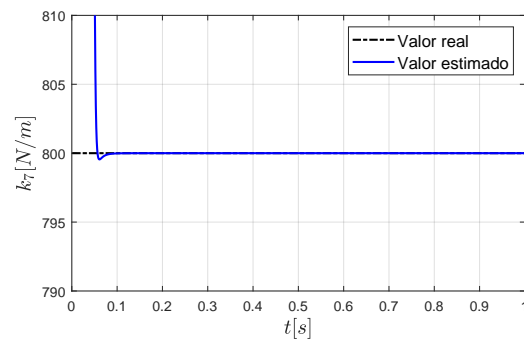
(d)



(e)



(f)



(g)

Figura 2.16: Estimación de rigidez.

En las Fig. 2.15 y Fig. 2.16 se presentan los valores reales en línea negra punteada y las líneas continuas en color azul representa los parámetros estimados, se observa que los parámetros estimados se aproximan a los valores reales a partir de 0.1s aproximadamente. La Tabla 2.4 muestra la comparación entre los valores reales y estimados después 0.2s.

Parámetro	Valor real	Valor estimado	Error(%)
$m_1[kg]$	5	5.0000	0
$m_2[kg]$	6	6.0000	0
$m_3[kg]$	7	7.0000	0
$m_4[kg]$	8	8.0000	0
$m_5[kg]$	9	9.0000	0
$m_6[kg]$	10	10.0000	0
$k_1[N/m]$	2000	1999.9999	5×10^{-6}
$k_2[N/m]$	1800	1800.0000	0
$k_3[N/m]$	1600	1600.0002	1×10^{-5}
$k_4[N/m]$	1400	1400.0009	6×10^{-5}
$k_5[N/m]$	1200	1200.0016	1×10^{-4}
$k_6[N/m]$	1000	999.9999	1×10^{-5}
$k_7[N/m]$	800	799.9999	1×10^{-5}

Tabla 2.4: Valor real vs valor estimado.

Con los datos de la Tabla 2.4, se comprueba que en la técnica de identificación algebraica los parámetros estimados tienden a aproximarse a los valores reales de manera muy rápida y con un margen de error mínimo, por lo tanto, esta técnica es bastante útil para estimar parámetros de sistemas dinámicos.

Capítulo 3

Análisis de una viga fisurada

Una grieta en un elemento estructural introduce una flexibilidad local que está en función de la profundidad de la grieta. Esta flexibilidad cambia el comportamiento dinámico de la estructura y desde este cambio se puede identificar la posición y la magnitud de la grieta.

Para el caso de una viga agrietada sujeta a una carga transversal, el aumento de flexibilidad genera menor resistencia interna a los esfuerzos cortantes y de flexión, y menor resistencia a deflexión excesiva.

3.1. Matriz de flexibilidad de una viga agrietada

Considere una viga en cantilever sometida a un momento flexionante M y una fuerza cortante V que esta discretizada en N elementos y con una grieta de longitud a en uno de esos elementos (ver Fig. 3.1).

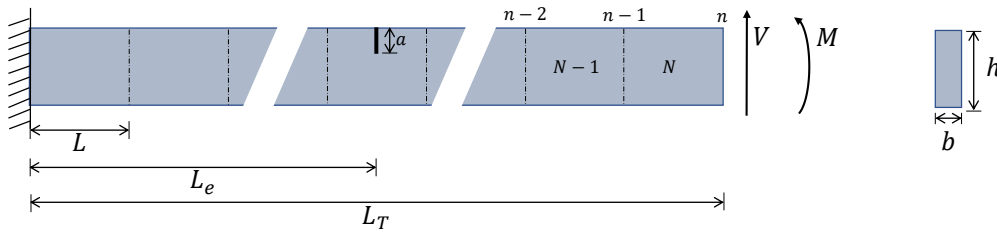


Figura 3.1: Viga agrietada.

Como se ha mencionado la grieta introduce flexibilidad local y como resultado se genera una disminución de rigidez en la viga, de aquí la importancia de la matriz de flexibilidad. El resultado de la suma de la matriz de flexibilidad de un elemento de la viga sana y el otro agrietado, es la matriz de flexibilidad total del elemento agrietada.

La matriz de flexibilidad de un elemento de la viga sana, la obtenemos con la energía de deformación en vigas como se muestra en la siguiente ecuación [43]

$$U_1 = \int_v \frac{\sigma^2}{2E} dv = \int_v \frac{1}{2E} \left(\frac{My}{I} \right)^2 dAdx \quad \text{o} \quad U_1 = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (3.1)$$

donde U es la energía de deformación, M el momento flexionante, E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal y L es la longitud de elemento viga. Desarrollando la Ec. (3.1) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(Vx + M)^2}{EI} dx \\ U_1 &= \frac{V^2 L^3}{6EI} + \frac{MVL^2}{2EI} + \frac{M^2 L}{2EI} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde M es el momento flexionante y V es la fuerza cortante. El coeficiente de flexibilidad de un elemento sin grieta [10] es obtenido como:

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial P_i \partial P_j}, \quad P_i = V, \quad P_j = M \quad (3.3)$$

Desarrollando la Ec. (3.3) se obtiene la matriz de flexibilidad de un elemento sano, quedando la siguiente ecuación

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Para el caso de un elemento agrietada de la viga, la energía de deformación está dada por la Ec. (2.71), donde despejando dU obtenemos

$$dU_2 = \frac{k_i^2}{E'} da \quad (3.5)$$

El análisis en la Sección 2.4.3 es para una placa de espesor unitario, por lo tanto para la viga se utiliza el espesor b (ver Fig. 3.1) y bajo los criterios de modos de fractura I , II y III se utilizan los factores de intensidad de esfuerzos k_i correspondientes. Dicho lo anterior se desarrolla la Ec. (3.5), resultando la siguiente ecuación

$$U_2 = b \int_0^a \left\{ \frac{[(K_{IM} + K_{IV})^2 + K_{IIV}^2]}{E'} \right\} da \quad (3.6)$$

donde k_{IM} y k_{IV} son los factores de intensidad de esfuerzos para el primer modo de fractura y k_{IIV} corresponde al segundo modo de fractura. Además, considerando un plano de estado de deformación $E' = E/(1 - \nu^2)$. Los factores de intensidad de esfuerzos [44] están dados como:

$$\begin{aligned} K_{IM} &= \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_I(r) \\ K_{IV} &= \frac{3VL}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_I(r) \\ K_{IIV} &= \frac{V}{bh} \sqrt{\pi a} F_{II}(r) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Los factores de corrección para una sección transversal rectangular [44] están dados como:

$$\begin{aligned} F_I(r) &= \sqrt{\frac{2 \tan(\frac{\pi r}{2})}{\pi r} \frac{0.923 + 0.199 [1 - \sin(\frac{\pi r}{2})]^4}{\cos(\frac{\pi r}{2})}} \\ F_{II}(r) &= (3r - 2r^2) \frac{1.122 - 0.561r + 0.085r^2 + 0.18r^3}{\sqrt{1 - r}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sustituyendo la Ec. (3.7) en la Ec. (3.6) y resolviéndola, se obtiene la siguiente ecuación

$$U = \frac{\pi(1-v^2) [(6M + 3VL)^2 A + V^2 h^2 B]}{Ebh^2} \quad (3.9)$$

donde $A = \int_0^r r F_I^2(r) dr$ y $B = \int_0^r r F_{II}^2(r) dr$.

El coeficiente de flexibilidad del elemento agrietado de la viga está dado como:

$$C_{ij}^{(2)} = \frac{\partial U_2}{\partial P_i \partial P_j}, \quad P_i = V, \quad P_j = M \quad (3.10)$$

Desarrollando la Ec. (3.10) se obtiene la matriz de flexibilidad de un elemento agrietado de la viga, quedando la siguiente ecuación

$$C_2 = \begin{bmatrix} \frac{\pi(18L^2 A + 2h^2 B)(1-v^2)}{Ebh^2} & \frac{36\pi LA(1-v^2)}{Ebh^2} \\ \frac{36\pi LA(1-v^2)}{Ebh^2} & \frac{72\pi A(1-v^2)}{Ebh^2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Con las Ecs. (3.4) y (3.11) logramos obtener la matriz de flexibilidad total C , que está dada por:

$$C = C_1 + C_2 = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} + \frac{\pi(18L^2 A + 2h^2 B)(1-v^2)}{Ebh^2} & \frac{L^2}{2EI} + \frac{36\pi LA(1-v^2)}{Ebh^2} \\ \frac{L^2}{2EI} + \frac{36\pi LA(1-v^2)}{Ebh^2} & \frac{L}{EI} + \frac{72\pi A(1-v^2)}{Ebh^2} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.2. Matriz de rigidez de una viga agrietada

Para obtener la matriz de rigidez de un elemento agrietado de la viga, se asume que el elemento agrietado de la viga está sometido a fuerzas cortantes V y momentos flexionantes M (ver Fig. 3.2).

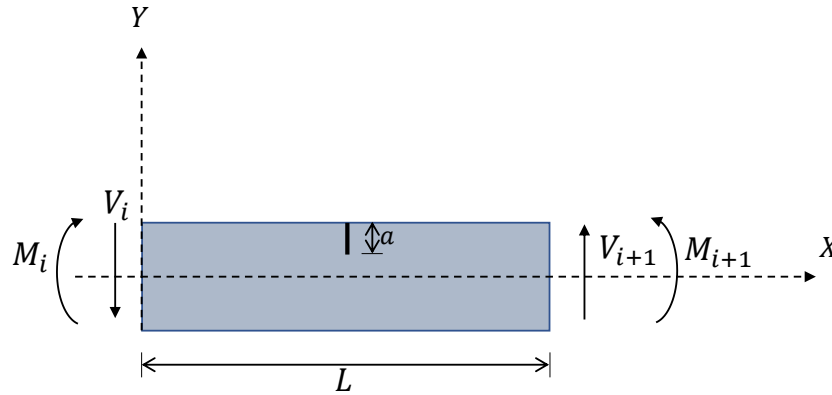


Figura 3.2: Elemento agrietado de la viga.

Aplicando condiciones de equilibrio se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} V_i &= -V_{i+1} \\ M_i &= -V_{i+1}L - M_{i+1} \\ V_{i+1} &= V_{i+1} \\ M_{i+1} &= M_{i+1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

que al representarlas de forma matricial obtenemos

$$\begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_{i+1} \\ M_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i+1} \\ M_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.15)$$

La matriz de flexibilidad y de rigidez son inversa una de la otra, por lo que se logra obtener la matriz de rigidez del elemento agrietado, resultando la siguiente ecuación

$$K_c = [Q][C]^{-1}[Q]^T \quad (3.16)$$

donde K_c es la matriz de rigidez de un elemento agrietado de dimensión 4×4 . Además se observa que la matriz K_c corresponde a la misma dimensión de la matriz de rigidez de una viga sana, por lo que se puede añadir a la matriz de rigidez global K . Para añadir la matriz K_c a la matriz K nos podemos apoyar con el agrupamiento de matrices de la Sección 2.3.2, solo que se debe tomar en cuenta la ubicación de la matriz ya que, esta depende de la ubicación de la grieta. Quedando el modelo dinámico de una viga agrietada de la siguiente manera:

$$M\ddot{X}(t) + KX(t) = F(t) \quad (3.17)$$

donde M es la matriz de masa global, K la matriz de rigidez global, que incluye la matriz de rigidez de un elemento agrietado, $X(t)$ es el vector desplazamientos de cada nodo y $F(t)$ el vector de fuerzas externas.

3.3. Comportamiento dinámico de una viga en cantilever con grieta

Una grieta en una viga provoca cambios en el comportamiento dinámico de la viga, dando como resultado aumento de flexibilidad local, provocando cambios en sus frecuencias naturales.

Como caso de estudio consideramos una viga en cantilever discretizada en N elementos de longitud L_T , con una profundidad a y con una longitud a la grieta l_e como se muestra en la Fig. 3.3. Las propiedades geométricas y del material de la viga se observan en la Tabla 3.1.

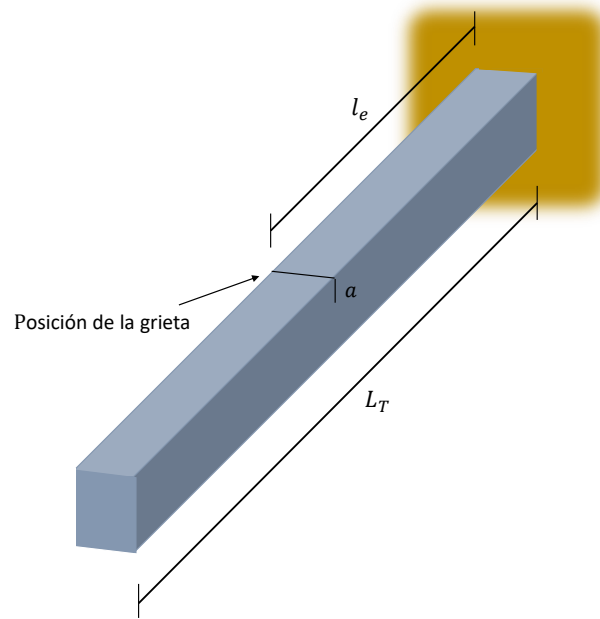


Figura 3.3: Viga agrietada

Aluminio 6063 T5	Sección transversal rectangular
$E = 68.9 \text{ GPa}$	$A = 0.0381 \text{ m} \times 0.0254 \text{ m}$
$\nu = 0.33$	$I = 1.1706 \times 10^{-7} \text{ m}^4$
$\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$L_T = 0.5 \text{ m}$

Tabla 3.1: Propiedades de la viga.

3.3.1. Análisis estructural

Como se ha mencionado, una grieta en un elemento estructural provoca cambios en las frecuencias naturales, este cambio de frecuencias es generado por la profundidad de la grieta y por la ubicación de la misma.

En la Fig. 3.4 se muestran en el eje y las frecuencias normalizadas con respecto a la frecuencia obtenida en una viga sana y en el eje x la relación de profundidad de la grieta r . En la Fig. 3.4(a), la frecuencia normalizada es para el primer modo de vibración y se observa que entre más cerca este la grieta al lado empotrado de la viga, menor será su frecuencia. En la Fig. 3.4(b), la frecuencia normalizada es para el segundo modo de vibración y aquí se logra apreciar que existe una menor frecuencia cuando la grieta se encuentra a la mitad de la viga. En la Fig. 3.4(c), la frecuencia normalizada es para el tercer modo de vibración y se observa que las bajas frecuencias son en 2 puntos uno cerca del empotramiento y el otro cerca del extremo libre de la viga.

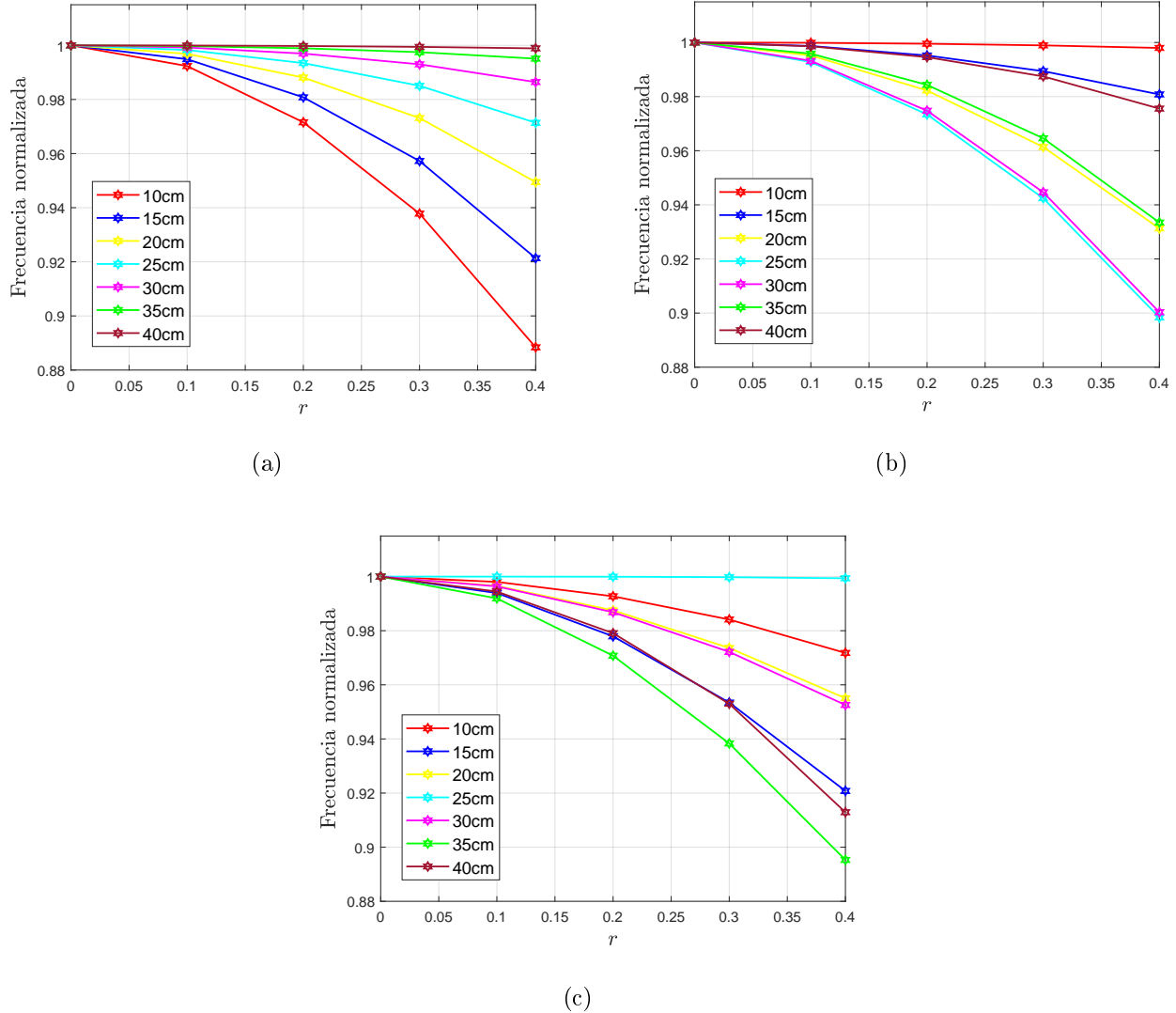


Figura 3.4: Frecuencias provocadas por las grietas en los 3 primeros modos de vibración.

Se observa que existe un mayor cambio de frecuencia natural cuando se relacionan los modos de vibración con la ubicación de la grieta, esto quiere decir que dependiendo de la forma modal, una grieta de magnitud a ubicada a una distancia l_e afecta de manera diferente la dinámica de la viga.

3.3.2. Análisis modal

La forma en que se relacionan la ubicación de la grieta y los modos de vibración se muestra en la Fig. 3.5. Se observan 3 graficas, en donde en cada una de ellas se comparan las formas modales de una viga sana con respecto a una viga agrietada que tiene una grieta con una relación de profundidad de $r = 0.4$ y ambas vigas están discretizadas en 100 elementos. En la Fig. 3.5(a), la grieta está ubicada a 10cm del extremo empotrado de la viga y se muestra como la grieta afecta principalmente al primer y tercer modo de vibración. En la Fig. 3.5(b), la grieta está ubicada a 25cm del extremo empotrado de la viga y se muestra como la grieta afecta principalmente al segundo y primer modo de vibración. En la Fig. 3.5(c), la grieta está ubicada a 40cm del extremo

empotrado de la viga y se muestra como la grieta afecta principalmente al tercer y segundo modo de vibración.

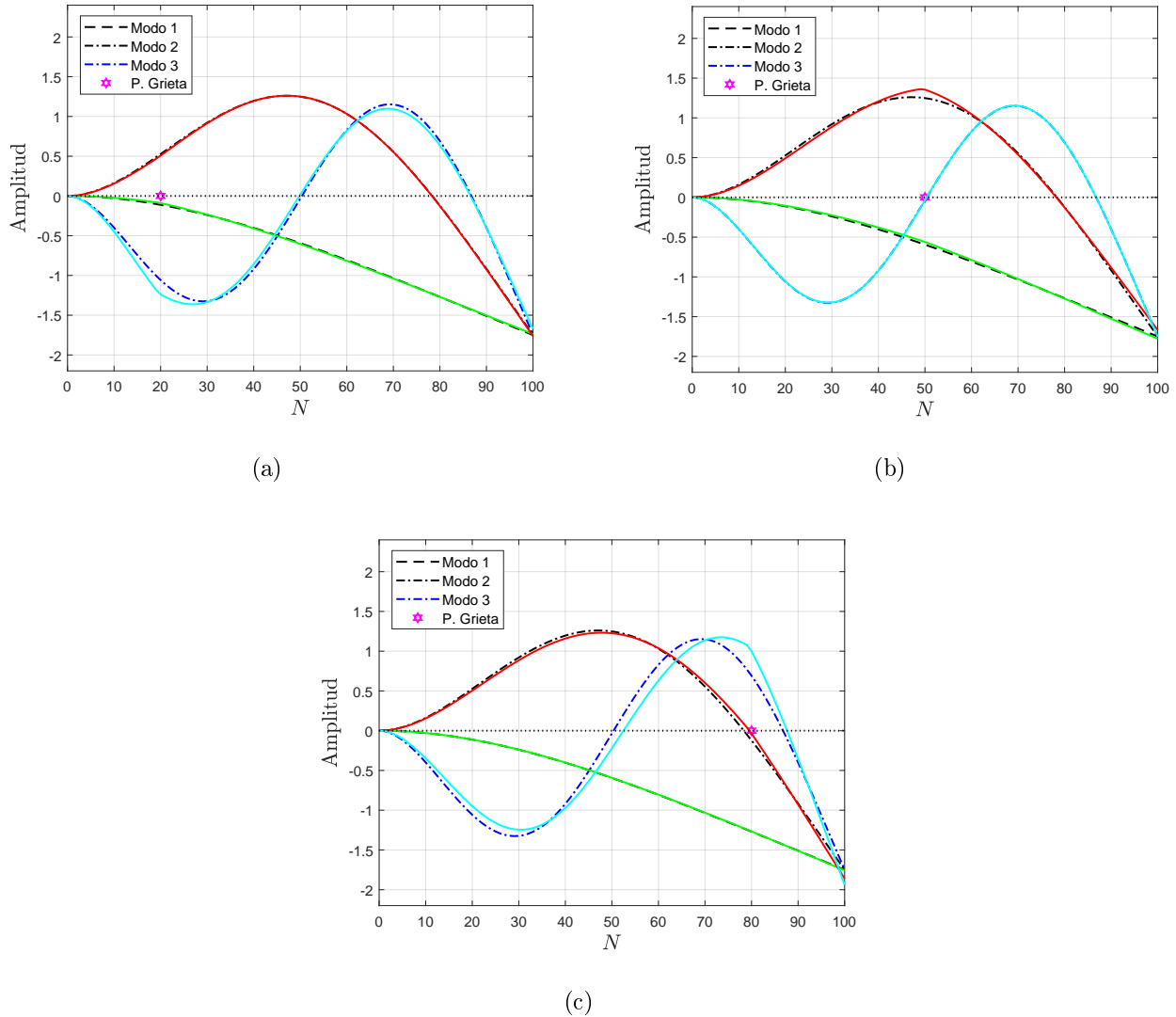
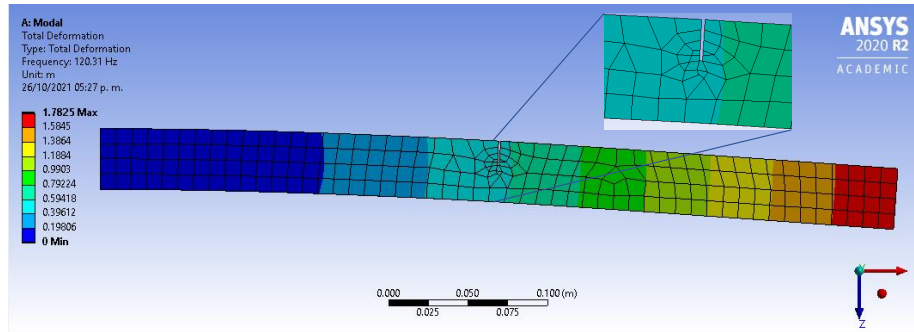


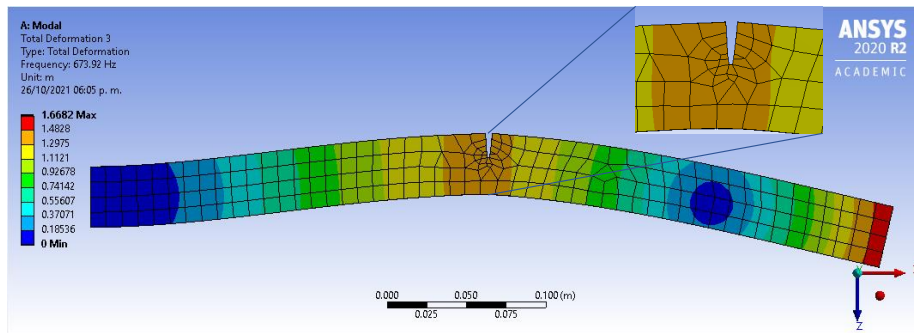
Figura 3.5: Primeros 3 modos de vibración con grietas.

Se observa que la presencia de una grieta en una viga en cantilever modifica las formas modales. Además, existe un mayor cambio en el desplazamiento modal cuando se relacionan los modos de vibración con la ubicación de la grieta.

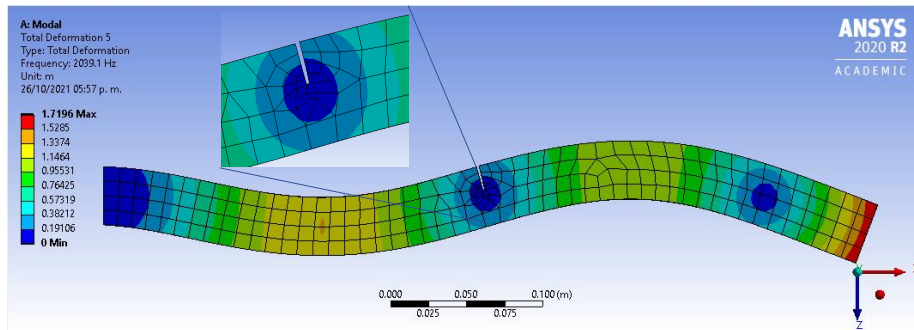
A continuación se presenta el análisis modal de la Fig. 3.3 desarrollado en la plataforma ANSYS[®] y para las respuestas frecuenciales se utiliza el *Toolbox Harmonic Response* de ANSYS[®]. En la Fig. 3.6(a), (b) y (c) se observan las primeras 3 formas modales de la viga agrietada, con la grieta ubicada a la mitad de la viga y con una $r = 0.4$ y la Fig. 3.7 muestra la respuesta frecuencial de la viga agrietada.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.6: Modos de vibración en ANSYS[®] de la viga sagrietada a) Modo I, b) Modo II c) Modo III.

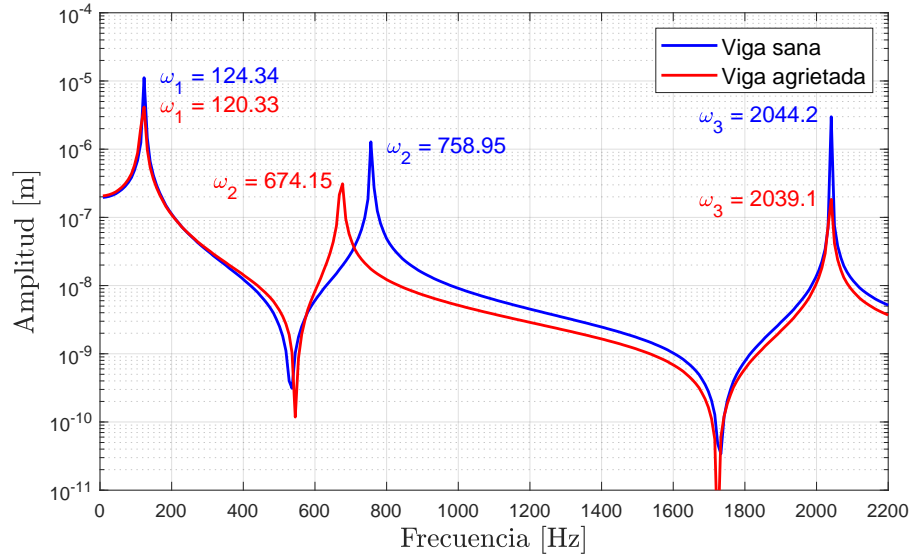


Figura 3.7: Respuesta frecuencial.

Es posible utilizar el método de elemento finito para identificar los cambios de desplazamiento modal provocados por la presencia de una grieta. Otro factor que me brinda información acerca de la posible existencia de una grieta son los cambios en las frecuencias naturales. Por lo tanto, los principales índices que me ayudan a estimar la ubicación y magnitud de una grieta son las forma modales y las frecuencias naturales. En la Tabla 3.2 se muestran las frecuencias naturales obtenidas de forma analítica y por ANSYS[©].

Viga sana			
Método	Modo I	Modo II	Modo III
Forma analítica (<i>Hz</i>)	124.36	779.35	2182.21
ANSYS [©] (<i>Hz</i>)	124.34	758.95	2044.2
Diferencia (%)	0.01	2.68	6.75
Viga agrietada			
Método	Modo I	Modo II	Modo III
Forma analítica (<i>Hz</i>)	120.8	700.14	2180.85
ANSYS [©] (<i>Hz</i>)	120.33	674.15	2039.1
Diferencia (%)	0.39	3.85	6.95

Tabla 3.2: Frecuencias naturales.

3.3.3. Análisis estructural y función característica de la viga

Como se mencionó en la sección 3.3.1, al introducir una grieta en una viga empotrada, se provoca un aumento de flexibilidad local en la región agrietada y esto genera cambios en las frecuencias naturales de la viga, estos cambios de frecuencia se deben principalmente a la ubicación de la grieta y la magnitud de la misma.

Dicho lo anterior, en una viga agrietada y para cualquier forma modal, la grieta puede estar ubicada en diferentes posiciones con diferentes magnitudes de profundidad a y generar la misma frecuencia natural como se muestra en la Fig. 3.8, donde se tiene en color azul el primer modo de vibración de la viga sin grieta que se ha venido estudiando en este Capítulo y se observa que también hay dos formas modales que corresponden al primer modo de vibración de 2 vigas agrietadas que tienen entre ellas la misma frecuencia natural pero con las grietas en diferentes posiciones a diferentes magnitudes.

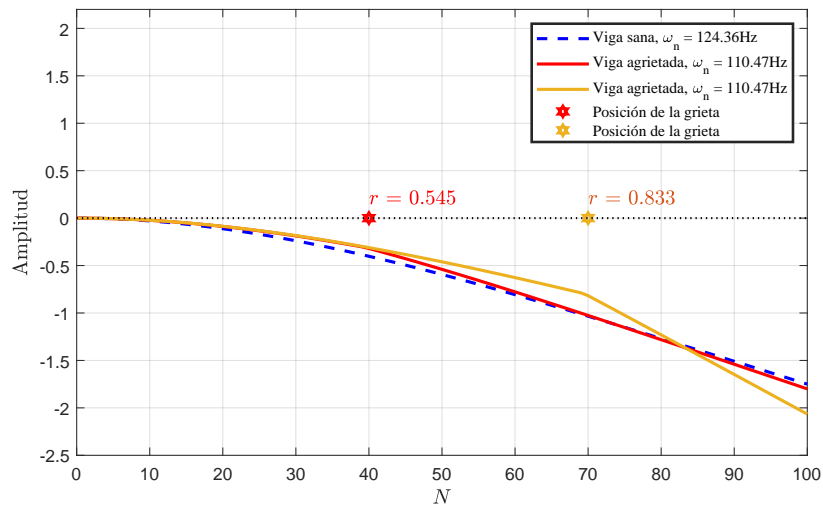


Figura 3.8: Modo I de vibración para una viga sana y dos vigas agrietadas.

Adicional a lo mostrado en la Fig. 3.8. Al comparar dos o más vigas agrietadas con la misma frecuencia natural pero diferente ubicación y magnitud de las grietas, es posible obtener los mismos desplazamientos nodales en uno o varios puntos de la forma modal como se muestra la Fig. 3.9, donde se tiene en color azul el tercer modo de vibración de la viga sin grieta que se ha venido estudiando en este Capítulo y se observa que también hay dos formas modales que corresponden al tercer modo de vibración de 2 vigas agrietadas que tienen entre ellas la misma frecuencia natural pero con las grietas en diferentes posiciones a diferentes magnitudes. Además, se observa que los nodos que representa el extremo libre de las vigas agrietadas tienen el mismo desplazamiento nodal.

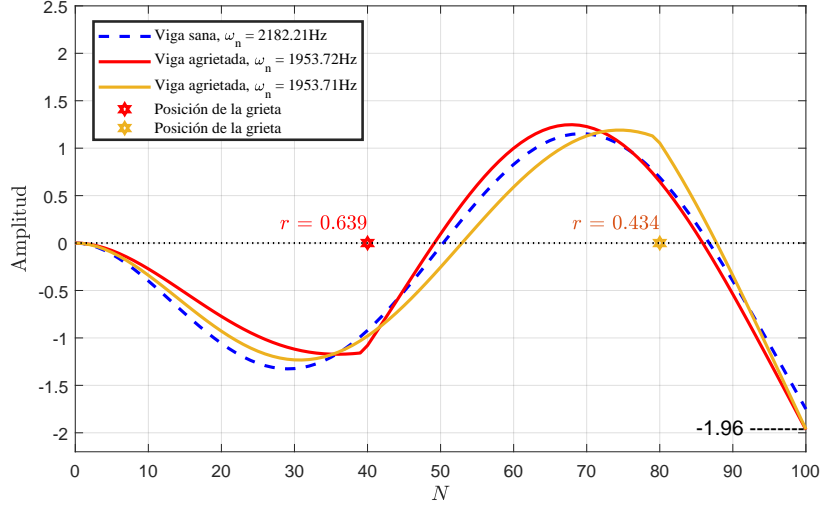


Figura 3.9: Modo III de vibración para una viga sana y dos vigas agrietadas.

El comportamiento dinámico de la viga agrietada que se ha venido estudiando en esta sección, contribuye para obtener información que puede ser útil para estimar la ubicación y magnitud de la grieta. En [7], se propone la viga mostrada en la Fig. 3.10.

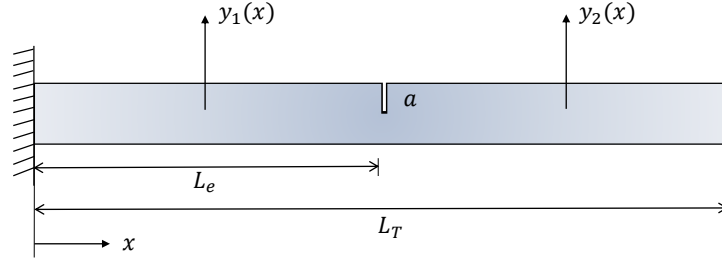


Figura 3.10: Viga agrietada

Las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de la viga son las siguientes.

$$Y_1(R) = A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x) + A_3 \cosh(\beta x) + A_4 \sinh(\beta x) \quad (3.18)$$

$$Y_2(R) = B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x) + B_3 \cosh(\beta x) + B_4 \sinh(\beta x) \quad (3.19)$$

Se observa que la Ec. (3.18) y la Ec. (3.19) corresponden a la función característica de la viga descrita en la sección 2.2 con $R = L_e/L_T$.

Con el objetivo de conocer la ubicación de la grieta, se utiliza la Ec. (3.19), en donde para encontrar las constantes B_1, B_2, B_3 y B_4 se utiliza la frecuencia natural de la viga agrietada, el desplazamiento nodal del extremo libre y la pendiente modal en esa región, y una vez obtenida dicha ecuación, de forma gráfica se puede aproximar la ubicación de la grieta como se muestra en la Fig. 3.11, en donde (a), (b) y (c) tienen en color rojo la forma modal de una viga agrietada con su respectiva frecuencia natural, en color azul la forma modal de una viga sana pero con la frecuencia natural de la viga agrietada y en color verde la función propuesta por la Ec. (3.19) con la frecuencia natural de la viga agrietada. Además, se observa que con este análisis y de forma gráfica es posible obtener una aproximación de la grieta para cualquier forma modal.

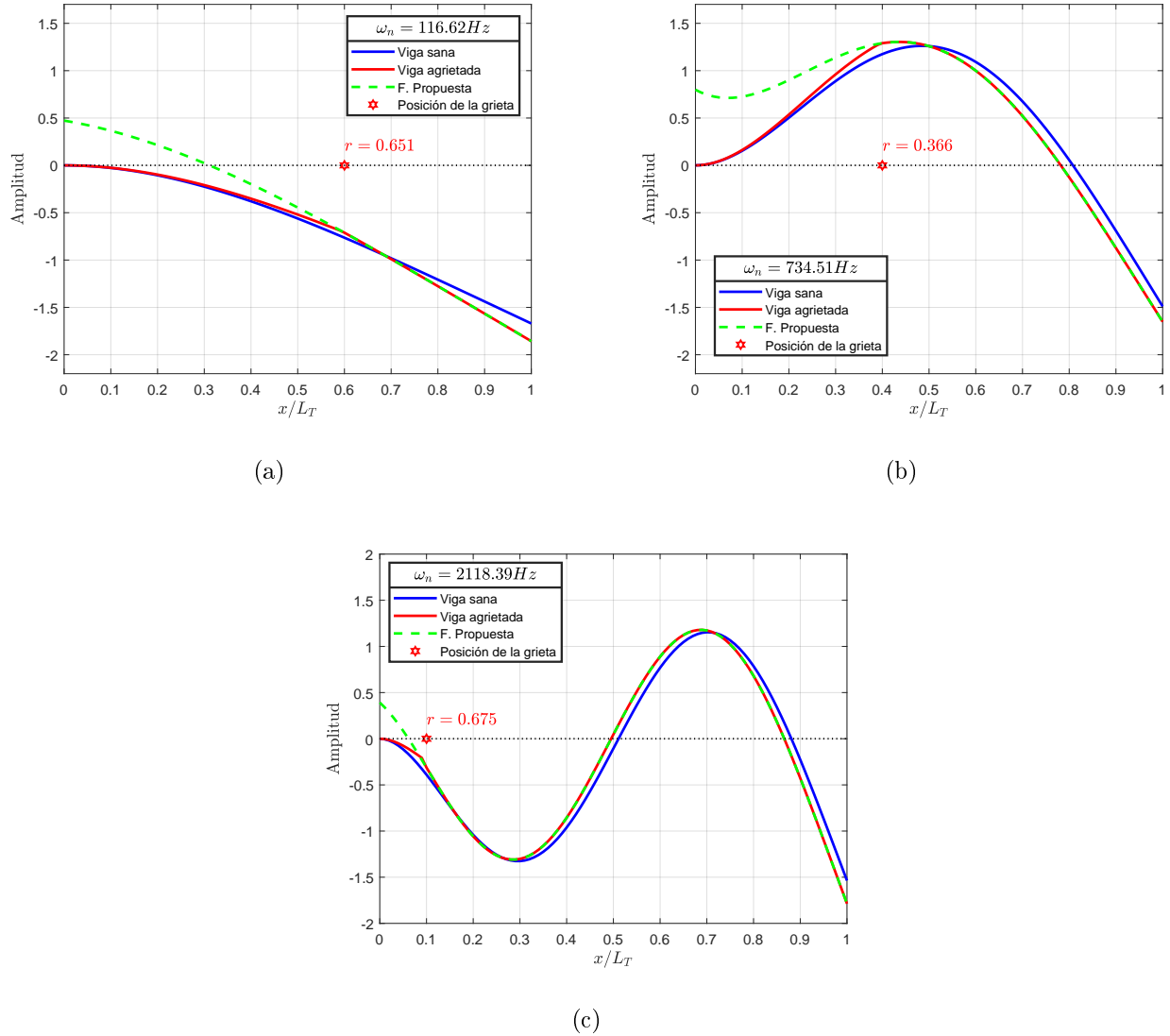


Figura 3.11: a) Modo I, b) Modo II y c) Modo III.

Con la ubicación de la grieta y la frecuencia natural, es posible obtener la magnitud de la grieta con la siguiente ecuación.

$$(K - \omega^2 M) \psi = 0 \quad (3.20)$$

La Ec. (3.20) corresponde al desarrollo de la ecuación de movimiento de la viga descrita en la sección 2.3.3.

Se observa que a través de la Ec. (3.18) y Ec. (3.19) se puede aproximar la ubicación de la grieta y posteriormente con la Ec. (3.20) la magnitud de la misma. Bajo este concepto, se da por hecho que entre más información se tenga del comportamiento dinámico de la viga agrietada, es posible estimar la ubicación y magnitud de la grieta.

En la Sección 2.5 se abordó la identificación algebraica como una técnica de estimación de parámetros y a través de un ejemplo se ilustró el desarrollo de la misma, se logró observar que la variable de desplazamiento x es dependiente del tiempo y durante el desarrollo de la estimación

de parámetros, las integrales son respecto al tiempo. Con el fin de estimar parámetros de la grieta, cabe señalar que la Ec. (3.18) y Ec. (3.19) corresponden a la función característica de la viga y recordar que dicha función es dependiente de βx donde la variable es el desplazamiento x que corresponde a la longitud de la viga, por lo tanto es posible aplicar una técnica de identificación de parámetros dependiente de x .

Capítulo 4

Identificación algebraica de parámetros modales

En la Sección 2.5 se ilustraron las ideas de la identificación algebraica a través de un ejemplo, donde se mostró que la estimación se obtiene de manera rápida y efectiva, por lo tanto, la identificación algebraica es una herramienta muy buena para estimar parámetros de sistemas dinámicos en tiempo real.

Los parámetros modales de un elemento mecánico brindan información del comportamiento dinámico de dicho elemento en cualquier instante de tiempo. Para el caso de una viga en cantilever con y sin grieta, la frecuencia natural y las formas modales proporcionan información que ayuda a estimar la ubicación y la magnitud de la grieta. Para estimar las frecuencias naturales de la viga en cantilever a través de una técnica de identificación algebraica, primero se considera el modelo de la viga de $2n - 2$ grados de libertad, dado por la siguiente ecuación

$$M\ddot{X} + KX = F \quad (4.1)$$

donde M es la matriz de masa, K la matriz de rigidez, ambas de dimensión $2n \times 2n$ y $X = [w_2 \ \phi_2 \ w_3 \ \phi_3 \ \cdots \ w_n \ \phi_n]$ es el vector de desplazamiento nodal. Los nodos del extremo empotrado son $w_1 = \phi_1 = 0$, como se observa en la Fig. 4.1.

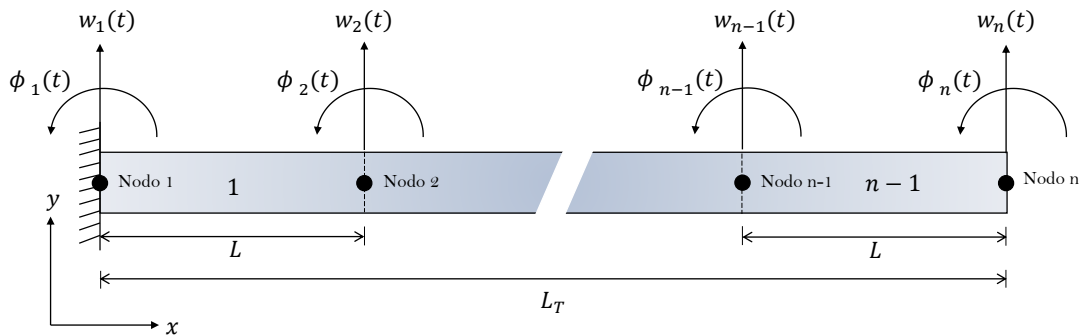


Figura 4.1: Viga discretizada en $n - 1$ elementos

El modelo extendido de la Ec. (4.1) puede reescribirse en términos de coordenadas modales [29] como:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \Psi f_i \quad (4.2)$$

donde q_i es la i -ésima coordenada modal, w_i es la frecuencia natural, ambas asociadas la i -ésima forma modal, f_i es la fuerza modal y Ψ es la matriz modal de $n \times n$ dada por

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & & \psi_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \cdots & \psi_{nn} \end{bmatrix}$$

Se observa que las salidas del sistema pueden ser modeladas por una sola variable, por lo tanto, dado un desplazamiento nodal se pueden obtener las frecuencias naturales de la viga en cantilever.

4.1. Estimación de las frecuencias naturales de una viga en cantilever

De la Fig. 4.1 se observa que es posible estimar $2n - 2$ frecuencias naturales. Para el caso de una viga empotrada con 2 grados de libertad (ver Fig. 4.2), solo se estimaran 2 frecuencias naturales, con $w_1 = \phi_1 = 0$.

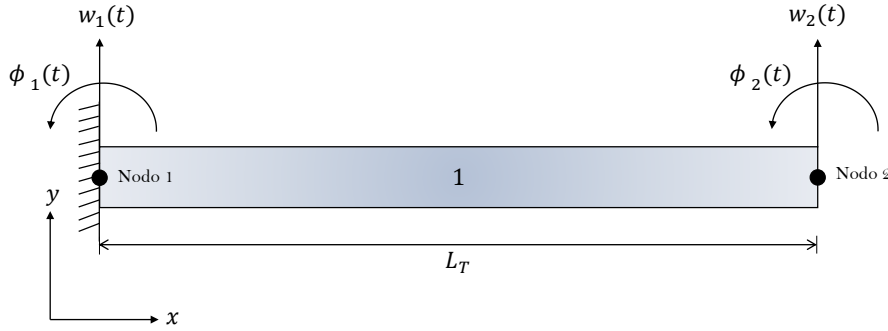


Figura 4.2: Viga discretizada en un elemento

Asumiendo vibraciones libres en la viga, esto quiere decir $F = 0$, el modelo matemático queda representado por la siguiente ecuación

$$x_i^{(4)} + a_2 \ddot{x}_i + a_0 x_i = 0 \quad (4.3)$$

Se observa que la Ec. (4.3), es una ecuación diferencial de cuarto orden debido a que tiene una ecuación diferencial de segundo orden por cada grado de libertad, por lo tanto, las frecuencias naturales del sistema están dadas por las raíces imaginarias del polinomio característico definido por

$$P(s) = s^4 + a_2 s^2 + a_0 \quad (4.4)$$

Aplicado la transformada de Laplace a la Ec. (4.3), se obtiene la siguiente ecuación

$$a_2 [s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + a_0 [X(s)] = - [s^4 X(s) - s^3 x(0) - s^2 \dot{x}(0) - s \ddot{x}(0) - x^{(3)}(0)] \quad (4.5)$$

donde $x(0)$ y $x^{(n)}(0)$ son constantes iniciales de sistema. Con el fin de eliminar la dependencia de las constantes iniciales donde $t = 0$, la Ec. (4.5) se deriva 4 veces respecto a la variable s y se

multiplica por s^{-4} , obteniendo

$$\begin{aligned} & a_2 \left[12s^{-4} \frac{d^2}{ds^2} X(s) + 8s^{-3} \frac{d^3}{ds^3} X(s) + s^{-2} \frac{d^4}{ds^4} X(s) \right] + a_0 \left[s^{-4} \frac{d^4}{ds^4} X(s) \right] \\ &= - \left[24s^{-4} X(s) + 96s^{-3} \frac{d}{ds} X(s) + 72s^{-2} \frac{d^2}{ds^2} X(s) + 16s^{-1} \frac{d^3}{ds^3} X(s) + \frac{d^4}{ds^4} X(s) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Regresando la Ec. (4.6) al dominio del tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned} & a_2 \left[12 \int^{(4)} \Delta t^2 x - 8 \int^{(3)} \Delta t^3 x + \int^{(2)} \Delta t^4 x \right] + a_0 \left[\int^{(4)} \Delta t^4 x \right] \\ &= - \left[24 \int^{(4)} x - 96 \int^{(3)} \Delta t x + 72 \int^{(2)} \Delta t^2 x - 16 \int \Delta t^3 x + \Delta t^4 x \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\Delta t = t - t_0$ y $\int_0^{(n)} \phi(t)$ es la integral iterada de la forma

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\alpha_1} \dots \int_{t_0}^{\alpha_{n-1}} \phi(\alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_1$$

Ahora, es posible obtener un sistema de ecuaciones linealmente independientes cuya solución es el vector de parámetros buscados por lo que, se utiliza la siguiente representación matemática

$$A(t)\theta = D(t) \quad (4.8)$$

donde $\theta = [a_2 \ a_0]^T$ es el vector solución, $A(t)$ es una matriz 2×2 y $D(t)$ es una matriz 2×1 , cuyos valores son:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= 12 \int^{(4)} \Delta t^2 x - 8 \int^{(3)} \Delta t^3 x + \int^{(2)} \Delta t^4 x, & a_{21} &= \int_{t_0} a_{11} \\ a_{12} &= \int^{(4)} \Delta t^4 x, & a_{22} &= \int_{t_0} a_{12} \\ d_1 &= -24 \int^{(4)} x + 96 \int^{(3)} \Delta t x - 72 \int^{(2)} \Delta t^2 x + 16 \int \Delta t^3 x - \Delta t^4 x, & d_2 &= \int_{t_0} d_1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

La solución de la Ec. (4.8) se encuentra por medio de la regla de Cramer, donde finalmente los parámetros estimados quedan de la siguiente manera:

$$\hat{a}_2 = \frac{\int |\Delta_1|}{\int |\Delta|}, \quad \hat{a}_0 = \frac{\int |\Delta_2|}{\int |\Delta|} \quad (4.11)$$

4.2. Generalización del método de identificación algebraica

Para un sistema de n grados de libertad de la forma

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (4.12)$$

donde $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$. La señal de salida esta modelada de la siguiente forma

$$x_i^{(2n)} + a_{2n-2}x_i^{(2n-2)} + a_{2n-4}x_i^{(2n-4)} + \cdots + a_2\ddot{x}_i + a_0x_i = 0 \quad (4.13)$$

Las frecuencias naturales ω_i de la Ec. (4.13) están dadas por las raíces imaginarias del polinomio característico definido por la siguiente ecuación

$$P(s) = (s^2 + \omega_1^2) (s^2 + \omega_2^2) \cdots (s^2 + \omega_n^2) \quad (4.14)$$

Ahora, se multiplica la Ec. (4.13) por $(t - t_0)^{2n}$ e integra $2n$ veces respecto al tiempo, logrando obtener la siguiente ecuación

$$a_{2n-2}a_{11i} + a_{2n-4}a_{12i} + \cdots + a_2a_{1n-1i} + a_0a_{1ni} = b_{1i} \quad (4.15)$$

donde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, b_{1i}$ son componentes dependientes de las integraciones de x_i respecto al tiempo, y se obtienen desarrollando las siguientes expresiones [45]

$$a_{1r_i} = \sum_{k=0}^{2n-2r} (-1)^{2n-k} \frac{[2n]! [2n-2r]!}{k! [2n-k]! [2n-2r-k]!} \int_{t_0}^{(k+2r)} (t-t_0)^{2n-k} x_i \quad (4.16)$$

$$b_{1i} = - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \frac{[2n]!^2}{k! [2n-k]!^2} \int_{t_0}^{(k)} (t-t_0)^{2n-k} x_i \quad (4.17)$$

donde $r = 1, 2, \dots, n$ y $t_0 > 0$ es el tiempo de inicio de la estimación. Además, i se utiliza para denotar los coeficientes, las matrices o los vectores asociados a la variable x_i . Por lo tanto, queda representado el sistema de ecuaciones linealmente independientes de la siguiente manera:

$$A_i(t)\theta = D_i(t) \quad (4.18)$$

donde

$$A_i(t) = \begin{bmatrix} a_{11i} & a_{12i} & \cdots & a_{1ni} \\ a_{21i} & a_{22i} & & a_{2ni} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1i} & a_{n2i} & \cdots & a_{nni} \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} a_{2n-2} \\ a_{2n-4} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad D_i(t) = \begin{bmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ \vdots \\ d_{ni} \end{bmatrix}$$

Los componentes a_{kr_i} y b_{k_i} , con $k = 2, 3, \dots, n$ y $r = 1, 2, \dots, n$, se obtienen de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} a_{kr_i} &= \int_{t_0}^t a_{(k-1)j}(\tau_1) d\tau_1 \\ b_{k_i} &= \int_{t_0}^t b_{k-1}(\tau_1) d\tau_1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

De la Ec. (4.18) despejamos el vector de parámetros θ , obteniendo

$$\theta = (A_i)^{-1} D_i = \frac{1}{\Delta_i} \begin{bmatrix} \Delta_{2n-2_i} \\ \Delta_{2n-4_i} \\ \vdots \\ \Delta_{0_i} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Por ultimo, los coeficientes se estiman utilizando la siguiente ecuación

$$\hat{a}_{2r-2} = \frac{\int e^{-\gamma\Delta t} |\Delta_{2r-2}|}{\int e^{-\gamma\Delta t} |\Delta|} \quad (4.21)$$

donde $r = 1, 2, \dots, n$, $\gamma \geq 0$ es un filtro invariante que se relaciona con el tiempo de convergencia y Δt esta en pequeños intervalos de tiempo.

4.3. Resultados en simulación

Las frecuencias naturales de una viga empotrada se pueden obtener cuando se propone una masa y una rigidez equivalente. Es posible ubicar la masa y la rigidez equivalente en cualquier punto de la viga, para nuestro caso se ubican en el extremo libre de la viga (ver Fig. 4.3).

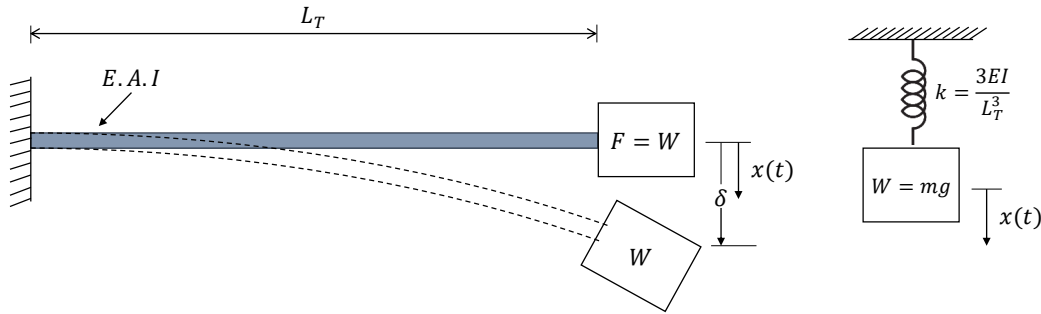


Figura 4.3: Viga empotrada [29].

Para un sistema sin amortiguamiento, la suma de n armónicos esta descrita por la siguiente ecuación

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (4.22)$$

donde A_i es la amplitud, w_i es la frecuencia y α_i es el ángulo de fase asociados a un componente armónico diferente. Es posible, generar a x a través de la suma de señales de salida x_i de osciladores armónicos con frecuencias arbitrarias [45] como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.23)$$

con

$$x_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (4.24)$$

donde

$$A_i = \sqrt{x_{i,0}^2 + \left(\frac{\dot{x}_{i,0}}{\omega_i}\right)^2}, \quad \alpha_i = \tan^{-1}\left(\frac{x_{i,0}}{\dot{x}_{i,0}/\omega_i}\right) \quad (4.25)$$

donde $x_{i,0}$ y $\dot{x}_{i,0}$ son las condiciones iniciales de cada oscilador y ω_i es la frecuencia natural. De manera de ejemplo, se desea estimar $\omega_1 = 17\text{rad/s}$ y $\omega_2 = 40\text{rad/s}$. Para fines de estimación, los parámetros se asumen como desconocidos. La salida del sistema esta descrita por la siguiente ecuación

$$x(t) = 15 \sin(40t) + 9 \sin(17t + 20) \quad (4.26)$$

De la Ec. (4.25), la salida x se muestra en la Fig. 4.4. Para la simulación numérica se utilizó el método de Runge-Kutta Fehlberg [42] con un paso de integración de 0.1ms , logrando obtener las gráficas de los parámetros estimados de ω_1 y ω_2 en la Fig. 4.5 (a) y en la Fig. 4.5 (b) respectivamente.

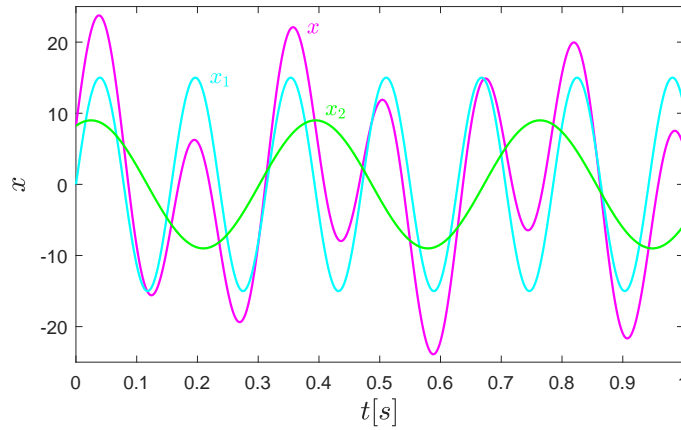
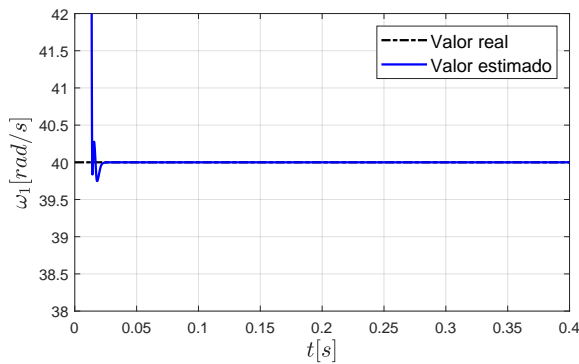
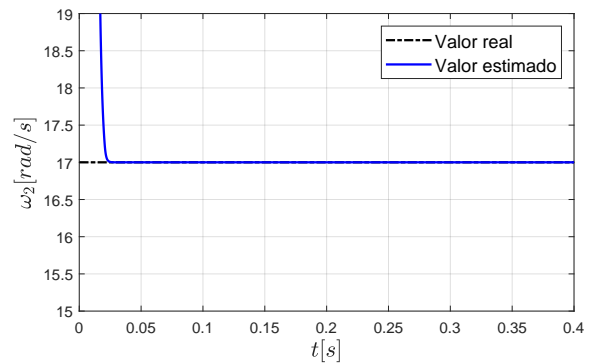


Figura 4.4: Señal de salida.



(a)



(b)

Figura 4.5: a) ω_1 y b) ω_2 .

Las líneas punteadas de las gráficas de la Fig. 4.5 representan los valores reales y las líneas continuas en color azul representan los parámetros estimados. Se observa que los parámetros estimados se aproximan a los valores reales a partir de 0.05s aproximadamente. La Tabla 4.1 muestra la comparación entre los valores reales y estimados después 0.1s .

Parámetro	Valor real	Valor estimado	Error(%)
$\omega_1[rad/s]$	40	40.0000	0
$\omega_2[rad/s]$	17	17.0000	0

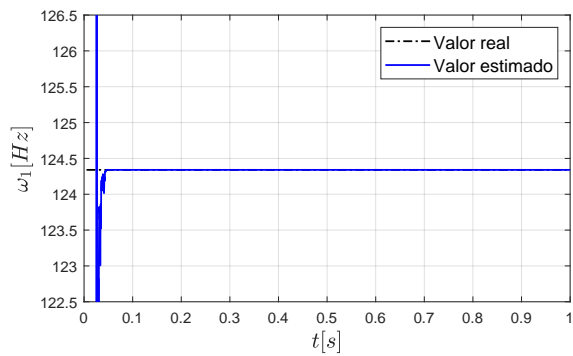
Tabla 4.1: Valor real vs valor estimado.

Con los de la Tabla 4.1, nuevamente se comprueba que la técnica de identificación algebraica es bastante eficaz para estimar parámetros.

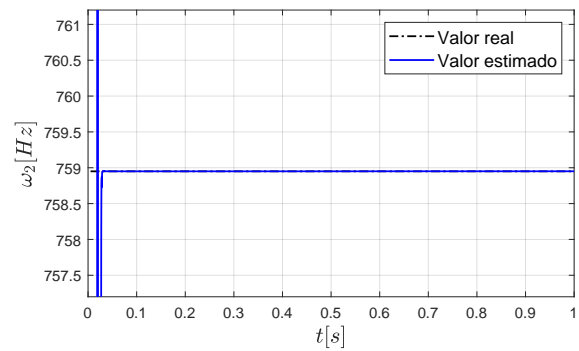
Capítulo 5

Caso de estudio

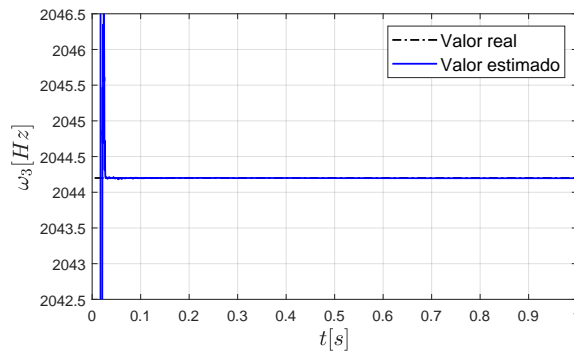
Primeramente, se planteó como caso de estudio utilizar una viga como la mostrada en la Fig. 3.3, cuyas especificaciones se muestran en la Tabla 3.1, de la cual se obtuvieron las frecuencias naturales $\omega_1 = 124.34Hz$, $\omega_2 = 758.95Hz$ y $\omega_3 = 2044.2Hz$ en el Capítulo 3, la estimación algebraica de dichas frecuencias se observan en la Fig. 5.1.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.1: a) Modo I, b) Modo II y c) Modo III.

Se observa que la técnica de identificación algebraica es eficaz para estimar las frecuencias naturales. El inconveniente es cuando se trata de aplicar dicha técnica de forma experimental, en donde los parámetros de estimación no se aproximan de manera adecuada a los valores reales, esto se debe a que las frecuencias naturales son muy altas, principalmente la última frecuencia natural, y de acuerdo al teorema de muestreo de Shannon se requiere un paso de muestreo muy pequeño para que funcione adecuadamente el estimador.

Tomando en cuenta lo anterior, existe el inconveniente en la capacidad computacional ya que es insuficiente para correr este tipo de programas en Matlab[®] con un paso de muestreo muy pequeño. Por esta razón, se plantea utilizar como caso de estudio una viga en cantilever diferente, con frecuencias naturales más pequeñas, como la mostrada en la Fig. 5.2. De igual manera se discretiza en 100 elementos y se realiza una fisura a la mitad de su longitud. Las propiedades geométricas y del material de la viga se muestran en la Tabla 5.1.

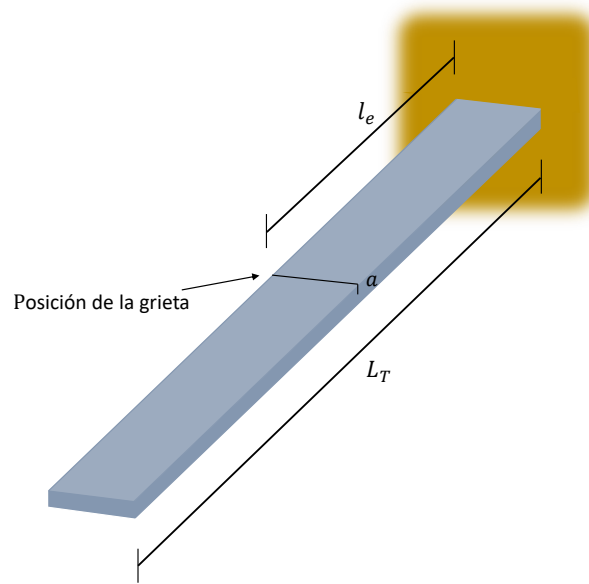


Figura 5.2: Viga agrietada

Aluminio 6063 T5	Sección transversal rectangular
$E = 68.9 \text{ GPa}$	$A = 0.0508 \text{ m} \times 0.0127 \text{ m}$
$\nu = 0.33$	$I = 8.6714 \times 10^{-9} \text{ m}^4$
$\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$L_T = 1.2 \text{ m}$

Tabla 5.1: Propiedades de la viga.

5.1. Análisis modal

El análisis modal de la Fig. 5.2 se obtiene a través del programa Matlab[®], dándonos como respuesta las formas modales y frecuencias naturales de la viga sana y agrietada. En la Fig. 5.3 se observan con líneas punteadas las primeras cuatro formas modales de la viga sana y con líneas continuas las formas modales de la viga agrietada. Para el caso de la viga agrietada, la ubicación de la grieta se localiza a la mitad de la viga y tiene una profundidad a igual a 3mm.

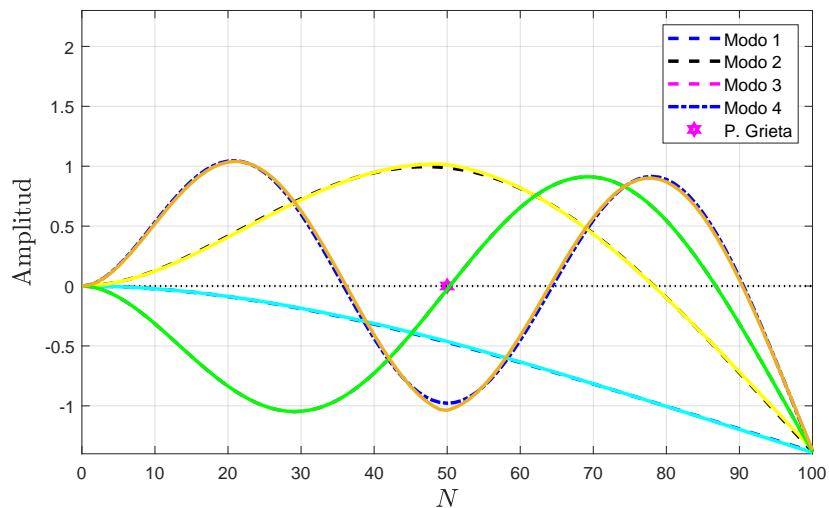
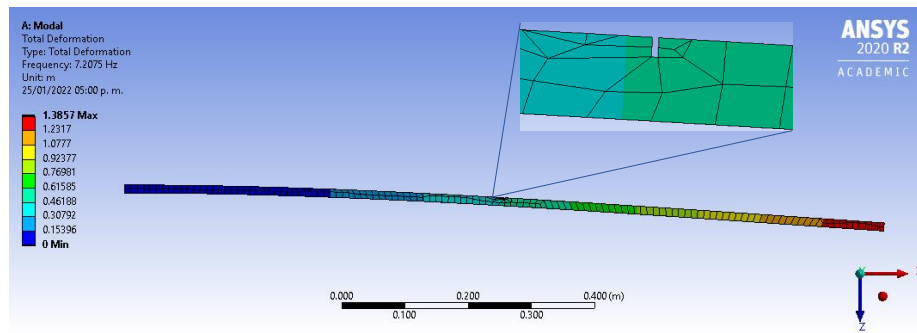


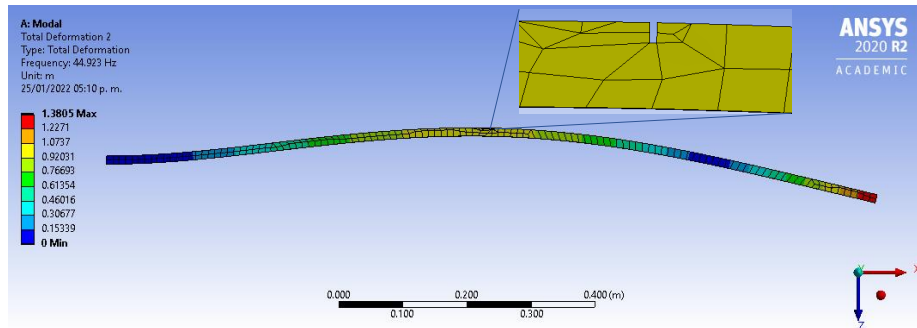
Figura 5.3
Primeras 4 formas modales.

Debido a la ubicación de la grieta, en la Fig. 5.3 se observa que los modos de vibración II y IV de la viga agrietada, muestran un cambio en la forma modal con respecto a las formas modales de la viga sana, y que el modo III no muestra cambios.

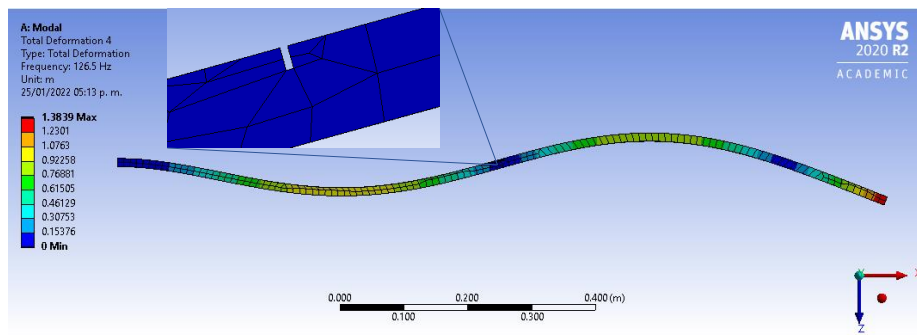
A continuación se presenta el análisis modal de la Fig. 5.2 desarrollado en la plataforma ANSYS[®], en donde se muestran las 4 primeras formas modales de la viga agrietada, con la grieta ubicada a la mitad de la viga y con $a = 3\text{mm}$. Además, en la Fig. 5.5 se presenta la gráfica de la respuesta frecuencial obtenida por medio del *ToolboxHarmonicResponse* de ANSYS[®].



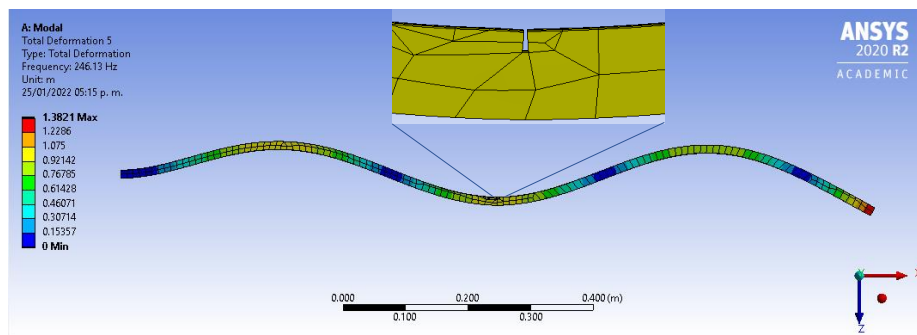
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.4: Modos de vibración en ANSYS[®] de la viga agrietada a) Modo I, b) Modo II c) Modo III d) Modo IV.

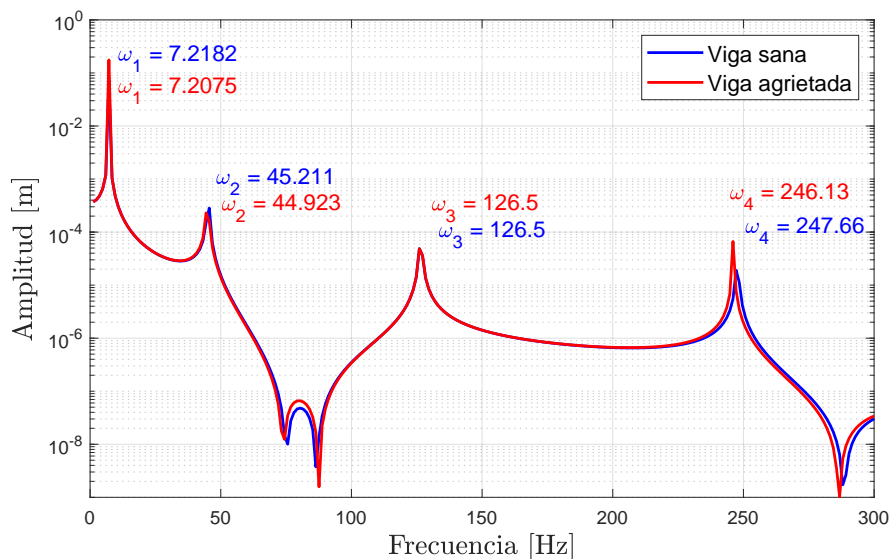


Figura 5.5: Respuesta frecuencial.

En la Fig. 5.4 se observa que debido al comportamiento dinámico de la viga y a la pérdida de rigidez local provocada por una grieta, afecta principalmente los desplazamientos nodales en esa región, por lo tanto, es posible utilizar el método de elemento finito para identificar los cambios en las formas modales y de esta manera estimar la ubicación de la grieta. Para en caso de las frecuencias naturales, en la Fig. 5.5 se observa que las frecuencias naturales que corresponde al modo de vibración II y IV se ven mayormente afectado por la presencia de la grieta, por lo tanto, otro factor que me brinda información acerca de la posible existencia de una grieta son los cambios en las frecuencias naturales. En la Tabla 5.2 se muestran las frecuencias naturales obtenidas de forma analítica y por ANSYS[®].

Viga sana				
Método	Modo I	Modo II	Modo III	Modo IV
Forma analítica (Hz)	7.1969	45.1025	126.2885	247.4752
ANSYS [®] (Hz)	7.2182	45.211	126.5	247.66
Viga agrietada				
Método	Modo I	Modo II	Modo III	Modo IV
Forma analítica (Hz)	7.1877	44.86	126.2884	246.1756
ANSYS [®] (Hz)	7.2075	44.923	126.5	246.13

Tabla 5.2: Frecuencias naturales.

Con los resultados obtenidos en ANSYS[®] se implementó la técnica de identificación algebraica para estimar las diferentes frecuencias naturales de la viga sana y de la viga agrietada. Se realizó la estimación que corresponde a la suma de los 4 armónicos para ambos casos como se observa en la Fig. 5.6 en donde se muestran de forma gráfica, en color azul la estimación de las frecuencias naturales de la viga sana, en color rojo la estimación de las frecuencias naturales de la viga agrietada y en color negro los valores reales.

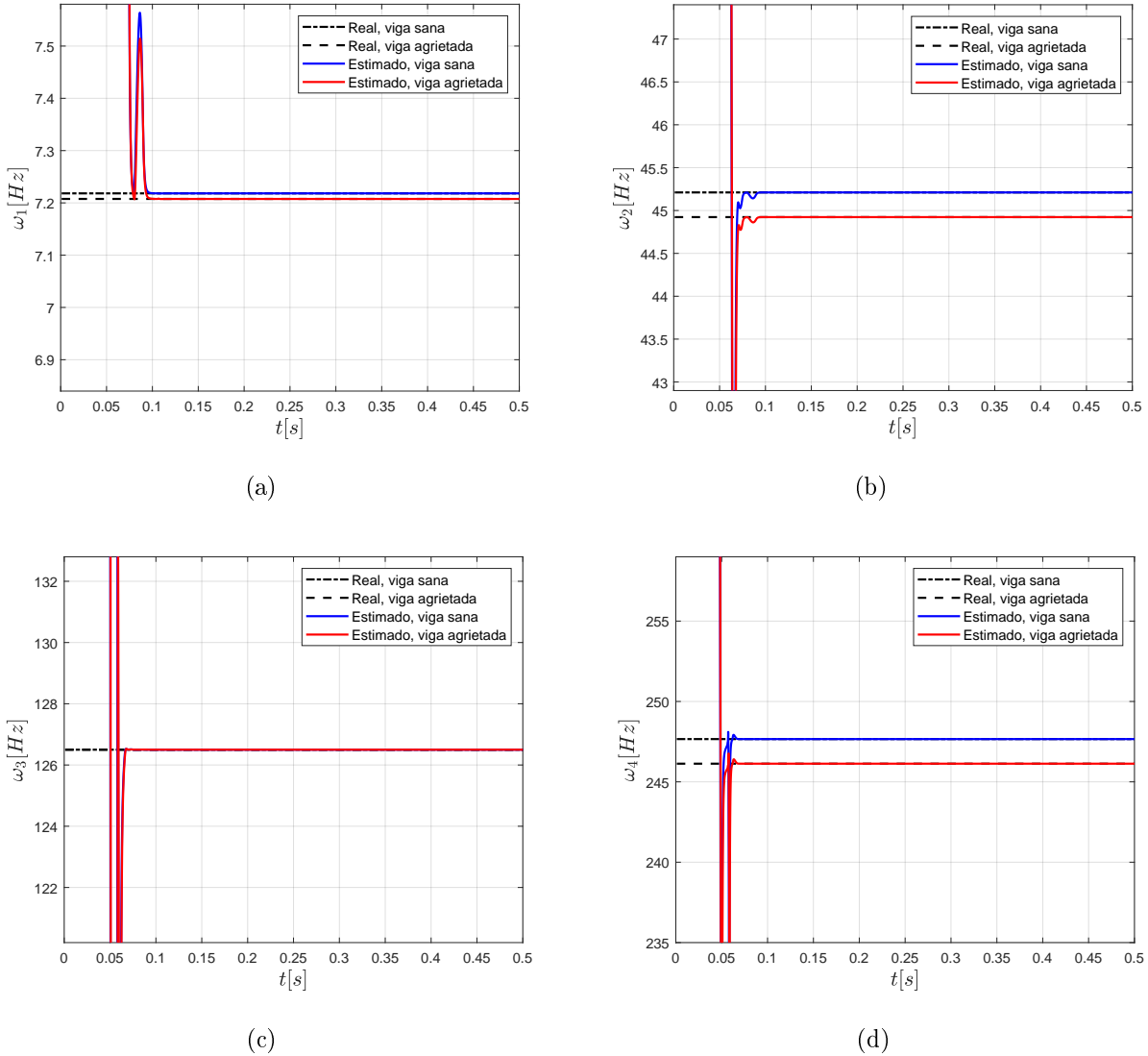


Figura 5.6: Frecuencias naturales a) Modo I, b) Modo II, c) Modo III, d) Modo IV.

Para el caso de la estimación de las 4 primeras frecuencias naturales de la viga con y sin grieta se logran obtener buenos resultados, por lo tanto se vuelve a demostrar la eficacia de dicha técnica solo hay que recordar que estos datos son en simulación.

5.2. Validación experimental

Hasta la Sección 5.1 del presente trabajo se ha obtenido información teórica y numérica del comportamiento dinámico de una viga sana y una viga fracturada, y a través de la plataforma ANSYS[®], se logró corroborar dicha información. Además, en simulación se aplicó la técnica de Identificación algebraica para estimar parámetros.

Con el fin de validar datos teóricos y aplicar la técnica de identificación algebraica, se realizaron pruebas experimentales para una viga sana y una viga agrietada cuyas características de ambas vigas se muestran en la Tabla 5.1 con una profundidad de grieta $a = 3mm$ en el caso de la viga dañada. Las características de los instrumentos utilizados se muestran en la Tabla 5.3.

Instrumento	Característica	Imagen
Acelerómetro	Rango de medición: $\pm 50g$, Sensibilidad: $103.6mV/g$, Frecuencia de resonancia: $25kHz$	
Martillo de impacto	Rango de fuerza: $0-100lbf$, Fuerza máxima: $500lbf$, Sencitividad nominal: $50mV/lbf$, Frecuencia de resonancia: $27kHz$	
LabAmp Kistler	Canales : 4, Frecuencia de muestreo máxima: $200kHz$	
Galga extensiométrica	Resistencia: $350 \pm 0.3\%Ohms$, Factor de galga: $2.125 \pm 0.5\%$, Sencibilidad transversal: $(+0.3 \pm 0.2)\%$	
StudentDAQ MM01-350	Frecuencia de muestreo: $80Hz$, Puentes soportados: 350Ω , cuarto de puente	

Tabla 5.3: Características de los instrumentos de medición.

Para obtener la función de respuesta frecuencial (FRF) se colocó el acelerómetro en el extremo libre de ambas vigas como se muestra en la Fig. 5.7 y con el martillo de impacto *kistler* se excitaron dichas vigas.



Figura 5.7: Sensor en el extremo libre de la viga.

A través de la adquisición de datos de *LabAmp kistler* se lograron obtener las aceleraciones en función del tiempo (ver Fig. 5.8) y de esta manera con una frecuencia de 62500 muestras por segundo se obtuvieron las primeras 4 frecuencias naturales de ambas vigas como se muestran en la Fig. 5.9.

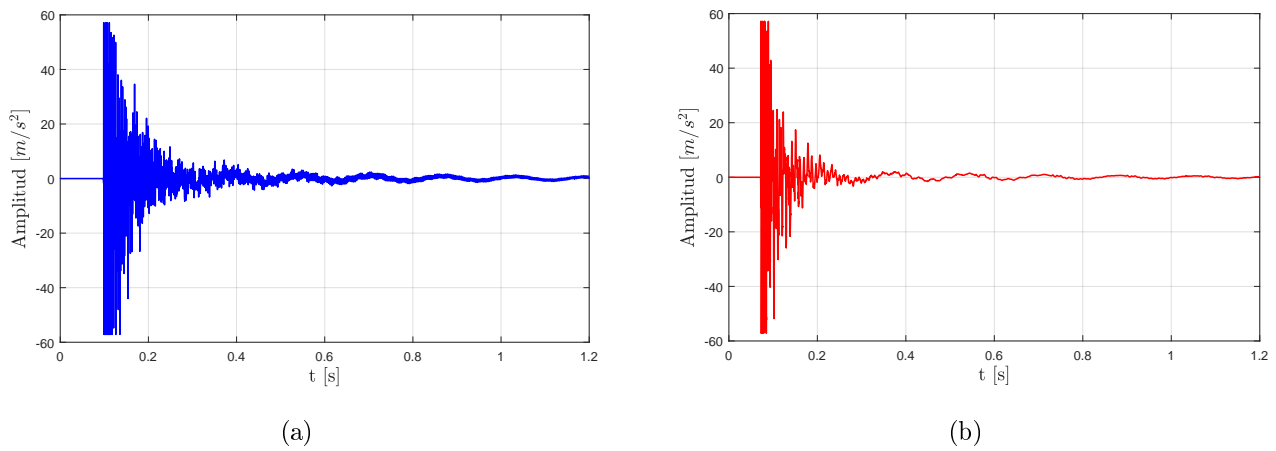
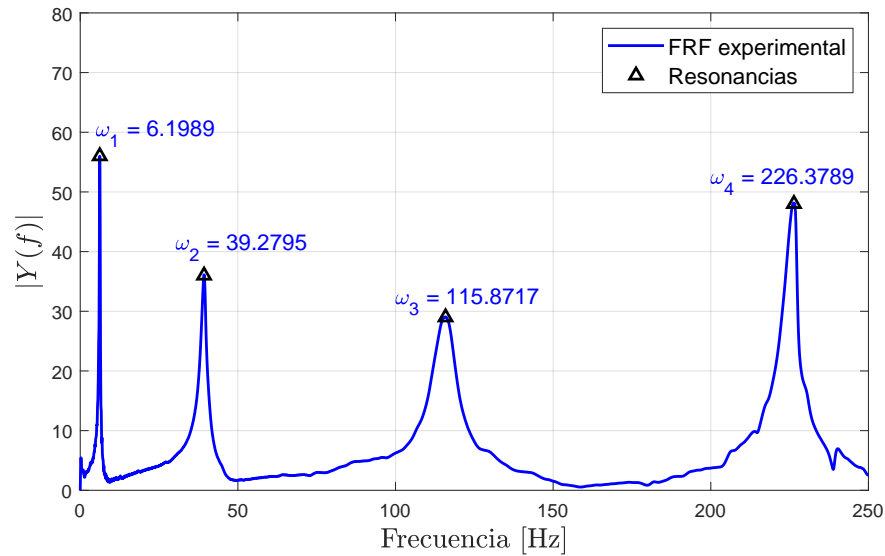
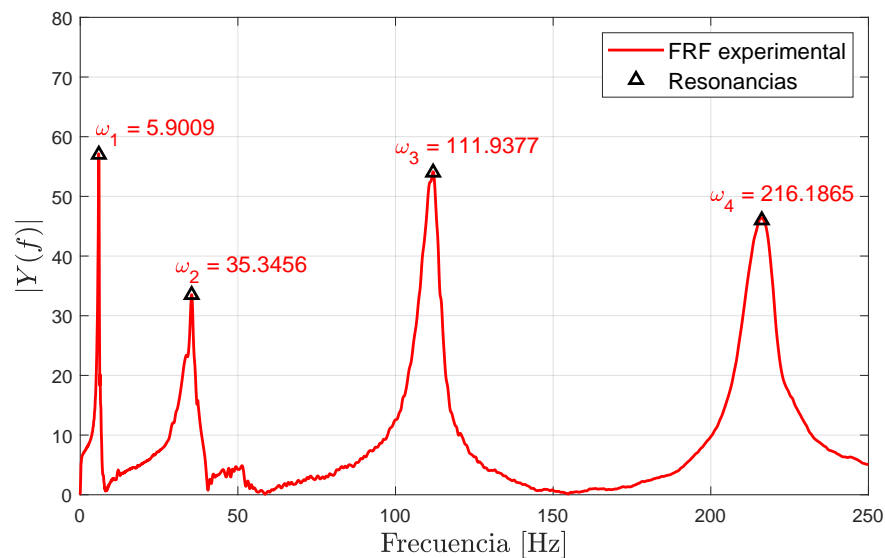


Figura 5.8: a) Respuesta en terminos de aceleración de la viga sana y b) Respuesta en terminos de aceleración de la viga agrietada.



(a)



(b)

Figura 5.9: a) FRF de la viga sana y b) FRF de la viga agrietada.

5.3. Estimación de frecuencias naturales con datos experimentales

En el presente trabajo las técnicas de identificación algebraica se han venido trabajando en términos de desplazamiento en función del tiempo, por tal motivo de manera experimental los registros de datos se toman de dos galgas extensiométricas para ambas vigas, una galga se encuentra colocada en el extremo empotrado de la viga y la otra galga se encuentra en medio de la viga como se muestra en la Fig. 5.10.

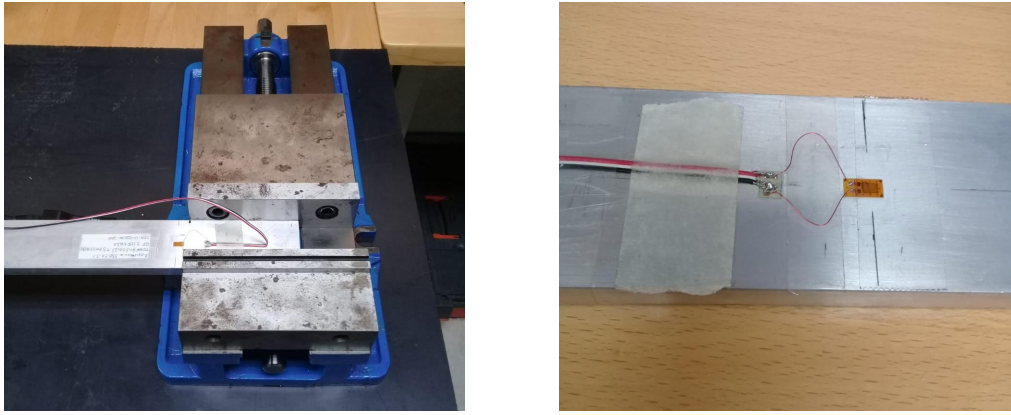


Figura 5.10: Galga extensiométrica colocada en el extremo empotrado y a la mitad de la viga.

La adquisición de datos de las galgas extensiométricas se realiza a través de *MICRO – MEASUREMENTS StudentDAQ MM01 – 350* en donde la frecuencia de muestreo es de $80Hz$. Los registros adquiridos por las galgas de ambas vigas se muestran en la Fig. 5.11.

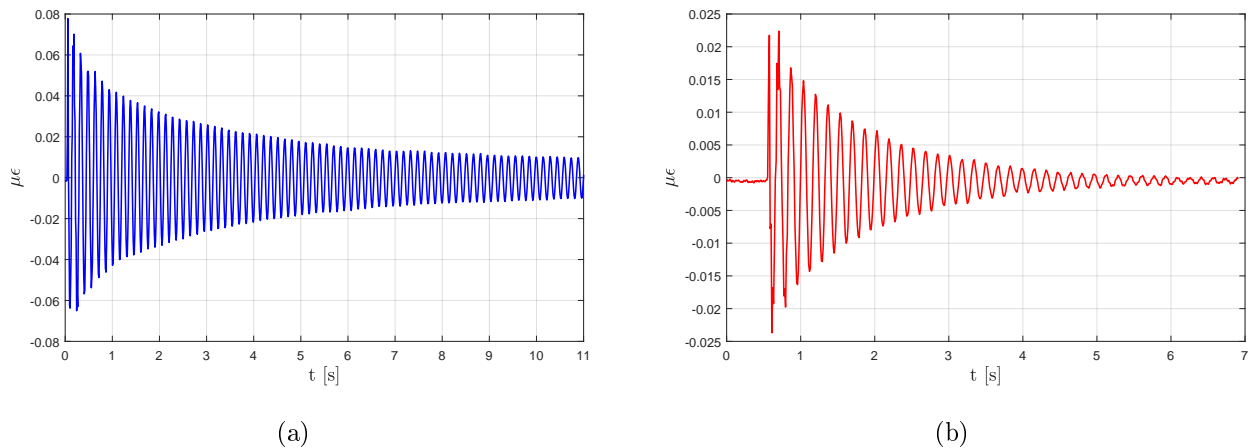


Figura 5.11: a) Respuesta en terminos de desplazamiento de la viga sana b) Respuesta en terminos de desplazamiento de la viga agrietada.

Debido a la frecuencia de muestreo de $80Hz$ solo es posible estimar las dos primeras frecuencias naturales de ambas vigas, por lo tanto se utilizó la técnica de identificación algebraica con un método de integración Runge-Kutta Fehlberg [42] para estimar dichas frecuencias dándonos como resultado las gráficas que se muestran en la Fig. 5.12. En la Tabla 5.4 se muestran las dos primeras frecuencias naturales de ambas vigas que corresponden a datos experimentales, también se muestran los parámetros estimados y por ultimo el error de estimación.

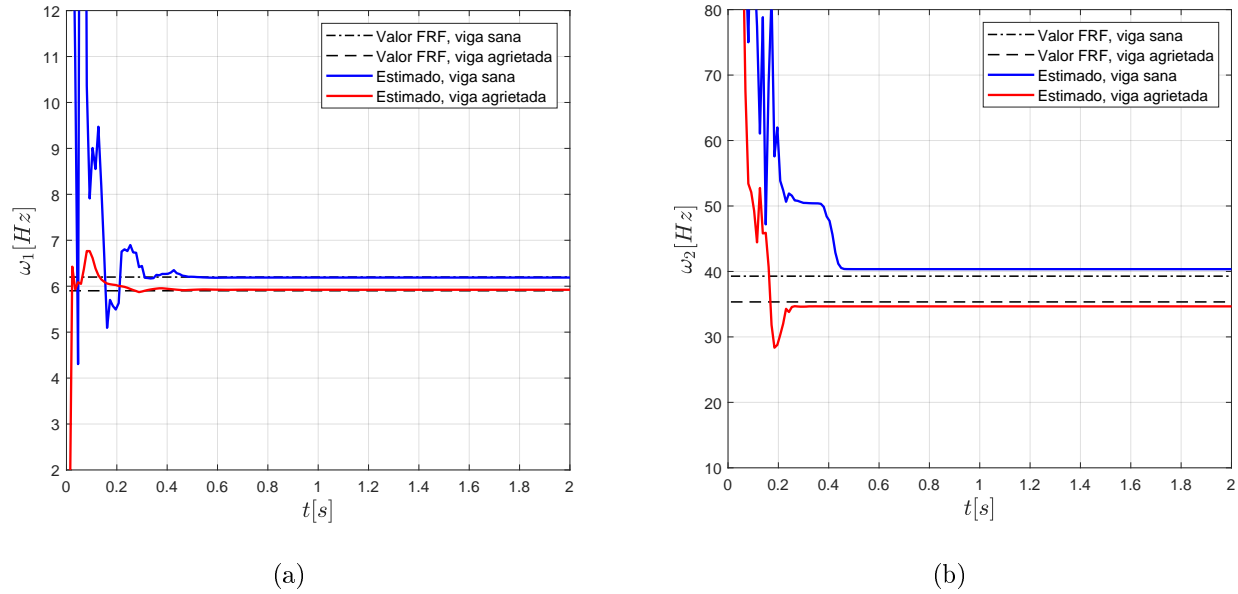


Figura 5.12: a) Estimación de la primer frecuencia natural de ambas vigas b) Estimación de la segunda frecuencia natural de ambas vigas.

Viga sana			
Parámetro	Valor FRF [Hz]	Valor estimado [Hz]	Error de estimación %
ω_1	6.1989	6.1884	0.17
ω_2	39.2795	40.3504	2.72
Viga agrietada			
Parámetro	Valor FRF [Hz]	Valor estimado [Hz]	Error de estimación %
ω_1	5.9009	5.9224	0.36
ω_2	35.3456	34.6632	1.93

Tabla 5.4: Frecuencias naturales.

A través de la técnica de identificación algebraica se puede obtener una buena aproximación de los parámetros de sistemas dinámicos de manera rápida y efectiva. Además, se observa que existe un mayor cambio en el valor de la FRF de la segunda frecuencia natural, debido principalmente a la ubicación de la grieta.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones generales

Una grieta en un elemento estructural provoca cambios de rigidez local y por consiguiente afecta el comportamiento dinámico de dicho elemento. Como caso de estudio se planteó una viga en cantilever tipo Euler-Bernoulli y a través del método de elemento finito se modeló y obtuvo información de la viga con y sin grieta, siendo éste un buen método para modelar y obtener información del elemento dañado.

Una grieta en una viga en cantilever genera cambios nodales en la región agrietada que como consecuencia provoca cambios en las formas modales además, debido a la pérdida de rigidez las frecuencias naturales disminuyen. La relación que existe entre los modos de vibración y la ubicación de la grieta afecta de diferente manera las frecuencias naturales, esto quiere decir que para un modo de vibración, la ubicación de la grieta en diferentes puntos afecta de diferente forma la dinámica de la viga aun teniendo la misma magnitud de profundidad.

Para estimar parámetros se utilizó la técnica de identificación algebraica, en donde a través del desplazamiento de la viga se desarrolló un algoritmo que estima frecuencias de varios armónicos en vibraciones libres, siendo dicha técnica una herramienta rápida y eficaz.

Con el fin de validar los datos analíticos se realizaron pruebas experimentales en donde se obtuvieron buenas aproximaciones y se observaron los cambios de frecuencia natural provocados por una grieta. Para la estimación de parámetros de forma experimental se tuvo el inconveniente en la frecuencia de muestreo utilizada con las galgas extensiométricas, ya que estaba limitada a 80 Hz y con esto fue posible estimar las dos primeras frecuencias naturales.

6.2. Trabajo futuro

Como trabajo a futuro se considera lo siguiente:

1. Realizar más experimentos con diferentes instrumentos para obtener mayor información del comportamiento dinámico de ambas vigas.
2. Desarrollar algoritmos de identificación de parámetros que permitan estimar frecuencias más altas.
3. Desarrollar algoritmos de identificación de parámetros que permitan estimar la magnitud y ubicación de la grieta.

4. Aplicar la estimación de parámetros en elementos mecánicos y estructuras más complejas.
5. Aplicar y validar la identificación de parámetros en línea o tiempo real.

Bibliografía

- [1] Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, “Normas técnicas complementarias para diseño por sismo”, www.smie.org.mx/layout/normas-tecnicas-complementarias/normas-tecnicas-complementarias-diseño-sismo-2017.pdf, 2017.
- [2] Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructura, “Normas técnicas complementarias para diseño por viento”, www.smie.org.mx/layout/normas-tecnicas-complementarias/normas-tecnicas-complementarias-diseño-viento-2017.pdf, 2017.
- [3] L. M. Silva-Ortiz, Crónica de seis siglos de sismos en México: Lecciones aprendidas y perspectivas, 1er edición, Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros A. C., 2019.
- [4] A. D. Dimarogonas, “Vibration of cracked structures: a state of the art review”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, no. 5, pp. 831-857, 1996.
- [5] E. Viola, L. Federici, and L. Nobile, “Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 36, pp. 23-25, 2001.
- [6] J. Hu and R. Y. Liang, “An integrated approach to detection of cracks using vibration characteristics”, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 330, no. 5, pp. 841-853, 1993.
- [7] P. F. Rigos, N. Aspragathos, and A. D. Dimarogonas, “Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam form the vibration modes”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 138, no. 3, pp. 381-388, 1990.
- [8] R. Nigam, S. K. Singh, “Crack detectin in a beam using wavelet transform and photographic measurements”, *Structures*, vol. 25, pp. 436-447, 2020.
- [9] P. Gudmundson, “Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 30, no. 5, pp. 339-353, 1982.
- [10] G. Gounaris and A. Dimarogonas, “A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis”, *Computers and Structures*, vol. 28, no. 3, pp.309-313, 1988.
- [11] G. M. Owolabi, A. S. J. Swamidas, and R. Seshadri, “Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, pp. 1-22, 2003.
- [12] A. Jiménez-Sánchez, G. Silva-Navarro and F. Beltrán-Carbajal, “Structural analysis of superficial crack son structural elements”, *Proceedings of the 2019 16th International Conference*

-
- on *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE2019)*, IEEE, pp. 1-6, Mexico City, Mexico, September 11-13, 2019.
- [13] S. Orhan, “Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam”, *Independent Nondestructive Testing and Evaluation International*, vol. 40, pp. 443-450, 2007.
- [14] M. Djidrov, V. Gavriloski and J. Jovanova, “Vibration analysis of cantilever beam for damaged detection”, *Faculty of Mechanical Engineering Transactions*, vol. 42, pp. 311-316, 2014.
- [15] M. Behzad, A. Meghdari and A. Ebrahimi, “A new approach for vibration analysis of a cracked beam”, *International Journal of Engineering*, vol. 18, no. 4, pp. 319-330, 2005.
- [16] A. Espinosa-Guzmán, C. Espinosa-Guzmán and M. A. Roberto-Rodriguez, “Comparative of the Methods of Minimum Square and Elimination of Gauss-Jordan for the Resolution of System of Equations in the Theme of Regression Linear”, *Conciencia Tecnológica*, pp. 42-50, 2016.
- [17] J. A. Castañeda-Cárdenas, M. A. Nieto-Arias and V. A. Ortiz-Bravo, “Analysis and application of the Kalman filter to a signal with random noise”, *Scientia Et Technica*, vol. 18, pp. 267-274, 2013.
- [18] M. Fliess and H. Sira-Ramírez, “An algebraic framework for linear identification”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 9, pp. 151-168, 2003.
- [19] F. Beltrán-Carbajal and G. Silva-Navarro, “Adaptive-like vibration control in mechanical systems with unknown parameters and signals”, *Asian Journal of Control*, vol. 15, pp. 1613-1626, 2013.
- [20] A. Jiménez Sánchez. "Diagnóstico y evaluación de fallas en estructuras usando métodos de identificación algebraica", Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica (Mecatrónica), CINVESTAV-IPN, Sección de Mecatrónica, Ciudad de México, 2019.
- [21] Yagi Y., T. Mikumo, J. Pacheco and G. Reyes, “Source Rupture Process of the Tecoman, Colima, México Earthquake of 22 January 2003, Determined by Joint Inversion of Teleseismic Body-Wavw and Near-Source Data”, *Bulletin of Seismological Society of America*, vol.94, pp. 1795-1807, 2004.
- [22] C. Lomnitz, *El próximo sismo en la Ciudad de México*, 1st ed. Dirección General de Divulgación de la Ciencia, 2005.
- [23] Coordinación Nacional de Protección Civil México, “Evaluación de la seguridad Estructural de Edificios”, www.cenapred.gob.mx, 2016.
- [24] Ministerio de construcción de Japón, *Norm para la Evaluación del Nivel de Daño por Sismo en Estructuras y Guía Técnica de Rehabilitación*, 2nd ed. CENAPRED, 2001.
- [25] Vulnerabilidad y Daños Sísmicos: Concepto y Evaluación, www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6230/03CAPITULO2.pdf
- [26] Matus, Anroldo, Zapata Eugene, Hernadez Jessica, Gomez Pipola Y Martinez Ma. Guadalupe, *Aprender del sismo para ser más residente*, (Coords.), Agencia de Resiliencia de la Ciudad de México, 100 Resilient Cities. The Rockefeller Foundation, 2018, Ciudad de México.

-
- [27] G. R. Cowper, “The shear coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 32, pp. 335-340, 1966.
- [28] C. W. de Silva, *Vibration Fundamentals and Practice*, 2nd ed. CRC Press, 1999.
- [29] S. S. Rao, *Mechanical vibrations*, 5th ed. Prentice Hall, 2011.
- [30] D. J. Inman, *Engineering vibration*, 4th ed. Pearson Education, 2014.
- [31] L. Meirovitch, *Fundamentals of vibrations*, 1st ed. McGraw-Hill, 2001.
- [32] J. Wilches-Balseiro, “La fatiga: Principal causa de falla en los elementos mecanicos”, *Ingenieria y desarrollo*, Universidad del Norte, vol. 1, pp. 48-50, 1995.
- [33] John M. Barsom and Stanley T. Rolfe, *Fracture and Control in Structures: Applications of Fracture Mechanics*, 3rd ed. ASTM, 1999.
- [34] Arthur J. McEvily, *Metal Failures: Mechanisms, Analisis, Prevention*, 2nd ed. Wiley, 2002.
- [35] Arana, José Luis y Gonzales, Javier Jesús, *Mecánica de Fractura*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 1984.
- [36] N. Perez, *Fracture mechanics*, 1st ed. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [37] Jan Mikusinski, *Operational Calculus*, 2nd ed. PERGAMON PRESS, 1983.
- [38] A. P. Prudnikov, *Operational Calculus and Related Topics*, 1st ed. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [39] F. Beltrán-Carbajal, and G. Silva-Navarro, “Generalized nonlinear stiffness identification on controlled mechanical vibrating systems”, *Asian Journal of Control*, vol. 21, pp. 1281-1292, 2019.
- [40] F. Beltrán-Carbajal, and G. Silva-Navarro and A. Jimenez-Sanchez, “Online algebraic estimation of modal parameters and excitation of a vibrating systems”, in *26th International Congress on Sound and Vibration*, 2019.
- [41] F. Beltrán-Carbajal, and G. Silva-Navarro, “On the algebraic parameter identification of vibrating mechanical systems”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 92, pp. 178-186, 2015.
- [42] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*, 5th ed. McGraw Hill, 2007.
- [43] R. C. Hibbeler, *Mecanica de materiales*, 8th ed. Prentice Hall, 2011.
- [44] H. Tada, P. C. Paris and G. R. Irwin, *The stress analisis of cracks handbook*, 3rd ed. ASM Press, 2000.
- [45] F. Beltrán-Carbajal, and G. Silva-Navarro, “A fast parametric approach of signals with multiple frecuency harmonics”, *Elsevier, Electric Power Systems Research*, vol. 144, pp. 157-162, 2017.
-