

## CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## UNIDAD ZACATENCO DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA SECCIÓN DE MECATRÓNICA

# Control Extremum Seeking de un robot flexible de un eslabón

Tesis que presenta

Daniel Rodríguez Flores

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias

En la Especialidad de **Ingeniería Eléctrica** 

Director de Tesis: **Dr. Carlos Alberto Cruz Villar** 

Ciudad de México Diciembre 2020

## DEDICADO

 $A\ mis\ padres\ Clara\ y\ Daniel$ 

#### AGRADECIMIENTOS

A la vida: Por darme la oportunidad de continuar con mis estudios y avanzar con mi carrera profesional. Por los retos que me han ayudado a superarme como persona y por la salud para lograr mis objetivos

A mis padres: Porque gracias a su apoyo y cariño he logrado realizar uno de los anhelos de mi vida, fruto de su de su inmenso apoyo y amor, con los cuales he logrado terminar mi maestría que constituye el legado más grande que pudiera recibir y por el cual viviré eternamente agradecido.

Al Dr. Carlos Alberto Cruz: Por sus excelentes consejos, su gran apoyo y sus constructivas críticas que permitieron la culminación de este trabajo, por darme la oportunidad de trabajar con él y por confiar en mí para el desarrollo de este proyecto de tesis.

Al Dr. Héctor Cervantes: Por su apoyo, consejos e ideas que hicieron posible el desarrollo de este proyecto, por el conocimiento que cambió mi manera de ver las cosas y el cómo resuelvo los problemas.

A los miembros del jurado Dr. Gerardo Silva Navarro, Dr. Hebertt J. Sira Ramírez: Por sus comentarios, las aportaciones que hicieron a este trabajo y su dedicación a la revisión del manuscrito de tesis.

A los doctores de la Sección de Mecatrónica: Por su enseñanza, sus consejos y por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo.

A mis compañeros del CINVESTAV: Por compartir su amistad conmigo y los buenos momentos que pasamos juntos y en especial a mis compañeros de laboratorio que sin duda

AGRADECIMIENTOS

hicieron mi estancia más agradable.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT): Por haberme otorgado una beca para realizar mis estudios de maestría en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, (CINVESTAV).

#### RESUMEN

En este trabajo de tesis se aborda el problema de seguimiento de trayectoria del extremo final del eslabón de un manipulador flexible, basado en una suma de técnicas de control Proporcional Integral Generalizado (GPI) y Extremum Seeking control (ESC) aplicado a un manipulador flexible de un eslabón, con el fin de realizar el seguimiento de trayectoria minimizando la deflexión elástica consecuencia de las dinámicas flexibles.

Se muestra el proceso de diseño y desarrollo de la plataforma experimental, así como la obtención de sus modos de vibración de manera experimental, los cuales se utilizan en el diseño del controlador que resuelve el problema de seguimiento de trayectoria y minimización de las vibraciones del manipulador flexible.

El controlador propuesto en esta tesis se basa en un controlador GPI, el cual utiliza reconstructores integrales de manera que únicamente es necesario medir la posición angular de la articulación de la plataforma para controlar la dinámica rígida del sistema. Para controlar la dinámica flexible se utiliza ESC, conocido por su funcionalidad en casos donde el sistema presenta no linealidades y modelos matemáticos complejos, el cual utiliza una perturbación periódica, en este caso sinusoidal, se modificó la manera de escoger la frecuencia de la perturbación de forma que no es constante sino variable, partiendo de las frecuencias naturales del sistema y desplazándose de manera suave hacia las antirresonancias del sistema con el objetivo de minimizar las vibraciones en el estado estacionario.

A lo largo del desarrollo del trabajo se presentan simulaciones de los diferentes esquemas de control que no pudieron ser aplicados de manera experimental al robot manipulador flexible de un eslabón, se presentan los resultados experimentales de los controladores, para finalizar

RESUMEN VIII

este trabajo de tesis se presentan y analizan los resultados obtenidos de la implementación de los esquemas de control en la plataforma experimental desarrollada.

### ABSTRACT

This thesis work addresses the problem of tracking the path of the end of the flexible link, based on an addition of a General Proportional Integral controller (GPI) and Extremum Seeking Control (ESC) techniques applied on a single flexible link manipulator, in order to track the path minimizing elastic deflection as a consequence of flexible dynamics.

The design and development process of the experimental platform is shown, as well as obtaining its vibration modes in an experimental, those that are used in the design of the controller that solves the problem of path tracking and minimization of vibrations of the flexible manipulator.

The controller proposed in this thesis is based on a GPI controller, which uses integral reconstructors so that it is only necessary to measure the angular position of the articulation of the platform to control the rigid dynamics of the system. To control flexible dynamics a ESC is used. ESC is known for its functionality in cases where the system exhibits non-linearities and complex mathematical models, it uses a periodic disturbance, in this case the disturbance a sinusoidal and the way of choosing the frequency of the disturbance is modified so that it is not constant but variable, starting from the natural frequencies of the system and moving smoothly towards the antiresonance of the system in order to minimize vibrations in the steady state.

Throughout the development of the work, simulations of the different control schemes that could not be applied experimentally to the one-link flexible manipulator robot are presented, the controllers experimental results are presented. To complete this thesis work, the results obtained from the implementation of the control schemes on the developed experimental

ABSTRACT X

platform are shown and analyzed.

## ÍNDICE GENERAL

ΑĮ	adecimentos	V
$\mathbf{R}_{\mathbf{c}}$	sumen	VII
$\mathbf{A}$	stract	IX
Ín	ice de Tablas	XV
$\mathbf{A}$	reviaturas	VII
N	tación	ΊX
1.	Introducción	1
	1.1. Visión general	1
	1.2. Técnicas de modelado y simulación	3
	1.3. Estado del arte	4
	1.4. Motivación y justificación	9
	1.5. Objetivos	10
	1.5.1. Objetivo general	10
	1.5.2. Objetivos particulares	10
	1.6. Estructura del documento	10
2.	Modelado del sistema	13
	2.1 Energías asociadas al sistema	16

ÍNDICE GENERAL XII

	2.2.	Dinám	nica del manipulador
	2.3.	Forma	s modales
	2.4.	Formu	lación lagrangiana
	2.5.	Repres	sentación en cascada
	2.6.	Resum	nen del capítulo
3.	Plat	aform	a experimental
	3.1.	Comp	onentes mecánicos
	3.2.	Frecue	encias naturales
		3.2.1.	Frecuencias naturales sin carga
		3.2.2.	Frecuencias naturales sin carga ANSYS
		3.2.3.	Frecuencias naturales con carga
		3.2.4.	Frecuencias naturales con carga ANSYS
	3.3.	Resum	nen del capítulo
4.	Estr	ategia	s de control
	4.1.	Esquei	ma de control PD+PD con realimentación de la aceleración en el extremo
		aplicac	do a un robot manipulador flexible de un eslabón
		4.1.1.	Prueba de estabilidad PD con retroalimentación de la aceleración en el
			extremo
		4.1.2.	Implementación del esquema de control PD+PD en un robot manipulador flexible de un eslabón
	4.2.	Diseño	o del esquema de control GPI aplicado a la dinámica rígida de un mani-
		pulado	or flexible de un eslabón
		4.2.1.	Prueba de estabilidad GPI
		4.2.2.	Simulación: controlador GPI aplicado a la dinámica rígida de un manipulador flexible de un eslabón
	4.3.	Diseño	o del esquema de control GPI+ESC aplicado a un robot manipulador
	1.0.		e de un eslabón
			Prueba de estabilidad ESC
		4.3.2.	Control GPI + Extremum Seeking aplicado a un robot manipulador
		1.0.2.	flexible de un eslabón
		4.3.3.	Resultados experimentales de la implementación del esquema de con-
		1.0.0.	trol GPI + Extremum Seeking en un robot manipulador flexible de un
			eslabón
		4.3.4.	Comparación de los controladores GPI+GPI, GPI+PID, GPI+MPPF
		1.0.1.	y GPI+ESC aplicado aun manipulador flexible de un eslabón
	4.4.	Resum	nen del capítulo

XIII ÍNDICE GENERAL

5.	Conclusiones	93
	5.1. Conclusiones del trabajo	93
	5.2. Trabajo futuro	94
Α.	Generación de trayectorias	95
в.	Funciones de Matlab	99
	B.1. Polinomio de Bézier	99
C.	Componentes electrónicos	103
D.	Planos de la plataforma	109
Ε.	Propiedades de los materiales	119
Bi	bliografía	121

## ÍNDICE DE TABLAS

2.1.	Frecuencias naturales de una viga en cantilever	23
3.1.	Parámetros del manipulador	34
3.2.	Frecuencias naturales	40
	Frecuencias naturales con carga	46
4.1.	Parámetros del controlador GPI dinámica rígida	79
4.2.	Parámetros de los controladores de la dinámica flexible	79
4.3.	Error segunda derivada de la deflexión trayectoria sinusoidal $(m/s^2)$	90
4.4.	Error angular en el extremo para una trayectoria de regulación $(rad)$	90
4.5.	Error segunda derivada de la deflexión trayectoria de regulación $(m/s^2)$	91
4.6.	Forma de aplicación de los controladores	91
C.1.	Parámetros TL494	106
C.2.	Especificaciones driver VNH5019A-E	106

### **ABREVIATURAS**

AD	Analógico	Digital
----	-----------	---------

CAD Computer-Aided Design

DAQ Data Acquisition DF Differencias Finitas

EDP Ecuaciones Diferenciales ParcialesEDO Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

EF Elemento Finito

ESC Extremum Seeking Control FFT Fast Fourier Transform

FRF Frequency Response Function

GDL Grado de Libertad

GPI Generalized Proportional Integral MPPF Multiple Positive Position Feedback

PD Proporcional Derivativo

PID Proporcional Integral Derivativo

## NOTACIÓN

- a Amplitud
- A Área transversal
- $A_p$  Área transversal de la carga a manipular
- b Ancho de la viga
- $b_p$  Ancho de la carga a manipular
- C Constante
- d Espesor de la viga
- $d_p$  Espesor de la carga a manipular
- $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$  Dinámica flexible
- $\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$  Dinámica rígida
- e Error
- $\dot{e}$  Derivada del error respecto al tiempo
- E Módulo de Young
- $E_K$  Energía cinética del sistema
- $E_P$  Energía potencial del sistema
- EI Rigidez flexionante
- g Ganancia de realimentación del controlador PPF
- i Índice, orden de polinomio/modelo
- I Momento de inercia
- I<sub>b</sub> Momento de inercia del eslabón
- $I_h$  Momento de inercia de la base
- ${\cal I}_p$  Momento de inercia de la carga a manipular
- $I_T$  Momento total de inercia  $(I_h + l^3 \rho A/3)$

NOTACIÓN XX

$\mathcal{I}_n$	Matriz identidad
j	Índice, orden de polinomio/modelo
$\overset{\circ}{k}$	Constante, índice
$K_p, K_i, K_d$	Componente proporcional, integral y derivativo del
	controlador PID
l	Largo de la viga
$l_p$	Largo de la carga a manipular
$\mathcal{L}$	Lagrangiano
m	Masa de la viga
$M_p$	Masa de la carga a manipular
$OX_0Y_0$	Eje fijo a la base
OXY	Eje tangencial al manipulador en la base
P	Polinomio auxiliar
$\mathfrak O$	Vector columna de ceros
q(t)	Desplazamiento modal
s	Variable de Laplace
t	Tiempo (continuo)
T	Vector de entradas del sistema
u	Señal de control, entrada de la planta
$\mathfrak{v}$	Control virtual
V	Función de Lyapunov
V	Entrada de control
w	Deflexión elástica
w(x,t)	Deflexión elástica a una longitud $x$ en un tiempo $t$
W	Trabajo virtual realizado por fuerzas no conservativas
x	Distancia de la base a lo largo del manipulador
X, Y, Z	Sistema de coordenadas móvil
$X_0, Y_0, Z_0$	Sistema de coordenadas fijo
y	Desplazamiento total
$ar{y}$	Transformada de Laplace de $y$
z	Variable de fase
$\mathfrak{z}\left(t\right)$	Perturbación
$\alpha$	Variable de polinomio
$\gamma$	Constante de acoplamiento
δ	Operador variacional del principio de poderes virtuales
	(Delta de Dirac)
$\epsilon$	Constante de sintonización
ζ	Constante de amortiguamiento
$\theta, \theta(t)$	Angulo entre la base y el eslabón
$ heta^*$	Mínimo

XXI NOTACIÓN

$\hat{ heta}$	Estimación del mínimo
$\dot{ heta}$	Velocidad angular entre la base y el eslabón
$\theta_d$	Ángulo deseado
$\dot{ heta}_d$	Velocidad angular deseada
$\ddot{ heta}_d$	Aceleración angular deseada
$\rho$	Densidad
$ ho_p$	Densidad de la carga a manipular
au	Torque
$ au_s$	Periodo de muestreo
$\tau(t)$	Torque en la base del manipulador
$\phi(x)$	Forma modal
$\omega$	Constante de acoplamiento, frecuencia en Hertz
$\omega_n$	Frecuencia natural
$\omega_0$	Cero del sistema
$\Omega, \Omega_n$	Matriz de frecuencias naturales

## CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

## 1.1. Visión general

Los robots usualmente se diseñan rígidos de manera que se obtenga una mayor precisión en las tareas a realizar. Este tipo de diseños tiene sus limitantes. Un ejemplo es cuando los robots alcanzan dimensiones grandes tratando de mantener poca masa, o se quieren realizar tareas a altas velocidades, es en este tipo de situaciones que las condiciones de modelado para manipuladores rígidos no pueden seguir aplicando y se deben considerar los robots manipuladores flexibles como es el caso del manipulador Canadarm2 utilizado en el ensamble de la estación espacial internacional y de manera reciente para mover equipo, suministros e incluso astronautas Figura 1.1.



Figura 1.1: Canadarm2 Space Station Remote Manipulator System (SSRMS) **Créditos: NASA** 

Los manipuladores flexibles ofrecen muchas ventajas sobre su contraparte rígida como son: un menor costo en manufactura de los eslabones, requiere actuadores menos potentes; no obstante, debido a la naturaleza distribuida de esos sistemas, las ecuaciones que describen la dinámica no pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias. El modelo dinámico del manipulador flexible es representado por una serie de ecuaciones diferenciales parciales con infinitos grados de libertad que describen el comportamiento de la parte dependiente de variables espacio temporales, es decir, el sistema distribuido y las condiciones iniciales y de frontera en el sistema.

Las investigaciones realizadas previamente van desde manipuladores flexibles de un solo eslabón que rotan sobre un eje, como es el caso de la presente tesis hasta manipuladores de múltiples eslabones actuando bajo efectos gravitatorios, sin embargo, la mayoría de los resultados experimentales están basados en manipuladores de un solo eslabón, esto se debe a la complejidad y a los retos que presenta agregar más eslabones al sistema, esta complejidad surge principalmente del acoplamiento entre el movimiento rígido y movimiento flexible, las características de la vibración estructural cambian con el tiempo, de acuerdo a la configuración geométrica del manipulador, que conduce a los cambios en sus frecuencias resonantes y modos de vibración. Los manipuladores flexibles son sistemas de parámetros distribuidos con movimientos rígidos y flexibles [1]. Las principales limitaciones físicas asociadas con este tipo de robots en el caso de esta tesis son:

- El par de control solo se aplica en un extremo de la articulación.
- Solo se puede colocar un número finito de sensores con un ancho de banda limitado a lo largo del eslabón del manipulador.

Esto debido a que nos interesa resolver el problema de seguimiento de trayectoria del extremo del robot manipulador flexible sin agregar actuadores que no se presentan en un manipulador rígido.

Estas suposiciones son consideradas para realizar el modelado, simulación y síntesis de leyes de control para estos manipuladores flexibles. La estructura mecánica juega un papel muy importante en el desempeño de estas leyes de control, es aquí donde surge la necesidad de abordar el problema de las vibraciones en este tipo de sistemas, para así garantizar un buen desempeño en la tarea para la que fueron realizados. Esto genera nuevos retos, entre los principales que se presentan al trabajar con robots de eslabones flexibles se encuentran los siguientes:

- Presencia de vibraciones debidas a los propios movimientos del manipulador o a fuerzas externas.
- Mayor grado de complejidad en el análisis del sistema comparado con un brazo rígido.
- La precisión del sistema se ve limitada por la falta de habilidad para medir las deformaciones y suprimir vibraciones.

## 1.2. Técnicas de modelado y simulación

Los modelos dinámicos de manipuladores flexibles pueden describirse ya sea utilizando EDP (Ecuaciones Diferenciales Parciales) o una serie de EDO (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) utilizando alguna aproximación como puede ser expansiones modales. Las ventajas de las EDP es que describen de manera completa las características del sistema de parámetros distribuidos, aunque requiere de más recursos computacionales para simularlas, otra desventaja es que el diseño de controladores es un desafío en comparación a un sistema descrito por EDO. Las EDO utilizan aproximaciones haciendo más simple el análisis de las dinámicas a costa de la exactitud del modelo de manera que la implementación es trivial. Se han desarrollado varios tipos de modelos del manipulador flexible basándose en diferentes principios [2] y en el tipo de ecuaciones en el que se basan:

#### EDO [2]:

- Ecuaciones de Lagrange y expansiones modales (Método de Ritz Kantrovitch).
- Ecuación de Euler-Newton y expansión modal.

#### EDP [2]:

- Ecuaciones de Lagrange y modelado por elemento finito.
- Ecuación de Euler-Newton y modelado por elemento finito.
- Principio de Hamilton y diferencias finitas
- Principio de Hamilton y expansión modal.

### 1.3. Estado del arte

Los manipuladores flexibles tienen su origen en la investigación espacial donde se busca reducir el costo de lanzamiento minimizando el peso del manipulador así como de sus fuentes de alimentación. El primer sistema experimental de un manipulador flexible fue diseñado a principios de 1980 [3], [4]. Entre los primeros diseños se encuentra el manipulador de Sheffield de la Figura 1.2 y el manipulador IST de la Figura 1.3. Comparando estos diseños con robots más recientes por ejemplo el presentado por [5], mostrado en la Figura 1.4 podemos ver que los diseños no han cambiado drásticamente, sin embargo, el avance en los actuadores y sensores hace mucho más fácil la construcción y el control.

El manipulador de Sheffield es una barra directamente actuada hecha de una aleación de aluminio. Un decodificador óptico y un tacómetro miden la posición y velocidad angular respectivamente, un acelerómetro mide la aceleración en la punta del manipulador. Este fue construido de manera que sea flexible en el plano horizontal y rígido en el plano vertical contra flexión y torsión.

El manipulador Sheffield se utilizó para estudiar las formas modales de manera que se diseñó con la idea que estuviera restringido para el caso donde la viga en la base no está rotando y sin restricciones cuando la viga en la base esté rotando, modificando las condiciones de frontera para el análisis de cada caso. Este último caso fue limitado a cuando la inercia en el soporte es lo suficientemente alta, esto se logró utilizando un motor sin reducción de engranes y de baja fricción para el mecanismo de actuación.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Densidad 2.71  $q/cm^3$ , módulo de Young 71 GPa [7]

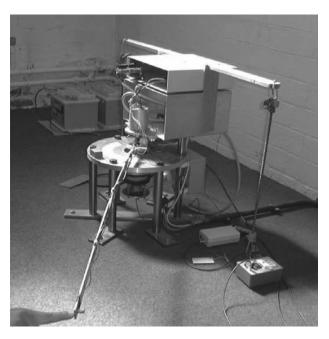


Figura 1.2: Manipulador flexible Sheffield [6]

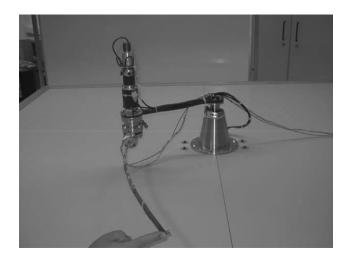


Figura 1.3: Manipulador flexible IST [6]

El manipulador IST es considerado flexible y está diseñado para experimentar con métodos de control de fuerza. Está fabricado de acero para resortes  $^2$ , actuado por un sistema reductor armónico actuado por un servomotor. Un decodificador óptico conectado al eje del sistema reductor armónico mide el desplazamiento angular, una cámara SR-series Kodak con una velocidad de adquisición de  $1000\ fps$  mide la posición de la punta, el sistema se diseñó de manera que no se mueva la viga durante las vibraciones libres para estudiar suposiciones de desplazamientos lineales y cuadráticos.



Figura 1.4: Manipulador flexible J. Becedas [5]

Un diseño típico de manipulador flexible incluye un mecanismo actuador como puede ser un motor DC o arreglos de reductores armónicos actuados con motores de DC que permite rotar el eslabón, un decodificador óptico que mida la rotación de la articulación, arreglos de acelerómetros, galgas o cámaras para medir la deflexión elástica del sistema, sensores de fuerza en la punta del manipulador. La rigidez del manipulador varía desde manipuladores semirígidos (rígido en uno o varios de sus eslabones) hasta muy flexibles [8], [9], manufacturados de aceros para resortes; todos estos componentes se encuentran en una gran variedad y queda a criterio del investigador diseñar y escoger los componentes que cumplan con los parámetros de diseño del prototipo.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Densidad  $7.850kq/m^3$ , módulo de Young 209 GPa

Originalmente el estudio de manipuladores flexibles, se basaba en manipuladores de un solo eslabón [10], [11] y aunque estos componen una parte importante de los manipuladores que se estudian, actualmente el enfoque más importante ha cambiado hacia manipuladores flexibles de múltiples eslabones [12], [13], un ejemplo es el manipulador de Zhang mostrado en la Figura 1.5 [14]. Este tipo de manipuladores tiene muchas configuraciones la mayoría restringidos a trabajar en el plano ya sea horizontal o vertical.

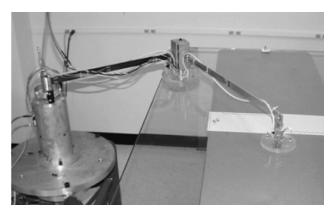


Figura 1.5: Manipulador flexible Zhang [14]

En la industria se requieren robots con un largo alcance y capaces de levantar grandes cantidades de material, es en este tipo de casos donde la robótica convencional (manipuladores rígidos) deja de ser factible [15] y surge la necesidad de robots cuya estructura permita manejar estas cargas. Aún cuando se diseñan teniendo en mente la minimización de vibraciones, los robots flexibles se ven gobernados por sus dinámicas de vibraciones estructurales y es por esto que es tan importante que el controlador tenga en cuenta estos fenómenos con el fin de mejorar la respuesta de estos sistemas. Algunos ejemplos de aplicaciones industriales son la robótica espacial, inspección de contenedores de desechos nucleares, industria química, operaciones de rescate, construcción, etc, [7].

Es en estas áreas donde prototipos de robots manipuladores flexibles son utilizados, algunos ejemplos son la spidercam , la cual se mueve sobre cables en un área de 250  $m \times 250~m$  y el prototipo IREP (The Insertable Robotic Effectors Platform) presentado en [16], el cual utiliza dos brazos robóticos continuos (hiper-redundantes) y una cámara con el fin de realizar cirugías teleoperadas no invasivas. En este tipo de robots flexibles no es práctico utilizar soluciones de actuadores y sensores como: cámaras, galgas extensiométricas, piezoeléctricos.

Así como en los manipuladores rígidos existen objetivos de control que debemos cumplir ya sea regulación de la posición, velocidad, aceleración, pares, fuerzas y seguimiento de tra-

yectorias, estos también se presentan para el caso de manipuladores flexibles, para esto el control debe considerar que el sistema es una combinación de dinámicas del cuerpo rígido y dinámicas flexibles y generalmente son de fase no mínima y subactuados [17], las cuales son las restricciones más críticas para la aplicación de esquemas de control convencionales.

La mayoría de las señales realimentadas a los manipuladores flexibles son tomadas del desplazamiento en la punta del manipulador, los métodos utilizados para adquirir el desplazamiento en la punta del manipulador incluye: cámaras, sensores ultrasónicos, sensores electromagnéticos, galgas extensiométricas, sistemas de navegación inercial (acelerómetros, giroscopios, magnetómetros), odómetros, [18], en el caso de este trabajo de tesis se escogió el acelerómetro sobre los demás sensores debido a que entrega una tasa de retroalimentación de vibraciones alta, con precisión y bajo costo.

Uno de los controladores que se ha explorado en este tipo de sistemas es el GPI [19], esto debido a sus propiedades de robustez que funcionan bien para sistemas donde algunos de los parámetros no son conocidos, o sus dinámicas se considera que no están completamente modeladas. Otros de los controladores utilizados son los de perturbación singular, supresión activa de vibraciones, stable inversion in the time domain, stable inversion in the frequency domain, planificación óptima de trayectorias, redes neuronales, esquemas algebraicos, control adaptativo, regulador PD, linealización entrada/salida a través de retroalimentación de estado estático, redefinición de la salida, control por modos deslizantes, colocación de polos, input shaping, boundary control, acoplamiento de manipuladores, mechanical wave approach, Lógica Difusa, diseño óptimo de manipuladores, lo cual se puede observar en la revisión [18].

Una herramienta en aplicaciones de control es el controlador Extremum Seeking (ESC) el cual surgió en 1940 y fue muy popular hasta 1960; tuvo un resurgimiento en 1990 como una herramienta de optimización en tiempo real que no entra en el paradigma clásico o esquemas que requieren del modelo como referencia [20].

ESC es una alternativa que lidia con el problema de regulación a una referencia o punto conocido y se ha caracterizado recientemente por sus aplicaciones en sistemas como biorreactores, sistemas biomédicos, formaciones de robots, sistemas fotovoltaicos y sistemas de combustión [21, 22], donde todos se caracterizan por tener modelos complejos e imprecisos; el ESC se aplica a problemas donde existen no linealidades en el problema de control y las variables a controlar tienen un mínimo o un máximo local.

ESC como todos los controladores tiene desventajas, en el caso del método que utilizaremos se obtiene un gradiente de la salida del sistema a partir de una perturbación periódica, la cual no puede ser más rápida que el sistema debido a problemas de estabilidad y resonancia, limitando la velocidad a la que puede actuar el controlador y forzando la respuesta en estado estacionario a quedarse siempre en una región delimitada por dicha perturbación; esta perturbación induce

vibraciones en el sistema.

En el trabajo [23], se utilizó un controlador PID con un lazo de input shaping como técnica de control para evitar resonancia, reduciendo la vibración residual; esta técnica de control requiere conocimiento de las frecuencias naturales del sistema las cuales fueron obtenidas y ajustadas utilizando ESC, los resultados y la efectividad del controlador se prueba comparando los resultados con el caso no adaptativo, este control se enfoca a la regulación y únicamente trabaja con entradas escalón.

## 1.4. Motivación y justificación

El empleo de sistemas robóticos para la resolución de tareas ha ido en aumento en los últimos años, dichas tareas varían en complejidad, precisión, espacio de trabajo y velocidad, siendo estos últimos dos factores las razones por las que el modelado rígido de los robots pierde validez. Los manipuladores flexibles están sujetos a incertidumbres de modelado y a dinámicas flexibles, al igual que a perturbaciones provenientes del ambiente de trabajo, son las dinámicas flexibles lo que motiva el desarrollo de este trabajo de tesis.

Justificados por el hecho que el control Extremum Seeking es bien conocido por sus capacidades de manejar sistemas con no linealidades, en la capacidad del esquema de control GPI para estimar los estados no accesibles del sistema ya sea por limitaciones físicas, de presupuesto o tecnología y en las propiedades de los sistemas planos, en este trabajo de tesis se diseña un esquema de control que resuelve el problema de seguimiento de trayectoria mientras que minimiza las vibraciones de las propias dinámicas flexibles del sistema y se modifica la frecuencia de la perturbación utilizada en el ESC de manera que podamos minimizar las vibraciones utilizando los principios de análisis modal.

En este trabajo de tesis, utilizando las propiedades del controlador GPI podemos controlar la dinámica rígida del manipulador sin la necesidad de conocer el vector de estados de manera completa, las vibraciones del sistema ligadas a la dinámica flexible pueden ser minimizadas utilizando el controlador Extremum Seeking, la región de convergencia del lazo de ESC depende de la amplitud, la frecuencia de perturbación y ganancias de los filtros. Para reducir la región de convergencia en el estado estacionario se modifica la frecuencia de perturbación sinusoidal [20], de manera que en los instantes iniciales se utiliza la frecuencia natural del sistema haciendo que las vibraciones inducidas llevan a la resonancia al sistema, acelerando la obtención del gradiente y se entrega una mayor cantidad de información, de manera suave se modifica a la frecuencia de perturbación llevándola hacia una antirresonancia del sistema, donde en el estado estacionario se cierra la región de convergencia minimizando las vibraciones residuales consecuencia de la perturbación sinusoidal.

### 1.5. Objetivos

En esta sección se describen el objetivo principal y los objetivos particulares esta tesis.

#### 1.5.1. Objetivo general

Utilizando un modelo matemático del manipulador de un eslabón que permita interconectar la dinámica rígida y la flexible, diseñar una suma de leyes de control GPI + ESC donde la frecuencia de la perturbación está basada en las frecuencias naturales del sistema de manera que primero se garantice la estabilidad de la dinámica rígida, segundo se permita la regulación y el seguimiento de trayectoria y tercero reduzca las vibraciones debidas a la interacción de la dinámica flexible y de perturbación utilizada en el ESC en el estado estacionario.

### 1.5.2. Objetivos particulares

- Diseñar y construir el prototipo de un robot flexible de un eslabón.
- Obtener un modelo del sistema basado en Ecuaciones Diferenciales Parciales.
- Obtener las frecuencias naturales del sistema de manera teórica y experimental.
- Diseñar un control Extremum Seeking basado en perturbaciones.
- Implementar el controlador.

#### 1.6. Estructura del documento

En el primer capítulo abordamos la introducción al trabajo realizado durante el proyecto de tesis, presentamos la motivación, objetivos y el estado del arte para los robots manipuladores flexibles.

En el segundo capítulo se detalla la obtención del modelo matemático del sistema, una simulación de dicho modelo utilizando una aproximación por diferencias finitas. También se explica la obtención de las frecuencias naturales y las formas mecánicas lagrangianas, así como distintas representaciones de éstas que se utilizan para diseñar las estrategias de control.

En el tercer capítulo se aborda el diseño de la plataforma experimental (robot manipulador flexible de un eslabón), y se describen las partes que integran la plataforma, así como los parámetros utilizados.

En el cuarto capítulo se detalla el diseño de la estrategia de control PD, GPI y Extremum Seeking propuestas. También se diseña un esquema de control donde se combinan el control GPI y el Extremum Seeking de manera que existan diferentes lazos de control correspondientes a cada una de las frecuencias naturales del sistema, se muestran los resultados experimentales obtenidos durante el proceso de implementación de los distintos controladores en el sistema del manipulador flexible.

Finalmente, en el quinto capítulo tenemos las conclusiones y posibles trabajos a futuro que se pueden realizar a partir de este trabajo de tesis.

## CAPÍTULO 2

#### MODELADO DEL SISTEMA

Para el modelado del sistema se utilizan distintos métodos como son: el principio de Hamilton, el principio de expansión modal y ecuaciones de Euler-Lagrange, de los cuales obtenemos distintas propiedades las cuales son usadas en el capítulo 4 para diseñar estrategias de control.

Empezando por el principio de Hamilton, el cual tiene ciertas ventajas sobre otros métodos de modelo como son: este método es independiente de las coordenadas, las condiciones de frontera se generan de manera automática al formular el problema en términos de ecuaciones integrales equivalentes a las ecuaciones diferenciales, las condiciones iniciales están automáticamente incorporadas a través de los límites de integración y en el proceso de aplicar este método obtenemos las energías cinética, potencial y el trabajo del sistema, las cuales pueden ser usadas para el diseño de funciones de Lyapunov como se mostrará en la sección 4.1.1.

El principio de expansión modal nos permite representar a la dinámica flexible del sistema como una superposición de cada uno de sus modos de vibración y así obtener las frecuencias naturales del sistema, las cuales se comparan con las frecuencias obtenidas de manera experimental y en simulaciones, las frecuencias naturales y antirresonancias del sistema se utilizan en el diseño de la estrategia de control Extremum Seeking presentada en la sección 4.3.

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange llevamos al sistema a una representación que nos permite interconectar la dinámica rígida y las dinámicas flexible, las propiedades de esta forma se describen más a fondo y se utilizan en la sección 4.2 para diseñar un controlador GPI que garantice estabilidad de la dinámica rígida del sistema.

El sistema manipulador flexible se modela como una viga en cantilever con una masa en la punta, debido a las propiedades de los momentos de inercia de la sección de la viga en la cual la altura del eslabón es mucho mayor que su ancho decimos que la viga vibra y es flexible en el eje horizontal, pero asumimos que es rígida ante la flexión vertical y torsional ya que estos tipos de flexión están asociados a modos de vibración altos [24]. Para simplificar el análisis y eliminar los problemas que se generan debido a la variación del largo de la viga en el tiempo asumimos que esta es despreciable [15], asumimos que el eje de rotación es rígido esto debido a que se diseña el sistema de manera que la base sea rígida, realizando un análisis de esfuerzo en la viga resulta que el esfuerzo en el punto final debe ser cero si no se encuentra una fuerza externa presente en el extremo libre. La Figura 2.1 muestra un diagrama esquemático de un robot flexible de un eslabón.

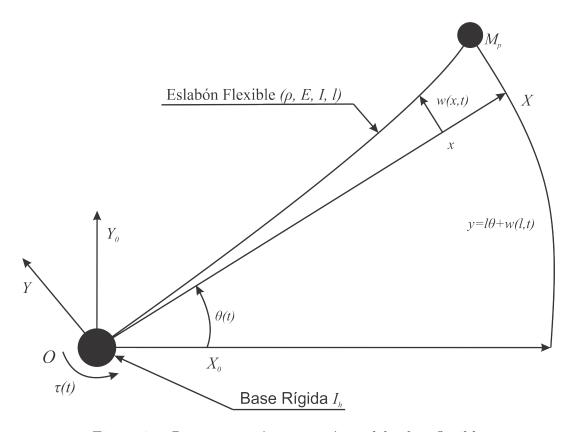


Figura 2.1: Representación esquemática del robot flexible

 $OX_0Y_0$  Es el marco de referencia global y OXY el marco de referencia fijo a la articulación, el desplazamiento realizado por el robot en el plano  $OX_0Y_0$  está representado por  $\theta(t)$ .

Considerando que la base del manipulador es rígida, mientras la línea OX es tangencial al manipulador en la base, se cumple que la deflexión elástica en el origen está dada por la siguiente expresión:

$$w(0,t) = 0 \tag{2.1}$$

donde las derivadas de la ecuación (2.1) respecto a x son:

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.3}$$

El desplazamiento total y(x,t) de un punto a lo largo del manipulador a una distancia x de la base puede ser descrito como una función del movimiento rígido del eslabón  $\theta(t)$  y la deflexión elástica w(x,t) a lo largo del eje OX:

$$y(x,t) = x\theta(t) + w(x,t) \tag{2.4}$$

donde y(x,t) es el offset del brazo robot en términos de la magnitud, de las ecuaciones (2.1), (2.2) obtenemos las siguientes condiciones de frontera del sistema las cuales son valores específicos que se imponen a la solución de la ecuación diferencial, se toma de la frontera del dominio y de la derivada normal a la frontera:

$$y(0,t) = 0 (2.5)$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \theta \tag{2.6}$$

Derivando la ecuación (2.4) respecto a x, n número de veces donde  $n \ge 2$ :

$$\frac{\partial^n y(x,t)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n w(x,t)}{\partial x^n}, \ (n \ge 2)$$
 (2.7)

A partir de la ecuación (2.7) sabemos que derivando (2.4) dos veces respecto a x se obtiene:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.8}$$

Derivando (2.4) respecto a x y 2 veces respecto al tiempo

$$\frac{\partial^3 y\left(0,t\right)}{\partial x \partial t^2} = \ddot{\theta} \tag{2.9}$$

De la ecuación (2.8) si evaluamos x = 0 y x = l obtenemos

$$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

Derivando la ecuación (2.11) respecto a x, obtenemos

$$\frac{\partial^{3} y\left(l,t\right)}{\partial x^{3}} = \frac{\partial^{3} w\left(l,t\right)}{\partial x^{3}} \tag{2.12}$$

Las condiciones de frontera (2.5) - (2.12) serán útiles durante la obtención del modelo y se mencionan a lo largo de la tesis, particularmente en el capítulo 4.

# 2.1. Energías asociadas al sistema

Para el manipulador consideramos las energías cinética y potencial; asumiendo una carga puntual en el extremo y una viga delgada se descarta la contribución del momento rotacional de inercia de la barra, escribimos la energía cinética asociada a la inercia, rotación y masa del manipulador de la siguiente manera [25]:

$$E_K = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + x \dot{\theta} \right)^2 \rho dx + \frac{1}{2} M_p \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + x \dot{\theta} \right)_{x=l}^2$$
(2.13)

donde  $I_h$  es la inercia en la base,  $\dot{\theta}$  es la razón de cambio de la posición angular, w es la deflexión elástica del manipulador, l es la longitud del manipulador,  $\rho$  es la densidad del eslabón,  $M_p$  la masa en el extremo del manipulador. Podemos observar que el primer término del lado derecho de la ecuación es debido a la inercia de la base. El segundo término es debido a la rotación del manipulador con respecto al origen y el tercer término es debido a la masa a transportar en la punta.

La energía potencial está relacionada con la flexión del manipulador y debido a que se asume que los efectos cortantes son más influyentes en modos de vibración de alta frecuencia [24], se representa la energía potencial de la siguiente manera [25]:

$$E_P = \frac{1}{2}EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{2.14}$$

# 2.2. Dinámica del manipulador

Se define el trabajo virtual del sistema [25],

$$W = \tau(t)\theta(t) \tag{2.15}$$

y el Lagrangiano del sistema.

$$\mathcal{L} = E_K - E_P \tag{2.16}$$

Con el objetivo de obtener las ecuaciones del sistema que describen la dinámica del manipulador en términos de la deflexión total y posteriormente en términos de la deflexión elástica, así como las condiciones iniciales y condiciones de frontera aplicamos el principio de Hamilton extendido [26] y procederemos a resolver las integrales,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{L} + \delta W) dt = 0 \tag{2.17}$$

Se puede aplicar el principio de Hamilton extendido siempre y cuando  $\delta\theta = \delta w = 0$  en un tiempo  $t_1$  a  $t_2$  donde  $t_1$  y  $t_2$  son tiempos arbitrarios  $(t_1 < t_2)$ .

La integral en (2.17) se puede reescribir como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_K - E_P + W) dt = 0$$
 (2.18)

A continuación se muestra un procedimiento que consiste en sustituir cada una de las energías y el trabajo en la ecuación (2.18), expandiendo cada uno de sus términos y utilizando las condiciones de frontera presentadas anteriormente para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento de la viga en cantilever. Al sustituir  $E_K$  de (2.13) se obtiene:

$$\int_{t_{1}}^{t_{2}} \delta E_{K} dt = \int_{t_{1}}^{t_{2}} \delta \left( \frac{1}{2} I_{h} \dot{\theta}^{2} + \frac{\rho}{2} \int_{0}^{l} \dot{y} (x, t)^{2} dx + \frac{1}{2} M_{p} \dot{y} (x, t)^{2}_{x=l} \right) dt$$

$$= \int_{t_{1}}^{t_{2}} \delta \left( \frac{1}{2} I_{h} \dot{\theta}^{2} \right) dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \delta \dot{y} (x, t)^{2} dx dt$$

$$+ \int_{t_{1}}^{t_{2}} \delta \left( \frac{1}{2} M_{p} \dot{y} (l, t)^{2} \right) dt$$
(2.19)

ya que

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} I_h \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dt = I_h \dot{\theta} \delta \theta |_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} I_h \ddot{\theta} \delta \theta d \ t = - \int_{t_1}^{t_2} I_h \ddot{\theta} \delta \theta d \ t$$

donde  $\delta\dot{\theta}dt = \frac{d}{dt}\delta\dot{\theta}$  proviene de  $\delta\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x$ 

$$\frac{\rho}{2} \int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \delta \dot{y} (x,t)^{2} dx dt = \int_{0}^{l} \int_{t_{1}}^{t_{2}} \rho \dot{y} (x,t) \delta \dot{y} (x,t) dt dx$$

$$= \int_{0}^{l} \left( \rho \dot{y} (x,t) \delta y (x,t) \Big|_{t_{1}}^{t_{2}} - \int_{t_{1}}^{t_{2}} \rho \ddot{y} (x,t) \delta y (x,t) dt \right) dx$$

$$= -\int_{0}^{l} \int_{t_{1}}^{t_{2}} \rho \ddot{y} (x,t) \delta y (x,t) dt dx$$

$$= -\int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \rho \ddot{y} (x,t) \delta y (x,t) dx dt$$

donde  $\int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \rho \ddot{y}(x,t) \delta y(x,t) dt dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho \ddot{y}(x,t) \delta y(x,t) dx dt$ 

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\left(\frac{1}{2}M_p \dot{y}(l,t)^2\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} M_p \dot{y}(l,t) \,\delta \dot{y}(l,t) \,dt$$

$$= M_p \dot{y}(l,t) \,\delta y(l,t) \,|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} M_p \ddot{y}(l,t) \,\delta y(l,t) \,dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} M_p \ddot{y}(l,t) \,\delta y(l,t) \,dt$$

Podemos reescribir la ecuación (2.19) de la siguiente manera:

$$\delta \int_{t_{1}}^{t_{2}} E_{K} dt = -\int_{t_{1}}^{t_{2}} I_{h} \ddot{\theta} \delta \theta d \ t - \int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \rho \ddot{y} (x, t) \, \delta y (x, t) \, dx dt - \int_{t_{1}}^{t_{2}} M_{p} \ddot{y} (l, t) \, \delta y (l, t) \, dt$$
(2.20)

Al sustituir  $E_P$  de (2.14) en (2.18), se obtiene:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} E_P dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial^2 y (x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx dt$$

$$= -EI \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial^2 y (x, t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 y (x, t)}{\partial x^2} dx dt$$

$$= -EI \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial^2 y (x, t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial y (x, t)}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 y (x, t)}{\partial x^3} \delta \frac{\partial y (x, t)}{\partial x} dx \right) dt$$

$$= -EI \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial^2 y (x, t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial y (x, t)}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 y (x, t)}{\partial x^3} \delta \frac{\partial y (x, t)}{\partial x} dx \right) dt$$

Evaluando  $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \delta \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$  en x = 0, l obtenemos:

$$\begin{split} \delta \int_{t_{1}}^{t_{2}} E_{P} dt &= -EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \frac{\partial^{2}y\left(l,t\right)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y\left(l,t\right)}{\partial x} - \frac{\partial^{2}y\left(0,t\right)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y\left(0,t\right)}{\partial x} \right) dt \\ &+ EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \frac{\partial^{3}y\left(x,t\right)}{\partial x^{3}} \delta \frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x} dx dt \\ &= -EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \frac{\partial^{2}y\left(l,t\right)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y\left(l,t\right)}{\partial x} - \frac{\partial^{2}y\left(0,t\right)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y\left(0,t\right)}{\partial x} \right) dt \\ &+ EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \frac{\partial^{3}y\left(x,t\right)}{\partial x^{3}} \delta y\left(x,t\right) \Big|_{0}^{l} - \int_{0}^{l} \frac{\partial^{4}y\left(x,t\right)}{\partial x^{4}} \delta y\left(x,t\right) dx \right) dt \end{split}$$

Evaluando  $\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} \delta y(x,t)$  en x=0,l y sustituyendo la condiciones de frontera (2.3), (2.5), (2.7) en el término  $\frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3} \delta y(0,t)$  obtenemos:

$$\delta \int_{t_{1}}^{t_{2}} E_{P} dt = -EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \frac{\partial^{2} y(l,t)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y(l,t)}{\partial x} - \frac{\partial^{2} y(0,t)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} \right) dt + EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \frac{\partial^{3} y(l,t)}{\partial x^{3}} \delta y(l,t) dt - EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \frac{\partial^{4} y(x,t)}{\partial x^{4}} \delta y(x,t) dx dt$$

$$(2.21)$$

Al sustituir W de (2.15) en (2.18), se obtiene:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} W dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \tau(t) \theta(t) dt$$
 (2.22)

A partir del análisis anterior podemos determinar que:

$$\delta \int_{t_{1}}^{t_{2}} (E_{K} - E_{P} + W) dt = -\int_{t_{1}}^{t_{2}} I_{h} \ddot{\theta} \delta \theta d \ t - \int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \rho \ddot{y} (x, t) \, \delta y (x, t) \, dx \, dt$$

$$- \int_{t_{1}}^{t_{2}} M_{p} \ddot{y} (l, t) \, \delta y (l, t) \, dt$$

$$- EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \frac{\partial^{2} y (l, t)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y (l, t)}{\partial x} - \frac{\partial^{2} y (0, t)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y (0, t)}{\partial x} \right) dt$$

$$+ EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \frac{\partial^{3} y (l, t)}{\partial x^{3}} \delta y (l, t) \, dt$$

$$- EI \int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \frac{\partial^{4} y (x, t)}{\partial x^{4}} \delta y (x, t) \, dx dt$$

$$+ \delta \int_{t_{1}}^{t_{2}} \tau (t) \theta (t) dt$$

$$(2.23)$$

Sustituyendo las condiciones (2.5), (2.6), (2.7), (2.10) en la ecuación (2.23) se obtiene:

$$\int_{t_{1}}^{t_{2}} \left(\delta E_{K} - \delta E_{P} + \delta W\right) dt = -\int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \left(\rho \ddot{y}\left(x, t\right) + EI \frac{\partial^{4} y\left(x, t\right)}{\partial x^{4}}\right) \delta y\left(x, t\right) dx dt$$

$$-\int_{t_{1}}^{t_{2}} \left(I_{h} \ddot{\theta} - EI \frac{\partial^{2} y\left(0, t\right)}{\partial x^{2}} - \tau(t)\right) \delta \frac{\partial y\left(0, t\right)}{\partial x} dt$$

$$-\int_{t_{1}}^{t_{2}} \left(M_{p} \ddot{y}\left(l, t\right) - EI \frac{\partial^{3} y\left(l, t\right)}{\partial x^{3}}\right) \delta y\left(l, t\right) dt$$

$$-\int_{t_{1}}^{t_{2}} \left(EI \frac{\partial^{2} y\left(l, t\right)}{\partial x^{2}}\right) \delta \frac{\partial y\left(l, t\right)}{\partial x} dt$$

De acuerdo al principio de Hamilton dado por la ecuación (2.17), igualamos las condiciones de la derecha a cero y obtenemos:

$$0 = -\int_{t_{1}}^{t_{2}} \int_{0}^{l} \left( \rho \ddot{y}(x,t) + EI \frac{\partial^{4}y(x,t)}{\partial x^{4}} \right) \delta y(x,t) dxdt$$

$$-\int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( I_{h} \frac{\partial \ddot{y}(0,t)}{\partial x} - EI \frac{\partial^{2}y(0,t)}{\partial x^{2}} - \tau(t) \right) \delta \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} dt$$

$$-\int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( M_{p} \ddot{y}(l,t) - EI \frac{\partial^{3}y(l,t)}{\partial x^{3}} \right) \delta y(l,t)$$

$$-\int_{t_{1}}^{t_{2}} EI \frac{\partial^{2}y(l,t)}{\partial x^{2}} \delta \frac{\partial y(l,t)}{\partial x} dt$$

$$(2.24)$$

Debido a que  $\delta y\left(x,t\right)$ ,  $\delta \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}$ ,  $\delta y\left(l,t\right)$ ,  $\delta \frac{\partial y(l,t)}{\partial x}$  son variables dependientes, para cumplir la ecuación (2.24) se debe cumplir que:

$$\rho \ddot{y}(x,t) + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = 0$$
 (2.25)

$$I_{h} \frac{\partial \ddot{y}(0,t)}{\partial x} - EI \frac{\partial^{2} y(0,t)}{\partial x^{2}} - \tau(t) = 0$$
(2.26)

$$M_{p}\ddot{y}\left(l,t\right) - EI\frac{\partial^{3}y\left(l,t\right)}{\partial x^{3}} = 0$$
(2.27)

$$EI\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0 {(2.28)}$$

Al derivar dos veces la ecuación (2.4) respecto al tiempo tenemos:  $\ddot{y}(x,t) = x\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}(x,t)$ , sustituyendo en las ecuaciones (2.25) - (2.28) obtenemos el modelo que describe la dinámica del sistema en términos de la deflexión elástica w.

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -\rho x \ddot{\theta}$$
 (2.29)

Junto a sus respectivas condiciones de frontera las cuales asumimos que deben cumplir:

- La deflexión elástica en la base (w(0,t)) debe de ser cero.
- Las fuerzas totales generalizadas en la base deben ser iguales al par aplicado.
- La fuerza cortante en el punto final debe ser igual a  $M_p\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right)$  [27].
- El esfuerzo en el punto final debe ser cero si no se encuentra una fuerza presente en el extremo libre.

$$I_{h} \frac{\partial^{3} w(0,t)}{\partial t^{2} \partial x} - EI \frac{\partial^{2} w(0,t)}{\partial x^{2}} = \tau(t)$$
(2.30)

$$M_{p} \frac{\partial^{2} w(l,t)}{\partial t^{2}} - EI \frac{\partial^{3} w(l,t)}{\partial x^{3}} = 0$$
(2.31)

$$EI\frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0 (2.32)$$

Cabe mencionar que las propiedades inerciales en la masa en el extremo libre deben ser concentradas y las inercias despreciables para que se cumplan las ecuaciones (2.29) - (2.32).

## 2.3. Formas modales

Para obtener de manera teórica las frecuencias naturales del manipulador flexible, las cuales posteriormente compararemos con las frecuencias obtenidas de manera práctica y a través de software, esto con el fin de incorporarlas en el diseño del controlador Extremum Seeking que se presenta en la sección 4.3 específicamente en la perturbación.

Podemos aplicarle a las ecuaciones obtenidas en la sección anterior el principio de expansión modal, este principio nos dice que una solución a la ecuación de la dinámica del manipulador se puede obtener como combinación lineal de la forma y el desplazamiento modales [28], [29], sustituyendo las soluciones modales en las ecuaciones diferenciales parciales para obtener un

equivalente en ecuaciones diferenciales ordinarias. Si se considera que la solución expandida en la que se elimina el modo de cuerpo rígido n=0 la cual está dada por:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) q_i(t) \quad para \quad i = 1, 2, \dots, n$$
 (2.33)

Sustituyendo y(x,t) de la ecuación (2.33) en la ecuación (2.29), obtenemos:

$$EI\frac{\partial^{4}}{\partial x^{4}}\sum_{i=1}^{n}\phi_{i}\left(x\right)q_{i}\left(t\right) + \rho\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\sum_{i=1}^{n}\phi_{i}\left(x\right)q_{i}\left(t\right) = 0$$
(2.34)

Factorizando términos podemos observar la sustitución de variables espacio temporales a una suma de variables espaciales y temporales separadas de manera que las derivadas parciales resultan en derivadas ordinarias:

$$\frac{EI}{\rho} \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{4}\phi_{i}(x)}{dx^{4}} q_{i}(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{2}q_{i}(t)}{dt^{2}} \phi_{i}(x) = 0$$
(2.35)

Dividiendo entre  $\phi_i(x)q_i(t)$  y utilizando una constante de separación  $\omega_i$ .

$$\frac{EI}{\rho} \frac{1}{\phi_i(x)} \sum_{i=1}^n \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = -\frac{1}{q_i(t)} \sum_{i=1}^n \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} = \omega_i^2$$
 (2.36)

Por lo tanto, obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^{4}\phi_{i}(x)}{dx^{4}} - \beta_{i}^{4}\phi_{i}(x) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{2}q_{i}(t)}{dt^{2}} + \omega_{i}^{2}q_{i}(t) = 0$$
 (2.37)

donde

$$\omega_i^2 = \frac{EI}{\rho} \beta_i^4$$

Es decir

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} = (\beta_i l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}$$
(2.38)

 $\beta_i$  es una constante, los valores analíticos de  $\omega_i$  se pueden obtener a partir de estas ecuaciones. De la misma manera para las condiciones de frontera (2.31), (2.32) donde se considera que el eslabón flexible se encuentra fijo en la base y con el extremo libre [29].

$$\phi_i(0) = 0 \; ; \; \frac{d\phi_i(0)}{dx} = 0 \; ; \; EI\frac{d^2\phi_i(l)}{dx^2} = 0$$
 (2.39)

La condición de frontera de fuerza cortante queda expresada como:

$$M_{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{2}q_{i}(t)}{dt^{2}} \phi_{i}(l) - EI \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{3}\phi_{i}(l)}{dx^{3}} q_{i}(t) = 0$$
(2.40)

Dividiendo entre  $\phi(l) q_i(t)$  y despejando las variables de la ecuación anterior de manera que nos permita aplicar el principio de separación obtenemos:

$$\frac{EI}{M_p} \frac{1}{\phi(l)} \frac{d^3\phi(l)}{dx^3} = \omega^2 \tag{2.41}$$

Podemos reescribir la ecuación (2.41) de la siguiente manera:

$$\frac{d^3\phi(l)}{dx^3} + \frac{M_p}{EI}\omega^2\phi(l) = 0$$
(2.42)

Tenemos que la solución para las ecuaciones (2.37) es de la forma [29]:

$$\phi_i(x) = A_i \sin \beta_i x + B_i \sinh \beta_i x + C_i \cos \beta_i x + D_i \cosh \beta_i x \tag{2.43}$$

$$q_i(t) = E_i \cos \omega t + F_i \sin \omega t \tag{2.44}$$

Usando la ecuación (2.43) y las condiciones de frontera obtenemos [29]:

$$\int_{0}^{l} M\phi_{i}(x) \phi_{j}(x) dx + I_{h} \phi'_{i}(0) \phi'_{j}(0) + M_{p} \phi_{i}(l) \phi_{j}(l) + I_{p} \phi'_{i}(l) \phi'_{j}(l) = I_{T} \delta_{ij}$$
 (2.45)

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y la constante de normalización  $I_T = I_h + I_b + I_p$  es el total de inercia respecto a la armadura del motor. Las formas modales deben cumplir la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int_{0}^{l} EI\phi''_{i}(x) \phi''_{j}(x) dx = I_{T}\omega_{i}^{2} \delta_{ij}$$
(2.46)

A partir de la ecuación (2.38), utilizando los parámetros del sistema diseñado en el capítulo 3 se calculan las frecuencias naturales de la viga en cantilever, en la Tabla 2.1 se presentan dichas frecuencias naturales.

Tabla 2.1: Frecuencias naturales de una viga en cantilever

i	$\beta_i l$	$\omega_i(Hz)$
1	1.8751	1.5012
2	3.5619	5.4170
3	4.6941	9.4081
4	7.8548	26.3432
5	10.9955	51.6211
6	14.1372	85.3344
7	17.2788	127.4749
8	20.4204	178.0434
9	26.7035	304.4625

# 2.4. Formulación lagrangiana

En las siguientes secciones manipularemos la ecuación (2.29), con el fin de llevar al sistema a la que se conoce como forma canónica de Brunovsky donde las dinámicas rígida y flexible quedan interconectadas, con las ventajas que esto lleva consigo.

Debido al ancho de banda limitado que proveen los sensores, actuadores y a las restricciones del software de simulación no es práctico utilizar modos infinitos, debido a esto truncamos la condición (2.33) hasta los primeros n términos representativos del sistema, quedando así la solución separable de la deflexión elástica de la siguiente forma:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) q_i(t) \quad para \quad i = 1, 2, \dots, n$$
 (2.47)

Sustituyendo la solución truncada en la ecuación (2.29), lo que resulta en:

$$EI\frac{\partial^{4}}{\partial x^{4}}\sum_{i=1}^{n}\phi_{i}\left(x\right)q_{i}\left(t\right) + \rho\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\sum_{i=1}^{n}\phi_{i}\left(x\right)q_{i}\left(t\right) = -\rho C\ddot{\theta}\sum_{i=1}^{n}\phi_{i}\left(x\right)$$
(2.48)

donde C es un factor de acoplamiento obtenido a partir del eigenproblema y el cual satisface la igualdad exacta [30]. Agrupando términos [30]:

$$\frac{EI}{\rho} \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{4}\phi_{i}(x)}{dx^{4}} q_{i}(t) + \sum_{i=1}^{n} \left( \ddot{q}_{i}(t) + C\ddot{\theta}(t) \right) \phi_{i}(x) = 0$$
(2.49)

En virtud del principio de expansión modal, igualando ambos términos de la ecuación (2.49) a una constante de separación  $\omega_i^2$ , dividiendo entre  $\phi(l) q_i(t)$  y despejando  $\omega_i^2$  el segundo término puede reescribirse de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + C \ddot{\theta}(t) \right) = 0$$
 (2.50)

Por ende, las dinámicas modales están dadas por el siguiente conjunto de EDO:

$$\ddot{q}_{1}(t) + \omega_{1}^{2}q_{1}(t) = -C_{1}\ddot{\theta}(t) 
 \ddot{q}_{2}(t) + \omega_{2}^{2}q_{2}(t) = -C_{2}\ddot{\theta}(t) 
 \vdots \vdots \vdots \vdots 
 \ddot{q}_{n}(t) + \omega_{n}^{2}q_{n}(t) = -C_{n}\ddot{\theta}(t)$$
(2.51)

De la misma manera la ecuación para el modo rígido del sistema está dada por [7]:

$$(I_h + I_b + I_p)\ddot{\theta} = \tau (t) \tag{2.52}$$

La dinámica de modos flexibles (2.51) y de modo rígido (2.52), pueden ser escritas en la forma Lagrangiana estándar quedando expresadas por:

$$M(q) \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = T \tag{2.53}$$

La cual representa la dinámica del robot de un eslabón flexible mostrado en la Figura 2.1; donde las matrices y vectores están definidos como:

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_h + I_b + I_p & C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.54)$$

donde M es la matriz de inercias,  $\Omega$  es la matriz diagonal de frecuencias, T es el vector de entradas. Debido a que no se tomo en cuenta el amortiguamiento viscoso del sistema se observa una falta de no linealidades lo que se traduce en una carencia de fenómenos de coriolis.

## 2.5. Representación en cascada

La forma Lagrangiana estándar expresada en la ecuación (2.53) puede ser descrita de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} I_T & \vec{C}^T \\ \vec{C} & \mathcal{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{O}^T \\ \mathfrak{O} & \Omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau (t) \\ \mathfrak{O} \end{bmatrix}$$
 (2.55)

donde:  $\vec{C}^T = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{I}_n$  es una matriz identidad de dimensiones  $n \times n$ ,  $\mathfrak{O}$  es un vector de ceros,  $q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$ ,

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

La ecuación del modo rígido puede representarse como:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_T} \left( \tau \left( t \right) - \vec{C}^T \ddot{q} \right) \tag{2.56}$$

Y las ecuaciones de los modos flexibles son equivalentes a

$$\ddot{q} = -\vec{C}\ddot{\theta} - \Omega_n q \tag{2.57}$$

Sustituyendo (2.57) en (2.56), se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_T - \vec{C}^T \vec{C}} \tau(t) + \frac{1}{I_T - \vec{C}^T \vec{C}} \vec{C}^T \Omega_n q \tag{2.58}$$

Definiendo los siguientes cambios de variable

$$\gamma = \frac{1}{I_T - \vec{C}^T \vec{C}} \tag{2.59}$$

$$\tau\left(t\right) = \mathfrak{V}\left(t\right) \tag{2.60}$$

$$\mathfrak{z}(t) = \frac{1}{I_T - \vec{C}^T \vec{C}} \vec{C}^T \Omega_n q \tag{2.61}$$

La dinámica de modo rígido se simplifica a una cadena de doble integrador perturbada, tal que

$$\ddot{\theta} = \gamma \mathfrak{V} + \mathfrak{z}(t) \tag{2.62}$$

donde  $\mathfrak{V}$  es una entrada de control auxiliar; además podemos realizar un cambio de coordenadas de estado de la dinámica del robot flexible dada por el conjunto de EDOs (2.51), tal que

$$\ddot{q}_{1}(t) = -C_{1}\ddot{\theta}(t) - \omega_{1}^{2}q_{1}(t) 
\ddot{q}_{2}(t) = -C_{2}\ddot{\theta}(t) - \omega_{2}^{2}q_{2}(t) 
\vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots 
\ddot{q}_{n}(t) = -C_{n}\ddot{\theta}(t) - \omega_{n}^{2}q_{n}(t)$$
(2.63)

donde el cambio de coordenadas está dado por:

$$z_{1} = q_{1}$$
 $z_{2} = q_{2}$ 
 $\vdots$ 
 $z_{n} = q_{n}$ 
 $z_{n+1} = \dot{q}_{1}$ 
 $z_{n+2} = \dot{q}_{2}$ 
 $\vdots$ 
 $z_{2n} = \dot{q}_{n}$ 
 $\xi_{1} = \theta$ 
 $\xi_{2} = \dot{\theta}$ 
 $(2.64)$ 

Por lo tanto, la dinámica completa del robot de un eslabón flexible representado en sus nuevas coordenadas de estado queda descrito por:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}(z,\xi) \begin{cases}
\dot{z}_{1} &= z_{n+1} \\
\dot{z}_{2} &= z_{n+2} \\
\vdots \\
\dot{z}_{n} &= z_{2n} \\
\dot{z}_{n+1} &= -C_{1}\dot{\xi}_{2} - \omega_{1}^{2}z_{1} \\
\dot{z}_{n+2} &= -C_{2}\dot{\xi}_{2} - \omega_{2}^{2}z_{2} \\
\vdots \\
\dot{z}_{2n} &= -C_{n}\dot{\xi}_{2} - \omega_{n}^{2}z_{n}
\end{cases} (2.65)$$

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}(\xi,\mathfrak{V}) \begin{cases} \dot{\xi}_{1} = \xi_{2} \\ \dot{\xi}_{2} = \gamma \mathfrak{V} + \mathfrak{z}(t) \end{cases}$$
 (2.66)

donde la dinámica del modo rígido está dada por  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}(\xi,\mathfrak{V})$  y la dinámica flexible por  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}(z,\xi)$ ; es decir la entrada de control virtual  $\dot{\xi}_2 = \ddot{\theta}$  afecta directamente a la dinámica rígida y a la dinámica flexible.

La posición del efector final corresponde con la descripción geométrica mostrada en (2.1), en las nuevas coordenadas de estado la posición es tomada como:

$$y(l,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(l) q_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(l) z_i$$
 (2.67)

A partir de la expresión en (2.67) y las dinámicas flexibles  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}(z,\xi)$  en (2.65) la dinámica de la salida queda definida hasta n modos flexibles significativos dados por:

$$y(l,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{i} z_{i} 
 \dot{y}(l,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{i} z_{i+1} 
 \ddot{y}(l,t) = -\sum_{i=1}^{n} \phi_{i} C_{i} \dot{\xi}_{2} - \sum_{i=1}^{n} \phi_{i} \omega_{i}^{2} z_{i}$$
(2.68)

# 2.6. Resumen del capítulo

En este capítulo se muestran distintas metodologías empleadas para obtener el modelo matemático de un robot manipulador flexible de un eslabón, cada una de las representaciones obtenidas cuenta con distintas propiedades, inicialmente utilizamos el principio de Hamilton, posteriormente se aplica el principio de expansión modal con el fin de obtener las frecuencias naturales teóricas del sistema, utilizando estos análisis llevamos al sistema a una representación en cascada que nos permite separar las dinámicas rígidas de las flexibles, cada uno de estos modelos tiene diferentes características que se utilizarán para el diseño de controladores en el capítulo 4.

# CAPÍTULO 3

#### PLATAFORMA EXPERIMENTAL

En este capítulo se describe el diseño mecánico de la plataforma experimental desarrollada durante el trabajo de tesis, se realiza un análisis frecuencial de los sensores del sistema, para obtener las frecuencias naturales y antirresonancias que se utilizarán en el diseño de controladores en el capítulo 4.

Los principales requisitos de diseño para el manipulador son:

- Base completamente rígida comparado con el eslabón del manipulador.
- Eslabón flexible.
- Posibilidad de modificar el controlador.
- Dinámica rígida completamente actuada.

## 3.1. Componentes mecánicos

Utilizando el software de diseño por computadora CATIA se modeló la plataforma de experimentación, con el fin de cumplir con los principales parámetros de diseño del sistema; a continuación se presentan los renderizados del sistema utilizando tecnología *ray tracing* (Figura 3.1) y cada una de las piezas que componen al sistema (Figuras 3.3 - 3.11), los planos del sistema se presentan el Apéndice D.

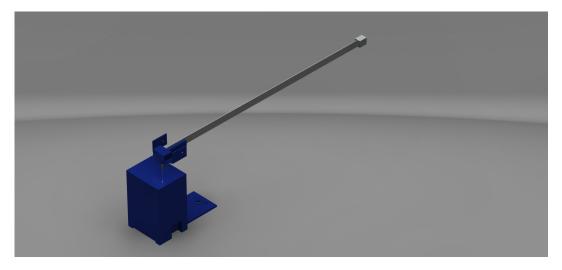


Figura 3.1: Renderizado del sistema

En la siguiente imagen podemos observar como se ensamblan los distintos componentes, los componentes en color azul son de aluminio de 19 mm de espesor de manera que le confieran rigidez al sistema.

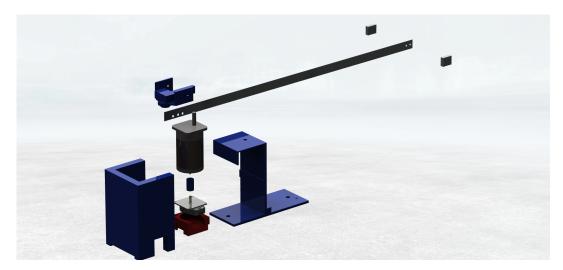


Figura 3.2: Explosión del sistema

Empezando con la base del manipulador, con el fin de cumplir con los parámetros de diseño, como es la rigidez completa de la base y alojar componentes críticos del sistema como son, el motor y el decodificador óptico.

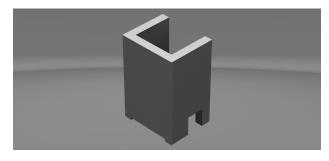




Figura 3.3: Renderizado de la cobertura

Figura 3.4: Renderizado de la base

En la Figura 3.3 podemos observar la cubierta del sistema la cual fue diseñada de manera que aporte rigidez a la base y proteja componentes sensibles como el decodificador óptico y el motor, se utilizó un aluminio 6061 de 19 milímetros de espesor.

Se presentan en la Figuras 3.5 y 3.7 los diseños de la base del decodificador óptico que permite evitar el movimiento del decodificador óptico dentro de la base, y el cople que conecta el decodificador óptico con el motor para registrar la posición a la que se encuentra el motor, ambas piezas fueron manufacturadas utilizando impresión 3D por deposición fundida con material PLA, la impresión se realizó de manera que las líneas de material que se generan como consecuencia del proceso de impresión hagan uso de las propiedades del material, específicamente el cople mostrado en la Figura 3.5 el cual es parte de la transición del movimiento y está sujeto con la ayuda de opresores y permite una transmisión de movimiento directa desde el motor el cual cuenta con una reducción de engranes a la viga, la relación total desde el eje del motor hasta el eslabón es de 3:1.

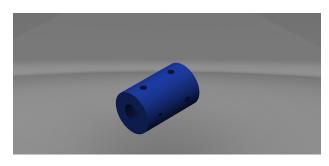


Figura 3.5: Renderizado del cople



Figura 3.6: Renderizado del decodificador óptico

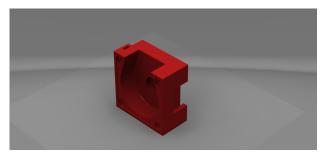


Figura 3.7: Renderizado de la base del decodificador óptico

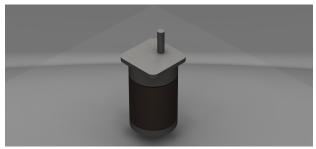


Figura 3.8: Renderizado del motor

Para la viga modelada en el capítulo 2 con unas dimensiones de: 85  $cm \times 2$   $cm \times 0.2$  cm, tenemos el soporte, el eslabón y la carga las cuales son de aluminio 6061, el soporte no tiene un eje de simetría por lo que las propiedades de esta pieza irregular deben ser calculadas para utilizarlo con fines de control, la inercia se obtuvo utilizando las herramientas de cálculo de propiedades del software CATIA las cuales se muestran en la Tabla 3.1.



Figura 3.9: Renderizado del eslabón



Figura 3.10: Renderizado del soporte

El resto de las piezas son simétricas incluyendo la carga, la cual se divide en 2 piezas iguales mostradas en la Figura 3.11 con el fin de mantener un eje neutro en el eslabón flexible del sistema, las dimensiones de la carga son:  $3~cm \times 2~cm \times 2.5~cm$ . En la Figura 3.1 tenemos el ensamble del sistema completo.

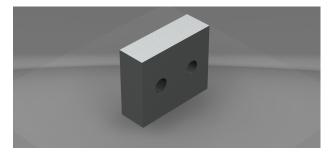


Figura 3.11: Renderizado de la carga

El diagrama completo de la plataforma utilizada para los experimentos se muestra en la Figura 3.12 junto a sus respectivas características físicas dadas en la Tabla 3.1; se mide la deflexión a partir de un acelerómetro analógico colocado en la punta del manipulador y el ángulo con un decodificador óptico montado al eje del motor, las señales se envían a la computadora utilizando la tarjeta de adquisición de datos Sensoray626, el control se realiza en la computadora y las señales correspondientes a la ley de control son enviadas a través de la tarjeta Sensoray626 hacia el circuito generador de PWM de alta velocidad tl494 y al driver VNH5019A-E que realiza la conmutación de dirección del motor (véase Apéndice C).

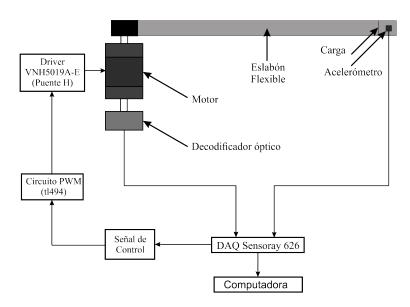


Figura 3.12: Diagrama del sistema a trabajar

Tabla 3.1: Parámetros del manipulador

Parámetro	Símbolo	Fórmula	$\operatorname{Valor}$
Largo	l	-	$850 \ mm$
Ancho	b	-	$20 \ mm$
Espesor	d	-	2 mm
Largo de la Carga	$l_p$	-	$30 \ mm$
Ancho de la Carga	$b_p$	-	20 mm
Espesor de la Carga	$d_p$	-	$25 \ mm$
Material	-	-	Aluminio
Material de la Carga	-	-	Aluminio
Densidad	ρ	Constante	$2.71 \ g/cm^3$
Densidad de la Carga	$\rho_p$	Constante	$2.71 \ g/cm^3$
Área Transversal	A	$b \times d$	$4 \times 10^{-5} \ m^2$
Área Transversal	Λ	$b_p \times d_p$	$5 \times 10^{-6} \ m^2$
de la Carga	$A_p$		
Masa	m	$A \times \rho \times l$	92.14 <i>g</i>
Masa de la Carga	$M_p$	$A_p \times \rho_p \times l_p$	40.65 g
Momento de Inercia	I	$(1/12)b \times d^3$	$1.3333 \times 10^{-11} \ m^4$
Momento de Inercia de la Carga	$I_p$	$(1/12)b_p \times d_p^3$	$2604.17 \times 10^{-11} \ m^4$
Módulo de Young	E	Constante	$71 \times 10^9 \ N/m^2$
Módulo de Young de la Carga	$E_p$	Constante	$71\times 10^9~N/m^2$
Módulo de Rigidez	EI	$E \times I$	$3.6866 \ Nm^2$
Momento Rotacional de Inercia de la Barra	$I_b$	$(1/3)ml^2$	$1.2932 \times 10^{-5} \ kg \ m^2$
Momento de Inercia de la Base	$I_h$	Medido	$1.06 \times 10^{-3} \ kg \ m^2$

En la Figura 3.13 se muestra una fotografía del sistema diseñado en esta sección. De esta plataforma se obtienen las frecuencias naturales con y sin carga en las secciones 3.2.1, 3.2.3, las frecuencias naturales con carga se utilizan en el diseño de controladores en el capítulo 4.

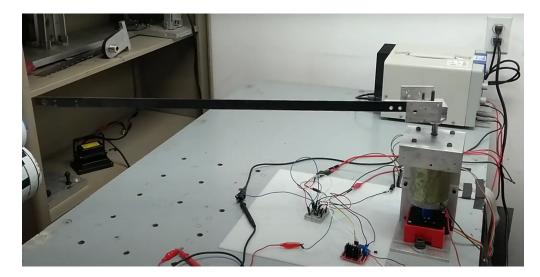


Figura 3.13: Foto del sistema

#### 3.2. Frecuencias naturales

Para casos de manipuladores flexibles el primer modos es suficiente para caracterizar el comportamiento del sistema, en nuestro caso tomamos los primeros 3 modos debido a que los modos de alto orden no aportan a la dinámica del manipulador [29]. Teniendo esto en cuenta solo extraeremos la información correspondiente a los primeros 3 modos. Se realizó un barrido frecuencial de 0 a 30 Hz, utilizamos un periodo de muestreo  $\tau_s=0.5~ms$ , como se observa en las Figuras 4.8, 4.9 el motor no logra completar el barrido frecuencial llegando a un máximo de 17 Hz cubriendo los primeros 3 modos, las respuestas son medidas con el acelerómetro y el decodificador óptico, enviadas a la computadora a partir de la DAQ Sensoray 626 donde MATLAB obtiene su FFT.

Para validar las frecuencias obtenidas de manera experimental y teórica utilizamos la herramienta de análisis modal de ANSYS Workbench, entregándonos los primeros 6 modos de vibración.

#### 3.2.1. Frecuencias naturales sin carga

Utilizando el motor en la base como entrada para excitar al sistema aplicamos el barrido frecuencial anteriormente mencionado, obteniendo la respuesta en el tiempo de los distintos sensores disponibles con el fin de aplicarle la FFT, obteniendo así una función de respuesta frecuencial de la que podemos extraer las frecuencias del sistema, ya sean modos de vibración

o antirresonancias del sistema, estas frecuencias nos permitirán analizar estabilidad o diseñar controladores en el capítulo 4. En las Figuras 3.14 y 3.15, se puede observar las respuestas del decodificador óptico conectado a la base del motor y el acelerómetro montado en el extremo del manipulador respectivamente durante el barrido frecuencial.

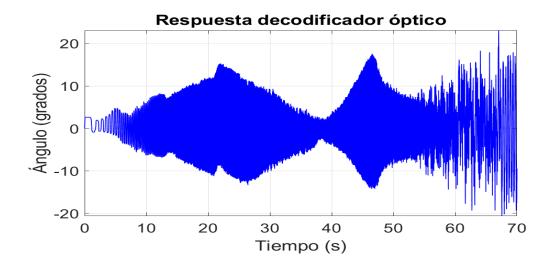


Figura 3.14: Lectura del decodificador óptico

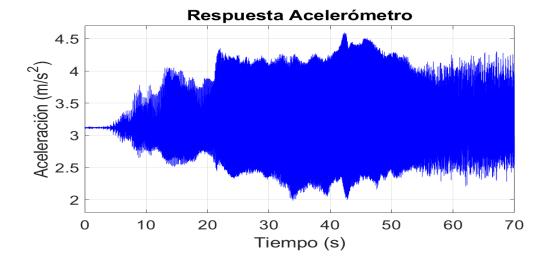


Figura 3.15: Lectura del acelerómetro

Una vez aplicada la FFT a las señales anteriores obtenemos las Figuras 3.16 y 3.17, correspondientes al análisis frecuencial del decodificador óptico y acelerómetro respectivamente, observamos que en 18 Hz el decodificador óptico deja de ser excitado, esto es debido a que el motor no logra alcanzar frecuencia de conmutación mayor.

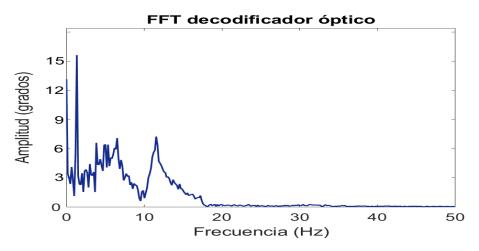


Figura 3.16: Modos del decodificador óptico

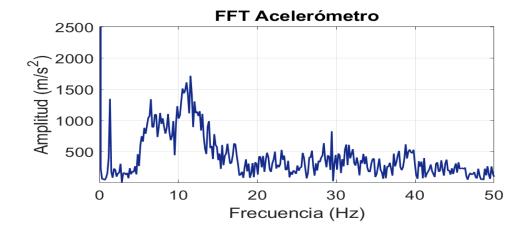


Figura 3.17: Modos del acelerómetro

Podemos observar como los modos de vibración en ambos sensores son muy similares con diferencias de amplitud lo cual es normal en este procedimiento, en ambas Figuras 3.16 y 3.17 aparecen etiquetados los picos más altos correspondientes a los primeros 3 modos de vibración del sistema.

#### 3.2.2. Frecuencias naturales sin carga ANSYS

Para comparar las frecuencias naturales del manipulador, utilizamos la herramienta de análisis modal de ANSYS Workbench, utilizando el modelo 3D del eslabón flexible presentado en la sección 3.1 y un mallado variable y fino de la pieza (5068 nodos y 2112 elementos), fijando un extremo del eslabón obtenemos los modos mostrados en las Figuras 3.18 - 3.23 y el cómo se está deformando el eslabón.

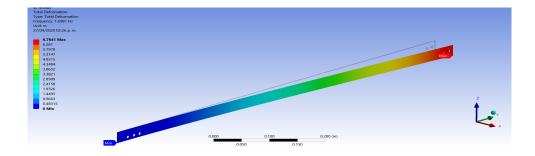


Figura 3.18: Primer modo ANSYS 1.6981 Hz

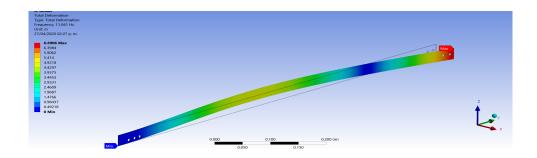


Figura 3.19: Segundo modo ANSYS 11.041 Hz

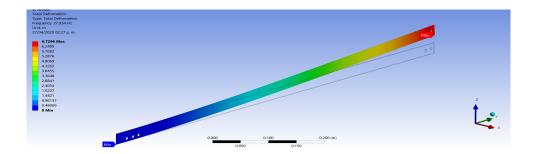


Figura 3.20: Tercer modo ANSYS 27.934 Hz

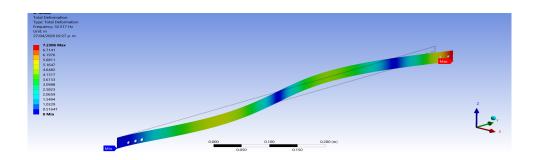


Figura 3.21: Cuarto modo ANSYS 32.517 Hz

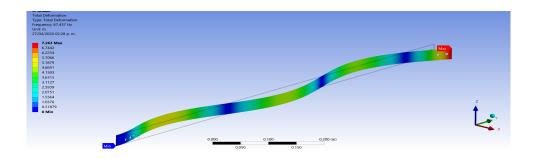


Figura 3.22: Quinto modo ANSYS 67.437 Hz

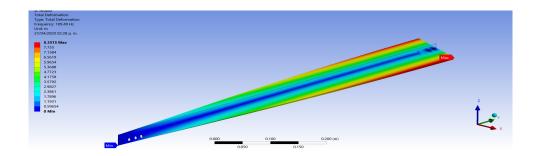


Figura 3.23: Sexto modo ANSYS 109.49 Hz

Se puede observar en las Figuras 3.20 y 3.23 modos de vibración fuera del plano esto es una vibración que se presenta en el plano ZX y un modo de vibración que genera torsión esto confirma la teoría de modelado en la que descartamos los movimientos torsionales; a continuación presentamos la Tabla 3.2 donde se listan los primeros 6 modos de vibración del sistema que entrega el análisis en ANSYS Workbench y los primeros 3 modos obtenidos del decodificador óptico y acelerómetro de manera experimental, los modos obtenidos experimentalmente tienen una frecuencia menor que los modos obtenidos mediante ANSYS.

Modo	ANSYS (Hz)	Decodificador óptico (Hz)	Acelerómetro (Hz)
Primer	1.6981	1.329	1.321
Segundo	11.041	5.329	7.15
Tercer	27.934	11.51	10.55
Cuarto	32.517	-	-
Quinto	67.437	-	-
Sexto	109.49	-	-

Tabla 3.2: Frecuencias naturales

Comparando las frecuencias presentadas en la Tabla 3.2 con las obtenidas de manera teórica en la Tabla 2.1, observamos que las frecuencias naturales obtenidas a partir de las herramientas de análisis modal de ANSYS Workbench son más cercanas a lo esperado de manera teórica, las frecuencias naturales obtenidas de manera práctica son menores especialmente en la tercer frecuencia natural, esto se atribuye a que físicamente la reducción de engranes presente en la base del manipulador afecta la excitación del motor. Las frecuencias obtenidas de manera teórica no consideran las aportaciones debidas de la estructura de soporte y el motor de CD debido a que la estructura de soporte se considera rígida en la base.

#### 3.2.3. Frecuencias naturales con carga

Para el sistema con carga la obtención de los modos de vibración se realiza de la misma manera que el análisis presentado en la sección anterior 3.2.1, se utilizará el barrido frecuencial de 0 a 30 Hz, con el fin de obtener una función de respuesta frecuencial, en las Figuras 3.24 y 3.25 se puede observar las respuestas de los sensores durante el barrido frecuencial.

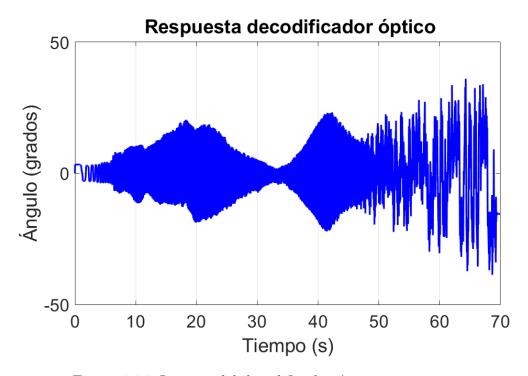


Figura 3.24: Lectura del decodificador óptico con carga

Una vez aplicada la FFT a las señales anteriores obtenemos las Figuras 3.26 y 3.27, correspondientes al análisis frecuencial del decodificador óptico y acelerómetro respectivamente, los picos más altos del sistema correspondientes a las frecuencias naturales se encuentran marcados con notaciones.

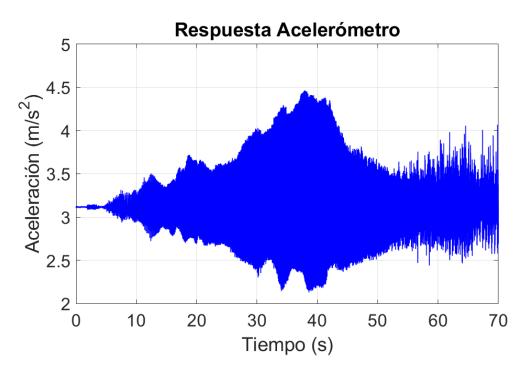


Figura 3.25: Lectura del acelerómetro con carga

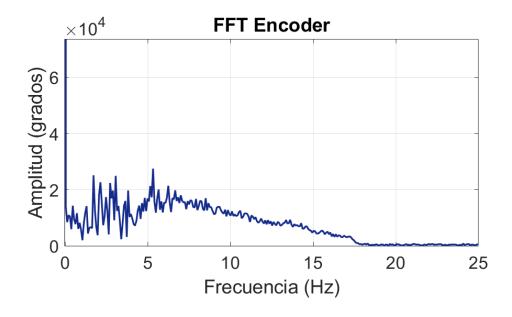


Figura 3.26: Modos decodificador óptico con carga

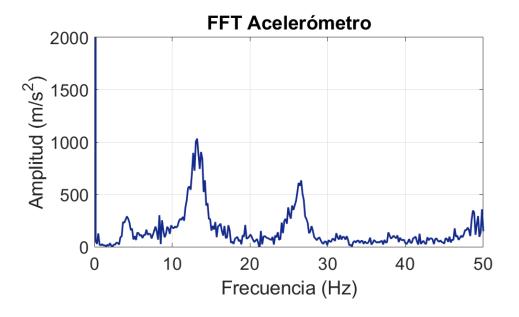


Figura 3.27: Modos acelerómetro con carga

Como consecuencia de la carga en la punta podemos observar que los modos tienden a moverse hacia frecuencias menores y aparecen más modos de vibración, debido a la reducción de engranes del motor de CD y a la carga en el extremo del eslabón se desplazan las frecuencias naturales, haciendo más sensible al sistema a los modos de vibración, es más difícil ubicar los modos de interés comparado con el caso presentado en la sección anterior, en la siguiente sección comparamos los modos experimentales con los obtenidos a partir de las herramientas de ANSYS.

#### 3.2.4. Frecuencias naturales con carga ANSYS

Para el caso principal a analizar en la tesis requerimos las frecuencias naturales del manipulador con carga en la punta, utilizando la herramienta de análisis modal de ANSYS Workbench, utilizando un mallado variable y fino de la pieza (5054 nodos y 2557 elementos), fijando la base del eslabón y la carga al extremo del eslabón; obtenemos los modos mostrados en las Figuras 3.28 - 3.23 y como se está deformando, correspondientes a las frecuencias mostradas en la Tabla 3.3.

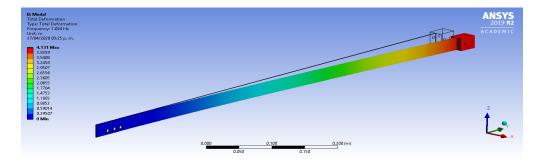


Figura 3.28: Primer modo ANSYS con carga 1.024 Hz

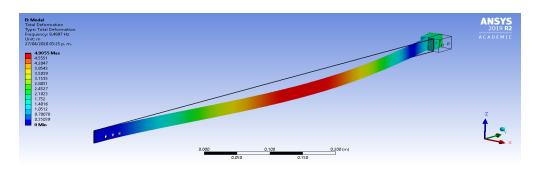


Figura 3.29: Segundo modo ANSYS con carga 8.4897 Hz

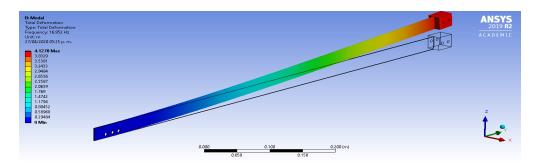


Figura 3.30: Tercer modo ANSYS con carga  $16.952~\mathrm{Hz}$ 

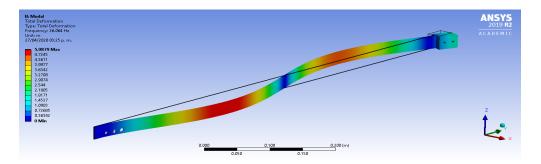


Figura 3.31: Cuarto modo ANSYS con carga 26.064 Hz

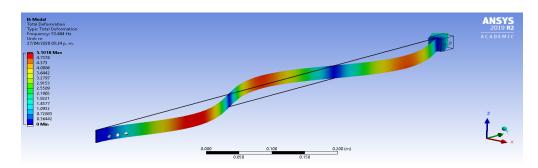


Figura 3.32: Quinto modo ANSYS con carga 53.684 Hz

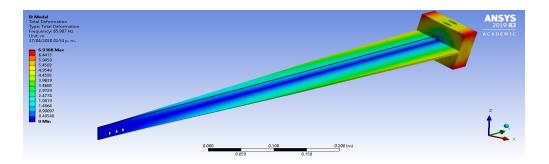


Figura 3.33: Sexto modo ANSYS con carga 65.907 Hz

Podemos observar como en las Figuras 3.30 y 3.33 correspondientes al tercer y sexto modo de vibración, corresponden a vibraciones en el plano ZX y movimiento torsional respectivamente el sexto modo no puede ser excitado por el motor; a continuación presentamos una Tabla 3.3, donde se listan los primeros 6 modos de vibración del sistema con carga en la punta que

entrega el análisis en ANSYS Workbench y los primeros 3 modos experimentales obtenidos de las mediciones del decodificador óptico y acelerómetro.

Modo	ANSYS (Hz)	decodificador óptico (Hz)	Acelerómetro (Hz)
Primer	1.024	1.7	1.4
Segundo	8.4897	5.636	8.6
Tercer	16.952	13.3	13.2
Cuarto	26.064	-	-
Quinto	53.684	-	-
Sexto	65.907	-	-

Tabla 3.3: Frecuencias naturales con carga

Podemos observar en la Tabla 3.3, las frecuencias obtenidas con las herramientas de análisis modal de ANSYS Workbench difieren de las frecuencias obtenidas de manera experimental en ambos sensores, especialmente el segundo modo del decodificador óptico que presenta la mayor variación, esto se atribuye a la dificultad para encontrar los picos correspondientes a los modos deseados en el análisis frecuencial de la señal mostrada en la Figura 3.27.

# 3.3. Resumen del capítulo

En este capítulo se describe cada una de las partes mecánicas que conforman la plataforma experimental desarrollada en este trabajo de tesis, en el Apéndice D se detallan los planos de cada pieza y los componentes eléctricos se encuentran descritos en el Apéndice C, donde se detalla cada uno y como se conectan entre ellos y con el resto del sistema.

Se describe el proceso utilizado para obtener las frecuencias naturales del sistema de manera experimental y se validaron utilizando las herramientas de análisis modal de ANSYS Workbench, las frecuencias obtenidas del sistema en la sección 3.2.3, se utilizarán para el diseño del controlador Extremum Seeking presentado en el capítulo 4

# CAPÍTULO 4

#### ESTRATEGIAS DE CONTROL

Como se observó en las ecuaciones (2.65), (2.66), la dinámica del manipulador puede ser considerada una combinación de dinámica rígida y flexible es por esto que las estrategias de control utilizadas en este tipo de sistemas requieren ser diseñadas considerando la dinámica flexible del sistema. Las estrategias de control de vibraciones se clasifican en dos tipos [31]: Pasivas y Activas, en ambos casos el objetivo es reducir las perturbaciones no deseadas ya sea provenientes del ambiente o de la propia dinámica flexible del sistema, provocando así una reducción en las magnitudes de vibración.

Los controles activos de manipuladores flexibles hacen uso de sensores colocados en lugares estratégicos del sistema para obtener información de este, con el fin de emplearla en el algoritmo de control.

De acuerdo a la filosofía de la mecatrónica, al desarrollar un tema de esta naturaleza es importante llevar a la práctica los controladores diseñados para evaluar su desempeño y validar la teoría, esto debido a que existen fenómenos no modelados, dinámicas no modeladas e incertidumbre en los parámetros, las cuales presentan un reto en la aplicación de las leyes de control diseñadas.

En este trabajo de tesis se desarrolla e implementa un control GPI para el control de la dinámica rígida, el cual se escogió debido a las ventajas que presenta, es una herramienta factible para resolver el problema de seguimiento de trayectorias garantizando estabilidad de la dinámica rígida. Al resolver el problema de control, nos encontramos con el obstáculo de

las vibraciones debidas al movimiento y la dinámica flexible del sistema, asumiendo que esta dinámica tienen un mínimo local aprovechamos las características del controlador Extremum Seeking, que a diferencia de otros controladores no necesita conocimiento del modelo del sistema, modificando la frecuencia de la perturbación podemos inducir vibraciones en la punta del manipulador, resolviendo el problema de seguimiento de trayectoria de posición y reduciendo las vibraciones en el estado estacionario del sistema.

Dentro de los controladores más utilizados para el control de trayectoria de robots manipuladores, debido a su mejor desempeño se encuentran el control por par calculado y los controles regulador PD, PID. Es conveniente estudiar e implementar otro tipo de controladores para resolver el problema de control planteado, en este caso seguimiento de trayectoria el cual no puede ser resuelto por el control PD [32].

Una ventaja del control GPI + ESC propuesto en este trabajo, es que solo requiere la medida de la posición angular del motor y de la aceleración en el extremo final del manipulador, y no el resto de los estados internos del sistema (velocidad y aceleración en la base del manipulador) los cuales se asumen conocidos en otros controles.

La parte que controla las dinámicas rígidas del sistema, es decir el control GPI es robusto frente a las incertidumbres del modelo, lo que garantiza estabilidad de las dinámicas rígidas y nos permite realizar un seguimiento de trayectorias, el movimiento derivado del control GPI junto con la dinámica flexible genera vibraciones en el extremo del manipulador, para atacar este fenómeno utilizamos ESC para minimizar la magnitud de las vibraciones, utilizando un solo actuador en la base.

En este capítulo presentamos las gráficas obtenidas durante la implementación de los controles diseñados, en la plataforma experimental presentada en el capítulo 3, cada uno de los controles diseñados se aplicaron sobre un robot flexible de un eslabón que es considerado el caso más simple. Se analizaron los datos obtenidos y se hacen algunas observaciones del comportamiento del sistema.

# 4.1. Esquema de control PD+PD con realimentación de la aceleración en el extremo aplicado a un robot manipulador flexible de un eslabón

Partiendo de la dinámica del manipulador flexible presentada en la Figura 2.1, descrita por las ecuaciones (2.29) - (2.32) podemos diseñar una ley de control PD+PD que nos permita resolver el problema de regulación, añadiendo una realimentación de la aceleración en la punta del manipulador para compensar las vibraciones.

La entrada de control del sistema está dada por  $\tau=u$ . Consideramos un lazo de control para la dinámica rígida del sistema

$$u_1 = K_p e + K_d \dot{e} + I_h \ddot{\theta}_d \tag{4.1}$$

Y un lazo de control para la dinámica flexible

$$u_2 = K_1 e_{\ddot{w}} + K_2 \dot{e}_{\ddot{w}} \tag{4.2}$$

De manera que tenemos dos lazos de control y una sola entrada, es decir un sistema SIMO (Single Input Multiple Output) utilizando una suma de ambos lazos de control:

$$u = u_1 + u_2 = K_p e + K_d \dot{e} + K_1 e_{ii} + K_2 \dot{e}_{ii} + I_h \ddot{\theta}_d$$
(4.3)

donde  $K_d > 0$  &  $K_p > 0$ , como se verá en la sección 4.1.1. El objetivo del control es:  $\theta(t) \to \theta_d(t), \ \dot{\theta}(t) \to \dot{\theta}_d(t), \ \ddot{\theta}(t) \to \ddot{\theta}_d(t), \ w(l,t) \to w_d(l,t), \ \dot{w}(l,t) \to \dot{w}_d(l,t)$ . Donde los errores están definidos de la siguiente forma:

$$e = \theta_{d}(t) - \theta(t)$$

$$\dot{e} = \dot{\theta}_{d}(t) - \dot{\theta}(t)$$

$$\ddot{e} = \ddot{\theta}_{d}(t) - \ddot{\theta}(t)$$

$$e_{\ddot{w}} = \ddot{w}_{d}(l, t) - \ddot{w}(l, t) = -\ddot{w}(l, t)$$

$$\dot{e}_{\ddot{w}} = -w_{d}^{(3)}(l, t) - w^{(3)}(l, t) = -w^{(3)}(l, t)$$
(4.4)

donde  $\ddot{w}_d(l,t)$ ,  $w_d^{(3)}(l,t)$  es la aceleración de deflexión elástica deseada y su derivada respecto al tiempo, en este caso ambos son cero.

A partir de las ecuaciones que describen las dinámicas del manipulador en términos de la deflexión elástica en lazo cerrado al sustituir (4.3) en (2.30) se obtiene:

$$\ddot{e} = -\frac{1}{I_h} \left( K_p e + K_d \dot{e} + K_1 e_{\ddot{w}} + K_2 \dot{e}_{\ddot{w}} + EI \frac{\partial^2 w (0, t)}{\partial x^2} \right)$$
(4.5)

Con el fin de minimizar las vibraciones generadas por el movimiento del manipulador modificamos la referencia del controlador, utilizamos una curva suave que parte del reposo y termina en reposo (véase Apéndice A).

En la Figura 4.1 se observa un diagrama de bloques de la ley de control (4.3).

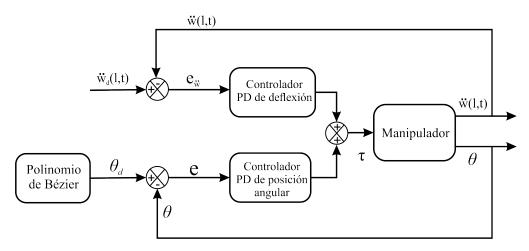


Figura 4.1: Diagrama esquemático de un controlador PD para un robot flexible

# 4.1.1. Prueba de estabilidad PD con retroalimentación de la aceleración en el extremo

Con el objetivo de comprobar la estabilidad del sistema distribuido en lazo cerrado con el controlador PD con retroalimentación de la aceleración en el extremo, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov basada en la energía cinética  $\frac{1}{2} \int_0^l \rho y(x,t)^2 dx$ , energía potencial  $\frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right) dx$  y el error de regulación al cuadrado.

$$V(t) = \frac{1}{2} \left( EI \int_0^l \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^l \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + x\dot{\theta} \right)^2 \rho dx + M_p \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + x\dot{\theta} \right)_{x=l}^2 \right) + \frac{1}{2} I_h \dot{e}^2 + \frac{1}{2} K_p e^2$$

$$(4.6)$$

Obtenemos la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov

$$\dot{V}(t) = EI \int_{0}^{l} \frac{\partial^{2} w(x,t)}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{3} w(x,t)}{\partial t \partial x^{2}} dx + \int_{0}^{l} \rho \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \frac{\partial^{2} y(x,t)}{\partial t^{2}} dx + I_{h} \dot{e} \ddot{e} + K_{p} e \dot{e} + M_{p} \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \frac{\partial^{2} y(l,t)}{\partial t^{2}} dx$$

Sustituyendo la ecuación (2.25) esto es  $\rho \ddot{y}(x,t) = -EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}$  obtenemos

$$\dot{V}(t) = -\int_{0}^{l} EI \frac{\partial^{3}w(x,t)}{\partial x^{3}} \frac{\partial^{2}w(x,t)}{\partial t \partial x} dx + \int_{0}^{l} -EI \frac{\partial^{4}w(x,t)}{\partial x^{4}} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} dx$$

$$+ EI \frac{\partial^{2}w(x,t)}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2}w(x,t)}{\partial t \partial x} \Big|_{0}^{l} + I_{h}\dot{e}\ddot{e} + K_{p}e\dot{e} + M_{p} \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \frac{\partial^{2}y(l,t)}{\partial t^{2}}$$

$$= -\left(EI \frac{\partial^{3}w(x,t)}{\partial x^{3}} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{0}^{l} - \int_{0}^{l} EI \frac{\partial^{4}w(x,t)}{\partial x^{4}} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx\right)$$

$$+ \int_{0}^{l} -EI \frac{\partial^{4}w(x,t)}{\partial x^{4}} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} dx + EI \frac{\partial^{2}w(l,t)}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2}w(l,t)}{\partial t \partial x}$$

$$- EI \frac{\partial^{2}w(0,t)}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2}w(0,t)}{\partial t \partial x} + I_{h}\dot{e}\ddot{e} + K_{p}e\dot{e} + M_{p} \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \frac{\partial^{2}y(l,t)}{\partial t^{2}}$$

donde  $\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial \dot{y}(x,t)}{\partial x} = \dot{\theta}$ :

$$\dot{V}(t) = -EI \frac{\partial^{3} w(l,t)}{\partial x^{3}} l\dot{\theta}(t) + EI \frac{\partial^{2} w(x,t)}{\partial x^{2}} \dot{\theta}(t)|_{0}^{l} - EI \frac{\partial^{3} w(l,t)}{\partial x^{3}} \frac{\partial w(l,t)}{\partial t} + I_{h} \dot{e} \ddot{e} + K_{p} e \dot{e} + M_{p} \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \frac{\partial^{2} y(l,t)}{\partial t^{2}}$$

Evaluando el segundo termino de la ecuación anterior  $EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\dot{\theta}(t)$  en 0, l obtenemos:

$$\dot{V}(t) = -EI \frac{\partial^{3} w(l,t)}{\partial x^{3}} l\dot{\theta}(t) + EI \frac{\partial^{2} w(l,t)}{\partial x^{2}} \dot{\theta}(t) - EI \frac{\partial^{2} w(0,t)}{\partial x^{2}} \dot{\theta}(t) - EI \frac{\partial^{2} w(0,t)}{\partial x^{2}} \dot{\theta}(t)$$
$$-EI \frac{\partial^{3} w(l,t)}{\partial x^{3}} \frac{\partial w(l,t)}{\partial t} + I_{h} \dot{e} \ddot{e} + K_{p} e \dot{e} + M_{p} \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \frac{\partial^{2} y(l,t)}{\partial t^{2}}$$

Sustituyendo  $\frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0$  obtenemos:

$$\dot{V}(t) = -EI \frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x^3} l\dot{\theta}(t) - EI \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \dot{\theta}(t) - EI \frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x^3} \frac{\partial w(l,t)}{\partial t} + I_h \dot{e}\ddot{e} + K_p e\dot{e} + M_p \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial t^2}$$

Factorizando  $-EI\frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x^3}$  resulta

$$\dot{V}(t) = -EI \frac{\partial^{3} w(l,t)}{\partial x^{3}} \left( l\dot{\theta}(t) + \frac{\partial w(l,t)}{\partial t} \right) - EI \frac{\partial^{2} w(0,t)}{\partial x^{2}} \dot{\theta}(t)$$

$$+ I_{h} \dot{e}\ddot{e} + K_{p} e\dot{e} + M_{p} \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \frac{\partial^{2} y(l,t)}{\partial t^{2}}$$

donde  $l\dot{\theta}(t)+\frac{\partial w(l,t)}{\partial t}=\frac{\partial y(l,t)}{\partial t}$  con lo que se obtiene

$$\dot{V}(t) = -EI \frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x^3} \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} - EI \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} \dot{\theta}(t) + I_h \dot{e}\ddot{e} + K_p e\dot{e}$$
$$+ M_p \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial t^2}$$

Podemos factorizar de la siguiente manera:

$$\dot{V}(t) = \dot{e} \left( I_h \ddot{e} + K_p e + EI \frac{\partial^2 w (0, t)}{\partial x^2} \right) 
+ \frac{\partial y (l, t)}{\partial t} \left( -EI \frac{\partial^3 w (l, t)}{\partial x^3} + M_p \frac{\partial^2 y (l, t)}{\partial t^2} \right)$$
(4.7)

Sustituyendo la ecuación (2.30) en (4.7) obtenemos:

$$\dot{V}(t) = \dot{e} \left( -I_h \frac{1}{I_h} \left( \tau + EI \frac{\partial^2 y (0, t)}{\partial x^2} \right) + K_p e + EI \frac{\partial^2 w (0, t)}{\partial x^2} \right) 
+ \frac{\partial y (l, t)}{\partial t} \left( -EI \frac{\partial^3 w (l, t)}{\partial x^3} + M_p \frac{1}{M_p} \frac{\partial^3 y (l, t)}{\partial x^3} \right) 
= \dot{e} \left( -\tau + K_p e \right)$$
(4.8)

Sustituyendo la ley de control (4.3) en (4.8) obtenemos

$$\dot{V}(t) = \dot{e} \left( -K_p e - K_d \dot{e} - K_1 e_{\ddot{w}} - K_2 \dot{e}_{\ddot{w}} + K_p e \right)$$

$$\dot{V}(t) = -K_d \dot{e}^2 - K_1 \dot{e} e_{\ddot{w}} - K_2 \dot{e} \dot{e}_{\ddot{w}} \tag{4.9}$$

Factorizando  $\dot{e}$ 

$$\dot{V}(t) = -K_d \dot{e}^2 - \dot{e}(K_1 e_{\ddot{w}} - K_2 \dot{e}_{\ddot{w}}) \tag{4.10}$$

Sustituyendo la ecuación (4.4) en (4.10) obtenemos:

$$\dot{V}(t) = -K_d \dot{e}^2 - \dot{e}(K_1(-\ddot{w}(l,t)) + K_2(-w^{(3)}(l,t)))$$
(4.11)

Sustituyendo (2.31) en (4.11)

$$\dot{V}(t) = -K_d \dot{e}^2 + \dot{e} \left( K_1 \left( \frac{EI}{M_p} \frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x^3} \right) + K_2 \left( \frac{EI}{M_p} \frac{\partial^4 w(l,t)}{\partial t \partial x^3} \right) \right)$$
(4.12)

Separando los términos que multiplican  $\dot{e}$  de la siguiente forma

$$\dot{V}(t) = -K_d \dot{e}^2 + \dot{e} \left( \frac{K_1}{M_p} \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{K_2}{M_p} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} \right) \right)$$
(4.13)

Sustituyendo la ecuación (2.32) de las condiciones de frontera del manipulador en (4.13), la segunda derivada parcial de la deflexión elástica respecto a x evaluada en un tiempo t = 0 es cero, siempre y cuando no se encuentre una fuerza externa en el extremo libre [33], [34], [25].

$$\dot{V}(t) = -K_d \dot{e}^2 \le 0 {4.14}$$

El termino  $EI\frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2}$  se vuelve cero y  $\dot{V}$  resulta semi definida negativa, por lo tanto se tiene estabilidad del error.

La utilización del teorema de LaSalle prueba la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado. El conjunto S para el cual  $\dot{V}=0$  resulta:

$$S = \{e, \dot{e} | \dot{V} = 0\} = \{\dot{e} = 0\} \tag{4.15}$$

Para encontrar el máximo conjunto invariante contenido en S se sustituye  $\dot{e} = 0$  en la ecuación de lazo cerrado (4.3), donde consideramos.

$$\dot{e} = 0 \Rightarrow \ddot{e} = 0 \tag{4.16}$$

Sustituyendo las condiciones (4.16) en (4.5), obtetnemos:

$$0 = -\frac{1}{I_h} \left( K_p e + EI \frac{\partial^2 w (0, t)}{\partial x^2} \right)$$

$$(4.17)$$

Sustituyendo la condición (2.3) en (4.17) se obtiene:

$$0 = -\frac{K_p}{I_h}e\tag{4.18}$$

Y el máximo conjunto invariante contenido en S resulta,

$$\dot{e} = 0 \Rightarrow e = 0 \tag{4.19}$$

Tenemos que e=0 de acuerdo al principio de invarianza de LaSalle podemos garantizar estabilidad asintótica de la dinámica rígida del sistema en lazo cerrado. Si  $t \longrightarrow \infty$ .

## 4.1.2. Implementación del esquema de control PD+PD en un robot manipulador flexible de un eslabón

El objetivo de control es realizar regulación, a la vez que reducimos las vibraciones causadas por el movimiento del manipulador flexible, el experimento consiste en aplicar el controlador diseñado en la sección anterior al sistema diseñado en el capítulo 3, utilizando una referencia de manera que parta del reposo y termine en el reposo (véase Apéndice A), esta trayectoria es una curva suave de la cual se conocen sus derivadas. Para este experimento se usaron las siguientes ganancias:  $K_p = 0.1$ ,  $K_d = 0.05$ ,  $K_a = 0.183$ ,  $K_1 = 2e - 3$ ,  $K_2 = 5e - 4$ .

En la Figura 4.2 observamos el seguimiento de trayectoria en la base del manipulador, donde en los instantes iniciales el sistema se adelanta a la trayectoria y en un tiempo  $t=2.5\ s$  se atrasa y no logra llegar a la referencia de manera asintótica.

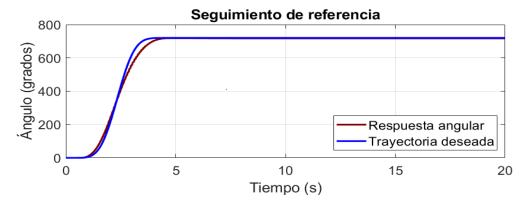


Figura 4.2: Seguimiento de posición del sistema



Figura 4.3: Acercamiento del seguimiento de posición del sistema

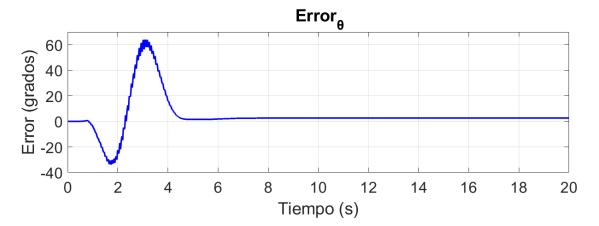


Figura 4.4: Error angular

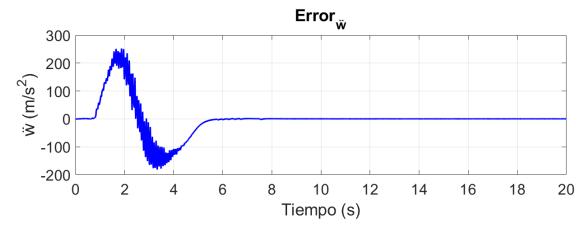


Figura 4.5: Error deflexión

Podemos observar en la Figura 4.3 como no se alcanza la referencia en el estado estacionario, esto se traduce en que el control no logra llevar el error en estado estacionario a cero como se observa en la Figura 4.4, esto pasa debido a la zona muerta del actuador utilizado.

En cuanto a la segunda derivada de la deflexión elástica que está experimentando el sistema, se observa en la Figura 4.5 donde la señal se observa ruidosa debido a la naturaleza del sensor utilizado, podemos deducir de su comportamiento que es la esperada y tiene la forma deseada; es decir es similar a la aceleración utilizada en la referencia del sistema y en estado estacionario alrededor de un tiempo  $t=8\ s$  llega a cero.

En la Figura 4.6 se observa la señal de control que lleva al sistema a la referencia deseada, las saturaciones utilizadas para la señal de control dependen de los valores que se pueden alimentar al generador PWM y en ninguno de los experimentos se llegó a la saturación (0 - 2.5 Volts, más un bit de sentido de giro), la señal de control obtenida se encuentra dentro del rango de control disponible y esperado  $\pm 2.5~V$ , el cual se mapea a un voltaje de  $\pm 24~V$  que actúa al motor en la base del manipulador.



Figura 4.6: Señal de control

El controlador presentado en esta sección está basado en un controlador PD clásico, es decir no resuelve el problema de seguimiento de trayectorias y solo funciona para regulación, el lazo correspondiente a la posición angular se sintonizó con el segundo método de Ziegler-Nichols, el lazo correspondiente a la deflexión fue más difícil de sintonizar y requirió más prueba y error, las ganancias fueron menores en comparación al lazo de posición angular, sin embargo afectan más a la respuesta del sistema, se requiere otro controlador que garantice el seguimiento de trayectorias teniendo en cuenta la dinámica flexible del manipulador.

# 4.2. Diseño del esquema de control GPI aplicado a la dinámica rígida de un manipulador flexible de un eslabón

Para cumplir el objetivo de control de este trabajo de tesis (seguimiento de trayectorias del extremo final del manipulador), el cual consiste en resolver el problema de seguimiento de trayectoria, en específico una curva suave que parte de reposo y termina en reposo (Apéndice A), la dinámica rígida descrita por la ecuación (2.66) cuenta con las propiedades asociadas a la forma de Brunovsky y cumple con las propiedades de planitud diferencial, esto permite utilizar un control continuo en este caso GPI [19] para controlar la dinámica rígida del sistema, el controlador GPI garantiza estabilidad asintótica exponencial como se verá en la sección 4.2.1, la dinámica flexible del manipulador introduce vibraciones al sistema las cuales no son atenuadas por el controlador GPI, para atenuar las vibraciones derivadas de la dinámica flexible utilizaremos ESC en la sección 4.3, ya que en este caso no se aborda el control de las vibraciones del sistema.

Partiendo de la dinámica de modo rígido  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}(\xi, \mathfrak{v})$  dada en (2.66). Y definiendo  $\gamma \mathfrak{V} = \mathfrak{v}$  podemos utilizar el siguiente sistema simplificado:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}(\xi, \mathfrak{v}) \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \mathfrak{v} + \mathfrak{z}(t) \end{cases} \tag{4.20}$$

Asumiendo que conocemos  $\xi_d$  y todas sus derivadas, expresamos el sistema en términos del error de seguimiento:

$$e_{\xi} = \xi(t) - \xi_d(t)$$

$$e_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_d$$

$$(4.21)$$

donde:

$$\mathfrak{v}_d = \ddot{\xi}_d(t)$$

Consideramos la definición del error (4.21), para resolver el problema de seguimiento de trayectoria:

$$e_{\xi} = e_{\mathfrak{v}} + \mathfrak{z}(t) \tag{4.22}$$

Definimos la siguiente ley de control:

$$e_{\mathfrak{v}} = -k_3 \dot{e}_{\xi} - k_2 e_{\xi} \tag{4.23}$$

La ley de control (4.23) requiere los estados  $e_{\xi}$ ,  $\dot{e}_{\xi}$ ,  $\ddot{e}_{\xi}$  de los cuales se tiene únicamente la medición de  $e_{\xi}$  utilizando un decodificador óptico en la base, es decir, tenemos que estimar

los estados  $\dot{e}_{\xi},~\ddot{e}_{\xi}$  para lo cual se utilizan reconstructores integrales definidos para el sistema no perturbado

$$\dot{e}_{\xi} = \int e_{\xi} + \dot{e}_{\xi} (0) = \hat{e}_{\xi} + \dot{e}_{\xi} (0)$$
(4.24)

$$\widehat{\dot{e}}_{\xi} = \dot{e}_{\xi} - \dot{e}_{\xi} (0) \tag{4.25}$$

Modificamos el control propuesto en (4.23), agregándole los términos integrales de la salida con el objetivo de eliminar los errores introducidos por los reconstructores integrales:

$$e_{\mathfrak{v}} = -k_3 \hat{e}_{\xi} - k_2 e_{\xi} - k_1 \left( \int e_{\xi} \right) - k_0 \left( \int^{(2)} e_{\xi} \right)$$
 (4.26)

Considerando el esquema de control modificado (4.26), el sistema en lazo cerrado sin considerar las perturbaciones se expresa de la siguiente forma:

$$\ddot{e}_{\xi} + k_{3}\dot{e}_{\xi} + k_{2}e_{\xi} + k_{1}\left(\int e_{\xi}\right) + k_{0}\left(\int^{(2)} e_{\xi}\right) = k_{3}\dot{e}_{\xi}\left(0\right) + k_{2}\dot{e}_{\xi}\left(0\right)t \tag{4.27}$$

Reescribiendo el control con los términos de compensación con base en el error de salida:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_d - \left( \int k_3 e_{\mathfrak{v}} + k_1 e_{\xi} \right) - \left( \int^{(2)} k_0 e_{\xi} \right) - k_2 e_{\xi} \tag{4.28}$$

Aplicando la Transformada de Laplace

$$\left(1 + \frac{k_3}{s}\right) e_{\mathfrak{v}}(s) = -\left(k_2 + \frac{k_1}{s} + \frac{k_0}{s^2}\right) e_{\xi} \tag{4.29}$$

Podemos escribir el controlador GPI en forma de una red de compensación clásica como sigue:

$$e_{v}(s) = -\left[\frac{k_{2}s + k_{1}s + k_{0}}{s(s + k_{3})}\right]e_{\xi}(s)$$
 (4.30)

Haciendo abuso de la notación con términos en el dominio de la frecuencia y el tiempo podemos reescribir el controlador GPI como:

$$\mathfrak{v}\left(t\right) = \mathfrak{v}_{d}\left(t\right) - \left[\frac{k_{2}s + k_{1}s + k_{0}}{s\left(s + k_{3}\right)}\right]e_{\xi}\left(t\right) \tag{4.31}$$

El sistema en lazo cerrado queda dado por:

$$e_{\xi}(t) = \left[ \frac{s(s+k_3)}{s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0} \right] \mathfrak{z}(t)$$
(4.32)

El polinomio característico del sistema en lazo cerrado está representado por:

$$P_c = s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 (4.33)$$

Por lo tanto  $\{k_3, k_2, k_1, k_0\}$  se escogen de manera que todas las raíces se encuentran del lado izquierdo del plano complejo.

Obtenemos las raíces del polinomio característico utilizando un polinomio auxiliar con el objetivo de hacer que la dinámica rígida sea exponencialmente asintóticamente estable.

$$P(s) = \left(s^2 + 2\zeta \frac{\omega_n}{\epsilon} + \frac{\omega_n^2}{\epsilon^2}\right)^2 \tag{4.34}$$

Igualando el polinomio característico descrito en (4.33) al polinomio auxiliar (4.34) dando los siguientes valores para cada constante

$$k_3 = 4\zeta \frac{\omega_n}{\epsilon} \tag{4.35}$$

$$k_2 = 4\zeta^2 \frac{\omega_n^2}{\epsilon^2} + 2\frac{\omega_n^2}{\epsilon^2} \tag{4.36}$$

$$k_1 = 4\zeta \frac{\omega_n^3}{\epsilon^3} \tag{4.37}$$

$$k_0 = \frac{\omega_n^4}{\epsilon^4} \tag{4.38}$$

Con la ley de control presentada en la ecuación (4.31) y las ganancias (4.35) - (4.38), es posible garantizar convergencia exponencial asintótica del error de la dinámica rígida del manipulador flexible siempre y cuando los polos deseados generados por la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento deseados en lazo cerrado, se encuentren en el semiplano izquierdo. A continuación en la Figura 4.7 se muestra un diagrama a bloques del control diseñado en esta sección aplicado a la dinámica descrita por la ecuación (4.20), la cual como se muestra es equivalente a un doble integrador.

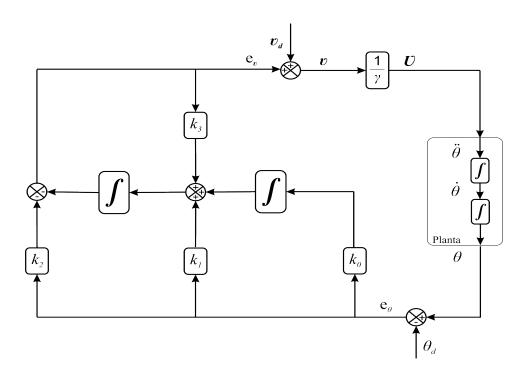


Figura 4.7: Diagrama esquemático de un controlador GPI con un término integral extra, para una planta de segundo orden

#### 4.2.1. Prueba de estabilidad GPI

En la ecuación (4.30) tenemos el control propuesto en forma de una red de compensación clásica. El polinomio característico del sistema en lazo cerrado queda representado por:

$$P_c = s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 (4.39)$$

La prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz nos entrega restricciones para los parámetros de diseño  $[k_0, k_1 k_2, k_3]$ , de manera que sean Hurwitz y garanticen que el lugar de las raíces del polinomio característico (4.39), se encuentra en el semi plano izquierdo del plano complejo:

$$k_0 > 0, \ k_1 > 0, \ k_2 > 0, \ k_3 > 0$$
 
$$k_3 k_2 > k_1$$
 
$$k_2 > \frac{k_1^2 + k_0 k_3}{k_1 k_3}$$

Probando que la dinámica rígida es exponencialmente estable localmente, debido a que se encuentra acoplada a la dinámica flexible la cual podría ser inestable para cierto tipo de trayectorias deseadas.

## 4.2.2. Simulación: controlador GPI aplicado a la dinámica rígida de un manipulador flexible de un eslabón

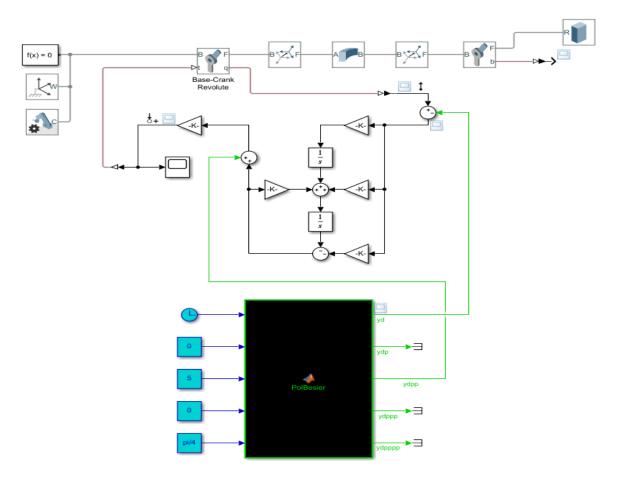


Figura 4.8: Diagrama de conexión del controlador GPI

A continuación, se muestra la simulación del controlador GPI aplicado a un manipulador flexible de un eslabón, los parámetros del eslabón y la carga son los presentados en la Tabla 3.1, con el objetivo de analizar el comportamiento del controlador. El diagrama de conexión del entorno de Simulink/Simscape se muestra en la Figura 4.8 donde tenemos el sistema

modelado en el capítulo 2 junto al controlador GPI diseñado en la sección anterior. Los parámetros empleados en el controlador son  $\epsilon = 1.2$ ,  $\omega_n = 4.1$ ,  $\zeta = 1$  con un período de muestreo variable y utilizando la rutina de integración stiff/NDF (ode15s).

Se puede apreciar en la Figura 4.9 la respuesta angular en la base del manipulador flexible simulado bajo la ley de control propuesta en la ecuación (4.28), con el objetivo de seguir una trayectoria deseada (véase Apéndice A) partiendo del reposo y terminando en el reposo, en un tiempo  $t=5\ s$  se introdujo una perturbación en el extremo del manipulador, la cual se muestra en la Figura 4.10. El error angular se muestra en la Figura 4.11, la aceleración en el extremo se muestra en la Figura 4.12, la señal de control se muestra en la Figura 4.14.

Podemos observar en la Figura 4.9 la respuesta angular del sistema, alrededor de  $t=3\ s$  llegamos a la referencia, a pesar de las vibraciones inducidas por la excitación de la dinámica flexible, no se logra apreciar de manera significativa la influencia de perturbación introducida en el extremo del manipulador.

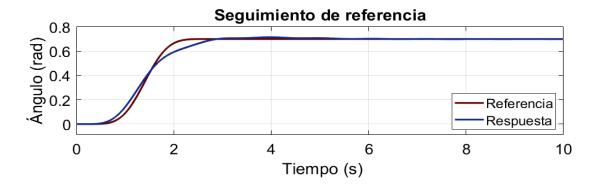


Figura 4.9: Seguimiento de trayectoria en la base



Figura 4.10: Perturbación en el extremo del manipulador

El error mostrado en la Figura 4.11 se encuentra en un rango de  $\pm 0.06~rad$  y decae a una región cercana a cero en un tiempo t=6~s donde permanece durante la duración restante del experimento, esto a pesar de que recibió una señal impulso en el extremo libre en un tiempo t=5~s, es aquí donde podemos observar la robustez del controlador para la parte rígida del sistema.

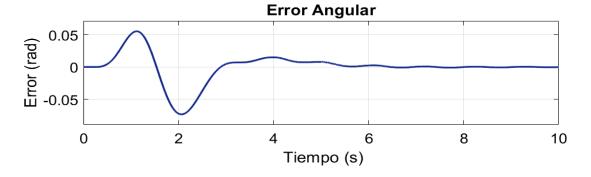


Figura 4.11: Error angular

Las vibraciones medidas en el extremo del manipulador son mostradas en la Figura 4.12, una vez introducida la perturbación mostrada en la Figura 4.10 resulta en una aceleración de magnitudes mayores y cuyo decaimiento depende completamente del amortiguamiento estructural del sistema  $\zeta = 5.12 \times 10^{-4}$ , en la Figura 4.13 se observa un acercamiento de la Figura 4.12, donde se aprecia que durante los primeros 5 s las vibraciones se mantienen decreciendo en magnitud dentro de un rango de  $\pm 2 \ rad/s^2$ , pero a partir de los 5 s la aceleración se dispara hasta un valor de y no regresa a la escala original durante el tiempo restante de simulación.



Figura 4.12: Aceleración en el extremo



Figura 4.13: Acercamiento de la aceleración en el extremo

De los resultados obtenidos podemos determinar que la ley de control diseñada en la sección 4.1 no es capaz de reducir las vibraciones en el extremo del manipulador de manera satisfactoria, haciendo aparente la necesidad de diseñar una ley de control para la dinámica flexible del manipulador.

En la Figura 4.14 se muestra la señal de control, alrededor de un tiempo  $t=3\ s$  podemos observar como el controlador compensa las inercias de la masa en la punta que opone al movimiento de la base, en un tiempo  $t=5\ s$  observamos como el controlador reacciona a la perturbación en el extremo del manipulador, lo que nos demuestra la robustez del controlador, el esfuerzo de control requerido se encuentra dentro del rango de los actuadores que se utilizan comúnmente en manipuladores flexibles incluyendo el motor utilizado en la plataforma experimental diseñada en el capítulo 3.

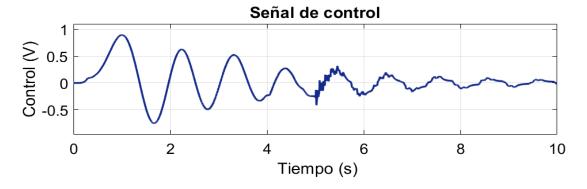


Figura 4.14: Señal de control GPI

Utilizando las herramientas del ayudante de linealización de la librería de "control systems" de Simulink, tomando como entrada de control el torque en la base y como salida el ángulo en la base, linealizamos el modelo para obtener un diagrama de Nyquist del sistema en lazo cerrado mostrado en la Figura 4.15; podemos observar que no circulamos alrededor del punto (-1,0) es decir la dinámica rígida del sistema es estable.

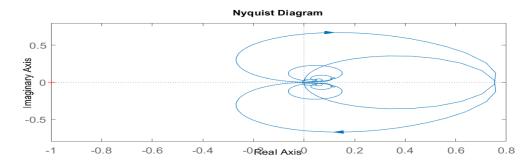


Figura 4.15: Diagrama de Nyquist

# 4.3. Diseño del esquema de control GPI+ESC aplicado a un robot manipulador flexible de un eslabón

Para el control de vibraciones, deseamos minimizar las deflexiones elásticas en la punta (w(l,t)), la cual es una variable espacio temporal de un sistema de fase no mínima y subactuado, para esto utilizaremos una técnica de control adaptativo denominada Extremum Seeking basada en la ley de control para sistemas no lineales presentada por [20]. Los parámetros del esquema de control extremum seeking se seleccionan de la siguiente manera.

$$\omega_h = \omega \omega_H = \omega \delta \omega I_H = O(\omega \delta) \tag{4.40}$$

$$\omega_l = \omega \omega_L = \omega \delta \omega'_L = O(\omega \delta) \tag{4.41}$$

$$k = \omega K = \omega \delta K = O(\omega \delta) \tag{4.42}$$

donde  $\omega_H > 0$ ,  $\omega_L > 0$ ,  $K_I > 0$  son constantes O(1) positivas. La perturbación del sistema  $a\sin\omega t$  debe ser lo suficientemente pequeña para lograr reducir la región de convergencia en estado estacionario y debe ser lo suficientemente grande para minimizar la salida del sistema de manera rápida, como se demostrará en la sección 4.3.1, para resolver esto se consideró una frecuencia de excitación  $\omega$  que parte de una frecuencia  $\omega_n$  que permita obtener información

del sistema llevando la salida a un extremo de manera rápida, llegando al estado estacionario la región de convergencia queda dada por  $O(\omega_0 \delta)$ .

De las ecuaciones (4.40) y (4.41) podemos observar que la frecuencia de corte de los filtros debe ser menor a la frecuencia de perturbación del sistema y de (4.42) podemos observar que las ganancias k,  $\omega_h$ ,  $\omega_h$  se deben escoger como  $O(\delta)$ . En general la realimentación del sistema tiene 3 escalas de tiempo

- Rápida: El sistema con el controlador.
- Media: La perturbación periódica.
- Lenta: Los filtros dentro del controlador Extremum Seeking

Para escoger los parámetros del controlador Extremum Seeking debemos seguir el siguiente algoritmo [35]:

- 1. La frecuencia de la perturbación  $\omega$  debe ser lo suficientemente grande para minimizar la salida del sistema, no debe ser igual a ninguna de las frecuencias del ruido externo que entre al sistema y no debe ser igual a un cero de la dinámica de entrada.
- 2. La amplitud de la perturbación a se escoge de manera que se tenga un error de salida en estado estacionario  $\tilde{y}$  del  $\pm 2\%$  del valor de la referencial.
- 3. Los filtros deben ser propios o estrictamente propios, en caso de que las dinámicas de salida sean lentas y estrictamente propias, agregar la cantidad de polos rápidos igual al grado relativo de la dinámica de salida y tantos ceros sea necesario para obtener un grado relativo cero de la dinámica lenta.
- 4. Diseñar el segundo filtro de manera que sea propio utilizando alguna técnica para sistemas SISO.

En el primer paso del algoritmo podemos ver que la frecuencia de perturbación  $\omega$  no debe ser igual a un cero de la dinámica de entrada, esto se debe a que requerimos obtener un gradiente del sistema utilizando esta perturbación de entrada, una consecuencia de utilizar  $\omega_0$  como frecuencia de perturbación es la reducción de las vibraciones del sistema, evitando que los filtros obtengan información para minimizar la variable de salida, tomando ventaja de este fenómeno podemos utilizar una frecuencia de perturbación inicial igual a la frecuencia natural del sistema, minimizando la variable  $\ddot{w}(l,t)$  durante el transitorio del sistema y de manera suave transicionamos hacia una frecuencia cero del sistema, apagando así el controlador Extremum Seeking y minimizando las vibraciones en estado estacionario generadas por consecuencia del mismo controlador.

Debido a que los primeros modos de vibración del sistema aportan la mayor cantidad de información y el actuador utilizado en el prototipo permite excitar solo los primeros 3 modos de vibración, podemos agregar más lazos de control Extremum Seeking donde las frecuencias de excitación corresponden a las primeras 3 frecuencias naturales del sistema y transicionamos de manera suave hacia cada una de las primeras 3 antirresonancias del sistema, de esta manera tomamos en cuenta los primeros 3 modos de vibración, en la Figura 4.16 podemos observar el diagrama de uno de estos lazos de control. Las salidas correspondientes a los demás lazos de control se suman a la entrada del sistema  $(\tau(t))$  de manera que solo utilizamos un actuador.

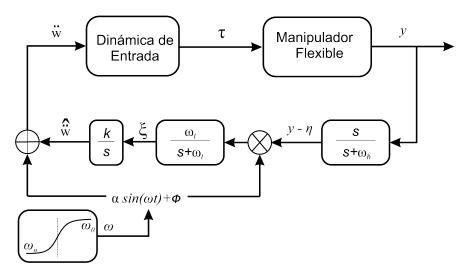


Figura 4.16: Diagrama esquemático de un control Extremum Seeking aplicado a un robot manipulador flexible

Las ecuaciones que describen el control mostrado en la Figura (4.16) están dadas de la siguiente forma:

$$\hat{w}^{(3)} = k\xi \tag{4.43}$$

$$\dot{\xi} = -\omega_l \xi + \omega_l (y - \eta) a \sin \omega t \tag{4.44}$$

$$\dot{\eta} = -\omega_h \eta + \omega_h y \tag{4.45}$$

$$\ddot{w} = \hat{w} + a\sin\omega t \tag{4.46}$$

donde  $\ddot{w}^*$  es el mínimo,  $\hat{\ddot{w}}$  es el mínimo estimado y  $\tilde{\ddot{w}}$  es el error de estimación

$$\widetilde{\ddot{w}} = \widehat{\ddot{w}} - \ddot{w}^* \tag{4.47}$$

$$\widetilde{\eta} = \eta - h \circ l(\ddot{w}) \tag{4.48}$$

#### 4.3.1. Prueba de estabilidad ESC

Las formas modales deben cumplir la condición de ortogonalidad (2.46). La ecuación que describe la dinámica del sistema puede ser formada usando las energías Potencial, Cinética y el trabajo usando la expresión del Lagrangiano dada en [26].

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = W_i \tag{4.49}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15) en la ecuación (4.49) y aplicando las condiciones de ortogonalidad (2.45) se obtiene una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas [15]:

$$\ddot{q}_{0} = \frac{\tau}{I_{T}}$$

$$\ddot{q}_{1} + \omega_{1}^{2} q_{1} = \frac{d\phi_{1}(0)}{dx} \frac{\tau}{I_{T}}$$

$$\ddot{q}_{2} + \omega_{2}^{2} q_{2} = \frac{d\phi_{2}(0)}{dx} \frac{\tau}{I_{T}}$$

$$\vdots$$

$$\ddot{q}_{n} + \omega_{n}^{2} q_{n} = \frac{d\phi_{n}(0)}{dx} \frac{\tau}{I_{T}}$$
(4.50)

Debido a la naturaleza distribuida del sistema tenemos un número de modos de vibración infinitos, en la práctica debido al ancho de banda limitado de los sensores y al ancho de banda limitado del motor, sabemos que la contribución de los modos de alto orden es despreciable [29], es decir analizar el sistema utilizando un modelo de orden reducido o truncado que incorpore los modos dominantes es correcto. Reteniendo los modos de interés, en el caso de la plataforma experimental diseñada corresponden a los primeros tres modos de vibración dominantes, debido a que no podemos excitar los modos de alto orden podemos expresar el sistema de la siguiente forma:

$$\dot{\chi} = f(q_i, \phi_i, \tau) \quad i = 0, 1, 2, 3 \tag{4.51}$$

$$y = h(q_i, \phi_i) \tag{4.52}$$

Donde:

$$\chi^{T} = \begin{bmatrix} q_0 & \dot{q}_0 & q_1 & \dot{q}_1 & \cdots & q_3 & \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

$$f(q, \phi, \tau) = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \frac{\tau}{I_T} \\ \dot{q}_1 \\ -q_1 \omega_1^2 + \frac{d\phi_1(0)}{dx} \frac{\tau}{I_T} \\ \vdots \\ \dot{q}_3 \\ -q_3 \omega_3^2 + \frac{d\phi_3(0)}{dx} \frac{\tau}{I_T} \end{bmatrix}$$

$$(4.54)$$

La salida del sistema está dada por un decodificador óptico en la base y un acelerómetro en la punta cuyas mediciones se pueden aproximar de la siguiente forma:

$$h(q,\phi) = \begin{bmatrix} q_0 + \frac{d^2\phi_1(l)}{dx^2} q_1 + \dots + \frac{d^2\phi_3(l)}{dx^2} q_3 \\ q_0 + \frac{d\phi_1(0)}{dx} q_1 + \dots + \frac{d\phi_3(0)}{dx} q_3 \end{bmatrix}$$
(4.55)

Donde  $\frac{d^2\phi_i(l)}{dx^2}$  es la ganancia modal del acelerómetro en la punta y  $\frac{d\phi_i(l)}{dx}$  es la ganancia modal del decodificador óptico en la base del motor.

Aplicando el análisis para sistemas no lineales presentado por [20], suponiendo que conocemos una ley de control suave

$$\tau = a\left(q_i, \phi_i, \ddot{w}\right) \tag{4.56}$$

Parametrizada por un escalar  $\ddot{w}$ 

$$\dot{\chi} = f(q_i, \phi_i, a(q_I, \phi_i, \ddot{w})) \tag{4.57}$$

Suposición 1 Existe una función suave  $l: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(q_i, \phi_i, a(q_i, \phi_i, D\ddot{w})) = 0 \Leftrightarrow q_i, \phi_i = l(\ddot{w})$$
(4.58)

Suposición 2 Existe un  $\ddot{w}^* \in \mathbb{R}$  tal que

$$(h \circ l)\prime(\ddot{w}^*) = 0 \tag{4.59}$$

$$(h \circ l) \prime \prime (\ddot{w}^*) < 0 \tag{4.60}$$

Con esto asumimos que  $y = h(l(\ddot{w}))$  tiene un mínimo cuando  $\ddot{w} = \ddot{w}^*$ .

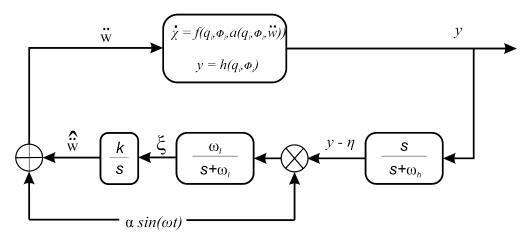


Figura 4.17: Diagrama de ESC aplicado a un manipulador flexible de un eslabón

El análisis trata el caso en el que la perturbación  $a \sin \omega t$  es lenta, es decir se comporta como una mapa estático [36], el parámetro  $\omega$  se utiliza para separar las escalas de tiempo entre la planta y el controlador extremum seeking, donde los estados de la planta son rápidos y decaen rápidamente (debido a la suposición 1), bajo esta suposición le aplicamos el método de averaging descrito por Khalil en [37], para esto primero llevamos al sistema a la forma clásica del averaging. El sistema visto como un mapa estático se muestra en la Figura 4.18.

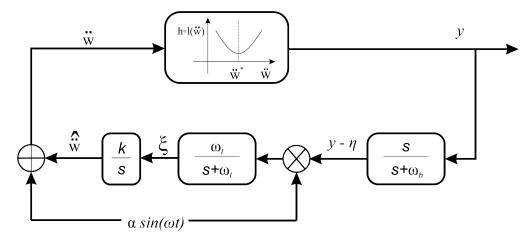


Figura 4.18: Diagrama de ESC donde la planta se observa como un mapa estático

Recopilando las ecuaciones que corresponden el caso general en la Figura 4.17; ecuaciones (4.43) - (4.48).

$$\dot{\chi} = f\left(q, \phi, a\left(q, \phi, \hat{\vec{w}} + a\sin\omega t\right)\right) \tag{4.61}$$

Normalizando la escala del tiempo  $\Gamma = \omega t$  obtenemos:

$$\omega \frac{d\chi}{d\Gamma} = f\left(q, \phi, a\left(q, \phi, \ddot{w}^* + \widetilde{\ddot{w}} + a\sin\Gamma\right)\right) \tag{4.62}$$

$$\frac{d}{d\Gamma} \begin{bmatrix} \widetilde{\ddot{w}} \\ \xi \\ \widetilde{\eta} \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} K'\xi \\ -\omega'_L \xi + \omega'_L \left( h \left( q, \phi \right) - h \circ l \left( \ddot{w}^* \right) - \widetilde{\eta} \right) a \sin \Gamma \\ -\omega'_H \widetilde{\eta} + \omega'_H \left( h \left( q, \phi \right) - h \circ l \left( \ddot{w}^* \right) \right) \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

Utilizando el método de averaging presentado por Khalil en [38]. El primer paso para aplicar el análisis de averaging es congelar  $q, \phi$  de la ecuación (4.62) en su valor de estado cuasi-estacionario como

$$q, \phi = l\left(\ddot{w}^* + \tilde{\ddot{w}} + a\sin\Gamma\right) \tag{4.64}$$

Es decir, sustituyendo la ecuación (4.64) en (4.63) obtenemos un sistema reducido.

$$\frac{d}{d\Gamma} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_r \\ \xi_r \\ \widetilde{\eta}_r \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} K'\xi_r \\ -\omega'_L \xi_r + \omega'_L \left( \nu \left( \widetilde{w}_r + a \sin \Gamma \right) - \widetilde{\eta}_r \right) a \sin \Gamma \\ -\omega'_H \widetilde{\eta}_r + \omega'_H \left( \nu \left( \widetilde{w}_r + a \sin \Gamma \right) \right) \end{bmatrix}$$
(4.65)

donde:

$$\nu\left(\widetilde{\ddot{w}}_r + a\sin\Gamma\right) = h \circ l\left(\ddot{w}^* + \widetilde{\ddot{w}}_r + a\sin\Gamma\right) - h \circ l\left(\ddot{w}^*\right)$$
(4.66)

A partir de la Suposición 2, está claro que:

$$\nu(0) = 0 \tag{4.67}$$

$$\nu'(0) = (h \circ l)'(\ddot{w}^*) = 0 \tag{4.68}$$

$$\nu \prime \prime \prime (0) = (h \circ l) \prime \prime (\ddot{w}^*) < 0 \tag{4.69}$$

Al sistema reducido presentado en la ecuación (4.65) le podemos aplicar el método de *avera-ging*.

$$\frac{d}{d\Gamma} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_r^a \\ \xi_r^a \\ \widetilde{\eta}_r^a \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} K' \xi_r^a \\ -\omega'_L \xi_r^a + \frac{\omega'_L}{2\pi} a \int_0^{2\pi} \nu \left( \widetilde{w}_r^a + a \sin \sigma \right) \sin \sigma d\sigma \\ -\omega'_H \widetilde{\eta}_r^a + \frac{\omega'_H}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu \left( \widetilde{w}_r^a + a \sin \sigma \right) d\sigma \end{bmatrix}$$
(4.70)

Debemos determinar el equilibrio promedio  $\left(\ddot{\tilde{w}}_r^{a,e},\ \xi_r^{a,e},\ \widetilde{\eta}_r^{a,e}\right)$  el cual satisface:

$$\xi_r^{a,e} = 0 \tag{4.71}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \nu \left( \tilde{\ddot{w}}_{r}^{a,e} + a \sin \sigma \right) \sin \sigma d\sigma = 0 \tag{4.72}$$

$$\widetilde{\eta}_r^{a,e} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu \left( \widetilde{\ddot{w}}_r^{a,e} + a \sin \sigma \right) d\sigma \tag{4.73}$$

Proponiendo  $\widetilde{\ddot{w}}_r^{a,e}$ , de la forma:

$$\tilde{\ddot{w}}_r^{a,e} = b_1 a + b_2 a^2 + O(a^3) \tag{4.74}$$

Sustituyendo en (4.73) y aplicando las condiciones (4.67) y (4.68), integrando e igualando las a con potencias iguales obtenemos que  $\nu''(0)b_1 = 0$  y  $\nu''(0)d_2 + \frac{1}{8}\nu'''(0) = 0$ 

$$\tilde{\ddot{w}}_r^{a,e} = -\frac{\nu \prime \prime \prime (0)}{8\nu \prime \prime (0)} a^2 + O(a^3) \tag{4.75}$$

De la misma manera para la ecuación (4.73), obtenemos:

$$\widetilde{\eta}_r^{a,e} = \frac{\nu \prime \prime (0)}{4} a^2 + O(a^3) \tag{4.76}$$

Por lo tanto el equilibrio promedio del modelo (4.70) está dado por:

$$\frac{d}{d\Gamma} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_r^{a,e} \\ \xi_r^{a,e} \\ \widetilde{\eta}_r^{a,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu m(0)}{8\nu m(0)} a^2 + O(a^3) \\ 0 \\ \frac{\nu m(0)}{4} a^2 + O(a^3) \end{bmatrix}$$
(4.77)

Obteniendo el jacobiano de (4.70) en  $(\widetilde{w}, \xi, \widetilde{\eta})_r^{a,e}$ , obtenemos:

$$J_r^a = \delta \begin{bmatrix} 0 & K' & 0 \\ \frac{\omega_L}{2\pi} a \int_0^{2\pi} \nu \prime \left( \tilde{\ddot{w}}_r^{a.e} + a \sin \sigma \right) \sin \sigma d\sigma & -\omega \prime_L & 0 \\ \frac{\omega_H}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu \prime \left( \tilde{\ddot{w}}_r^{a,e} + a \sin \sigma \right) d\sigma & 0 & -\omega \prime_H \end{bmatrix}$$
(4.78)

Podemos ver qué  $J_r^a$  es triangular inferior es decir mientras se cumpla que  $\int_0^{2\pi} \nu \prime \left( \widetilde{\ddot{w}}_r^{a.e} + a \sin \sigma \right) \sin \sigma d\sigma < 0$ , utilizando las condiciones (4.67), (4.68), obtenemos:

$$\int_{0}^{2\pi} \nu \prime \left( \widetilde{\ddot{w}}_{r}^{a.e} + a \sin \sigma \right) \sin \sigma d\sigma = \pi \nu \prime \prime (0) a + O(a^{2})$$

$$(4.79)$$

Sustituyendo (4.79) en (4.78) obtenemos:

$$det(\lambda I - J_r^a) = \left(\lambda^2 + \delta\omega I_L \lambda - \frac{\delta\omega I_L K'}{2} \nu''(0) a^2 + O\left(\delta^2 a^3\right)\right) (\lambda + \delta\omega'_H)$$
(4.80)

Esto por consecuencia nos indica que  $J_r^a$  es Hurwitz para una a lo suficientemente pequeña, esto implica que la estabilidad del sistema promedio requiere una a pequeña. De acuerdo con el teorema de averaging tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1** [35] El sistema descrito por la ecuación (4.70), bajo las suposiciones 1 y 2, existe  $\bar{\delta}$  y una  $\bar{a}$  tal que para todo  $\delta \in (0, \bar{\delta})$  y  $a \in (0, \bar{a})$  el sistema tiene una solución exponencial periódica  $(\tilde{w}_r^{2\pi}(\Gamma), \xi_r^{2\pi}(\Gamma), \tilde{\eta}_r^{2\pi}(\Gamma))$  de período  $2\pi$  la cual satisface:

$$\left| \begin{bmatrix} \widetilde{w}_r^{2\pi}(l,\Gamma) - \frac{\nu m(0)}{8\nu m(0)}a^2 \\ \xi_r^{2\pi}(\Gamma) \\ \widetilde{\eta}_r^{2\pi}(\Gamma) - \frac{\nu''(0)}{4}a^2 \end{bmatrix} \right| \le O(\delta) + O(a^3) \quad \forall \Gamma \ge 0$$

$$(4.81)$$

Esto implica que para todas las soluciones y sus componentes  $(\widetilde{w}_r(\Gamma), \xi_r(\Gamma), \widetilde{\eta}_r(\Gamma))$ , convergen a la región  $O(\delta + a^2)$ . Este resultado aplica al sistema descrito en la Figura (4.18), ya que  $y = h \circ l\left(\ddot{w}^*(l,\Gamma) + \widetilde{w}_r(l,\Gamma) + a\sin\Gamma\right)$  y  $(h \circ l)'(\ddot{w}^*) = 0$ , tenemos que:

$$y - h \circ l\left(\ddot{w}^*\left(l, \Gamma\right)\right) = \left(h \circ l\right)^{\prime\prime(\ddot{w}^*)} \left(\widetilde{\ddot{w}}_r\left(l, \Gamma\right) + a\sin\Gamma\right)^2 + O\left(\widetilde{\ddot{w}}_r\left(l, \Gamma\right) + a\sin\Gamma\right)^3 \tag{4.82}$$

donde:

$$\widetilde{w}_{r}(l,\Gamma) + a\sin\Gamma = \left(\widetilde{w}_{r}(l,\Gamma) - \widetilde{w}_{r}^{2\pi}(l,\Gamma)\right) 
+ \left(\widetilde{w}_{r}^{2\pi}(l,\Gamma) + \frac{(h\circ l)'''(\widetilde{w}^{*}(l,\Gamma))}{8(h\circ l)''(\widetilde{w}^{*}(l,\Gamma))}a^{2}\right) 
- \frac{(h\circ l)'''(\widetilde{w}^{*}(l,\Gamma))}{8(h\circ l)''(\widetilde{w}^{*}(l,\Gamma))}a^{2} + a\sin\Gamma$$
(4.83)

El primer término converge a cero, el segundo es  $O(\delta + a^3)$ , el tercer término es  $O(a^2)$  y el cuarto término es O(a) por lo tanto:

$$\lim_{\Gamma \to \infty} \sup \left| \widetilde{\ddot{w}}_r (l, \Gamma) + a \sin \Gamma \right| = O(a + \delta)$$
(4.84)

Por consecuencia (4.82) nos entrega:

$$\lim_{\Gamma \to \infty} \sup |y(q, \phi, \Gamma) - h \circ l(\ddot{w}^*(l, \Gamma))| = O(a^2 + \delta^2)$$
(4.85)

Este resultado nos indica la importancia de la selección de parámetros del control ESC de manera que se tenga en cuenta el resultado dado en la ecuación (4.85) ya que van directamente ligados a la región de convergencia.

### 4.3.2. Control GPI + Extremum Seeking aplicado a un robot manipulador flexible de un eslabón

En las secciones anteriores 4.2, 4.3, diseñamos un controlador GPI para garantizar la estabilidad de la dinámica rígida y un controlador Extremum Seeking que minimiza las deflexiones elásticas en la punta del manipulador, utilizando una suma podemos combinar ambos lazos de control para resolver el problema de control.

El controlador GPI utiliza reconstructores integrales para estimar los estados a los que no se tiene acceso (velocidad y aceleración), el controlador Extremum Seeking utiliza una perturbación sinusoidal cuya frecuencia sigue una trayectoria suave que parte del reposo y termina en el reposo, va inicialmente desde una frecuencia natural del sistema para obtener información de la variable a minimizar (segunda derivada de la deflexión elástica respecto al tiempo) y termina en un cero del sistema apagando los lazos de ESC; para el diseño de la trayectoria utilizamos el algoritmo presentado en el Apéndice A.

Para controlar los primeros 3 modos de vibración del sistema los cuales son los únicos que pueden ser excitados por el motor que mueve al manipulador, añadimos más lazos de ESC correspondientes a cada una de las frecuencias naturales del sistema, de manera que en este caso los primeros 3 modos de vibración se utilizan como la frecuencia inicial de la perturbación sinusoidal y de manera suave transicionamos hacia las primeras 3 antirresonancias del sistema, sumamos los 3 lazos de ESC con el lazo de control GPI y obtenemos el control mostrado en la Figura 4.19.

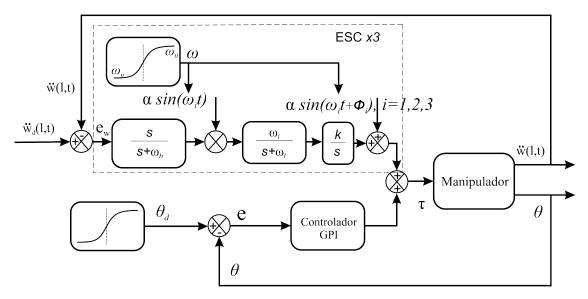


Figura 4.19: Diagrama esquemático de un control GPI + Extremum Seeking aplicado a un robot manipulador flexible

donde el lazo de control GPI estabiliza de manera exponencial y asintótica a la dinámica rígida del sistema localmente y los lazos de Extremum Seeking estabilizan las vibraciones a una región dada por los parámetros de diseño. La estabilización que se menciona aquí solo es válida para cuando se truncan los modos de vibración del robot, los cuales son infinitos.

### 4.3.3. Resultados experimentales de la implementación del esquema de control GPI + Extremum Seeking en un robot manipulador flexible de un eslabón

Con el propósito de validar el controlador propuesto en la sección anterior lo aplicaremos al robot manipulador flexible de un eslabón diseñado el capítulo 3, con el fin de cumplir el objetivo de control propuesto en la tesis, la trayectoria a seguir por el eslabón es una curva suave (véase Apéndice A), que parte desde el reposo y termina en 720 grados, en un tiempo t=5 s, el movimiento de 720 grados corresponde al movimiento del eje del motor el cual cuenta con una reducción de engranes 3:1.

Las ganancias  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  que determinan el comportamiento de la dinámica rígida del sistema en lazo cerrado se calculan utilizando un polinomio auxiliar, los parámetros que se establecieron para este experimento son:  $\zeta = 1$ ,  $\omega_n = 4.1 \ Hz$ ,  $\epsilon = 0.9$ ; mientras que las ganancias  $k_1$ ,  $\omega_{h1}$ ,  $\omega_{h1}$ ,  $\omega_{h2}$ ,  $\omega_{h2}$ ,  $\omega_{h2}$ ,  $\omega_{h2}$ ,  $\omega_{h3}$ ,  $\omega_{h3}$ , que determinan el comportamiento

de la dinámica flexible del sistema en lazo cerrado, se escogen siguiendo las especificaciones abordadas en la sección 4.3, se fijan los filtros de manera que funcionen para las trayectorias que se utilizarán como perturbación en  $\omega$ , las cuales son curvas suaves que van desde una frecuencia de excitación igual a una frecuencia natural del sistema, hacia un cero del sistema en un tiempo determinado en este caso t=7 s y las frecuencias utilizadas para cada uno de los lazos fueron  $\omega_{n1}=1.4 \rightarrow \omega_{01}=4.1$ ,  $\omega_{n2}=6.5 \rightarrow \omega_{02}=8.6$ ,  $\omega_{n3}=9.5 \rightarrow \omega_{03}=13.2$ , tomadas del capítulo 3.

En la Figura 4.20 se muestran los resultados del seguimiento angular en la base del manipulador, cerca de los 12~s logra alcanzar a la referencia y lo hace de manera más suave que los controles presentados anteriormente.

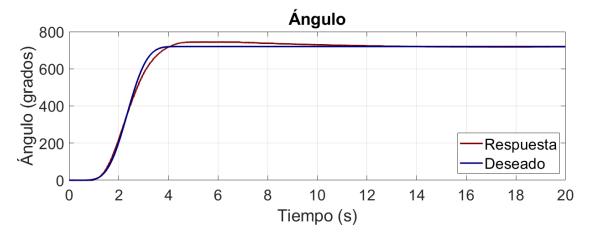


Figura 4.20: Respuesta angular

En la Figura 4.21 observamos el error de seguimiento, se aprecia que existe un compromiso entre el seguimiento de la trayectoria y la minimización de vibraciones en el intervalo entre t=2 s y t=5 s se aprecia un movimiento sinusoidal a lo largo de la respuesta, este movimiento provocado por el ESC provoca un seguimiento deficiente e induce vibraciones que se transmiten hasta el extremo libre del manipulador, el error de seguimiento mostrado en la Figura 4.21 se mantiene oscilando en el estado estacionario  $(t=15\ s)$  debido a las perturbaciones utilizadas en el ESC.

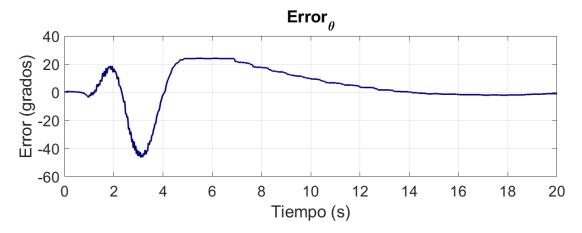


Figura 4.21: Error de seguimiento

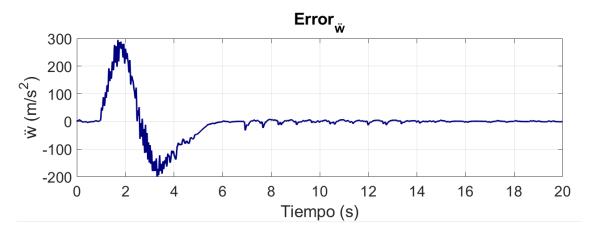


Figura 4.22: Error de la segunda derivada de la deflexión elástica

En la Figura 4.22, podemos observar que no existe una cancelación perfecta de la segunda derivada de la deflexión elástica  $(\ddot{w}(l,t))$  debidas al ESC, sino que se inducen vibraciones en el extremo libre del manipulador, como consecuencia se observa una respuesta periódica en la segunda derivada de la deflexión que se mantiene en una región cercana al cero durante el estado estacionario.

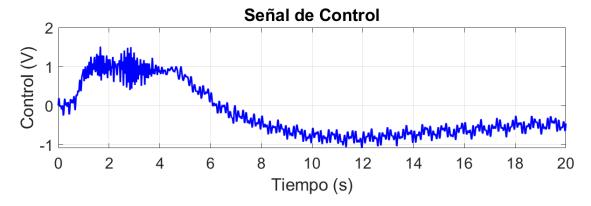


Figura 4.23: Señal de control

La señal de control mostrada en la Figura 4.23 es enviada al circuito PWM, se aprecia la aportación de los lazos de ESC, donde aparece una señal constante de control periódica consecuencia de la perturbación sinusoidal.

# 4.3.4. Comparación de los controladores GPI+GPI, GPI+PID, GPI+MPPF y GPI+ESC aplicado aun manipulador flexible de un eslabón

Con el fin de comparar distintos controladores, observar las ventajas y desventajas del controlador GPI+ESC respecto a los controladores GPI+GPI [5], GPI+PID y GPI+MPPF¹ [39], aplicados al robot manipulador flexible de un eslabón diseñado en el capítulo 3, utilizando referencias sinusoidales a distintas frecuencias las cuales coinciden con las primeras 3 frecuencias naturales del sistema y utilizando una referencia de regulación que parte del reposo y termina en el reposo (vease Apendice A).

Utilizando la herramienta Simscape de Simulink simulamos el sistema descrito por las ecuaciones (2.29) - (2.32), los parámetros de la viga están dados por la Tabla 3.1, para asegurar que estamos excitando la dinámica flexible del sistema utilizamos una trayectoria sinusoidal  $(a \sin \omega t + \varphi)$ , donde la frecuencia  $\omega$  es igual a la frecuencia natural  $\omega_n$  a la que se quiere hacer resonar el sistema (primera frecuencia  $\omega_n = 1.4 \ Hz$ , segunda frecuencia  $\omega_n = 6.5 \ Hz$ , tercera frecuencia  $\omega_n = 9.5 \ Hz$ ), utilizaremos los controladores: GPI+ESC, GPI+MPPF, GPI+GPI y GPI+PID para comparar la magnitud de los errores utilizando las normas dos e infinito, para la simulación se utiliza la rutina de integración stiff/NDF (ode15s) con paso

 $<sup>^1\</sup>mathrm{Por}$ sus siglas en ingles Múltiple Retroalimentación Positiva de la Posición

variable, se escogió debido a que el ciclo límite tiene regiones donde los componentes de la solución son bastante rígidos, con regiones que se comportan de manera rápida, la rutina de integración stiff/NDF realiza menos iteraciones para el proceso de solución en las regiones rígidas, mientras mantiene un mayor número de iteraciones en las regiones rápidas, los parámetros de los controladores utilizados en cada una de las simulaciones realizadas en esta sección se muestran en las Tablas 4.1 y 4.2.

Tabla 4.1: Parámetros del controlador GPI dinámica rígida



Tabla 4.2: Parámetros de los controladores de la dinámica flexible

GPI		PID		MPPF		ESC	
$\zeta =$	1	P =	$1 \times 10^{-9}$	$\zeta_{1,2,3} =$	0.7	a =	0.02
$\epsilon =$	$10 \times 10^{6}$	I =	0	g =	0.1	k =	0.2
$\omega =$	4.1	D =	$5 \times 10^{-10}$		-	$\omega_h$	1, 6, 9

Durante los primeros 5 s de simulación, donde la frecuencia de la perturbación para cada uno de los lazos de ESC no ha llegado a un cero del sistema ( $\omega_0$ ), se observa en las Figuras 4.24, 4.25 y 4.26 que la respuesta se mantiene más cercana a la referencia y a medida que pasamos de los 5 s tiende a aumentar, observamos en las Figuras 4.27, 4.28 y 4.29 el error angular, donde es más aparente en el caso de 1.4 Hz que el error de seguimiento es menor durante los primeros 5 s, esto está relacionado con la transición de la frecuencia de perturbación y el tiempo que le toma al sistema en entrar en resonancia. En las Figuras 4.25 y 4.26 se observa que el seguimiento de trayectoria es deficiente para frecuencias que sobrepasan al primer modo de vibración.



Figura 4.24: Respuesta Angular  $1.4\ Hz$ 

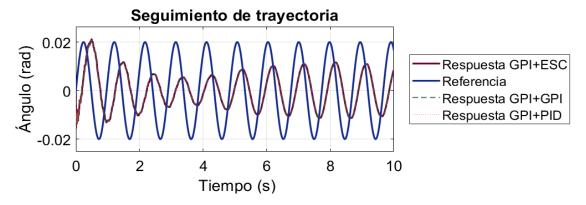


Figura 4.25: Respuesta Angular 6.5 Hz

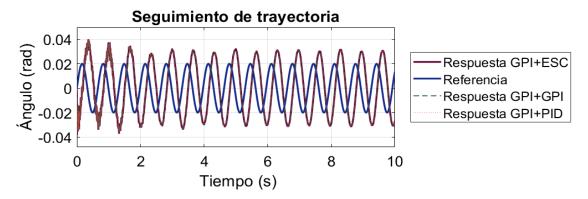


Figura 4.26: Respuesta Angular 9.5 Hz

Para los controladores GPI + GPI y GPI + PID el error angular es muy similar, dejando ver que la aportación de los lazos de control correspondientes a la segunda derivada de la deflexión no es significativa, las mayores diferencias entre los controladores se aprecian en la Figura (4.27) correspondientes al error angular en la base excitando el primer modo de vibración.

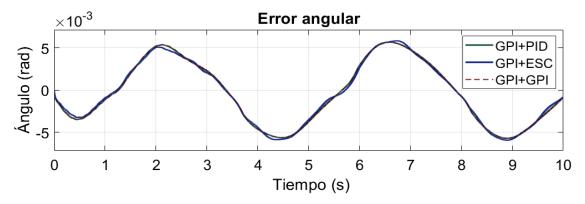


Figura 4.27: Error Angular 1.4~Hz

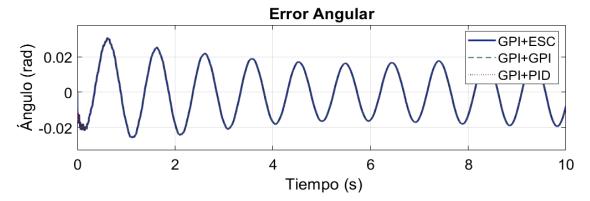


Figura 4.28: Error Angular 6.5~Hz

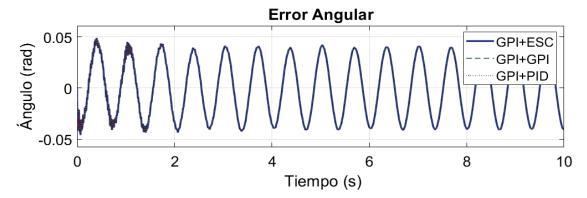


Figura 4.29: Error Angular 9.5 Hz

En las Figuras 4.30, 4.31 y 4.32 observamos la segunda derivada de la deflexión, la cual se mantiene en una región de  $\pm 0.4~m/s^2$ , se observa una relación entre la frecuencia y la aceleración de deflexión inicial, a mayor frecuencia mayor aceleración de la deflexión inicial.

Aún cuando los errores angulares mostrados en las Figuras 4.27, 4.28 y 4.29 para los controladores GPI + GPI y GPI + PID son muy similares, la segunda derivada de la deflexión es diferente, la segunda derivada de la deflexión en el caso del controlador GPI + PID es mayor para todos los demás casos analizados y decae más lento que en los controladores GPI + ESC y GPI + GPI.

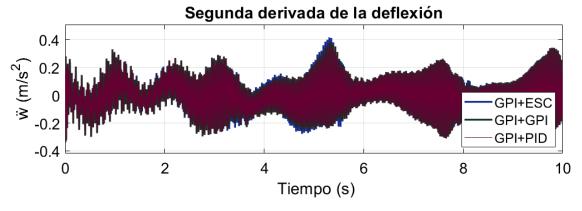


Figura 4.30: Segunda derivada de la deflexión  $1.4\ Hz$ 

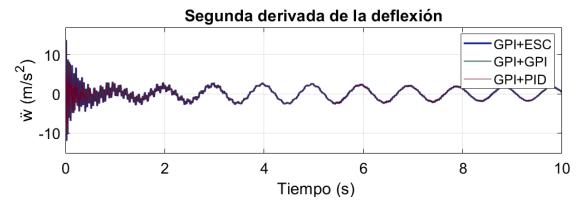


Figura 4.31: Segunda derivada de la deflexión  $6.5 \ Hz$ 

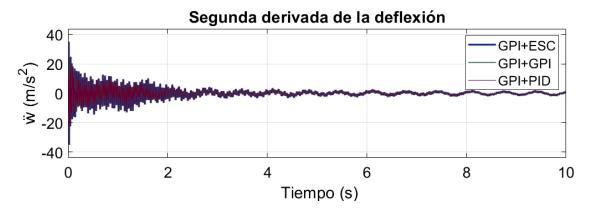


Figura 4.32: Segunda derivada de la deflexión  $9.5\ Hz$ 

En las Figuras 4.33, 4.34 y 4.35 se observan las señales de control para cada una de las trayectorias sinusoidales cuyas frecuencias corresponden a las frecuencias naturales del manipulador flexible, las señales son de magnitud similar en todos los casos, en el caso del controlador GPI + ESC la señal de control se mantiene alrededor de  $\pm 0.02~Nm$  la cual es la aportación en amplitud de la perturbación de los lazos de ESC, todas las señales tienen la misma forma debido a que la principal aportación de control proviene del lazo del controlador GPI.

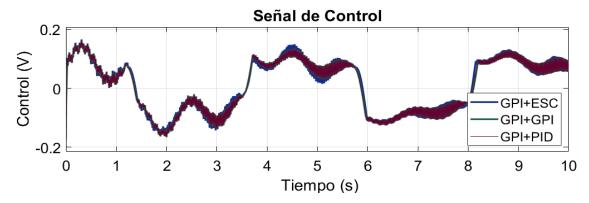


Figura 4.33: Señal de control 1.4 Hz

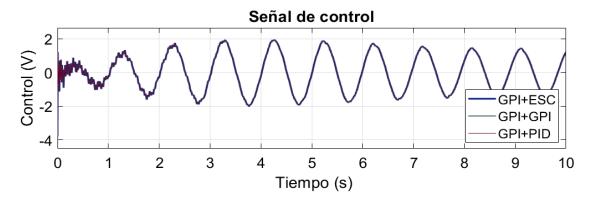


Figura 4.34: Señal de control 6.5 Hz

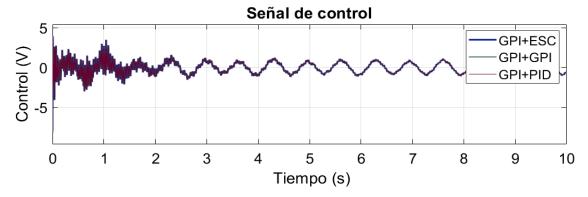


Figura 4.35: Señal de control  $9.5\ Hz$ 

A continuación, se presentan los resultados de las simulaciones de los controladores GPI + ESC, GPI + GPI, GPI + MPPF y GPI + PID para el caso de una trayectoria de regulación, la cual parte del reposo y termina en el reposo, los parámetros de los controladores utilizados en las siguientes simulaciones se muestran en las Tablas 4.1 y 4.2, las frecuencias de las perturbaciones sinusoidales utilizadas en los lazos de ESC parten de las frecuencias naturales del sistema y transicionan de manera suave hacia un cero del sistema en un tiempo t = 5 s, las frecuencias de las perturbaciones sinusoidales utilizadas para cada uno de los lazos ESC fueron:  $\omega_{n1} = 1.4 \rightarrow \omega_{01} = 4.1$ ,  $\omega_{n2} = 6.5 \rightarrow \omega_{02} = 8.6$ ,  $\omega_{n3} = 9.5 \rightarrow \omega_{03} = 13.2$ , tomadas del capítulo 3, con las siguientes fases  $\phi_1 = 0.174533 \ rad$ ,  $\phi_2 = 0 \ rad$ ,  $\phi_3 = 0 \ rad$ .

En la Figura 4.37 observamos las respuestas angulares medidas en la base del manipulador para cada uno de los controladores, se aprecia un comportamiento similar en los instantes iniciales para los 3 controladores, la principal diferencia radica en el estado estacionario donde el controlador GPI + ESC se mantiene oscilando a lo largo de todo el tiempo de simulación.

En la Figura 4.38 observamos la respuesta angular del extremo del manipulador para cada uno de los controladores simulados, se observa un comportamiento similar al del ángulo en la base del manipulador mostrado en la Figura 4.37, en la Figura 4.36 se muestra una comparación entre el seguimiento en la base y el seguimiento en el extremo donde se observa que existe una relación entre el comportamiento de ambos seguimientos sin embargo, el seguimiento en el extremo es deficiente en comparación al medido en la base del manipulador, realizando un acercamiento de las respuestas angulares obtenemos las Figuras 4.39, 4.40.



Figura 4.36: Comparación entre el seguimiento en la base y el seguimiento en el extremo del manipulador flexible

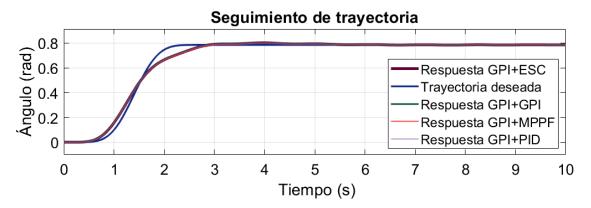


Figura 4.37: Seguimiento angular en la base para una trayectoria de regulación



Figura 4.38: Seguimiento angular del extremo para una trayectoria de regulación

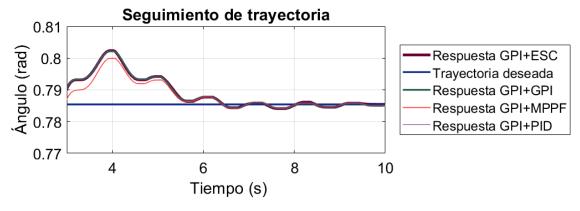


Figura 4.39: Acercamiento seguimiento angular en la base para una trayectoria de regulación

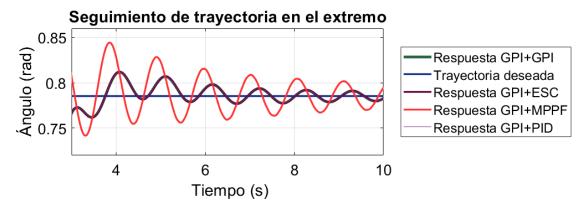


Figura 4.40: Acercamiento seguimiento angular del extremo para una trayectoria de regulación

En la Figura 4.41 la cual corresponde al error angular medido en la base del manipulador, se observa un comportamiento similar al seguimiento de la trayectoria presentado en la Figura 4.37, donde la señal correspondiente al controlador GPI + ESC se mantiene oscilando en el estado estacionario dentro de una región de  $(\pm 0.02 \ rad)$ , a diferencia de los controladores GPI + MPPF, GPI + GPI y GPI + PID que convergen a cero en un tiempo  $t=9 \ s$  de simulación.

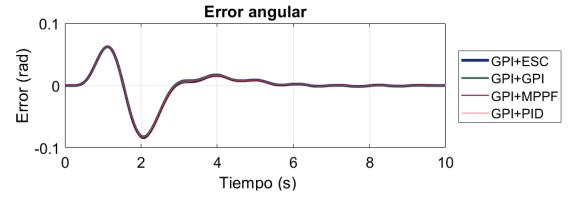


Figura 4.41: Error angular en la base para una trayectoria de regulación

En la Figura 4.42 tenemos el error angular en el extremo del manipulador, en comparación con el error angular en la base del manipulador las magnitudes son mayores, podemos observar que el error de los controladores GPI + GPI, GPI + PID y GPI + ESC se mantiene oscilando, en el caso del controlador GPI+ESC esto se le atribuye a que aún cuando las frecuencias de

las perturbaciones sinusoidales utilizadas en los lazos de ESC llegan a un cero del sistema en un tiempo t=5 s, reduciendo las vibraciones que se pueden presentar consecuencia de la dinámica flexible, la cancelación de dichas vibraciones y de la perturbación sinusoidal del ESC no es perfecta, resultando en vibraciones remanentes en la base del manipulador cuya magnitud ( $\pm 0.02~rad$ ) es similar en valores a la amplitud utilizada en las perturbaciones de los lazos de ESC (a=0.02), estas vibraciones se transmiten a lo largo del eslabón flexible y aumentan en magnitud manteniéndose en una región de  $\pm 0.05~rad$ , el error angular del control GPI + MPPF es mayor en el estado estacionario pero menor en los instantes iniciales.



Figura 4.42: Error angular en el extremo para una trayectoria de regulación

En las Figuras 4.43 y 4.44 se observa la segunda derivada de la deflexión medida para cada uno de los controladores simulados, a diferencia del caso donde la referencia es una sinusoidal que busca excitar las frecuencias naturales del sistema donde, la segunda derivada de deflexión resulto ser similar en magnitud para todos los controladores, para el caso de una trayectoria de regulación la segunda derivada de deflexión es similar para los controladores GPI + GPI y GPI + PID, siendo menor que la obtenida con el controlador GPI + ESC sobre todo en el transitorio y mayor la obtenida con el controlador GPI + MPPF alcanzando su pico máximo en un tiempo  $t=5\ s$ .

En la Figura 4.45 se observa la señal de control de cada uno de los controladores simulados, para todos los controladores observamos que se mantiene actuando de manera constante, las diferencias principales corresponden a los lazos de la segunda derivada de la deflexión debido a que el controlador de la dinámica rígida es el mismo en todos los casos.

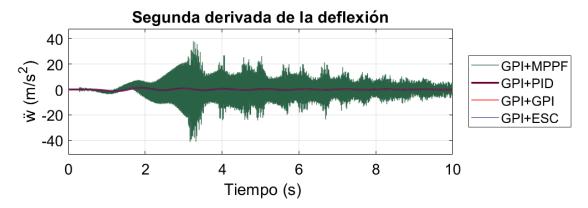


Figura 4.43: Segunda derivada de la deflexión para una trayectoria de regulación



Figura 4.44: Acercamiento segunda derivada de la deflexión para una trayectoria de regulación

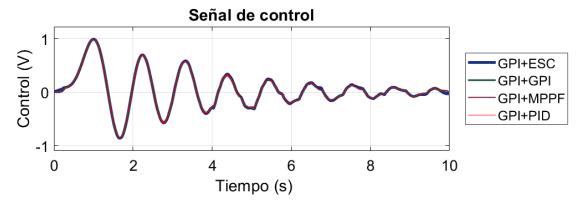


Figura 4.45: Señal de control para una trayectoria de regulación

A continuación se muestra la Tabla 4.3 que nos permite observar las diferencias entre distintos controladores presentados en esta sección, los cuales abordan el problema de seguimiento de trayectoria teniendo en cuenta la dinámica flexible del manipulador, todos los valores obtenidos en la tabla están basados en simulaciones que utilizan la herramienta Simscape de Simulink.

En la Tabla 4.3 presentamos el cálculo de la norma dos y norma infinito para una trayectoria sinusoidal para cada uno de los controladores simulados.

 $N_2$  $N_{\infty}$ C1 $6.5~\mathrm{Hz}$  $1.4~\mathrm{Hz}$  $1.4~\mathrm{Hz}$  $9.5~\mathrm{Hz}$  $6.5~\mathrm{Hz}$  $9.5~\mathrm{Hz}$ **GPI GPI** 0.1448 25.41 87.58 0.3776 13.77 35.09 **GPI** PID 0.1449 25.41 87.61 0.377613.77 35.09 **GPI** ESC 0.1365 25.46 88.47 0.414713.75 35.08

Tabla 4.3: Error segunda derivada de la deflexión travectoria sinusoidal  $(m/s^2)$ .

De la Tabla 4.3 podemos concluir que el controlador GPI de la dinámica rígida realiza el seguimiento de trayectoria en la base hasta la primera frecuencia natural del sistema, y todos los errores se encuentran dentro de un rango cercano al cero sin embargo, los lazos de control para la dinámica flexible afectan de manera significativa al seguimiento angular. El ESC resulta en la disminución del error de seguimiento angular para el primer modo de vibración, se observa que se disminuye la segunda derivada de la deflexión comparada a los controladores GPI y PID, específicamente en el caso de la trayectoria sinusoidal a  $1.4\ Hz$ .

En las Tablas 4.4 y 4.5 presentamos el cálculo de la norma dos y norma infinito en el caso de una trayectoria que inicia en el reposo y termina en reposo funcionando como seguimiento los primeros 3 s y regulación el resto de la simulación.

Tabla 4.4: Error angular en el extremo para una trayectoria de regulación (rad)

C1	C2	$N_2$	$N_{\infty}$
GPI	GPI	0.006129	0.08225
GPI	PID	0.006129	0.08227
GPI	ESC	0.006169	0.08236
GPI	MPPF	0.006429	0.08275

C1	C2	$N_2$	$N_{\infty}$
GPI	GPI	2.305	1.444
GPI	PID	2.305	1.444
GPI	ESC	2.332	1.427
GPI	MPPF	17.39	41.37

Tabla 4.5: Error segunda derivada de la deflexión trayectoria de regulación  $(m/s^2)$ 

El controlador GPI + ESC presentado en esta sección resuelve el problema de seguimiento de trayectorias teniendo en cuenta la dinámica flexible del manipulador, se modificó el ESC de manera que la perturbación sinusoidal no tiene una frecuencia constante, sino que involucra las frecuencias naturales y antirresonancias del sistema obtenidos en el capítulo 3, la sintonización del control GPI fue muy simple, modificando  $\epsilon$  en el polinomio auxiliar y escogiendo  $\xi$  para obtener una amortiguación crítica.

La sintonización del ESC requirió más prueba y error, siendo las ganancias de los filtros las más complicadas de escoger, modificar la fase de las perturbaciones sinusoidales resulta en la cancelación de la segunda derivada de la deflexión en caso del primer modo de vibración, modificar más de una fase produce mejoras cuando la frecuencia de resonancia corresponde a la frecuencia del lazo de ESC, pero no se logra una mejoría para las demás frecuencia naturales, modificar más de una fase resulta contraproducente para el resto de las trayectorias para las que no está sintonizado el controlador.

A continuación se presenta una Tabla donde se especifica que controladores fueron aplicados de manera experimental y cuales simulados en el orden que aparecen durante el capítulo 4.

Controlador			
$\overline{PD + PD}$	Experimental		
GPI	Simulación		
$\overline{\text{GPI} + \text{ESC}}$	Experimental		
Comparación de controladores	Simulación		

Tabla 4.6: Forma de aplicación de los controladores

### 4.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se presentan diferentes estrategias de control utilizando las propiedades de los modelos obtenidos en el capítulo 2, recordando que el problema de control a resolver es

el de seguimiento de trayectorias del extremo del manipulador flexible, se pide seguir una trayectoria suave que parte del reposo y termina en el reposo.

El primer esquema de control que se desarrolla es un control PD + PD con una realimentación de la aceleración en la punta el cual aborda el problema de regulación, teniendo en cuenta la dinámica flexible del manipulador, pero no resuelve el problema de seguimiento y se observa que el control PD no es el ideal para un sistema que no es de fase mínima. El segundo esquema de control aplica los principios de modelado donde las dinámicas rígida y flexible del sistema se encuentran interconectadas permitiendo diseñar un control GPI que controla solo la dinámica rígida del sistema con la ventaja de no tener que medir los estados internos del sistema garantizando estabilidad local de la dinámica rígida sin tomar en cuenta la dinámica flexible.

El tercer control se desarrolla bajo el esquema de Extremum Seeking en el cual la variable a minimizar es la deflexión elástica en la punta del manipulador, utilizando una perturbación sinusoidal donde la frecuencia utiliza las frecuencias naturales y las antirresonancias del sistema, de manera que se obtenga la mayor cantidad de información en los instantes iniciales y se apague en el estado estacionario del sistema minimizando las vibraciones, de esta manera no utilizamos el modelo de la dinámica flexible debido a la naturaleza del ESC, pero en la implementación se están tomando en cuenta los fenómenos no modelados correspondientes a las altas frecuencias, fase no mínima y subactuación del sistema. El cuarto control es una suma de los dos controladores anteriores agregando más lazos de control Extremum Seeking, con el fin de controlar cada uno de los principales modos de vibración.

En la última sección se comparan distintos controladores para los casos donde la referencia es una señal sinusoidal y una trayectoria punto a punto que parte del reposo y termina en el reposo.

Todos los esquemas de control diseñados fueron aplicados experimentalmente al manipulador flexible de un eslabón diseñado en el capítulo 3, con excepción del controlador GPI y las comparaciones entre controladores realizadas en la sección 4.3.4, las cuales se simularon utilizando las herramientas de Simscape y la librería de "control systems", el controlador GPI se simuló para obtener un diagrama de Nyquist donde se observa estabilidad del sistema linealizado en lazo cerrado.

# CAPÍTULO 5

#### CONCLUSIONES

En este capítulo finaliza el trabajo de tesis; se presentan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo del trabajo y el trabajo a futuro que podría desarrollarse a partir de este proyecto de tesis.

#### 5.1. Conclusiones del trabajo

El controlador Extremum Seeking presenta ventajas sobre otro tipo de controladores al no necesitar el modelo para su implementación y a su vez lidiar con sistemas complejos; el modificar la frecuencia de perturbación en la forma que se hizo ayuda a obtener suficiente información en el transitorio del sistema para lograr la minimización de la deflexión elástica del primer modo de vibración; esta forma de escoger la frecuencia de la perturbación del controlador Extremum Seeking realizando un cambio suave entre los polos y las antirresonancias del manipulador flexible no ha sido explorada antes en la literatura.

Comparado con el controlador PD + PD con realimentación de la aceleración, el controlador GPI es fácil de sintonizar, es robusto respecto a perturbaciones exógenas y endógenas al sistema y logra un seguimiento de la trayectoria de la dinámica rígida mientras estas se encuentren por debajo de la primera frecuencia natural del sistema, la adición de controladores GPI + ESC resuelve el problema de seguimiento de trayectoria teniendo en cuenta la dinámica flexible del sistema, los resultados presentados muestran una cancelación de las

vibraciones debidas al primer modo y deficiencias en cuanto al control del segundo y tercer modo, todo esto lo hace una alternativa de control viable para manipuladores flexibles pero inviable para tareas de alta precisión o trayectorias que exciten modos de alta frecuencia.

Para finalizar con las conclusiones, enfatizamos que el desempeño del controlador propuesto GPI + ESC, aplicado a un robot manipulador flexible de un eslabón es funcional para el caso de una trayectoria pick and place y para trayectorias que exciten el primer modo de vibración, como se puede apreciar en las gráficas del error de seguimiento del capítulo 4 y en las Tablas 4.4 y 4.5, a pesar de no requerir de un modelo para el diseño del ESC la implementación toma en cuenta fenómenos como la subactuación, fase no mínima e interacciones existentes entre la dinámica rígida y flexible, el sistema es capaz de seguir a la trayectoria deseada y compensar las vibraciones en el extremo libre del manipulador debidas al primer modo de vibración, reduciendo el problema inherente al ESC que requiere una perturbación periódica para funcionar, la cual no se puede filtrar del todo.

### 5.2. Trabajo futuro

Se plantea como trabajo a futuro:

- Demostrar estabilidad del controlador presentado en la sección 4.3.2;
- Estudiar el problema de control para trayectorias que excitan el segundo y tercer nodo de vibración;
- Analizar el caso de un robot manipulador flexible en tres dimensiones para extender la región de trabajo;
- Examinar, estudiar y probar el problema de control de fuerza en manipuladores flexibles con el fin de extender las tareas complejas que el robot puede realizar como operaciones de ensamblaje y control de colisión, que permite al robot colaborar de forma segura con humanos.

## APÉNDICE A

## GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

Para robots industriales una manera común de generar el movimiento deseado es utilizando el *flex pendant* para llevarlo con el movimiento deseado a través de la trayectoria y luego ejecutar el modo *playback*.

Para nuestro caso consideramos movimientos punto a punto, En este caso requerimos planear la trayectoria del robot; ésta esta especificada a partir de un punto inicial  $\theta(0)$  y un punto final  $\theta(t_f)$ , en algunas ocasiones tiene restricciones a lo largo de la trayectoria como pueden ser valores iniciales de velocidad o aceleración, en cualquier caso tenemos un número ilimitado de trayectorias que pueden cumplir con un número finito de restricciones.

Es por todo esto que es común escoger trayectorias de una familia finitamente parametrizada (polinomios de orden n). Para resolver nuestro caso debemos encontrar una trayectoria que conecte un punto inicial a uno final mientras cumple una serie de restricciones de velocidad y aceleración; Por lo tanto definimos  $\theta(t)$  como una variable articular escalar y procedemos a restringir la trayectoria en el tiempo inicial:

$$\theta(t_0) = \theta_0 \tag{A.1}$$

$$\dot{\theta}(t_0) = 0$$

$$\ddot{\theta}(t_0) = 0$$

$$\theta^{(3)}(t_0) = 0$$

APÉNDICE A 96

Y los valores en tiempo final que deseamos obtener:

$$\theta(t_f) = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 0$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = 0$$

$$\theta^{(3)}(t_f) = 0$$
(A.2)

donde las restricciones (A.1) y (A.2) pueden ser satisfechas por un polinomio de séptimo orden con la forma:

$$\theta(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5 + \alpha_6 t^6 + \alpha_7 t^7$$
(A.3)

La velocidad deseada esta dada por:

$$\dot{\theta}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + 5\alpha_5 t^4 + 6\alpha_6 t^5 + 7\alpha_7 t^6 \tag{A.4}$$

Y la aceleración queda representada por:

$$\ddot{\theta}(t) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + 20\alpha_5 t^3 + 30\alpha_6 t^4 + 42\alpha_7 t^5 \tag{A.5}$$

Combinando las restricciones (A.1) y (A.2) junto con las ecuaciones (A.3), (A.4) y (A.5) nos entrega el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\theta(0) = \alpha_0 + \alpha_1 t_0 + \alpha_2 t_0^2 + \alpha_3 t_0^3 + \alpha_4 t_0^4 + \alpha_5 t_0^5 + \alpha_6 t_0^6 + \alpha_7 t_0^7$$
(A.6)

$$\theta(t_f) = \alpha_0 + \alpha_1 t_f + \alpha_2 t_f^2 + \alpha_3 t_f^3 + \alpha_4 t_f^4 + \alpha_5 t_f^5 + \alpha_6 t_f^6 + \alpha_7 t_f^7$$
(A.7)

$$\dot{\theta}(0) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t_0 + 3\alpha_3 t_0^2 + 4\alpha_4 t_0^3 + 5\alpha_5 t_0^4 + 6\alpha_6 t_0^5 + 7\alpha_7 t_0^6 \tag{A.8}$$

$$\dot{\theta}(t_f) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t_f + 3\alpha_3 t_f^2 + 4\alpha_4 t_f^3 + 5\alpha_5 t_f^4 + 6\alpha_6 t_f^5 + 7\alpha_7 t_f^6 \tag{A.9}$$

$$\ddot{\theta}(0) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t_0 + 12\alpha_4 t_0^2 + 20\alpha_5 t_0^3 + 30\alpha_6 t_0^4 + 42\alpha_7 t_0^5 \tag{A.10}$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t_f + 12\alpha_4 t_f^2 + 20\alpha_5 t_f^3 + 30\alpha_6 t_f^4 + 42\alpha_7 t_f^5$$
(A.11)

$$\theta^{(3)}(0) = 6\alpha_3 + 24\alpha_4 t_0 + 60\alpha_5 t_0^2 + 120\alpha_6 t_0^3 + 210\alpha_7 t_0^4$$
(A.12)

97 APÉNDICE A

$$\theta^{(3)}(t_f) = 6\alpha_3 + 24\alpha_4 t_f + 60\alpha_5 t_f^2 + 120\alpha_6 t_f^3 + 210\alpha_7 t_f^4$$
(A.13)

Las ocho ecuaciones anteriores pueden ser combinadas en una sola ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 & t_0^6 & t_0^7 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 & 6t_0^5 & 7t_0^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 & 30t_0^4 & 42t_0^5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24t_0 & 60t_0^2 & 120t_0^3 & 210t_0^4 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 & t_f^6 & t_f^7 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 & 6t_f^5 & 7t_f^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 & 30t_f^4 & 42t_f^5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24t_f & 60t_f^2 & 120t_f^3 & 210t_f^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & (t_0) \\ \dot{\theta} & (t_f) \\ \dot{\theta} & (t_$$

El determinante de la matriz de coeficientes es igual a  $(t_f - t_0)^8$  por lo tanto la ecuación (A.14) siempre tiene una solución única mientras el intervalo utilizado para la ejecución de la trayectoria sea mayor a cero.

# APÉNDICE B

#### FUNCIONES DE MATLAB

#### B.1. Polinomio de Bézier

APÉNDICE B 100

```
20 tau7=tau*tau6;
$\pmu \tau8=\tau*\tau7;
r1 = 12870;
\frac{1}{24} r2 = 91520;
r_3 = 288288;
r_4 = 524160;
\frac{1}{27} r5=600600;
_{28} r6=443520;
r7 = 205920;
30 \text{ r8} = 54912;
31 \text{ r9} = 6435;
33 fr=r1-r2*tau+r3*tau2-r4*tau3+r5*tau4-r6*tau5+r7*tau6-r8*tau7+r9*tau8;
34 \text{ z} 1 \text{st} 1 = \text{z} 1 \text{in};
35 \text{ z1stt} = \text{z1in} + \text{z1dif} * \text{tau8} * \text{fr};
37 \text{ z} 1 \text{st} 2 = \text{z} 1 \text{f};
39 \text{ z} 1 \text{std} 1 = 0;
40 frd2=14*r7*tau6-15*r8*tau7+16*r9*tau8;
41 frd=8*r1-9*r2*tau+10*r3*tau2-11*r4*tau3+12*r5*tau4-13*r6*tau5+frd2;
42 z1stdt= z1dif*tau7*frd/delt;
44 z 1 std2 = 0;
46 \text{ z} 1 \text{st} dd1 = 0;
47 \operatorname{frdd} 2 = -12*13*r6*tau5 + 13*14*r7*tau6 - 14*15*r8*tau7 + 15*16*r9*tau8;
_{48} \, \mathrm{frdd} = 7*8*r1 - 8*9*r2*tau + 9*10*r3*tau2 - 10*11*r4*tau3 + 11*12*r5*tau4 + frdd2;
49 z1stddt = z1dif*tau6*frdd/delt^2;
51 \text{ z} 1 \text{st} dd2 = 0;
z_{1} z_{1
_{54} frddd3=-13*14*15*r8*tau7+14*15*16*r9*tau8;
_{55} frddd2=10*11*12*r5*tau4-11*12*13*r6*tau5+12*13*14*r7*tau6+frddd3;
_{96} frddd=6*7*8*r1-7*8*9*r2*tau+8*9*10*r3*tau2-9*10*11*r4*tau3+frddd2;
57 z1st3dt = z1dif*tau5*frddd/delt^3;
$8 \ z1st3d2 = 0;
59
60 \text{ z} 1 \text{st} 4 \text{d} 1 = 0;
\phi_1 fr4d3=11*12*13*14*r7*tau6-12*13*14*15*r8*tau7+13*14*15*16*r9*tau8;
\phi_2 fr4d2=-8*9*10*11*r4*tau3+9*10*11*12*r5*tau4-10*11*12*13*r6*tau5+fr4d3;
63 \text{ fr} 4d = 5*6*7*8*r1 - 6*7*8*9*r2*tau + 7*8*9*10*r3*tau2 + fr 4d2;
\mathbf{z}_{4} \mathbf{z}_{1}\mathbf{s}_{4}\mathbf{d}\mathbf{t} = \mathbf{z}_{1}\mathbf{d}_{1}\mathbf{f}_{1}\mathbf{t}_{2}\mathbf{d}_{4}\mathbf{t}_{1}\mathbf{d}_{2}\mathbf{t}_{1}\mathbf{d}_{3}\mathbf{t}_{4}
65 \text{ z} 1 \text{st} 4 \text{d} 2 = 0;
```

101 APÉNDICE B

```
67 \text{ z} 1 \text{st} 5 \text{d} 1 = 0;
  68 \text{ fr} 5 \text{ d} 4 = -11 * 12 * 13 * 14 * 15 * r8 * tau7 + 12 * 13 * 14 * 15 * 16 * r9 * tau8;
  69 \text{ fr} 5 \text{ d} 3 = -9*10*11*12*13*r6*tau5+10*11*12*13*14*r7*tau6+fr5 d4;
  fo fr 5d2 = -7*8*9*10*11*r4*tau3 + 8*9*10*11*12*r5*tau4 + fr 5d3;
  f_1 \text{ fr} 5d = 120*7*8*r1 - 210*8*9*r2*tau + 42*8*9*10*r3*tau2 + fr5d2;
   t_2 z1st5dt = z1dif*tau3*fr5d/delt^5;
  t_3 z 1 st 5 d2 = 0;
  75 \text{ z} 1 \text{st} 6 \text{d} 1 = 0;
  f_6 \text{ fr} 6 d4 = -10*11*12*13*14*15*r8*tau7+11*12*13*14*15*16*r9*tau8;
  77 \text{ fr} 6d3 = -8*9*10*11*12*13*r6*tau5+9*10*11*12*13*14*r7*tau6+fr6d4;
  f_8 \text{ fr} 6d2 = -6*7*8*9*10*11*r4*tau3 + 7*8*9*10*11*12*r5*tau4 + fr6d3;
   f_9 \text{ fr} 6d = 360*7*8*r1 - 840*8*9*r2*tau + 210*8*9*10*r3*tau2 + fr 6d2;
  so z1st6dt = z1dif*tau2*fr6d/delt^6;
  \pm 1 \text{ z} 1 \text{st} 6 d2 = 0;
  82
  s_3 z_1 s_1 t_7 d_1 = 0;
   \$_5 \ \operatorname{fr} 7 \operatorname{d} 3 = -8 * 9 * 10 * 11 * 12 * 13 * 11 * \operatorname{r} 6 * \operatorname{tau} 5 + 9 * 10 * 11 * 12 * 13 * 14 * 12 * \operatorname{r} 7 * \operatorname{tau} 6 + \operatorname{fr} 7 \operatorname{d} 4 \ ; 
  fr = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} +
  fr7d = 360*6*7*8*r1 - 840*7*8*9*r2*tau + 210*8*8*9*10*r3*tau 2 + fr7d 2:
  ss z1st7dt = z1dif*tau2*fr7d/delt^7;
  s_9 z 1 st 7 d2 = 0;
  91 if (t<t1)
                    ys=z1st1;
  92
  93
                    vsd=z1std1;
                    vsdd=z1stdd1;
                    vs3d=z1st3d1;
                    ys4d=z1st4d1;
         elseif (t < t2)
                                                   ys=z1stt;
100
                                                   ysd=z1stdt;
101
                                                   ysdd=z1stddt;
                                                   ys3d=z1st3dt;
102
                                                   ys4d=z1st4dt;
103
104
                     _{
m else}
                                                   ys=z1st2;
105
106
                                                   vsd=z1std2;
                                                   ysdd=z1stdd2;
107
108
                                                   vs3d=z1st3d2;
                                                   ys4d=z1st4d2;
109
110 end
```

## COMPONENTES ELECTRÓNICOS

Para la parte electrónica del sistema se diseño una placa de distribución (vease Figura C.1), que se encarga de recibir los voltajes de las distintas fuentes y distribuirlos a sus respectivas terminales así como las señales de control del sistema que entrega la tarjeta de adquisición de datos Sensoray 626, cuyo diagrama se muestra en la Figura C.2.

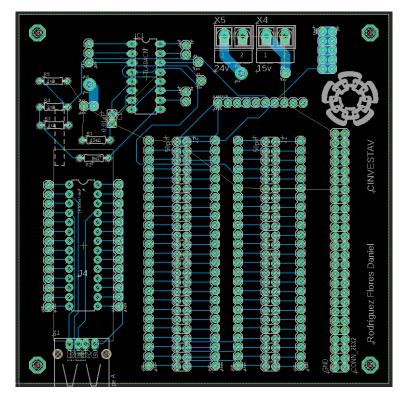


Figura C.1: Placa de distribución

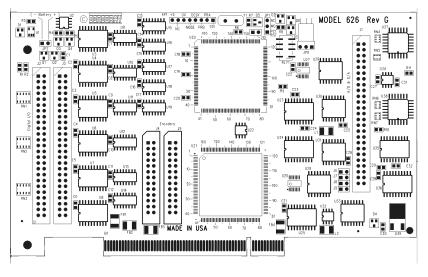


Figura C.2: Diagrama Sensoray

Uno de los circuitos contenidos en la placa de distribución es el generador de PWM a alta frecuencia, basado en el integrado TL494 bajo la configuración mostrada en la Figura C.3, de manera que nos permita conjuntar las señales de alta frecuencia entregadas por la computadora con el resto de los sistemas electrónicos, esto se hace para asegurar que se cumple la frecuencia de muestreo escogida de 2000Hz; A la salida se utilizo un divisor de voltaje para llevar la señal de 15 V a un voltaje TTL compatible con el Puente H.

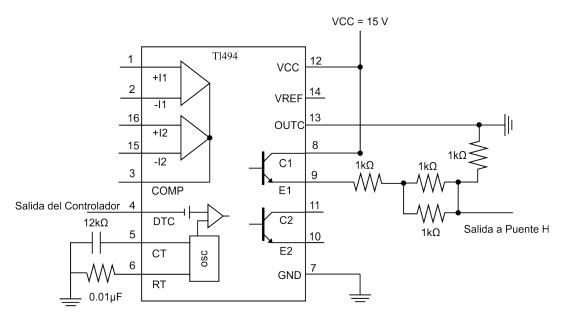


Figura C.3: Configuración de PWM (TL494) utilizada

Los parámetros a los que opera el integrado TL494 se muestran en el Cuadro C.1, con esto comprobamos que podemos utilizarlo de manera trivial para la aplicación requerida ya que estamos trabajando dentro de todos rangos permitidos.

Tabla C.1: Parámetros TL494

Parámetro	Mínimo	Máximo	${f Unidades}$
Voltaje de entrada	7	40	V
Voltaje de salida del colector	-	40	V
Corriente de salida del colector	-	200	mA
Frecuencia del oscilador	1	300	kHz
Capacitor	0.47	10000	nF
Resistencia	1.8	500	kΩ
Temperatura de operación	0	70	$^{\circ}\mathrm{C}$

Las salidas del integrado antes mencionado son enviadas al puente H con matricula VNH5019A-E cuyas especificaciones de muestran en el Cuadro C.2

Tabla C.2: Especificaciones driver VNH5019A-E

Especificaciones VNH5019A-E
Tecnología compatible con 3 $V$ CMOS
Protección contra variación de voltaje
Protección térmica
Protección contra cortos
Limitación de corriente
Bajo consumo de poder en reposo
Operación del PWM hasta $20 \ khz$
Protección contra perdida de VCC o GND
Sensor de corriente proporcional a la corriente consumida por el motor
Salida protegida contra cortos ya sea en GND o VCC

En la Figura C.4, se tiene el diagrama de conexión estándar para el Puente H utilizado.

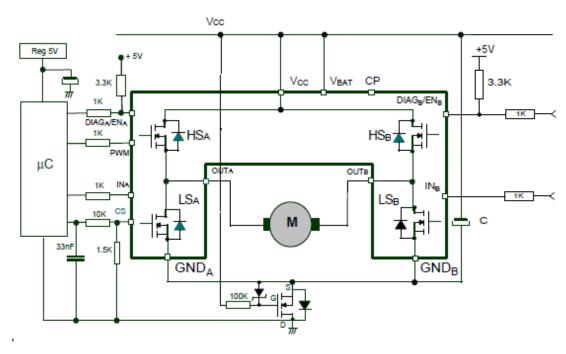
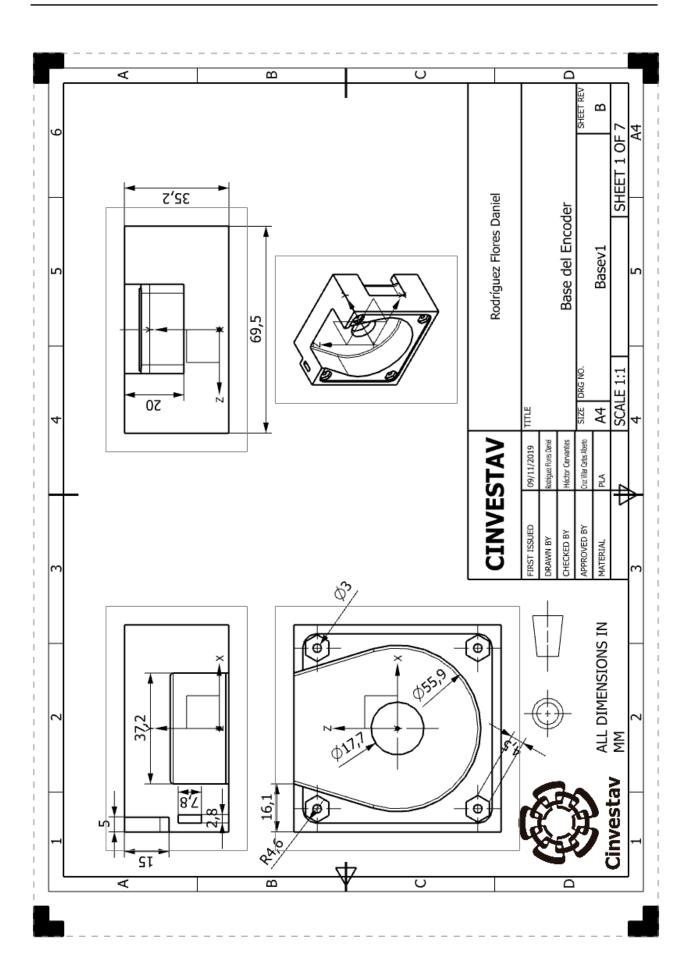
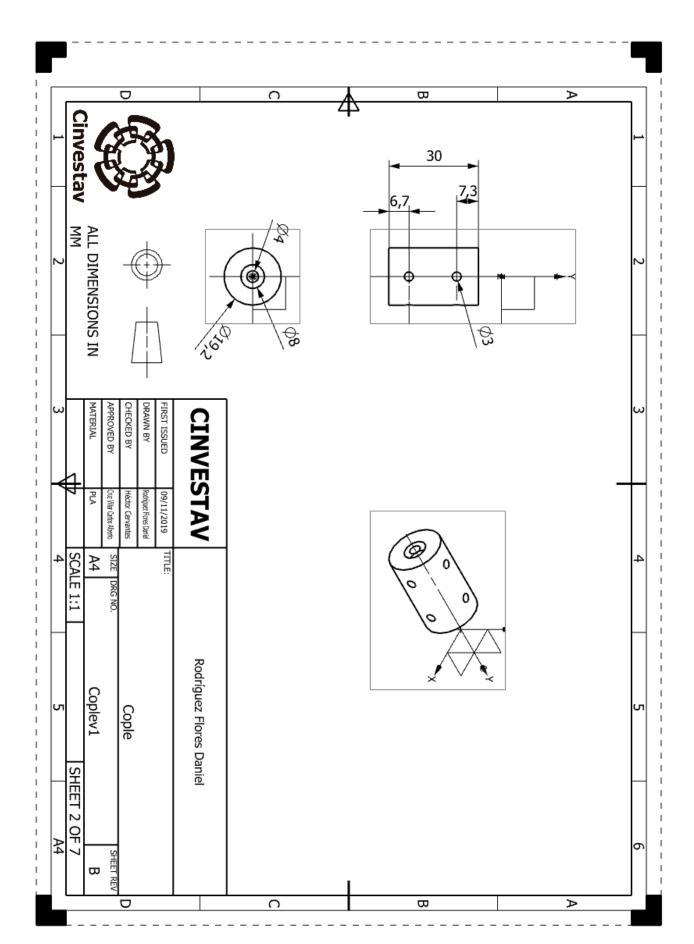


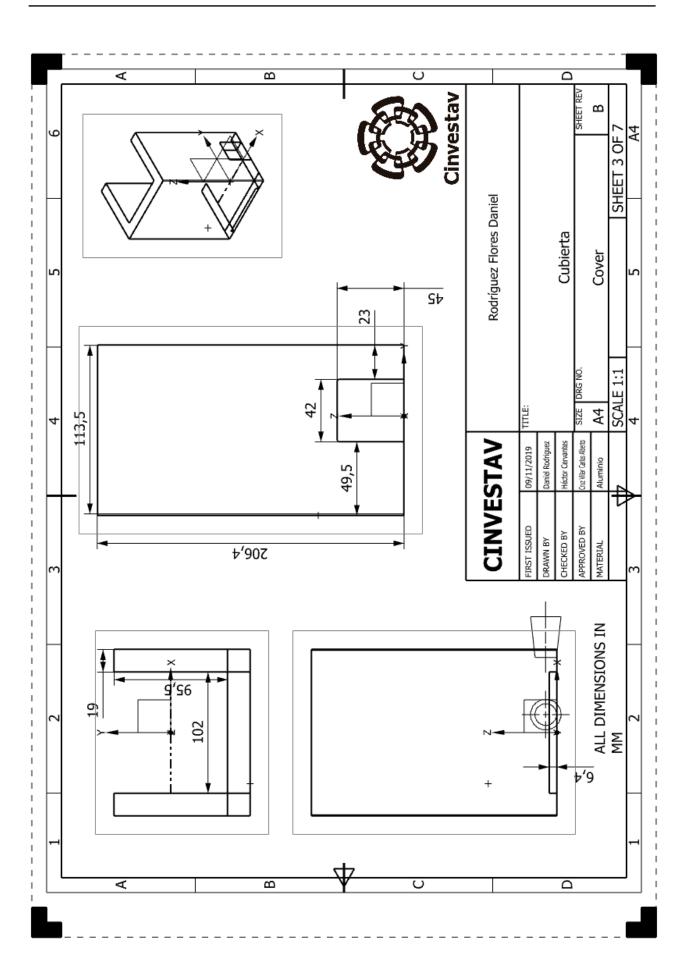
Figura C.4: Diagrama puente H (VNH5019) [40]

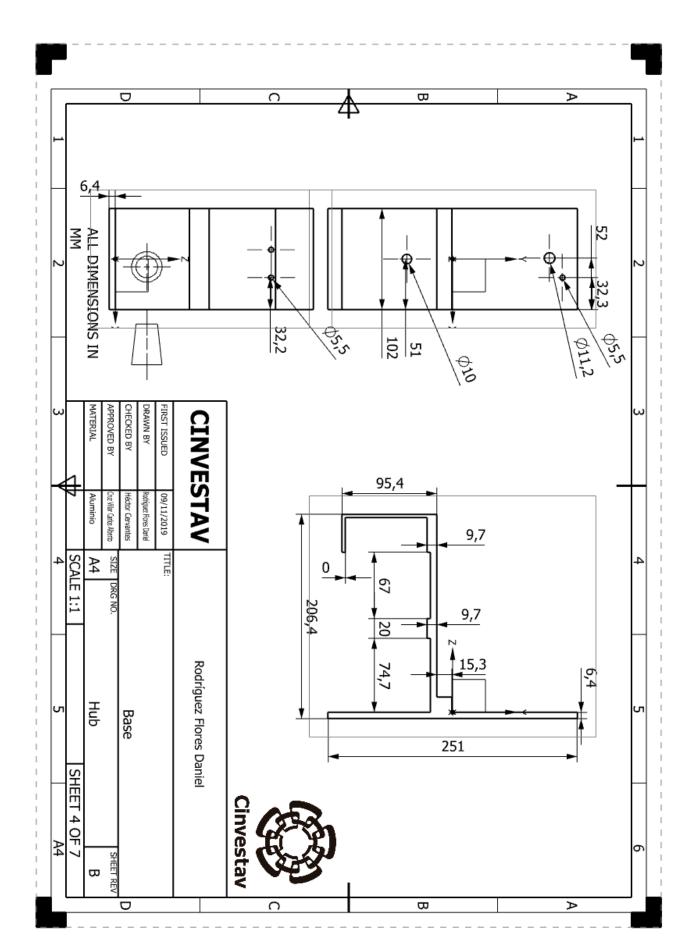
Para los sensores utilizados en el prototipo del robot manipulador de un grado de libertad se escogieron: un encoder H6 de US Digital el cual mide 1024 pulsos por revolución y está valorado para su uso hasta  $10,000 \ rpm$ , con una temperatura de operación entre -40 y 100 °C y una aceleración máxima de  $100,000 \ rpm/s^2$ , el acelerómetro escogido es el ADXL335 de Analog Devices el cual es un acelerómetro analógico de 3 ejes con un ancho de banda de  $0.5 \ Hz$  a  $1600 \ Hz$  en los ejes X, Y y  $0.5 \ Hz$  a  $550 \ Hz$  en el eje Z que soporta una fuerza centrífuga relativa de  $10 \ g$ .

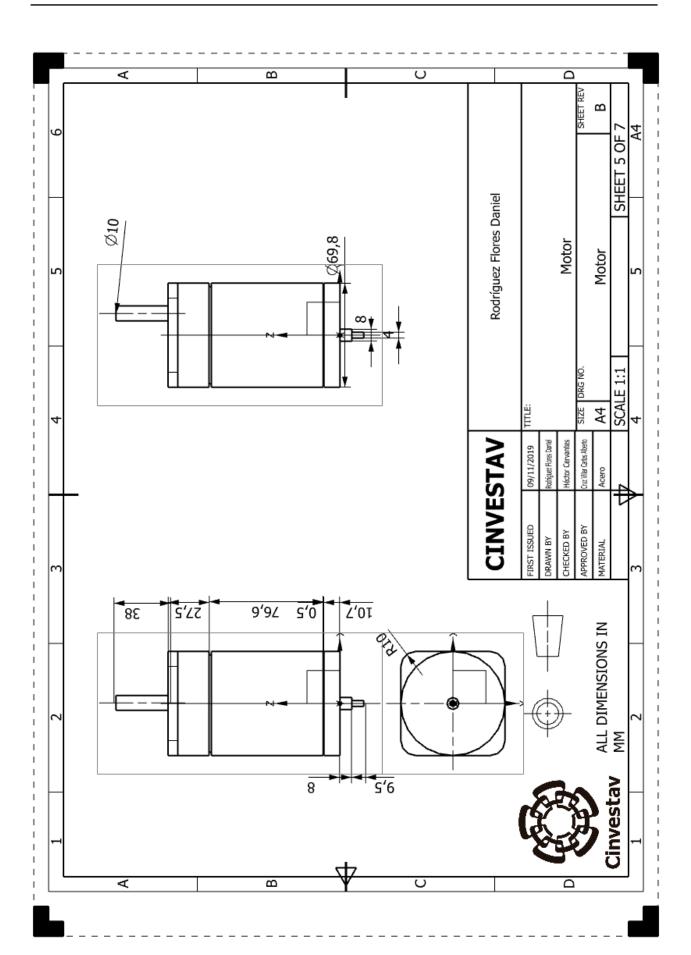
PLANOS DE LA PLATAFORMA

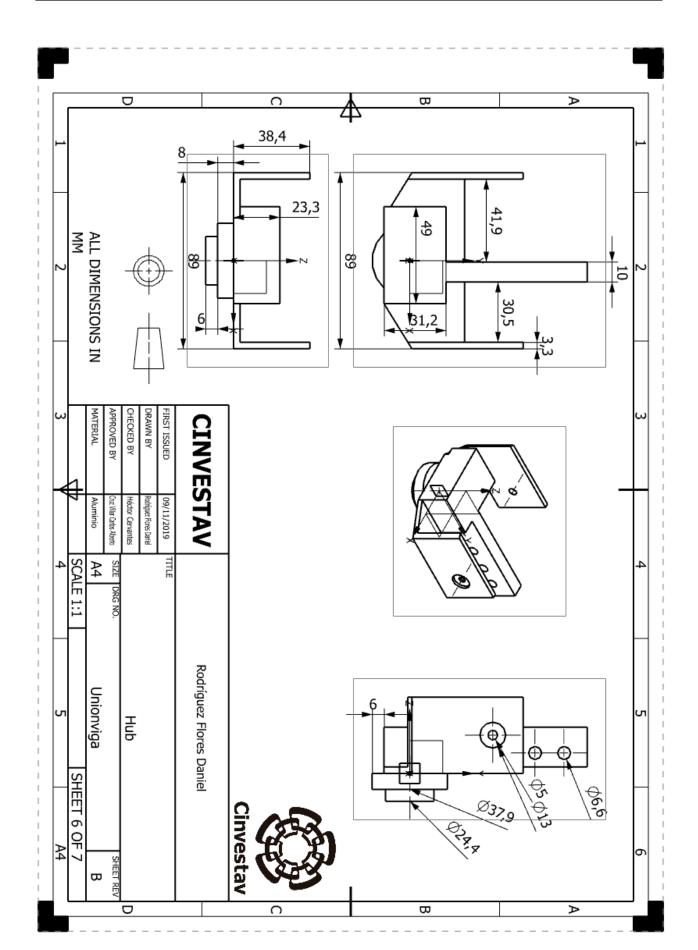


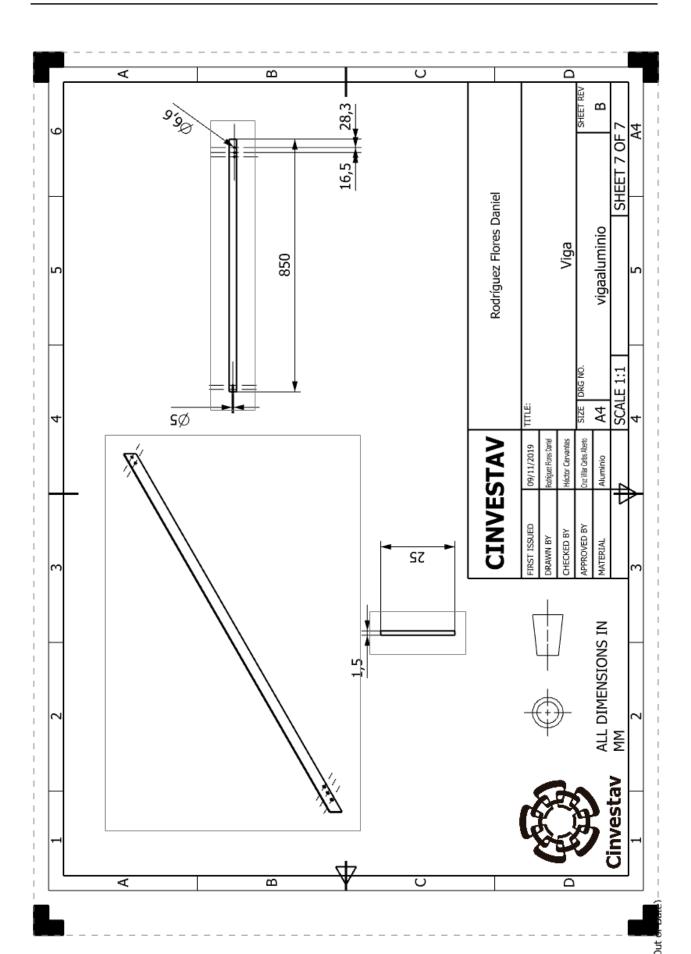












#### DIGITAL 4X Ø.125[3.18] **H6** Ball Bearing Optical Shaft Encoder $\emptyset.2498^{+.0000}_{-.0004} \left[ 6.34^{0}_{-0.01} \right] -$ R.180 [4.57] MATES TO CON-FC5 .025 SQUARE PINS Vancouver, Washington 98684, USA 1400 NE 136th Avenue Ø.500 [12.70] **-**► *ϕ* .698 [17.73] **→** .516 [13.11] SINGLE-ENDED VERSION φ. **←** 2.121 [53.88] **→ (2)** -2.500[63.50]PN 1 φ φ info@usdigital.com www.usdigital.com -1.061 [26.94] -1.250 [31.75] -1.700 [43.18] -1.730 [43.94] -1.250 31.75 -1.061 26.94 Ö -.990 [25.15] -.778 [19.76] .018 [0.44] .766 19.46 .125[3.18] Local: 360.260.2468 Toll-free: 800.736.0194 MATES TO CON-FC10: .025 SQUARE PINS 1.890 [48.01] **DIFFERENTIAL VERSION** <del>-</del> **(47) VERSION SHOWN** SINGLE-ENDED H φ PIN 2 PIN 1

RELEASE DATE: 08/05/2019

UNITS: INCHES [MM]
METRIC SHOWN FOR REFERENCE ONLY

# APÉNDICE E

PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

5/12/2019 Alclad Aluminum 6081-O

#### Alclad Aluminum 6061-O

Categories: Metal; Nonferrous Metal; Aluminum Alloy; 6000 Series Aluminum Alloy

Material Data points with the AA note have been provided by the Aluminum Association, Inc. and are NOT FOR

Notes: DESIGN.

Composition Notes: Composition for AA 6061 (not Alclad 6061 specifically). Composition information provided by the Aluminum Association and is not for design.

Key Words: UNS A86061; al6061, Alclad 6061-O; Alclad 6061-O; Al6061-O Vendors: Click here to view all available suppliers for this material.

Please click here if you are a supplier and would like information on how to add your listing to this

material.

Physical Properties	Metric	English	Comments
Density	2.70 g/cc	0.0975 lb/in³	For AA6061 (Not Alclad)
Mechanical Properties	Metric	English	Comments
Tensile Strength, Ultimate	117 MPa	17000 psi	AA; Typical
Tensile Strength, Yield	48.3 MPa	7000 psi	AA; Typical
Elongation at Break	25 % @Thickness 1.59 mm (	25 % Thickness 0.0825 in	AA; Typical
Modulus of Elasticity	68.9 GPa	10000 ksi	AA; Typical; Average of tension and compression. Compression modulus is about 2% greater than tensile modulus.
Shear Strength	75.8 MPa	11000 psi	AA; Typical
Processing Properties	Metric	English	Comments
Solution Temperature	529 °C	985 °F	
Aging Temperature	160 °C	320 °F	Rolled or drawn products; hold at temperature for 18 hr
	177 °C	350 °F	Extrusions or forgings; hold at temperature for 8

Component Elements Properties	Metric	English	Comments
Aluminum, Al	95.8 - 98.6 %	95.8 - 98.6 %	As remainder
Chromium, Cr	0.04 - 0.35 %	0.04 - 0.35 %	
Copper, Cu	0.15 - 0.40 %	0.15 - 0.40 %	
Iron, Fe	<= 0.70 %	<= 0.70 %	
Magnesium, Mg	0.80 - 1.2 %	0.80 - 1.2 %	
Manganese, Mn	<= 0.15 %	<= 0.15 %	
Other, each	<= 0.05 %	<= 0.05 %	
Other, total	<= 0.15 %	<= 0.15 %	
Silicon, Si	0.40 - 0.80 %	0.40 - 0.80 %	
Titanium, Ti	<= 0.15 %	<= 0.15 %	
Zinc, Zn	<= 0.25 %	<= 0.25 %	

#### References for this datasheet.

Some of the values displayed above may have been converted from their original units and/or rounded in order to display the information in a consistent format. Users requiring more precise data for scientific or engineering calculations can click on the property value to see the original value as well as raw conversions to equivalent units. We advise that you only use the original value or one of its raw conversions in your calculations to minimize rounding error. We also ask that you refer to MatWeb's terms of use regarding this information. Click here to view all the property values for this datasheet as they were originally entered into MatWeb.

- [1] M. A. Ahmad, "Vibration and input tracking control of flexible manipulator using lqr with non-collocated pid controller," in 2008 Second UKSIM European Symposium on Computer Modeling and Simulation, pp. 40–45, IEEE, 2008.
- [2] H. Kanoh, S. Tzafestas, H. G. Lee, and J. Kalat, "Modelling and control of flexible robot arms," in 1986 25th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1866–1870, IEEE, 1986.
- [3] R. H. Cannon Jr and E. Schmitz, "Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 3, no. 3, pp. 62–75, 1984.
- [4] G. Hastings and W. Book, "A linear dynamic model for flexible robotic manipulators," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 7, no. 1, pp. 61–64, 1987.
- [5] J. Becedas, V. Feliu, and H. Sira-Ramírez, "GPI control for a single-link flexible manipulator," in *International Conference on Modeling, Simulation and Control (ICMSC'07)*, pp. 24–26, 2007.
- [6] J. Martins, Z. Mohamed, M. Tokhi, J. S. Da Costa, and M. A. Botto, "Approaches for dynamic modelling of flexible manipulator systems," *IEE Proceedings-Control Theory* and Applications, vol. 150, no. 4, pp. 401–411, 2003.
- [7] M. O. Tokhi and A. K. Azad, "Design and development of an experimental flexible manipulator system," *Robotica*, vol. 15, no. 3, pp. 283–292, 1997.

[8] D. M. Rovner and R. H. Cannon Jr, "Experiments toward on-line identification and control of a very flexible one-link manipulator," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 4, pp. 3–19, 1987.

- [9] Z. Mohamed, J. Martins, M. Tokhi, J. S. Da Costa, and M. Botto, "Vibration control of a very flexible manipulator system," *Control Engineering Practice*, vol. 13, no. 3, pp. 267–277, 2005.
- [10] Z.-H. Luo and B.-Z. Guo, "Shear force feedback control of a single-link flexible robot with a revolute joint," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 1, pp. 53–65, 1997.
- [11] R.-J. Wai and M.-C. Lee, "Intelligent optimal control of single-link flexible robot arm," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, no. 1, pp. 201–220, 2004.
- [12] K. L. Hillsley and S. Yurkovich, "Vibration control of a two-link flexible robot arm," *Dynamics and Control*, vol. 3, no. 3, pp. 261–280, 1993.
- [13] B. Subudhi and A. S. Morris, "Dynamic modelling, simulation and control of a manipulator with flexible links and joints," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 41, no. 4, pp. 257–270, 2002.
- [14] X. Zhang, W. Xu, S. S. Nair, and V. Chellaboina, "Pde modeling and control of a flexible two-link manipulator," *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 13, no. 2, pp. 301–312, 2005.
- [15] A. A. Mohammad O. Tokhi, *Flexible Robot Manipulators*. Institution of Engineering and Technology, 2017.
- [16] A. Bajo, R. E. Goldman, L. Wang, D. Fowler, and N. Simaan, "Integration and preliminary evaluation of an insertable robotic effectors platform for single port access surgery," in 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3381–3387, IEEE, 2012.
- [17] H. Rahimi and M. Nazemizadeh, "Dynamic analysis and intelligent control techniques for flexible manipulators: a review," *Advanced Robotics*, vol. 28, no. 2, pp. 63–76, 2014.
- [18] C. T. Kiang, A. Spowage, and C. K. Yoong, "Review of control and sensor system of flexible manipulator," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 77, no. 1, pp. 187–213, 2015.
- [19] H. Sira Ramirez, Active disturbance rejection control of dynamic systems: a flatness based approach. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2017.

[20] K. B. Ariyur, Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control. Wiley-Blackwell, 2003.

- [21] P. Binetti, K. B. Ariyur, M. Krstic, and F. Bernelli, "Formation flight optimization using extremum seeking feedback," *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 26, no. 1, pp. 132–142, 2003.
- [22] R. Leyva, C. Alonso, I. Queinnec, A. Cid-Pastor, D. Lagrange, and L. Martinez-Salamero, "Mppt of photovoltaic systems using extremum-seeking control," *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 42, no. 1, pp. 249–258, 2006.
- [23] W. Chatlatanagulchai, S. Chotana, and C. Prutthapong, "Extremum-seeking gain-scheduled adaptive input shaping applied to flexible-link robot," *Kasetsart Journal:* Natural Science, vol. 49, pp. 451–464, 2015.
- [24] L. Meirovitch, "Analytical methods in vibrations.," 1967.
- [25] W. H. Jinkun Liu, Distributed Parameter Modeling and Boundary Control of Flexible Manipulators. Springer-Verlag GmbH, 2018.
- [26] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, "Classical mechanics," 2002.
- [27] F. S. Tse, I. E. Morse, and R. T. Hinkle, *Mechanical vibrations*. Allyn and Bacon Boston, 1963.
- [28] L. Meirovitch, Methods of Analytical Dynamics (Dover Civil and Mechanical Engineering). Dover Publications, 2010.
- [29] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations Laboratory Manual*. Year, Edition Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [30] J. F. Peza-Solis, R. Castro-Linares, and G. Silva-Navarro, "Cascade control for a rigid-flexible two-link robot using sliding modes," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 13492–13497, 2011.
- [31] M. O. Tokhi, Active Sound and Vibration Control. Institution of Engineering and Technology, 2002.
- [32] S. Yurkovich, F. E. Pacheco, and A. P. Tzes, "On-line frequency domain information for control of a flexible-link robot with varying payload," *IEEE Transactions on Automatic* Control, vol. 34, no. 12, pp. 1300–1304, 1989.
- [33] T. Jiang, J. Liu, and W. He, "Boundary control for a flexible manipulator based on infinite dimensional disturbance observer," *Journal of sound and Vibration*, vol. 348, pp. 1–14, 2015.

[34] C. D. Rahn, Mechatronic Control of Distributed Noise and Vibration: A Lyapunov Approach. Springer, 2013.

- [35] K. Krstic, Kanellakopoul, Nonlinear Control Design. John Wiley & Sons, 1995.
- [36] M. Guay and T. Zhang, "Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties," *Automatica*, vol. 39, no. 7, pp. 1283–1293, 2003.
- [37] K. Ogata and Y. Yang, Modern control engineering, vol. 4. Prentice hall India, 2002.
- [38] H. K. Khalil and J. W. Grizzle, *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [39] J. Shan, H.-T. Liu, and D. Sun, "Slewing and vibration control of a single-link flexible manipulator by positive position feedback (ppf)," *Mechatronics*, vol. 15, no. 4, pp. 487– 503, 2005.
- [40] STMicroelectronics, VNH5019A-E Automotive fully integrated H-bridge motor driver, 2013.
- [41] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, vol. 1. wiley New York, 1978.
- [42] B. Chapnik, G. R. Heppler, J. D. Aplevich, et al., "Modeling impact on a one-link flexible robotic arm," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 4, pp. 479–488, 1991.
- [43] M. Chioua, B. Srinivasan, M. Perrier, and M. Guay, "Effect of excitation frequency in perturbation-based extremum seeking methods," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 40, no. 5, pp. 123–128, 2007.
- [44] M. Krstic and H.-H. Wang, "Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems," Automatica, vol. 36, no. 4, pp. 595–601, 2000.
- [45] M. K. Shu-Jun Liu, Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking. Springer-Verlag GmbH, 2012.
- [46] A. L. Zuyev, Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements (Lecture Notes in Control and Information Sciences Book 458). Springer, 2014.
- [47] F. Kappel, K. Kunisch, and W. Schappacher, Control theory for distributed parameter systems and applications, vol. 54. Springer, 1983.

[48] W. Fei-Yue, Advanced Studies Of Flexible Robotic Manipulators: Modeling, Design, Control And Applications. World Scientific, 2003.

- [49] K. J. Åström and B. Wittenmark, Adaptive control. Courier Corporation, 2013.
- [50] M. K. Alexander Scheinker, *Model-Free Stabilization by Extremum Seeking*. Springer-Verlag GmbH, 2016.
- [51] M. J. Balas, "Finite-dimensional controllers for linear distributed parameter systems: exponential stability using residual mode filters," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 133, no. 2, pp. 283–296, 1988.
- [52] B. Al-Bedoor and A. Almusallam, "Dynamics of flexible-link and flexible-joint manipulator carrying a payload with rotary inertia," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, no. 6, pp. 785–820, 2000.
- [53] D. DeHaan and M. Guay, "Extremum-seeking control of state-constrained nonlinear systems," *Automatica*, vol. 41, no. 9, pp. 1567–1574, 2005.
- [54] H. Yu and Ü. Özgüner, "Adaptive tracking control via extremum-seeking method," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 38, no. 1, pp. 259–264, 2005.
- [55] Y. Tan, D. Nešić, and I. Mareels, "On non-local stability properties of extremum seeking control," *Automatica*, vol. 42, no. 6, pp. 889–903, 2006.
- [56] S. Marinkov, B. De Jager, and M. Steinbuch, "Extremum seeking control with adaptive disturbance feedforward," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 3, pp. 383–388, 2014.
- [57] H. Asada, Z.-D. Ma, and H. Tokumaru, "Inverse dynamics of flexible robot arms: Modeling and computation for trajectory control," 1990.
- [58] B. Calli, W. Caarls, P. Jonker, and M. Wisse, "Comparison of extremum seeking control algorithms for robotic applications," in 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 3195–3202, IEEE, 2012.
- [59] J. H. Yang, F. L. Lian, and L. C. Fu, "Nonlinear adaptive control for flexible-link manipulators," *IEEE transactions on Robotics and Automation*, vol. 13, no. 1, pp. 140–148, 1997.
- [60] J.-Y. Choi, M. Krstic, K. B. Ariyur, and J. S. Lee, "Extremum seeking control for discrete-time systems," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 47, no. 2, pp. 318– 323, 2002.
- [61] E. Bayo, "A finite-element approach to control the end-point motion of a single-link flexible robot," *Journal of Robotic systems*, vol. 4, no. 1, pp. 63–75, 1987.

[62] B. Siciliano and W. J. Book, "A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators," The International Journal of Robotics Research, vol. 7, no. 4, pp. 79–90, 1988.

- [63] J. F. Peza-Solís, G. Silva-Navarro, and R. Castro-Linares, "Control of a rigid-flexible two-link robot using passivity-based and strain-feedback approaches," in 2010 7th International Conference on Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control, pp. 476–481, IEEE, 2010.
- [64] Z. Tiemin, L. Youwu, Y. Shaoze, Z. Qing, and Z. Haigen, "Comparative study on the acceleration feedback and the strain feedback of a flexible manipulator," in 1996 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Information Intelligence and Systems (Cat. No. 96CH35929), vol. 2, pp. 1031–1035, IEEE, 1996.
- [65] A. De Luca and B. Siciliano, "Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 21, no. 4, pp. 826– 839, 1991.
- [66] J. F. Peza-Solis, R. Castro-Linares, and G. Silva-Navarro, "Backstepping-like control using sliding modes for a single flexible-link robot," in 2011 9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), pp. 268–273, IEEE, 2011.
- [67] B. Siciliano, W. J. Book, and G. De Maria, "An integral manifold approach to control of a one link flexible arm," in 1986 25th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1131–1134, IEEE, 1986.
- [68] V. Koropouli, A. Gusrialdi, S. Hirche, and D. Lee, "An extremum-seeking control approach for constrained robotic motion tasks," Control Engineering Practice, vol. 52, pp. 1–14, 2016.
- [69] M. Readman and P. Bélanger, "Acceleration feedback for flexible joint robots," in *Proc.* of the 30th IEEE Conf. on Decision and Contr, pp. 1385–1390, 1991.
- [70] M. A. Ahmad, "Active vibration suppression techniques of a very flexible robot manipulator," *International Journal of Mechatronics and Manufacturing Systems*, vol. 2, no. 3, pp. 311–330, 2009.
- [71] G. De Maria and B. Siciliano, "A multilayer approach to control of a flexible arm," in Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation, vol. 4, pp. 774–778, IEEE, 1987.
- [72] P. T. Kotnik, S. Yurkovich, and Ü. Özgüner, "Acceleration feedback for control of a flexible manipulator arm," *Journal of Robotic Systems*, vol. 5, no. 3, pp. 181–196, 1988.

[73] J. Schröck, T. Meurer, and A. Kugi, "Non-collocated feedback stabilization of a non-uniform euler-bernoulli beam with in-domain actuation," in 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, pp. 2776–2781, IEEE, 2011.

- [74] S. S. Ge, T. H. Lee, and G. Zhu, "Improving regulation of a single-link flexible manipulator with strain feedback," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, no. 1, pp. 179–185, 1998.
- [75] J. Becedas, I. Payo, and V. Feliu, "Generalised proportional integral torque control for single-link flexible manipulators," *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 5, pp. 773–783, 2010.
- [76] C. Yin, Y. Chen, and S.-m. Zhong, "Fractional-order sliding mode based extremum seeking control of a class of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 50, no. 12, pp. 3173–3181, 2014.
- [77] O. Garcia-Perez, G. Silva-Navarro, and J. F. Peza-Solis, "Evaluation of integral force feedback and multiple positive position feedback on an euler-bernoulli beam," in 2017 14th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), pp. 1–6, IEEE, 2017.
- [78] H. Geniele, R. V. Patel, and K. Khorasani, "End-point control of a flexible-link manipulator: theory and experiments," *IEEE transactions on control systems technology*, vol. 5, no. 6, pp. 556–570, 1997.
- [79] M. Khairudin, Z. Mohamed, and A. R. Husain, "Dynamic model and robust control of flexible link robot manipulator," *Telkomnika*, vol. 9, no. 2, p. 279, 2011.
- [80] M. Tokhi, Z. Mohamed, S. Amin, and R. Mamat, "Dynamic characterisation of a flexible manipulator system: theory and experiments," in 2000 TENCON Proceedings. Intelligent Systems and Technologies for the New Millennium (Cat. No. 00CH37119), vol. 3, pp. 167–172, IEEE, 2000.
- [81] V. Panwar, N. Kumar, N. Sukavanam, and S. Sharma, "Distributed parameter model based trajectory tracking control of a single-link flexible robot manipulator," in *Proceedings of 13 National Conference on Mechanisms and Machines (NaCoMM07)*.
- [82] A. M. Abdullahi, Z. Mohamed, M. Muhammad, and A. Bature, "Vibration and tip deflection control of a single-link flexible manipulator," *International Journal of Instrumentation and Control Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 17–27, 2013.
- [83] H. Kanoh and H. G. Lee, "Vibration control of one-link flexible arm," in 1985 24th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1172–1177, IEEE, 1985.

[84] J. F. Peza Solís, G. Silva Navarro, and R. Castro Linares, "Modeling and tip position control of a flexible link robot: experimental results," *Computación y Sistemas*, vol. 12, no. 4, pp. 421–435, 2009.

- [85] A. Shchuka and A. Goldenberg, "Tip control of a single-link flexible arm using a feed-forward technique," *Mechanism and machine theory*, vol. 24, no. 5, pp. 439–455, 1989.
- [86] M. Tokhi, A. Azad, and H. Poerwanto, "Scefmas: an environment for dynamic characterisation and control of flexible robot manipulators," *International Journal of Engineering Education*, vol. 15, no. 3, pp. 213–226, 1999.
- [87] I. A. Mahmood, S. R. Moheimani, and B. Bhikkaji, "Precise tip positioning of a flexible manipulator using resonant control," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 13, no. 2, pp. 180–186, 2008.
- [88] M. Ahmad, M. Suid, M. Ramli, M. Zawawi, and R. R. Ismail, "Pd fuzzy logic with non-collocated pid approach for vibration control of flexible joint manipulator," in 2010 6th International Colloquium on Signal Processing & its Applications, pp. 1–5, IEEE, 2010.
- [89] D. Wang and M. Vidyasagar, "Passive control of a single flexible link," in Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1432–1437, IEEE, 1990.
- [90] M. V. M. W. Spong, Robot Dynamics and Control. John Wiley & Sons, 1989.
- [91] C. M. Oakley and R. H. Cannon, "End-point control of a two-link manipulator with a very flexible forearm: Issues and experiments," in 1989 American Control Conference, pp. 1381–1389, IEEE, 1989.
- [92] H. Sira-Ramirez and S. K. Agrawal, Differentially flat systems. Crc Press, 2018.
- [93] K. H. Zaad and K. Khorasani, "Control of non-minimum phase singularly perturbed systems with application to flexible-link manipulators," *International Journal of Control*, vol. 63, no. 4, pp. 679–701, 1996.
- [94] M. Benosman and G. Le Vey, "Control of flexible manipulators: A survey," *Robotica*, vol. 22, no. 5, pp. 533–545, 2004.