



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA**

**Control de manipulador móvil, subactuado, provisto de unión
flexible**

T E S I S

**QUE PRESENTA EL
ING. BRIAN CAMILO GÓMEZ LEÓN**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE:
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. HEBERTT JOSÉ SIRA RAMÍREZ**

CIUDAD DE MÉXICO

Agosto, 2021

Dedicado

A mi madre y a mi hermano, cuya presencia ilumina mi vida.

Agradecimientos

A mi madre: *Por ser y haber sido siempre el mejor ejemplo que he tenido. Eres la persona más importante en mi vida, y lo serás siempre. Todo lo bueno que soy es gracias a ti.*

A mi hermano: *Que me motiva a ser siempre una mejor persona. Eres uno de los grandes motores de mi vida y espero que puedas cumplir tus metas así como yo he cumplido las mías.*

A Eduardo H.: *Porque directa o indirectamente siempre has estado allí.*

Al Dr. Hebertt Sira: *Por las enseñanzas y la paciencia a lo largo de los cursos, los trabajos en conjunto y este trabajo de tesis. Por haberme dado la oportunidad de trabajar con él en este proyecto.*

A los miembros del jurado: *Por sus comentarios y aportaciones a fin de mejorar los desarrollos presentados en este documento.*

A los doctores de la sección de mecatrónica: *Por compartir sus conocimientos, enseñanzas y experiencias conmigo. Por haberme dado la oportunidad inicialmente de entrar al programa.*

A mis amigos y compañeros del CINVESTAV: *Por acompañarme en estos dos años de trabajo. Gracias a todos aquellos que aportaron a que lograra este cometido.*

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT): *Por haberme otorgado una beca que me permitió realizar mis estudios de Maestría en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N (Cinvestav)*

Resumen

El presente trabajo de tesis aborda el problema de control de un manipulador móvil, subactuado, provisto de una unión flexible, a partir del conocimiento del modelo matemático del sistema mecánico y de la inclusión del modelo matemático de la parte eléctrica del sistema. El trabajo desarrollado muestra el enfoque usado para el control con el objetivo de resolver el problema de posicionamiento del efector final del mecanismo a través del seguimiento de trayectoria de una variable especialmente seleccionada.

El controlador propuesto para la resolución del problema es el control por rechazo activo de perturbaciones, el cual ha sido ampliamente abordado e investigado en diferentes áreas del conocimiento, caracterizado por su robustez frente a perturbaciones a la entrada del sistema. El presente trabajo se centra en demostrar la robustez del control frente a diferentes escenarios incluyendo la linealización del sistema, el uso de perturbaciones a la entrada, variaciones de los parámetros del sistema simplificado, desacoplamiento de los controles y ruido de medición para el caso hipotético de poseer sensores en el sistema.

El trabajo desarrollado toma ventaja del esquema de control por rechazo activo de perturbaciones agrupando términos conocidos del modelado del sistema y asumiéndolos como una perturbación endógena con el fin de obtener un sistema simplificado. Esta estrategia permite incluir en el término de perturbación cualquier dinámica no modelada, no linealidades excitadas, perturbaciones externas y variaciones de parámetros sin cambiar el esquema de control.

Los problemas abordados en el presente trabajo son los siguientes:

1. Modelado del sistema.
2. Diseño de la estrategia de control.
3. Simulación de la estrategia de control.
4. Prueba de robustez de la estrategia de control.

El trabajo realizado muestra las simulaciones de los diferentes escenarios a los cuales es sometido el control del manipulador subactuado, y el análisis correspondiente realizado para cada una de ellas.

Abstract

This thesis addresses the control scheme design for an underactuated moving crane with flexible joint, from knowledge of the mechanical system mathematical model, and inclusion of the electrical system mathematical model. The developed work exhibits a control approach to solve the end effector positioning problem from a trajectory tracking problem.

The proposed controller scheme to solve this problem is an active disturbance rejection control scheme, which has been widely approached and researched in many areas of knowledge, being characterized for exhibit robustness to input-coupled disturbances. This work is focused on showing the control scheme's robustness to different disturbance sources, including the system linearization, input disturbances, model parameter variations, control separability, and measurement noise for a simulated sensor source.

This work takes advantage of the active disturbance rejection scheme, by grouping well-known terms of the system model in a single endogenous disturbance term, supposed as unknown, in order to obtain a simplified reduced model. This strategy allows to include into this disturbance term additional non-modeled terms, excited non-linearities, exogenous disturbances, and parameter variations without changing the control scheme.

The control problems approached in this thesis are:

1. System modelling.
2. Control strategy design.
3. Control strategy simulation.
4. Robustness testing on the control strategy.

This work shows simulations of the control system exposed to different disturbances sources for the underactuated moving crane with flexible joint and the corresponding analysis for each one of them. Finally, a robustness analysis for the designed control scheme is developed.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VII
Índice de figuras	XIII
Lista de figuras	XV
Índice de tablas	XVII
Lista de tablas	XVII
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Preguntas de investigación	4
1.4. Motivación y justificación	4
1.5. Objetivos	5
1.5.1. Objetivo general	5
1.5.2. Objetivos particulares	5
1.6. Alcances	5
1.7. Estructura del documento	6
1.8. Resumen del capítulo	7
2. Marco teórico	9
2.1. Linealización tangente	9
2.2. Planitud diferencial	12
2.2.1. Salidas planas de sistemas lineales MIMO	13
2.3. Control por rechazo activo de perturbaciones basado en planitud	14
2.4. Planeación de trayectorias basada en sistemas Liouvillianos	20
2.5. Homotopía y transformaciones de Lie-Bäcklund	21
2.6. Resumen del capítulo	23
3. Modelado del sistema	25
3.1. Manipulador móvil subactuado	25
3.1.1. Modelo no-lineal	26

3.1.2.	Modelo Linealizado	28
3.1.3.	Planitud del sistema linealizado	30
3.2.	Manipulador móvil con motor en cada control haciendo uso del modelado de Euler-Lagrange	32
3.2.1.	El Motor DC	32
3.2.2.	Motor para el par de la articulación actuada	32
3.2.3.	Motor para el control del carro	33
3.2.4.	Modelo no-lineal	33
3.2.5.	Modelo Linealizado	35
3.2.6.	Planitud del sistema linealizado	38
3.3.	Manipulador móvil con motor en cada control usando acoplamiento de modelos	43
3.3.1.	Motor DC	43
3.3.2.	Acoplamiento de modelos mecánico-eléctrico	43
3.4.	Manipulador móvil con motor en cada control usando acoplamiento de modelos aproximados	47
3.4.1.	Simplificación de la dinámica del motor	48
3.4.2.	Inclusión del modelo del motor en el modelo mecánico.	48
3.5.	Resumen del capítulo	49
4.	Estrategias de control	51
4.1.	Control para el manipulador móvil	51
4.1.1.	Diseño del observador	52
4.1.2.	Diseño del controlador	55
4.1.3.	Simulaciones	58
4.2.	Control para el manipulador móvil con motor haciendo uso del modelado de Euler-Lagrange	67
4.2.1.	Diseño del observador	67
4.2.2.	Diseño del controlador	71
4.2.3.	Simulaciones	74
4.3.	Control para el manipulador móvil con motor usando acoplamiento de modelos	82
4.3.1.	Diseño del observador	83
4.3.2.	Diseño del controlador	86
4.3.3.	Simulaciones	90
4.4.	Control para el manipulador móvil con motor usando acoplamiento de modelos simplificado	93
4.4.1.	Diseño del observador	93
4.4.2.	Diseño del controlador	95
4.4.3.	Simulaciones	97
4.4.4.	Medición indirecta de la posición angular, suministrada por acelerómetro	106
4.4.5.	Parámetros para pruebas en laboratorio	110
4.5.	Resumen del capítulo	114

5. Evaluaciones de la Robustez	115
5.1. Variación del parámetro β	115
5.1.1. Parámetro β_{11}^*	116
5.1.2. Parámetro β_{21}^*	118
5.1.3. Parámetro β_{22}^*	121
5.1.4. Variación simultánea de los parámetros β_{11}^* , β_{21}^* y β_{22}^*	123
5.2. Desacoplamiento de los controles	126
5.2.1. Simulaciones	127
5.3. Perturbación en la medición indirecta de la posición angular	128
5.4. Efecto de la variación de las condiciones iniciales	131
5.5. Resumen del capítulo	134
6. Conclusiones	137
6.1. Conclusión del trabajo	137
6.2. Aportaciones	138
6.3. Trabajo Futuro	138
Bibliografía	141
Appendices	147
A. Generación de trayectoria	149
B. Controlador-Observador ADRC	153
C. Salida plana para sistemas lineales	157
D. Trayectoria a partir de iteraciones de estados	159

Índice de figuras

2.1. Diagrama de bloques del sistema simplificado.	20
3.1. Manipulador móvil subactuado provisto de junta flexible.	26
3.2. Punto de equilibrio del manipulador móvil.	29
3.3. Diagrama esquemático del motor DC.	32
3.4. Algoritmo para obtener la matriz de controlabilidad reducida y los índices de Kronecker.	40
4.1. Simulación para sistema mecánico sin motores. Seguimiento de trayectoria.	60
4.2. Simulación para sistema mecánico sin motores. Variables Generalizadas.	60
4.3. Simulación para sistema mecánico sin motores. Error de seguimiento.	61
4.4. Simulación para sistema mecánico sin motores. Índice de desempeño ISE.	62
4.5. Simulación para sistema mecánico sin motores. Perturbación.	63
4.6. Simulación para sistema mecánico sin motores. Seguimiento de trayectoria perturbado.	63
4.7. Simulación para sistema mecánico sin motores. Variables Generalizadas Perturbadas.	64
4.8. Simulación para sistema mecánico sin motores. Error de seguimiento perturbado.	65
4.9. Simulación para sistema mecánico sin motores. Índice de desempeño ISE perturbado.	66
4.10. Simulación para sistema mecánico con motores E-L. Seguimiento de trayectoria.	76
4.11. Simulación para sistema mecánico con motores E-L. Seguimiento de nueva trayectoria.	82
4.12. Simulación para sistema mecánico con motores, homótopo. Seguimiento de trayectoria.	91
4.13. Simulación para sistema mecánico con motores, homótopo. Variables Generalizadas.	92
4.14. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Seguimiento de trayectoria.	98
4.15. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Variables Generalizadas.	99
4.16. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Error de seguimiento.	100

4.17. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Índice de desempeño ISE.	101
4.18. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Perturbación.	102
4.19. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Seguimiento de trayectoria perturbado.	102
4.20. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Variables Generalizadas Perturbadas.	103
4.21. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Error de seguimiento perturbado.	104
4.22. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Índice de desempeño ISE perturbado.	105
4.23. Variables disponibles para el cálculo del ángulo θ_2	107
4.24. Medición indirecta del ángulo θ_2 vs el estado original.	108
4.25. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado usando Acelerómetro. Seguimiento de trayectoria.	109
4.26. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Seguimiento de trayectoria.	111
4.27. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Error de seguimiento.	112
4.28. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Perturbación.	113
4.29. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Seguimiento de trayectoria perturbado.	113
4.30. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Error de seguimiento.	114
5.1. Variación del criterio ISE para salida y_1 . Variando β_{11}^*	116
5.2. Respuesta del sistema para el valor mínimo de β_{11}^*	117
5.3. Respuesta del sistema para el valor máximo de β_{11}^*	118
5.4. Variación del criterio ISE para salida y_1 . Variando β_{21}^*	119
5.5. Variación del criterio ISE para salida y_2 . Variando β_{21}^*	119
5.6. Respuesta del sistema para el valor mínimo de β_{21}^*	120
5.7. Respuesta del sistema para el valor máximo de β_{21}^*	121
5.8. Variación del criterio ISE para salida y_2 . Variando β_{22}^*	122
5.9. Respuesta del sistema para el valor máximo de β_{22}^*	123
5.10. Variación del criterio ISE para salida y_1 . Variando β_i^*	124
5.11. Variación del criterio ISE para salida y_2 . Variando β_i^*	124
5.12. Respuesta del sistema para el valor mínimo de β_i^*	125
5.13. Respuesta del sistema para el valor máximo de β_i^*	126
5.14. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado separando controles. Seguimiento de trayectoria.	127
5.15. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado separando controles. Error de seguimiento.	128
5.16. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado con ruido de medición. Señales de medición con y sin perturbación.	129

5.17. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado con ruido de medición. Medición indirecta de θ_2	130
5.18. Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado con ruido de medición. Seguimiento de trayectoria	131
5.19. Variación del criterio ISE de la salida y_1 para evoluciones cúbicas con centro en el origen de las condiciones iniciales	133
5.20. Variación del criterio ISE de la salida y_2 para evoluciones cúbicas con centro en el origen de las condiciones iniciales	134

Índice de tablas

4.1. Parametros de la planta usados para la simulación sistema mecánico	59
4.2. Parametros de la planta usados para la simulación sistema electro-mecánico usando E-L.	75
4.3. Parametros de la planta usados para la simulación usando acoplamiento de modelos	90
4.4. Parametros de la planta usados para la simulación usando acoplamiento de modelos simplificado.	97
4.5. Parametros de la planta escalizada usados para la simulación usando acoplamiento de modelos simplificado.	110

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas mecatrónicos se han convertido en una parte fundamental de la civilización humana, llevando incluso a ciertos autores a considerarlo como el campo más importante en la ingeniería [1]. No es exagerado pues ha permitido la evolución de la industrialización de manera acelerada, desde la implementación de vehículos cada vez más eficientes y seguros, por la primera línea de ensamblaje creada por Henry Ford en 1913 [2], pasando por el desarrollo industrial sin precedentes, la exploración espacial, hasta la posibilidad de crear mecanismos antropomorfos como los desarrollados en Boston Dynamics [3].

La investigación de estos sistemas ha sido motivada por la evolución constante de la mecatrónica, el estudio de sistemas dinámicos y la capacidad para llevarlos a respuestas determinadas por el usuario, que cumplan criterios de estabilidad, optimización y robustez. Esta es una tarea prioritaria para quienes dedican esfuerzos por aportar nuevas metodologías, soluciones o conclusiones a los problemas de automatización existentes. No obstante, el área de mecatrónica es suficientemente extensa por lo que es necesario acotar los sectores sobre los cuales se va a trabajar. Centraremos nuestros esfuerzos en el área de los sistemas subactuados, motivo principal de estudio de este trabajo de tesis.

El sistema a analizar consiste en un manipulador móvil subactuado provisto de unión flexible controlado por un par de motores DC, uno para cada una de las entradas de control. Estas están constituidas por: el control del desplazamiento horizontal de todo el sistema manipulador y el control del desplazamiento angular del brazo actuado. De este sistema se plantearán las ecuaciones dinámicas del sistema mecánico y serán el punto de partida para adicionar de manera eficiente y simple las dinámicas de los motores, a fin de obtener un sistema para el cual se tenga control y se pueda realizar el seguimiento de una trayectoria guiados por la posición deseada del efector final del manipulador.

Este sistema constituido por el manipulador móvil de unión flexible posee algunas complejidades debido a que es no lineal y no es posible realizar en él una linealización exacta, por lo que se optarán por metodologías que simplifiquen el problema de control, tales como la linealización aproximada. Una vez obtenido el modelo lineal se propone una estrategia de control basada en la controlabilidad (planitud) del sistema incremental y, finalmente, se

expondrá el sistema no lineal controlado a diferentes factores de perturbación que afectan al sistema desde diferentes canales de entrada. Se verificará la robustez del sistema controlado a perturbaciones de tipo exógenas (provenientes del medio ambiente) y endógenas (representadas por parámetros inciertos, dinámicas no modeladas, no linealidades que se ignoran a propósito en aras a la simplicidad para el diseño).

1.1. Estado del arte

El control de sistemas subactuados ha sido ampliamente estudiado en la literatura, siendo un campo especial de atención debido a las complicaciones que aparecen al no tener un control directo sobre uno o varios grados de libertad del sistema. Ejemplos de este tipo de control se han estudiado en la literatura, especialmente desde la década de los 90, en trabajos como el de Spong [4, 5, 6] los cuales consideran sistemas mecánicos subactuados, de varios eslabones y su control mediante métodos energéticos. Trabajos como los de Reyhanoglu y sus colaboradores [7], donde se estudia una clase particular de sistemas subactuados no lineales Lagrangianos con el fin de aplicar técnicas de control no lineal. Otros trabajos de la época en sistemas subactuados involucran estudios de vehículos subacuáticos, aéreos y aeroespaciales como el desarrollado por Wichlund y sus colaboradores [8] en el que se evalúan las condiciones de integrabilidad de restricciones con el fin de realizar tareas de control; o en el trabajo de Leonard [9] donde se aplican controles a trozos con el fin de dirigir un vehículo autónomo bajo el agua.

En ejemplos más recientes podemos ver un estudio compilatorio de sistemas subactuados, sus modelos y clasificaciones en el trabajo de Liu [10], así como controles adaptativos para sistemas subactuados como en el trabajo de Fang [11] en el cual analiza un sistema clásico como lo es la grúa viajera y realiza un control basado en seguimiento de una trayectoria tipo S ; o como en el trabajo de Lee [12], donde utilizan controles adaptativos en un cuadricóptero expuesto a incertidumbres en los parámetros de la planta. Así mismo podemos encontrar trabajos en control fraccional PID como el de Singh y sus colaboradores [13] aplicados a un doble péndulo invertido, trabajo que resulta interesante pues compara la respuesta con un controlador clásico tipo PID puro; y finalmente trabajos en control por modos deslizante en aplicaciones líder-seguidor como el de Sun y su equipo [14]. De esta manera, se evidencia que existe un amplio margen de trabajo que implica diferentes disciplinas del control aplicadas a sistemas subactuados.

Este trabajo basa sus esfuerzos en mejorar y demostrar la robustez de un control propuesto por Sira y Gao en [15] donde utilizan una linealización tangente del manipulador móvil subactuado provisto de unión flexible para diseñar un control por rechazo activo de perturbaciones, ADRC, obteniendo buenos resultados para el sistema mecánico. Además, se generalizan los resultados para la obtención de una salida plana para el caso de sistemas lagrangianos con una linealización tangente directa para sistemas lagrangianos. El trabajo de Sira y Gao es sólo una muestra del amplio espectro de áreas en las cuales el control por rechazo activo de perturbaciones ha tenido impacto.

Dentro del área de ADRC es posible encontrar trabajos en sistemas eléctricos como en el trabajo de Cortés y sus colaboradores [16] donde aplican la metodología del operador delta para un sistema discreto en motores de inducción; o en el trabajo de Zheng [17] donde se evidencian las aplicaciones prácticas del control por rechazo activo de perturbaciones en control de movimiento de mecanismos, regulación de la tensión de red eléctrica, convertidores de potencia, reactores químicos entre otros; además del trabajo interesante de Coral-Enriquez y sus colaboradores [18] en el cual aplican control por rechazo activo de perturbaciones para corregir el factor de potencia y realizan una compensación de armónicos en un filtro activo.

Trabajos completos acerca de la aplicación del esquema ADRC a los sistemas subactuados como los presentados en la tesis de Hernández Flores [19] donde se evidencia un esfuerzo por condensar ejemplos de sistemas subactuados controlados a partir de un esquema ADRC basado en la linealización del modelo de cada sistema. Así mismo, la tesis de Ramírez-Neria [20] dedica sus esfuerzos en el uso del esquema ADRC para el control de sistemas subactuados como el péndulo de Furuta y del problema *ball and beam*, obteniendo excelentes resultados en plataformas experimentales. De igual manera, diferentes aplicaciones de seguimiento de trayectoria se pueden ver en los trabajos de Ramírez-Neria [21] para un robot Delta, [22] para el problema *ball and beam* y [23] para el pendubot; de Aguilar en [24] para un sistema de triángulo rígido con bola; de Sira-Ramírez en [25] para el péndulo invertido en un carro y la grúa viajera, entre otros.

Estudios de tipo teórico también se encuentran respecto al control por rechazo activo de perturbaciones, como en el trabajo de Xue y Huang [26] donde se hace un análisis detallado del comportamiento del ADRC para cierta clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo, comparándolo además con otro tipo de controladores existentes. Se encuentra también el análisis de estabilidad del esquema ADRC via Lyapunov ha sido estudiado en el trabajo de [27]. Adicionalmente está el trabajo de Cortés [28], que utiliza el control ADRC junto con estimadores algebraicos para el rechazo de perturbaciones desconocidas. Además, los trabajos recientes de Sira-Ramírez [29, 30, 31, 32] demuestran un gran esfuerzo por comprobar la equivalencia del esquema ADRC con otros esquemas de control por medio de la manipulación algebraica y la respuesta frecuencial de los esquemas.

Otra aproximación interesante se encuentra en el trabajo de Qi y su equipo [33] donde estudian la estabilidad de un esquema ADRC en tiempo discreto aplicado al sistema "ball-and-beam", el cual presenta no linealidades altas y que, dependiendo del muestreo, puede presentar serias complicaciones en el control.

Es evidente que tanto los sistemas subactuados como el esquema de control por rechazo activo de perturbaciones han sido ampliamente estudiados en la literatura, no obstante, se sigue en la investigación de la aplicación de este tipo de esquemas, y la posibilidad de aplicar estrategias de control que permitan una manipulación sencilla de los sistemas subactuados.

1.2. Planteamiento del problema

Tomando como referencia los trabajos anteriormente citados respecto al manipulador móvil subactuado, en los cuales se plantean estrategias de control basadas en el esquema ADRC a partir del modelo linealizado, se evidencia una falta de inclusión de la parte eléctrica a fin de que el sistema sea implementado físicamente y controlado a partir de entradas de voltaje. Además, no se comprueba la robustez del esquema planteado frente a diferentes tipos de perturbaciones, tales como la variación de parámetros de la planta, ruidos de medición y cambios en las condiciones iniciales del sistema. Bajo estas observaciones se plantea el siguiente problema:

A partir del uso del modelo linealizado del manipulador móvil subactuado provisto de unión flexible alrededor de un punto de equilibrio, diseñar un esquema de control bajo la metodología de control por rechazo activo de perturbaciones que incluya las dinámicas del motor, y que permita el posicionamiento del efector final del mecanismo a un valor deseado a partir del seguimiento de una trayectoria tipo descanso-descanso de una salida particular. Adicionalmente, se plantea diseñar estrategias para evitar la medición del grado de libertad no actuado y demostrar la robustez del esquema frente a ruidos de medición, variaciones de parámetros y cambios en las condiciones iniciales.

1.3. Preguntas de investigación

- ¿La estrategia de control por rechazo activo de perturbaciones tiene un desempeño adecuado para el posicionamiento del efector final a partir del seguimiento de trayectoria de tipo descanso-descanso?
- ¿Cuál es la mejor estrategia para la inclusión de la dinámica de los motores a la dinámica del sistema?
- ¿Qué robustez ofrece el esquema de control frente a perturbaciones endógenas y exógenas, incluyendo ruidos de medición y variaciones de parámetros?

1.4. Motivación y justificación

El constante progreso en el desarrollo y uso de sistemas mecatrónicos con el fin de desarrollar tareas, cada vez más complejas, promueve y fomenta el estudio de este tipo de mecanismos bajo condiciones que faciliten su construcción, disminuyan sus costos de fabricación y operación, y optimicen sus parámetros. Tal es el caso de los sistemas subactuados, que generalmente prescinden de grados de libertad actuados para disminuir las dimensiones del sistema, facilitar la construcción y permitir una mayor carga en los mismos, entre otros objetivos. No obstante, las facilidades mecánicas que ofrecen se ven compensadas por las complicaciones en su control preciso y restringido por la falta de variables actuadas. Además de esto, dichos sistemas están expuestos constantemente a cambios en sus condiciones de operación, perturbaciones externas, cambios en los parámetros internos

tales como fricciones de tipo viscoso y constantes de elasticidad, entre otros. Debido a estas circunstancias, se impulsa el desarrollo de esquemas que sean robustos frente a este conjunto de perturbaciones a las cuales ve sometido el mecanismo durante su operación.

Con base en estos preliminares, y basándose en el desempeño robusto y eficiente que caracteriza el esquema de control por rechazo activo de perturbaciones frente a no linealidades, incertidumbres y perturbaciones, este trabajo de tesis presenta un diseño que cumple con el objetivo de ubicar espacialmente el efector final del mecanismo en un punto deseado a partir del seguimiento de trayectoria, aún bajo diferentes perturbaciones endógenas y exógenas que afectan al sistema.

1.5. Objetivos

Esta sección enuncia los objetivos generales y particulares para este trabajo de tesis.

1.5.1. Objetivo general

Diseñar una estrategia de control a partir del esquema ADRC, para un manipulador móvil subactuado provisto de unión flexible, que incluya la dinámica mecánica y eléctrica del sistema, usando un observador extendido de orden reducido, que permita el posicionamiento del efector final en un punto deseado del espacio a partir del seguimiento de trayectoria de una salida especialmente seleccionada, aún bajo condiciones de perturbaciones endógenas y exógenas del sistema.

1.5.2. Objetivos particulares

- Diseñar y simular un esquema de control ADRC basado en el sistema linealizado del manipulador móvil subactuado provisto de unión flexible.
- Incluir la dinámica de los motores en el sistema y diseñar el esquema ADRC que permita el cumplimiento del objetivo de control.
- Demostrar que es posible prescindir de la medición directa de la variable no actuada del sistema y obtener una medición indirecta a partir de un acelerómetro en el efector final el mecanismo.
- Validar la robustez del esquema de control frente a perturbaciones acopladas, perturbaciones de medición, desacoplamiento de controles, variación de parámetros y cambios en las condiciones iniciales del sistema.

1.6. Alcances

A continuación se enlistan los alcances de este trabajo de tesis.

- Obtener el modelo matemático del sistema.

- Diseñar un sistema de control basado en el esquema ADRC que cumpla con el objetivo de control.
- Incluir la dinámica de los motores bajo la metodología de Euler-Lagrange y el acoplamiento de modelos eléctrico-mecánico.
- Para el esquema con mejor desempeño, implementar el esquema ADRC donde se agrupen las perturbaciones endógenas y exógenas que serán canceladas por el observador interno del esquema.
- Implementar una medición de la aceleración lineal del efector final con el fin de evadir la medición directa del grado de libertad subactuado.
- Implementar metodologías que validen la robustez del esquema de control frente a variaciones de los parámetros internos de la planta, perturbaciones exógenas acopladas, perturbaciones debidas al proceso de medición.
- Validar el rango de movimiento de las condiciones iniciales de las variables de posición bajo el cual el esquema de control basado en el modelo linealizado, tiene un desempeño adecuado al aplicarlo al modelo no lineal.

1.7. Estructura del documento

El capítulo 1 de este trabajo proporciona una introducción al problema planteado, evidenciando los trabajos previos existentes en la literatura, los problemas concretos a resolver, y los alcances del trabajo de tesis que se desarrollan en este documento.

En el capítulo 2 se desarrollan los conceptos y herramientas teóricas que utiliza este trabajo de tesis para el diseño e implementación por simulación del esquema de control propuesto. Así mismo, se presenta en detalle las generalidades de las herramientas teóricas que se usan a lo largo del desarrollo de tesis.

En el capítulo 3 se presenta el desarrollo del modelo matemático del sistema separado en 4 secciones, la primera correspondiente únicamente al modelo mecánico del sistema, la segunda incluye las dinámicas de los motores por medio de la metodología de Euler-Lagrange, la tercera incluye las dinámicas de los motores por medio de un acoplamiento de modelos completo, y la cuarta incluye las dinámicas de los motores por medio de un acoplamiento de modelos aproximado. Todos los modelos son finalmente expresados en la forma canónica de Isidori simplificada requerida para el diseño del esquema ADRC.

En el capítulo 4 se plantean los esquemas de control para cada uno de los 4 modelos propuestos en el capítulo 3, evidenciando los pros y los contras de cada uno de los modelos y seleccionando finalmente un modelo simplificado que permite de manera simple y efectiva el control del sistema a partir de entradas de voltaje aún bajo perturbaciones acopladas a la entrada. Además, se muestra la suplantación de la medición directa de la variable no actuada por una medición de la aceleración lineal del efector final.

En el capítulo 5 se muestran las diferentes pruebas de robustez implementadas bajo el esquema con medición de la aceleración, las cuales incluyen pruebas de ruido de medición, desacoplamiento de controles, variación de parámetros y movimiento de las condiciones iniciales del sistema.

Finalmente, en el capítulo 6 se muestran las conclusiones del trabajo realizado y posibles trabajos futuros.

1.8. Resumen del capítulo

El presente capítulo da una introducción al trabajo propuesto y desarrollado a lo largo del documento. Se presentan los antecedentes y trabajos en los que se basa el diseño y la exposición del esquema implementado. A partir de los antecedentes se formula el problema a resolver. Se plantean, de igual forma, los objetivos generales y particulares del trabajo de tesis y el alcance que tendrá el trabajo presentado.

Capítulo 2

Marco teórico

En el presente capítulo se presentan las herramientas teóricas necesarias para comprender los esquemas de control y los desarrollos empleados en el presente trabajo. Dentro de estas herramientas teóricas se presentan la linealización tangente, la controlabilidad y planitud de los sistemas lineales, el control por rechazo activo de perturbaciones “ADRC”, la homotopía y transformaciones de Lie-Bäcklund.

2.1. Linealización tangente

Es bien sabido que muchos de los fenómenos existentes en la naturaleza exhiben un comportamiento no lineal, el cual dificulta la síntesis de una ley de control válida en forma global en todo el espacio de estado del sistema. Es por ello que frecuentemente se utilizan aproximaciones de la dinámica del estado, de tal manera que, en una región limitada del espacio de estado, el comportamiento del sistema sea semejante al de un sistema lineal y, por lo tanto, el control del sistema sea fácilmente implementable. Para el caso de sistemas lagrangianos, una aproximación basada en la expansión de segundo orden del lagrangiano ha sido explorada por [34] y resumida en [15] el cual aborda el problema del manipulador móvil subactuado provisto de unión flexible.

Consideremos entonces un lagrangiano de un sistema controlado $\dot{q} = f(q, u)$ dado por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, u)$, $q \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ de la forma

$$\mathcal{L} = \mathbb{K}(q, \dot{q}) - (\mathcal{V}(q) - q^T B u) \quad (2.1)$$

Donde, $\mathbb{K}(q, \dot{q})$ es la energía cinética del sistema, $\mathcal{V}(q)$ representa la energía potencial del sistema, y el término $q^T B u$ representa el trabajo realizado por el control del sistema representado por la variable u . Suponemos que $m \leq n$ y $\text{rank}(B) = m$. Si se plantea un punto de equilibrio para el vector de variables (q, \dot{q}, u) dado por $(\bar{q}, 0, \bar{u})$, es posible entonces definir un vector de variables incrementales dadas por las pequeñas variaciones del vector alrededor del equilibrio como:

$$\begin{aligned} q_\delta &= q - \bar{q} \\ \dot{q}_\delta &= \dot{q} \\ u_\delta &= u - \bar{u} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Consideremos una expansión en series de Taylor de la función escalar \mathcal{L} alrededor del punto de equilibrio,

$$\mathcal{L}(\bar{q} + q_\delta, \dot{q}_\delta, \bar{u} + u_\delta) = \mathcal{L}(\bar{q}, 0, \bar{u}) + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^T} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} q_\delta + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^T} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^T} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} u_\delta \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_\delta & \dot{q}_\delta & u_\delta \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial u^T} \end{array} \right) \bigg|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} + \text{t.o.s.} \quad (2.4)$$

Posteriormente, considerando las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (2.5)$$

Es posible evaluar las condiciones de equilibrio con el fin de obtener el lagrangiano incremental equivalente. En primer lugar, las variaciones temporales en el equilibrio deberán ser por definición cero, por lo que se obtiene el primer término de 2.3. Posteriormente, se conoce que en el equilibrio las velocidades generalizadas serán cero, por lo que el momento en equilibrio será cero, obteniendo el segundo término de 2.3, y a partir de 2.5 y de 2.3 se obtienen las condiciones:

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = 0 \rightarrow \bar{p} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = 0 \quad (2.6)$$

Es posible reducir la ecuación 2.3 a la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}(\bar{q} + q_\delta, \dot{q}_\delta, \bar{u} + u_\delta) = \mathcal{L}(\bar{q}, 0, \bar{u}) + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^T} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} u_\delta \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_\delta & \dot{q}_\delta & u_\delta \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial u^T} \end{array} \right) \bigg|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} + \text{t.o.s.} \quad (2.8)$$

Una vez obtenido el lagrangiano expandido de segundo orden, es se pueden obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema incremental. Partiendo del lagrangiano incremental:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, u) = \bar{\mathcal{L}}(\bar{q}, 0, \bar{u}) + \mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) \quad (2.9)$$

Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.5 al sistema 2.9 se obteniendo las siguientes expresiones [15]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial(\bar{\mathcal{L}}(\bar{q}, 0, \bar{u}) + \mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta))}{\partial \dot{q}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{q}_\delta} \right) \left(\frac{\partial \dot{q}_\delta^T}{\partial \dot{q}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{q}_\delta} \right) \left(\frac{\partial(\dot{q} - \bar{q})^T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{q}_\delta}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{q}_\delta}$$

Mientras tanto, se obtiene,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= \frac{\partial(\bar{\mathcal{L}}(\bar{q}, 0, \bar{u}) + \mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta))}{\partial q} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial q_\delta} \right) \left(\frac{\partial q_\delta^T}{\partial q} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial q_\delta} \right) \left(\frac{\partial(q - \bar{q})^T}{\partial q} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial q_\delta}\end{aligned}$$

Se obtienen entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema incremental dadas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial \dot{q}_\delta} - \frac{\partial \mathcal{L}_\delta}{\partial q_\delta} = 0 \quad (2.10)$$

Con lo cual se puede reducir aún más las ecuaciones 2.7 al considerar que basta el lagrangiano incremental para obtener la dinámica del sistema incremental para las variables definidas en 2.2.

$$\mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) = \frac{1}{2} [q_\delta \quad \dot{q}_\delta \quad u_\delta] \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial u^T} \end{array} \right) \Bigg|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Se eliminan del lagrangiano incremental los términos de orden superior; y el término $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} u_\delta$ debido a que éste no depende de las variables incrementales de posición y velocidad, por lo que al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.10, no se verán afectadas por este término.

De forma general, para sistemas lagrangianos “simples”, al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.10 a 2.11 se obtiene un sistema dinámico de la forma:

$$\mathcal{M} \dot{q}_\delta = \mathcal{K} q_\delta + \mathcal{B} u_\delta \quad (2.12)$$

Donde, \mathcal{M} es de la matriz de inercia evaluada en el equilibrio, dada por

$$\mathcal{M} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \quad (2.13)$$

\mathcal{K} es la matriz de elasticidad evaluada en el equilibrio, dada por

$$\mathcal{K} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \quad (2.14)$$

Y \mathcal{B} es la matriz de ganancias del control dada por

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial u^T} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial q^T} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \right) \quad (2.15)$$

Esta metodología puede aplicarse para todos los sistemas lagrangianos llamados “simples” (por cuanto la energía potencial no depende de la velocidad) no lineales con el fin de obtener la dinámica incremental alrededor del punto de equilibrio $(\bar{q}, 0, \bar{u})$. Particularmente, en este trabajo de tesis se utilizará la linealización tangente resultado de estos desarrollos para describir la dinámica incremental del manipulador móvil subactuado provisto de unión flexible, tanto para la dinámica con motores, como para la dinámica sin motores. Este sistema será analizado respecto a su controlabilidad, por consiguiente, su planitud, con el fin de diseñar el sistema de control.

2.2. Planitud diferencial

El concepto de planitud diferencial fue introducido por Fliess y sus colaboradores en [35], donde se establecen, por medio de ejemplos, los conceptos de sistemas planos y salida plana.

Se entiende por sistemas planos aquellos sistemas diferenciales controlados que poseen una dinámica lineal en su estructura, los cuales son fuertemente accesibles, o controlables en el sentido lineal, y poseen una variable llamada salida plana, la cual expresa todos y cada uno de los estados y controles del sistema en función de dicha salida plana y sus derivadas hasta un orden n , equivalente al orden del sistema. Esta propiedad estructural es homóloga a la propiedad de controlabilidad en el caso de sistemas lineales establecida por Kalman en [36]. Para el caso SISO (Single Input Single Output) se establece que la salida plana será función de los estados del sistema y tendrá un grado relativo igual al orden del sistema, es decir, la entrada de control aparecerá únicamente en la derivada n -ésima de la misma.

Para el caso de los sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output) lineal que estudiaremos en este trabajo de tesis, se establece la siguiente formulación matemática respecto a las salidas planas: Se dice que para un sistema de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (2.16)$$

Un vector de salidas $y = C^T x$ con $y \in \mathbb{R}^m$, será un vector de salidas planas si la sumatoria de los grados relativos de cada salida es igual al orden del sistema. Esto implica que es posible expresar los estados y los controles del sistema así

$$x = \phi(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m-1)})$$

$$u = \xi(y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\alpha_1)}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m)})$$

Donde ϕ y ξ son mapas invertibles entre las salidas y el conjunto de estados y controles. Además, el conjunto de constantes $\alpha_i, i := \{1, \dots, m\}$ cumple la propiedad $\sum_i \alpha_i = n$, con n el orden del sistema. Es decir, el vector de controles del sistema se puede parametrizar en función de las salidas y sus derivadas hasta el orden α_i para la salida i -ésima.

El concepto de planitud se extiende más allá de los sistemas lineales donde se establecen los mismos principios de expresabilidad de los estados y los controles en función de las salidas planas y sus derivadas. Este trabajo se desarrolla en los trabajos de Isidori [37] bajo los términos de linealización exacta, y se expone de manera detallada para diferentes casos en Sira Ramirez y sus colaboradores [38].

2.2.1. Salidas planas de sistemas lineales MIMO

La controlabilidad de sistemas lineales MIMO aplica los mismos conceptos establecidos por Kalman [36] y que han sido resumidos en otros trabajos de sistemas lineales [39]. No obstante, es importante establecer la relación que existe entre la controlabilidad y la planitud de los sistemas lineales. Para sistemas MIMO descritos por 2.16, el vector de m salidas planas se puede obtener a partir de [40]:

$$y = \alpha C_{K,r,n}^T K^{-1} Ax$$

Donde, $\alpha = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ es una matriz diagonal de constantes arbitrarias diferentes de cero y K es la matriz reducida de controlabilidad a partir de los índices de Kronecker ([41], [15])

$$K = [b_1, Ab_1, \dots, A^{n_1-1}b_1, \dots, b_2, Ab_2, \dots, A^{n_2-1}b_2, \dots, b_m, \dots, A^{n_m-1}b_m]$$

Tal que el conjunto $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ conforman los índices de Kronecker y además cumplen la condición,

$$\sum_{i=1}^m n_i = n$$

Dónde n es el orden del sistema. La matriz $C_{K,r,n}^T$ está conformada por m sub-vectores ordenados de dimensión n con entradas cero a excepción de la entrada $\sum_{j=1}^i n_j$ para la fila j , siendo n_i los índices de Kronecker, por lo tanto será de la forma:

$$C_{K,r,n}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Esta formulación se puede extender a sistemas de la forma 2.12, obteniendo una matriz de controlabilidad de tamaño $2n$ de rango completo en función de los índices de Kronecker dada por [15],

$$K^R = \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & \dots & (\mathcal{KM})^{n_1-1}b_1 & 0 & b_2 & \dots \\ b_1 & 0 & \dots & (\mathcal{KM})^{n_1-1}b_1 & 0 & b_2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & b_m & \dots & 0 & (\mathcal{KM})b_m & \dots & \\ \dots & b_m & 0 & \dots & (\mathcal{KM})b_m & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & 0 & \dots & (\mathcal{KM})^{n_m-1}b_m & \dots & \dots & \\ \dots & (\mathcal{KM})^{n_m-1}b_m & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \end{bmatrix}$$

Si se supone un vector de salidas planas dadas por

$$y = \begin{bmatrix} C_q^T & C_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\delta \\ v_\delta \end{bmatrix}$$

Entonces existe una matriz diagonal de escalares diferentes de cero $\alpha = \text{diag} [\alpha_1 \dots \alpha_m]$ tal que el siguiente conjunto de ecuaciones lineales tiene solución única

$$\begin{bmatrix} C_q^T & C_v^T \end{bmatrix} K^R = \alpha C_{K_r, 2n}^T$$

Si se considera la forma de la matriz extendida $C_{K_r, 2n}^T$, se observa que se obtienen dos sets independientes de ecuaciones diferenciales dados por

$$C_q^T \mathcal{M}^{-1} [b_j \quad (\mathcal{KM})b_j \quad \dots \quad (\mathcal{KM})^{n_j-1}b_j] = \alpha [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad e_j]$$

$$C_v^T \mathcal{M}^{-1} [b_j \quad (\mathcal{KM})b_j \quad \dots \quad (\mathcal{KM})^{n_j-1}b_j] = \alpha [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]$$

Donde, e_j es el vector columna m -dimensional en la coordenada cartesiana j -ésima de la matriz $C_{K_r, 2n}^T$. Dados este conjunto de ecuaciones, es claro que si la matriz de controlabilidad K es de rango completo entonces la única solución para $C_v^T \mathcal{M}^{-1} K = \mathbf{0}$ es C_v^T . Por lo que la salida plana depende únicamente de las variables generalizadas de posición [15], obteniendo como resultado que

$$y = \begin{bmatrix} C_q^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\delta \\ v_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha C_{K_r, n}^T K^{-1} \mathcal{M} & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\delta \\ v_\delta \end{bmatrix}$$

Este resultado permite fácilmente el cálculo de la salida plana para un gran número de sistemas largangianos presentes en los estudios académicos e industriales, además, como es propósito de este trabajo, cubre los sistemas que son linealizados usando la metodología planteada en la sección 2.1.

2.3. Control por rechazo activo de perturbaciones basado en planitud

Dentro de los esquemas de control robusto se encuentra el “ADRC” por sus siglas en inglés, el cual basa su metodología en poder expresar el esquema de la planta como un conjunto de cadenas de integración de las salidas del sistema (una cadena por cada

control), simplificando su dinámica; para posteriormente obtener un modelo simplificado en los cuales estén influyendo los controles del sistema, acompañados de sus respectivas ganancias, y un término genérico por cada salida que incluye no linealidades ignoradas a favor de la simplicidad del modelo. Estos términos se suponen como desconocidos (inciertos) y agrupan cada uno, en un término único de perturbación llamado *perturbación total*, las perturbaciones endógenas (inherentes a las dinámicas propias del sistema) y exógenas (provenientes de fuentes externas) del sistema, para concluir con una relación dinámica entrada-salida. Es decir, se reduce la dinámica del sistema a un modelo donde la función de transferencia de cada salida es la de un integrador de orden n_i , donde la suma de todos los n_i es equivalente al orden del sistema n . Estas perturbaciones se pretenden estimar en línea a partir de un observador para ser usadas en una ley de control que intente su cancelación, generando un sistema de control que asimila la planta como ideal con perturbaciones acopladas en el canal de entrada.

El término de ADRC aparece por primera vez en la literatura de habla inglesa en la conferencia de Gao y sus colaboradores [42] usando ganancias no lineales en los controles, el cual se fue simplificando al usar ganancias lineales como se ve en [43], si bien sus bases fueron dadas por las ideas de Han como un método de control robusto (véase [44], [45], [46]). Desde entonces, se han dado numerosos ejemplos de su aplicabilidad (véase Sira-Ramirez y colaboradores [38]), donde se evidencia la reducción de la dinámica de los sistemas a un modelo entrada salida en el cual se mantienen las propiedades estructurales del sistema, tales como el orden del sistema. Adicionalmente, se encuentran aplicaciones a sistemas hidráulicos como en el trabajo de Huang [47]; aplicaciones a sistemas subactuados como en el trabajo de Bou Sheral [48] y el de Ramirez-Neira [49]; e incluso trabajos de equivalencias entre el esquema ADRC con otro tipo de controles tales como filtros planos, control por inyecciones endógenas y realimentación exógena, GPI, como en los trabajos de Sira-Ramirez [30, 31, 50].

Todos estos trabajos se basan en la formulación matemática que se presenta en detalle, para sistemas SISO, (el método es fácilmente extensible a sistemas MIMO), a continuación. Supóngase un sistema en forma simplificada con la siguiente estructura

$$y^{(n)} = \beta u + \xi \quad (2.17)$$

Escríbase entonces el sistema en forma de cadena de integradores extendida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y^{(0)} &= y^{(1)} \\ \frac{d}{dt}y^{(1)} &= y^{(2)} \\ \frac{d}{dt}y^{(2)} &= y^{(3)} \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}y^{(n-1)} &= y^{(n)} \\ \frac{d}{dt}y^{(n)} &= \beta u + \xi \end{aligned} \quad (2.18)$$

Se plantea posteriormente una dinámica ideal, en la cual no existen perturbaciones en el sistema y que actuará como referencia para el controlador. Esta referencia será respecto a un sistema idealizado como un integrador puro a pesar que la planta posee dinámicas más complejas. Este modelo será de la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}y^{(0)*} &= y^{(1)*} \\
 \frac{d}{dt}y^{(1)*} &= y^{(2)*} \\
 \frac{d}{dt}y^{(2)*} &= y^{(3)*} \\
 &\vdots \\
 \frac{d}{dt}y^{(n-1)*} &= y^{(n)*} \\
 \frac{d}{dt}y^{(n)*} &= \beta u^*
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Es evidente que el sistema idealizado permite conocer las entradas de control nominales del sistema, que serán proporcionales a la derivada de orden n de la variable y , la cual en sistemas diferencialmente planos coincide con la salida plana. Si se plantea ahora el error de seguimiento como la diferencia entre la dinámica real del sistema 2.19 y la dinámica perturbada 2.18, se obtiene la dinámica del error de seguimiento tal como se observa en la siguiente formulación.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}e^{(0)} &= e^{(1)} \\
 \frac{d}{dt}e^{(1)} &= e^{(2)} \\
 \frac{d}{dt}e^{(2)} &= e^{(3)} \\
 &\vdots \\
 \frac{d}{dt}e^{(n-1)} &= e^{(n)} \\
 \frac{d}{dt}e^{(n)} &= \beta e_u + \xi
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Donde, $e_{i\delta}^{(j)} = y_{i\delta}^{(j)} - y_{i\delta}^{(j)*}$, $e_u = u - u^*$. Se desea llevar a cero el error de seguimiento $e^{(0)}$, tal que el sistema real siga en lo posible a un sistema idealizado cuya relación entrada-salida está dada por una cadena de integradores, ignorando la presencia de la perturbación. Esta perturbación se presenta inicialmente como un problema pues conlleva toda la dinámica del sistema, sea lineal o no lineal, por lo que es necesario eliminarla. Para ello se toma como iniciativa plantear un observador de estados que además estime la perturbación, siendo este un observador de estado extendido, surgido de las contribuciones innovadoras de Han [51]. No obstante, diversos investigadores han encontrado la forma de mejorar este observador, a partir de los planteamientos de Luenberger [52], reduciendo el orden del observador a partir de la suposición de la medición de la derivada de la salida. Este observador se denomina

observador extendido de orden reducido “ROESO”. Implementando este observador en la dinámica del error de seguimiento obtenemos el siguiente set de ecuaciones,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{e}^{(1)} &= \hat{e}^{(2)} + \lambda_{n-1}(e^{(1)} - \hat{e}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}^{(2)} &= \hat{e}^{(3)} + \lambda_{n-2}(e^{(1)} - \hat{e}^{(1)}) \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}\hat{e}^{(n-1)} &= \hat{e}^{(n)} + \lambda_2(e^{(1)} - \hat{e}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}^{(n)} &= \beta e_u + z + \lambda_1(e^{(1)} - \hat{e}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}z &= \lambda_0(e^{(1)} - \hat{e}^{(1)})
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Este proceso genera un esquema del mismo orden que tendrá un factor de corrección para cada estado propuesto por el error de estimación entre la primera derivada del error y su variable estimada, proporcional a una serie de constantes λ_i , que ajustarán cada estado estimado hasta llegar a un error de estimación cero. Adicionalmente, se plantea una variable z que será la estimación de la perturbación y además se establece que la variación de la perturbación será proporcional al error de estimación de la primera derivada del error de seguimiento. Si se reescribe el sistema en función del error de estimación a partir de las ecuaciones 2.21 y 2.20, se obtiene el esquema

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{e}^{(1)} &= \tilde{e}^{(2)} - \lambda_{n-1}\tilde{e}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}^{(2)} &= \tilde{e}^{(3)} - \lambda_{n-2}\tilde{e}^{(1)} \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}^{(n-1)} &= \tilde{e}^{(n)} - \lambda_2\tilde{e}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}^{(n)} &= e_\xi - \lambda_1\tilde{e}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}z &= \lambda_0\tilde{e}^{(1)}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Donde $e_\xi = \xi - z$, y representa el error de estimación de la perturbación. Es posible, por medio de manipulaciones algebraicas, escribir una dinámica del error de estimación de la primera derivada del error de seguimiento como:

$$\tilde{e}^{(n+1)} + \lambda_{n-1}\tilde{e}^{(n)} + \dots + \lambda_0\tilde{e}^{(1)} = \xi^{(1)} \tag{2.23}$$

Se evidencia el comportamiento en forma de entrada salida, siendo la entrada la perturbación y la salida el error de estimación. Nuestro propósito es llevar la respuesta del error de estimación a cero, por lo tanto se seleccionan coeficientes adecuados del polinomio generado, de tal forma que sea un polinomio de Hurwitz, y la respuesta del error de esti-

mación sea exponencialmente decreciente. Ahora, si se toma la transformada de Laplace de la ecuación 2.23 se llega a la siguiente relación,

$$\tilde{e}^{(1)}(s) = \left[\frac{s}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) \quad (2.24)$$

La cual es la función de sensibilidad del error de estimación de la primera derivada del error de seguimiento. Este tipo de funciones han sido señaladas para el esquema ADRC en trabajos previos [31] evidenciando una buena respuesta del error de estimación. Reemplazando la función de transferencia 2.24 en las ecuaciones del error de estimación 2.22, se puede obtener la función de sensibilidad para cada uno de los estados estimados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{e}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) \\ \tilde{e}^{(2)}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{n-1})}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) \\ &\vdots \\ \tilde{e}^{(n)}(s) &= \left[\frac{s(s^{n-2} + \lambda_{n-1}s^{n-3} + \dots + \lambda_2)}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) \\ e_\xi(s) &= \left[\frac{s(s^{n-1} + \lambda_{n-1}s^{n-2} + \lambda_{n-2}s^{n-3} + \dots + \lambda_1)}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Es evidente que los estados del error de estimación tienen funciones de sensibilidad que atenúan los efectos de la perturbación ξ en la estimación para perturbaciones de bajas frecuencias. Esto resuelve el problema de estimación de los estados y la perturbación, pero no resuelve aún el problema de control, por lo que se procede a plantear una ley de control que está basada en la estimación de los estados del error de seguimiento, y la utilización de la estimación de la perturbación para tratar de cancelarla desde la ley de control. Dicha ley de control tendrá la siguiente forma:

$$e_u = -\gamma_{n-1}\hat{e}^{(n-1)} - \gamma_{n-2}\hat{e}^{(n-2)} - \dots - \gamma_0e^{(0)} - z \quad (2.26)$$

La cual puede ser reemplazada en el error del control en la dinámica simplificada del error de seguimiento, tal que se cierre el lazo de realimentación. Esto genera la siguiente dinámica:

$$\frac{d}{dt}e^{(n)} = -\gamma_{n-1}\hat{e}^{(n-1)} - \gamma_{n-2}\hat{e}^{(n-2)} - \dots - \gamma_0e^{(0)} + e_\xi \quad (2.27)$$

En términos frecuenciales a través de la transformada de Laplace se obtiene,

$$\begin{aligned} [s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + \gamma_{n-2}s^{n-1} + \dots + \gamma_1s + \gamma_0]e(s) = \\ \gamma_{n-1}\tilde{e}^{(n-1)}(s) + \gamma_{n-2}\tilde{e}^{(n-2)}(s) + \dots + \gamma_1\tilde{e}^{(1)}(s) + e_\xi(s) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ecuación en la que aparecen las variables de estimación, de las cuales ya se tiene información en términos frecuenciales en función de la perturbación, por lo cual, reemplazando los resultados obtenidos de 2.25 en 2.28, así,

$$\begin{aligned}
[s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + \gamma_{n-2}s^{n-2} + \dots + \gamma_1s + \gamma_0]e(s) = \\
\gamma_{n-1} \left[\frac{s(s^{n-3} + \lambda_{n-1}s^{n-4} + \dots + \lambda_3)}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) + \\
\gamma_{n-2} \left[\frac{s(s^{n-4} + \lambda_{n-1}s^{n-5} + \dots + \lambda_4)}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) + \\
\vdots \\
\gamma_2 \left[\frac{s(s + \lambda_{n-1})}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) + \\
\gamma_1 \left[\frac{s}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s) + \\
\left[\frac{s(s^{n-1} + \lambda_{n-1}s^{n-2} + \lambda_{n-2}s^{n-3} + \dots + \lambda_1)}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0} \right] \xi(s)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Obtenemos una función de transferencia para el sistema realimentado, con el observador y el controlador, de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{e(s)}{\xi(s)} = \\
\left[\frac{\sum_{i=1}^j s^i (\sum_{j=1}^n \gamma_j \lambda_{n+i-j})}{(s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + \gamma_{n-2}s^{n-2} + \dots + \gamma_1s + \gamma_0)(s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0)} \right]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

El cual puede ser reescrito como

$$\frac{e(s)}{\xi(s)} = \left[\frac{s^n + \kappa_{2n-1}s^{n-1} + \kappa_{2n-2}s^{n-2} + \dots + \kappa_{n+1}s}{s^{2n} + \kappa_{2n-1}s^{2n-1} + \kappa_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + \kappa_1s + \kappa_0} \right] = M(s) \tag{2.31}$$

Lo cual indica la función de sensibilidad del error de seguimiento respecto a la perturbación. Esta función resume por completo la dinámica de un observador extendido de orden reducido y la de una ley de control de realimentación de los estados estimados, por lo que su implementación se ve facilitada y reducida a la de una función de transferencia racional y propia en su representación entrada-salida.

Es necesario calcular la función de transferencia del controlador del sistema. Para ello se presenta el siguiente diagrama de bloques de la Figura 2.1 que resume la dinámica del sistema.

Según este diagrama y conociendo la dinámica de entrada salida entre el error de seguimiento y la perturbación, entonces se tiene que

$$e(s) = \left[\frac{G(s)}{1 + \beta K(s)G(s)} \right] \xi(s) = M(s)\xi(s), \quad G(s) = \frac{1}{s^n} \tag{2.32}$$

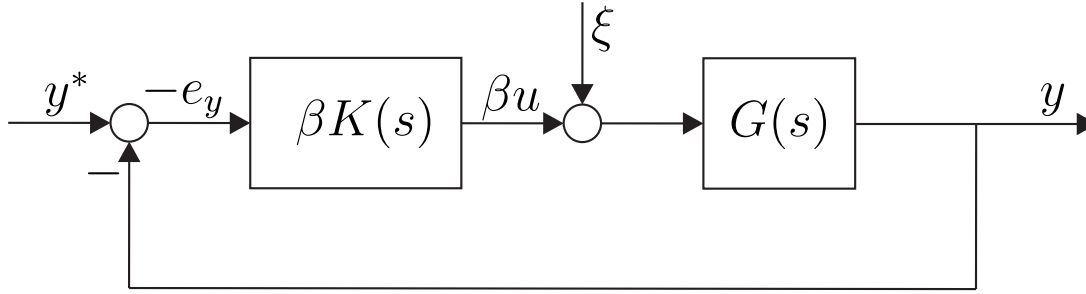


Figura 2.1: Diagrama de bloques del sistema simplificado.

Por lo tanto, resolviendo para $\beta K(s)$, se obtiene

$$\beta K(s) = \frac{1}{G(s)} - \frac{1}{M(q)} \quad (2.33)$$

Por lo tanto, homologando los términos $\beta K(s) = e_u(s)$ y reemplazando el resultado obtenido en 2.31, obtenemos que, de manera general, el controlador será de la forma,

$$e_u(s) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\kappa_n s^n + \kappa_{n-1} s^{n-1} + \kappa_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \kappa_1 s + \kappa_0}{s(s^{n-1} + \kappa_{2n-1} s^{n-2} + \kappa_{2n-2} s^{n-3} + \cdots + \kappa_{n+2} s + \kappa_{n+1})} \right] e(s) \quad (2.34)$$

Es en este controlador que están condensados los dos componentes principales del esquema ADRC, el observador y el controlador, en una función de transferencia que es racional y propia, y de fácil implementación con el fin de ejecutar sistemas de control reales y prácticos y que, además, ofrecen la facilidad de requerir únicamente la medición de la salida plana del sistema.

2.4. Planeación de trayectorias basada en sistemas Liouvillianos

Es bien sabido que la planeación de trayectoria es un aspecto fundamental en el desarrollo de sistemas de control cuando se requiere que una o varias variables sigan una trayectoria en el espacio de estado determinada por características tales como optimización de trayectorias, reducción de energía, evasión de obstáculos, entre otros. Dentro del presente trabajo de tesis se exploró una alternativa para obtener la trayectoria de un sistema plano de orden finito basándose en la planeación de trayectoria para un sistema plano de orden infinito (Liouvilliano, véase [53]), cuya variable a parametrizar satisface una ecuación diferencial que depende de otras variables a las cuales es posible asignarles trayectorias. Un par de ejemplos claros de esta metodología usados para asignar una trayectoria a un sistema con salida de fase no mínima se presentan en los trabajos de Sira-Ramirez [54] y [55]. No obstante, es posible aplicar esta metodología en sistemas planos mientras se asegure, al menos desde un punto de vista numérico, que para una iteración dada las trayectorias generadas convergan.

Consideremos un sistema de la forma

$$x = \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(r)}) \quad (2.35)$$

Tal que se requiera asignar una trayectoria a la variable x sin conocimiento previo de las derivadas $\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(r)}$. Es posible entonces crear un proceso iterativo funcional tal que se aproxime la solución de la ecuación diferencial en función de las posibles trayectorias que tengan las variables $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Estableciendo el proceso iterativo funcional como

$$x_{k+1} = \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, \dots, x_k^{(r)}) \quad (2.36)$$

Por lo tanto, se puede iniciar con un valor constante para x_0 tal que el proceso de iteración funcional reemplace el valor k -ésimo de la iteración en la funcional siguiente, así,

$$\begin{aligned} x_0 &= Cte \\ x_1 &= \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \\ x_2 &= \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \ddot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \dots, \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^{(r)}) \\ x_3 &= \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \ddot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \dots, \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^{(r)}), \\ &\quad \ddot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \dot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \ddot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \dots, \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^{(r)}, \dots, \\ &\quad \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \ddot{\phi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), \dots, \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^{(r)})^{(r)}) \\ &\quad \vdots \\ x_\infty &= \phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dots, \dot{\zeta}_n, \dots, \zeta_1^{(m)}, \zeta_2^{(m)}, \dots, \zeta_n^{(m)}, \dots) \end{aligned} \quad (2.37)$$

De esta manera, se obtiene una trayectoria aproximada para la variable x parametrizada en función de las variables de las cuales sí es posible planear una trayectoria.

2.5. Homotopía y transformaciones de Lie-Bäcklund

Considerando el sistema planteado en la sección 2.3, en el cual se tiene una ganancia del control que resulta ser dependiente de los parámetros de la planta, es posible que dicha ganancia sea mucho mayor a los valores del control nominales o muy pequeña respecto a los valores que tomará la señal de control. Ambos escenarios, representan una complicación desde el punto de vista de la sintonización de las constantes γ y λ vistas previamente en el esquema de control. Es por ello que se aborda la metodología por transformaciones de Lie-Bäcklund, cuya exposición para sistemas SISO y MIMO se puede ver resumida en [29], de forma generalizada en el libro de Anderson y sus colaboradores [56], y aplicada a través de transformaciones dependientes del estado por Fliess y sus colaboradores en [57] y para sistemas no lineales en [58].

Para ejemplificar el concepto de homotopía [59] en sistemas dinámicos, basta imaginar una trayectoria de un sistema en un espacio de estados perteneciente a \mathbb{R}^n . Es posible, en algunos casos, deformar las trayectorias que evolucionan en ese espacio de estados respetando las restricciones topomórficas tal que la evolución resultante sea equivalente para

otro sistema dinámico. Las transformaciones de Lie-Bäcklund permiten una transformación temporal por medio de la solución de una ecuación diferencial, tal que el sistema homótopo sea una escalización temporal del sistema original. Esto se evidencia al desarrollar la transformación como se explica a continuación para sistemas SISO no lineales, cuya teoría puede extenderse a sistemas lineales como un caso particular.

Considere un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, & u \in \mathcal{R} \\ y(x) &= h(x) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones suaves. Si el sistema mostrado en 2.38 es plano, con salida y , tendrá una representación entrada-salida, a partir de la forma canónica de Isidori [37] de la siguiente forma,

$$y^{(n)} = L_f^n h(\Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{n-1})) + L_g L_f^{(n-1)} h(\Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}))u \quad (2.39)$$

Donde, la notación $L_f h$ representa la derivada de Lie de h a lo largo del campo f , y la función Φ representa el difeomorfismo generado entre los estados x a partir de las derivadas de la salida plana y tal que:

$$x \mapsto \Phi(x) = (h(x), L_f h(x), L_f^2 h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x))^T \quad (2.40)$$

Ahora, se asume que el sistema 2.38 es regular en un conjunto abierto lo suficientemente largo de \mathbb{R}^n , tal que $L_g L_f^{(n-1)} h(\Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}))$ no es cero, para todo t , en la vecindad de una variedad S que intersecte el espacio \mathbb{R}^n , sobre el cual puedan continuamente deformar las trayectorias del estado. Entonces es posible crear la transformación, dependiente del estado, de la coordenada temporal,

$$d\tau = [L_g L_f^{(n-1)} h(\Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}))]^{1/n} dt \quad (2.41)$$

de tal forma que se propone un escalamiento del tiempo que resulta en una función escalar, monótonamente creciente, representada por τ . Aplicando esta transformación al sistema 2.39 se obtiene

$$\frac{d^n y^{(n)}}{d\tau^n} = \frac{L_f^n h(\Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}))}{L_g L_f^{(n-1)} h(\Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}))} + u := \frac{L_f^n h(\tau)}{L_g L_f^{(n-1)} h(\tau)} + u \quad (2.42)$$

la cual, bajo la filosofía del esquema de control ADRC puede ser reescrita como

$$\frac{d^n y^{(n)}}{d\tau^n} = u + \xi(\tau) \quad (2.43)$$

Donde ξ es una perturbación endógena del sistema. Adicionalmente, el tiempo $\tau(t)$ será la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{d\tau}{dt} = [L_g L_f^{(n-1)} h(\Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}))]^{1/n}, \quad \tau(0) = 0 \quad (2.44)$$

Debido a que, sin pérdida de generalidad, el término $[L_g L_f^{(n-1)} h(\Phi^{-1}(y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}))]$ se puede asumir como positivo, la variable temporal $\tau(t)$ solución de la ecuación 2.44 no sólo representa un mapa $t \mapsto \tau(t)$ sino que, además, es un mapa invertible.

Entonces, dadas estas condiciones, se afirma que las trayectorias obtenidas por el sistema 2.38 generadas a partir de una ley de control del tipo $u(y(t))$ son deformadas a las de un sistema homótopo dado por 2.42 a partir de una ley de control del tipo $u(y(\tau))$.

Para el caso de sistemas lineales MIMO, es más simple la formulación debido a que un sistema de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$, $u \in \mathbb{R}^m$ tendrá una representación simplificada entrada salida de la forma

$$\begin{aligned} y_1^{(n_1)} &= \beta_1 u_1 + \xi_1 \\ &\vdots \\ y_i^{(n_i)} &= \beta_i u_i + \xi_i \\ &\vdots \\ y_m^{(n_m)} &= \beta_m u_m + \xi_m \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por lo tanto es posible realizar m transformaciones de escalas de tiempo dadas por

$$\frac{d\tau_i}{dt} = \beta_i^{1/n_i}, \quad \tau_i(0) = 0 \quad (2.46)$$

Dando lugar a un sistema homótopo de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n_1} y_1}{d\tau^{n_1}} &= u_1 + \frac{\xi_1(\tau_1)}{\beta_1^{1/n_1}} \\ &\vdots \\ \frac{d^{n_i} y_i}{d\tau^{n_i}} &= u_i + \frac{\xi_i(\tau_i)}{\beta_i^{1/n_i}} \\ &\vdots \\ \frac{d^{n_m} y_m}{d\tau^{n_m}} &= u_m + \frac{\xi_m(\tau_m)}{\beta_m^{1/n_m}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para un conjunto de valores β_i constantes.

2.6. Resumen del capítulo

En el presente capítulo se enlistan y desarrollan las herramientas matemáticas necesarias para comprender y apreciar los cálculos y diseños presentados a lo largo del trabajo de tesis, iniciando por la definición de una linealización; siguiendo con el concepto de planitud diferencial y la formulación para obtener la salida plana de un sistema MIMO a través de la matriz de controlabilidad reducida; posteriormente se hace el desarrollo para un sistema SISO orden n de un diseño de controlador por el método de rechazo activo de perturbaciones, el cual es extensible a sistemas MIMO. Adicionalmente, se establece una

metodología de iteraciones funcionales para la obtención de trayectorias de un sistema de forma aproximada en función de variables conocidas, y finalmente se trata el tema de transformaciones de Lie-Bäcklund para sistemas no lineales y el caso particular de sistemas lineales con el fin de obtener un sistema homótopo.

Capítulo 3

Modelado del sistema

La descripción matemática de los sistemas físicos es un área fundamental en el estudio del control automático. La capacidad de describir por medio de ecuaciones las dinámicas de los sistemas ha permitido desde el análisis de su comportamiento hasta el desarrollo de estrategias de control usadas para fijar las respuestas del sistema a requerimientos específicos. Disponer del conocimiento suficiente del sistema es primordial en función de la tarea que se quiera desempeñar con el sistema, es por ello que el modelado de los sistemas es un paso de vital importancia para el desarrollo de las tareas de control. Estos modelos se obtienen a partir del uso de leyes físicas y de modelos simples que combinados, generalmente, forman un conjunto de ecuaciones diferenciales, los cuales describirán el estado de cada una de las variables involucradas. El proceso de modelado en tiempo continuo parte de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. [60]

En este capítulo se emplean las metodologías de modelado por Euler-Lagrange (EL) y se obtiene la linealización aproximada (tangente) directa del sistema a partir del lagrangiano, que será usada para obtener el controlador del sistema. Se modelará el sistema de manipulador móvil subactuado sin la inclusión de los motores, luego se incluirán los motores desde el planteamiento de las energías cinética y potencial, y finalmente se explorarán dos alternativas de adición de la dinámica de los motores, una completa y una aproximada, a partir del modelo simplificado de la parte mecánica.

3.1. Manipulador móvil subactuado

El manipulador móvil en el que se enfoca este trabajo de tesis consiste de una masa M que actúa como carro y soporte del brazo manipulador del sistema. Su movimiento está restringido al eje x y se supone dentro de él un motor de corriente continua que no será modelado en esta sección. Acoplado al carro de masa M se encuentra un brazo de dos eslabones de longitudes L_1 y L_2 , centros de masa ubicados a distancias l_{c1} y l_{c2} de sus respectivas uniones; y momentos de inercia I_1 e I_2 respectivamente. Estos eslabones están unidos por una junta rotacional provista de flexibilidad dada por un resorte torsional de constante de elasticidad k . Las variables actuadas del sistema serán la posición x y el ángulo θ_1 . Este esquema se muestra en la Figura 3.1.

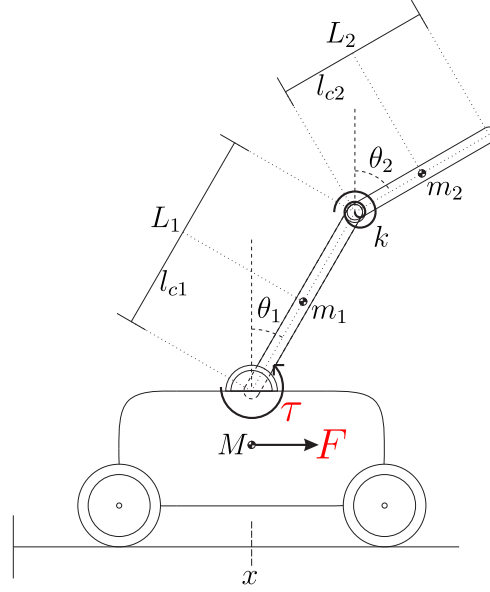


Figura 3.1: Manipulador móvil subactuado provisto de junta flexible.

3.1.1. Modelo no-lineal

Para obtener el modelo del manipulador móvil se emplea la metodología de Euler-Lagrange, la cual requiere el establecimiento de las energías cinética y potencial del sistema. Al ser un sistema mecánico, podemos referir las coordenadas para cada una de las variables generalizadas a los centros de masa del sistema. Es evidente que el sistema posee tres variables generalizadas correspondientes a los ángulos θ_1 y θ_2 respecto a la vertical y a la posición x del carro.

Sabiendo esto, las posiciones de los centros de masa están dadas por

$$\begin{aligned} x_M &= x \\ x_1 &= x + L_{c1} \sin \theta_1, \quad y_1 = L_{c1} \cos \theta_1 \\ x_2 &= x + L_1 \sin \theta_1 + L_{c2} \sin \theta_2, \\ y_2 &= L_1 \cos \theta_1 + L_{c2} \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Y las correspondientes velocidades son

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= \dot{x} \\ \dot{x}_1 &= \dot{x} + L_{c1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = -L_{c1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x} + L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L_{c2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \\ \dot{y}_2 &= -L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L_{c2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Según esto, se puede establecer la energía cinética del sistema mecánico como

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (3.1)$$

Mientras que la energía potencial se obtiene como

$$\mathcal{V} = m_1 g \cdot y_1 + m_2 g \cdot y_2 + \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 - F \cdot x - \tau \cdot \theta_1 \quad (3.2)$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones 3.1 y 3.2 se obtiene el siguiente lagrangiano del sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & - m_1 g \cdot y_1 - m_2 g \cdot y_2 - \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 + F \cdot x + \tau \cdot \theta_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Es claro que al ser un sistema lagrangiano, una vez desarrollados los productos y reemplazando los valores de las posiciones y velocidades de los centros de masa, es posible expresar el lagrangiano del sistema como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{M}(q) \dot{q} - (\mathcal{V}(q) - q^T B u) \quad (3.4)$$

Donde,

$$\mathcal{M}(q) = \begin{bmatrix} M + m_1 + m_2 & L_1 m_2 \cos(\theta_1) + l_{c1} m_1 \cos(\theta_1) & l_{c2} m_2 \cos(\theta_2) \\ L_1 m_2 \cos(\theta_1) + l_{c1} m_1 \cos(\theta_1) & m_2 L_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + I_1 & L_1 l_{c2} m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l_{c2} m_2 \cos(\theta_2) & L_1 l_{c2} m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Mientras que

$$\mathcal{V}(q) = m_1 g L_{c1} \cos \theta_1 + m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + L_{c2} \cos \theta_2) + \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (3.6)$$

Y finalmente

$$B u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Ahora, al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (3.8)$$

Se llega a un sistema de la forma generalizada dada por 3.9,

$$\mathcal{M}(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = B u \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la aceleración del sistema estará dada por

$$\ddot{q} = \mathcal{M}^{-1}(q) [-C(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q) + B u] \quad (3.10)$$

Que en forma explícita está dada por

$$\ddot{q} = \mathcal{M}^{-1}(q) \cdot \left[\begin{array}{c} F \\ \left(\begin{array}{c} \tau - k (\theta_1 - \theta_2) + L_1 g m_2 \sin(\theta_1) + g l_{c1} m_1 \sin(\theta_1) \\ -l_{c1} m_1 \sin(\theta_1) \dot{x} \dot{\theta}_1 - L_1 m_2 \sin(\theta_1) \dot{x} \dot{\theta}_1 - L_1 l_{c2} m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\ \left(k (\theta_1 - \theta_2) + g l_{c2} m_2 \sin(\theta_2) - l_{c2} m_2 \sin(\theta_2) \dot{x} \dot{\theta}_2 \right) \\ + L_1 l_{c2} m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (3.11)$$

Esto completaría el modelamiento del sistema completo, usando la metodología de Euler-Lagrange, obteniendo finalmente un sistema de 6 estados no lineal.

3.1.2. Modelo Linealizado

Uno de los intereses más profundos de este trabajo es usar el modelo linealizado del sistema alrededor de un punto de equilibrio con el fin de proponer la estrategia de control. Esto resultará útil en cuestión de simplicidad algebraica, computacional y comprobará la robustez del control al trabajar en puntos diferentes al punto de equilibrio. Por ello, se procede a realizar la linealización del sistema alrededor del punto de equilibrio natural del sistema, el origen.

En primer lugar se usa la ecuación del lagrangiano mostrada en 3.4 y se procede a realizar la linealización tangente del sistema. Tal como se vio en el capítulo 2, el modelo linealizado se obtiene a partir de un punto de equilibrio el cual está dado por

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

El cual equivale a una posición $x = 0$ y ángulos $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Este equilibrio se puede observar en la Figura 3.2.

A partir de este punto de equilibrio es posible definir las variables incrementales del sistema como:

$$\begin{aligned} q_\delta &= q - \bar{q} \\ \dot{q}_\delta &= \dot{q} \\ u_\delta &= u - \bar{u} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Se dejan expresadas las cantidades \bar{q} y \bar{u} debido a que es válido para cualquier punto de equilibrio, considerando que para todos los puntos de equilibrio $\bar{\dot{q}} = 0$.

Bajo este análisis, si se supone que el sistema está en equilibrio para los valores $(q, \dot{q}, u) = (\bar{q}, 0, \bar{u})$ entonces es posible plantear la dinámica en equilibrio de las ecuaciones de Euler Lagrange mostradas en 3.8 como sigue,

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = 0 \rightarrow \bar{p} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (3.14)$$

Por lo tanto, usando el mismo procedimiento planteado en el capítulo 2, se obtiene que el lagrangiano incremental es

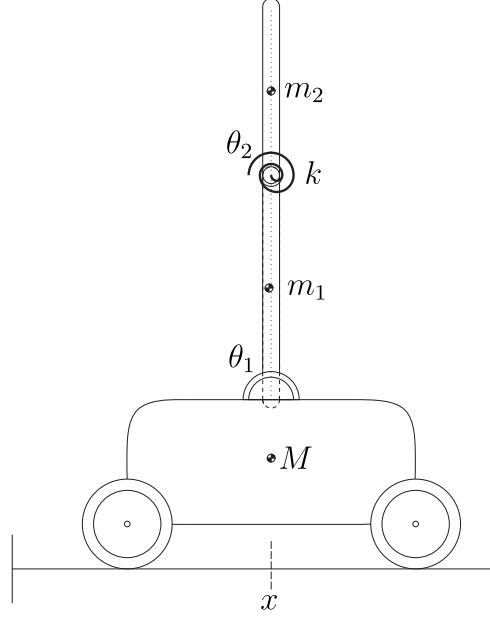


Figura 3.2: Punto de equilibrio del manipulador móvil.

$$\mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) = \bar{q}^T B u_\delta + \frac{1}{2} [q_\delta \quad \dot{q}_\delta \quad u_\delta] \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} & 0 & B \\ 0 & \mathcal{M}(q) & 0 \\ B & 0 & 0 \end{pmatrix} \bigg|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix}$$

Es decir, que el lagrangiano incremental se puede escribir como

$$\mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) = \frac{1}{2} \dot{q}_\delta^T \mathcal{M}(q) \big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta + \frac{1}{2} q_\delta^T \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} \right) \bigg|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} q_\delta + q_\delta B u_\delta \quad (3.15)$$

Es claro que el término $\bar{q}^T B u_\delta$ puede eliminarse de la ecuación debido a que no depende de las variables incrementales. Por consiguiente, una vez obtenido el lagrangiano incremental, se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales son invariantes para el caso incremental tal como se demostró en el capítulo 2. Al desarrollar esta operación resulta:

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{M}(\bar{q}) \dot{q}_\delta) - \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} \right) \bigg|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} q_\delta = B u_\delta \quad (3.16)$$

O de forma simplificada como

$$\mathcal{M}(\bar{q}) \ddot{q}_\delta + \mathcal{K}(\bar{q}, 0, \bar{u}) q_\delta = B u_\delta \quad (3.17)$$

Donde,

$$\mathcal{K}(\bar{q}, 0, \bar{u}) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})}$$

Si desarrollamos la ecuación 3.17 y la ponemos en términos de los parámetros del sistema obtenemos la ecuación 3.18 que describe el comportamiento del sistema linealizado alrededor del equilibrio 3.12.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_\delta \\ \ddot{\theta}_{1\delta} \\ \ddot{\theta}_{2\delta} \end{bmatrix} = -\mathcal{M}^{-1}(\bar{q}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 g l_{c1} + m_2 g L_1 + k & -k \\ 0 & -k & m_2 g L_{c2} + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \theta_{1\delta} \\ \theta_{2\delta} \end{bmatrix} + \mathcal{M}^{-1}(\bar{q}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_\delta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Donde,

$$\mathcal{M}^{-1}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} m_{11}^i & m_{12}^i & m_{13}^i \\ m_{21}^i & m_{22}^i & m_{32}^i \\ m_{31}^i & m_{23}^i & m_{33}^i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.1.3. Planitud del sistema linealizado

Tal como se vio en el capítulo 2, un sistema lineal es controlable, por consiguiente plano, si su matriz de controlabilidad es no singular o de rango completo. Es posible obtener dos salidas planas, una para cada uno de los controles, tal que el grado relativo de las salidas respecto a cada entrada sumen el total del orden del sistema. El método general para hallar las salidas planas expuesto en el capítulo 2 no será usado en esta sección debido a que, por inspección, es posible hallar dos salidas que cumplen estas propiedades.

En primer lugar se plantean las salidas planas como

$$y_{1\delta} = (M + m_1 + m_2)x_\delta + (m_1 L_{c1} + m_2 L_1)\theta_{1\delta} + m_2 L_{c2}\theta_{2\delta} \quad (3.20)$$

$$y_{2\delta} = m_2 L_{c2}x_\delta + m_2 L_1 L_{c2}\theta_{1\delta} + (m_2 L_{c2}^2 + I_2)\theta_{2\delta} \quad (3.21)$$

Para demostrarlo, realizamos las derivadas temporales de cada salida a fin de obtener el grado relativo respecto a las diferentes entradas. Debido a la definición de las salidas planas, dependientes únicamente de las posiciones generalizadas, las dinámicas obtenidas en 3.18 se reemplazarán únicamente en las derivadas par de las salidas.

Para la primera salida obtenemos las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} y_{1\delta}^{(1)} &= (M + m_1 + m_2)\dot{x}_\delta + (m_1 L_{c1} + m_2 L_1)\dot{\theta}_{1\delta} + m_2 L_{c2}\dot{\theta}_{2\delta} \\ y_{1\delta}^{(2)} &= (M + m_1 + m_2)\ddot{x}_\delta + (m_1 L_{c1} + m_2 L_1)\ddot{\theta}_{1\delta} + m_2 L_{c2}\ddot{\theta}_{2\delta} = F_\delta \end{aligned}$$

Podemos ver que la segunda derivada de la primera salida simplifica todos los términos obteniendo únicamente el primer control incremental F_δ . Según esto se obtiene un grado relativo parcial de 2 para el primer control. Por otro lado, para la segunda salida se obtiene,

$$\begin{aligned}
y_{2\delta}^{(1)} &= m_2 L_{c2} \dot{x}_\delta + m_2 L_1 L_{c2} \dot{\theta}_{1\delta} + (m_2 L_{c2}^2 + I_2) \dot{\theta}_{2\delta} \\
y_{2\delta}^{(2)} &= m_2 L_{c2} \ddot{x}_\delta + m_2 L_1 L_{c2} \ddot{\theta}_{1\delta} + (m_2 L_{c2}^2 + I_2) \ddot{\theta}_{2\delta} = k \theta_{1\delta} - k \theta_{2\delta} + g l_{c2} m_2 \theta_{2\delta} \\
y_{2\delta}^{(3)} &= k \dot{\theta}_{1\delta} - k \dot{\theta}_{2\delta} + g l_{c2} m_2 \dot{\theta}_{2\delta} \\
y_{2\delta}^{(4)} &= k \ddot{\theta}_{1\delta} - k \ddot{\theta}_{2\delta} + g l_{c2} m_2 \ddot{\theta}_{2\delta} \\
&= ((k m_{33}^i - m_{32}^i (k + L_1 g m_2 + g l_{c1} m_1)) \\
&\quad (k - g l_{c2} m_2) - k (k m_{23}^i - m_{22}^i (k + L_1 g m_2 + g l_{c1} m_1))) \theta_{1\delta} \\
&\quad + (k (m_{23}^i (k + g l_{c2} m_2) - k m_{22}^i) - (k - g l_{c2} m_2) (m_{33}^i (k + g l_{c2} m_2) - k m_{32}^i)) \theta_{2\delta} \\
&\quad + F_\delta (k m_{21}^i + (g l_{c2} m_2 - k) m_{31}^i) + \tau_\delta (k m_{31}^i + (g l_{c2} m_2 - k) m_{31}^i)
\end{aligned}$$

Como se observa, la cuarta derivada de la segunda salida plana depende explícitamente del segundo control incremental τ_δ . Esto implica un grado relativo para esta segunda salida de 4, sumando un total de 6, equivalente al orden total del sistema. Por lo tanto, es posible expresar los estados del sistema linealizado y los controles incrementales en función de las salidas planas y sus derivadas.

Ahora, adoptando la forma requerida para los controladores, se pretende escribir las derivadas de mayor orden de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
y_{1\delta}^{(2)} &= F_\delta \\
y_{2\delta}^{(4)} &= \beta_{21} F_\delta + \beta_{22} \tau_\delta + \xi_2(t)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Donde el término de perturbación que agrupa los términos que serán ignorados de la dinámica del sistema linealizado es,

$$\begin{aligned}
\xi_2(t) &= \\
&((k m_{33}^i - m_{32}^i (k + L_1 g m_2 + g l_{c1} m_1)) \\
&(k - g l_{c2} m_2) - k (k m_{23}^i - m_{22}^i (k + L_1 g m_2 + g l_{c1} m_1))) \theta_{1\delta} \\
&+ (k (m_{23}^i (k + g l_{c2} m_2) - k m_{22}^i) - (k - g l_{c2} m_2) (m_{33}^i (k + g l_{c2} m_2) - k m_{32}^i)) \theta_{2\delta}
\end{aligned}$$

Mientras que las ganancias de los controles están definidas por,

$$\beta_{21} = (k m_{21}^i + (g l_{c2} m_2 - k) m_{31}^i)$$

$$\beta_{22} = (k m_{31}^i + (g l_{c2} m_2 - k) m_{31}^i)$$

Por lo tanto, podemos reescribir el sistema en forma simplificada como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_\delta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1\delta}^{(2)} \\ y_{2\delta}^{(4)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

La cual será útil al momento de plantear la ley de control para el sistema simplificado.

3.2. Manipulador móvil con motor en cada control haciendo uso del modelado de Euler-Lagrange

Uno de los objetivos es lograr el control del manipulador con la dinámica del motor incluida en el sistema. El primer acercamiento que se puede hacer para obtener el modelo es derivar las ecuaciones de energía potencial y cinética para el motor DC e incluirlas en el lagrangiano del sistema.

Las posiciones de los centros de masa son las mismas que se usaron en la sección 3.1.1, sin embargo, antes de definir la energía cinética y potencial es necesario relacionar las variables generalizadas de la dinámica del motor con las variables generalizadas de la dinámica mecánica. Esto se explica en las siguientes secciones.

3.2.1. El Motor DC

El motor de corriente directa es una máquina eléctrica que transforma la energía eléctrica suministrada a través de una fuente de tensión, en energía mecánica cinética, transmitida a través de un eje de rotación. La Figura 3.3 ilustra el modelo del sistema.

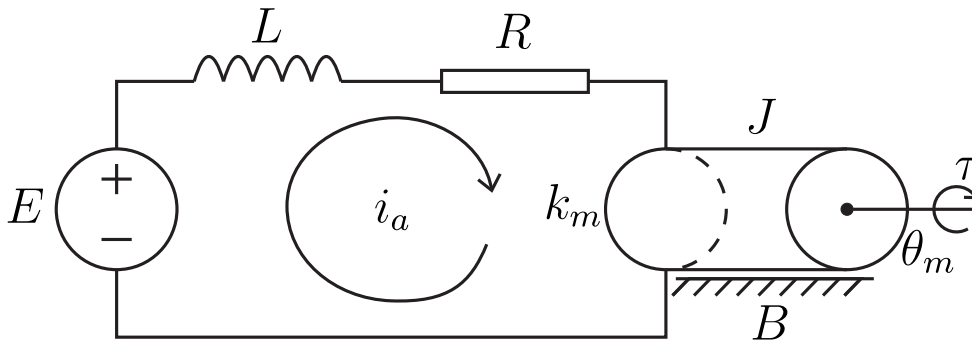


Figura 3.3: Diagrama esquemático del motor DC.

Este tema ha sido explorado vastamente en la literatura, por lo que su modelo es ampliamente conocido. Trabajando el sistema internacional de medidas el modelo se rige bajo los siguientes parámetros: L , inductancia del motor, E tensión de entrada, R resistencia del motor, k_m constante de fuerza electromotriz, J momento de inercia del sistema mecánico del motor, B constante de fricción del motor. Además, las variables generalizadas del motor i_a como corriente de armadura y θ como posición angular del motor describen por completo la dinámica del motor. Por último, el término τ es la interrelación entre el motor y el sistema mecánico acoplado a este.

3.2.2. Motor para el par de la articulación actuada

Si se incluye el motor DC considerando que existe una caja de relación N entre el eje del motor y el eje del eslabón, se obtienen la siguiente relación.

$$\theta_m = N\theta_1$$

Además se considera que el motor DC tiene una energía potencial dada por

$$\mathcal{V}_{DC} = -(E - V_b)q_e$$

Donde, E es la tensión de la fuente, q_e es la carga eléctrica y V_b es la tensión inducida en el circuito debido a la fuerza electromotriz, la cual tiene la siguiente relación en función de la constante de fuerza contraelectromotriz K_e y la velocidad angular del eslabón $\dot{\theta}_1$

$$V_b = K_e N \dot{\theta}_1$$

3.2.3. Motor para el control del carro

Si se incluye el motor DC considerando que existe una caja entre el eje del motor y el eje del eslabón, se obtienen la siguiente relación.

$$\theta_m = N_c \theta_r$$

Donde, θ_r es la velocidad angular de la rueda del carro. No obstante, se puede encontrar la relación entre esta velocidad angular y la velocidad lineal del carro

$$\dot{\theta}_r = R_c \dot{x}_M$$

Donde, R_c es el radio de la rueda del carro. Bajo estas relaciones se encuentra que el motor DC tiene una energía potencial dada por

$$\mathcal{V}_{DC} = -(E_c - V_{bc})q_c$$

Donde, E_c es la tensión de la fuente, q_c es la carga eléctrica y V_{bc} es la tensión inducida en el circuito debido a la fuerza electromotriz, la cual tiene la siguiente relación

$$V_{bc} = K_{ec} N_c R_c \dot{\theta}_1$$

3.2.4. Modelo no-lineal

Ahora, una vez definidas las relaciones entre las variables generalizadas de la dinámica del motor con las variables generalizadas mecánicas es posible definir las formulaciones de la energía cinética y la energía potencial.

En primer lugar, la energía cinética estará definida como

$$\begin{aligned} \mathbb{K} = & \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} I_m (N \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} L_a \dot{q}_e^2 + \frac{1}{2} I_{mc} (N_c R_c \dot{x}_M)^2 + \frac{1}{2} L_{ac} \dot{q}_c^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por otro lado, se obtiene la energía potencial de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & m_1 g \cdot y_1 + m_2 g \cdot y_2 + \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 - F \cdot x \\ & + q_e N K_e \dot{\theta}_1 - q_e E + q_c K_{ec} N_c R_c \dot{x}_M - q_c E_c \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\ddot{q} = \mathcal{M}^{-1}(q) \cdot \begin{bmatrix} (1/R_c)(-B_{mc}(R_c)\dot{x} + K_{ec}\dot{q}_c) \\ \left(\begin{array}{l} -B_m\dot{\theta}_1 + K_e\dot{q}_e - k(\theta_1 - \theta_2) + L_1gm_2 \sin(\theta_1) + gl_{c1}m_1 \sin(\theta_1) \\ -l_{c1}m_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{x} - L_1m_2 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{x} - L_1l_{c2}m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{array} \right) \\ k(\theta_1 - \theta_2) + gl_{c2}m_2 \sin(\theta_2) - l_{c2}m_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2\dot{x} + L_1l_{c2}m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ -R_a\dot{q}_e + K_e\dot{\theta}_1 + E \\ -R_{ac}\dot{q}_c + K_{ec}(R_c)\dot{x} + E_c \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Esto completaría el modelamiento del sistema completo, a partir del uso de la metodología de Euler-Lagrange, obteniendo finalmente un sistema de diez estados no lineal. No obstante, es claro que el sistema no lineal es independiente de los estados correspondientes a las cargas eléctricas de los motores y dependiente de sus derivadas, las corrientes eléctricas, por lo cual es posible prescindir de estos dos estados y llegar a un sistema de ocho estados no lineal. Esta característica será usada para el proceso de planitud.

3.2.5. Modelo Linealizado

Si se supone que el sistema está en equilibrio para los valores $(q, \dot{q}, u) = (\bar{q}, 0, \bar{u})$, entonces es posible plantear la dinámica del sistema en equilibrio como sigue,

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = 0 \rightarrow \bar{p} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \quad (3.34)$$

No obstante, debido a que la función de disipación Rayleigh depende únicamente de la velocidad, en equilibrio este término es cero, por lo tanto

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} = 0 \quad (3.35)$$

Definiendo las variables incrementales de la misma forma que se definieron en la sección 3.1.2,

$$\begin{aligned} q_\delta &= q - \bar{q} \\ \dot{q}_\delta &= \dot{q} \\ u_\delta &= u - \bar{u} \end{aligned}$$

Es posible plantear la linealización tangente de segundo orden del lagrangiano alrededor del punto de equilibrio como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{q} + q_\delta, \dot{q}_\delta, \bar{u} + u_\delta) &= \mathcal{L}(\bar{q}, 0, \bar{u}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} q_\delta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} u_\delta \\ &+ \frac{1}{2} [q_\delta \quad \dot{q}_\delta \quad u_\delta] \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial u^T} \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando los resultados 3.34 y 3.35, el lagrangiano incremental se define como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} u_\delta + \\ &+ \frac{1}{2} [q_\delta \quad \dot{q}_\delta \quad u_\delta] \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial u^T} \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desarrollando el lagrangiano incremental para la forma general planteada en 3.28 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) &= \bar{q}^T B u_\delta + \\ &+ \frac{1}{2} [q_\delta \quad \dot{q}_\delta \quad u_\delta] \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} & -\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial \dot{q}^T} & B \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \mathcal{M}(q) & 0 \\ B & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El término $\bar{q}^T B u_\delta$ puede no considerarse debido a que no depende de las variables generalizadas. Esta reducción implica que el lagrangiano incremental será

$$\mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) = \frac{1}{2} [q_\delta \quad \dot{q}_\delta \quad u_\delta] \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} & -\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial \dot{q}^T} & B \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \mathcal{M}(q) & 0 \\ B & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

O escrito en forma escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta(q_\delta, \dot{q}_\delta, u_\delta) = & \frac{1}{2} \dot{q}_\delta^T \mathcal{M}(q)|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta + \frac{1}{2} q_\delta^T \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} q_\delta + \\ & q_\delta B u_\delta + q_\delta^T \left\{ \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q} \partial q^T} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} + \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial \dot{q}^T} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \right\} \dot{q}_\delta \end{aligned} \quad (3.37)$$

De igual manera, se puede realizar expansión en series de Taylor hasta segundo orden de la función de Rayleigh, obteniendo una función linealizada así,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\bar{q} + q_\delta, \dot{q}_\delta, \bar{u} + u_\delta) = & \mathcal{R}(\bar{q}, 0, \bar{u}) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} q_\delta + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} u_\delta \\ & \frac{1}{2} [q_\delta \quad \dot{q}_\delta \quad u_\delta] \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial q \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial q \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial q \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q} \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q} \partial u^T} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial u \partial q^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial u \partial \dot{q}^T} & \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial u \partial u^T} \end{array} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \begin{bmatrix} q_\delta \\ \dot{q}_\delta \\ u_\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

No obstante, como la función de Rayleigh sólo depende de las derivadas de las variables generalizadas, se simplifica su linealización así

$$\mathcal{R}(\dot{q}_\delta) = \mathcal{R}(0) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta + \frac{1}{2} \dot{q}_\delta^T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta$$

Si se desarrollan los términos se obtiene que

$$\mathcal{R}(\dot{q}_\delta) = \frac{1}{2} \dot{q}_\delta^T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta$$

Ahora, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange mostradas en el capítulo 2 para un lagrangiano incremental, se obtiene que el sistema linealizado es de la forma

$$\mathcal{M}(q)|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \ddot{q}_\delta - \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} q_\delta + \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})} \dot{q}_\delta = B u_\delta \quad (3.38)$$

El cual puede ser reescrito así,

$$\mathcal{M}(\bar{q}) \ddot{q}_\delta + \mathcal{C}(\bar{q}, 0, \bar{u}) \dot{q}_\delta + \mathcal{K}(\bar{q}, 0, \bar{u}) q_\delta = B u_\delta \quad (3.39)$$

Donde,

$$\mathcal{M}(\bar{q}) = \mathcal{M}(q)|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})}, \quad \mathcal{C}(\bar{q}, 0, \bar{u}) = \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}^T} \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})}, \quad \mathcal{K}(\bar{q}, 0, \bar{u}) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}(q, \dot{q})}{\partial q \partial q^T} \right) \Big|_{(\bar{q}, 0, \bar{u})}$$

De igual manera, la definición explícita de las matrices es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\bar{q}) &= \\ &\begin{bmatrix} I_{mc} N_c^2 R_c^2 + M + m_1 + m_2 & L_1 m_2 + l_{c1} m_1 & l_{c2} m_2 & 0 & 0 \\ L_1 m_2 + l_{c1} m_1 & m_2 L_1^2 + I_m N^2 + m_1 l_{c1}^2 + I_1 & L_1 l_{c2} m_2 & 0 & 0 \\ l_{c2} m_2 & L_1 l_{c2} m_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{ac} \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}(\bar{q}, 0, \bar{u}) &= \\ &\begin{bmatrix} B_{mc} N^2 R_c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_m N^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{ac} \end{bmatrix} \\ \mathcal{K}(\bar{q}, 0, \bar{u}) &= \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ k \theta_2 - k \theta_1 + g l_{c1} m_1 \theta_1 + L_1 g m_2 \theta_1 \\ k \theta_1 - k \theta_2 + g l_{c2} m_2 \theta_2 \\ -K_e N \dot{\theta}_1 \\ -K_{ec} N_c R_c \dot{x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde podemos despejar las aceleraciones como

$$\ddot{q}_\delta = \mathcal{M}(\bar{q})^{-1} [-\mathcal{C}(\bar{q}, 0, \bar{u})\dot{q}_\delta - \mathcal{K}(\bar{q}, 0, \bar{u})q_\delta + B u_\delta] \quad (3.40)$$

3.2.6. Planitud del sistema linealizado

Tal como se vio en el capítulo 2, el sistema lineal es controlable, por consiguiente plano, si su matriz de controlabilidad es de rango completo. En esta sección, debido a la complejidad del sistema, no es posible encontrar la salida por inspección, por lo que se usará el método general para sistemas lineales descrito en el capítulo 2.

En primer lugar, se debe expresar el sistema obtenido en 3.39 en forma de estados, lo cual es posible bajo la siguiente re escritura del sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_\delta \\ v_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} & -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\delta \\ v_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{M}^{-1}B \end{bmatrix} u_\delta \quad (3.41)$$

La notación en 3.41 obvia las dependencias de las matrices de inercia, coriolis y elasticidad de los puntos de equilibrio por simplicidad en la expresión. Esta representación permite estudiar la controlabilidad del sistema. Recordando que un sistema lineal invariante en el tiempo multivariable se representa como

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m < n \quad (3.42)$$

con F y G matrices constantes. Se asume que el rango de la matriz $G = [g_1, g_2, \dots, g_m]$ es m . Refiriéndose al sistema como el par (F, G) , se dice que el par (F, G) es controlable si y sólo si, la matriz de controlabilidad de Kalman de tamaño $n \times (nm)$ satisface,

$$\text{rank} [G \quad FG \quad \dots \quad F^{n-1}G] = n \quad (3.43)$$

Por lo tanto se procede a desarrollar las potencias de la matriz de controlabilidad de Kalman para el sistema linealizado. Con este proceso se obtiene que

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ \gamma & \kappa \end{bmatrix}, \quad \gamma = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}, \quad \kappa = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \\ A^2 &= \begin{bmatrix} \gamma & \kappa \\ \kappa\gamma & \gamma + \kappa^2 \end{bmatrix} \\ A^3 &= \begin{bmatrix} \kappa\gamma & \gamma + \kappa^2 \\ (\gamma + \kappa^2)\gamma & \gamma\kappa + \kappa\gamma + \kappa^3 \end{bmatrix} \\ A^4 &= \begin{bmatrix} (\gamma + \kappa^2)\gamma & \gamma\kappa + \kappa\gamma + \kappa^3 \\ \gamma\kappa\gamma + \kappa(\gamma + \kappa^2)\gamma & \gamma^2 + \gamma\kappa^2 + \kappa\gamma\kappa + \kappa^2\gamma + \kappa^4 \end{bmatrix} \\ A^5 &= \begin{bmatrix} \gamma\kappa\gamma + \kappa(\gamma + \kappa^2)\gamma & \gamma^2 + \gamma\kappa^2 + \kappa\gamma\kappa + \kappa^2\gamma + \kappa^4 \\ \gamma(\gamma + \kappa^2)\gamma + \kappa\gamma\kappa\gamma + \kappa^2(\gamma + \kappa^2)\gamma & \gamma^2\kappa + \gamma\kappa\gamma + \gamma\kappa^3 + \kappa\gamma^2 + \kappa\gamma\kappa^2 + \kappa^2\gamma\kappa + \kappa^3\gamma + \kappa^5 \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dando como resultado la siguiente matriz de controlabilidad de Kalman,

$$K_F = \begin{bmatrix} 0 & \psi & \kappa\psi & (\gamma + \kappa^2)\psi & (\gamma\kappa + \kappa\gamma + \kappa^3)\psi & \dots \\ \psi & \kappa\psi & (\gamma + \kappa^2)\psi & (\gamma\kappa + \kappa\gamma + \kappa^3)\psi & (\gamma^2 + \gamma\kappa^2 + \kappa\gamma\kappa + \kappa^2\gamma + \kappa^4)\psi & \dots \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \gamma &= -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \\ \kappa &= -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \\ \psi &= -\mathcal{M}^{-1}B \end{aligned}$$

De igual manera es posible escribir la matriz de controlabilidad como la matriz de $n \times n$ K^R usando los índices de Kronecker. Ahora, como se describió en el capítulo 2, un vector de salida para el sistema linealizado, dado por $y_\delta = [C_q^T \quad C_v^T] \begin{bmatrix} q_\delta \\ v_\delta \end{bmatrix}$, $y_\delta \in \mathbb{R}^m$ se dice que es un vector de salidas planas, si y sólo si, y_δ es vector de grado relativo $[n_1, n_2, \dots, n_m]$. Se usa entonces la siguiente formulación para obtener las salidas planas del sistema,

$$y = \alpha C_{K_r, n}^T K^{-1} M x \quad (3.46)$$

Donde K es la matriz reducida de controlabilidad de Kalman, obtenida a partir de los índices de Kronecker. En este punto se aprovecha la propiedad del sistema linealizado de no depender de los estados q_e y q_c . Por lo tanto, es posible reducir el orden del sistema de 10 estados a 8 estados.

Nota aclaratoria: Únicamente para esta sección, y a partir de este momento, se debió realizar un trabajo exclusivamente numérico debido a la complejidad de invertir matrices simbólicas de 8×8 .

Con el fin de obtener la matriz reducida de Kalman se empleó el algoritmo mostrado en la Figura 3.4.

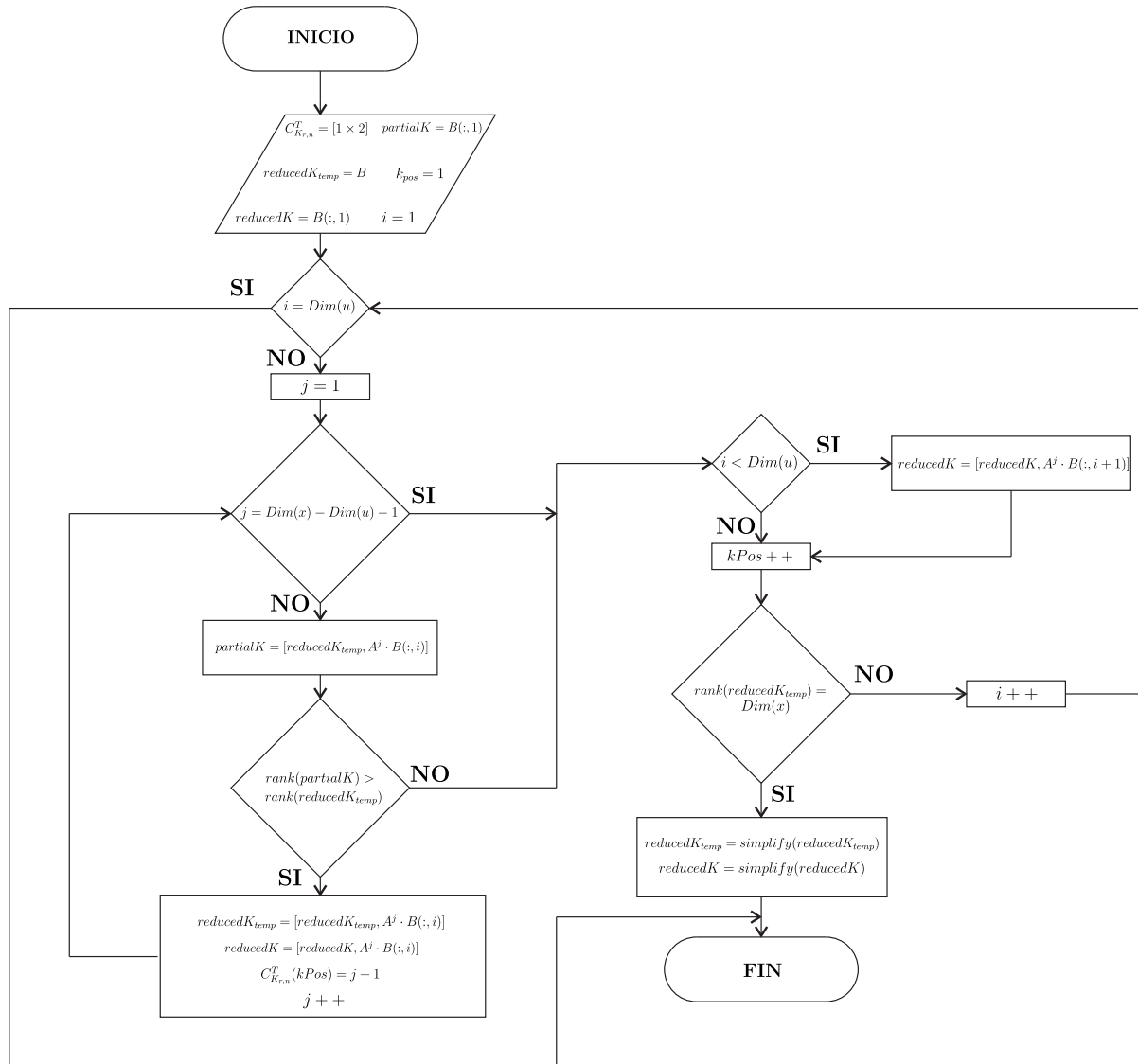


Figura 3.4: Algoritmo para obtener la matriz de controlabilidad reducida y los índices de Kronecker.

Este algoritmo se realiza de forma numérica y comprueba la independencia lineal de las columnas $F^{n_i-1}g_i$ con la matriz que se está construyendo. Una vez se encuentra una columna linealmente dependiente de las ya existentes, se procede a probar con la siguiente columna g_{i+1} de la matriz G hasta completar una matriz de rango completo n . Los valores n_i son almacenados como los índices de Kronecker.

Posterior a la obtención de la matriz de controlabilidad reducida se procede a computar la matriz $C_{K_{r,n}}^T$, la cual toma en cuenta los índices de Kronecker, almacenando un 1 en la columna $\sum_1^k n_i$ de la fila k . El código que implementa este algoritmo para obtener las salidas se presenta en el apéndice C.

Siguiendo este procedimiento es posible alterar los índices de Kronecker interrumpiendo arbitrariamente la comparación de los vectores columna con el fin de tener salidas de grados relativos impuestos a voluntad. Por medio de este proceso se seleccionó una salida de grado relativo seis y una salida de grado relativo dos, para un total de ocho, orden total del sistema reducido. Por lo tanto, la matriz $C_{K_{r,n}}^T$ tendrá la siguiente forma,

$$C_{K_{r,n}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mientras que la matriz de controlabilidad es de la siguiente forma,

$$K = \begin{bmatrix} g_1 & Fg_1 & F^2g_1 & F^3g_1 & F^4g_1 & F^5g_1 & g_2 & Fg_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & 0 \\ 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & 0 & k_{48} \\ 0 & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & 0 & k_{58} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & 0 & k_{68} \\ 0 & 0 & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde, k_{ij} es un valor numérico dependiente de los parámetros del sistema. A partir de esto, usando 3.46, es posible determinar que las salidas planas del sistema tendrán la siguiente forma,

$$\begin{aligned} y_{1\delta} &= [v_{11} \ v_{12} \ v_{13} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] [x_\delta \ \theta_{1\delta} \ \theta_{1\delta} \ \dot{x}_\delta \ \dot{\theta}_{1\delta} \ \dot{\theta}_{1\delta} \ \dot{q}_{e\delta} \ \dot{q}_{c\delta}]^T \\ y_{2\delta} &= [v_{21} \ v_{22} \ v_{23} \ v_{24} \ v_{25} \ v_{26} \ 0 \ 0] [x_\delta \ \theta_{1\delta} \ \theta_{1\delta} \ \dot{x}_\delta \ \dot{\theta}_{1\delta} \ \dot{\theta}_{1\delta} \ \dot{q}_{e\delta} \ \dot{q}_{c\delta}]^T \end{aligned} \quad (3.47)$$

Donde v_{ij} es un valor numérico dependiente de los parámetros del sistema.

Una vez obtenidas las salidas planas es necesario encontrar el sistema simplificado en la forma canónica de Isidori el cual es controlable y observable. Para ello se derivan las salidas $y_{1\delta}$ seis veces y $y_{2\delta}$ dos veces. A diferencia de los resultados obtenidos en la sección 3.1.3, debido a que las salidas planas dependen de las posiciones y velocidades generalizadas, es necesario reemplazar las aceleraciones obtenidas en 3.40 en cada iteración de derivación.

Debido a que el proceso es numérico, se muestran los resultados finales de cada derivada, y la dependencia de los estados del sistema y de los controles. Se opta la siguiente notación en los subíndices de las ganancias por simplicidad: η_{ijk} , donde i representa la salida a la que pertenece la ganancia; j representa la derivada a la cual pertenece la ganancia; y k representa la asociación con cada uno de los estados del sistema; y β_{ijk} para los controles donde i representa la salida a la que pertenece la ganancia; j representa la derivada a la cual pertenece la ganancia; y k será 1 para E_δ y 2 para $E_{c\delta}$. Dados estos parámetros, para la primera salida se tiene,

$$\begin{aligned}
y_{1\delta}^{(1)} &= \eta_{114}\dot{x}_\delta + \eta_{115}\dot{\theta}_\delta + \eta_{116}\dot{\theta}_{2\delta} \\
y_{1\delta}^{(2)} &= \eta_{122}\theta_{1\delta} + \eta_{123}\theta_{2\delta} + \eta_{127}\dot{q}_{e\delta} \\
y_{1\delta}^{(3)} &= \eta_{134}\dot{x}_\delta + \eta_{135}\dot{\theta}_{1\delta} + \eta_{136}\dot{\theta}_{2\delta} + \eta_{137}\dot{q}_{e\delta} + \beta_{131}E_\delta \\
y_{1\delta}^{(4)} &= \eta_{142}\theta_{1\delta} + \eta_{143}\theta_{2\delta} + \eta_{145}\dot{\theta}_{1\delta} + \eta_{147}\dot{q}_{e\delta} + \beta_{141}E_\delta \\
y_{1\delta}^{(5)} &= \eta_{152}\theta_{1\delta} + \eta_{153}\theta_{2\delta} + \eta_{155}\dot{\theta}_{1\delta} + \eta_{156}\dot{\theta}_{2\delta} + \eta_{157}\dot{q}_{e\delta} + \eta_{158}\dot{q}_{c\delta} + \beta_{151}E_\delta \\
y_{1\delta}^{(6)} &= \eta_{162}\theta_{1\delta} + \eta_{163}\theta_{2\delta} + \eta_{164}\dot{x}_\delta + \eta_{165}\dot{\theta}_{1\delta} + \eta_{166}\dot{\theta}_{2\delta} + \eta_{167}\dot{q}_{e\delta} + \eta_{168}\dot{q}_{c\delta} + \beta_{161}E_\delta + E_{c\delta}
\end{aligned}$$

Se observa que la derivada $y_{1\delta}^{(6)}$ tiene un grado relativo seis para la entrada $E_{c\delta}$ y además tiene una ganancia unitaria. Esta propiedad se evidencia al obtener la salida plana por el método de los índices de Kronecker. Por otro lado, para la segunda salida se obtiene,

$$\begin{aligned}
y_{2\delta}^{(1)} &= \eta_{212}\theta_{1\delta} + \eta_{213}\theta_{2\delta} + \eta_{214}\dot{x}_\delta + \eta_{215}\dot{\theta}_\delta + \eta_{216}\dot{\theta}_{2\delta} + \eta_{217}\dot{q}_{e\delta} \\
y_{2\delta}^{(2)} &= \eta_{222}\theta_{1\delta} + \eta_{223}\theta_{2\delta} + \eta_{225}\dot{\theta}_\delta + \eta_{226}\dot{\theta}_{2\delta} + \eta_{227}\dot{q}_{e\delta} + E_\delta
\end{aligned}$$

Al igual que para la primer salida, el control para el cual la salida tiene un grado relativo de dos, obtiene una ganancia unitaria, mientras que la salida restante no aparece, debido a que de estar presente en las primeras cinco derivadas de esta salida, tendría un grado relativo menor que para la primer salida.

Teniendo estas derivadas, es posible entonces escribir las derivadas máximas de cada salida como la forma reducida de la forma canónica de Isidori.

$$\begin{aligned}
y_{2\delta}^{(6)} &= \beta_{161}E_\delta + E_{c\delta} + \xi_1(t) \\
y_{2\delta}^{(2)} &= E_\delta + \xi_2(t)
\end{aligned}$$

Donde los términos del modelo linealizado que serán asignados a la perturbación serán,

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) &= \eta_{162}\theta_{1\delta} + \eta_{163}\theta_{2\delta} + \eta_{164}\dot{x}_\delta + \eta_{165}\dot{\theta}_{1\delta} + \eta_{166}\dot{\theta}_{2\delta} + \eta_{167}\dot{q}_{e\delta} + \eta_{168}\dot{q}_{c\delta} \\
\xi_2(t) &= \eta_{222}\theta_{1\delta} + \eta_{223}\theta_{2\delta} + \eta_{225}\dot{\theta}_\delta + \eta_{226}\dot{\theta}_{2\delta} + \eta_{227}\dot{q}_{e\delta}
\end{aligned}$$

Por simplicidad se renombran las ganancias de los controles para obtener la expresión final que será de utilidad para el diseño del controlador,

$$\begin{aligned}
y_{1\delta}^{(6)} &= \beta_{12}E_\delta + E_{c\delta} + \xi_1(t) \\
y_{2\delta}^{(2)} &= E_\delta + \xi_2(t)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

O escrito de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \beta_{12} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{c\delta} \\ E_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1\delta}^{(6)} \\ y_{2\delta}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

3.3. Manipulador móvil con motor en cada control usando acoplamiento de modelos

Debido a la complejidad que representa encontrar las salidas planas del sistema completo, se plantea una nueva estrategia para encontrar el modelo simplificado con el cual se diseñará la estrategia de control. Es claro que el sistema mecánico linealizado, sin incluir la dinámica de los controles, exhibe un par de salidas planas bien definidas. En la presente sección, se parte de los resultados obtenidos en la sección 3.1.3 para el sistema linealizado para luego incluir la dinámica de los motores como una extensión del sistema mecánico linealizado.

3.3.1. Motor DC

En primer lugar es necesario obtener el modelo del motor de corriente directa (DC), aislado mostrado en la Figura 3.3.

Aplicando las leyes de Kirchhoff para la parte eléctrica y la segunda ley de Newton para la parte mecánica se obtienen las dos ecuaciones que rigen la dinámica del motor DC.

$$\begin{aligned} L_{m1}\dot{i}_a &= -R_1 i_a - k_{m1}\dot{\theta}_m + E_1 \\ J_1\ddot{\theta}_m &= -B_1\dot{\theta}_m + k_{m1}i_a - \tau \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.3.2. Acoplamiento de modelos mecánico-eléctrico

Adición del primer motor

Una vez determinado el modelo del motor DC, es posible acoplarlo con el modelo mecánico simplificado que se obtuvo en la sección 3.1.3. En primer lugar, tomando como referencia las ecuaciones del sistema linealizado 3.23 y en forma de cadena de integradores:

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= F \\ y_2^{(4)} &= \beta_{21}F + \beta_{22}\tau + \xi_2(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Se supondrá una dinámica ideal del sistema simplificado, asignando los términos de perturbación iguales a cero. Esto se hace con el fin de determinar qué términos del modelo del motor serán enviados de igual manera al término de perturbación, ignorando su dinámica. Bajo esta suposición, el sistema ideal se debería comportar bajo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= F \\ y_2^{(4)} &= \beta_{21}F + \beta_{22}\tau \end{aligned} \quad (3.52)$$

A partir de esto, podemos reemplazar la segunda ecuación de 3.50 en la entrada de control de par de la expresión 3.52 así:

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= F \\ y_2^{(4)} &= \beta_{21}F + \beta_{22} \left[k_{m1}i_a - B_1\dot{\theta}_m - J_1\ddot{\theta}_m \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Es claro que la variable generalizada del motor θ_m tiene relación directa con la variable generalizada del sistema mecánico θ_1 , la cual, si no existe una caja de transmisión entre el rotor y el eslabón del sistema, serán exactamente la misma variable generalizada $\theta_m = \theta_1$. Se supone este caso por simplicidad. Ahora, conociendo que el sistema mecánico linealizado es plano, es posible expresar $\theta_1 = \theta_m$ y sus derivadas como función de y_1 , y_2 y sus derivadas. Por lo tanto podemos expresar la ecuación 3.53 como

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= F \\ y_2^{(4)} &= \beta_{21}F + \beta_{22} \left[k_{m1}i_a - B_1\dot{\theta}_m - J_1\ddot{\theta}_m \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Donde las variables θ_m , $\dot{\theta}_m$, $\ddot{\theta}_m$, \dots , $\theta_m^{(k)}$, serán dependientes de las salidas planas y sus derivadas. Ahora, despejando de la segunda ecuación de 3.54 el término i_a se obtiene que

$$i_a = \frac{1}{\beta_{22}k_{m1}} \left[y_2^{(4)} - \beta_{21}F + \beta_{22} \left(B_1\dot{\theta}_m + J_1\ddot{\theta}_m \right) \right] \quad (3.55)$$

El cual es esencial pues es la variable generalizada que no está presente en el sistema mecánico y cuya dinámica debe esclarecerse en términos de las salidas planas. Si derivamos la ecuación 3.55 obtenemos

$$\dot{i}_a = \frac{1}{\beta_{22}k_{m1}} \left[y_2^{(5)} - \beta_{21}\dot{F} + \beta_{22} \left(B_1\ddot{\theta}_m + J_1\theta_m^{(3)} \right) \right] \quad (3.56)$$

Ahora, reemplazando 3.56 y 3.55 en la primera ecuación de 3.50

$$\begin{aligned} -R_1 \left[\frac{1}{\beta_{22}k_{m1}} \left[y_2^{(4)} - \beta_{21}F + \beta_{22} \left(B_1\dot{\theta}_m + J_1\ddot{\theta}_m \right) \right] \right] - k_{m1}\dot{\theta}_m + E_1 = \\ \frac{L_{m1}}{\beta_{22}k_{m1}} \left[y_2^{(5)} - \beta_{21}\dot{F} + \beta_{22} \left(B_1\ddot{\theta}_m + J_1\theta_m^{(3)} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Despejando para el orden más alto de y_2 se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} y_2^{(5)} &= \beta_{21}\dot{F} - \beta_{22} \left(B_1\ddot{\theta}_m + J_1\theta_m^{(3)} \right) \\ - \frac{R_1}{L_{m1}} \left[y_2^{(4)} - \beta_{21}F + \beta_{22} \left(B_1\dot{\theta}_m + J_1\ddot{\theta}_m \right) \right] - \frac{\beta_{22}k_{m1}^2}{L_1}\dot{\theta}_m + \frac{\beta_{22}k_{m1}}{L_1}E_1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

El cual puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} y_2^{(5)} &= \frac{\beta_{22}k_{m1}}{L_{m1}}E_1 + \frac{\beta_{21}R_1}{L_{m1}}F + \beta_{21}\dot{F} - \beta_{22} \left(B_1\ddot{\theta}_m + J_1\theta_m^{(3)} \right) \\ &\quad - \frac{R_1}{L_{m1}} \left[y_2^{(4)} + \beta_{22} \left(B_1\dot{\theta}_m + J_1\ddot{\theta}_m \right) \right] - \frac{\beta_{22}k_{m1}^2}{L_{m1}}\dot{\theta}_m \end{aligned} \quad (3.59)$$

O finalmente como

$$y_2^{(5)} = \frac{\beta_{22}k_{m1}}{L_{m1}}E_1 + \frac{\beta_{21}R_1}{L_{m1}}F + \xi_2'(t) \quad (3.60)$$

Donde observamos claramente los términos que son asumidos como perturbación del sistema simplificado. Este resultado permite establecer el sistema simplificado como

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= F \\ y_2^{(5)} &= \beta'_{22}E_1 + \beta'_{21}F + \xi_2'(t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Adición del segundo motor

Ahora, se debe incluir el segundo motor para reemplazar la entrada de fuerza F por una segunda entrada E_2 , para ello debemos repetir el procedimiento para cada una de las ecuaciones correspondientes del sistema 3.61 con la validez de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} F &= \frac{\tau}{R_t} \\ \theta_m &= \frac{x}{R_t} \end{aligned}$$

Donde, R_t es el radio de la rueda del carro que desplaza el mecanismo. Es claro, de igual manera, que existe una relación entonces entre la variable generalizada del segundo motor θ_m y el desplazamiento lineal x , variable generalizada del sistema mecánico, esto permite realizar una sustitución directa sobre las ecuaciones del motor. Es por esto que es posible escribir las ecuaciones del motor como,

$$\begin{aligned} L_{m2}\dot{i}_a &= -R_2i_a - \frac{k_{m2}}{R_t}\dot{x} + E_2 \\ \frac{J_2}{R_t}\ddot{x} &= -\frac{B_2}{R_t}\dot{x} + k_{m2}i_a - R_tF \end{aligned}$$

La cual puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} R_tL_{m2}\dot{i}_a &= -R_tR_2i_a - k_{m2}\dot{x} + R_tE_2 \\ J_2\ddot{x} &= -B_2\dot{x} + R_tk_{m2}i_a - FR_t^2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ahora, si tomamos la segunda ecuación de 3.62 y la reemplazamos en la primera ecuación de 3.61 sin perturbación, obtenemos

$$y_1^{(2)} = -\frac{B_2}{R_t^2}\dot{x} + \frac{k_{m2}}{R_t}i_a - \frac{J_2}{R_t^2}\ddot{x}$$

De nuevo, los estados \dot{x} y \ddot{x} pueden ser obtenidos como una función lineal de las salidas y_1 y y_2 y sus derivadas, por lo que, despejando para i_a la ecuación se puede escribir como

$$i_a = \frac{1}{R_tk_{m2}} \left[B_2\dot{x} + R_t^2y_1^{(2)} + J_2\ddot{x} \right] \quad (3.63)$$

Derivando 3.63 obtenemos de nuevo la dinámica de la derivada de la corriente del motor en función de las salidas planas del sistema mecánico,

$$\dot{i}_a = \frac{1}{R_t k_{m2}} \left[B_2 \ddot{x} + R_t^2 y_1^{(3)} + J_2 x^{(3)} \right] \quad (3.64)$$

Ahora, reemplazando 3.63 y 3.64 en la primera ecuación de 3.62 obtenemos

$$\frac{R_t L_{m2}}{R_t k_{m2}} \left[B_2 \ddot{x} + R_t^2 y_1^{(3)} + J_2 x^{(3)} \right] = -\frac{R_t R_2}{R_t k_{m2}} \left[B_2 \dot{x} + R_t^2 y_1^{(2)} + J_2 \ddot{x} \right] - k_{m2} \dot{x} + R_t E_2 \quad (3.65)$$

Simplificando un poco y despejando para el orden más alto de y_1 se obtiene,

$$y_1^{(3)} = \frac{k_{m2}}{R_t L_{m2}} E_2 - \frac{J_2}{R_t^2} x^{(3)} - \frac{B_2}{R_t^2} \ddot{x} - \frac{R_2}{R_t^2 L_{m2}} \left[B_2 \dot{x} + R_t^2 y_1^{(2)} + J_2 \ddot{x} \right] - \frac{k_{m2}^2}{L_{m2} R_t^2} \dot{x} \quad (3.66)$$

El cual puede ser reescrito como

$$y_1^{(3)} = \beta''_{11} E_2 + \xi''_1(t) \quad (3.67)$$

De nuevo, encontramos los términos que serán asignados a la perturbación para la primera salida plana del sistema. Ahora, este proceso debe ser repetido para la segunda salida plana debido a que el modelo reducido simplificado muestra una dependencia de ambos controles para la derivada de más alto orden. Por lo tanto, si tomamos la segunda ecuación de 3.62 y la reemplazamos en la segunda ecuación de 3.61 sin perturbación obtenemos

$$y_2^{(5)} = \beta'_{22} E_1 + \beta'_{21} \left[-\frac{B_2}{R_t^2} \dot{x} + \frac{k_{m2}}{R_t} i_a - \frac{J_2}{R_t^2} \ddot{x} \right]$$

Despejando para i_a

$$i_a = \frac{R_t}{\beta'_{21} k_{m2}} \left[y_2^{(5)} - \beta'_{22} E_1 + \beta'_{21} \left[\frac{B_2}{R_t^2} \dot{x} + \frac{J_2}{R_t^2} \ddot{x} \right] \right] \quad (3.68)$$

Derivando se obtiene

$$\dot{i}_a = \frac{R_t}{\beta'_{21} k_{m2}} \left[y_2^{(6)} - \beta'_{22} \dot{E}_1 + \beta'_{21} \left[\frac{B_2}{R_t} \ddot{x} + \frac{J_2}{R_t} x^{(3)} \right] \right] \quad (3.69)$$

Ahora, reemplazando 3.68 y 3.69 en la primera ecuación de 3.62 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{R_t^2 L_{m2}}{\beta'_{21} k_{m2}} \left[y_2^{(6)} - \beta'_{22} \dot{E}_1 + \beta'_{21} \left[B_2 \ddot{x} + J_2 x^{(3)} \right] \right] = \\ -\frac{R_t^2 R_2}{\beta'_{21} k_{m2}} \left[y_2^{(5)} - \beta'_{22} E_1 + \beta'_{21} \left[B_2 \dot{x} + J_2 \ddot{x} \right] \right] - k_{m2} \dot{x} + R_t E_2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Simplificando un poco y despejando para el orden más alto de y_2 se obtiene,

$$\begin{aligned}
y_2^{(6)} &= \frac{\beta'_{21} k_{m2}}{R_t L_{m2}} E_2 + \frac{R_2 \beta'_{22}}{L_{m2}} E_1 + \beta'_{22} \dot{E}_1 - \beta'_{21} [B_2 \ddot{x} + J_2 x^{(3)}] \\
&\quad - \frac{R_2}{L_{m2}} \left[y_2^{(5)} + \beta'_{21} [B_2 \dot{x} + J_2 \ddot{x}] \right] - \frac{\beta'_{21} k_{m2}^2}{L_{m2} R_t^2} \dot{x}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Una vez más, se adjudican los términos ajenos al control al término de perturbación, tal como se aprecia en 3.72.

$$y_2^{(6)} = \frac{\beta'_{21} k_{m2}}{R_t L_{m2}} E_2 + \frac{R_2 \beta'_{22}}{L_{m2}} E_1 + \xi_2''(t) \tag{3.72}$$

O, finalmente como

$$y_2^{(6)} = \beta''_{21} E_2 + \beta''_{22} E_1 + \xi_2''(t) \tag{3.73}$$

Con lo cual, obtenemos un sistema simplificado extendido a partir de 3.67 y 3.73 así,

$$\begin{aligned}
y_1^{(3)} &= \beta''_{11} E_2 + \xi_1''(t) \\
y_2^{(6)} &= \beta''_{21} E_2 + \beta''_{22} E_1 + \xi_2''(t)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\beta''_{11} &= \frac{k_{m2}}{R_t L_{m2}} \\
\beta''_{21} &= \frac{\beta_{21} R_1 k_{m2}}{R_t L_{m1} L_{m2}} \\
\beta''_{22} &= \frac{\beta_{22} k_{m1} R_2}{L_{m1} L_{m2}}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Y β_{11} , β_{21} y β_{22} son las ganancias originales del sistema mecánico.

De nuevo, se puede expresar el sistema 3.74 en forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} \beta''_{11} & 0 \\ \beta''_{21} & \beta''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(6)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1''(t) \\ \xi_2''(t) \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

3.4. Manipulador móvil con motor en cada control usando acoplamiento de modelos aproximados

Tal como se vio en el capítulo 3.3, es posible incluir la dinámica de los motores a partir del acoplamiento entre las variables τ_δ del sistema mecánico con τ del motor eléctrico. No obstante, este acoplamiento usa el modelo completo del motor DC el cual generalmente puede ser aproximado debido a que la dinámica de la parte eléctrica del motor es significativamente más rápida que la mecánica. Es por esto que muchas aproximaciones usadas para los motores DC asumen la inductancia de armadura $i_a \sim 0$. Esto permite reducir los cálculos y sustituir la dinámica del motor como una relación algebraica entre el par τ del motor y la tensión de entrada del sistema.

3.4.1. Simplificación de la dinámica del motor

Recordando las ecuaciones que describen la dinámica del motor presentadas en 3.50

$$\begin{aligned} L\dot{i}_a &= -Ri_a - k_m\dot{\theta}_m + E \\ J\ddot{\theta}_m &= -B\dot{\theta}_m + k_m i_a - \tau \end{aligned}$$

Se inicia por suponer la inductancia de armadura $i_a \sim 0$ bajo la justificación de ser una dinámica mucho más rápida y prescindible frente a la dinámica mecánica. Esta suposición reduce las ecuaciones del motor de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} 0 &= -Ri_a - k_m\dot{\theta}_m + E \\ J\ddot{\theta}_m &= -B\dot{\theta}_m + k_m i_a - \tau \end{aligned} \quad (3.77)$$

Donde se tiene una ecuación algebraica y una ecuación dinámica. Reduciendo estas ecuaciones a una sola ecuación se obtiene,

$$J\ddot{\theta}_m = -B\dot{\theta}_m - \frac{k_m}{R} (k_m\dot{\theta}_m - E) - \tau$$

De nuevo, el enlace entre el motor y el modelo mecánico usado en 3.23 es la variable τ_δ , por lo tanto, despejando τ se obtiene que

$$\tau = -B\dot{\theta}_m - \frac{k_m}{R} (k_m\dot{\theta}_m - E) - J\ddot{\theta}_m \quad (3.78)$$

3.4.2. Inclusión del modelo del motor en el modelo mecánico.

Tomando de nuevo como referencia el modelo obtenido en 3.23, si reemplazamos τ_δ por τ de la ecuación 3.78 obtenemos,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1_\delta} &= F_\delta \\ y_{2_\delta}^{(4)} &= \beta_{21}F_\delta + \beta_{22} \left[-B\dot{\theta}_m - \frac{k_m}{R} (k_m\dot{\theta}_m - E) - J\ddot{\theta}_m \right] + \xi(t) \end{aligned}$$

No obstante, es posible incluir varios términos de la dinámica del motor en la perturbación $\xi(t)$ así,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1_\delta} &= F_\delta \\ y_{2_\delta}^{(4)} &= \beta_{21}F_\delta + \beta_{22} \frac{k_m}{R} E + \xi(t) \end{aligned}$$

Donde la nueva variable de control será E . De igual manera, si incluimos un segundo motor para reemplazar la entrada de control de fuerza entonces obtenemos un par de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1\delta} &= \frac{1}{R_t} \left[-B_2 \dot{\theta}_{m2} - \frac{k_{m2}}{R_2} (k_{m2} \dot{\theta}_{m2} - E_2) - J_2 \ddot{\theta}_{m2} \right] \\ y_{2\delta}^{(4)} &= \beta_{21} \frac{1}{R_t} \left[-B_2 \dot{\theta}_{m2} - \frac{k_{m2}}{R_2} (k_{m2} \dot{\theta}_{m2} - E_2) - J_2 \ddot{\theta}_{m2} \right] + \\ &\quad \beta_{22} \left[-B_1 \dot{\theta}_{m1} - \frac{k_{m1}}{R_1} (k_{m1} \dot{\theta}_{m1} - E_1) - J_1 \ddot{\theta}_{m1} \right] + \xi(t) \end{aligned}$$

Donde R_t es el radio de la rueda. Posteriormente, el modelo se puede simplificar asignando los términos ajenos a los controles a las perturbaciones de la forma,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1\delta} &= \frac{k_{m2}}{R_2 R_t} E_2 + \xi_1(t) \\ y_{2\delta}^{(4)} &= \beta_{21} \frac{k_{m2}}{R_2 R_t} E_2 + \beta_{22} \frac{k_{m1}}{R_1} E_1 + \xi_2(t) \end{aligned}$$

O escrito de la forma

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1\delta} &= \beta_{11}^* E_2 + \xi_1(t) \\ y_{2\delta}^{(4)} &= \beta_{21}^* E_2 + \beta_{22}^* E_1 + \xi_2(t) \end{aligned} \tag{3.79}$$

Donde el trabajo de la estimación de las perturbaciones se incrementa al ubicar las dinámicas de los motores dentro del modelo simplificado de la parte mecánica, obteniendo un modelo idéntico, pero con ganancias modificadas.

Este modelo tiene ventajas respecto al encontrado en la sección 3.3.2 debido a que los valores de las ganancias se alteran de manera proporcional pero sutil, considerando los posibles valores de los parámetros de los motores y el radio de la rueda del carro, mientras que el modelo anterior tenía en el denominador de las nuevas ganancias el producto de las inductancias, provocando que el valor numérico de las ganancias se incremente considerablemente y su sintonización fuera más compleja. Además, se utilizan polinomios de menor grado debido a que los órdenes de derivada de las salidas planas se conservan, mientras que para el modelo anterior hay incremento de orden en las derivadas de las salidas planas.

3.5. Resumen del capítulo

En este capítulo se presenta la metodología utilizada para obtener el modelo del sistema desde 4 puntos de vista. El primero presenta un modelaje exclusivamente de la parte mecánica del sistema utilizando el método de Euler-Lagrange, llegando a un modelo simplificado reducido basado en la forma canónica de Isidori. El segundo punto de vista muestra un primer intento de modelar el sistema incluyendo la dinámica de los motores DC que alimentan las entradas de control del sistema mecánico usando el método de Euler-Lagrange. El tercer punto de vista realiza la inclusión de la dinámica completa de los motores a partir del modelo reducido encontrado en el primer punto de vista, y por último, el cuarto punto de vista muestra un método de inclusión de la dinámica aproximada de los motores al modelo dinámico reducido del primer punto de vista, bajo la aproximación de los valores de inductancia de armadura a cero, eliminando la dinámica de los circuitos

de armadura de los motores. Cada punto analizado termina con un modelo reducido en la forma canónica de Isidori basado en la determinación de las salidas planas del sistema con parámetros de perturbación agrupados que se supusieron como desconocidos.

Capítulo 4

Estrategias de control

Los manipuladores móviles pueden ser controlados bajo diversas estrategias de control, seleccionadas en función del tipo de manipulador, el objetivo de control y la arquitectura de implementación. Esquemas clásicos como controladores PID o más recientes como Par calculado y sus modificaciones han sido ampliamente utilizados para el control de manipuladores robóticos. No obstante, esquemas que simplifiquen la tarea de control gracias a su estructura son de gran interés para el área, mientras cumplan las tareas de control propuestas.

La presente sección desarrolla un control por rechazo activo de perturbaciones (ADRC), por medio de la implementación de observadores extendidos de orden reducido (ROESO) con el fin de evitar la medición directa de todos los estados y además estimar los términos de perturbación presentes. Este esquema se implementa para cada sistema linealizado presentado en el capítulo 3, usando la metodología de función de transferencia. A partir de una trayectoria generada se presentan simulaciones con el objetivo de control de posicionamiento del efector final a partir del seguimiento de trayectoria.

Finalmente, a cada simulación que ejecuta una tarea de seguimiento de trayectoria exitoso, se le incluye una perturbación externa en la entrada de control, verificando la robustez del control frente a perturbaciones externas.

4.1. Control para el manipulador móvil

Tomando como referencia el sistema encontrado en la sección 3.1.3 es posible implementar un control por rechazo activo de perturbaciones.

$$\begin{aligned}y_{1\delta}^{(2)} &= F_\delta + \xi_1 \\y_{2\delta}^{(4)} &= \beta_{21}F_\delta + \beta_{22}\tau_\delta + \xi_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

Se podrá notar una diferencia entre el modelo 4.1 y el modelo 3.23, donde se incluye una perturbación a la primera salida. Esto es debido a que el término $\xi_i(t)$ no sólo incluye perturbaciones asociadas a términos ignorados de la dinámica calculada del sistema, también agrupa perturbaciones relacionadas a no linealidades no modeladas, perturbaciones externas, dinámicas excitadas y demás términos que pudieron no ser considerados en el modelo inicial.

4.1.1. Diseño del observador

El modelo 4.1 puede escribirse en forma de cadena de integradores, evidenciando la forma explícita de la forma canónica de Isidori, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(0)} &= y_{1\delta}^{(1)} \\
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(1)} &= F_\delta + \xi_1 \\
 \text{-----} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(0)} &= y_{2\delta}^{(1)} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(1)} &= y_{2\delta}^{(2)} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(2)} &= y_{2\delta}^{(3)} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(3)} &= \beta_{21}F_\delta + \beta_{22}\tau_\delta + \xi_2
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Definamos entonces la dinámica del sistema ideal, sin perturbación, correspondiente a la trayectoria deseada del sistema $y_{i\delta}^{(j)*}$ y al control nominal F_δ^* , τ_δ^* , como

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(0)*} &= y_{1\delta}^{(1)*} \\
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(1)*} &= F_\delta^* \\
 \text{-----} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(0)*} &= y_{2\delta}^{(1)*} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(1)*} &= y_{2\delta}^{(2)*} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(2)*} &= y_{2\delta}^{(3)*} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(3)*} &= \beta_{21}F_\delta^* + \beta_{22}\tau_\delta^*
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Si definimos la dinámica del error de seguimiento, dado por $e_{i\delta}^{(j)} = y_{i\delta}^{(j)} - y_{i\delta}^{(j)*}$, $e_F = F_\delta - F_\delta^*$ y $e_\tau = \tau_\delta - \tau_\delta^*$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(0)} &= e_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(1)} &= e_F + \xi_1 \\
\text{---} \\
\frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(0)} &= e_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(1)} &= e_{2\delta}^{(2)} \\
\frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(2)} &= e_{2\delta}^{(3)} \\
\frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(3)} &= \beta_{21}e_F + \beta_{22}e_\tau + \xi_2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Una vez escrito el modelo en la forma de cadena de integradores se continúa con la definición de la estimación de los estados $e_{i\delta}^{(j)}$ a partir de una medición supuesta de la derivada del error de la salida. Este proceso se realiza con el fin de reducir un orden al observador y ceder ese orden a la estimación de la perturbación. Si bien no se dispone de la medición de la derivada de la salida, este procedimiento es válido pues para los propósitos de implementación no será requerida. Llamaremos además z , a la variable de estimación de la perturbación. Así pues, se define el observador extendido de orden reducido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} &= e_F + z_1 + \lambda_{11}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}z_1 &= \lambda_{01}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\text{---} \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} &= \hat{e}_{2\delta}^{(2)} + \lambda_{32}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{2\delta}^{(2)} &= \hat{e}_{2\delta}^{(3)} + \lambda_{22}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{2\delta}^{(3)} &= \beta_{21}e_F + \beta_{22}e_\tau + z_2 + \lambda_{12}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}z_2 &= \lambda_{02}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)})
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Donde las constantes λ_{ij} representan la i -ésima constante del observador de la j -ésima salida plana. Ahora, definiendo el error de estimación como $\tilde{e}_{i\delta}^{(j)} = (e_{i\delta}^{(j)} - \hat{e}_{i\delta}^{(j)})$ y $e_{\xi_i} = \xi_i - z_i$, y substrayendo las ecuaciones 4.5 de 4.4, ignorando las ecuaciones correspondientes a las derivadas primeras del error, se obtiene la dinámica del error como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} &= e_{\xi_1} - \lambda_{11}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}z_1 &= \lambda_{01}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\text{-----} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)} &= \tilde{e}_{2\delta}^{(2)} - \lambda_{32}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{2\delta}^{(2)} &= \tilde{e}_{2\delta}^{(3)} - \lambda_{22}\tilde{e}_{2\delta}^{(2)} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{2\delta}^{(3)} &= e_{\xi_2} - \lambda_{12}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}z_2 &= \lambda_{02}\tilde{e}_{\delta 2}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Donde las dinámicas del error de estimación satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales lineales perturbadas

$$\tilde{e}_1^{(3)} + \lambda_{11}\tilde{e}_1^{(2)} + \lambda_{01}\tilde{e}_1^{(1)} = \xi_1^{(1)} \tag{4.7}$$

$$\tilde{e}_2^{(5)} + \lambda_{32}\tilde{e}_2^{(4)} + \lambda_{22}\tilde{e}_2^{(3)} + \lambda_{12}\tilde{e}_2^{(2)} + \lambda_{02}\tilde{e}_2^{(1)} = \xi_2^{(1)} \tag{4.8}$$

Por lo tanto, dadas cotas superiores para las derivadas n -ésimas de las perturbaciones

$$\sup_t |\xi_i^{(n)}| = K_n, \quad n \in \{0, 1, 2, 3\} \quad i = 1, 2, \tag{4.9}$$

es posible escoger adecuadamente los valores para las constantes de los observadores $\{\lambda_{01}, \lambda_{11}\}$ y $\{\lambda_{02}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32}\}$ tal que el polinomio característico de la dinámica del error de estimación sea asintóticamente exponencialmente estable. La selección de estos polinomios serán de la forma

$$p_{o1}(s) = \left(s^2 + 2s\zeta_1 \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right) + \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right)^2 \right) \tag{4.10}$$

$$p_{o2}(s) = \left(s^2 + 2s\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right) + \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right)^2 \right)^2 \tag{4.11}$$

Llevando a los siguientes valores de las constantes de los observadores,

$$\lambda_{11} = 2\zeta_1 \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right), \quad \lambda_{01} = \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right)^2$$

$$\lambda_{32} = 4\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right), \quad \lambda_{22} = 2(2\zeta_2^2 + 1) \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right)^2, \quad \lambda_{12} = 4\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right)^3, \quad \lambda_{02} = \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right)^4$$

Adicionalmente, si se obtiene transformada frecuencial de las ecuaciones 4.7 y 4.8 se llega a la siguiente relación

$$\tilde{e}_{1\delta}^{(1)}(s) = \left[\frac{s}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_1(s) \quad (4.12)$$

$$\tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) = \left[\frac{s}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \quad (4.13)$$

A partir de las relaciones 4.12 y 4.13 se pueden obtener las funciones de transferencia para cada estado del error respecto a la perturbación y del error de estimación respecto a la perturbación así,

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{1\delta}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_1(s) \\ \tilde{e}_{\xi_1}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{11})}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_1(s) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \\ \tilde{e}_{2\delta}^{(2)}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{32})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \\ \tilde{e}_{2\delta}^{(3)}(s) &= \left[\frac{s(s^2 + \lambda_{32}s + \lambda_{22})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \\ \tilde{e}_{\xi_2}(s) &= \left[\frac{s(s^3 + \lambda_{32}s^2 + \lambda_{22}s + \lambda_{12})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.1.2. Diseño del controlador

Establecido el observador, es posible entonces asignar una ley de control que sea proporcional a los estados estimados del error del sistema en la forma canónica de Isidori y del error de la salida del sistema, junto con una cancelación directa del término de perturbación por medio de la estimación. Esta ley de control se expresa como sigue,

$$e_F = -\gamma_{11}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} - z_1 \quad (4.16)$$

$$\beta_{22}e_\tau = -\gamma_{32}\hat{e}_{2\delta}^{(3)} - \gamma_{22}\hat{e}_{2\delta}^{(2)} - \gamma_{12}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} - \gamma_{02}e_{2\delta}^{(0)} - z_2 - \beta_{21}e_F \quad (4.17)$$

Ahora, a partir de 4.4 es posible realimentar el lazo de control, tal forma que el lazo cerrado del primer sistema estará determinado por la siguiente formulación, recordando que $\hat{e}_{1\delta}^{(1)} = e_{1\delta}^{(1)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(1)}$ y que $e_{\xi_1} = \xi_1 - z_1$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(1)} &= -\gamma_{11}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} - z_1 + \xi_1 \\ \frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(1)} &= -\gamma_{11}(e_{1\delta}^{(1)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(1)}) - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} + e_{\xi_1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$[s^2 + \gamma_{11}s + \gamma_{01}]e_{1\delta}(s) = \gamma_{11}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)}(s) + e_{\xi_1}(s)$$

Reemplazando los valores obtenidos en 4.14 obtenemos

$$e_{1\delta}(s) = \left[\frac{s(s + (\gamma_{11} + \lambda_{11}))}{(s^2 + \gamma_{11}s + \gamma_{01})(s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01})} \right] \xi_1(s) \quad (4.19)$$

El cual puede ser reescrito como

$$e_{1\delta}(s) = \left[\frac{s^2 + \kappa_{31}s}{s^4 + \kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}} \right] \xi_1(s) \quad (4.20)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \kappa_{01} &= \lambda_{01}\gamma_{01} \\ \kappa_{11} &= \lambda_{01}\gamma_{11} + \lambda_{11}\gamma_{01} \\ \kappa_{21} &= \lambda_{01} + \lambda_{11}\gamma_{11} + \gamma_{01} \\ \kappa_{31} &= \lambda_{11} + \gamma_{11} \end{aligned}$$

Por otro lado, si cerramos el lazo para el segundo subsistema de 4.4, recordando de nuevo que $\hat{e}_{2\delta}^{(i)} = e_{2\delta}^{(i)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(i)}$ y que, $e_{\xi_2} = \xi_2 - z_2$, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(3)} &= \beta_{21}e_F - \gamma_{32}\hat{e}_{2\delta}^{(3)} - \gamma_{22}\hat{e}_{2\delta}^{(2)} - \gamma_{12}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} - \gamma_{02}e_{2\delta}^{(0)} - z_2 - \beta_{21}e_F + \xi_2 \\ \frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(2)} &= -\gamma_{32}\hat{e}_{2\delta}^{(2)} - \gamma_{22}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} - \gamma_{12}\hat{e}_{2\delta}^{(0)} - \gamma_{02}e_{2\delta}^{(0)} + e_{\xi_2} \\ \frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(1)} &= -\gamma_{32}(e_{2\delta}^{(1)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(1)}) - \gamma_{22}(e_{2\delta}^{(0)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(0)}) - \gamma_{12}(e_{2\delta}^{(0)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(0)}) - \gamma_{02}e_{2\delta}^{(0)} + e_{\xi_2} \end{aligned}$$

De nuevo, obteniendo la transformada de Laplace se llega a

$$[s^4 + \gamma_{32}s^3 + \gamma_{22}s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{02}]e_{2\delta}(s) = \gamma_{32}\tilde{e}_{2\delta}^{(3)}(s) + \gamma_{22}\tilde{e}_{2\delta}^{(2)}(s) + \gamma_{12}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) + e_{\xi_2}(s) \quad (4.21)$$

Reemplazando los valores obtenidos en 4.15 obtenemos

$$e_{2\delta}(s) = \left[\frac{s(s^2 + \lambda_{32}s + \lambda_{22})\gamma_{32} + s(s + \lambda_{32})\gamma_{22} + s\gamma_{12} + s(s^3 + \lambda_{32}s^2 + \lambda_{22}s + \lambda_{12})}{(s^4 + \gamma_{32}s^3 + \gamma_{22}s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{02})(s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02})} \right] \xi_2(s) \quad (4.22)$$

El cual puede ser reescrito como

$$e_{2\delta}(s) = \left[\frac{s^4 + \kappa_{72}s^3 + \kappa_{62}s^2 + \kappa_{52}s}{s^8 + \kappa_{72}s^7 + \kappa_{62}s^6 + \kappa_{52}s^5 + \kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}} \right] \xi_2(s) \quad (4.23)$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\kappa_{02} &= \gamma_{02} \lambda_{02} \\
\kappa_{12} &= \gamma_{02} \lambda_{12} + \gamma_{12} \lambda_{02} \\
\kappa_{22} &= \gamma_{02} \lambda_{22} + \gamma_{12} \lambda_{12} + \gamma_{22} \lambda_{02} \\
\kappa_{32} &= \gamma_{02} \lambda_{32} + \gamma_{12} \lambda_{22} + \gamma_{22} \lambda_{12} + \gamma_{32} \lambda_{02} \\
\kappa_{42} &= \gamma_{02} + \lambda_{02} + \gamma_{12} \lambda_{32} + \gamma_{22} \lambda_{22} + \gamma_{32} \lambda_{12} \\
\kappa_{52} &= \gamma_{12} + \lambda_{12} + \gamma_{22} \lambda_{32} + \gamma_{32} \lambda_{22} \\
\kappa_{62} &= \gamma_{22} + \lambda_{22} + \gamma_{32} \lambda_{32} \\
\kappa_{72} &= \gamma_{32} + \lambda_{32}
\end{aligned}$$

De igual manera que para el observador, se pueden escoger ganancias del controlador para que el sistema de control sea asintóticamente exponencialmente estable. Se usa el mismo esquema para las ganancias debido a la equivalencia de orden pero obviando el término ϵ_i del observador considerando que la frecuencia natural del observador es más rápida que del controlador. Se seleccionan entonces los polinomios así,

$$p_{c1}(s) = (s^2 + 2s\zeta_1\omega_{n1} + \omega_{n1}^2) \quad (4.24)$$

$$p_{c2}(s) = (s^2 + 2s\zeta_2\omega_{n2} + \omega_{n2}^2)^2 \quad (4.25)$$

Llevando a los siguientes valores de las constantes de los controladores,

$$\gamma_{11} = 2\zeta_1\omega_{n1}, \quad \gamma_{01} = \omega_{n1}^2$$

$$\gamma_{32} = 4\zeta_2\omega_{n2}, \quad \gamma_{22} = 2(2\zeta_2^2 + 1)\omega_{n2}^2, \quad \gamma_{12} = 4\zeta_2\omega_{n2}^3, \quad \gamma_{02} = \omega_{n2}^4$$

Las ecuaciones 4.20 y 4.23 representan la función de sensibilidad a la perturbación. Como se vio en el capítulo 2, de manera general se puede expresar como

$$e_{i\delta}(s) = \left[\frac{G(s)}{1 + \beta K(s)G(s)} \right] \xi(s) = M(s)\xi(s)$$

Conociendo que $G(s)$ es de la forma $G(s) = 1/s^m$, donde m es el grado relativo del control respecto a la salida correspondiente, entonces se puede obtener $\beta K(s)$ como

$$\beta K(s) = \left[\frac{1}{G(s)} - \frac{1}{M(s)} \right] e_{i\delta}(s)$$

Por lo tanto, por homología se obtiene que $\beta K(s) = \beta e_U(s)$, donde U corresponde a cada una de las entradas F_δ y τ_δ . Por lo tanto, podemos obtener las funciones de transferencia para los controladores a partir de las ecuaciones 4.20 y 4.23, de la siguiente manera

$$e_F(s) = -\frac{\kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(\kappa_{31} + s)} e_{1\delta}(s) \quad (4.26)$$

$$\beta_{22}e_\tau(s) = -\frac{\kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(s^3 + \kappa_{72}s^2 + \kappa_{62}s + \kappa_{52})} e_{2\delta}(s) \quad (4.27)$$

Ahora, recordando las definiciones del error de seguimiento $e_{i\delta}^{(j)} = y_{i\delta}^{(j)} - y_{i\delta}^{(j)*}$, $e_F = F_\delta - F_\delta^*$ y $e_\tau = \tau_\delta - \tau_\delta^*$ obtenemos

$$F_\delta(s) = F_\delta^*(s) - \frac{\kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_0}{s(\kappa_{31} + s)}(y_{1\delta}(s) - y_{1\delta}(s)^*) \quad (4.28)$$

$$\beta_{22}\tau_\delta(s) = \tau_\delta^*(s) - \frac{\kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(s^3 + \kappa_{72}s^2 + \kappa_{62}s + \kappa_{52})}(y_{2\delta}(s) - y_{2\delta}(s)^*) \quad (4.29)$$

Por lo tanto, recordando las proposiciones de los controles en 4.16 y 4.17, podemos reescribir toda la ley de control como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_\delta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\delta^*(s) - \frac{\kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_0}{s(\kappa_{31} + s)}(y_{1\delta}(s) - y_{1\delta}(s)^*) \\ \tau_\delta^*(s) - \frac{\kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(s^3 + \kappa_{72}s^2 + \kappa_{62}s + \kappa_{52})}(y_{2\delta}(s) - y_{2\delta}(s)^*) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Finalmente, tomando en cuenta la dinámica ideal de seguimiento de la ecuación 4.3, y sabiendo que los controles nominales serán derivadas de la trayectoria a seguir, el controlador tendrá la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_\delta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1\delta}^{(2)*} - \frac{\kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_0}{s(\kappa_{31} + s)}(y_{1\delta} - y_{1\delta}^*) \\ y_{2\delta}^{(4)*} - \frac{\kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(s^3 + \kappa_{72}s^2 + \kappa_{62}s + \kappa_{52})}(y_{2\delta} - y_{2\delta}^*) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

4.1.3. Simulaciones

Una vez establecidos los controladores, es posible realizar la simulación del sistema mecánico no lineal usando los controladores lineales con el objetivo de control de realizar un posicionamiento del efector final a partir de un seguimiento de trayectoria de tipo descanso-descanso. La trayectoria será generada a partir de polinomios de Bèzier de orden apropiados cuyo proceso de cálculo se muestra en el Apéndice A. Esta trayectoria también es planteada a partir de los valores iniciales y finales de las salidas planas, para ello es necesario definir valores iniciales y finales del efector final como objetivo de control y usando una cinemática inversa, obtener los valores de las variables generalizadas. Este proceso se describe en fácilmente en el Apéndice A.

Para la planeación de la trayectoria se plantean las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} x_i &= 0, \theta_{1i} = 0, \theta_{2i} = 0 \\ \dot{x}_i &= 0, \dot{\theta}_{1i} = 0, \dot{\theta}_{2i} = 0 \\ X_i &= 0, Y_i = 0 \end{aligned}$$

Los cuales equivalen a un valor inicial de las salidas de $(y_1, y_2) = (0, 0)$ Para los valores finales se pensó en un valor final del efector final $(X_f, Y_f) = (2.5, 2.5)$, valores que permiten el cálculo del valor final de las variables generalizadas así:

$$x_f = 0.139, \theta_{1f} = 0.593, \theta_{2f} = 0.974$$

Lo cual implica un valor final de las salidas planas de

$$y_1 = 216.75, y_2 = 77.37$$

Así mismo, para la sintonización del controlador se usaron los siguientes parámetros:

$$\omega_{n1} = 10, \zeta_1 = 1, \epsilon_1 = 0.5 \quad (4.32)$$

$$\omega_{n2} = 20, \zeta_2 = 1, \epsilon_2 = 0.8 \quad (4.33)$$

Los parámetros usados para las simulaciones se presentan en la tabla 4.1. Estos valores fueron tomados del trabajo previo de Sira y Gao [15] y representan valores de los mismos órdenes de magnitud de una máquina tipo grua real.

Parámetro	Valor
M	$400[Kg]$
m_1	$100[Kg]$
m_2	$50[Kg]$
l_{c1}	$0.75[m]$
L_1	$2[m]$
l_{c2}	$0.75[m]$
L_2	$1.5[m]$
k	$800[N \cdot m/rad]$
g	$9.85[m/s^2]$
I_1	$0.5[Kg \cdot m^2]$
I_2	$0.3[Kg \cdot m^2]$

Tabla 4.1: Parametros de la planta usados para la simulación sistema mecánico

A continuación, en la Figura 4.1 se puede observar el seguimiento de trayectorias para las salidas y_1 y y_2 . Adicionalmente se presenta la señal de control del sistema y las trayectorias seguidas por cada variable generalizada se observan en la Figura 4.2.

Es evidente que el control permite cumplir el objetivo de seguimiento de trayectoria de un descanso a otro descanso sin tener oscilaciones en el control o en los estados, produciendo funciones suaves y comportamientos aceptables. Así mismo, se puede observar que el efector final llega a la posición final deseada $(X_f, Y_f) = (2.5, 2.5)$ sin mayores complicaciones, además, cumpliendo con los valores a los cuales llegan las variables generalizadas $x_f = 0.139, \theta_{1f} = 0.593, \theta_{2f} = 0.974$.

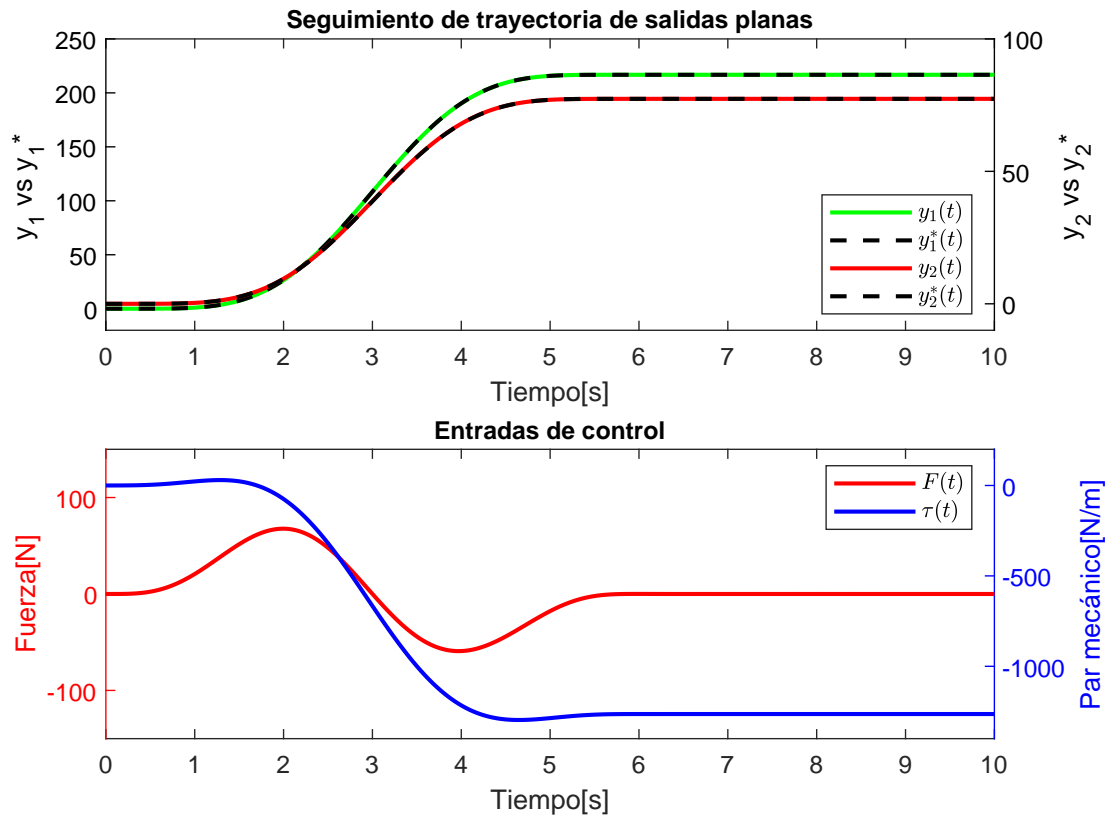


Figura 4.1: Simulación para sistema mecánico sin motores. Seguimiento de trayectoria.

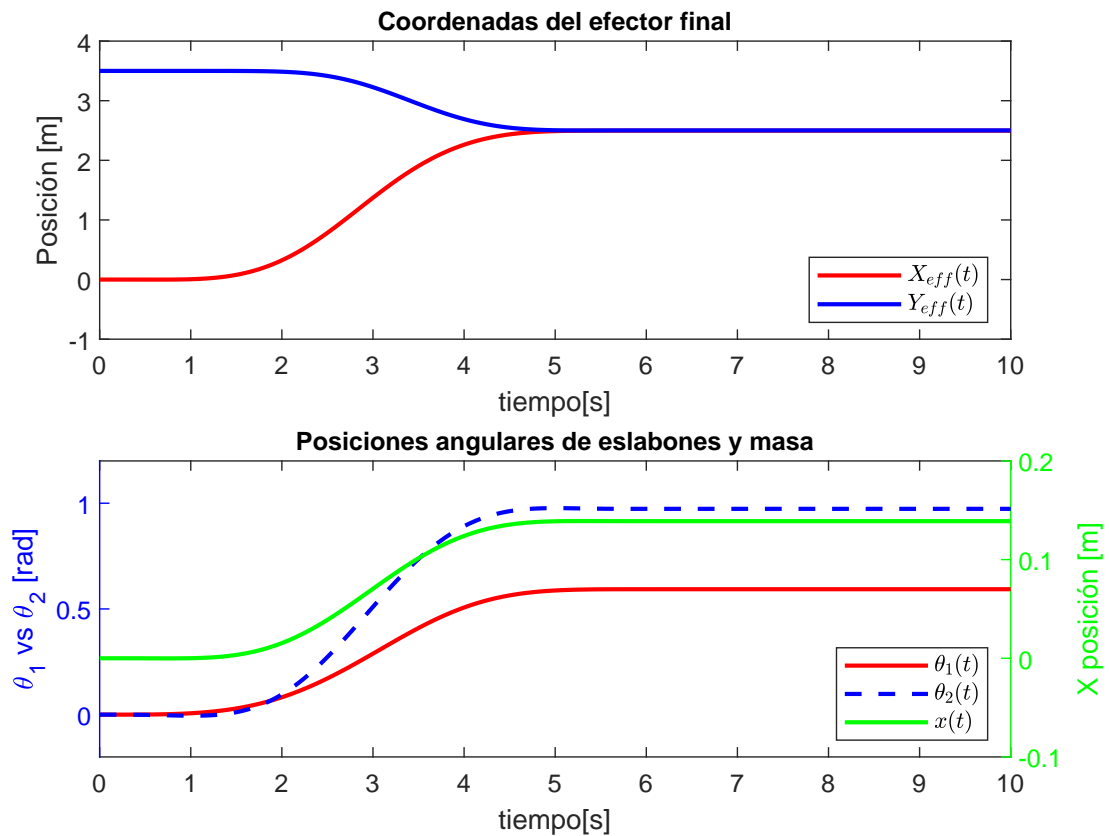


Figura 4.2: Simulación para sistema mecánico sin motores. Variables Generalizadas.

A pesar de puede afirmar a priori que el seguimiento de trayectoria es aceptable, un mayor acercamiento al desempeño del controlador puede apreciarse al graficar las variables del error de seguimiento, tal como se presentan en la Figura 4.3, para cada una de las salidas y_1 y y_2 . Se espera que los órdenes de magnitud del error sean significativamente pequeños respecto a las magnitudes de las salidas.

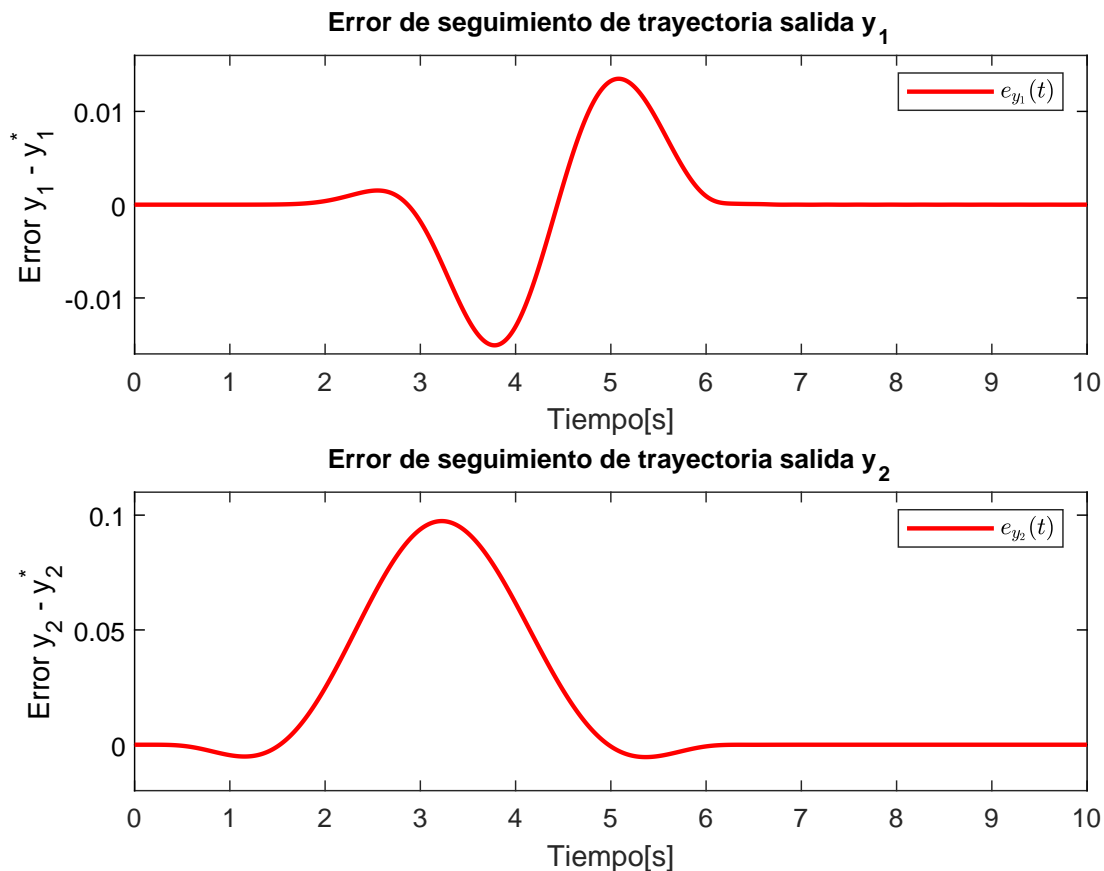


Figura 4.3: Simulación para sistema mecánico sin motores. Error de seguimiento.

Es claro, según la Figura 4.3, que el seguimiento tiene un desempeño aceptable para un controlador lineal actuando sobre un sistema no lineal subactuado, obteniendo magnitudes del error del 0.04 % para la salida y_1 y del 0.12 % para la salida y_2 .

La simplicidad del modelo linealizado simplificado permite una gran facilidad del control del sistema por medio de la estrategia planteada, haciendo un cálculo rápido de la perturbación interna del sistema y cumpliendo el objetivo de seguimiento.

Finalmente, respecto al error es posible obtener el parámetro de desempeño ISE (Integral Square Error), y ver su evolución a lo largo del tiempo. La trayectoria del criterio ISE se puede observar en la Figura 4.4, la cual, a pesar de no poder compararla con desempeños de otros controladores, servirá para determinar la robustez del control frente a diferentes perturbaciones en el capítulo 5.

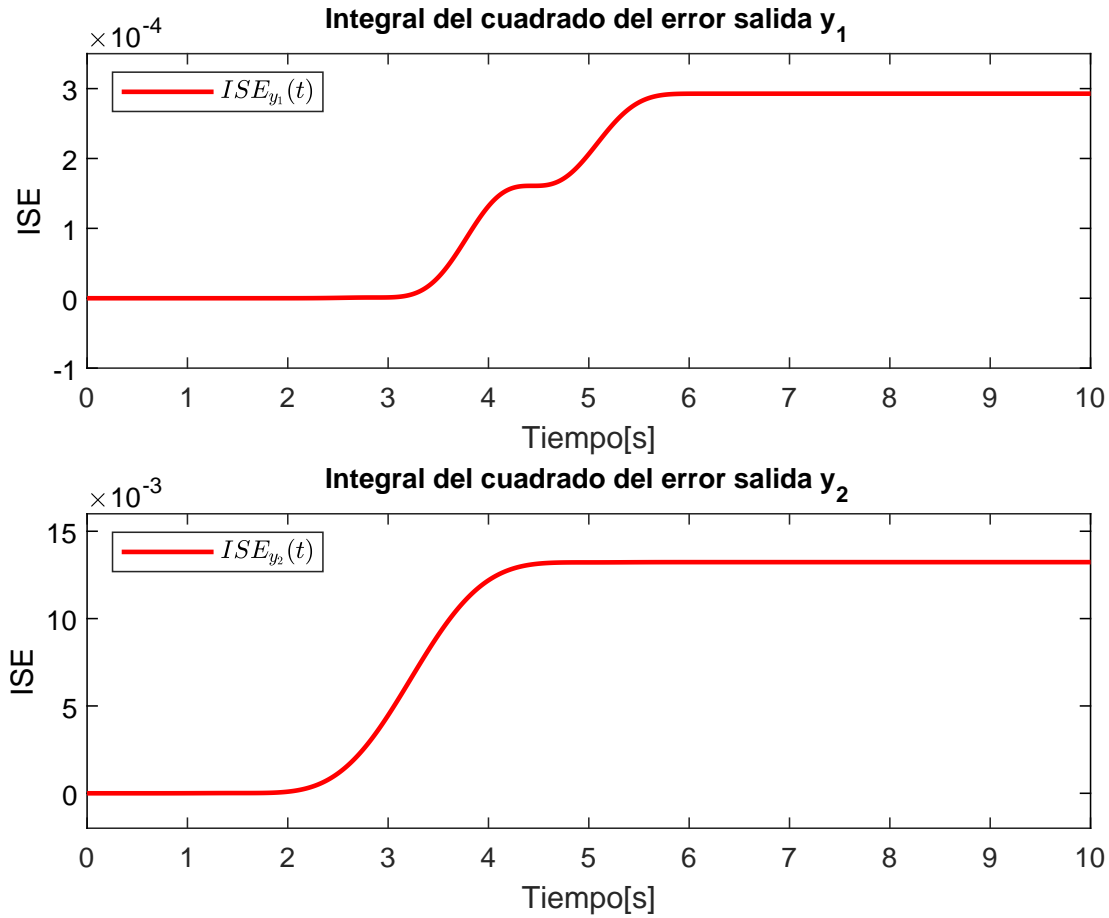


Figura 4.4: Simulación para sistema mecánico sin motores. Índice de desempeño ISE.

En concordancia con los errores mostrados en la Figura 4.3 la integral del cuadrado del error para la salida y_1 muestra un pequeño descanso para cuando el error cruza por cero y se incrementa en la misma medida a medida que el error realiza un segundo pico hasta volver a cero. Por otro lado, al tener una sola cresta, el criterio ISE para la salida y_2 muestra un crecimiento continuo hasta llegar a la estabilización.

Ahora, una prueba necesaria en este tipo de sistemas es la inclusión de una perturbación a la entrada. Esta perturbación será de tal tipo que imite una dinámica de baja frecuencia, que pueda ser estimada sin complicaciones por el observador y será catalogada como una perturbación exógena, no perteneciente a las dinámicas ignoradas y no lineales del sistema que agrupan el término $\xi_i(t)$. La forma de esta perturbación se puede observar en la Figura 4.5 y tendrá la formulación $\xi_{exo}(t) = 30e^{-\sin(5t)^2} \sin(3t) \cos(7t)$.

A fines de simplicidad y considerando que son significativas tanto la magnitud como la frecuencia de la perturbación escogidas, la misma señal será incluida en ambos controles, bajo la justificación de que sus observadores son sistemas independientes y el incluir la perturbación en un subsistema no otorga información respecto a la perturbación al otro subsistema que le facilite contrarrestarla. No obstante, la influencia que tendrá sobre el control de fuerza será mayor respecto a la influencia sobre el control de par debido a la

relación señal a ruido que existe entre las magnitudes de los controles y la magnitud de la perturbación.

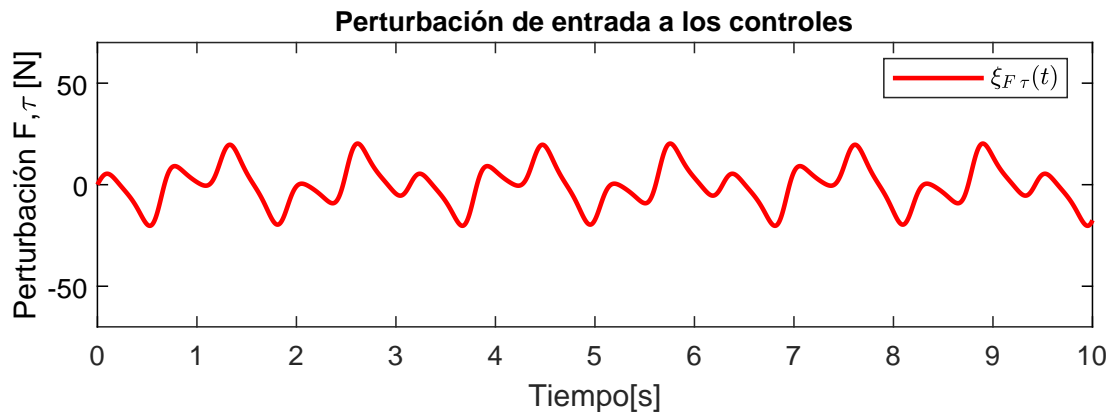


Figura 4.5: Simulación para sistema mecánico sin motores. Perturbación.

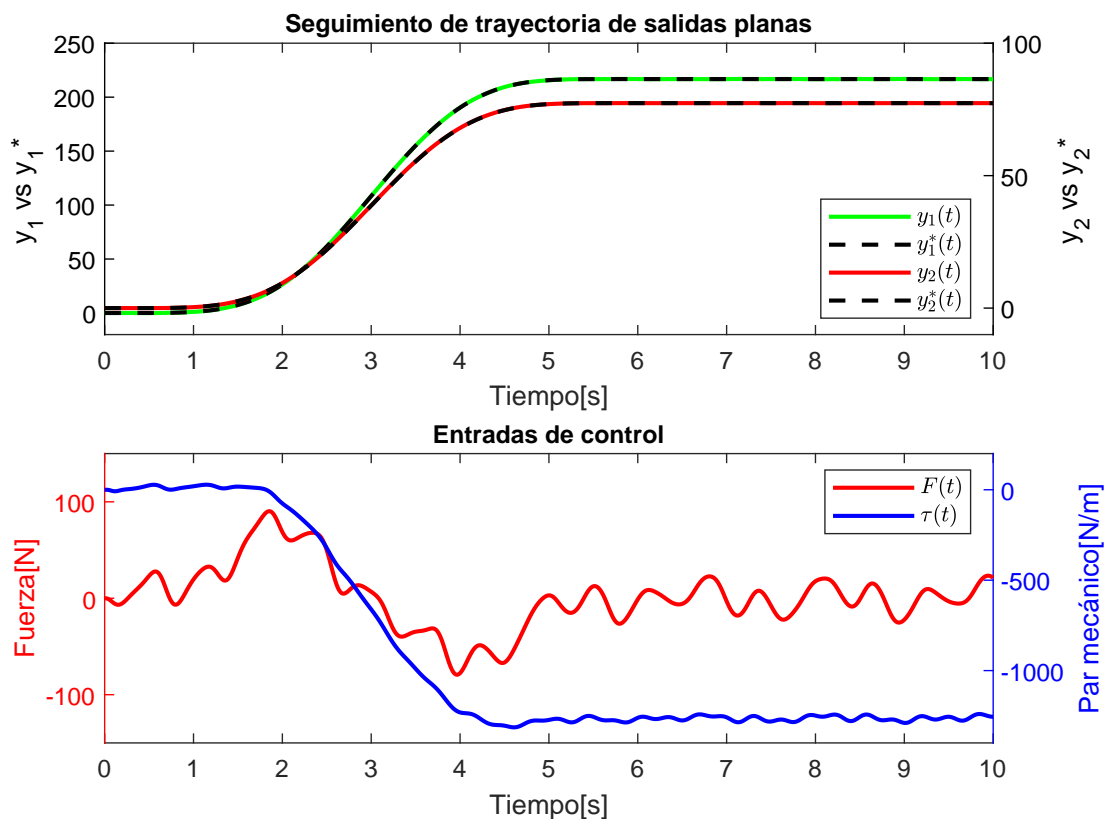


Figura 4.6: Simulación para sistema mecánico sin motores. Seguimiento de trayectoria perturbado.

Esta perturbación, a pesar de ser de una magnitud considerablemente alta, las implicaciones que tiene sobre la respuesta del seguimiento de trayectoria son aparentemente

imperceptibles. Es notorio que las curvas de y_i vs y_i^* se ven invariantes respecto a la perturbación, no así para los controles donde se ve una constante corrección por parte del control tratando de compensar la perturbación presente. Al ser una perturbación permanente y variante en el tiempo, es de esperar que no exista una cancelación exacta de la perturbación y que el observador no pueda estimar permanentemente la misma, por lo que se conservan oscilaciones alrededor de la curva del control permitiendo conservar el seguimiento de trayectoria del sistema. Todo esto es posible apreciarlo en la Figura 4.6

Así mismo, como las trayectorias de las salidas planas no presentan oscilaciones significativas, es de esperar que la trayectoria de las posiciones generalizadas no presenten mayores perturbaciones en sus evoluciones, tal como se observa en la Figura 4.7. Consideremos que la perturbación oscilante incluida al sistema puede considerarse como una oscilación permanente en la fuerza aplicada al carro y como un par vibrante en la articulación actuada del sistema, por lo que es interesante el comportamiento de las posiciones generalizadas x y θ_1 conservando su desplazamiento suave a lo largo de todo el movimiento. Finalmente, el comportamiento del efector final, base del propósito de control de seguimiento de trayectoria, tampoco se ve afectado visiblemente frente a la perturbación incluida en el sistema, mostrando la robustez del sistema frente a perturbaciones a la entrada, y asegurando un desempeño aceptable frente a la tarea propuesta.

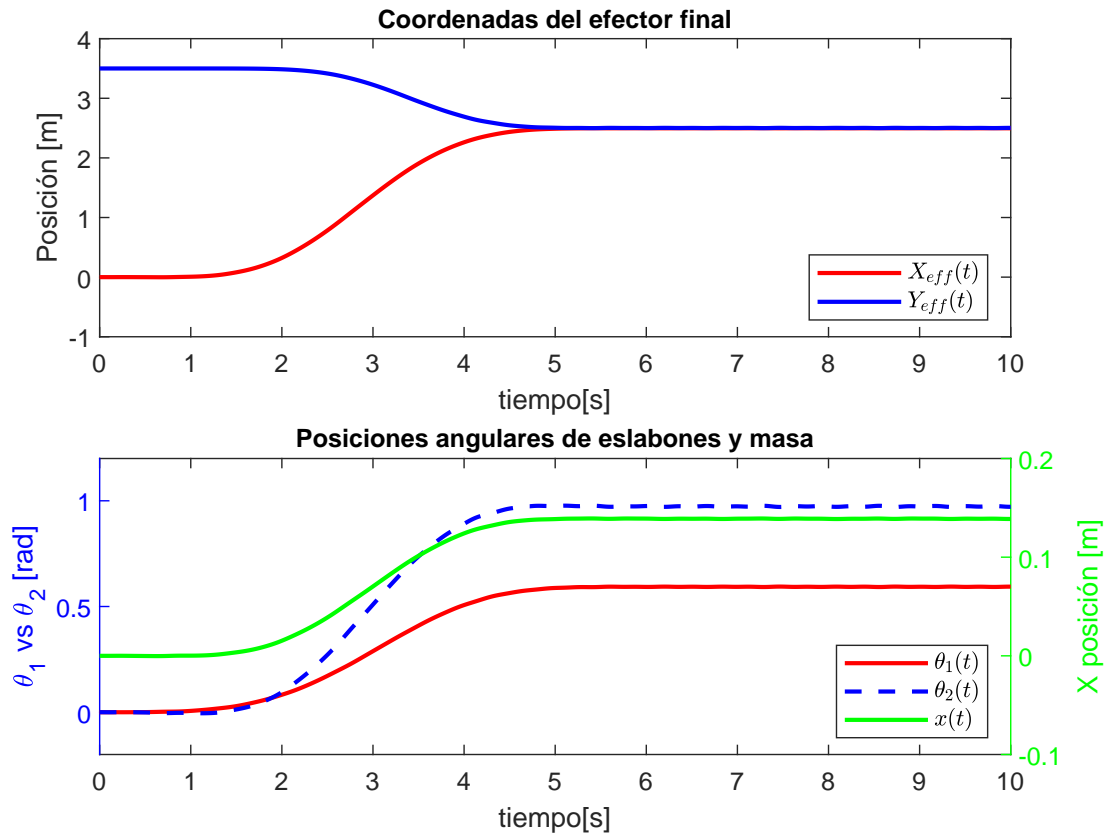


Figura 4.7: Simulación para sistema mecánico sin motores. Variables Generalizadas Perturbadas.

Es de aclarar que la perturbación, a pesar de ser de una magnitud considerable, no representan la perturbación más fuerte que es capaz de soportar el sistema, sin embargo, se considera que la amplitud es más que suficiente para cubrir un amplio espectro de posibles perturbaciones, tanto exógenas como endógenas que puedan estar presentes en un sistema real.

A pesar de que no se aprecian visualmente las alteraciones en el seguimiento de trayectoria de la Figura 4.6 sí es posible ver las implicaciones de las perturbaciones en el error de seguimiento presentado en la Figura 4.8, el cual no es posible llevarlo a un valor idénticamente cero debido a la naturaleza del ruido y a las características del controlador ADRC, que garantiza la atenuación del efecto de las perturbaciones acopladas a la entrada sobre el control de las salidas planas, mas no su completa eliminación. Se observa que para el error de seguimiento de la salida plana y_1 la influencia de la perturbación es significativamente mayor respecto a la que se observa para el error de la salida plana y_2 . Esto se justifica al ver la magnitud del control aplicado para ambas salidas, si se considera un desacoplamiento hipotético, la salida y_1 estaría controlada por la señal F , mientras que la salida y_2 estaría controlado por el control τ , por lo que es natural ver que la relación señal a ruido del control F es mayor respecto a la presente para el control τ .

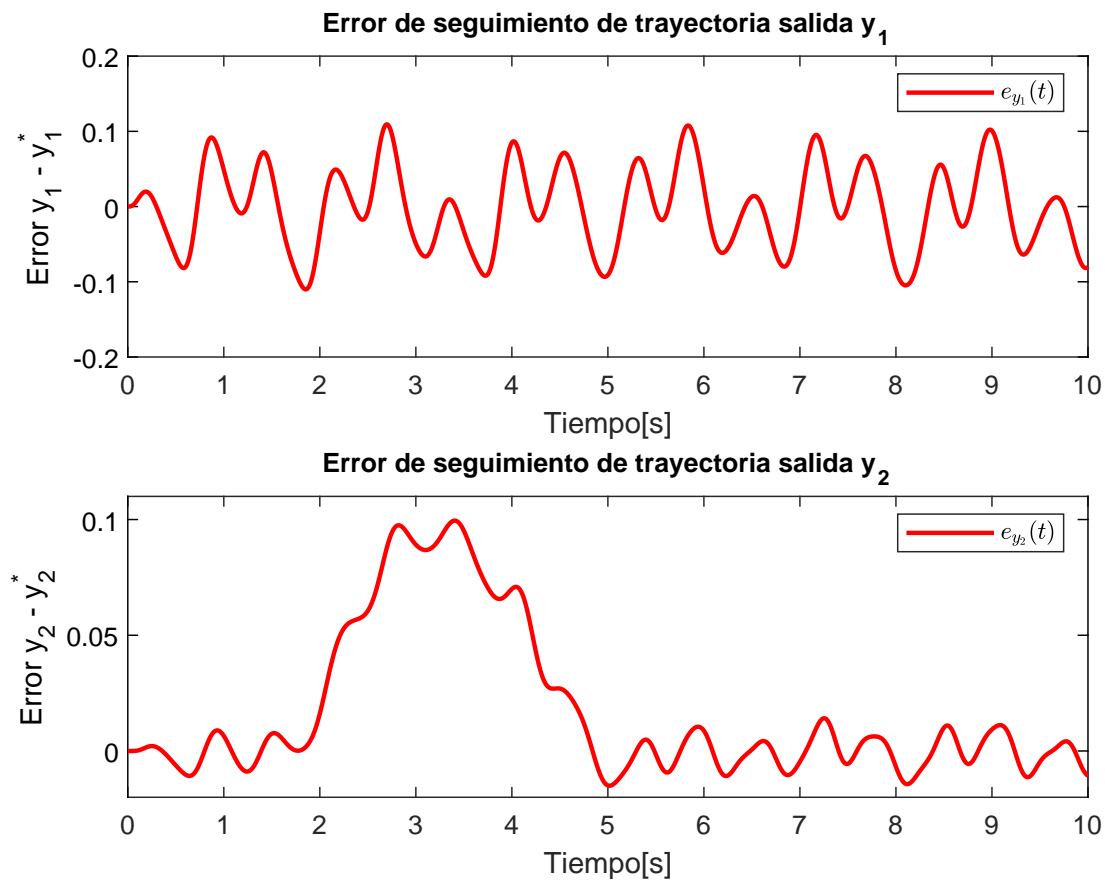


Figura 4.8: Simulación para sistema mecánico sin motores. Error de seguimiento perturbado.

No obstante, a pesar de que el error no tiene el mismo comportamiento visto en el sistema sin perturbar, es importante notar que la magnitud del error se conserva sobre los mismos órdenes de magnitud respecto a los obtenidos para el sistema no perturbado, tanto para el error de seguimiento de la salida y_1 como para la salida y_2 . De esta manera se confirma el buen desempeño del sistema de control frente a perturbaciones a la entrada, aún bajo las características de la perturbación.

De igual manera es importante mostrar el criterio de integral del cuadrado del error para el sistema perturbado de la Figura 4.9, bajo la consideración que el error de seguimiento nunca se hace cero. Debido al comportamiento del error de seguimiento de la salida y_1 se puede afirmar que es de crecimiento casi lineal y que incrementó en 2 órdenes de magnitud su valor respecto al sistema sin perturbar.

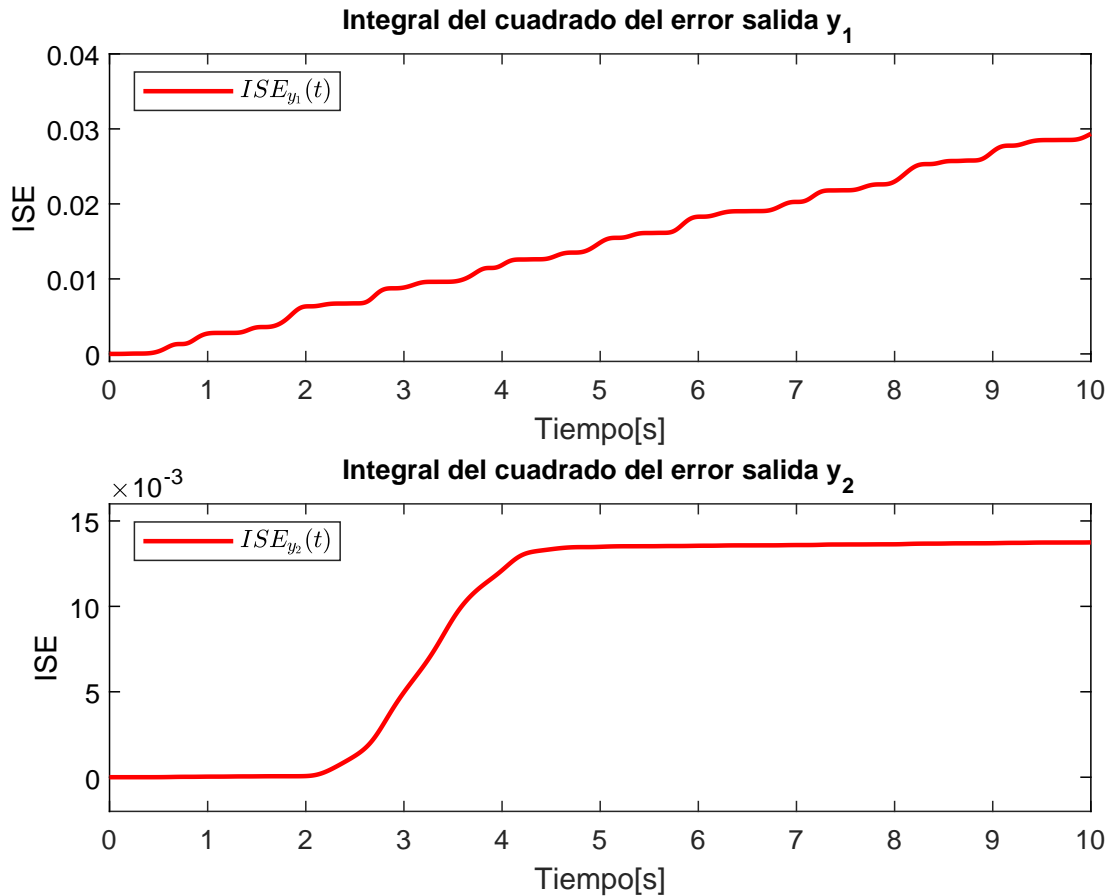


Figura 4.9: Simulación para sistema mecánico sin motores. Índice de desempeño ISE perturbado.

Por otro lado, visto que la perturbación no tiene gran influencia en el error de la salida y_2 , la forma de la curva es similar con leves diferencias en la magnitud obtenida del error y en la estabilidad del criterio al finalizar el movimiento, manteniendo un casi imperceptible pero seguro incremento debido a la imposibilidad de llevar el error de seguimiento a cero. También es de especificar que estas curvas no son estáticas y presentarán pendientes positivas constantes a medida que la perturbación se conserve; aún cuando la maniobra

deseada haya sido terminada. El error permanente demuestra que el sistema de control sigue calculando la estimación de la perturbación aún en un punto de equilibrio deseado del sistema, congruente con el punto de operación deseado.

Es posible afirmar entonces, una vez analizadas las curvas del comportamiento del sistema frente a dos diferentes situaciones, que el sistema mecánico no lineal es posible controlarlo con un esquema tipo ADRC, lineal, basado en la linealización tangente del modelo original que, además, desprecia gran parte de la dinámica del sistema. En las siguientes secciones se demostrarán las capacidades de este esquema de control bajo diferentes escenarios más complejos.

4.2. Control para el manipulador móvil con motor haciendo uso del modelado de Euler-Lagrange

Recordando los resultados del modelo reducido obtenidos en la sección 3.2.6 se plantea entonces un esquema de control por ADRC del sistema.

$$\begin{aligned} y_{1\delta}^{(6)} &= \beta_{12}E_{\delta} + E_{c\delta} + \xi_1 \\ y_{2\delta}^{(2)} &= E_{\delta} + \xi_2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Se procede entonces a realizar el diseño del observador y del controlador tal como se vio en la sección anterior

4.2.1. Diseño del observador

Se escribe entonces el modelo 4.34 en la forma canónica de Isidori evidenciando los diferentes estados de la salida así,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(0)} &= y_{1\delta}^{(1)} \\ \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(1)} &= y_{1\delta}^{(2)} \\ \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(2)} &= y_{1\delta}^{(3)} \\ \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(3)} &= y_{1\delta}^{(4)} \\ \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(4)} &= y_{1\delta}^{(5)} \\ \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(5)} &= \beta_{12}E_{\delta} + E_{c\delta} + \xi_1 \\ \text{-----} \\ \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(0)} &= y_{2\delta}^{(1)} \\ \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(1)} &= E_{\delta} + \xi_2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Definamos entonces la dinámica del sistema ideal, sin perturbación, correspondiente a la trayectoria deseada del sistema $y_{i\delta}^{(j)*}$ y al control nominal E_δ^* , $E_{c\delta}^*$, como

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(0)} &= y_{1\delta}^{(1)} \\
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(1)} &= y_{1\delta}^{(2)} \\
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(2)} &= y_{1\delta}^{(3)} \\
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(3)} &= y_{1\delta}^{(4)} \\
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(4)} &= y_{1\delta}^{(5)} \\
 \frac{d}{dt}y_{1\delta}^{(5)} &= \beta_{12}E_\delta^* + E_{c\delta}^* \\
 \hline
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(0)} &= y_{2\delta}^{(1)} \\
 \frac{d}{dt}y_{2\delta}^{(1)} &= E_\delta^*
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

De nuevo, se plantean los estados correspondientes al error de seguimiento, dados por $e_{i\delta}^{(j)} = y_{i\delta}^{(j)} - y_{i\delta}^{(j)*}$, $e_{E_c} = E_{c\delta} - E_{c\delta}^*$ y $e_E = E_\delta - E_\delta^*$. Así, es posible definir la dinámica del error de seguimiento como

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(0)} &= e_{1\delta}^{(1)} \\
 \frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(1)} &= e_{1\delta}^{(2)} \\
 \frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(2)} &= e_{1\delta}^{(3)} \\
 \frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(3)} &= e_{1\delta}^{(4)} \\
 \frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(4)} &= e_{1\delta}^{(5)} \\
 \frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(5)} &= \beta_{12}e_E + e_{E_c} + \xi_1 \\
 \hline
 \frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(0)} &= e_{2\delta}^{(1)} \\
 \frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(1)} &= e_E + \xi_2
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ahora, se deben plantear la dinámica de los estados observados $e_{i\delta}^{(j)}$ a partir de la medición supuesta de la primera derivada del error de la salida. Esto conlleva a formular el observador extendido de orden reducido así,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} &= \hat{e}_{1\delta}^{(2)} + \lambda_{51}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{1\delta}^{(2)} &= \hat{e}_{1\delta}^{(3)} + \lambda_{41}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{1\delta}^{(3)} &= \hat{e}_{1\delta}^{(4)} + \lambda_{31}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{1\delta}^{(4)} &= \hat{e}_{1\delta}^{(5)} + \lambda_{21}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{1\delta}^{(5)} &= \beta_{12}e_E + e_{E_c} + z_1 + \lambda_{11}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}z_1 &= \lambda_{01}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)})
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} &= e_E + \lambda_{12}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}z_2 &= \lambda_{02}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)})
\end{aligned}$$

Donde las constantes λ_{ij} representan la i -ésima constante del observador de la j -ésima salida plana. Ahora, si definimos de nuevo el error de estimación como $\tilde{e}_{i\delta}^{(j)} = (e_{i\delta}^{(j)} - \hat{e}_{i\delta}^{(j)})$ y $e_{\xi_i} = \xi_i - z_i$, y substrayendo las ecuaciones 4.38 de 4.37, se obtiene la dinámica del error como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} &= \tilde{e}_{1\delta}^{(2)} - \lambda_{51}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{1\delta}^{(2)} &= \tilde{e}_{1\delta}^{(3)} - \lambda_{41}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{1\delta}^{(3)} &= \tilde{e}_{1\delta}^{(4)} - \lambda_{31}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{1\delta}^{(4)} &= \tilde{e}_{1\delta}^{(5)} - \lambda_{21}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{1\delta}^{(5)} &= e_{\xi_1} - \lambda_{11}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}z_1 &= \lambda_{01}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)} &= e_{\xi_2} - \lambda_{12}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}z_2 &= \lambda_{02}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)}
\end{aligned}$$

Donde las dinámicas del error de estimación satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales lineales perturbadas

$$\tilde{e}_1^{(7)} + \lambda_{51}\tilde{e}_1^{(6)} + \lambda_{41}\tilde{e}_1^{(5)} + \lambda_{31}\tilde{e}_1^{(4)} + \lambda_{21}\tilde{e}_1^{(3)} + \lambda_{11}\tilde{e}_1^{(2)} + \lambda_{01}\tilde{e}_1^{(1)} = \xi_1^{(1)} \tag{4.40}$$

$$\tilde{e}_2^{(3)} + \lambda_{12}\tilde{e}_2^{(2)} + \lambda_{02}\tilde{e}_2^{(1)} = \xi_2^{(1)} \quad (4.41)$$

Por lo tanto, dadas cotas superiores para las derivadas n -ésimas de las perturbaciones

$$\sup_t |\xi_i^{(n)}| = K_n, \quad n \in \{0, 1, 2, 3\} \quad i = 1, 2, \quad (4.42)$$

es posible escoger adecuadamente los valores para las constantes de los observadores $\{\lambda_{01}, \lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{41}, \lambda_{51}\}$ y $\{\lambda_{02}, \lambda_{12}\}$ tal que el polinomio característico de la dinámica del error de estimación sea asintóticamente exponencialmente estable. La selección de estos polinomios serán de la forma

$$p_{o1}(s) = \left(s^2 + 2s\zeta_1 \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right) + \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right)^2 \right)^3 \quad (4.43)$$

$$p_{o2}(s) = \left(s^2 + 2s\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right) + \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right)^2 \right) \quad (4.44)$$

Llevando a los siguientes valores de las constantes de los observadores,

$$\begin{aligned} \lambda_{51} &= \frac{6\omega_{n1}\zeta_1}{\epsilon_1}, & \lambda_{41} &= \frac{3\omega_{n1}^2}{\epsilon_1^2} + \frac{12\omega_{n1}^2\zeta_1^2}{\epsilon_1^2}, & \lambda_{31} &= \frac{8\omega_{n1}^3\zeta_1}{\epsilon_1^3} + \frac{2\omega_{n1}\zeta_1 \left(\frac{2\omega_{n1}^2}{\epsilon_1^2} + \frac{4\omega_{n1}^2\zeta_1^2}{\epsilon_1^2} \right)}{\epsilon_1} \\ \lambda_{21} &= \frac{\omega_{n1}^4}{\epsilon_1^4} + \frac{\omega_{n1}^2 \left(\frac{2\omega_{n1}^2}{\epsilon_1^2} + \frac{4\omega_{n1}^2\zeta_1^2}{\epsilon_1^2} \right)}{\epsilon_1^2} + \frac{8\omega_{n1}^4\zeta_1^2}{\epsilon_1^4}, & \lambda_{11} &= \frac{6\omega_{n1}^5\zeta_1}{\epsilon_1^5}, & \lambda_{01} &= \frac{\omega_{n1}^6}{\epsilon_1^6} \\ \lambda_{12} &= 2\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right), & \lambda_{02} &= \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right)^2 \end{aligned}$$

Al igual que se hizo en la sección previa, se obtiene la transformada en el dominio de la frecuencia de las ecuaciones 4.40 y 4.41 con lo cual se llega a la siguiente relación

$$\tilde{e}_{1\delta}^{(1)}(s) = \left[\frac{s}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_1(s) \quad (4.45)$$

$$\tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) = \left[\frac{s}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) \quad (4.46)$$

De nuevo, a partir de las relaciones 4.45 y 4.46 se pueden obtener las funciones de transferencia para cada estado del error respecto a la perturbación y del error de estimación respecto a la perturbación así,

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{1\delta}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) \\
\tilde{e}_{1\delta}^{(2)}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{51})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) \\
\tilde{e}_{1\delta}^{(3)}(s) &= \left[\frac{s(s^2 + \lambda_{51}s + \lambda_{41})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) \\
\tilde{e}_{1\delta}^{(4)}(s) &= \left[\frac{s(s^3 + \lambda_{51}s^2 + \lambda_{41}s + \lambda_{31})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) \\
\tilde{e}_{1\delta}^{(5)}(s) &= \left[\frac{s(s^4 + \lambda_{51}s^3 + \lambda_{41}s^2 + \lambda_{31}s + \lambda_{21})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) \\
\tilde{e}_{\xi_2}(s) &= \left[\frac{s(s^5 + \lambda_{51}s^4 + \lambda_{41}s^3 + \lambda_{31}s^2 + \lambda_{21}s + \lambda_{11})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \\
\tilde{e}_{\xi_2}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{12})}{s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

4.2.2. Diseño del controlador

Una vez se tienen las funciones de sensibilidad obtenidas por el observador, se plantea una ley de control proporcional a los estados estimados y al error de medición de la salida real del sistema así,

$$e_{E_c} = -\gamma_{51}\hat{e}_{1\delta}^{(5)} - \gamma_{41}\hat{e}_{1\delta}^{(4)} - \gamma_{31}\hat{e}_{1\delta}^{(3)} - \gamma_{21}\hat{e}_{1\delta}^{(2)} - \gamma_{11}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} - z_1 - \beta_{12}e_E \tag{4.49}$$

$$e_E = \gamma_{12}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} - \gamma_{02}e_{2\delta}^{(0)} - z_2 \tag{4.50}$$

Usando la ley de control mostrada en 4.49 es posible cerrar el lazo de realimentación usando las relaciones mostradas en 4.37 recordando que $\hat{e}_{1\delta}^{(1)} = e_{1\delta}^{(1)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(1)}$ y que $e_{\xi_1} = \xi_1 - z_1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(5)} &= -\gamma_{51}\hat{e}_{1\delta}^{(5)} - \gamma_{41}\hat{e}_{1\delta}^{(4)} - \gamma_{31}\hat{e}_{1\delta}^{(3)} - \gamma_{21}\hat{e}_{1\delta}^{(2)} - \gamma_{11}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} - z_1 - \beta_{12}e_E + \beta_{12}e_E + \xi_1 \\
\frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(5)} &= -\gamma_{51}\hat{e}_{1\delta}^{(5)} - \gamma_{41}\hat{e}_{1\delta}^{(4)} - \gamma_{31}\hat{e}_{1\delta}^{(3)} - \gamma_{21}\hat{e}_{1\delta}^{(2)} - \gamma_{11}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} + e_{\xi_1} \\
\frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(5)} &= -\gamma_{51}(e_{1\delta}^{(5)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(5)}) - \gamma_{41}(e_{1\delta}^{(4)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(4)}) - \gamma_{31}(e_{1\delta}^{(3)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(3)}) - \gamma_{21}(e_{1\delta}^{(2)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(2)}) \\
&\quad - \gamma_{11}(e_{1\delta}^{(1)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(1)}) - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} + e_{\xi_1}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Obteniendo la transformada de Laplace de 4.51 llegamos a la siguiente relación

$$\begin{aligned}
& [s^6 + \gamma_{51}s^5 + \gamma_{41}s^4 + \gamma_{31}s^3 + \gamma_{21}s^2 + \gamma_{11}s + \gamma_{01}]e_{1\delta} \\
& = \gamma_{51}\tilde{e}_{1\delta}^{(5)} + \gamma_{41}\tilde{e}_{1\delta}^{(4)} + \gamma_{31}\tilde{e}_{1\delta}^{(3)} + \gamma_{21}\tilde{e}_{1\delta}^{(2)} + \gamma_{11}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} + \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} + e_{\xi_1}
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores obtenidos en 4.47 obtenemos

$$\begin{aligned}
& [s^6 + \gamma_{51}s^5 + \gamma_{41}s^4 + \gamma_{31}s^3 + \gamma_{21}s^2 + \gamma_{11}s + \gamma_{01}]e_{1\delta}(s) = \\
& \left[\frac{\gamma_{11}s}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) + \\
& \left[\frac{\gamma_{21}s(s + \lambda_{51})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) + \\
& \left[\frac{\gamma_{31}s(s^2 + \lambda_{51}s + \lambda_{41})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) + \\
& \left[\frac{\gamma_{41}s(s^3 + \lambda_{51}s^2 + \lambda_{41}s + \lambda_{31})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) + \\
& \left[\frac{\gamma_{51}s(s^4 + \lambda_{51}s^3 + \lambda_{41}s^2 + \lambda_{31}s + \lambda_{21})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s) + \\
& \left[\frac{s(s^5 + \lambda_{51}s^4 + \lambda_{41}s^3 + \lambda_{31}s^2 + \lambda_{21}s + \lambda_{11})}{s^6 + \lambda_{51}s^5 + \lambda_{41}s^4 + \lambda_{31}s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_2(s)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

El cual puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& \frac{e_{1\delta}(s)}{\xi_1(s)} = \\
& \left[\frac{s^6 + \kappa_{111}s^5 + \kappa_{101}s^4 + \kappa_{91}s^3 + \kappa_{81}s^2 + \kappa_{71}s}{s^{12} + \kappa_{111}s^{11} + \kappa_{101}s^{10} + \kappa_{91}s^9 + \kappa_{81}s^8 + \kappa_{71}s^7 + \kappa_{61}s^6 + \kappa_{51}s^5 + \kappa_{41}s^4 + \kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}} \right]
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\kappa_{01} &= \gamma_{01} \lambda_{01} \\
\kappa_{11} &= \gamma_{01} \lambda_{11} + \gamma_{11} \lambda_{01} \\
\kappa_{21} &= \gamma_{01} \lambda_{21} + \gamma_{11} \lambda_{11} + \gamma_{21} \lambda_{01} \\
\kappa_{31} &= \gamma_{01} \lambda_{31} + \gamma_{11} \lambda_{21} + \gamma_{21} \lambda_{11} + \gamma_{31} \lambda_{01} \\
\kappa_{41} &= \gamma_{01} \lambda_{41} + \gamma_{11} \lambda_{31} + \gamma_{21} \lambda_{21} + \gamma_{31} \lambda_{11} + \gamma_{41} \lambda_{01} \\
\kappa_{51} &= \gamma_{01} \lambda_{51} + \gamma_{11} \lambda_{41} + \gamma_{21} \lambda_{31} + \gamma_{31} \lambda_{21} + \gamma_{41} \lambda_{11} + \gamma_{51} \lambda_{01} \\
\kappa_{61} &= \gamma_{01} + \lambda_{01} + \gamma_{11} \lambda_{51} + \gamma_{21} \lambda_{41} + \gamma_{31} \lambda_{31} + \gamma_{41} \lambda_{21} + \gamma_{51} \lambda_{11} \\
\kappa_{71} &= \gamma_{11} + \lambda_{11} + \gamma_{21} \lambda_{51} + \gamma_{31} \lambda_{41} + \gamma_{41} \lambda_{31} + \gamma_{51} \lambda_{21} \\
\kappa_{81} &= \gamma_{21} + \lambda_{21} + \gamma_{31} \lambda_{51} + \gamma_{41} \lambda_{41} + \gamma_{51} \lambda_{31} \\
\kappa_{91} &= \gamma_{31} + \lambda_{31} + \gamma_{41} \lambda_{51} + \gamma_{51} \lambda_{41} \\
\kappa_{101} &= \gamma_{41} + \lambda_{41} + \gamma_{51} \lambda_{51} \\
\kappa_{111} &= \gamma_{51} + \lambda_{51}
\end{aligned}$$

Del mismo modo, cerrando el lazo usando la relación presente en 4.37, y recordando de nuevo que $\hat{e}_{2\delta}^{(i)} = e_{2\delta}^{(i)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(i)}$ y que, $e_{\xi_2} = \xi_2 - z_2$, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_{2\delta}^{(1)} &= -\gamma_{12} \hat{e}_{2\delta}^{(1)} - \gamma_{02} e_{2\delta}^{(0)} - z_2 + \xi_2 \\ &= -\gamma_{12} (e_{2\delta}^{(1)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(1)}) - \gamma_{02} e_{2\delta}^{(0)} - z_2 + \xi_2 \end{aligned}$$

De nuevo, obteniendo la transformada de Laplace se llega a

$$[s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{02}]e_{2\delta}(s) = \gamma_{12}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) + e_{\xi_2}(s) \quad (4.54)$$

Reemplazando los valores obtenidos en 4.48 obtenemos

$$e_{2\delta}(s) = \left[\frac{s\gamma_{12} + s(s + \lambda_{12})}{(s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{02})(s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02})} \right] \xi_2(s) \quad (4.55)$$

El cual puede ser reescrito como

$$e_{1\delta}(s) = \left[\frac{s^2 + \kappa_{32}s}{s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}} \right] \xi_1(s) \quad (4.56)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \kappa_{02} &= \lambda_{02}\gamma_{02} \\ \kappa_{12} &= \lambda_{02}\gamma_{12} + \lambda_{12}\gamma_{02} \\ \kappa_{22} &= \lambda_{02} + \lambda_{12}\gamma_{12} + \gamma_{02} \\ \kappa_{32} &= \lambda_{12} + \gamma_{12} \end{aligned}$$

De nuevo, se pueden seleccionar ganancias del controlador similares al observador conservando los parámetros ζ y ω_n . La selección de los polinomios resulta así

$$p_{c1}(s) = (s^2 + 2s\zeta_1\omega_{n1} + \omega_{n1}^2)^3 \quad (4.57)$$

$$p_{c2}(s) = (s^2 + 2s\zeta_2\omega_{n2} + \omega_{n2}^2) \quad (4.58)$$

Llevando a los siguientes valores de las constantes de los controladores,

$$\begin{aligned} \gamma_{51} &= 6\omega_{n2}\zeta_2, & \gamma_{41} &= 3\omega_{n1}^2 + 12\omega_{n2}^2\zeta_2^2, & \gamma_{31} &= 8\omega_{n1}^2\omega_{n2}\zeta_2 + 2\omega_{n2}\zeta_2(2\omega_{n1}^2 + 4\omega_{n2}^2\zeta_2^2) \\ \gamma_{21} &= \omega_{n1}^2(2\omega_{n1}^2 + 4\omega_{n2}^2\zeta_2^2) + \omega_{n1}^4 + 8\omega_{n1}^2\omega_{n2}^2\zeta_2^2, & \gamma_{11} &= 6\omega_{n1}^4\omega_{n2}\zeta_2, & \gamma_{01} &= \omega_{n1}^6 \end{aligned}$$

$$\gamma_{12} = 2\zeta_2\omega_{n2}, \quad \gamma_{02} = \omega_{n2}^2$$

De nuevo, las ecuaciones 4.53 y 4.56 representan la función de sensibilidad a la perturbación. Calculando de nuevo las funciones de transferencia para los controladores con base en las ecuaciones 4.53 y 4.56, se obtiene

$$e_{E_c}(s) = -\frac{\kappa_{61}s^6 + \kappa_{51}s^5 + \kappa_{41}s^4 + \kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(s^5 + \kappa_{111}s^4 + \kappa_{101}s^3 + \kappa_{91}s^2 + \kappa_{81}s + \kappa_{71})} e_{1\delta}(s) \quad (4.59)$$

$$e_E(s) = -\frac{\kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(\kappa_{32} + s)}e_{2\delta}(s) \quad (4.60)$$

Ahora, reemplazando las definiciones del error de seguimiento $e_{i\delta}^{(j)} = y_{i\delta}^{(j)} - y_{i\delta}^{(j)*}$, y del error del control nominal $e_{Ec} = E_{c\delta} - E_{c\delta}^*$ y $e_E = E_\delta - E_\delta^*$ obtenemos

$$E_{c\delta}(s) = E_{c\delta}^*(s) - \frac{\kappa_{61}s^6 + \kappa_{51}s^5 + \kappa_{41}s^4 + \kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(s^5 + \kappa_{111}s^4 + \kappa_{101}s^3 + \kappa_{91}s^2 + \kappa_{81}s + \kappa_{71})}(y_{1\delta}(s) - y_{1\delta}(s)^*) \quad (4.61)$$

$$E_\delta(s) = E_\delta^*(s) - \frac{\kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(\kappa_{32} + s)}(y_{2\delta}(s) - y_{2\delta}(s)^*) \quad (4.62)$$

Como último paso, se toman como referencias las leyes de control propuestas 4.49 y 4.50, para definir la ley de control general como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{c\delta} \\ E_\delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_{c\delta}^*(s) - \frac{\kappa_{61}s^6 + \kappa_{51}s^5 + \kappa_{41}s^4 + \kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(s^5 + \kappa_{111}s^4 + \kappa_{101}s^3 + \kappa_{91}s^2 + \kappa_{81}s + \kappa_{71})}(y_{1\delta}(s) - y_{1\delta}(s)^*) \\ E_\delta^*(s) - \frac{\kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(\kappa_{32} + s)}(y_{2\delta}(s) - y_{2\delta}(s)^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Ecuación que puede ser reescrita en función de la trayectoria deseada, recordando la dinámica ideal de seguimiento de la ecuación 4.36, como,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{c\delta} \\ E_\delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{1\delta}^{(6)*} - \frac{\kappa_{61}s^6 + \kappa_{51}s^5 + \kappa_{41}s^4 + \kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(s^5 + \kappa_{111}s^4 + \kappa_{101}s^3 + \kappa_{91}s^2 + \kappa_{81}s + \kappa_{71})}(y_{1\delta}(s) - y_{1\delta}(s)^*) \\ y_{1\delta}^{(2)*} - \frac{\kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(\kappa_{32} + s)}(y_{2\delta}(s) - y_{2\delta}(s)^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.64)$$

4.2.3. Simulaciones

A partir de los controladores establecidos se plantea la simulación del sistema completo, junto con la dinámica de los motores. Se pretende, una vez más, realizar una tarea de seguimiento de trayectoria de tipo descanso-descanso, la cual se genera por medio de polinomios de Bèzier de orden adecuado, cuyo cálculo se obtiene usando el método planteado en el Apéndice A.

La planificación de la trayectoria se basa en las condiciones iniciales y finales de los efectores finales y, por ende, de las condiciones iniciales y finales de las variables generalizadas obtenidas a partir de la cinemática inversa del sistema. Se plantean entonces las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x_i &= 0, \theta_{1i} = 0, \theta_{2i} = 0 \\ \dot{x}_i &= 0, \dot{\theta}_{1i} = 0, \dot{\theta}_{2i} = 0 \\ X_i &= 0, Y_i = 0\end{aligned}$$

Generando los valores iniciales de las salidas planas $(y_1, y_2) = (0, 0)$. Considerando los valores finales del efector final $(X_f, Y_f) = (2.5, 2.5)$, se obtienen los siguientes valores finales para las variables generalizadas:

$$x_f = 0.139, \theta_{1f} = 0.593, \theta_{2f} = 0.974, \dot{q}_e = -35.04$$

Lo cual implica un valor final de las salidas planas de

$$\begin{aligned}y_1 &= -15.045 \times 10^{-7} \\ y_2 &= 40.306\end{aligned}$$

Así mismo, para la sintonización del controlador se usaron los siguientes parámetros:

$$\omega_{n1} = 0.5, \quad \zeta_1 = 1, \quad \epsilon_1 = 0.7 \quad (4.65)$$

$$\omega_{n2} = 3, \quad \zeta_2 = 1, \quad \epsilon_2 = 0.1 \quad (4.66)$$

En la tabla 4.2 se presentan los parámetros usados para la simulación del sistema. Se incluyeron valores supuestos de motores proporcionales a las magnitudes de los parámetros de la planta.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
M	400[Kg]	L_{m1}	0.658 [mH]
m_1	100[Kg]	k_{m1}	3.61 [N · m/A]
m_2	50[Kg]	B_{m1}	0.1[N · m · s]
l_{c1}	0.75[m]	J_{m1}	0.01[Kg · m ²]
L_1	2[m]	R_{m1}	1.76[Ω]
l_{c2}	0.75[m]	L_{m2}	0.658[mH]
L_2	1.5[m]	k_{m2}	3.61[N · m/A]
k	800[N · m/rad]	B_{m2}	0.1[N · m · s]
g	9.85[m/s ²]	J_{m2}	0.01[Kg · m ²]
I_1	0.5[Kg · m ²]	R_{m1}	1.76[Ω]
I_2	0.3[Kg · m ²]	R_t	0.25[m]

Tabla 4.2: Parametros de la planta usados para la simulación sistema electro-mecánico usando E-L.

Realizando la simulación del sistema se obtiene la respuesta mostrada en la Figura 4.10, donde el seguimiento de trayectoria de las salidas planas y_1 y y_2 es razonablemente aceptable, notando un ligero error que deberá desvanecerse cuando $t \rightarrow \infty$ para la salida y_1 la cual, considerando la escala que presenta, es de esperar que existan errores de magnitudes menores pero significativos.

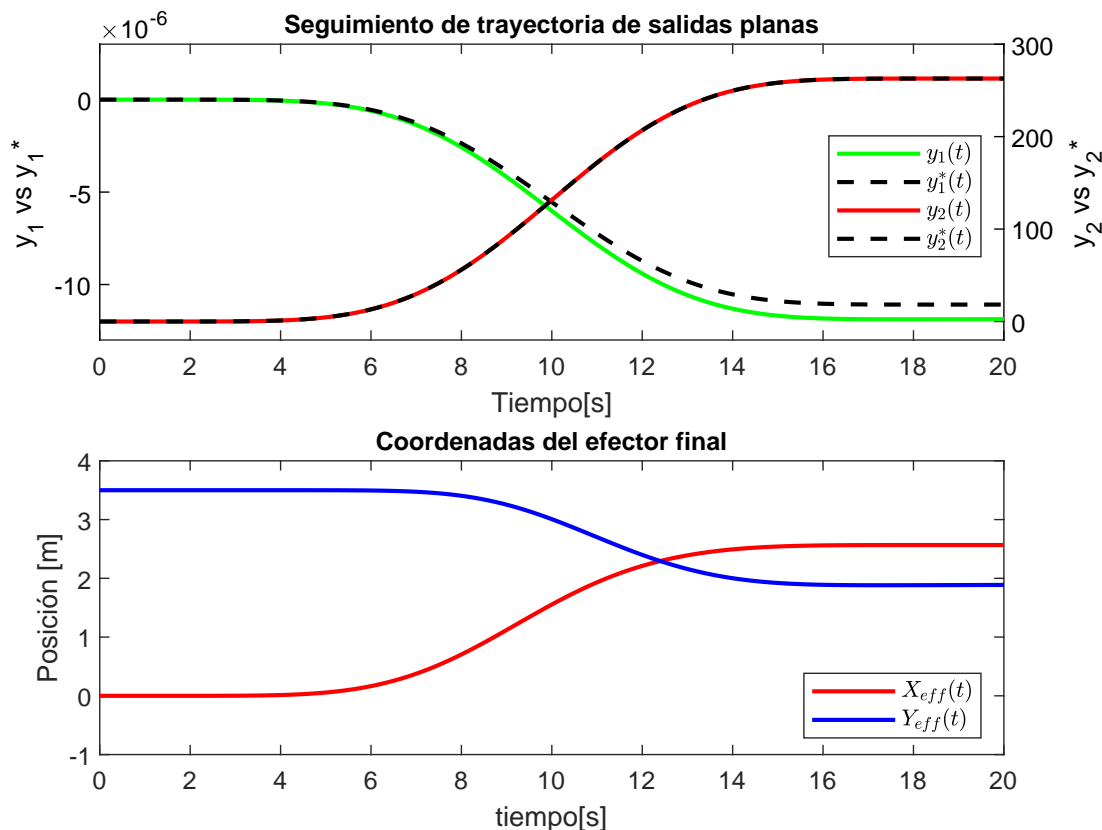


Figura 4.10: Simulación para sistema mecánico con motores E-L. Seguimiento de trayectoria.

Hay dos cosas que señalar respecto a los resultados de la simulación de la Figura 4.10. En primer lugar la escala de la salida y_1 , la cual es de un orden de magnitud muy pequeño. Este fenómeno se justifica a partir de los valores de los coeficientes de las salidas planas los cuales, para este ejercicio, son:

$$\begin{aligned}
 y &= C^T x \\
 &= \begin{bmatrix} -5.8 \cdot 10^{-6} & -10.9 \cdot 10^{-6} & -3.9 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 179.8 & 268.8 & 80.1 & 0 & 0 \\ -21.4 \cdot 10^{-12} & -42.9 \cdot 10^{-12} & -16.3 \cdot 10^{-12} & 0 & 0 \\ 250.3 \cdot 10^{-3} & 466.6 \cdot 10^{-3} & 168.7 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \end{bmatrix} x
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

En segundo lugar, se evidencia que el objetivo de posicionar el efector final en la coordenada deseada $(X_f, Y_f) = (2.5, 2.5)$ no se cumple. Tomando en cuenta que la trayectoria deseada es generada a partir de los valores iniciales y finales de posición de las posiciones generalizadas, sin tomar en cuenta las velocidades generalizadas, se concluye que la trayectoria generada no posee la suficiente información para dar una relación uno a uno entre las salidas planas y los valores de las posiciones generalizadas. Esto se puede explicar basándose en la forma de las salidas planas encontradas: Mientras que en la sección 3.1.3 se encontraron salidas planas por inspección que sólo dependían de la posición, en

la sección 3.2.6 se encontraron salidas planas que dependen además de la velocidad del sistema, generando que existan más combinaciones lineales entre todos los estados del sistema que resulten en el valor unidimensional de la salida plana que se está siguiendo. Existe entonces una restricción implícita en la salida plana de la sección 3.1.3 que permite que el seguimiento de trayectoria de la salida (planteada únicamente usando las posiciones generalizadas) resulte en un seguimiento de trayectoria de los estados posición del sistema. Por otro lado, esa restricción se pierde para la salida plana de la sección 3.2.6 permitiendo que la combinación lineal dependiente de la velocidad otorgue más posibilidades a las trayectorias del sistema en desenvolverse sin tener un control explícito sobre ellas. Es por ello que se plantea entonces cambiar la estrategia de generación para la trayectoria en búsqueda de que se posea más información dentro de la misma que lleve a los estados a su valor deseado.

Corrección de trayectorias

En primer lugar se define el siguiente sistema de ecuaciones obtenido a partir del proceso de verificación del grado relativo de las salidas planas:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} \\ y_1^{(3)} \\ y_1^{(4)} \\ y_1^{(5)} \\ y_1^{(6)} \\ y_2 \\ y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ f_2(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ f_3(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ f_4(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ f_5(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ f_6(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ f_7(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ g_1(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ g_2(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \\ g_3(x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, E_c, E) \end{bmatrix}$$

Donde, f_i y g_i son funciones lineales. Por lo tanto, es posible escribir esta relación como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} \\ y_1^{(3)} \\ y_1^{(4)} \\ y_1^{(5)} \\ y_1^{(6)} \\ y_2 \\ y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ E_c \\ E \end{bmatrix}$$

O de manera simplificada

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix}$$

Donde, Y_i representa el vector de salidas y sus derivadas, A es una matriz cuadrada, y X y U representan los estados y las entradas respectivamente. Al ser y_i salidas planas, entonces A es de rango completo, representando la transformación de coordenadas un diffeomorfismo entre los estados y los avances de la salida. De esta manera, es posible obtener la relación

$$\begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Tomando 4.68, se plantea tomar 2 estados de interés y generar la trayectoria para esos estados, y a partir de la solución de la ecuación diferencial resultante, obtener la trayectoria para las salidas.

La forma general de las ecuaciones diferenciales resultantes serán

$$\begin{aligned} x_a &= \alpha_m y_1^{(m)} + \alpha_{m-1} y_1^{(m-1)} + \cdots + \alpha_1 y_1^{(1)} + \alpha_0 y_1 + \\ &\quad \beta_n y_2^{(n)} + \beta_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + \beta_1 y_2^{(1)} + \beta_0 y_2 \\ x_b &= \eta_m y_1^{(m)} + \eta_{m-1} y_1^{(m-1)} + \cdots + \eta_1 y_1^{(1)} + \eta_0 y_1 + \\ &\quad \lambda_n y_2^{(n)} + \lambda_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + \lambda_1 y_2^{(1)} + \lambda_0 y_2 \end{aligned}$$

Donde, x_a y x_b son estados cualquiera del sistema, (m, n) los órdenes más altos de la derivada de las salidas (y_1, y_2) de la cual dependen los estados seleccionados, y $\alpha_i, \beta_i, \eta_i$ y λ_i son constantes pertenecientes a la matriz A^{-1} de la ecuación 4.68.

Despejando para $y_1^{(m)}$ y $y_2^{(n)}$ se obtiene un sistema de la forma.

$$\begin{aligned} y_1^{(m)} &= \kappa_0 y_1 + \kappa_1 y_1^{(1)} + \cdots + \kappa_{m-2} y_1^{(m-2)} + \kappa_{m-1} y_1^{(m-1)} + \\ &\quad \kappa_{m+1} y_2 + \kappa_{m+2} y_2^{(1)} + \cdots + \kappa_{m+n-2} y_2^{(m+n-2)} + \kappa_{m+n-1} y_2^{(m-1)} + \\ &\quad \gamma_{11} x_a + \gamma_{12} x_b \\ y_2^{(n)} &= \mu_0 y_1 + \mu_1 y_1^{(1)} + \cdots + \mu_{m-2} y_1^{(m-2)} + \mu_{m-1} y_1^{(m-1)} + \\ &\quad \mu_{m+1} y_2 + \mu_{m+2} y_2^{(1)} + \cdots + \mu_{m+n-2} y_2^{(m+n-2)} + \mu_{m+n-1} y_2^{(m-1)} + \\ &\quad \gamma_{21} x_a + \gamma_{22} x_b \end{aligned}$$

Ahora, usando la transformación siguiente

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_1^{(m)} \\ y_2 \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_2^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ z_{m+2} \\ \vdots \\ z_{m+n} \end{bmatrix}$$

Se puede expresar el sistema en forma de estados así,

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \kappa_0 & \kappa_1 & \dots & \kappa_m & \kappa_{m+1} & \kappa_{m+2} & \dots & \kappa_{m+n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_m & \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \dots & \mu_{m+n-1} \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_a \\ \mathbf{X}_b \end{bmatrix}$$

O escrito en forma abreviada

$$\dot{\mathbf{Z}} = A_z \mathbf{Z} + B_z \mathbf{X}_{ab} \quad (4.69)$$

Para valores constantes de x_a y x_b , el sistema \mathbf{Z} debe ser estable, por lo que se dice que el sistema será estable si los valores propios de la matriz A_z tienen parte real negativa.

Se encuentra que para las combinaciones de estados a los cuales se les desea imponer la trayectoria, la matrix A_z resulta tener valores propios con parte real positiva, por lo que se concluye que la obtención de la trayectoria a partir de esta estrategia no es viable debido a que el sistema resultante es de fase no mínima.

Aproximación Numérica

Se desea imponer una trayectoria a partir de polinomios de Bèzier de grados adecuados para las variables generalizadas x y θ_1 usando la metodología expuesta en 2.4, por lo que, a partir de 4.68, se obtiene la siguiente relación (abusando de la notación),

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 y_1 + \alpha_1 y_1^{(1)} + \alpha_2 y_1^{(2)} + \alpha_3 y_1^{(3)} + \beta_0 y_2 + \beta_2 y_2^{(2)} \\ \theta_1 &= \eta_0 y_1 + \eta_1 y_1^{(1)} + \eta_2 y_1^{(2)} + \eta_3 y_1^{(3)} + \lambda_0 y_2 + \lambda_2 y_2^{(2)} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Estos sistemas mostrados en la ecuación 4.70 son sistemas planos, no Liouvillianos, sin embargo, debido a que las variables x y θ_1 pueden ser expresadas en términos de funciones diferenciales de las salidas planas y_1 y y_2 es posible aplicar la metodología vista en 2.4. Es por esto que es posible generar trayectorias de las salidas a partir de trayectorias de las variables x y θ_1 . Para trayectorias dadas x^* y θ_1^* , y despejando para y_1 y y_2 se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\alpha_0} [x^* - \alpha_1 y_1^{(1)} - \alpha_2 y_1^{(2)} - \alpha_3 y_1^{(3)} - \beta_0 y_2 - \beta_2 y_2^{(2)}] \\ y_2 &= \frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^* - \eta_0 y_1 - \eta_1 y_1^{(1)} - \eta_2 y_1^{(2)} - \eta_3 y_1^{(3)} - \lambda_2 y_2^{(2)}] \end{aligned} \quad (4.71)$$

Procediendo para obtener una referencia por iteraciones numéricas se propone entonces

$$\begin{aligned} y_{1_{k+1}} &= \frac{1}{\alpha_0} [x^* - \alpha_1 y_{1_k}^{(1)} - \alpha_2 y_{1_k}^{(2)} - \alpha_3 y_{1_k}^{(3)} - \beta_0 y_{2_k} - \beta_2 y_{2_k}^{(2)}] \\ y_{2_{k+1}} &= \frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^* - \eta_0 y_{1_k} - \eta_1 y_{1_k}^{(1)} - \eta_2 y_{1_k}^{(2)} - \eta_3 y_{1_k}^{(3)} - \lambda_2 y_{2_k}^{(2)}] \end{aligned} \quad (4.72)$$

Ahora, a partir de definiciones iterativas a usando 4.72 con las siguientes condiciones iniciales:

$$y_{1_0} = 0, \quad y_{2_0} = 0 \quad (4.73)$$

Se obtiene la siguiente secuencia de ecuaciones diferenciales donde las salidas y_1 y y_2 estarán en función de las trayectorias deseadas x^* , θ_1^* y sus derivadas.

$$\begin{aligned} y_{1_0} &= 0 \\ y_{1_1} &= \frac{1}{\alpha_0} [x^*] \\ y_{1_2} &= \frac{1}{\alpha_0} \left[x^* - \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(1)*}] \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(2)*}] \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^*] \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(2)*}] \right) \right] \\ y_{1_3} &= \frac{1}{\alpha_0} [x^* \\ &\quad - \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} \left[x^{(1)*} - \alpha_1 * \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(2)*}] \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(4)*}] \right) - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(1)*}] \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(3)*}] \right) \right] \right] \\ &\quad - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} \left[x^{(2)*} - \alpha_1 * \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(4)*}] \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(5)*}] \right) - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(2)*}] \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(4)*}] \right) \right] \right] \\ &\quad - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} \left[x^{(3)*} - \alpha_1 * \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(4)*}] \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(5)*}] \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(6)*}] \right) - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(3)*}] \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(5)*}] \right) \right] \right] \\ &\quad - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} \left[\theta_1^* - \eta_0 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^*] \right) - \eta_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(1)*}] \right) - \eta_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(2)*}] \right) - \eta_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(2)*}] \right) \right] \right) \\ &\quad - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} \left[\theta_1^{(2)*} - \eta_0 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(2)*}] \right) - \eta_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \eta_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(4)*}] \right) - \eta_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(5)*}] \right) - \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(4)*}] \right) \right] \right) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2_0} &= 0 \\
y_{2_1} &= \frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^*] \\
y_{2_2} &= \frac{1}{\lambda_0} \left[\theta_1^* - \eta_0 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^*] \right) - \eta_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(1)*}] \right) - \eta_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(2)*}] \right) - \eta_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(2)*}] \right) \right] \\
y_{2_3} &= \frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^* \\
&\quad - \eta_0 \left(\frac{1}{\alpha_0} \left[x^* - \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(1)*}] \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(2)*}] \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^*] \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(2)*}] \right) \right] \right) \\
&\quad - \eta_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} \left[x^{(1)*} - \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(2)*}] \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(4)*}] \right) - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(1)*}] \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(3)*}] \right) \right] \right) \\
&\quad - \eta_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} \left[x^{(2)*} - \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(4)*}] \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(5)*}] \right) - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(2)*}] \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(4)*}] \right) \right] \right) \\
&\quad - \eta_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} \left[x^{(3)*} - \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(4)*}] \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(5)*}] \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(6)*}] \right) - \beta_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(3)*}] \right) - \beta_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(5)*}] \right) \right] \right) \\
&\quad - \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} \left[\theta_1^{(2)*} - \eta_0 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(2)*}] \right) - \eta_1 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(3)*}] \right) - \eta_2 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(4)*}] \right) - \eta_3 \left(\frac{1}{\alpha_0} [x^{(5)*}] \right) - \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_0} [\theta_1^{(4)*}] \right) \right] \right) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es posible generar las trayectorias deseadas para y_1 y y_2 tomando una iteración lo suficientemente alta $k = K$ para realizar una aproximación válida donde,

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_{1_K}(x^*, \theta_1^*, \dots, x^{(r)*}, \theta_1^{(r)*}, \dots, x^{(K)*}, \theta_1^{(K)*}) \\
y_2 &= y_{2_K}(x^*, \theta_1^*, \dots, x^{(r)*}, \theta_1^{(r)*}, \dots, x^{(K)*}, \theta_1^{(K)*})
\end{aligned}$$

Para esta simulación fue necesario sintonizar de nuevo el controlador, usando los siguientes parámetros:

$$\omega_{n1} = 0.3, \quad \zeta_1 = 1, \quad \epsilon_1 = 0.999 \quad (4.74)$$

$$\omega_{n2} = 3.5, \quad \zeta_2 = 1, \quad \epsilon_2 = 0.999 \quad (4.75)$$

En la Figura 4.11 se puede observar el seguimiento del sistema para la nueva trayectoria del sistema, la cual contiene embebida la información de las derivadas de los estados x y θ_1 los cuales, se supone, más influencia tienen en la composición de la salida y que son directamente actuados por el control.

De nuevo, se obtiene un error de magnitud pequeña para la salida y_1 el cual tenderá a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Se concluye que existe una mejora en la trayectoria generada tal que la posición del efector final se acerca a su posición deseada, pero no se logra el objetivo de posicionarlo en las coordenadas deseadas. Se observa que las coordenadas del efector final llegan a una posición relativamente igual para ambos ejes, de valor $(X_f, Y_f) = (2.291, 2.291)$, el cual difiere del valor deseado de las coordenadas planteado inicialmente $(X_f, Y_f) = (2.5, 2.5)$. Esto implica que la trayectoria generada, a pesar de ser una mejora respecto a la obtenida usando únicamente los valores iniciales y finales de las posiciones generalizadas, no posee la información suficiente para llevar el efector final a los valores deseados.

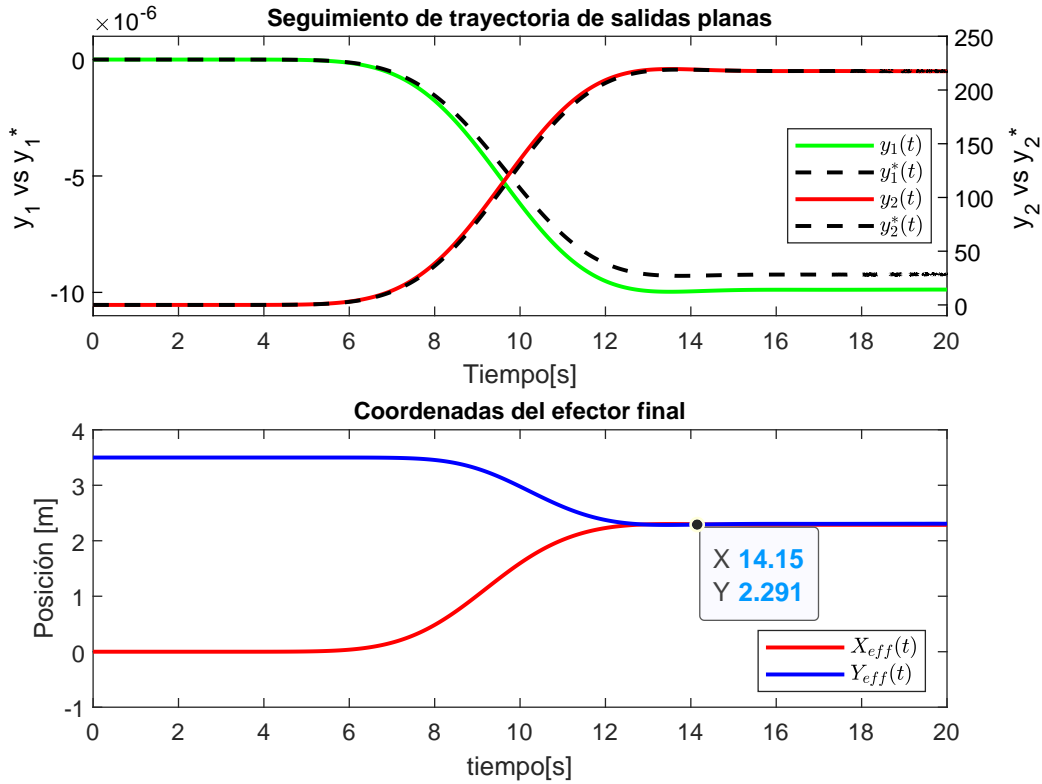


Figura 4.11: Simulación para sistema mecánico con motores E-L. Seguimiento de nueva trayectoria.

Es por esta razón que se justifica buscar una forma más eficiente y posiblemente simplificada de incluir la dinámica de los motores dentro del sistema de control, a fin de cumplir el objetivo de llevar el efector final a una posición deseada. Se concluye además que el problema de control, bajo la estrategia trabajada, se convierte en un problema de diseño de trayectorias que posean la información suficiente de la evolución de los estados que la componen, problema que no será analizado pues existen otras formas de incluir la dinámica de los motores al sistema.

4.3. Control para el manipulador móvil con motor usando acoplamiento de modelos

Al igual que se hizo con las secciones anteriores, se toma como referencia el modelo simplificado obtenido en la sección 3.3.2 para plantear el diseño del esquema ADRC.

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= \beta_{11}'' E_2 + \xi_1''(t) \\ y_2^{(6)} &= \beta_{21}'' E_2 + \beta_{22}'' E_1 + \xi_2''(t) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Considerando la forma de las constantes modificadas β_{ij} las cuales tienen producto de inductancias en el denominador, es de esperar que las constantes sean de valores demasiado

altos, volviendo el control del sistema un problema de sintonización grande. Así mismo, se pretende realizar el control bajo un modelo más simplificado para la evaluación de robustez, por lo que se justifica buscar otra alternativa para realizar el control de este modelo.

En primer lugar, se plantea hacer una separación de controles con respecto a las salidas. Esto es posible incluyendo convenientemente en las perturbaciones existentes los controles no permitan el desacoplamiento del sistema. Si se incluye el control E_2 en la perturbación ξ_2'' se modifica el sistema así,

$$\begin{aligned} y_1^{(3)}(t) &= \beta_{11}'' E_2 + \xi_1''(t) \\ y_2^{(6)}(t) &= \beta_{22}'' E_1 + \xi_2''(t) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Ahora, es posible introducir el concepto de Homotopía visto en el capítulo 2, donde se asume que las trayectorias del sistema 4.77 pueden deformarse a las trayectorias del sistema siguiente

$$\begin{aligned} y_1^{(3)}(\tau_1) &= E_2 + \tilde{\xi}_1(\tau_1, \tau_2), & \tilde{\xi}_1(\tau_1, \tau_2) &= \frac{\xi_1''(\tau_1, \tau_2)}{\beta_{11}''} \\ y_2^{(6)}(\tau_2) &= E_1 + \tilde{\xi}_2(\tau_1, \tau_2), & \tilde{\xi}_2(\tau_1, \tau_2) &= \frac{\xi_2'''(\tau_1, \tau_2)}{\beta_{22}''} \end{aligned} \quad (4.78)$$

En la cual existe una escalización del tiempo, correspondiente una transformación, tal que

$$\begin{aligned} d\tau_1 &= (\beta_{11}'')^{1/3} dt_1 \\ d\tau_2 &= (\beta_{22}'')^{1/6} dt_2 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Debido al sistema linealizado, es evidente que β_{11}'' y β_{22}'' no son dependientes del estado, por lo que la transformación temporal es lineal y la resolución de la ecuación diferencial 4.79 está dada por

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (\beta_{11}'')^{1/3} t_1 \\ \tau_2 &= (\beta_{22}'')^{1/6} t_2 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Se procede entonces con el diseño del observador tal como se ha planteado previamente, pero acorde a los órdenes de derivada del modelo.

4.3.1. Diseño del observador

Escribiendo directamente el modelo 4.78 en la forma del error de seguimiento, considerando un modelo de dinámica ideal y definiendo el error como $e_{i\delta}^{(j)} = y_{i\delta}^{(j)} - y_{i\delta}^{(j)*}$, $e_{E_2} = E_2 - E_2^*$ y $e_{E_1} = E_1 - E_1^*$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau_1} e_{1\delta}^{(0)} &= e_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_1} e_{1\delta}^{(1)} &= e_{1\delta}^{(2)} \\
\frac{d}{d\tau_1} e_{1\delta}^{(2)} &= e_{E_2} + \tilde{\xi}_1 \\
&\text{-----} \\
\frac{d}{d\tau_2} e_{2\delta}^{(0)} &= e_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_2} e_{2\delta}^{(1)} &= e_{2\delta}^{(2)} \\
\frac{d}{d\tau_2} e_{2\delta}^{(2)} &= e_{2\delta}^{(3)} \\
\frac{d}{d\tau_2} e_{2\delta}^{(3)} &= e_{2\delta}^{(4)} \\
\frac{d}{d\tau_2} e_{2\delta}^{(4)} &= e_{2\delta}^{(5)} \\
\frac{d}{d\tau_2} e_{2\delta}^{(5)} &= e_{E_1} + \tilde{\xi}_2
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Definiendo entonces el observador extendido de orden reducido, se obtiene el siguiente sistema observado:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau_1} \hat{e}_{1\delta}^{(1)} &= \hat{e}_{1\delta}^{(2)} + \lambda_{21}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{d\tau_1} \hat{e}_{1\delta}^{(2)} &= e_{E_2} + z_1 + \lambda_{11}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{d\tau_1} z_1 &= \lambda_{01}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
&\text{-----} \\
\frac{d}{d\tau_2} \hat{e}_{2\delta}^{(1)} &= \hat{e}_{2\delta}^{(2)} + \lambda_{52}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{d\tau_2} \hat{e}_{2\delta}^{(2)} &= \hat{e}_{2\delta}^{(3)} + \lambda_{42}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{d\tau_2} \hat{e}_{2\delta}^{(3)} &= \hat{e}_{2\delta}^{(4)} + \lambda_{32}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{d\tau_2} \hat{e}_{2\delta}^{(4)} &= \hat{e}_{2\delta}^{(5)} + \lambda_{22}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{d\tau_2} \hat{e}_{2\delta}^{(5)} &= e_{E_1} + z_2 + \lambda_{12}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{d\tau_2} z_2 &= \lambda_{02}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)})
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Lo cual conlleva, usando la definición del error de estimación como $\tilde{e}_{i\delta}^{(j)} = (e_{i\delta}^{(j)} - \hat{e}_{i\delta}^{(j)})$

y $e_{\xi_i} = \xi_i - z_i$, a la dinámica del error de estimación dada por,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau_1} \tilde{e}_{1\delta}^{(1)} &= \tilde{e}_{1\delta}^{(2)} - \lambda_{21} \tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_1} \tilde{e}_{1\delta}^{(2)} &= e_{\xi_1} - \lambda_{11} \tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_1} z_1 &= \lambda_{01} \tilde{e}_{1\delta}^{(1)} \\
\text{-----} \\
\frac{d}{d\tau_2} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)} &= \tilde{e}_{2\delta}^{(2)} - \lambda_{52} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_2} \tilde{e}_{2\delta}^{(2)} &= \tilde{e}_{2\delta}^{(3)} - \lambda_{42} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_2} \tilde{e}_{2\delta}^{(3)} &= \tilde{e}_{2\delta}^{(4)} - \lambda_{32} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_2} \tilde{e}_{2\delta}^{(4)} &= \tilde{e}_{2\delta}^{(5)} - \lambda_{22} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_2} \tilde{e}_{2\delta}^{(5)} &= e_{\xi_2} - \lambda_{12} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{d\tau_2} z_2 &= \lambda_{02} \tilde{e}_{\delta 2}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Donde podemos obtener de nuevo las dinámicas de error de estimación para ambos observadores como,

$$\tilde{e}_1^{(4)} + \lambda_{21} \tilde{e}_1^{(3)} + \lambda_{11} \tilde{e}_1^{(2)} + \lambda_{01} \tilde{e}_1^{(1)} = \xi_1^{(1)} \tag{4.84}$$

$$\tilde{e}_2^{(7)} + \lambda_{52} \tilde{e}_2^{(6)} + \lambda_{42} \tilde{e}_2^{(5)} + \lambda_{32} \tilde{e}_2^{(4)} + \lambda_{22} \tilde{e}_2^{(3)} + \lambda_{12} \tilde{e}_2^{(2)} + \lambda_{02} \tilde{e}_2^{(1)} = \xi_2^{(1)} \tag{4.85}$$

Con lo cual, dadas cotas superiores para las derivadas n -ésimas de las perturbaciones

$$\sup_t |\xi_i^{(n)}| = K_n, \quad n \in \{0, 1, 2, 3\} \quad i = 1, 2, \tag{4.86}$$

es posible escoger adecuadamente los valores para las constantes de los observadores $\{\lambda_{01}, \lambda_{11}, \lambda_{21}\}$ y $\{\lambda_{02}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32}, \lambda_{42}, \lambda_{52}\}$ tal que el polinomio característico de la dinámica del error de estimación sea asintóticamente exponencialmente estable. La selección de estos polinomios serán de la forma

$$p_{o1}(s) = \left(s^2 + 2s\zeta_1 \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right) + \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right)^2 \right) \left(s + \frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} \right) \tag{4.87}$$

$$p_{o2}(s) = \left(s^2 + 2s\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right) + \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon_2} \right)^2 \right)^3 \tag{4.88}$$

Llevando a los siguientes valores de las constantes de los observadores,

$$\lambda_{21} = \frac{\omega_{n1}}{\epsilon_1} + \frac{2\omega_{n1}\zeta_1}{\epsilon_1}, \quad \lambda_{11} = \frac{\omega_{n1}^2}{\epsilon_1^2} + \frac{2\omega_{n1}^2\zeta_1}{\epsilon_1^2}, \quad \lambda_{01} = \frac{\omega_{n1}^3}{\epsilon_1^3}$$

$$\lambda_{52} = \frac{6\omega_{n2}\zeta_2}{\epsilon_2}, \quad \lambda_{42} = \frac{3\omega_{n2}^2}{\epsilon_2^2} + \frac{12\omega_{n2}^2\zeta_2^2}{\epsilon_2^2}, \quad \lambda_{32} = \frac{8\omega_{n2}^3\zeta_2}{\epsilon_2^3} + \frac{2\omega_{n2}\zeta_2\left(\frac{2\omega_{n2}^2}{\epsilon_2^2} + \frac{4\omega_{n2}^2\zeta_2^2}{\epsilon_2^2}\right)}{\epsilon_2},$$

$$\lambda_{22} = \frac{\omega_{n2}^4}{\epsilon_2^4} + \frac{\omega_{n2}^2\left(\frac{2\omega_{n2}^2}{\epsilon_2^2} + \frac{4\omega_{n2}^2\zeta_2^2}{\epsilon_2^2}\right)}{\epsilon_2^2} + \frac{8\omega_{n2}^4\zeta_2^2}{\epsilon_2^4}, \quad \lambda_{12} = \frac{6\omega_{n2}^5\zeta_2}{\epsilon_2^5}, \quad \lambda_{02} = \frac{\omega_{n2}^6}{\epsilon_2^6}$$

Finalmente, es posible obtener la relación en forma de función de transferencia entre las derivadas del error de estimación y la perturbación, tal como se hizo en las secciones previas, obteniendo las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{1\delta}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \tilde{\xi}_1(s) \\ \tilde{e}_{1\delta}^{(2)}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{21})}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \tilde{\xi}_1(s) \\ \tilde{e}_{\tilde{\xi}_1}(s) &= \left[\frac{s(s^2 + \lambda_{21}s + \lambda_{11})}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \tilde{\xi}_1(s) \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) \\ \tilde{e}_{2\delta}^{(2)}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{52})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) \\ \tilde{e}_{2\delta}^{(3)}(s) &= \left[\frac{s(s^2 + \lambda_{52}s + \lambda_{42})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) \\ \tilde{e}_{\tilde{\xi}_2}(s) &= \left[\frac{s(s^3 + \lambda_{52}s^2 + \lambda_{42}s + \lambda_{32})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) \end{aligned} \quad (4.90)$$

4.3.2. Diseño del controlador

Se plantea una ley de control que sea proporcional a los estados del error estimados, al error de la salida que puede ser medido y a la estimación de la perturbación a fin de realizar una cancelación. Esta ley de control tiene la siguiente forma para cada controlador.

$$e_{E_2} = -\gamma_{21}\hat{e}_{1\delta}^{(2)} - \gamma_{11}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} - z_1 \quad (4.91)$$

$$\beta_{22}''e_{E_1} = -\gamma_{52}\hat{e}_{2\delta}^{(5)} - \gamma_{42}\hat{e}_{2\delta}^{(4)} - \gamma_{32}\hat{e}_{2\delta}^{(3)} - \gamma_{22}\hat{e}_{2\delta}^{(2)} - \gamma_{12}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} - \gamma_{02}e_{2\delta}^{(0)} - z_2 \quad (4.92)$$

Para el primer controlador, es posible cerrar el lazo de control a partir de las ecuaciones mostradas en 4.81. Tomando en cuenta las relaciones $\hat{e}_{1\delta}^{(i)} = e_{1\delta}^{(i)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(i)}$ y $e_{\xi_1} = \tilde{\xi}_1 - z_1$, se obtiene el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau_1}e_{1\delta}^{(2)} &= -\gamma_{21}\hat{e}_{1\delta}^{(2)} - \gamma_{11}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} - z_1 + \tilde{\xi}_1 \\ \frac{d}{d\tau_1}e_{1\delta}^{(2)} &= -\gamma_{21}(e_{1\delta}^{(2)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(2)}) - \gamma_{11}(e_{1\delta}^{(1)} - \tilde{e}_{1\delta}^{(1)}) - \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)} - z_1 + \tilde{\xi}_1\end{aligned}\quad (4.93)$$

Aplicando la transformada de Laplace obtenemos,

$$[s^3 + \gamma_{21}s^2 + \gamma_{11}s + \gamma_{01}]e_{1\delta} = \gamma_{21}\tilde{e}_{1\delta}^{(2)} + \gamma_{11}\tilde{e}_{1\delta}^{(1)} + \gamma_{01}e_{1\delta}^{(0)}e_{\xi_1}$$

Reemplazando los valores obtenidos en 4.89 obtenemos

$$e_{1\delta}(s) = \left[\frac{s + s(s + \lambda_{21}) + s(s^2 + \lambda_{21}s + \lambda_{11})}{(s^3 + \gamma_{21}s^2 + \gamma_{11}s + \gamma_{01})(s^3 + \lambda_{21}s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01})} \right] \tilde{\xi}_1(s) \quad (4.94)$$

El cual puede ser reescrito como

$$e_{1\delta}(s) = \left[\frac{s^3 + \kappa_{51}s^2 + \kappa_{41}s}{s^6 + \kappa_{51}s^5 + \kappa_{41}s^4 + \kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}} \right] \tilde{\xi}_1(s) \quad (4.95)$$

Donde,

$$\begin{aligned}\kappa_{01} &= \gamma_{01} \lambda_{01} \\ \kappa_{11} &= \gamma_{01} \lambda_{11} + \gamma_{11} \lambda_{01} \\ \kappa_{21} &= \gamma_{01} \lambda_{21} + \gamma_{11} \lambda_{11} + \gamma_{21} \lambda_{01} \\ \kappa_{31} &= \gamma_{01} + \lambda_{01} + \gamma_{11} \lambda_{21} + \gamma_{21} \lambda_{11} \\ \kappa_{41} &= \gamma_{11} + \lambda_{11} + \gamma_{21} \lambda_{21} \\ \kappa_{51} &= \gamma_{21} + \lambda_{21}\end{aligned}$$

Realizando el mismo proceso con el segundo sistema de control, es posible cerrar el lazo a partir de 4.81, y recordando que $\hat{e}_{2\delta}^{(i)} = e_{2\delta}^{(i)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(i)}$ y $e_{\xi_2} = \tilde{\xi}_2 - z_2$, se obtiene,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau_2}e_{2\delta}^{(5)} &= -\gamma_{52}\hat{e}_{2\delta}^{(5)} - \gamma_{42}\hat{e}_{2\delta}^{(4)} - \gamma_{32}\hat{e}_{2\delta}^{(3)} - \gamma_{22}\hat{e}_{2\delta}^{(2)} - \gamma_{12}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} - \gamma_{02}e_{2\delta}^{(0)} - z_2 + \tilde{\xi}_2 \\ \frac{d}{d\tau_2}e_{2\delta}^{(5)} &= -\gamma_{52}(e_{2\delta}^{(5)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(5)}) - \gamma_{42}(e_{2\delta}^{(4)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(4)}) - \gamma_{32}(e_{2\delta}^{(3)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(3)}) - \gamma_{22}(e_{2\delta}^{(2)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(2)}) \\ &\quad - \gamma_{12}(e_{2\delta}^{(1)} - \tilde{e}_{2\delta}^{(1)}) - \gamma_{02}e_{2\delta}^{(0)} + e_{\xi_2}\end{aligned}$$

De nuevo, obteniendo la transformada de Laplace se llega a

$$\begin{aligned}[s^6 + \gamma_{52}s^5 + \gamma_{42}s^4 + \gamma_{32}s^3 + \gamma_{22}s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{02}]e_{2\delta}(s) \\ = \gamma_{52}\tilde{e}_{2\delta}^{(5)}(s) + \gamma_{42}\tilde{e}_{2\delta}^{(4)}(s) + \gamma_{32}\tilde{e}_{2\delta}^{(3)}(s) + \gamma_{22}\tilde{e}_{2\delta}^{(2)}(s) + \gamma_{12}\tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) + e_{\xi_2}(s)\end{aligned}\quad (4.96)$$

Reemplazando los valores obtenidos en 4.90 obtenemos

$$\begin{aligned}
[s^6 + \gamma_{52}s^5 + \gamma_{42}s^4 + \gamma_{32}s^3 + \gamma_{22}s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{02}]e_{2\delta}(s) = & \\
\left[\frac{\gamma_{12}s}{s^6 + \lambda_{52}s^5 + \lambda_{42}s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) + & \\
\left[\frac{\gamma_{22}s(s + \lambda_{52})}{s^6 + \lambda_{52}s^5 + \lambda_{42}s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) + & \\
\left[\frac{\gamma_{32}s(s^2 + \lambda_{52}s + \lambda_{42})}{s^6 + \lambda_{52}s^5 + \lambda_{42}s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) + & \quad (4.97) \\
\left[\frac{\gamma_{42}s(s^3 + \lambda_{52}s^2 + \lambda_{42}s + \lambda_{32})}{s^6 + \lambda_{52}s^5 + \lambda_{42}s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) + & \\
\left[\frac{\gamma_{52}s(s^4 + \lambda_{52}s^3 + \lambda_{42}s^2 + \lambda_{32}s + \lambda_{22})}{s^6 + \lambda_{52}s^5 + \lambda_{42}s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) + & \\
\left[\frac{s(s^5 + \lambda_{52}s^4 + \lambda_{42}s^3 + \lambda_{32}s^2 + \lambda_{22}s + \lambda_{12})}{s^6 + \lambda_{52}s^5 + \lambda_{42}s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \tilde{\xi}_2(s) &
\end{aligned}$$

El cual puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\frac{e_{2\delta}(s)}{\tilde{\xi}_2(s)} = & \\
\left[\frac{s^6 + \kappa_{112}s^5 + \kappa_{102}s^4 + \kappa_{92}s^3 + \kappa_{82}s^2 + \kappa_{72}s}{s^{12} + \kappa_{112}s^{11} + \kappa_{102}s^{10} + \kappa_{92}s^9 + \kappa_{82}s^8 + \kappa_{72}s^7 + \kappa_{62}s^6 + \kappa_{52}s^5 + \kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}} \right] & \quad (4.98)
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\kappa_{02} &= \gamma_{01} \lambda_{02} \\
\kappa_{12} &= \gamma_{01} \lambda_{12} + \gamma_{11} \lambda_{02} \\
\kappa_{22} &= \gamma_{01} \lambda_{22} + \gamma_{11} \lambda_{12} + \gamma_{21} \lambda_{02} \\
\kappa_{32} &= \gamma_{01} \lambda_{32} + \gamma_{11} \lambda_{22} + \gamma_{21} \lambda_{12} + \gamma_{31} \lambda_{02} \\
\kappa_{42} &= \gamma_{01} \lambda_{42} + \gamma_{11} \lambda_{32} + \gamma_{21} \lambda_{22} + \gamma_{31} \lambda_{12} + \gamma_{41} \lambda_{02} \\
\kappa_{52} &= \gamma_{01} \lambda_{52} + \gamma_{11} \lambda_{42} + \gamma_{21} \lambda_{32} + \gamma_{31} \lambda_{22} + \gamma_{41} \lambda_{12} + \gamma_{51} \lambda_{02} \\
\kappa_{62} &= \gamma_{01} + \lambda_{02} + \gamma_{11} \lambda_{52} + \gamma_{21} \lambda_{42} + \gamma_{31} \lambda_{32} + \gamma_{41} \lambda_{22} + \gamma_{51} \lambda_{12} \\
\kappa_{72} &= \gamma_{11} + \lambda_{12} + \gamma_{21} \lambda_{52} + \gamma_{31} \lambda_{42} + \gamma_{41} \lambda_{32} + \gamma_{51} \lambda_{22} \\
\kappa_{82} &= \gamma_{21} + \lambda_{22} + \gamma_{31} \lambda_{52} + \gamma_{41} \lambda_{42} + \gamma_{51} \lambda_{32} \\
\kappa_{92} &= \gamma_{31} + \lambda_{32} + \gamma_{41} \lambda_{52} + \gamma_{51} \lambda_{42} \\
\kappa_{102} &= \gamma_{41} + \lambda_{42} + \gamma_{51} \lambda_{52} \\
\kappa_{112} &= \gamma_{51} + \lambda_{52}
\end{aligned}$$

La escogencia de los polinomios para los controladores es tal que el sistema de control sea asintóticamente estable y el seguimiento sea ideal. Es por esto que se seleccionan los siguientes polinomios,

$$p_{c1}(s) = (s^2 + 2s\zeta_1\omega_{n1} + \omega_{n1}^2)(s + \omega_{n1}) \quad (4.99)$$

$$p_{c2}(s) = (s^2 + 2s\zeta_2\omega_{n2} + \omega_{n2}^2)^3 \quad (4.100)$$

Llevando a los siguientes valores de las constantes de los controladores,

$$\gamma_{21} = 2\zeta_1\omega_{n1}, \quad \gamma_{11} = 2\zeta_1\omega_{n1}, \quad \gamma_{01} = \omega_{n1}^2$$

$$\begin{aligned} \gamma_{52} &= 6\omega_{n2}\zeta_2, & \gamma_{42} &= 12\omega_{n2}^2\zeta_2^2 + 3\omega_{n2}^2, & \gamma_{32} &= 8\omega_{n2}^3\zeta_2 + 2\omega_{n2}\zeta_2(4\omega_{n2}^2\zeta_2^2 + 2\omega_{n2}^2), \\ \gamma_{22} &= 8\omega_{n2}^4\zeta_2^2 + \omega_{n2}^2(4\omega_{n2}^2\zeta_2^2 + 2\omega_{n2}^2) + \omega_{n2}^4, & \gamma_{12} &= 6\omega_{n2}^5\zeta_2, & \gamma_{02} &= \omega_{n2}^6 \end{aligned}$$

Una vez más, obtenemos la forma de la función de transferencia para el término $\beta K(s)$ como se vio en secciones pasadas obteniendo las relaciones entre el error del control y el error de seguimiento. Estas resultan ser

$$e_{E_2}(s) = -\frac{\kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(s^2 + \kappa_{51}s + \kappa_{41})}e_{1\delta}(s) \quad (4.101)$$

$$e_{E_1}(s) = -\frac{\kappa_{62}s^6 + \kappa_{52}s^5 + \kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(s^5 + \kappa_{112}s^4 + \kappa_{102}s^3 + \kappa_{92}s^2 + \kappa_{82}s + \kappa_{72})}e_{2\delta}(s) \quad (4.102)$$

Ahora, recordando las definiciones del error de seguimiento $e_{i\delta}^{(j)} = y_{i\delta}^{(j)} - y_{i\delta}^{(j)*}$, $e_{E_2} = E_2 - E_2^*$ y $e_{E_1} = E_1 - E_1^*$ obtenemos en forma matricial

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2(s) \\ E_1(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_2^*(s) - \frac{\kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(s^2 + \kappa_{51}s + \kappa_{41})}(y_{1\delta}(s) - y_{1\delta}(s)^*) \\ E_1^*(s) - \frac{\kappa_{62}s^6 + \kappa_{52}s^5 + \kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(s^5 + \kappa_{112}s^4 + \kappa_{102}s^3 + \kappa_{92}s^2 + \kappa_{82}s + \kappa_{72})}(y_{2\delta}(s) - y_{2\delta}(s)^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.103)$$

La cual puede ser reescrita poniendo la ley de control en función de la trayectoria deseada como,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ E_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{1\delta}(s)^{(3)*} - \frac{\kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(s^2 + \kappa_{51}s + \kappa_{41})}(y_{1\delta} - y_{1\delta}^*) \\ y_{2\delta}(s)^{(6)*} - \frac{\kappa_{62}s^6 + \kappa_{52}s^5 + \kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(s^5 + \kappa_{112}s^4 + \kappa_{102}s^3 + \kappa_{92}s^2 + \kappa_{82}s + \kappa_{72})}(y_{2\delta} - y_{2\delta}^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.104)$$

4.3.3. Simulaciones

Una vez más se plantea un objetivo de control de seguimiento de trayectoria junto con una estabilización en un punto espacial dado por las coordenadas del efector final. Para la trayectoria se plantea un polinomio de Bèzier de grado suficiente según los grados relativos del sistema, usando la metodología mostrada en el Apéndice A. La trayectoria se genera entonces usando valores iniciales y finales del efector final y, a través de la cinemática inversa, usando los valores iniciales y finales de las variables generalizadas. Debido a que el proceso de homotopía no cambia los valores de las variables generalizadas sino que implica una escalización del tiempo, se pueden definir los mismos valores que se han estado trabajando en las previas simulaciones así:

$$\begin{aligned}x_i &= 0, \theta_{1i} = 0, \theta_{2i} = 0 \\ \dot{x}_i &= 0, \dot{\theta}_{1i} = 0, \dot{\theta}_{2i} = 0 \\ X_i &= 0, Y_i = 0\end{aligned}$$

Generando un valor inicial de las salidas planas de $(y_1, y_2) = (0, 0)$, mientras que para los valores finales de las salidas se proponen $(X_f, Y_f) = (2.5, 2.5)$, equivaliendo a los valores finales de las posiciones generalizadas y salidas planas así

$$x_f = 0.139, \theta_{1f} = 0.593, \theta_{2f} = 0.974, y_1 = 216.75, y_2 = 77.37$$

Así mismo, para la sintonización del controlador se usaron los siguientes parámetros:

$$\omega_{n1} = 2, \quad \zeta_1 = 1, \quad \epsilon_1 = 0.9 \quad (4.105)$$

$$\omega_{n2} = 5, \quad \zeta_2 = 1, \quad \epsilon_2 = 0.1 \quad (4.106)$$

Se usan los mismos valores de la simulación presentada en el capítulo 4.2.3

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
M	400[Kg]	L_{m1}	0.658 [mH]
m_1	100[Kg]	k_{m1}	3.61 [N · m/A]
m_2	50[Kg]	B_{m1}	0.1[N · m · s]
l_{c1}	0.75[m]	J_{m1}	0.01[Kg · m ²]
L_1	2[m]	R_{m1}	1.76[Ω]
l_{c2}	0.75[m]	L_{m2}	0.658[mH]
L_2	1.5[m]	k_{m2}	3.61[N · m/A]
k	800[N · m/rad]	B_{m2}	0.1[N · m · s]
g	9.85[m/s ²]	J_{m2}	0.01[Kg · m ²]
I_1	0.5[Kg · m ²]	R_{m1}	1.76[Ω]
I_2	0.3[Kg · m ²]	R_t	0.25[m]

Tabla 4.3: Parametros de la planta usados para la simulación usando acoplamiento de modelos

El objetivo de esta sección es demostrar que existe una trayectoria en el espacio de estado del sistema homótopo, tal que pueda ser deformada sobre una variedad S que interseca el espacio de estado del sistema original, hasta que posea la forma de la trayectoria del sistema original. Para cumplir este propósito, se debió escalar la trayectoria generada para el sistema en concordancia con la escalización de la variable temporal.

A continuación, en la Figura 4.12 se puede observar el seguimiento de trayectorias para las salidas y_1 y y_2 . Adicionalmente se presenta la señal de control del sistema y las trayectorias seguidas por cada posición generalizada en la Figura 4.13.

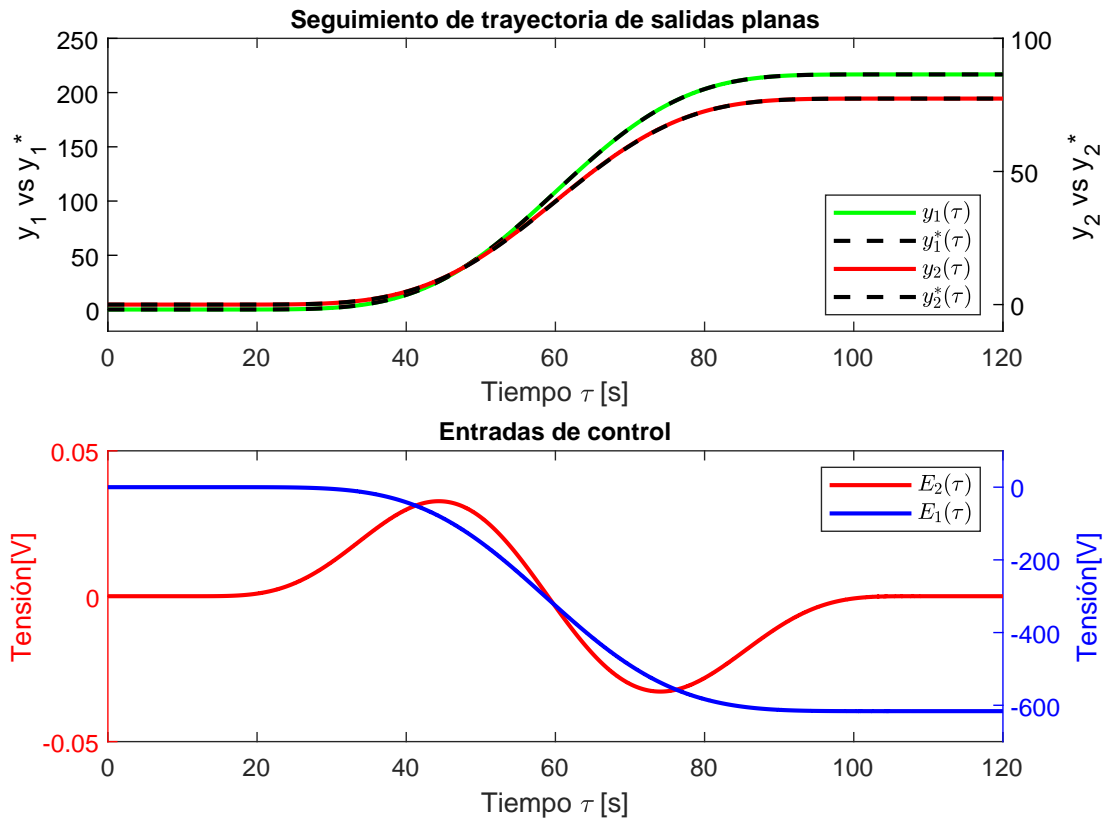


Figura 4.12: Simulación para sistema mecánico con motores, homótopo. Seguimiento de trayectoria.

Es posible observar que el seguimiento de trayectoria se cumple para el sistema homótopo, conservando el comportamiento deseado para el sistema. Esto permite afirmar que, bajo la transformación temporal, existe una trayectoria que corresponde con el sistema original tal que el seguimiento de trayectoria del sistema original se cumple. Así mismo, se observan curvas suaves para las señales de control que permiten el seguimiento de trayectoria, sin oscilaciones ni comportamientos indeseados. A pesar del buen resultado, las ganancias obtenidas β_i generan problemas de sintonización en el sistema original debido a sus altos valores, provocando una alta sensibilidad al cambio de las ganancias del observador y el controlador del sistema. Esta problemática sugiere la posibilidad de explorar diferentes técnicas para la inclusión de las dinámicas de los motores.

Así como se cumple el objetivo de seguimiento de trayectoria para el sistema homótopo, el objetivo de llevar la posición del efector final a un punto deseado del espacio se cumple tal como se observa en la Figura 4.13. Se puede apreciar que no existen variaciones inesperadas o indeseadas en las trayectorias de los estados posición y, consecuentemente, en las trayectorias del efector final. En conclusión, el esquema de control aplicado al sistema homótopo cumple a cabalidad el objetivo de control.

A pesar de los buenos resultados obtenidos con este esquema, la sintonización del sistema original se complica debido a los valores de las inductancias de armadura de los motores que amplifican de gran manera las ganancias de los controles, tal como se vio en el modelo obtenido, se obtienen productos de inductancias en los denominadores de dichas ganancias.

En el motor de corriente continua, la dinámica eléctrica es significativamente más rápida que la mecánica, motivo por el cual es razonable interpretar el motor como un sistema de primer orden, ignorando la dinámica eléctrica, y diseñar el esquema de control a partir de la dinámica simplificada tal como se muestra en la siguiente sección.

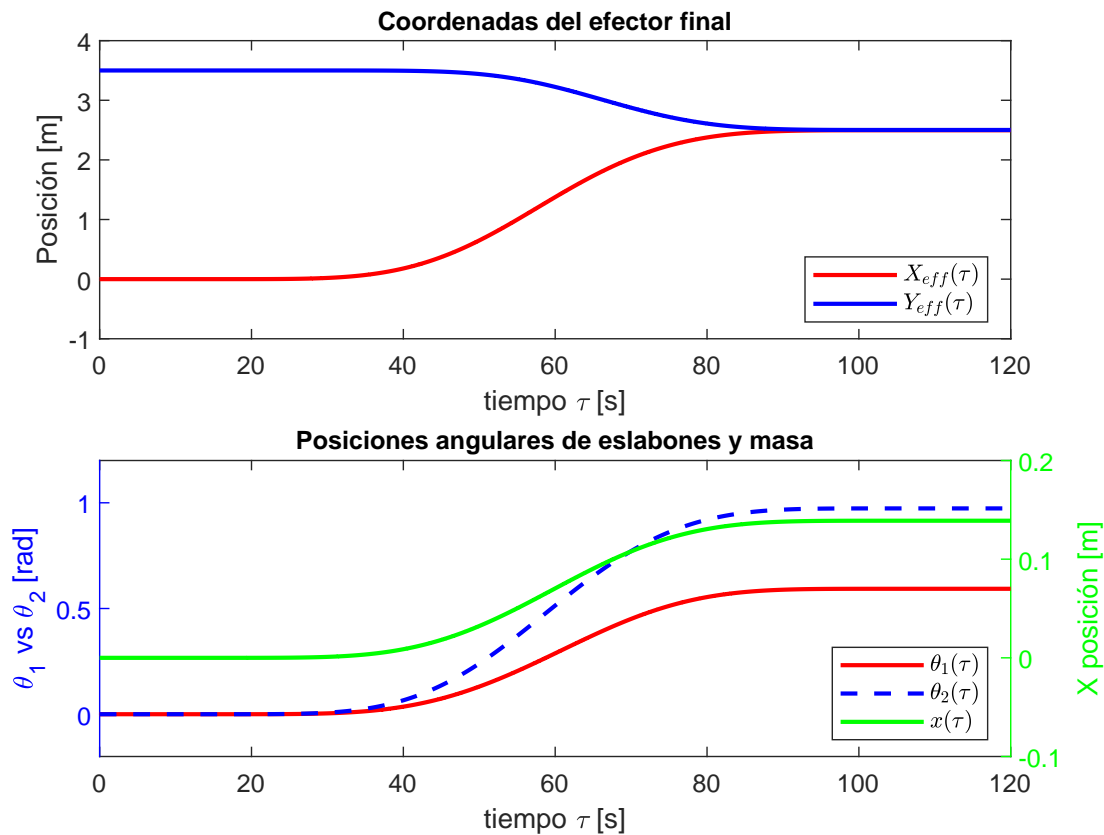


Figura 4.13: Simulación para sistema mecánico con motores, homótopo. Variables Generalizadas.

4.4. Control para el manipulador móvil con motor usando acomplamiento de modelos simplificado

De nuevo, usando como referencia el sistema final obtenido en la sección 3.4.2, se plantea de nuevo un esquema de rechazo activo de perturbaciones.

$$\begin{aligned} y_{1\delta}^{(2)} &= \beta_{11}^* E_2 + \xi_1 \\ y_{2\delta}^{(4)} &= \beta_{21}^* E_2 + \beta_{22}^* E_1 + \xi_2 \end{aligned} \quad (4.107)$$

A continuación se presentarán, usando la misma metodología de la sección 4.1, el diseño del observador y del controlador del esquema ADRC.

4.4.1. Diseño del observador

Escribiendo el modelo 4.107 en la forma canónica de Isidori, se obtiene el siguiente esquema,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_{1\delta}^{(0)} &= y_{1\delta}^{(1)} \\ \frac{d}{dt} y_{1\delta}^{(1)} &= \beta_{11}^* E_2 + \xi_1 \\ \hline \frac{d}{dt} y_{2\delta}^{(0)} &= y_{2\delta}^{(1)} \\ \frac{d}{dt} y_{2\delta}^{(1)} &= y_{2\delta}^{(2)} \\ \frac{d}{dt} y_{2\delta}^{(2)} &= y_{2\delta}^{(3)} \\ \frac{d}{dt} y_{2\delta}^{(3)} &= \beta_{21}^* E_2 + \beta_{22}^* E_1 + \xi_2 \end{aligned} \quad (4.108)$$

Si definimos la dinámica del error de seguimiento, dado por $e_{i\delta}^{(j)} = y_{i\delta}^{(j)} - y_{i\delta}^{(j)*}$, $e_{E_2} = E_2 - E_2^*$ y $e_{E_1} = E_1 - E_1^*$ y conociendo que la dinámica ideal de seguimiento de trayectoria es idéntica a la presentada en 4.108 pero sin perturbaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(0)} &= e_{1\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}e_{1\delta}^{(1)} &= e_F + \xi_1 \\
- - - - - \\
\frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(0)} &= e_{2\delta}^{(1)} \\
\frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(1)} &= e_{2\delta}^{(2)} \\
\frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(2)} &= e_{2\delta}^{(3)} \\
\frac{d}{dt}e_{2\delta}^{(3)} &= \beta_{21}e_F + \beta_{22}e_\tau + \xi_2
\end{aligned} \tag{4.109}$$

De igual manera que se ha trabajado en el capítulo, se puede definir el esquema del observador de los estados $e_{i\delta}^{(j)}$ y la estimación de las perturbaciones z_k , como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{e}_{1\delta}^{(1)} &= \beta_{11}^*e_{E_1} + z_1 + \lambda_{11}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}z_1 &= \lambda_{01}(e_{1\delta}^{(1)} - \hat{e}_{1\delta}^{(1)}) \\
- - - - - \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{2\delta}^{(1)} &= \hat{e}_{2\delta}^{(2)} + \lambda_{32}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{2\delta}^{(2)} &= \hat{e}_{2\delta}^{(3)} + \lambda_{22}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}\hat{e}_{2\delta}^{(3)} &= \beta_{21}^*e_{E_1} + \beta_{22}^*e_{E_2} + z_2 + \lambda_{12}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)}) \\
\frac{d}{dt}z_2 &= \lambda_{02}(e_{2\delta}^{(1)} - \hat{e}_{2\delta}^{(1)})
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Siguiendo el proceso de definir el error de estimación, se puede llegar a las dinámicas del error de estimación las cuales satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales lineales perturbadas

$$\tilde{e}_1^{(3)} + \lambda_{11}\tilde{e}_1^{(2)} + \lambda_{01}\tilde{e}_1^{(1)} = \xi_1^{(1)} \tag{4.111}$$

$$\tilde{e}_2^{(5)} + \lambda_{32}\tilde{e}_2^{(4)} + \lambda_{22}\tilde{e}_2^{(3)} + \lambda_{12}\tilde{e}_2^{(2)} + \lambda_{02}\tilde{e}_2^{(1)} = \xi_2^{(1)} \tag{4.112}$$

Por lo tanto, dadas cotas superiores para las derivadas n -ésimas de las perturbaciones

$$\sup_t |\xi_i^{(n)}| = K_n, \quad n \in \{0, 1, 2, 3\} \quad i = 1, 2, \tag{4.113}$$

es posible escoger adecuadamente los valores para las constantes de los observadores $\{\lambda_{01}, \lambda_{11}\}$ y $\{\lambda_{02}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32}\}$ tal que el polinomio característico de la dinámica del error de estimación sea asintóticamente exponencialmente estable. La selección de estos polinomios serán de la forma

$$p_{o1}(s) = \left(s^2 + 2s\zeta_1 \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon} \right) + \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon} \right)^2 \right) \quad (4.114)$$

$$p_{o2}(s) = \left(s^2 + 2s\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon} \right) + \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon} \right)^2 \right)^2 \quad (4.115)$$

Derivando en los siguientes valores de las constantes de los observadores,

$$\lambda_{11} = 2\zeta_1 \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon} \right) \quad \lambda_{01} = \left(\frac{\omega_{n1}}{\epsilon} \right)^2$$

$$\lambda_{32} = 4\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon} \right) \quad \lambda_{22} = 2(2\zeta_2^2 + 1) \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon} \right)^2 \quad \lambda_{12} = 4\zeta_2 \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon} \right)^3 \quad \lambda_{02} = \left(\frac{\omega_{n2}}{\epsilon} \right)^4$$

Como se vio previamente, este tipo de esquema nos lleva a una relación, en el dominio de la frecuencia, entre los errores de estimación y la perturbación de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{1\delta}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_1(s) \\ \tilde{e}_{\xi_1}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{11})}{s^2 + \lambda_{11}s + \lambda_{01}} \right] \xi_1(s) \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{2\delta}^{(1)}(s) &= \left[\frac{s}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \\ \tilde{e}_{2\delta}^{(2)}(s) &= \left[\frac{s(s + \lambda_{32})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \\ \tilde{e}_{2\delta}^{(3)}(s) &= \left[\frac{s(s^2 + \lambda_{32}s + \lambda_{22})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \\ \tilde{e}_{\xi_2}(s) &= \left[\frac{s(s^3 + \lambda_{32}s^2 + \lambda_{22}s + \lambda_{12})}{s^4 + \lambda_{32}s^3 + \lambda_{22}s^2 + \lambda_{12}s + \lambda_{02}} \right] \xi_2(s) \end{aligned} \quad (4.117)$$

4.4.2. Diseño del controlador

Planteando de nuevo las leyes de control en función de una realimentación de los estados estimados y de la salida plana del sistema es posible realizar la tarea de seguimiento de trayectoria como se ha visto en las secciones previas. Dichas leyes de control están propuestas de la siguiente manera,

$$\beta_{11}^* e_{E_2} = -\gamma_{11} \hat{e}_{1\delta}^{(1)} - \gamma_{01} e_{1\delta}^{(0)} - z_1 \quad (4.118)$$

$$\beta_{22}^* e_{E_1} = -\gamma_{32} \hat{e}_{2\delta}^{(3)} - \gamma_{22} \hat{e}_{2\delta}^{(2)} - \gamma_{12} \hat{e}_{2\delta}^{(1)} - \gamma_{02} e_{2\delta}^{(0)} - z_2 - \beta_{21}^* e_{E_2} \quad (4.119)$$

Cerrando el lazo y bajo las mismas manipulaciones realizadas en la sección 4.1 es posible llegar a la forma frecuencial del controlador como sigue

$$e_{1\delta}(s) = \left[\frac{s^2 + \kappa_{31}s}{s^4 + \kappa_{31}s^3 + \kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}} \right] \xi_1(s) \quad (4.120)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \kappa_{01} &= \lambda_{01}\gamma_{01} \\ \kappa_{11} &= \lambda_{01}\gamma_{11} + \lambda_{11}\gamma_{01} \\ \kappa_{21} &= \lambda_{01} + \lambda_{11}\gamma_{11} + \gamma_{01} \\ \kappa_{31} &= \lambda_{11} + \gamma_{11} \end{aligned}$$

$$e_{2\delta}(s) = \left[\frac{s^4 + \kappa_{72}s^3 + \kappa_{62}s^2 + \kappa_{52}s}{s^8 + \kappa_{72}s^7 + \kappa_{62}s^6 + \kappa_{52}s^5 + \kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}} \right] \xi_2(s) \quad (4.121)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \kappa_{02} &= \gamma_{02} \lambda_{02} \\ \kappa_{12} &= \gamma_{02} \lambda_{12} + \gamma_{12} \lambda_{02} \\ \kappa_{22} &= \gamma_{02} \lambda_{22} + \gamma_{12} \lambda_{12} + \gamma_{22} \lambda_{02} \\ \kappa_{32} &= \gamma_{02} \lambda_{32} + \gamma_{12} \lambda_{22} + \gamma_{22} \lambda_{12} + \gamma_{32} \lambda_{02} \\ \kappa_{42} &= \gamma_{02} + \lambda_{02} + \gamma_{12} \lambda_{32} + \gamma_{22} \lambda_{22} + \gamma_{32} \lambda_{12} \\ \kappa_{52} &= \gamma_{12} + \lambda_{12} + \gamma_{22} \lambda_{32} + \gamma_{32} \lambda_{22} \\ \kappa_{62} &= \gamma_{22} + \lambda_{22} + \gamma_{32} \lambda_{32} \\ \kappa_{72} &= \gamma_{32} + \lambda_{32} \end{aligned}$$

De nuevo, se pueden escoger ganancias del controlador para que el sistema de control sea asintóticamente exponencialmente estable. Se seleccionan entonces los polinomios así,

$$p_{c1}(s) = (s^2 + 2s\zeta_1\omega_{n1} + \omega_{n1}^2) \quad p_{c2}(s) = (s^2 + 2s\zeta_2\omega_{n2} + \omega_{n2}^2)^2 \quad (4.122)$$

Llevando a los siguientes valores de las constantes de los controladores,

$$\gamma_{11} = 2\zeta_1\omega_{n1} \quad \gamma_{01} = \omega_{n1}^2$$

$$\gamma_{32} = 4\zeta_2\omega_{n2} \quad \gamma_{22} = 2(2\zeta_2^2 + 1)\omega_{n2}^2 \quad \gamma_{12} = 4\zeta_2\omega_{n2}^3 \quad \gamma_{02} = \omega_{n2}^4$$

Donde las ecuaciones 4.120 y 4.121 representan la función de sensibilidad a la perturbación. Ahora, calculando la ley de control en forma frecuencial usando el mismo procedimiento visto en secciones previas, se obtiene,

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}^* & 0 \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1\delta}^{(2)*} - \frac{\kappa_{21}s^2 + \kappa_{11}s + \kappa_{01}}{s(\kappa_{31} + s)}(y_{1\delta} - y_{1\delta}^*) \\ y_{2\delta}^{(4)*} - \frac{\kappa_{42}s^4 + \kappa_{32}s^3 + \kappa_{22}s^2 + \kappa_{12}s + \kappa_{02}}{s(s^3 + \kappa_{72}s^2 + \kappa_{62}s + \kappa_{52})}(y_{2\delta} - y_{2\delta}^*) \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

4.4.3. Simulaciones

Tal como se ha trabajado en las secciones previas, es posible plantear la simulación del sistema pretendiendo una tarea de control de seguimiento de trayectoria implicando un posicionamiento del efector final en unas coordenadas deseadas. Se usa una trayectoria tipo descanso-descanso a partir de un polinomio de Bèzier usando el procedimiento del Apéndice A. Como se ha visto, los valores iniciales y finales de la trayectoria dependerán de los valores iniciales y finales de las coordenadas del efector final, y por consecuencia, de las variables generalizadas. Se escogen entonces los siguientes valores

$$\begin{aligned}x_i &= 0, \theta_{1i} = 0, \theta_{2i} = 0 \\ \dot{x}_i &= 0, \dot{\theta}_{1i} = 0, \dot{\theta}_{2i} = 0 \\ X_i &= 0, Y_i = 0\end{aligned}$$

Correspondientes a valores iniciales de las salidas planas de $(y_1, y_2) = (0, 0)$. Por otro lado, para el posicionamiento del efector final se propone $(X_f, Y_f) = (2.5, 2.5)$, generando los siguientes valores para las variables generalizadas y las salidas planas

$$x_f = 0.139, \theta_{1f} = 0.593, \theta_{2f} = 0.974, y_1 = 216.75, y_2 = 77.37$$

Finalmente, el sistema de control se sintonizó usando los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}\omega_{n1} &= 12, \quad \zeta_1 = 1, \quad \epsilon_1 = 0.9 \\ \omega_{n2} &= 12, \quad \zeta_2 = 1, \quad \epsilon_2 = 0.1\end{aligned}\tag{4.124}$$

De igual manera, se presentan los valores de simulación utilizados en la tabla 4.4.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
M	400[Kg]	L_{m1}	0.658 [mH]
m_1	100[Kg]	k_{m1}	3.61 [N · m/A]
m_2	50[Kg]	B_{m1}	0.1[N · m · s]
l_{c1}	0.75[m]	J_{m1}	0.01[Kg · m ²]
L_1	2[m]	R_{m1}	1.76[Ω]
l_{c2}	0.75[m]	L_{m2}	0.658[mH]
L_2	1.5[m]	k_{m2}	3.61[N · m/A]
k	800[N · m/rad]	B_{m2}	0.1[N · m · s]
g	9.85[m/s ²]	J_{m2}	0.01[Kg · m ²]
I_1	0.5[Kg · m ²]	R_{m1}	1.76[Ω]
I_2	0.3[Kg · m ²]	R_t	0.25[m]

Tabla 4.4: Parametros de la planta usados para la simulación usando acoplamiento de modelos simplificado.

Se notará la similitud respecto a los valores de las salidas planas de la sección presente respecto a la simulación del sistema mecánico sin motores. Esto es debido a que la propuesta del sistema de control es independiente de la forma de las salidas planas y, debido a que las salidas planas para ambos sistemas son equivalentes, sus valores deberán

serlo también. Así mismo ocurre con los valores de las posiciones generalizadas, los cuales dependen de la cinemática inversa del sistema y, a partir de la selección de los mismos puntos de llegada del efector final, las posiciones generalizadas deberán llegar entonces a los mismos valores.

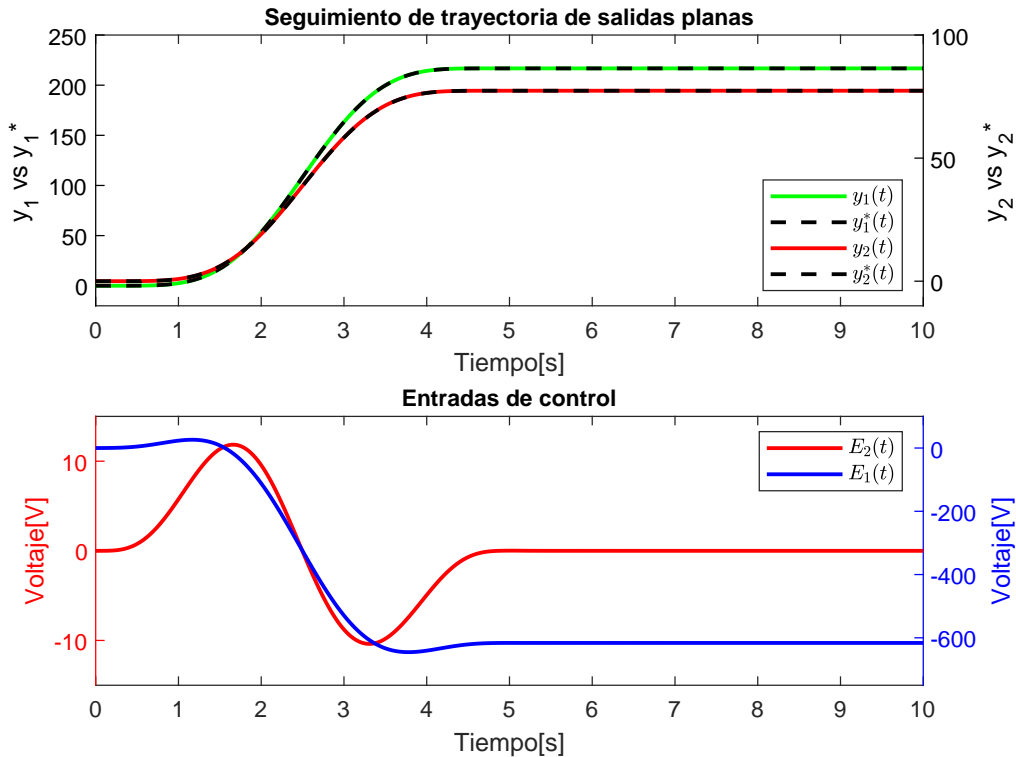


Figura 4.14: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Seguimiento de trayectoria.

Se presenta entonces, en la Figura 4.14, la simulación con las condiciones descritas. Se observa el seguimiento de trayectoria de las salidas planas del sistema y el comportamiento de las señales de control.

Se puede observar que el seguimiento de trayectoria es aceptable, donde no existen oscilaciones presentes en el sistema y se puede asumir, a priori, que existe un error de seguimiento igual a 0 cuando $t \rightarrow \infty$ debido a la selección del polinomio Hurwitz para el controlador. Así mismo, se observan los controles del sistema, cuyo comportamiento es suave y razonable al considerar el tiempo reducido que se tiene para la maniobra, sin presentar sobrepicos y generando un voltaje nulo para el control E_2 cuando el sistema se estabiliza. Esto concuerda con la detención del carro, mientras que para el control E_1 se mantiene un voltaje equivalente a un par aplicado al mecanismo constante, tal que el brazo se mantenga en una posición. Respecto a las magnitudes de los controles se observa que el par aplicado requiere un nivel de voltaje mucho más amplio en comparación al usado para desplazar el mecanismo horizontalmente. Esto se justifica en la magnitud de los movimientos de las posiciones generalizadas, donde el desplazamiento horizontal es mucho menor al desplazamiento rotacional del brazo actuado.

Consecuentemente, deben ser analizadas las gráficas de posicionamiento del efector final y de las posiciones generalizadas, presentes en la Figura 4.15, para dar una conclusión respecto a la eficacia del control diseñado.

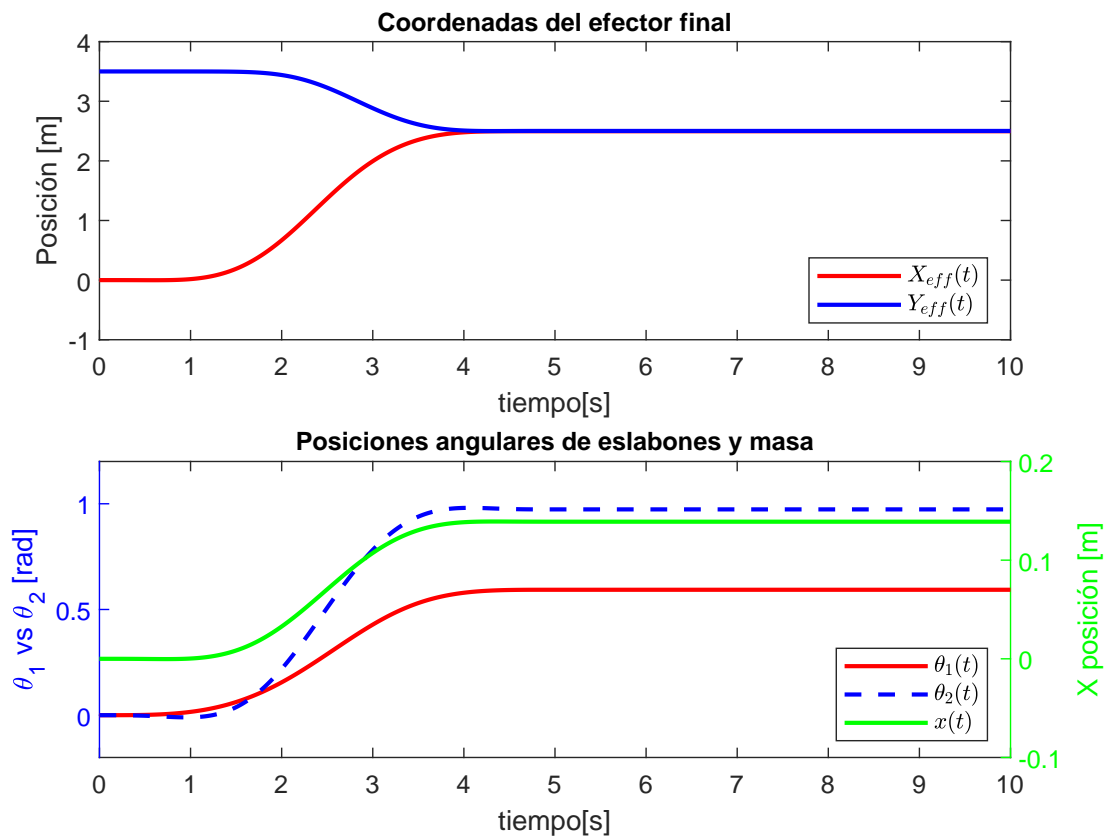


Figura 4.15: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Variables Generalizadas.

Según la respuesta del sistema, se evidencia que el objetivo de control se cumple, no solo por un buen seguimiento de trayectoria, sino también posicionando el efector final a sus coordenadas deseadas $(X_f, Y_f) = (2.5, 2.5)$ sin oscilaciones ni comportamientos indeseados y, por consiguiente, llevando las variables generalizadas a sus posiciones finales equivalentes $x_f = 0.139$, $\theta_{1f} = 0.593$, $\theta_{2f} = 0.974$. Es importante mencionar que este modelo es el que más simplificaciones y suposiciones lleva respecto al sistema y por lo tanto, del que menos información se posee para realizar la tarea de control. Esto evidencia la potencialidad del esquema ADRC para realizar controles en sistemas de los cuales se posee poca información. Además, es de remarcar que no solo se está haciendo una simplificación del sistema al agrupar la dinámica en una serie de perturbaciones (endógenas), sino que se realiza una primer simplificación linealizando el sistema alrededor de un punto de equilibrio, lo que magnifica el impacto que tiene el esquema ADRC.

Confirmado el cumplimiento del objetivo de control correspondiente al posicionamiento del efector final a partir del seguimiento de trayectoria, es importante analizar las magnitudes del error de seguimiento presentes en la Figura 4.16.

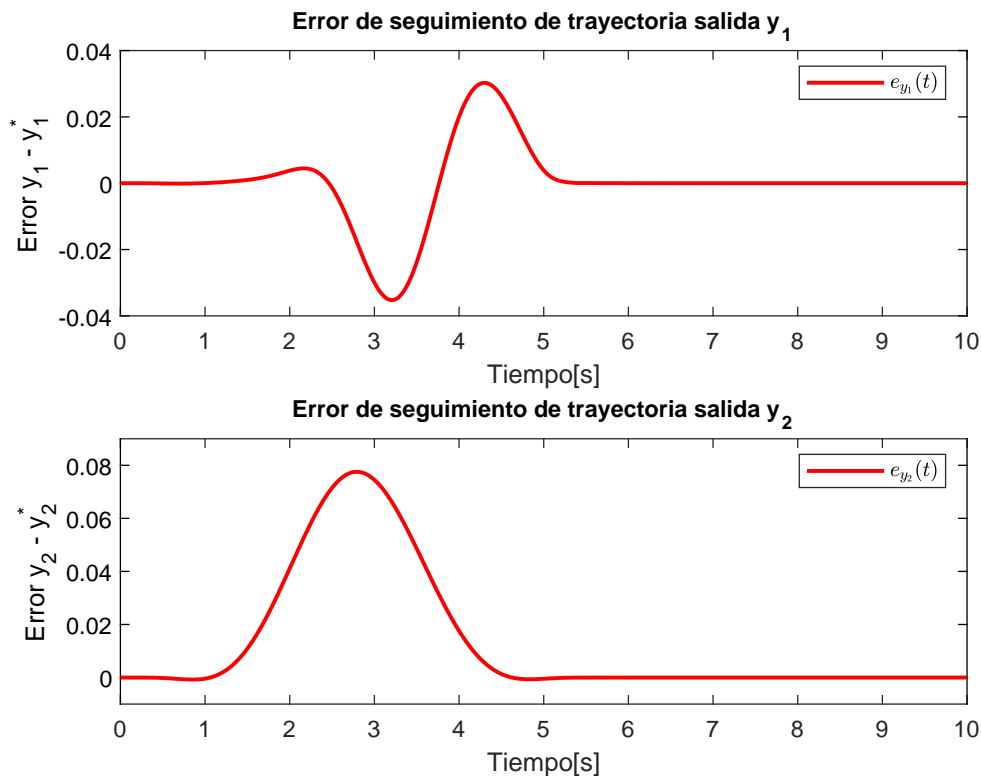


Figura 4.16: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Error de seguimiento.

Según la Figura 4.16, se puede afirmar que el desempeño de los controladores es bastante bueno. Las magnitudes de los errores significan aproximadamente un 0.018 % de la magnitud de la salida y_1 ; y un 1 % de la magnitud de la salida y_2 . Adicionalmente, se muestran curvas suaves del error de seguimiento que evidencian el buen comportamiento del esquema de control. Los errores tienen un valor final cero, lo que comprueba el comportamiento asintótico de las curvas de la salida hacia las curvas de referencia. Es evidente que el sistema de control es robusto frente a todas las simplificaciones y suposiciones hechas sobre el sistema. Es importante recordar que es un control basado en la linealización tangente aplicado al sistema no lineal.

Como se ha planteado anteriormente, es bueno ver las magnitudes del parámetro de desempeño ISE, viendo su evolución a lo largo del movimiento. En este caso, es posible compararlo respecto al parámetro obtenido en el capítulo 4.1.3, ya que el sistema de control propuesto en ambos casos es el mismo en estructura. Se evidenciarán las capacidades de respuesta del control respecto al error, considerando la adición de la dinámica de los motores al sistema.

Las curvas del criterio ISE para este sistema se pueden observar en la Figura 4.17.

Consecuentemente con los errores presentados en la Figura 4.16, el criterio ISE para la salida y_1 muestra un crecimiento en 2 pasos, considerando el paso por cero del error de seguimiento, mientras que para la salida y_2 el criterio presenta un crecimiento en 3 fases, concordante con los 3 cruces por cero del error de seguimiento. Resalta una primera

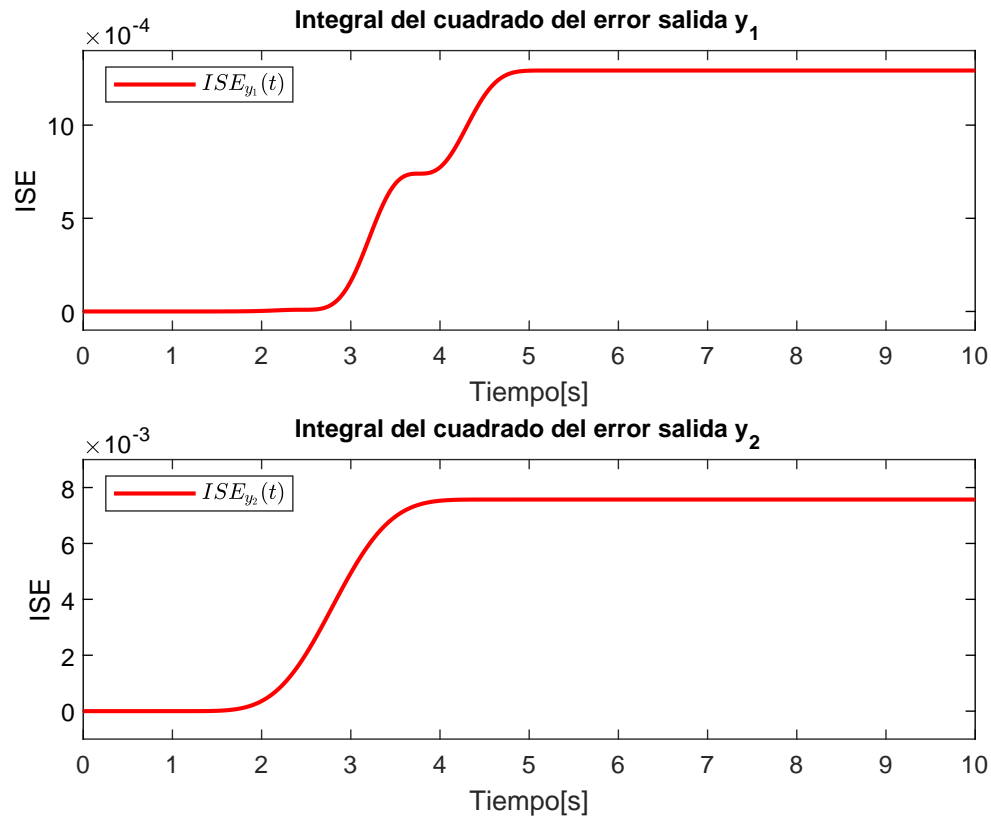


Figura 4.17: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Índice de desempeño ISE.

diferencia respecto a las curvas obtenidas en la sección 4.1.3, donde la salida y_2 crecía en una sola fase. No obstante, es más importante considerar las magnitudes del criterio para ambos esquemas de control, evidenciando que el controlador del sistema mecánico genera un criterio ISE para la salida y_1 de aproximadamente una cuarta parte respecto al controlador del sistema incluyendo la dinámica de los motores. Así mismo, para la salida y_2 se comprueba que es casi 2 veces menor la magnitud del criterio para el controlador que incluye la dinámica de los motores respecto al controlador sin ellos. Este es un comportamiento interesante debido a que, a pesar de estar incluyendo más dinámica en la perturbación total, se está obteniendo un seguimiento de trayectoria más exacto. Este fenómeno puede darse por los cambios en la ganancia del control permitiendo un control más efectivo de la salida plana o por una compensación interna de la dinámica dentro de la perturbación total.

Se incluye una perturbación a la entrada de tipo exógena dadas respectivamente por $\xi_{exo}(t) = 50e^{-\sin(5t)^2} \sin(3t) \cos(7t)$ y $\xi_{exo}(t) = 2.5e^{-\sin(5t)^2} \sin(3t) \cos(7t)$ para E_2 y E_1 , en lo posible imitando una dinámica de baja frecuencia, la cual no pertenece a las dinámicas del sistema pero que puede incluir en su comportamiento cualquier dinámica no modelada del sistema, excitación de no linealidades y perturbaciones que puedan estar presente en un sistema real. En este caso, debido a las magnitudes de los controles, no es posible incluir la misma perturbación en ambos controles, por lo que la magnitud mostrada en la Figura

4.18, es diferente para ambas perturbaciones. No obstante, se clarifica que por simplicidad la perturbación exógena aplicada al control E_2 es una escalización de la perturbación exógena aplicada al control E_1 .

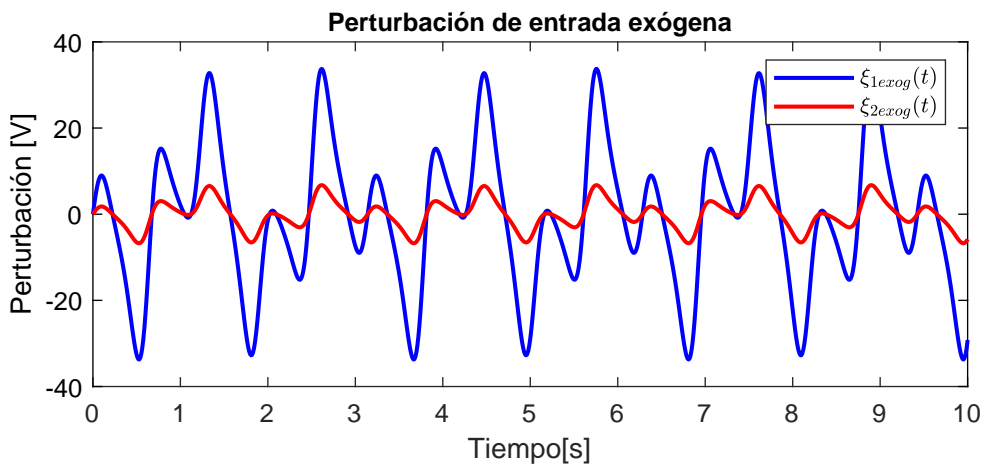


Figura 4.18: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Perturbación.

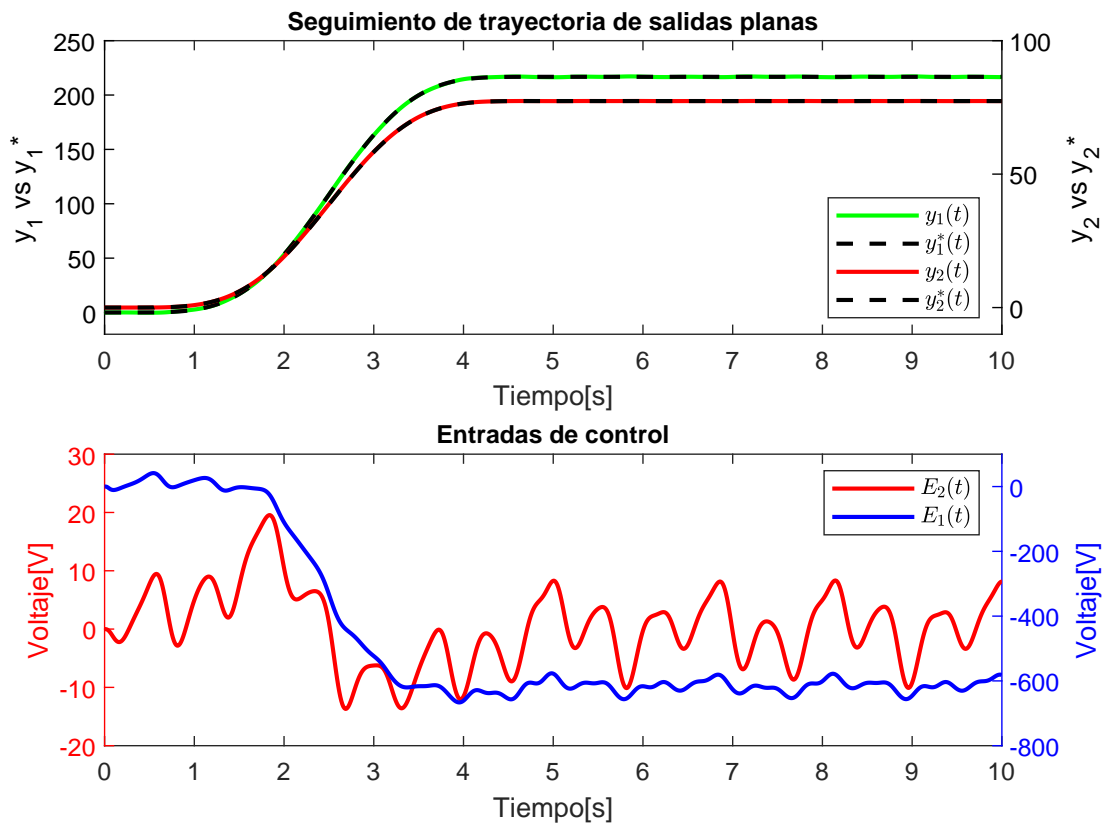


Figura 4.19: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Seguimiento de trayectoria perturbado.

Se evidencia que, según la Figura 4.19, a pesar de las magnitudes de la perturbación incluida, no se ven las repercusiones sobre el seguimiento de trayectoria, donde las curvas de seguimiento son aparentemente invariantes respecto a las obtenidas en la simulación sin perturbación. No es así para los controles, donde se observa la influencia de cada perturbación sobre los mismos, mostrando una corrección permanente gracias a la estimación de la perturbación. Es claro que no es posible llegar a un error de seguimiento igual a cero debido a las características de la perturbación, por lo que también es importante observar las repercusiones sobre los estados y sobre la estabilización del efector final en el punto deseado.

Como se vio en el seguimiento de trayectoria, el posicionamiento del efector final en la coordenada $(X_{eff}, Y_{eff}) = (2.5, 2.5)$ no sufre complicaciones visibles, y en consecuencia, la estabilización de las posiciones generalizadas en los puntos deseados tampoco se ve afectada, tal como se observa en la Figura 4.20. Por lo tanto, se comprueba la eficacia del controlador para rechazar las perturbaciones endógenas y exógenas presentes en el sistema.

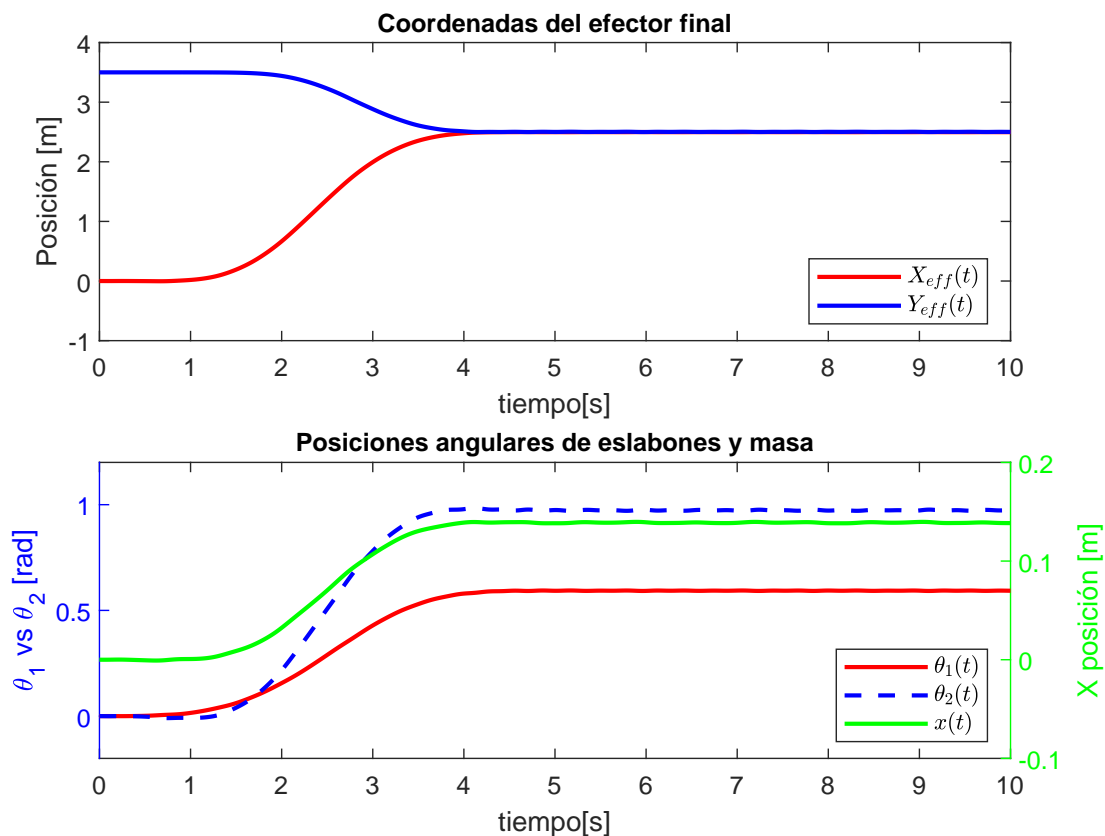


Figura 4.20: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Variables Generalizadas Perturbadas.

Al igual que se afirmó en el capítulo 4.1.3, la perturbación seleccionada no es la máxima perturbación que el sistema es capaz de soportar sin perder estabilidad o sin comprometer la tarea de estabilización del efector final a través del seguimiento de trayectoria. No obstante, se considera que la perturbación tiene magnitud suficiente tanto para la entrada

E_1 como para la entrada E_2 , para cubrir un amplio espectro de posibles perturbaciones que puedan presentarse en un sistema real.

Respecto a las dinámicas del error presentes en la Figura 4.21, sí es posible ver la influencia de las perturbaciones que no se apreció en el seguimiento de trayectoria de la Figura 4.19. Recordando que no es posible llevar el error de seguimiento a cero debido a la naturaleza de la perturbación y a las propiedades del esquema ADRC, se observa un error parecido al mostrado en la Figura 4.16 pero con una perturbación de relativa baja frecuencia montada sobre la señal original del error para el seguimiento de trayectoria de la salida y_1 . Por otro lado, se nota una aparente invariancia en el error de seguimiento para la salida y_2 , a pesar de la respuesta del control E_1 presentado en la Figura 4.19. La curva del error es semejante a pesar de las oscilaciones del control debido a que el observador es mucho más rápido y de mayores ganancias respecto al del control E_2 . A pesar de esto, se puede afirmar que el error de seguimiento tampoco será exactamente 0 cuando $t \rightarrow \infty$, debido a la naturaleza de la perturbación.

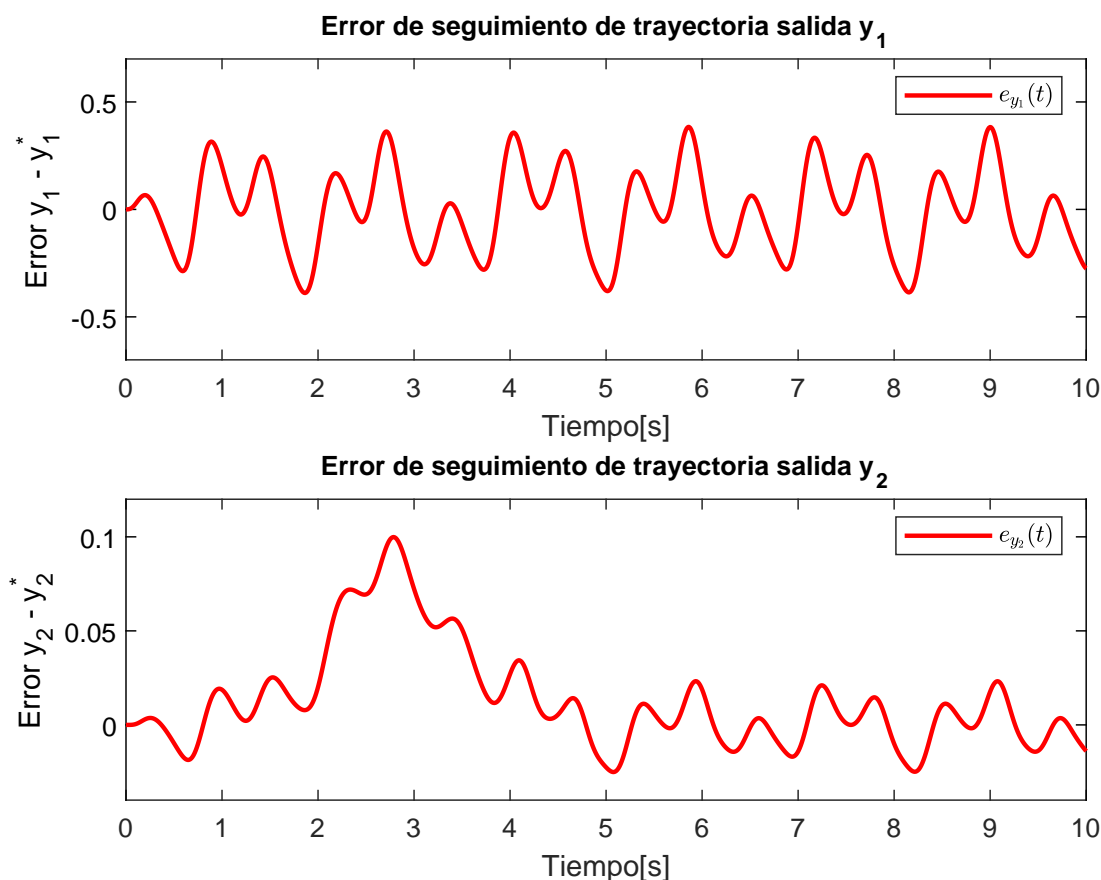


Figura 4.21: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Error de seguimiento perturbado.

También es importante mencionar que el valor de ambas señales, sobretodo aquella que muestra la influencia de la perturbación, se mantiene en los mismos órdenes de magnitud respecto a las obtenidas para el sistema sin perturbar. Esto da un indicio adicional de la

robustez del esquema de control ADRC propuesto y de la efectividad de la sintonización del control hecha.

Finalmente, es importante analizar el criterio ISE para el sistema perturbado mostrado en la Figura 4.22, el cual, si bien no es posible compararlo con el obtenido en la sección 4.1.3 debido a que la perturbación tiene diferentes magnitudes, sí es posible compararlo respecto al sistema sin perturbar. Haciendo un análisis de las curvas, se evidencia un crecimiento perpetuo del criterio para la salida y_1 . Esto no es visible en el criterio de la salida y_2 debido al gran desempeño del observador, no obstante, es posible afirmar que su error no es exacta e idénticamente cero, por lo que se espera que el criterio ISE esté creciendo a un ritmo muy lento. Si comparamos entonces las magnitudes de los criterios obtenidos para el sistema perturbado y el sistema sin perturbar podemos observar un incremento de aproximadamente el 10% para la salida y_1 ; mientras que para la salida y_2 se evidencia un crecimiento prácticamente nulo, despreciando la influencia de la perturbación. Si bien las curvas del error no mostraban claramente la perturbación para la salida y_2 , el criterio ISE nos demuestra la poca aportación de la perturbación para esta salida. No obstante, siguen siendo valores pequeños del criterio, afirmando la efectividad del sistema de control.

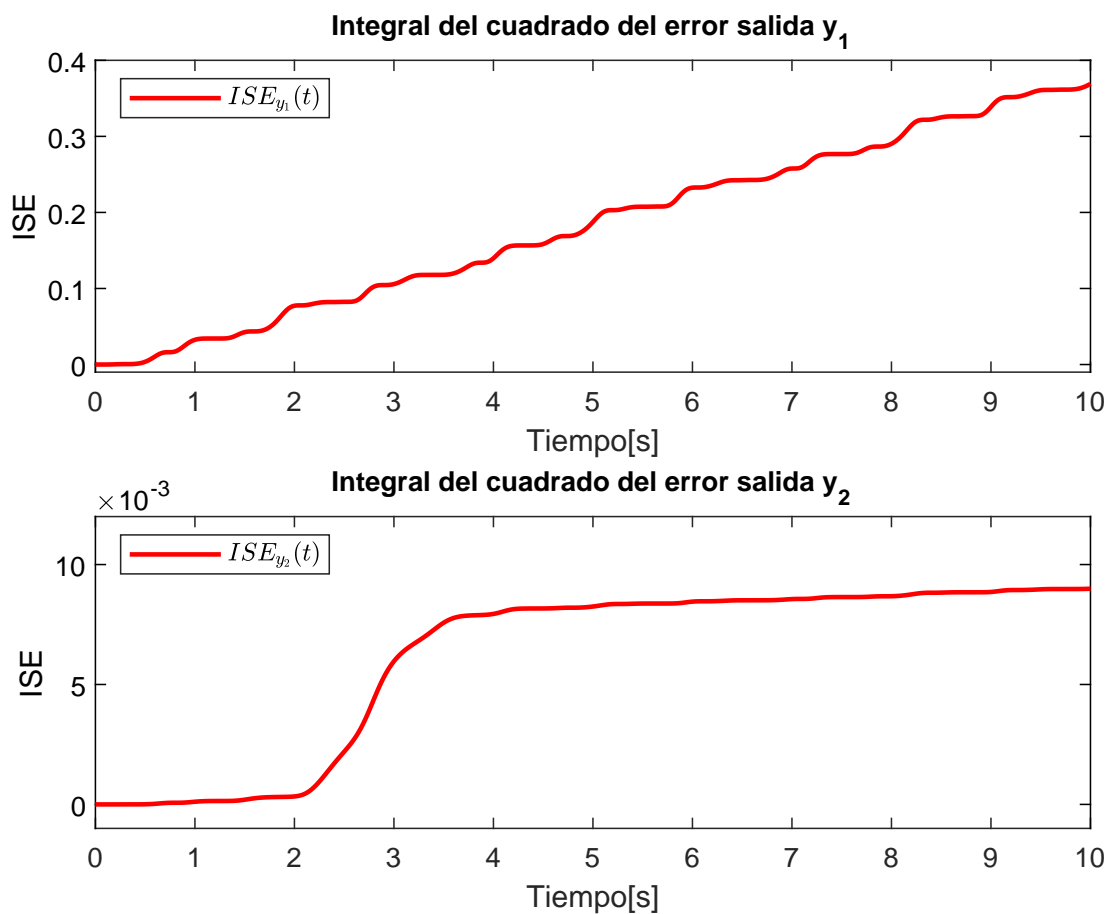


Figura 4.22: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado. Índice de desempeño ISE perturbado.

En conclusión, es válido afirmar que el sistema de control ADRC propuesto es útil y efectivo para realizar el control del sistema no lineal eléctrico-mecánico, aún cuando se han realizado linealizaciones del sistema y suposiciones respecto a la dinámica de los motores, permitiendo así la simplificación e implementación del sistema de control.

4.4.4. Medición indirecta de la posición angular, suministrada por acelerómetro

Debido a que el esquema por acoplamiento de modelos simplificado es aquel que tiene más suposiciones sobre la planta, despreja una mayor cantidad de términos y da más trabajo al observador y controlador del ADRC, es el esquema que se seguirá usando para la verificación de las pruebas de robustez. Se dedicará toda una sección al respecto de la robustez del sistema, sin embargo, un primer acercamiento es el uso de una medición indirecta de la posición angular a partir de la aceleración lineal horizontal y vertical del efector final dada por un acelerómetro, prescindiendo de la medición directa del ángulo de la articulación θ_2 . Esto debido a que es la junta sin actuación, por lo que se supone que el diseño mecánico no dispone de una medición sobre el eje de la articulación. No obstante, es posible calcular el ángulo θ_2 a partir de la geometría del sistema y de la medición del acelerómetro.

Basado en el modelo obtenido en la sección 3.4.2 se plantea incluir la medición de la aceleración lineal del efector final, por lo que se debe obtener la expresión de la aceleración cartesiana con el fin de simular una medición real. Si consideramos la ecuación del efector final,

$$\begin{aligned} X_{eff} &= x + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 \\ Y_{eff} &= L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (4.125)$$

Es posible realizar la doble derivada de la posición final del efector de la ecuación 4.125, tal que la aceleración lineal está dada por la expresión,

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{eff} &= \ddot{x} + L_1[\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1] + L_2[\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2] \\ \ddot{Y}_{eff} &= -L_1[\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1] - L_2[\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2] \end{aligned} \quad (4.126)$$

A partir de la simulación del sistema es posible obtener los estados y sus derivadas, por lo que las curvas de \ddot{X}_{eff} y \ddot{Y}_{eff} están bien definidas dentro de la simulación. Ahora, asumiendo estas curvas como una medición de las aceleraciones lineales del efector final, se procede a integrar, dentro de la simulación, dos veces estas señales para obtener las mediciones virtuales de la posición del efector final. Una vez hecho esto, se puede afirmar que son conocidas las siguientes variables:

- Longitud de los eslabones L_1 y L_2 .
- Longitud del vector R con coordenadas (X_{eff}, Y_{eff}) .
- El ángulo y variable generalizada θ_1 .
- La distancia y variable generalizada x .

- El ángulo virtual θ_{eff} formado por el vector (X_{eff}, Y_{eff}) respecto a la vertical.

Estas variables están representadas en la Figura 4.23.

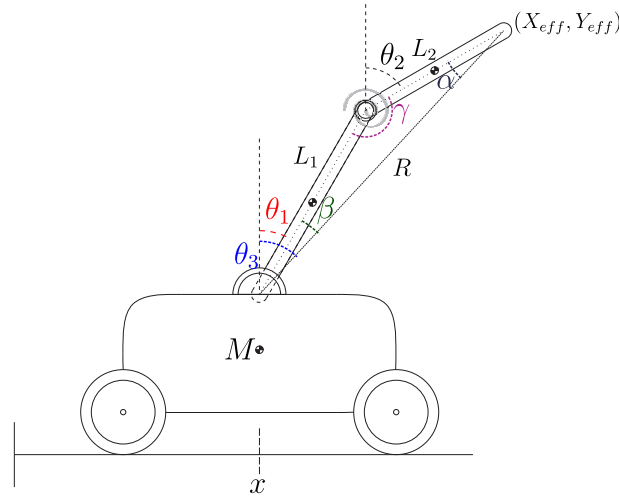


Figura 4.23: Variables disponibles para el cálculo del ángulo θ_2 .

A partir de estos datos, es posible conocer el ángulo α usando la ley de los senos, la cual está dada por:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (4.127)$$

Es posible despejar la ecuación 4.127 y obtener el ángulo C así,

$$C = \sin^{-1} \left(\frac{c}{a} \sin A \right) \quad (4.128)$$

Ahora, si reemplazamos las variables de la Figura 4.23, obtenemos que

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{L_1}{L_2} \sin(\theta_3 - \theta_1) \right) \quad (4.129)$$

Ahora, se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo es π [rad]. Según la Figura 4.23 se pueden definir los ángulos internos del triángulo formado por los eslabones y el vector desde el origen al efector final como

$$\begin{aligned} \beta &= \theta_{eff} - \theta_1 \\ \gamma &= \pi - (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma$$

Reemplazando y despejando para α se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi - \theta_{eff} + \theta_1 - \pi + \theta_2 - \theta_1 \\ &= \theta_2 - \theta_{eff} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ángulo calculado θ_2 será

$$\theta_2 = \alpha + \theta_{eff}$$

O escrito de forma explícita, el ángulo medido será

$$\hat{\theta}_2 = \sin^{-1} \left(\frac{L_1}{L_2} \sin(\theta_3 - \theta_1) \right) + \tan^{-1} \left(\frac{X_{eff}}{Y_{eff}} \right) \quad (4.130)$$

Si graficamos el ángulo θ_2 contra el ángulo $\hat{\theta}_2$ junto al error entre la medición y el estado calculado por la simulación, como se ve en la Figura 4.24, podemos ver que la diferencia es insignificante. Se puede observar una pendiente en el error que se produce después de que ocurre la inversión del triángulo virtual generado por los eslabones y el vector del efector final. Durante los primeros instantes del movimiento, el vector R está por encima de los eslabones debido a que el ángulo θ_1 es mayor al ángulo θ_{eff} . La transición que existe cuando el ángulo θ_{eff} iguala y supera al ángulo θ_1 genera esas variaciones en los cálculos de las funciones trigonométricas inversas, debido a que el triángulo desaparece y se convierte en una línea recta. Este error de cálculo producido al momento de la inversión, al pasar por la integración de las señales, genera este efecto de línea recta. Por fortuna, la escala del error es despreciable.

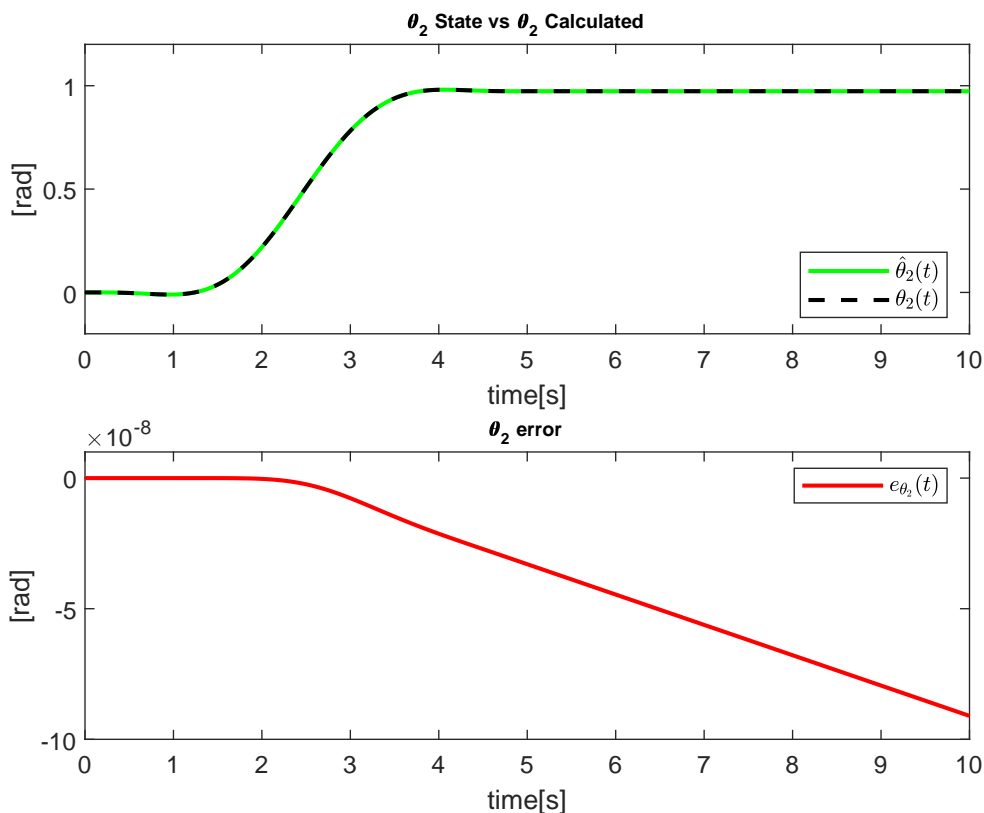


Figura 4.24: Medición indirecta del ángulo θ_2 vs el estado original.

Así mismo, se justifica la eficiencia del método de medición indirecta para realizar la simulación del sistema debido a que el error entre el estado medido y el estado de la

simulación no llega a afectar significativamente hasta un séptimo decimal durante una maniobra que dura 10 segundos. De esta manera, maniobras con tiempos más largos son perfectamente factibles para la simulación.

Estas acumulaciones de error se producen además por estados iniciales que son integrados a través del proceso de cálculo. Si se usa la medición sobre la base del modelo linealizado, las variables incrementales eliminan los valores iniciales, tal que el error de la medición es nulo.

Finalmente, podemos generar la simulación a partir de reemplazar el uso del estado θ_2 con la medición virtual $\hat{\theta}_2$ en el cálculo de las salidas planas, así:

$$\begin{aligned} y_{1\delta} &= (M + m_1 + m_2)x_\delta + (m_1L_{c1} + m_2L_1)\theta_{1\delta} + m_2L_{c2}\hat{\theta}_{2\delta} \\ y_{2\delta} &= m_2L_{c2}x_\delta + m_2L_1L_{c2}\theta_{1\delta} + (m_2L_{c2}^2 + I_2)\hat{\theta}_{2\delta} \end{aligned} \quad (4.131)$$

Donde, $\hat{\theta}_{2\delta} = \hat{\theta}_2 - \bar{\theta}_2$.

Simulaciones

Usando la misma trayectoria de la sección 4.4.3 se obtienen los resultados de la Figura 4.25, donde se aprecia que el seguimiento de trayectoria no se ve afectado por la medición del ángulo. Es un resultado esperado al considerar que el error de medición encontrado previamente en la Figura 4.24 es despreciable. Así mismo, se observan las curvas del control aplicado al sistema, siendo igualmente curvas suaves y de un comportamiento aceptable.

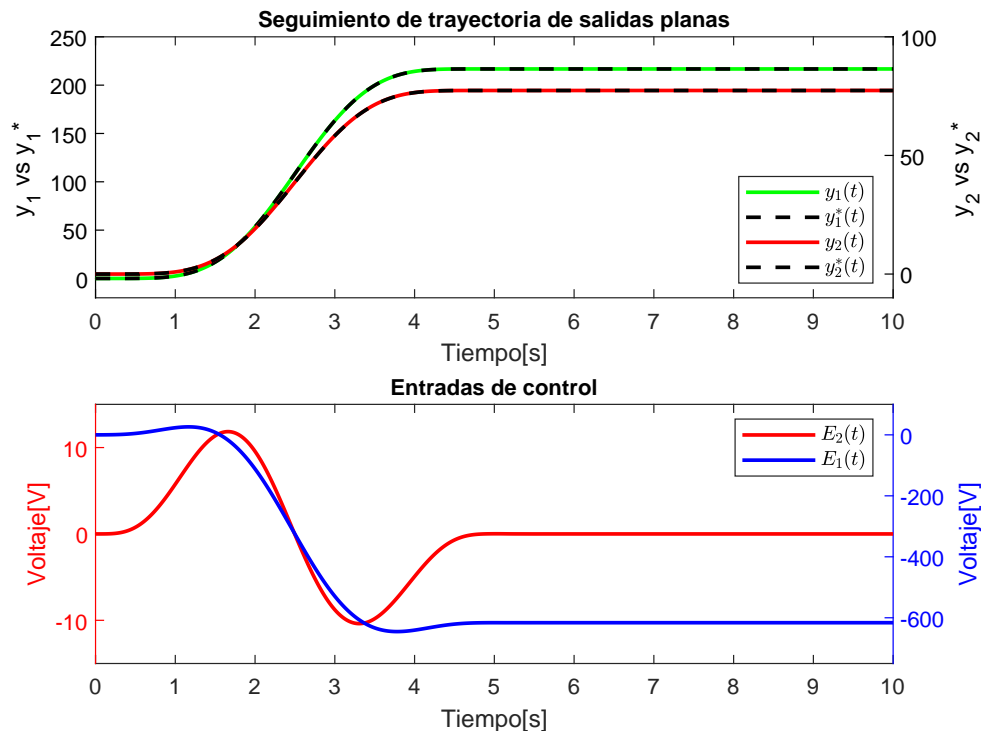


Figura 4.25: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado usando Acelerómetro. Seguimiento de trayectoria.

Debido a que el comportamiento es prácticamente idéntico al presentado en la sección 4.4.3 a diferencia del error de medición mostrado en la Figura 4.24, se puede concluir que se cumple igualmente el objetivo de control de llevar el efector final a una posición determinada a partir del seguimiento de trayectoria de las salidas planas.

4.4.5. Parámetros para pruebas en laboratorio

Si bien las estrategias planteadas funcionan para los parámetros dados en la tabla 4.4 es necesario plantear este mismo ejercicio para parámetros que puedan ser reproducidos en un ambiente de laboratorio a fin de demostrar, de manera práctica en trabajos futuros, las afirmaciones realizadas en este trabajo.

Es por eso que se plantean las siguientes características que pueden satisfacer un ejemplo escalizado,

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
M	$2[Kg]$	L_{m1}	$0.058 [mH]$
m_1	$0.5[Kg]$	k_{m1}	$0.0351 [N \cdot m/A]$
m_2	$0.25[Kg]$	B_{m1}	$0.1[N \cdot m \cdot s]$
l_{c1}	$0.15[m]$	J_{m1}	$0.0351[g \cdot m^2]$
L_1	$0.4[m]$	R_{m1}	$0.0577[\Omega]$
l_{c2}	$0.15[m]$	L_{m2}	$0.77[mH]$
L_2	$0.3[m]$	k_{m2}	$0.0255[N \cdot m/A]$
k	$8[N \cdot m/rad]$	B_{m2}	$0.1[N \cdot m \cdot s]$
g	$9.85[m/s^2]$	J_{m2}	$0.0131[g \cdot m^2]$
I_1	$0.26[Kg \cdot m^2]$	R_{m1}	$7.41[\Omega]$
I_2	$0.0075[Kg \cdot m^2]$	R_t	$0.05[m]$

Tabla 4.5: Parametros de la planta escalizada usados para la simulación usando acoplamiento de modelos simplificado.

Se propone para el posicionamiento del efector final el valor $(X_f, Y_f) = (0.55, 0.55)$, generando los siguientes valores para las variables generalizadas y las salidas planas del sistema escalizado,

$$x_f = 0.117, \theta_{1f} = 0.654, \theta_{2f} = 0.683, y_1 = 0.472, y_2 = 0.0231$$

Finalmente, el sistema de control se sintonizó usando los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= 12, & \zeta_1 &= 1, & \epsilon_1 &= 0.9 \\ \omega_{n2} &= 20, & \zeta_2 &= 1, & \epsilon_2 &= 0.1 \end{aligned} \tag{4.132}$$

En la Figura 4.26 se observa el seguimiento de trayectoria y las curvas de las posiciones generalizadas para el sistema escalizado. Se puede apreciar que el seguimiento es adecuado, sin oscilaciones indeseadas para ambas salidas. Así mismo, se cumple el objetivo de control de posicionar el efector final en las coordenadas seleccionadas $(X_f, Y_f) = (0.55, 0.55)$ en curvas suaves y en un tiempo corto, de acuerdo a las trayectorias generadas. De igual

forma, se observan magnitudes de los controles factibles de reproducir en un laboratorio, demostrando que el esquema propuesto, bajo todas las suposiciones y linearizaciones realizadas, es útil de igual forma en una planta que puede ser reproducida en un ambiente de laboratorio.

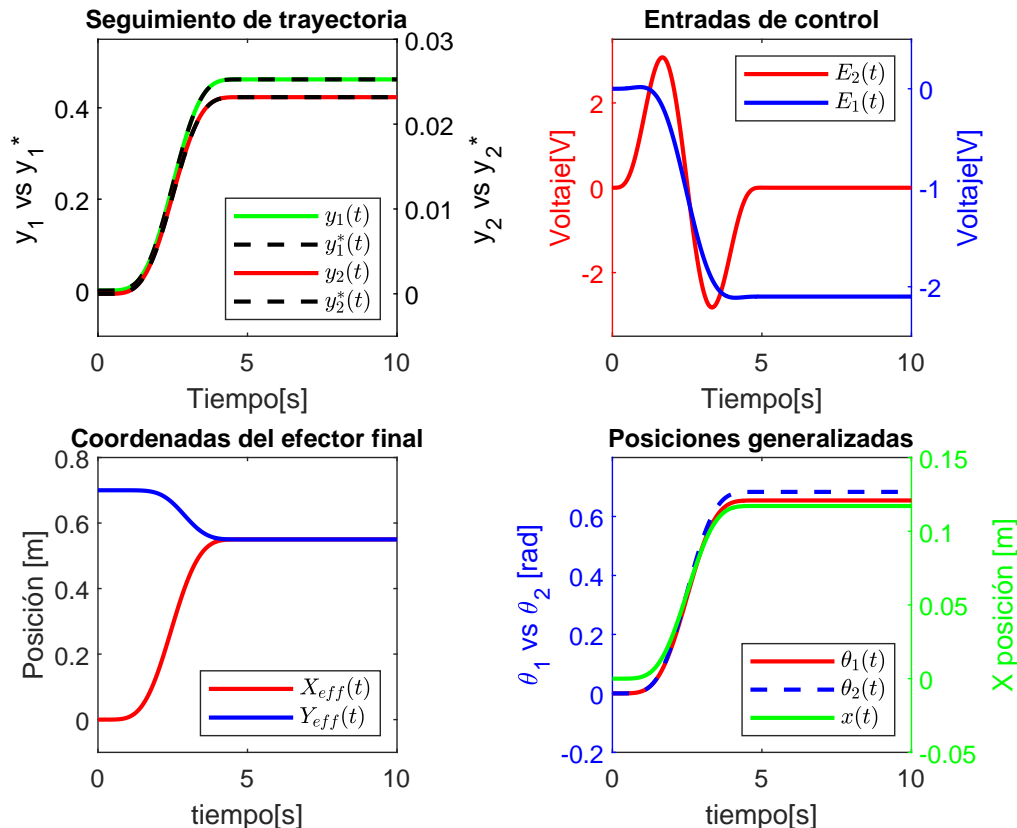


Figura 4.26: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Seguimiento de trayectoria.

Así mismo, se pueden observar los resultados de los errores de seguimiento y el criterio ISE para ambas salidas, representadas en la Figura 4.27. A pesar de no poder compararlas con los resultados obtenidos para el sistema con parámetros reales, sí es posible sacar conclusiones respecto al desempeño del controlador implementado. Considerando de nuevo que es un controlador lineal basado en la linearización del sistema implementado sobre la planta no lineal, obtener errores de seguimiento del orden de 10^{-5} para ambas salidas llegando a cero en tiempo finito, justo al terminar la maniobra, representa un éxito en el desempeño del esquema.

De igual manera, se observan criterios ISE de magnitud mínima siendo acorde a los movimientos de los errores de las salidas. Estos llegan a un valor finito correspondiente al valor final de cero de los errores de seguimiento las salidas planas, demostrando el buen desempeño del esquema propuesto.

Por otro lado, se propone entonces la perturbación exógena mostrada en 4.28 la cual posee la formulación dada por:

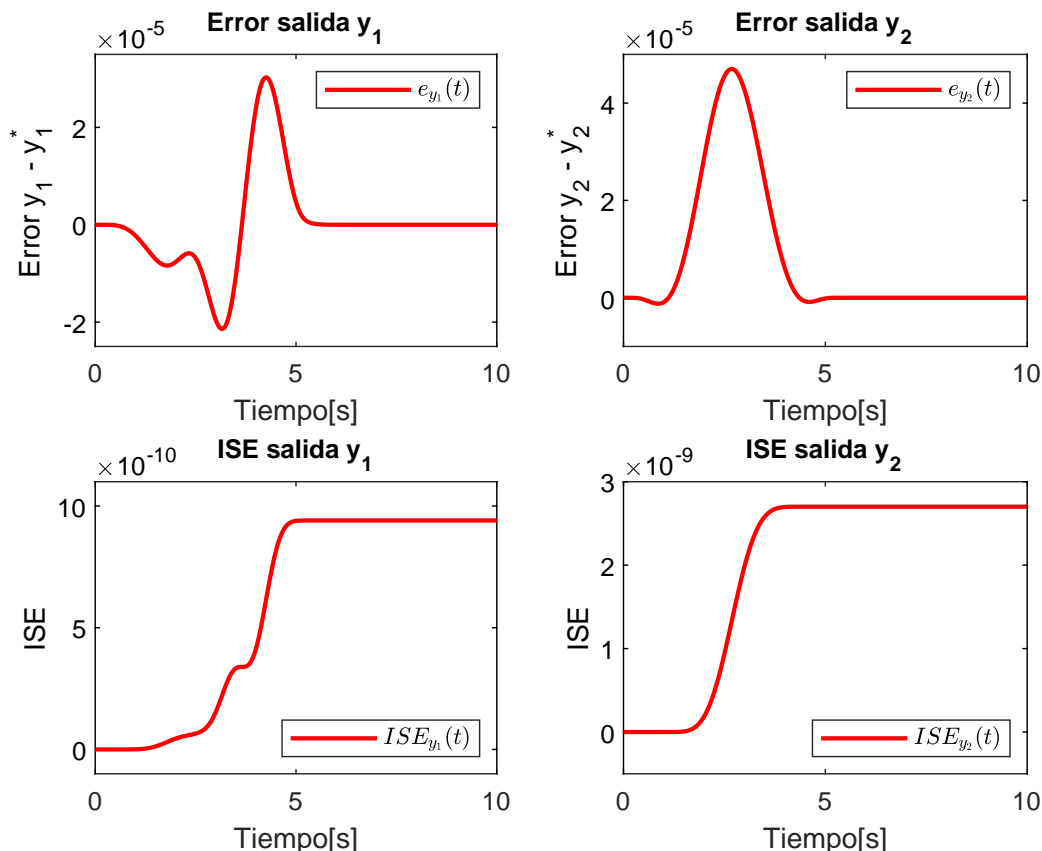


Figura 4.27: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Error de seguimiento.

$$\xi_{exo}(t) = 0.5e^{-\sin(5t)^2} \sin(3t) \cos(7t)$$

Al aplicar esta perturbación en ambas entradas de control se obtiene el comportamiento mostrado en la Figura 4.29. Se puede evidenciar que el seguimiento de trayectoria de la salida y_1 no se ve enormemente afectado, mientras que para la salida y_2 se alcanzan a ver unas pequeñas variaciones correspondientes con la perturbación. Así mismo, para las señales de control se evidencia la compensación que realiza el esquema de control frente a la perturbación exógena de baja frecuencia, realizando un trabajo suficiente para provocar unas oscilaciones mínimas en las posiciones generalizadas, observables mayormente en los ángulos del manipulador. No obstante, no se ven mayores oscilaciones en el posicionamiento del efector final, verificando el buen desempeño del esquema diseñado sobre la planta.

Finalmente, se pueden observar los errores de seguimiento para ambas salidas y los criterios ISE para cada uno de los seguimientos en la Figura 4.30. Es posible ver que los errores no son posibles llevarlos a cero debido a que las perturbaciones son variantes en el tiempo y, a pesar de que se cumple el objetivo de control de posicionar el efector final en las coordenadas deseadas, existen variaciones mínimas en las salidas planas. No obstante, el esquema de control logra mantener los errores de seguimiento en el orden de 10^{-4} . Estos valores implican que el error para la salida y_2 casi se duplicó con la presencia de la

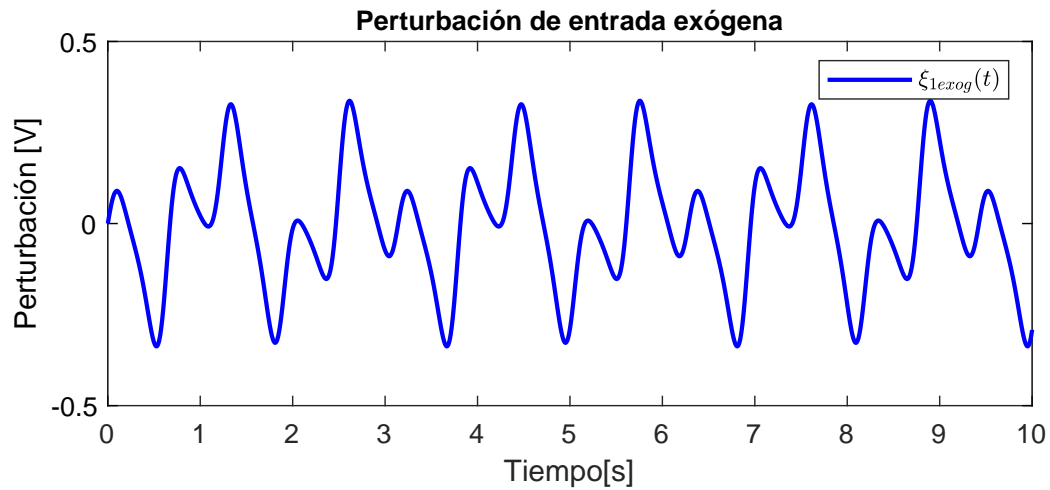


Figura 4.28: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Perturbación.

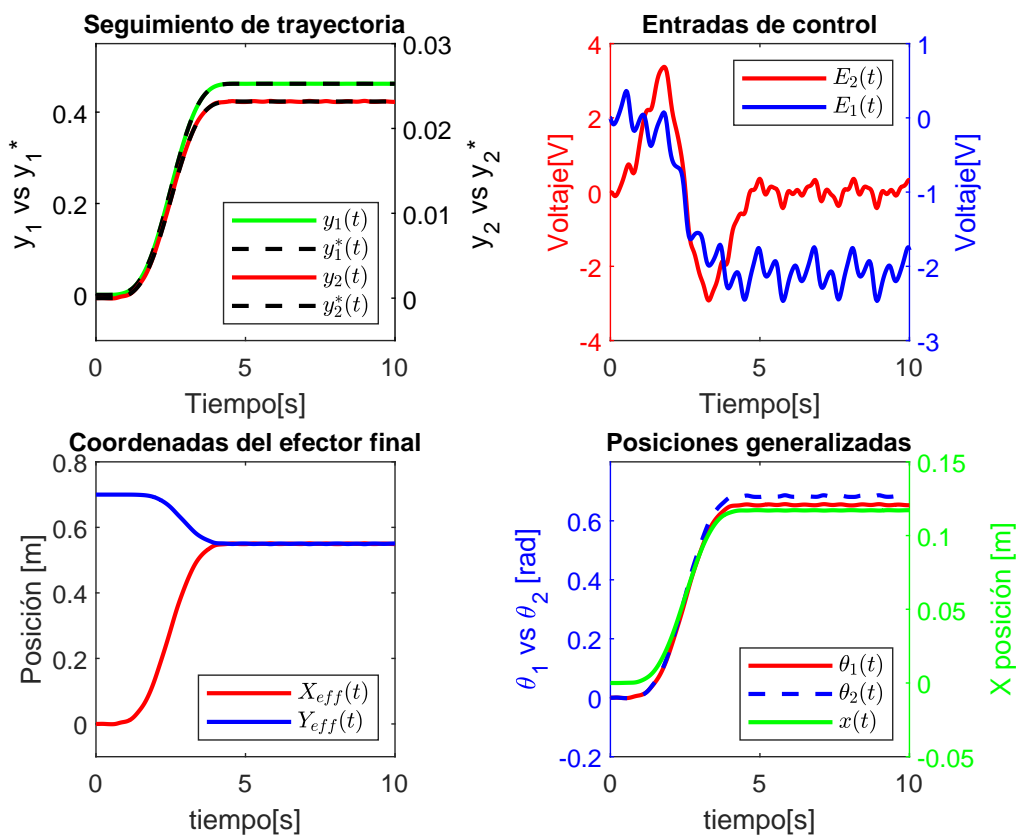


Figura 4.29: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Seguimiento de trayectoria perturbado.

perturbación, mientras que para la salida y_1 es casi cuatro veces mayor el error. Esto se

puede justificar en las ganancias de los observadores, considerando que el observador de la salida y_2 es mucho más rápido que aquel de la salida y_1 permitiendo una mejor estimación de la perturbación exógena.

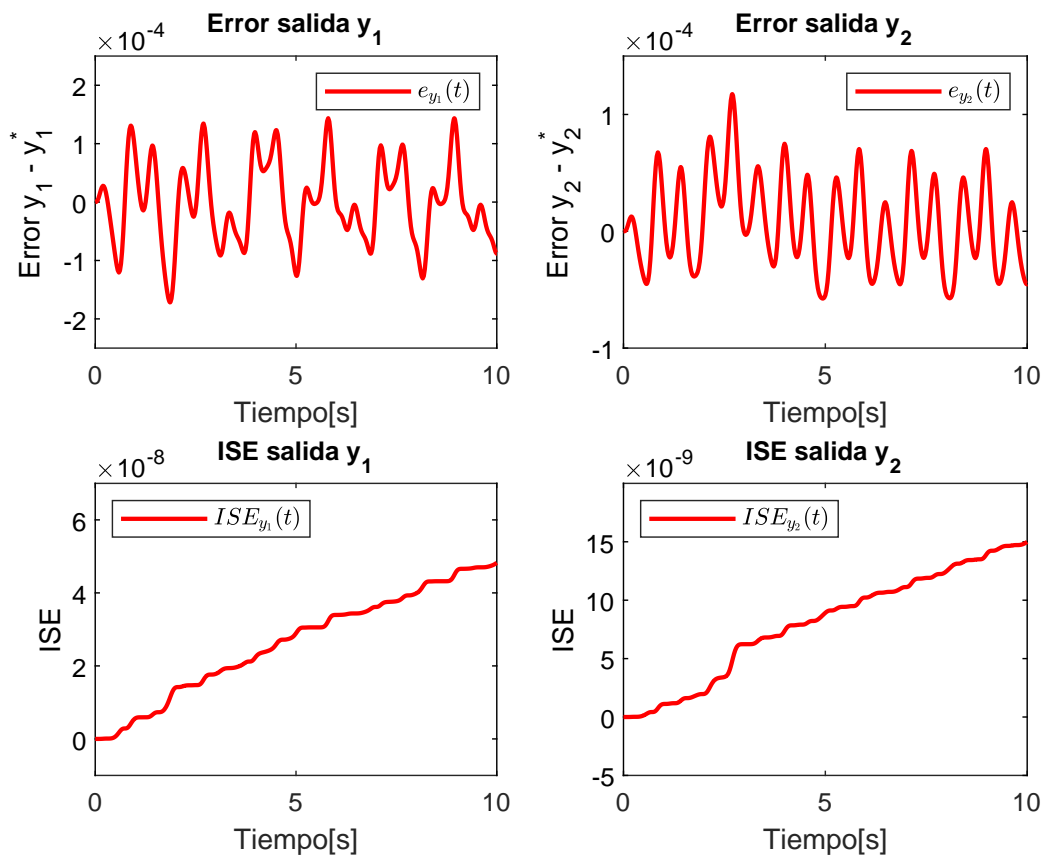


Figura 4.30: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado escalizado. Error de seguimiento.

4.5. Resumen del capítulo

El presente capítulo muestra el proceso seguido para el desarrollo de la estrategia de control ADRC propuesta para cada uno de los 4 modelos obtenidos en el capítulo 3. Se muestran en detalle las ecuaciones usadas para el diseño del observador y el controlador, y se evidencia la selección de polinomios estables de una manera simplificada y eficiente. Seguido a cada cálculo del sistema observador-controlador se presentan simulaciones que evidencian el comportamiento de los diferentes sistemas en lazo cerrado. Se comprueban comportamientos diferentes dependiendo de la selección de las salidas planas, demostrando que el cumplimiento del objetivo primario de control de posicionamiento del efector final es fuertemente afectado por la dependencia de los estados de las salidas planas. Así mismo, se demuestra la mejor selección del modelo del sistema de acuerdo a las simulaciones presentadas y a la simplicidad de diseño del esquema ADRC.

Capítulo 5

Evaluaciones de la Robustez

La teoría de control tiene como objetivo llevar la respuesta de un sistema a un punto deseado, ya sea estabilización o seguimiento de una trayectoria. No obstante, existen objetivos secundarios respecto al comportamiento del sistema, por ejemplo, la optimización de un parámetro, la simplicidad del control o la robustez. Cada uno de estos se puede evaluar respecto a los criterios que sean determinados al momento de diseñar el sistema de control.

Este capítulo presenta un análisis de un objetivo secundario al seguimiento de trayectoria y consecuente estabilización en un punto deseado del efector final del mecanismo, correspondiente a la robustez del sistema de control. El control puede ser robusto frente a varios aspectos, por lo que este capítulo tratará cuatro de ellos, además del que se verificó en el capítulo 4 respecto a perturbaciones a la entrada. El primero será verificar la robustez del control frente a variaciones de los parámetros β que constituyen la dinámica simplificada obtenida en el modelo en la forma canónica de Isidori. El segundo tratará de eliminar información del modelo realizando un desacoplamiento de los controles. El tercero será incluir ruido de medición respecto a las pruebas realizadas con un acelerómetro simulado. Y finalmente, se harán pruebas de robustez respecto a la variación de las condiciones iniciales del sistema.

Se presentarán simulaciones validando la robustez del controlador obtenido en la sección 4.4.3 usando los parámetros de la tabla 4.4 frente a las situaciones presentadas previamente y se darán conclusiones respecto al esquema ADRC propuesto.

5.1. Variación del parámetro β

Tal como se vio en el capítulo 4, el esquema de control se ve influenciado por las ganancias β que acompañan a los diferentes controles y parten de la dinámica, en este caso linealizada, del sistema. No obstante, es posible que los valores teóricos, obtenidos a partir del modelo, no sean exactamente los reales debido a variaciones respecto a los parámetros de la planta, variaciones en línea de la arquitectura del sistema o, como en el caso que se estudia, el uso de un parámetro constante obtenido por medio de una linealización en el control de un sistema no-lineal. Este proceso es explorado previamente en el trabajo de Zurita-Bustamante [61]. Por lo tanto, es posible que el parámetro β obtenido en el modelo

tenga variaciones, por lo cual es necesario estudiar la robustez del sistema de control frente a un espectro de valores β del sistema.

Para este análisis se planteará variar los parámetros β_i un porcentaje determinado, usando la misma sintonización del sistema provista en 4.124 y, a partir del criterio ISE, ver su influencia en el sistema. Si el criterio ISE converge a un valor constante, el cuadrado de la magnitud del error converge a cero, o a un valor constante de orden de magnitud varias veces menor al error mismo.

5.1.1. Parámetro β_{11}^*

A partir de la ecuación 4.123, se puede ver que la influencia del parámetro β_{11}^* es solo para la salida y_1 , por lo que se analizará el criterio ISE de la salida y_1 únicamente.

Si variamos entonces el parámetro β_{11}^* , que tiene el valor nominal $\beta_{11}^* = 8.2$, entre los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\beta_{11min}^* &= 50\% \cdot \beta_{11}^* \\ \beta_{11max}^* &= 190\% \cdot \beta_{11}^*\end{aligned}\tag{5.1}$$

Podemos obtener entonces las curvas del criterio ISE para la salida y_1 tal como se muestra en la Figura 5.1.

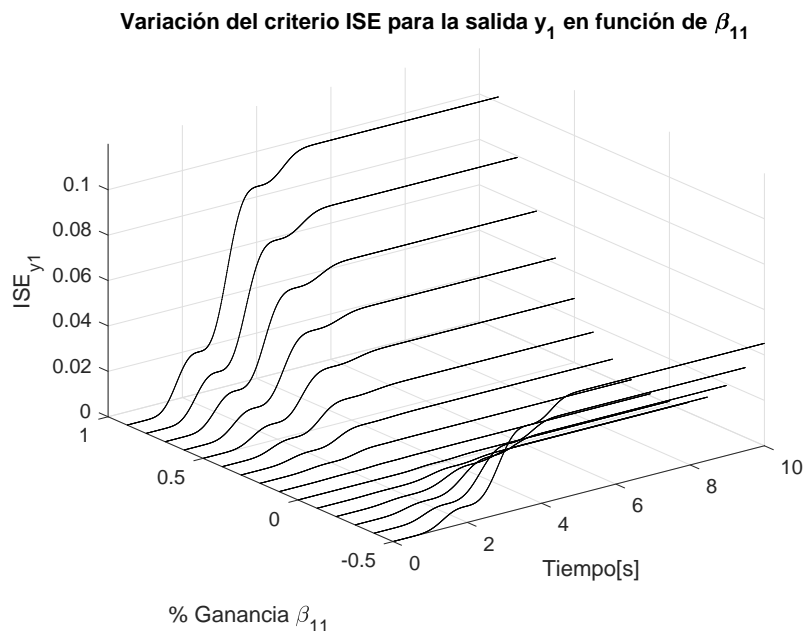


Figura 5.1: Variación del criterio ISE para salida y_1 . Variando β_{11}^* .

Es posible observar que la variación del parámetro β_{11}^* afecta significativamente el criterio ISE para la salida y_1 . Para una variación nula la curva es prácticamente indistinguible, mientras que en los casos extremos se observa que la curva llega a valores máximos similares. Sin embargo, es de notar que el valor final del criterio es estable, por lo que se concluye que se llega a un valor final del error de seguimiento igual a cero. Esto verifica

la robustez del control diseñado, al menos frente a la variación de uno de sus parámetros. Se verifica que el controlador es capaz de contrarrestar la falta de información sobre el sistema que se presenta al cambiar el valor de la ganancia del control.

Una vez concluida la robustez del control, es importante ver las consecuencias de las variaciones máximas, tanto en incremento como en decremento, del parámetro β_{11}^* sobre la respuesta del sistema. Esto debido a que no es suficiente que el criterio ISE posea un valor finito, sino que el seguimiento de trayectoria y, por ende, la estabilización del efector final, sean satisfactorias. Por ello se presentan en las Figuras 5.2 y 5.3 las respuestas del sistema a los valores mínimos y máximos de β_{11}^* mostrados en la ecuación 5.1.

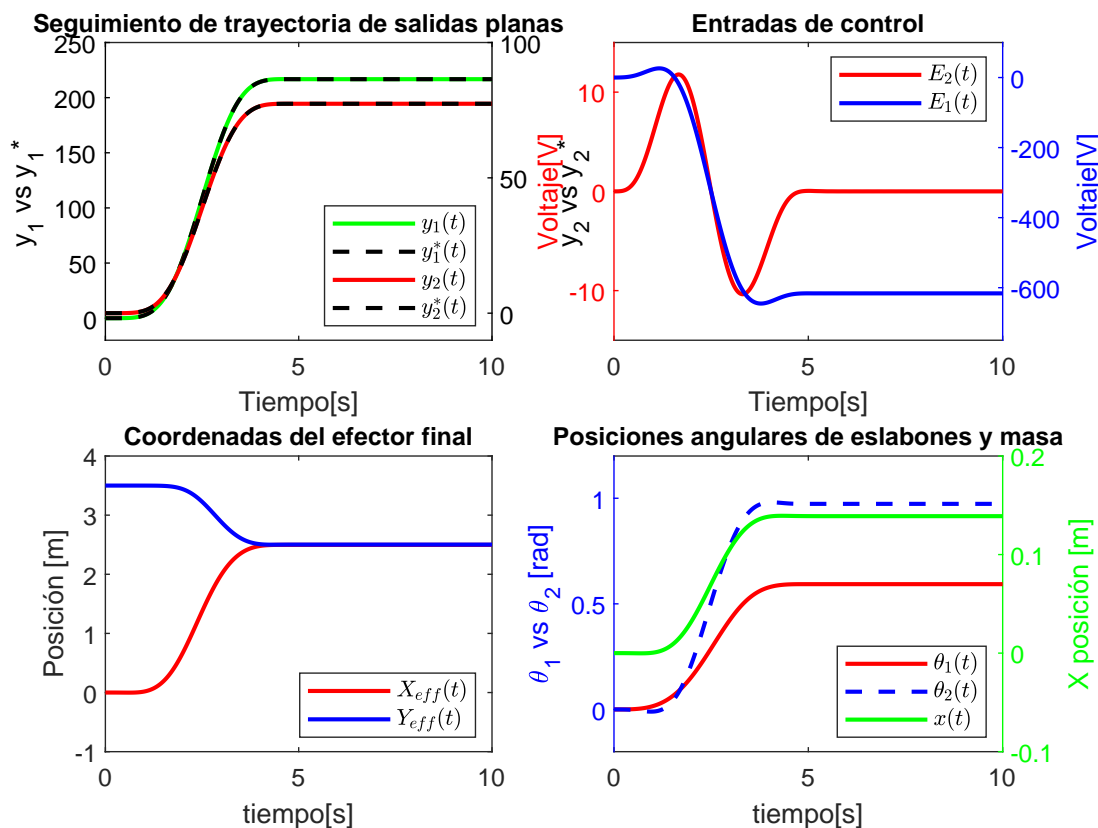


Figura 5.2: Respuesta del sistema para el valor mínimo de β_{11}^* .

Es evidente que la repercusión de la variación del parámetro β_{11}^* sobre el seguimiento de trayectoria del sistema y la estabilización del efector final en las coordenadas deseadas es mínima. No se presentan variaciones en las curvas del control, lo que sugiere que el sistema se encuentra aún lejos de su punto de inestabilidad.

Es importante mencionar que el rango escogido para la variación del parámetro β_{11}^* no es el rango máximo que soporta el sistema antes de mostrar comportamientos indeseados. No obstante, es un rango lo suficientemente amplio como para considerar un parámetro β_{11}^* hipotética que esté en las variaciones posibles de los parámetros de la planta.

Finalmente, cabe recalcar que el modelo sobre el cual está basado el controlador es el sistema linealizado de la planta. Es por esto que es de gran impacto la capacidad que

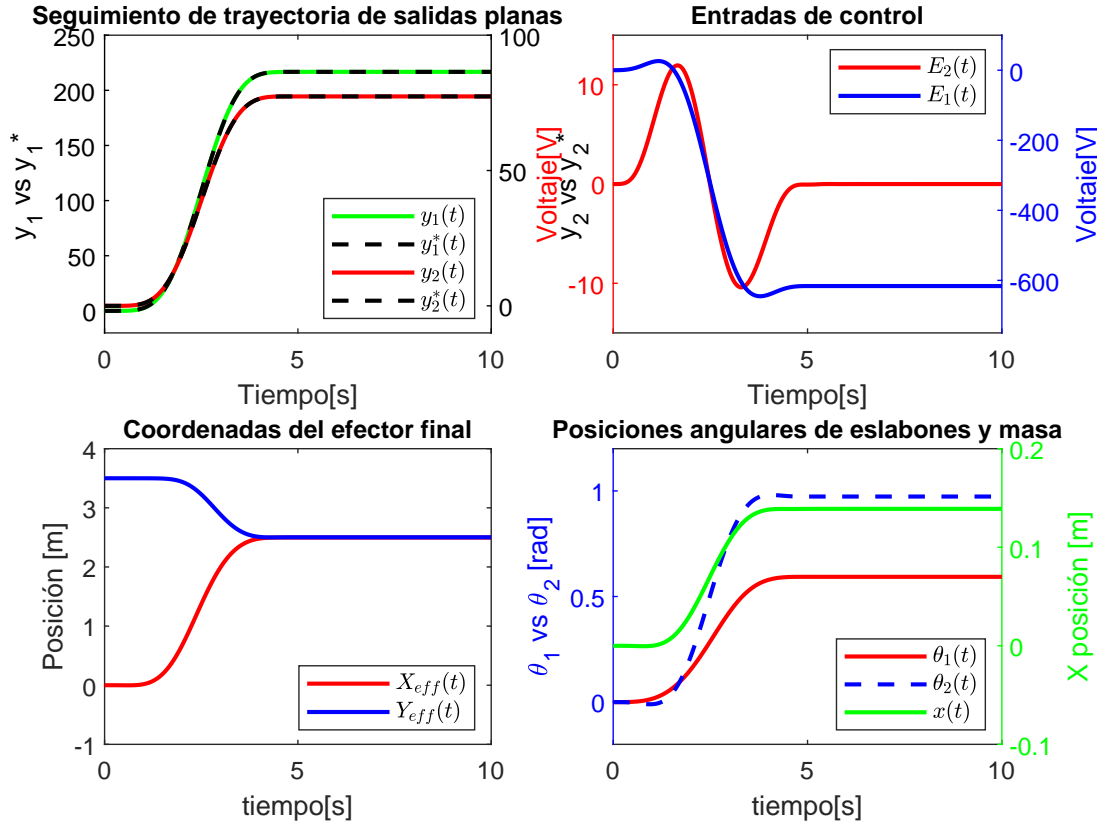


Figura 5.3: Respuesta del sistema para el valor máximo de β_{11}^* .

tiene el esquema para soportar variaciones sobre uno de sus parámetros, aún cuando se supone que el régimen de validez del modelo usado es alrededor del punto de linealización, el cual tiene incidencia directa sobre el valor nominal de cada una de los parámetros β que acompañan a las señales de control.

5.1.2. Parámetro β_{21}^*

Recordando las ecuaciones del esquema ADRC para el controlador 4.123, se puede observar que su influencia es directa respecto a la salida y_2 . Sin embargo, lo hace a través del control E_2 , por lo que es posible que tenga repercusiones en la salida y_1 .

Considerando un valor nominal de $\beta_{21}^* = -39.5$, se plantea una variación entre los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\beta_{21min}^* &= 50\% \cdot \beta_{21}^* \\ \beta_{21max}^* &= 190\% \cdot \beta_{21}^*\end{aligned}\tag{5.2}$$

En esta ocasión, al haber una interrelación en las salidas debido a los controles, se debe realizar un análisis a las curvas obtenidas del criterio ISE tanto para la salida y_1 como para la salida y_2 . Se espera que, debido a la incidencia directa, el criterio ISE se vea enormemente afectado en la salida y_2 y mínimamente afectado en la salida y_1 .

Entonces, a partir de la simulación del criterio ISE de la salida y_1 mostrado en la Figura 5.4.

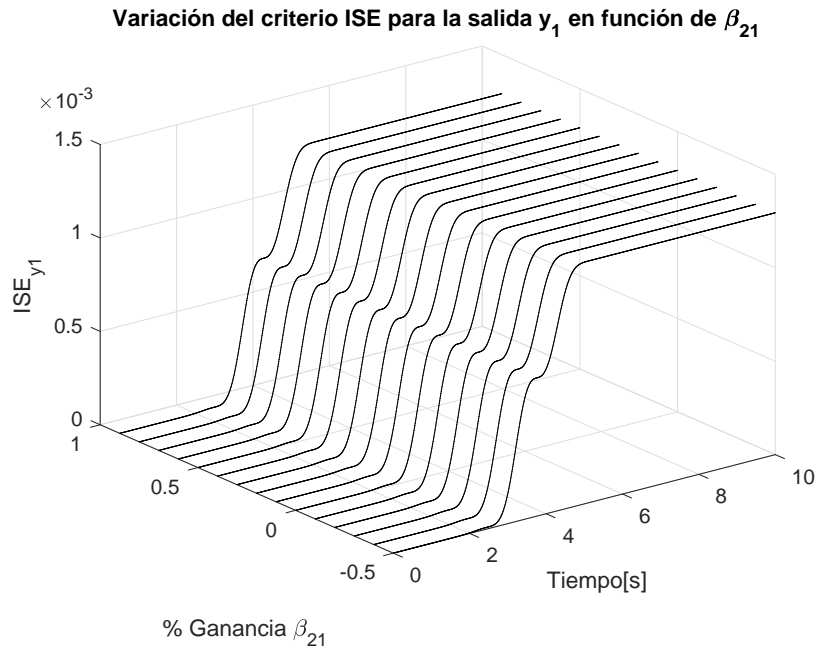


Figura 5.4: Variación del criterio ISE para salida y_1 . Variando β_{21}^* .

Vemos como las variaciones para la salida y_1 son despreciables. Por otro lado, para la salida y_2 se nota el comportamiento de la Figura 5.5

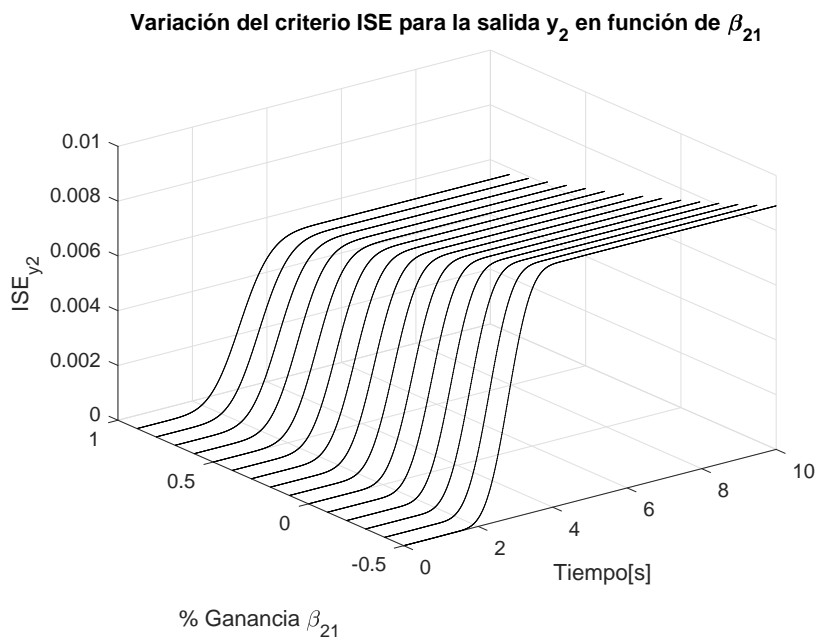


Figura 5.5: Variación del criterio ISE para salida y_2 . Variando β_{21}^* .

Es evidente que el incremento del parámetro β_{21}^* mejora el comportamiento del sistema, basado en que el criterio ISE aumenta a medida que el valor del parámetro decrece, y disminuye a medida que la ganancia crece. Este comportamiento sugiere que la información presente en el término $\beta_{21}^* E_2$ aporta al seguimiento de trayectoria de la salida plana y_2 . Así mismo, se puede afirmar que para el caso particular del manipulador móvil, subactuado, provisto de unión flexible bajo el modelo de acoplamiento aproximado, el desacoplamiento de los controles perjudica el desempeño del sistema. Es decir, plantear dos esquemas SISO independientes en vez de un esquema MIMO tendrá mayores errores de seguimiento para la salida y_2 . Sin embargo, las magnitudes obtenidas para el barrido de la ganancia β_{21}^* se conservan dentro del mismo orden de magnitud sugiriendo que, a pesar de perjudicar el desempeño, si es posible realizar un desacoplamiento de los controles incluyendo el término $\beta_{21}^* E_2$ en la perturbación total ξ_2 .

Así como se realizó para la anterior variación, es importante ver las repercusiones de las variaciones máximas del parámetro β_{21}^* . Por lo tanto, se muestra en las Figuras 5.6 y 5.7 las respuestas del sistema a las variaciones planteadas en 5.2.

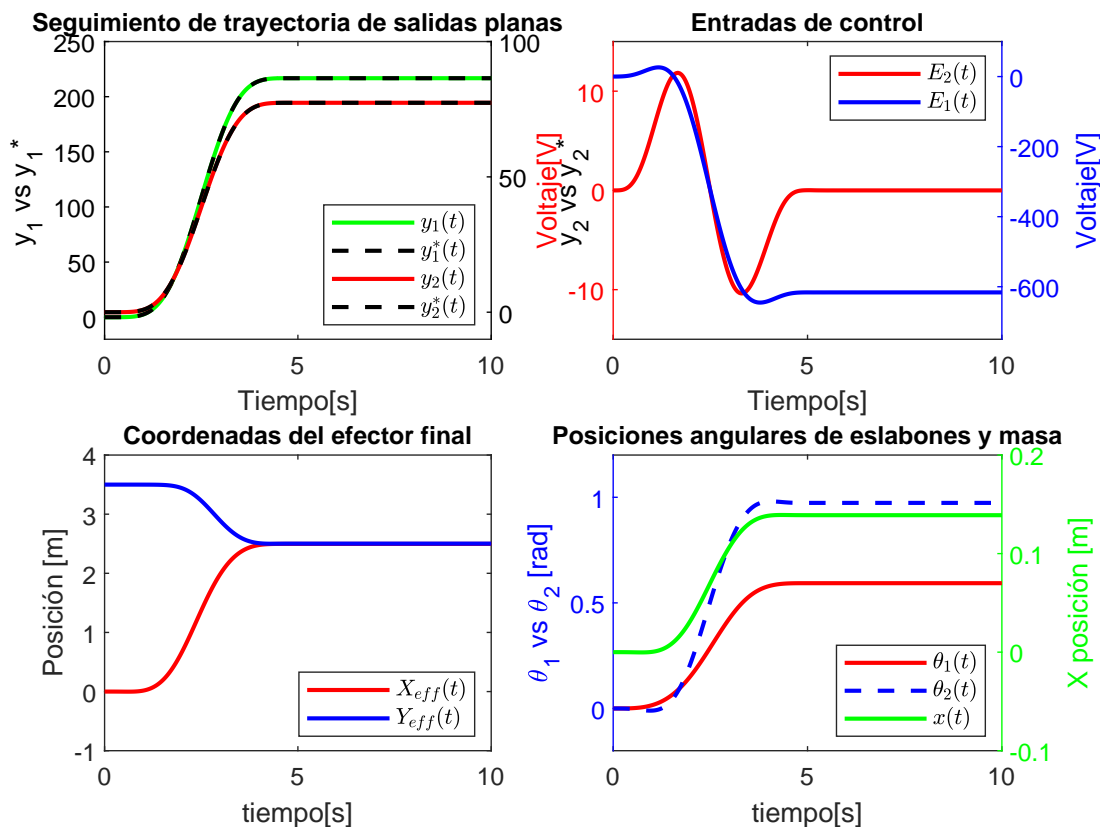


Figura 5.6: Respuesta del sistema para el valor mínimo de β_{21}^* .

Como lo señala la variación del criterio ISE, la respuesta del sistema para la variación máxima en decrecimiento del parámetro β_{21}^* no presenta afectaciones y es de una calidad comparable a la obtenida para el sistema nominal. Así mismo, para la variación máxima en crecimiento se puede observar una variación nula de la respuesta del sistema. Es posible que

el sistema presente variaciones visibles bajo movimientos más agresivos de la ganancia β_{21}^* , sin embargo, el espectro simulado es lo suficientemente amplio como para cubrir cambios reales de los parámetros del sistema.

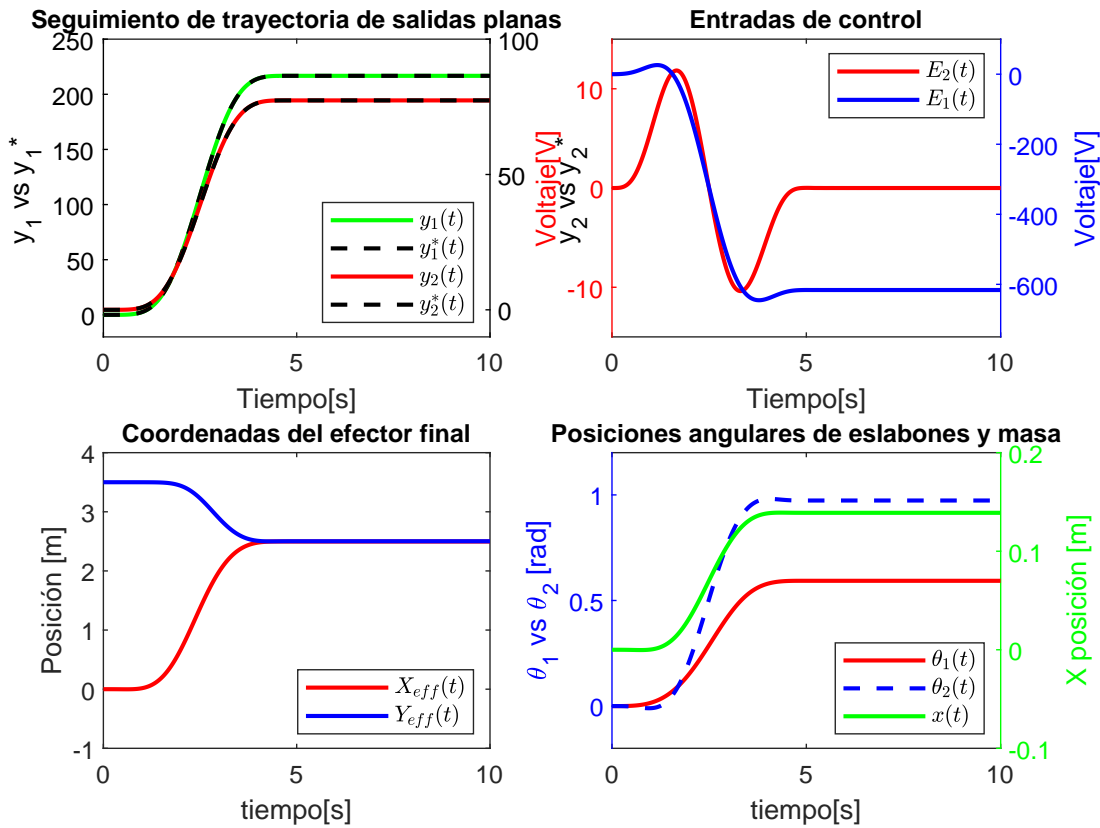


Figura 5.7: Respuesta del sistema para el valor máximo de β_{21}^* .

5.1.3. Parámetro β_{22}^*

Tomando como base el esquema obtenido en la ecuación 4.123, se observa que el parámetro β_{22}^* afecta únicamente a la salida y_2 por lo que solo se analizará la influencia de la variación del mismo en el sistema.

Sea el valor nominal $\beta_{22}^* = 80.37$, se plantea una variación entre los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\beta_{22min}^* &= 50\% \cdot \beta_{22}^* \\ \beta_{22max}^* &= 190\% \cdot \beta_{22}^*\end{aligned}\quad (5.3)$$

Es importante considerar en este caso la magnitud del valor de β_{22}^* respecto a los valores que se están obteniendo para el control E_1 correspondiente. La magnitud del control es significativamente amplia respecto a la magnitud del parámetro, es decir, el valor de β_{22}^* es aproximadamente un 10% del valor de la magnitud máxima del control, por lo que es de esperar que la variación del parámetro afecte en gran medida el criterio ISE de la salida y_2 . Las curvas correspondientes se pueden encontrar en la Figura 5.8.

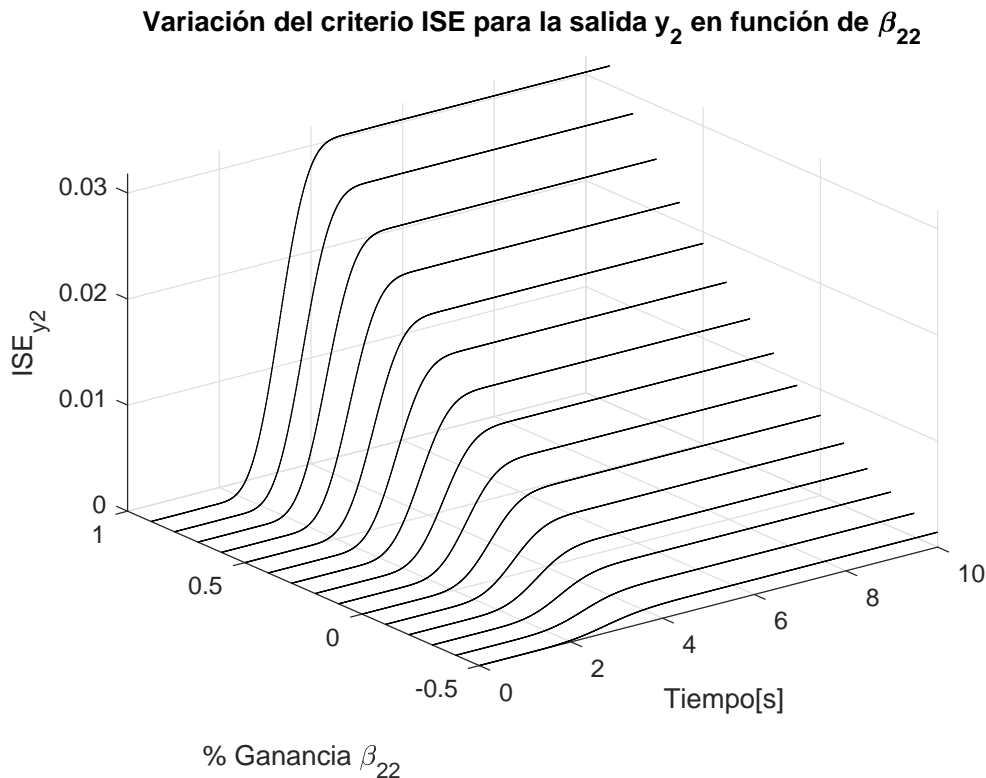
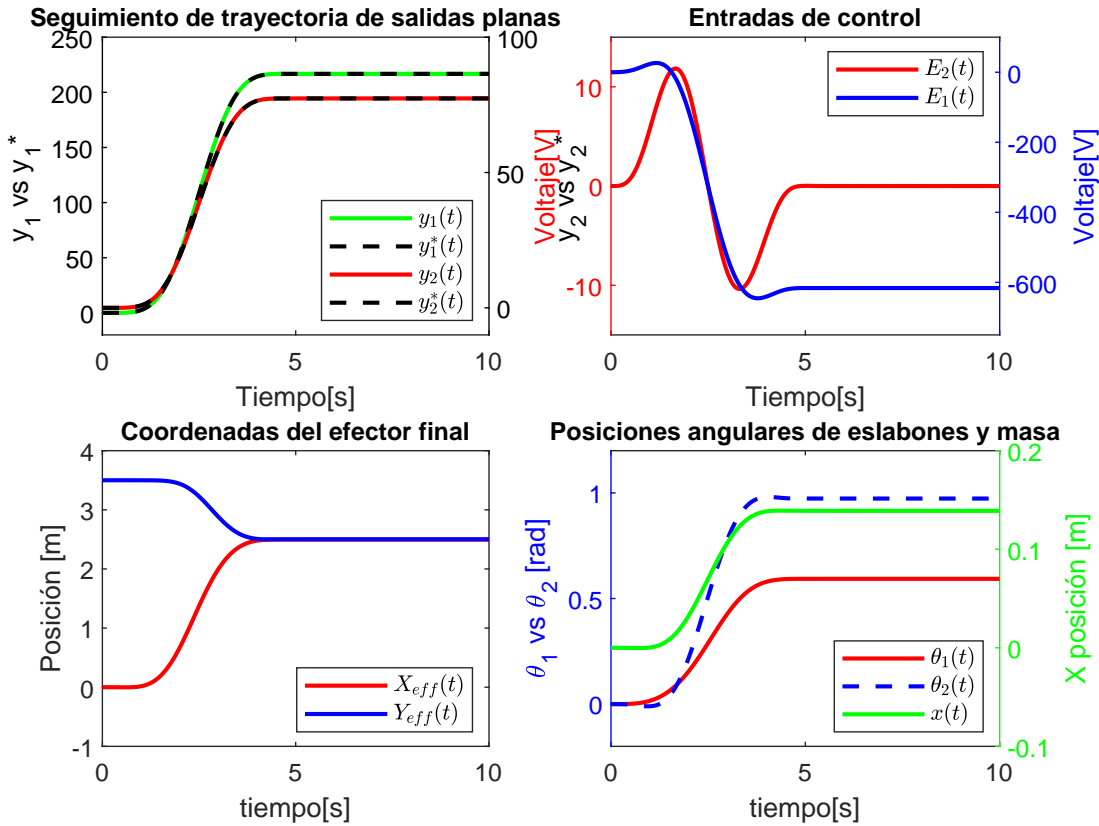


Figura 5.8: Variación del criterio ISE para salida y_2 . Variando β_{22}^* .

Tal como se observa en la Figura 5.8, la variación del criterio ISE es significativa para todo el barrido realizado sobre la ganancia β_{22}^* . Si se hace una variación incremental, el valor final del criterio ISE aumenta de manera aparentemente lineal. Este comportamiento sugiere que la sintonización realizada para el esquema ADRC de la salida y_2 responde de manera muy rápida ante variaciones de la señal de referencia. Si la ganancia que acompaña al control se incrementa, el efecto del esquema de control sobre la planta será mucho más agresivo y, considerando los valores del control, este efecto es perjudicial para el desempeño del sistema. Por otro lado, si se hace un barrido decremental de la ganancia β_{22}^* , se observa una reducción aparentemente lineal del valor final del criterio ISE. De igual manera que se explicó para la variación incremental, el efecto de reducir la ganancia del control sobre la respuesta del sistema implica una reacción del controlador menos agresiva ante variaciones de la referencia. A pesar de las variaciones significativas del valor final del criterio, el orden de magnitud es lo suficientemente pequeño como para afirmar un buen desempeño del esquema de control en todo el barrido de valores del parámetro.

Debido a que la variación del criterio ISE solo empeora en un sentido del barrido, se presentará solo una simulación correspondiente al peor caso de la Figura 5.8, el cual se puede observar en la Figura 5.9.

Como es de esperar, el sistema muestra una trayectoria muy similar a la obtenida para el sistema nominal. Se confirma que el sistema es robusto frente a variaciones razonables del parámetro β_{22}^* .


 Figura 5.9: Respuesta del sistema para el valor máximo de β_{22}^* .

5.1.4. Variación simultánea de los parámetros β_{11}^* , β_{21}^* y β_{22}^*

Si bien las pruebas de robustez realizadas pueden obedecer a la variación de uno de los parámetros de la planta que deriva en la variación de una de los parámetros de la arquitectura propuesta, es importante evaluar la combinación de dichas variaciones y realizar pruebas respecto a los cambios de las tres ganancias en simultáneo. Esto dará una visión más acertada de la robustez del sistema frente a las variaciones de todo su esquema teórico.

Tomando de nuevo el sistema 4.123, se pretende realizar una variación lineal de los 3 parámetros en simultáneo y, por simplicidad, se usará el mismo esquema planteado previamente donde las variaciones de los parámetros β_i serán de la forma:

$$\begin{aligned}\beta_{i \min}^* &= 50\% \cdot \beta_i^* \\ \beta_{i \max}^* &= 190\% \cdot \beta_i^*\end{aligned}\quad (5.4)$$

Siguiendo estos lineamientos se presentan las variaciones del parámetro ISE para las salidas y_1 y y_2 en las Figuras 5.10 y 5.11 respectivamente.

Es claro que el comportamiento de la suma de estas variaciones no implica, a priori, la suma del comportamiento de las variaciones, debido a que el controlador se está aplicando bajo una linealización al sistema no lineal. No obstante, se evidencia que las respuestas más fuertes presentadas previamente prevalecen sobre aquellas con variaciones más leves,

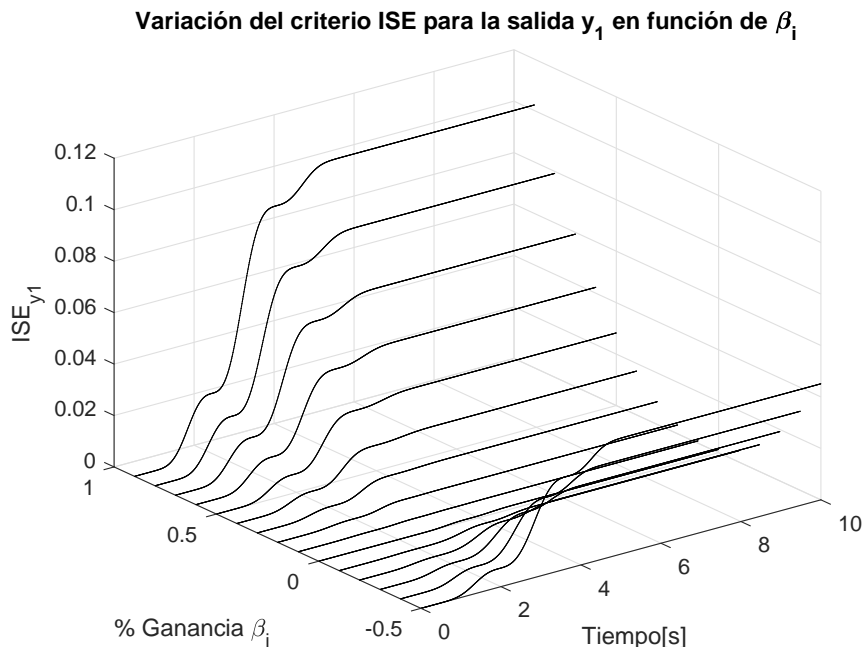


Figura 5.10: Variación del criterio ISE para salida y_1 . Variando β_i^* .

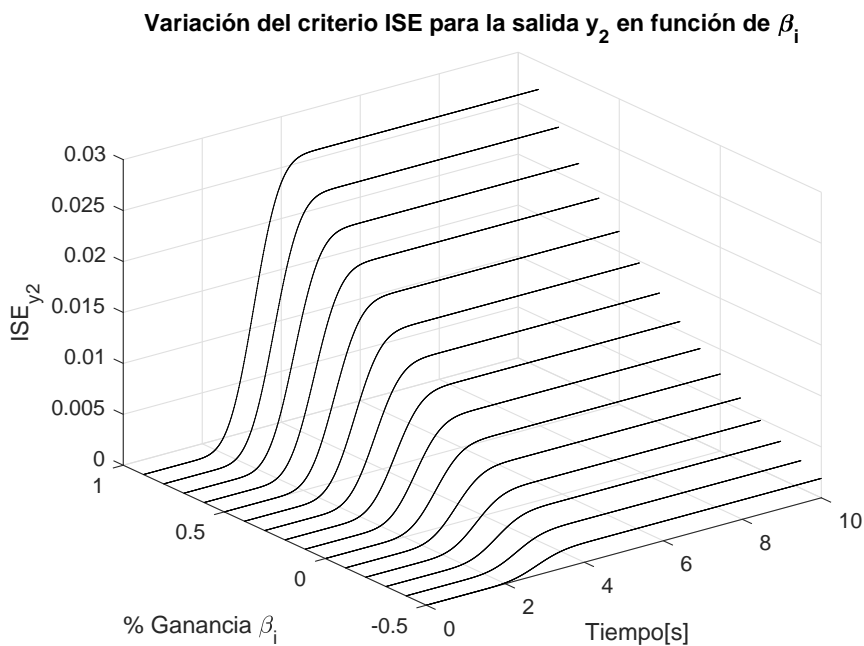


Figura 5.11: Variación del criterio ISE para salida y_2 . Variando β_i^* .

donde la variación del criterio ISE para la salida y_1 es similar en magnitud y forma a aquel obtenido en la Figura 5.1. Es claro que el punto con menos error es aquel sobre el valor nominal de las ganancias β_i ; mientras que para la salida y_2 se observa un comportamiento similar en magnitud y forma al obtenido en la Figura 5.8. En este se ve una mejoría al

disminuir el valor de β_i , conclusión similar a la que se había llegado previamente en la sección 5.1.3. Sería posible entonces ajustar el sistema basado en el criterio ISE a partir de la variación de los parámetros β_i , no obstante, no es un objetivo del presente trabajo por lo cual su desarrollo no será hecho.

Finalmente, y como se ha realizado en las secciones previas, es importante evaluar las respuestas de sistema frente a las variaciones máximas, tanto en decremento como en incremento de los parámetros β_i . Estas respuestas se pueden observar en las Figuras 5.12 y 5.13 respectivamente.

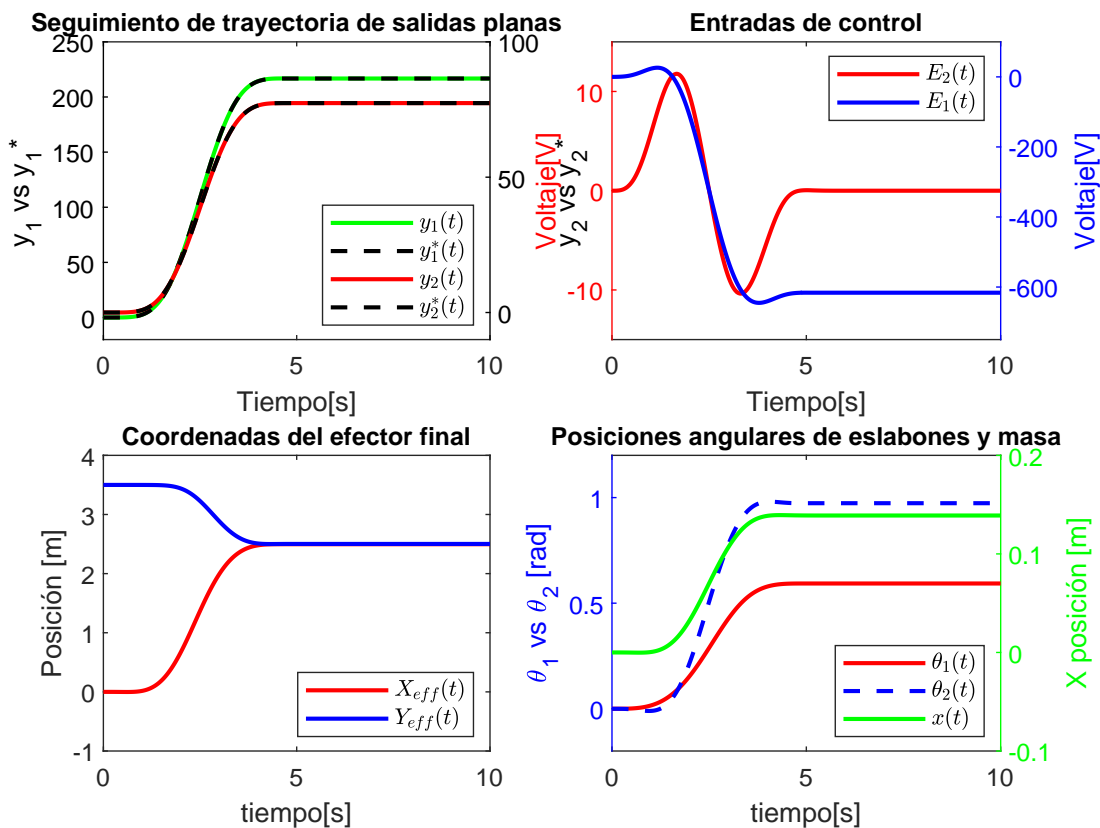


Figura 5.12: Respuesta del sistema para el valor mínimo de β_i^* .

Tal como se observa en las curvas de los criterios ISE de las Figuras 5.10 y 5.11, la mayor afectación se ve cuando las variaciones incrementan los valores de los parámetros β_i , debido a que al disminuirlas para una salida mejoran y para la otra empeoran. A pesar de esto, las respuestas obtenidas en las Figuras 5.12 y 5.13 no presentan variaciones visibles en el seguimiento de trayectoria, las señales de control, las trayectorias del efector final o las trayectorias de las posiciones generalizadas.

Es posible afirmar, una vez analizados los casos previos, que el sistema de control planteado bajo el esquema ADRC es robusto frente a las variaciones de los parámetros β_i y, por ende, robusto frente a las variaciones de los parámetros de la planta.

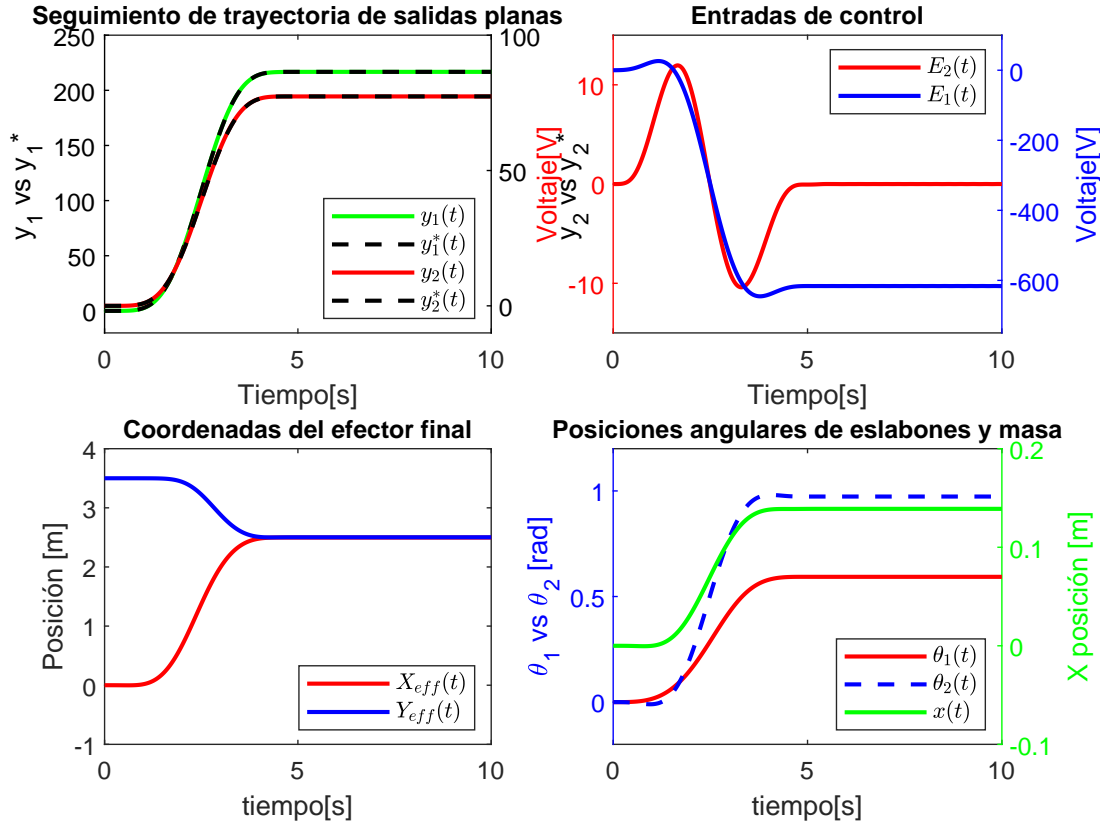


Figura 5.13: Respuesta del sistema para el valor máximo de β_i^* .

5.2. Desacoplamiento de los controles

Como se presentó en la sección anterior, la influencia del parámetro β_{21}^* sobre la salida y_2 presenta ventajas sobre la información que aporta al sistema controlado. A pesar de esto, se plantea hacer una separación de los controles asignando el término $\beta_{21}^* E_2$ a la perturbación ξ_2 , de tal manera que cada control esté asignado a una salida plana de manera independiente.

La presente sección presentará la simulación del sistema con un sistema de control de la forma

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}^* & 0 \\ 0 & \beta_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1\delta}^{(2)*} - \frac{\kappa_{21} s^2 + \kappa_{11} s + \kappa_{01}}{s(\kappa_{31} + s)} (y_{1\delta} - y_{1\delta}^*) \\ y_{2\delta}^{(4)*} - \frac{\kappa_{42} s^4 + \kappa_{32} s^3 + \kappa_{22} s^2 + \kappa_{12} s + \kappa_{02}}{s(s^3 + \kappa_{72} s^2 + \kappa_{62} s + \kappa_{52})} (y_{2\delta} - y_{2\delta}^*) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Esperando que el sistema conserve el seguimiento de trayectoria, la estabilización del efector final en una posición deseada.

5.2.1. Simulaciones

Así como se planteó la prueba de robustez previa, se utiliza la misma sintonización del sistema vista en 4.124, a fin de evaluar si es posible hacer un desacoplamiento de los controles, permitiendo un análisis de tipo SISO para el diseño de los esquema ADRC.

Usando entonces el esquema mostrado en 5.5 se obtiene la siguiente respuesta del sistema y de la estabilización del efector final.

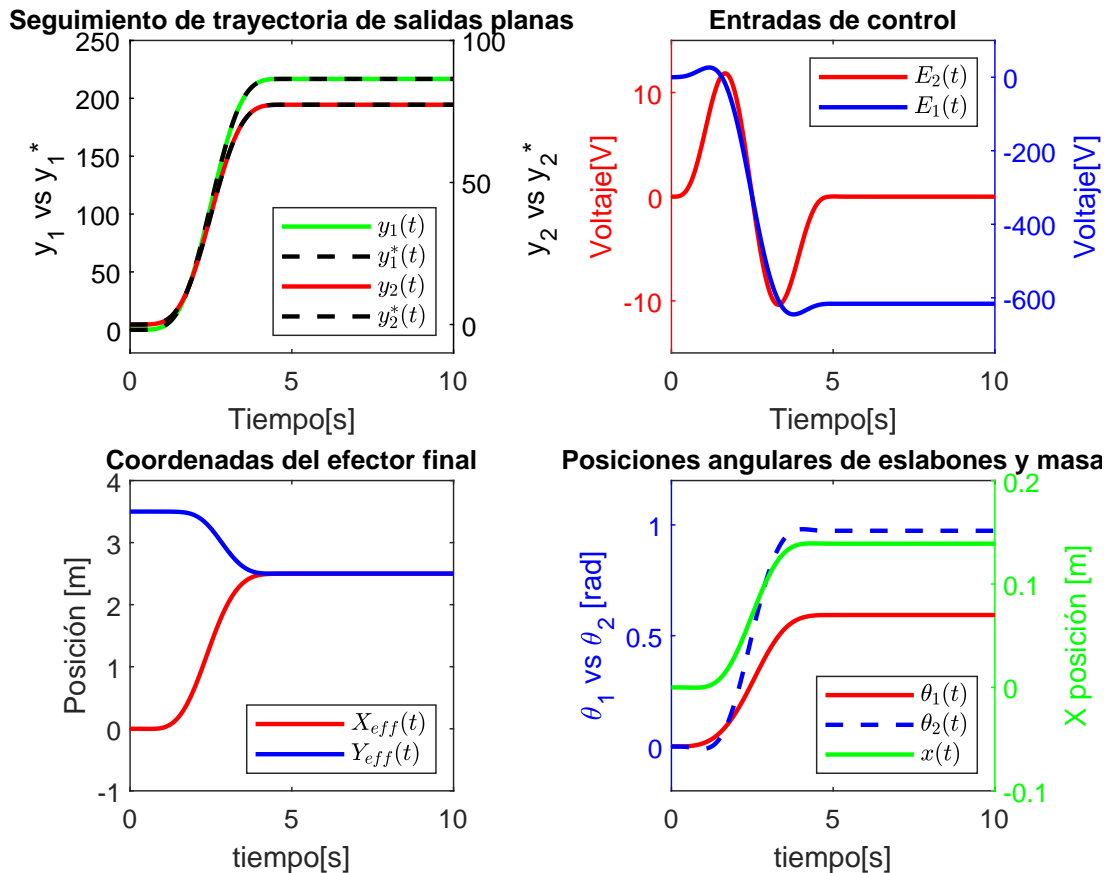


Figura 5.14: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado separando controles. Seguimiento de trayectoria.

Tal como se observa en la respuesta del sistema de la Figura 5.14 el desacoplamiento de los controles no afecta de manera significativa el comportamiento del sistema, permitiendo un seguimiento de trayectoria satisfactorio y logrando el objetivo de control de llevar el efector final a la posición deseada.

De igual manera, se observa en la Figura 5.15 que el error de seguimiento es mínimo y que los criterios ISE del sistema tienen escalas significativamente pequeñas. Es importante en este punto hacer una comparación de los criterios ISE entre el sistema simulado en la sección 4.4.3 respecto al que se está obteniendo acá. Se observa que el criterio ISE para la salida y_1 es prácticamente invariante respecto al sistema original, el cual es un resultado esperado debido a que la salida y_1 no tenía componentes del control E_1 . Por otro lado se evidencia un ligero incremento en el valor final del criterio ISE para la salida y_2 en

el sistema separado. Por lo tanto, se verifica la conclusión realizada en la sección 5.1.2, donde la inclusión del término $\beta_{21}^* E_2$ en la perturbación ξ_2 perjudica el seguimiento de trayectoria de la salida plana y_2 . De igual manera, se verifica la afirmación planteada en la sección 5.1.2, que establece que es posible realizar un desacoplamiento de los controles debido a las bajas variaciones del criterio ISE a partir del barrido de la ganancia β_{21}^* .

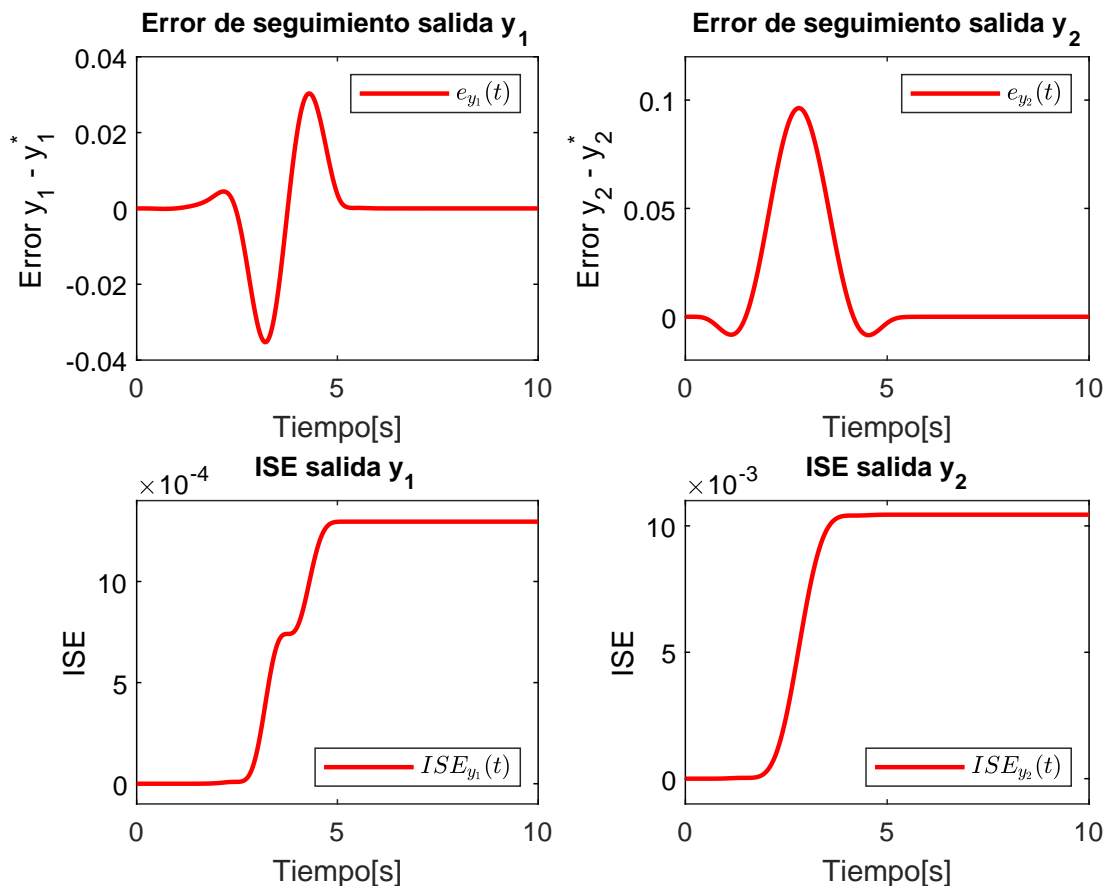


Figura 5.15: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado separando controles. Error de seguimiento.

Finalmente, es posible afirmar que el sistema es robusto a retirar información del modelo presente en el término $\beta_{21}^* E_2$ y mantener el cumplimiento del objetivo de control, realizando un mínimo sacrificio en el seguimiento de trayectoria de la salida plana y_2 .

5.3. Perturbación en la medición indirecta de la posición angular

Como se planteó en la sección 4.4.4, se puede realizar una medición indirecta de la posición angular a partir de la aceleración lineal del efector final y, por medio del proceso mostrado previamente, es posible hacer una estimación del ángulo θ_2 sin necesidad de una medición directa, la cual en la práctica puede llegar a complicarse. Sin embargo, el ejercicio

mostrado en la sección 4.4.4 es bastante ideal y no considera un aspecto fundamental de la metrología, y es la presencia de un ruido de medición que puede alterar el funcionamiento del sistema de control. Es por esto que una prueba de robustez para el sistema de control que se ha trabajado en el presente capítulo, es incluir un ruido de alta frecuencia y de magnitud moderada respecto a los valores de aceleración obtenidos en la simulación. El objetivo es medir las variaciones en el cálculo de la variable θ_2 respecto al estado proporcionado con la simulación y determinar si el objetivo de control se ve perjudicado por una medición con ruido.

Para la simulación se plantea usar un ruido de medición de tipo *ruido blanco* que ingresa en ambas mediciones, la medición lineal \ddot{X}_{eff} y \ddot{Y}_{eff} , tal que la medición virtual será de la forma:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_{eff} &= \ddot{x} + L_1[\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1] + L_2[\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2] + \tilde{\xi} \\ \ddot{Y}_{eff} &= -L_1[\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1] - L_2[\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2] + \tilde{\xi}\end{aligned}\quad (5.6)$$

Realizando la simulación podemos ver la diferencia entre las señales \ddot{X}_{eff} y \ddot{Y}_{eff} sin perturbación y perturbadas en la Figura 5.16.

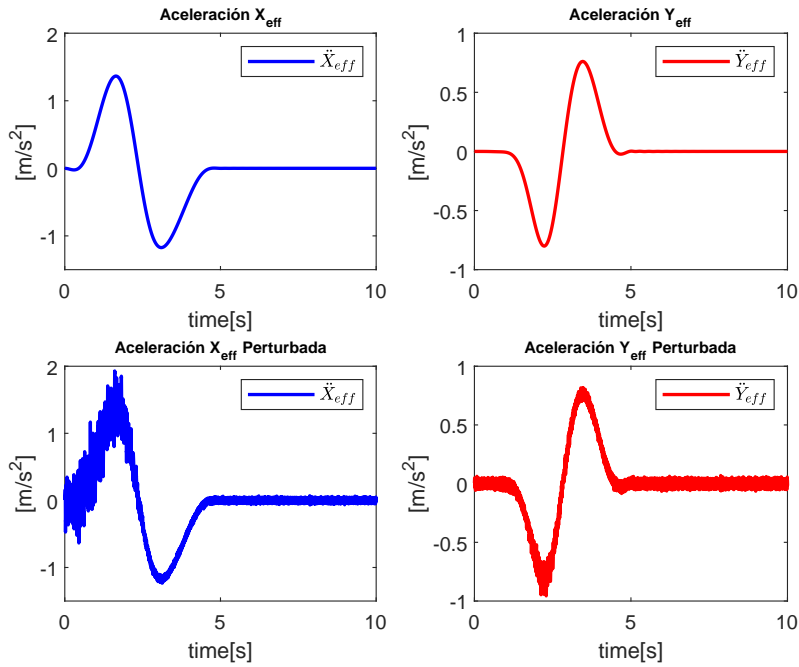


Figura 5.16: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado con ruido de medición. Señales de medición con y sin perturbación.

A partir de la perturbación del sistema se obtiene el siguiente cálculo de la variable $\hat{\theta}_2$ respecto al ángulo obtenido del estado del sistema, junto con el error de medición.

Como se puede observar, el error de medición presenta unas variaciones respecto al error obtenido en la Figura 4.24, mostrando errores de medición desde el tiempo $t = 0$, y acabando con una pendiente inversa a la obtenida previamente. El comportamiento del error de medición es esperado considerando que existe un ruido de medición, no obstante,

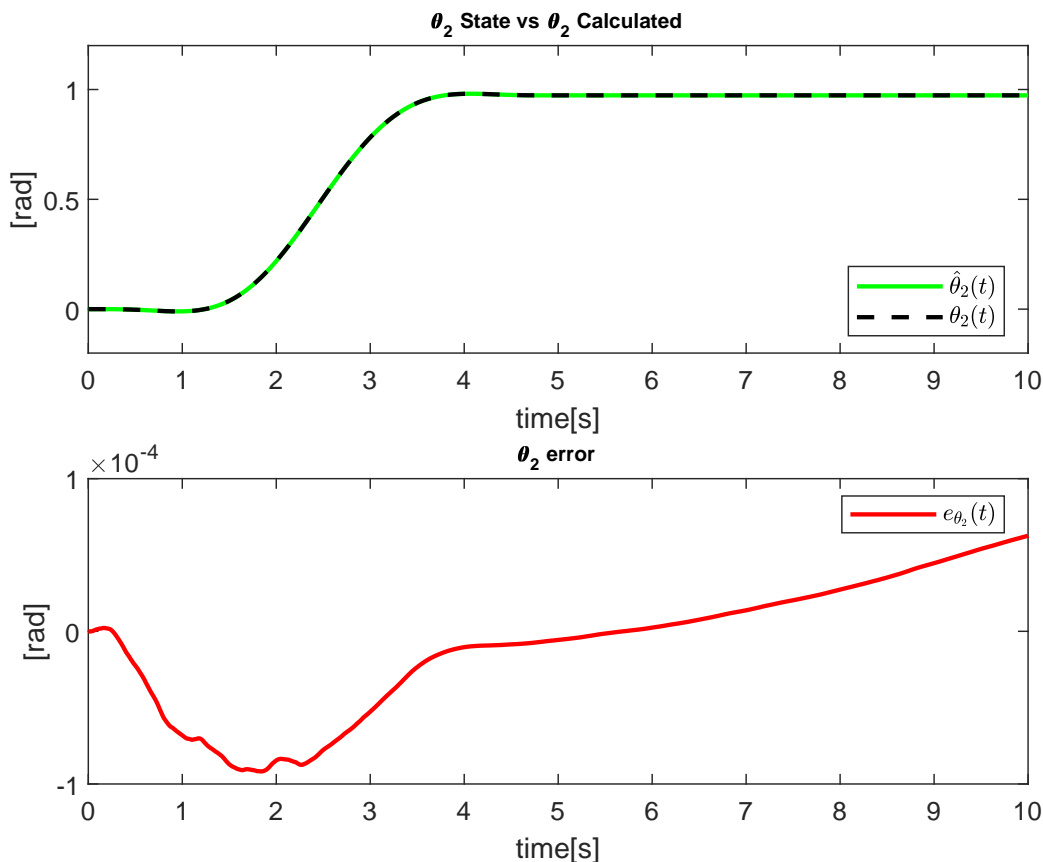


Figura 5.17: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado con ruido de medición. Medición indirecta de θ_2

a pesar de que el ruido es de una magnitud considerable como se vio en la Figura 5.16, el orden de magnitud del error de medición es aún despreciable respecto a los valores en los cuales el ángulo θ_2 se comporta.

De nuevo, se considera que existe un punto en la trayectoria en el que el triángulo virtual mostrado en la Figura 4.23 desaparece, por lo que existe un error constante, que al integrar se convierte en una recta. Este problema en la práctica no aparece debido a que el cálculo del ángulo es basado exclusivamente en la medición directa de los estados y no en la resolución de la ecuación diferencial, por lo que el ciclo algebraico que se forma se rompe, evitando la integración sobre errores de cálculo.

Finalmente es importante analizar el impacto que tiene la perturbación en el sistema y en la evolución de la respuesta. Este comportamiento se puede observar en la Figura 5.18, donde se puede concluir que el comportamiento del sistema responde al ruido de medición a través del control del sistema, exhibiendo ligeras variaciones en las señales de control, pero sosteniendo el sistema sobre la trayectoria deseada y cumpliendo el objetivo de control.

Con esto, se puede concluir que el esquema ADRC planteado es robusto frente a ruidos de medición de magnitud considerable, permitiendo un seguimiento de trayectoria adecuado.

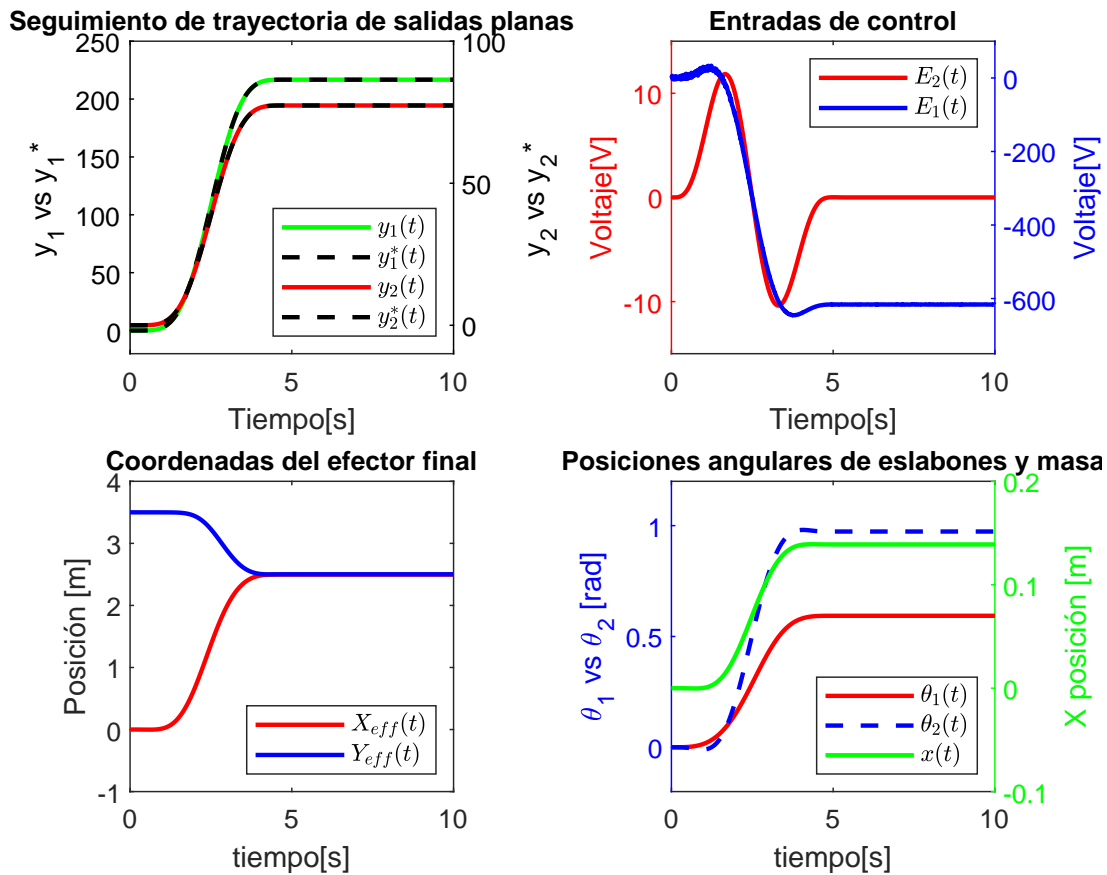


Figura 5.18: Simulación para sistema mecánico con motores, simplificado con ruido de medición. Seguimiento de trayectoria

5.4. Efecto de la variación de las condiciones iniciales

Es importante, además de la robustez frente a condiciones externas del sistema tales como el ruido y la robustez frente a condiciones internas del sistema tales como la variación de los parámetros de la planta, excitación de no linealidades y dinámicas no modeladas, verificar la robustez del sistema frente a las condiciones iniciales del sistema. Cabe recordar que el esquema de control trabajado surge de una linealización alrededor de un punto de equilibrio, modelo bajo el cual se han hecho numerosas suposiciones y simplificaciones y que, finalmente, es aplicado sobre el sistema no lineal. Es por esto que se espera que el comportamiento y la variación de las condiciones iniciales no sea de una amplitud que cubra un gran rango de escenarios de desempeño. Se espera que exista una región cercana al punto de equilibrio sobre la cual se puedan mover las tres condiciones iniciales de las posiciones: $x(0)$, $\theta_1(0)$ y $\theta_2(0)$; de modo que el sistema de control sea estable y se cumpla el objetivo de control producto del seguimiento de trayectoria de las salidas planas.

Para la demostración de la existencia de esa región, se realizó la variación de las condiciones iniciales del sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
-3 \times 10^{-3}[m] &\leq x(0) \leq 3 \times 10^{-3}[m] \\
-3 \times 10^{-3}[rad] &\leq \theta_1(0) \leq 3 \times 10^{-3}[rad] \\
-3 \times 10^{-3}[rad] &\leq \theta_2(0) \leq 3 \times 10^{-3}[rad]
\end{aligned} \tag{5.7}$$

La selección de estos rangos ha sido mediante una verificación previa de la estabilidad y del cumplimiento del objetivo de control bajo los valores máximos de las tres condiciones iniciales.

Una forma de comparar el impacto que tiene el movimiento de las condiciones iniciales en los rangos mostrados en 5.7, es comparando el criterio ISE obtenido para cada una de las simulaciones. Es por esto que se mostrarán, por simplicidad, extensiones paralelepípedas paso a paso de las condiciones iniciales y se mapeará en color el valor final del criterio ISE, a partir de la normalización con el valor máximo obtenido para todo el barrido de condiciones iniciales.

En la Figura 5.19 se puede observar el cambio del criterio para la salida y_1 a medida que se mueven las condiciones iniciales. En primer lugar se realizaron las simulaciones cubriendo el espectro descrito previamente y se ubicaron puntos en el espacio de tres dimensiones que representan las variedades sobre las cuales las condiciones iniciales se pueden mover. A cada punto en el espacio de las condiciones iniciales se le asigna un color respecto al valor final del criterio ISE para la salida correspondiente normalizado respecto a los valores máximos ISE obtenidos para todo el espectro de simulaciones realizado. Esta normalización proporciona un mejor indicio del comportamiento en comparación con las simulaciones realizadas más allá del valor final del criterio. En segundo lugar, dando conclusiones sobre la gráfica, es de esperar que entre mayor se alejen las condiciones iniciales del punto de linealización del sistema el criterio ISE tendrá que aumentar, sin embargo, se nota que no es un crecimiento homogéneo en todas las direcciones y que existen franjas donde aparentemente las condiciones iniciales pueden moverse sin representar un cambio tan drástico en el valor final del criterio. Por ejemplo, es notorio para todas las respuestas que entre más alejado se esté en la dirección negativa de $x(0)$ en conjunto con la dirección negativa de $\theta_1(0)$ el criterio empeora significativamente, al igual que sucede con ubicarse en la dirección positiva de $x(0)$ en conjunto con la dirección positiva de $\theta_1(0)$. Por otro lado, si estas dos condiciones iniciales tienen movimientos en direcciones opuestas, el compromiso en el criterio ISE se puede ver, pero en menor magnitud. Así mismo, podemos ver una franja color azul oscuro paralela al eje $\theta_1(0)$ sobre la cual las variaciones del criterio ISE son aparentemente mínimas, independientemente de las variaciones sobre $\theta_2(0)$.

Respecto a las variaciones en $\theta_2(0)$ no se ven muchos cambios, pero es posible afirmar que existen dos esquinas que demuestran un peor desempeño del sistema, en consecuencia con lo dicho previamente, si al movimiento en la misma dirección se suma $\theta_2(0)$, ya sea de manera positiva o negativa, en conjunto con las demás condiciones iniciales, se nota una desmejora en el desempeño del sistema. Para demás variaciones en $\theta_2(0)$ es prácticamente imperceptible.

El mismo análisis puede realizarse para la salida y_2 , donde el desempeño del sistema a partir de las variaciones de las condiciones iniciales se puede ver en la Figura 5.20.

Para este caso se observa que las variaciones del parámetro ISE no son muy grandes, sólo se ven perjudicados bajo las condiciones del movimiento de las 3 condiciones iniciales

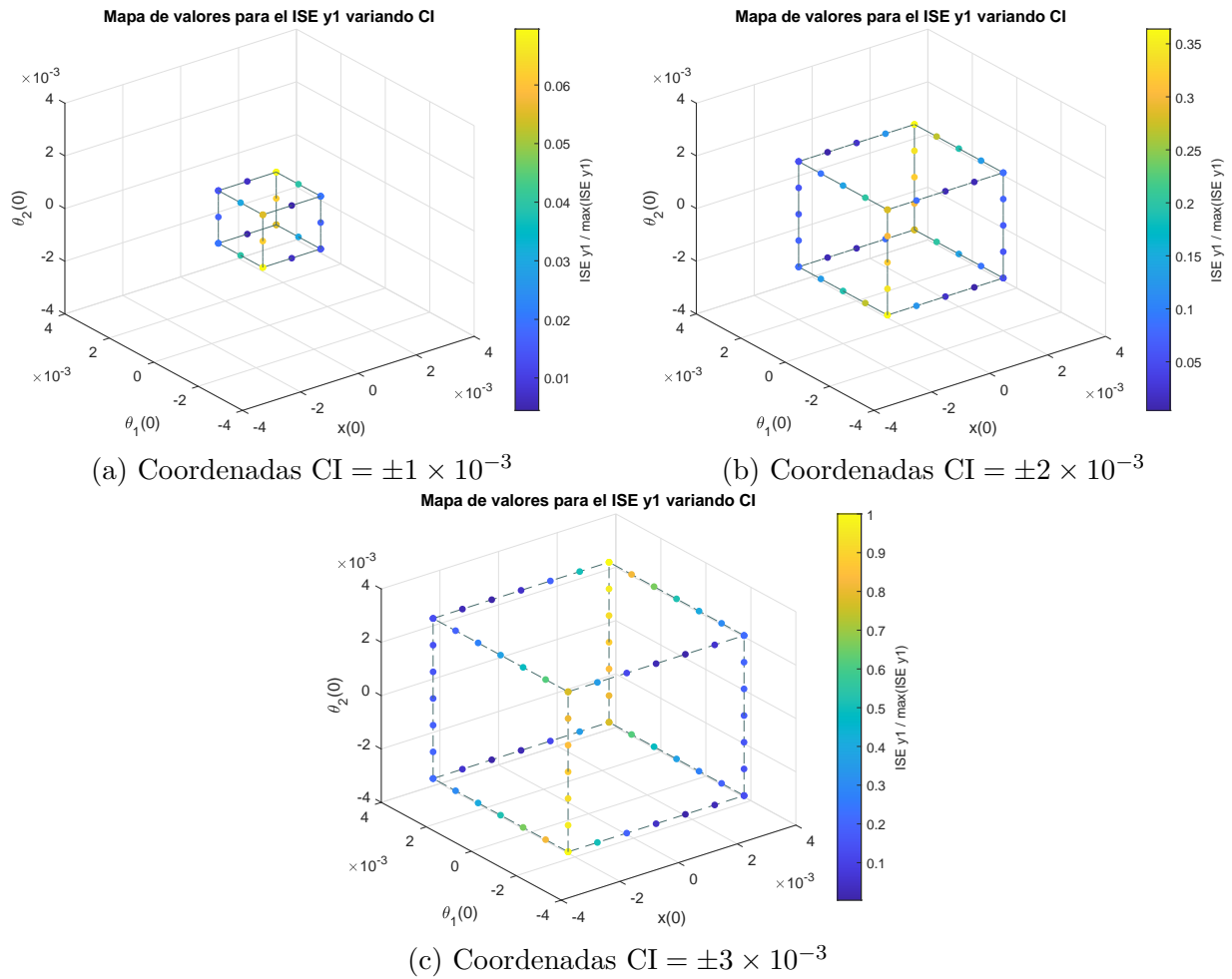


Figura 5.19: Variación del criterio ISE de la salida y_1 para evoluciones cúbicas con centro en el origen de las condiciones iniciales

en la misma dirección, es decir, $x(0)$, $\theta_1(0)$ y $\theta_2(0)$ moviéndose en dirección negativa o en dirección positiva, tal como lo muestran las esquinas en color amarillo. El resto del comportamiento es bastante aceptable. Estos resultados se respaldan bajo el observador de cada uno de los subsistemas de las salidas y_1 y y_2 . El observador del subsistema y_2 tiene ganancias significativamente más altas que las que tiene el observador de la salida y_1 , por lo que este tipo de perturbaciones pueden ser estimadas y posteriormente compensadas de mejor manera.

Finalmente, se puede observar la misma franja de conservación del criterio de desempeño vista en la Figura 5.19 pero esta vez representando una pequeña robustez sobre el movimiento en las condiciones iniciales de $\theta_1(0)$, mientras que previamente se veía una ligera robustez frente a movimientos en las condiciones iniciales de $x(0)$.

Por lo tanto, se puede afirmar que en una vecindad muy pequeña del punto de linealización es posible mover las condiciones iniciales del sistema sin que el desempeño del sistema se vea seriamente comprometido. Sin embargo, no es el tipo de robustez que se preferiría para este tipo de sistemas debido al pequeño margen de movimiento de las con-

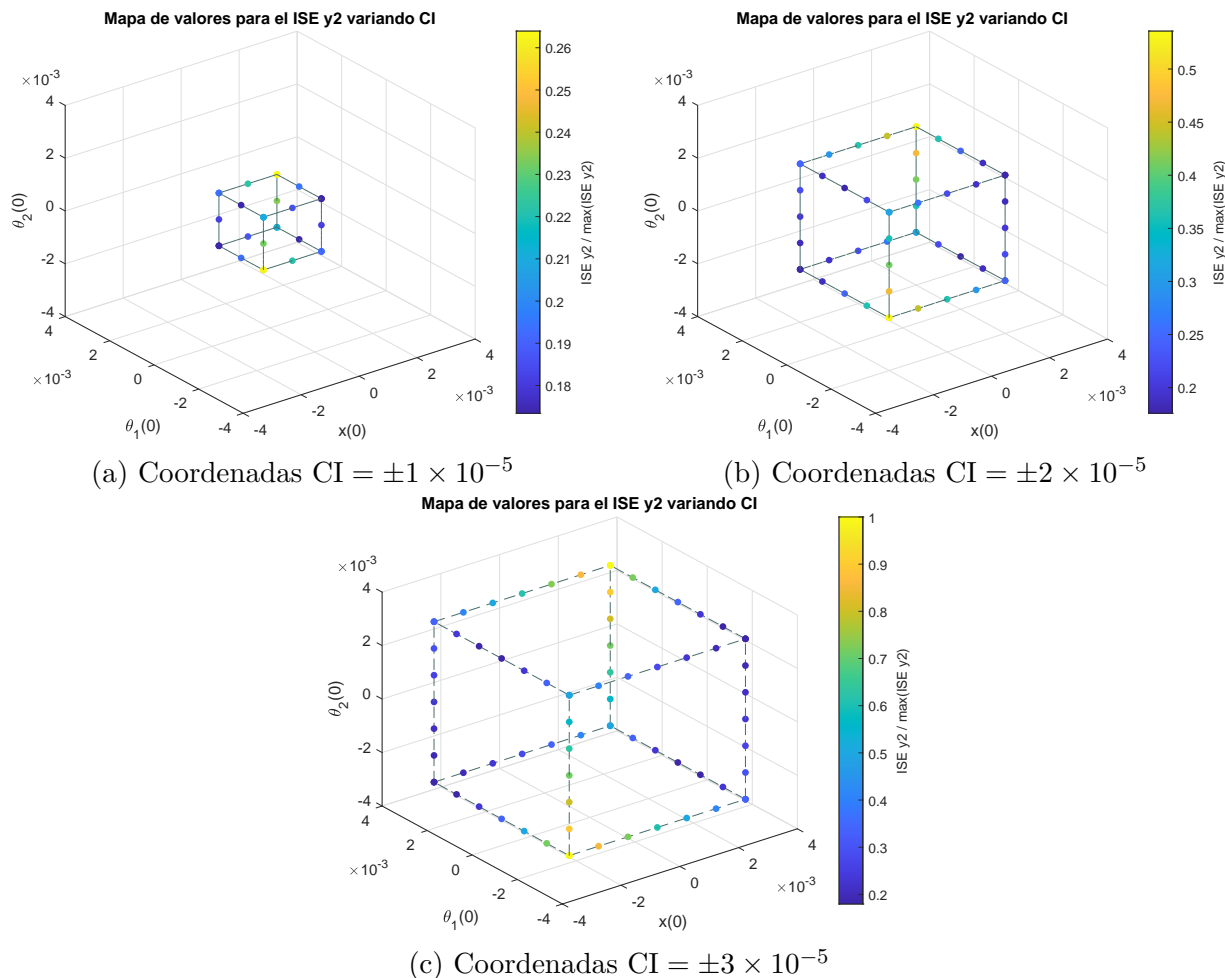


Figura 5.20: Variación del criterio ISE de la salida y_2 para evoluciones cúbicas con centro en el origen de las condiciones iniciales

diciones iniciales. No obstante, es importante mencionar que todas las pruebas de robustez fueron realizadas usando la misma sintonización mostrada en la sección 4.4.3 y usando la medición indirecta de la posición angular, por lo que, aún bajo los resultados obtenidos en esta sección, se puede afirmar que el sistema de control es lo suficientemente robusto frente a perturbaciones endógenas y exógenas del sistema. Es posible que mediante otra sintonización, que pueda comprometer el seguimiento de trayectoria, el margen de movimiento de las condiciones iniciales del sistema amplíe, pero perjudicando las características de robustez previamente presentadas.

5.5. Resumen del capítulo

El presente capítulo trata cuatro criterios de robustez que el esquema ADRC puede exhibir además del rechazo clásico de perturbaciones a la entrada. En primer lugar una robustez frente a la variación del parámetro β inherente al esquema ADRC, lo cual implica una robustez frente a la variación de los parámetros de la planta. En segundo lugar, la

posibilidad de hacer un desacoplamiento de los controles transformando el sistema MIMO en dos sistemas SISO de fácil análisis. En tercer lugar, la presencia de una perturbación en la medición que sirve para estimar el ángulo θ_2 . Finalmente, la variación de las condiciones iniciales del sistema. Se presentan simulaciones convincentes para cada una de las pruebas de robustez y se obtienen conclusiones respecto al desempeño del sistema.

Capítulo 6

Conclusiones

Como capítulo final se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo de tesis desarrollado, así como las aportaciones más importantes y relevantes, y los posibles trabajos futuros que deriven de esta tesis.

6.1. Conclusión del trabajo

Dentro del trabajo realizado a lo largo de la tesis se evidencian un par de conclusiones importantes. En primer lugar, es claro que el problema de control de estabilización de las variables de estado por medio del seguimiento de trayectoria de una salida plana es posible realizarlo de manera efectiva y sin complicaciones cuando la salida plana no tiene numerosas dependencias de los estados. Cuando esto ocurre, es necesario realizar operaciones adicionales para poder obtener trayectorias adecuadas que contengan la información de los estados involucrados en la salida. Por el contrario, si la salida depende de pocos de los estados, la estabilización es un problema trivial al seleccionar de manera adecuada los puntos de estabilización en función de los valores de la salida plana.

Por otro lado, se comprueba la posibilidad de transformar un sistema por medio de una escalización temporal adecuada, tal que el sistema resultante sea homótopo al sistema original. Esto presenta ventajas al momento de contemplar sistemas con ganancias complejas y, en el caso de sistemas no lineales, dependientes del estado.

Consecuentemente, se debe afirmar que el esquema propuesto por rechazo activo de perturbaciones permite de manera innegable cumplir el objetivo de control de posicionamiento del efector final del mecanismo utilizado a través del seguimiento de trayectoria de la salida plana, realizando maniobras suaves tanto en la evolución de los estados como en los controles. Además, el esquema propuesto es ampliamente robusto, siendo un control lineal aplicado a un sistema no lineal, y demostrando su capacidad para soportar perturbaciones endógenas, generadas por las dinámicas modeladas y las no modeladas debido a la linealización; perturbaciones exógenas acopladas, ingresadas de manera artificiosa al sistema; perturbaciones exógenas no acopladas tales como los ruidos de medición; perturbaciones endógenas debido a la posible variación de los parámetros de la planta y, por consiguiente, falta de información de la misma; y desacoplamientos de los sistemas, de tal manera que se puede simplificar el esquema de control de un sistema MIMO a una serie

de esquemas SISO.

Finalmente se concluye que el esquema no presenta un comportamiento amplio deseado respecto al movimiento de las condiciones iniciales del sistema, sin embargo, se evidencia que existen ciertas direcciones en las cuales dichos movimientos son más factibles, permitiendo un margen más amplio de trabajo.

6.2. Aportaciones

Las principales aportaciones de este trabajo

- Propuesta de un controlador ADRC lineal para controlar un sistema no lineal bajo la aproximación lineal de la planta y la aproximación de primer orden del par de motores DC.
- Propuesta de una medición indirecta de la variable no actuada θ_2 a partir de la medición de la aceleración lineal del efector final.
- Propuesta de un control lineal robusto frente a perturbaciones acopladas a la entrada que tienen componentes de baja frecuencia.
- Propuesta de un control lineal robusto frente a ruido de medición de magnitud considerable en la propuesta de sensado de la aceleración del efector final.
- Propuesta de un control lineal robusto frente a variaciones amplias de los parámetros de la planta reflejadas en variaciones de las ganancias del control.
- Propuesta de un control lineal desacoplado que permite la interpretación, desde el punto de vista del control, de analizar un sistema MIMO como varios sistemas SISO independientes.
- Se facilitan códigos del software Matlab para realizar, de manera automatizada, varios de los procesos de complejidad matemática que se estudiaron en este trabajo de tesis.

6.3. Trabajo Futuro

Respecto al trabajo futuro que puede realizarse a partir de esta investigación se proponen los siguientes puntos:

- Diseño de una planta escalizada de forma adecuada para pruebas de laboratorio.
- Realizar la sintonización del control para la planta escalizada.
- La implementación en forma experimental del sistema de control final seleccionado como propuesta definitiva.

-
- Validar las pruebas de robustez generadas en el trabajo presentado junto a la planta experimental.
 - Proponer esquemas que permitan un margen de movimiento más amplio de las condiciones iniciales, dentro de los cuales están la saturación temporal del control al iniciar el movimiento, de tal manera que el impacto del control no desestabilice el sistema al arranque.
 - Realizar las pruebas, tanto en simulación como en forma experimental, de robustez para condiciones simultáneas, que permitan evidenciar la robustez del sistema de control frente a perturbaciones combinadas.

Bibliografía

- [1] Pranjal Sharma. Mechatronics moves the world | Business Standard Column, 2019.
- [2] Ford Company. The Moving Assembly Line, Disponible en: <https://corporate.ford.com/articles/history/moving-assembly-line.html>.
- [3] BostonDynamics. About | Boston Dynamics, Disponible en: <https://www.bostondynamics.com/about>.
- [4] Mark W. Spong. The control of underactuated mechanical systems. In *1st International Conference on Mechatronics*, Mexico City, 1994.
- [5] Mark W. Spong. Underactuated mechanical systems. In *Control Problems in Robotics and Automation*, pages 135–150. Springer-Verlag, London, 2005.
- [6] Mark W. Spong. Energy Based Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 29(1):2828–2832, jun 1996.
- [7] M. Reyhanoglu, A. van der Schaft, N.H. McClamroch, and I. Kolmanovsky. Nonlinear control of a class of underactuated systems. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1682–1687, Kobe, 1996. IEEE.
- [8] K.Y. Wichlund, O.J. Sordalen, and O. Egeland. Control properties of underactuated vehicles. In *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 2009–2014, Nagoya, 1995. IEEE.
- [9] N.E. Leonard. Control synthesis and adaptation for an underactuated autonomous underwater vehicle. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 20(3):211–220, jul 1995.
- [10] Yang Liu and Hongnian Yu. A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory & Applications*, 7(7):921–935, may 2013.
- [11] Yongchun Fang, Bojun Ma, Pengcheng Wang, and Xuebo Zhang. A Motion Planning-Based Adaptive Control Method for an Underactuated Crane System. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(1):241–248, 2011.
- [12] DongBin Lee, C. Nataraj, Timothy C. Burg, and Darren M. Dawson. Adaptive tracking control of an underactuated aerial vehicle. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 2326–2331. IEEE, jun 2011.

-
- [13] Abhaya Pal Singh, Faruk S. Kazi, N.M. Singh, and Pallavi Srivastava. PI α D β controller design for underactuated mechanical systems. In *2012 12th International Conference on Control Automation Robotics & Vision (ICARCV)*, pages 1654–1658, Guangzhou, dec 2012. IEEE.
- [14] Zhijian Sun, Guoqing Zhang, Yu Lu, and Weidong Zhang. Leader-follower formation control of underactuated surface vehicles based on sliding mode control and parameter estimation. *ISA Transactions*, 72:15–24, jan 2018.
- [15] H. Sira-Ramirez and Z. Gao. Flatness based ADRC control of lagrangian systems: A moving crane. *IFAC*, 53(2):1337–1342, 2020.
- [16] John Cortés-Romero, Alberto Luviano-Juárez, and Hebertt Sira-Ramírez. A delta operator approach for the discrete-time active disturbance rejection control on induction motors. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2013.
- [17] Qing Zheng and Zhiqiang Gao. On practical applications of active disturbance rejection control. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference, CCC'10*, pages 6095–6100, 2010.
- [18] Horacio Coral-Enriquez, G. A. Ramos, and John Cortes-Romero. Power factor correction and harmonic compensation in an active filter application through a discrete-time active disturbance rejection control approach. *Proceedings of the American Control Conference*, 2015-July:5318–5323, 2015.
- [19] Efraín Hernandez Florez. *Consenso en el control de sistemas subactuados inestables (MSc Thesis)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, 2018.
- [20] M. Ramirez-Neria. *Control Mediante Rechazo Activo de Perturbaciones de Sistemas Mecánicos Subactuados No Lineales (PhD Thesis)*. 2017.
- [21] Mario Ramírez-Neria, Hebertt Sira-Ramírez, Alberto Luviano-Juárez, and Alejandro Rodríguez-Ángeles. Active Disturbance Rejection Control Applied To A Delta Parallel Robot In Trajectory Tracking Tasks. *Asian Journal of Control*, 17(2):636–647, mar 2015.
- [22] Mario Ramírez-Neria, Hebertt Sira-Ramírez, Rubén Garrido-Moctezuma, and Alberto Luviano-Juárez. On the Linear Control of Underactuated Nonlinear Systems Via Tangent Flatness and Active Disturbance Rejection Control: The Case of the Ball and Beam System. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 138(10), oct 2016.
- [23] M. Ramirez-Neria, H. Sira-Ramirez, R. Garrido-Moctezuma, A. Luviano-Juarez, and Z. Gao. Active Disturbance Rejection Control for Reference Trajectory Tracking Tasks in the Pendubot System. *IEEE Access*, pages 1–1, 2021.
- [24] Carlos Aguilar-Ibanez, Hebertt Sira-Ramirez, and Miguel S. Suarez-Castanon. A Linear Active Disturbance Rejection Control for a Ball and Rigid Triangle System. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016:1–11, 2016.

- [25] H. Sira-Ramírez, E. W. Zurita-Bustamante, and E. Hernández-Flores. On the ADRC of Non-Differentially Flat, Underactuated, Nonlinear Systems: An Experimental Case Study. In *Volume 9: 13th ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*. American Society of Mechanical Engineers, aug 2017.
- [26] Wenchao Xue and Yi Huang. Performance analysis of active disturbance rejection tracking control for a class of uncertain LTI systems. *ISA Transactions*, 58:133–154, 2015.
- [27] Carlos Aguilar-Ibañez, Hebertt Sira-Ramirez, and José Ángel Acosta. Stability of active disturbance rejection control for uncertain systems: A Lyapunov perspective. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(18):4541–4553, dec 2017.
- [28] John Cortés-Romero, Alexander Jimenez-Triana, Horacio Coral-Enriquez, and Hebertt Sira-Ramírez. Algebraic estimation and active disturbance rejection in the control of flat systems. *Control Engineering Practice*, 61:173–182, apr 2017.
- [29] H. Sira-Ramírez, M. A. Aguilar-Orduña, and E. W. Zurita-Bustamante. On the sliding mode control of MIMO nonlinear systems: An input-output approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3):715–735, 2019.
- [30] Hebertt Sira-Ramirez, Eric William Zurita-Bustamante, and Congzhi Huang. Equivalence among flat filters, dirty derivative-based PID controllers, ADRC, and integral reconstructor-based sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 28(5):1696–1710, 2020.
- [31] Hebertt Sira-Ramírez, Mario Andres Aguilar-Orduña, and Brian C. Gómez-León. Active disturbance rejection control of nonlinear SISO Lagrangian systems via endogenous injections and exogenous feedback for trajectory tracking. *Control Theory and Technology*, 2021.
- [32] H. Sira-Ramírez and E.W. Zurita-Bustamante. On the equivalence between ADRC and Flat Filter based controllers: A frequency domain approach. *Control Engineering Practice*, 107:104656, feb 2021.
- [33] Xiaohui Qi, Jie Li, Yuanqing Xia, and Hui Wan. On stability for sampled-data nonlinear ADRC-based control system with application to the ball-beam problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016.
- [34] Vladimir I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd ed., volume 60. Springer-Verlag New York, New York, 1989.
- [35] Michel Fliess, Jean Levine, Philippe Martin, and Pierre Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61(6), 1995.
- [36] R.H. Kalman. Contributions to the theory of time-optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5:102–119, 1960.

-
- [37] Alberto Isidori. *NonLinear Control Systems: An Introduction*. Springer, Berlin, 1985.
- [38] Hebertt Sira-Ramírez, Alberto Luviano-Juárez, Mario Ramírez-Neria, and Eric William Zurita-Bustamante. *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems: A Flatness Based Approach*. Elsevier Inc., first edit edition, 2017.
- [39] Roger W. Brockett. *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1970.
- [40] Hebertt Sira-Ramírez and Sunil Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, 2004.
- [41] Pauli Sipari and Blomberg Hans. Structured system models part 1. Controllability and observability indices. *International Journal of Systems Science*, 22(6):1047–1069, 1991.
- [42] Zhiqiang Gao, Yi Huang, and Jingqing Han. An alternative paradigm for control system design. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 5, 2001.
- [43] Zhiqiang Gao. Scaling and Bandwidth-Parameterization based Controller Tuning. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 6, 2003.
- [44] Jingqing Han. A Class of Extended State Observers for Uncertain Systems. *Control and Decision*, 10(1):85–88, 1995.
- [45] Jingqing Han. Auto-Disturbance Rejection Control and its Applications. *Control and Decision*, 13(1), 1998.
- [46] Jing-Qing Han. Nonlinear design methods for control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 32(2), 1999.
- [47] Congzhi Huang and H. Sira-Ramirez. A flatness based Active Disturbance Rejection Controller for the four tank benchmark problem. *Proceedings of the American Control Conference*, 2015-July(2508):4628–4633, 2015.
- [48] Rachel E. Bou Serhal and Hassan K. Khalil. Application of the extended high gain observer to underactuated mechanical systems. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4727–4732, 2012.
- [49] M. Ramírez-Neria, H. Sira-Ramírez, R. Garrido-Moctezuma, and A. Luviano-Juárez. Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the Furuta pendulum. *ISA Transactions*, 53(4), 2014.
- [50] Hebertt Sira-Ramirez, Eric William Zurita-Bustamante, and Mario Andres Aguilar-Orduna. Observer Based Sliding Mode Control: Equivalence with Classical Frequency Domain Control. In *2020 American Control Conference (ACC)*, pages 4313–4318. IEEE, jul 2020.
- [51] Jingqing Han. From PID to active disturbance rejection control. In *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, volume 56, 2009.

-
- [52] David G. Luenberger. An Introduction to Observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):596–602, 1971.
- [53] A. Chelouah. Extensions of differential flat fields and Liouvillian systems. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 5(January 1998):4268–4273, 1997.
- [54] Hebertt Sira-Ramirez. On the control of the variable length pendulum. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2(December):1188–1189, 1999.
- [55] Hebertt Sira-Ramirez. Non-minimum phase output reference trajectory tracking for a PVTOL aircraft. *IEEE Conference on Control Applications - Proceedings*, 1:838–843, 2000.
- [56] Robert L. Anderson and Nail H. Ibragimov. *Lie-Bäcklund Transformations in Applications*. 1979.
- [57] Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin, and Pierre Rouchon. A lie-bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):922–937, 1999.
- [58] Michel Fliess, Jean Levine, Philippe Martin, and Pierre Rouchon. Nonlinear control and Lie-Backlund transformations: towards a new differential geometric standpoint. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, 1994.
- [59] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge, 2002.
- [60] Friedrich Pfeiffer. *The Art of Modeling Mechanical Systems*, volume 570 of *CISM International Centre for Mechanical Sciences*. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [61] E. W. Zurita-Bustamante, A. Luviano-Juárez, and H. Sira-Ramírez. On the Robust Flat-Filtering Control of MIMO nonlinear systems: The PMSM Experimental Case Study. *Proceedings of the American Control Conference*, 2018-June:6755–6760, 2018.

Apéndices

Apéndice A

Generación de trayectoria

La generación de una trayectoria adecuada es fundamental en el problema de control, debido a que la mala selección de la misma puede generar problemas de inestabilidad o de incumplimiento de los objetivos de control. Para el trabajo presente se utilizó una técnica basada en polinomios de Bèzier para la generación de trayectorias de tipo descanso-descanso, de diferentes órdenes según lo requiera el sistema de control.

El objetivo principal de la generación de la trayectoria de tipo descanso-descanso, es que las k -ésimas derivadas de la trayectoria en los tiempos t_i y t_f sean cero. Para esto se plantea un polinomio de la forma:

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^p \left(\sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j \left[\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right]^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j \left[\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right]^{j+p} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Donde,

- t_i = Tiempo inicial de la maniobra.
- t_f = Tiempo final de la maniobra.
- q, p = Constantes que determinan el orden del polinomio, p para el arranque de la maniobra y q para el final de la maniobra.

Tal que la siguiente función

$$y(t) = \begin{cases} y_i & \text{si } t < t_i \\ y_i + (y_f - y_i) \times f^*(t) & \text{si } t_i \leq t \leq t_f \\ y_f & \text{si } t > t_f \end{cases}$$

es una interpolación entre los puntos y_i y y_f deseados.

Es evidente que la condición de las k -ésimas derivadas en $t = t_i$ está cubierta haciendo $p = k$. No obstante, para $t = t_f$ es necesario derivar la función $f^*(t)$ e igualarla a cero para $t = t_f$. Por simetría, se igualan entonces $p = q$ para que los órdenes en los cuales las derivadas se hacen cero sean los mismos.

En primer lugar se iguala la ecuación sin derivar a 1, debido a que la interpolación entre y_i y y_f necesita que cuando $t = t_f$, $f^*(t_f) = 1$. Luego se igualan las derivadas a cero, generando el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\left. \frac{d^\mu}{dt^\mu} f^*(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j \alpha_j V_{p+j,\mu}}{(t_f - t_i)^\mu} \left[\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right]^{j+p-\mu} \right|_{t=t_f} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Donde la función $V_{r,s}$ es la variación de r elementos sobre s , definida como

$$V_{r,s} = \frac{r!}{(r-s)!} = \prod_{j=0}^{s-1} (r-j)$$

Lo cual conlleva a una representación lineal de la forma

$$\mathbf{A}_{p \times p} \cdot \alpha_{p \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Donde, α es un vector columna de la forma $\alpha = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{p-1}]$, y los coeficientes de la matriz \mathbf{A} son de la forma:

$$a_{i,j} = \frac{(-1)^{j-1} V_{p+j-1,i-1}}{(t_f - t_i)^{i-1}}$$

Por lo tanto, basta que la matriz \mathbf{A} de la ecuación A.3 sea no singular para obtener la solución a los coeficientes.

$$\alpha_{p \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_{p \times p}^{-1} \quad (\text{A.4})$$

Este proceso fue automatizado para el trabajo realizado en la siguiente función:

```

1 function [BezierPolynomialSym,BezierDerivativesVect,BezierCoeff] =
   BezierPolynomial(iOrderOfPoly,ti,tf)
2 % Esta funcion recibe el orden del polinomio deseado y los tiempos de
   inicio y final.
3 % Genera como salida un polinomio simbolico, el vector de ecuaciones
   lineales de las derivadas del polinomio
4 % y un vector de coeficientes del polinomio.
5
6 % Entradas
7 % iOrderOfPoly [int]: Orden del polinomio
8 % ti[int]: Tiempo inicial de la maniobra
9 % tf[int]: Tiempo final de la maniobra
10
11 % Salidas
12 % BezierPolynomialSym[sym]: Polinomio de Bezier simbolico
13 % BezierDerivativesVect[sym Vector]: Vector de derivadas del polinomio
14 % BezierCoeff[float Vector]: Vector de valores alpha del polinomio
15 syms t
16 if iOrderOfPoly < 3
17     error('La dimension del polinomio no es posible.');
```

```

19     p = iOrderOfPoly;
20     A(p,p) = 0;
21     for i=1:p
22         for j=1:p
23             A(i,j) = (-1)^(j-1)*(factorial(p+j-1)/factorial(p+j-1-i+1))
/(tf-ti)^(i-1);
24         end
25     end
26     alpha = A\[1;zeros(p-1,1)];
27     Bt = 0;
28     for j=0:p-1
29         Bt = Bt + (-1)^j*alpha(j+1)*((t-ti)/(tf-ti))^(p+j);
30     end
31     BezierPolynomialSym = Bt;
32     BezierDerivativesVect(p-1) = sym(0);
33     for i=1:p-1
34         Bt = diff(Bt,t);
35         BezierDerivativesVect(i) = Bt;
36     end
37     BezierCoeff(p,2*p)=0;
38     BezierCoeff(1,:)=sym2poly(expand(BezierPolynomialSym));
39     for i=1:p-1
40         BezierCoeff(i+1,i+1:end) = sym2poly(expand(BezierDerivativesVect
(i)));
41     end
42 end
43 end

```

La función otorga los coeficientes necesarios para generar la trayectoria y sus derivadas, la cual está especificada para una salida como la siguiente función (ejemplo para obtener hasta la derivada 4ta).

```

1 function [y,dy,d2y,d3y,d4y] = BezierTrajectory(t,iOrderOfPoly,CoeffsY,tStart
,tEnd,yStart,yEnd)
2     y = yStart;
3     dy = 0;
4     d2y = 0;
5     d3y = 0;
6     d4y = 0;
7     if t<tStart
8         y = yStart;
9         dy = 0;
10        d2y = 0;
11        d3y = 0;
12        d4y = 0;
13    else
14        if t>=tStart && t<=tEnd
15            for i=0:2*iOrderOfPoly-1
16                y = y + t^i*CoeffsY(1,2*iOrderOfPoly-i);
17                dy = dy + t^i*CoeffsY(2,2*iOrderOfPoly-i);
18                d2y = d2y + t^i*CoeffsY(3,2*iOrderOfPoly-i);
19                d3y = d3y + t^i*CoeffsY(4,2*iOrderOfPoly-i);
20                d4y = d4y + t^i*CoeffsY(5,2*iOrderOfPoly-i);
21            end
22            y = yStart + (yEnd-yStart)*y;

```

```

23     dy = (yEnd-yStart)*dy;
24     d2y = (yEnd-yStart)*d2y;
25     d3y = (yEnd-yStart)*d3y;
26     d4y = (yEnd-yStart)*d4y;
27     else
28         y = yEnd;
29         dy = 0;
30         d2y = 0;
31         d3y = 0;
32         d4y = 0;
33     end
34 end
35 end

```

Donde se puede extender hasta la derivada n -ésima, mientras sea posible efectuar la operación mostrada en A.4.

Para el caso particular del manipulador móvil subactuado provisto de unión flexible, el proceso a realizar consiste en obtener la solución del sistema de ecuaciones provisto en A.5

$$\begin{aligned}
 0 &= m_2 g L_{c2} \sin \theta_2 - k(\theta_2 - \theta_1) \\
 X_{eff} &= x + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 \\
 Y_{eff} &= L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Donde la primera ecuación corresponde al equilibrio de pares para cuando el sistema está en equilibrio, mientras que las dos restantes corresponden a las ecuaciones del efector final. Por lo tanto, dadas posiciones finales del efector final, es posible obtener la solución para las variables x , θ_1 y θ_2 tal que el efector final llegue al valor deseado. Una vez obtenidas las posiciones de las variables posición generalizadas es posible obtener el valor de las salidas planas bajo la relación

$$Y = C^T x \tag{A.6}$$

Con Y el vector de salidas planas y x el vector de estados.

Apéndice B

Controlador-Observador ADRC

Como se vio en el capítulo 2, es posible obtener una función de transferencia para el controlador-observador en lazo cerrado de la forma:

$$e_{\delta}(s) = \frac{\sum_{i=1}^n \kappa_{n+i} s^i}{\sum_{i=0}^{2n} \kappa_i s^i} \xi(s) \quad (\text{B.1})$$

Que bajo manipulaciones ya descritas, deriva en la función que acompañará la señal de control,

$$e_{u\delta}(s) = \frac{\sum_{i=0}^n \kappa_i s^i}{s \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_{n+i+1} s^i} e_y(s) \quad (\text{B.2})$$

La función transferencia descrita en B.2 es fácilmente programable a partir de un único parámetro de entrada n , equivalente al orden del sistema. Para ello se creó la siguiente función

```
1 function [symControllerNum,symControllerDen,symControllerTf,  
2         symCharacteristicPoly] = ADRCController(iOrderOfSystem)  
3  
4 % Esta funcion obtiene las expresiones simbolicas para el controlador del  
5 % esquema ADRCController  
6  
7 % Entradas  
8 % iOrderOfSystem[int]: Orden del sistema  
9  
10 % Salidas  
11 % symControllerNum[sym]: Polinomio simbolico del numerador del controlador  
12 % symControllerDen[sym]: Polinomio simbolico del denominador del controlador  
13 % symControllerTf[sym]: funcion de transferencia simbolica del controlador  
14 % symCharacteristicPoly[sym]: Polinomio caracteristico simbolico del  
15 % controlador  
16  
17 iStart = 1;  
18 syms kappa_0 q  
19 if iOrderOfSystem < 2  
20     error('La funcion no permite entradas menores a 2');  
21 else  
22     syms(sym('kappa_%d',[iStart (2*iOrderOfSystem-1)]));  
23     kappa = [kappa_0 sym('kappa_%d',[iStart (2*iOrderOfSystem-1)]) 1];
```

```

20 end
21
22 % Controller Numerator
23 cn = 0;
24 for i = 0:iOrderOfSystem
25     cn = cn + kappa(i+1)*q^i;
26 end
27
28 % Controller denominator
29 cd = 0;
30 for i = (iOrderOfSystem+1):(2*iOrderOfSystem)
31     cd = cd + kappa(i+1)*q^(i-iOrderOfSystem-1);
32 end
33
34 % Characteristic Polynomial
35 cp = 0;
36 for i = 0:(2*iOrderOfSystem)
37     cp = cp + kappa(i+1)*q^i;
38 end
39
40 symControllerNum = cn;
41 symControllerDen = cd;
42 symControllerTf = (1/q)*(cn/cd);
43 symCharacteristicPoly = cp;
44 end

```

De igual manera, se creó una función genérica para obtener los valores de κ_i de la ecuación B.1 así,

```

1 function [iCharPoly, iNumerator, iDenominator] = ADRCNumeric(iOrderOfSystem,
    iObvPolesVector, iContPolesVector)
2 % Esta funcion devuelve los vectores numericos de la funcion de
    transferencia
3 % del controlador a partir de la ubicacion de polos del controlador y del
    observador.
4
5 % Entradas
6 % iOrderOfSystem[int]: Orden del sistema
7 % iObvPolesVector[float Vector]: Vector de polos del observador
8 % iContPolesVector[float Vector]: Vector de polos del controlador
9
10 % Salidas
11 % iCharPoly[float Vector]: Coeficientes del polinomio caracteristico del
    esquema ADRC
12 % iNumerator[float Vector]: Coeficientes del numerador del controlador
13 % iDenominator[float Vector]: Coeficientes del denominador del controlador
14 syms q
15 if iOrderOfSystem >= 2
16     if (iOrderOfSystem ~= length(iObvPolesVector) || iOrderOfSystem ~=
        length(iContPolesVector))
17         error('La dimension del sistema no corresponde al numero de
            polos del controlador o del obvservador.');
```

```

20         iNumeratorTemp = iCharPolyTemp(iOrderOfSystem+1:length(
iCharPolyTemp));
21         iDenominatorTemp = [iCharPolyTemp(1:iOrderOfSystem) 0];
22     end
23 elseif iOrderOfSystem < 1
24     error('La dimension del sistema no puede ser menor a 1');
25 else
26     iCharPolyTemp = conv(double(charpoly(diag(iObvPolesVector))), double(
charpoly(diag(iContPolesVector))));
27     iNumeratorTemp = iCharPolyTemp(iOrderOfSystem+2:length(iCharPolyTemp
));
28     iDenominatorTemp = [iCharPolyTemp(1:iOrderOfSystem+1) 0];
29 end
30 iCharPoly = iCharPolyTemp;
31 iNumerator = iNumeratorTemp;
32 iDenominator = iDenominatorTemp;
33 end

```

Así, es posible obtener los valores de las constantes κ_i que se usarán en la simulación. Un ejemplo de la aplicación de estos códigos se ve en el siguiente fragmento donde los polos están automatizados para un orden del sistema par.

```

1 syms sLap
2 relativeDegree = 6;
3 [symControllerNum, symControllerDen, symControllerTf, symCharacteristicPoly] =
ADRCController(relativeDegree);
4 wnCont = 0.5;
5 epsilon = 0.7;
6 zetaCont = 1;
7 iContPolesVector = roots(flip(coeffs(expand((sLap^2 +2*zetaCont*wnCont*sLap
+ wnCont^2)^(relativeDegree/2))))).');
8 wnFobv = wnCont/epsilon;
9 zetaObv = 1;
10 iObvPolesVector = roots(flip(coeffs(expand((sLap^2 +2*zetaObv*wnFobv*sLap +
wnFobv^2)^(relativeDegree/2))))).');
11 [iCharPoly, iNumerator, iDenominator] = ADRCNumeric(relativeDegree,
iObvPolesVector, iContPolesVector);

```


Apéndice C

Salida plana para sistemas lineales

Como se vio en desarrollo del modelaje, es necesario en ocasiones obtener las salidas planas para un sistema de orden significativamente grande en casos donde por inspección no sea posible obtenerla. Para ello se especificó un proceso en la Figura 3.4, el cual fue programado y descrito en el siguiente código.

```
1 % El siguiente codigo puede computar la matriz de salidas planas C para un
  % sistema lineal de la forma
2 %  $f(x) = Ax + Bu$ , donde A es de nxn y B es de nxm
3 % Son necesarias las matrices Amatrix y Bmatrix, el sistema verifica que es
  % controlable y posteriormente
4 % computa la matriz
5
6 nStates = size(Amatrix); %Numero de estados
7 nOutputs = size(Bmatrix); %Numero de salidas
8
9 % Computo de la matriz de controlabilidad clasica
10 ControllabilityMatrix = Bmatrix;
11 for i=1:nStates(1)-1
12     ControllabilityMatrix = [ControllabilityMatrix,(Amatrix^i)*Bmatrix];
13 end
14
15 % Computo de la matriz de controlabilidad reducida a partir de los indices
  % de Kronecker
16 if rank(ControllabilityMatrix) == nStates(1)
17     gamma = ones(1,nOutputs(2));
18     PartialContrMatrix = Bmatrix(:,1);
19     ReducedContrMatrix = Bmatrix;
20     ReducedContrMatrixFinal = Bmatrix(:,1);
21     kPos = 1;
22     for i=1:nOutputs(2)
23         for j=1:nStates(1)-nOutputs(2)
24             PartialContrMatrix = [ReducedContrMatrix,Amatrix^j*Bmatrix(:,i)
25 ];
26                 if rank(PartialContrMatrix) > rank(ReducedContrMatrix)
27                     ReducedContrMatrix = [ReducedContrMatrix,(Amatrix^j*Bmatrix
28 (:,i))];
29                     ReducedContrMatrixFinal = [ReducedContrMatrixFinal,(Amatrix^
30 j*Bmatrix(:,i))];
31                     gamma(kPos) = j+1;
```

```

29         else
30             break
31         end
32     end
33     if i<nOutputs(2)
34         ReducedContrMatrixFinal = [ReducedContrMatrixFinal,Bmatrix(:,i+1)
];
35     end
36     kPos = kPos + 1;
37     if rank(ReducedContrMatrix)==nStates(1)
38         ReducedContrMatrix = simplify(ReducedContrMatrix);
39         ReducedContrMatrixFinal = simplify(ReducedContrMatrixFinal);
40         break
41     end
42 end
43 else
44     disp('La matriz de controlabilidad no es de rango completo')
45 end
46
47 PhiMatrix = zeros(nOutputs(2),nStates(1));
48 accTemp = 0;
49 for i=1:nOutputs(2)
50     accTemp = accTemp + gamma(i);
51     PhiMatrix(i,accTemp) = 1;
52 end
53
54 % Computo de la matriz de salidas planas C
55 Cmatrix_yFlat = simplify(formula(PhiMatrix/(ReducedContrMatrixFinal)))

```

Se obtiene entonces la matriz $C_{m \times n}$ que genera las salidas planas del sistema.

Es importante mencionar que en la línea 23 es posible alterar el algoritmo tal que se reemplace

```
1 for j=1:nStates(1)-nOutputs(2)
```

Por

```
1 for j=1:nRelativeDegreeY(i)
```

Donde el vector $nRelativeDegreeY_{\{m \times 1\}} \in \mathbb{N}$, y el valor $nRelativeDegreeY(i)$ sea el grado relativo seleccionado a propósito de la salida i -ésima. Además, la suma de los componentes del vector $nRelativeDegreeY$ debe ser el orden del sistema. Estos grados relativos serán equivalentes a los índices de Kronecker.

Advertencia: La modificación mencionada debe tratarse con cuidado debido a que previamente se debe asegurar que es posible obtener columnas linealmente independientes para el índice de Kronecker seleccionado. De otra manera se debe seguir el proceso convencional. Es decir, sólo es posible seleccionar grados relativos para cada salida menores o iguales para los obtenidos por el método tradicional.

Apéndice D

Trayectoria a partir de iteraciones de estados

A partir de la necesidad de crear una trayectoria para las salidas planas a partir de las trayectorias de dos estados y sus derivadas como se vio en el capítulo 3.2.6 en la sección **Aproximación numérica**, se generó un código que generaliza el proceso bajo ciertas suposiciones, tales como los grados relativos de las salidas planas y el número de estados usados para generar la trayectoria.

La función toma como entrada la matriz A^{-1} de la ecuación 4.68 y el grado de la iteración como entradas fundamentales.

```
1 function [y1Equation,y2Equation,vectorY1,terms1,vectorY2,terms2] =
    SolveEquationIterativeTrajectory(orderIteration,matrixDipheo,rowab,rownc
    ,highestOrder)
2 % La funcion obtiene los coeficientes para las trayectorias de las salidas
    y_1 y y_2 a partir de la seleccion de
3 % 2 estados sState1 y sState2 bajo la premisa de que la salida y_1 es de
    grado relativo 6 y la salida y_2 es de grado relativo 2
4
5 % Entradas
6 % orderIteration[int]: Grado de la iteracion
7 % matrixDipheo[float matrix]: Matriz que relaciona los estados X y las
    entradas U con las salidas planas y sus derivadas
8 % rowab[int]: Fila correspondiente al estado sState1 de la matriz
    matrixDipheo
9 % rownc[int]: Fila correspondiente al estado sState2 de la matriz
    matrixDipheo
10 % highestOrder[int]: Maximo derivada obtenida para los estados sState1 y
    sState2.
11
12 % Salidas
13 % y1Equation[sym]: Ecuacion numerico-simbolica de la salida plana y_1
14 % y2Equation[sym]: Ecuacion numerico-simbolica de la salida plana y_2
15 % vectorY1[float Vector]: Vector de coeficientes de los terminos del vector
    terms1
16 % terms1[sym Vector]: Vector de variables en terminologia sStati_j, donde i
    es el estado sStatei y j la derivada de ese estado
17 % vectorY2[float Vector]: Vector de coeficientes de los terminos del vector
```

```

terms2
18 % terms2[sym Vector]: Vector de variables en terminologia sStati_j, donde i
    es el estado sStatei y j la derivada de ese estado
19
20
21 syms sState1(t) sState2(t) ...
22     a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 ...
23     b0 b1 b2 ...
24     n0 n1 n2 n3 n4 n5 n6 ...
25     c0 c1 c2 ...
26
27 y1 = (1/a0) * (sState2);
28 y2 = (1/c0) * (sState1);
29
30 if(orderIteration <1)
31     error('El sistema no admite un orden menor a 1.')
32 end
33
34 for i=1:orderIteration
35     y1Temp = (1/a0) * (sState2-a1*diff(y1,t)-a2*diff(y1,t,2)-a3*diff(y1,
t,3)-a4*diff(y1,t,4)-a5*diff(y1,t,5)-a6*diff(y1,t,6)...
36         -b0*y2-b1*diff(y2,t)-b2*diff(y2,t,2));
37     y2Temp = (1/c0) * (sState1-n0*y1-n1*diff(y1,t)-n2*diff(y1,t,2)-n3*
diff(y1,t,3)-n4*diff(y1,t,4)-n5*diff(y1,t,5)-n6*diff(y1,t,6)...
38         -c1*diff(y2,t)-c2*diff(y2,t,2));
39     y1=y1Temp;
40     y2=y2Temp;
41 end
42
43 y1Equation_Temp = simplify(expand(y1));
44 y2Equation_Temp = simplify(expand(y2));
45
46 variables = [a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 b0 b1 b2 n0 n1 n2 n3 n4 n5 n6 c0 c1 c2
];
47 varNum = [matrixDipheo(rowab,1) matrixDipheo(rowab,2) matrixDipheo(rowab
,3) ...
48         matrixDipheo(rowab,4) matrixDipheo(rowab,5) matrixDipheo(rowab
,6) matrixDipheo(rowab,7) ...
49         matrixDipheo(rowab,8) matrixDipheo(rowab,9) matrixDipheo(rowab
,10) ...
50         matrixDipheo(rownc,1) matrixDipheo(rownc,2) matrixDipheo(rownc
,3) ...
51         matrixDipheo(rownc,4) matrixDipheo(rownc,5) matrixDipheo(rownc
,6) matrixDipheo(rownc,7) ...
52         matrixDipheo(rownc,8) matrixDipheo(rownc,9) matrixDipheo(rownc
,10)];
53
54 y1Equation = subs(y1Equation_Temp,variables,varNum);
55 y2Equation = subs(y2Equation_Temp,variables,varNum);
56
57 %dnY1 = subs(dnY1_Temp,variables,varNum);
58 %dnY2 = subs(dnY2_Temp,variables,varNum);
59
60 vectorY1 = 0;

```

```

61     vectorY2 = 0;
62     terms1 = 0;
63     terms2 = 0;
64
65     syms tra1_0 tra2_0
66     syms(sym('sStat1_%d',[1 highestOrder]));
67     syms(sym('sStat2_%d',[1 highestOrder]));
68     traX = [tra1_0 sym('sStat1_%d',[1 highestOrder])];
69     traTh = [tra2_0 sym('sStat2_%d',[1 highestOrder])];
70
71     func1(1) = sState2;
72     func2(1) = sState1;
73
74     func1(highestOrder+1) = 0;
75     func2(highestOrder+1) = 0;
76
77     for i=2:highestOrder
78         func1(i) = diff(func1(i-1),t);
79         func2(i) = diff(func2(i-1),t);
80     end
81
82     y1EquationQ = subs(y1Equation,[func1 func2],[traX traTh]);
83     y2EquationQ = subs(y2Equation,[func1 func2],[traX traTh]);
84
85     [vectorY1,terms1] = coeffs(y1EquationQ,[traX traTh]);
86     [vectorY2,terms2] = coeffs(y2EquationQ,[traX traTh]);
87     vectorY1 = double(vectorY1);
88     vectorY2 = double(vectorY2);
89
90 end

```

Este código puede optimizarse tal que los grados relativos m salidas sean una entrada a la función y basarse en k estados para obtener los coeficientes de la trayectoria.

Posteriormente, para la implementación, se realizaron trayectorias de Bèzier del orden requerido, con la metodología del apéndice A, para los estados seleccionados y a partir de los coeficientes obtenidos, producir la trayectoria de las salidas.