



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITECNICO NACIONAL**

Obtención del modelo y control del prototipo X-Vert VTOL

Tesis que presenta
Ing. José Benjamín Rodríguez Miranda

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

en
Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina

Asesores de Tesis:
Dr. Iván González Hernández
Dr. Rogelio Lozano Leal

CIUDAD DE MÉXICO

12 de enero de 2022.

Este trabajo lo dedico a mi padre, madre y hermana que siempre han estado ahí para brindarme su apoyo y motivarme, a mis mejores amigos que los considero mis hermanos y especialmente a mi mujer que me ha motivado enormemente e incondicionalmente para seguir saliendo adelante.

Gracias por siempre estar ahí.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mis asesores, los doctores Rogelio Lozano Leal e Iván González Hernández que de no ser por ellos, este trabajo no hubiera sido posible; su conocimiento, su experiencia y su guía fueron cruciales en esta investigación. Gracias por su paciencia, motivación, dedicación y sobre todo por su confianza en mí.

Agradezco mucho a CONACYT, ya que el apoyo económico brindado me ha sido de gran ayuda durante mi proceso académico que llevé a cabo estos últimos dos años. De la misma manera agradezco al CINVESTAV especialmente al personal del laboratorio UMI-LAFMIA por haberme permitido ingresar a la maestría que ahora estoy concluyendo.

Agradezco de todo corazón a mi familia; a mi padre Benjamín, mi madre Concepción y mi hermana Aranzazú, que gracias a ellos hoy en día soy lo que soy y siempre han estado para apoyarme en cualquier aspecto independientemente de todo. De la misma manera agradezco a mi compañera de vida Jessica Jaqueline, que llegó a mi vida en durante este periodo que ahora concluye y siempre ha estado apoyándome a pesar de todas las dificultades que se nos han presentado en estos dos años.

Agradezco a mis compañeros de maestría, que a pesar de que no fue posible convivir todo este periodo con ellos debido a la pandemia por SARS-CoV-2 (COVID-19), el poco tiempo que pasamos juntos tuvimos convivencia de calidad y apoyo mutuo.

Agradezco también a mis mejores amigos, por siempre confiar en mi potencial y motivarme en cualquier proyecto que emprenda sin dudar de mí, han sido una parte muy importante en cualquier etapa de mi vida; incluyendo ésta que ahora concluye.

Finalmente agradezco a todas las personas que no mencioné, pero que estuvieron apoyándome en todo momento y confiaron en mí.

Resumen

En la presente investigación, se muestra una ley de control para la estabilidad de la dinámica longitudinal del vehículo aéreo no tripulado X-VERT VTOL, basada en una nueva función candidata de Lyapunov.

Este trabajo escrito cuenta con 6 capítulos, donde el primero es la introducción; éste incluye el protocolo de investigación y el estado del arte, donde se encuentra la información e historia relacionada con el desarrollo de esta tecnología.

Posteriormente se desarrolla un análisis de las fuerzas que actúan sobre el vehículo, tomando en cuenta la aerodinámica y los componentes (hélices y superficies de control); para desarrollar un modelo matemático del vehículo.

A continuación, se hace el modelo matemático del X-VERT VTOL, el cual incluye el modelo cinemático y el modelo dinámico del vehículo. Con esta información, ya es posible diseñar una ley de control, con su respectiva función candidata de Lyapunov, para su dinámica longitudinal en modo estacionario.

Ya con el modelo cinemático y dinámico del vehículo, se bosqueja la estrategia de control y se muestran las simulaciones obtenidas del bosquejo, posteriormente se mejora la ley de control y se realiza su comprobación matemática de su estabilidad, mediante esto, se obtiene el dominio dentro del cuál esta ley será estable.

Finalmente, se realizan las simulaciones con la ley de control mejorada para examinar la estabilidad con diferentes condiciones iniciales y obtener las conclusiones de dicha investigación y con las que se proponen una futura investigación.

Abstract

In this research, it is shown a control law with a new Lyapunov function candidate, in order to stabilize the longitudinal dynamic of the X-VERT VTOL unmanned aerial vehicle.

This work includes 6 chapters, the first of them is the introduction, which has the research protocol and the respective state of the art of this research

Subsequently, it is developed an analysis of the acting forces on the vehicle, taking in account the aerodynamics and other components of the aircraft (propellers and control surfaces); in order to develop a mathematical model of the aircraft.

Next, the mathematical model of the X-VERT VTOL UAV is done, which includes the kinematics and dynamics of the aircraft. With this information, it is possible to design a novel control law which stabilize its longitudinal dynamics in hover mode.

From the kinematics and dynamics of the aircraft, it is made an outline strategy of control and there are shown the simulations obtained from the outline, then, the control law is improved and it is done a mathematical prove which shows its stability, through this, it is obtained the compact set within the novel control law will be stable.

Finally, the simulations of the novel control law improved are obtained in order to probe the stability with different initial conditions and through this, the conclusions and future research are acquired.

Índice general

Índice de figuras	VII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Hipótesis	2
1.3. Planteamiento del problema	2
1.4. Justificación	2
1.5. Objetivos	2
1.5.1. Objetivo general	2
1.5.2. Objetivos específicos	2
1.6. Alcance	3
1.7. Estado del Arte	3
1.7.1. Clasificación y aplicaciones de UAV	3
1.7.2. Capacidad VTOL en vehículos aéreos no tripulados	8
1.7.3. Leyes de control aplicadas a plataformas VTOL	16
1.8. Organización de la tesis	18
2. Fuerzas que actúan en el vehículo	19
2.1. Despegue vertical y modo <i>hover</i>	19
2.1.1. Modo <i>hover</i> ($v = 0$)	20
2.2. Modo de vuelo horizontal	20
2.2.1. Cuando $v = 0$	21
2.2.2. v es constante	22
2.2.3. Análisis aerodinámico en las superficies de control	22
2.2.4. Sustentación y momento de cabeceo	27
3. Modelo matemático	29
3.1. Marcos de referencia	30
3.2. Cinemática y dinámica del vehículo	31
3.2.1. Traslación del vehículo	31
3.2.2. Orientación del vehículo	32
3.2.3. Ecuaciones de movimiento	35
4. Estrategia de control	37
4.1. Control	37
4.1.1. Control de altitud	37

4.1.2. Control para x mediante θ	40
4.2. Ley de control mejorada	50
4.2.1. Prueba de estabilidad	50
5. Simulaciones y resultados finales	54
5.1. Condiciones iniciales cercanas al origen	54
5.2. Simulación con condiciones iniciales $x_0 = 10[\text{m}]$ y $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$	56
5.3. Simulación con condiciones iniciales lejanas al origen	57
5.4. Simulación con condiciones iniciales variando el ángulo θ_0	58
5.4.1. Simulaciones con $\theta_0 = \pi/12[\text{rad}]$	58
5.4.2. Simulaciones con $\theta_0 = \pi/3[\text{rad}]$	60
5.4.3. Simulaciones con $\theta_0 = \pi$	61
6. Conclusiones y trabajo futuro	64
6.1. Conclusiones	64
6.2. Trabajo futuro	65
A. Estabilidad	66
A.1. Estabilidad asintótica	66
A.1.1. Teorema 1	66
A.1.2. Prueba	66
A.2. Estabilidad exponencial	67
A.2.1. Teorema 2	67
A.2.2. Prueba	67
Bibliografía	69

Índice de figuras

1.1.	Clasificación de UAV de acuerdo al Departamento de Defensa de EEUU . . .	4
1.2.	Vehículo aéreo no tripulado de ala fija	4
1.3.	Vehículo aéreo no tripulado de ala rotativa	5
1.4.	Vehículo VTOL híbrido	5
1.5.	Ornitóptero	6
1.6.	Clasificación general de vehículos no tripulados	6
1.7.	Algunas aplicaciones civiles de UAV	7
1.8.	UAV militar lanzando misil	8
1.9.	Bosquejo de helicóptero plasmado por Leonardo da Vinci	8
1.10.	<i>V-22 Osprey</i>	9
1.11.	<i>Lockheed XFY</i>	9
1.12.	<i>Convair XFY</i>	10
1.13.	Aeronave <i>Harrier</i> con empuje vectorial	10
1.14.	Cohete reutilizable <i>Falcon 9</i> de Space X	11
1.15.	<i>Bell Rocket Belt</i>	11
1.16.	<i>FLY-220 Kevlar VTOL</i>	12
1.17.	<i>Baby Shark VTOL 250 Fixed</i>	12
1.18.	<i>FLY-300 Angel Wing VTOL</i>	12
1.19.	<i>X Plus One</i>	13
1.20.	<i>X2Q</i>	13
1.21.	<i>SonicModell AR Wing</i>	14
1.22.	<i>SonicModell F1</i>	14
1.23.	<i>SonicModell CF Racing Wing</i>	14
1.24.	<i>X-VERT VTOL BNF</i>	15
1.25.	Ejemplo de controlador PID para cuadrirrotor	16
1.26.	Ejemplo de control basado en SMC y LQR para un cuadrirrotor	16
1.27.	Diagrama de cuerpo libre de un PVTOL	17
1.28.	Actuador de diagnóstico y alojamiento de fallas para un PVTOL	17
2.1.	DCL XVERT VTOL	19
2.2.	DCL aeronave	20
2.3.	Fuerzas de la estela generado por las hélices en alerón	22
2.4.	Triángulo de velocidades generado por estela en alerones	23
2.5.	Superficies de control sin desplazamiento	23
2.6.	Superficies desplazadas para giro en sentido horario	24
2.7.	Superficies desplazadas para giro en sentido antihorario	25

2.8. Superficies desplazadas para picada	26
2.9. Superficies desplazadas para ascenso	26
2.10. Fuerzas aerodinámicas en el vehículo	27
2.11. Momento respecto al CG en el plano de simetría	27
3.1. Vehículo XVERT VTOL tipo <i>tailsitter</i>	29
3.2. Marcos de referencia inercial y fijo en el cuerpo	30
3.3. Fuerzas y momentos que actúan en la aeronave	32
4.1. Altitud z , velocidad \dot{z} y errores de posición y velocidad	38
4.2. Altitud z , velocidad \dot{z} y errores de posición y velocidad	39
4.3. Altitud z , velocidad \dot{z} y errores de posición y velocidad	39
4.4. Gráfica de x	41
4.5. Gráfica de \dot{x}	41
4.6. Gráfica de x para $\theta^v = -\pi/12$	42
4.7. Gráfica de \dot{x} para $\theta^v = -\pi/12$	42
4.8. Gráfica de x para $\theta^v = -\pi/12$ y $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$	43
4.9. Gráfica de \dot{x} para $\theta^v = -\pi/12$ y $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$	43
4.10. Gráfica de x para $\theta^v = -\pi/12$ y $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$ con $t = 20[\text{s}]$	44
4.11. Gráfica de \dot{x} para $\theta^v = -\pi/12$ y $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$ con $t = 20[\text{s}]$	44
4.12. Gráfica de posición x	45
4.13. Gráfica de velocidad \dot{x}	46
4.14. Gráfica de ángulo θ	46
4.15. Gráfica de velocidad angular $\dot{\theta}$	47
4.16. Gráfica de posición x	48
4.17. Gráfica de velocidad \dot{x}	48
4.18. Gráfica de ángulo θ	49
4.19. Gráfica de velocidad angular $\dot{\theta}$	49
5.1. Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales cercanas al origen	54
5.2. Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales cercanas al origen	55
5.3. Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales cercanas al origen	55
5.4. Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales $x_0 = 10[\text{m}]$ y $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$	56
5.5. Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales $x_0 = 10[\text{m}]$ y $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$	56
5.6. Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales $x_0 = 10[\text{m}]$ y $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$	57
5.7. Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales lejanas al origen	57
5.8. Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales lejanas al origen	58
5.9. Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales lejanas al origen	58
5.10. Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/12$	59
5.11. Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/12$	59
5.12. Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/12$	59
5.13. Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/3$	60
5.14. Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/3$	60
5.15. Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/3$	60
5.16. Gráfica de x con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$	61
5.17. Gráfica de \dot{x} con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$	61
5.18. Gráfica de \ddot{x} con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$	61
5.19. Gráfica de θ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$	62

5.20. Gráfica de $\dot{\theta}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$	62
5.21. Gráfica de τ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$	62
5.22. Gráfica de $\tilde{\theta}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$	63
5.23. Gráfica de $\ddot{\theta}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$	63

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día, el desarrollo de controladores de vuelo basados en las diferentes técnicas de control convencionales y robustas para las diferentes configuraciones que existen de son cada vez más estudiadas para su aplicación vehículos aéreos no tripulados (UAV), debido a que este tipo de plataformas son cada vez más socorridas para el análisis, supervisión, monitoreo entre otras muchas aplicaciones que involucran los diferentes sectores de la sociedad. Una configuración muy usada y desarrollada en los drones es la del tipo VTOL (despegue y aterrizaje vertical), debido a que este tipo de vehículo no necesita grandes pistas de aterrizaje ya que pueden despegar y aterrizar en lugares reducidos y de difícil acceso. Además, sobresale su autonomía y las altas velocidades que se pueden alcanzar en su modo de vuelo horizontal, siendo esto una gran ventaja, ya que requiere menos energía que un cuadrirrotor. Otra de las ventajas de los drones VTOL es que emplean el mismo sistema de motores para el despegue, aterrizaje y vuelo en horizontal, reduciendo en gran medida su peso. Esta reducción de peso repercute en un aumento destacable de la capacidad de carga de dichas aeronaves, permitiendo incorporar sistemas más complejos tanto para recopilación de información, de imágenes, sistemas de seguridad, etc. Sin embargo, este tipo de configuración se enfrenta a ciertas dificultades, como el encontrar un equilibrio en la potencia del motor debido a que la aeronave necesita mucha potencia para el despegue, por lo que si no se encuentra un equilibrio adecuado, el vuelo en crucero será menos eficiente.

1.1. Motivación

Los UAV comerciales son programados mediante leyes de control convencionales, éstas hacen que sea relativamente sencillo controlarlos. Comúnmente, estas leyes de control son las mismas y se utilizan para diferentes aplicaciones, lo que representa cierta desventaja, ya que para algunas aplicaciones, dichas leyes de control no resultan ser eficientes. A partir de esto, surge la necesidad de probar una ley de control diferente en la plataforma comercial X-VERT VTOL que resulte ser más sencilla, ya que al ser un vehículo aéreo no tripulado híbrido de configuración *tailsitter*, podría implementarse en un gran número de aplicaciones, ya que este vehículo cuenta con las ventajas tanto de un cuadrirrotor como de una aeronave de ala fija.

1.2. Hipótesis

Crear una ley de control que sea más sencilla, mediante una nueva función candidata de Lyapunov, con base en el modelo matemático; podrá estabilizar la dinámica longitudinal del vehículo comercial X-Vert VTOL dentro de un dominio.

1.3. Planteamiento del problema

Las leyes de control convencionales han sido arduamente estudiadas y ha quedado demostrado que funcionan de manera adecuada. Para poder probar e implementar una ley de control, con una estrategia diferente, en el vehículo X-VERT VTOL, se necesita saber si ésta funciona, por lo que se busca realizar pruebas mediante simulaciones para poder obtener una noción de la actuación del vehículo, posteriormente, dicha ley de control será programada en el vehículo X-Vert VTOL con el fin de obtener el desempeño real de la aeronave y así poderlo comparar con su desempeño cuando es programado mediante las leyes de control con estrategias convencionales.

1.4. Justificación

Hoy en día existe un gran impacto en el uso de vehículos aéreos no tripulados de configuraciones VTOL, por las bondades que éstas presentan al momento de desempeñar ciertas maniobras en espacios reducidos o de difícil acceso. Es interesante poder plantear leyes de control con nuevas estrategias que establezcan diseños y prototipos ya existentes en el mercado, para posteriormente implementar un sistema de aviónica con el fin de observar el desempeño que tienen dichas leyes de control en tiempo real sobre una plataforma de esta índole.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Proposición y simulación de una ley de control, mediante una nueva estrategia basada en la teoría de estabilidad de Lyapunov, para la dinámica longitudinal de la plataforma comercial X-VERT con base en un controlador proporcional derivativo para el modo estacionario de la aeronave.

1.5.2. Objetivos específicos

- Estudiar el efecto de la distancia que existe entre el rotor y las alas así como del rotor y los alerones.
- Obtención del modelo dinámico que relacione la interacción del rotor con las alas.
- Proponer una nueva ley de control para la dinámica longitudinal del XVERT VTOL para vuelo estacionario.
- Demostrar la estabilidad de la nueva estrategia de control.

- Realizar las simulaciones, mediante MATLAB Simulink, con diferentes condiciones iniciales, para la ley de control.

1.6. Alcance

En esta investigación, se buscará proponer una estrategia de control, mediante una nueva función candidata de Lyapunov, para la dinámica longitudinal del vehículo comercial X-VERT VTOL en modo estacionario, posteriormente se realizará la prueba de estabilidad de dicha ley de control y se ejecutaran las respectivas simulaciones para verificar su dominio de estabilidad respecto a diferentes condiciones iniciales, mediante MATLAB Simulink.

1.7. Estado del Arte

Actualmente y gracias a los avances tecnológicos, el uso de UAV ha tenido un crecimiento considerable, éstos han tenido diversas aplicaciones desde su creación y como relativamente tiene poco tiempo, cada vez se pueden observar un mayor número de aplicaciones en diferentes áreas.

En los UAV se ha implementado gran cantidad tecnología de las aeronaves tripuladas, ya que éstas han dado las pautas para toda el área aeroespacial. Una de las grandes implementaciones que se ha hecho en los vehículos aéreos no tripulados es la capacidad de despegue y aterrizaje vertical, no sólo en aeronaves de ala rotativa, sino también en aeronaves de ala fija, mejor conocida como VTOL. Ésta permite a la aeronave despegar y aterrizar en pistas o terrenos con reducido espacio, ya que puede cambiar de modo de ascenso/descenso, a modo de vuelo vertical; de igual manera, en vehículos pequeños no tripulados, brinda una mejor y más variada maniobrabilidad al vehículo si éste puede cambiar de modo fácilmente como es el caso de la plataforma comercial X-VERT.

Cabe mencionar que algunos vehículos con capacidad VTOL, tanto tripulados, así como no tripulados; pueden operar en diferentes modos como lo son el CTOL (despegue y aterrizaje convencional), STOL (despegue y aterrizaje corto) o STOVL (despegue corto y aterrizaje vertical)[1].

También ha habido grandes avances en las investigaciones de las leyes de control implementadas a los UAV, no sólo convencionales sino también robustas, esto ha dado pautas a que éstos puedan tener diversas aplicaciones hoy en día y éstas puedan ser cada vez más accesibles dando pauta a que esta tecnología prospere rápidamente.

1.7.1. Clasificación y aplicaciones de UAV

Clasificación de los UAV

Debido al gran avance tecnológico que se ha tenido los últimos años en esta área, es posible tener un numerable número de configuraciones de vehículos aéreos no tripulados, desde los cuadricopteros miniatura hasta aeronaves de ala fija de combate con un rango de 22,780 km.

No existe una sola clasificación para, éstos se pueden clasificar en diferentes categorías, dependiendo de su tamaño, su modo de despegue y/o aterrizaje, su configuración, su misión,

entre otras; ocupando así en diferentes categorías. Como ejemplo, en la tabla 1.1 se puede observar la clasificación de vehículos aéreos no tripulados de acuerdo con el Departamento de Defensa de Estados Unidos[2].

Figura 1.1: Clasificación de UAV de acuerdo al Departamento de Defensa de EEUU

Categoría	Tamaño	Máximo Peso Bruto al Despegue (lbs)	Altitud normal de operación (ft)	Velocidad (nudos)
Grupo 1	Peueño	0-20	<1,200 AGK*	<100
Grupo 2	Mediano	21-55	<3,500	<250
Grupo 3	Grande	<1320	<18,000 MSL**	<250
Grupo 4	Más grande	>1320	<18,000 MSL*	Cualquier velocidad
Grupo 5	Máximo	>1320	>18,000	Cualquier velocidad

*AGL (Above Ground Level): sobre el nivel del suelo.
 **MSL (Mean Sea Level): sobre el nivel del mar.

Al igual que las aeronaves tripuladas, los UAV pueden clasificarse por sus métodos de sustentación, como la lista que se muestra a continuación:

- **Ala Fija**

Las aeronaves no tripuladas de ala fija, de manera similar a las tripuladas, necesitan una pista designada para su despegue y aterrizaje, pero a diferencia de las últimas, pueden despegar mediante un sistema de catapulta. También es posible que despeguen y aterricen sobre una superficie de agua. En la figura 1.2 se observa un ejemplos de vehículo aéreo no tripulados de ala fija.



Figura 1.2: Vehículo aéreo no tripulado de ala fija

- **Ala rotativa**

Dentro de la clasificación de vehículos aéreos no tripulados de ala rotativa, se tienen otras subclasificación, que son los helicópteros no tripulados y los multirrotores que a su vez se dividen en cuadrirrotores, hexarrotores, octarrotores, dependiendo del número de rotores con los que cuentan. En la figura 1.3 se muestra un ejemplo.



Figura 1.3: Vehículo aéreo no tripulado de ala rotativa

■ Híbridos (VTOL)

Éstos vehículos generalmente son de ala fija con capacidad VTOL, dentro de esta clasificación también se tienen subclasificaciones, como los son los convertiplanos y los *Tailsitter*. Ambos pueden volar en modo *hover*, como los vehículos de ala rotativa, a diferencia que éstos pueden hacer la transición a modo horizontal.



Figura 1.4: Vehículo VTOL híbrido

■ Ala batiente

También llamados ornitópteros (Figura 1.5), esta clasificación es más común en vehículos miniatura, el movimiento del ala está basado en los aleteos de las aves e insectos voladores, el estudio de estos vehículos ha estado incrementando en los últimos años.

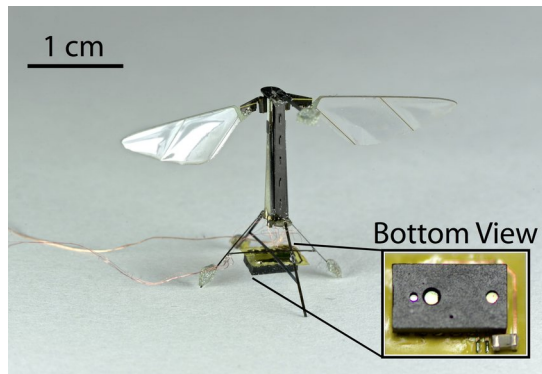


Figura 1.5: Ornitóptero

Como se aprecia, hay numerosas aplicaciones en las que se han implementado los UAV, y aún siguen en crecimiento ya que el avance tecnológico cada vez permite que sigan surgiendo más.

Otro ejemplo de clasificación de vehículos no tripulados, que es más general, se puede observar en la Figura 1.6, donde se puede observar que se incluyen vehículos acuáticos y subacuáticos.

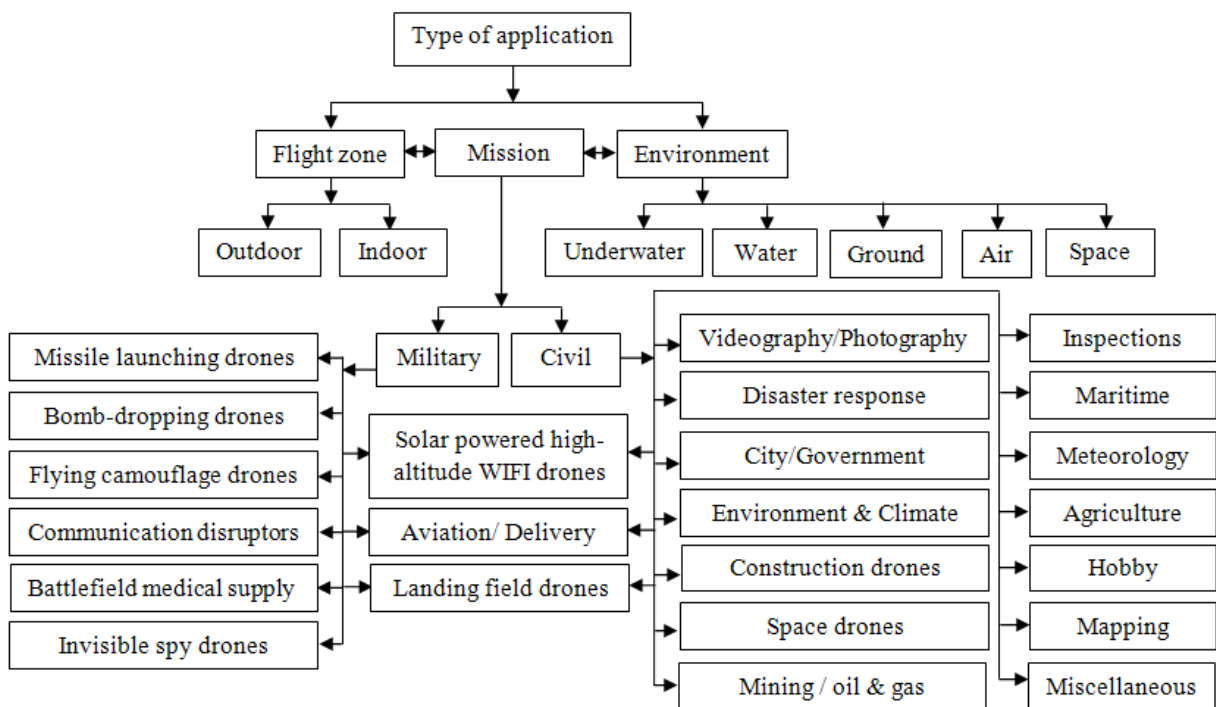


Figura 1.6: Clasificación general de vehículos no tripulados

Algunas aplicaciones

Hoy en día, existen numerosas aplicaciones de los UAV, que abarcan desde los pasa tiempos hasta diversos usos militares.

A continuación, se muestra una lista de algunas aplicaciones tanto civiles como militares de los vehículos aéreos no tripulados:

1. Usos civiles

- Fotografía aérea
- Eventos
- Deportes
- Filmaciones de películas
- Agricultura de precisión
- Paquetería
- Geología
- Pasatiempo
- Control de incendios

2. Usos militares

- Reconocimiento
- Ataque
- Blancos para entrenamiento militar

En la figura 1.7 se ilustran algunas de las aplicaciones civiles de los vehículos aéreos no tripulados, mientras en la figura 1.8 se ilustran algunas aplicaciones militares.



Figura 1.7: Algunas aplicaciones civiles de UAV



Figura 1.8: UAV militar lanzando misil

Como se ha mencionado anteriormente, existen diversas configuraciones para los UAV, a continuación se muestra una información acerca de una clasificación en específico que es la de los híbridos (VTOL).

1.7.2. Capacidad VTOL en vehículos aéreos no tripulados

Como se sabe, los vehículos aéreos no tripulados han adaptado numerosas capacidades y características de las aeronaves convencionales, un caso particular es la capacidad de despegue y aterrizaje vertical (VTOL).

La primera idea concreta de vuelo vertical surgió por primera vez en 1480 con Leonardo da Vinci y su bosquejo del helicóptero, mostrado en la Figura 1.9 [3].

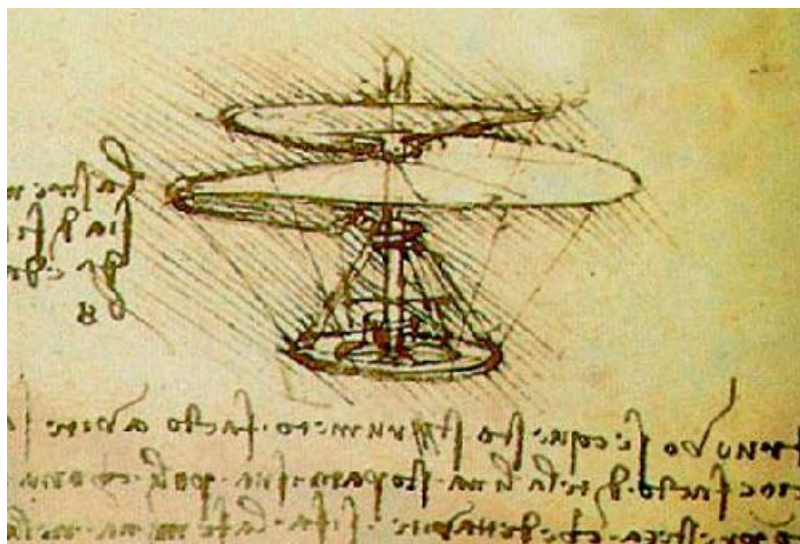


Figura 1.9: Bosquejo de helicóptero plasmado por Leonardo da Vinci

El primer vuelo registrado de un helicóptero data 1907, realizado por los hermanos franceses Jacques y Louis Breguet; pero no fue hasta finales de la Segunda Guerra Mundial cuando se logró perfeccionar el vuelo de estos vehículos[4].

A partir de lo anterior, a mediados del siglo XX, se dio un gran avance en la investigación y desarrollo de vehículos aéreos experimentales, lo que dio paso a distintos tipos de aeronaves como son los convertiplanos; uno de ellos es el *V-22 Osprey*, mostrado en la Figura 1.10. También se dieron otros prototipos de vehículos experimentales que fueron cancelados, ya que presentaban muchas fallas y al ser propulsados por hélices estaban en desventaja respecto a los nuevos aviones de combate con propulsión a reacción, que alcanzaban velocidades de hasta Mach 2[5]. Un ejemplo de lo anterior es la aeronave experimental *Lockheed XFV* (Figura 1.11) y también el *Convair XFY Pogo* (figura 1.12).



Figura 1.10: *V-22 Osprey*



Figura 1.11: *Lockheed XFV*



Figura 1.12: *Convair XFY*

Posteriormente el VTOL fue implementado en los aviones militares de combate, un claro ejemplo es la familia de aeronaves *Harrier Jump Jet* (Figure 1.13), manufacturados por la empresa británica *Hawker Siddeley*; éstos implementaron toberas con empuje vectorial para redireccionar la expulsión de gases y así generar empuje[6].



Figura 1.13: Aeronave *Harrier* con empuje vectorial

El despegue y aterrizaje vertical también se ha implementado en cohetes, al igual que los aviones militares de combate, mediante toberas de empuje vectorial; un ejemplo claro es el cohete reutilizable *Falcon 9* de la compañía *Space X* (Figura 1.14), aunque ya había sido mostrado por primera vez por la compañía *Bell Aerosystems* con el prototipo de mochila cohete propulsora *Bell Rocket Belt* (Figura 1.15) en 1961, la duración del vuelo fue de 21 segundos[7]. Cabe mencionar que a esta forma de despegue y aterrizaje implementada en aeronaves propulsadas mediante cohetes se le conoce como *VTVL* (*vertical takeoff vertical landing*).



Figura 1.14: Cohete reutilizable *Falcon 9* de **Space X**



Figura 1.15: *Bell Rocket Belt*

Gracias a lo anterior, se ha podido implementar este método de despegue y aterrizaje en vehículos aéreos no tripulados, por lo que actualmente en el mercado existe una amplia gama de este tipo de vehículos.

Plataformas VTOL comerciales

A continuación se muestran algunos UAV VTOL comerciales a los que se puede tener acceso fácilmente.

- La compañía china *Fly Dragon* ofrece una variada gama de vehículos VTOL, que pueden ser usados para diversas aplicaciones ya que, gracias a que su peso máximo al despegue tiene un alto rango, pueden ser equipadas con diversos dispositivos (carga útil). En las Figuras 1.16 - 1.18, se pueden observar los productos *FLY-220 Kevlar VTOL*, *Baby shark VTOL 250 Fixed* y *FLY-300 Angel Wings VTOL*



Figura 1.16: *FLY-220 Kevlar VTOL*



Figura 1.17: *Baby Shark VTOL 250 Fixed*



Figura 1.18: *FLY-300 Angel Wing VTOL*

- La compañía norteamericana *XCraft* ofrece los productos *X Plus One* (Figura 1.19) utilizado para fines recreativos y *X2Q* (Figura 1.20) cuya función es hacer mapeo de precisión



Figura 1.19: *X Plus One*



Figura 1.20: *X2Q*

- La empresa china *SonicModell* ofrece los modelos *SonicModell AR Wing* (Figura 1.21), *SonicModell F1* (Figura 1.22) y *SonicModell CF Racing Wing* (Figura 1.23), todos para fines recreativos.



Figura 1.21: *SonicModell AR Wing*



Figura 1.22: *SonicModell F1*



Figura 1.23: *SonicModell CF Racing Wing*

- La marca *E-flite*, perteneciente a la familia de marcas de la compañía americana *Horizon Hobby*, dedicada a desarrollar vehículos de radio control recreativos, ofrece el *X-VERT VTOL BNF*, mostrado en la figura 1.24, que es la plataforma a la que se le implementaran las diferentes leyes de control.



Figura 1.24: *X-VERT VTOL BNF*

Éstas son algunas de las plataformas comerciales más comunes y accesibles en el mercado.

1.7.3. Leyes de control aplicadas a plataformas VTOL

Actualmente, se han hecho abundantes investigaciones sobre aplicación de leyes de control convencionales y robustas aplicadas a vehículos VTOL, no obstante, este tipo de vehículos no son híbridos, generalmente son vehículos de ala rotativa, específicamente multirrotores.

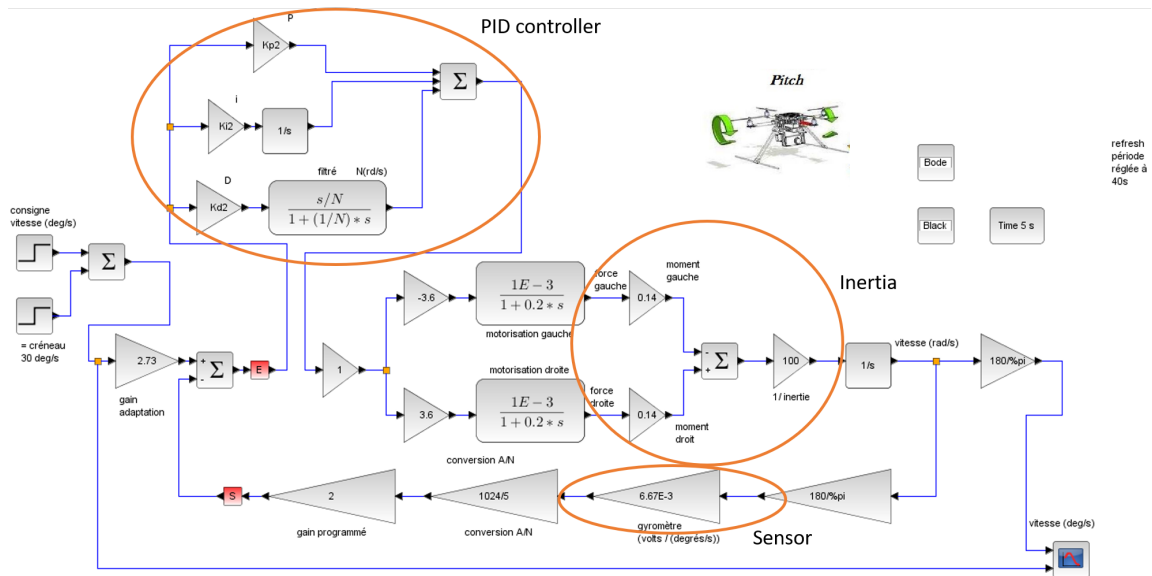


Figura 1.25: Ejemplo de controlador PID para cuadrirrotor

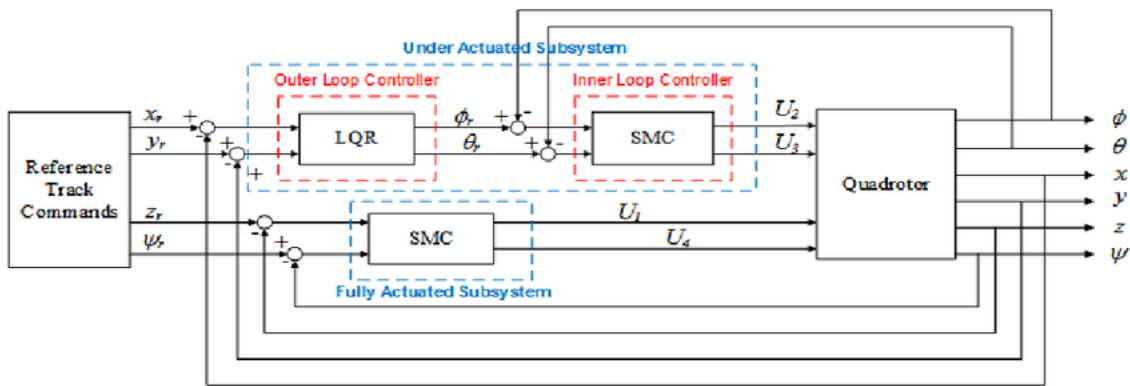


Figura 1.26: Ejemplo de control basado en SMC y LQR para un cuadrirrotor

En la Figura 1.25 se puede observar un diagrama de bloques de una ley de control basada en un control proporcional integrativo derivativo (PID)[8], mientras que en la Figura 1.26 se aprecia una ley de control basada en controlador por modos deslizantes (SMC) y a su vez un controlador basado en un regulador lineal cuadrático (LQR)[9]; ambas aplicadas a cuadrirrotores.

Existe un objeto volador llamado PVTOL, que al igual que los multirrotores, ha sido cuantiosamente estudiado y numerosas leyes de control se han aplicado en este modelo que es muy parecido al modo *hover* de la aeronave analizada, sin embargo, no puede considerarse igual a la plataforma VTOL a estudiar ya que el PVTOL no puede hacer la transición de modo *hover* a vuelo horizontal como lo hace dicha plataforma. A dicho modelo se le han aplicado leyes de control tanto convencionales como robustas.

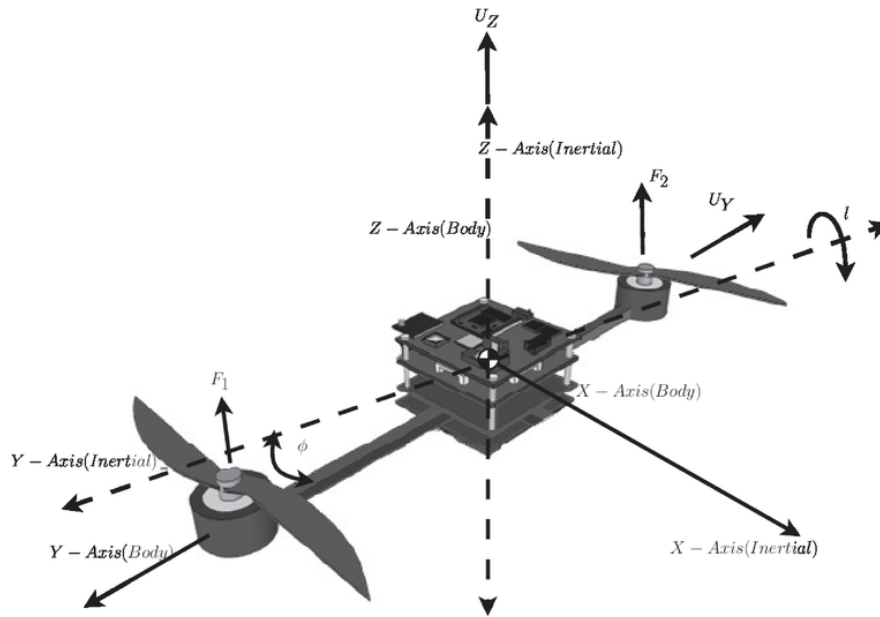


Figura 1.27: Diagrama de cuerpo libre de un PVTOL

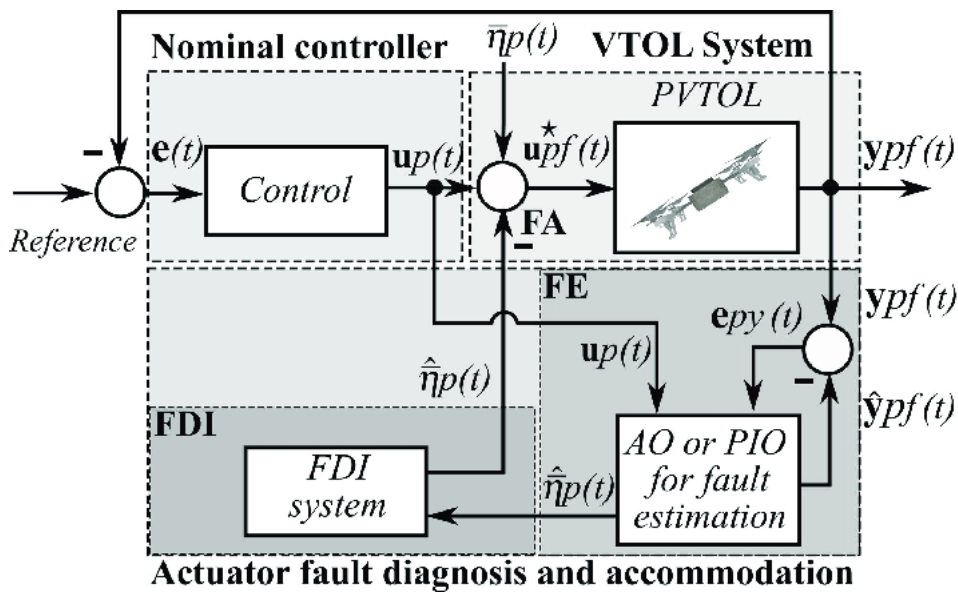


Figura 1.28: Actuator de diagnóstico y alojamiento de fallas para un PVTOL

En la Figura 1.27 se ilustra el diagrama de cuerpo libre de un PVTOL mientras que en la Figura 1.28 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de diagnóstico y alojamiento de fallas de actuadores, aplicado a un PVTOL; y éste cuenta con una ley de control, un estimador de fallas basado en un observador integrador proporcional y óptica adaptable; y también cuenta con un sistema de detección y aislamiento de fallas[10]. Así como muchas de las plataformas VTOL comerciales, el X-VERT es de código cerrado. En este proyecto se instrumenta la plataforma XVERT mediante un autopiloto Pixhawk PX4, implementándose en éste las leyes de control convencionales y robustas previamente mencionadas.

1.8. Organización de la tesis

En seguida se muestran los capítulos contenidos con una breve descripción de su contenido

- **Capítulo 1: Introducción**

Como se pudo observar en este capítulo, se incluyen la motivación, hipótesis, planteamiento del problema, justificación, objetivos y alcance; de la misma manera se incluye el respectivo estado del arte de esta investigación.

- **Capítulo 2: Fuerzas que actúan en el vehículo**

En este capítulo se muestran las fuerzas que actúan en el vehículo, tanto en modo vertical como en modo horizontal.

- **Capítulo 3: Modelo matemático**

Con base en lo analizado en los capítulos anteriores, en éste se plasma un modelo matemático el vehículo con alta precisión.

- **Capítulo 4: Estrategia de control**

En el capítulo 4, en primera instancia, se propone un bosquejo de la nueva estrategia de control, posteriormente se mejora y se comprueba matemáticamente su estabilidad.

- **Capítulo 5: Simulaciones y resultados finales**

Con base en la ley de control comprobada, se ejecutan las respectivas simulaciones para obtener así los resultados que verifican la estabilidad del sistema con diferentes condiciones iniciales.

- **Capítulo 6: Conclusiones y trabajo futuro**

Finalmente, se exponen las conclusiones a las que se llegó durante el proceso de edificación del proyecto, de la misma se busca cómo darle continuidad posteriormente.

- **Anexos**

En este último apartado se muestran dos teoremas de estabilidad que fueron de apoyo para realizar la prueba de estabilidad mostrada en el capítulo 4.

Capítulo 2

Fuerzas que actúan en el vehículo

2.1. Despegue vertical y modo *hover*

La aeronave que se analiza, despegue verticalmente, para ejemplificar esto, en la Figura 1, se muestra como ejemplo el diagrama de cuerpo libre de un cohete[11].

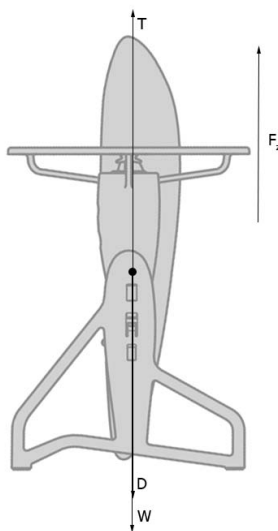


Figura 2.1: DCL XVERT VTOL

Para que un vehículo pueda despegar verticalmente, se necesita que el empuje sea mayor que el peso de éste y el arrastre generado, entonces se hace una sumatoria de fuerzas que origina una fuerza resultante F_z que estará dada por

$$F_z = T - W - D \quad (2.1)$$

donde:

T : es el empuje.

$W = mg$: es el peso de la aeronave que está dado por la masa por la aceleración de la gravedad.

D : es la fuerza de arrastre dada por $D = 1/2\rho S v^2 C_D$, donde v es la magnitud de la velocidad vertical, ρ es la densidad del aire a la altitud a la que se encuentra la aeronave, S es la superficie del ala y C_D es el coeficiente de arrastre.

Entonces para mantener una velocidad constante, la fuerza resultante $F_r = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} T_x &= 0 \\ T_z &= W + D \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde T_z es el empuje para mantener una velocidad constante, nótese que la componente del empuje en x $T_x = 0$ ya que no existe velocidad en la componente x .

2.1.1. Modo *hover* ($v = 0$)

Para mantener el vuelo en estado *hover*, se sabe que la velocidad $v = 0$, por lo tanto, $L = 0$ y $D = 0$, entonces de la ecuación (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned} T_x &= 0 \\ T_z &= W \end{aligned} \quad (2.3)$$

entonces se observa que el empuje en la componente z debe ser igual al peso del vehículo.

2.2. Modo de vuelo horizontal

El vehículo puede cambiar su modo de vuelo a un vuelo horizontal, por lo que a continuación se tiene el diagrama de cuerpo libre del ascenso horizontal de una aeronave.

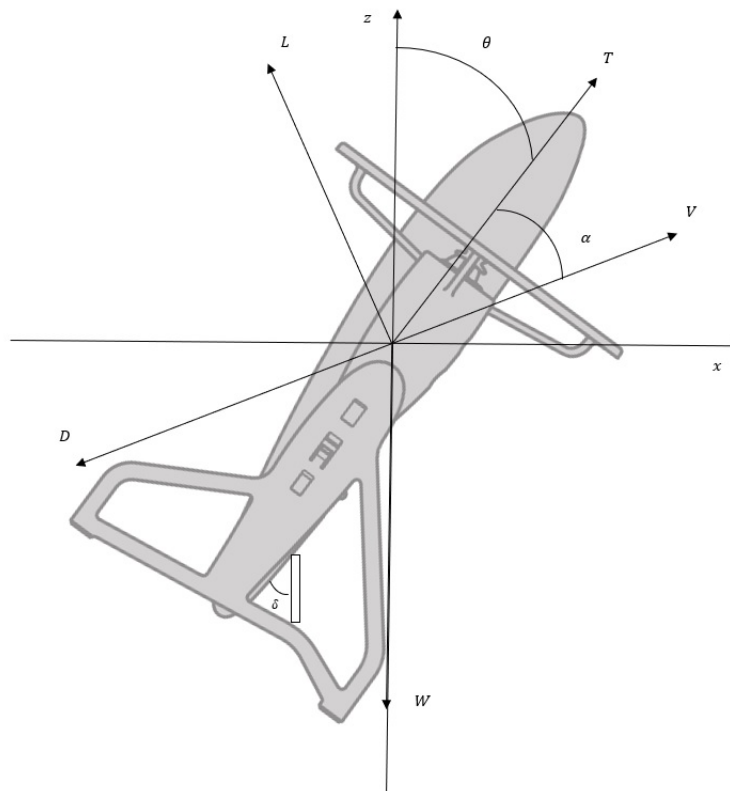


Figura 2.2: DCL aeronave

Donde:

L : es la fuerza de sustentación.

V : es la velocidad de la aeronave.

α : es el ángulo de ataque.

θ : es el ángulo de cabeceo.

δ : es el ángulo de posición de los alerones.

Se sabe que las fuerzas de sustentación y arrastre están dadas por

$$L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_l \quad (2.4)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_d \quad (2.5)$$

donde v es la magnitud de la velocidad V ($v = ||V||$), ρ es la densidad del aire a la altitud donde se encuentra la aeronave, S es la superficie del ala, C_l y C_d son los coeficientes de sustentación y arrastre, respectivamente.

La aceleración de ascenso, entonces está dada por la siguiente ecuación en componentes rectangulares x y z .

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T \sin \theta - D \sin(\theta + \alpha) - L \cos(\theta + \alpha) \\ m\ddot{z} &= T \cos \theta - D \cos(\theta + \alpha) + L \sin(\theta + \alpha) - W \end{aligned} \quad (2.6)$$

que aplicando identidades trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T \sin \theta - L \cos \theta \cos \alpha + L \sin \theta \sin \alpha - D \sin \theta \cos \alpha - D \sin \alpha \cos \theta \\ m\ddot{z} &= T \cos \theta + L \sin \theta \cos \alpha + L \sin \alpha \cos \theta - D \cos \theta \cos \alpha + D \sin \theta \sin \alpha - W \end{aligned} \quad (2.7)$$

y simplificando, puede escribirse como

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T \sin \theta - A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta \\ m\ddot{z} &= T \cos \theta + A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta - W \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde

$$A_1 = L \cos \alpha + D \sin \alpha, \quad A_2 = L \sin \alpha - D \cos \alpha$$

2.2.1. Cuando $v = 0$

Para mantener el vuelo en estado estacionario, se sabe que la velocidad $v = 0$, por lo tanto, $L = 0$ y $D = 0$, entonces de la ecuación (4), se tiene que

$$\begin{aligned} T_x &= 0 \\ T_z &= W \csc \theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el ángulo $\theta = 90^\circ$, ya que debe de estar en posición totalmente vertical para mantenerse en modo estacionario, entonces

$$\begin{aligned} T_x &= 0 \\ T_z &= W \end{aligned} \quad (2.10)$$

y se observa que el empuje en la componente z debe ser igual al peso del vehículo.

2.2.2. v es constante

Si la velocidad v es constante, no habrá aceleración, entonces el vector de aceleración $|\ddot{x} \quad \ddot{z}|^T = 0$, a partir de esto, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= T \sin \theta - A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta \\ 0 &= T \cos \theta + A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta - W \end{aligned}$$

Donde L y D son constantes, ya que dependen de v .
Entonces, obteniendo las componentes del empuje T_x y T_z se tiene

$$\begin{aligned} T_x &= A_1 \cos \theta - A_2 \sin \theta \\ T_y &= -A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta + W \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $T_x = T \cos \theta$ y $T_y = T \sin \theta$, y su magnitud está dada por:

$$\|T\| = \sqrt{T_x^2 + T_z^2} \quad (2.12)$$

2.2.3. Análisis aerodinámico en las superficies de control

A continuación se muestra el movimiento de la aeronave producido por la estela de las hélices cuando las superficies de control se deflectan[13].

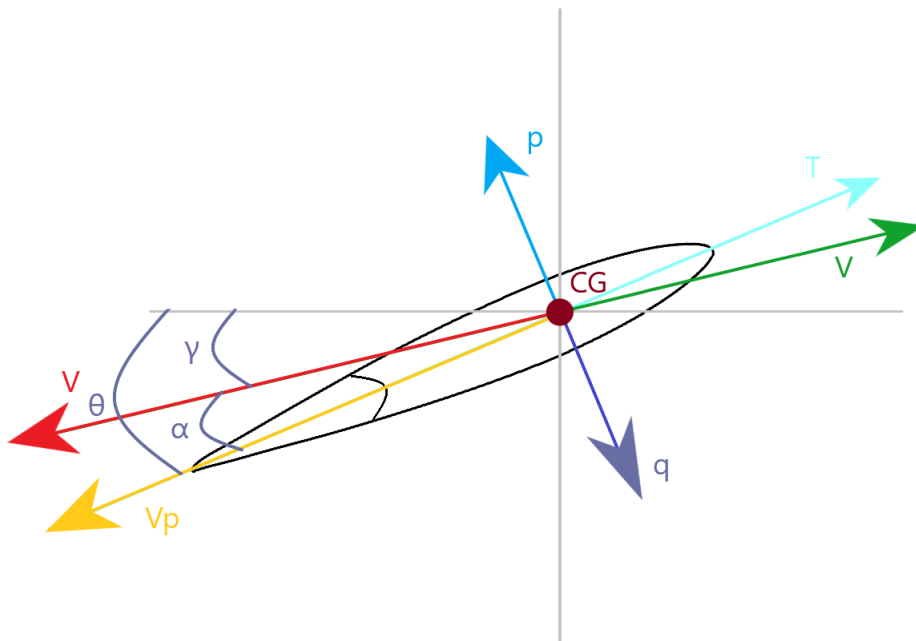


Figura 2.3: Fuerzas de la estela generado por las hélices en alerón

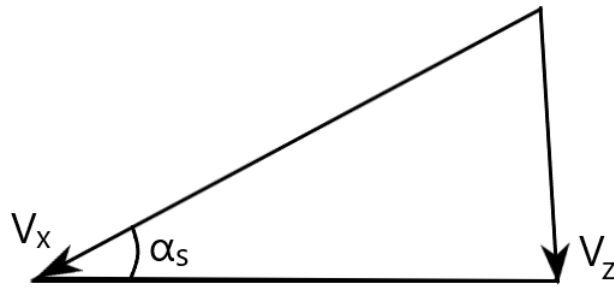


Figura 2.4: Triángulo de velocidades generado por estela en alerones

De la figura 2.3, suponga que

$$V_p \gg p, q \quad (2.13)$$

donde V_p es la velocidad de la estela producida por las hélices, p y q son velocidades perpendiculares a V_p y opuestas entre sí. Esto crea un triángulo de velocidades sobre la horizontal con ángulo α_s , como se muestra en la figura 2.4 que es el ángulo de la estela generado por las hélices (*slipstream angle*), por lo que las componentes V_x y V_z de la velocidad se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \alpha + V_p \\ V_z &= V \sin \alpha + p|y_{CG} - y_{CA}| - q|x_{CG} - x_{CA}| \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde x_{cg} y y_{cg} son las coordenadas del centro de gravedad respecto a x y y respectivamente y x_{ag} y y_{ag} son las coordenadas del centro aerodinámico. Para el desarrollo de las siguientes ecuaciones, la superficie de control izquierda será la superficie de control 1 s_1 y la derecha será la superficie de control 2 s_2 .

1. Superficies de control sin desplazamiento

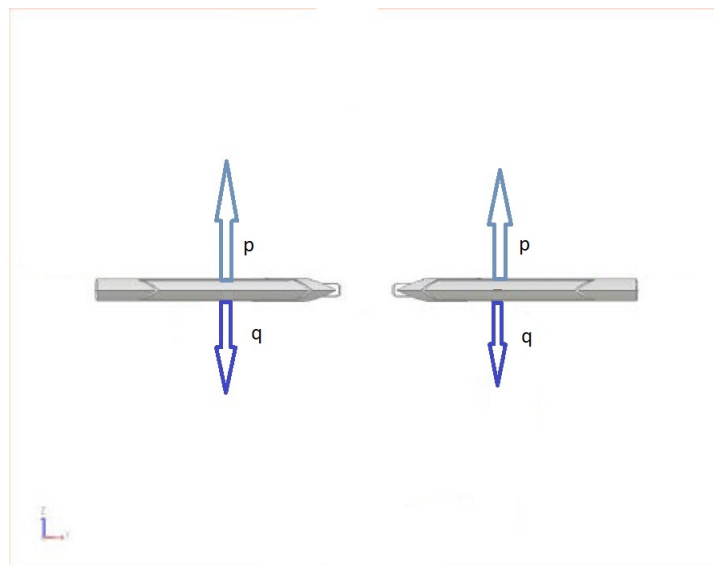


Figura 2.5: Superficies de control sin desplazamiento

Como se observa en la figura 2.5, no existe desplazamiento en ningún alerón, se sabe que $V_q \gg p, q$, entonces para el ángulo α_{s1} se tiene

$$\alpha_{s1} \approx \tan \alpha_{s1} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha + p|y_{CG} - y_{CA}| - q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.15)$$

entonces para el ángulo α_{s2} , será similar:

$$\alpha_{s2} \approx \tan \alpha_{s2} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha + p|y_{CG} - y_{CA}| - q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.16)$$

2. Movimiento de alabeo

- **Giro en sentido horario** Para que la aeronave gire en sentido horario, en la figura 2.6 se muestran los vectores de las velocidades p y q de cada alerón.

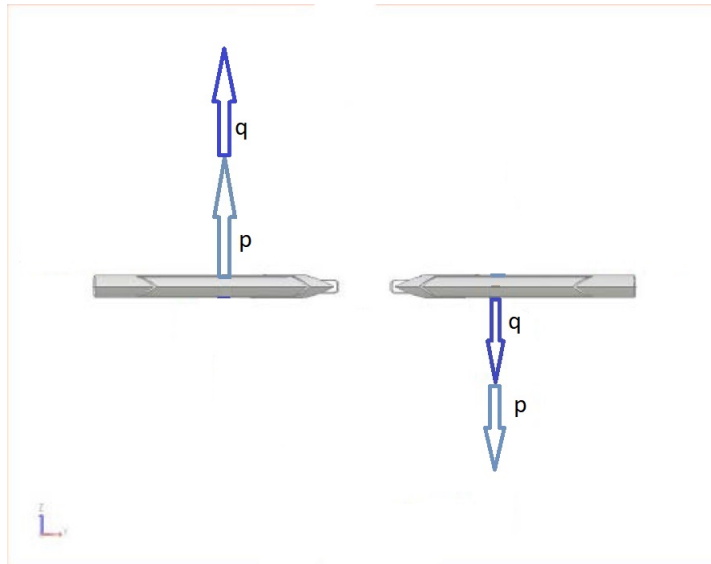


Figura 2.6: Superficies desplazadas para giro en sentido horario

Como se observa en la figura 2.6, ambas superficies de control se deflectan, entonces para el ángulo α_{s1} se tiene

$$\alpha_{s1} \approx \tan \alpha_{s1} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha + p|y_{CG} - y_{CA}| + q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.17)$$

entonces para el ángulo α_{s2} , se tiene

$$\alpha_{s2} \approx \tan \alpha_{s2} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha - p|y_{CG} - y_{CA}| - q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.18)$$

- **Giro en sentido antihorario** Como se observa en la figura, 2.7, los vectores de las velocidades p y q actúan en esas direcciones para causar un giro antihorario.

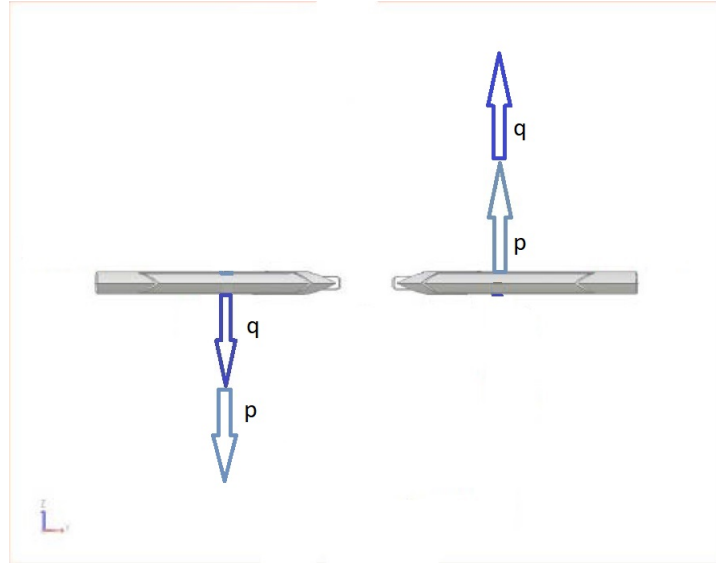


Figura 2.7: Superficies desplazadas para giro en sentido antihorario

Como se observa en la figura 2.7, ambas superficies de control se deflecan, entonces para el ángulo α_{s1} se tiene

$$\alpha_{s1} \approx \tan \alpha_{s1} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha - p|y_{CG} - y_{CA}| - q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.19)$$

entonces para el ángulo α_{s2} , se tiene

$$\alpha_{s2} \approx \tan \alpha_{s2} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha + p|y_{CG} - y_{CA}| + q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.20)$$

3. **Movimiento de cabeceo** En el vehículo que se está analizando, para el movimiento de cabeceo, ambas superficies de control deben estar desplazadas en el mismo sentido, entonces para poder realizar los dos movimientos de cabeceo se tienen los siguientes casos:

- **Cabeceo en picada**

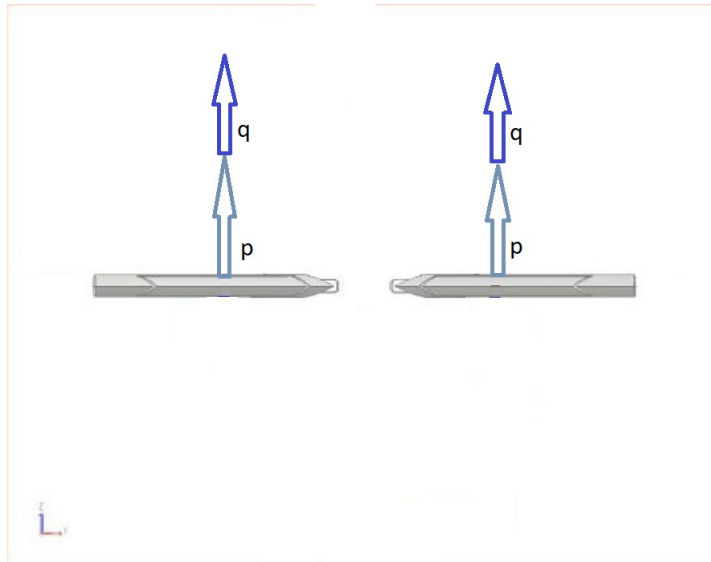


Figura 2.8: Superficies desplazadas para picada

En la figura 2.8, se observa cómo ambas superficies de control están desplazadas de manera que p y q de ambos alerones tienen la misma dirección, ocasionando así un movimiento de cabeceo en picada, por lo que para los ángulos α_{s1} y α_{s2} se tiene

$$\alpha_{s1} \approx \tan \alpha_{s1} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha + p|y_{CG} - y_{CA}| + q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.21)$$

$$\alpha_{s2} \approx \tan \alpha_{s2} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha + p|y_{CG} - y_{CA}| + q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.22)$$

■ **Cabeceo para ascenso**

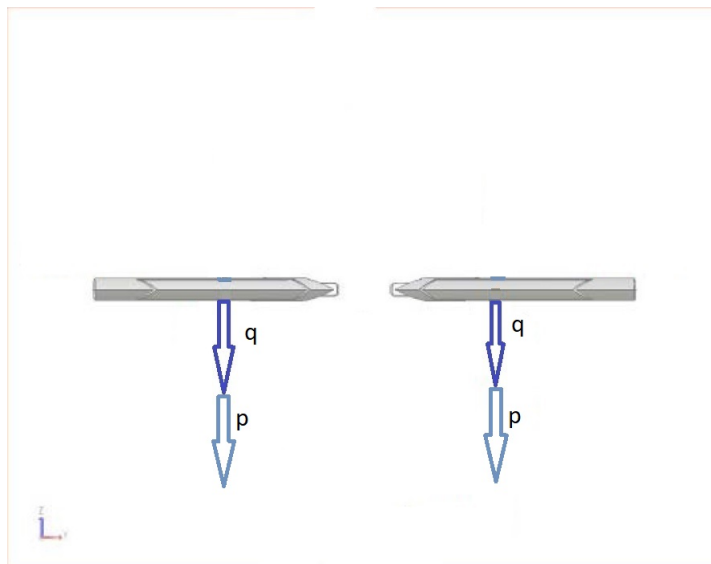


Figura 2.9: Superficies desplazadas para ascenso

Como en el caso anterior, en la figura 2.9 se observan que p y q llevan la misma dirección, pero ahora en sentido contrario originando así un movimiento de cabeceo

para ascenso, entonces para los ángulos α_{s1} y α_{s2} se tiene

$$\alpha_{s1} \approx \tan \alpha_{s1} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha - p|y_{CG} - y_{CA}| - q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.23)$$

$$\alpha_{s2} \approx \tan \alpha_{s2} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V \sin \alpha - p|y_{CG} - y_{CA}| - q|x_{CG} - x_{CA}|}{V \cos \alpha + V_p} \quad (2.24)$$

2.2.4. Sustentación y momento de cabeceo

Las fuerzas aerodinámicas de una superficie sustentante se pueden representar como la sustentación y el arrastre actuando en su respectivo centro aerodinámico, juntos con un par de cabeceo independiente del ángulo de ataque (figura 2.10). El momento de cabeceo de este sistema de fuerzas respecto al centro de gravedad (CG) se muestra en la figura 2.11 y está dado por

$$M = M_{CA} + (L \cos \alpha + D \sin \alpha)(h - h_n)\bar{c} + (L \sin \alpha - D \cos \alpha)z \quad (2.25)$$

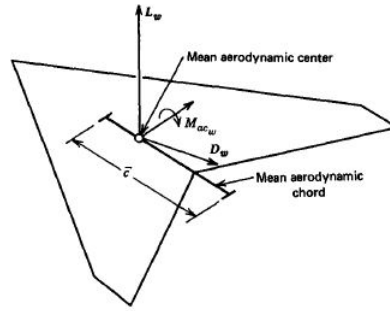


Figura 2.10: Fuerzas aerodinámicas en el vehículo

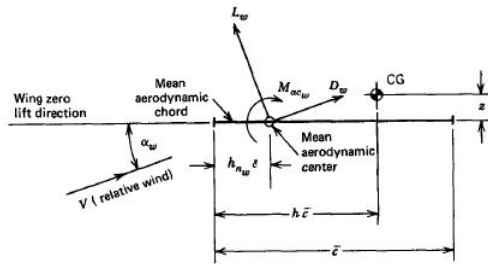


Figura 2.11: Momento respecto al CG en el plano de simetría

Se asume que el ángulo de ataque es suficientemente pequeño para poder tener las siguientes aproximaciones

$$\cos \alpha = 1, \quad \sin \alpha = \alpha$$

y la ecuación se hace adimensional dividiendo por $1/2\rho V^2 S \bar{c}$. Por lo que queda

$$C_m = C_{m_{CA}} + (C_L + C_D \alpha)(h - h_n) + (C_L + \alpha - C_D)z/\bar{c} \quad (2.26)$$

Algunas veces es necesario conservar todos los términos en (2.26), se ha demostrado que muchas veces el último término puede ser despreciado, y que $C_D\alpha$ puede ser despreciado en comparación con C_L ; con estas simplificaciones se obtiene

$$C_m = C_{m_{CA}} + C_L(h - h_n) = C_{m_{CA}} + \alpha a(h - h_n) \quad (2.27)$$

donde $a = C_{L\alpha}$ es la pendiente de sustentación del vehículo

Capítulo 3

Modelo matemático

El XVERT VTOL, mostrado en la figura 3.1, se caracteriza por ser un vehículo *tailsitter*, es decir, un vehículo que se encuentra posicionado verticalmente, recargado sobre la cola y su despegue y aterrizaje es vertical. El modelo matemático para el XVERT VTOL describe un vehículo tipo *tailsitter*, con tres tipos de vuelo; modo vertical, modo de transición entre modo vertical y horizontal, y modo horizontal. En este capítulo se muestran las ecuaciones que representan el modelo cinemático y dinámico del vehículo mediante las ecuaciones de Newton-Euler, incluyendo los efectos producidos por los motores y las superficies de control del vehículo.



Figura 3.1: Vehículo XVERT VTOL tipo *tailsitter*

Para desarrollar el modelo, primero se definen los marcos de referencia con sus respectivas notaciones, posteriormente el modelo cinemático y finalmente el modelo dinámico.

3.1. Marcos de referencia

Los marcos de referencia (figura 3.2) se definen para llevar un orden en el modelo matemático y que éste sea consistente, entonces se definen los marcos de referencia inercial estacionario respecto a la tierra y el fijo en el cuerpo, es decir,

- $E = \{x_E, y_E, z_E\}$, que indica el marco de referencia inercial fijo y estacionario respecto a la tierra.
- $B = \{x_B, y_B, z_B\}$, que indica el marco de referencia fijo en el cuerpo, que se encuentra en el centro de gravedad del vehículo.
- $A = \{x_A, y_A, z_A\}$, que indica el marco de referencia aerodinámico.

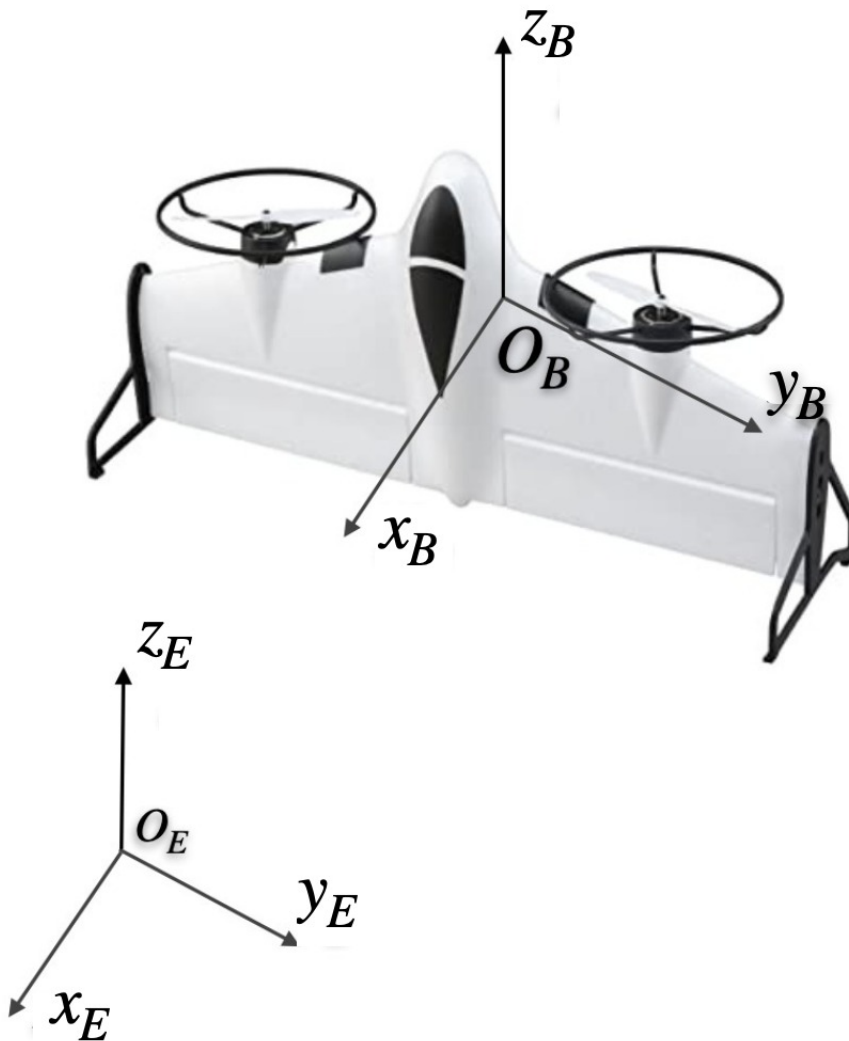


Figura 3.2: Marcos de referencia inercial y fijo en el cuerpo

3.2. Cinemática y dinámica del vehículo

A partir de que los marcos de referencia fueron definidos, ahora se puede desarrollar la cinemática y dinámica, para esto es necesario definir la traslación, orientación y ecuaciones de movimiento del vehículo XVERT VTOL

3.2.1. Traslación del vehículo

Sea $q = (\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^6$ el vector que denota las coordenadas generalizadas del vehículo, donde $\xi = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ son las coordenadas traslacionales del marco de referencia inercial fijo a la tierra E y $\eta = (\phi, \theta, \psi)^T \in \mathbb{R}^3$ describe la orientación del vehículo expresada la convención clásica de los ángulos de Euler (alabeo, cabeceo y guiñada). Las ecuaciones

de movimiento de un cuerpo rígido de Newton-Euler representan el modelo dinámico del XVERT VTOL (figura 3.3) y están dadas por

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ M\dot{\nu}_E \\ \dot{R}_{E \rightarrow B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu^E \\ R_{E \rightarrow B} F_B \\ R_{E \rightarrow B} \text{sk}(\Omega) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$I\dot{\Omega} = -\Omega \times I\Omega + \Gamma_B \quad (3.2)$$

donde:

$F_B \in \mathbb{R}^3$: es la fuerza total aplicada al centro de gravedad (CG) del vehículo.

$\Gamma_B \in \mathbb{R}^3$: es el torque aplicado al CG del vehículo.

$M = \text{diag}(m) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $m \in \mathbb{R}$: es la masa del vehículo.

$\Omega = (p, q, r)^T \in \mathbb{R}^3$: es la velocidad angular del centro de masa (CM) del vehículo.

$\nu = (u, v, w)^T$: es la velocidad traslacional del CM del vehículo.

$I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$: es la matriz que contiene los momentos de inercia del vehículo.

$R_{E \rightarrow B}$: es la matriz de rotación en el marco inercial fijo a la tierra para cualquier vector $a \in \mathbb{R}^3$.

$\text{sk}(a) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$: es la matriz antisimétrica tal que $\text{sk}(a)b = a \times b$.

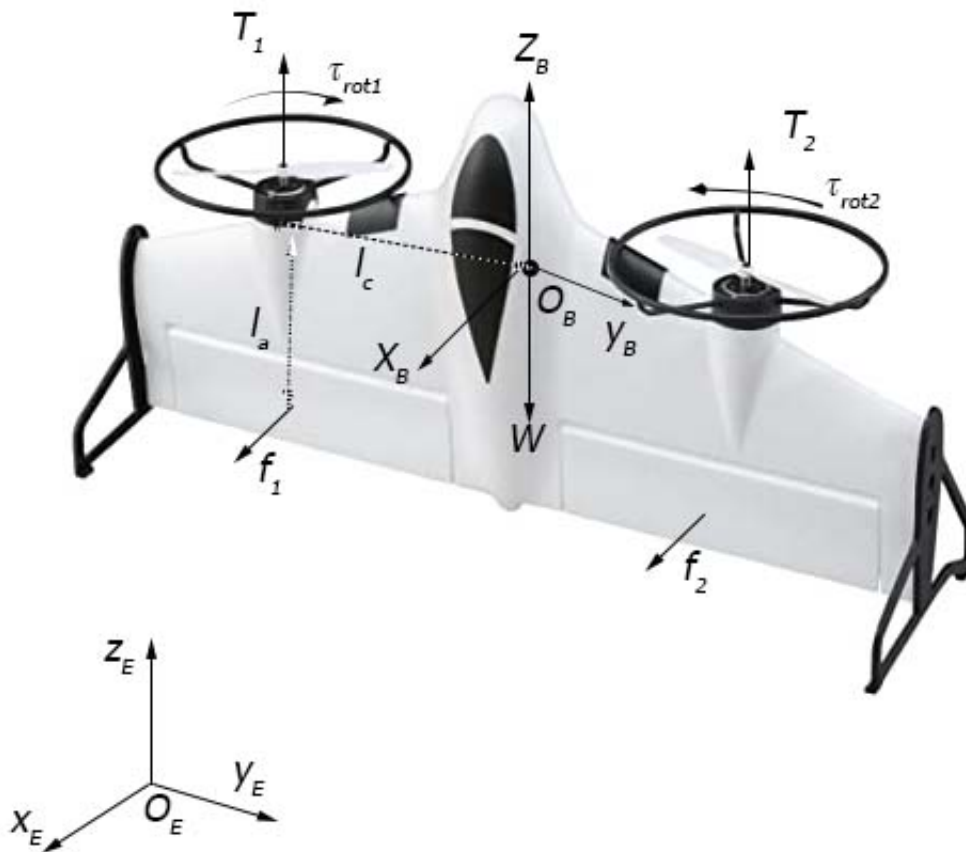


Figura 3.3: Fuerzas y momentos que actúan en la aeronave

A continuación se muestran las fuerzas gravitacionales, aerodinámicas y de empuje que actúan en el vehículo, implícitas en la ecuación (3.1):

- **Fuerza de empuje:** La fuerza de empuje está dada por los dos motores del vehículo se define como $T = T_1 + T_2$. En términos del marco de referencia fijo en el cuerpo está dada como $T_B = (0, 0, T)^T \in \mathbb{R}^3$
- **Fuerza de gravitacional:** La fuerza de gravedad g en términos del marco de referencia inercial fijo a la tierra se expresa como $G_E = (0, 0, -g)$

3.2.2. Orientación del vehículo

La orientación del vehículo va a estar dada por la rotación de un marco de referencia con respecto a otro. Entonces se toman los ángulos de Euler para hacer la matriz de rotación.

Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler $\Theta^E = (\phi, \theta, \psi)$, describen la orientación del XVERT VTOL, entonces se definen las siguientes rotaciones

Rotación alrededor del eje z (guiñada).

$$R_{(z,\psi)} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Rotación alrededor del eje y (cabeceo).

$$R_{(y,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Rotación alrededor del eje x (alabeo).

$$R_{(x,\phi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Por lo que para obtener la matriz de rotación $R_{E \rightarrow B}$ de acuerdo con la orientación clásica de los ángulos de Euler, se tiene que

$$R_{E \rightarrow B} = R_{(z,\psi)} \cdot R_{(y,\theta)} \cdot R_{(x,\phi)} \quad (3.6)$$

por lo que,

$$R_{E \rightarrow B} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

donde $s = \sin(\cdot)$ y $c = \cos(\cdot)$. El orden de rotación es considerado como guiñada, cabeceo y alabeo.

Como el sistema se indetermina cuando el ángulo de cabeceo $\theta = \pm 90^\circ$, se utiliza una segunda matriz de rotación de los ángulos de Euler para estabilizar el vehículo en modo horizontal. La matriz de rotación $B_{E \rightarrow B}$ para representar la orientación del vehículo en modo horizontal está dada por

$$R_{E \rightarrow B} = R_{(x,\phi)} \cdot R_{(y,\theta)} \cdot R_{(z,\psi)} \quad (3.8)$$

entonces

$$B_{E \rightarrow B} = \begin{pmatrix} s_{\phi_h} s_{\psi_h} + c_{\phi_h} s_{\theta_h} c_{\psi_h} & s_{\phi_h} c_{\psi_h} - c_{\phi_h} s_{\theta_h} s_{\psi_h} & c_{\phi_h} c_{\theta_h} \\ c_{\phi_h} s_{\psi_h} - s_{\phi_h} s_{\theta_h} c_{\psi_h} & c_{\phi_h} c_{\psi_h} + s_{\phi_h} s_{\theta_h} s_{\psi_h} & -s_{\psi_h} c_{\theta_h} \\ -c_{\theta_h} c_{\psi_h} & c_{\theta_h} s_{\psi_h} & s_{\theta_h} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde el orden de rotación es considerado como alabeo, cabeceo y guiñada.

Marco de referencia aerodinámico

$$A_{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde α es el ángulo de ataque y es definido como el ángulo entre la cuerda media del perfil aerodinámico y el viento relativo.

Torques

- **Torque de las superficies de control:** El torque generado por las superficies de control se describe como

$$\bar{\Gamma}_a = \bar{l} \times F \quad (3.11)$$

entonces

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} 0 \\ l_e(f_1 + f_2) \\ l_a(f_2 - f_1) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

donde l_e y l_a representan la distancia del centro de masa a las fuerzas, respectivamente.

- **Torque de reacción:** El torque de reacción de los rotores está dado por

$$\bar{\Gamma}_{rot} = \sum_{i=1}^2 \tau_{rot_i} \quad (3.13)$$

entonces

$$\bar{\Gamma}_{rot} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{rot_1} - \tau_{rot_2} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

y $\tau_{rot_i} = I_{rot_i} \dot{\omega}_{r_i}$, donde:

I_{rot_i} : es el momento de inercia del rotor respecto a su respectivo eje.

$\dot{\omega}_{r_i}$ es la aceleración angular del rotor i .

- **Torque giroscópico:** El torque giroscópico producido por los dos motores se expresa como

$$\bar{\Gamma}_g = \sum_{i=1}^2 I_{r_i} (\Omega \times \omega_{r_i}) \quad (3.15)$$

entonces

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} q(I_{r_1}\omega_{r_1} - I_{r_2}\omega_{r_2}) \\ p(-I_{r_1}\omega_{r_1} + I_{r_2}\omega_{r_2}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

donde: I_{r_i} : es el momento de inercia de la hélice i .

ω_{r_i} : es la velocidad angular del rotor i .

Por lo que el torque total el marco de referencia fijo en el cuerpo se representa como

$$\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_{rot} + \Gamma_g = \begin{pmatrix} \tau_L \\ \tau_M \\ \tau_N \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Tensor de inercia

El tensor de inercia referente al marco de referencia fijo en el cuerpo es necesario para obtener la distribución de la masa del XVERT VTOL, entonces éste se expresa matricialmente como:

$$I^B = \begin{pmatrix} I_{x^B} & -I_{x^B y^B} & -I_{x^B z^B} \\ -I_{y^B x^B} & I_{y^B} & -I_{y^B z^B} \\ -I_{z^B x^B} & -I_{z^B y^B} & I_{z^B} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

donde:

$$\begin{aligned}
I_{x^B} &= \int \int \int_V (y^2 + z^2) \rho dV \\
I_{y^B} &= \int \int \int_V (x^2 + z^2) \rho dV \\
I_{z^B} &= \int \int \int_V (x^2 + y^2) \rho dV \\
I_{x^B y^B} &= I_{y^B x^B} = \int \int \int_V (xy) \rho dV \\
I_{x^B z^B} &= I_{z^B x^B} = \int \int \int_V \rho dV \\
I_{y^B z^B} &= I_{z^B y^B} = \int \int \int_V \rho dV
\end{aligned} \tag{3.19}$$

El vehículo conformado por elementos ubicados en los ejes de referencia del cuerpo, de diferencial de volumen dV y con material con densidad ρ ; donde I_{x^B} , I_{y^B} y I_{z^B} son los momentos de inercia principales y el resto son productos de inercia. Todos los productos de inercia se consideran cero; los del plano $x^B z^B$ debido a la simetría del vehículo y los restantes se desprecian debido a que son ínfimamente pequeños respecto a los principales, entonces la matriz del tensor de inercia se define como

$$I^B = \begin{pmatrix} I_{x^B} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y^B} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z^B} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

3.2.3. Ecuaciones de movimiento

A partir de lo anterior, se muestran las ecuaciones de movimiento definidas por las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler (3.1) y (3.2), por lo que el modelo completo de 6 grados de libertad del XVERT VTOL se representa por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_x c_\theta c_\psi + F_y (s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi) + F_z (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \\
m\ddot{y} &= F_x c_\theta c_\psi + F_y (s_\phi s_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi) + F_z (c_\phi s_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi) \\
m\ddot{z} &= -F_x s_\theta + F_y s_\phi c_\theta + F_z c_\phi c_\theta - g \\
\ddot{\psi} &= \frac{\dot{\theta}\dot{\phi}}{c_\theta} + \frac{\dot{\theta}\dot{\psi}s_\theta}{c_\theta} + \frac{c_\phi}{c_\theta I_z} [\tau_N + pq(I_x - I_y)] + \frac{s_\phi}{c_\theta I_y} [\tau_M - pr(I_x - I_z)] \\
\ddot{\theta} &= \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta + \frac{c_\phi}{I_y} [\tau_M + pr(I_x - I_z)] + \frac{s_\phi}{I_z} [-\tau_N - pq(I_x - I_y)] \\
\ddot{\phi} &= \frac{\dot{\theta}\dot{\psi}}{c_\theta} + \frac{\dot{\theta}\dot{\phi}s_\theta}{c_\theta} + \frac{1}{I_x} [\tau_L + qr(I_y - I_z)] + \frac{c_\phi s_\theta}{c_\theta I_z} [\tau_N + pq(I_x - I_y)] \\
&\quad + \frac{s_\phi s_\theta}{c_\theta I_y} [\tau_M - pr(I_x - I_z)]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde

$$F_x = L$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = T - D$$

$$\tau_L = q(I_{r_1}\omega_{r_1} - I_{r_2}\omega_{r_2})$$

$$\tau_M = l_e(f_1 + f_2) + p(-I_{r_1}\omega_{r_1} + I_{r_2}\omega_{r_2})$$

$$\tau_N = l_a(f_2 + f_1) + p(\tau_{rot_1} - \tau_{rot_2})$$

Ya definido el modelo matemático, se puede generar una estrategia de control para el vehículo XVER VTOL.

Capítulo 4

Estrategia de control

Con basa en el modelo matemático del capítulo anterior y tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

$$\begin{aligned}F_x &= L = 0 \\D &= 0 \\ \phi &= 0 \\ \psi &= 0\end{aligned}$$

y $\ddot{\theta} = \tau_\theta$ como la entrada de control, se propuso una ley de control mediante un algoritmo para la estabilidad longitudinal del vehículo, para esto, únicamente se tomó la parte que representa el modelo longitudinal de la aeronave, es decir:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m}(T \sin \theta) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}(T \cos \theta - mg) \\ \ddot{\theta} &= \tau_\theta\end{aligned}\tag{4.1}$$

Para calcular el empuje T mínimo necesario, se iguala la parte izquierda de la ecuación con cero, por lo que se tiene

$$0 = \frac{1}{m}(T \cos \theta - mg)\tag{4.2}$$

por lo que despejando T se tiene

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}\tag{4.3}$$

y tomando el ángulo de cabeceo $\theta = 0$, se tiene

$$T = mg\tag{4.4}$$

En este capítulo se muestran simulaciones numéricas probadas para estabilizar el sistema, desde un algoritmo simple hasta un algoritmo mejorado.

4.1. Control

4.1.1. Control de altitud

El control de la altitud z del vehículo se basa en un controlador PD descrito a continuación. Para realizar un controlador PD, a continuación se define el error de posición \tilde{z}

$$\tilde{z} = z - z^v \quad (4.5)$$

Donde z_v es la referencia para el error de posición. Derivando el error de posición, se tiene el error de velocidad $\dot{\tilde{z}}$ y se define como

$$\dot{\tilde{z}} = \dot{z} - \dot{z}^v \quad (4.6)$$

Los errores de posición (4.5) y velocidad (4.6); y tomando el ángulo $\theta = 0$ se introducen en el empuje T , que se redefine de la siguiente manera

$$T = mg - k_1 \tilde{z} - k_2 \dot{\tilde{z}} \quad (4.7)$$

donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ son valores positivos. Colocando los errores de posición y velocidad en espacio de estados, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1 &= \dot{\tilde{z}} \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= \frac{1}{m}(T - mg) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para realizar la simulación numérica, se tomó como referencia de altitud $z^v = 10[\text{m}]$ tomaron los valores de $m = 1[\text{kg}]$ y $g = 9.81[\text{m/s}^2]$, con condiciones iniciales de altitud $z = 0[\text{m}]$ y velocidad $\dot{z} = 0[\text{m/s}]$ con un tiempo de simulación $t = 10[\text{s}]$. Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes gráficas:

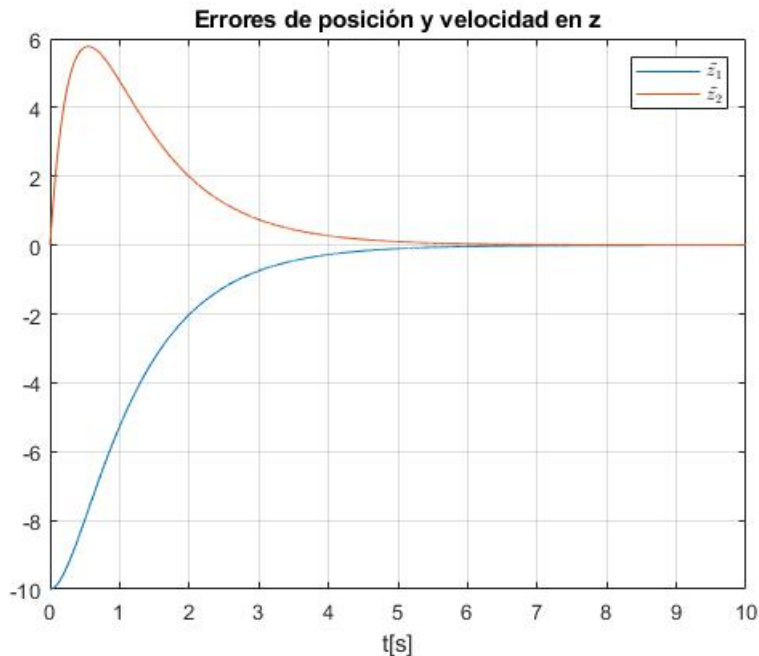


Figura 4.1: Altitud z , velocidad \dot{z} y errores de posición y velocidad

como se observa en la figura 4.1, tanto el error de posición \tilde{z}_1 , como el error de velocidad \tilde{z}_2 convergen a cero.

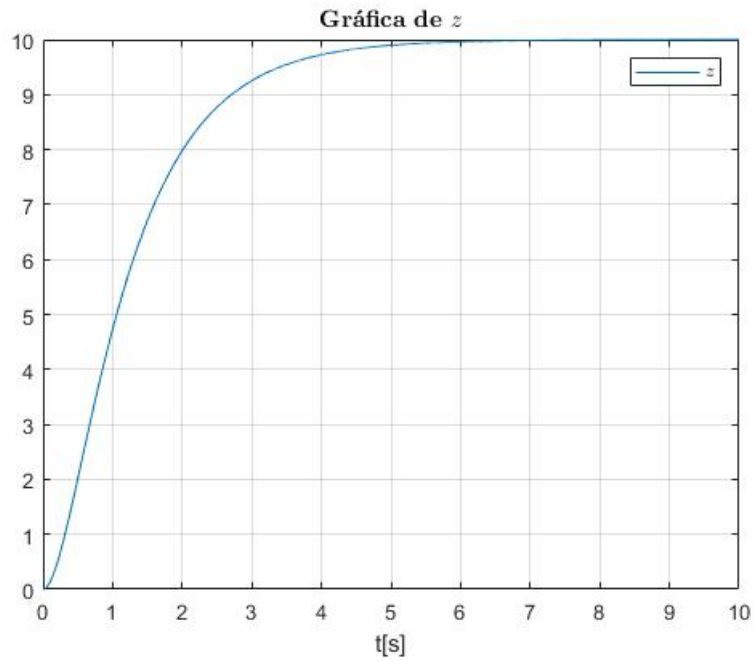


Figura 4.2: Altitud z , velocidad \dot{z} y errores de posición y velocidad

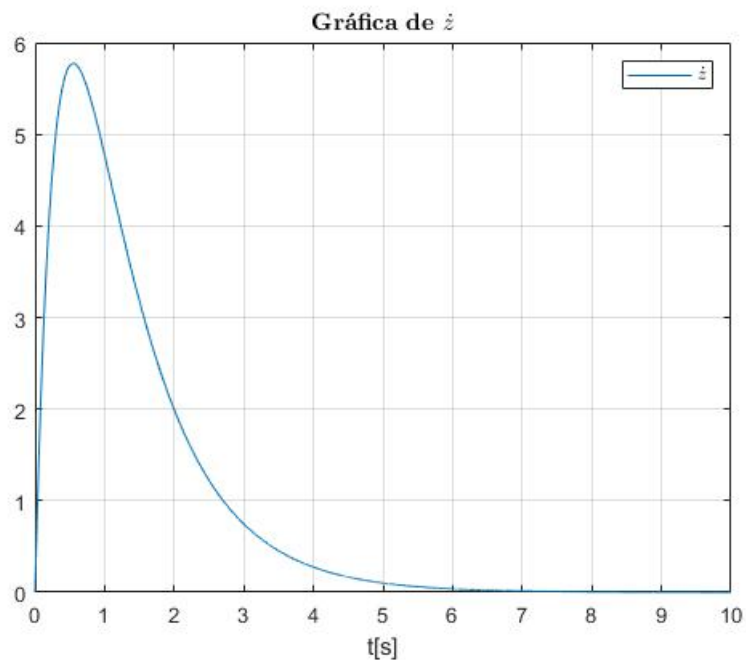


Figura 4.3: Altitud z , velocidad \dot{z} y errores de posición y velocidad

En el sistema que se tiene, al ser un sistema subactuado, la altitud se puede controlar de manera directa, ya que la entrada de control correspondiente al empuje T controla directamente dicho parámetro. Para estabilizar los parámetros referentes al eje x es necesario tener una estrategia de control diferente a la obtenida para el eje z .

4.1.2. Control para x mediante θ

Pruebas con referencia θ^v

Para empezar, con base en un controlador PD, se probó un control con diferentes valores para la referencia θ^v . Entonces, se necesita agregar x y θ al espacio de estados 4.8. Inicialmente se define el error de posición en θ como

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^v \quad (4.9)$$

y el error de velocidad, la derivada del error de posición, es decir:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^v \quad (4.10)$$

Entonces los estados de x y θ se pueden definir como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \ddot{x} \end{aligned} \quad (4.11)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}_1 &= \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 &= \tau_\theta \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ahora, complementando las ecuaciones (4.11) y (4.12) con (4.8), el sistema longitudinal completo se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{1}{m} (T \sin \theta) \\ \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= \frac{1}{m} (T \cos \theta - w) \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 &= \tilde{\theta}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 &= \tau_\theta(\delta) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ahora, para la simulación, el ángulo de referencia $\theta^v = -\pi/6$ mientras que las condiciones iniciales se toman como

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\pi}{12} \\ \dot{\theta}_0 &= 0 \\ z_0 &= 0 \\ \dot{z}_0 &= 0 \\ x_0 &= 0 \\ \dot{x}_0 &= 10 \end{aligned} \quad (4.14)$$

De manera que la velocidad horizontal \dot{x} pueda converger a 0, cabe mencionar que la altitud deseada tendrá el mismo valor de referencia $z^v = 10$. Por lo que se obtienen las siguientes gráficas para x :

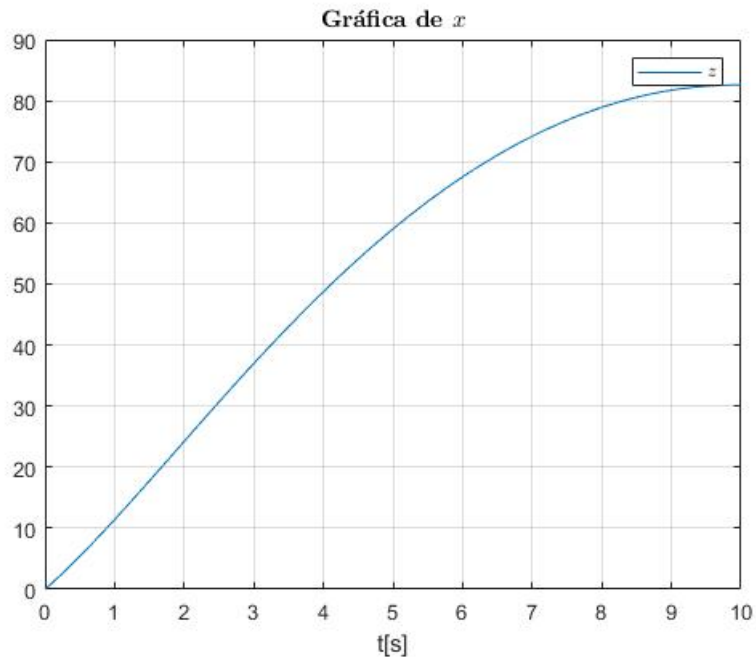


Figura 4.4: Gráfica de x

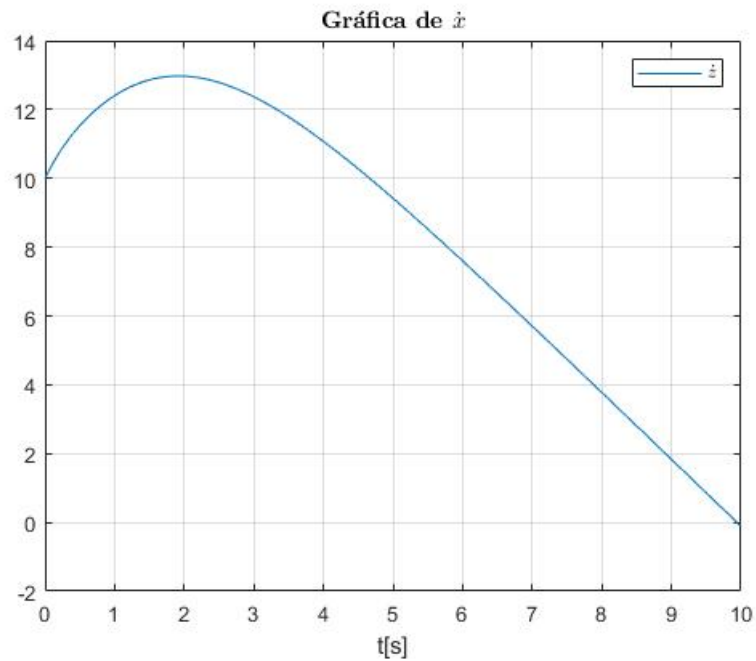


Figura 4.5: Gráfica de \dot{x}

Como se puede observar, a medida que la velocidad $\dot{x} \rightarrow 0$, la posición en $x \rightarrow 83$.

La simulación numérica en MATLAB, para una una referencia $\theta^v = -\pi/12$, con todos los valores anteriores sin alterar, se obtienen las siguientes gráficas de posición x y velocidad \dot{x} :

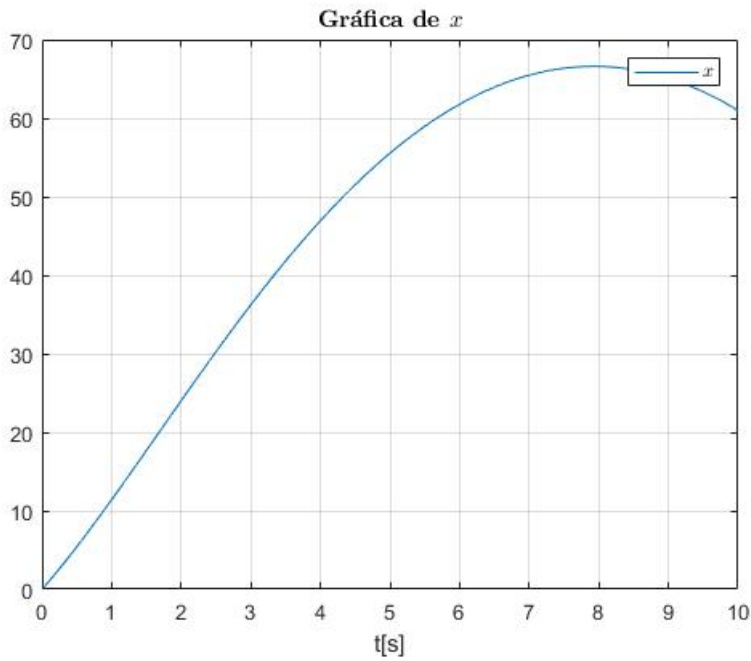


Figura 4.6: Gráfica de x para $\theta^v = -\pi/12$

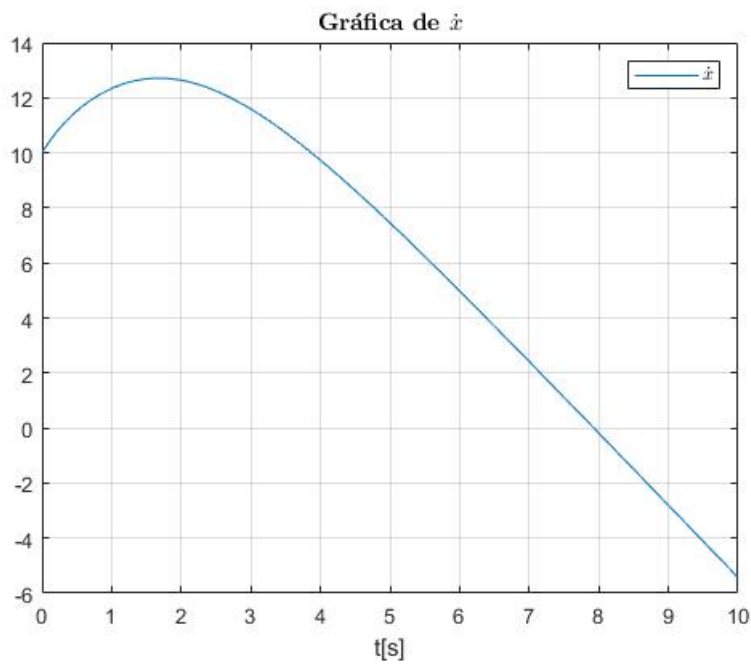


Figura 4.7: Gráfica de \dot{x} para $\theta^v = -\pi/12$

Como se puede observar en las figuras 4.6 y 4.7 es que, al aumentar el ángulo deseado θ^v , el vehículo genera una velocidad negativa, lo que quiere decir que la dirección del vehículo es contraria a la de la velocidad inicial.

Para que el vehículo pueda frenar, necesita que la velocidad en dirección opuesta también disminuya, por lo que, después de elegir un ángulo de referencia $\theta^v = -\pi/12$, también se eligió un ángulo $\theta^v = 0$ de manera que cuando la velocidad $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$, y de la simulación numérica se obtuvieron las siguientes gráficas:

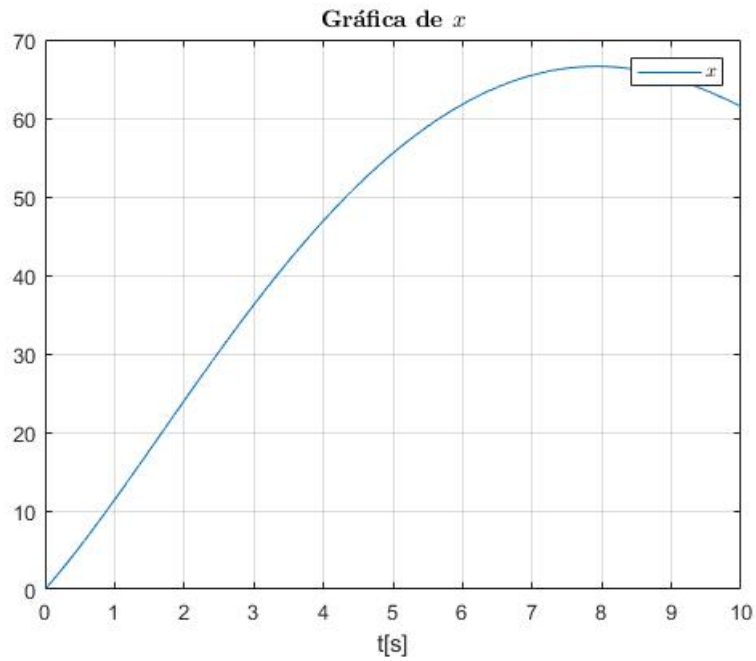


Figura 4.8: Gráfica de x para $\theta^v = -\pi/12$ y $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$

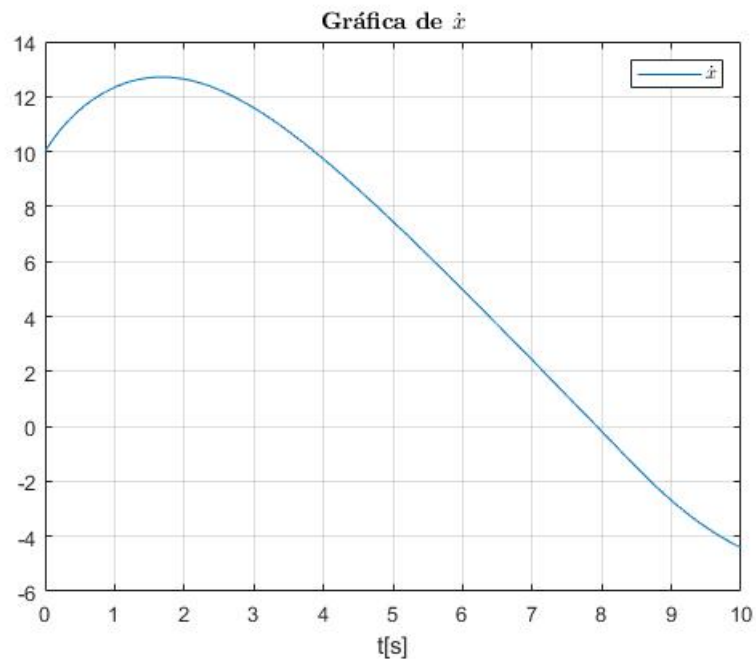


Figura 4.9: Gráfica de \dot{x} para $\theta^v = -\pi/12$ y $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$

entonces en la figura 4.9, se observa cómo la velocidad se comienza a estabilizar cuando $t \approx 10$ [s] mientras que la gráfica de la posición en x (figura 4.8, sigue siendo similar a la anterior.

Tomando un tiempo de muestra de $t = 20$ [s], se puede observar de mejor manera cómo \dot{x} converge a una velocidad con valor negativo, como se puede observar en las siguientes figuras:

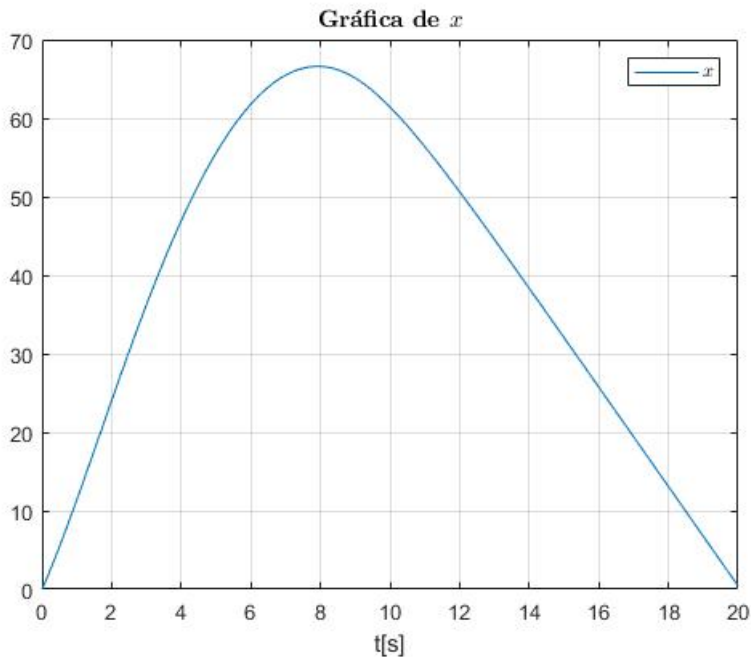


Figura 4.10: Gráfica de x para $\theta^v = -\pi/12$ y $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$ con $t = 20[s]$

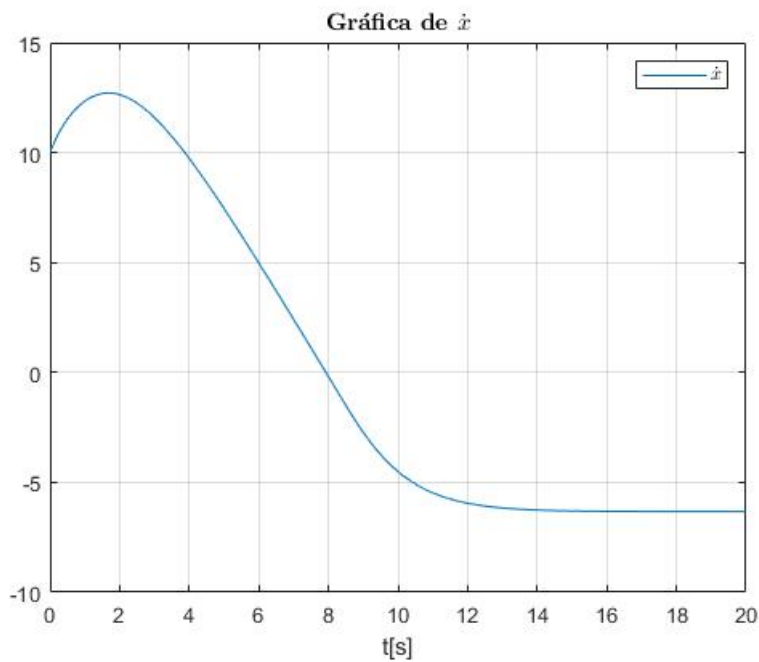


Figura 4.11: Gráfica de \dot{x} para $\theta^v = -\pi/12$ y $\dot{x} \approx -1 \Rightarrow \theta^v = 0$ con $t = 20[s]$

Como se puede observar en la figura 4.11, la velocidad converge en $\dot{x} \approx -6$ y en la 4.10, se observa que la posición $x = 0$ para un tiempo $t = 20[s]$.

Realizando el control de como se vio anteriormente, no existe una forma de asegurar estabilidad asintótica o exponencial global, por lo que se propone un algoritmo que pueda hacer que la posición x y la velocidad \dot{x} converjan al origen mediante la manipulación de θ .

Proposición de algoritmo

El algoritmo llevado a cabo se basa un controlador PD aplicado al con una variable auxiliar propuesta V y su respectiva derivada \dot{V} , y se muestran a continuación:

$$v = \dot{x} + \frac{x}{10} \quad (4.15)$$

$$\dot{v} = \tan \theta + \frac{\dot{x}}{10} \quad (4.16)$$

Sustituyendo (4.3) en \ddot{x} perteneciente a (4.1), se tiene que

$$\ddot{x} = \tan \theta \quad (4.17)$$

Se busca estabilizar la posición x y la velocidad \dot{x} al origen mediante un algoritmo que controle el ángulo de cabeceo θ y la velocidad angular $\dot{\theta}$.

donde el control PD se aplica la entrada de control τ_θ y se define como

$$\tau_\theta = -k_3\tilde{\theta} - k_4\dot{\tilde{\theta}} \quad (4.18)$$

donde las $k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ son positivas.

Para que x pueda converger, se toma otra variable auxiliar h con el valor al que se desee que x converja, por lo que se toma el valor de $h = 0$, lo que ocasionará que haya oscilaciones al rededor del valor de h .

El algoritmo de la variable V puede expresarse de manera que la referencia θ_d sea

$$\begin{cases} \theta^v = -0.3 & \text{si } v > 0 \\ \theta^v = 0.3 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Simulando el algoritmo, con condiciones iniciales de posición $x = 10$, velocidad $\dot{x} = -1$ (lo que significa que el vehículo está avanzando en dirección al origen, el ángulo $\theta = 0$ y la velocidad angular $\dot{\theta} = 0$, con un tiempo de muestra $t = 100[s]$, entonces se obtienen las siguientes gráficas

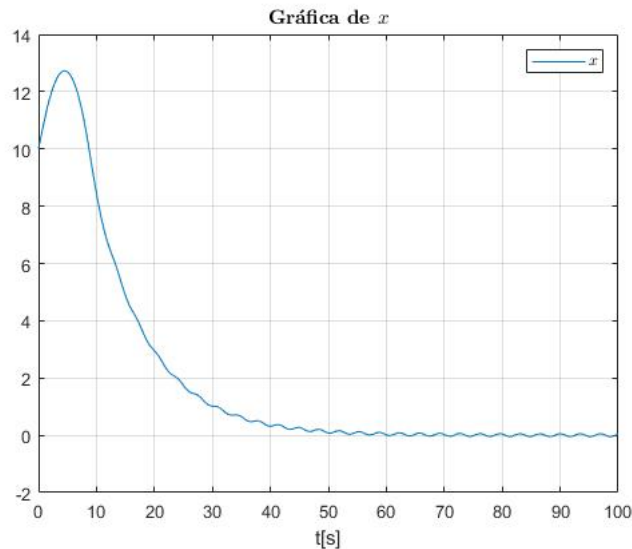


Figura 4.12: Gráfica de posición x

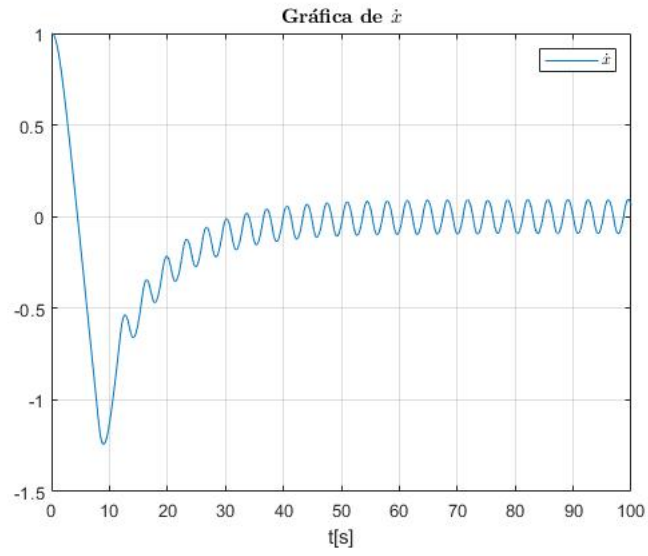


Figura 4.13: Gráfica de velocidad \dot{x}

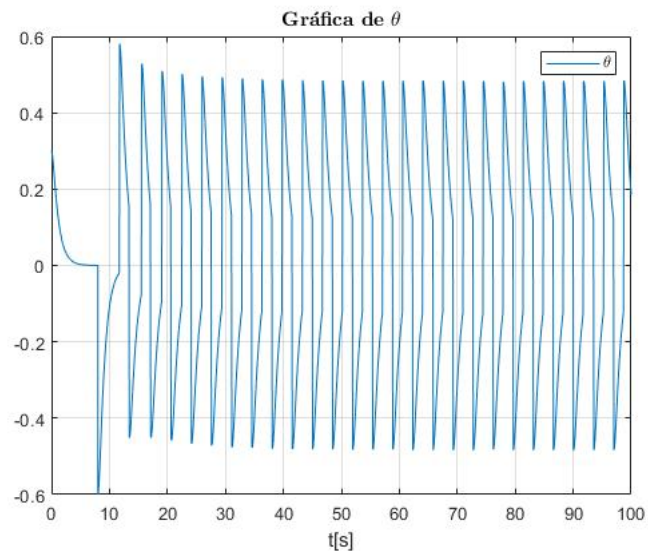


Figura 4.14: Gráfica de ángulo θ

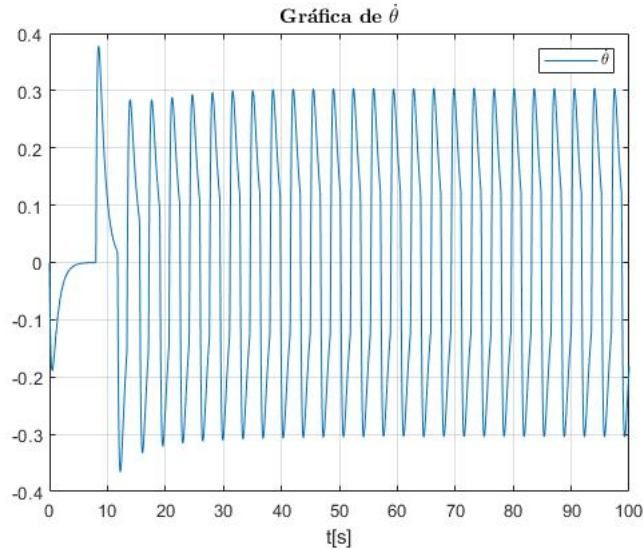


Figura 4.15: Gráfica de velocidad angular $\dot{\theta}$

como se observa en las figuras 4.12 y 4.13, los valores tienden al origen pero oscilan alrededor de éste, como se predijo anteriormente; mientras que en las figuras 4.14 y 4.15 se observan las oscilaciones en el rango de $-0.3 < \theta < 0.3$.

Con este algoritmo igual se probó disminuir las oscilaciones mediante la disminución del ángulo θ^v respecto al tiempo, es decir si $t < 5$, entonces

$$\begin{cases} \theta^v = -0.3 & \text{si } v > 0 \\ \theta^v = 0.3 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

si $5 < t < 15$, entonces

$$\begin{cases} \theta^v = -0.2 & \text{si } v > 0 \\ \theta^v = 0.2 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

si $15 < t < 20$, entonces

$$\begin{cases} \theta^v = -0.1 & \text{si } v > 0 \\ \theta^v = 0.1 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

si $25 < t < 35$, entonces

$$\begin{cases} \theta^v = -0.05 & \text{si } v > 0 \\ \theta^v = 0.05 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

si $t > 35$, entonces

$$\begin{cases} \theta^v = -0.01 & \text{si } v > 0 \\ \theta^v = 0.01 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

por lo que las gráficas obtenidas con la simulación se muestran a continuación

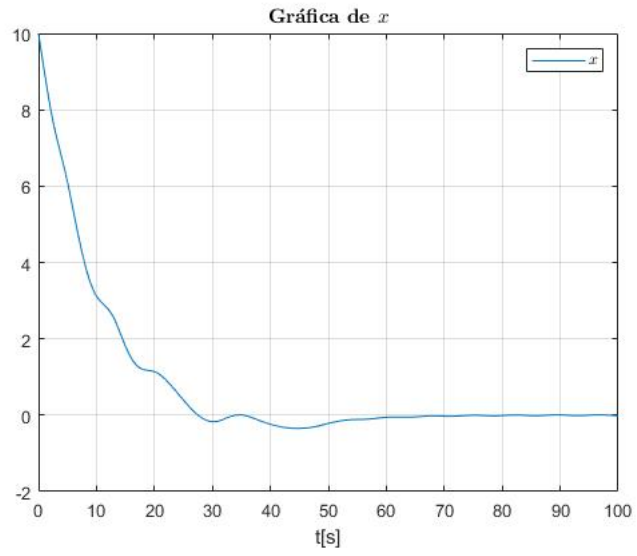


Figura 4.16: Gráfica de posición x

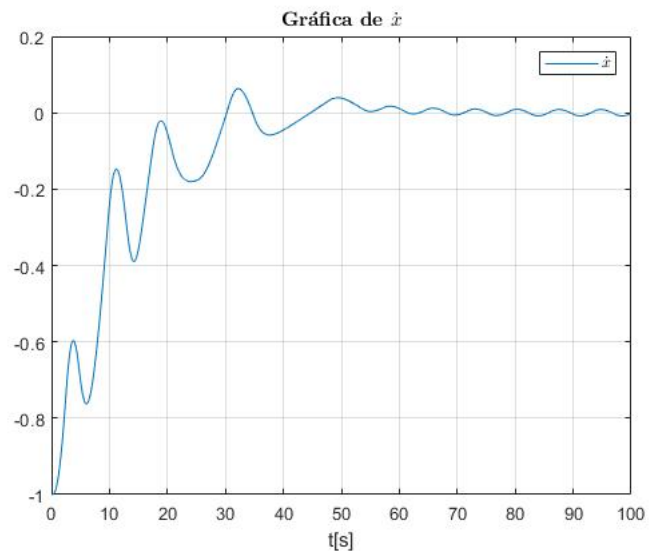


Figura 4.17: Gráfica de velocidad \dot{x}

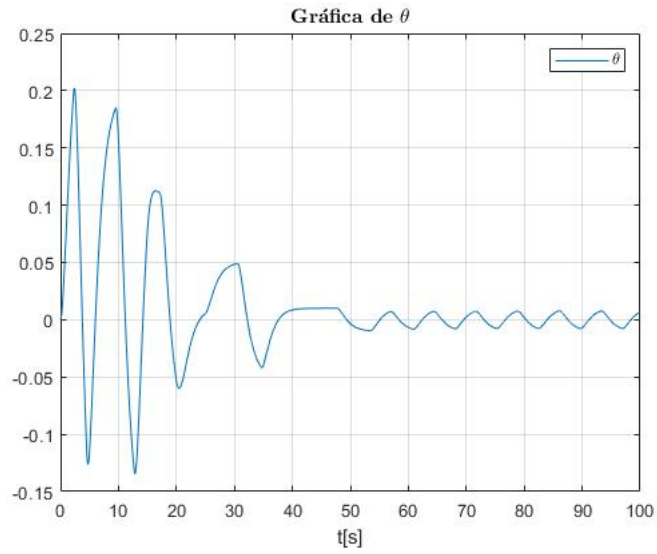


Figura 4.18: Gráfica de ángulo θ

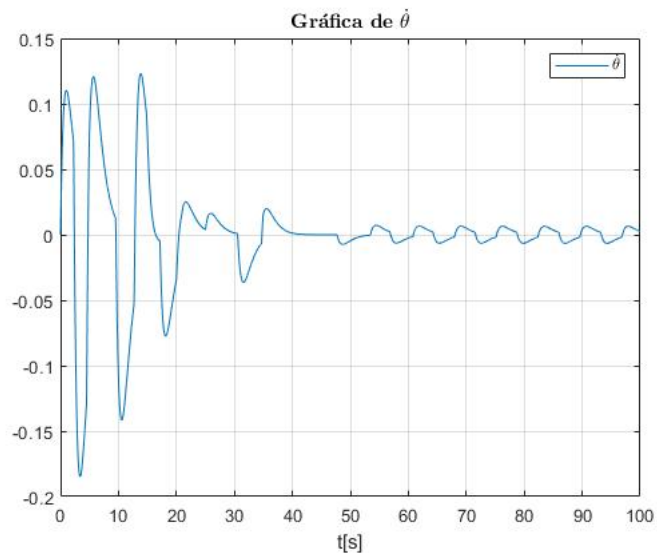


Figura 4.19: Gráfica de velocidad angular $\dot{\theta}$

Como se puede observar en las figuras de la 4.16 a la 4.19 las oscilaciones disminuyen considerablemente mas no desaparecen, es por eso que en la siguiente sección se muestra la ley de control mejorada con su respectiva prueba de estabilidad y sus simulaciones.

4.2. Ley de control mejorada

En las secciones anteriores se tiene un bosquejo de la estrategia de control que ha sido mejorada, a continuación se tiene la prueba de estabilidad de dicha ley de control mediante la teoría de estabilidad de Lyapunov, con una nueva función candidata de Lyapunov:

4.2.1. Prueba de estabilidad

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \tan \theta \\ \ddot{\theta} &= \tau\end{aligned}\tag{4.25}$$

Se define una variable auxiliar

$$v = \dot{x} + k_1 x\tag{4.26}$$

donde $k_1 > 0$, entonces, derivándola se tiene

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \ddot{x} + k_1 \dot{x} \\ &= \tan \theta + k_1 \dot{x} \\ &= \tan \theta^v + \tan \theta - \tan \theta^v + k_1 \dot{x}\end{aligned}\tag{4.27}$$

Sea el error,

$$e = \tan \theta - \tan \theta^v\tag{4.28}$$

y la entrada virtual

$$\theta^v = \arctan[-k_1 \dot{x} - k_2 v], \quad k_2 > 0\tag{4.29}$$

Entonces

$$\dot{v} = -k_2 v + e\tag{4.30}$$

Colocando el sistema en espacio de estados de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$, con lo anterior, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e\tag{4.31}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tag{4.32}$$

para saber si esta parte del sistema es estable, se utiliza la ecuación de Lyapunov, tal que:

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q_1\tag{4.33}$$

entonces, para que (4.33) se cumpla, se tiene que P_1 debe ser

$$P_1 = \begin{bmatrix} k_2(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & 1 + k_1(k_1 + k_2) \end{bmatrix}\tag{4.34}$$

y Q_1 puede expresarse de la siguiente manera:

$$Q_1 = -2\bar{k}I_2\tag{4.35}$$

donde $\bar{k} = k_1 k_2 (k_1 + k_2)$.

Sea

$$V_1 = [x \ v] P_1 \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

y su derivada

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= - [x \ v] Q_1 \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + 2 [x \ v] P_1 B e \\ &= -\bar{k}(x^2 + v^2) + 2 [x \ v] P_1 B e \end{aligned} \quad (4.37)$$

Se busca que V_1 sea definida positiva y \dot{V}_1 sea definida negativa para que dicha parte del sistema sea estable, entonces se realiza una mayorización de manera que:

$$|2[x \ v] P_1 B e| \leq \left| 2 \|[x \ v]\| \sqrt{\bar{k}} \frac{\|P_1 B\|}{\sqrt{\bar{k}}} |e| \right| \leq \bar{k}(x^2 + v^2) + \frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} e^2 \quad (4.38)$$

por lo tanto

$$\dot{V}_1 \leq -\bar{k}(x^2 + v^2) + \frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} e^2 \quad (4.39)$$

La ecuación de la entrada virtual (4.29) se deriva dos veces de manera que

$$\theta^v = \arctan [-k_1 \dot{x} - k_2 v_2] \quad (4.40)$$

$$\dot{\theta}^v = \frac{-k_1 \ddot{x} - k_2 \dot{v}}{1 + (k_1 \dot{x} + k_2 v)^2} \quad (4.41)$$

$$\ddot{\theta}^v = \frac{-k_1 x^{(3)} - k_2 \ddot{v} + (k_1 \ddot{x} + k_2 \dot{v})[2(k_1 \dot{x} + k_2 v)(k_1 \ddot{x} + k_2 \dot{v})]}{(1 + (k_1 \dot{x} + k_2 v)^2)^2} \quad (4.42)$$

donde

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \tan \theta \\ x^{(3)} &= \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \\ \dot{v} &= \ddot{x} + k_1 \dot{x} \\ \ddot{v} &= x^{(3)} + k_1 \ddot{x} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Se escoge τ tal que

$$(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}^v) + c_2(\dot{\theta} - \dot{\theta}^v) + c_1(\theta - \theta^v) = 0$$

donde se sabe que $\tau = \ddot{\theta}$.

Para saber si esta parte del sistema es estable, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} - \dot{\theta}^v \\ \ddot{\theta} - \ddot{\theta}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e_1 & -e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta - \theta^v \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}^v \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

donde

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e_1 & -e_2 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

y para esta parte del sistema, es hecho el mismo procedimiento que en la ecuación (4.33), mediante la ecuación de Lyapunov, es decir

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -Q_2 \quad (4.46)$$

donde, para satisfacer (4.46), se tiene que

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2e_1 + e_2^2 & e_2 \\ e_2 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

donde

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2e_1e_2 & 0 \\ 0 & 2e_2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Sea $\tilde{\theta} = \theta - \theta^v$, entonces se tiene que V_2 debe ser definida positiva, por lo que

$$V_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} P_2 \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

y su derivada \dot{V}_2 debe ser definida negativa, es decir

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= - \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} Q_2 \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \\ &= -2c_1c_2\tilde{\theta}^2 - 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Entonces, el sistema completo $V = V_1 + V_2$ será estable, esto es

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} P_1 \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} P_2 \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \\ \dot{V} &\leq -\bar{k}(x^2 + v^2) + \frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} e^2 - 2e_1e_2\tilde{\theta}^2 - 2e_2\dot{\tilde{\theta}}^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Con base en lo anterior, redefiniendo a

$$e = \tan \theta - \tan \theta^v = \tan \tilde{\theta} [1 + \tan \theta \tan \theta^v]$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \tan \theta^v &= -k_1\dot{x} - k_2v \\ &= -k_1(v - k_1x) - k_2v \\ &= -(k_1 + k_2)v + k_1x \\ &= \begin{bmatrix} k_1 & -(k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Entonces mediante la obtención de los valores propios λ del sistema, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} P_1 \| \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} \|^2 + \lambda_{\min} P_2 \| \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \|^2 &\leq V(0) \\ \lambda_{\min} P_1 (x^2 + v^2) &\leq V(0) \\ \lambda_{\min} P_2 (\tilde{\theta}^2 + \dot{\tilde{\theta}}^2) &\leq V(0) \end{aligned} \quad (4.53)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta^v &\leq (k_1^2 + (k_1 + k_2)^2)(x^2 + v^2) \\ &\leq \frac{[k_1^2 + (k_1 + k_2)^2]}{\lambda_{\min} P_1} V(0) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\tilde{\theta}^2 = \frac{V(0)}{\lambda_{min} P_2}$$

Las condiciones iniciales deben estar en un dominio tal que $V(0)$ sea suficientemente pequeño para que $\tilde{\theta}^v$ y θ sean suficientemente pequeños de manera que

$$e = \tan \tilde{\theta}(1 + l)$$

donde $l = \tan \theta \tan \theta^v$ decrece con el valor de $V(0)$

Entonces en ese dominio; para c_1 y c_2 suficientemente grandes

$$\frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} c^2 - 2c_1 c_2 \tilde{\theta}^2 = \frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} (1 + l)^2 \tan^2 \theta - 2c_1 c_2 \tilde{\theta}^2 \leq -d \tilde{\theta}^2$$

para una $d > 0$.

Por lo que con lo anterior se concluye que el sistema es exponencialmente estable en dicho dominio.

Capítulo 5

Simulaciones y resultados finales

Para las simulaciones se utilizaron las siguientes ganancias:

$$k_1 = 0.9$$

$$k_2 = 0.9$$

$$c_1 = 3$$

$$c_2 = 3$$

En las figuras 5.1-?? se muestran las gráficas obtenidas de la posición x , la velocidad \dot{x} , la aceleración \ddot{x} , el ángulo θ , la velocidad angular $\dot{\theta}$, la entrada Posteriormente se experimentó con diferentes condiciones iniciales para observar cómo el sistema se estabiliza en diferentes regiones. Primero se utilizaron condiciones iniciales cercanas al origen:

5.1. Condiciones iniciales cercanas al origen

Para esta simulación, las condiciones iniciales fueron cercanas al origen, es decir, la velocidad $\dot{x} = 0$ [m/s], la posición $x = 0.5$ [m], la velocidad angular $\dot{\theta}_0 = 0$ [rad/s] y el ángulo $\theta_0 = 0$ [rad].

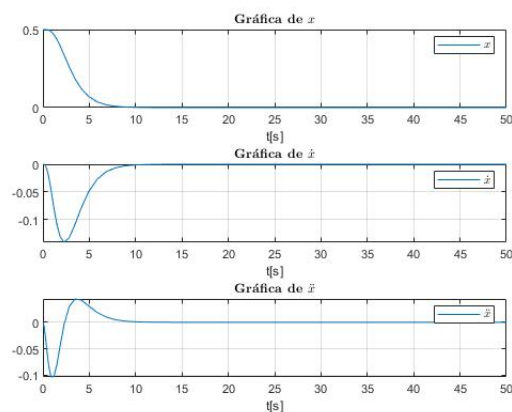


Figura 5.1: Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales cercanas al origen

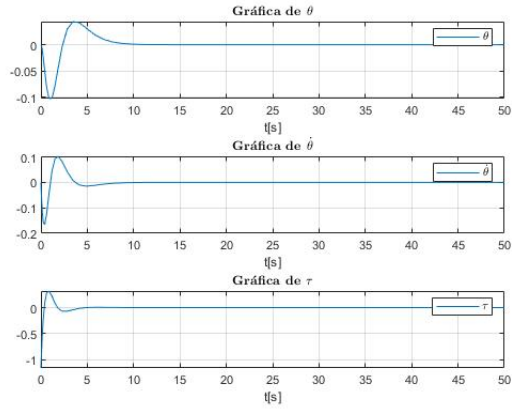


Figura 5.2: Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales cercanas al origen

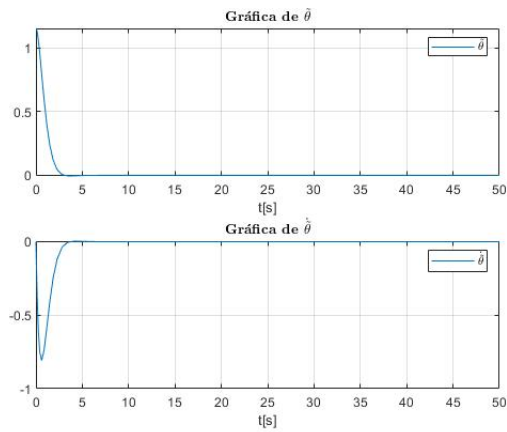


Figura 5.3: Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales cercanas al origen

En las figuras 5.1-5.3 se observa cómo a partir de las condiciones iniciales elegidas para dicha simulación, el sistema converge en un $t \approx 10[s]$

5.2. Simulación con condiciones iniciales $x_0 = 10[\text{m}]$ y $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$

En las figuras 5.4-5.6, se muestran las gráficas de la simulación con las condiciones iniciales de $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$, $x_0 = 10[\text{m}]$, $\dot{\theta}_0 = 0[\text{rad/s}]$ y $\theta_0 = 0[\text{rad}]$

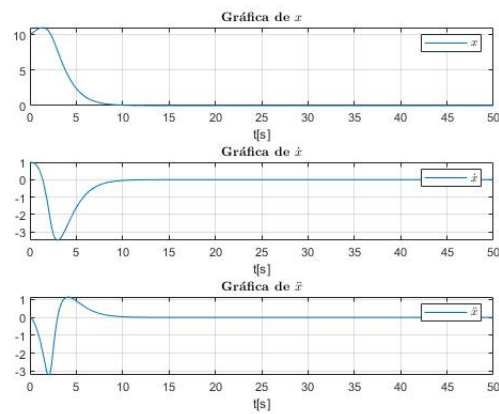


Figura 5.4: Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales $x_0 = 10[\text{m}]$ y $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$

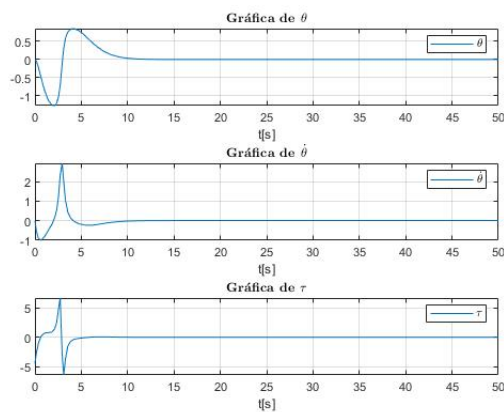


Figura 5.5: Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales $x_0 = 10[\text{m}]$ y $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$

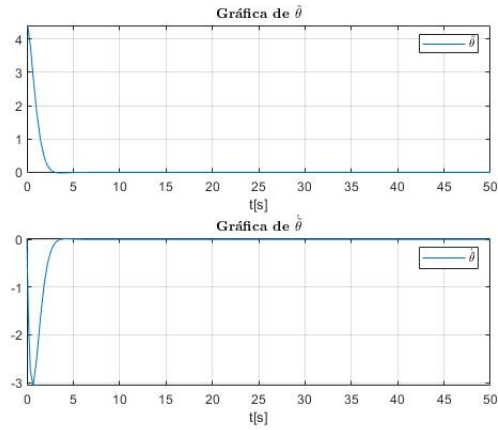


Figura 5.6: Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales $x_0 = 10[\text{m}]$ y $\dot{x}_0 = 1[\text{m/s}]$

Las gráficas de las simulaciones mostradas de la figura 5.4 a la figura 5.6 muestran que el sistema se estabiliza con condiciones iniciales de velocidad $\dot{x}_0 \neq 0[\text{m/s}]$, entonces estas condiciones iniciales también se encuentran dentro del dominio donde el sistema es estable.

5.3. Simulación con condiciones iniciales lejanas al origen

Para las gráficas de las simulaciones correspondientes a las figuras 5.7-5.9 se eligieron condiciones iniciales lejanas al origen, es decir, $\dot{x}_0 = 10[\text{m/s}]$ y $x_0 = 50[\text{m}]$

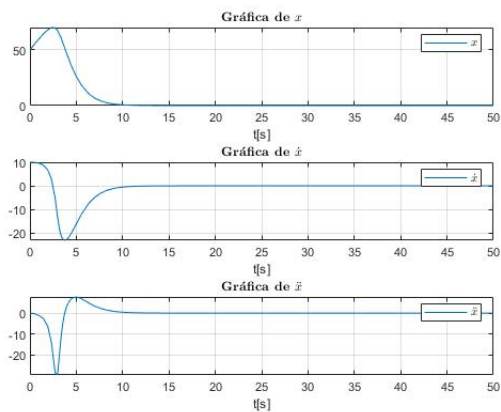


Figura 5.7: Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales lejanas al origen

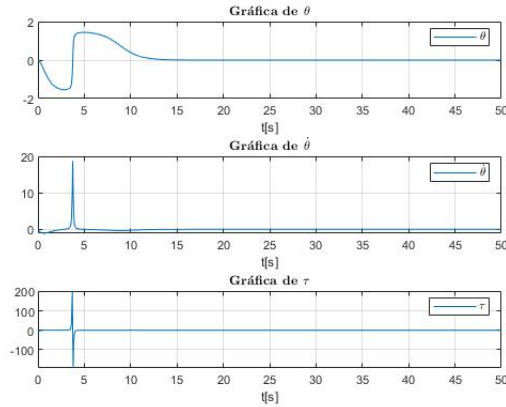


Figura 5.8: Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales lejanas al origen

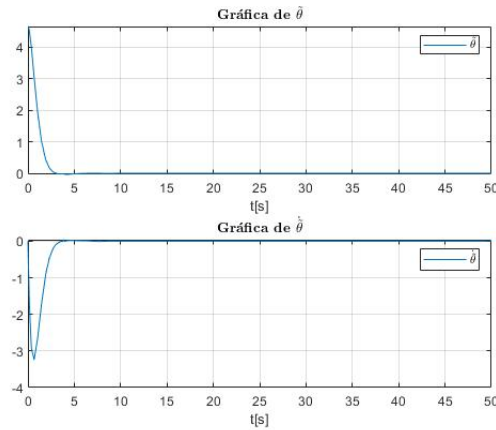


Figura 5.9: Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales lejanas al origen

En las gráficas mostradas de la figura 5.7 a la figura 5.9, se observan mayores sobreimpulsos que en las simulaciones con condiciones iniciales diferentes; nótese que en la figura 5.8, en la gráfica de τ , la energía necesaria para estabilizar el sistema es considerablemente mayor que en las simulaciones anteriores.

5.4. Simulación con condiciones iniciales variando el ángulo θ_0

Finalmente, para las siguientes simulaciones, se varía el ángulo θ_0 , ya que de acuerdo con la prueba de estabilidad, ésta depende del ángulo θ debido a que existen algunos valores para el ángulo θ que no se encuentran dentro del dominio de atracción donde el sistema es estable. Mientras tanto las demás condiciones iniciales permanecen fijas, es decir, la velocidad $\dot{x}_0 = 0$, la posición $x_0 = 1$ y la velocidad angular $\dot{\theta}_0 = 0$ [rad/s].

5.4.1. Simulaciones con $\theta_0 = \pi/12$ [rad]

A continuación, en las figuras 5.10-5.12 se muestran las simulaciones obtenidas con la condición inicial $\theta_0 = \pi/12$ [rad] y las otras condiciones iniciales mencionadas anteriormen-

te.

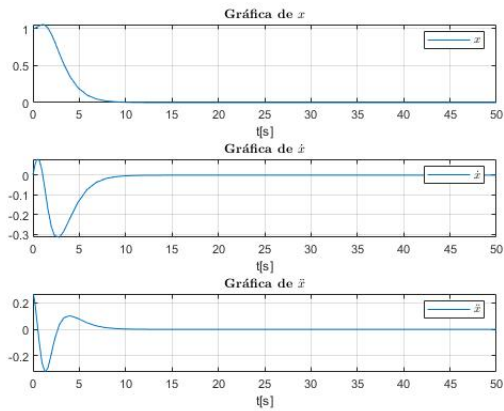


Figura 5.10: Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/12$

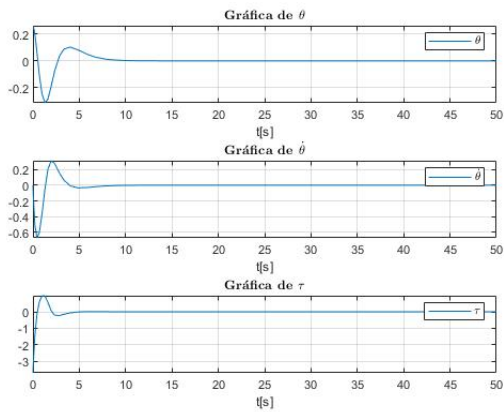


Figura 5.11: Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/12$

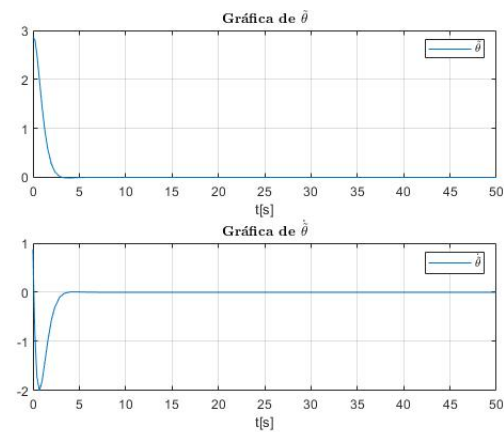


Figura 5.12: Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/12$

De acuerdo con las gráficas observadas de la figura 5.10 a la figura 5.12, el sistema se estabiliza fácilmente, ya que la condición inicial $\theta_0 = \pi/12$ [rad] es un ángulo muy pequeño.

5.4.2. Simulaciones con $\theta_0 = \pi/3[\text{rad}]$

Para las simulaciones de la figura 5.13 a la figura 5.15, se muestran las gráficas obtenidas ahora con la condición inicial $\theta_0 = \pi/3[\text{rad}]$

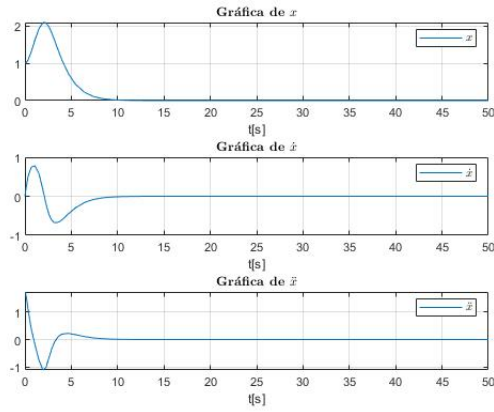


Figura 5.13: Gráficas de x , \dot{x} y \ddot{x} con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/3$

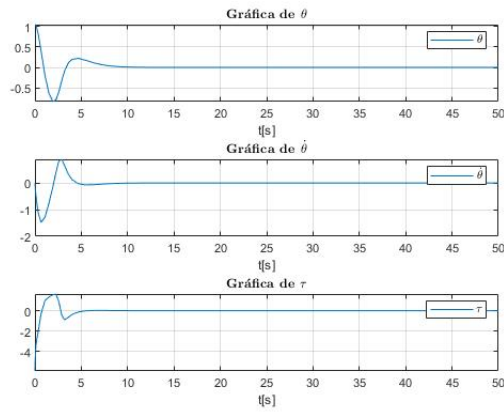


Figura 5.14: Gráficas de θ , $\dot{\theta}$ y τ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/3$

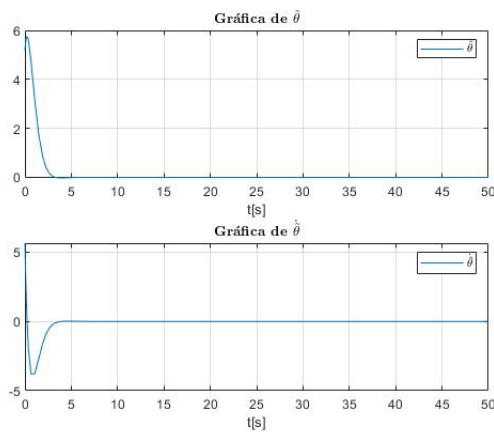


Figura 5.15: Gráficas de $\tilde{\theta}$ y $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/3$

Con base en lo observado en las figuras 5.13-5.15, se aprecia que el sistema se estabiliza con sobreimpulsos mayores al de la simulación anterior, pero aún así todas las gráficas convergen al origen.

5.4.3. Simulaciones con $\theta_0 = \pi$

Finalmente de la figura 5.16 a la figura 5.23 se muestran las gráficas con la condición inicial del ángulo $\theta_0 = \pi$:

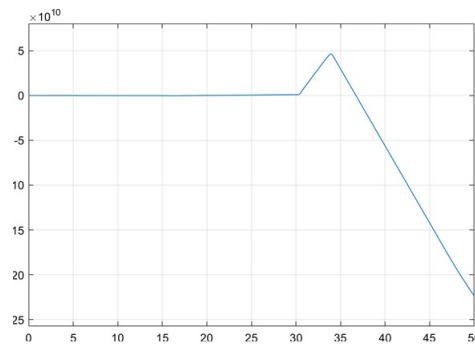


Figura 5.16: Gráfica de x con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$

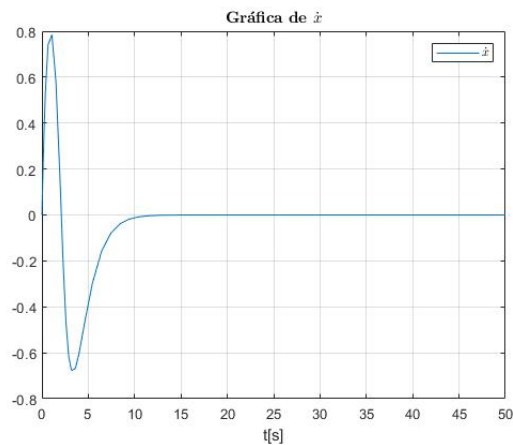


Figura 5.17: Gráfica de \dot{x} con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$

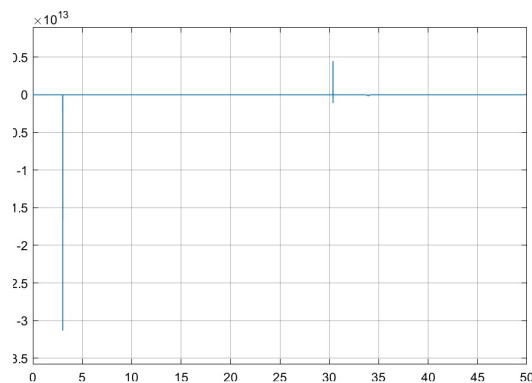


Figura 5.18: Gráfica de \ddot{x} con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$

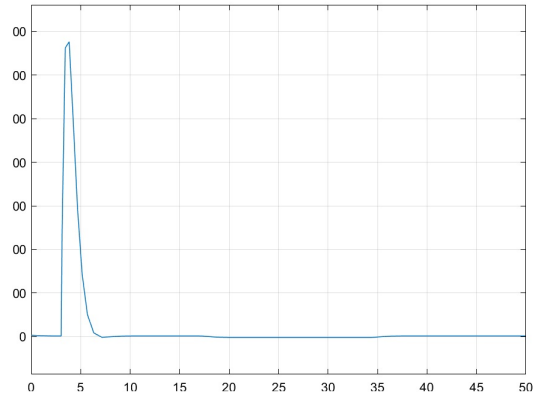


Figura 5.19: Gráfica de θ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$

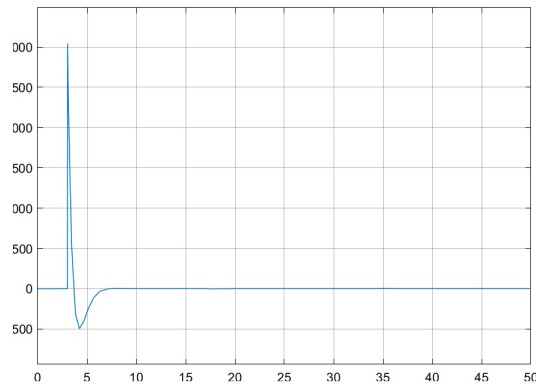


Figura 5.20: Gráfica de $\dot{\theta}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$

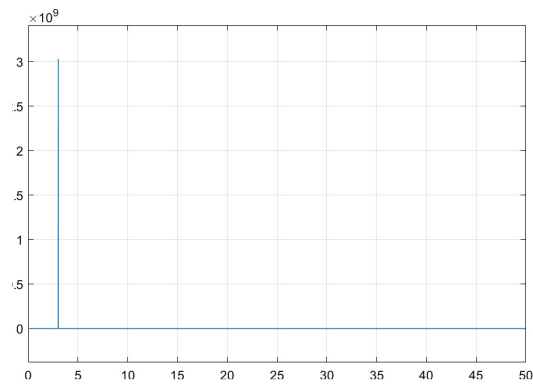


Figura 5.21: Gráfica de τ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$

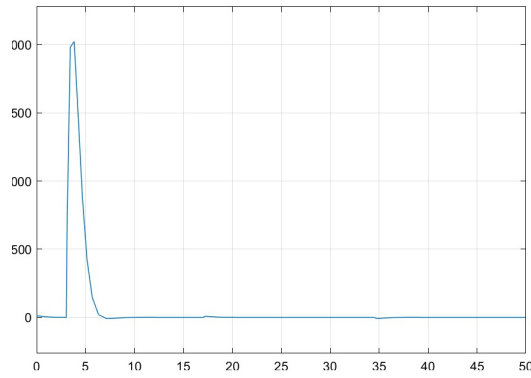


Figura 5.22: Gráfica de $\tilde{\theta}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$

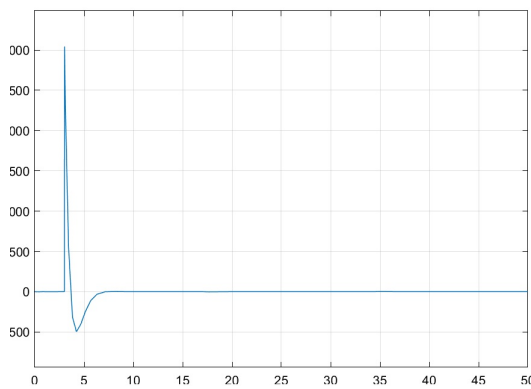


Figura 5.23: Gráfica de $\dot{\tilde{\theta}}$ con condiciones iniciales $\theta_0 = \pi$

Como observa en la figura 5.16 el vehículo se desestabiliza aproximadamente en $t = 15[s]$. Con la condición inicial del ángulo $\theta_0 = \pi/2$, la simulación no converge, lo que quiere decir que el sistema se estabiliza exponencialmente para todo $\theta_0 < \pi/2$, lo que se puede comprobar en la prueba de estabilidad de la nueva ley de control propuesta.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se muestran las conclusiones obtenidas a partir de los resultados obtenidos de la investigación realizada, posteriormente se muestra el trabajo futuro que se llevará a cabo sobre esta investigación.

6.1. Conclusiones

Para la realización de esta investigación, en primera instancia se buscó el estado del arte para tener conocimiento del desarrollo y las investigaciones que se tienen respecto a los vehículos aéreos no tripulados y sus respectivos controles implementados.

Posteriormente se analizaron las fuerzas aerodinámicas que actúan en el vehículo para, con base en eso, obtener el modelo matemático de la aeronave (la cinemática y la dinámica).

Ya con la obtención de fuerzas que actúan en la aeronave, se obtuvo el modelo matemático: la cinemática y la dinámica del vehículo, para posteriormente desarrollar la ley de control para el eje longitudinal de la aeronave en modo estacionario (PVTOL).

Se propuso una ley de control que estabilizara la dinámica longitudinal XVERT VTOL; en primera instancia se propuso una ley que al momento de estabilizarlo, generaba oscilaciones alrededor del origen, aunque se lograron disminuir, éstas no desaparecían. Esto último se pudo observar claramente en las gráficas de las simulaciones obtenidas mediante MATLAB, por lo que se buscó hacer mejoras en la ley de control.

Posteriormente se mejoró la ley de control y así se logró estabilizar la dinámica longitudinal del XVERT VTOL; para saber la región de atracción de dicha ley de control, se realizó la demostración de estabilidad de ésta, por lo que se comprobó que efectivamente la estabilidad es exponencial dentro de la región especificada.

Al realizar las simulaciones mediante MATLAB Simulink, se pudo observar como con diferentes condiciones iniciales, este sistema converge al origen. También se obtuvieron las gráficas para cuando el sistema se desestabiliza; entonces se concluyó que para cualquiera de las condiciones siempre y cuando $\theta_0 < \pi/2$ el sistema se va a estabilizar.

Para finalizar, se concluye que los objetivos planteados para esta investigación se cumplieron, se comprueba la hipótesis planteada teóricamente, para un futuro poder plantear y comprobar una nueva hipótesis donde esta investigación se pueda implementar de manera práctica.

6.2. Trabajo futuro

Para continuar con este trabajo, se recomienda que estas leyes puedan ser implementadas en la plataforma comercial XVERT VTOL con el fin de observar el comportamiento real del vehículo y poderlo comparar con las simulaciones obtenidas.

A partir de que se observe un funcionamiento correcto en la aeronave, se continuará con las dinámicas restantes de la aeronave y también con el análisis de transición de vuelo vertical a horizontal, tomando en cuenta el modelo matemático de la aeronave y realizar las simulaciones respectivas para que posteriormente esto pueda ser establecido.

Posteriormente ya englobando los análisis para las diferentes etapas de vuelo del XVERT VTOL, se implementará el control completo de la aeronave y se comparará con las simulaciones obtenidas. Con base en esto último se obtendrán las conclusiones acerca del comportamiento real de la aeronave.

ApéndiceA

Estabilidad

A.1. Estabilidad asintótica

A.1.1. Teorema 1

Sea $f(x)$ una función localmente *Lipschitz* en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, que contiene al origen, y $f(0) = 0$. Sea $V(x)$ una función continuamente diferenciable definida sobre D tal que

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \forall x \in D \text{ con } x \neq 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in D \quad (\text{A.2})$$

Entonces, el origen es un punto de equilibrio estable de $\dot{x} = f(x)$. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \forall x \in D \text{ con } x \neq 0 \quad (\text{A.3})$$

el origen es asintóticamente estable. Además, si $D = \mathbb{R}^n$, (A.1) y (A.2) se asume para todo $x \neq 0$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (\text{A.4})$$

entonces el origen es globalmente asintóticamente estable.

A.1.2. Prueba

Dado $\epsilon > 0$, se elige un $r \in (0, \epsilon)$ tal que $B_r = \{\|x\| \leq r\} \subset D$. Let $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$. De (A.1), $\alpha > 0$. Se toma $\beta \in (0, \alpha)$ y sea

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r | V(x) \leq \beta\}$$

Entonces, Ω_β , se encuentra en el interior de B_r (Figura ??). El conjunto Ω_β tiene la propiedad de que cada trayectoria comenzando en Ω_β para $t = 0$ permanece en Ω_β para todo $t \geq 0$. Esto se sigue desde (A.2) ya que

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0$$

Entonces,

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

y

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$$

Por lo tanto,

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \epsilon, \forall r \geq 0$$

que muestra que el origen es estable. Ahora se asume que (A.3) lo contiene. Para demostrar estabilidad asintótica se necesita demostrar que $x(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, que, para cada $a > 0$, existe un $T > 0$ tal que $\|x(t)\| < a$, para todo $t > T$. Con base en los argumentos anteriores, se sabe que para cada $a > 0$, se elige un $b > 0$ tal que $\Omega \subset B_a$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $V(x(t)) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Ya que $V(x(t))$ se decrementa monótonamente y está restringida en cero por debajo,

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0 \text{ conforme } t \rightarrow \infty$$

Se demostró que $c = 0$ mediante contradicción. Supóngase que $c > 0$. Por la continuidad de $V(x)$, existe un $d > 0$ tal que $B_d \subset \Omega_c$. El límite $V(x(t)) \rightarrow c > 0$ implica que la trayectoria $x(t)$ yace fuera de la bola B_d para todo $t \geq 0$. Sea $-\gamma = \max_d \leq \|x\| \leq r \dot{V}(x)$, que existe debido a que la función $\dot{V}(x)$ tiene un máximo a través del conjunto compacto $\{d \leq \|x\| \leq r\}$. Mediante (A.3), $-\gamma < 0$ se tiene que

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Ya que la parte derecha eventualmente será negativa, la desigualdad contradice la asunción de que $c > 0$. Entonces, el origen es asintóticamente estable. Para demostrar estabilidad asintótica global, nótese que la condición (A.4) implica que el conjunto $\Omega = \{V(x) \leq c\}$ es compacto para cualquier $c > 0$. Esto es porque para cada $c > 0$, hay un $r > 0$ tal que $V(x) > c$ siempre que $\|x\| > r$. Así, $\Omega_c \subset B_r$. De los argumentos precedentes, es claro que todas las soluciones que comienzan en Ω_c , van a converger al origen. Desde cualquier punto $p \in \mathbb{R}^n$, se puede elegir un $c = V(p)$, se puede concluir que el origen es globalmente asintóticamente estable.

A.2. Estabilidad exponencial

A.2.1. Teorema 2

Sea $f(x)$ una función localmente Lipschitz definida sobre el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, que contiene al origen, y $f(0) = 0$. Sea $V(x)$ una función continuamente diferenciable definida sobre D tal que

$$k_1 \|x\|^a \leq V(x) \leq k_2 \|x\|^a \tag{A.5}$$

$$\dot{V}(x) \leq -k_3 \|x\|^a \tag{A.6}$$

para todo $x \in D$, donde k_1, k_2, k_3 , y a son constantes positivas. Entonces, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable de $\dot{x} = f(x)$. Si estas asunciones se mantienen globalmente, entonces el origen es globalmente exponencialmente estable.

A.2.2. Prueba

Se elige un $c > 0$ suficientemente pequeño tal que $\{k_1 \|x\|^a \leq c\} \subset D$. Entonces,

$$\Omega_c = \{V(x) \leq c\} \subset \{k_1 \|x\|^a \leq c\} \subset D$$

ya que $V(x) \leq c \Rightarrow k_1 \|x\|^a \leq c$ por (A.5). Por lo tanto, Ω_c es compacto y, de (A.6), positivamente invariante. Todas las trayectorias que empiezan en Ω_c satisfacen

$$\dot{V} \leq -\frac{k_3}{k_2} V$$

Por separación de variables e integración, se obtiene

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-(k_3/k_2)t}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \left[\frac{V(x(t))}{k_1} \right]^{1/a} \leq \left[\frac{V(x(0))e^{-(k_3/k_2)t}}{k_1} \right]^{1/a} \\ &\leq \left[\frac{k_2 \|x(0)\|^a e^{-(k_3/k_2)t}}{k_1} \right]^{1/a} = \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{1/a} e^{-\gamma t} \|x(0)\| \end{aligned}$$

donde $\gamma = k_3/(k_2 a)$, que muestra que el origen es exponencialmente estable. Si todas estas asunciones se mantienen globalmente, c puede ser elegida arbitrariamente grande y la inecuación mantiene para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Bibliografía

- [1] Khurana, K.C. (2009). *Aviation Management: Global Perspectives*, Global India Publications, p. 133.
- [2] “Eyes of the Army(link is external)” U.S. Army Roadmap for UAS 2010-2035.
- [3] Rumerman, Judy. (2003). *Early Helicopter Technology*. Archived 20 February 2014 at the Wayback Machine Centennial of Flight Commission.
- [4] Leishman, J. Gordon (2006). *Principles of Helicopter Aerodynamics*. Cambridge University Press. p. 8.
- [5] Allen, Francis J. (2007). *Bolt Upright: Convair’s and Lockheed’s VTOL fighters*. Air Enthusiast (Key Publishing) Volume 127, pp. 13–20
- [6] ”Technical” página en harrier.org.uk website, visto el 12 de Diciembre 2020
- [7] ”Most Comprehensive Website on Rocket Belts and Jet Belts”, visto el 12 de Diciembre de 2020
- [8] INEGI (2014), *El uso de vehículos aéreos no tripulados en las tareas geoespaciales*, Boletín de prensa (vol. 14).
- [9] Ghamry, Khaled & Zhang, Youmin. (2015). *Formation control of multiple quadrotors based on leader-follower method*. 2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2015. 1037-1042. 10.1109/ICUAS.2015.7152394.
- [10] Ortiz-Torres, G. & Castillo, Pedro & Sorcia-Vázquez, Felipe & Rumbo Morales, Jesse & Brizuela Mendoza, Jorge Aurelio & De la Cruz, Javier & Martmnez-Garcia, Mario. (2020). *Fault Estimation and Fault Tolerant Control Strategies Applied to VTOL Aerial Vehicles With Soft and Aggressive Actuator Faults*. IEEE Access. 8. 1-1. 10.1109/ACCESS.2019.2963693.
- [11] Benson, T. (2020). *Forces at Liftoff*. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/VirtualAero/BottleRocket/airplane/rktlo.html>
- [12] Etkin, B. & Reid, L.D. (1996). *Dynamics of Flight: Stability and Control*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- [13] Zhao, H. W. (2009) *Development of a Dynamic Model of a Ducted Fan VTOL UAV*. Australia: RMIT University.

- [14] Chen, H., Wang, X. M., & Li, Y. (Noviembre de 2019). A survey of autonomous control for UAV. En *2009 International Conference on Artificial Intelligence and Computational Intelligence*. (Vol. 2, pp. 267-271). IEEE.
- [15] Grossman, S. I. (2008). *Álgebra Lineal* (6a. ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.
- [16] Khalil, H. K. (2017). *Nonlinear Control*. England: Pearson Education Limited.
- [17] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. England: Pearson Education Limited.
- [18] Consolini, L., Maggiore, M., Nielsen, C., & Tosques, M. (2010). Path following for the PVTOL aircraft. *Automatica*, 46(8), 1284-1296.
- [19] Lozano, R., Castillo, P., & Dzul, A. (2004). Global stabilization of the PVTOL: real-time application to a mini-aircraft. *International Journal of Control*, 77(8), 735-740.
- [20] Lin, F., Zhang, W., & Brandt, R. D. (1999). Robust hovering control of a PVTOL aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3), 343-351.
- [21] Gandolfo, D., Rosales, C., Patiño, D., Scaglia, G., & Jordan, M. (2014). Trajectory tracking control of a pvtol aircraft based on linear algebra theory. *Asian Journal of Control*, 16(6), 1849-1858.
- [22] Roy, R., Islam, M., Sadman, N., Mahmud, M. A. P., Gupta, K. D., & Ahsan, M. M. (2021). A Review on Comparative Remarks, Performance Evaluation and Improvement Strategies of Quadrotor Controllers. *Technologies*, 9(2), 37.
- [23] Moulay, E., Léchappé V., Bernuau E., & Plestan F. (2021). Robust fixed-time stability: application to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 1-7
- [24] Nguyen, H. P., De Mira, J., Bonnet S., & Charar A. (8-10 de octubre de 2014). Non-linear control of the PVTOL aircraft by numerical inversion of its behavioral model. En *IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*. IEEE Multi-conference on Systems and Control, Antibes, Francia.
- [25] Zavala-Rio, A., Fantoni, I., & Lozano, R. (2003). Global stabilization of a PVTOL aircraft model with bounded inputs. *International Journal of Control*, 76(18), 1833-1844
- [26] Pucci, D., Hamel, T., Morin, P., & Samson, C. (Diciembre 2011). Nonlinear control of PVTOL vehicles subjected to drag and lift. En *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference* (pp. 6177-6183). IEEE.
- [27] Fantoni, I., Lozano, R., & Castillo, P. (2002). A simple stabilization algorithm for the PVTOL aircraft. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 7-11.
- [28] Tayebi, A., & McGilvray, S. (2006). Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on control systems technology*, 14(3), 562-571.
- [29] Olfati-Saber, R. (2002). Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling. *IEEE transactions on Automatic Control*, 47(11), 1949-1952.
- [30] Erginer, B., & Altug, E. (2007, June). Modeling and PD control of a quadrotor VTOL vehicle. In *2007 IEEE Intelligent Vehicles Symposium* (pp. 894-899). IEEE.