



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN MECATRÓNICA

Control Robusto de Sistemas Sub-actuados.

Tesis que presenta el
Ing. Jurgén Herrmann Mendoza

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

En la especialidad de
Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis:
Dr. Hebertt José Sira Ramírez

Dedicatoria

¡Qué este trabajo honre y glorifique a Dios!

A mis padres Juan Herrmann Tapia, Catalina Mendoza Rangel y hermana Kitzia Herrmann Mendoza por su constante apoyo hacia mi a pesar de ser un hombre con muchos defectos. ¡Qué este trabajo también les honre a ellos!

A quienes después de mi vienen, qué este trabajo ilustre su formación de la mejor manera.

Agradecimientos

Gracias a Dios por quien paz, aliento y resolución en momentos difíciles no hicieron falta, más aún por el buen desarrollo de este trabajo.

Gracias a mis padres y hermana por sus buenos consejos y constante ánimo para continuar pese a momentos difíciles.

Gracias a la generación de ingenieros con quienes me formé en maestría. Una generación muy unida.

Gracias al Ing. Diego García Olivares por su amistad, por su enseñanza en asignaturas de poca experiencia para mi y por su constante motivación para adentrarme en el ejercicio físico.

Gracias al Ing. Gabriel Cubas Perfecto por su amistad, por su disposición de ayuda y por su buena voluntad hacia mi.

Gracias al Dr. Hebertt J. Sira Ramírez en quién me apoyé fuertemente para concluir ésta tesis, gracias por haberme aceptado como estudiante y por permitirme conocer parte de su trabajo.

Gracias al M. en C. Mario Andrés Aguilar Orduña por su constante ayuda y ánimo en búsqueda de buenos resultados y al Ing. Saulo López Fregoso por su apoyo y motivación.

Gracias a los doctores y al personal en general de la Sección de Mecatrónica del Departamento de Ingeniería Eléctrica por su gran trabajo y dedicación en la formación de nuevos estudiantes.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme otorgado una beca para poder realizar mis estudios de maestría en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., (CINVESTAV).

Resumen

Palabras Clave: Sistemas planos, Planitud Diferencial, Salida plana, Rechazo Activo de Perturbaciones (RAP), Observador de Estado Extendido (OEE), Sistemas Sub-actuados, Algoritmos de Consenso.

En el presente trabajo se abordan temas de control robusto, observadores de estado, teoría de grafos y algoritmos de consenso con el deseo de acometer una aplicación a los sistemas sub-actuados mecánicos. El desarrollo propuesto se realiza con un enfoque de planitud diferencial a través de una salida especial llamada plana, que junto a sus derivadas y la combinación algebraica de éstas, permiten expresar los estados, entradas y salidas del sistema. Aunados al reto de aplicar control robusto a sistemas mecánicos sub-actuados se busca resolver problemas de sincronización entre dichos sistemas por medio de algoritmos de consenso de alto orden, dando lugar a atender problemáticas de formación y seguimiento en esquemas líder-seguidor.

A lo largo del documento se presentarán distintos ejemplos de sistemas mecánicos sub-actuados. Los sistemas tratados se linealizan alrededor de sus puntos de equilibrio inestables; esto es directamente desde la forma lagrangiana con el objeto de encontrar la planitud en el sistema linealizado y diseñar una política de control para dicho sistema lineal. Se muestra como los sistemas tratados pueden ser controlados bajo fenómenos no modelados que perturban el comportamiento deseado del sistema por medio del esquema de control robusto llamado Rechazo Activo de Perturbaciones (RAP) al hacer uso de Observadores de Estado Extendido (OEE). Los fenómenos o efectos no modelados los llamaremos, genéricamente, perturbaciones y su naturaleza puede ser exógena o endógena.

Finalmente, se abordan algoritmos de consenso de orden superior para lograr objetivos de formación y seguimiento con un análisis en términos de sistemas lineales y además planos.

Abstract

Keywords: Flat systems, Differential flatness, Flat output, Active Disturbance Rejection (ADRC), Extended State Observer (ESO), Underactuated Systems, Consensus algorithms.

In the present work topics of robust control, state observers, graph theory and consensus algorithms are addressed with the desire to undertake an application to under-actuated mechanical systems. The proposed development is carried out with a differential flatness approach through a special output called flat, which together with its derivatives and the algebraic combination of these, allow the states, inputs and outputs of the system to be expressed. In addition to the challenge of applying robust control to underactuated mechanical systems, it seeks to solve synchronization problems between them by means of high-order consensus algorithms, giving rise to addressing formation problems, tracking in leader-follower schemes.

Throughout the document different examples of under-actuated mechanical systems will be presented. The treated systems are linearized around their unstable equilibrium points; This is directly from the Lagrangian form in order to find the flatness in the linearized system and to design a control policy for said linear system. It is shown how the treated systems can be controlled under non-modeled phenomena that disturb the desired behavior of the system by means of the robust control scheme called Active Rejection of Disturbances (ADRC) coupled with Extended State Observers (ESO). We will call the non-modeled phenomena or effects, generically, disturbances and their nature can be exogenous or endogenous.

Finally, higher order consensus algorithms are addressed to achieve formation and tracking objectives with an analysis in terms of linear and also flat systems.

Mención especial

Un reconocimiento especial al cuerpo de médicos y autoridades que actúan debidamente, día a día, para enfrentar la pandemia mundial por SARS-CoV-2.

Un sentido pésame para las personas que han perdido seres queridos, trabajo o incluso esperanza a causa de la pandemia. Qué Dios traiga a sus corazones aliento y paz y recordemos que no solo de pan vive el hombre sino también de la palabra de Dios.

Índice general

Resumen	vii
Abstract	ix
Mención especial	xi
Índice de figuras	xvii
Índice de tablas	xix
1 Introducción	1
1.1 Estado del arte	3
1.2 Planteamiento del problema	6
1.3 Preguntas de investigación	6
1.4 Justificación	6
1.5 Objetivos	7
1.5.1 Objetivo General	7
1.5.2 Objetivos particulares	7
1.6 Alcances	8
1.7 Estructura del documento	8
1.8 Resumen del capítulo	9
2 Marco Teórico	11
2.1 Linealización tangencial aproximada	11
2.2 Linealización tangencial aproximada a partir de formas lagrangianas	12
2.3 Planitud diferencial.	14
2.4 Sistemas lineales	15
2.5 Rechazo activo de perturbaciones ADRC.	21
2.5.1 Observador de estado extendido (ESO)	22
2.6 Consenso de sistemas multiagente	25
2.6.1 Teoría de Grafos	25
2.6.2 Algoritmos de consenso	26
2.6.3 Esquema líder-seguidor de orden superior	28
2.7 Resumen del capítulo	30

3	Modelado vía Euler-Lagrange	31
3.1	Péndulo invertido sobre carro.	31
3.1.1	Modelo matemático del péndulo invertido sobre un carro	32
3.1.2	Linealización tangencial aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable.	33
3.1.3	Obtención de la salida plana para el sistema de péndulo invertido sobre un carro	33
3.2	Doble péndulo simple invertido sobre carro.	34
3.2.1	Modelo matemático del doble péndulo invertido sobre un carro	34
3.2.2	Linealización tangencial aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable.	36
3.2.3	Obtención de la salida plana para el sistema de doble péndulo invertido sobre un carro	37
3.3	Triple péndulo invertido sobre carro.	37
3.3.1	Modelo matemático del triple péndulo invertido sobre un carro	37
3.3.2	Linealización tangencial aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable.	40
3.3.3	Obtención de la salida plana para el sistema de triple péndulo invertido sobre un carro	41
3.4	Resumen del capítulo	42
4	Parametrización diferencial	43
4.1	Parametrización diferencial del sistema: Péndulo invertido sobre un carro	43
4.2	Parametrización diferencial del sistema: Doble péndulo invertido sobre un carro	44
4.3	Parametrización diferencial del sistema: Triple péndulo invertido sobre un carro	45
4.4	Resumen del capítulo	47
5	Diseño de ADRC a partir de observadores de estado extendido (ESO)	49
5.0.1	Esquema ADRC para un sistema de cuarto orden	49
5.0.2	Simulación de esquema ADRC	51
5.1	Esquema ADRC para un sistema de sexto orden	54
5.1.1	Simulación de esquema ADRC	56
5.2	ADRC con observadores en cascada de sexto orden	58
5.2.1	Simulaciones de esquema ADRC	60
5.3	ADRC con observadores en cascada de octavo orden	63
5.3.1	Simulación esquema ADRC	65
5.4	Resumen del capítulo	68
6	Consenso de sistemas sub-actuados	69
6.1	Formación	69
6.1.1	Formación en el eje horizontal: dos agentes	69
6.1.2	Simulaciones: Formación de dos agentes de cuarto orden	70
6.1.3	Simulación: Formación de dos agentes de sexto orden	74

6.1.4	Simulación: Formación de dos agentes de octavo orden	77
6.2	Resumen del capítulo	79
7	Plataforma Virtual: Consenso Robusto con ADRC basado en ESO	81
7.1	Modelo CAD	81
7.2	Componentes mecánicos	84
7.2.1	Mesa riel-cremallera	84
7.2.2	Cuerpo móvil	86
7.2.3	Péndulos	86
7.3	Formación y Seguimiento	87
7.4	Resumen del capítulo	96
8	Conclusiones	97
8.1	Conclusiones	97
8.2	Trabajo a futuro	98
	Bibliography	99
	Apéndices	
	Apéndice	105

Índice de figuras

2.1	Esquema de control basado en rechazo activo de perturbaciones.	21
2.2	Dibujo representativo de consenso no dirigido y dirigido entre dos agentes.	25
2.3	Esquema líder-seguidor con z agentes seguidores	28
3.1	Dibujo representativo del sistema péndulo invertido sobre un carro.	31
3.2	Dibujo representativo del sistema doble péndulo invertido sobre un carro.	34
3.3	Dibujo representativo del sistema triple péndulo invertido sobre un carro.	38
4.1	Planta en representación de integración pura de cuarto orden.	44
4.2	Planta en representación de integración pura de sexto orden.	45
4.3	Planta en representación de integración pura de octavo orden.	47
5.1	Salida plana, perturbación estimada y señal de control; estabilización de x y θ a cero.	52
5.2	Salida plana, perturbación estimada y señal de control; estabilización de x y θ a cero.	53
5.3	Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , ξ estimada, salida plana y entrada de control u	57
5.4	Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , ξ estimada, salida plana y entrada de control u	58
5.5	Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , ξ estimada, salida plana y entrada de control u	62
5.6	Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , ξ estimada, salida plana y entrada de control u	63
5.7	Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , θ_3 , salida plana, y entrada de control u	66
5.8	Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , θ_3 , salida plana, y entrada de control u	67
6.1	Grafo no dirigido entre dos agentes.	69
6.2	Formación entre dos sistemas de péndulo invertido sobre un carro; posiciones en el eje x	71
6.3	Consenso en formación de los estados del sistema, las salidas planas y sus controles, respectivamente.	75
6.4	Formación entre dos sistemas de triple péndulo invertido sobre un carro; consenso en variables de posición, salidas planas y controles	78
7.1	Plataforma doble péndulo invertido sobre un carro, modelo CAD.	82
7.2	Plataforma doble péndulo invertido sobre un carro, vista trasera del modelo CAD enfocada en el cuerpo móvil.	83
7.3	Mesa Riel-Cremallera modelo CAD.	84
7.4	Mesa de acero modelo CAD.	85
7.5	Algunas dimensiones útiles en el modelo de la mesa.	86

7.6	Péndulo; modelo CAD en vista trasera.	87
7.7	Acotaciones de barrenos en péndulo.	87
7.8	Dibujo representativo de topología de información en el esquema líder-2 seguidores	89
7.9	Relación por consenso entre dos modelos Entrada-Salida de sexto orden.. . . .	90
7.10	Implementación ADRC-ESO en el esquema Líder-Seguidor.	92
7.11	Trayectoria de referencia.	93
7.12	Sincronización de las variables de estado bajo efectos de perturbación. Formación en x	94
7.13	Sincronización de las variables ${}^i\psi$ y atenuación de ${}^i\xi$	95

Índice de tablas

5.1	Parámetros utilizados en el sistema péndulo simple invertido sobre un carro.	51
5.2	Parámetros utilizados en el sistemas doble péndulo invertido sobre un carro.	56
5.3	Parámetros utilizados en observadores y ley de control del sistema doble péndulo invertido sobre un carro.	61
5.4	Parámetros utilizados en el sistema triple péndulo invertido sobre un carro, ley de control y condiciones iniciales.	65
5.5	Parámetros utilizados en observadores del sistema triple péndulo invertido sobre un carro.	65
6.1	Datos del algoritmo de consenso basado en ESO-ADRC.	71
6.2	Datos utilizados en el sistemas doble péndulo invertido sobre un carro, condiciones iniciales y parámetro p	74
6.3	Datos utilizados en el algoritmo de consenso basado en ESO-ADRC para el sistema doble péndulo invertido sobre un carro.	75
6.4	Parámetros utilizados en el sistemas triple péndulo invertido sobre un carro, ley de control y condiciones iniciales.	77
6.5	Parámetros utilizados en observadores del sistema triple péndulo invertido sobre un carro.	77
7.1	Tipos de tornillos y cantidad en Mesa Riel-Cremallera.	85
7.2	Especificaciones de piñón.	85
7.3	Especificaciones de cremallera.	85

Capítulo 1

Introducción

El estudio de sistemas sub-actuados a lo largo de las últimas dos décadas ha incrementado, esto debido a la posibilidad de extraer utilidad a partir de las propiedades de los mismos como una sub-clase de sistemas completamente actuados. Entendemos a un sistema sub-actuado como aquel que tiene menos actuadores que grados de libertad (GDL), en términos de sistemas mecánicos, GDL es el número de variables independientes que se necesitan para definir de manera única la posición de los elementos inerciales de masa que constituyen el sistema en el espacio en todo instante de tiempo. El interés en los sistemas sub-actuados puede deberse al deseo de aumentar la seguridad o disminuir el riesgo cuando un actuador de un sistema completamente actuado falle, así los GDL afectados recaen en los actuadores activos por medio de algoritmos de control para sistemas sub-actuados o bien desde otro punto de vista un menor uso de actuadores que GDL representa una ventaja al disminuir los costos y pesos de tales sistemas, pudiendo incluso remover actuadores si el algoritmo de control propuesto permite llegar a la meta que habría de buscar el sistema completamente actuado.

Un ejemplo de un sistema sub-actuado de dos GDL es el llamado bola y viga, una viga con unión de revoluta, en el centro, a un eje; el cual transmite un torque debido a un motor de corriente continua, encima de la viga se halla una bola que se mueve de acuerdo al efecto de gravedad del ambiente y la orientación de la viga. El objetivo deseado es transferir la bola de una posición inicial a una final sobre la viga en un tiempo pre-definido. Como ha sido expresado en el sistema bola y viga no hay control directo en la bola sino en la viga por lo que la posición deseada de la bola sobre la viga es inducida a través del control que se encuentra en la viga al orientar ésta misma.

El poder controlar sistemas sub-actuados puede llegar a ser bastante complicado por ello se proponen distintos enfoques para abordar el esquema, con la intención de resolver problemas como estabilización o seguimiento.

En teoría de control de sistemas lineales es posible implementar algoritmos de control de una manera más sencilla sin embargo no todos los sistemas son controlables cuando el problema se aborda desde una perspectiva lineal. El análisis lineal permite una aproximación precisa al modelo real dentro de una región cercana a los puntos de equilibrio

del sistema mientras que el enfoque no lineal es abordado, usualmente, en base al álgebra de Lie donde el sistema no lineal es transformado a uno lineal por medio de un difeomorfismo y una transformación en la retroalimentación, véase [10], de igual manera es posible controlar los sistemas por medio de modos deslizantes, los cuales forzan al sistema en conjunto con una retroalimentación discontinua a deslizar a lo largo de una superficie pre-establecida; modos deslizantes propone un esquema robusto de control al depender únicamente de la conmutación sobre la superficie, volviéndose insensible a las perturbaciones externas, véase [11].

Existen más algoritmos de control no lineal, mencionando tres de ellos, el primero es por medio de pasividad la cual, usualmente, busca estabilizar sistemas no lineales complejos a través de una función de almacenamiento de energía, véase [42] el segundo es conocido como *backstepping*, otro algoritmo basado en energía o propiamente dicho, basado en función de Lyapunov, el cual busca formular el sistema a través de m sub-sistemas en cascada con la finalidad de que el resultado del primer sub-sistema sea la entrada del sub-secuente, véase [51], y el tercero, tratado en ésta tesis, es el algoritmo de control basado en rechazo activo de perturbaciones ADRC, por sus siglas en inglés, *Active Disturbance Rejection Control*, el cual contempla en la retroalimentación de estado la adición de un término que alude a las perturbaciones bajo las cuales se encuentre sometido el sistema, la perturbación es estimada a través de un observador de estado extendido ESO, por sus siglas en inglés, *Extended State Observer*, al poder representar al sistema matemáticamente en un sistema desacoplado de integración pura de orden m por medio de una salida especial llamada plana.

En sistemas de control existen más objetivos a perseguir y no solo atender los problemas de estabilización y seguimiento como el, igualmente tratado en esta tesis, trabajo cooperativo entre sistemas el cual busca inter-relacionar un número z de sistemas que comparten información para realizar funciones; esto es un conjunto de sistemas que trabajen para lograr un bien común. Supóngase que un grupo de estudiantes de maestría que trabajan en equipo para la realización de un proyecto requieren el uso de un laboratorio del centro de investigación donde ellos estudian, para lograr terminar el proyecto es necesario que ellos se reúnan, ello requiere definir el día y la hora en la que podrían todos trabajar, de otra manera se generaría incertidumbre sobre el tiempo en el que habrían de presentarse todos, la solución del problema es que los estudiantes definan los tiempos en los que podrían asistir de acuerdo a sus agendas personales, llegando a un acuerdo donde se definiría el tiempo en el que podrán presentarse a las instalaciones del centro de investigación. En el ejemplo de los estudiantes la variable de coordinación es el tiempo, los estudiantes los agentes que deben colaborar para terminar el proyecto, sin embargo una vez los estudiantes salgan de sus casas para llegar en el tiempo acordado es necesario que entre ellos se mantenga la comunicación de manera que puedan coordinarse y mantener el objetivo de reunirse en el tiempo establecido.

Con el ejemplo de la reunión de estudiantes que asisten a una laboratorio se trata de definir el consenso el cuál puede ser expresado como un conjunto de entidades o agentes que llegan a un acuerdo.

Cuando múltiples agentes aceptan una variable de interés, como el tiempo en el ejemplo anterior, se dice que ellos han alcanzado un estado de consenso, para alcanzarlo la comunicación debe ser de tal manera que los agentes tengan información de, posiblemente, un sub-conjunto de los restantes, dicho esquema de comunicación es conocido como estado de información y permite conocer el comportamiento de los agentes de acuerdo a las condiciones iniciales de cada uno de ellos y la meta establecida. De forma natural se pueden hallar comportamientos similares en los bancos de peces o parvadas de aves los cuales se agrupan para evitar depredadores o mantener formaciones. Estos comportamientos recaen en el término de sincronización el cual es hacer coincidir acciones de entidades autónomas en un mismo tiempo.

En literatura se pueden encontrar muchos ejemplos de control a sistemas sub-actuados como en el caso de [23] en el cual se abordan ejemplos para controlar buques, ejemplos de vehiculos terrestres no tripulados como en [17] e incluso ejemplos varios de sistemas mecánicos sub-actuados en el sentido de Lyapunov como en [18].

Se puede hallar más información de control de sistemas no lineales en [1, 38, 41, 49] y de igual manera para teoría enfocada a sistemas cooperativos como la mostrada en [4] y [47].

1.1 Estado del arte

Múltiples trabajos desarrollados por investigadores han tenido buenos resultados, en ellos se han evaluado los controladores sobre plataformas experimentales, abordando objetivos de estabilización, seguimiento e incluso control cooperativo en sistemas no lineales sub-actuados.

En el artículo [34] se muestra un seguimiento robusto del sistema sub-actuado de masas interconectadas por un muelle entre ellas y dos muelles más anclados a un marco fijo a través del esquema de control ADRC. La acción de control es sobre una de las masas y el objetivo planteado es realizar un seguimiento robusto tal que tal que la segunda masa sea quien realice un seguimiento sinusoidal.

En el artículo [35] se presenta la plataforma de un sistema torsional de 3 GDL compuesto por un arreglo vertical de 3 discos inerciales unidos entre sí por 2 flechas torsionales, se desprecia la fricción al utilizar baleros/rodamientos antifricción. La posición angular del disco inferior es actuada por un servo motor el cual es acoplado por medio de bandas y poleas. La plataforma tiene como ojetivo llevar a cabo un seguimiento de trayectoria en el disco superior por medio de un enfoque ADRC basado en ESO.

Se ha realizado un análisis en el sistema de [27] sobre el sistema sub-actuado mostrado en [35] donde se han evaluado los resultados del esquema ADRC y el de PID. Usando observadores en cascada que estimen las derivadas impares del sistema en términos de la

salida plana y sus derivadas en conjunto con un observador que estima la perturbación y hasta dos veces la derivada de ésta última.

En literatura se hallan bastantes trabajos relacionados a sistemas sub-actuados y en los últimos años también se ha despertado interés en el enfoque ADRC como en el problema de estabilización al modelo dinámico del *Inertia Wheel Pendulum* mostrado en [33], a través de la salida plana representada por una combinación lineal del vector de estado generalizado de posición y por medio del control ADRC se pretende estabilizar el péndulo con respecto al eje vertical al actuar sobre él un disco inercial ubicado al extremo libre del péndulo.

Otro sistema no lineal sub-actuado es el mostrado en [30], donde se presenta el modelo del péndulo de Furuta, el cuál es provisto con una entrada de control y 2 GDL. Un brazo actuado que rota en el plano horizontal es unido a otro brazo que gira en el plano vertical y además perpendicular al plano sobre el cuál gira el brazo actuado. La linealización alrededor de un punto de equilibrio inestable permite obtener una salida plana, la cuál es físicamente medible. El objetivo puede expresarse en dos, el primero es estabilizar el péndulo con respecto a la vertical y el segundo es que el brazo horizontal realice un seguimiento de trayectoria, ambos casos expuestos frente a fenómenos de perturbación.

El sistema bola y viga presentado en [31] es un caso en el que no es posible linealizar por retroalimentación, por lo que se realiza una linealización tangencial exhibiendo que el sistema puede ser controlado dentro de una región cercana a sus puntos de equilibrio. El controlador propuesto es el conjunto de ESO-ADRC con estimaciones de las derivadas por medio de observadores en cascada resaltando que estos vuelven al diseño de bajo costo.

En el artículo [32] se presenta el sistema péndulo invertido sobre un carro cuyo caso es abordado desde la perspectiva ESO-ADRC, el sistema completamente plano a través de una linealización tangencial alrededor de un punto de equilibrio inestable. El objetivo es que el carro pueda seguir una trayectoria a pesar de las perturbaciones que puedan existir, además de mantener el péndulo hacia arriba.

En el artículo [28] se presenta la implementación de una ley de control por medio de estrategias llamadas operador de barrido discreto y operador delta discreto, la estrategia de control es incorporada en los observadores de estado extendido y la planta, en la búsqueda de realizar un seguimiento de trayectoria para un servomecanismo de corriente directa.

Un esquema de control robusto para un manipulador de 2 GDL completamente actuado es el mostrado en el artículo [29] donde se busca realizar seguimiento de trayectoria sin necesidad de conocer las derivadas temporales de ésta misma. El problema es reformulado al definir el error de seguimiento, así por medio de observadores de estado extendido se estiman las derivadas temporales en términos del error.

En [50] se ha llevado a cabo la formación de N cuadrótores a través de un líder ba-

jo las siguientes asunciones:

- Cada cuadrirotor debe estar conectado con el líder pero no necesariamente tener una conexión directa con él.
- La red de conexión entre los cuadrirotos debe ser no dirigida o bidireccional. El cuadrirotor líder no se considera en el enunciado de ésta asunción debido a que este es virtual.
- El movimiento del líder debe ser independiente de los cuadrirotos.

con el propósito de volar en cualquier dirección (en el espacio) y mantener la formación guiados por el líder además de evadir colisiones entre ellos. La propuesta de solución es controlar cada cuadrirotor por medio de dos controles uno para el plano horizontal por medio de un modelo de cuarto orden y otro para la vertical con un modelo de segundo orden.

Otro desarrollo del esquema líder-seguidor en cuadrirotos es abordado en el artículo [6] donde uno de ellos es pre-cargado con un algoritmo de control que estima las ganancias para posteriormente distribuirlo a los demás cuadrirotos en una red de comunicación mixta. En el algoritmo pre-cargado las señales de entrada son rolada, cabeceo, tasa de cabeceo y la velocidad vertical. El objetivo es hacer seguimiento y mantener una formación estable.

En [25] se presenta el esquema líder-seguidor de cuadrirotos representados por modelos de dinámicas desacopladas a fin de controlar el movimiento en el plano XY así como el movimiento en Z y el de guiñada por medio de dos controles en conjunto con un observador. El objetivo buscado es que los N agentes realicen un seguimiento y mantener una formación por medio de una estrategia de control basada en observador.

En [19], se hace uso de modos deslizantes donde se busca que un grupo de agentes realice un seguimiento robusto manteniendo una formación pre-establecida con respecto al líder. La robustez es lograda al cancelar las perturbaciones afechadas al modelo de los cuadrirotos por medio del conjunto Observador-Modos Deslizantes.

Los autores presentan en [8] un algoritmo de control de formación para un esquema líder-seguidor de agentes (cuadrirotos). Los objetivos planteados establecen que los cuadrirotos deben seguir una trayectoria y mantener su formación en un tiempo finito.

El trabajo desarrollado por Efraín Hernández para lograr un consenso en formación y seguimiento a partir del esquema ADRC y GPIC, este último un control proporcional-integral generalizado, véase [3], donde se busca estabilizar los péndulos de agentes de cuarto orden representados por los sistemas sub-actuados grúa viajera y péndulo invertido sobre un carro. El objetivo yace en implementar una ley de control que permita el consenso en formación y seguimiento a un modelo de referencia.

1.2 Planteamiento del problema

Frente al desafío de trabajar con sistemas mecánicos sub-actuados se busca implementar algoritmos de consenso de manera que cada sistema sea visto como un agente a fin de generar una red de comunicación en la búsqueda de trabajos cooperativos como lo son formación y seguimiento en un esquema líder-seguidor robusto.

El problema puede dividirse en dos:

- Generar una estrategia de control robusta para cada sistema sub-actuado.
- Implementar algoritmos de consenso en una red multiagente

Por otra parte se toman en cuenta sistemas de orden superior en el enfoque ADRC, el cuál es una estrategia de alta ganancia sobre sistemas mecánicos sub-actuados que no son linealizables por una realimentación estática o dinámica. La linealización tangente permite aproximar el sistema no lineal por uno lineal alrededor de un punto de equilibrio exhibiendo la planitud del sistema en representación lineal.

1.3 Preguntas de investigación

- Sabiendo que el esquema ESO-ADRC es de alta ganancia. ¿Es posible disminuir la ganancia del controlador?
- Suponiendo que se tienen dos modelos de un mismo sistema, uno más aproximado que el otro. ¿La complejidad de la estrategia de control utilizada será la misma?
- Sabiendo que la mayoría de los sistemas sub-actuados son no diferencialmente planos. ¿La aproximación lineal de dichos sistemas es plana?
- ¿Es posible implementar una estrategia de control basada en ESO-ADRC al sistema triple péndulo invertido sobre un carro?
- ¿Cómo implementar algoritmos de consenso en los sistemas mecánicos sub-actuados de orden superior?
- Atendiendo los problemas de formación y seguimiento. ¿Es posible sincronizar dos sistemas mecánicos sub-actuados?

1.4 Justificación

Con la intención de responder las preguntas de investigación y además ahondar en el esquema de control ADRC se realizan ejemplos ilustrativos de sistemas mecánicos sub-actuados no lineales y no diferencialmente planos que pueden ser controlados a través de una linealización tangencial dentro de una región cercana a sus puntos de equilibrio inestables. El enfoque lineal da paso a tratar una señal de salida, que además es plana, si ésta

puede expresar diferencialmente a todas las variables del sistema incluyendo las variables de control por tanto el esquema ADRC se vuelve un candidato apto para establecer una estrategia de control a sistemas mecánicos sub-actuados.

La planitud diferencial permite re-estructurar la planta en otra de integración pura capaz de inducir el comportamiento deseado a la planta original si ésta es, propiamente, plana.

Tomando algunos sistemas sub-actuados y además planos bajo una configuración lineal apropiada se puede proporcionar robutez frente a fenómenos que generen incertidumbre en el funcionamiento de los mismos, con ayuda de observadores de orden extendido, ESO por sus siglas en inglés, es posible estimar perturbaciones si éstas generan un comportamiento inadecuado en los estados del sistema aunados al esquema ADRC el cual permite adherir en la ley de control un término que cancele la perturbación presente. Con esto se puede resaltar el hecho de poder controlar un sistema no lineal a través de una estrategia de control basada en una aproximación lineal de la planta o modelo.

Es por lo anterior que se pretende llevar a cabo estrategias de control en sistemas multi-agentes sub-actuados para evaluar el desempeño de la unión de dos esquemas de control como lo son ADRC y consenso.

1.5 Objetivos

Todo objetivo de ser real medible y alcanzable

1.5.1 Objetivo General

Diseñar, analizar y simular algoritmos de consenso basado en el esquema de control ADRC para llevar a cabo tareas de coordinación en formación y seguimiento de una referencia de z sistemas sub-actuados no lineales.

1.5.2 Objetivos particulares

- Modelar los sistemas mecánicos sub-actuados siguientes:
 - Doble péndulo invertido sobre un carro.
 - Triple péndulo invertido sobre un carro.
- Diseñar una ley de control para los sistemas del punto anterior basado en ADRC.
- Diseñar una estrategia de control para sistemas multiagentes compuestos por agentes sub-actuados de orden superior.
 - Doble péndulo invertido sobre un carro (formación y seguimiento).
 - Triple péndulo invertido sobre un carro (formación).
- Realizar las simulaciones de los resultados obtenidos.

1.6 Alcances

- Obtención de una aproximación lineal en base a formas lagrangianas de sistemas sub-actuados.
- Obtención de modelos de sistemas sub-actuados en su representación de integración pura.
- Obtención de estrategias de control para sistemas multiagentes usando esquemas ADRC aunado con algoritmos de consenso de orden superior.
- Simulación de las estrategias de control diseñadas.

1.7 Estructura del documento

El Capítulo 1 introduce conceptos de control en sistemas no lineales en general además de mostrar el estado del arte, el problema que se ha tomado, su justificación, los objetivos general y particulares del trabajo de investigación, los alcances planteados y la estructura del documento.

El Capítulo 2 muestra el desarrollo que permite linealizar formas lagrangianas, en seguida se da lugar a teoría detrás de los sistemas lineales diferencialmente planos, observadores de estado extendido y esquema ADRC, concluyendo con una extensión de teoría de grafos para aplicación en algoritmos de consenso.

El Capítulo 3 muestra los modelos dinámicos de los sistemas péndulo invertido sobre un carro, doble péndulo y triple péndulo invertidos sobre un carro a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange además de incluir para cada uno de los 3 sistemas su linealización tangencial aproximada a partir de sus lagrangianos, y el criterio de controlabilidad de Kalman así como la señal que permitirá controlar al sistema.

El Capítulo 4 exhibe la planitud de los sistemas péndulo invertido sobre un carro, doble péndulo y triple péndulo invertidos sobre un carro una vez obtenida su representación lineal y salida plana. Por medio de manipulaciones lícitas los sistemas son representados en términos de sus estados o bien en términos de las salidas planas y sus derivadas, según sea el sistema tratado.

En el Capítulo 5 se diseñan los observadores de estado para los sistemas sub-actuados previamente mencionados a partir de la su representación entrada-salida obtenidas en el Capítulo 4 además de diseñar observadores en cascada conocidas las derivadas de ésta. Simulaciones bajo condiciones iniciales son mostradas para los sistemas.

En el Capítulo 6 se muestran los resultados y análisis de validación para implementar consenso, una vez definidas las variables de estado de cada agente así como su relación por medio del grafo que constituye su topología de información. Simulaciones para agentes de

cuarto, sexto y octavo orden son mostradas bajo condiciones iniciales.

En el Capítulo 7 se explica de forma general los componentes de la plataforma virtual utilizada, así mismo se muestran por medio de diagramas y esquemas la implementación completa del esquema ADRC basado en consenso en líder-seguidores con el sistema sub-actuado doble péndulo invertido sobre un carro.

1.8 Resumen del capítulo

En el Capítulo 1 se han presentado una breve introducción para marcar el rumbo del documento de tesis, el estado del arte, el cuál reúne conceptos e información de esquemas de control robusto y algoritmos de consenso de distintos trabajos, se presenta el planteamiento del problema, preguntas de investigación, justificación del trabajo, objetivos general y particulares, alcances y la estructura del documento. En general se han mostrado las intenciones por las cuales se desea trabajar con esquemas ADRC aplicados en sistemas de sub-actuados además de establecer un estado de consenso entre un número z de agentes.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Linealización tangencial aproximada

Consideremos el sistema no lineal de la forma descrita por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde $x(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ representa los estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control y $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema. Sea $(x_e(u_e), u_e)$ un punto de (2.1) cuando $\dot{x} = 0$, esto es, $f(x_e(u_e), u_e) = 0$ y $h(x_e(u_e)) = y_e$.

Supondremos que el sistema inicia operando en un punto de equilibrio, véase [13] donde:

$$x(t_0) = x_0 = x_e \quad u(t_0) = u_e \quad y(t_0) = y_e \quad (2.2)$$

y además, definimos las variables incrementales x_δ , y_δ y u_δ suficientemente pequeñas y cercanas a x_e , u_e y y_e tal que:

$$x(t) = x_e + x_\delta(t) \quad u(t) = u_e + u_\delta(t) \quad y(t) = y_e + y_\delta(t) \quad (2.3)$$

La solución al sistema 2.1 es representada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau \\ y(t) &= h(x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Al estar operando en el punto de equilibrio el sistema de ecuaciones (2.6) es definido en el instante de tiempo t_0 como:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_e + x_{0\delta} \\ y(t_0) &= h(x_e + x_{0\delta}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por medio de (2.3) el sistema (2.6) es representado en términos incrementales para $t \geq t_0$ como:

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x_{0\delta} + \int_{t_0}^t f(x_e + x_\delta(\tau), u_e + u_\delta(\tau)) d\tau \\ y_\delta(t) &= h(x_{0\delta} + \int_{t_0}^t f(x_e + x_\delta(\tau), u_e + u_\delta(\tau)) d\tau) - h(x_e) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Al expandir por series de Taylor a $x_\delta(t)$ y y_δ en (x_e, u_e) tenemos:

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x_{0\delta} + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_e, u_e)} (x(t) - x_e) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x_e, u_e)} (u(t) - u_e) + \dots + t.o.s. \right] \\ y_\delta(t) &= h(x_{0\delta} + \int_{t_0}^t f(x_e + x_\delta(\tau), u_e + u_\delta(\tau)) d\tau) - h(x_e) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Finalmente la aproximación lineal de (2.1) es:

$$\begin{aligned} f(x(t), u(t)) &= f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_e, u_e)} (x(t) - x_e) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x_e, u_e)} (u(t) - u_e) + \dots + t.o.s. \\ h(x(t)) &= h(x_e) + \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x_e)} (x(t) - x_e) + \dots + t.o.s. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Donde $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial u$ y $\partial h/\partial x$ son las matrices jacobianas de $f(x(t), u(t))$ y $h(x(t))$ evaluadas en el punto de equilibrio (x_e, u_e) las cuales nombraremos como A , B y C respectivamente y *t.o.s.* representan los términos de orden superior. Reescribiremos a (2.8) por medio de (2.3) en terminos incrementales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t) \\ y_\delta(t) &= Cx_\delta(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2 Linealización tangencial aproximada a partir de formas lagrangianas

Se exhorta a revisar [16]. Sea el Lagrangiano simple, \mathcal{L} , definido mediante:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, u) = K(q, \dot{q}) - (V(q) - q^T b_u u) \quad (2.1)$$

Donde $K(q, \dot{q})$ es la energía cinética, $V(q)$ es la energía potencial; $q \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ y además representan las coordenadas generalizadas de posición, velocidades generalizadas, la función de control, respectivamente, y b_u es un vector constante dados de la siguiente manera:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad b_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Con el vector de momentos canónicos a partir del mapa invertible definidos como:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \quad \dot{q} = M^{-1}(q)p \quad (2.3)$$

Siendo $M(q)$ la matriz de inercias asociada a cada sistema, reescribimos (2.1) como:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, u) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \left(V(q) - q^T b_u u \right) \quad (2.4)$$

Sabiendo que la velocidad es nula y que la posición y control son constantes, el punto de equilibrio de las variables (q, \dot{q}, u) está dado por $(q_e, 0, u_e)$. Las desviaciones variacionales incrementales que suceden a partir del punto de equilibrio son definidas como $q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta$.

$$q = q_e + q_\delta \quad \dot{q} = \dot{q}_\delta \quad u = u_e + u_\delta \quad (2.5)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_e + q_\delta, \dot{q}_\delta, u_e + u_\delta) &= \mathcal{L}(q_e, 0, u_e) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^T} \Big|_{(q_e, 0, u_e)} q_\delta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^T} \Big|_{(q_e, 0, u_e)} \dot{q}_\delta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \Big|_{(q_e, 0, u_e)} u_\delta \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_\delta^T & \dot{q}_\delta^T & u_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial u} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial u} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial q} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial \dot{q}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(q_e, 0, u_e)} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} + t.o.s \end{aligned} \quad (2.6)$$

De la representación (2.5) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_e + q_\delta, \dot{q}_\delta, u_e + u_\delta) &= \mathcal{L}(q_e, 0, u_e) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\delta^T} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\delta^T} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\delta} \end{bmatrix} \Big|_{(q_e, 0, u_e)} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_\delta^T & \dot{q}_\delta^T & u_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial u} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial u} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial q} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial \dot{q}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(q_e, 0, u_e)} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} + t.o.s \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para sistemas lagrangianos simples la expansión en series de Taylor mostrada en (2.5) hasta un segundo orden evaluado en el punto de equilibrio es aproximadamente:

$$\mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) = q_e^T b_u u_\delta + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_\delta^T & \dot{q}_\delta^T & u_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q \partial q^T} \Big|_{(q_e, 0, u_e)} & 0 & b_u \\ 0 & M(q) \Big|_{(q_e, 0, u_e)} & 0 \\ b_u^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) = q_e^T b_u u_\delta + \frac{1}{2} \dot{q}_\delta^T M(q_e) \dot{q}_\delta - \frac{1}{2} q_\delta^T \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} \Big|_{(q_e, 0, u_e)} \right] q_\delta + q_\delta^T b_u u_\delta \quad (2.9)$$

La dinámica del sistema lineal puede ser obtenida a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos incrementales de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{q}_\delta} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial q_\delta} = 0 \quad (2.10)$$

Por medio de (2.9) y (2.10) tenemos:

$$\frac{d}{dt} [M(q_e)\dot{q}_\delta] + K(q_e)q_\delta - b_u u_\delta = 0 \quad (2.11)$$

Donde $M(q_e) := M$ evaluada en el punto de equilibrio y $K(q_e)$ es:

$$K(q_e) = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} \right|_{(q_e, 0, u_e)} \quad (2.12)$$

Despejando \ddot{q}_δ de (2.11) tenemos:

$$\ddot{q}_\delta = -M(q_e)^{-1}K(q_e)q_\delta + M(q_e)^{-1}b_u u_\delta \quad (2.13)$$

La representación incremental en el espacio de estados de (2.13) es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M(q_e)^{-1}K(q_e) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -M(q_e)^{-1}b_u \end{bmatrix} u_\delta \quad (2.14)$$

Se puede notar que (2.14) es equivalente a (2.9). Desarrollo similar puede encontrarse en [26].

2.3 Planitud diferencial.

La introducción de sistemas planos fue hecha en [36] por Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin y Pierre Rouchon, la idea central intenta resolver el problema de linealización por realimentación dinámica, por lo que se propone encontrar una dinámica de compensación que lleve el sistema no lineal a uno equivalente lineal controlable. A partir del uso de álgebra diferencial los sistemas planos tienen una equivalencia lineal, a través de, una salida especial, llamada, salida plana, de naturaleza endógena, es decir puede ser expresada como una función no lineal de los estados y, posiblemente, de las entradas del sistema y un número finito de sus derivadas temporales véase, [37].

Un sistema de Una Entrada Una Salida UEUS o bien por sus siglas en inglés SISO *Single Input-Single Output*, es diferencialmente plano si existe una salida endógena tal que la entrada u y los estados que describen al sistema pueden ser expresados como una combinación lineal de la salida plana y un número finito de sus derivadas temporales, véase [15], y además, la salida plana puede ser expresada como una función de los estados del sistema y sus derivadas.

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

Nótese que si el estado x y u son funciones diferenciales de la salida plana, entonces ésta parametriza diferencialmente a todo el sistema, por tanto el sistema (2.1) es plano si:

$$\psi = \vartheta(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(\iota)}) \quad (2.2)$$

tal que

$$\begin{aligned} x &= \phi(\psi, \dot{\psi}, \dots, \psi^{(\Sigma)}) \\ u &= \Phi(\psi, \dot{\psi}, \dots, \psi^{(\Sigma+1)}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

con $\iota, \Sigma \in \mathbb{Z}$, ψ expresada como una función de x y sus derivadas, así mismo x , u son expresadas como funciones de la salida plana y sus derivadas.

La planitud diferencial, entonces, dirige la atención a una nueva clase de sistemas diferencialmente planos que exhiben una salida linealizada ψ .

2.4 Sistemas lineales

Se recomienda ver [44] para reafirmar conceptos de álgebra lineal y [2, 14] para sistemas lineales. Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo UEUS son frecuentemente representados por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{2n}$: los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}$: la entrada de control, $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ y $b \in \mathbb{R}^{2n}$. Sabemos que A es cuadrada con dimensión $(2n \times 2n)$ y además supondremos que es no singular por tanto su polinomio característico será obtenido de la siguiente manera:

$$pol_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \dots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \dots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \lambda - a_{n,n} & \dots & a_{n,2n-1} & a_{n,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1,1} & a_{2n-1,2} & \dots & a_{2n-1,n} & \dots & \lambda - a_{2n-1,2n-1} & a_{2n-1,2n} \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots & a_{2n,n} & \dots & a_{2n,2n-1} & \lambda - a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

$$pol_A(\lambda) = \lambda^{2n} + \alpha_{2n-1}\lambda^{2n-1} + \alpha_{2n-2}\lambda^{2n-2} + \dots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (2.9) descrito por el par (A, b) sea controlable es que la matriz N sea de rango $2n$, véase [20].

$$N = [b : Ab : \dots : A^{2n-1}b] \quad (2.3)$$

Supondremos que existe una transformación no singular que permita:

$$w(t) = Lx(t), \quad x(t) = L^{-1}w(t) \quad (2.4)$$

Transformando (2.1), por medio de (2.4) en:

$$\begin{aligned} L\dot{x}(t) &= LAx(t) + Lbu(t) \\ \dot{w}(t) &= LAL^{-1}w(t) + Lbu(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde:

$$LAL^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_n & \dots & -\alpha_{2n-2} & -\alpha_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad Lb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Se puede comprobar que el polinomio característico de A es idéntico al de LAL^{-1} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= 0 \\ |\lambda I - A| &= |\lambda I - LAL^{-1}| \\ |\lambda LL^{-1} - LAL^{-1}| &= |L(\lambda I - A)L^{-1}| \\ pol_A(\lambda) &= pol_{LAL^{-1}}(\lambda) \end{aligned}$$

También supondremos que el sistema es controlable; esto es, que la matriz de controlabilidad de Kalman N es de rango completo. Al redefinir la entrada de control por v de la siguiente manera:

$$v = ku - \alpha_0 w_1 - \alpha_1 w_2 - \dots - \alpha_{2n-2} w_{2n-1} - \alpha_{2n-1} w_{2n} \quad (2.7)$$

El sistema (2.5) se reduce a la forma canónica de Brunovsky (2.8).

$$\dot{w}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{2n-2} \\ w_{2n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (2.8)$$

En general los sistemas lineales invariantes en el tiempo UEUS, en su forma canónica controlable (2.5), a través de una transformación de coordenadas de la entrada llega a la forma canónica de Brunovsky, representado también, como:

$$w^{(2n)} = v \quad (2.9)$$

De (2.8) se puede ver, particularmente, que la salida plana es $\psi = w_1$ de modo que ésta es capaz de parametrizar a todo el sistema en términos de sus derivadas temporales y el control v , recordando que w puede ser escrito en términos de x por medio de L . Al definir T , la inversa de la matriz de controlabilidad de Kalman (N) como una transformación de coordenadas $\Psi = Tw$, el sistema en términos de Ψ es entonces:

$$\dot{\Psi} = F\Psi + gu, \quad F = TLAL^{-1}T^{-1}, \quad g = TLb \quad (2.10)$$

donde:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -\alpha_{2n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{2n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que las variables del sistema transformado (2.10), con ψ la salida plana, puede ser escrito en términos de ésta y un número finito de sus derivadas.

$$\begin{aligned} \Psi_{2n-1} &= \dot{\psi} + \alpha_{2n-1}\psi \\ \Psi_{2n-2} &= \ddot{\psi} + \alpha_{2n-1}\dot{\psi} + \alpha_{2n-2}\psi \\ &\vdots \\ \Psi_1 &= \psi^{(2n-1)} + \alpha_{2n-1}\psi^{(2n-2)} + \dots + \alpha_1\psi \\ u &= \psi^{(2n)} + \alpha_{2n-1}\psi^{(2n-1)} + \dots + \alpha_0\psi \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sabemos que ψ parametriza al estado w y se supondrá que la salida plana es función del estado w ; por tanto la salida es definida para los casos tratados en ésta tesis, como una combinación lineal del estado w de la siguiente manera:

$$\psi = \lambda w \quad (2.12)$$

donde λ es un vector fila de dimensión $1 \times 2n$.

Al derivar $2n - 1$ veces la expresión (2.12) se obtiene la función vectorial siguiente:

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda w \\ \dot{\psi} &= \lambda \dot{w} = \lambda(LAL^{-1}w + Lbu) \\ \ddot{\psi} &= \lambda(LAL^{-1})^2w + \lambda(LAL^{-1})Lbu + \lambda Lb\dot{u} \\ &\vdots \\ \psi^{(2n-1)} &= \lambda(LAL^{-1})^{(2n-1)}w + \lambda(LAL^{-1})^{(2n-2)}Lbu + \dots + \lambda Lbu^{(2n-2)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \vdots \\ \psi^{(2n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda LAL^{-1} \\ \vdots \\ \lambda(LAL^{-1})^{(2n-2)} \\ \lambda(LAL^{-1})^{(2n-1)} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda Lb & 0 & \dots & 0 \\ \lambda LAL^{-1}Lb & \lambda Lb & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(LAL^{-1})^{(2n-2)}Lb & \lambda(LAL^{-1})^{(2n-3)}Lb & \dots & \lambda Lb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \\ u^{(2n-2)} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

De (2.14) se puede ver que w y x pueden ser escritos en términos de la salida plana ψ y sus derivadas temporales. En correspondencia con el sistema (2.13) y a fin de nulificar los efectos ocasionados por $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(2n-2)}$ en (2.14) el vector λ debe satisfacer las siguientes relaciones:

$$\lambda Lb = 0, \quad \lambda LAL^{-1}Lb = 0, \quad \dots, \quad \lambda(LAL^{-1})^{(2n-2)}Lb = 0 \quad (2.15)$$

El vector λ debe cancelar las columnas de la matriz inversa de controlabilidad de Kalman a excepción de la última, esto es, $\lambda(LAL^{-1})^{(2n-1)}Lb \neq 0$. Por lo que (2.14) es redefinido como:

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \vdots \\ \psi^{(2n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda LAL^{-1} \\ \vdots \\ \lambda(LAL^{-1})^{(2n-2)} \\ \lambda(LAL^{-1})^{(2n-1)} \end{bmatrix} w \quad (2.16)$$

La matriz que multiplica a w en (2.14) debe ser invertible, asegurando que ψ sea observable de lo contrario:

$$\vartheta \left(\begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \vdots \\ \psi^{(2n-1)} \end{bmatrix} \right) = \vartheta \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda LAL^{-1} \\ \vdots \\ \lambda(LAL^{-1})^{(2n-2)} \\ \lambda(LAL^{-1})^{(2n-1)} \end{bmatrix} w \right) = 0 \because \lambda = 0 \quad (2.17)$$

Para asegurar la controlabilidad del sistema se debe satisfacer que $\lambda(LAL^{-1})^{(2n-1)}LB = 1$ entonces:

$$\lambda [Lb, LAL^{-1}Lb, \dots, (LAL^{-1})^{(2n-2)}Lb, (LAL^{-1})^{(2n-1)}Lb] = [0, 0, 0, \dots, 1] \quad (2.18)$$

El problema se reduce a encontrar el vector λ que cancele las columnas de la matriz inversa de controlabilidad de Kalman excepto la última.

$$\lambda = [0, 0, \dots, 1][b, Ab, \dots, A^{(2n-1)}b]^{-1} \quad (2.19)$$

En general para sistemas lineales controlables representados por:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.20)$$

la salida plana estará dada por la combinación lineal de estados obtenida de la última columna de la matriz inversa de controlabilidad de Kalman.

$$\psi = [0, 0, \dots, 1][b, Ab, \dots, A^{(2n-1)}b]^{-1}x \quad (2.21)$$

Otra condición de controlabilidad es la mostrada en [24] donde el sistema lineal de la forma $\dot{x}_\delta(t) = Fx_\delta(t) + gu_\delta(t)$, $x_\delta \in \mathbb{R}^{2n}$, $u_\delta \in \mathbb{R}$, es controlable si cumple con la siguientes relaciones:

$$s^T F = \lambda s^T \quad s^T g = 0 \quad (2.22)$$

De (2.22) se puede comprobar, al expresar, iteradas veces que:

$$\begin{array}{ll} s^T F^0 = \lambda^0 s^T & s^T F^0 g = 0 \\ s^T F^1 = \lambda^1 s^T & s^T F^1 g = 0 \\ s^T F^2 = \lambda^2 s^T & s^T F^2 g = 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^T F^n = \lambda^n s^T & s^T F^n g = 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^T F^{2n-2} = \lambda^{2n-2} s^T & s^T F^{2n-2} g = 0 \\ s^T F^{2n-1} = \lambda^{2n-1} s^T & s^T F^{2n-1} g = 0 \end{array} \quad (2.23)$$

Reacomodando el lado derecho de (2.23) se puede notar que:

$$s^T [F^0 g : F^1 g : F^2 g : \dots : F^n g : \dots : F^{2n-2} g : F^{2n-1} g] = 0, \quad s^T N = 0 \quad (2.24)$$

Sopóngase que $F = LAL^{-1}$ y $g = Lb$. La matriz de transformación que llevaría al estado x_δ al estado transformado w_δ es la matriz identidad I lo que implicaría que $x_\delta = w_\delta$, esto es:

$$w_\delta(t) = Ix_\delta(t)$$

Escribiendo la ecuación anterior para el primer término de $w_\delta(t)$.

$$w_{1\delta}(t) = [100 \dots 000]x_\delta \quad (2.25)$$

Al derivar (2.25) con respecto del tiempo tenemos:

$$\begin{array}{l} \dot{w}_{1\delta}(t) = [100 \dots 000]\dot{x}_\delta \\ \dot{w}_{1\delta}(t) = [100 \dots 000](Fx_\delta + gu_\delta) \end{array} \quad (2.26)$$

Sabemos que $Ig(1) = 0$ por tanto $[100 \dots 000]g = 0$ entonces:

$$\begin{aligned}\dot{w}_{1\delta}(t) &= [100 \dots 000]Fx_\delta \\ \dot{w}_{1\delta}(t) &= w_{2\delta}(t)\end{aligned}\quad (2.27)$$

Al derivar $w_{2\delta}$ de (2.27) tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{w}_{2\delta}(t) &= [100 \dots 000]F\dot{x}_\delta \\ \dot{w}_{2\delta}(t) &= [100 \dots 000]F(Fx_\delta + gu_\delta)\end{aligned}\quad (2.28)$$

Sabemos que $Ig(2) = 0$ por tanto $[100 \dots 000]Fg = 0$ entonces:

$$\begin{aligned}\dot{w}_{2\delta}(t) &= [100 \dots 000]F(Fx_\delta) \\ \dot{w}_{2\delta}(t) &= w_{3\delta}(t)\end{aligned}\quad (2.29)$$

Continuando con el desarrollo anterior se puede ver que :

$$\begin{aligned}\dot{w}_{3\delta}(t) &= [100 \dots 000]F^3x_\delta & \dot{w}_{3\delta}(t) &= w_{4\delta}(t) \\ \vdots & & \vdots & \\ \dot{w}_{n\delta}(t) &= [100 \dots 000]F^n x_\delta & \dot{w}_{n\delta}(t) &= w_{(n+1)\delta}(t) \\ \vdots & & \vdots & \\ \dot{w}_{(2n-2)\delta}(t) &= [100 \dots 000]F^{2n-2}x_\delta & \dot{w}_{(2n-2)\delta}(t) &= w_{(2n-1)\delta}(t) \\ \dot{w}_{(2n-1)\delta}(t) &= [100 \dots 000]F^{2n-1}x_\delta & \dot{w}_{(2n-1)\delta}(t) &= w_{(2n)\delta}(t)\end{aligned}\quad (2.30)$$

El vector fila $l_1 = [100 \dots 000]$ debe satisfacer $l_1g = l_1Fg = \dots = l_1F^{2n-2}g = 0$ puesto que $Ig(i) = 0, i = 1, \dots, 2n - 1$ e $Ig(2n) = 1$, esto es:

$$l_1[g : F^1g : F^2g : \dots : F^n g : \dots : F^{2n-2}g : F^{2n-1}g] = [000 \dots 001] \quad (2.31)$$

Una salida del sistema (2.1) será plana si y solo si $z_\delta = c_{x_\delta}^T x_\delta$ es de grado relativo $2n$. Lo que implica que:

$$c_{x_\delta}^T N = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1] \quad c_{x_\delta}^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1] N^{-1} \quad (2.32)$$

Finalmente la salida plana del sistema representado, en general, por la forma $\dot{x}_\delta(t) = Fx_\delta(t) + gu_\delta(t)$ será:

$$y_\delta = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1] N^{-1} x_\delta \quad (2.33)$$

en otras palabras l_1 es un vector fila que aniquila todas las columnas de la matriz de controlabilidad de Kalman N .

2.5 Rechazo activo de perturbaciones ADRC.

ADRC, introducido en [5], plantea la posibilidad de estimar perturbaciones desconocidas que afecten el comportamiento del sistema a través de observadores que permitan estimarla y posteriormente cancelarla por una retroalimentación adecuada que la incluya, véase [9]. La naturaleza de las perturbaciones será aditiva, esto es, la señal generada por la perturbación se verá reflejada en el comportamiento de la dinámica del sistema, así la perturbación puede ser vista como estado-dependiente pero completamente desconocida a pesar de ello supondremos que la perturbación $\xi(t)$ es uniformemente absolutamente acotada y exponencialmente integrable, ver [12].

La propiedad de planitud permite llevar la planta, algebraicamente, a una relación entrada-salida de integración pura. En solución a la presencia de la perturbación, la cual, se espera sea dependiente del estado, se proponen observadores de estado que además estimen simultáneamente la perturbación de interés, esto es, en conjunto con los observadores de estado extendido del sistema y su comportamiento en el tiempo a través de la salida plana. Un ejemplo es hallado en [15] con observadores GPI, para modos deslizantes donde el enfoque fue introducidos por H. Sira-Ramírez y V. Feliu-Batlle.

En el diagrama de bloques mostrado por la figura 2.1 se aprecia el esquema completo del controlador basado en ADRC sobre una planta bajo la influencia de perturbaciones. Donde y es la salida plana y ψ una representación transformada de y , u la señal de control, $\xi(t)$ la perturbación (es) presentes y $y^*(t)$ la señal de referencia.

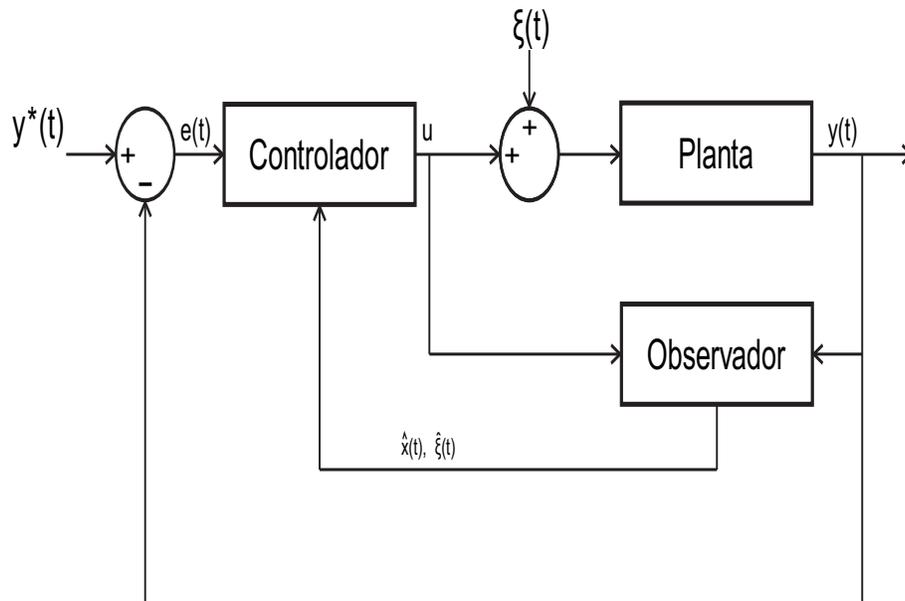


Figura 2.1: Esquema de control basado en rechazo activo de perturbaciones.

2.5.1 Observador de estado extendido (ESO)

Partimos de la forma canónica siguiente, la cual presenta una perturbación acompañada de la entrada de control, y además mantiene la forma de (2.1).

$$y^{(2n)} = u(t) + \xi(t) \quad (2.1)$$

Cuya representación de estados es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_{2n-2} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_{2n-2} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \xi(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_{2n-2} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

De (2.2) y_0 es la salida plana del sistema, así dy_0/dt su primer derivada y dy_{2n-1}/dt su $2n$ -ésima derivada. Se propone el siguiente observador de estado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{y}_0 &= \hat{y}_1 + \lambda_{2n}(y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{y}_1 &= \hat{y}_2 + \lambda_{2n-1}(y_0 - \hat{y}_0) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \hat{y}_n &= \hat{y}_{n+1} + \lambda_n(y_0 - \hat{y}_0) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \hat{y}_{2n-1} &= z_1 + u + \lambda_1(y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} z_1 &= \lambda_0(y_0 - \hat{y}_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

La dinámica del error es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e_0 &= e_1 - \lambda_{2n}e_0 \\
\frac{d}{dt}e_1 &= e_2 - \lambda_{2n-1}e_0 \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}e_n &= e_{n+1} - \lambda_n e_0 \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}e_{2n-2} &= e_{2n-1} - \lambda_2 e_0 \\
\frac{d}{dt}e_{2n-1} &= \xi(t) - z_1 - \lambda_1 e_0 \\
\frac{d}{dt}z_1 &= \lambda_0 e_0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Del observador propuesto en (2.4) se puede ver que a partir de la propiedad de planitud se puede estimar de forma completa el estado del sistema en términos de la salida plana y sus derivadas y además la perturbación por medio de una cadena de integradores desacoplados que con ayuda de las ganancias λ_i , γ_j , adecuadamente seleccionadas, se forza al sistema a converger a una vecindad cercana al origen por medio de la ley de control siguiente:

$$u = -z_1 - \sum_{j=0}^{2n-1} \gamma_j (e_j) \tag{2.5}$$

La dinámica del observador del error e_0 satisface, entonces, la ecuación diferencial siguiente:

$$e_0^{(2n+1)} + \lambda_{2n}e_0^{(2n)} + \lambda_{2n-1}e_0^{(2n-1)} + \cdots + \lambda_1\dot{e}_0 + \lambda_0e_0 = \xi(t) \tag{2.6}$$

Bajo la suposición de que las perturbaciones son uniformemente absolutamente acotadas el estado y convergerá a una vecindad cercana al origen.

Ahora bien es posible definir una trayectoria $y^*(t)$ que el sistema expresado por (2.1) a través del sistema perturbado de integración pura mostrado en (2.1) realice un seguimiento por medio de una ley de control que permita una convergencia de la salida plana $y(t)$ a $y^*(t)$ en presencia de perturbaciones, el error de seguimiento es definido como

$e_0(t) = y(t) - y^*(t)$ cuyo observador de estimación de su modelo es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{e}_0 &= \hat{e}_1 + \lambda_{2n}(e_0 - \hat{e}_0) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_1 &= \hat{e}_2 + \lambda_{2n-1}(e_0 - \hat{e}_0) \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_n &= \hat{e}_{n+1} + \lambda_n(e_0 - \hat{e}_0) \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{2n-1} &= \hat{z}_1 + u + \lambda_1(e_0 - \hat{e}_0) \\
\frac{d}{dt}\hat{z}_1 &= \lambda_0(e_0 - \hat{e}_0)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Al definir los errores de estimación de los errores de convergencia de la variables $[y_j - (y^*)^j]$ como $\tilde{e}_j = e_j - \hat{e}_j$ con $j = 1, \dots, 2n - 1$ y el error de estimación de la variable $\tilde{z}_1 = z_1 - \hat{z}_1$ la dinámica del error es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{e}_0 &= \tilde{e}_1 - \lambda_{2n}\tilde{e}_0 \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_1 &= \tilde{e}_2 - \lambda_{2n-1}\tilde{e}_0 \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_n &= \tilde{e}_{n+1} - \lambda_n\tilde{e}_0 \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{2n-2} &= \tilde{e}_{2n-1} - \lambda_2\tilde{e}_0 \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{2n-1} &= \tilde{\xi}(t) - \tilde{z}_1 - \lambda_1\tilde{e}_0 \\
\frac{d}{dt}\tilde{z}_1 &= \lambda_0\tilde{e}_0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Los errores de seguimiento convergen a una vecindad cercana al origen con ayuda de las ganancias λ propuestas adecuadamente y obtenidas, en recomendación, a través de polinomios Hurwitz que aseguren que las partes reales de las raíces de los polinomios sean estrictamente negativas. Con lo que el control es propuesto de la siguiente manera:

$$u = [y^*(t)]^{(2n)} - z_1 - \sum_{j=0}^{2n-1} \gamma_j [\hat{y}_j - (y^*(t))^{(j)}] \tag{2.9}$$

Nótese que los polinomios correspondientes son:

$$\begin{aligned}
pol_{(obs)} &= s^{(2n+1)} + \lambda_{2n}s^{(2n)} + \lambda_{2n-1}s^{(2n-1)} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0 \\
pol_{(ctrl)} &= s^{(2n)} + \gamma_{2n-1}s^{(2n-1)} + \gamma_{2n-2}s^{(2n-2)} + \dots + \gamma_1s + \gamma_0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.6 Consenso de sistemas multiagente

A continuación se muestran conceptos básicos de teoría de grafos y consenso de sistemas multiagente con el fin de implementar algoritmos de control y consenso sobre algunos de los sistemas sub-actuados presentados a lo largo de ésta tesis, se exhorta a revisar [7, 43, 48] para ahondar en el tema.

El propósito de trabajo colectivo sugiere definir la estructura de información existente entre agentes de forma síncrona para, posteriormente, implementar el control por ADRC. Supóngase que se tienen dos agentes y la comunicación que puede existir entre ellos es de dos tipos, dirigida o no dirigida; la información puede ir de un agente a otro y visersversa, para el caso no dirigido, en cambio para el caso dirigido sólo un agente podría recibir información del que es su adyacente, veáse la figura 2.2, el que recibe información ha de ser dirigido por su adyacente.



Figura 2.2: Dibujo representativo de consenso no dirigido y dirigido entre dos agentes.

A continuación se define el producto Kronecker entre dos matrices A y B , el cual ayudará a entender la notación utilizada a lo largo del documento. El producto Kronecker es entonces:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{11}b_{1c} & \dots & a_{1n}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{f1} & \dots & a_{11}b_{fc} & \dots & a_{1n}b_{f1} & \dots & a_{1n}b_{fc} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \dots & a_{m1}b_{1c} & \dots & a_{mn}b_{11} & \dots & a_{mn}b_{1c} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{f1} & \dots & a_{m1}b_{fc} & \dots & a_{mn}b_{f1} & \dots & a_{mn}b_{fc} \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad B \in \mathbb{R}^{f \times c} \quad (2.1)$$

2.6.1 Teoría de Grafos

Es un grafo \mathcal{G} el conjunto de vértices $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ y el conjunto de segmentos de línea $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ o también llamados bordes. Los bordes unen pares de vértices, por consiguiente dos vértices serán adyacentes si existe un borde que los una, además el borde que una un vértice con alguno de sus adyacentes será llamado borde incidente a v_m , $1 \leq m \leq i$. El grafo compuesto por un vértice con un borde incidente a si mismo será llamado grafo simple. Se tienen las siguientes definiciones para el mejor entendimiento en el desarrollo estructural de información así como su flujo; definiendo las matrices de adyacencia, incidencia y Laplaciana.

La matriz de adyacencia \mathcal{A} de $z \times z$ de \mathcal{G} con q vértices es definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{A} = [a_{i,j}] \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \neq j \text{ y } i, j \text{ son adyacentes} \\ 0, & \text{si } i = j \text{ y } i, j \text{ no adyacentes} \end{cases} \quad (2.2)$$

La matriz de incidencia \mathcal{C} de $z \times p$ asociada con \mathcal{G} es tal que:

$$c_{i,j} = \begin{cases} o(\mathbf{v}_i, \mathbf{e}_i), & \text{si } \mathbf{v}_i \text{ y } \mathbf{e}_i \text{ son incidentes} \\ 0, & \text{si } \mathbf{v}_i \text{ y } \mathbf{e}_i \text{ no son incidentes} \end{cases} \quad (2.3)$$

La matriz Laplaciana de \mathcal{G} de $z \times z$ es definida $\mathbb{L}(\mathcal{G}) = [\ell_{i,j}]$ donde $\ell_{i,j}$ es:

$$\ell_{i,j} = \begin{cases} \deg(\mathbf{v}_i), & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \text{ e } i \text{ es no adyacente a } j \\ -1, & \text{si } i \neq j \text{ e } i \text{ es adyacente a } j \end{cases} \quad (2.4)$$

y $\deg(\mathbf{v}_i)$ es el número de vértices adyacentes a \mathbf{v}_i .

2.6.2 Algoritmos de consenso

Supóngase que se tienen z agentes alineados en el eje horizontal de algún marco fijo los cuales conocen la posición del agente que se encuentra a la vanguardia y a la retaguardia, excepto los agentes que se encuentran en los extremos de la alineación, los cuales sólo conocen la posición de uno adyacente y además es deseable que la distancia entre ellos sea equidistante. La alineación y la distancia entre agentes estructura un intercambio de información que puede ser representado por un grafo $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$, donde \mathcal{V} y \mathcal{E} habrían de ser los agentes y los enlaces de información, respectivamente, que comunican la distancia. En este esquema se espera que la información que comparten los agentes varíe en el tiempo así mismo la posición o el estado de cada uno de ellos. La ecuación que describiría comportamiento similar sería la usada por [40, 45, 46].

$$\dot{\varphi}_i(t) = - \sum_{j=1}^z a_{i,j} [\gamma_0(\varphi_i(t) - \varphi_j(t))], \quad \dot{\varphi} = -\gamma_0 \mathbb{L}(\mathcal{G}) \varphi(t) \quad (2.5)$$

El problema requiere que los z agentes cuyas variables φ_i , y φ_j con $i \neq j$ sean asintóticamente iguales.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_i - \varphi_j| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, z\} \text{ e } i \neq j \quad (2.6)$$

La extensión de la ecuación para agentes modelados por ecuaciones diferenciales de segundo orden es (2.7) donde se ha incluido el término que alude a la velocidad.

$$\ddot{\varphi}_i = - \sum_{j=1}^z a_{i,j} [\gamma_0(\varphi_i - \varphi_j) + \gamma_1(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_j)] \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\gamma_0 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_1 \mathbb{L}(\mathcal{G}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

De donde se puede ver, en correspondencia con [39], que el consenso es logrado cuando:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_i - \varphi_j| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_j| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, z\} \text{ e } i \neq j \quad (2.8)$$

Para los sistemas lineales tratados en esta tesis el objetivo de consenso es hacer que el vector de estado converga a un valor común, lo que implica que $\varphi_i \rightarrow \varphi_j$, $\dot{\varphi}_i \rightarrow \dot{\varphi}_j$, \dots , $\varphi_i^{2k-1} \rightarrow \varphi_j^{2k-1}$, $\forall i, j$.

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_i^0 &= \varphi_i^1 \\
\dot{\varphi}_i^1 &= \varphi_i^2 \\
\dot{\varphi}_i^2 &= \varphi_i^3 \\
&\vdots \\
\dot{\varphi}_i^{2k-2} &= \varphi_i^{2k-1} \\
\dot{\varphi}_i^{2k-1} &= u_i
\end{aligned} \tag{2.9}$$

El super índice derecho de $\dot{\varphi}_i$ indica el orden de derivación de (2.9), así $\dot{\varphi}_i^0 = \varphi_i^1$ y $\dot{\varphi}_i^{2k-1}$ implica la $2k$ -ésima derivada temporal de φ_i^0 . Sin pérdida de generalidad, para los sistemas de orden superior usados en ésta tesis el algoritmo de consenso es el siguiente:

$$u_i = - \sum_{j=1}^z a_{i,j} \left[\sum_{l=0}^{2k-1} \gamma_l (\varphi_i^l - \varphi_j^l) \right], \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_z^0 \\ \dot{\varphi}_1^0 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_z^0 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_1^{2k-1} \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_z^{2k-1} \end{bmatrix} = [\eta \otimes I_m] \begin{bmatrix} \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_z^0 \\ \dot{\varphi}_1^0 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_z^0 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_1^{2k-1} \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_z^{2k-1} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

donde:

$$\eta = \begin{bmatrix} 0_{z \times z} & I_{z \times z} & 0_{z \times z} & \dots & 0_{z \times z} \\ 0_{z \times z} & 0_{z \times z} & I_{z \times z} & \dots & 0_{z \times z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{z \times z} & 0_{z \times z} & 0_{z \times z} & \dots & I_{z \times z} \\ -\gamma_0 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_1 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_2 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & \dots & -\gamma_{2k-1} \mathbb{L}(\mathcal{G}) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Y γ_l parámetros a diseñar.

A continuación se muestra una notación equivalente dentro del desarrollo de este capítulo y los posteriores para representar el i -ésimo agente y el j -ésimo agente con sus respectivas

$(2k - 1)$ -ésimas derivadas.

$$\begin{array}{ll}
 \dot{\varphi}_i^0 = \varphi_i^1 & {}^i\dot{\varphi}_0 = {}^i\varphi_1 \\
 \dot{\varphi}_i^1 = \varphi_i^2 & {}^i\dot{\varphi}_1 = {}^i\varphi_2 \\
 \dot{\varphi}_i^2 = \varphi_i^3 & {}^i\dot{\varphi}_2 = {}^i\varphi_3 \\
 \vdots & \vdots \\
 \dot{\varphi}_i^{2k-2} = \varphi_i^{2k-1} & {}^i\dot{\varphi}_{(2k-2)} = {}^i\varphi_{(2k-1)} \\
 \dot{\varphi}_i^{2k-1} = u_i & {}^i\dot{\varphi}_{(2k-1)} = {}^i u
 \end{array}$$

2.6.3 Esquema líder-seguidor de orden superior

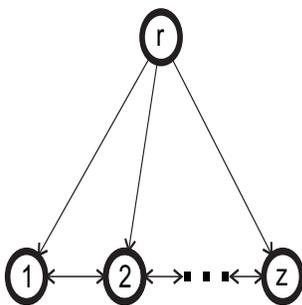


Figura 2.3: Esquema líder-seguidor con z agentes seguidores

En la estrategia líder-seguidor se desea que un agente influya en el comportamiento de los demás, permitiendo que el estado de consenso de un grupo de agentes no líderes tienda al estado del líder. En el artículo [22] se presenta el consenso restringido a través de la presencia de un modelo de referencia llamado líder en dos casos, el primero contempla restricciones individuales para cada agente y el segundo muestra múltiples conjuntos de agentes buscando consenso con distintas referencias.

Ahora bien consideremos un modelo de referencia expresado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
 {}^r\dot{\varphi}_0 = {}^r\varphi_1 \\
 {}^r\dot{\varphi}_1 = {}^r\varphi_2 \\
 {}^r\dot{\varphi}_2 = {}^r\varphi_3 \\
 \vdots \\
 {}^r\dot{\varphi}_{(2k-2)} = {}^r\varphi_{(2k-1)} \\
 {}^r\dot{\varphi}_{(2k-1)} = {}^r u
 \end{array} \tag{2.12}$$

Donde ${}^r\varphi_l, {}^r u \in \mathbb{R}^m$ representan los estados de referencia y su entrada de control, respectivamente. El problema es entonces un problema de consenso restringido a un modelo de referencia que será resuelto si ${}^i\varphi \rightarrow {}^r\varphi, {}^i\dot{\varphi} \rightarrow {}^r\dot{\varphi}, \dots, {}^i\varphi_{(2k-1)} \rightarrow {}^r\varphi_{(2k-1)}$ y

${}^i\varphi \rightarrow {}^j\varphi, {}^i\dot{\varphi} \rightarrow {}^j\dot{\varphi}, \dots, {}^i\varphi_{(2k-1)} \rightarrow {}^j\varphi_{(2k-1)}, \forall i, j$, o bien:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |{}^i\varphi_l - {}^j\varphi_l| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |{}^i\varphi_l - {}^r\varphi_l| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, z\}, l = 0, \dots, 2k-1, ei \neq j \quad (2.13)$$

Así si el conjunto de agentes no líderes tiene acceso al agente de referencia, o bien, si este se encuentra disponible para cada agente se dice que existe un árbol de expansión dirigido; esto es un grafo dirigido donde cada nodo tiene exactamente un nodo, en este caso el del líder o bien al tener un camino dirigido el nodo líder hacia todos los demás nodos. Para tal caso mencionado se propone el algoritmo de consenso siguiente:

$${}^i u = - \sum_{j=1}^z a_{i,j} \left[\sum_{l=0}^{2k-1} \gamma_l ({}^i\varphi_l - {}^j\varphi_l) \right] - \sum_{l=0}^{2k-1} \gamma_l ({}^i\varphi_l - {}^r\varphi_l) + {}^r u \quad (2.14)$$

La ley de control de (2.14) atiende el problema restringido con la siguiente representación en espacio de estados definidos por el error ${}^i\tilde{\varphi}_l = {}^i\varphi_l - {}^r\varphi_l, l = 0, \dots, 2k-1$, siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\varphi}_0 \\ \vdots \\ {}^z\tilde{\varphi}_0 \\ {}^1\dot{\tilde{\varphi}}_0 \\ \vdots \\ {}^z\dot{\tilde{\varphi}}_0 \\ \vdots \\ {}^1\dot{\tilde{\varphi}}_{(2k-1)} \\ \vdots \\ {}^z\dot{\tilde{\varphi}}_{(2k-1)} \end{bmatrix} = [\sigma \otimes I_m] \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\varphi}_0 \\ \vdots \\ {}^z\tilde{\varphi}_0 \\ {}^1\dot{\tilde{\varphi}}_0 \\ \vdots \\ {}^z\dot{\tilde{\varphi}}_0 \\ \vdots \\ {}^1\dot{\tilde{\varphi}}_{(2k-1)} \\ \vdots \\ {}^z\dot{\tilde{\varphi}}_{(2k-1)} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Donde

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0_{z \times z} & I_{z \times z} & 0_{z \times z} & \dots & 0_{z \times z} \\ 0_{z \times z} & 0_{z \times z} & I_{z \times z} & \dots & 0_{z \times z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{z \times z} & 0_{z \times z} & 0_{z \times z} & \dots & I_{z \times z} \\ -\gamma_0(\mathbb{L}(\mathcal{G}) + I_z) & -\gamma_1(\mathbb{L}(\mathcal{G}) + I_z) & -\gamma_2(\mathbb{L}(\mathcal{G}) + I_z) & \dots & -\gamma_{2k-1}(\mathbb{L}(\mathcal{G}) + I_z) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Lo anterior resume la idea central siguiente: La meta (M) del grupo de agentes para lograr un consenso en estado estacionario (EE) es que este sea alcanzado en el sub-espacio que

es abarcado por el vector $\mathbf{1}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^1\varphi_0 \\ \vdots \\ {}^z\varphi_0 \\ {}^1\dot{\varphi}_0 \\ \vdots \\ {}^z\dot{\varphi}_0 \\ \vdots \\ {}^1\dot{\varphi}_{(2k-1)} \\ \vdots \\ {}^z\dot{\varphi}_{(2k-1)} \end{bmatrix}_{EE} &= \mathbf{1} \otimes \begin{bmatrix} {}^1\varphi_0 \\ \vdots \\ {}^z\varphi_0 \\ {}^1\dot{\varphi}_0 \\ \vdots \\ {}^z\dot{\varphi}_0 \\ \vdots \\ {}^1\dot{\varphi}_{(2k-1)} \\ \vdots \\ {}^z\dot{\varphi}_{(2k-1)} \end{bmatrix}_M \\
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\varphi}_0 \\ \vdots \\ {}^z\tilde{\varphi}_0 \\ {}^1\dot{\tilde{\varphi}}_0 \\ \vdots \\ {}^z\dot{\tilde{\varphi}}_0 \\ \vdots \\ {}^1\dot{\tilde{\varphi}}_{(2k-1)} \\ \vdots \\ {}^z\dot{\tilde{\varphi}}_{(2k-1)} \end{bmatrix}_{EE} &= \mathbf{1} \otimes \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\varphi}_0 \\ \vdots \\ {}^z\tilde{\varphi}_0 \\ {}^1\dot{\tilde{\varphi}}_0 \\ \vdots \\ {}^z\dot{\tilde{\varphi}}_0 \\ \vdots \\ {}^1\dot{\tilde{\varphi}}_{(2k-1)} \\ \vdots \\ {}^z\dot{\tilde{\varphi}}_{(2k-1)} \end{bmatrix}_M
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.7 Resumen del capítulo

A lo largo del presente capítulo se han presentado conceptos teóricos recabados de distintas fuentes con el deseo de mejorar el entendimiento de los desarrollos y capítulos siguientes. Los conceptos recabados incluyen teoría de sistemas lineales con la intención fundamental de exhibir planitud en los sistemas sub-actuados tratados a lo largo del documento. Se hace uso de observadores de estado en búsqueda de una ley de control basado en ADRC. Algoritmos de consenso y teoría de grafos para unificar el esquema ADRC en sistemas multiagentes sub-actuados son usados.

Capítulo 3

Modelado vía Euler-Lagrange

3.1 Péndulo invertido sobre carro.

El sistema péndulo invertido sobre un carro es muy utilizado cuando de implementar esquemas de control se trata, el problema se halla en estabilizar el péndulo a una referencia vertical usualmente arriba o abajo del carro, cuando se estabiliza el péndulo y este queda por debajo del carro se llama grúa viajera por el contrario el sistema es, simplemente, llamado péndulo invertido sobre un carro. El sistema es no diferencialmente plano y es posible controlarlo al definir su salida plana y posteriormente reconstruir el sistema a su representación entrada-salida.

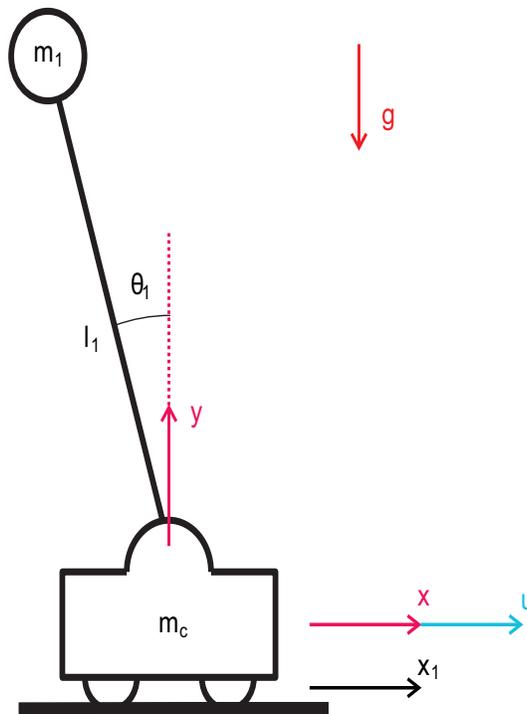


Figura 3.1: Dibujo representativo del sistema péndulo invertido sobre un carro.

3.1.1 Modelo matemático del péndulo invertido sobre un carro

Sea (x_{m_c}, y_{m_c}) la posición de la masa de carro (m_c), (x_{m_1}, y_{m_1}) la posición de la masa del péndulo (m_1), medidas en el plano $x - y$ como se aprecia en la figura 3.1 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{m_c} &= x_1, & y_{m_c} &= 0, \\ x_{m_1} &= x_1 - l_1 \text{sen}(\theta_1), & y_{m_1} &= l_1 \text{cos}(\theta_1) \end{aligned}$$

Cuyas velocidades asociadas $(\dot{x}_{m_c}, \dot{y}_{m_c})$ y $(\dot{x}_{m_1}, \dot{y}_{m_1})$ son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m_c} &= \dot{x}_1, & \dot{y}_{m_c} &= 0, \\ \dot{x}_{m_1} &= \dot{x}_1 - l_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}(\theta_1), & \dot{y}_{m_1} &= -l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_1) \end{aligned}$$

La energía cinética asociada al sistema es:

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) &= K_{m_c} + K_{m_1} \\ &= \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2) \end{aligned}$$

finalmente:

$$K(\theta_1, \dot{x}_1, \dot{\theta}_1) = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 - 2l_1 \dot{x}_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}(\theta_1) + l_1^2 \dot{\theta}_1^2) \quad (3.1)$$

La energía potencial es de la forma:

$$V(\theta_1) = m_1 g l_1 \text{cos}(\theta_1) \quad (3.2)$$

El lagrangiano del sistema se obtiene a partir de (3.1) y (3.2) como $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$, el cual se muestra a continuación.

$$\mathcal{L}(\theta_1, \dot{x}_1, \dot{\theta}_1) = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 - 2l_1 \dot{x}_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}(\theta_1) + l_1^2 \dot{\theta}_1^2) - m_1 g l_1 \text{cos}(\theta_1) \quad (3.3)$$

Sean q, \dot{q}, u el vector columna que contiene las coordenadas generalizadas de posición, el vector columna que contiene las velocidades generalizadas y el control, respectivamente, donde $q \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}$. La ecuación (3.3) es ahora escrita en función de q, \dot{q} y u de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, u) &= K(q, \dot{q}) - (V(q) - q^T b_u u) \\ &= \frac{1}{2} \dot{q} M \dot{q} - (V(q) - q^T b_u u) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde $b_u = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ y $M(q)$ es obtenida con ayuda de la ecuación (2.3). Las ecuaciones que representan el modelo dinámico del sistema son obtenidas mediante la formulación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = b_u u, \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

Al desarrollar (3.5) se obtiene el modelo dinámico del sistema péndulo invertido sobre un carro, el cual es el siguiente:

$$\begin{aligned}(m_c + m_1)\ddot{x}_1 - m_1 l_1 \cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) &= u \\ -m_1 l_1 \cos(\theta_1)\ddot{x}_1 + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 l_1 g \sin(\theta_1) &= 0\end{aligned}$$

El cual tiene la forma matricial siguiente:

$$\begin{bmatrix} m_c + m_1 & -m_1 l_1 \cos(\theta_1) \\ -m_1 l_1 \cos(\theta_1) & m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_1 l_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 l_1 g \sin(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.1.2 Linealización tangencial aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable.

El modelo obtenido en 3.6 es no diferencialmente plano en su forma no lineal por tanto no hay manera de compararlo con otro sistema lineal controlable por medio de una transformación de coordenadas de los estados. El modelo puede ser linealizado alrededor de un punto de equilibrio inestable. Se linealizará el sistema alrededor del punto de equilibrio siguiente:

$$\bar{x}_1 = 0; \quad \bar{\dot{x}}_1 = 0; \quad \bar{\theta}_1 = 0; \quad \bar{\dot{\theta}}_1 = 0; \quad \bar{u} = 0$$

Las variables incrementales que representan las variaciones desde el punto de equilibrio son:

$$x_{1\delta} = x_1 - \bar{x}_1; \quad \theta_{1\delta} = \theta_1 - \bar{\theta}_1; \quad u_\delta = u - \bar{u}$$

El sistema linealizado está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} m_c + m_1 & -m_1 l_1 \\ -m_1 l_1 & m_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1\delta} \\ \ddot{\theta}_{1\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 l_1 g \theta_{1\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_\delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.1.3 Obtención de la salida plana para el sistema de péndulo invertido sobre un carro

El sistema linealizado se coloca en la representación de estados, dada por la siguiente ecuación.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ \theta_{1\delta} \\ \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{1\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_1}{m_c} g & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m_c + m_1)}{m_c l_1} g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ \theta_{1\delta} \\ \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{1\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ \frac{1}{m_c l_1} \end{bmatrix} u_\delta \quad (3.8)$$

El sistema linealizado representado por (3.8) es controlable, la matriz de controlabilidad del sistema es de rango completo cumpliéndose el criterio de Kalman. La salida plana del sistema es:

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}^{-1} q_\delta \quad (3.9)$$

donde q_δ es:

$$q_\delta = \begin{bmatrix} x_{1\delta} & \theta_{1\delta} & \dot{x}_{1\delta} & \dot{\theta}_{1\delta} \end{bmatrix}^T \quad (3.10)$$

3.2 Doble péndulo simple invertido sobre carro.

El problema mantiene la esencia del problema atendido por el péndulo invertido sobre un carro sin embargo se aumenta la complejidad del mismo al articular el péndulo y evaluar la posibilidad de estabilizarlo al trabajar con la propiedad de planitud cuando el sistema es aproximado por uno lineal. El sistema consta de 3 articulaciones, 1 prismática y 2 revolutas que atienden los movimientos del carro y los péndulos, por medio de u se desea estabilizar las posiciones de las tres variables x, θ_1, θ_2 en cero.

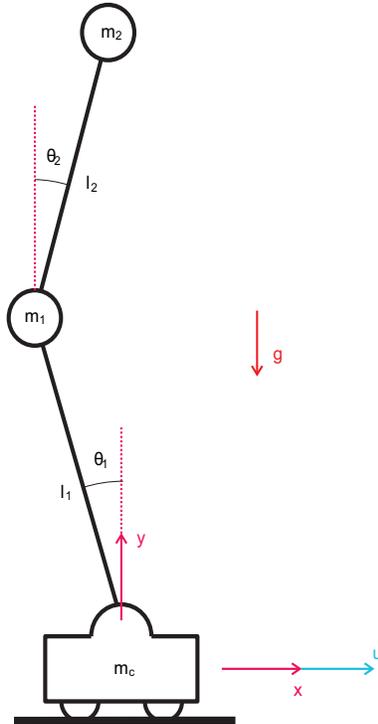


Figura 3.2: Dibujo representativo del sistema doble péndulo invertido sobre un carro.

3.2.1 Modelo matemático del doble péndulo invertido sobre un carro

Sea (x_{m_c}, y_{m_c}) la posición de la masa de carro (m_c), (x_{m_1}, y_{m_1}) la posición de la masa del primer péndulo (m_1), (x_{m_2}, y_{m_2}) la posición de la masa del segundo péndulo (m_2) medidas en el plano $x - y$ como se muestra en la figura 3.2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{m_c} &= x, & y_{m_c} &= 0, \\ x_{m_1} &= x - l_1 \text{sen}(\theta_1), & y_{m_1} &= l_1 \text{cos}(\theta_1), \\ x_{m_2} &= x - l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_2), & y_{m_2} &= l_1 \text{cos}(\theta_1) + l_2 \text{cos}(\theta_2) \end{aligned}$$

Cuyas velocidades asociadas $(\dot{x}_{m_c}, \dot{y}_{m_c})$, $(\dot{x}_{m_1}, \dot{y}_{m_1})$ y $(\dot{x}_{m_2}, \dot{y}_{m_2})$ son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m_c} &= \dot{x}, & \dot{y}_{m_c} &= 0, \\ \dot{x}_{m_1} &= \dot{x} - l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1), & \dot{y}_{m_1} &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sen(\theta_1), \\ \dot{x}_{m_2} &= \dot{x} - l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2), & \dot{y}_{m_2} &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sen(\theta_1) - l_2 \dot{\theta}_2 \sen(\theta_2) \end{aligned}$$

La energía cinética asociada al sistema es:

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) &= K_{m_c} + K_{m_1} + K_{m_2} \\ &= \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_{m_c}^2 + \dot{y}_{m_c}^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{m_2}^2 + \dot{y}_{m_2}^2) \end{aligned}$$

finalmente:

$$\begin{aligned} K(\theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_M^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 - 2l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_1^2 \dot{\theta}_1^2) \\ &+ \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 - 2l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_2 \dot{x} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

La energía potencial es de la forma:

$$V(\theta_1, \theta_2) = m_1 g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2)) \quad (3.2)$$

El lagrangiano del sistema se obtiene a partir de (3.1) y (3.2) como $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$, el cual se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_M^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 - 2l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 - 2l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ &+ l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_2 \dot{x} \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) - 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) - m_1 g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) \\ &+ l_2 \cos(\theta_2)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sean q , \dot{q} , u el vector columna que contiene las coordenadas generalizadas de posición, el vector columna que contiene las velocidades generalizadas y el control, respectivamente, donde $q \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}$. La ecuación (3.3) es ahora escrita en función de q , \dot{q} y u de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, u) &= K(q, \dot{q}) - (V(q) - q^T b_u u) \\ &= \frac{1}{2} \dot{q} M \dot{q} - (V(q) - q^T b_u u) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde $b_u = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ y $M(q)$ es obtenida con ayuda de la ecuación (2.3). Las ecuaciones que representan el modelo dinámico del sistema son obtenidas mediante la formulación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = b_u u, \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

Al desarrollar (3.5) se obtiene el modelo dinámico del sistema doble péndulo invertido sobre un carro, el cual es el siguiente:

$$\begin{aligned}
(m_c + m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 + m_2)l_1\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)l_1\dot{\theta}_1^2\text{sen}(\theta_1) \\
- m_2l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\text{sen}(\theta_2) &= u \\
- (m_1 + m_2)l_1\cos(\theta_1)\ddot{x} + (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - m_2l_1l_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\
- (m_1 + m_2)l_1g\text{sen}(\theta_1) &= 0 \\
m_2l_2\cos(\theta_2)\ddot{x} - m_2l_1l_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\
- m_2l_2g\text{sen}(\theta_2) &= 0
\end{aligned}$$

El cual tiene la forma matricial siguiente:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (m_c + m_1 + m_2) & -(m_1 + m_2)l_1\cos(\theta_1) & m_2l_2\cos(\theta_2) \\ -(m_1 + m_2)l_1\cos(\theta_1) & (m_1 + m_2)l_1^2 & -m_2l_1l_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2l_2\cos(\theta_2) & -m_2l_1l_2\cos(\theta_1 + \theta_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & (m_1 + m_2)l_1\dot{\theta}_1\text{sen}(\theta_1) & -m_2l_2\dot{\theta}_2\text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 + m_2)l_1g\text{sen}(\theta_1) \\ -m_2l_2g\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

3.2.2 Linealización tangencial aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable.

Una vez más el modelo obtenido en 3.6 es no diferencialmente plano en su forma no lineal por tanto no hay manera de compararlo con otro sistema lineal controlable por medio de una transformación de coordenadas de los estados. El modelo es linealizado por medio del método utilizado en el Capítulo 2 alrededor del punto de equilibrio inestable $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, expresados de la siguiente manera:

$$\bar{x} = 0; \quad \bar{\dot{x}} = 0; \quad \bar{\theta}_1 = 0; \quad \bar{\dot{\theta}}_1 = 0; \quad \bar{\theta}_2 = 0; \quad \bar{\dot{\theta}}_2 = 0; \quad \bar{u} = 0$$

Las variables incrementales que representan las variaciones desde el punto de equilibrio son:

$$x_\delta = x - \bar{x}; \quad \theta_{1\delta} = \theta_1 - \bar{\theta}_1; \quad \theta_{2\delta} = \theta_2 - \bar{\theta}_2; \quad u_\delta = u - \bar{u}$$

El sistema linealizado está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} (m_c + m_1 + m_2) & -(m_1 + m_2)l_1 & m_2l_2 \\ -(m_1 + m_2)l_1 & (m_1 + m_2)l_1^2 & -m_2l_1l_2 \\ m_2l_2 & -m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 + m_2)l_1g\theta_1 \\ -m_2l_2g\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2.3 Obtención de la salida plana para el sistema de doble péndulo invertido sobre un carro

El sistema linealizado se coloca en la representación de estados, dada por la siguiente ecuación.

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + bu_\delta \quad (3.8)$$

De donde se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \theta_{1\delta} \\ \theta_{2\delta} \\ \dot{x}_\delta \\ \dot{\theta}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{2\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(m_1+m_2)g}{m_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m_c+m_1)(m_1+m_2)g}{m_c m_1 l_1} & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_2} & \frac{(m_1+m_2)g}{m_2 l_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \theta_{1\delta} \\ \theta_{2\delta} \\ \dot{x}_\delta \\ \dot{\theta}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{2\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ \frac{1}{m_c l_1} \\ 0 \end{bmatrix} u_\delta \quad (3.9)$$

El sistema linealizado representado por (3.9) es controlable, la matriz de controlabilidad del sistema es de rango completo cumpliéndose el criterio de Kalman. La salida plana del sistema es:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b & A^4b & A^5b \end{bmatrix}^{-1} q_\delta \quad (3.10)$$

donde q_δ es:

$$q_\delta = \begin{bmatrix} x_\delta & \theta_{1\delta} & \theta_{2\delta} & \dot{x}_\delta & \dot{\theta}_{1\delta} & \dot{\theta}_{2\delta} \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

3.3 Triple péndulo invertido sobre carro.

A continuación se muestra el desarrollo hecho para encontrar el modelo dinámico del triple péndulo invertido sobre un carro, de la figura 3.3 se observan las cuatro articulaciones siendo una prismática y tres revolutas. En este punto se espera que la salida plana sea una combinación lineal de las posiciones generalizadas al haber realizado los procedimientos matemáticos para los casos de péndulo invertido y doble péndulo invertido puesto que las salidas planas han resultado ser una combinación lineal de las proyecciones de las variables de posición de los péndulos sobre la superficie de deslizamiento del carro y x_δ .

El problema una vez más es estabilizar las variables generalizadas que constituyen el modelo a cero por medio de una ley de control u . Previo al diseño del control se evalúan las condiciones necesarias para determinar que el sistema es controlable por medio del criterio de Kalman mostrado en el Capítulo 2.

3.3.1 Modelo matemático del triple péndulo invertido sobre un carro

Sea (x_{m_c}, y_{m_c}) la posición de la masa del carro (m_c), (x_{m_1}, y_{m_1}) la posición de la masa del primer péndulo (m_1), (x_{m_2}, y_{m_2}) la posición de la masa del segundo péndulo (m_2),

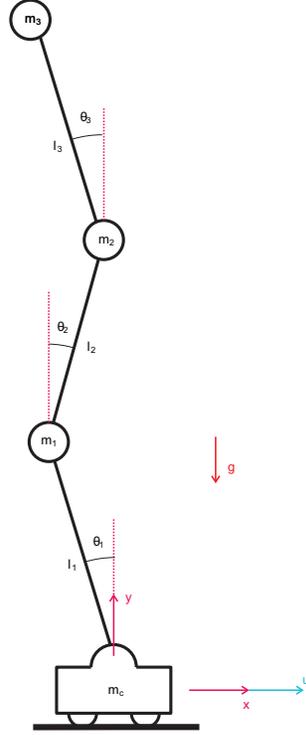


Figura 3.3: Dibujo representativo del sistema triple péndulo invertido sobre un carro.

(x_{m_3}, y_{m_3}) la posición de la masa del tercer péndulo (m_3) medidas en el plano $x - y$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 x_{m_c} &= x_1, & y_{m_c} &= 0, \\
 x_{m_1} &= x_1 - l_1 \text{sen}(\theta_1), & y_{m_1} &= l_1 \text{cos}(\theta_1), \\
 x_{m_2} &= x_1 - l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_2), & y_{m_2} &= l_1 \text{cos}(\theta_1) + l_2 \text{cos}(\theta_2), \\
 x_{m_3} &= x_1 - l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_2) - l_3 \text{sen}(\theta_3), & y_{m_3} &= l_1 \text{cos}(\theta_1) + l_2 \text{cos}(\theta_2) + l_3 \text{cos}(\theta_3)
 \end{aligned}$$

Cuyas velocidades asociadas $(\dot{x}_{m_c}, \dot{y}_{m_c})$, $(\dot{x}_{m_1}, \dot{y}_{m_1})$ y $(\dot{x}_{m_2}, \dot{y}_{m_2})$ son:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{m_c} &= \dot{x}_1, & \dot{y}_{m_c} &= 0, \\
 \dot{x}_{m_1} &= \dot{x}_1 - l_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}(\theta_1), & \dot{y}_{m_1} &= -l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_1), \\
 \dot{x}_{m_2} &= \dot{x}_1 - l_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2), & \dot{y}_{m_2} &= -l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_1) - l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2),
 \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{m_3} &= \dot{x}_1 - l_1 \dot{\theta}_1 \text{cos}(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2) - l_3 \dot{\theta}_3 \text{cos}(\theta_3), \\
 \dot{y}_{m_3} &= -l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_1) - l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) - l_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3)
 \end{aligned}$$

La energía cinética asociada al sistema es:

$$\begin{aligned}
 K(q, \dot{q}) &= K_{m_c} + K_{m_1} + K_{m_2} + K_{m_3} \\
 &= \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_{m_c}^2 + \dot{y}_{m_c}^2) + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{m_2}^2 + \dot{y}_{m_2}^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_{m_3}^2 + \dot{y}_{m_3}^2)
 \end{aligned}$$

finalmente:

$$\begin{aligned}
K(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{x}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) &= \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 - 2l_1\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1) + l_1^2\dot{\theta}_1^2) \\
&+ \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 - 2l_1\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_2\dot{x}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2) - 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 + \theta_2)) \\
&+ \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_1 - 2l_1\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_2\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_2) - 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad - 2l_3\dot{x}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_3) + 2l_1l_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_1 - \theta_3) - 2l_2l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\cos(\theta_2 + \theta_3) + l_3^2\dot{\theta}_3^2) \quad (3.1)
\end{aligned}$$

La energía potencial es de la forma:

$$\begin{aligned}
V(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= m_1gl_1\cos(\theta_1) + m_2g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2)) \\
&\quad + m_3g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2) + l_3\cos(\theta_3)) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

El lagrangiano del sistema se obtiene a partir de (3.1) y (3.2) como $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$, el cual se muestra a continuación como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 - 2l_1\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1) + l_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 - 2l_1\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_2\dot{x}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2) - 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 + \theta_2)) + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_1 - 2l_1\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + 2l_2\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_2) - 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2 - 2l_3\dot{x}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_3) + 2l_1l_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_1 - \theta_3) \\
&\quad - 2l_2l_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\cos(\theta_2 + \theta_3) + l_3^2\dot{\theta}_3^2) - m_1gl_1\cos(\theta_1) - m_2g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2)) \\
&\quad - m_3g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2) + l_3\cos(\theta_3)) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Sean q, \dot{q}, u el vector columna que contiene las coordenadas generalizadas de posición, el vector columna que contiene las velocidades generalizadas y el control, respectivamente, donde $q \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}$. La ecuación (3.3) es ahora escrita en función de q, \dot{q} y u de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(q, \dot{q}, u) &= K(q, \dot{q}) - (V(q) - q^T b_u u) \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} - (V(q) - q^T b_u u) \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Donde $b_u [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y $M(q)$ es obtenida con ayuda de la ecuación (2.3). Las ecuaciones que representan el modelo dinámico del sistema son obtenidas mediante la formulación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = b_u u, \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

Al desarrollar (3.5) se obtiene el modelo dinámico del sistema triple péndulo invertido sobre un carro, el cual es el siguiente:

$$\begin{aligned}
(m_c + m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_1 - (m_1 + m_2 + m_3)l_1\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + (m_2 + m_3)l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 - m_3l_3\cos(\theta_3)\ddot{\theta}_3 \\
+ (m_1 + m_2 + m_3)l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1) - (m_2 + m_3)l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2) + m_3l_3\dot{\theta}_3^2\sin(\theta_3) = u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (m_1 + m_2 + m_3)l_1 \cos(\theta_1) \ddot{x}_1 + (m_1 + m_2 + m_3)l_1^2 \ddot{\theta}_1 - (m_2 + m_3)l_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\
& \quad + m_3 l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 + (m_2 + m_3)l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_3^2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) \\
& \quad - (m_1 + m_2 + m_3)l_1 g \text{sen}(\theta_1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_2 + m_3)l_2 \cos(\theta_2) \ddot{x}_1 - (m_2 + m_3)l_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 + m_3)l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 \\
& \quad + \theta_3) \ddot{\theta}_3 + (m_2 + m_3)l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_3^2 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) - (m_2 + m_3)g l_2 \text{sen}(\theta_2) \\
& \quad = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - m_3 l_3 \cos(\theta_3) \ddot{x}_1 + m_3 l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_1 - m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \ddot{\theta}_2 + m_3 l_3^2 \ddot{\theta}_3 \\
& \quad - m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_1^2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) + m_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) - m_3 l_3 g \text{sen}(\theta_3) = 0
\end{aligned}$$

El cual tiene la forma matricial siguiente:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \Xi_4 & -\Xi_3 l_1 \cos(\theta_1) & \Xi_2 l_2 \cos(\theta_2) & -m_3 l_3 \cos(\theta_3) \\ -\Xi_3 l_1 \cos(\theta_1) & \Xi_3 l_1^2 & -\Xi_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & m_3 l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ \Xi_2 l_2 \cos(\theta_2) & -\Xi_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & \Xi_2 l_2^2 & -m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ -m_3 l_3 \cos(\theta_3) & m_3 l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & -m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) & m_3 l_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \Xi_3 l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_1) & -\Xi_2 l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) & m_3 l_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3) \\ 0 & 0 & \Xi_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) \\ 0 & \Xi_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & m_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & -m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) & m_3 l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Xi_3 l_1 g \text{sen}(\theta_1) \\ -\Xi_2 l_2 g \text{sen}(\theta_2) \\ -m_3 l_3 g \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde $\Xi_2 = m_2 + m_3$, $\Xi_3 = m_1 + m_2 + m_3$, y $\Xi_4 = m_c + m_1 + m_2 + m_3$.

3.3.2 Linealización tangencial aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable.

En este punto se puede ver que los tres casos de péndulos invertidos sobre un carro son modelos no diferencialmente planos en su forma no lineal por tanto no hay manera de compararlos con otros sistemas lineales controlables por medio de una transformación de coordenadas de los estados. El modelo puede ser linealizado alrededor de un punto de equilibrio inestable como en los casos anteriores por ello se linealizará el sistema alrededor del punto de equilibrio 0 expresado de la siguiente manera:

$$\bar{x}_1 = 0; \quad \bar{\dot{x}}_1 = 0; \quad \bar{\theta}_1 = 0; \quad \bar{\dot{\theta}}_1 = 0; \quad \bar{\theta}_2 = 0; \quad \bar{\dot{\theta}}_2 = 0; \quad \bar{\theta}_3 = 0 \quad \bar{\dot{\theta}}_3 = 0 \quad \bar{u} = 0$$

Las variables incrementales que representan las variaciones desde el punto de equilibrio son:

$$x_{1\delta} = x_1 - \bar{x}_1; \quad \theta_{1\delta} = \theta_1 - \bar{\theta}_1; \quad \theta_{2\delta} = \theta_2 - \bar{\theta}_2; \quad \theta_{3\delta} = \theta_3 - \bar{\theta}_3; \quad u_\delta = u - \bar{u}$$

El sistema linealizado está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \Xi_4 & -\Xi_3 l_1 & \Xi_2 l_2 & -m_3 l_3 \\ -\Xi_3 l_1 & \Xi_3 l_1^2 & -\Xi_2 l_1 l_2 & m_3 l_1 l_3 \\ \Xi_2 l_2 & -\Xi_2 l_1 l_2 & \Xi_2 l_2^2 & -m_3 l_2 l_3 \\ -m_3 l_3 & m_3 l_1 l_3 & -m_3 l_2 l_3 & m_3 l_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{2\delta} \\ \dot{\theta}_{3\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Xi_3 l_1 g \theta_{1\delta} \\ -\Xi_2 l_2 g \theta_{2\delta} \\ -m_3 l_3 g \theta_{3\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3.3 Obtención de la salida plana para el sistema de triple péndulo invertido sobre un carro

El sistema linealizado se coloca en la representación de estados, dada por la siguiente ecuación.

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + bu_\delta \quad (3.6)$$

De donde se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ \theta_{1\delta} \\ \theta_{2\delta} \\ \theta_{3\delta} \\ \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{2\delta} \\ \dot{\theta}_{3\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_1+m_2+m_3}{m_c} g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m_c+m_1)(m_1+m_2+m_3)}{m_c m_1} \frac{g}{l_1} & \frac{m_2+m_3}{m_1} \frac{g}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1+m_2+m_3}{m_1} \frac{g}{l_2} & \frac{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}{m_1 m_2} \frac{g}{l_2} & \frac{m_3}{m_2} \frac{g}{l_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2+m_3}{m_2} \frac{g}{l_3} & \frac{m_2+m_3}{m_2} \frac{g}{l_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ \theta_{1\delta} \\ \theta_{2\delta} \\ \theta_{3\delta} \\ \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{1\delta} \\ \dot{\theta}_{2\delta} \\ \dot{\theta}_{3\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ \frac{1}{m_c l_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.7)$$

El sistema linealizado representado por (3.7) es controlable, la matriz de controlabilidad del sistema es de rango completo cumpliéndose el criterio de Kalman. La salida plana del sistema es:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b & A^4b & A^5b & A^6b & A^7b \end{bmatrix}^{-1} q_\delta \quad (3.8)$$

donde q_δ es:

$$q_\delta = \begin{bmatrix} x_{1\delta} & \theta_{1\delta} & \theta_{2\delta} & \theta_{3\delta} & \dot{x}_{1\delta} & \dot{\theta}_{1\delta} & \dot{\theta}_{2\delta} & \dot{\theta}_{3\delta} \end{bmatrix}^T \quad (3.9)$$

3.4 Resumen del capítulo

A lo largo del Capítulo 3 se han descrito matemáticamente tres sistemas sub-actuados, los cuales son el péndulo invertido sobre un carro, doble péndulo invertido sobre un carro y triple péndulo invertido sobre un carro. Sus modelos dinámicos y sus equivalentes lineales son hallados por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange y los desarrollos mostrados en el Capítulo 2, su representación en espacio de estados ha permitido evaluar su controlabilidad para proceder a establecer una salida plana para cada sistema.

Capítulo 4

Parametrización diferencial

La salida plana permite una serie de relaciones, esto debido a la posibilidad de representar las derivadas pares de la misma en términos de las variables de posición generalizadas del sistema.

4.1 Parametrización diferencial del sistema: Péndulo invertido sobre un carro

Se ha obtenido la salida plana del sistema, la cual es descrita por:

$$y_{0\delta} = \frac{m_c l_1}{g} \begin{bmatrix} -1 & l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ \theta_{1\delta} \end{bmatrix} = \frac{m_c l_1}{g} (-x_{1\delta} + l_1 \theta_{1\delta}) \quad (4.1)$$

$$\beta_1^{-1} = \frac{m_c l_1}{g} \quad \beta_1 = \frac{g}{m_c l_1}$$

Realizando el cambio de variable siguiente $\psi_{0\delta} = (g/m_c l_1)y_{0\delta}$ es posible redefinir la salida plana como $\psi_{0\delta}$ la cual es una proporción de $y_{0\delta}$.

$$\psi_{0\delta} = -x_{1\delta} + l_1 \theta_{1\delta} \quad (4.2)$$

Al realizar las $2n$ -ésimas derivadas temporales, tenemos lo siguiente:

$$\dot{\psi}_{0\delta} = -\dot{x}_{1\delta} + l_1 \dot{\theta}_{1\delta} \quad (4.3)$$

$$\psi_{0\delta}^{(2)} = -\ddot{x}_{1\delta} + l_1 \ddot{\theta}_{1\delta} = g\theta_{1\delta} \quad (4.4)$$

$$\psi_{0\delta}^{(3)} = g\dot{\theta}_{1\delta} \quad (4.5)$$

$$\psi_{0\delta}^{(4)} = \frac{g}{l_1 m_c} (u_\delta + g(m_c + m_1)\theta_{1\delta}) \quad (4.6)$$

Con las ecuaciones anteriores podemos reescribir $\psi_{0\delta}^{(4)}$ en términos de las derivadas de la salida plana $\psi_{0\delta}$.

$$\psi_{0\delta}^{(4)} = \frac{g}{l_1 m_c} (u_\delta + (m_c + m_1)\psi_{0\delta}^{(2)})$$

Además el modelo entrada-salida es el representado por la figura 4.1.

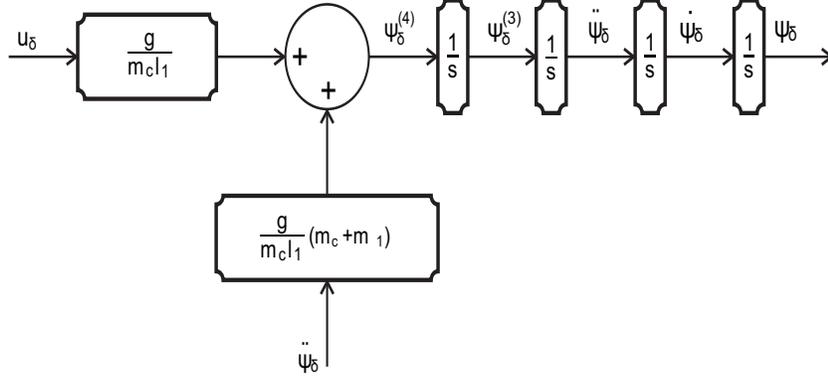


Figura 4.1: Planta en representación de integración pura de cuarto orden.

4.2 Parametrización diferencial del sistema: Doble péndulo invertido sobre un carro

Se ha obtenido la salida plana del sistema, la cual es descrita por:

$$y_{0\delta} = \frac{m_c m_1 l_1}{(m_1 + m_2) m_2 g^2} \begin{bmatrix} m_2 l_2 & -m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ \theta_{1\delta} \\ \theta_{2\delta} \end{bmatrix} = \beta_2^{-1} (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta})$$

$$\beta_2^{-1} = \frac{m_c m_1 l_1}{(m_1 + m_2) m_2 g^2} \quad \beta_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_2 g^2}{m_c m_1 l_1}$$

Realizando el cambio de variable siguiente $\psi_{0\delta} = \beta_2 y_{0\delta}$ es posible redefinir la salida plana como $\psi_{0\delta}$ la cual es una proporción de $y_{0\delta}$.

$$\psi_{0\delta} = m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} \quad (4.1)$$

Al realizar las $2n$ -ésimas derivadas temporales, tenemos lo siguiente:

$$\dot{\psi}_{0\delta} = m_2 l_2 \dot{x}_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_{1\delta} + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_{2\delta} \quad (4.2)$$

$$\psi_{0\delta}^{(2)} = m_2 l_2 \ddot{x}_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_{1\delta} + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_{2\delta} = m_2 g l_2 \theta_{2\delta} \quad (4.3)$$

$$\psi_{0\delta}^{(3)} = m_2 g l_2 \dot{\theta}_{2\delta} \quad (4.4)$$

$$\psi_{0\delta}^{(4)} = \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{m_1} g^2 (\theta_{1\delta} + \theta_{2\delta}) \quad (4.5)$$

$$\psi_{0\delta}^{(5)} = \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{m_1} g^2 (\dot{\theta}_{1\delta} + \dot{\theta}_{2\delta}) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0\delta}^{(6)} &= \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{m_c m_1} \frac{g^2}{l_1} u_\delta + \frac{m_2 (m_1 + m_2)^2}{m_c m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} (m_c (l_1 + l_2) + m_1 l_2) \theta_{1\delta} \\ &+ \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} ((m_1 + m_2) l_1 + m_2 l_2) \theta_{2\delta} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Con las ecuaciones anteriores podemos reescribir $\psi_{0\delta}^{(6)}$ en términos de las derivadas de la salida plana $\psi_{0\delta}$

$$\begin{aligned}\psi_{0\delta}^{(6)} &= \frac{m_2(m_1 + m_2)g^2}{m_c m_1 l_1} u_\delta - \frac{(m_c + m_1 + m_2)(m_1 + m_2)g^2}{m_c m_1 l_1 l_2} \psi_{0\delta}^{(2)} \\ &+ \frac{m_1 + m_2}{m_c m_1} \frac{g}{l_1 l_2} (m_c(l_1 + l_2) + m_1 l_2) \psi_{0\delta}^{(4)}\end{aligned}$$

Además el modelo entrada-salida es el representado por la figura 4.2.

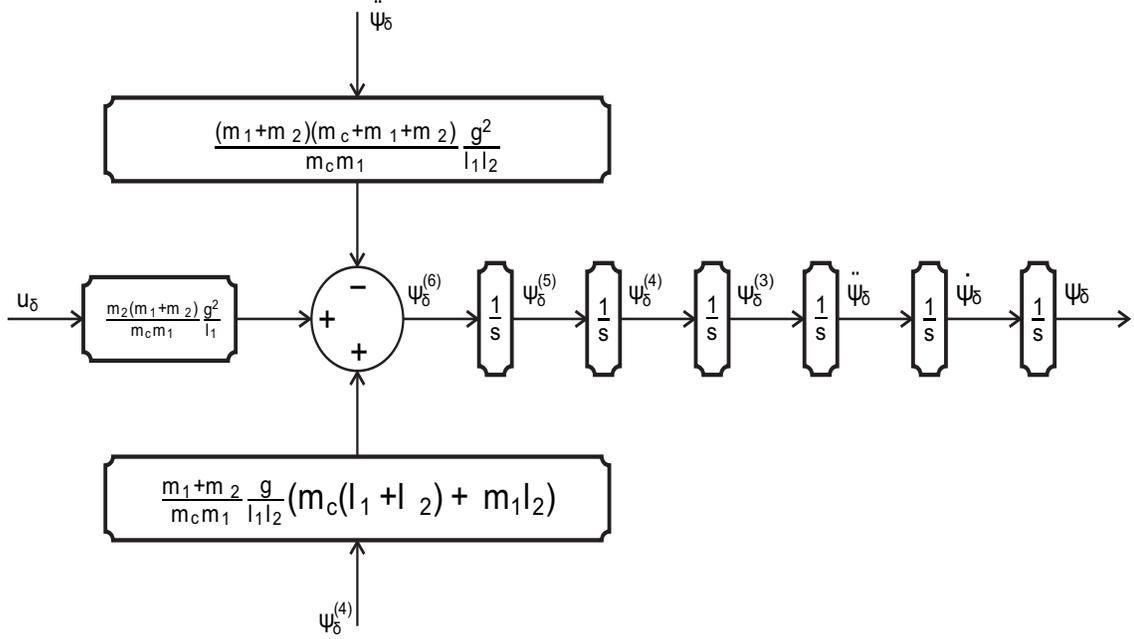


Figura 4.2: Planta en representación de integración pura de sexto orden.

4.3 Parametrización diferencial del sistema: Triple péndulo invertido sobre un carro

Se ha obtenido la salida plana del sistema, la cual es descrita por:

$$y_{0\delta} = \frac{m_c m_1 m_2 l_1 l_2 l_3}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)g^3} \begin{bmatrix} -1 & l_1 & -l_2 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ \theta_{1\delta} \\ \theta_{2\delta} \\ \theta_{3\delta} \end{bmatrix}$$

$$\psi_{0\delta} = \beta_3 (-x_{1\delta} + l_1 \theta_{1\delta} - l_2 \theta_{2\delta} + l_3 \theta_{3\delta})$$

$$\beta_3^{-1} = \frac{m_c m_1 m_2 l_1 l_2 l_3}{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)g^3} \quad \beta_3 = \frac{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)g^3}{m_c m_1 m_2 l_1 l_2 l_3}$$

Realizando el cambio de variable siguiente $\psi_{0\delta} = \beta_3 y_{0\delta}$ es posible redefinir la salida plana como $\psi_{0\delta}$ la cual es una proporción de $y_{0\delta}$.

$$\psi_{0\delta} = -x_{1\delta} + l_1\theta_{1\delta} - l_2\theta_{2\delta} + l_3\theta_{3\delta} \quad (4.1)$$

Al realizar las $2n$ -ésimas derivadas temporales, tenemos lo siguiente:

$$\dot{\psi}_{0\delta} = -\dot{x}_{1\delta} + l_1\dot{\theta}_{1\delta} - l_2\dot{\theta}_{2\delta} + l_3\dot{\theta}_{3\delta} \quad (4.2)$$

$$\psi_{0\delta}^{(2)} = -\ddot{x}_{1\delta} + l_1\ddot{\theta}_{1\delta} - l_2\ddot{\theta}_{2\delta} + l_3\ddot{\theta}_{3\delta} = g\theta_{3\delta} \quad (4.3)$$

$$\psi_{0\delta}^{(3)} = g\dot{\theta}_{3\delta} \quad (4.4)$$

$$\psi_{0\delta}^{(4)} = \frac{(m_2 + m_3)g^2}{m_2l_3}(\theta_{2\delta} + \theta_{3\delta}) \quad (4.5)$$

$$\psi_{0\delta}^{(5)} = \frac{(m_2 + m_3)g^2}{m_2l_3}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0\delta}^{(6)} &= \frac{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)g^3}{m_1m_2l_2l_3}\theta_{1\delta} \\ &+ \frac{(m_2 + m_3)^2g^3}{m_1m_2^2l_2l_3^2}(m_1(l_2 + l_3) + m_2l_3)\theta_{2\delta} \\ &+ \frac{(m_2 + m_3)g^3}{m_2^2l_2l_3^2}(m_2l_2 + m_3(l_2 + l_3))\theta_{3\delta} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0\delta}^{(7)} &= \frac{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)g^3}{m_1m_2l_2l_3}\dot{\theta}_{1\delta} \\ &+ \frac{(m_2 + m_3)^2g^3}{m_1m_2^2l_2l_3^2}(m_1(l_2 + l_3) + m_2l_3)\dot{\theta}_{2\delta} \\ &+ \frac{(m_2 + m_3)g^3}{m_2^2l_2l_3^2}(m_2l_2 + m_3(l_2 + l_3))\dot{\theta}_{3\delta} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\psi_{0\delta}^{(8)} = \varrho^{-1}u_\delta + \varrho_2\theta_{1\delta} + \varrho_3\theta_{2\delta} + \varrho_4\theta_{3\delta} \quad (4.9)$$

Donde

$$\begin{aligned} \varrho_2 &= \frac{(m_2 + m_3)^2(m_1 + m_2 + m_3)g^4}{m_cm_1^2m_2^2l_1^2l_2^2l_3^2}(m_cm^2l_1l_3 + m_cm^2l_2l_3 + m_1m_2^2l_2l_3 + m_1^2m_2l_2l_3 \\ &+ m_cm_1m_2l_1l_2 + m_cm_1m_3l_1l_2 + m_cm_1m_2l_1l_3 + m_cm_1m_3l_1l_3 + m_cm_1m_2l_2l_3 \\ &+ m_cm_2m_3l_1l_3 + m_cm_2m_3l_2l_3 + m_1m_2m_3l_2l_3) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \varrho_3 &= \frac{(m_2 + m_3)^2g^4}{m_1^2m_2^3l_1^2l_2^2l_3^3}(m_1^2m_2l_1l_2^2 + m_1^2m_3l_1l_2^2 + m_1m_2^2l_2l_3^2 + m_2^3l_2l_3^2 + m_3m_2^2l_2l_3^2 \\ &+ m_1^2m_2l_1l_2l_3 + 2m_1^2m_3l_1l_2l_3 + m_1m_2^2l_1l_2l_3 + m_1m_2m_3l_1l_2l_3 + m_1^2m_2l_1l_2^2 \\ &+ m_1^2m_3l_1l_3^2 + 2m_1m_2^2l_1l_3^2 + 2m_1m_2m_3l_1l_3^2 + m_2^3l_1l_3^2 + m_2^2m_3l_1l_3^2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\varrho_4 = \frac{(m_2 + m_3)^2g^4}{m_1m_2^3l_2^2l_3^3}(m_1m_2l_2^2 + m_1m_3l_2^2 + m_1m_3l_3^2 + m_2m_3l_3^2 + 2m_1m_3l_2l_3) \quad (4.12)$$

En términos de $\psi_{0\delta}$ y sus derivadas.

$$\psi_{0\delta}^{(8)} = \beta_3u + \varrho_5\psi_{0\delta}^{(2)} + \varrho_6\psi_{0\delta}^{(4)} + \varrho_7\psi_{0\delta}^{(6)} \quad (4.13)$$

Donde

$$\rho_5 = \frac{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3 g^3)}{m_c m_1 m_2 l_1 l_2 l_3} (m_c + m_1 + m_2 + m_3) \quad (4.14)$$

$$\rho_6 = \frac{g^2 (m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)}{l_1 l_2 l_3 m_c m_1 m_2} (l_2 m_1 + l_3 m_1 + l_3 m_2 + l_1 m_c + l_2 m_c + l_3 m_c) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \rho_7 = & \frac{g}{l_1 l_2 l_3 m_c m_1 m_2} (l_1 l_3 m_c m_2^2 + l_2 l_3 m_c m_2^2 + l_2 l_3 m_1 m_2^2 + l_2 l_3 m_1^2 m_2 + l_1 l_2 m_c m_1 m_2 \\ & + l_1 l_2 m_c m_1 m_3 + l_1 l_3 m_c m_1 m_2 + l_1 l_3 m_c m_1 m_3 + l_2 l_3 m_c m_1 m_2 + l_1 l_3 m_c m_2 m_3 \\ & + l_2 l_3 m_c m_2 m_3 + l_2 l_3 m_1 m_2 m_3) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Además el modelo entrada salida es el representado por la figura 4.3.

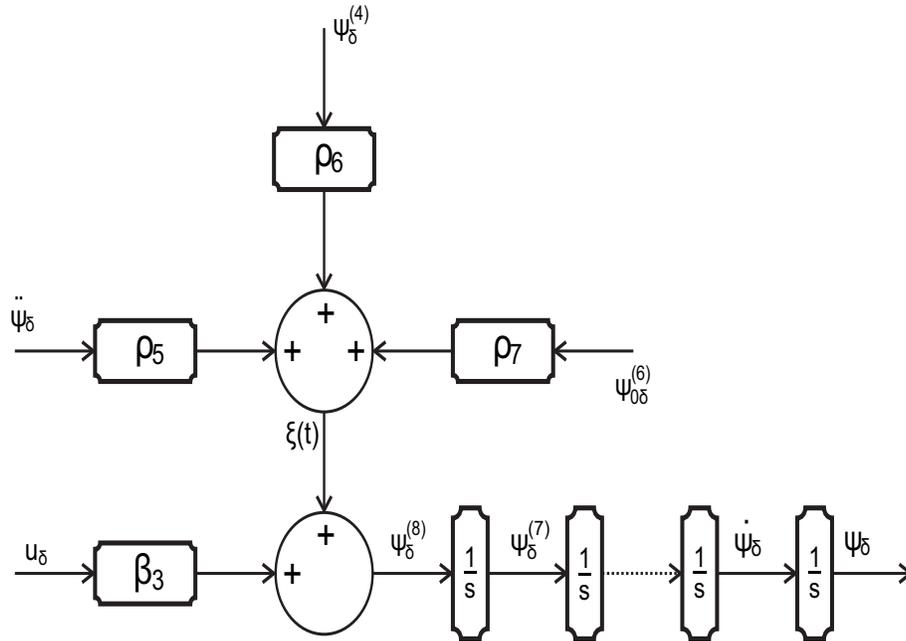


Figura 4.3: Planta en representación de integración pura de octavo orden.

4.4 Resumen del capítulo

Una vez halladas las salidas planas en el Capítulo 3, en el Capítulo 4 se tratan las salidas diferencialmente, esto es, derivar las señales hasta lograr modelos entrada-salida, las cuales son representadas en términos de los estados de los sistemas sub-actuados correspondiente y en términos de sus salidas planas y derivadas.

Capítulo 5

Diseño de ADRC a partir de observadores de estado extendido (ESO)

Recordando que las derivadas pares de la salida plana son dependientes del vector generalizado de posición y las derivadas impares son dependientes del vector generalizado de velocidad, véase [26], entonces es posible simplificar el diseño del esquema de control.

Se realizarán los diseños de los esquemas de control correspondientes a los sistemas, péndulo invertido sobre un carro, doble péndulo invertido sobre un carro y triple péndulo invertido sobre un carro, para estabilización alrededor de un punto de equilibrio dado, véase el Apéndice 8.2 donde se plantean los desarrollos en el dominio de la frecuencia.

Tomando las ecuaciones obtenidas en el Capítulo 4 es posible representar los sistemas en la forma entrada-salida siguiente:

$$\psi^{(2n)} = \beta u_\delta + \xi$$

El vector generalizado de velocidad será estimado con ayuda de ESO así como la perturbación.

5.0.1 Esquema ADRC para un sistema de cuarto orden

El sistema de péndulo invertido sobre un carro exhibe la relación entrada salida siguiente:

$$\psi^{(4)} = \beta_1 u_\delta + \xi$$

Cuya expresión es simplificada y además permite tratar el problema como un sistema de integración pura de cuarto orden.

El esquema ADRC basado en el observador ESO permitirá estimar las derivadas de la salida plana a través de integraciones que incluirán también la estimación de la pertur-

bación de forma simultanea.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\psi}}_0 &= \hat{\psi}_1 + \lambda_4(\psi_0 - \hat{\psi}_0) \\
\dot{\hat{\psi}}_1 &= \hat{\psi}_2 + \lambda_3(\psi_0 - \hat{\psi}_0) \\
\dot{\hat{\psi}}_2 &= \hat{\psi}_3 + \lambda_2(\psi_0 - \hat{\psi}_0) \\
\dot{\hat{\psi}}_3 &= \hat{\xi} + \beta_1 u_\delta + \xi + \lambda_1(\psi_0 - \hat{\psi}_0) \\
\dot{\hat{\xi}} &= \lambda_0(\psi_0 - \hat{\psi}_0)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

El error está definido por $e_0 = \psi_0 - \hat{\psi}_0$, $e_1 = \psi_1 - \hat{\psi}_1$, $e_2 = \psi_2 - \hat{\psi}_2$, $e_3 = \psi_3 - \hat{\psi}_3$.

$$\begin{aligned}
\dot{e}_0 &= e_1 - \lambda_4 e_0 \\
\dot{e}_1 &= e_2 - \lambda_3 e_0 \\
\dot{e}_2 &= e_3 - \lambda_2 e_0 \\
\dot{e}_3 &= \xi - \hat{\xi} - \lambda_1 e_0 \\
\dot{\hat{\xi}} &= \lambda_0 e_0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

La dinámica del error satisface la ecuación diferencial siguiente:

$$e_0^{(5)} + \lambda_4 e_0^{(4)} + \lambda_3 e_0^{(3)} + \lambda_2 \ddot{e}_0 + \lambda_1 \dot{e}_0 + \lambda_0 e_0 = \dot{\xi}(t) \tag{5.3}$$

Los efectos de la perturbación que acompañan a la señal de entrada son atenuados mediante los parámetros λ_l con $l = 0, \dots, 4$ a fin de que la perturbación pueda decrecer exponencialmente a cero. Los parámetros pueden ser obtenidos al igualar el polinomio que describe la dinámica del error a un polinomio Hurwitz de quinto grado $(s^2 + 2\chi w s + w^2)^2(s + p)$. Donde:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= p w^4 \\
\lambda_1 &= 4p\chi w^3 + w^4 \\
\lambda_2 &= p(4w^2\chi^2 + 2w^2) + 4w^3\chi \\
\lambda_3 &= 2w(2w\chi^2 + 2p\chi + w) \\
\lambda_4 &= 4w\chi + p
\end{aligned} \tag{5.4}$$

El control en conjunto con el observador de estado extendido habrán de incluir el comportamiento deseado en los valores de las variables de estado ψ .

$$e_u = \frac{1}{\beta_1} \left[-\hat{\xi} - k_0 e_0 - k_1 e_1 - k_2 e_2 - k_3 e_3 \right] \tag{5.5}$$

Los parámetros k_l con $l = 0, \dots, 3$ son obtenidos a través de un polinomio de cuarto grado de la forma $(s^2 + 2\chi_c w_c s + 2w_c)^2$

$$\begin{aligned}
k_0 &= w_c^4 \\
k_1 &= 4\chi_c w_c^3 \\
k_2 &= 4\chi_c^2 w_c^2 + 2w_c^2 \\
k_3 &= 4\chi_c w_c
\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.0.2 Simulación de esquema ADRC

En la Tabla 5.1 se muestran los valores utilizados para estabilizar las variables x , θ con condiciones iniciales $0 [m]$, $\pi/24 [rad]$ y un paso de integración de $1 \times 10^{-5} [s]$. Los resultados son mostrados por la gráfica 5.1.

Atributo	Valor	Atributo	Valor
Masa del carro (m_c) [kg]	1.5	$w [rad/s]$	5
Masa del péndulo (m) [kg]	0.8	$\chi [Ns/m]$	1
Longitud del péndulo (l_1) [m]	0.6	$w_c [rad/s]$	4
Gravedad (g) [m/s^2]	9.8	$\chi_c [Ns/m]$	1

Tabla 5.1: Parámetros utilizados en el sistema péndulo simple invertido sobre un carro.

En la gráfica 5.1 se aprecia el comportamiento de x y θ a cero, su punto de equilibrio. De igual manera son exhibidas las oscilaciones obtenidas por cada estado de posición pudiendo notar que no salen de los rangos de $-0.3 [m]$, $0.3 [m]$ y $-0.2 [rad]$, $0.2 [rad]$ para x y θ respectivamente. Finalmente se aprecia la señal de control restringida entre -10 a $10 [N]$ y el comportamiento de la salida plana ψ .

En la gráfica de la figura 5.2 se aprecia la perturbación estimada cuando es inducido al sistema una perturbación de la forma descrita por la ecuación (5.7), donde las condiciones iniciales para x y θ , son ambas cero. Así mismo se aprecian las tendencias de las variables de interés a cero; resultado esperado.

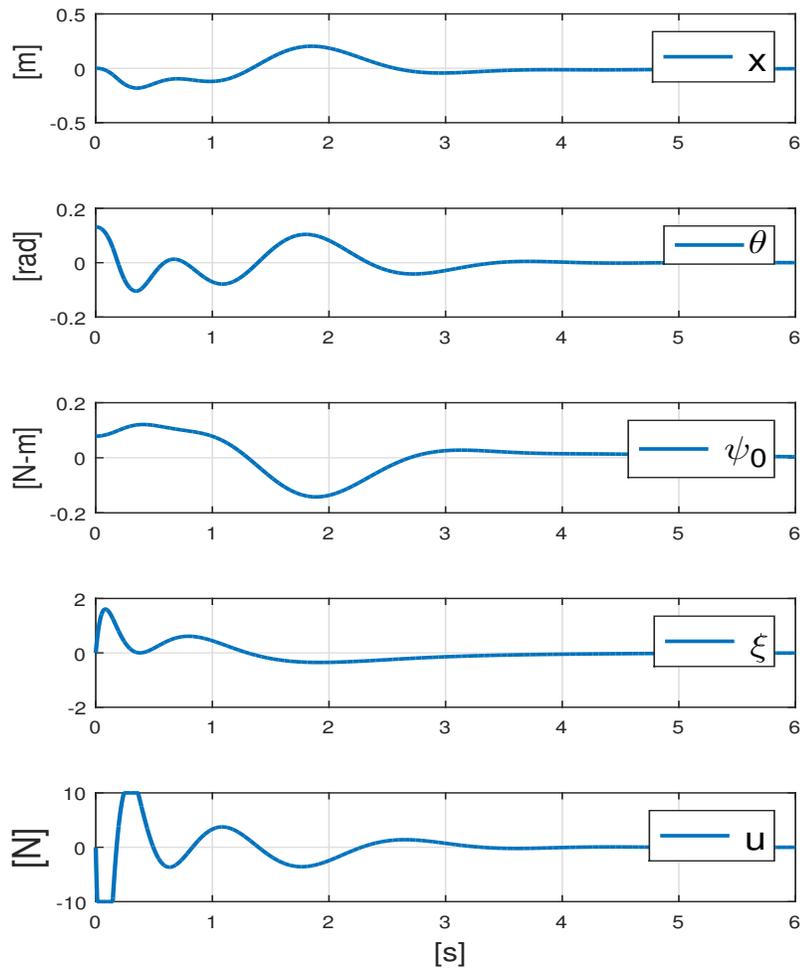


Figura 5.1: Salida plana, perturbación estimada y señal de control; estabilización de x y θ a cero.

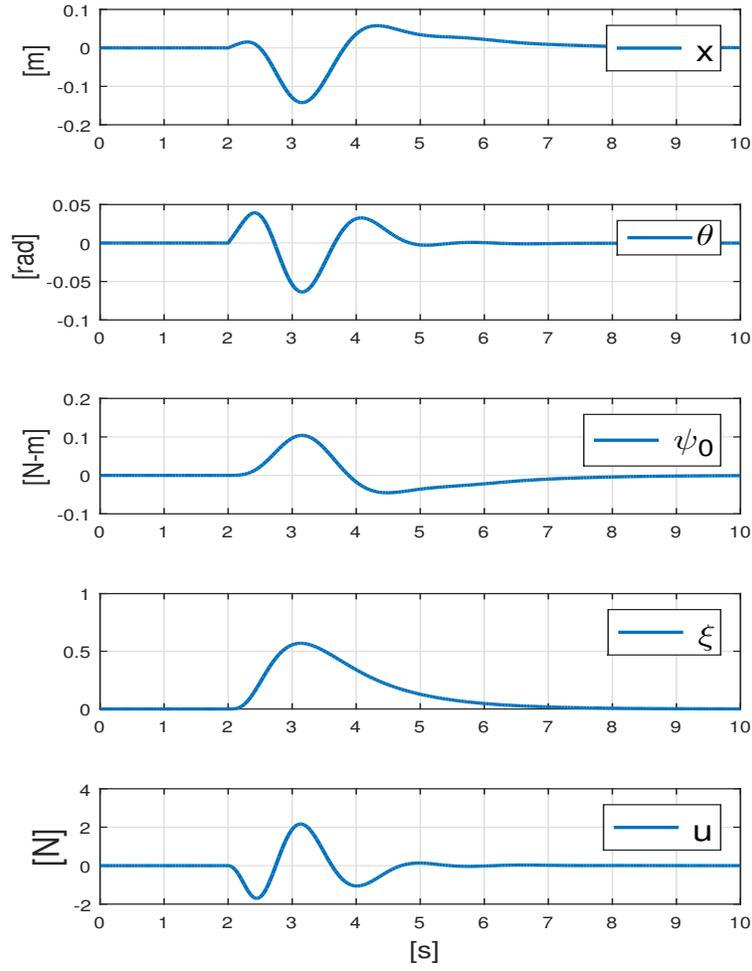


Figura 5.2: Salida plana, perturbación estimada y señal de control; estabilización de x y θ a cero.

Los efectos de perturbación inducidos ξ al sistema son fuerzas impulsivas definidas de la siguiente manera:

$$\xi_u(t - 2.0005[s]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 2[s] \\ \frac{1}{2(5 \times 10^{-4})} & \text{si } 2[s] \leq t \leq 2[s] + 1 \times 10^{-3}[s] \\ 0 & \text{si } t > 2[s] + 1 \times 10^{-3}[s] \end{cases} \quad \xi = b \xi_u \quad (5.7)$$

5.1 Esquema ADRC para un sistema de sexto orden

El sistema de doble péndulo simple invertido sobre un carro exhibe la relación entrada salida siguiente

$$\psi^{(6)} = \beta u_\delta + \xi$$

Cuya expresión es simplificada y además permite tratar el problema como un sistema de integración pura de sexto orden.

Recordando el modelo descrito por (4.7)

$$\psi_{0\delta} = m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta}$$

$$\begin{aligned} \psi_{0\delta}^{(6)} &= \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_c m_1} \frac{g^2}{l_1} u_\delta + \frac{m_2(m_1 + m_2)^2}{m_c m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} (m_c(l_1 + l_2) + m_1 l_2) \theta_{1\delta} \\ &\quad + \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} ((m_1 + m_2)l_1 + m_2 l_2) \theta_{2\delta} \end{aligned}$$

El esquema de control basado en el observador ESO permitirá estimar las derivadas de la salida plana a través de integraciones que incluirán también la estimación de la perturbación.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\psi}_0 &= \hat{\psi}_1 + \lambda_6 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{\psi}_1 &= \hat{\psi}_2 + \lambda_5 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{\psi}_2 &= \hat{\psi}_3 + \lambda_4 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{\psi}_3 &= \hat{\psi}_4 + \lambda_3 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{\psi}_4 &= \hat{\psi}_5 + \lambda_2 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{\psi}_5 &= \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_c m_1} \frac{g^2}{l_1} u_\delta + \frac{m_2(m_1 + m_2)^2}{m_c m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} (m_c(l_1 + l_2) + m_1 l_2) \theta_{1\delta} \\ &\quad + \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} ((m_1 + m_2)l_1 + m_2 l_2) \theta_{2\delta} \\ &\quad + \hat{\xi} + \lambda_1 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{\xi} &= \lambda_0 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \end{aligned} \tag{5.1}$$

La diferencia que define al error está dada por $e_0 = \psi_0 - \hat{\psi}_0$, $e_1 = \psi_1 - \hat{\psi}_1$, $e_2 = \psi_2 - \hat{\psi}_2$, $e_3 = \psi_3 - \hat{\psi}_3$, $e_4 = \psi_4 - \hat{\psi}_4$, $e_5 = \psi_5 - \hat{\psi}_5$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e_0 &= e_1 - \lambda_6 e_0 \\
\frac{d}{dt} e_1 &= e_2 - \lambda_5 e_0 \\
\frac{d}{dt} e_2 &= e_3 - \lambda_4 e_0 \\
\frac{d}{dt} e_3 &= e_4 - \lambda_3 e_0 \\
\frac{d}{dt} e_4 &= e_5 - \lambda_2 e_0 \\
\frac{d}{dt} e_5 &= \xi_e - \hat{\xi} - \lambda_1 e_0 \\
\frac{d}{dt} \hat{\xi} &= \lambda_0 e_0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

La dinámica del error de estimación satisface la ecuación diferencial siguiente:

$$e_0^{(7)} + \lambda_6 e_0^{(6)} + \lambda_5 e_0^{(5)} + \lambda_4 e_0^{(4)} + \lambda_3 e_0^{(3)} + \lambda_2 \ddot{e}_0 + \lambda_1 \dot{e}_0 + \lambda_0 e_0 = \dot{\xi}(t) \tag{5.3}$$

Los efectos de la perturbación que acompañan a la señal de entrada son atenuados mediante los parámetros λ_l con $l = 0, \dots, 6$ a fin de que estos decrezcan exponencialmente a las cercanías de cero.

El control es entonces:

$$e_u = \frac{1}{\beta_2} \left[-k_5 e_5 - k_4 e_4 - k_3 e_3 - k_2 e_2 - k_1 e_1 - k_0 e_0 - \hat{\xi} \right] \tag{5.4}$$

Los parámetros pueden ser obtenidos al igualar los polinomios que describen la dinámica del error y el control e_u a polinomios Hurwitz. Donde:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= w^6 p & k_0 &= w_c^6 \\
\lambda_1 &= 6w^5 \chi p + w^6 & k_1 &= 6w_c^5 \chi_c \\
\lambda_2 &= 3w^4 (4\chi^2 p + 2w\chi + p) & k_2 &= 3w_c^4 (4\chi_c^2 + 1) \\
\lambda_3 &= w^3 (8\chi^3 p + 12w\chi^2 + 12\chi p + 3w) & k_3 &= 4w_c^3 \chi_c (2\chi_c^2 + 3) \\
\lambda_4 &= w^3 (8w\chi^3 + 12\chi^2 p + 12w\chi + 3p) & k_4 &= 3w_c^2 (4\chi_c^2 + 1) \\
\lambda_5 &= 3w (4w\chi^2 + 2\chi p + w) & k_5 &= 6w_c \chi_c \\
\lambda_6 &= 6w\chi + p & &
\end{aligned} \tag{5.5}$$

5.1.1 Simulación de esquema ADRC

En la Tabla 5.2, con una condición inicial de 0 [m], 0.001 [rad] en θ_1 , 0 [rad] en θ_2 y $p = 1$ se muestran los valores utilizados para la gráfica 5.3 con un paso de integración de 1×10^{-5} [s].

Atributo	Valor	Atributo	Valor
Masa del carro (m_c) [kg]	0.3	w [rad/s]	10
Masa de los péndulos (m_1, m_2) [kg]	0.1	χ [Ns/m]	1
Longitud de los péndulos (l_1, l_2) [m]	0.4	w_c [rad/s]	2.5
Gravedad (g) [m/s^2]	9.8	χ_c [Ns/m]	1

Tabla 5.2: Parámetros utilizados en el sistemas doble péndulo invertido sobre un carro.

En la gráfica 5.3 se aprecia la tendencia de x , θ_1 y θ_2 a cero, su punto de equilibrio inestable, por medio de la ley de control u a través de ψ . Los resultados esperados son visibles en aproximadamente 10 [s] mientras que la ley de control u no excede los 2 [N] debido a la reducción en los pesos del carro y los péndulos. El resultaod es obtenido bajo condiciones iniciales en el primer péndulo y en ausencia de perturbación, a pesar de ello se incluye la evolución de ξ estimada.

En la gráfica de la figura 5.4 se aprecian los comportamientos de las variables de estado, la estimación de ξ cuando a el sistema es inducida una perturbación descrita por la función (5.6) bajo condiciones iniciales para x , θ_1 y θ_2 , todas iguales a cero.

Los efectos de perturbación inducidos ξ al sistema son fuerzas impulsivas definidas de la siguiente manera:

$$\xi_u(t - 3.000005[s]) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq t < 3[s] \\ \frac{1}{2(5 \times 10^{-6})} & si\ 3[s] \leq t \leq 3[s] + 1 \times 10^{-5}[s] \\ 0 & si\ t > 3[s] + 1 \times 10^{-5}[s] \end{cases} \quad \xi = b \xi_u \quad (5.6)$$

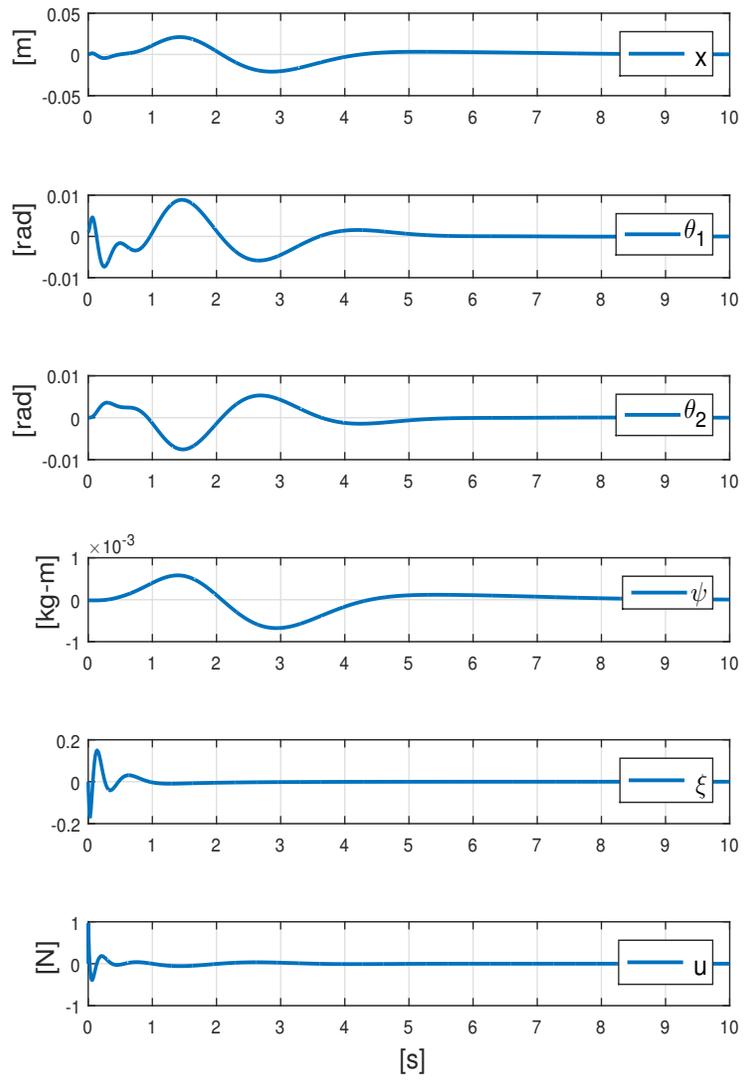


Figura 5.3: Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , ξ estimada, salida plana y entrada de control u .

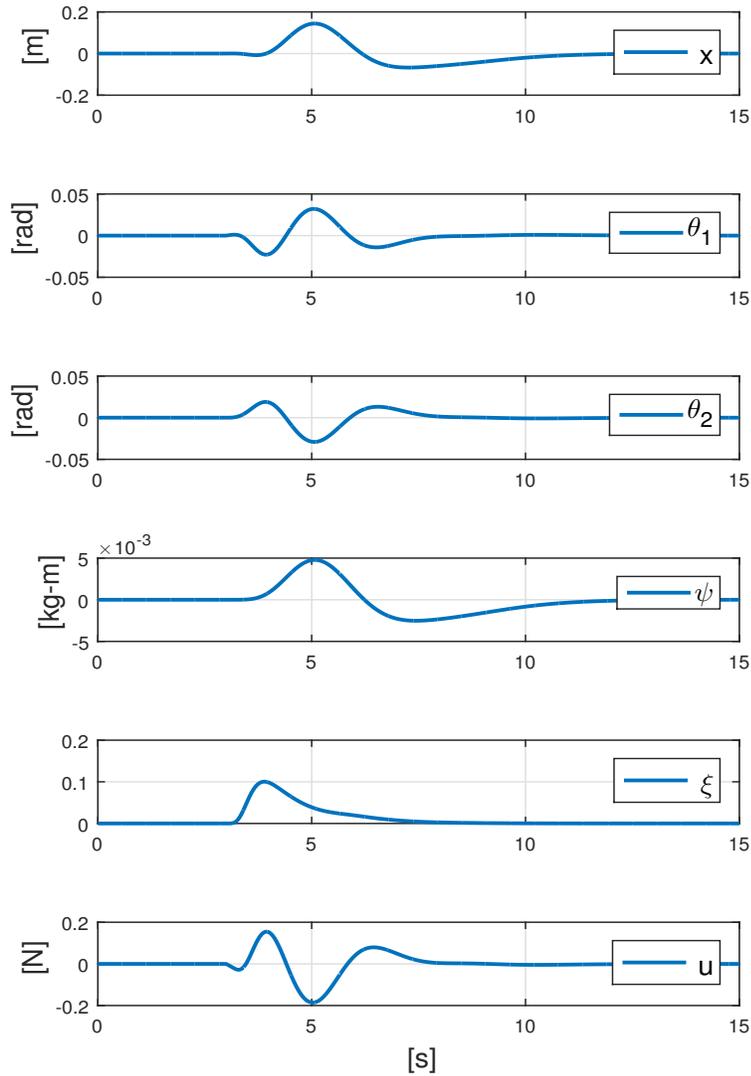


Figura 5.4: Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , ξ estimada, salida plana y entrada de control u .

5.2 ADRC con observadores en cascada de sexto orden

A través de la parametrización diferencial y la necesidad de estimar las variables no medidas del vector de estado ψ es posible rediseñar el control a partir de observadores en cascada que estimen las derivadas impares de ψ_0 conocidas las derivadas pares que a su vez dependen del vector de posición generalizado. Las relaciones obtenidas para el sistema de doble

péndulo invertido sobre un carro han sido definidas de la siguiente manera:

$$\frac{d^2}{dt^2} \psi_{0\delta} = m_2 g l_2 \theta_{2\delta} \quad \frac{d^4}{dt^4} \psi_{0\delta} = \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2 (\theta_{1\delta} + \theta_{2\delta}) \quad (5.1)$$

De las ecuaciones descritas por (5.1) se puede ver claramente que $(d^2/dt^2) \psi_{0\delta}$ y $(d^4/dt^4) \psi_{0\delta}$ dependen de $\theta_{1\delta}$ y $\theta_{2\delta}$, ambas variables generalizadas de posición del primer y segundo péndulo. El observador que estimará la primer derivada de la salida plana es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\psi}_0 &= \hat{\psi}_1 + \lambda_3 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{\psi}_1 &= m_2 g l_2 \theta_{2\delta} + \lambda_2 (m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0) \end{aligned} \quad (5.2)$$

El observador que estimará la tercer derivada con respecto del tiempo de la salida plana es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\psi}_2 &= \hat{\psi}_3 + \lambda_1 (m_2 g l_2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_2) \\ \frac{d}{dt} \hat{\psi}_3 &= \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2 (\theta_{1\delta} + \theta_{2\delta}) + \lambda_0 (m_2 g l_2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Finalmente el observador que estimará la quinta derivada con respecto del tiempo y las perturbaciones (dinámicas no modeladas, perturbaciones a la entrada, etc) es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\psi}_4 &= \hat{\psi}_5 + \lambda_6 \left(\frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2 (\theta_{1\delta} + \theta_{2\delta}) - \hat{\psi}_4 \right) \\ \frac{d}{dt} \hat{\psi}_5 &= \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_c m_1} \frac{g^2}{l_1} u_\delta + \frac{m_2(m_1 + m_2)^2}{m_c m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} (m_c (l_1 + l_2) + m_1 l_2) \theta_{1\delta} \\ &\quad + \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} ((m_1 + m_2) l_1 + m_2 l_2) \theta_{2\delta} \\ &\quad + \hat{\xi} + \lambda_5 \left(\frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2 (\theta_{1\delta} + \theta_{2\delta}) - \hat{\psi}_4 \right) \\ \frac{d}{dt} \hat{\xi} &= \lambda_4 \left(\frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2 (\theta_{1\delta} + \theta_{2\delta}) - \hat{\psi}_4 \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Los errores están dados por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} e_0 &= m_2 l_2 x_{1\delta} - m_2 l_1 l_2 \theta_{1\delta} + m_2 l_2^2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_0 \\ e_{\theta_2} &= m_2 g l_2 \theta_{2\delta} - \hat{\psi}_2 \\ e_{\theta_{1,2}} &= \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2 (\theta_{1\delta} + \theta_{2\delta}) - \hat{\psi}_4 \\ e_{u_\delta} &= u - \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_c m_1} \frac{g^2}{l_1} u_\delta \end{aligned} \quad (5.5)$$

La dinámica de los errores de e_0 y e_{θ_2} son

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} e_0 &= e_1 - \lambda_3 e_0 & \frac{d}{dt} e_{\theta_2} &= e_3 - \lambda_1 e_{\theta_2} \\ \frac{d}{dt} e_1 &= -\lambda_2 e_0 & \frac{d}{dt} e_3 &= -\lambda_0 e_{\theta_2}\end{aligned}\quad (5.6)$$

Se puede ver que las dinámicas de los errores satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{e}_0 + \lambda_3 \dot{e}_0 + \lambda_2 e_0 = 0 \quad \ddot{e}_{\theta_2} + \lambda_1 \dot{e}_{\theta_2} + \lambda_0 e_{\theta_2} = 0 \quad (5.7)$$

Así el observador que estima la quinta derivada temporal en conjunto con la perturbación es:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} e_{\theta_{1,2}} &= e_5 - \lambda_6 e_{\theta_{1,2}} \\ \frac{d}{dt} e_5 &= \varrho^{-1} e_u - \hat{\xi} - \lambda_5 e_{\theta_{1,2}} \\ \frac{d}{dt} \hat{\xi} &= \lambda_4 e_{\theta_{1,2}}\end{aligned}\quad (5.8)$$

El sistema de ecuaciones (5.8) satisface la ecuación diferencial:

$$e_{\theta_{1,2}}^{(3)} + \lambda_6 \ddot{e}_{\theta_{1,2}} + \lambda_5 \dot{e}_{\theta_{1,2}} + \lambda_4 e_{\theta_{1,2}} = 0 \quad (5.9)$$

El control es entonces

$$e_u = \frac{1}{\beta_2} \left[-k_5 e_5 - k_4 e_4 - k_3 e_3 - k_2 e_2 - k_1 e_1 - k_0 e_0 - \hat{\xi} \right] \quad (5.10)$$

Los parámetros de diseño están dados por:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= w_3^2 & k_0 &= w_c^6 \\ \lambda_1 &= 2\chi_3 w_3 & k_1 &= 6w_c^5 \chi_c \\ \lambda_2 &= w_1^2 & k_2 &= 3w_c^4 (4\chi_c^2 + 1) \\ \lambda_3 &= 2\chi_1 w_1 & k_3 &= 4w_c^3 \chi_c (2\chi_c^2 + 3) \\ \lambda_4 &= w_5^2 p & k_4 &= 3w_c^2 (4\chi_c^2 + 1) \\ \lambda_5 &= 2w_5 \chi_5 p + w_5^2 & k_5 &= 6w_c \chi_c \\ \lambda_6 &= 2w_5 \chi_5 + p\end{aligned}\quad (5.11)$$

5.2.1 Simulaciones de esquema ADRC

Con condiciones iniciales de 0 [m], 0.001 [rad] y 0 [rad] en x , θ_1 , θ_2 , respectivamente, y $p = 1$ se realizan las simulaciones mostradas en la 5.5 donde los valores para el controlador y observador se encuentran en la Tabla 5.3 así mismo se utilizaron los valores de la Tabla 5.2 para los atributos de masas, longitudes y gravedad.

Con un paso de integración de 1×10^{-5} [s] se aprecia un cambio significativo en los comportamientos de x , θ_1 y θ_2 si los comparamos con los resultados de la figura 5.3. Al redefinir los observadores de estado en términos de los errores de la segunda y cuarta derivada es posible reestructurar el ESO en tres observadores, pudiendo proponer las ganancias de los observadores que estiman la primer y tercer derivada a través de polinomios de segundo orden así mismo las ganancias del ESO son propuestas por medio de un polinomio Hurwitz de tercer orden.

De igual manera se induce la perturbación descrita por (5.6), las condiciones iniciales son cero para las 3 variables y el comportamiento es el mostrado por la gráfica de la figura 5.4; notando sobresalientemente una reducción de costo en la señal de control u , resultado esperado debido a la disminución de las ganancias propuestas para los observadores en cascada en comparación con el esquema ADRC de sexto orden anterior.

Atributo	Valor	Atributo	Valor
w_1 [rad/s]	10	w_5 [rad/s]	10
χ_1 [Ns/m]	1	χ_5 [Ns/m]	1
w_3 [rad/s]	10	w_c [rad/s]	2.5
χ_3 [Ns/m]	1	χ_c [Ns/m]	1

Tabla 5.3: Parámetros utilizados en observadores y ley de control del sistema doble péndulo invertido sobre un carro.

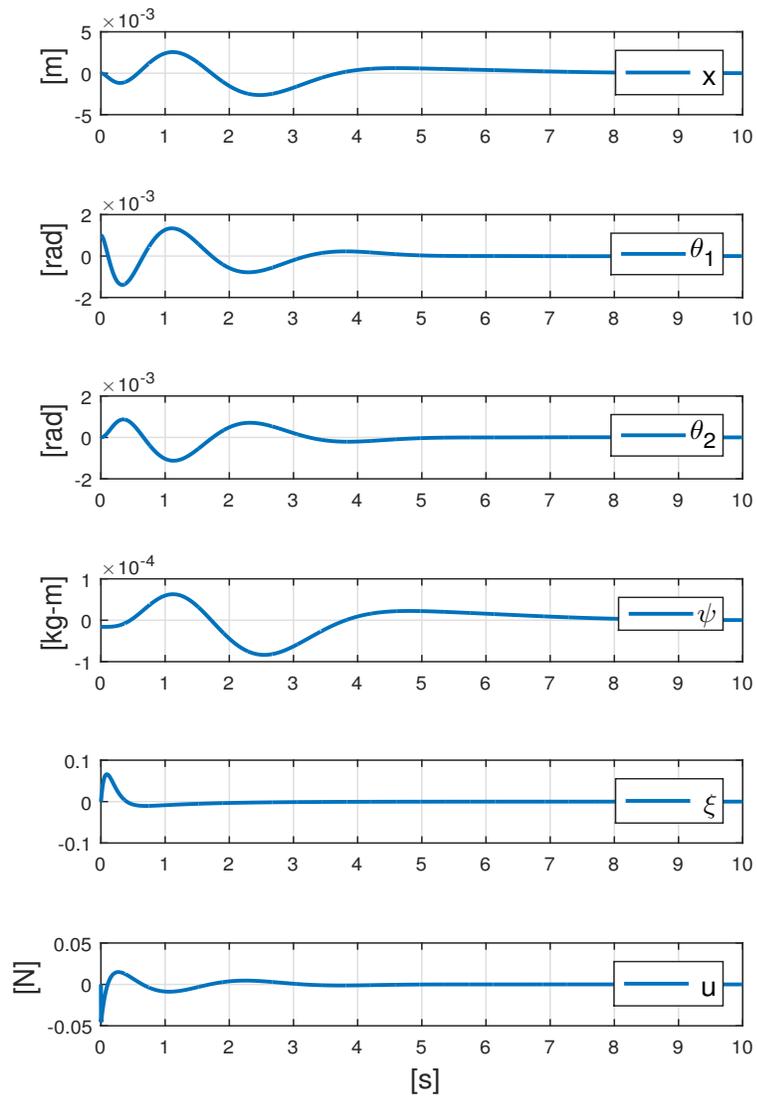


Figura 5.5: Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , ξ estimada, salida plana y entrada de control u .

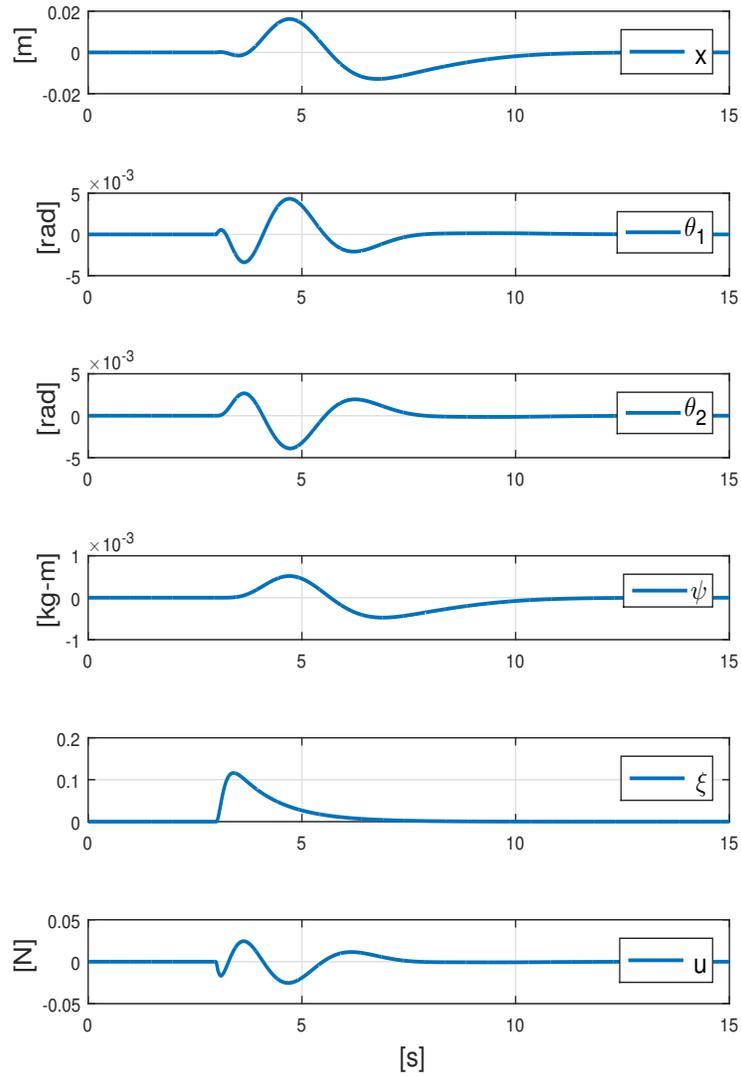


Figura 5.6: Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , ξ estimada, salida plana y entrada de control u .

5.3 ADRC con observadores en cascada de octavo orden

A continuación se muestra el diseño del esquema ADRC para un sistema de octavo orden, en este caso el triple péndulo invertido sobre un carro. Las relaciones que ayudan al diseño de los observadores son las mostradas en el Capítulo 4 por (4.3), (4.5), (4.7) y (4.9) las

cuales son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\psi_{0\delta} &= -x_{1\delta} + l_1\theta_{1\delta} - l_2\theta_{2\delta} + l_3\theta_{3\delta} \\
\frac{d^2}{dt^2} \psi_{0\delta} &= g\theta_{3\delta} \\
\frac{d^4}{dt^4} \psi_{0\delta} &= \frac{(m_2 + m_3)g^2}{m_2l_3}(\theta_{2\delta} + \theta_{3\delta}) \\
\frac{d^6}{dt^6} \psi_{0\delta} &= \frac{(m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)g^3}{m_1m_2l_2l_3}\theta_{1\delta} \\
&\quad + \frac{(m_2 + m_3)^2g^3}{m_1m_2^2l_2l_3^2}(m_1(l_2 + l_3) + m_2l_3)\theta_{2\delta} \\
&\quad + \frac{(m_2 + m_3)g^3}{m_2^2l_2l_3^2}(m_2l_2 + m_3(l_2 + l_3))\theta_{3\delta} \\
\frac{d^8}{dt^8} \psi_{0\delta} &= \beta_3u_\delta + \varrho_2\theta_{1\delta} + \varrho_3\theta_{2\delta} + \varrho_4\theta_{3\delta}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

El observador que estimará la primer derivada de la salida plana es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\psi}_0 &= \hat{\psi}_1 + \lambda_5(\psi_{0\delta} - \hat{\psi}_0) \\
\frac{d}{dt} \hat{\psi}_1 &= \psi_{2\delta} + \lambda_4(\psi_{0\delta} - \hat{\psi}_0)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

El observador que estimará la tercer derivada de la salida plana es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\psi}_2 &= \hat{\psi}_3 + \lambda_3(\psi_{2\delta} - \hat{\psi}_2) \\
\frac{d}{dt} \hat{\psi}_3 &= \psi_{4\delta} + \lambda_2(\psi_{2\delta} - \hat{\psi}_2)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

El observador que estimará la quinta derivada de la salida plana es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\psi}_4 &= \hat{\psi}_5 + \lambda_1(\psi_{4\delta} - \hat{\psi}_4) \\
\frac{d}{dt} \hat{\psi}_5 &= \psi_{6\delta} + \lambda_0(\psi_{4\delta} - \hat{\psi}_4)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

El observador que estimará la séptima derivada temporal y la perturbación es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\psi}_6 &= \hat{\psi}_7 + \lambda_8(\psi_{6\delta} - \hat{\psi}_6) \\
\frac{d}{dt} \hat{\psi}_7 &= \beta_3u_\delta + \varrho_2\theta_{1\delta} + \varrho_3\theta_{2\delta} + \varrho_4\theta_{3\delta} + \hat{\xi} + \lambda_7(\psi_{6\delta} - \hat{\psi}_6) \\
\frac{d}{dt} \hat{\xi} &= \lambda_6(\psi_{6\delta} - \hat{\psi}_6)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

El control es entonces:

$$e_u = \frac{1}{\beta_3} \left[-\hat{\xi} - \sum_{j=1}^7 k_j (e_j) - k_0 e_0 \right] \tag{5.6}$$

Los parámetros de diseño están dados por:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= w_5^2 & k_0 &= w_c^8 \\
\lambda_1 &= 2\chi_5 w_5 & k_1 &= 8w_c^7 \chi_c \\
\lambda_2 &= w_3^2 & k_2 &= 4w_c^6 (6\chi_c^2 + 1) \\
\lambda_3 &= 2\chi_3 w_3 & k_3 &= 8w_c^5 \chi_c (4\chi_c^2 + 3) \\
\lambda_4 &= w_1^2 & k_4 &= 2w_c^4 (8\chi_c^4 + 24\chi_c^2 + 3) \\
\lambda_5 &= 2\chi_1 w_1 & k_5 &= 8w_c^3 \chi_c (4\chi_c^2 + 3) \\
\lambda_6 &= w_7^2 p & k_6 &= 4w_c^2 (6\chi_c^2 + 1) \\
\lambda_7 &= 2w_7 \chi_7 p + w_7^2 & k_7 &= 8w_c \chi_c \\
\lambda_8 &= 2w_7 \chi_7 + p & &
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.3.1 Simulación esquema ADRC

En la Tabla 5.5, 5.4 se muestran los valores utilizados para las gráficas 5.7. Con condiciones iniciales de 0 [m], 0.01 [rad], 0 [rad] y 0 [rad] para x , θ_1 , θ_2 y θ_3 , respectivamente. En

Atributo	Valor	Atributo	Valor
Masa del carro (m_c) [kg]	0.3	θ_{1i} [rad/s]	0.01
Masa de los péndulos (m_1, m_2, m_3) [kg]	0.1	p	1
Longitud de los péndulos (l_1, l_2, l_3) [m]	0.4	w_c [rad/s]	7
Gravedad (g) [m/s^2]	9.8	χ_c [Ns/m]	1

Tabla 5.4: Parámetros utilizados en el sistema triple péndulo invertido sobre un carro, ley de control y condiciones iniciales.

Atributo	Valor	Atributo	Valor
w_1 [rad/s]	7	w_5 [rad/s]	9
χ_1 [Ns/m]	1	χ_5 [Ns/m]	1
w_3 [rad/s]	9	w_7 [rad/s]	7
χ_3 [Ns/m]	1	χ_7 [Ns/m]	1

Tabla 5.5: Parámetros utilizados en observadores del sistema triple péndulo invertido sobre un carro.

las gráficas de las figuras 5.7 y 5.8 se aprecian los comportamientos de las variables de posición generalizadas así como la salida plana ψ , la estimación de ξ para ambos casos, así como sus respectivas señales de control u , con una condición inicial de x , θ_1 , θ_2 y θ_3 todas iguales a cero para la gráfica de la figura 5.8 y una perturbación impulsiva. Se aprecia que la estabilización de las variables de interés sucede en aproximadamente 6 [s] y 10 [s] respectivamente.

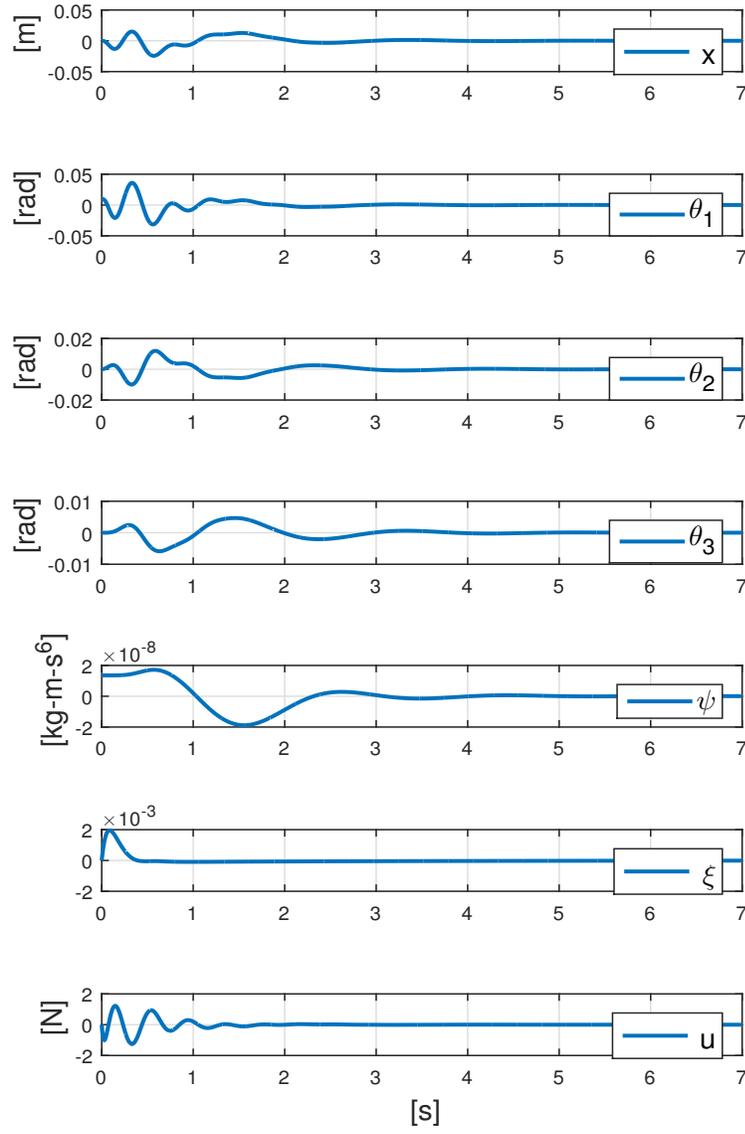


Figura 5.7: Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , θ_3 , salida plana, y entrada de control u .

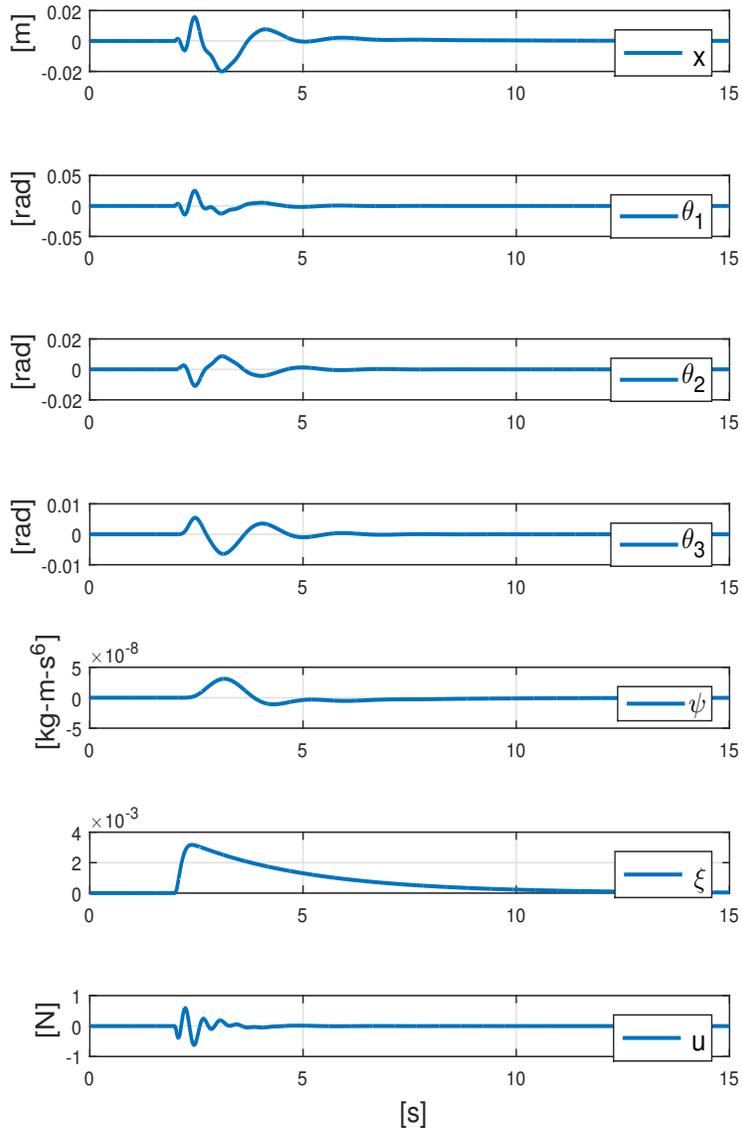


Figura 5.8: Estabilización de x , θ_1 , θ_2 , θ_3 , salida plana, y entrada de control u .

5.4 Resumen del capítulo

En el Capítulo se han diseñado los observadores de estado extendido para dar solución al problema de estabilización de las variables de estados correspondientes a los sistemas sub-actuados péndulo invertido sobre un carro, doble péndulo invertido sobre un carro y triple péndulo invertido sobre un carro. Se muestran simulaciones realizadas con el *software* MATLAB-Simulink.

Capítulo 6

Consenso de sistemas sub-actuados

6.1 Formación

Es deseable lograr consenso en formación en los sistemas sub-actuados péndulo invertido sobre un carro, péndulo doble invertido sobre un carro y péndulo triple invertido sobre un carro, a través de las salidas planas obtenidas para cada uno en el Capítulo 3.

A continuación se muestra los modelos de los sistemas en representación de estados abusando de la notación $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ para denotar derivación con respecto del tiempo, se incluye la ley de control basada en consenso, así mismo se hace uso del super índice izquierdo para identificar la dinámica del z -ésimo agente, con $z = 2$ y el grafo mostrado en la figura 6.1.

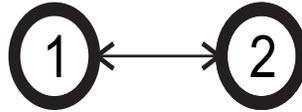


Figura 6.1: Grafo no dirigido entre dos agentes.

6.1.1 Formación en el eje horizontal: dos agentes

Péndulo invertido sobre un carro

La topología de información es la mostrada en 6.1, donde el estado de consenso establece una separación entre agentes. Los agentes utilizados son idénticos por tanto β_1 es compartida por ambos modelos entonces se representa el modelo en términos de ψ incluido el término de separación Δ como:

$$\begin{aligned} {}^1\dot{\psi}_0 &= {}^1\psi_1 & {}^2\dot{\psi}_0 &= {}^2\psi_1 \\ {}^1\dot{\psi}_1 &= {}^1\psi_2 & {}^2\dot{\psi}_0 &= {}^2\psi_2 \\ {}^1\dot{\psi}_2 &= {}^1\psi_3 & {}^2\dot{\psi}_0 &= {}^2\psi_3 \\ {}^1\dot{\psi}_3 &= {}^1\psi_4 = \beta_1 {}^1u_\delta + {}^1\xi & {}^2\dot{\psi}_3 &= {}^2\psi_4 = \beta_1 {}^2u_\delta + {}^2\xi \end{aligned} \quad (6.1)$$

La topología de información mostrada en la figura 6.1 exhibe la matriz Laplaciana siguiente:

$$\mathbb{L}(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

El modelo es descrito por 6.3 donde se adiehere el término de separación Δ deseada entre cada agente.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^1\psi_0 \\ {}^2\psi_0 \\ {}^1\psi_1 \\ {}^2\psi_1 \\ {}^1\psi_2 \\ {}^2\psi_2 \\ {}^1\psi_3 \\ {}^2\psi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -\gamma_0 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_1 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_2 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_3 \mathbb{L}(\mathcal{G}) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} {}^1\psi_0 \\ {}^2\psi_0 \\ {}^1\psi_1 \\ {}^2\psi_1 \\ {}^1\psi_2 \\ {}^2\psi_2 \\ {}^1\psi_3 \\ {}^2\psi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^1\Delta \\ -{}^2\Delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ {}^1\xi \\ {}^2\xi \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

El vector $D = [{}^1\Delta \quad -{}^2\Delta \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ contiene la información referente a la distancia que habrán de tener los agentes de separación. El algoritmo para cada agente es, finalmente:

$${}^i u = \frac{1}{\beta_1} \left\{ -{}^i \xi - \sum_{z=1}^2 a_{i,j} \left[\sum_{l=0}^3 \gamma_l ({}^i \psi_l - {}^j \psi_l - ({}^i \Delta - {}^j \Delta)) \right] \right\}, \quad i \in \{1, 2\} \text{ e } i \neq j \quad (6.4)$$

6.1.2 Simulaciones: Formación de dos agentes de cuarto orden

La simulación es realizada en el *software* MATLAB con un paso de integración de $1e^{-5}$. El problema tomado es formación entre los sistemas péndulo invertido sobre un carro cuyos datos son mostrados en la Tabla 6.1. Los resultados obtenidos para dos agentes de cuarto orden son los mostrados por la figura 6.2. A fin de lograr una formación para un grafo no dirigido la separación solicitada entre cada agente es de 0.4 [m] los parámetros de ${}^i \Delta$ son ${}^1 \Delta = -0.0147$ y ${}^2 \Delta = 0.0147$.

Se puede apreciar de la figura 6.2 la respuesta de los estados y de la salida plana ($\psi = \varphi$) en lazo cerrado; el consenso de formación es alcanzado en menos de 4 [s], manteniéndose en el eje horizontal. El consenso se ve reflejado en los carros ubicados sobre el eje horizontal y no propiamente en los péndulos dado que estos deben mantenerse estables en cero.

Atributo	Valor	Atributo	Valor
Masa del carro (${}^1m_c, {}^2m_c$) [kg]	1.2	${}^1x, {}^2x$ [m]	0.1, -0.2
Masa de los péndulos (${}^1m_1, {}^2m_1$) [kg]	0.25	${}^1p, {}^2p$	1
Longitud de los péndulos (${}^1l_1, {}^2l_1$) [m]	0.6	${}^1w, {}^2w, w_c$ [rad/s]	10, 10, 4
Gravedad (g) [m/s^2]	9.8	${}^1\chi, {}^2\chi, \chi_c$ [Ns/m]	1

Tabla 6.1: Datos del algoritmo de consenso basado en ESO-ADRC.

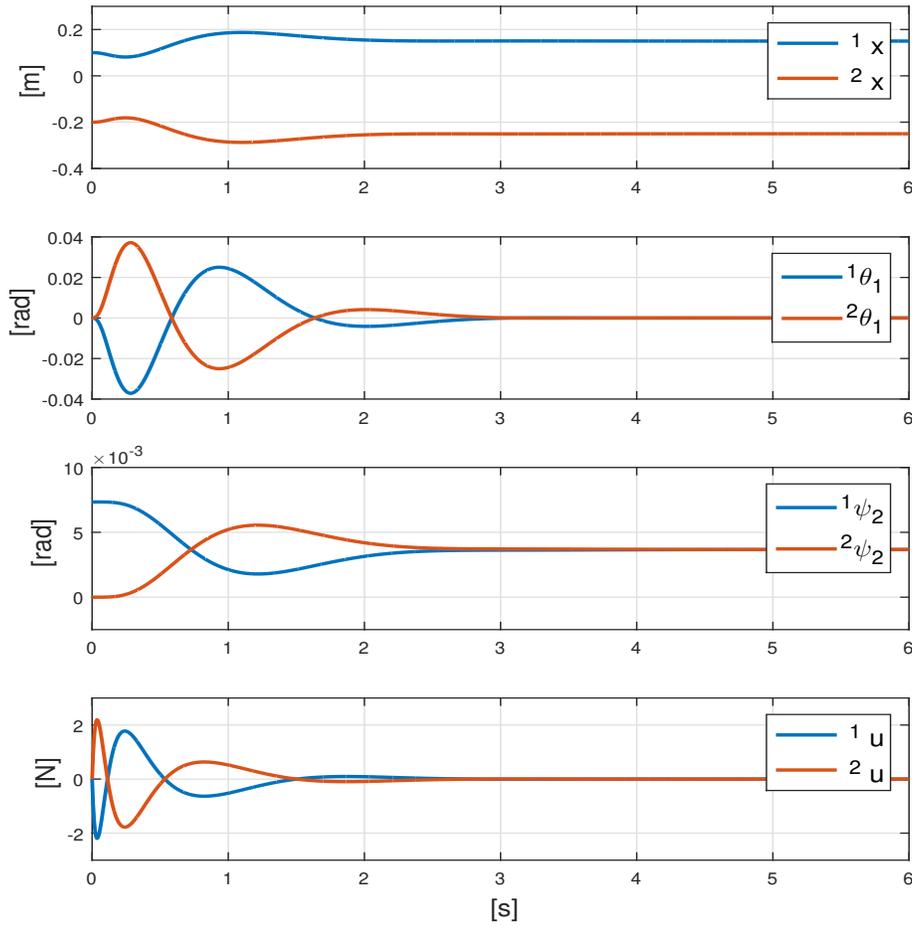


Figura 6.2: Formación entre dos sistemas de péndulo invertido sobre un carro; posiciones en el eje x

Péndulo doble invertido sobre un carro

Una vez más la topología de información es la mostrada por la figura 6.1 manteniendo la idea central de consenso en formación, ahora se pretende que los agentes se encuentran a una distancia de separación de $0.2 [m]$. El modelo para el consenso de formación entre dos agentes es el siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^1\varphi_0 \\ {}^2\varphi_0 \\ {}^1\varphi_1 \\ {}^2\varphi_1 \\ {}^1\varphi_2 \\ {}^2\varphi_2 \\ {}^1\varphi_3 \\ {}^2\varphi_3 \\ {}^1\varphi_4 \\ {}^2\varphi_4 \\ {}^1\varphi_5 \\ {}^2\varphi_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_2} \eta_6 \left\{ \begin{bmatrix} {}^1\varphi_0 \\ {}^2\varphi_0 \\ {}^1\varphi_1 \\ {}^2\varphi_1 \\ {}^1\varphi_2 \\ {}^2\varphi_2 \\ {}^1\varphi_3 \\ {}^2\varphi_3 \\ {}^1\varphi_4 \\ {}^2\varphi_4 \\ {}^1\varphi_5 \\ {}^2\varphi_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^1\Delta \\ -{}^2\Delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ {}^1\xi \\ {}^2\xi \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

donde:

$$\eta_6 = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -\gamma_0 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_1 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_2 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_3 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_4 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_5 \mathbb{L}(\mathcal{G}) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Para el caso en el que la representación entrada-salida de cada agente es de sexto orden se demuestra que el estado de consenso es alcanzado exponencialmente al cumplirse el teorema mostrado en [46] donde el caso tratado es una de segundo orden, a continuación se extiende el desarrollo para el sistema representado por $\varphi = \psi$ (recordemos que φ es la salida plana y su distinción es únicamente para tratar el enfoque desde un punto de vista de consenso) del sistema doble péndulo simple invertido sobre un carro.

Sean λ y $\Upsilon = [r^T \ o^T \ p^T \ q^T \ s^T \ u^T]^T$, respectivamente, un valor propio y un vector propio de η_6 . η_6 tiene 6 valores propios iguales a cero si y sólo si $-\mathbb{L}(\mathcal{G})$ tiene un valor propio igual a cero, esto se puede comprobar al recordar λ es un valor característico de $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ si existe un vector diferente de cero $\in \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbb{L}(\mathcal{G}) \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ con λ_i (*constante*) $\in \mathbb{C}, i = \{1, 2, \dots, z\}$, $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ es una matriz cuadrada $z \times z$ la cual es representada por:

$$\mathbb{L}(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1z} \\ a_{21} & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{z1} & \cdots & \cdots & a_{zz} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

De 6.7 se puede ver una de las propiedades fundamentales de $\mathbb{L}(\mathcal{G})$, siendo esta el resultado de la suma de las filas de $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ las cuales son 0, matemáticamente tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^z a_{1,j} &= 0 \\ \sum_{j=1}^z a_{2,j} &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^z a_{z,j} &= 0\end{aligned}$$

por definición $\mathbb{L}(\mathcal{G}) \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$, podemos ver que $\mathbb{L}(\mathcal{G}) \vec{v}_i = 0$ si $\vec{v}_i = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$ y $\lambda_i = 0$.

$$\mathbb{L}(\mathcal{G}) \vec{v}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1z} \\ a_{21} & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{z1} & \dots & \dots & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^z a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^z a_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^z a_{z,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Por tanto $\vec{v}_i = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$ es un vector propio de $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ y $\lambda = 0$ un valor propio. Así, entonces η_6 tiene 6 valores propios en cero puesto que el consenso de formación entre los agentes genera una dependencia lineal en el sistema, la cual es representada de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -\gamma_0 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_1 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_2 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_3 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_4 \mathbb{L}(\mathcal{G}) & -\gamma_5 \mathbb{L}(\mathcal{G}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{2 \times 1} \\ o_{2 \times 1} \\ p_{2 \times 1} \\ q_{2 \times 1} \\ s_{2 \times 1} \\ u_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_{2 \times 1} \\ o_{2 \times 1} \\ p_{2 \times 1} \\ q_{2 \times 1} \\ s_{2 \times 1} \\ u_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Reescribiendo (6.9) y cambiando la notación $\begin{bmatrix} r_{2 \times 1}^T & o_{2 \times 1}^T & p_{2 \times 1}^T & q_{2 \times 1}^T & s_{2 \times 1}^T & u_{2 \times 1}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} r^T & o^T & p^T & q^T & s^T & u^T \end{bmatrix}^T$ tenemos:

$$\begin{aligned}o &= \lambda r \\ p &= \lambda o \\ q &= \lambda p \\ s &= \lambda q \\ u &= \lambda s \\ -\gamma_0 \mathbb{L}(\mathcal{G})r - \gamma_1 \mathbb{L}(\mathcal{G})o - \gamma_2 \mathbb{L}(\mathcal{G})p - \gamma_3 \mathbb{L}(\mathcal{G})q - \gamma_4 \mathbb{L}(\mathcal{G})s - \gamma_5 \mathbb{L}(\mathcal{G})u &= \lambda u\end{aligned} \quad (6.10)$$

Con la ecuación (6.10) se llega a:

$$-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1r \\ {}^2r \end{bmatrix} = \frac{\lambda^6}{\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \gamma_3\lambda^3 + \gamma_4\lambda^4 + \gamma_5\lambda^5} \begin{bmatrix} {}^1r \\ {}^2r \end{bmatrix}$$

$$-\mathbb{L}(\mathcal{G})r = \mu r \quad (6.11)$$

μ es un valor propio de $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ asociado con r , su vector propio

$$\lambda^6 - \gamma_0\mu - \gamma_1\mu\lambda - \gamma_2\mu\lambda^2 - \gamma_3\mu\lambda^3 + \gamma_4\mu\lambda^4 - \gamma_5\mu\lambda^5 = 0 \quad (6.12)$$

Se observa que existen seis raíces en (6.12) para λ correspondientes a μ ; cada valor propio de $-\mathbb{L}(\mathcal{G})$ corresponde a seis valores propios de η_6 . Colocando μ_i con $i = 1, 2$ (i -ésimo valor propio de $\mathbb{L}(\mathcal{G})$) se puede observar que si $\mu_i = 0$ entonces $\lambda_{6i-k} = 0$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ tiene un valor propio en cero si y sólo si η_6 tiene exactamente seis valores propios iguales a cero, además, si $\mu_1 = 0$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_1 = 0$ por lo cual $\Upsilon = \begin{bmatrix} r^T & 0^T & 0^T & 0^T & 0^T & 0^T \end{bmatrix}^T$.

6.1.3 Simulación: Formación de dos agentes de sexto orden

La simulación es realizada en el *software* MATLAB con un paso de integración de $1e^{-5}$ [s]. El problema tomado es formación entre los sistemas péndulo doble invertido sobre un carro cuyos datos son mostrados en la Tabla 6.2, 6.3. Los resultados obtenidos para dos agentes de sexto orden son los mostrados por la figura 6.3. A fin de lograr una formación para un grafo no dirigido la separación solicitada entre cada agente es de 0.4 [m] los parámetros de ${}^i\delta$ son ${}^1\Delta = -0.0147$ y ${}^2\Delta = 0.0147$ cuya ley de control es:

$${}^i u = \frac{1}{\beta_3} \left\{ -{}^i \xi - \sum_{z=1}^2 a_{i,j} \left[\sum_{l=0}^5 \gamma_l \left({}^i \varphi_l - {}^j \varphi_l - ({}^i \Delta - {}^j \Delta) \right) \right] \right\}, \quad i \in \{1, 2\} e i \neq j \quad (6.13)$$

Atributo	Valor	Atributo	Valor
Masa del carro (${}^1m_c, {}^2m_c$) [kg]	0.3	1x_i [m]	0.2
Masa de los péndulos (${}^1m_1, {}^2m_1, {}^1m_2, {}^2m_2$) [kg]	0.1	2x_i [m]	-0.1
Longitud de los péndulos (${}^1l_1, {}^2l_1, {}^1l_2, {}^2l_2$) [m]	0.4	1p	1
Gravedad (g) [m/s^2]	9.8	2p	1

Tabla 6.2: Datos utilizados en el sistemas doble péndulo invertido sobre un carro, condiciones iniciales y parámetro p .

Atributo	Valor	Atributo	Valor
$^{1,2}w_1$ [rad/s]	7	$^{1,2}w_5$ [rad/s]	9
$^{1,2}\chi_1$ [Ns/m]	1	$^{1,2}\chi_5$ [Ns/m]	1
$^{1,2}w_3$ [rad/s]	9	$^{1,2}w_c$ [rad/s]	7
$^{1,2}\chi_3$ [Ns/m]	1	$^{1,2}\chi_c$ [Ns/m]	1

Tabla 6.3: Datos utilizados en el algoritmo de consenso basado en ESO-ADRC para el sistema doble péndulo invertido sobre un carro.

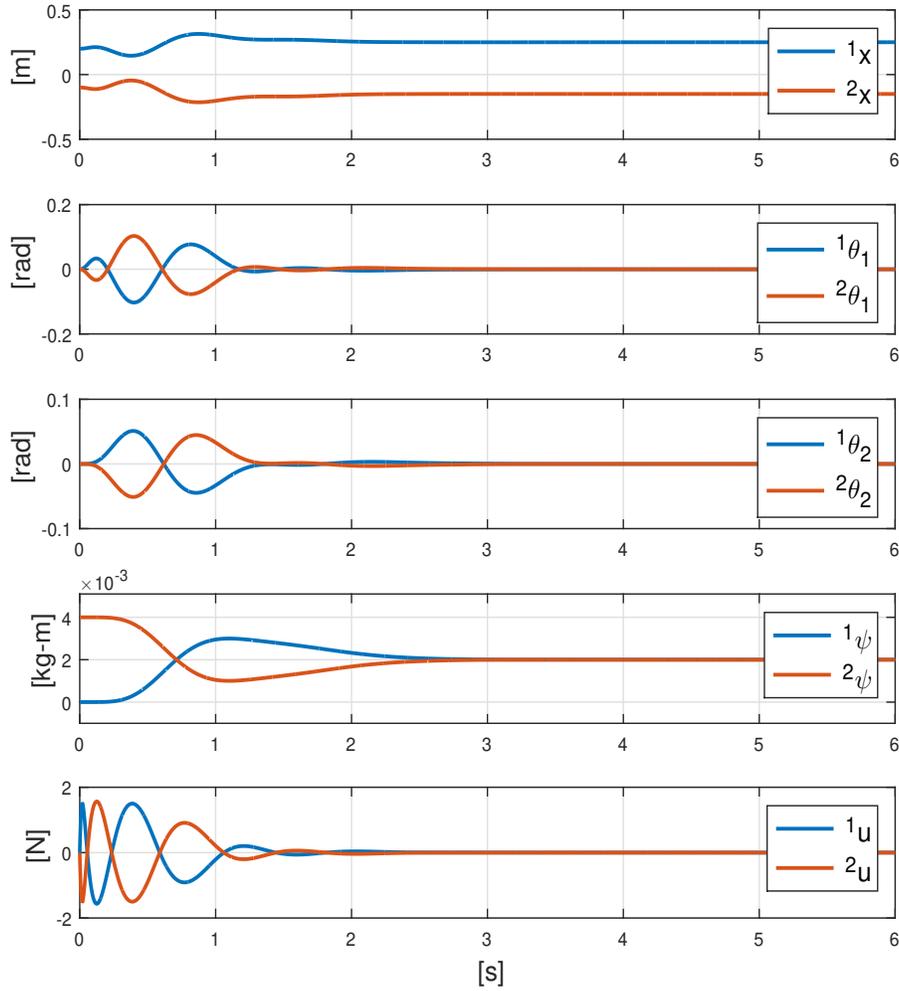


Figura 6.3: Consenso en formación de los estados del sistema, las salidas planas y sus controles, respectivamente.

6.1.4 Simulación: Formación de dos agentes de octavo orden

La simulación es realizada en el *software* MATLAB con un paso de integración de $1e^{-5}$ [s]. El problema tomado es formación entre los sistemas péndulo triple invertido sobre un carro cuyos datos son mostrados en las Tablas 6.4, 6.5. Los resultados obtenidos para dos agentes de octavo orden son los mostrados por la figura 6.4. A fin de lograr una formación para un grafo no dirigido, la separación solicitada entre cada agente es de 0.2 [m] los parámetros de ${}^i\delta$ son ${}^1\Delta = -0.0147$ y ${}^2\Delta = 0.0147$.

Atributo	Valor	Atributo	Valor
Masa del carro (${}^1m_c, {}^2m_c$) [kg]	0.3	1x_i [m]	0.09
Masa de los péndulos (${}^1m_1, {}^2m_1, {}^1m_2, {}^2m_2, {}^1m_3, {}^2m_3$) [kg]	0.1	2x_i [m]	-0.2
Longitud de los péndulos (${}^1l_1, {}^2l_1, {}^1l_2, {}^2l_2, {}^1l_3, {}^2l_3$) [m]	0.4	1p	9
Gravedad (g) [m/s^2]	9.8	2p	9

Tabla 6.4: Parámetros utilizados en el sistemas triple péndulo invertido sobre un carro, ley de control y condiciones iniciales.

Atributo	Valor	Atributo	Valor
w_1 [rad/s]	7	w_5 [rad/s]	9
χ_1 [Ns/m]	1	χ_5 [Ns/m]	1
w_3 [rad/s]	9	w_7 [rad/s]	7
χ_3 [Ns/m]	1	χ_7 [Ns/m]	1

Tabla 6.5: Parámetros utilizados en observadores del sistema triple péndulo invertido sobre un carro.

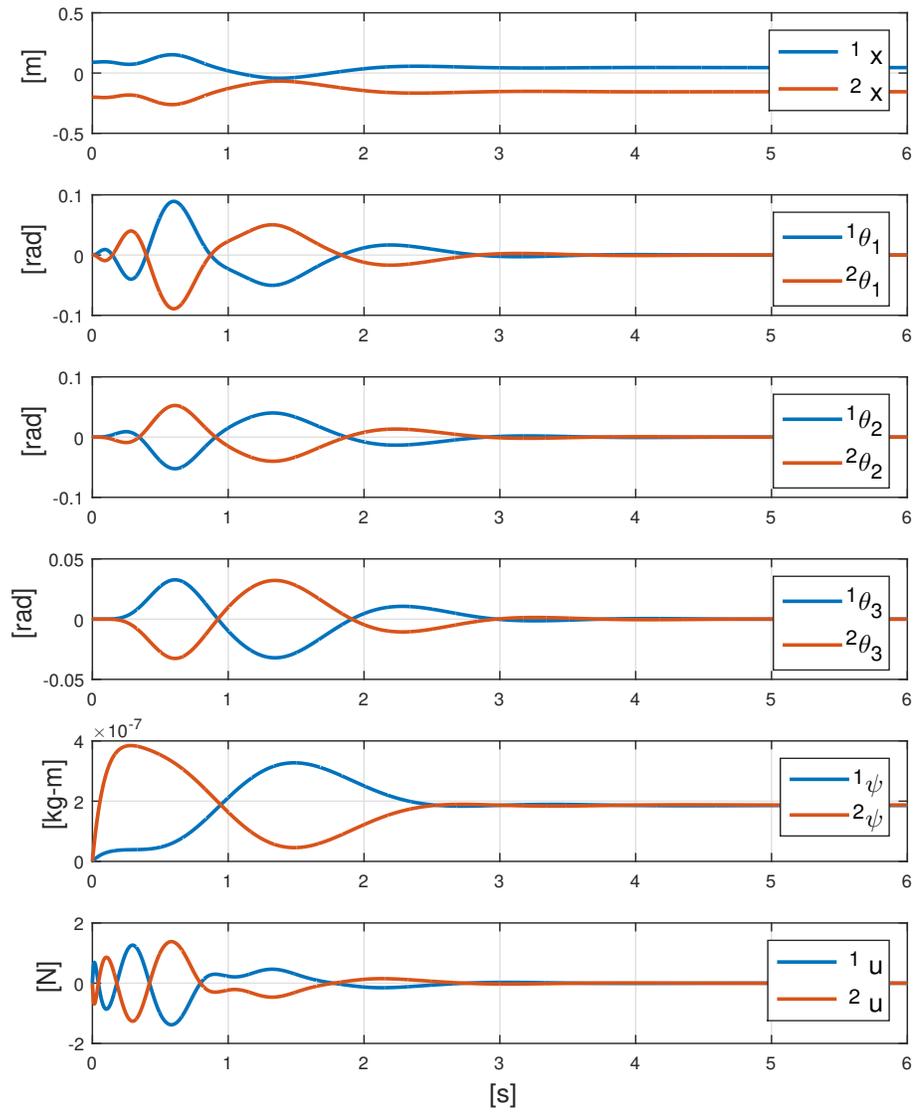


Figura 6.4: Formación entre dos sistemas de triple péndulo invertido sobre un carro; consenso en variables de posición, salidas planas y controles

6.2 Resumen del capítulo

En el Capítulo 6 se han presentando los resultados de consenso para el problema de formación, la relación de la matriz que constituye $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ con η así como una proposición para seleccionar las ganancias del controlador por medio de la matriz η al asegurar que los valores propios de ésta tengan parte real negativa. Simulaciones en solución al problema de estabilización y formación son hechas en el *software* MATLAB-Simulink con un paso de integración de 1×10^{-5} [s].

Capítulo 7

Plataforma Virtual: Consenso Robusto con ADRC basado en ESO

7.1 Modelo CAD

Frente a la situación mundial por el virus COVID-19 se presentan los modelos de los componentes que representarían la plataforma de validación para el sistema doble péndulo invertido sobre un carro, la cuál fue diseñada en las instalaciones del CINVESTAV-IPN ZACATENCO previo al confinamiento establecido por la autoridades correspondientes a fin de disminuir los riesgos presentes por contagios del virus.

En el modelo CAD de la figura 7.1 se muestra una idea preliminar de plataforma para los sistemas de péndulos invertidos simple y doble, aclarando que los péndulos incluyen un acoplamiento mecánico para colocar un total de dos péndulos. Ambos casos sobre un carro que desliza sobre un riel. La plataforma consta de 3 sub-sistemas mecánicos los cuales son la mesa riel-cremallera, cuerpo móvil y péndulo(s), explicados brevemente a continuación.

- **Mesa riel-cremallera:** Placa de acero rígida y plana que asegura el paralelismo entre el riel por el cual desliza el carro y la cremallera que permite parte de la tracción del sistema.
- **Cuerpo móvil:** Armazón de aluminio que contiene un motor de corriente directa y dos encoders de posición, además de incluir ejes de transmisión para conectar el motor y el eslabón unido al carro con los encoders. El armazón se encuentra unido a un carro de balines, el cual permite el deslizamiento por medio de un piñón.
- **Péndulo(s):** Eslaboles de aluminio con encoders de posición y acoples mecánicos que permitirán agregar más péndulos.

Los péndulos son montados en ejes de transmisión que conectan con los encoders de posición, se aseguran a estos con anillos de retención y cuñeros. Se hace mención de las ranuras, ubicadas en la parte frontal de los eslabones, las cuales fueron hechas para restringir el movimiento del cable del encoder, únicamente para el primer péndulo.

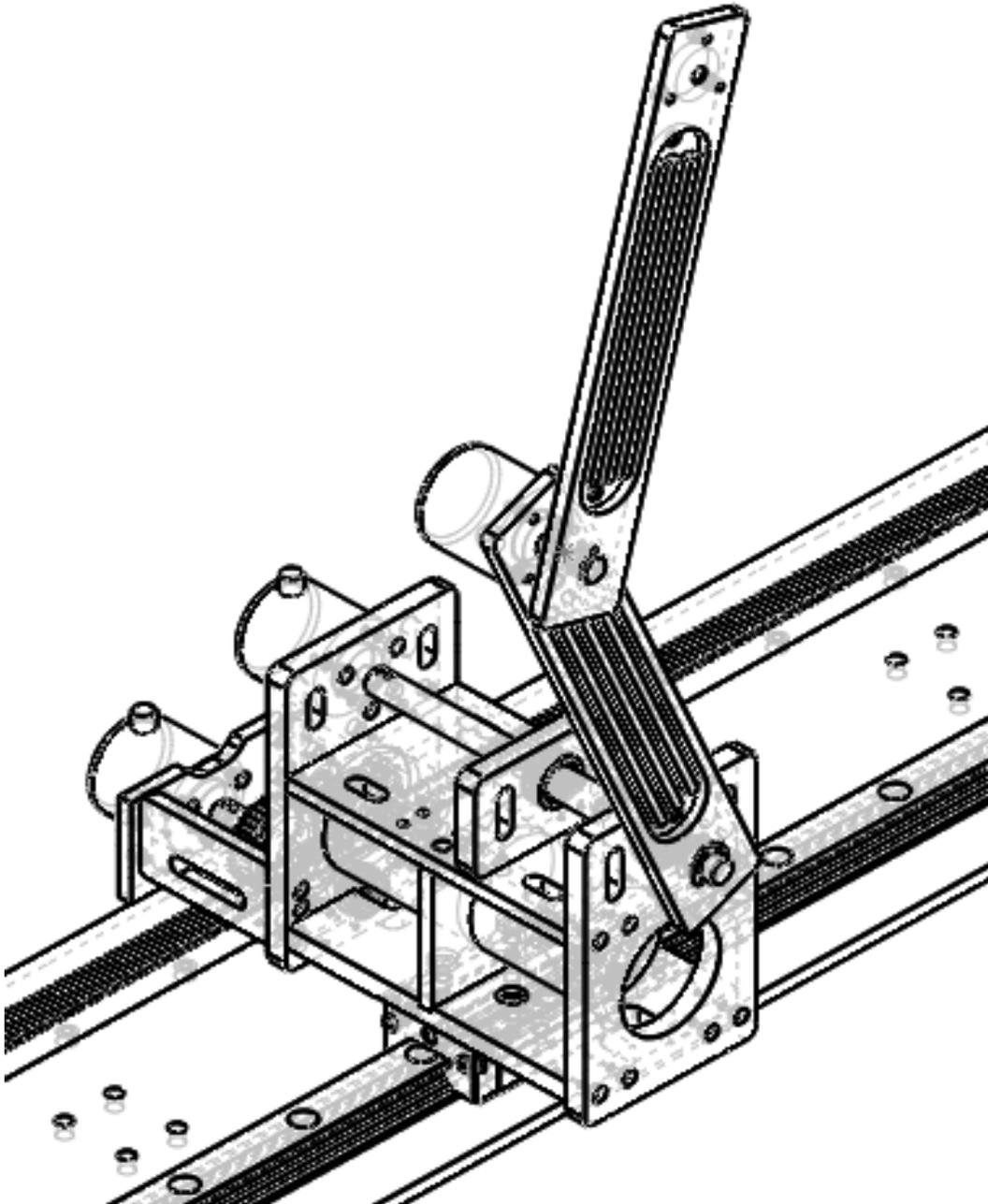


Figura 7.1: Plataforma doble péndulo invertido sobre un carro, modelo CAD.

En la figura 7.2 se muestra la parte trasera de la plataforma, enfocando el cuerpo móvil conformado por un armazón de aluminio y un carro de balines donde se exhiben las poleas que comunican el motor con la flecha del piñón, los encoders que ubican las posiciones del carro y el primer péndulo así mismo se pueden apreciar las nueve placas de aluminio que forman el armazón, las uniones son por medio de tornillos de cabeza hexagonal hueca. Las ranuras puestas en algunas placas son para restringir, posiblemente, cableados.

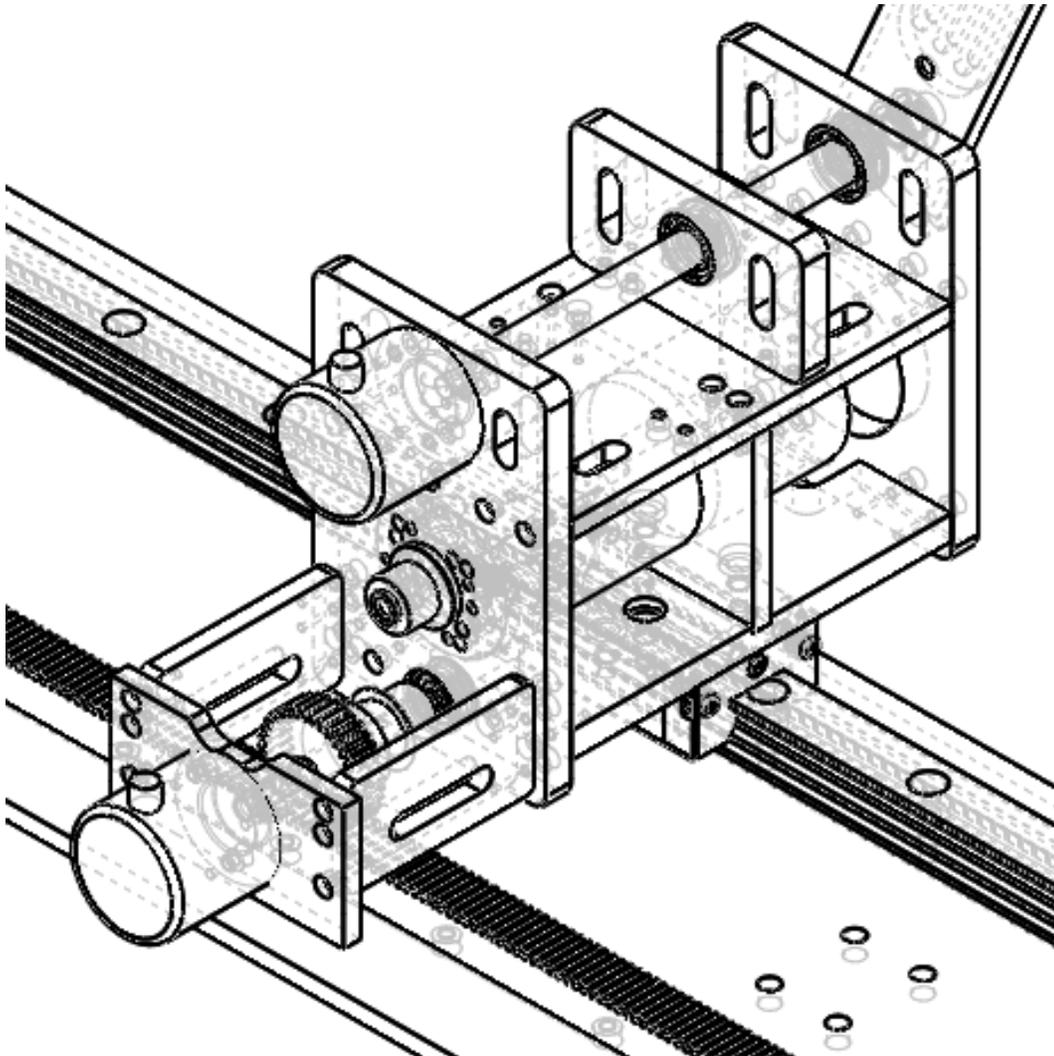


Figura 7.2: Plataforma doble péndulo invertido sobre un carro, vista trasera del modelo CAD enfocada en el cuerpo móvil.

De forma general la plataforma fue pensada en acero para la mesa y aluminio en el cuerpo móvil así como los péndulos, se hace mención que la distancia máxima recorrida por el carro no puede exeder $1[m]$ si el carro inicia en cualquiera de los extremos del riel debido a la longitud de este, la cual es de $1[m]$.

7.2 Componentes mecánicos

A continuación se explican algunos detalles de fabricación sobre los componentes mecánicos.

7.2.1 Mesa riel-cremallera

La placa de acero que funge como mesa es hecha de acero y manufacturada en fresadora CNC para ranurado y rectificación a fin de obtener dos guías paralelas y lisas cuyos propósitos son ubicar el riel, la cremallera y establacer la altura de contacto de los dientes del piñón con los dientes de la cremallera. Sobre las guías son hechos barrenos para llevar acabo el ensamblaje del riel y la cremallera con la mesa de acero por medio de uniones de tornillo, así mismo son hechos barrenos en la parte central de la placa permitiendo unir la mesa con otra estructura que le brinde rigidez, véase la figura 7.3

La función principal de la mesa riel-cremallera es asegurar la tracción hecha por el piñón así como asegurar el movimiento horizontal del carro.

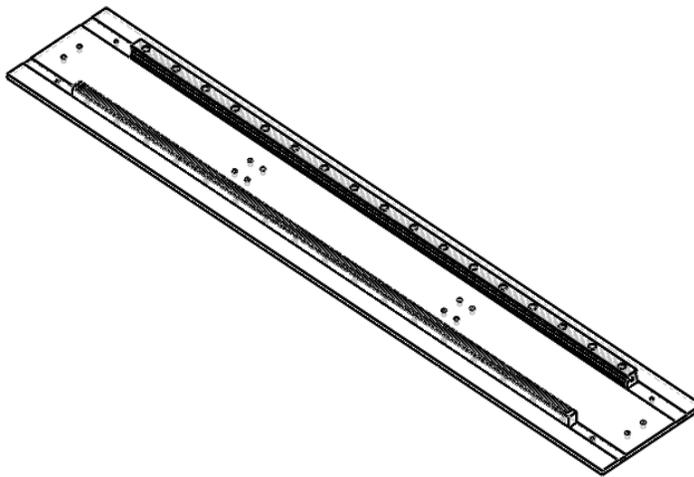


Figura 7.3: Mesa Riel-Cremallera modelo CAD.

Datos técnicos

Las dimensiones de la placa son 1200 [mm] de largo por 200 [mm] de ancho, con un espesor de 6.35 [mm] (1/4 [in]), las ranuras son hechas a lo largo de toda la placa con las acotaciones que se muestran en la figura 7.5 y sus profundidades son 1.2 [mm] y 1.0 [mm] para la cremallera y riel respectivamente. Se hace uso de un riel INAFAG -TKVD25-1000-20-20-G3.

Los tornillos son ubicados al centro de cada guía y equidistantes por 60 [mm], en la Tabla 7.1 se muestra la cantidad de tornillos usados así como la nomenclatura siguiente

M (métrico), **Número** (diámetro nominal en *mm*), **Paso** (en *mm*), **Longitud de la cuerda** (en *mm*), siendo estos tornillos de cabeza cilíndrica con hueco hexagonal.

Tornillos Cremallera	Cant.	Tornillos Centrales	Cant.	Tornillos Riel	Cant.
M4×0.7×10	19	M6×1.0×10	12	M6×1.0×20	19

Tabla 7.1: Tipos de tornillos y cantidad en Mesa Riel-Cremallera.

Los datos del piñón y cremallera se encuentran en las Tablas 7.2 y 7.3, respectivamente.

Especificaciones	Valor
Módulo métrico	1
Número de dientes	35
Ángulo de presión	20°
Diámetro del cilindro	25 [<i>mm</i>]
Diámetro de eje nominal	8 [<i>mm</i>]
Longitud total	18 [<i>mm</i>]

Tabla 7.2: Especificaciones de piñón.

Especificaciones	Valor
Módulo métrico	1
Ancho de la cara	16 [<i>mm</i>]
Ángulo de presión	20°
Longitud total	1000 [<i>mm</i>]

Tabla 7.3: Especificaciones de cremallera.

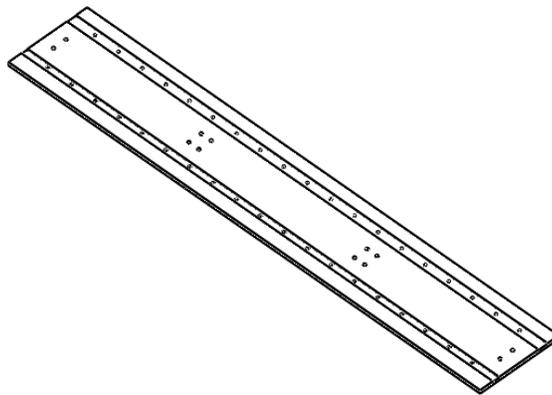


Figura 7.4: Mesa de acero modelo CAD.

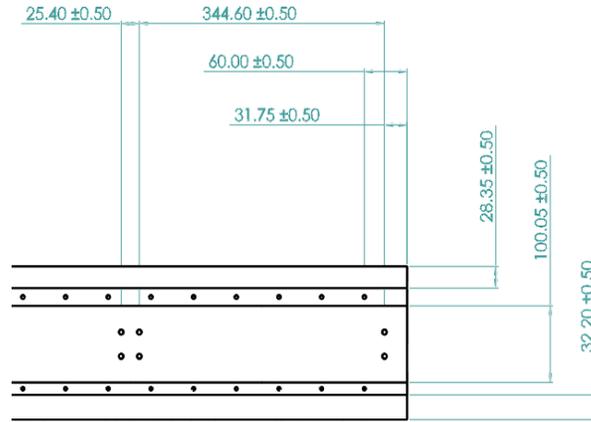


Figura 7.5: Algunas dimensiones útiles en el modelo de la mesa.

7.2.2 Cuerpo móvil

Armazón compuesto por placas de aluminio, las placas cuentan con múltiples procesos de manufactura en fresadora CNC, los cuales son corte, desbaste y rectificación para calzar las alturas del piñón y motor con el carro y la mesa de acero, con ello se aseguran las concentricidades de las flechas de transmisión y los ejes de los encoders, motor y acoples de los péndulos. Múltiples barrenos con taladro son hechos en las caras frontal, lateral izquierda, lateral derecha y trasera cuyo propósito es ensamblar el cuerpo móvil y sujetar los encoders, el motor y las flechas de transmisión. Algunas placas incluyen abocardados para esconder las cabezas de los tornillos.

7.2.3 Péndulos

Eslabones de aluminio con procesos en fresadora CNC de corte, ranurado y barrenado para ubicar acoples mecánicos y encoders de posición. Los péndulos son hechos idénticos para el caso donde se trabaja con el doble péndulo invertido sobre un carro. Las uniones por tornillo permiten sujetar los encoders cuando se usan dos eslabones y los ranurados frontales permitirían ubicar el cable del encoder del segundo péndulo a fin de evitar tirones, enredos o cualquier otro inconveniente.

Datos técnicos

Eslabón de aluminio macizo con una longitud de 400 [mm], un ancho de 20 [mm] y un espesor de 6.35 [mm]. En la figura 7.6 se muestra el péndulo ensamblado con un encoder, en la figura 7.7 se muestran las dimensiones de los barrenos para los encoders de posición, con un cuñero de 1/8 [in].

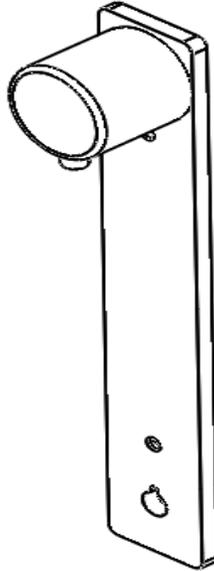


Figura 7.6: Péndulo; modelo CAD en vista trasera.

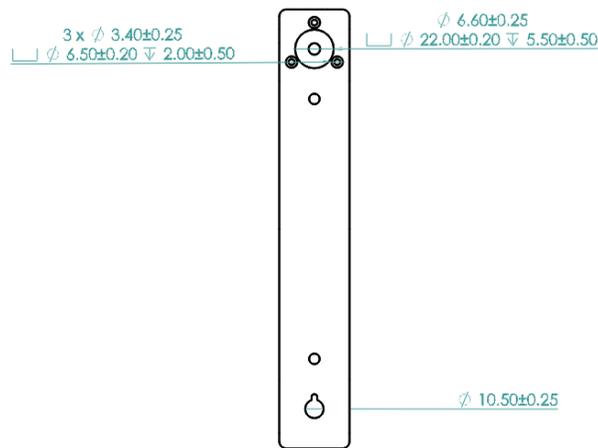


Figura 7.7: Acotaciones de barrenos en péndulo.

7.3 Formación y Seguimiento

Con la intención de mostrar un comportamiento lo más real en consenso de sistemas subactuados para formación y seguimiento en el esquema líder-seguidor basados en ADRC conjuntamente con observadores se muestran las animaciones con modelos CAD de los sistemas realizados. La plataforma es la mostrada por la figura 7.1.

El problema es de consenso restringido por un agente que lidera a los restantes; esto es la influencia de un comportamiento deseado en todos los agentes a través de un modelo de referencia. Recordando la ecuación 2.1 donde $n = 3$ tenemos la representación entrada-salida de una planta de sexto orden que describe el doble péndulo invertido sobre un carro

con $\psi = \varphi$.

$$\begin{aligned} \varphi_{0\delta}^{(6)} &= \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_c m_1} \frac{g^2}{l_1} u_\delta + \frac{m_2(m_1 + m_2)^2}{m_c m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} (m_c(l_1 + l_2) + m_1 l_2) \theta_{1\delta} \\ &\quad + \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} ((m_1 + m_2)l_1 + m_2 l_2) \theta_{2\delta} \end{aligned} \quad (7.1)$$

En la figura 7.8 se tiene una topología de intercambio de información, donde dos agentes se ven influenciados por un tercero virtual, así la expresión entrada-salida descrita por la ecuación 7.1 puede ser representada como una cadena de integradores cuyos modelos respectivos para el agente 1 y 2 son los siguientes:

$$\begin{aligned} {}^1\dot{\varphi}_0 &= {}^1\varphi_1 & {}^2\dot{\varphi}_0 &= {}^2\varphi_1 \\ {}^1\dot{\varphi}_1 &= {}^1\varphi_2 & {}^2\dot{\varphi}_0 &= {}^2\varphi_2 \\ {}^1\dot{\varphi}_2 &= {}^1\varphi_3 & {}^2\dot{\varphi}_0 &= {}^2\varphi_3 \\ {}^1\dot{\varphi}_2 &= {}^1\varphi_3 & {}^2\dot{\varphi}_0 &= {}^2\varphi_3 \\ {}^1\dot{\varphi}_2 &= {}^1\varphi_3 & {}^2\dot{\varphi}_0 &= {}^2\varphi_3 \\ {}^1\dot{\varphi}_3 &= {}^1\varphi_4 = \beta_2 {}^1u_\delta + {}^1\xi & {}^2\dot{\varphi}_3 &= {}^2\varphi_4 = \beta_2 {}^2u_\delta + {}^2\xi \end{aligned} \quad (7.2)$$

mientras que para agente de referencia

$$\begin{aligned} {}^r\dot{\varphi}_0 &= {}^r\varphi_1 \\ {}^r\dot{\varphi}_1 &= {}^r\varphi_2 \\ {}^r\dot{\varphi}_2 &= {}^r\varphi_3 \\ {}^r\dot{\varphi}_2 &= {}^r\varphi_3 \\ {}^r\dot{\varphi}_2 &= {}^r\varphi_3 \\ {}^r\dot{\varphi}_3 &= {}^r\varphi_4 = \beta_2 {}^r u_\delta + {}^r \xi \end{aligned} \quad (7.3)$$

En el diagrama mostrado por la figura 7.9 se aprecia, a través de la planta en representación entrada-salida de sexto orden del sistema doble péndulo invertido sobre un carro la relación existente entre dos agentes influenciados por uno virtual y además líder. Una cadena de integradores permite conocer las derivadas $2k - 1$ de ψ en 7.1 expresadas en el modelo de estado de consenso de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\varphi}_0 \\ {}^2\tilde{\varphi}_0 \\ {}^1\tilde{\varphi}_1 \\ {}^2\tilde{\varphi}_1 \\ {}^1\tilde{\varphi}_2 \\ {}^2\tilde{\varphi}_2 \\ {}^1\tilde{\varphi}_3 \\ {}^2\tilde{\varphi}_3 \\ {}^1\tilde{\varphi}_4 \\ {}^2\tilde{\varphi}_4 \\ {}^1\tilde{\varphi}_5 \\ {}^2\tilde{\varphi}_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_2} \eta_6 \left\{ \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\varphi}_0 \\ {}^2\tilde{\varphi}_0 \\ {}^1\tilde{\varphi}_1 \\ {}^2\tilde{\varphi}_1 \\ {}^1\tilde{\varphi}_2 \\ {}^2\tilde{\varphi}_2 \\ {}^1\tilde{\varphi}_3 \\ {}^2\tilde{\varphi}_3 \\ {}^1\tilde{\varphi}_4 \\ {}^2\tilde{\varphi}_4 \\ {}^1\tilde{\varphi}_5 \\ {}^2\tilde{\varphi}_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^1\Delta \\ -{}^2\Delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ {}^1\xi \\ {}^2\xi \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Donde ${}^i\tilde{\varphi}^l = {}^i\varphi^l - r\varphi^l$, $l = 0, \dots, 2k - 1$ debido a la influencia del líder en todos los agentes y además:

$$\eta_6 = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \dots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & \dots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \dots & I_{2 \times 2} \\ -\gamma_0(L(\mathcal{G}) + I_{2 \times 2}) & -\gamma_1(L(\mathcal{G}) + I_{2 \times 2}) & -\gamma_2(L(\mathcal{G}) + I_{2 \times 2}) & \dots & -\gamma_5(L(\mathcal{G}) + I_{2 \times 2}) \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Así los controles respectivos para los dos agentes está dado por la ley de control siguiente:

$${}^i u = \frac{1}{\beta_2} (-{}^i \xi - \sum_{j=1}^2 a_{i,j} \left[\sum_{l=0}^5 \gamma_l ({}^i \varphi^l - {}^j \varphi^l - ({}^i \delta - {}^j \delta)) \right] - \sum_{l=0}^5 \gamma_l ({}^i \varphi^l - r \varphi^l) + r u) \quad i = 1, 2 \quad (7.6)$$

donde $\beta_2 = (g^2 m_2 (m_1 + m_2)) / (l_1 m_c m_1)$.

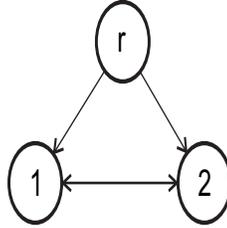


Figura 7.8: Dibujo representativo de topología de información en el esquema líder-2 seguidores

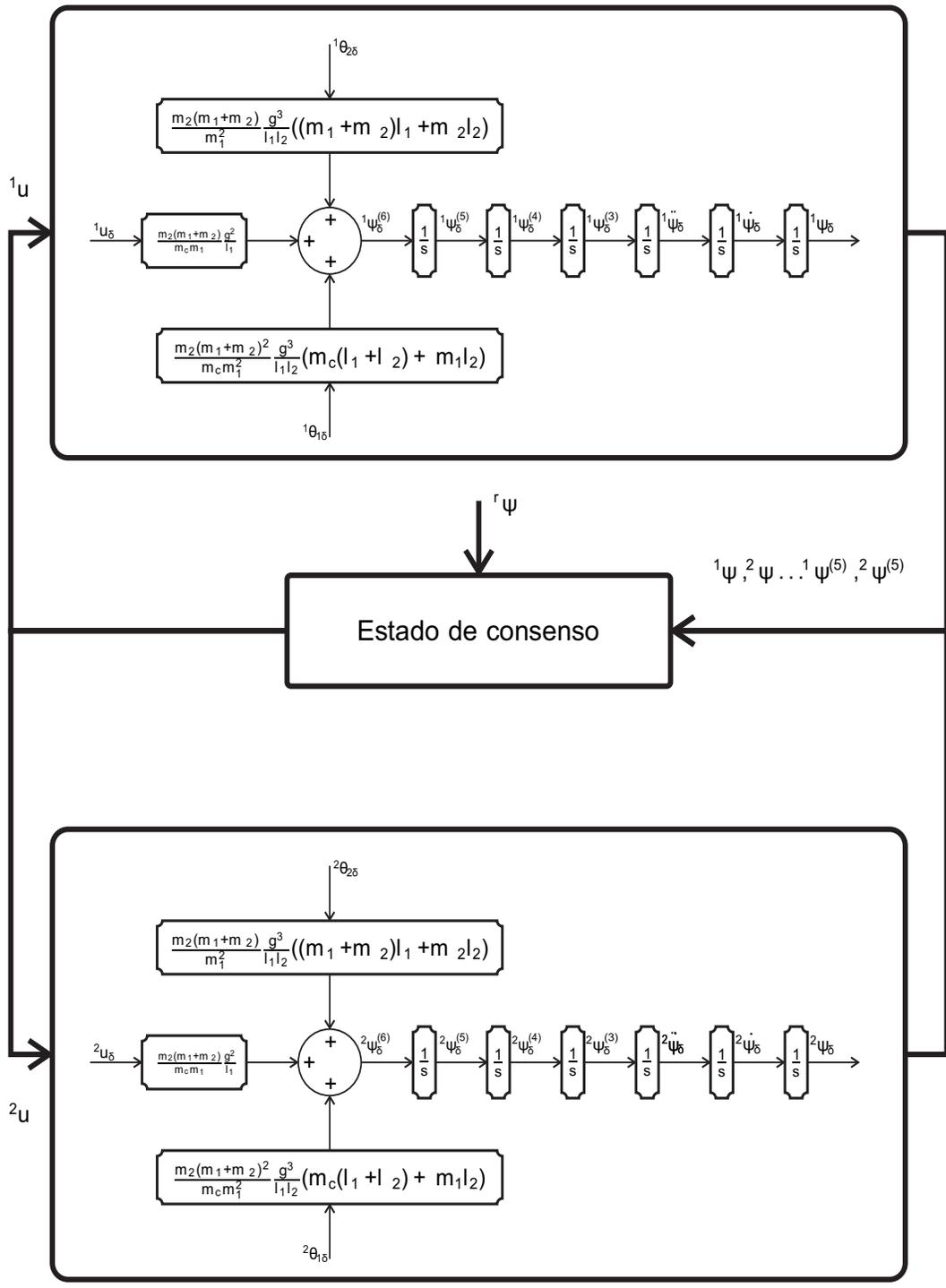


Figura 7.9: Relación por consenso entre dos modelos Entrada-Salida de sexto orden..

En el diagrama mostrado por la figura 7.9 se exhibe el flujo de información entre las plantas de sexto orden, incluida la planta del modelo de referencia, donde ${}^r\psi$ es su vector de estado asociado. El estado de consenso es entonces el vector de estado del modelo descrito por la ecuación 7.4 cuya ley de control para cada agente es el algoritmo mostrado por 7.6.

La implementación completa sobre el sistema doble péndulo invertido sobre un carro es la mostrada por el diagrama de la figura 7.10 donde los observadores de la primer y tercer derivada de la salida plana, así como el observador de estado extendido estimarán ${}^i\hat{\psi}, {}^i\hat{\psi}, {}^i\hat{\psi}, {}^i\hat{\psi}^{(3)}, {}^i\hat{\psi}^{(4)}, {}^i\hat{\psi}^{(5)}, {}^i\hat{\xi}$ según el i -ésimo modelo, con $i = 1, 2, r$ y de acuerdo a la planta entrada-salida de sexto orden expresada en los observadores como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} {}^i\hat{\psi}_0 &= {}^i\hat{\psi}_1 + \lambda_3(m_2l_2 {}^ix_{1\delta} - m_2l_1l_2 {}^i\theta_{1\delta} + m_2l_2^2 {}^i\theta_{2\delta} - {}^i\hat{\psi}_0) \\
\frac{d}{dt} {}^i\hat{\psi}_1 &= m_2gl_2 {}^i\theta_{2\delta} + \lambda_2(m_2l_2 {}^ix_{1\delta} - m_2l_1l_2 {}^i\theta_{1\delta} + m_2l_2^2 {}^i\theta_{2\delta} - {}^i\hat{\psi}_0) \\
\frac{d}{dt} {}^i\hat{\psi}_2 &= {}^i\hat{\psi}_3 + \lambda_1(m_2gl_2 {}^i\theta_{2\delta} - {}^i\hat{\psi}_2) \\
\frac{d}{dt} {}^i\hat{\psi}_3 &= \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2({}^i\theta_{1\delta} + {}^i\theta_{2\delta}) + \lambda_0(m_2gl_2 {}^i\theta_{2\delta} - {}^i\hat{\psi}_2) \\
\frac{d}{dt} {}^i\hat{\psi}_4 &= {}^i\hat{\psi}_5 + \lambda_6 \left(\frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2({}^i\theta_{1\delta} + {}^i\theta_{2\delta}) - {}^i\hat{\psi}_4 \right) \\
\frac{d}{dt} {}^i\hat{\psi}_5 &= \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_c m_1} \frac{g^2}{l_1} {}^iu_{\delta} + \frac{m_2(m_1 + m_2)^2}{m_c m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} (m_c(l_1 + l_2) + m_1 l_2) {}^i\theta_{1\delta} \\
&\quad + \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1^2} \frac{g^3}{l_1 l_2} ((m_1 + m_2)l_1 + m_2 l_2) {}^i\theta_{2\delta} \\
&\quad + {}^i\hat{\xi} + \lambda_5 \left(\frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2({}^i\theta_{1\delta} + {}^i\theta_{2\delta}) - {}^i\hat{\psi}_4 \right) \\
\frac{d}{dt} {}^i\hat{\xi} &= \lambda_4 \left(\frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} g^2({}^i\theta_{1\delta} + {}^i\theta_{2\delta}) - {}^i\hat{\psi}_4 \right)
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Los valores propios de $-\mathbb{L}(\mathcal{G})$ son 0 y -2 , así los valores propios de $-(\mathbb{L}(\mathcal{G}) + I_{2 \times 2})$ son -1 y -3 , respectivamente, esto mantiene la condición de que $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ tenga al menos un valor propio en cero de acuerdo al teorema mostrado en [46], por otra parte un valor propio de $-(\mathbb{L}(\mathcal{G}) + I_{2 \times 2})$ está en -1 al haber replanteado el vector de estado, teniendo una correspondencia con un valor propio de $\mathbb{L}(\mathcal{G})$ que a su vez se relaciona con seis valores propios de η_6 , así entonces es deseable elegir $\gamma_l, l = 0, \dots, 5$ de tal forma que η_6 sea una matriz Hurwitz. Con $w_c = 6.5, \chi_c = 1$, tenemos $p_1 = -1.5303 + 0.0000i, p_2 = -0.0567 + 0.0862i, p_3 = -0.0567 - 0.0862i, p_4 = -0.0523 + 0.0288i, p_5 = -0.0523 - 0.0288i, p_6 = -0.0517 + 0.0000i, p_7 = -0.0517 - 0.0000i, p_8 = -0.1004 - 0.0002i, p_9 = -0.1000 + 0.0004i, p_{10} = -0.1000 - 0.0004i, p_{11} = -0.0996 + 0.0002i$ y $p_{12} = -0.0996 - 0.0002i$ como valores propios de η_6 con lo que se puede observar que $Re(p_i) < 0, i = 0, \dots, 11$ asegurando una convergencia asintótica ${}^i\tilde{\varphi}_l \rightarrow {}^j\tilde{\varphi}_l, l = 0, \dots, 2k - 1$, véase la figura 7.13.

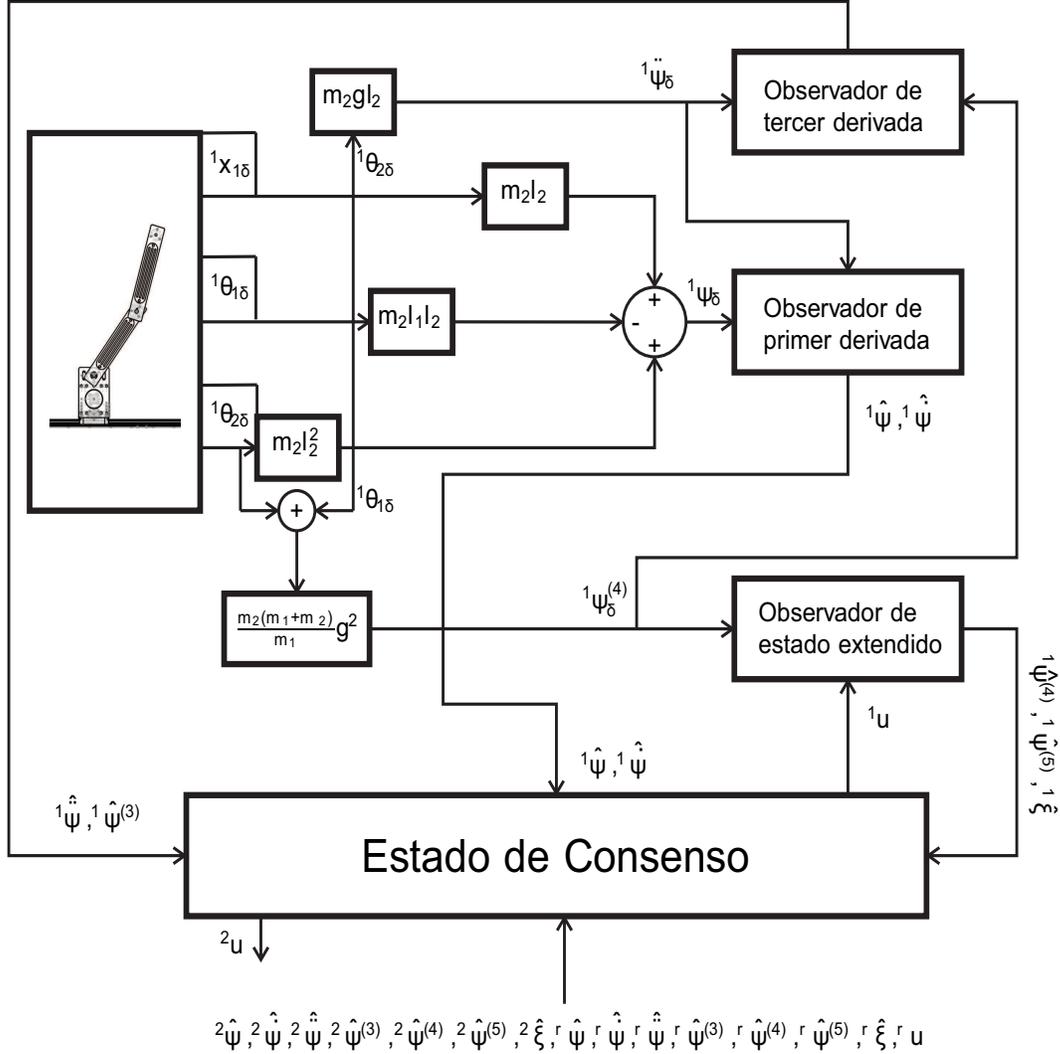


Figura 7.10: Implementación ADRC-ESO en el esquema Líder-Seguidor.

Los efectos de perturbación inducidos ξ al sistema son fuerzas impulsivas definidas de la siguiente manera:

$$\xi_u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & \text{si } t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \\ 0 & \text{si } t > t_0 + a \end{cases} \quad \xi = b \xi_u \quad (7.8)$$

Con un seguimiento de una trayectoria de referencia, la cual está dada por una maniobra de reposo a reposo por un polinomio de décimo cuarto grado interpolado entre 0 y 0.01136 $[kg - m^2]$ en 10 segundos, véase [21].

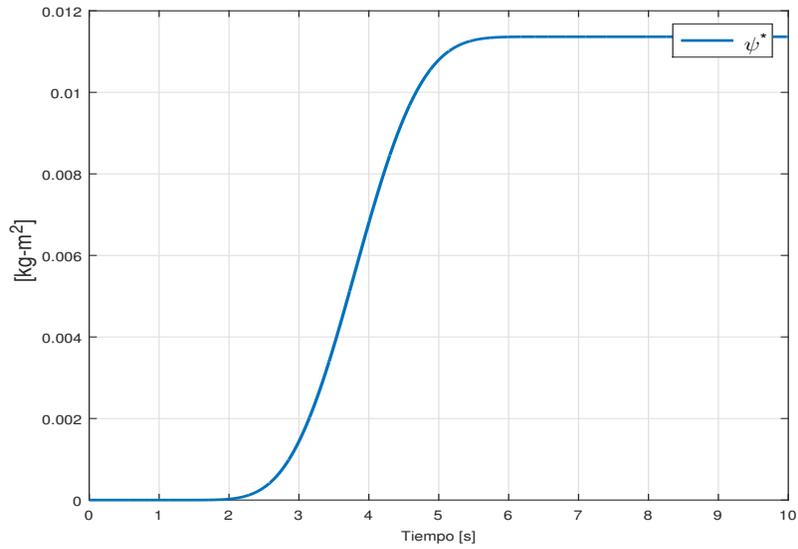


Figura 7.11: Trayectoria de referencia.

En la figura 7.12 se aprecia el comportamiento de las posiciones de los carros, los cuales realizan formación y seguimiento al modelo de referencia a pesar de las perturbaciones ${}^2\xi = b\xi_u(t - (3 - 5 \times 10^{-06}))$ y ${}^1\xi = b\xi_u(t - (5 - 5 \times 10^{-06}))$ donde $a = 5 \times 10^{-06}$ y $b = 0.1$. Se mantienen las posiciones de los péndulos en cero, estos resultados son esperados pues al parametrizar el sistema por medio de ψ se puede inducir el control u al vector de estado de consenso del doble péndulo invertido sobre un carro. Por último se observa que las señales de control no exceden los $0.5 [N]$. En la figura 7.13 se aprecia el resultado esperado de las variables que constituyen el estado de consenso ${}^i\psi_l$, volviéndose iguales en aproximadamente en $t = 8 [s]$. Con las ganancias λ_l para ambos agentes por ser estos idénticos.

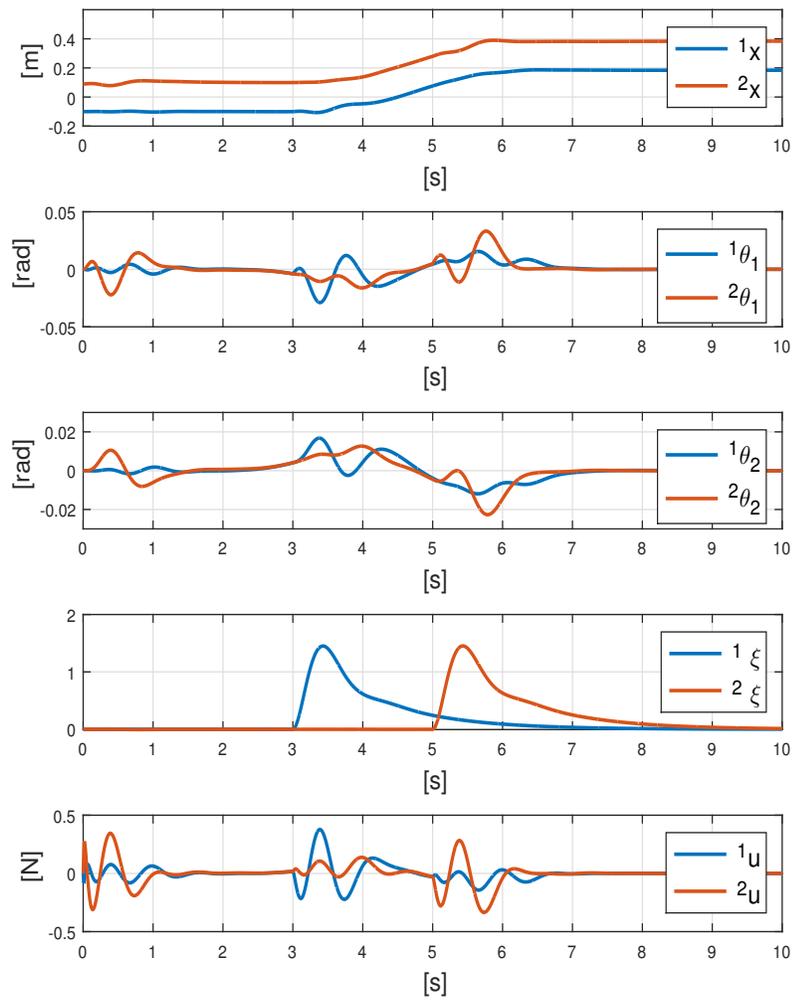


Figura 7.12: Sincronización de las variables de estado bajo efectos de perturbación. Formación en x .

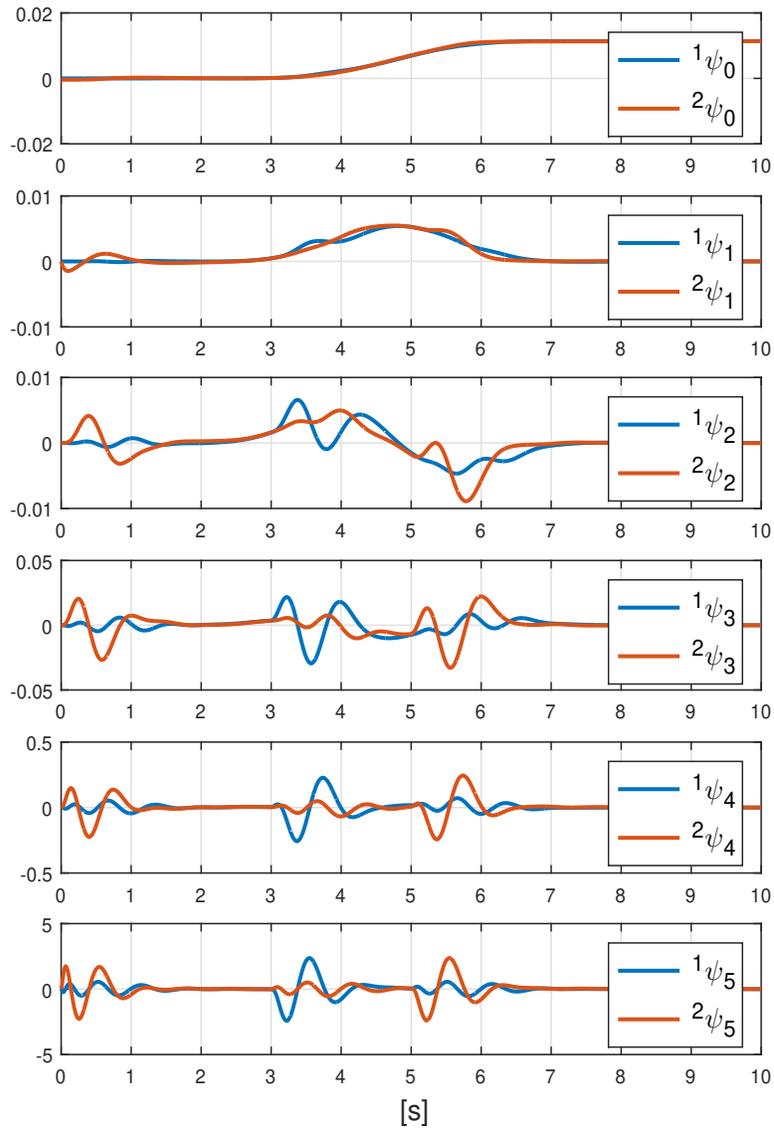


Figura 7.13: Sincronización de las variables ${}^i\psi$ y atenuación de ${}^i\xi$

7.4 Resumen del capítulo

En el presente capítulo se han mostrado los diseños del sistema sub-actuado doble péndulo invertido sobre un carro y la estructura de información para consenso para posteriormente evaluarlos sobre una plataforma virtual. Se resuelve el problema de consenso restringido y seguimiento de trayectoria, ambos establecidos por un modelo de referencia además de inducir perturbaciones de fuerzas impulsivas a los agentes de forma indistinta; esto es en diferentes instancias de tiempo y en ambos agentes. Simulaciones en el *software* MATLAB-Simulink son hechas y diagramas de implementación son mostrados para una mejor interpretación.

Capítulo 8

Conclusiones

8.1 Conclusiones

Se ha trabajado con los sistemas sub-actuados péndulo, doble péndulo y triple péndulo invertidos sobre carros, de los cuales se ha apreciado claramente que los sistemas péndulo y doble péndulo invertido sobre un carro son casos particulares del triple péndulo invertido sobre un carro desde el punto de vista abordado a lo largo del escrito, estos tres sistemas sub-actuados no son linealizables cuando se usa una realimentación estática. Por tanto se han propuesto estrategias de control centradas en naturalezas no lineales por medio de aproximaciones lineales, para ello se hizo uso de la linealización tangencial con el fin de adecuar las señales de entrada y salida a partir de términos incrementales partiendo del equilibrio. Esto permite identificar localmente los modelos linealizados al modelo lineal. Además de trabajar con sistemas una entrada y una salida UEUS, los sistemas abordados han exhibido la propiedad de planitud por medio de sus salidas planas cuando éstas y sus derivadas parametrizan a los vectores generalizados de posición y velocidad, los sistemas de péndulo invertido sobre un carro y doble péndulo invertido han permitido el uso de observadores de estado extendido para estimar las derivadas de la salida plana así como estimar la perturbación sin embargo para el tripe péndulo invertido sobre un carro el diseño del observador representó un reto, al ser un sistema de octavo orden las ganancias propuestas implicarían un alto costo, por lo que se propuso descomponer la planta en su forma entrada-salida en sub-sistemas a fin de disminuir el costo de las ganancias para el observador y de utilizar las derivadas pares de la salida plana, la descomposición en sub-sistemas permite utilizar observadores de menor orden conectados en cascada para estimar las derivadas impares cuando la parametrización diferencial mostró que las derivadas pares de la salida plana dependen del vector generalizado de posición.

En consenso se trataron los problemas restringido y no restringido, con ayuda de teoría de grafos fue posible establecer la topología de información presente en los objetivos cooperativos de cada agente, además de enlazar los observadores de cada uno de ellos para constituir el estado de consenso de ambos problemas. Los resultados obtenidos exhiben que las variables de estado de cada agente es igual a su homólogo adyacente por lo cual es claro ver que en estado estacionario el vector de estado alcanzado es el vector $\mathbf{1}$ cuando los parámetros de diseño, debidamente seleccionados, logran el objetivo deseado de estabilizar

los péndulos hacia arriba.

8.2 Trabajo a futuro

Como trabajo a futuro se proponen los siguientes puntos en el péndulo invertido sobre un carro como punto de partida.

- Evaluar estrategias de control robusto como GPIC y Backstepping para modelos de cuarto orden.
- Incluir en el modelo sub-actuado el modelo del motor de corriente directa.

y en general

- Trabajar con sistemas sub-actuados que incluyan resortes como el eslabón flexible y evaluar el desempeño del control por ADRC.
- Ahondar en la selección de ganancias para el controlador y los observadores del esquema de control ADRC.
- Trabajar con sistemas sub-actuados de múltiple entrada y múltiple salida MEMS.

Bibliografía

- [1] Amal, C.-B., Brahim, C., Mohamed, D., and Krishna., B. (2014). *Analysis and Control of Underactuated Mechanical Systems*. Springer International. 3
- [2] Daniel, A. and Israel, G. (2006). *The state space method: generalizations and applications*. Birkhäuser Verlag. 15
- [3] Efraín, H.-F. (2018). Consenso en el control de sistemas subactuados inestables. Master's thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. 5
- [4] Elham, S.-K. and Khashayar, K. (2013). *Team Cooperation in a Network of Multi-Vehicle Unmanned Systems: Synthesis of Consensus Algorithms*. Springer-Verlag New York. 3
- [5] Gao, Z., Yi, H., and Han., J. (2001). An alternative paradigm for control system design. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*, volume 5, pages 4578–4583. IEEE. 21
- [6] Giovanny, O., Filiberto, M., Eduardo S., E.-Q., Luis R., G., and Patricio, O. (2015). Implementation of leader-follower linear consensus algorithm for coordination of multiple aircrafts. In *Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS), 2015 Workshop on*, pages 25–32. IEEE. 5
- [7] H., B., J. F. C., K., F., S., J.A., T., and C. T. C., W. (1974). *Algebraic graph theory*. Cambridge University Press. 25
- [8] Haibo, D., Wenwu, Z., Guanghui, W., and Di, W. (2017). Finite-time formation control for a group of quadrotor aircraft. *Aerospace Science and Technology*, pages 1–11. 5
- [9] Han, J.-Q. (1999). Nonlinear design methods for control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, pages 1531–1535. 21
- [10] Hassan K., K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall. 2
- [11] Hebertt, S. R. (2015). *Sliding mode control: the Delta-Sigma modulation approach*. Birkhäuser Basel, Switzerland. 2
- [12] Hebertt, S.-R., Alberto, L.-J., Mario, R.-N., and E. William, Z.-B. (2017). *Active Disturbance Rejection Control of Dynamics Systemas A Flatness-Based Approach*. ELSEVIER. 21

- [13] Hebertt, S.-R., Richard, M., Francklin, R., and Orestes, L.-S. (2005). *Control de Sistemas no Lineales*, chapter Puntos de equilibrio., pages 1–17. Pearson Prentice Hall. [11](#)
- [14] Hebertt, S.-R. and Sunil K., A. (2017). *Differentially Flat Systems*. Crc Press. [15](#)
- [15] Hebertt, S.-R. and Vicente, F.-B. (2010). Robust sigma-delta modulation-based sliding mode observers for linear systems subject to time polynomial inputs. *International Journal of Systems Science*, pages 622–628. [14](#), [21](#)
- [16] Herbert, G. (1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley. [12](#)
- [17] Huang, J. and Song, Y.-D. (2017). *Adaptative and Faul-Tolerant Control of Underactuated Nonlinear Systems*. CRC Press. [3](#)
- [18] Isabelle, F. and Rogelio, L. (2002). *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer. [3](#)
- [19] Jaime, G.-S., Héctor, R., and Alejandro, D. (2020). Quad-rotor robust time-varying formation control: a continuous sliding-mode control approach. *Computer Science, Mathematics International Journal of Control*, pages 1–36. [5](#)
- [20] Jean, L. (2009). *Analysis and control of nonlinear systems: A flatness-based approach*. Springer Science and Business Media. [15](#)
- [21] Jhon J., C. (2006). *Robótica*, chapter Generación de trayectorias., pages 201–229. Pearson Prentice Hall. [92](#)
- [22] Kevin L., M. and Dennis G., L. (2005). Forced and constrained consensus among cooperating agents. In *Networking, Sensing and Control, 2005. Proceedings. 2005 IEEE on*, pages 449–454. IEEE. [28](#)
- [23] Khac, D.-D. and Jie, P. (2009). *Control of ships and underwater vehicles design for underactuated and nonlinear marine systems*. Springer-Verlag London. [3](#)
- [24] M. Kanat, C. (2007). Popov-belevitch-hautus type controllability test for linear complementary systems. *Systems and Control Letters*, pages 381–387. [19](#)
- [25] Marcos A., R.-S., Jesús, S.-S., and Eduardo, A.-B. (2017). Observer-based time-varying backstepping control for a quadrotor multi-agent system. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, pages 1–46. [5](#)
- [26] Mario, R.-N. (2017). *Control Mediante Rechazo Activo de Perturbaciones de Sistemas Mecánicos Subactuados No Lineales*. PhD thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. [14](#), [49](#)
- [27] Mario, R.-N. (2019). On vibration suppression and trajectory tracking in largely uncertain torsional system: An error-based adrc approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 134:106300. [3](#)

- [28] Mario, R.-N., Alberto, L.-J., Norma, L.-C., Gilberto, O.-O., and Rafal, M. (2020a). Discrete-time active disturbance rejection control: A delta operator approach. *Advanced, Contemporary Control*, pages 1383–1395. [4](#)
- [29] Mario, R.-N., Alberto, L.-J., Zhiqiang, G., Hebertt, S.-R., and Rafal, M. (2020b). Design of adrc for second-order mechanical systems without time-derivates in the tracking controller. *2020 American Control Conference (ACC)*, pages 2623–2628. [4](#)
- [30] Mario, R.-N., Hebertt, S.-R., Rubén, G.-M., and Alberto, L.-J. (2014). Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the furuta pendulum. *ISA transactions*, 53(4):920-928. [4](#)
- [31] Mario, R.-N., Hebertt, S.-R., Rubén, G.-M., and Alberto, L.-J. (2016). On the linear control of underactuated nonlinear systems via tangent flatness and active disturbance rejection control: The case of the ball and beam system. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 138(10):104501. [4](#)
- [32] Mario, R.-N., Hebertt, S.-R., Rubén, G.-M., and Alberto, L.-J. (2018). Trajectory tracking for an inverted pendulum on a cart: An active disturbance rejection control approach. In *Annual American Control Conference (ACC) on*, pages 4881–4886. IEEE. [4](#)
- [33] Mario, R.-N., Hebertt, S.-R., Rubén, G.-M., and Alberto, L.-J. (2019). Active disturbance rejection control of the inertia wheel pendulum through a tangent linearization approach. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(1):18-28. [4](#)
- [34] Mario, R.-N., Rafal, M., Sally, S., and Zhiqiang, S. (2020c). Robust tracking in underactuated systems using flatness-based adrc with cascade observers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 142(9), 142(9): 091002. [3](#)
- [35] Mario, R.-N., Zhiqiang, G., Hebertt, S.-R., Rubén, G.-M., and Alberto, L.-J. (2020d). On the tracking of last trajectories of a 3 dof torsional plant: A flatness based adrc approach. *Asian Journal of Control*. [3](#)
- [36] Michel, F., Jean, L., Philippe, M., and Pierre P., R. (1992). On differentially flat nonlinear systems. *Nonlinear Control Systems Design*, pages 159–163. [14](#)
- [37] Michel, F., Jean, L., Philippe., M., and Pierre P., R. (1994). Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, pages 1327–1361. [14](#)
- [38] Ravi N., B. and Velupillai, S. (2006). *Switched Finite Time Control of a Class of Underactuated Systems*. Springer. [3](#)
- [39] Reza, O.-S., Alex, F., and Richard, M. (2007). Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. In *Proceedings of the IEEE*, volume 95(1):215-233, pages 215–233. [26](#)

- [40] Reza, O.-S. and Richard M., M. (2003). Consensus protocols for networks of dynamic agents. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference on*, pages 951–956. IEEE. 26
- [41] Robert, S. (2014). *Dynamics of Underactuated Multibody Systems Modeling, Control and Optimal Design*. Springer International. 3
- [42] Rodolphe, S., Mrdjanv, J., and Petar V., K. (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag London. 2
- [43] Sriraman, S. and R., B. (2020). *Discrete Mathematics: Graph Algorithms, Algebraic Structures, Coding Theory, and Cryptography*. CRC Press. 25
- [44] Stanley I., G. (2008). *Álgebra lineal*. McGraw-Hill. 15
- [45] Wei, R. and Ella, A. (2007). Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, pages 1002–1033. 26
- [46] Wei, R., Kevin L., M., and Yangquan, C. (2007). High-order and model reference consensus algorithms in cooperative control of multivehicle systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 129(5): 678-688. 26, 72, 91
- [47] Wei, R. and Randal W, B. (2008). *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control Theory and Applications*. Springer-Verlag London. 3
- [48] Wei, R., Randal W., B., and Timothy W., M. (2005). Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems. pages 171–188. 25
- [49] Xin, X. and Yannian, L. (2014). *Control Design and Analysis for Underactuated Robotic Systems-Springer*. Springer-Verlag London. 3
- [50] Yasuhiro, K. and Toru, N. (2015). Experimental validation of cooperative formation control with collision avoidance for multi-uav system. In *Automation, Robotics and Applications (ICARA), 2015 6th International Conference on*, pages 531–536. IEEE. 4
- [51] Zucатели, F. and Mendoza Meza, M. E. (2015). Backstepping controllers for a cart-pole system in two configurations. pages 1–8. 2

Apéndices

Apéndice

A continuación se muestran relaciones útiles por medio de la transformada de Laplace como complemento a los desarrollos del diseño de los controladores ADRC basados en observadores de estado, el punto de partida son las plantas en representación entrada-salida y además de integración pura.

$$\psi^{(2n)} = \beta_i u + \xi(t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A})$$

Previo al estado de consenso el problema inicial es que las variables de estado de los sistemas tiendan a cero, se puede entender también como, estabilizar a cero los errores de estabilización de las variables de estado con las estimadas o estabilizar a cero los errores de seguimiento a una trayectoria de referencia.

$$e_y = \psi - \beta_i y^*(t) \quad e_u = u - \beta_i [y^*(t)]^{(2n)} \quad (\text{B})$$

Planta de cuarto orden

Considere la estabilización de ψ en:

$$\psi^{(4)} = \beta_1 u + \xi(t) \quad (\text{C})$$

para la representación de estados siguiente:

$$\begin{aligned} \psi &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \beta_1 u + \xi(t) \end{aligned} \quad (\text{D})$$

cuyo observador de estado extendido ESO es:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \lambda_4(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + \lambda_3(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 + \lambda_2(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_4 &= \beta_1 u + \hat{\xi} + \lambda_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{\xi}} &= \lambda_0(x_1 - \hat{x}_1) \end{aligned} \quad (\text{E})$$

definiendo los errores siguientes:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \hat{x}_1 \\ e_i &= x_i - \hat{x}_i & i = 2, 3, 4 \\ e_\xi &= \xi - \hat{\xi} \end{aligned} \quad (\text{F})$$

con lo que se puede reescribir (E) en términos del error como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - \lambda_4 e_1 \\ \dot{e}_2 &= e_3 - \lambda_3 e_1 \\ \dot{e}_3 &= e_4 - \lambda_2 e_1 \\ \dot{e}_4 &= e_\xi - \lambda_1 e_1 \\ \dot{\hat{\xi}} &= \lambda_0 e_1 \end{aligned} \quad (\text{G})$$

Los errores estimados del estado y de perturbación en términos de s son:

$$\begin{aligned} e_2(s) &= (s + \lambda_4)e_1(s) \\ e_3(s) &= (s^2 + \lambda_4s + \lambda_3)e_1(s) \\ e_4(s) &= (s^3 + \lambda_4s^2 + \lambda_3s + \lambda_2)e_1(s) \\ e_\xi(s) &= (s^4 + \lambda_4s^3 + \lambda_3s^2 + \lambda_2s + \lambda_1)e_1(s) \\ e_1(s) &= \frac{s}{(s^5 + \lambda_4s^4 + \lambda_3s^3 + \lambda_2s^2 + \lambda_1s + \lambda_0)} \xi(s) \end{aligned} \quad (\text{H})$$

el controlador por ADRC es propuesto entonces como:

$$\beta_1 u = -k_0 \hat{x}_1 - k_1 \hat{x}_2 - k_2 \hat{x}_3 - k_3 \hat{x}_4 - \hat{\xi}$$

cuya relación en lazo cerrado es:

$$(s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0)\psi(s) = k_3e_4(s) + k_2e_3(s) + k_1e_2(s) + k_0e_1(s) + e_\xi(s) \quad (\text{I})$$

finalmente:

$$\begin{aligned} (s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0)\psi(s) &= \\ &= \frac{s(s^4 + \kappa_1s^3 + \kappa_2s^2 + \kappa_3s + \kappa_4)}{s^5 + \lambda_4s^4 + \lambda_3s^3 + \lambda_2s^2 + \lambda_1s + \lambda_0} \xi(s) \end{aligned} \quad (\text{J})$$

con

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= k_3 + \lambda_4 \\ \kappa_2 &= k_2 + \lambda_3 + k_3\lambda_4 \\ \kappa_3 &= k_1 + \lambda_2 + k_2\lambda_4 + k_3\lambda_3 \\ \kappa_4 &= k_0 + \lambda_1 + k_1\lambda_4 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{K})$$

el control puede obtenerse entonces como:

$$u(s) = \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{1}{M_\xi(s)} - \frac{1}{G(s)} \right] \psi(s) \quad (\text{L})$$

donde:

$$G(s) = \frac{\beta_1}{s^4} \quad (\text{M})$$

y $M_\xi(s)$, la matriz de sensibilidad a la perturbación, puede extraerse de (J) como:

$$\begin{aligned} \psi(s) &= M_\xi(s)\xi(s) \\ &= \frac{s(s^4 + \kappa_1 s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_3 s + \kappa_4)}{(s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0)(s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \xi(s) \end{aligned} \quad (\text{N})$$

Planta de sexto orden

Para una planta representada por (A) de sexto orden y siguiendo un procedimiento como en el anterior se expresan los errores de estimación de los estados y de la perturbación en términos de s como:

$$\begin{aligned} e_1(s) &= \frac{s}{(s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \xi(s) \\ e_2(s) &= \frac{s(s + \lambda_6)}{(s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \xi(s) \\ e_3(s) &= \frac{s(s^2 + \lambda_6 s + \lambda_5)}{(s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \xi(s) \\ e_4(s) &= \frac{s(s^3 + \lambda_6 s^2 + \lambda_5 s + \lambda_4)}{(s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \xi(s) \\ e_5(s) &= \frac{s(s^4 + \lambda_6 s^3 + \lambda_5 s^2 + \lambda_4 s + \lambda_3)}{(s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \xi(s) \\ e_6(s) &= \frac{s(s^5 + \lambda_6 s^4 + \lambda_5 s^3 + \lambda_4 s^2 + \lambda_3 s + \lambda_2)}{(s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \xi(s) \\ e_\xi(s) &= \frac{s(s^6 + \lambda_6 s^5 + \lambda_5 s^4 + \lambda_4 s^3 + \lambda_3 s^2 + \lambda_2 s + \lambda_1)}{(s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \xi(s) \end{aligned} \quad (\text{O})$$

para la ley de control:

$$\begin{aligned} u(s) &= \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{1}{M_\xi(s)} - \frac{1}{G(s)} \right] \psi(s) \\ u(s) &= \frac{1}{\beta_2} K(s) \psi(s) \end{aligned} \quad (\text{P})$$

Planta de octavo orden: Arreglo en cascada

Considere la estabilización de ψ en:

$$\psi^{(8)} = \beta_3 u + \xi(t) \quad (\text{Q})$$

para la representación de estados siguiente:

$$\begin{aligned}
\psi &= x_1 \\
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= x_5 \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= x_7 \\
\dot{x}_7 &= x_8 \\
\dot{x}_8 &= \beta_3 u + \xi(t)
\end{aligned} \tag{R}$$

cuyos observadores de las derivadas del estado y ESO son:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \lambda_8(x_1 - \hat{x}_1) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + \lambda_7(x_1 - \hat{x}_1) \\
\dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 + \lambda_6(x_3 - \hat{x}_3) \\
\dot{\hat{x}}_4 &= \hat{x}_5 + \lambda_5(x_3 - \hat{x}_3) \\
\dot{\hat{x}}_5 &= \hat{x}_6 + \lambda_4(x_5 - \hat{x}_5) \\
\dot{\hat{x}}_6 &= \hat{x}_7 + \lambda_3(x_5 - \hat{x}_5) \\
\dot{\hat{x}}_7 &= \hat{x}_8 + \lambda_2(x_7 - \hat{x}_7) \\
\dot{\hat{x}}_8 &= \beta_3 u + \hat{\xi} + \lambda_1(x_7 - \hat{x}_7) \\
\dot{\hat{\xi}} &= \lambda_0(x_7 - \hat{x}_7)
\end{aligned} \tag{S}$$

definiendo los errores siguientes:

$$\begin{aligned}
e_1 &= x_1 - \hat{x}_1 \\
e_i &= x_i - \hat{x}_i & i = 2, \dots, 8 \\
e_\xi &= \xi - \hat{\xi}
\end{aligned} \tag{T}$$

con lo que se puede reescribir **S** en términos del error:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - \lambda_8 e_1 \\
\dot{e}_2 &= e_3 - \lambda_7 e_1 \\
\dot{e}_3 &= e_4 - \lambda_6 e_1 \\
\dot{e}_4 &= e_5 - \lambda_5 e_1 \\
\dot{e}_5 &= e_6 - \lambda_4 e_1 \\
\dot{e}_6 &= e_7 - \lambda_3 e_1 \\
\dot{e}_7 &= e_8 - \lambda_2 e_1 \\
\dot{e}_8 &= e_\xi - \lambda_1 e_1 \\
\dot{\hat{\xi}} &= \lambda_0 e_1
\end{aligned} \tag{U}$$

Los errores estimados del estado y de perturbación en términos de s son:

$$\begin{aligned}
e_1(s) &= \frac{1}{s^2 + \lambda_8 s + \lambda_7} e_3(s) \\
e_2(s) &= \frac{s + \lambda_8}{s^2 + \lambda_8 s + \lambda_7} e_3(s) \\
e_3(s) &= \frac{1}{s^2 + \lambda_6 s + \lambda_5} e_5(s) \\
e_4(s) &= \frac{s + \lambda_6}{s^2 + \lambda_6 s + \lambda_5} e_5(s) \\
e_5(s) &= \frac{1}{s^2 + \lambda_4 s + \lambda_3} e_7(s) \\
e_6(s) &= \frac{s + \lambda_4}{s^2 + \lambda_4 s + \lambda_3} e_7(s) \\
e_7(s) &= \frac{s}{s^{(3)} + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0} \xi(s) \\
e_8(s) &= \frac{s(s + \lambda_2)}{s^{(3)} + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0} \xi(s) \\
e_\xi(s) &= \frac{s(s^2 + \lambda_2 s + \lambda_1)}{s^{(3)} + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0} \xi(s)
\end{aligned} \tag{V}$$

el controlador por ADRC es propuesto entonces como:

$$\beta_3 u = -k_0 \hat{x}_1 - k_1 \hat{x}_2 - k_2 \hat{x}_3 - k_3 \hat{x}_4 - k_4 \hat{x}_5 - k_5 \hat{x}_6 - k_6 \hat{x}_7 - k_7 \hat{x}_8 - \hat{\xi}$$

donde la ley de control exhibe, una vez más:

$$u(s) = \frac{1}{\beta_3} K(s) \psi(s) \tag{W}$$