Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Sección de Mecatrónica

Control de un Robot Móvil Diferencial Considerando Deslizamiento Lateral y Patinado en las Ruedas

T E S I S

Que presenta

Ing. Diego García Olivares

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Ingeniería Eléctrica

Directores de la Tesis:

Dr. Rafael Castro Linares
Dr. Martín Velasco Villa

Ciudad de México Febrero 2021

Para mis padres,
por su apoyo incondicional,
sin ellos nada en mi vida sería posible.

Agradecimientos

A mis padres, Pascual y Leticia, por todo lo que me han dado a lo largo de mi vida, es gracias a ellos que he llegado hasta dónde estoy. A mis hermanos, Rodrigo y Andrés, por su cariño, palabras de aliento y estar conmigo en cada momento.

Al CINVESTAV, por la oportunidad que me otorgaron de pertencer a esta gran institución. A todos y cada uno de los doctores de la sección de mecatrónica, por sus enseñanzas que han enriquecido diversos aspectos de mi vida. A todo el personal académico y administrativo de la Sección de Mecatrónica, así como a cada uno de mis compañeros de la misma, por el apoyo que me brindaron mientras realicé mis estudios de posgrado.

A mis asesores, los doctores Martín Velasco Villa y Rafael Castro Linares, por todo el apoyo que me brindaron para el desarrollo de este trabajo.

A mis compañeros y amigos, que se volvieron parte de mi familia, Ignacio, Omar, Saulo, Ray, Ezequiel, Olaf, Iván y Jurgen, por todos los grandiosos momentos que compartimos, sin ellos el posgrado no hubiera sido igual.

Al CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

Resumen

En este trabajo se propone un esquema de control para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil diferencial considerando perturbaciones provocadas por el deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. Se utiliza el modelo cinématico de dicha configuración de robot móvil que incluye la caractrización matemática de las perturbaciones.

El controlador desarrollado se basa en las técnicas de *backstepping* en conjunto con pasivación por retroalimentación y modos deslizantes para la posición y en un observador de estado extendido para la orientación. En específico, los modos deslizantes tienen cómo propósito añadir robustez al control, ya que las perturbaciones que se consideran son desconocidas en la práctica.

Se presentan algunos desarrollos de controladores existentes en la literatura, con el propósito de comparar el desempeño de cada uno de los esquemas de cotrol. Con este fin, se muestran los resultados obtenidos mediante simulación numérica utilizando trayectorías circular y tipo flor. Además de simulaciones en entornos gráficos 3D. Finalmente se dan algunas conclusiones y propuestas de trabajos a futuro.

Abstract

The following master's thesis proposes a tracking control scheme for a differential wheeled mobile robot under the effects of skidding and slipping. The kinematics model of a differential robot which includes the mathematic characterization of the disturbances is used to solve the tracking problem.

The control scheme developed is based on backstepping, feedback passivity and sliding modes techniques for the position control and an extended state observer for the orientation control. In specific, the main purpose of sliding modes is to add robustness to the control scheme because disturbances are unknown in practice.

Some developments of existing control schemes in the literature are presented, with the purpose of comparing the performance of each of the control schemes. For this, the results obtained by numerical simulation using circular and flower-type trajectories are shown, in addition to simulations in 3D graphic environments. Finally, some conclusions and proposals for future work are given.

Índice general

1. Introducción **3**
1.1. Antecedentes 4
1.1.1. Estimación de perturbaciones 4
1.1.2. Perturbaciones desconocidas 5
1.1.3. Perturbaciones conocidas 5
1.2. Planteamiento del problema 6
1.3. Objetivos 6
1.3.1. Objetivo general 6
1.3.2. Objetivos específicos 6
1.4. Contribución de la tesis 6
1.5. Metodología 7
1.6. Organización de la tesis 7

2. Marco teórico **9**
2.1. Robot móvil diferencial 9
2.2. Perturbaciones por deslizamiento y patinado 13
2.3. Modelo cinemático del RMR diferencial con perturbaciones . . 15
2.4. Modelo cinemático del RMR diferencial con perturbaciones (alternativa) 18
2.5. Problema de seguimiento 21
2.5.1. Obtención de la dinámica de errores de seguimiento . . 21
2.6. Conclusiones del capítulo 26

3. Soluciones existentes al problema de seguimiento de trayectorias **27**
3.1. Control por *backstepping* 28
3.1.1. Solución basada en retroalimentación estática 28
3.1.2. Solución basada en retroalimentación dinámica 34
3.2. Control con estimador de perturbaciones 37

3.2.1. Estimador de perturbaciones 39
3.3. Conclusiones del capítulo 42

4. Esquema de control propuesto 45
4.1. Control de posición 45
4.2. Control de orientación 52
4.3. Conclusiones del capítulo 53

5. Resultados Experimentales 55
5.1. Simulaciones numéricas 55
5.1.1. Control por *backstepping* (Solución basada en retroalimentación estática) 56
5.1.2. Control por *backstepping* (Solución basada en retroalimentación dinámica) 59
5.1.3. Control con estimador de perturbaciones 62
5.1.4. Control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido 67
5.1.5. Comparación del desempeño entre los esquemas presentados 70
5.2. Simulaciones ROS-Gazebo 76
5.2.1. Perturbaciones en Gazebo 76
5.2.2. Trayectoria tipo lemniscata 77
5.2.3. Trayectoria tipo círculo 79
5.3. Conclusiones del capítulo 79

6. Conclusiones 83
6.1. Trabajo a futuro 85

A. Artículo 87

Bibliografía 95

Índice de figuras

2.1. Coordenadas de postura de un RMR (2,0). 10
2.2. Velocidades en un RMR (2,0). 11
2.3. Velocidad lineal de una rueda actuada. 11
2.4. Componentes de velocidad de un RMR (2,0). 12
2.5. Patinado en una rueda actuada. 13
2.6. Deslizamiento lateral en un RMR (2,0). 14
2.7. RMR (2,0) con perturbaciones en el plano $X - Y$. 15
2.8. Componentes de velocidad de un RMR (2,0) con perturbaciones. 17
2.9. Rueda fija representada en los ejes $X_m - Y_m$. 19
2.10. Ángulos para las llantas del RMR con perturbaciones. 20
2.11. Configuración de seguimiento. 22

5.1. Resultados para la solución basada en retroalimentación estática del control por *backstepping* (trayectoria circular). 57
5.2. Resultados para la solución basada en retroalimentación estática del control por *backstepping* (trayectoria tipo flor). 58
5.3. Resultados para la solución basada en retroalimentación dinámica del control por *backstepping* (trayectoria circular). 60
5.4. Resultados para la solución basada en retroalimentación dinámica del control por *backstepping* (trayectoria tipo flor). 61
5.5. Resultados para el control con estimador de perturbaciones (trayectoria circular). 63
5.6. Resultados del estimador de perturbaciones (trayectoria circular). 64
5.7. Resultados para el control con estimador de perturbaciones (trayectoria tipo flor). 65
5.8. Resultados del estimador de perturbaciones (trayectoria tipo flor). 66

5.9. Resultados para el control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido (trayectoria circular). 68
5.10. Resultados para el control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido (trayectoria tipo flor). 69
5.11. Comparación de los resultados obtenidos por simulación numérica (trayectoria circular). 71
5.12. Comparación de los resultados obtenidos por simulación numérica (trayectoria tipo flor). 72
5.13. Comparación cuantitativa de los resultados obtenidos por simulación numérica (trayectoria circular). 74
5.14. Comparación cuantitativa de los resultados obtenidos por simulación numérica (trayectoria tipo flor). 75
5.15. Efecto de las perturbaciones en un RMR para una trayectoria circular en Gazebo. 76
5.16. Efecto de las perturbaciones en un RMR para una trayectoria línea recta en Gazebo. 77
5.17. Resultados para el control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido en ROS-Gazebo (trayectoria tipo lemniscata). 78
5.18. Resultados para el control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido en ROS-Gazebo (trayectoria tipo círculo). 80

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, la róbotica móvil terrestre es un tema ampliamente estudiado y de gran interés debido a sus múltiples aplicaciones prácticas, de caracter militar o exploración espacial, por mencionar algunas. A lo largo de los años, se han desarrollado diversas técnicas de control para llevar a cabo de manera eficiente dichas tareas, tales como control por *backstepping* [1], métodos de inteligencia artificial [2], métodos de control adaptable robusto [3] y control por modos deslizantes [4], entre otros.

Una aplicación con la que se ha trabajado bastante, es el seguimiento de trayectorias, la cuál consiste en hacer que la postura de un robot converja a una postura de referencia deseada. Para dicho propósito se utiliza un sistema basado en coordenadas de error que a su vez está en función de la postura de referencia y la postura del robot [5]. Con éste enfoque se han realizado contribuciones importantes cómo un esquema de control por retroalimentación discontinua que hace al sistema exponencialmente estable [6]; o un control por linealización entrada-salida [7], por mencionar algunos.

Sin embargo, aunque gran parte de los métodos desarrollados en la literatura tienen un alto nivel de eficiencia, la mayoría no consideran la influencia del deslizamiento lateral y patinado en las ruedas, los cuáles son fenómenos inherentes a las condiciones de trabajo de casi cualquier aplicación práctica de los robots móviles a ruedas (RMR).

1.1. Antecedentes

En la literatura, existen algunos trabajos que han tratado con perturbaciones por deslizamiento lateral y patinado en las ruedas, en específico, en el control para seguimiento de trayectorias de RMR diferenciales. Se tienen diversas tendencias de investigación con respecto a las perturbaciones, hay esquemas que las estiman, otros las tratan considerándolas desconocidas e incluso hay algunos que las consideran como valores conocidos. A continuación se describen algunos de ellos brevemente.

1.1.1. Estimación de perturbaciones

En [8] se propone un esquema de control robusto considerando los requerimientos de desempeño de seguimiento y utilizando un observador de perturbaciones. El modelo utilizado para el desarrollo del esquema de control está basado en las restricciones no-holónomicas, las cuales incluyen el efecto provocado por las perturbaciones de deslizamiento y patinado. Se considera que las perturbaciones, sus segundas y terceras derivadas son acotadas, además de que sus magnitudes son mucho más pequeñas que las velocidades de referencia para el seguimiento de trayectoria. El observador de perturbaciones se basa en un observador por modos deslizantes. En el diseño del esquema de control se emplea el método de función de rendimiento prescrito para garantizar el seguimiento deseado.

En [9] se propone un enfoque de control adaptativo. Se desarrolla el modelo cinemático del RMR diferencial que considera las perturbaciones por deslizamiento y patinado como términos variantes en el tiempo. Las perturbaciones se consideran acotadas y se introducen en el modelo del RMR mediante análisis geométrico. Se utiliza un observador por modos deslizantes para estimar los términos de perturbación. Dicho estimador utiliza un filtro pasa bajas para reducir los efectos de castañeo provocados por el modo deslizante. Se muestra la estabilidad del estimador lograda a partir de la elección de valores adecuados para las ganancias de modo deslizante. La ley de control propuesta se basa en la técnica de *backstepping* y se garantiza la estabilidad astintótica del sistema mediante la teoría de Lyapunov.

En [10] se desarrolla un esquema de control robusto basado en un observador de estado extendido generalizado (GESO por sus siglas en inglés). Se obtienen los modelos cinemático y dinámico del RMR en base a las restricciones no-holónomicas, las cuales incluyen las perturbaciones ocasionadas por los efectos de deslizamiento y patinado. Se consideran las perturbaciones

acotadas. Se utiliza el GESO para estimar y compensar, de manera aproximada los términos de perturbación así como otros términos que influyen de manera indirecta. La ley de control se deriva de una función de Lyapunov para garantizar estabilidad del sistema de control. Las perturbaciones son atenuadas y se logra la convergencia de los errores de seguimiento.

1.1.2. Perturbaciones desconocidas

En [11] se realiza un control adaptativo con saturación de par cómo entrada. Se utiliza un modelo cinemático de un RMR diferencial en coordenadas polares, desarrollado en base al modelo dinámico del mismo y las restricciones no holonómicas que contemplan los efectos de deslizamiento lateral y patinado. Las magnitudes de estas perturbaciones se consideran acotadas, así como sus respectivas derivadas. El esquema de control se diseñó para compensar las perturbaciones desconocidas.

En [12] se propone un esquema de control adaptativo. Se utilizan los modelos cinemático y dinámico de un RMR diferencial, obtenidos mediante las restricciones no-holónomicas que incluyen las perturbaciones por deslizamiento y patinado. Dichas perturbaciones se consideran acotadas, así como sus derivadas con respecto al tiempo. Se forma un sistema en espacio de estados con el modelo cinemático en conjunto con el modelo dinámico y se diseña un observador para dicho sistema cuyo propósito es estimar las velocidades líneal y angular del RMR y compensar las perturbaciones. El control adaptativo se diseña al nivel dinámico utilizando la metodología de diseño de superficie dinámica.

1.1.3. Perturbaciones conocidas

En [13] se presenta un completo desarrollo de los modelos cinemáticos para diferentes configuraciones de RMR, basados en las restricciones no-holónomicas en las que se consideran las perturbaciones ocasionadas por los efectos de deslizamiento y patinado. Las magnitudes de dichas perturbaciones se consideran acotadas, así como sus derivadas con respecto al tiempo. Se propone un esquema de control basado en la técnica de *backstepping* para el seguimiento de trayectorias. Para el desarrollo del esquema de control se consideran como conocidos los valores de las perturbaciones.

1.2. Planteamiento del problema

El presente trabajo de tesis aborda el seguimiento de trayectorias de un robot móvil diferencial bajo la influencia de los efectos de deslizamiento y patinado, las cuales afectan las velocidades líneal y angular del vehículo descrito por su modelo cinemático. Se busca lograr un correcto seguimiento compensando las perturbaciones desconocidas que afectan al robot.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Diseñar e implementar un esquema de control robusto para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil diferencial o (2,0) que presenta deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. Considerando que las perturbaciones existentes son desconocidas y acotadas.

1.3.2. Objetivos específicos

- Desarollar el modelo cinemático de un robot móvil diferencial o (2,0) que incluya los efectos de deslizamiento lateral y patinado en las ruedas.
- Evaluar diferentes esquemas de control para seguimiento de trayectorias para el modelo previamente desarrollado.
- Realizar un esquema de control robusto para el seguimiento de trayectorias y comparar su desempeño con respecto a otros existentes en la literatura.
- Evaluar el esquema de compensación desarrollado mediante experimentos en simulación en Simulink de Matlab y en un entorno gráfico con la plataforma experimental ROS-Gazebo.

1.4. Contribución de la tesis

Este trabajo busca contribuir con una propuesta de un esquema de control robusto, y su implementación en la plataforma experimental ROS, para el problema de seguimiento de trayectorias de robots móviles diferenciales en los que se presentan perturbaciones por deslizamiento lateral y patinado en las ruedas.

1.5. Metodología

A continuación se presenta la metodología utilizada para la elaboración del presente trabajo de tesis.

Como primer paso se realizó un estudio completo de las características del modelo cinemático del RMR diferencial y las diferentes formas de caracterizar matemáticamente los efectos de deslizamiento y patinado para incluirlas en dicho modelo.

Posteriormente se evaluaron algunos esquemas de control para el seguimiento de trayectorias existentes en la literatura. Se escogieron los esquemas que consideran un modelado similar al que se utilizó en esta tesis. Después se diseñó una ley de control robusto basada en las técnicas de *backstepping*, pasivación por retroalimentación, modos deslizantes y observador de estado extendido. Se hizo enfásis en considerar las perturbaciones acotadas y desconocidas.

Por útlimo, se realizaron simulaciones numéricas de los esquemas existentes así como del esquema propuesto en este trabajo, con el fin de evaluar el desempeño y comparar la efectividad de todos ellos. Además se realizó una simulación en el entorno de simulación gráfico Gazebo en conjunto con la plataforma ROS para evaluar, unicamente el esquema propuesto en este trabajo, bajo condiciones de mayor fidelidad a la realidad. En base a los experimentos realizados se obtuvieron las conclusiones presentadas.

1.6. Organización de la tesis

El presente trabajo se compone de 6 capítulos. El Capítulo 1 presenta un bosquejo general del tema que aborda esta tesis, así como algunos trabajos que sirvieron como guía de la misma. El Capítulo 2 explica la caracterización matemática de las perturbaciones con las que se trabaja en esta tesis, además de detallar la obtención del modelo cinemático y las coordenadas de error de seguimiento que se utilizaron. El Capítulo 3 contiene los desarrollos de los diferentes esquemas de control que se utilizaron como guía para el esquema propuesto en este trabajo, mientras que en el Capítulo 4 se presenta el desarrollo del mismo. El Capítulo 5 está dedicado a presentar y describrir los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas y en entorno gráfico. Finalmente, el Capítulo 6 presenta las conclusiones finales, así como el trabajo a futuro sugerido en base a este trabajo.

Capítulo 2

Marco teórico

En éste capítulo se introducen algunos conceptos teóricos sobre el robot móvil diferencial con las carácteristicas consideradas en este trabajo, además se explica el desarrollo del modelo cinemático para el caso ideal, es decir sin perturbaciones, así como el desarrollo para obtener el mismo considerando los efectos de deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. Se explica la caracterización matemática de dichos fenómenos y cómo forman parte del modelo cinématico del RMR. Además, se aborda el problema de seguimiento de trayectorias para el modelo cinemático perturbado considerando su representación alterna en términos de los errores de seguimiento involucrados.

2.1. Robot móvil diferencial

La configuración diferencial, o (2,0), de un robot móvil terrestre se refiere a un robot con dos ruedas fijas actuadas y una rueda "loca" de apoyo. Como se observa en la Figura 2.1, el robot se desplaza en un plano horizontal representado por el marco de referencia inercial $X-Y$ y se tiene también un marco de referencia móvil $X_m - Y_m$, cuyo origen está fijo al punto P (ubicado en el centro del eje de las ruedas del robot). Es importante aclarar que el subíndice wd en cada una de las variables de esta sección hace referencia a condiciones ideales de trabajo, es decir, sin perturbaciones. Se supone que las ruedas actuadas son iguales y que la orientación del plano de cada una de ellas está fija respecto al cuerpo del robot. Los marcos de referencia móvil e inercial se relacionan mediante la matriz de rotación $R(\theta_{wd})$ [14], dada por,

$$R(\theta_{wd}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{wd}) & \sin(\theta_{wd}) & 0 \\ -\sin(\theta_{wd}) & \cos(\theta_{wd}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

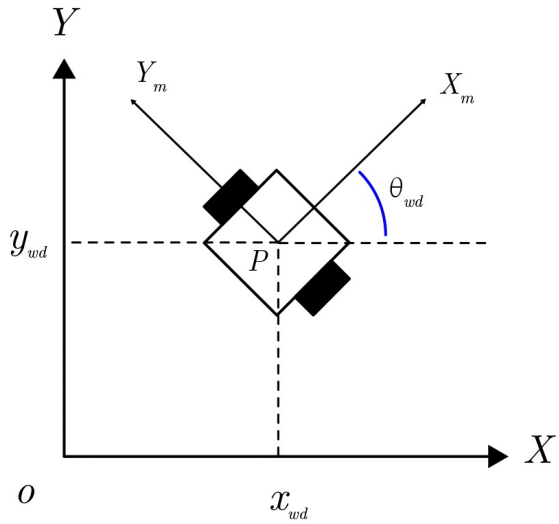


Figura 2.1: Coordenadas de postura de un RMR (2,0).

Las coordenadas de postura del RMR están descritas por el vector $\xi_{wd} = [x_{wd}(t), y_{wd}(t), \theta_{wd}(t)]^T$, donde $x_{wd}(t)$, $y_{wd}(t)$ son la posición del robot en el marco inercial y $\theta_{wd}(t)$ es el ángulo de orientación del mismo con respecto al eje X. Por simplicidad, a partir de ahora se obviara la dependencia del tiempo de estas variables.

El RMR posee velocidad líneal v_{wd} y velocidad angular ω_{wd} mediante los cuales se produce el movimiento del mismo. En la Figura 2.2 se muestran dichas velocidades. Las ecuaciones que relacionan las velocidades del robot con las velocidades lineales de cada una de las ruedas [15] están descritas por,

$$v_{wd} = \frac{1}{2}\left(v_{L_{wd}} + v_{R_{wd}}\right) \tag{2.2a}$$

$$\omega_{wd} = \frac{1}{b}\left(v_{R_{wd}} - v_{L_{wd}}\right) \tag{2.2b}$$

donde b es la distancia entre las ruedas y los subíndices L y R hacen referencia a la rueda izquierda y derecha, respectivamente.

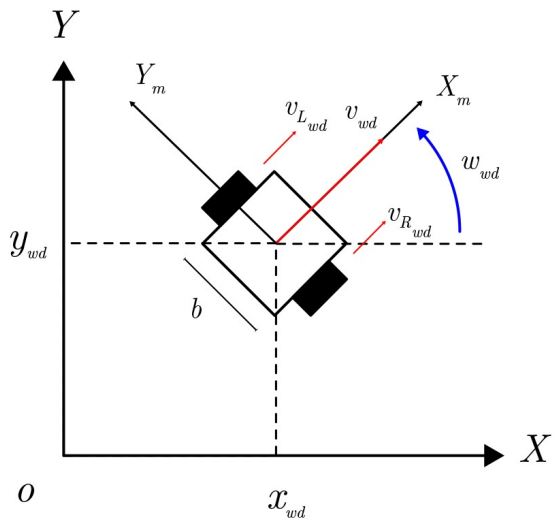


Figura 2.2: Velocidades en un RMR (2,0).

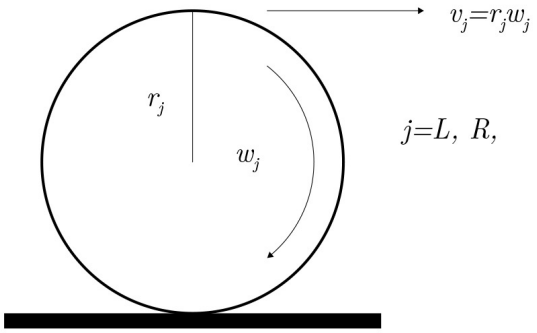


Figura 2.3: Velocidad lineal de una rueda actuada.

De acuerdo a la Figura 2.3, la relación entre las velocidades angulares y las velocidades lineales de cada una de las ruedas están descritas por,

$$v_{L_{wd}} = r\omega_L \tag{2.3a}$$

$$v_{R_{wd}} = r\omega_R \tag{2.3b}$$

donde r es el radio de las ruedas. Sustituyendo la ecuación (2.3) en (2.2) se tiene,

$$v_{wd} = \frac{r}{2}\left(\omega_L + \omega_R\right) \tag{2.4a}$$

$$\omega_{wd} = \frac{r}{b}\left(\omega_R - \omega_L\right) \tag{2.4b}$$

o de forma vectorial,

$$\begin{bmatrix} v_{wd} \\ \omega_{wd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

donde T es una matriz con determinante igual a $\frac{r}{b}$, por lo que existe T^{-1} y por lo tanto se tiene una transformación inversa globalmente definida tal que,

$$\begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{b}{2} \\ \frac{1}{r} & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{wd} \\ \omega_{wd} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} v_{wd} \\ \omega_{wd} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

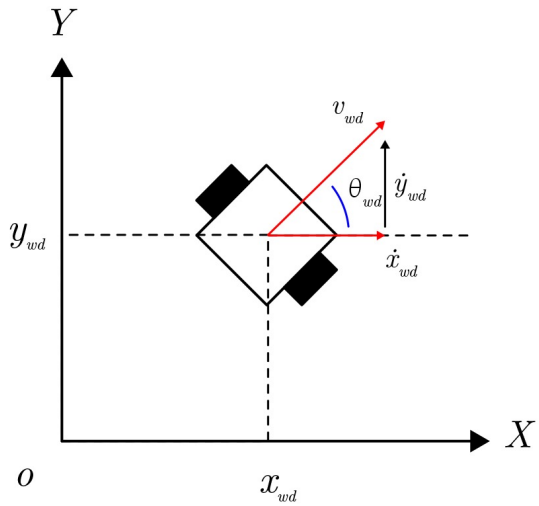


Figura 2.4: Componentes de velocidad de un RMR (2,0).

De la Figura 2.4 se observa que el movimiento del RMR en el marco inercial $X - Y$ se relaciona con las velocidades lineal y angular del mismo mediante,

$$\dot{x}_{wd} = v_{wd}\cos(\theta_{wd}) \tag{2.7a}$$

$$\dot{y}_{wd} = v_{wd}\sin(\theta_{wd}) \tag{2.7b}$$

$$\dot{\theta}_{wd} = \omega_{wd}. \tag{2.7c}$$

Por lo que el modelo cinemático de un RMR diferencial sin perturbaciones está descrito por,

$$\dot{\xi}_{wd} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{wd} \\ \dot{y}_{wd} \\ \dot{\theta}_{wd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{wd}) & 0 \\ \sin(\theta_{wd}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{wd} \\ \omega_{wd} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

donde $[v_{wd}, \omega_{wd}]^T$ son entradas de control auxiliares que están en función de las entradas de control $[\omega_L, \omega_R]^T$.

2.2. Perturbaciones por deslizamiento y patinado

Los efectos de deslizamiento lateral y patinado en las ruedas son fenómenos físicos que se presentan en los RMR al momento de realizar una acción de movimiento los cuales dependen del espacio de trabajo dónde se desarrollan los desplazamientos y son generados por la interacción entre las ruedas y la superficie de trabajo. Para fines de control, se consideran cómo perturbaciones no deseadas que afectan el desempeño del robot.

En la Figura 2.5 se muestra la perturbación conocida como patinado en las ruedas, patinado longitudinal o simplemente patinado. Es un efecto que se presenta en las ruedas actuadas de un RMR modificando la magnitud de su velocidad líneal. Se representa como un factor de proporcionalidad κ, que representa un valor real definido en el rango,

$$\kappa \in [0, 1) \,,$$

siendo $\kappa = 0$ el caso ideal.

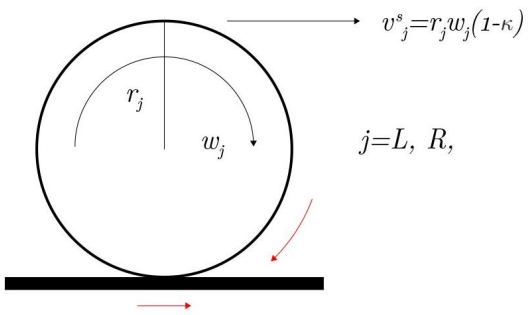


Figura 2.5: Patinado en una rueda actuada.

El deslizamiento lateral del vehículo altera la dirección del movimiento deseado del RMR y, cómo se observa en la Figura 2.6, se puede representar con un vector $v_y(t)$ que está en función de lo que se denomina ángulo de patinado lateral $\delta(t)$. Este ángulo se presenta principalmente en los giros del robot, no depende del sentido del giro y se encuentra en el rango,

$$\delta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) [rad],$$

siendo $\delta = 0$ el caso ideal.

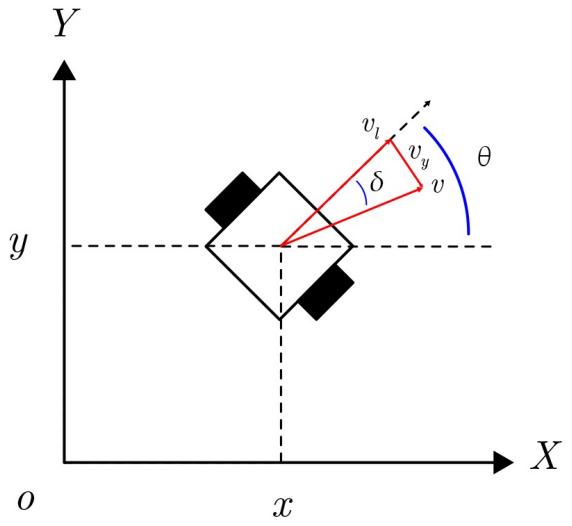


Figura 2.6: Deslizamiento lateral en un RMR (2,0).

De acuerdo a la Figura 2.6, el vector v representa la velocidad lineal final del robot, v_y es la velocidad de patinado lateral y v_l es la velocidad lineal suministrada al robot. Se observa que las velocidades antes mencionadas se relacionan con el ángulo de patinado lateral δ mediante,

$$\tan(\delta) = \frac{-v_y}{v_l} \tag{2.9a}$$

$$\sin(\delta) = \frac{-v_y}{v} \tag{2.9b}$$

$$\cos(\delta) = \frac{v_l}{v}. \tag{2.9c}$$

Es importante enfatizar que los efectos de patinado en las ruedas son debidos principalmente a las fuerzas de fricción existentes en la interacción con el

piso mientras que los efectos de deslizamiento lateral del vehículo se deben a un incremento de las fuerzas centrifugas. En este trabajo se utilizan el ángulo y la constante de proporcionalidad que originan dichas fuerzas. Es evidente que ni las fuerzas de fricción o las fuerzas centrifugas son modeladas en este trabajo, por lo que se asume el origen desconocido de las perturbaciones.

2.3. Modelo cinemático del RMR diferencial con perturbaciones

Para desarrollar el modelo cinemático del RMR diferencial considerando las perturbaciones por deslizamiento y patinado [9] se utiliza la Figura 2.7, donde se muestra un RMR (2,0) sobre dos marcos de referencia. De manera similar al caso sin perturbaciones, se tiene el marco inercial $X-Y$ y el marco móvil $X_m - Y_m$, cuyo origen está fijo al punto P (ubicado en el centro del eje de las ruedas del robot). Estos marcos se relacionan mediante la matriz de rotación $R(\theta)$, dada en (2.1).

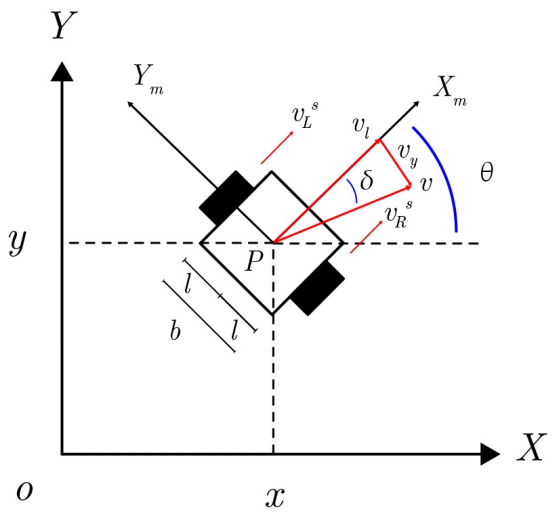


Figura 2.7: RMR (2,0) con perturbaciones en el plano $X - Y$.

El vector que describe la posición y orientación del RMR, considerando perturbaciones, en el marco inercial, $X-Y$, es el vector $\xi(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$, con respecto al eje inercial X. Por simplicidad, a partir de ahora se obviará la dependencia del tiempo de estas variables.

En el caso ideal, es decir, en el que no se consideran los efectos de deslizamiento y patinado, las velocidades lineales de las ruedas izquierda v_L y

derecha v_R están descritas por (2.3). Para el caso en el que se consideran las perturbaciones, de la Figura 2.5 se definen las velocidades lineales de las ruedas que incluyen el efecto de patinado como,

$$v_L^s = r\omega_L(1-\kappa_L) \tag{2.10a}$$
$$v_R^s = r\omega_R(1-\kappa_R) \tag{2.10b}$$

donde κ_L e κ_R son los términos de perturbación por patinado en la rueda izquierda y derecha, respectivamente. A diferencia del caso ideal, las ecuaciones que relacionan las velocidades lineales de las ruedas del RMR con la velocidad lineal v_l y angular ω del mismo están dadas por,

$$v_l = \frac{1}{2}\left(v_L^s + v_R^s\right) \tag{2.11a}$$
$$\omega = \frac{1}{b}\left(v_R^s - v_L^s\right) \tag{2.11b}$$

donde b es la distancia entre las ruedas. Al sustituir la ecuación (2.10) en (2.11) se tiene,

$$v_l = \frac{r}{2}\left[\omega_L(1-\kappa_L) + \omega_R(1-\kappa_R)\right] \tag{2.12a}$$
$$\omega = \frac{r}{b}\left[\omega_R(1-\kappa_R) - \omega_L(1-\kappa_L)\right]. \tag{2.12b}$$

Notése a partir de la Figura 2.8 que sobre los ejes inerciales $X-Y$ se obtiene el modelo cinemático,

$$\dot{x} = v\cos(\theta-\delta) \tag{2.13a}$$
$$\dot{y} = v\sin(\theta-\delta) \tag{2.13b}$$
$$\dot{\theta} = \omega \tag{2.13c}$$

esto es,

$$\dot{x} = v\left[\cos(\theta)\cos(\delta) + \sin(\theta)\sin(\delta)\right] \tag{2.14a}$$
$$\dot{y} = v\left[\sin(\theta)\cos(\delta) - \cos(\theta)\sin(\delta)\right] \tag{2.14b}$$
$$\dot{\theta} = \omega \tag{2.14c}$$

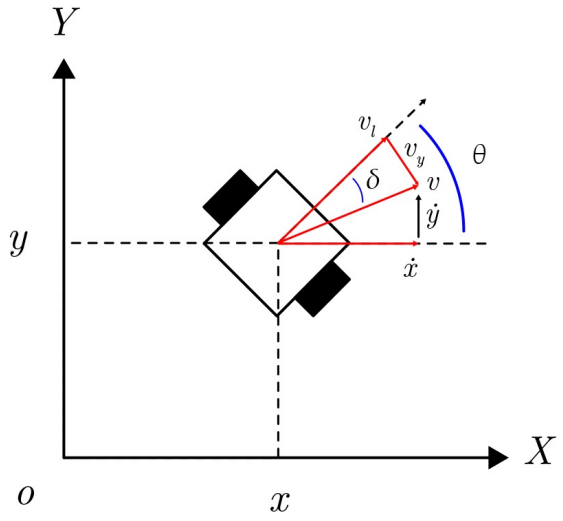


Figura 2.8: Componentes de velocidad de un RMR (2,0) con perturbaciones.

equivalentemente, es posible escribir,

$$\dot{x} = v\cos(\delta)\cos(\theta) + v\sin(\delta)\sin(\theta) \tag{2.15a}$$
$$\dot{y} = v\cos(\delta)\sin(\theta) - v\sin(\delta)\cos(\theta) \tag{2.15b}$$
$$\dot{\theta} = \omega \tag{2.15c}$$

Considerando las relaciones de (2.9), se puede reescribir la ecuación (2.15) de la forma,

$$\dot{x} = v_l\cos(\theta) - v_y\sin(\theta) \tag{2.16a}$$
$$\dot{y} = v_l\sin(\theta) + v_y\cos(\theta) \tag{2.16b}$$
$$\dot{\theta} = \omega \tag{2.16c}$$

Por otra parte, definiendo $\gamma = \tan(\delta)$, notése que,

$$v_y = -v\sin(\delta) = -v\sin(\delta)\frac{\cos(\delta)}{\cos(\delta)} = -v\cos(\delta)\tan(\delta) = -v_l\gamma$$

con lo que la ecuación (2.16) toma la forma,

$$\dot{x} = v_l \left[\cos(\theta) + \gamma \sin(\theta)\right] \tag{2.17a}$$
$$\dot{y} = v_l \left[\sin(\theta) - \gamma \cos(\theta)\right] \tag{2.17b}$$
$$\dot{\theta} = \omega \tag{2.17c}$$

Finalmente, sustituyendo (2.12) en (2.17) se llega a,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left\{r\omega_L(1-\kappa_L) + r\omega_R(1-\kappa_R)\right\}\left\{\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\right\} \\ \frac{1}{2}\left\{r\omega_L(1-\kappa_L) + r\omega_R(1-\kappa_R)\right\}\left\{\sin(\theta) - \gamma\cos(\theta)\right\} \\ \frac{1}{b}\left\{r\omega_R(1-\kappa_R) - r\omega_L(1-\kappa_L)\right\} \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

La ecuación (2.18) describe el modelo cinemático del RMR, considerando perturbaciones por deslizamiento y patinado, en el marco inercial, en donde el vector $\xi = [x, y, \theta]^T$ es el vector de posición y orientación del RMR y las entradas de control son $u = [\omega_L, \omega_R]^T$, de éstas ultimas se introduce la siguiente suposición.

Suposición 2.1. Se supone que las velocidades angulares de la rueda izquierda ω_L y derecha ω_R están acotadas, más precisamente,

$$|\omega_L| \leq \eta_L, \quad |\omega_R| \leq \eta_R$$

donde η_L y η_R son números reales positivos concocidos diferentes de cero.

2.4. Modelo cinemático del RMR diferencial con perturbaciones (alternativa)

De manera similar a lo que se hace en [13], de la Figura 2.6 se observa que se puede describir la posición del punto P en el marco inercial $X - Y$ mediante el vector $\zeta(t) = [x(t), y(t)]^T$ y que los marcos $X - Y$ y $X_m - Y_m$ se relacionan mediante la matriz de rotación $R_2(\theta)$, dada por,

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Para obtener las restricciones no-holonómicas considerando los efectos de patinado, se hace un análisis similar al del caso ideal. En la Figura 2.9 se observa el caso de una rueda fija con respecto a los ejes móviles $X_m - Y_m$. La velocidad de la rueda en la dirección perpendicular al eje longitudinal de la rueda con respecto a los ejes $X - Y$ [16] puede escribirse de la forma,

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta)\end{bmatrix} R_2(\theta)\dot{\zeta} = 0. \tag{2.19}$$

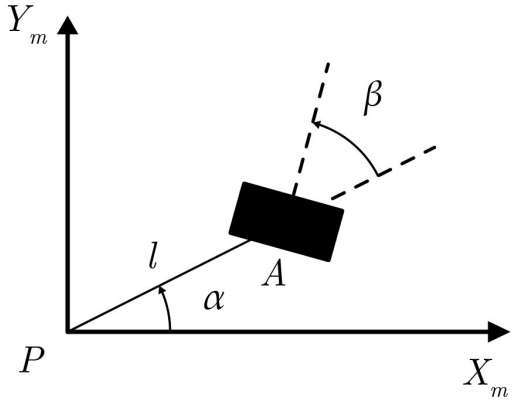


Figura 2.9: Rueda fija representada en los ejes $X_m - Y_m$.

En la Figura 2.9, el ángulo α se mide con respecto al eje X_m, puesto que para el caso ideal, la velocidad lineal del RMR v coincide con dicho eje. Para el caso de interés, como se muestra en la Figura 2.10, la velocidad lineal del RMR se ve afectada por el ángulo de patinado lateral δ, que modifica como se mide el ángulo α, teniendo ahora el ángulo $\alpha + \delta$. Debido a lo anterior, la ecuación (2.19) se puede reescribir como,

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\delta+\beta) & \sin(\alpha+\delta+\beta)\end{bmatrix} R_2(\theta)\dot{\zeta} = 0. \tag{2.20}$$

De acuerdo a la Figura 2.10, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = 0$. Sustituyendo estos valores de ángulos en (2.20) se llega a,

$$\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}+\delta) & \sin(\frac{\pi}{2}+\delta)\end{bmatrix} R_2(\theta)\dot{\zeta} = 0. \tag{2.21}$$

Utilizando las identidades trigonómetricas,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$

la ecuación (2.21) se puede reescribir como,

$$\begin{bmatrix}\sin(\delta) & \cos(\delta)\end{bmatrix} R_2(\theta)\dot{\zeta} = 0. \tag{2.22}$$

La ecuación (2.22) tiene como posible solución,

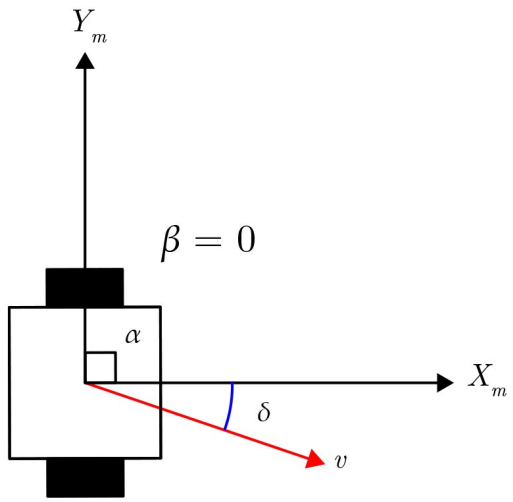


Figura 2.10: Ángulos para las llantas del RMR con perturbaciones.

$$R_2(\theta)\dot{\zeta} = a \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ -\sin(\delta) \end{bmatrix}, \qquad a \neq 0 \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Al despejar $\dot{\zeta}$ en (2.23) se tiene,

$$\dot{\zeta} = aR_2^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ -\sin(\delta) \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Desarrollando (2.24) y considerando $a = v$ se llega a,

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)v\cos(\delta) + \sin(\theta)v\sin(\delta) \\ \sin(\theta)v\cos(\delta) - \cos(\theta)v\sin(\delta) \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Utilizando las relaciones (2.9), la ecuación (2.25) toma la forma,

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} v_l\cos(\theta) - v_y\sin(\theta) \\ v_l\sin(\theta) + v_y\cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Debido a que la taza de cambio del ángulo de dirección del RMR $\dot{\theta}$ es igual a la velocidad angular del mismo ω, el vector de posición y orientación del RMR está descrito por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_l\cos(\theta) - v_y\sin(\theta) \\ v_l\sin(\theta) + v_y\cos(\theta) \\ \omega \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

Por la relación $v_y = -\gamma v_l$, la ecuación (2.27) se puede reescribir como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_l \left\{\cos(\theta) + \gamma \sin(\theta)\right\} \\ v_l \left\{\sin(\theta) - \gamma \cos(\theta)\right\} \\ \omega \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Nótese que el modelo (2.28) resulta equivalente al modelo (2.18) obtenido anteriormente al considerar v_l y ω dadas por la ecuación (2.12).

2.5. Problema de seguimiento

El problema de seguimiento de trayectoria de un RMR consiste en llevar su posición y orientación $\xi(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$ a cierto valor deseado $\xi_r(t) = [x_r(t), y_r(t), \theta_r(t)]^T$ cuando $t \to \infty$. Para conseguir este propósito, los valores de la trayectoria deseada satisfacen el siguiente modelo virtual,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & 0 \\ \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

La ecuación (2.29) representa el modelo cinemático de un RMR diferencial ideal, donde v_r y ω_r son la velocidad lineal de referencia y velocidad angular de referencia, respectivamente. Se considera que v_r y ω_r, y sus derivadas con respecto al tiempo $\dot{v}_r$ y $\dot{\omega}_r$ son conocidas y acotadas.

2.5.1. Obtención de la dinámica de errores de seguimiento

La dinámica de errores de seguimiento que se obtiene en ésta sección se utiliza posteriormente para el desarrollo de la solución, al problema de seguimiento de trayectoria, propuesta en este trabajo de tesis.

Considerando el modelo con perturbaciones del RMR de la ecuación (2.18), dado en la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left\{r\omega_L(1-\kappa_L) + r\omega_R(1-\kappa_R)\right\}\left\{\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\right\} \\ \frac{1}{2}\left\{r\omega_L(1-\kappa_L) + r\omega_R(1-\kappa_R)\right\}\left\{\sin(\theta) - \gamma\cos(\theta)\right\} \\ \frac{1}{b}\left\{r\omega_R(1-\kappa_R) - r\omega_L(1-\kappa_L)\right\} \end{bmatrix}.$$

Para llevar a cabo la convergencia $\xi(t) \to \xi_r(t)$ se define incialmente las señales de error $\tilde{\xi}(t) = \left[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{\theta}(t)\right]^T$, en la forma,

$$\tilde{x} = x_r - x \tag{2.30a}$$
$$\tilde{y} = y_r - y \tag{2.30b}$$
$$\tilde{\theta} = \theta_r - \theta \tag{2.30c}$$

con las cuales, y de acuerdo a la Figura 2.11, es posible definir los errores de seguimiento $\xi_e(t) = [x_e(t), y_e(t), \theta_e(t)]^T$ en la forma,

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

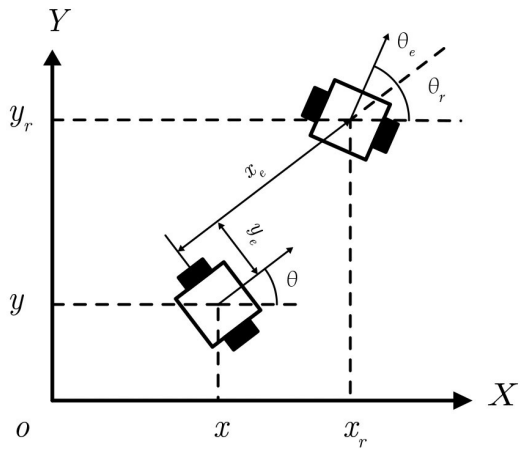


Figura 2.11: Configuración de seguimiento.

Nótese que la matriz de transformación $R(\theta)$ tal que $\xi_e = R(\theta)\tilde{\xi}$ donde $Det\{R(\theta)\} = 1$ y por lo tanto (2.31) representa una transformación globalmente definida.

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (2.31) se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{x}_e =& -\dot{\theta}\sin(\theta)(x_r - x) + \cos(\theta)(\dot{x}_r - \dot{x}) \\ &+ \dot{\theta}\cos(\theta)(y_r - y) + \sin(\theta)(\dot{y}_r - \dot{y}) \end{aligned} \tag{2.32a}$$
$$\begin{aligned} \dot{y}_e =& -\dot{\theta}\cos(\theta)(x_r - x) - \sin(\theta)(\dot{x}_r - \dot{x}) \\ &- \dot{\theta}\sin(\theta)(y_r - y) + \cos(\theta)(\dot{y}_r - \dot{y}) \end{aligned} \tag{2.32b}$$
$$\dot{\theta}_e = \theta_r - \theta. \tag{2.32c}$$

Factorizando términos comunes, la ecuación (2.32) se puede reescribir como,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_e =& \dot{\theta}\left\{-\sin(\theta)(x_r - x) + \cos(\theta)(y_r - y)\right\} \\
&+ \cos(\theta)(\dot{x}_r - \dot{x}) + \sin(\theta)(\dot{y}_r - \dot{y}) && (2.33a)\\
\dot{y}_e =& -\dot{\theta}\left\{\cos(\theta)(x_r - x) - \sin(\theta)(y_r - y)\right\} \\
&- \sin(\theta)(\dot{x}_r - \dot{x}) + \cos(\theta)(\dot{y}_r - \dot{y}) && (2.33b)\\
\dot{\theta}_e =& \dot{\theta}_r - \dot{\theta}. && (2.33c)
\end{aligned}$$

De acuerdo a la definición de x_e y y_e de la ecuación (2.31), la ecuación (2.33) toma la forma,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_e &= \dot{\theta} y_e + \cos(\theta)(\dot{x}_r - \dot{x}) + \sin(\theta)(\dot{y}_r - \dot{y}) && (2.34a)\\
\dot{y}_e &= -\dot{\theta} x_e - \sin(\theta)(\dot{x}_r - \dot{x}) + \cos(\theta)(\dot{y}_r - \dot{y}) && (2.34b)\\
\dot{\theta}_e &= \dot{\theta}_r - \dot{\theta}. && (2.34c)
\end{aligned}$$

Al sustituir (2.18) y (2.29) en (2.34) resulta,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_e =& \frac{r}{b}\left[\omega_R\left(1-\kappa_R\right) - \omega_L\left(1-\kappa_L\right)\right] y_e + \cos(\theta)\left\{v_r\cos(\theta_r)\right. \\
&\left. -\frac{r}{2}\left[\omega_L(1-\kappa_L) + \omega_R(1-\kappa_R)\right]\left[\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\right]\right\} \\
&+ \sin(\theta)\left\{v_r\sin(\theta_r)\right. \\
&\left. -\frac{r}{2}\left[\omega_L(1-\kappa_L) + \omega_R(1-\kappa_R)\right]\left[\sin(\theta) - \gamma\cos(\theta)\right]\right\} \\
\dot{y}_e =& -\frac{r}{b}\left[\omega_R\left(1-\kappa_R\right) - \omega_L\left(1-\kappa_L\right)\right] x_e - \sin(\theta)\left\{v_r\cos(\theta_r)\right. \\
&\left. -\frac{r}{2}\left[\omega_L(1-\kappa_L) + \omega_R(1-\kappa_R)\right]\left[\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\right]\right\} \\
&+ \cos(\theta)\left\{v_r\sin(\theta_r)\right. \\
&\left. -\frac{r}{2}\left[\omega_L(1-\kappa_L) + \omega_R(1-\kappa_R)\right]\left[\sin(\theta) - \gamma\cos(\theta)\right]\right\} \\
\dot{\theta}_e =& \omega_r - \frac{r}{b}\left[\omega_R(1-\kappa_R) - \omega_L(1-\kappa_L)\right]
\end{aligned}$$

y desarrollando se llega a,

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_e =& \frac{r}{b}\left[(\omega_R - \omega_L) - (\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L)\right] y_e + v_r \cos(\theta_r)\cos(\theta) \\
& - \frac{r}{2}\left[(\omega_L + \omega_R) - (\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R)\right]\left[\cos^2(\theta) + \gamma\cos(\theta)\sin(\theta)\right] \\
& + v_r \sin(\theta_r)\sin(\theta) \\
& - \frac{r}{2}\left[(\omega_L + \omega_R) - (\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R)\right]\left[\sin^2(\theta) - \gamma\cos(\theta)\sin(\theta)\right] \qquad (2.35a) \\
\dot{y}_e =& -\frac{r}{b}\left[(\omega_R - \omega_L) - (\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L)\right] x_e - v_r \cos(\theta_r)\sin(\theta) \\
& + \frac{r}{2}\left[(\omega_L + \omega_R) - (\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R)\right]\left[\cos(\theta)\sin(\theta) + \gamma\sin^2(\theta)\right] \\
& + v_r \sin(\theta_r)\cos(\theta) \\
& - \frac{r}{2}\left[(\omega_L + \omega_R) - (\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R)\right]\left[\sin(\theta)\cos(\theta) - \gamma\cos^2(\theta)\right] \qquad (2.35b) \\
\dot{\theta}_e =& \omega_r - \frac{r}{b}\left[(\omega_R - \omega_L) - (\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L)\right]. \qquad (2.35c)
\end{aligned}
$$

Se proponen ahora las entradas de control auxiliares,

$$
\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{v}_l \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix}. \qquad (2.36)
$$

Utilizando el cambio de variables de la ecuación (2.36) y factorizando términos comunes, la ecuación (2.35) se puede reescribir de la forma,

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_e =& \left[\bar{\omega} - \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right)\right] y_e + v_r\left[\cos(\theta_r)\cos(\theta) + \sin(\theta_r)\sin(\theta)\right] \\
& - \left[\bar{v}_l - \frac{r}{2}\left(\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R\right)\right]\left[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right. \\
& \left. + \gamma\cos(\theta)\sin(\theta) - \gamma\sin(\theta)\cos(\theta)\right] \qquad (2.37a) \\
\dot{y}_e =& \left[\bar{\omega} - \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right)\right] x_e + v_r\left[\sin(\theta_r)\cos(\theta) - \cos(\theta_r)\sin(\theta)\right] \\
& + \left[\bar{v}_l - \frac{r}{2}\left(\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R\right)\right]\left[\gamma\cos^2(\theta) + \gamma\sin^2(\theta)\right. \\
& \left. \cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)\right] \qquad (2.37b) \\
\dot{\theta}_e =& \omega_r - \bar{\omega} + \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right). \qquad (2.37c)
\end{aligned}
$$

Utilizando las identidades trigonómetricas,

$$
\begin{aligned}
cos(a-b) &= cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) \\
sin(a-b) &= sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b) \\
1 &= cos^2(a) + sin^2(a)
\end{aligned}
$$

y eliminando términos semejantes, de la ecuación (2.37) se llega a,

$$\dot{x}_e = \left[\bar{\omega} - \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right)\right] y_e + v_r\cos(\theta_r - \theta) - \left[\bar{v}_l - \frac{r}{2}\left(\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R\right)\right] \tag{2.38a}$$

$$\dot{y}_e = -\left[\bar{\omega} - \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right)\right] x_e + v_r\sin(\theta_r - \theta) + \left[\bar{v}_l - \frac{r}{2}\left(\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R\right)\right]\gamma \tag{2.38b}$$

$$\dot{\theta}_e = \omega_r - \bar{\omega} + \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right) \tag{2.38c}$$

Sustituyendo la definición de θ_e de (2.31) en (2.38), se llega a la dinámica de errores descrita por,

$$\dot{x}_e = \bar{\omega}y_e + v_r\cos(\theta_e) - \bar{v}_l + f_1 \tag{2.39a}$$

$$\dot{y}_e = -\bar{\omega}x_e + v_r\sin(\theta_e) + f_2 \tag{2.39b}$$

$$\dot{\theta}_e = \omega_r - \bar{\omega} + f_3 \tag{2.39c}$$

donde,

$$f_1 = \frac{r}{2}\left(\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R\right) - \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right) y_e \tag{2.40a}$$

$$f_2 = \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right) x_e + \left[\bar{v}_l - \frac{r}{2}\left(\kappa_L\omega_L + \kappa_R\omega_R\right)\right]\gamma \tag{2.40b}$$

$$f_3 = \frac{r}{b}\left(\kappa_R\omega_R - \kappa_L\omega_L\right) \tag{2.40c}$$

son términos de perturbación que involucran el deslizamiento lateral y patinado.

El modelo cinemático perturbado (2.39) tiene la finalidad tan solo de evidenciar los posibles puntos de afectación de los deslizamientos y patinados

del vehículo. A lo largo del trabajo se considera que las perturbaciones f_i, $i = 1, 2, 3$ son desconocidas debido a la imposibilidad de medir en tiempo real las perturbaciones originales κ_R, κ_L y γ.

Considerando la Suposición 2.1 y debido a que las perturbaciones κ_R, κ_L y $\gamma = \tan(\delta)$ son acotadas, se introduce la siguiente condición sobre los términos f_1, f_2 y f_3.

Suposición 2.2. Se considera que los términos de perturbación están acotados, es decir, satisfacen,

$$|f_1| < \eta_1, \quad |f_2| < \eta_2, \quad |f_3| < \eta_3$$

donde η_1, η_2 y η_3 son constantes reales positivas diferentes de cero.

Es importante mencionar que debido a que por cuestiones físicas se cumple la Suposición 2.1, por lo que sí los términos f_1, f_2 y f_3 no son acotados se tiene que las perturbaciones κ_L, κ_R o γ no son acotadas. Dicho caso no se toma en cuenta en este trabajo de tesis debido a que se consideran como casos incontrolables.

2.6. Conclusiones del capítulo

Los efectos de deslizamiento lateral y patinado en las ruedas se presentan como perturbaciones externas en el modelo cinemático de un robot móvil. De acuerdo a la caracterización matemática de las perturbaciones consideradas, se supone que las magnitudes de las mismas están acotadas, y debido a su origen, también se suponen desconocidas. El modelo diferencial o (2,0), que es el considerado en el presente trabajo, presenta cambios significativos en su modelo cinemático, cuando se ve afectado por dichas perturbaciones, con respecto al caso ideal. Por lo tanto, como se pudo observar, la dinámica de errores de seguimiento de trayectoria obtenida presenta funciones que dependen de las perturbaciones modeladas y de las velocidades angulares de cada una de las ruedas del robot, las cuales son las entradas de control del sistema. Estas funciones son acotadas y desconocidas debido a los valores de los que depende. Todo lo anterior presenta las consideraciones principales que se utilizaron para el desarrollo de la propuesta del esquema de control expuesto en el Capítulo 4.

Capítulo 3

Soluciones existentes al problema de seguimiento de trayectorias

Como ya se explicó anteriormente, en la literatura se han planteado diversas propuestas para atacar el problema de seguimiento de trayectoria de un RMR diferencial que presenta los efectos de deslizamiento y patinado. En el presente capítulo se explican los desarrollos de algunas de estas propuestas que fungieron como guía para el desarrollo de este trabajo.

Se presentan los desarrollos de dos esquemas de control ya existentes en la literatura, de los cuales el primero se basa en la técnica de *backstepping* considerando conocidos los valores de las perturbaciones. En el segundo se desarrolla un estimador de perturbaciones basado en un observardor por modos deslizantes, con el cual se propone una retroalimentación que estabiliza el sistema asintóticamente y se garantiza dicha estabilidad mediante la teoría de Lyapunov.

El modelo cinemático y las representaciones matemáticas de las perturbaciones desarrollados en el Capítulo 2, se basan principalmente en los modelos utilizados en las soluciones expuestas en este capítulo. Además de lo anterior, los esquemas de control de dichas soluciones presentan aspectos interesantes para comparar con el esquema desarrollado en este trabajo, como pueden ser el contraste de la estimación de las perturbaciones y la técnica de *backstepping* por mencionar algunos. Por las razones anteriores, se escogieron estas

propuestas sobre otras existentes en la literatura.

3.1. Control por *backstepping*

Para ésta propuesta se considera que las perturbaciones κ_R, κ_L y γ son funciones diferenciables que dependen del tiempo, cuyas magnitudes son conocidas y acotadas.

En esta sección se presentan, de manera detallada, los desarrollos de los esquemas de control propuestos en [13], donde se tienen dos soluciones para el problema de seguimiento del RMR sujeto a los efectos de deslizamiento y patinado. Se utiliza el modelo cinemático de la ecuación (2.28) de la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \gamma \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) - \gamma \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l \\ \omega \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

donde,

$$u_1 = \begin{bmatrix} v_l \\ \omega \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1-\kappa_L}{2} & \frac{1-\kappa_R}{2} \\ \frac{-(1-\kappa_L)}{b} & \frac{1-\kappa_R}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = T_1 u, \tag{3.2}$$

donde, ya que las perturbaciones κ_L, κ_R y γ se consideran conocidas, la matriz T_1 es una matriz invertible.

Para el seguimiento de trayectoria, se considera la dinámica de errores obtenida utilizando la ecuación (2.31) en conjunto con el cambio de coordenadas (3.1) y las trayectorias deseadas generadas a partir de (2.29). Dicha dinámica está descrita por,

$$\dot{x}_e = \omega y_e + v_r \cos(\theta_e) - v_l, \tag{3.3a}$$
$$\dot{y}_e = -\omega x_e + v_r \sin(\theta_e) + v_l \gamma, \tag{3.3b}$$
$$\dot{\theta}_e = \omega_r - \omega. \tag{3.3c}$$

3.1.1. Solución basada en retroalimentación estática

Se considera que dado un valor fijo $0 < \epsilon < \pi$, existe una función φ que pertenece a un conjunto de funciones φ_ϵ^x definido como,

$$\begin{aligned}\varphi_\epsilon^x = \{&\varphi : R \to (-\pi+\varepsilon, \quad \pi-\varepsilon),\\ &\varphi \in C^x \quad | \quad \varphi(0)=0, \quad z\varphi(z)>0 \quad \forall z \neq 0 \quad y \quad \dot{\varphi} \quad es \quad acotada\}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

La función que se utiliza está descrita por,

$$\varphi(y_e v_r) = \frac{\sigma y_e v_r}{1+(y_e v_r)^2}, \quad con \quad 0<\sigma<2(\pi-\epsilon). \tag{3.5}$$

Debido a que y_e de la dinámica de (3.3) no se puede controlar directamente por el término de perturbación γ, se proponen los valores deseados,

$$x_{e_d} = 0, \tag{3.6a}$$

$$\theta_{e_d} = \sin^{-1}\left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l\gamma}{v_r}\right], \tag{3.6b}$$

donde $\sin^{-1}[\cdot] = \arcsin[\cdot]$ y,

$$\alpha_3 = -\varphi(y_e v_r). \tag{3.7}$$

Haciendo $x_e = x_{e_d}$ y $\theta_e = \theta_{e_d}$ en (3.3b) y sustituyendo (3.6), se obtiene,

$$\dot{y}_e = v_r \sin\left\{sin^{-1}\left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l\gamma}{v_r}\right]\right\} + v_l\gamma,$$

que al desarrollar algebraicamente y sustituir (3.7), se llega a,

$$\dot{y}_e = -v_r \sin\left[\varphi(y_e v_r)\right]. \tag{3.8}$$

Se observa que la ecuación (3.8) es uniformemente estable en $y_e = 0$ cuando $x_e = x_{e_d}$ y $\theta_e = \theta_{e_d}$, con x_{e_d} y θ_{e_d} definidos por (3.6). Debido a lo anterior, se definen las variables,

$$\tilde{x}_e = x_e - x_{e_d}, \tag{3.9a}$$

$$\tilde{\theta}_e = \theta_e - \theta_{e_d}. \tag{3.9b}$$

Se requiere que $x_e \to x_{e_d}$, con lo cual $\tilde{x}_e \to 0$ en (2.30a), lo que a su vez implica que $\tilde{x} \to 0$ y por lo tanto $x \to x_r$.

Al sustituir (3.6) en (3.9), se llega a,

$$\tilde{x}_e = x_e, \tag{3.10a}$$

$$\tilde{\theta}_e = \theta_e - \sin^{-1}\left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l\gamma}{v_r}\right]. \tag{3.10b}$$

Nótese que de (3.10a) se tiene que $\dot{\tilde{x}}_e = \dot{x}_e$. Derivando con respecto al tiempo la ecuación (3.10b),

$$\dot{\tilde{\theta}}_e = \dot{\theta}_e - \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l\gamma}{v_r}\right]^2}} \left\{\dot{\alpha}_3 \cos(\alpha_3) - \frac{(\dot{v}_l\gamma + v_l\dot{\gamma})v_r - \dot{v}_r v_l\gamma}{v_r^2}\right\}, \tag{3.11}$$

donde,

$$\dot{\alpha}_3 = -\dot{\varphi}(y_e v_r)\left\{y_e\dot{v}_r + \left[-\omega x_e + v_r\sin(\theta_e) + v_l\gamma\right]v_r\right\}. \tag{3.12}$$

Sustituyendo (3.12) y (3.3c) en (3.11) y factorizando ω, se obtiene,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}_e =& \omega_r - \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l\gamma}{v_r}\right]^2}} \left\{-\dot{\varphi}(y_e v_r)\left[y_e\dot{v}_r + v_r^2\sin(\theta_e) + v_l v_r\gamma\right]\cos(\alpha_3)\right. \\ &\left. - \frac{(\dot{v}_l\gamma + v_l\dot{\gamma})v_r - \dot{v}_r v_l\gamma}{v_r^2}\right\} - \omega\left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r)v_r x_e\cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l\gamma}{v_r}\right]^2}}\right].\end{aligned} \tag{3.13}$$

Definiendo ahora,

$$\begin{aligned}v_3 =& \omega_r - \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l\gamma}{v_r}\right]^2}} \left\{-\dot{\varphi}(y_e v_r)\left[y_e\dot{v}_r + v_r^2\sin(\theta_e) + v_l v_r\gamma\right]\cos(\alpha_3)\right. \\ &\left. - \frac{(\dot{v}_l\gamma + v_l\dot{\gamma})v_r - \dot{v}_r v_l\gamma}{v_r^2}\right\},\end{aligned} \tag{3.14}$$

se puede reescribir la ecuación (3.13) de la forma,

$$\dot{\tilde{\theta}}_e = v_3 - \omega \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r}\right]^2}} \right]. \tag{3.15}$$

Se propone ahora la función candidata de Lyapunov,

$$V_2 = \frac{1}{2} x_e^2 + \frac{1}{2} y_e^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_e^2, \tag{3.16}$$

la cual es definida positiva y cuya derivada con respecto al tiempo es,

$$\dot{V}_2 = x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + \tilde{\theta}_e \dot{\tilde{\theta}}_e. \tag{3.17}$$

Al sustituir la ecuaciones (3.3a), (3.3b) y (3.15) en (3.17), se llega a,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 =& x_e \left[\omega y_e + v_r \cos(\theta_e) - v_l \right] + y_e \left[-\omega x_e + v_r \sin(\theta_e) + v_l \gamma \right] \\ &+ \tilde{\theta}_e \left\{ v_3 - \omega \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r}\right]^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Eliminando el término $\omega x_e y_e$ de la ecuación (3.18), se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 =& x_e \left[v_r \cos(\theta_e) - v_l \right] + y_e \left[v_r \sin(\theta_e) + v_l \gamma \right] \\ &+ \tilde{\theta}_e \left\{ v_3 - \omega \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r}\right]^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Proponiendo la entrada de control v_l como,

$$v_l = v_r \cos(\theta_e) + c_1 x_e, \tag{3.20}$$

donde $c_1 > 0 \in \mathbb{R}$. Al sustituir (3.20) en (3.19), se llega a,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 =& - c_1 x_e^2 + y_e \left[v_r \sin(\theta_e) + v_l \gamma \right] \\ &+ \tilde{\theta}_e \left\{ v_3 - \omega \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r}\right]^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

De la ecuación (3.9b) se tiene que $\theta_e = \tilde{\theta}_e + \theta_{e_d}$ y al sustituir esta definición en (3.21), resulta,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = &- c_1 x_e^2 + y_e \left[v_r \sin(\tilde{\theta}_e + \theta_{e_d}) + v_l \gamma \right] \\ &+ \tilde{\theta}_e \left\{ v_3 - \omega \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r} \right]^2}} \right] \right\}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por otra parte, se tiene que,

$$\int_0^1 \cos[\theta_{e_d} + s\tilde{\theta}_e] ds = \frac{1}{\tilde{\theta}_e} \sin \left[\theta_{e_d} + s\tilde{\theta}_e \right] \Big|_0^1,$$

que al evaluar y desarrollar, se llega a,

$$\int_0^1 \cos[\theta_{e_d} + s\tilde{\theta}_e] ds = \frac{1}{\tilde{\theta}_e} \left\{ \sin \left[\theta_{e_d} + \tilde{\theta}_e \right] - \sin \left[\theta_{e_d} \right] \right\},$$

que al despejar $\sin \left[\theta_{e_d} + \tilde{\theta}_e \right]$, resulta,

$$\sin[\theta_{e_d} + \tilde{\theta}_e] = \sin[\theta_{e_d}] + \tilde{\theta}_e \eta(t), \tag{3.23}$$

donde,

$$\eta(t) = \int_0^1 \cos[\theta_{e_d} + s\tilde{\theta}_e] ds. \tag{3.24}$$

Sustituyendo (3.23) en (3.22), se llega a,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = &- c_1 x_e^2 + y_e \left[v_r \sin(\theta_{e_d}) + \tilde{\theta}_e v_r \eta(t) + v_l \gamma \right] \\ &+ \tilde{\theta}_e \left\{ v_3 - \omega \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r} \right]^2}} \right] \right\}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Debido a la definción de θ_{e_d} de la ecuación (3.6b), la ecuación (3.25) toma la forma,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = &- c_1 x_e^2 + y_e \left[v_r \sin(\alpha_3) + \tilde{\theta}_e v_r \eta(t) \right] \\ &+ \tilde{\theta}_e \left\{ v_3 - \omega \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r} \right]^2}} \right] \right\}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Sustituyendo (3.7) en (3.26) y factorizando $\tilde{\theta}_e$, se llega a,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = &- c_1 x_e^2 + -y_e v_r \sin\left[\varphi(y_e v_r)\right] \\ &+ \tilde{\theta}_e \left\{ y_e v_r \eta(t) + v_3 - \omega \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r} \right]^2}} \right] \right\}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Escogiendo la entrada de control ω como,

$$\omega = \left[1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r} \right]^2}} \right]^{-1} \left[v_3 + y_e v_r \eta(t) + c_2 \tilde{\theta}_e \right], \tag{3.28}$$

donde $c_2 > 0 \in \mathbb{R}$ y sustituyendo en (3.27), resulta,

$$\dot{V}_2 = -c_1 x_e^2 - y_e v_r \sin\left[\varphi(y_e v_r)\right] - c_2 \tilde{\theta}_e^2 \leq 0. \tag{3.29}$$

De acuerdo a la ecuación (3.29) se puede concluir que la retroalimentación de (3.20) y (3.28) estabilizan el sistema (3.3).

Observación 3.1. Es importante señalar que en la retroalimentación propuesta,

$$\begin{bmatrix} v_l \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos(\theta_e) + c_1 x_e \\ \left\{ 1 + \frac{\dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \left[\sin(\alpha_3) - \frac{v_l \gamma}{v_r} \right]^2}} \right\}^{-1} \left\{ v_3 + y_e v_r \eta(t) + c_2 \tilde{\theta}_e \right\} \end{bmatrix}$$

la entrada de control ω presenta algunas singularidades. Desarrollando se llega a,

$$\omega = \left[\frac{\sqrt{[v_r + v_l\gamma - v_r \sin(\alpha_2)]\,[v_r - v_l\gamma + v_r \sin(\alpha_2)]}}{\sqrt{[v_r + v_l\gamma - v_r \sin(\alpha_2)]\,[v_r - v_l\gamma + v_r \sin(\alpha_2)]} + \dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e cos(\alpha_2)} \right] [v_3 + y_e v_r \eta(t) + c_2 \tilde{\theta}_e \Big],$$

de dónde se puede deducir la posible singularidad,

$$\sqrt{[v_r + v_l\gamma - v_r \sin(\alpha_2)]\,[v_r - v_l\gamma + v_r \sin(\alpha_2)]} + \dot{\varphi}(y_e v_r) v_r x_e cos(\alpha_2) = 0,$$

además de la posible singularidad en v_3,

$$v_r \sqrt{[v_r + v_l\gamma - v_r \sin(\alpha_2)]\,[v_r - v_l\gamma + v_r \sin(\alpha_2)]} = 0.$$

Debido a lo descrito anteriormente, se observa que está solución presenta iconvenientes en su aplicación.

3.1.2. Solución basada en retroalimentación dinámica

Considerando la misma premisa que en la primera solución, al no poder controlar directamente la dinámica de y_e de la ecuación (3.3b), se proponen ahora los valores deseados,

$$x_{e_d} = k_3 \omega y_e + \frac{v_l \gamma}{\omega}, \tag{3.30a}$$

$$\theta_{e_d} = 0, \tag{3.30b}$$

donde $k_3 > 0 \in \mathbb{R}$ y $\omega \neq 0$. Es importante resaltar que a partir que ésta última condición se limita de manera importante la retroalimentación que se busca. Nótese que considerando $x_e = x_{e_d}$ y $\theta_e = \theta_{e_d}$ de (3.30) y sustituyendo en (3.3b) se obtiene,

$$\dot{y}_e = -\omega \left(k_3 \omega y_e + \frac{v_l \gamma}{\omega} \right) + v_l \gamma,$$

que al desarrollar algebraicamente, se llega a,

$$\dot{y}_e = -k_3 \omega^2 y_e. \tag{3.31}$$

Considerando la función candidata de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2} y_e^2$ y su respectiva derivada con respecto al tiempo $\dot{V}_1 = y_e \dot{y}_e$, al sustituir (3.31) se obtiene,

$$\dot{V}_1 = -k_3\omega^2 y_e^2 \leq 0. \tag{3.32}$$

De la ecuación (3.32) se puede concluir que y_e es estable cuando $x_e = x_{e_d}$ y $\theta_e = \theta_{e_d}$, con x_{e_d} y θ_{e_d} definidos por (3.30). Por lo anterior se utilizan las variables definidas en (3.9) y se sustituye (3.30) llegando a,

$$\tilde{x}_e = x_e - k_3\omega y_e - \frac{v_l\gamma}{\omega}, \tag{3.33a}$$

$$\tilde{\theta}_e = \theta_e. \tag{3.33b}$$

Nótese que de (3.33b) se tiene que $\dot{\tilde{\theta}}_e = \dot{\theta}_e$. Derivando con respecto al tiempo la ecuación (3.33a),

$$\dot{\tilde{x}}_e = \dot{x}_e - k_3(\omega\dot{y}_e + \dot{\omega}y_e) - \frac{(\dot{v}_l\gamma + v_l\dot{\gamma})\,\omega - \dot{\omega}v_l\gamma}{\omega^2}. \tag{3.34}$$

Sustituyendo (3.3a) y (3.3b) en (3.34) se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_e = &- k_3\left\{\omega\left[-\omega x_e + v_r\sin(\theta_e) + v_l\gamma\right] + \dot{\omega}y_e\right\}\\ &+ \omega y_e + v_r\cos(\theta_e) - v_l - \frac{(\dot{v}_l\gamma + v_l\dot{\gamma})\,\omega - \dot{\omega}v_l\gamma}{\omega^2}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Definiendo ahora,

$$\begin{aligned}v_2 = &- k_3\left\{\omega\left[-\omega x_e + v_r\sin(\theta_e) + v_l\gamma\right] + \dot{\omega}y_e\right\}\\ &+ \omega y_e + v_r\cos(\theta_e) - v_l - \frac{v_l\dot{\gamma}\omega - \dot{\omega}v_l\gamma}{\omega^2},\end{aligned} \tag{3.36}$$

se puede reescribir la ecuación (3.35) en la forma,

$$\dot{\tilde{x}}_e = v_2 - \dot{v}_l\frac{\gamma}{\omega}. \tag{3.37}$$

Se propone ahora la función candidata de Lyapunov,

$$V_3 = \frac{1}{2}\tilde{x}_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 + \frac{1}{2}\theta_e^2, \tag{3.38}$$

la cual es definida positiva y cuya derivada con respecto al tiempo es,

$$\dot{V}_3 = \tilde{x}_e\dot{\tilde{x}}_e + y_e\dot{y}_e + \theta_e\dot{\theta}_e. \tag{3.39}$$

Sustituyendo (3.37), (3.3b) y (3.3c) en (3.39), se llega a,

$$\dot{V}_3 = \tilde{x}_e \left(v_2 - \dot{v}_l \frac{\gamma}{\omega} \right) + y_e \left[-\omega x_e + v_r \sin(\theta_e) + v_l \gamma \right] + \theta_e \left(\omega_r - \omega \right). \quad (3.40)$$

De la ecuación (3.33a) se tiene que $x_e = \tilde{x}_e + k_3 \omega y_e + \frac{v_l \gamma}{\omega}$ y al sustituir esta definición en (3.40), resulta,

$$\dot{V}_3 = \tilde{x}_e \left(v_2 - \dot{v}_l \frac{\gamma}{\omega} \right) + y_e \left[-\omega \tilde{x}_e - k_3 \omega^2 y_e + v_r \sin(\theta_e) \right] + \theta_e \left(\omega_r - \omega \right). \quad (3.41)$$

Factorizando términos, se puede reescribir la ecuación (3.41) de la forma,

$$\dot{V}_3 = \tilde{x}_e \left(-\omega y_e + v_2 - \dot{v}_l \frac{\gamma}{\omega} \right) - k_3 \omega^2 y_e^2 + \theta_e \left[\omega_r - \omega + y_e v_r \frac{\sin(\theta_e)}{\theta_e} \right]. \quad (3.42)$$

Escogiendo las entradas de control como,

$$\dot{v}_l = \frac{\omega}{\gamma} \left(v_2 - \omega y_e + k_1 \tilde{x}_e \right), \quad (3.43a)$$

$$\omega = \omega_r + y_e v_r \frac{\sin(\theta_e)}{\theta_e} + k_2 \theta_e, \quad (3.43b)$$

donde $k_1, k_2 > 0 \in \mathbb{R}$, la ecuación (3.42) toma la forma,

$$\dot{V}_3 = -k_1 \tilde{x}_e^2 - k_3 \omega^2 y_e^2 - k_2 \theta_e^2 \leq 0. \quad (3.44)$$

De acuerdo a la ecuación (3.44) se puede concluir que la retroalimentación de (3.43) estabilizan el sistema (3.3).

Observación 3.2. Es importante señalar que para implementar la retroalimentación de (3.43), la perturbación γ debe satisfacer $\gamma \neq 0$. Además, de acuerdo al valor deseado x_{e_d} descrito por (3.30a), la implementación de esta solución se limita a trayectorias para las cuales se cumpla dicha condición.

A diferencia de la solución expuesta en la subsección anterior, ésta solución muestra una mejora al no presentar singularidades. Debido a que las trayectorias deseadas se limitan a trayectorias curvas ($\omega \neq 0$) se supone que siempre se tendrá perturbación por deslizamiento ($\gamma \neq 0$). Sin embargo, se tiene el inconveniente de que x_e converge a un valor diferente a cero.

3.2. Control con estimador de perturbaciones

Para la propuesta desarrollada en esta sección se considera que las magnitudes de las perturbaciones son constantes conocidas.

En la presente sección se desarrolla el esquema propuesto en [9], el cual está basado en la técnica de *backstepping* para el problema de seguimiento de un RMR considerando los efectos de deslizamiento y patinado. Se considera la transformación,

$$\hat{\xi}_e(t) = R_P(\theta)\tilde{\xi}(t), \tag{3.45}$$

donde $\hat{\xi}_e(t) = \left[\hat{x}_e(t), \hat{y}_e(t), \hat{\theta}_e(t)\right]^T$, $\tilde{\xi}(t) = \left[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{\theta}(t)\right]^T$ y

$$R_P(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) + \gamma sin(\theta) & sin(\theta) - \gamma cos(\theta) & 0 \\ -sin(\theta) + \gamma cos(\theta) & cos(\theta) + \gamma sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por simplicidad, a partir de ahora se obviara la dependencia del tiempo de estas variables. Se puede observar que la matriz $R_P(\theta)$ es una matriz invertible ya que $Det\,(R_P) = \gamma^2 + 1$, además, si $\gamma = 0$ se cumple $R_P(\theta) = R(\theta)$.

Debido al estimador de perturbaciones que se presenta en la siguiente subsección, se consideran conocidas las perturbaciones para el desarrollo del esquema de control, por lo que se considera el modelo cinemático de (3.1) con entradas de control descritas por (3.2). Derivando con respecto al tiempo la ecuación (3.45), sustituyendo (3.1) y (2.29) y desarrollando se llega a,

$$\dot{\hat{x}}_e = \omega\hat{y}_e + (1+\gamma^2)v_r\cos(\hat{\theta}_e) - (1+\gamma^2)v_l, \tag{3.46a}$$

$$\dot{\hat{y}}_e = -\omega\hat{x}_e + (1+\gamma^2)v_r\sin(\hat{\theta}_e), \tag{3.46b}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_e = \omega_r - \omega. \tag{3.46c}$$

Se propone la función candidata de Lyapunov,

$$V_4 = \frac{1}{2}\left(\hat{x}_e^2 + \hat{y}_e^2\right) + \frac{1-\cos(\hat{\theta}_e)}{m_2}, \tag{3.47}$$

donde $m_2 > 0 \in \mathbb{R}$, la cual es definida positiva y cuya derivada con respecto al tiempo es,

$$\dot{V}_4 = \hat{x}_e\dot{\hat{x}}_e + \hat{y}_e\dot{\hat{y}}_e + \frac{\dot{\hat{\theta}}_e \sin(\hat{\theta}_e)}{m_2}. \tag{3.48}$$

Sustituyendo (3.46) en (3.48) se llega a,

$$\begin{aligned}\dot{V}_4 =& \hat{x}_e \left[\omega\hat{y}_e + (1+\gamma^2)v_r\cos(\hat{\theta}_e) - (1+\gamma^2)v_l\right] \\ &+ \hat{y}_e\left[-\omega\hat{x}_e + (1+\gamma^2)v_r\sin(\hat{\theta}_e)\right] + \frac{(\omega_r-\omega)\sin(\hat{\theta}_e)}{m_2}.\end{aligned} \tag{3.49}$$

Proponiendo las entradas de control como,

$$v_l = \left(\frac{1}{1+\gamma^2}\right)\left[\left(1+\gamma^2\right)v_r\cos(\theta_e) + m_1\hat{x}_e\right], \tag{3.50a}$$

$$\omega = \omega_r + (1+\gamma^2)m_2 v_r\hat{y}_e + m_3 v_r^2\sin(\hat{\theta}_e), \tag{3.50b}$$

donde $m_1, m_3 > 0 \in \mathbb{R}$, y sustituyendo (3.50) en (3.49) se obtiene,

$$\dot{V}_4 = -m_1\hat{x}_e^2 - \frac{m_3}{m_2}v_r^2\sin^2(\hat{\theta}_e). \tag{3.51}$$

Se puede garantizar estabilidad en lazo cerrado mostrando que $\hat{\xi}_e = [0,0,0]^T$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Sea el dominio D dado por,

$$D = \left\{\hat{\xi}_e \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\pi < \hat{\theta}_e < \pi\right\}. \tag{3.52}$$

Entonces, la función de Lyapunov V_4 es definida positiva en D', dado por,

$$D' = \left\{\hat{\xi}_e \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\pi < \hat{\theta}_e < \pi, \hat{\theta}_e \neq 0\right\}, \tag{3.53}$$

con derivada $\dot{V}_4 \leq 0$ en el dominio D, esto es,

$$\dot{V}_4 = -m_1\hat{x}_e^2 - \frac{m_3}{m_2}v_r^2\sin^2(\hat{\theta}_e) \leq 0. \tag{3.54}$$

Con $t \in [0,\infty)$, la función de Lyapunov V_4 es una función no creciente, por lo que se concluye,

$$V_4(t) \leq V_4(0), \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.55}$$

La ecuación (3.55) implica que la función de Lyapunov V_4 es acotada con $t \in [0, \infty)$. Por lo antes mencionado, de la ecuación (3.47) se puede concluir que $\hat{y}_e$ y $\hat{x}_e$ son acotados con $t \in [0, \infty)$. Suponiendo que v_r y ω_r son acotados, de la ecuación (3.50) se puede concluir que el control v_l y ω son acotados. Además, de la ecuación (3.46) se puede concluir que $\dot{\hat{\xi}}_e = [\dot{\hat{x}}_e, \dot{\hat{y}}_e, \dot{\hat{\theta}}_e]^T$ es acotado. Considerando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.51), dada por,

$$\ddot{V}_4 = -m_1 \hat{x}_e \dot{\hat{x}}_e - \frac{m_3}{m_2} \left[2v_r^2 \dot{\hat{\theta}}_e \sin(\hat{\theta}_e) \cos(\hat{\theta}_e) + 2v_r \dot{v}_r \sin^2(\hat{\theta}_e) \right], \tag{3.56}$$

se puede concluir que $\ddot{V}_4$ es acotada, así que $\dot{V}_4$ es uniformemente continua, por el lema de Barbalat se tiene que $\dot{V}_4 \to 0$ cuando $t \to \infty$. De la ecuación (3.54), se puede concluir que $\hat{x}_e \to 0$ y $\hat{\theta}_e \to 0$ cuando $t \to \infty$. Para probar que $\hat{y}_e \to 0$ cuando $t \to \infty$ se sustituye ω de la ecuación (3.50b) en (3.46c), llegando a,

$$\dot{\hat{\theta}}_e = -(1 + \gamma^2) m_2 v_r \hat{y}_e - m_3 v_r^2 \sin(\hat{\theta}_e). \tag{3.57}$$

Dado que $\hat{x}_e \to 0$, $\hat{\theta}_e \to 0$, a partir de (3.57) se obtiene,

$$0 = -(1 + \gamma^2) m_2 v_r \hat{y}_e, \tag{3.58}$$

con lo cual, si $v_r \neq 0$ se obvia que $\hat{y}_e \to 0$ con lo que se concluye la demostración.

Entonces, el punto de equilibrio $\hat{\xi}_e = [\hat{x}_e, \hat{y}_e, \hat{\theta}_e]^T = [0, 0, 0]^T$ es uniformemente asintóticamente estable. Esto implica que el RMR puede converger asintóticamente a la referencia $\xi_r = [x_r, y_r, \theta_r]^T$ desde un punto inicial arbitrario $\xi = [x, y, \theta]^T$.

3.2.1. Estimador de perturbaciones

Para la correcta implementación de la retroalimentación de (3.50) se requiere conocer las magnitudes de las perturbaciones κ_R, κ_L y γ. Para tal propósito se desarrolla un estimador de perturbaciones.

Se considera nuevamente el modelo cinemático del RMR bajo la influencia de los efectos de patinado y deslizamiento de la ecuación (2.18) de la forma,

$$\dot{x} = \frac{r\omega_L(1-\kappa_L) + r\omega_R(1-\kappa_R)}{2}\left[\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\right], \tag{3.59a}$$
$$\dot{y} = \frac{r\omega_L(1-\kappa_L) + r\omega_R(1-\kappa_R)}{2}\left[\sin(\theta) - \gamma\cos(\theta)\right], \tag{3.59b}$$
$$\dot{\theta} = \frac{r\omega_R(1-\kappa_R) - r\omega_L(1-\kappa_L)}{b}. \tag{3.59c}$$

De acuerdo a la definición de v_l de la ecuación (2.12a), se puede reescribir la ecuación (3.59) de la forma,

$$\dot{x} = v_l\left[\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\right], \tag{3.60a}$$
$$\dot{y} = v_l\left[\sin(\theta) - \gamma\cos(\theta)\right], \tag{3.60b}$$
$$\dot{\theta} = \frac{2v_l}{b} - \frac{2r}{b}\omega_L(1-\kappa_L) = -\frac{2v_l}{b} + \frac{2r}{b}\omega_R(1-\kappa_R). \tag{3.60c}$$

Se propone un estimador por modos deslizantes (OMD) basado en [17], descrito por,

$$\dot{\hat{x}} = v_l\cos(\theta) + M_1 sgn\left(x - \hat{x}\right) + M_2\left(x - \hat{x}\right), \tag{3.61a}$$
$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{2v_l}{b} + M_3 sgn\left(\theta - \hat{\theta}\right) + M_2\left(\theta - \hat{\theta}\right), \tag{3.61b}$$
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\frac{2v_l}{b} + M_4 sgn\left(\theta - \hat{\theta}_1\right) + M_2\left(\theta - \hat{\theta}_1\right), \tag{3.61c}$$

donde $M_i > 0$, con $i = 1$, 2, 3 y 4 son ganancias constantes positivas, $\dot{\hat{x}}$ es el estimado de la velocidad del RMR en el eje X, $\dot{\hat{\theta}}$ es el estimado de la velocidad direccional del RMR o la taza de cambio del ángulo yaw, $\dot{\hat{\theta}}_1$ es el estimado de la velocidad direccional del RMR utilizada para el diseño apropiado de la superficie deslizante la cuál estabiliza todas las variables de postura y $sgn(z)$ es la función signo definida por,

$$sgn(z) = \begin{cases} -1, & z \leq 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases} \tag{3.62}$$

Definiendo los errores de observación como,

$$\tilde{x}_o = x - \hat{x}, \tag{3.63a}$$
$$\tilde{\theta}_o = \theta - \hat{\theta}, \tag{3.63b}$$
$$\tilde{\theta}_1 = \theta - \hat{\theta}_1, \tag{3.63c}$$

y derivando con respecto al tiempo se obtiene,

$$\dot{\tilde{x}}_o = \dot{x} - \dot{\hat{x}}, \tag{3.64a}$$
$$\dot{\tilde{\theta}}_o = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}}, \tag{3.64b}$$
$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}}_1. \tag{3.64c}$$

Sustituyendo (3.60) y (3.61) en (3.64) se llega a,

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_o &= v_l\left[\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\right] - v_l\cos(\theta) - M_1 sgn\left(x - \hat{x}\right) - M_2\left(x - \hat{x}\right), \\
\dot{\tilde{\theta}}_o &= \frac{2v_l}{b} - \frac{2r}{b}\omega_L(1-\kappa_L) - \frac{2v_l}{b} - M_3 sgn\left(\theta - \hat{\theta}\right) - M_2\left(\theta - \hat{\theta}\right), \\
\dot{\tilde{\theta}}_1 &= -\frac{2v_l}{b} + \frac{2r}{b}\omega_R(1-\kappa_R) + \frac{2v_l}{b} - M_4 sgn\left(\theta - \hat{\theta}_1\right) - M_2\left(\theta - \hat{\theta}_1\right),
\end{aligned}$$

que al desarrollar resulta,

$$\dot{\tilde{x}}_o = v_l\gamma\sin(\theta) - M_1 sgn\left(x - \hat{x}\right) - M_2\left(x - \hat{x}\right), \tag{3.65a}$$
$$\dot{\tilde{\theta}}_o = -\frac{2r}{b}\omega_L(1-\kappa_L) - M_3 sgn\left(\theta - \hat{\theta}\right) - M_2\left(\theta - \hat{\theta}\right), \tag{3.65b}$$
$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = \frac{2r}{b}\omega_R(1-\kappa_R) - M_4 sgn\left(\theta - \hat{\theta}_1\right) - M_2\left(\theta - \hat{\theta}_1\right). \tag{3.65c}$$

La dinámica de error de la ecuación (3.65) debe converger a la superficie de deslizamiento en un tiempo finito con la selección adecuada de las ganancias de modos deslizantes, esto es $\hat{x} \to x$, $\hat{\theta} \to \theta$, $\hat{\theta}_1 \to \theta$, por lo que la ecuación (3.65) produce,

$$v_l\gamma\sin(\theta) - M_1 sgn\left(x - \hat{x}\right) \approx 0, \tag{3.66a}$$
$$-\frac{2r}{b}\omega_L(1-\kappa_L) - M_3 sgn\left(\theta - \hat{\theta}\right) \approx 0, \tag{3.66b}$$
$$\frac{2r}{b}\omega_R(1-\kappa_R) - M_4 sgn\left(\theta - \hat{\theta}_1\right) \approx 0. \tag{3.66c}$$

Despejando $\hat{\kappa}_R$, $\hat{\kappa}_L$ y $\hat{\gamma}$ de la ecuación (3.66) se tiene,

$$\hat{\gamma} = \frac{M_1 sgn\,(x - \hat{x})}{v_l sin(\theta)}, \tag{3.67a}$$

$$\hat{\kappa}_L = 1 + \frac{b}{2r\omega_L} M_3 sgn\left(\theta - \hat{\theta}\right), \tag{3.67b}$$

$$\hat{\kappa}_R = 1 - \frac{b}{2r\omega_R} M_4 sgn\left(\theta - \hat{\theta}_1\right). \tag{3.67c}$$

Finalmente, se aplica un filtro pasa bajas a lo calculado en la ecuación (3.67) para reducir el efecto de castañeo (*chattering*) y así se obtienen los valores estimados de las perturbaciones por deslizamiento y patinado.

3.3. Conclusiones del capítulo

Las soluciones mostradas en el presente capítulo proponen diferentes estrategias para atacar el problema de seguimiento. En el caso del control por *backstepping*, el cual considera las magnitudes de las perturbaciones como conocidas lo que facilita la dinámica de errores de seguimiento de trayectoria, se tienen dos casos para los cuales se proponen valores deseados de las variables a controlar; en el caso de la retroalimentación estática se propone que el error de orientación converja a un valor diferente de cero, además de condicionar la trayectoria deseada de modo que $v_r \neq 0$. De esta manera se logra que la posición del robot converja a la trayectoria deseada pero se tenga un error en la orientación. En el caso de la retroalimentación dinámica se busca que el error en la coordenada x del robot en el marco inercial converja a un valor diferente de cero; con lo anterior se logra obtener una retroalimentación, que aunque limita a la trayectoria deseada a que cumpla con la condición $\omega \neq 0$, es mucho más sencilla de implementar con respecto al caso de la retroalimentación estática. Sin embargo ésta ultima puede presentar errores significativos en la posición del robot con respecto a la trayectoria de referencia. La segunda estrategia propone una retroalimentación desarrollada mediante teoría de estabilidad de Lyapunov. Esta estrategia se apoya de un estimador de perturbaciones y poder considerar las magnitudes de las mismas como conocidas, con esto se puede utilizar una matriz de rotación que contiene el efecto de deslizamiento y así obtener una dinámica de errores de seguimiento de trayectoria que facilite el desarrollo de la ley de control. Es importante destacar que el esquema propuesto en este trabajo de tesis pretende mejorar el desempeño en el seguimiento de trayectorias con respecto a

las estrategias mostradas en éste capítulo, abarcando condiciones de trabajo que se acerquen más a la realidad como el hecho de que las perturbaciones sean desconocidas y variables en el tiempo.

Capítulo 4

Esquema de control propuesto

El esquema de control propuesto en este trabajo se compone de dos partes, el control de orientación que está basado en un observador de estado extendido y el control de posición que utiliza la técnica de *backstepping* en conjunto con pasivación por retroalimentación y modos deslizantes. Se buscó tener un enfoque robusto para compensar las perturbaciones de patinado y deslizamiento, cuyas magnitudes se consideran desconocidas pero acotadas y lograr un desempeño que mejore significativamente los resultados en los esquemas presentados en el capítulo pasado.

Se considera la dinámica de errores de (2.39) con los términos de perturbación (2.40) y la Suposición 2.2. Se tiene como objetivo encontrar las entradas de control $\bar{v}_l$ y $\bar{\omega}$ que logren que $\xi_e = [x_e(t), y_e(t), \theta_e(t)]^T \to 0$ cuando $t \to \infty$.

4.1. Control de posición

La metodología utilizada para el desarrollo de este esquema está inspirada en [19] donde se consideran perturbaciones de un robot móvil diferencial sin especificar su origen, a diferencia de este trabajo donde se han asociado a efectos de deslizamiento y patinado. Considérese la dinámica (2.39b) con $f_2 = 0$, es decir,

$$\dot{y}_e = -\bar{\omega} x_e + v_r \sin(\theta_e). \tag{4.1}$$

Se propone la función de conmutación,

$$s_1 = y_e + q_1 \int_0^t y_e(\tau) d\tau, \tag{4.2}$$

donde $q_1 > 0 \in \mathbb{R}$. La función de conmutación define la superficie deslizante $s_1 = 0$, en la que $\dot{s}_1 = 0$, esto es,

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_e + q_1 y_e = 0. \tag{4.3}$$

La solución de la ecuación diferencial (4.3) lleva a la conclusión de que $y_e \to 0$ cuando $t \to \infty$. Para asegurar que todas las trayectorias de $\dot{y}_e$ sean atraídas a la superficie deslizante $s_1 = 0$, se hace la asignación basada en [20],

$$\dot{s}_1 = F_1(s_1) = -\gamma_1 signo(s_1), \tag{4.4}$$

donde $\gamma_1 > 0 \in \mathbb{R}$ y la función $signo(\cdot)$ es la función signo definida por,

$$signo(z) = \begin{cases} -1, & z < 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases}$$

De acuerdo a esta asignación, la ecuación (4.3) se puede reescribir como,

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_e + q_1 y_e = -\gamma_1 signo(s_1). \tag{4.5}$$

Sustituyendo la ecuación (4.1) en (4.5) se llega a,

$$-\bar{\omega} x_e + v_r \sin(\theta_e) + q_1 y_e = -\gamma_1 signo(s_1). \tag{4.6}$$

Al escoger $\alpha_1 = v_r \sin(\theta_e)$ como una entrada de control virtual, a partir de la ecuación (4.6) se tiene que,

$$\alpha_1 = -q_1 y_e + \bar{\omega} x_e - \gamma_1 signo(s_1). \tag{4.7}$$

Para el caso en que $f_2 \neq 0$, es posible garantizar la atracción a la superficie $s_1 = 0$. Considérese la función candidata de Lyapunov,

$$V_5 = \frac{1}{2} s_1^2, \tag{4.8}$$

la cual es definida positiva y cuya derivada con respecto al tiempo es,

$$\dot{V}_5 = s_1 \dot{s}_1. \tag{4.9}$$

Sustituyendo (4.3) en (4.9) se llega a,

$$\dot{V}_5 = s_1 \left(\dot{y}_e + q_1 y_e \right),$$

y por (2.39b) se tiene,

$$\dot{V}_5 = s_1 \left(-\bar{\omega} x_e + \alpha_1 + f_2 + q_1 y_e\right). \tag{4.10}$$

Sustituyendo el control virtual (4.7) en (4.10) y desarrollando resulta,

$$\dot{V}_5 = -\gamma_1 signo(s_1) s_1 + f_2 s_1. \tag{4.11}$$

Tomando en cuenta que $signo(x)x = |x|$ y considerando que f_2 cumple la Suposición 2.2, se puede mayorar la ecuación (4.11) de modo que,

$$\dot{V}_5 \leq -\gamma_1 |s_1| + \eta_2 |s_1| \leq -(\gamma_1 - \eta_2)|s_1| \leq 0. \tag{4.12}$$

Escogiendo γ_1 tal que $\gamma_1 > \eta_2$ se tiene que $\dot{V}_5 < 0$ y, por lo tanto, s_1 converge a 0.

Por otro lado, se propone la función,

$$y = v_r \sin(\theta_e) - \alpha_1, \tag{4.13}$$

como la salida del sistema (2.39), por lo tanto, se cumple,

$$v_r \sin(\theta_e) = y + \alpha_1. \tag{4.14}$$

Al sustituir (4.14) en (2.39b) se llega a,

$$\dot{y}_e = -\bar{\omega} x_e + y + \alpha_1 + f_2,$$

y por (4.7) se tiene,

$$\dot{y}_e = y - q_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1) + f_2. \tag{4.15}$$

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (4.13), se obtiene,

$$\dot{y} = \dot{v}_r \sin(\theta_e) + v_r \dot{\theta}_e \cos(\theta_e) - \dot{\alpha}_1, \tag{4.16}$$

donde,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 = &- q_1 \left[y - q_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1) + f_2\right] \\ &- \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \left[signo(s_1)\right] \dot{s}_1 + \dot{\bar{\omega}} x_e \\ &+ \bar{\omega} \left[\bar{\omega} y_e + v_r \cos(\theta_e) - \bar{v}_l + f_1\right].\end{aligned}$$

Con el fin de obtener $\dot{s}_1$ en términos de la salida y, se sustituye la ecuación (4.15) en (4.3) llegando a,

$$\dot{s}_1 = y - \gamma_1 signo(s_1) + f_2. \tag{4.17}$$

Entonces, la ecuación (4.16) se puede reescribir de la forma,

$$\dot{y} = \alpha_2 + \bar{\omega}\bar{v}_l + \Delta f, \tag{4.18}$$

donde,

$$\begin{aligned}\alpha_2 = \quad & \dot{v}_r \sin(\theta_e) + v_r(\omega_r - \bar{\omega})\cos(\theta_e) \\ & + q_1 \left[y - q_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1)\right] \\ & + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left[signo(s_1)\right]\left[y - \gamma_1 signo(s_1)\right] \\ & - \dot{\bar{\omega}} x_e - \bar{\omega}\left[\bar{\omega} y_e + v_r \cos(\theta_e)\right],\end{aligned}$$

y Δf es un término de perturbación dado por,

$$\Delta f = f_3 v_r \cos(\theta_e) + q_1 f_2 + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left[signo(s_1)\right] f_2 - f_1 \bar{\omega}.$$

Es importante observar que, debido a las características del modelo virtual (2.29) y a la Suposición 2.2, se tiene que Δf está acotada, es decir, Δf satisface,

$$|\Delta f| \leq \eta_{\Delta f}, \tag{4.19}$$

donde $\eta_{\Delta f}$ es una constante real positiva diferente de cero.

Se tiene entonces el nuevo sistema dado por,

$$\dot{y}_e = y - q_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1) + f_2, \tag{4.20a}$$
$$\dot{y} = \alpha_2 + \bar{\omega}\bar{v}_l + \Delta f. \tag{4.20b}$$

Se busca ahora una retroalimentación que haga pasivo al sistema (4.20) para el caso en que $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, es decir, sin términos de perturbación. Se propone la retroalimentación,

$$\bar{v}_l = \frac{1}{\bar{\omega}}\left(-\alpha_2 + v\right), \tag{4.21}$$

donde $\bar{\omega} \neq 0$ y v es una nueva entrada. Entonces el sistema (4.20), sin términos de perturbación, se reescribe en la forma,

$$\dot{y}_e = y - q_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1), \tag{4.22a}$$
$$\dot{y} = v. \tag{4.22b}$$

Se propone ahora la función de almacenamiento,

$$V_6 = V_5 + \frac{1}{2}y^2, \tag{4.23}$$

donde V_5 está dada por (4.8). La derivada con respecto al tiempo de V_6 es,

$$\dot{V}_6 = s_1\dot{s}_1 + y\dot{y}. \tag{4.24}$$

Al sustituir (4.17) y (4.22b) en (4.24), se tiene que,

$$\dot{V}_6 = s_1\left[y - \gamma_1 signo(s_1)\right] + yv. \tag{4.25}$$

Definiendo la entrada v como,

$$v = -s_1 + \omega_n, \tag{4.26}$$

donde ω_n es una nueva entrada, se tiene que,

$$\dot{V}_6 = -\gamma_1 signo(s_1)s_1 + y\omega_n. \tag{4.27}$$

Considerando nuevamente que $signo(x)x = |x|$, la ecuación (4.27) se puede reescribir como,

$$\dot{V}_6 = -\gamma_1|s_1| + y\omega_n. \tag{4.28}$$

De la ecuación (4.28) se concluye que,

$$\dot{V}_6 \leq y\omega_n, \tag{4.29}$$

y por lo tanto, la retroalimentación (4.21) y (4.26) hace pasivo al sistema (4.20) desde la entrada ω_n hasta la salida y, considerando que no hay términos de perturbación ($\Delta f = f_1 = f_2 = f_3 = 0$).

Al sustituir la ecuación (4.26) en el sistema (4.22) se obtiene,

$$\dot{y}_e = y - q_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1), \tag{4.30a}$$
$$\dot{y} = -s_1 + \omega_n, \tag{4.30b}$$

el cual, para un modo deslizante ideal en la superficie $s_1 = 0$ es estado cero observable, haciendo posible asignar una retroalimentación de la forma,

$$\omega_n = -q_2 y, \tag{4.31}$$

donde $q_2 > 0 \in \mathbb{R}$, que logra estabilidad asintótica del sistema (4.22) [21].

Es importante observar que al lograr la estabilidad asintótica del sistema (4.22), $y_e \to 0$ y $y \to 0$ cuando $t \to \infty$, lo que implica que la ecuación (4.13) toma la forma,

$$v_r \sin(\theta_e) \approx \alpha_1,$$

y por (4.7) se tiene,

$$v_r \sin(\theta_e) \approx \bar{\omega} x_e - \gamma_1 signo(s_1). \tag{4.32}$$

Si, además la dinámica del error de orientación tiende a cero rápidamente, entonces,

$$\bar{\omega} x_e \approx \gamma_1 signo(s_1). \tag{4.33}$$

Ya que $signo(s_1)$ no está definida en $s_1 = 0$, x_e oscilará alrededor de 0 para $\bar{\omega} \neq 0$.

Para asegurar que se mantenga la propiedad de pasividad para el caso en que $\Delta f \neq 0$, se define una segunda función de conmutación,

$$s_2 = y - \int_0^t v(\tau) d\tau. \tag{4.34}$$

La ecuación (4.34) define la superficie deslizante $s_2 = 0$, en donde se tiene que $\dot{s}_2 = 0$, esto es,

$$\dot{s}_2 = \dot{y} - v = 0, \tag{4.35}$$

o, en forma equivalente,

$$\dot{y} = v. \tag{4.36}$$

Una vez que las trayectorias del sistema son atraídas a la superficie $s_2 = 0$, el control (4.21) (control equivalente) asegura que permanezcan en ella. En esta superficie la señal v dada por (4.26) hace que el sistema sea pasivo desde la entrada ω_n hasta la salida y. La asignación (4.31) logra además estabilidad

asintótica.

Para asegurar que las trayectorias del sistema sean atraídas a la superficie $s_2 = 0$, se hace la asignación [20],

$$\dot{s}_2 = F_2(s_2) = -\gamma_2 signo(s_2), \tag{4.37}$$

donde $\gamma_2 > 0 \in \mathbb{R}$. De acuerdo a esta asignación, la ecuación (4.35) se puede reescribir de la forma,

$$\dot{y} = v - \gamma_2 signo(s_2). \tag{4.38}$$

Para llevar la ecuación (4.20b), para $\Delta f = 0$, a la forma de (4.38) se modifica la señal de control (4.21) de modo que resulta,

$$\bar{v}_l = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(-\alpha_2 + v - \gamma_2 signo(s_2)\right), \tag{4.39}$$

donde v está dado por (4.26). La retroalimentación (4.39) está restringida a trayectorias para las cuales $\bar{\omega} \neq 0$.

Al igual que para la superficie de deslizamiento $s_1 = 0$, se puede dar una condición de suficiencia para la ganancia γ_2, en función de la cota de Δf, que asegura la convergencia de la dinámica del sistema (4.20) a la superficie de deslizamiento $s_2 = 0$. Considérese la función candidata de Lyapunov,

$$V_7 = \frac{1}{2} s_2^2, \tag{4.40}$$

la cual es definida positiva y cuya derivada con respecto al tiempo es,

$$\dot{V}_7 = s_2 \dot{s}_2, \tag{4.41}$$

Sustituyendo (4.35) en (4.41) se llega a,

$$\dot{V}_7 = s_2 \left(\dot{y} - v\right),$$

y por (4.20b) se tiene,

$$\dot{V}_7 = s_2 \left(\alpha_2 + \bar{\omega}\bar{v}_l + \Delta f - v\right). \tag{4.42}$$

Al sustituir la retroalimentación (4.39) en (4.42) se obtiene,

$$\dot{V}_7 = -\gamma_2 signo(s_2) s_2 + \Delta f s_2. \tag{4.43}$$

Considerando que Δf satisface (4.19) y que $signo(x)x = |x|$, se puede mayorar la ecuación (4.43) de modo que,

$$\dot{V}_7 \leq -\gamma_2|s_2| + \eta_{\Delta f}|s_2| \leq -\left(\gamma_2 - \eta_{\Delta f}\right)|s_2|. \tag{4.44}$$

Escogiendo γ_2 tal que $\gamma_2 > \eta_{\Delta f}$ se tiene que $\dot{V}_7 < 0$ y, por lo tanto, s_2 converge a 0.

4.2. Control de orientación

Para alcanzar una orientación del RMR deseada se considera la dinámica de la ecuación (2.39c) de la forma,

$$\dot{\theta}_e = \omega_r + f_3 - \bar{\omega}$$

donde f_3 es un término de perturbación que cumple con la Suposición 2.2. Se tiene como objetivo encontrar una entrada de control $\bar{\omega}$ que lleve $\theta_e \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, que lleve la ecuación anterior a la forma,

$$\dot{\theta}_e = -q_3\theta_e, \tag{4.45}$$

donde $q_3 > 0 \in \mathbb{R}$. Para tal próposito se propone la entrada de control $\bar{\omega}$ como,

$$\bar{\omega} = \omega_r + \hat{f}_3 + q_3\theta_e, \tag{4.46}$$

donde $\hat{f}_3$ es un estimado del valor real de f_3. Para obtener dicha estimación se utiliza un observador de estado extendido. Se define un nuevo sistema cuyos estados son,

$$x_1 = \int \theta_e dt, \tag{4.47a}$$
$$x_2 = \theta_e, \tag{4.47b}$$
$$x_3 = f_3, \tag{4.47c}$$

con una salida $y_o = x_2$ y una entrada $u_o = \bar{\omega}$. Para obtener la dinámica del nuevo sistema (4.47) se deriva con respecto al tiempo llegando a,

$$\dot{x}_1 = \theta_e = x_2, \tag{4.48a}$$
$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_e = \omega_r + f_3 - \bar{\omega} = \omega_r + x_3 - u_o, \tag{4.48b}$$
$$\dot{x}_3 = \dot{f}_3 = h, \tag{4.48c}$$

donde h es la taza de cambio del término de perturbación f_3, es decir, es parte de la perturbación y también es acotada. Al reescribir la ecuación (4.48) de forma matricial resulta,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_o + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} h, \tag{4.49}$$

con salida,

$$y_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

Se propone un observador basado en [18] de la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_o + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} (y_o - \hat{y}_o), \tag{4.51}$$

donde $L = [L_1, L_2, L_3]^T$ son ganancias constantes reales positivas, el estimado de la salida $\hat{y}_o$ está definido por,

$$\hat{y}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

y la entrada de control u_o está descrita por,

$$u_o = \hat{x}_3 + q_3 \hat{x}_2. \tag{4.53}$$

Con el observador de (4.51) se obtiene la estimación $\hat{x}_3 = \hat{f}_3$ y se puede implementar la retroalimentación (4.46) en la dinámica (2.39c) logrando la estabilidad de la misma. Escogiendo de manera adecuada la constante q_3 se logra que $\theta_e \to 0$ rápidamente.

4.3. Conclusiones del capítulo

En el esquema propuesto en este trabajo de tesis, se presenta una solución al seguimiento de trayectoria considerando los efectos de deslizamiento y patinado como perturbaciones variables en el tiempo cuyas magnitudes se

suponen desconocidas. Se pretende un enfoque robusto para compensar dichas perturbaciones y se trabajan por separado la posición y la orientación del robot. Para el control de posición se utiliza la técnica de pasivación por retroalimentación en conjunto con la técnica de *backstepping*. Se utilizan los modos deslizantes para añadir robustez al esquema de manera que eligiendo los valores adecuados de las ganancias se pueda compensar las perturbaciones a tratar. La retroalimentación propuesta presenta una singularidad cuando $\bar{\omega} = 0$, lo que limita las trayectorias deseadas a que cumplan con dicha condición, esto es, sólo se pueden utilizar trayectorias que no contengan lineas rectas, lo cual no se considera una desventaja del todo debido a que la perturbación por deslizamiento se presenta principalmente en los giros del robot. Para el control de orientación se utiliza un observador de estado extendido el cual presenta robustez contra términos desconocidos como lo son las perturbaciones para este caso. Lo que se busca es estimar la magnitud de la perturbación que afecta directamente en la dinámica del error de orientación del robot. Una vez estimada dicha magnitud se utiliza para implementar la retroalimentación que estabilice la dinámica de orientación.

La comparación que se realiza en está sección, entre los esquemas del capítulo anterior y la propuesto de éste capítulo, se centran en los desarrollos teóricos, reservando la parte experimental para el siguiente capítulo. Se podría considerar que el esquema propuesto en este capítulo presenta algunas mejoras con respecto a las soluciones expuestas en el capítulo anterior. Con respecto a la solución basada en retroalimentación estática, se tienen retroalimentaciones más sencillas de implementar, además de que se mejora teóricamente la convergencia del error de orientación. Con respecto a la solución basada en retroalimentación dinámica, aunque la propuesta de este trabajo presente una mayor complejidad en la implementación de las entradas de control, ésta última mejora significativamente la convergencia del error en la coordenada x. Por último, en cuanto al control con estimador de perturbaciones, se podría considerar una mejoría el hecho de no depender de la estimación de cada una de las perturbaciones modeladas. En general, el enfoque robusto y la convergencia a regiones muy cercanas a cero presentan una ventaja de la propuesta de este trabajo de tesis con respecto a las soluciones mostradas en el capítulo anterior.

Capítulo 5

Resultados Experimentales

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos al implementar los esquemas de control expuestos en el Capítulo 3 y el esquema propuesto del Capítulo 4 mediante simulación numérica, además se realiza una comparación con dichos resultados. También se presentan los resultados obtenidos al implementar el esquema de control del Capítulo 4 mediante simulación con la plataforma ROS en conjunto con el simulador de entornos gráficos 3D Gazebo.

5.1. Simulaciones numéricas

Las simulaciones numéricas que se muestran en esta sección se realizaron con el software MATLAB-Simulink. Se presentan simulaciones de los cuatro esquemas de control desarrollados previamente, utilizando trayectorias circular y tipo flor como referencia. Se utilizaron los valores de condiciones inciales $x = 4{,}2$, $y = 2{,}2$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$, y $x = 1{,}95$, $y = 0{,}6$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, para las trayectorias circular y tipo flor, respectivamente. La trayectoria circular se obtiene mediante,

$$x_r = 2\cos\left(\frac{5\pi}{100}t\right) + 2, \tag{5.1a}$$

$$y_r = 2\sin\left(\frac{5\pi}{100}t\right) + 2. \tag{5.1b}$$

Por otra parte la trayectoria tipo flor se obtiene por medio de,

$$x_r = \cos\left(\frac{15\pi}{100}t\right)\cos\left(\frac{5\pi}{100}t\right) + 1, \tag{5.2a}$$

$$y_r = \cos\left(\frac{15\pi}{100}t\right)\sin\left(\frac{5\pi}{100}t\right) + 1. \tag{5.2b}$$

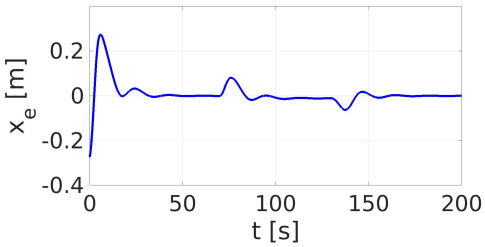
Se utilizó la frecuencia $\frac{5\pi}{100}t$ para las trayectorias deseadas buscando un correcto funcionameinto de los controladores. Las perturbaciones se consideran como constantes o funciones variantes en el tiempo dependiendo de cada esquema simulado, sin embargo se introducen en todas las simulaciones en un período de $t_1 = 70s$ a $t_2 = 130s$.

5.1.1. Control por *backstepping* (Solución basada en retroalimentación estática)

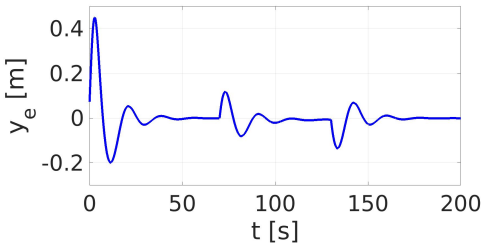
Se utilizó el modelo cinemático (3.1) con las entradas de control dadas por (3.20) y (3.28). Se consideraron los valores de parámetros $\epsilon = \sigma = \frac{\pi}{2}$ en la ecuación (3.5), $c_1 = c_2 = 0{,}1$ en las ecuaciones (3.20) y (3.28), respectivamente, y las perturbaciones como $\gamma = tan(\delta)$ con $\delta = \frac{\pi}{16}$ en la ecuación (3.1) e $\kappa_R = \kappa_L = 0{,}5$ en la ecuación (3.2). Los resultados obtenidos para la trayectoria tipo circular se muestran en la Figura 5.1.

De las Figuras 5.1(a) y 5.1(b) se puede observar que los errores x_e e y_e convergen a cero independientemente si hay perturbaciones o no; se presentan oscilaciones en los instantes que se introducen y retiran las perturbaciones. Por otro lado, como se puede observar en la Figura 5.1(c), el error de orientación θ_e converge a cero cuando no se tienen perturbaciones que afecten al sistema, sin embargo, cuando éstas se introducen, dicho error converge a un valor cercano a cero, esto se debe a que la ley de control propuesta hace que este error converja a un valor de orientación deseado θ_{e_d}. Las Figuras 5.1(d) y 5.1(e) muestran las velocidades lineal y angular del RMR, las cuales, al ser una trayectoria circular convergen a un valor constante. En la Figura 5.1(f) se puede apreciar la evolución del RMR en el plano $X - Y$ y como se tiene una convergencia a la trayectoria deseada.

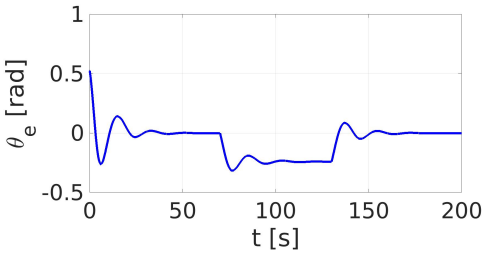
Para el caso de la trayectoria tipo flor de tres pétalos se utilizaron los mismos valores de perturbaciones y de parámetros, con excepción de los parámetros $c_1 = c_2 = 0{,}5$ en las ecuaciones (3.20) y (3.28), respectivamente. En la Figura 5.2 se muestran los resultados obtenidos.



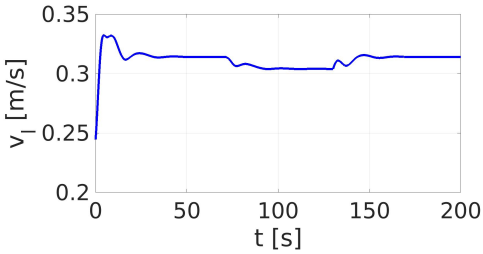
(a) Error en x



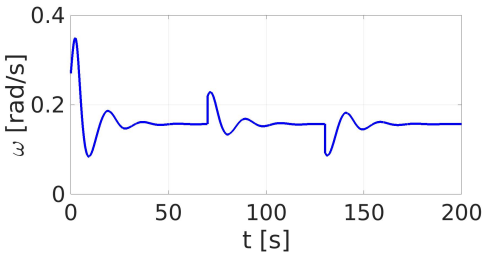
(b) Error en y



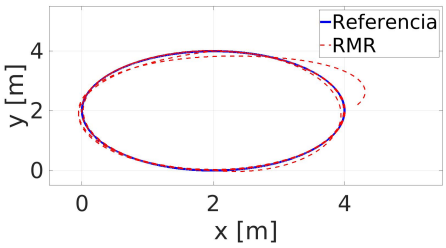
(c) Error en θ



(d) Señal de control v_l

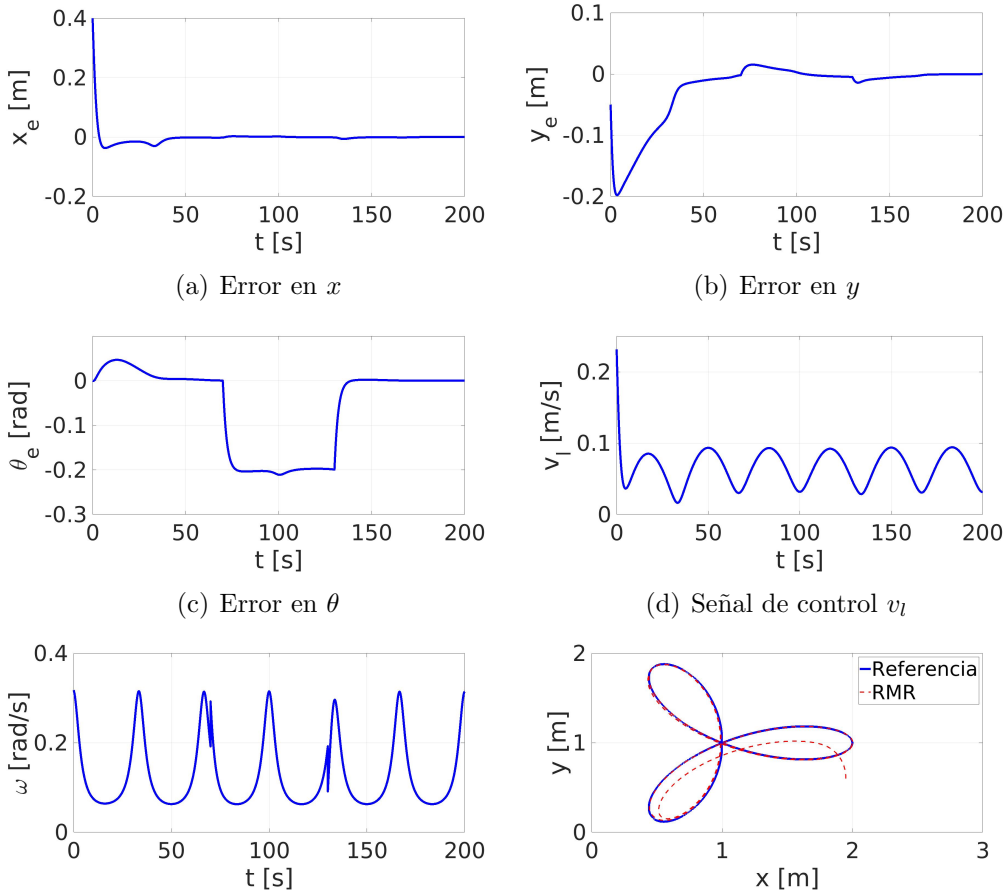


(e) Señal de control ω



(f) Posición en $X - Y$ del RMR

Figura 5.1: Resultados para la solución basada en retroalimentación estática del control por *backstepping* (trayectoria circular).



(a) Error en x

(b) Error en y

(c) Error en θ

(d) Señal de control v_l

(e) Señal de control ω

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

Figura 5.2: Resultados para la solución basada en retroalimentación estática del control por *backstepping* (trayectoria tipo flor).

En las Figuras 5.2(a) y 5.2(b) se puede observar que los errores x_e e y_e presentan un comportamiento similar a los resultados obtenidos para la trayectoria circular. Nuevamente, el error de orientación oscila en una región cercana al valor del ángulo deseado θ_{e_d}, como se puede observar en la Figura 5.2(c).Las entradas de control mostradas en las Figuras 5.1(d) y 5.1(e) se mantienen estables durante todo el tiempo de simulación. En la Figura 5.2(f) se aprecia que el RMR tiene una convergencia aceptable a la referencia.

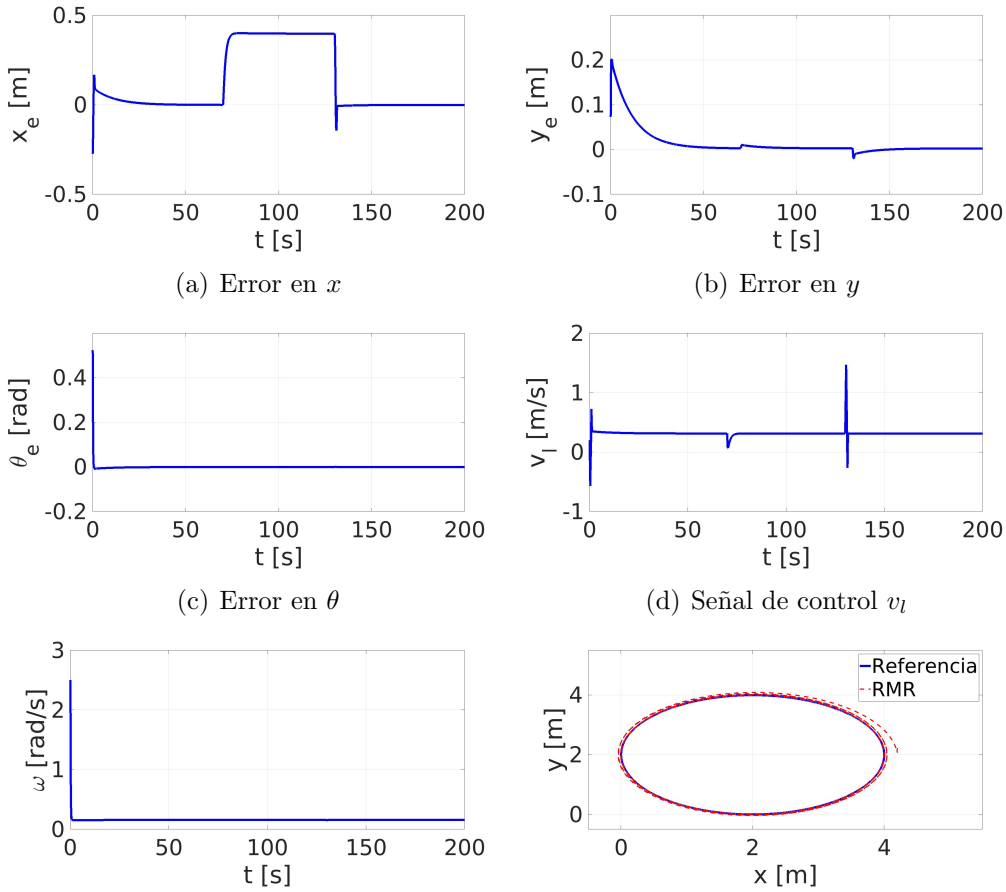
5.1.2. Control por *backstepping* (Solución basada en retroalimentación dinámica)

Se utilizó el modelo cinemático (3.1) con la retroalimentación dada por (3.42). Se consideraron los valores de parámetros $k_1 = k_2 = 8$, $k_3 = 3$ en la ecuación (3.42) y las perturbaciones como $\gamma = tan(\delta)$ con $\delta = \frac{\pi}{16}$ en la ecuación (3.1) e $\kappa_R = \kappa_L = 0{,}5$ en la ecuación (3.2). Los resultados obtenidos para la trayectoria tipo circular se muestran en la Figura 5.3.

En la Figura 5.3(a) se puede observar que durante el período en el que se presentan las perturbaciones, el error x_e converge a un valor diferente de cero, lo que concuerda con el desarrollo del Capítulo 3. En las Figuras 5.3(b) y 5.3(c) se puede observar que los errores y_e y θ_e convergen a cero durante todo el tiempo de simulación, con ligeras oscilaciones en los instantes en donde entran y salen las perturbaciones. Las entradas de control se muestarn en las Figuras 5.3(d) y 5.3(e), la velocidad líneal presenta oscilaciones en los instantes en los que se introducen y retiran las perturbaciones. Es importante mencionar que para ésta solución en partícular, la perturbación γ tiene una magnitud muy cercana a cero para evitar la indeterminación de la retroalimentación. La Figura 5.3(f) muestra que, aunque el RMR converja a la trayectoria deseada, se puede apreciar el error en el eje X durante el período con perturbaciones.

En el caso de la trayectoria de referencia tipo flor de tres pétalos se utilizaron los mismos valores de perturbaciones que para el caso del circulo, con diferentes valores de los parámetros $k_1 = k_3 = 5$ y $k_2 = 10$ en la ecuación (3.42). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.4.

El comportamiento del error x_e en el período donde se presentan las perturbaciones, mostrado en la Figura 5.4(a) se debe a que la retroalimentación aplicada busca hacer converger esta variable a un valor deseado que involucra a la misma retroalimentación. Los errores y_e y θ_e, Figuras 5.4(b) y 5.4(c),



(a) Error en x

(b) Error en y

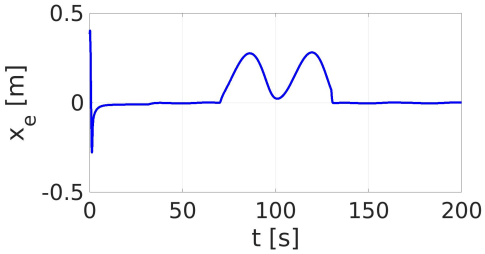
(c) Error en θ

(d) Señal de control v_l

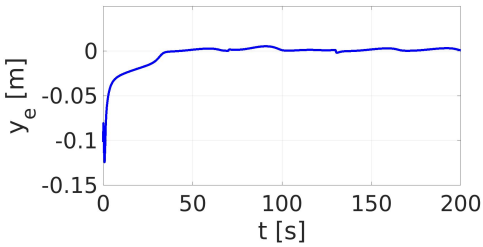
(e) Señal de control ω

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

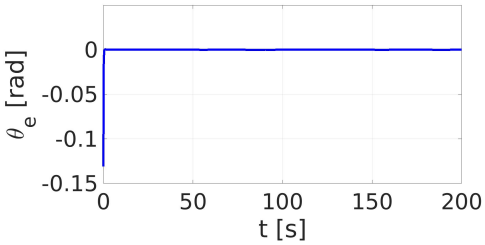
Figura 5.3: Resultados para la solución basada en retroalimentación dinámica del control por *backstepping* (trayectoria circular).



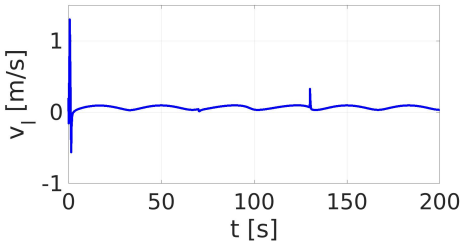
(a) Error en x



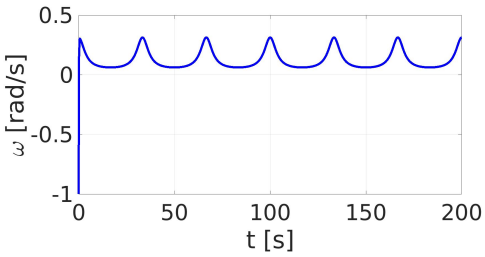
(b) Error en y



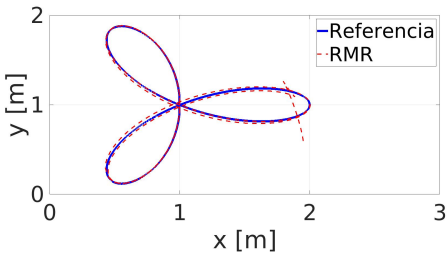
(c) Error en θ



(d) Señal de control v_l



(e) Señal de control ω



(f) Posición en $X - Y$ del RMR

Figura 5.4: Resultados para la solución basada en retroalimentación dinámica del control por *backstepping* (trayectoria tipo flor).

respectivamente, convergen, durante el período que incluye perturbaciones, a una región cercana a cero con leves oscilaciones, una vez más provocadas por la naturaleza de la trayectoria deseada. Nuevamente, las señales de control se mantienen estables presentando algunos picos en los instantes donde se introducen y retiran las perturbaciones, esto se puede observar en las Figuras 5.4(d) y 5.4(e). La Figura 5.4(f) muestra la convergencia del RMR a la referencia, con un error significativo con respecto al eje X, durante el período con perturbaciones.

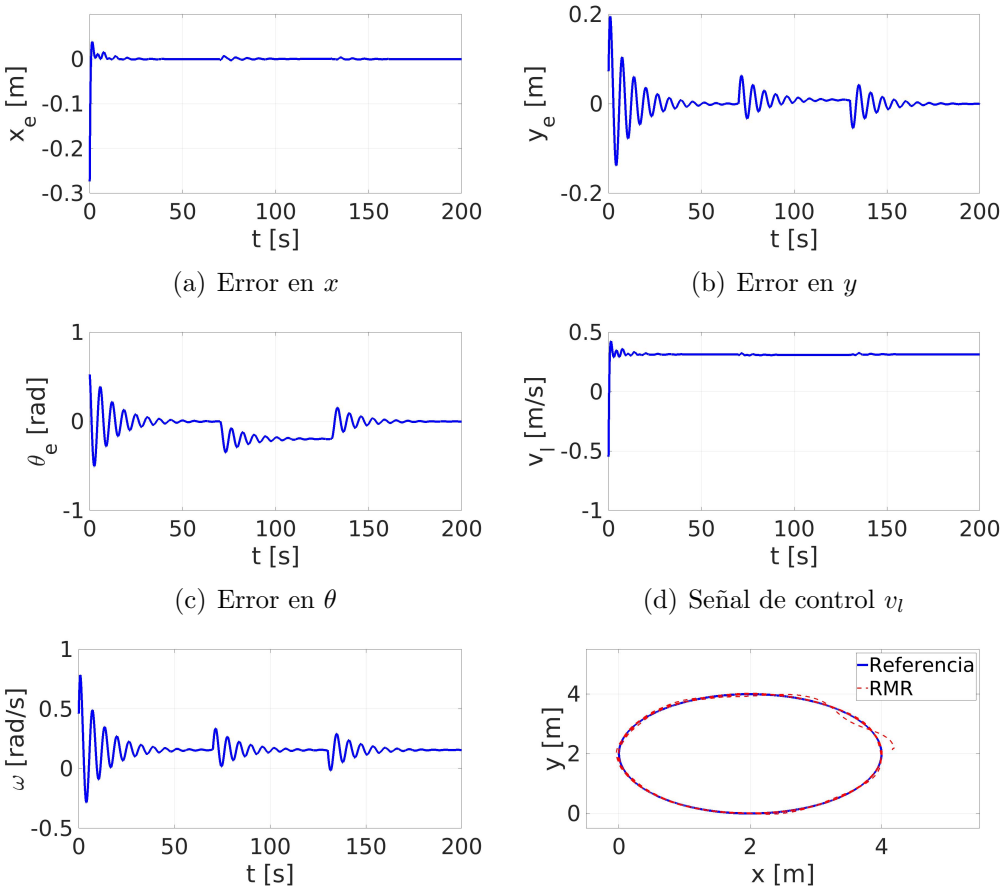
5.1.3. Control con estimador de perturbaciones

Se utilizó el modelo cinemático (3.1) y las coordenadas de error descritas por (3.45) con la retroalimentación dada por (3.50). Se consideraron los valores de parámetros $m_1 = 3$, $m_2 = 10$, $m_3 = 1{,}5$ en la ecuación (3.50), $M_1 = |\dot{x}\sin(\theta)|$, $M_2 = 5$, $M_3 = \frac{2r\omega_L}{b}$, $M_4 = \frac{2r\omega_R}{b}$ en la ecuación (3.67) y las perturbaciones como $\gamma = tan(\delta)$ con $\delta = \frac{\pi}{16}$ en la ecuación (3.1) e $\kappa_R = \kappa_L = 0{,}5$ en la ecuación (3.2). Los resultados obtenidos para la trayectoria tipo circular se muestran en la Figura 5.5.

Durante el período en el que se introducen las perturbaciones, en las Figuras 5.5(a) y 5.5(b) se puede apreciar como los errores $\hat{x}_e$ e $\hat{y}_e$, respectivamente, convergen a cero, con oscilaciones significativas en el transitorio, sobre todo en el error $\hat{y}_e$. El error de orientación $\hat{\theta}_e$ converge a un valor cercano a cero, como se puede observar en la Figura 5.5(c), en donde se presentan nuevamente oscilaciones en los transitorios. En las Figuras 5.5(d) y 5.5(e) se observa como las señales de control convergen a un valor constante debido a la naturaleza de la trayectoria de referencia, nuevamente se presentan algunas oscilaciones en los instantes en los que se modifica la magnitud de las perturbaciones, siendo más significativas en el control angular. En la Figura 5.5(f) se muestra la evolución del RMR en el plano $X - Y$ y como éste converge a la trayectoria deseada. En la Figura 5.6 se muestran los resultados obtenidos con el estimador de perturbaciones de (3.67).

Se puede apreciar en las gráficas de la Figura 5.6 que las estimaciones de cada una de las perturbaciones convergen al valor propuesto de las mismas.

En el caso de la trayectoria de referencia tipo flor de tres pétalos se utilizaron los mismos valores de perturbaciones que para el caso del circulo, con diferentes valores de los parámetros $m_1 = 0{,}6$, $m_2 = 2$ y $m_3 = 0{,}3$ en la ecuación (3.50). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.7.



(a) Error en x

(b) Error en y

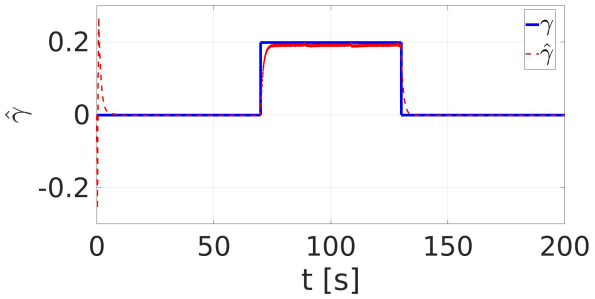
(c) Error en θ

(d) Señal de control v_l

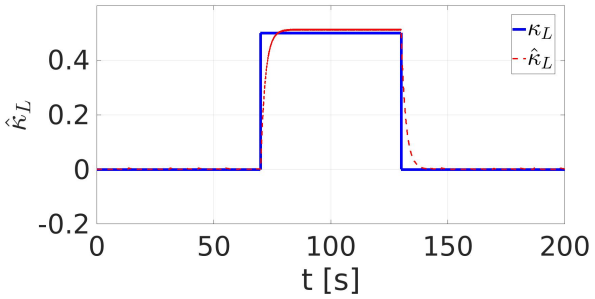
(e) Señal de control ω

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

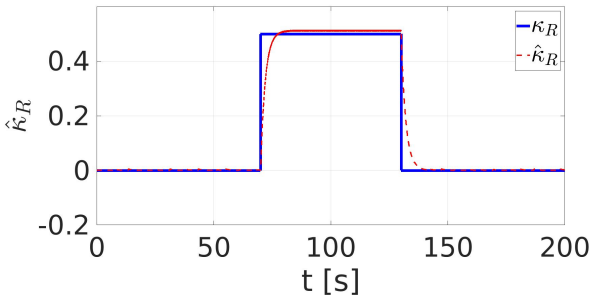
Figura 5.5: Resultados para el control con estimador de perturbaciones (trayectoria circular).



(a) Comparación entre γ y $\hat{\gamma}$

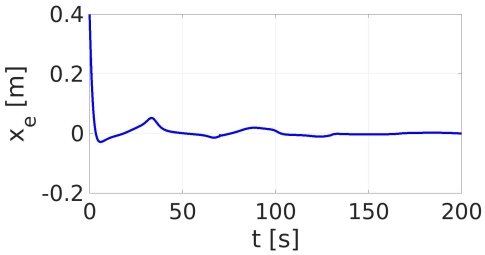


(b) Comparación entre κ_L e $\hat{\kappa}_L$

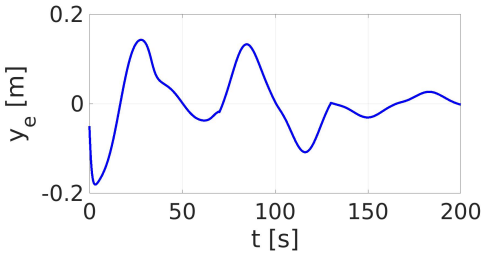


(c) Comparación entre κ_R e $\hat{\kappa}_R$

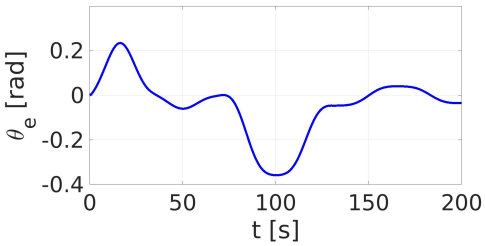
Figura 5.6: Resultados del estimador de perturbaciones (trayectoria circular).



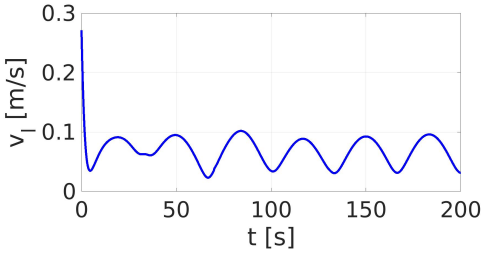
(a) Error en x



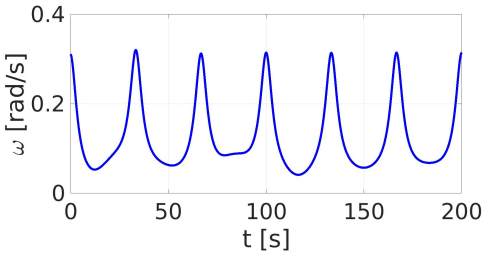
(b) Error en y



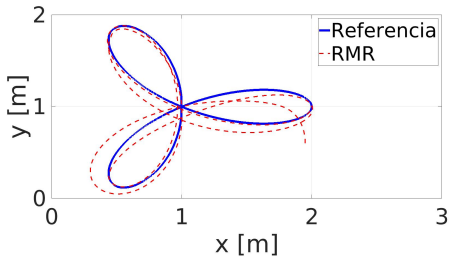
(c) Error en θ



(d) Señal de control v_l

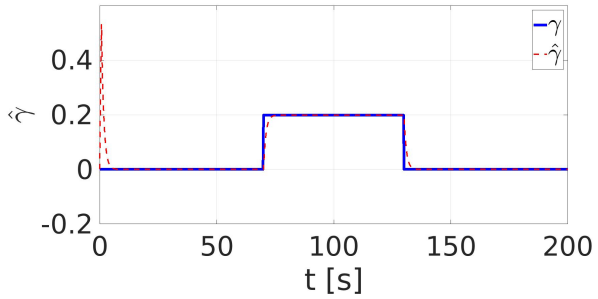


(e) Señal de control ω

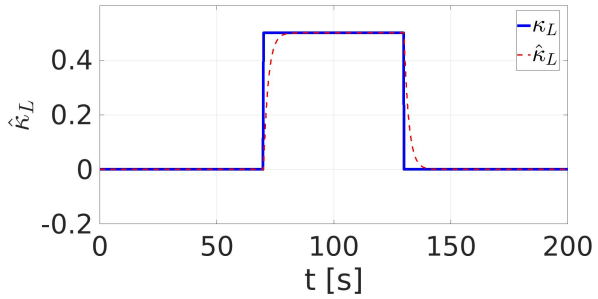


(f) Posición en $X - Y$ del RMR

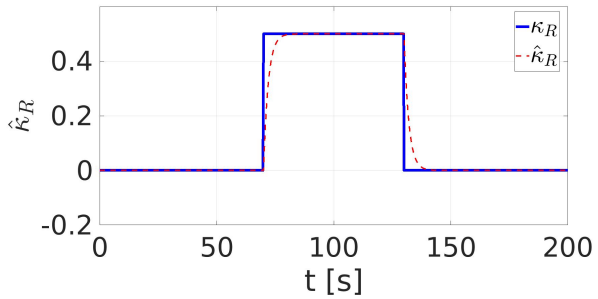
Figura 5.7: Resultados para el control con estimador de perturbaciones (trayectoria tipo flor).



(a) Comparación entre γ y $\hat{\gamma}$



(b) Comparación entre κ_L e $\hat{\kappa}_L$



(c) Comparación entre κ_R e $\hat{\kappa}_R$

Figura 5.8: Resultados del estimador de perturbaciones (trayectoria tipo flor).

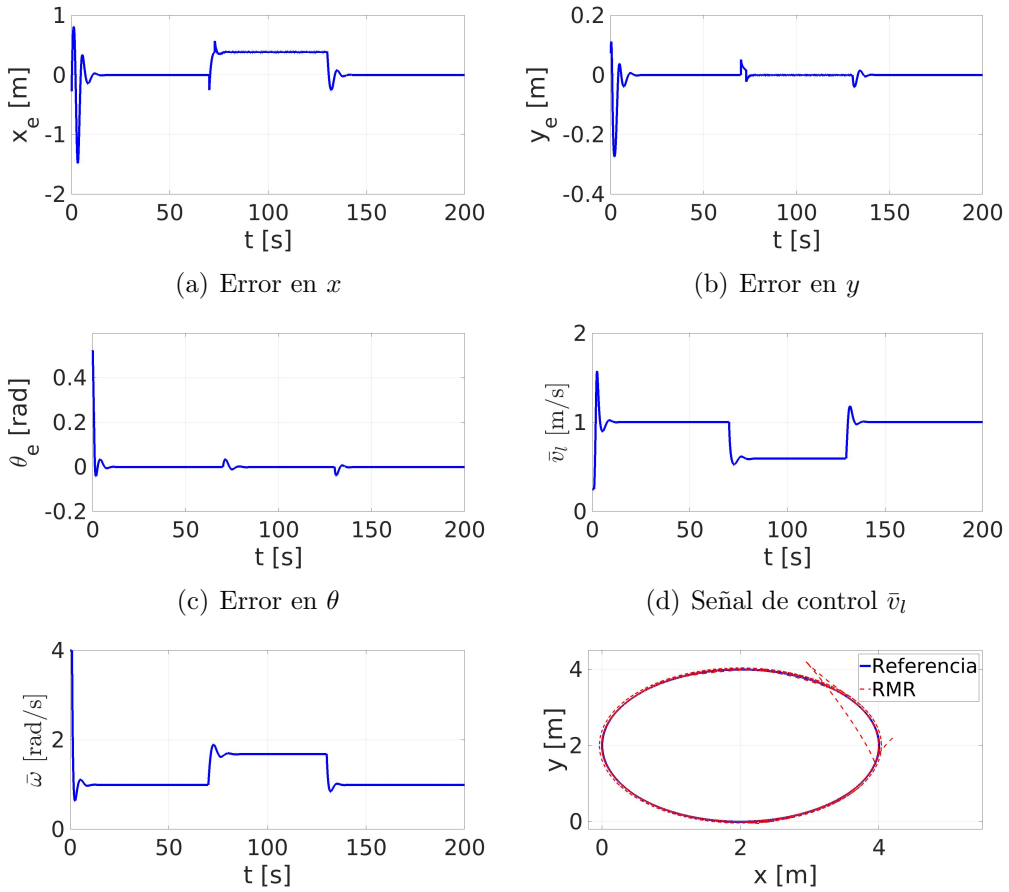
Como se puede observar en las Figuras 5.7(a) y 5.7(b), durante el período que incluye perturbaciones, los errores $\hat{x}_e$ e $\hat{y}_e$ oscilan en una región cercana a cero, siendo oscliaciones de mayor magnitud en el caso de $\hat{y}_e$, esto puede ser ocasionado por el término sinusoidal de la ecuación (3.51) junto con la complejidad de la trayectoria de referencia a seguir. Se puede apreciar en la Figura 5.7(c) que el error de orientación $\hat{\theta}_e$ presenta un pico, durante el período con perturbaciones, de magnitud cercano al valor al que que convergió la misma variable en el caso del círculo, para que posterior a dicho periodo oscile alrededor de cero. Las señales de control mostradas en las Figuras 5.7(d) y 5.7(e) presentan un comportamiento estable. La Figura 5.7(f) muestra como el RMR tiende a seguir la referencia con un error apreciable como un desafse en la forma final en el plano $X - Y$. En la Figura 5.8 se muestran los resultados obtenidos con el estimador de perturbaciones para la trayectoria tipo flor de tres pétalos, en donde se puede observar que se tiene una rápida convergencia de los valores estimados a los valores propuestos.

5.1.4. Control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido

Se utilizó el modelo cinemático (2.18) y las coordenadas de error descritas por (2.39) con la retroalimentación dada por (4.46) y (4.39). Se consideraron los valores de parámetros $q_1 = 1$ en (4.2), $q_2 = 1$ en (4.31), $q_3 = 2$ en (4.46), $\gamma_1 = 1$ en (4.7), $\gamma_2 = 1{,}2$ en (4.39), $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ en (4.51) y las perturbaciones descritas por $\gamma = \tan(\delta)$ con $\delta = \frac{12}{10}\omega(t)_r$ e $\kappa_R = \kappa_L = \frac{13}{10}v(t)_r$ en (2.18). Los resultados obtenidos para la trayectoria tipo circular se muestran en la Figura 5.9.

Durante el período con perturbaciones, el error x_e, de la Figura 5.9(a) converge a un valor cercano a cero, esto debido a que como se explica en [13], el deslizamiento lateral no siempre se puede compensar. En las Figuras 5.9(b) y 5.9(c) se puede observar que los errores y_e y θ_e convergen a cero. En las Figuras 5.9(d) y 5.9(e) se muestran las señales de control, las cuales varian en magnitud dependiendo si se presentan perturbaciones o no. En la Figura 5.9(f) se observa que aunque se tiene el error en X, el RMR converge a la referencia.

En el caso de la trayectoria de referencia tipo flor de tres pétalos se utilizaron los valores de parámetros $q_1 = 1x10^{-2}$ en (4.2), $q_2 = 1x10^{-3}$ en (4.31), $q_3 = 2$ en (4.46), $\gamma_1 = 5$ en (4.7), $\gamma_2 = 1x10^{-2}$ en (4.39), $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ (4.51) y las perturbaciones descritas $\gamma = \tan(\delta)$ con $\delta = \frac{15}{10}\omega(t)_r$ e $\kappa_R = \kappa_L = \frac{21}{10}v(t)_r$ en (2.18). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.10.



(a) Error en x

(b) Error en y

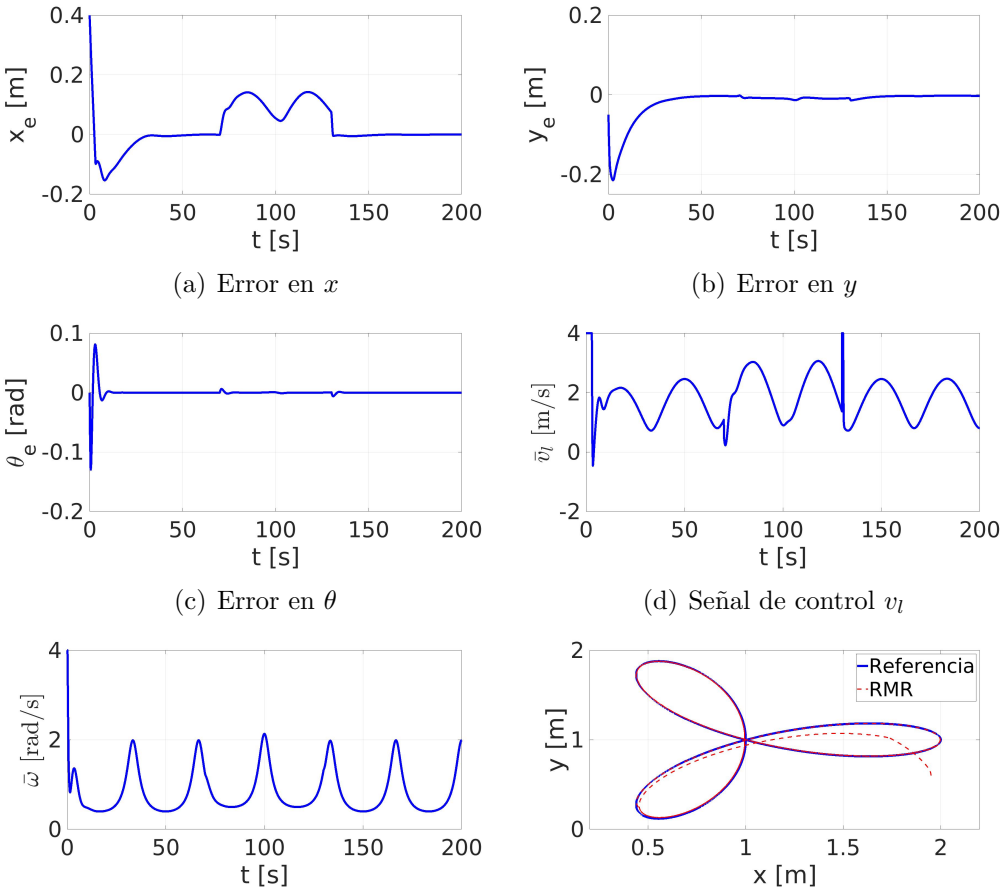
(c) Error en θ

(d) Señal de control $\bar{v}_l$

(e) Señal de control $\bar{\omega}$

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

Figura 5.9: Resultados para el control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido (trayectoria circular).



(a) Error en x

(b) Error en y

(c) Error en θ

(d) Señal de control v_l

(e) Señal de control ω

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

Figura 5.10: Resultados para el control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido (trayectoria tipo flor).

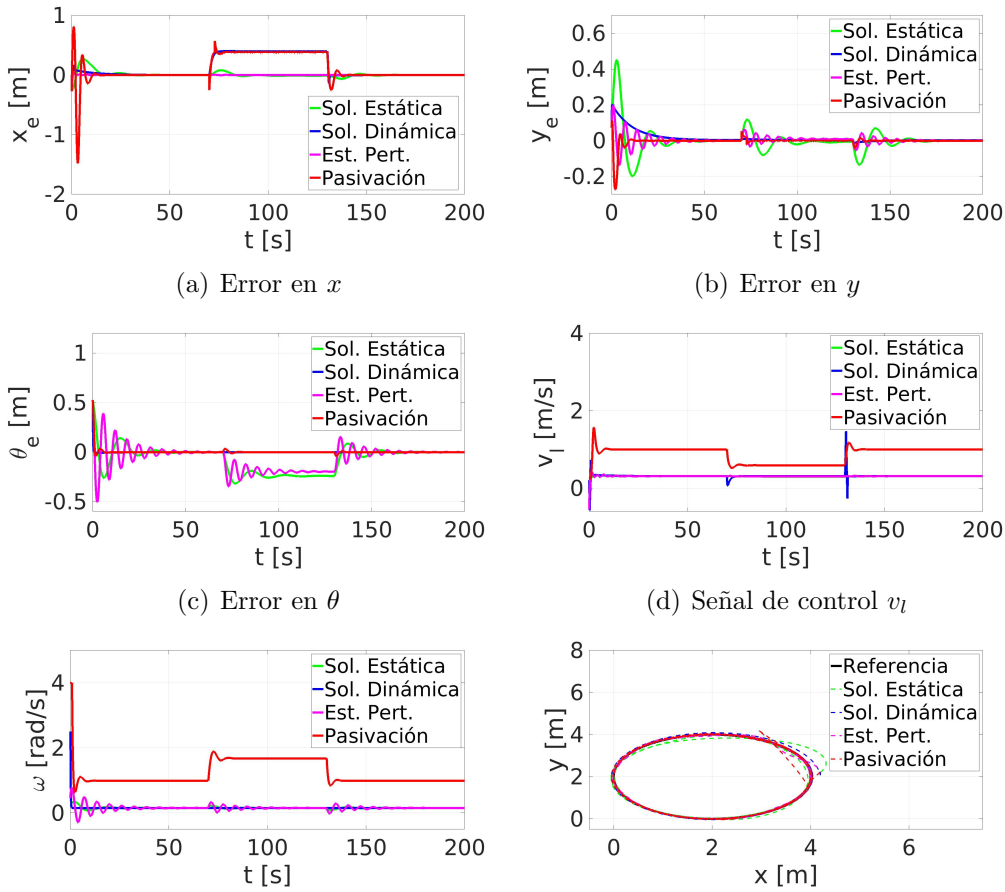
En la Figura 5.10(a) se aprecia que, durante el período donde se introducen perturbaciones, el error x_e oscila alrededor de un valor diferente a cero, las oscilaciones se deben a las características de la trayectoria de referencia, y al igual que en el caso del círculo, la perturbación de deslizamiento no siempre se puede compensar. Se puede observar en las Figuras 5.10(b) y 5.10(c) que los errores y_e y θ_e convergen a cero. En las Figuras 5.10(d) y 5.10(e) se muestran las señales de control $\bar{v}_l$ y $\bar{\omega}$, respectivamente, se puede apreciar un efecto de saturación provocado por la limitación de la magnitud de las mismas que se pueda presentar en aplicaciones prácticas. En la Figura 5.10(f) se puede observar que aunque se tenga un error, el RMR converge a la trayectoria de referencia.

5.1.5. Comparación del desempeño entre los esquemas presentados

Con el fin de comparar la efectividad de todos los esquemas expuestos en el presente trabajo de tesis, en las Figuras 5.11 y 5.12 se muestran los resultados de cada una de las soluciones para el seguimiento de trayectoria utilizando como referencia una trayectoria circular y una trayectoria tipo flor, respectivamente.

En la Figura 5.11(a) se puede observar que, durante el período en el que se presentan las perturbaciones, el esquema propuesto en este trabajo no presenta mejoras en la convergencia del error x_e con respecto al esquema de estimación de perturbaciones y a la solución con retroalimentación dinámica del control por *backstepping*. Por otro lado, en la Figura 5.11(b) donde se muestra el error y_e, se aprecia que el esquema propuesto es el que menos oscilaciones presenta en los instantes donde se introducen y retiran las perturbaciones. En cuanto al error de orientación θ_e, la Figura 5.11(c) muestra que la solución propuesta en esta tesis es la que presenta una mejor convergencia incluso cuando se tienen perturbaciones afectando al sistema. Las Figuras 5.11(d) y 5.11(d) muestran las entradas de control calculadas, donde se puede observar que el esquema basado en pasividad presenta señales de mayor magnitud que los demás esquemas, esto posiblemente es debido a que no se conocen las magnitudes de las perturbaciones y se busca compensarlas. Por último, en la Figura 5.11(f) se muestra la evolución del RMR para cada esquema simulado, el esquema propuesto en este trabajo es el que converge a la trayectoria de manera más rápida.

En las Figuras 5.12(a), 5.12(b) y 5.12(c) se muestran los errores x_e, y_e



(a) Error en x

(b) Error en y

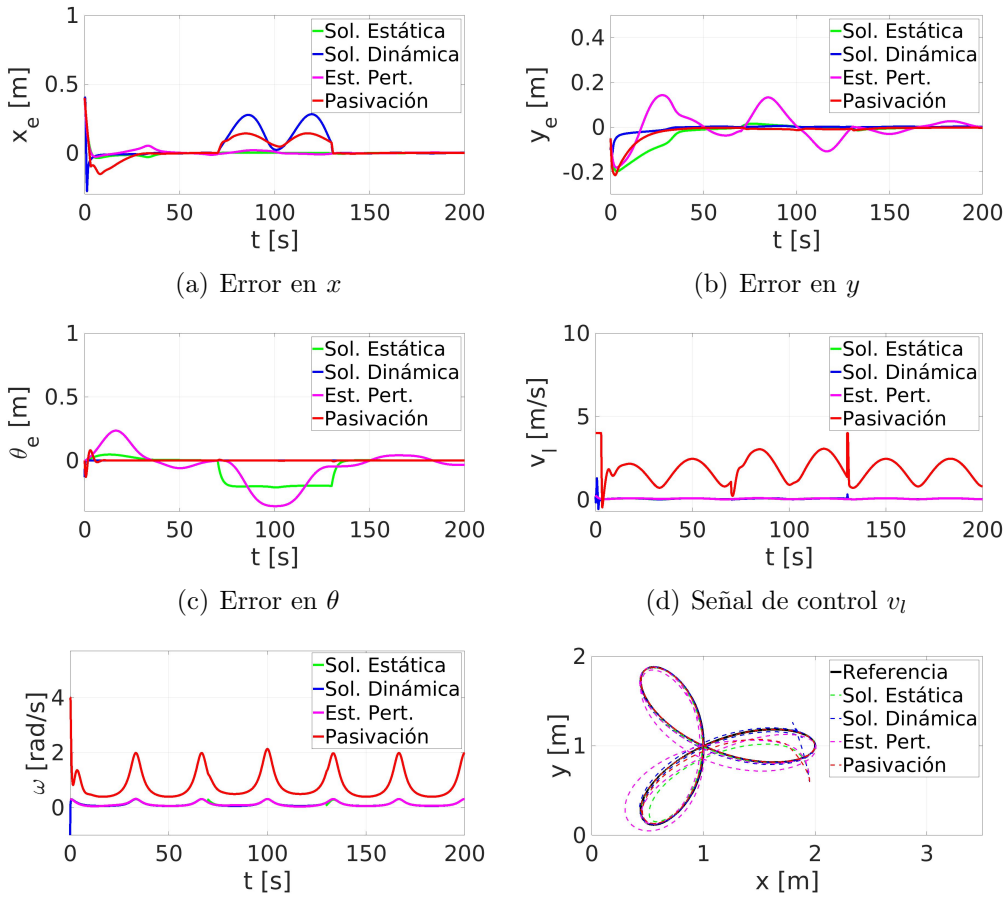
(c) Error en θ

(d) Señal de control v_l

(e) Señal de control ω

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

Figura 5.11: Comparación de los resultados obtenidos por simulación numérica (trayectoria circular).



(a) Error en x

(b) Error en y

(c) Error en θ

(d) Señal de control v_l

(e) Señal de control ω

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

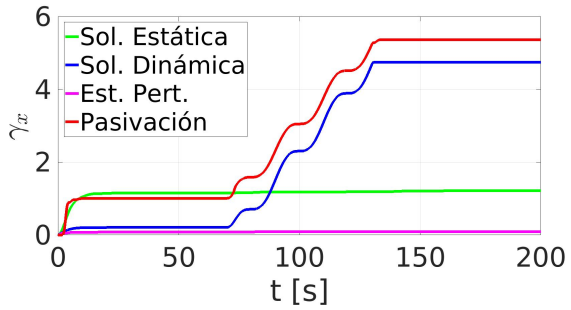
Figura 5.12: Comparación de los resultados obtenidos por simulación numérica (trayectoria tipo flor).

y θ_e, respectivamente, con respecto al tiempo, de cada uno de los esquemas expuestos en los capitulos anteriores para una trayectoria tipo flor; se puede observar que el esquema basado en pasivación presenta resultados con mejoras significativas en los errores de orientación θ_e y de posición y_e. En las Figuras 5.12(d) y 5.12(e) se muestran las señales de control v_l y ω, respectivamente, donde se puede apreciar que en el caso del esquema propuesto en este trabajo ambas señales presentan mayor magnitud con respecto a los otros esquemas. Finalmente, la Figura 5.12(f) muestra la evolución en el plano del RMR con respecto al tiempo. Se puede apreciar que al igual que en el caso de la trayectoria circular, el esquema basado en pasivación presenta una convergencia más rápida a la referencia comparado con los otros esquemas.

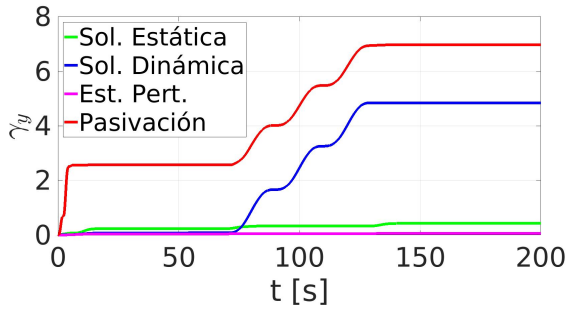
Con el fin de mostar una comparación cuantitativa de los resultados obtenidos con cada uno de los esquemas presentados, se obtuvo la integral del error cuadrático $\gamma_j = \int_a^b \left(j_r(\tau) - j(\tau)\right)^2 d\tau$, $j = x, y, \theta$, de cada una de las variables de posición y orientación en las dos trayectorias utilizadas. Los resultados se muestran en las Figuras 5.13 y 5.14.

Para la trayectoria circular, de acuerdo a lo mostrado en las Figuras 5.13(a) y 5.13(b), donde se muestra la integral de los errores de posición cuadráticos, se observa que el esquema basado en el estimador de perturbaciones es el que presenta un mejor desempeño, siendo el que posee menor magnitud de error cuadrático. De acuerdo a estás gráficas, se puede interpretar que el esquema propuesto no presenta un mejor desempeño en la posición del seguimiento de trayectoria circular, con respecto a los esquemas existentes en la literatura. Aunque en la Figura 5.13(c) se muestra que en cuanto a la orientación θ, la propuesta de esta tesis presenta una mejoría sobre los demás.

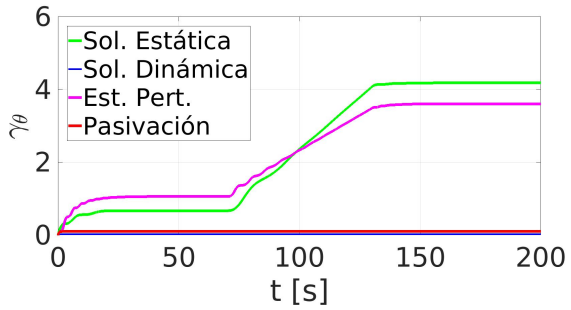
Por otro lado, en cuanto a la trayectoria tipo flor, la Figura 5.14(a) muestra que con respecto a la posición en X, el esquema propuesto presenta un mejor desempeño que la solución por retroalimentación dinámica del esquema por *backstepping*. En cuanto a la posición en y, la Figura 5.14(b) muestra que el esquema propuesto presenta mejor desempeño con respecto a los demás durante ciertos periodos. Nuevamente, en cuanto a la orientación θ, el esquema propuesto en este trabajo presenta un mejor desempeño con respecto a todas las soluciones existentes.



(a) Integral del error $x_r - x$ cuadrático

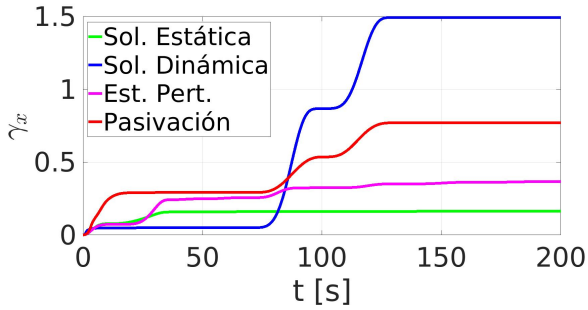


(b) Integral del error $y_r - y$ cuadrático

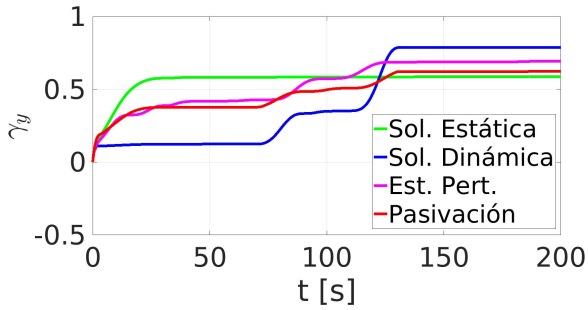


(c) Integral del error $\theta_r - \theta$ cuadrático

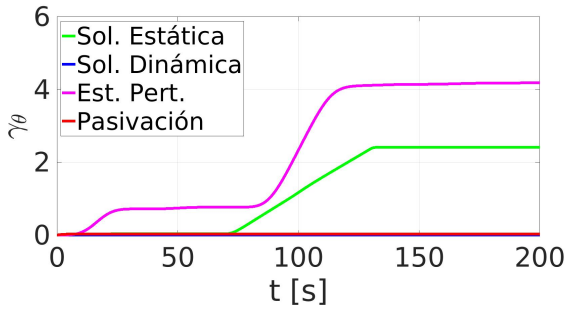
Figura 5.13: Comparación cuantitativa de los resultados obtenidos por simulación numérica (trayectoria circular).



(a) Integral del error $x_r - x$ cuadrático



(b) Integral del error $y_r - y$ cuadrático



(c) Integral del error $\theta_r - \theta$ cuadrático

Figura 5.14: Comparación cuantitativa de los resultados obtenidos por simulación numérica (trayectoria tipo flor).

5.2. Simulaciones ROS-Gazebo

Las simulaciones que se muestran en esta sección se realizaron en el simulador de entornos 3D Gazebo y el sistema operativo de robots (ROS por sus siglas en inglés). Se muestra el efecto de las perturbaciones en el entorno de simulación y la implementación del control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido para trayectorias tipo lemniscata y círculo.

5.2.1. Perturbaciones en Gazebo

Se comenzó por introducir las perturbaciones de deslizamiento lateral y patinado en el entorno de simulación 3D. En la Figura 5.15 se muestra el resultado obtenido al implementar un control en lazo abierto del RMR para una trayectoria circular. Se utilizaron las condiciones inciales iguales a las del RMR virtual.

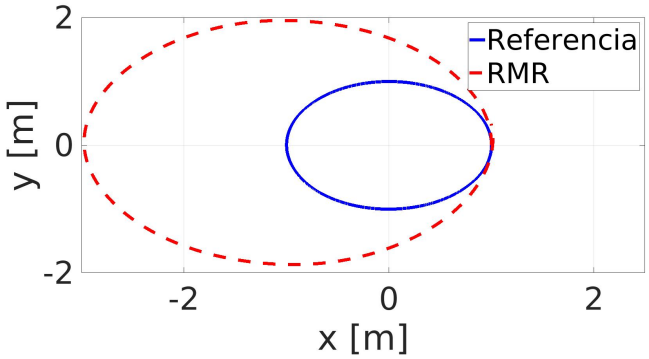


Figura 5.15: Efecto de las perturbaciones en un RMR para una trayectoria circular en Gazebo.

Se puede observar que se presenta el deslizamiento lateral alterando la dirección de la trayectoria deseada. Para apreciar de mejor manera las perturbaciones por patinado se utilizó una trayectoria en línea recta. El restultado se muestra en la Figura 5.16 en donde se observa que, además del efecto del deslizamiento lateral, se presenta el patinado en el RMR haciendo que este avance más lento.

El proceso para introducir las perturbaciones en el entorno de simulación Gazebo se basó en modificar las propiedades físicas del espacio de trabajo, en específico los parámetros de fricción de la superficie, tambień llamado "tierra"(traducción del término inglés *ground*). Como primera opción se pensó en desarrollar un *plug in* (programa que contiene instrucciones, mensajes y

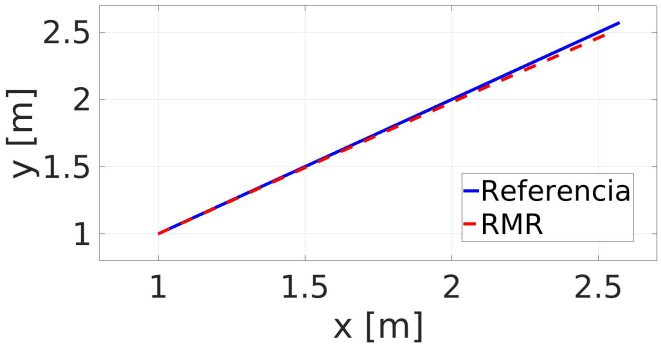


Figura 5.16: Efecto de las perturbaciones en un RMR para una trayectoria línea recta en Gazebo.

servicios para conectar ROS con modelos funcionales en Gazebo como sensores o motores) para la locomoción diferencial que añadiera los parámetros de deslizamiento y patinado de la misma manera que el modelo cinemático desarrollado en este trabajo, sin embargo se optó por la modificación del entorno físico debido a que se buscó tener condiciones de trabajo con mayor aproximación a la realidad.

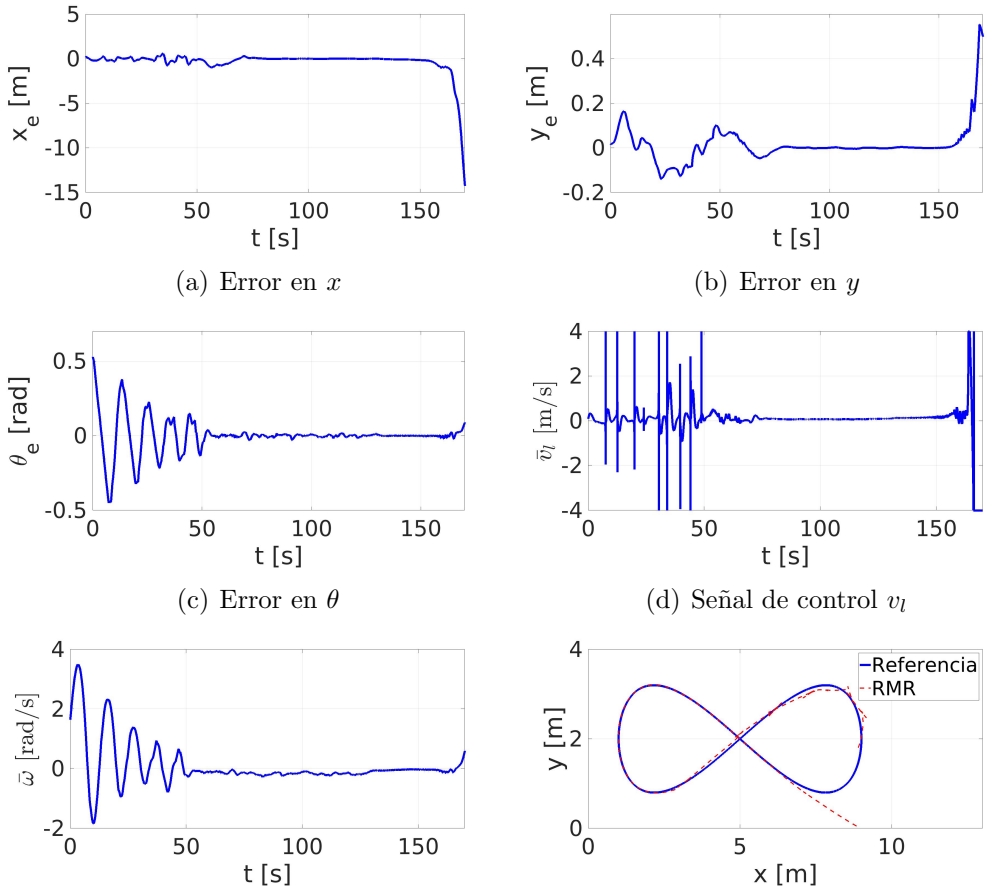
5.2.2. Trayectoria tipo lemniscata

Como primer experimento se utilizó una trayectoria tipo lemniscata descrita por,

$$x_r = a\cos(pt) + x_0,$$
$$y_r = b\sin(2pt) + y_0,$$

con $a = 4$, $b = 1{,}2$, $p = \frac{\pi}{100}$, $x_0 = 5$ y $y_0 = 2$. Se utilizaron los valores de los parámetros $q_1 = 5x10^{-1}$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$, $\gamma_1 = 1x10^{-5}$, $\gamma_2 = 1x10^{-5}$ y $L_1 = L_2 = L_3 = 1{,}5$. En la Figura 5.17 se muestran los resultados obtenidos.

En las figuras 5.17(a), 5.17(b) y 5.17(c) se muestran los errores de seguimiento de trayectoria con respecto al tiempo. Se puede apreciar que se logra convergencia a cero durante un tiempo. La divergencia que se presenta en los ultimos instántes del tiempo de simulación se debe a una singulardad presentada en la entrada de control $\bar{v}_l$, mostrada en la Figura 5.17(d), que a su vez se debe a que la señal $\bar{\omega}$ (Figura 5.17(e)) converge a cero en un determinado tiempo. En la Figura 5.17(f) se muestra la evolución en el plano $X - Y$ del RMR, se observa como el mismo converge a la trayectoria de referencia hasta



(a) Error en x

(b) Error en y

(c) Error en θ

(d) Señal de control v_l

(e) Señal de control ω

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

Figura 5.17: Resultados para el control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido en ROS-Gazebo (trayectoria tipo lemniscata).

el instante que ocurre la indeterminación, que es el tramo en línea recta de la referencia.

5.2.3. Trayectoria tipo círculo

Como segundo experimento se utilizó una trayectoria tipo círculo descrita por,

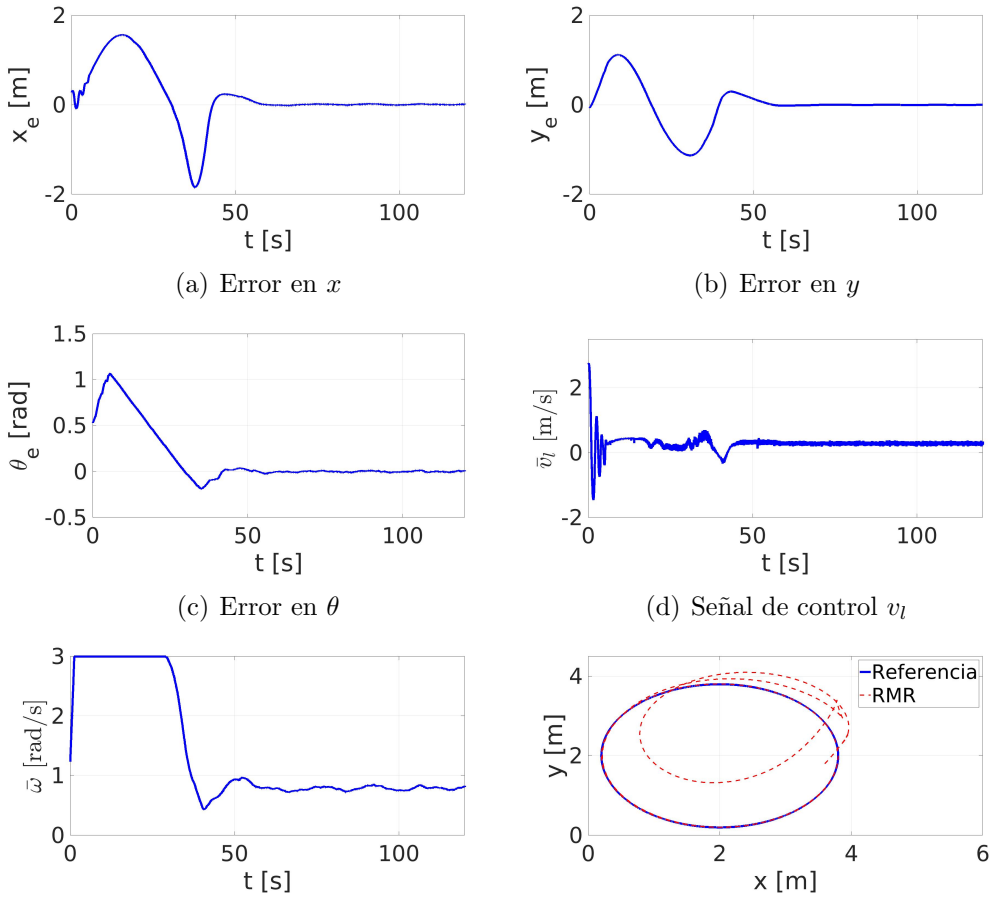
$$x_r = a\cos(pt) + x_0,$$
$$y_r = a\sin(pt) + y_0,$$

con $a = 4$, $p = \frac{\pi}{20}$, $x_0 = y_0 = 2$. Se utilizaron los valores de los parámetros $q_1 = 3$, $q_2 = 6$, $q_3 = 2$, $\gamma_1 = 1x10^{-2}$, $\gamma_2 = 1x10^{-2}$ y $L_1 = L_2 = L_3 = 2{,}5$. En la Figura 5.18 se muestran los resultados obtenidos.

Para este caso, se tiene una convergencia a la trayectoria deseada. Se puede concluir que para este tipo de trayectoria las perturbaciones son constantes y no tienen variaciones en ningún instante de tiempo, una vez que se logra la convergencia. En las Figuras 5.18(a), 5.18(b) y 5.18(c) se muestran los errores de seguimiento de trayectoria con respecto al tiempo, se observa que aunque lento, se tiene una convergencia a cero. En las Figuras 5.18(d) y 5.18(e) se muestran las señales de control suministradas al sistema, se aprecia el efecto de saturación en la velocidad angular utilizado para simular la limitación de la misma que se pueda presentar en aplicaciones reales. En la Figura 5.18(f) se muestra la evolución de la posición del RMR en el plano $X - Y$ donde se aprecia la convergencia del mismo a la trayectoria de referencia.

5.3. Conclusiones del capítulo

De acuerdo a la comparación realizada con los resultados obtenidos mediante simulación numérica, se puede concluir que el esquema propuesto en este trabajo de tesis presenta mejoras significativas, sobre los esquemas existente en la literatura, con respecto a el error de orientación de seguimiento de trayectoria θ_e, para ambos tipos de trayectorias utilizadas para este trabajo. Aunque en cuanto a los errores de posición x_e y y_e, la mejora que se tiene sobre los demás esquemas es el factor de robustez, ya que sin conocer las magnitudes de las perturbaciones, se presentan resultados con los que se puede concluir un correcto seguimiento de trayectoria, independientemente de la trayectoria utilizada.



(a) Error en x

(b) Error en y

(c) Error en θ

(d) Señal de control v_l

(e) Señal de control ω

(f) Posición en $X - Y$ del RMR

Figura 5.18: Resultados para el control por pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido en ROS-Gazebo (trayectoria tipo círculo).

Con respecto a las simulaciones utilizando la plataforma ROS-Gazebo, es importante mencionar que sólo se evaluó el esquema propuesto en esta tesis debido a que para la correcta implementación de los demás esquemas es necesario conocer la magnitud de las perturbaciones, lo cual no se logró debido a que las perturbaciones se introdujeron en el simulador de entornos gráficos mediante la modificación de las propiedades físicas del espacio de trabajo. En cuanto a los resultados obtenidos mediante simulación con entornos gráficos, se observa que el esquema propuesto presenta un correcto desempeño siempre y cuando se cumpla la restricción $\bar{\omega} \neq 0$.

Capítulo 6

Conclusiones

Este trabajo presenta un esquema de control basado en las técnicas de *backstepping*, pasivación, modos deslizantes y observador de estado extendido para el seguimiento de trayectorias de un RMR diferencial que se encuentra bajo la influencia de perturbaciones producidas por deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. El esquema desarrollado tiene un enfoque robusto a las perturbaciones que se consideran desconocidas. Se presentan algunos esquemas de control desarrollados en la literatura con el propósito de realizar una comparación de su desempeño con respecto al esquema desarrollado para esta tesis.

De los esquemas existentes en la literautra, se presentó primero un esquema basado en la técnica de *backstepping* con dos soluciones posibles para el seguimiento de trayectoria. En éste se considera que las magnitudes de cada una de las perturbaciones son conocidas. Posteriormente, continuando con los esquemas en la literatura, se mostró un esquema con estimación de las perturbaciones consideradas con una ley de control que estabiliza el sistema, la cual depende de las magnitudes estimadas. La propuesta de este trabajo propone un esquema que estabiliza el sistema mediante una retroalimentación que pasiviza el sistema con la adecuada elección de la salida y se le añade robustez mediante modos deslizantes.

Se validó el desempeño de los esquemas de control mediante simulaciones numéricas en MATLAB. De acuerdo a los resultados mostrados, se puede concluir que se tiene la eficiencia esperada en el desarrollo del mismo. Además, a diferencia de los esquemas existentes en la literatura, con los cuales se comparó, el enfoque robusto presenta una ventaja sobre los mismos. Dentro de

las ventajas destacables del esquema propuesto sobre los esquemas existentes se tiene la convergencia de la variable de posición y y la orientación del robot θ. De acuerdo a los resultados mostrados en el Capítulo 5, las coordenadas de error de seguimiento y_e y θ_e presentan una mejor convergencia a cero al implementar el esquema de control propuesto. Las desventajas más importantes entre los esquemas comparados se presentan en la variable de posición x y las señales de control v_l y ω. En cuanto a la coordenada de error de seguimiento x_e, el esquema propuesto no siempre compensa el deslizamiento lateral a diferencia de un par de esquemas existentes los cuales si logran la convergencia a cero de dicha variable. Con respecto a las señales de control, el esquema propuesto presenta magnitudes significativamente mayores que en los demás esquemas, esto debido a la necesidad de la compensación de las perturbaciones desconocidas.

Para la simulación en las plataformas ROS-Gazebo, unicamente se implementó el control propuesto en este trabajo, esto debido a que para la correcta implementación de uno de los otros dos esquemas existentes en la literatura se necesita tener el valor de las perturbaciones y debido a que para el correcto funcionamiento del estimador de perturbaciones se necesitan las magnitudes de algunas variables desconocidas al momento de la simulación, no se logró implementar. Por otro lado, las perturbaciones se introdujeron al entorno de simulación alterando las propiedades físicas de los objetos modelados en 3D, por lo que no se tiene el conocimiento del valor exacto de dichas perturbaciones. Los resultados obtenidos mediante estas simulaciones muestran que el esquema propuesto presenta algunos inconvenientes con respecto a los valores de las perturbaciones, como la selección de las ganancias que tienen que cumplir con el criterio de superar en magnitud a la cota máxima de las mismas. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, como bajas velocidades y superficies de trabajo que presenten magnitudes pequeñas de las perturbaciones, se tienen resultados aceptables.

Debido a las circunstancias que se presentaron durante el tiempo en el que se realizó este trabajo, no se pudieron realizar experimentos físicos. Se tenía contemplado realizarlos en la plataforma experimental ROS con ayuda de un sistema de posicionamiento de precisión y la construcción de un robot móvil en el que se pudieran presentar las perturbaciones consideradas.

6.1. Trabajo a futuro

Como trabajo a futuro se puede mejorar el esquema con un modelo dinámico del robot móvil diferencial o (2,0), con lo que se podría lograr una mejor compensación de la perturbación de deslizamiento lateral, la cual no siempre se puede compensar utilizando el modelo cinemático. Además de pensar en abarcar el problema de formación de robots móviles que se encuentren bajo la influencia de las perturbaciones por deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. También se propone la posiblidad de realizar experimentos físicos en la plataforma experimental ROS.

Apéndice A

Artículo

Memorias del Congreso Nacional de Control Automático ISSN: 2594-2492

Tracking Control for Differential Mobile Robots With Skidding and Slipping effects

D. García-Olivares, M. Velasco-Villa, R. Castro-Linares

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Departamento de Ingeniería Eléctrica , Sección de Mecatrónica, Av. I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, México (e-mail: diego.garcia, velasco, rcastro @cinvestav.mx).

Abstract: The development of a tracking control for a differential wheeled mobile robot under the effect of skidding and slipping is presented in this paper. The kinematics models of a differential robot with and without disturbances are used to solve the tracking problem. The control scheme proposed is based on backstepping, feedback passivity and sliding modes techniques. Simulations results are showed to prove the effectiveness of the proposed method.

Key words: Skidding, slipping, backstepping, feedback passivity, sliding modes.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la robótica móvil terrestre es un tema ampliamente estudiado y de gran interés debido a sus múltiples aplicaciones prácticas, de caracter militar o exploración espacial, por mencionar algunas. A lo largo de los años, se han desarrollado diversas técnicas de control para llevar a acabo de manera eficiente dichas tareas, tales como control por *backstepping* de Jiang y Nijmeijer [1997], métodos de inteligencia artificial de Boukens et al. [2017], métodos de control adaptable robusto de Xin et al. [2016] y control por modos deslizantes de Huang et al. [2016], entre otros.

Sin embargo, la mayoría de los métodos desarrollados en la literatura no consideran la influencia del deslizamiento lateral y patinado en las ruedas, los cuales son fenómenos inherentes a las condiciones de trabajo de gran parte de las aplicaciones prácticas de los robots móviles con ruedas (RMR).

Un trabajo que trata con las perturbaciones por deslizamiento y patinado es el de Wang y Low [2008], en el que se desarrolla el modelo cinemático de diferentes RMR bajo la influencia de dichos fenómenos. Con este mismo enfoque se tiene el trabajo de Cui et al. [2014], en donde se obtiene el mismo modelo cinemático del RMR diferencial de una manera alternativa.

Para el seguimiento de trayectoria de robots móviles diferenciales sujetos a las perturbaciones externas descritas, se tienen algunas propuestas cómo es el caso de un control por *backstepping* de Wang y Low [2008], en dónde las perturbaciones se consideran conocidas. También, para el mismo propósito, se desarrolló un control adaptable en conjunto con un estimador de perturbaciones basado en un observador por modos deslizantes de Cui et al. [2014].

En este trabajo se presenta una nueva propuesta de control basado en las técnicas de *backstepping*, pasivación por retroalimentación y modos deslizantes. En particular, la técnica por modos deslizantes se emplea para agregar robustez y de esta manera, no considerar que las perturbaciones de deslizamiento y patinado son conocidas.

El presente trabajo se organiza como se describe a continuación. En la Sección 2 se explican brevemente la caracterización matemática de las perturbaciones y el modelo cinemático de un RMR diferencial que las considera. En la Sección 3 se presenta el desarrollo del esquema de control propuesto. Posteriormente, en la Sección 4 se muestran los resultados obtenidos mediante simulación numérica, de la implementación de la propuesta de control desarrollada. Finalmente, la Sección 5 contiene las conclusiones finales de este trabajo.

2. MODELO CINEMÁTICO

El análisis y desarrollo de ésta sección está basado en el trabajo de Cui et al. [2014]. En la Figura 1 se muestra un RMR diferencial con dos marcos de referencia: el marco inercial $X-Y$ y el marco móvil $X_m - Y_m$, cuyo origen está fijo al punto P (ubicado en el centro del eje de las ruedas del robot). Estos marcos se relacionan mediante la matriz $R(\theta)$, dada por,

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector que describe la posición y orientación del RMR en el marco inercial, $X-Y$, es el vector $\xi = [x, y, \theta]$, donde θ se mide con respecto al eje inercial X.

Se consideran las perturbaciones provocadas por el deslizamiento lateral y por el patinado en las ruedas. El deslizamiento lateral altera la dirección del movimiento deseado y, como se observa en la Figura 1, se puede representar con un vector v_y que está en función de lo que se denomina ángulo de patinado lateral δ. Este ángulo se encuentra en el rango $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ radianes.

El patinado longitudinal de las ruedas se presenta modificando la magnitud de su velocidad líneal. Se representa como un factor de proporcionalidad dado como,

$$v_L = r\omega_L(1-i), v_R = r\omega_R(1-i)$$

donde v_L, v_R y ω_L, ω_R representan las velocidades lineales y angulares de las ruedas izquierda y derecha respectivamente y donde i se encuentra en el rango $[0, 1)$ y r es el radio de las ruedas.

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

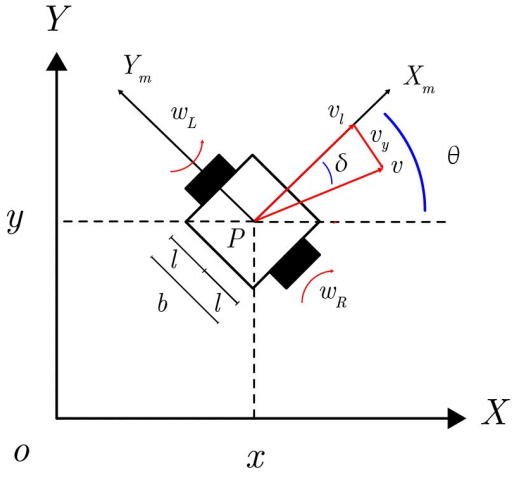


Figura 1. Marcos de referencia en un RMR diferencial.

La relación de las velocidades angulares de cada una de las ruedas del RMR con la velocidad lineal v_l y angular ω del mismo, al incorporar la perturbación por patinado, está descrita por,

$$\begin{bmatrix} v_l \\ \omega \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \frac{1-i_L}{2} & \frac{1-i_R}{2} \\ \frac{-(1-i_L)}{b} & \frac{1-i_R}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} \tag{1}$$

donde b es la distancia entre las ruedas. Considerando que las ruedas son iguales y que el robot diferencial es simétrico con respecto a su eje longitudinal es posible considerar que $i_L = i_R = i$.

Nótese a partir de la Figura 1 que sobre los ejes inerciales $X - Y$ se obtiene el modelo cinemático,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos(\theta - \delta), \\ \dot{y} &= v\sin(\theta - \delta), \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos(\delta)\cos(\theta) + v\sin(\delta)\sin(\theta), \\ \dot{y} &= v\cos(\delta)\sin(\theta) - v\sin(\delta)\cos(\theta), \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \tag{2}$$

De acuerdo a la Figura 1, se observa que se cumplen las relaciones $v\cos(\delta) = v_l$ y $v\sin(\delta) = v_y$. Utilizando estas relaciones, definiendo γ como la perturbación debido al deslizamiento $\gamma = tan(\delta)$ y por la ecuación (1), suponiendo que la superficie de trabajo es homogénea y las ruedas del RMR son iguales, la ecuación 2 toma la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)\{\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\} & 0 \\ (1-i)\{\sin(\theta) - \gamma\cos(\theta)\} & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{-r}{b} & \frac{r}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Definiendo ahora a $\bar{v}_l$ y $\bar{\omega}$ como la velocidad lineal y angular del RMR sin el efecto de patinado, es decir,

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_l \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{-r}{b} & \frac{r}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} \tag{4}$$

con T siendo una matriz no singular, la ecuación (3) se puede reescribir cómo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)\{\cos(\theta) + \gamma\sin(\theta)\} & 0 \\ (1-i)\{\sin(\theta) - \gamma\cos(\theta)\} & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_l \\ \bar{\omega} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

La ecuación (5) representa el modelo cinemático de un RMR diferencial considerando las perturbaciones debido al deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. Se introduce la siguiente suposición sobre las perturbaciones i y γ.

Suposición 1. Se asume que la magnitud de las perturbaciones de patinado y deslizamiento lateral están acotadas para todo tiempo en que actúan, esto es, para todo t tal que $t \in [t_1, t_2]$ y $t_1 < t_2$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que, $|i| \leq \eta_i$, $|\gamma| \leq \eta_\gamma$ para η_i, η_γ constantes reales positivas y diferentes de cero.

Debido a que las perturbaciones consideradas no aparecen en todo momento del desplazamiento del vehículo, la suposición anterior permite establecer para $\bar{v}_l$ y $\bar{\omega}$ la suposición complementaria.

Suposición 2. Se supone que en los instantes de aparición de las perturbaciones las velocidades lineal $\bar{v}_l$ y angular $\bar{\omega}$ están acotadas, más precisamente, $|\bar{v}_l| \leq \eta_l$, $|\bar{\omega}| \leq \eta_\omega$ dónde η_l y η_ω son números reales positivos conocidos diferentes de cero.

Observación 1. La suposición anterior implica un conocimiento a priori del tamaño de $\bar{v}_l$ y $\bar{\omega}$, lo que es razonable en sistemas como el considerado en este trabajo dado que el robot se mueve en un espacio de trabajo bajo condiciones de velocidad acotadas cuando aparecen las perturbaciones. Condiciones no acotadas de velocidad o de las perturbaciones salen del enfoque de este trabajo.

Es importante enfatizar que los efectos de patinado en las ruedas son debidos principalmente a las fuerzas de fricción existentes en la interacción con el piso mientras que los efectos de deslizamiento lateral del vehículo se deben a un incremento de las fuerzas centrifugas. En este trabajo se utilizan el ángulo y la constante de proporcionalidad que originan dichas fuerzas. Es evidente que ni las fuerzas de fricción o las fuerzas centrifugas son modeladas en este trabajo, por lo que se asume el origen desconocido de las perturbaciones.

3. PROBLEMA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

3.1 Planteamiento del problema

El problema de seguimiento de trayectoria consiste en llevar la posición y orientación del vehículo, $\xi(t)$ a cierto valor deseado $\xi_r(t) = [x_r(t), y_r(t),\ \theta_r(t)]^T$ cuando $t \to \infty$. Para conseguir este propósito, los valores de la trayectoria deseada satisfacen el siguiente modelo virtual,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & 0 \\ \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix}. \tag{6}$$

La ecuación (6) representa el modelo cinemático de un RMR diferencial ideal, donde v_r y ω_r son la velocidad lineal de referencia y la velocidad angular de referencia, respectivamente. Se considera que v_r y ω_r, y sus derivadas con respecto al tiempo $\dot{v}_r$ y $\dot{\omega}_r$ son conocidas y acotadas.

Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

Se considera ahora la transformación de los errores de seguimiento en la forma,

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \tag{7}$$

cuya derivada temporal junto con las dinámicas originales (5) y (6) permite obtener la dinámica de errores de seguimiento,

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \bar{\omega} y_e + v_r \cos(\theta_e) - \bar{v}_l + f_1 \\ \dot{y}_e &= -\bar{\omega} x_e + v_r \sin(\theta_e) + f_2 \\ \dot{\theta}_e &= \omega_r - \bar{\omega} + f_3 \end{aligned} \tag{8}$$

donde,

$$\begin{aligned} f_1 &= i(\bar{v}_l - \bar{\omega} y_e) \\ f_2 &= i\bar{\omega} x_e + \gamma \bar{v}_l (1 - i) \\ f_3 &= i\bar{\omega} \end{aligned} \tag{9}$$

son términos de perturbación que involucran el deslizamiento lateral y patinado.

Observación 2. El modelo cinemático perturbado (8) tiene la finalidad tan solo de evidenciar los posibles puntos de afectación de los deslizamientos y patinados del vehículo. A lo largo del trabajo se considera que las perturbaciones f_i, $i = 1, 2, 3$ son desconocidas debido a la imposibilidad de medir en tiempo real las perturbaciones originales i, γ.

Considerando las Suposiciones 1, 2 se introduce la siguiente condición sobre estos términos.

Suposición 3. Se supone que los términos de perturbación están acotados, es decir, satisfacen,

$$|f_1| \leq \eta_1, \quad |f_2| \leq \eta_2, \quad |f_3| \leq \eta_3, \tag{10}$$

dónde η_1, η_2 y η_3 son constantes reales positivas diferentes de cero.

3.2 Solución al problema de seguimiento

La metodología utilizada en esta sección está basada en el trabajo de Gallegos-Sanlucar et al. [2018]. Se tiene como objetivo encontrar las entradas de control $\bar{v}_l$ y $\bar{\omega}$ que logren que $\xi_e(t) = [x_e(t), y_e(t), \theta_e(t)]^T \to 0$ cuando $t \to \infty$. Considérese la dinámica de y_e de la ecuación (8) con $f_2 = 0$, es decir,

$$\dot{y}_e = -\bar{\omega} x_e + v_r \sin(\theta_e). \tag{11}$$

Se propone la función de conmutación,

$$s_1 = y_e + k_1 \int_0^t y_e(\tau) d\tau, \tag{12}$$

donde $k_1 > 0 \in \mathbb{R}$. La función de conmutación define la superficie deslizante $s_1 = 0$, en la que $\dot{s}_1 = 0$, esto es,

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_e + k_1 y_e = 0. \tag{13}$$

La solución de la ecuación diferencial (13) lleva a la conclusión de que $y_e \to 0$ cuando $t \to \infty$. Para asegurar que todas las trayectorias de $\dot{y}_e$ sean atraídas a la superficie deslizante $s_1 = 0$, se hace la asignación basada en Utkin et al. [1990],

$$\dot{s}_1 = F_1(s_1) = -\gamma_1 signo(s_1), \tag{14}$$

donde $\gamma_1 > 0 \in \mathbb{R}$. De acuerdo a esta asignación, la ecuación (13) se puede reescribir como,

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_e + k_1 y_e = -\gamma_1 signo(s_1). \tag{15}$$

Sustituyendo la ecuación (11) en (15) se tiene,

$$-\bar{\omega} x_e + v_r \sin(\theta_e) + k_1 y_e = -\gamma_1 signo(s_1). \tag{16}$$

Al escoger $\alpha_1 = v_r \sin(\theta_e)$ como una entrada de control virtual, a partir de la ecuación (16) se tiene que,

$$\alpha_1 = -k_1 y_e + \bar{\omega} x_e - \gamma_1 signo(s_1). \tag{17}$$

Para el caso en que $f_2 \neq 0$, es posible garantizar la atracción a la superficie $s_1 = 0$. Considérese la función candidata de Lyapunov,

$$V_1 = \frac{1}{2} s_1^2 \tag{18}$$

la cual es definida positiva. Derivando V_1 con respecto al tiempo y sustituyendo el control virtual (17) en la dinámica $\dot{s}_1 = \dot{y}_e + k_1 y_e$ con $f_2 \neq 0$, se tiene,

$$\dot{V}_1 = -\gamma_1 signo(s_1) s_1 + f_2 s_1. \tag{19}$$

Tomando en cuenta que $signo(x)x = |x|$ y suponiendo que la perturbación f_2 cumple (10), se puede mayorar la ecuación (19) de modo que,

$$\dot{V}_1 \leq -\gamma_1 |s_1| + \eta_2 |s_1| = -(\gamma_1 - \eta_2)|s_1|. \tag{20}$$

Escogiendo γ_1 tal que $\gamma_1 > \eta_2$ se tiene que $\dot{V}_1 < 0$ y, por lo tanto, s_1 converge a 0.

Por otro lado, se propone la función,

$$y = v_r \sin(\theta_e) - \alpha_1 \tag{21}$$

como salida del sistema (8). A partir de (17) y (21), la dinámica de y_e en (8) se escribe como,

$$\dot{y}_e = y - k_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1) + f_2. \tag{22}$$

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (21), se tiene,

$$\dot{y} = \dot{v}_r \sin(\theta_e) + v_r \dot{\theta}_e \cos(\theta_e) - \dot{\alpha}_1, \tag{23}$$

donde,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 = &- k_1 \left[y - k_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1) + f_2 \right] \\ &- \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \left[signo(s_1) \right] \dot{s}_1 + \dot{\bar{\omega}} x_e \\ &+ \bar{\omega} \left[\bar{\omega} y_e + v_r \cos(\theta_e) - \bar{v}_l + f_1 \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo (22) en (15), la dinámica (23) se puede reescribir de la forma,

$$\dot{y} = \alpha_2 + \bar{\omega} \bar{v}_l + \Delta f \tag{24}$$

donde,

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

$$\begin{aligned}\alpha_2 = \quad & \dot{v}_r \sin(\theta_e) + v_r(\omega_r - \bar{\omega})\cos(\theta_e) \\ & + k_1\left[y - k_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1)\right] \\ & + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left[signo(s_1)\right]\left[y - \gamma_1 signo(s_1)\right] \\ & - \dot{\bar{\omega}} x_e - \bar{\omega}\left[\bar{\omega} y_e + v_r \cos(\theta_e)\right],\end{aligned}$$

y Δf es un término de perturbación dado por,

$$\Delta f = f_3 v_r \cos(\theta_e) + k_1 f_2 + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left[signo(s_1)\right] f_2 - f_1 \bar{\omega}.$$

Es importante observar que, debido a las Suposiciones 1, 2, 5 y de las características del modelo virutal (6), se tiene que Δf está acotada, es decir, Δf satisface

$$|\Delta f| \leq \eta_{\Delta f}$$

donde $\eta_{\Delta f}$ es una constante real positiva diferente de cero.

Se tiene entonces el nuevo sistema dado por,

$$\begin{aligned}\dot{y}_e &= y - k_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1) + f_2, \\ \dot{y} &= \alpha_2 + \bar{\omega}\bar{v}_l + \Delta f.\end{aligned} \tag{25}$$

Se busca ahora una retroalimentación que haga pasivo al sistema (25) para el caso en que $\Delta f = 0$, es decir, sin términos de perturbaición. Se propone la retroalimentación,

$$\bar{v}_l = \frac{1}{\bar{\omega}}\left(-\alpha_2 + v\right) \tag{26}$$

donde $\bar{\omega} \neq 0$ y v es una nueva entrada. Entonces el sistema (25) con $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ se reescribe en la forma,

$$\begin{aligned}\dot{y}_e &= y - k_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1) \\ \dot{y} &= v.\end{aligned} \tag{27}$$

Se propone ahora la función de almacenamiento,

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} y^2 \tag{28}$$

donde V_1 está dada por (18). La derivada con respecto al tiempo de V_2 es,

$$\dot{V}_2 = s_1 \dot{s}_1 + y\dot{y}.$$

Al sustituir $\dot{s}_1 = y - signo(s_1)$ y $\dot{y}$ de (27) en $\dot{V}_2$, se tiene que,

$$\dot{V}_2 = s_1\left[y - \gamma_1 signo(s_1)\right] + yv. \tag{29}$$

Definiendo la entrada v como,

$$v = -s_1 + \omega_n, \tag{30}$$

donde ω_n es una nueva entrada, se tiene que,

$$\dot{V}_2 = -\gamma_1 signo(s_1) s_1 + y\omega_n. \tag{31}$$

Usando otra vez el hecho de que $signo(x)x = |x|$ se concluye que $\dot{V}_2 \leq y\omega_n$ y por lo tanto, la retroalimentación (26) y (30) hace pasivo al sistema (25) desde la entrada ω_n hasta la salida y, considerando que no hay términos de perturbación ($\Delta f = 0$).

Al sustituir la ecuación (30) en el sistema (27) se obtiene,

$$\begin{aligned}\dot{y}_e &= y - k_1 y_e - \gamma_1 signo(s_1), \\ \dot{y} &= -s_1 + \omega_n,\end{aligned} \tag{32}$$

el cual, para un modo deslizante ideal en la superficie $s_1 = 0$ es estado cero observable, haciendo posible asignar una retroalimentación de la forma,

$$\omega_n = -k_2 y \tag{33}$$

donde $k_2 > 0 \in \mathbb{R}$, que logra estabilidad asintótica del sistema (27), como se puede observar en Byrnes et al. [1991].

Es importante observar que al lograr la estabilidad asintótica del sistema (27), $y_e \to 0$ y $y \to 0$ cuando $t \to \infty$, lo que implica que, de acuerdo a (21),

$$v_r \sin(\theta_e) \approx \bar{\omega} x_e - \gamma_1 signo(s_1).$$

Si, además, la dinámica del error de orientación tiende a cero rápidamente, entonces,

$$\bar{\omega} x_e \approx \gamma_1 signo(s_1).$$

Ya que $signo(s_1)$ no está definida en $s_1 = 0$, x_e oscilará alrededor de 0 para $\bar{\omega} \neq 0$. Este comportamiento se verifica en las simulaciones numéricas que se describen en la Sección 4.

Para asegurar que se mantenga la propiedad de pasividad para el caso en que $\Delta f \neq 0$, se define una segunda función de conmutación,

$$s_2 = y - \int_0^t v(\tau) d\tau \tag{34}$$

que define la superficie deslizante $s_2 = 0$. En esta superficie se tiene que $\dot{s}_2 = 0$, esto es,

$$\dot{s}_2 = \dot{y} - v = 0 \tag{35}$$

o, en forma equivalente $\dot{y} = v$.

Una vez que las trayectorias del sistema son atraídas a la superficie $s_2 = 0$, el control (26) (control equivalente) asegura que permanezcan en ella. En esta superficie la señal v dada por (30) hace que el sistema sea pasivo desde la entrada ω_n hasta la salida y. La asignación (33) logra además estabilidad asintótica.

Para asegurar que las trayectorias del sistema sean atraídas a la superficie $s_2 = 0$, se hace la asignación,

$$\dot{s}_2 = F_2(s_2) = -\gamma_2 signo(s_2), \tag{36}$$

donde $\gamma_2 > 0 \in \mathbb{R}$. Entonces, a partir (35) se tiene que,

$$\dot{y} = v - \gamma_2 signo(s_2). \tag{37}$$

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

A partir de esta última expresión y la dinámica de y en (25), con $\Delta f = 0$, se obtiene la señal de control $\bar{v}_l$ dada por,

$$\bar{v}_l = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(-\alpha_2 + v - \gamma_2 signo(s_2)\right), \tag{38}$$

donde v está dado por (30). La retroalimentación (38) está restringida a trayectorias para las cuales $\bar{\omega} \neq 0$.

Al igual que para la superficie de deslizamiento $s_1 = 0$, se puede dar una condición de suficiencia para la ganancia γ_2, en función de la cota de Δf, que asegura la convergencia de la dinámica del sistema (25) a la superficie de deslizamiento $s_2 = 0$.

Teorema 1. Considérese el sistema (25) bajo las Suposiciones 1, 2, 5 y el modelo virtual (6), entonces la retroalimentación (38) asegura que las trayectorias del sistema (25) convergen a la superficie de deslizamiento $s_2 = 0$ con s_2 definida por (34) si γ_2 satisface,

$$\gamma_2 > \eta_{\Delta f}, \tag{39}$$

donde $\eta_{\Delta f}$ es la cota del término de perturbación Δf.

Demostración. Considérese la función candidata de Lyapunov

$$V_{s_2} = \frac{1}{2} s_2^2, \tag{40}$$

la cual es definida positiva. La derivada con respecto al tiempo de V_{s_2} está dada por,

$$\dot{V}_{s_2} = s_2 \dot{s}_2 = s_2 \left[\dot{y} - v\right]. \tag{41}$$

Sustituyendo la dinámica de y en el sistema (25) con $\Delta f \neq 0$, se tiene que,

$$\dot{V}_{s_2} = s_2 \left[\alpha_2 + \bar{\omega}\bar{v}_l + \Delta f - v\right]. \tag{42}$$

Al sustituir la retroalimentación (38) en (42) se tiene que,

$$\dot{V}_{s_2} = -\gamma_2 signo(s_2) s_2 + \Delta f s_2. \tag{43}$$

Mayorando esta última expresión se obtiene,

$$\dot{V}_{s_2} = -\left(\gamma_2 - \eta_{\Delta f}\right) |s_2|. \tag{44}$$

Entonces, si la condición (39) se cumple $\dot{V}_{s_2} < 0$ y se tiene la convergencia de s_2 a 0.

Para el control de orientación, se utiliza la dinámica $\dot{\theta}_e$ de la ecuación (8) de la forma,

$$\dot{\theta}_e = f_3 + \omega_r - \bar{\omega} \tag{45}$$

Se busca llevar la ecuación (45) a la forma $\dot{\theta}_e = -k_3\theta_e$ donde $k_3 > 0 \in \mathbb{R}$. Para tal propósito se necesita una entrada de control $\bar{\omega}$ tal que,

$$\bar{\omega} = \hat{f}_3 + \omega_r + k_3\theta_e \tag{46}$$

donde $\hat{f}_3$ es un estimado del valor real f_3. Para obtener la estimación $\hat{f}_3$ se propone un vector de estados de la forma $z = \left[\int \theta_e, \theta_e, f_3\right]^T$ que tiene la dinámica,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} h \tag{47}$$

donde h es una incertidumbre externa, $u = -\bar{\omega}$ es el control y $y_{ob} = z_2$ es la salida. Se propone un observador basado en Gao [2006],

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \\ \dot{\hat{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \left(y_{ob} - \hat{y}_{ob}\right) \tag{48}$$

donde $L = [L_1, L_2, L_3]^T$ son ganancias constantes. Con el observador (48) se obtiene la estimación $\hat{z}_3 = \hat{f}_3$ y se puede implementar la retroalimentación (46).

Observación 3. Para la realización de los experimentos es necesario tener en cuenta que las perturbaciones de patinado y deslizamiento dependen fundamentalmente de las fuerzas de fricción existentes entre las ruedas y la superficie de trabajo y no dependen directamente de las velocidades del vehículo acentuando su naturaleza desconocida. en general existen grandes periodos de tiempo en los que las perturbaciones no están presentes.

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para realizar la evaluación del desempeño del controlador desarrollado se utilizó una trayectoria descrita a partir de, $x_r = b\cos(kpt)\cos(pt) + x_0$, $y_r = b\cos(kpt)\sin(pt) + y_0$, con los parámetros $b = 1$, $k = 3$, $p = \frac{\pi}{100}$ y $x_0 = y_0 = 1$. La velocidad lineal y angular de referencia se obtuvieron a partir de $v_r = \dot{x}_r\cos(\theta_r) + \dot{y}\sin(\theta_r)$ y $\omega_r = \frac{\dot{x}_r\ddot{y}_r - \dot{y}_r\ddot{x}_r}{v_r^2}$.

Se considera el modelo cinemático de la ecuación (5). Para el control se consideran $k_1 = 1x10^{-5}$, $k_2 = 1x10^{-4}$, $k_3 = 2$, $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 1x10^{-5}$ y $L_1 = L_2 = L_3 = 1$.

Las perturbaciones se consideraron como funciones variantes en el tiempo tal que $\delta = \frac{3}{2}\omega_r(x_r, y_r)$ e $i = \frac{21}{10}v_r(x_r, y_r)$. Se introducen en la simulación en un período de $t_1 = 70s$ a $t_2 = 130s$. Éstas se muestran en la Figura 2.

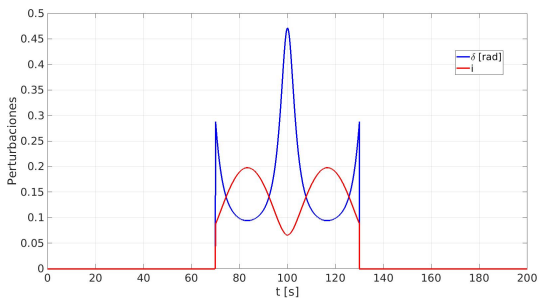


Figura 2. Perturbaciones con respecto al tiempo.

En la Figura 3 se muestran las gráficas de la evolución de las coordenadas de error $\xi_e = [x_e, y_e, \theta_e]^T$ con

Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

respecto al tiempo, observándose la convergencia al origen cuando las perturbaciones no están presentes en el sistema. En el periodo de tiempo entre $t_1 = 70s$ y $t_2 = 130s$, cuando se introducen las perturbaciones, se puede apreciar el efecto de las mismas en el estado, sin embargo rápidamente se retoma la convergencia a cero. Debido a que normalmente las perturbaciones no están presentes para todo t, se puede lograr un resultado aceptable como se muestra en la Figura 4 donde se puede observar el movimiento del RMR en el marco inercial $X-Y$ y puede apreciarse la convergencia a la trayectoria deseada.

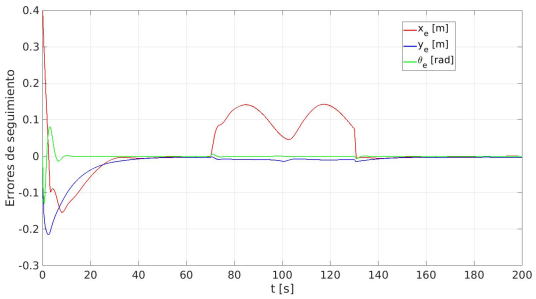


Figura 3. Errores de seguimiento con respecto al tiempo.

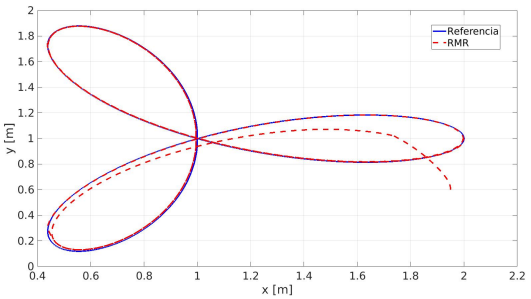


Figura 4. Posición en X-Y del RMR.

En la Figura 5 se muestran las señales de control $\bar{\omega}$ y $\bar{v}_l$. Se puede apreciar un efecto de saturación provocado por la limitación de la magnitud de las mismas que se pueda presentar en aplicaciones prácticas.

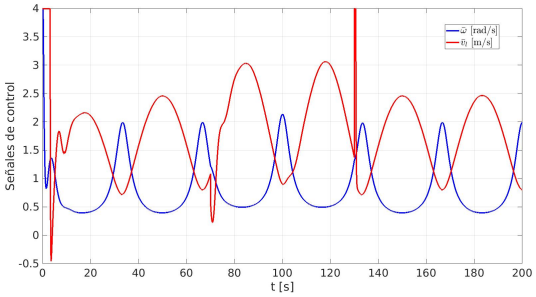


Figura 5. Señales de control con respecto al tiempo.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT - México, por su apoyo a través del proyecto A1-S-31628.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta el desarrollo de un esquema de control basado en técnicas de *backstepping*, pasivación por retroalimentación y modos deslizantes, para el seguimiento de trayectorias de un robot diferencial bajo perturbaciones ocasionadas por deslizamiento lateral y patinado en las ruedas. Mediante los resultados obtenidos por simulación numérica, se muestra un correcto desempeño de la retroalimentación propuesta. Por medio de la técnica de modos deslizantes se obtiene robustez descartando la necesidad de conocer de manera exacta el valor de las perturbaciones que afectan al sistema.

REFERENCIAS

Jiang, Z.P., y Nijmeijer, H. (1997). Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping. *Automatica*, 33, 1393–1399.

Boukens, M., Boukabou, A., y Chadli, M. (2017). Robust adaptive neural network-based trajectory tracking control approach for nonholonomic electrically driven mobile robots. *Robotics & Autonomous Systems*, 92, 30–40.

Xin, L., Wang, Q., She, J., y Li, J. (2016). Robust adaptive tracking control of wheeled mobile robots. *Robotics & Autonomous Systems*, 78, 36–48.

Huang, D., Zhai, J., Ai, W., y Fei, S. (2016). Disturbance observer-based robust control for trajectory tracking of wheeled mobile robots. *Neurocomputing*, 198, 74–79.

Wang, D., y Low, C. (2008). Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: control design perspective. *IEEE Transactions on Robotics*, 24, 676–697.

Cui, M., Huang, R., Liu, H., Liu, X., y Sun, D. (2014). Adaptative tracking control of wheeled mobile robots with unknown longitudinal and lateral slipping parameters. *Nonlinear Dynamics*, 78, 1811–1826.

Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., y Noguchi, T. (1990). A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. En *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation.*

Gallegos-Sanlucar, J.D., Castro-Linares, R., Velasco-Villa, M. (2018) Control de formaicon lider seguidor robusto de un conjunto de robots moviles diferenciales. En *Congreso Mexicano de Robótica.*

Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. (1999) *Sliding mode control in electromechanical systems.* CRC Press.

Byrnes, C.I., Isidori, A., Willems, J.C. (1991) Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 1228–1240

Gao, Z. (2006) Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design. En *American Control Conference*

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

Bibliografía

[1] Z. Jiang, H. Nijmeijer, "Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping", Automatica, 1997, vol. 33, pp. 1393-1399.

[2] M. Boukens, A. Boukabou, M. Chadli, "Robust adaptive neural network-based trajectory tracking control approach for nonholonomic electrically driven mobile robots", Robotics & Autonomous Systems, 2017, vol. 92, pp. 30-40.

[3] L. Xin, Q. Wang, J. She, J. LI, "Robust adaptive tracking control of wheeled mobile robots", Robotics & Autonomous Systems, 2016, vol. 78, pp. 36-48.

[4] D. Huang, J. Zhai, W. Ai, S. Fei, "Disturbance observer-based robust control for trajectory tracking of wheeled mobile robots", Neurocomputing, 2016, vol. 198, pp. 74-79.

[5] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyasaki, T. Noguchi, "A stable tracking control method for an autonomous mobile robot", In Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1990, pp. 394-389.

[6] O. J. Sordalen, C. Canudas de Wit, "Exponential control law for a mobile robot: Extension to Path Following", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1993, vol. 9, pp. 837-842.

[7] D. H. Kim, J. H. Oh, "Tracking control of a two-wheeled mobile robot using input–output linearization", Control Engineering Practice, 1999, vol. 7, pp. 369-373.

[8] M. Chen, "Disturbance attenuation tracking control for wheeled mobile robots with skidding and slipping", IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, vol. 64, pp. 3359-3368.

[9] M. Cui, R. Huang, H. Liu, X. Liu, D. Sun, "Adaptative tracking control of wheeled mobile robots with unknown longitudinal and lateral slipping parameters", Nonlinear Dynamics, 2014, vol. 78, pp. 1811-1826.

[10] H. S. Kang, Y. T. Kim, C. H. Hyun, M. Park, "Generalized extended state observer approach to robust tracking control for wheeled mobile robot with skidding and slipping", International Journal of Advanced Robotic Systems, 2013, vol. 10.

[11] S. J. Yoo, "Adaptive tracking control for a class of wheeled mobile robots with unknown skidding and slipping", IET Control Theory & Applications, 2010, vol. 4, pp. 2109-2119.

[12] S. J. Yoo, "Adaptive-observer-based dynamic surface tracking of a class of mobile robots with nonlinear dynamics considering unknown wheel slippage", Nonlinear Dynamics, 2015, vol. 81, pp. 1611-1622.

[13] D. Wang, C. Low, "Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: control design perspective", IEEE Transactions on Robotics, 2008, vol. 24, pp. 676-637.

[14] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin (Eds.), "Theory of Robot Control, Springer, Londen, 1996.

[15] J. P. Cardona, J. J. Leal, J. L. Ramirez, "Modelado matemático de la posición del centro de masa de un robot de tracción diferencial. Un enfoque desde la mecánica lagrangiana", Información tecnológica, 2018, vol. 29, pp. 307-320.

[16] G. Campion, G. Bastin, B. Dandrea-Novel, "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1996, vol. 12, pp. 47-62.

[17] E. A. Misawa, J. K. Hedrick, "Nonlinear observers–A state-of-the-art survey", ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, 1989, vol. 111, pp. 344-352.

[18] Z. Gao, "Active disturbance rejection control: A paradigm shift in feedback control system design', In American Control Conference, 2006, pp. 2399-2405.

[19] Gallegos Sanlucar, J., "Control de formación líder-seguidor de un conjunto de robots móviles", Tesis de Maestría, Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV, 2019.

[20] V. Utkin, J. Guldner, J. Shi, *Sliding mode control in electromechanical systems*, U.S.A., CRC Pess, 1999.

[21] C. I. Byrnes, A. Isidori, J. C. Willems, "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems", IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, vol. 36, pp. 1228-1240.