**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa**

Introducción de la derivada en el contexto de problemas de máximos y mínimos utilizando desarrollos de Taylor algebraicos y el acercamiento infinitesimal que provee GeoGebra

Tesis que presenta

Oscar Amador Garrido

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis: **Dr. Jesús Alfonso Riestra Velázquez**

Ciudad de México Diciembre 2020

Dedicatorias

Tú no eliges a tu familia.
Ellos son un regalo de Dios para ti,
como tú lo eres para ellos
Desmond Tutu

Dedico este trabajo a mi esposa *Jessica* y a mi hija *Leonor*, agradezco su apoyo incondicional, sus palabras de aliento para seguir adelante en momentos difíciles, su paciencia por todas aquellas horas de ausencia dedicadas al trabajo y a la escuela, su compañía, sus consejos y por darle sentido a mi esfuerzo.

Dedico también este trabajo a mis papás *Oscar* y *Lupita*, quienes me han apoyado toda la vida y me han enseñado con el ejemplo que la preparación, el amor y la dedicación al trabajo y a la familia son la mejor herencia que podemos dar a nuestros hijos.

A mi hermano *Héctor*, su esposa *Paola* y su hija *Andy*, quienes me apoyaron y animaron a hacer la maestría, y han sido para mí un ejemplo de superación.

Agradecimientos

Al *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav)*, por la labor que realiza en la formación de alto nivel de profesionales e investigadores.

A mi amigo y tutor de tesis *Dr. Jesús Alfonso Riestra Velázquez*, por sus conocimientos invaluables, su arduo trabajo, sus anécdotas, su experiencia y su paciencia en la realización de esta tesis.

A mi amigo y maestro *Dr. Luis Enrique Moreno Armella*, por enseñarme que ser profesor de matemáticas va más allá que tener conocimientos técnicos en la materia, por sus contribuciones a este trabajo final y por el tiempo que tomó en revisarlo.

Al *Dr. Salvador Moreno Guzmán* por sus acertadas recomendaciones para fortalecer esta tesis, por el entusiasmo y el tiempo que tomó en revisarla.

A la maestra *M. en C. Susana Martínez Sánchez*, por su apoyo desde el primer día en mi formación de maestría, así como sus consejos y aportaciones al trabajo de tesis.

A mis excelentes profesores del programa de Maestría, quienes durante dos años compartieron su conocimiento y experiencia con nosotros sus alumnos.

A mis compañeros de generación, *Alejandra, Ana Marbel, Omar, José Luis, Francisco y Eduardo* por su compañía, apoyo y experiencia durante mi formación.

Al personal administrativo, técnico y de apoyo de *Cinvestav*, en particular al *Departamento de Matemática Educativa* por facilitar el trabajo de nosotros los estudiantes.

A la *Universidad Panamericana* y a mis queridos alumnos, por permitirme experimentar, crecer y aprender con ellos.

Agradecimiento

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)* por otorgarme el apoyo financiero para la realización de los estudios de Maestría en el *Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*.

Atentamente

Oscar Amador Garrido
Becario 935860.

Resumen
La tesis documenta la planeación, sustentación teórica y experimentación de una propuesta para introducir la derivada en el contexto de problemas de máximos y mínimos, en condiciones reales de aula, como parte de un curso tradicional de Cálculo diferencial para ingeniería. La derivada se introduce sin utilizar directamente el concepto de límite. Tiene como primer antecedente cronológico una versión moderna del Método de Fermat para máximos y mínimos, el cual permite encontrar la función derivada de un modo algebraico (*derivada algebraica*), al tiempo que establece la ecuación *derivada igual a cero* como condición (necesaria) para un máximo o un mínimo en un punto interior. El *método de la derivada algebraica* fue desarrollado en la tesis doctoral de Andreu (2006) y en artículos con su asesor (Andreu & Riestra, 2005 y 2007) y su gran virtud es que permite justificar, para funciones algebraicas, las reglas de derivación, incluida la regla de la cadena. El segundo antecedente es el Método de desarrollos de Taylor algebraicos, el cual permite obtener algebraicamente auténticos desarrollos de Taylor para las diferencias $f(x+h) - f(x)$ de una función algebraica, a saber, $f(x+h) - f(x) = E_1(x)h + E_2(x)h^2 + \text{TOS}$. Los signos de la diferencia (para x fija) caracterizan los máximos y mínimos, permitiendo dar condiciones suficientes para máximos y mínimos y redescubrir a través de ejemplos tales criterios, aunque los ejemplos más interesantes requieren desarrollos laboriosos que consumen mucho tiempo. Se ensayó por primera vez en la tesis de maestría de Aguilar (2007) y en un artículo con su asesor (Aguilar & Riestra, 2009). Aunque los dos métodos son consistentes con el desarrollo histórico de la derivada, el primero favorece más bien una *comprensión instrumental*, basada en la aplicación de reglas, mientras que el segundo, técnicamente más poderoso, demanda mayores recursos del estudiante y pone en juego la *comprensión relacional* (Skemp, 1976), a riesgo de resultar tedioso. La idea de combinar ambos métodos para tener las ventajas de ambos fue concebida desde hace mucho, pero no cabalmente realizada: empezar con los desarrollos de Taylor con ejemplos sencillos y luego introducir la derivada algebraica dividiendo por h el desarrollo $f(x+h) - f(x) = E_1(x)h + E_2(x)h^2 + \ldots$, esto es, ver a $E_1(x) + E_2(x)\,h + \ldots$ como el cociente diferencial $Q_x(h) = (f(x+h) - f(x))/h$, luego identificar a $E_1(x)$ con la derivada algebraica: el cociente diferencial realizado (gracias al teorema del factor) valuado en $h = 0$. Con ella, tener las reglas de derivación y con las derivadas sucesivas "descubrir" la fórmula de Taylor, que ahorra laboriosos desarrollos algebraicos y la posibilidad de resolver ejemplos de máximos y mínimos más interesantes. Los estudiantes se desempeñaron bien con el método e incluso algunos expresaron que les permitió entender las reglas o procedimientos usuales.

El software dinámico GeoGebra resultó fundamental en el diseño del curso, fue bien acogido y jugó un gran papel motivacional. Se utilizó en varias actividades previas a la introducción de la derivada, en la parte de Funciones, Límites y Continuidad (temas obligados por el programa). Por ejemplo, para dar la visión infinitesimal de la regla *para valores cercanos a cero las potencias inferiores son dominantes*. Así en el ejemplo de sumar una recta con una parábola $y = 2x + x^2$ (que da una parábola), al usar repetidas magnificaciones con el *Zoom in* normal (con centro en el origen) la parábola resultante se convierte en la recta $y = 2x$. Y para la suma $y = x^2 + x^3$, desarrollé un Y-*zoom* (similar al de Derive) para mostrar que $y = x^3$ se vuelve despreciable con respecto a $y = x^2$. Con otra actividad se analizó la discontinuidad removible de funciones (v.gr. el cuadrado de la función signo).

Abstract
The thesis documents the planning, theoretical support and experimentation of a proposal for introducing the derivative in the context of problems of maxima and minima, under classroom real conditions, as part of a traditional course of Differential Calculus for engineering. The derivative is introduced without directly using the concept of limit. Its first chronological antecedent is a modern version of Fermat's Method for maxima and minima, which allows to find the derivative function through an algebraic way (algebraic derivative), while it stablishes the equation *derivative equal to zero* as a (necessary) condition for a maximum or minimum at an interior point. The *method of the algebraic derivative* was developed in Andreu's doctoral thesis (2006) and in articles with her assessor (Andreu & Riestra, 2005 and 2007). Its great virtue is that enables to justify, for algebraic functions, the derivation rules, including the chain rule. The second antecedent is the Method of algebraic Taylor expansions, which allows to obtain algebraically authentic Taylor expansions for the differences $f(x+h) - f(x)$ of an algebraic function, namely, $f(x+h) - f(x) = E_1(x)h + E_2(x)h^2 + \text{TOS}$. The signs of the difference (for fixed x) characterize the maximums and minimums, making it possible to give sufficient conditions for maximums and minimums and to rediscover such criteria through examples, although the most interesting examples require laborious developments which consume too much time. It was tested for the first time in Aguilar's master's thesis (2007) and in an article with her assessor (Aguilar & Riestra, 2009). Although the two methods are consistent with the historical development of the derivative, the first one favors an *instrumental understanding*, based on the application of rules, while the second, technically more powerful, demands greater resources from the student and puts into play the *relational understanding* (Skemp, 1976), but can be tedious. The idea of combining both methods in order to have the advantages of both, has been conceived long ago, but not fully realized: beginning with Taylor's developments with simple examples and then introducing the algebraic derivative by dividing by h the expansion $f(x+h) - f(x) = E_1(x)h + E_2(x)h^2 + \ldots$, that is, to see $E_1(x) + E_2(x)\,h + \ldots$ as the differential quotient $Q_x(h) = (f(x+h) - f(x))/h$, then identify $E_1(x)$ with the algebraic derivative: the differential quotient carried out (thanks to the factor theorem) valued at $h = 0$. With it, having the derivation rules and with the successive derivatives "discover" the Taylor formula, which saves laborious algebraic developments and provides the possibility of solving more interesting examples of maximums and minimums. The students performed well with the method and some of them even expressed that it allowed them to understand the usual rules or procedures.

GeoGebra's dynamic software was fundamental in the design of the course, was well received and played a great motivational role. It was used in several activities prior to the introduction of the derivative, in the part of Functions, Limits and Continuity (topics required by the Program). For example, for giving the infinitesimal view of the rule *for values close to zero, the lower powers are dominant*. Thus, in the example of adding a line with a parabola $y = 2x + x^2$ (which results another parabola), when using repeated magnifications with the normal *Zoom-in* (with the center at the origin) the resulting parabola becomes the line $y = 2x$. And for the sum $y = x^2 + x^3$, I developed a $Y - zoom$ (similar to Derive's) to show that $y = x^3$ becomes despicable with respect to $y = x^2$. With another activity, the removable discontinuity of functions was analyzed.

Índice

1. Introducción y Antecedentes

Vale la pena examinar el hecho, seguramente conocido, de que existen serias dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, tanto para los estudiantes como para los profesores. Andreu y Riestra (2007) mencionan que un 72 % de alumnos en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral en la UAM-Azcapotzalco en cierto año reprueban estas materias. Tall (1997) refiere dos estudios, en los que a pesar de que los estudiantes se sometieron a una pesada dieta de ejercicios de rutina, se obtuvieron tasas de reprobación entre 30 % y 50 % (Anderson & Loftsgaarden, 1987; Peterson, 1987). Hitt (2003) afirma que "La gran cantidad de tópicos que están íntimamente relacionados en cálculo, y el manejo pobre de algunos de sus subconceptos, obstaculiza el desarrollo profundo de los conceptos propios del cálculo, como son, el concepto de función, de límite, de continuidad, de derivada y de integral". Toh (2009) se pregunta ¿el pobre desempeño de los estudiantes en Cálculo es un reflejo de las deficiencias de sus profesores en el cuerpo de conocimientos de la materia? y haciendo referencia a estudios que muestran que profesores de cálculo tienen dificultades en conceptos relacionados con límites y continuidad de funciones, agrega, "las dificultades conceptuales en Cálculo de los profesores pueden haberse desarrollado cuando ellos eran estudiantes".

En los cursos de Cálculo Diferencial, el concepto de *derivada* ocupa un lugar central, y para éste, el concepto de *límite* es esencial (Riestra, 2004). Sin embargo, la forma en la que se introducen conceptos tan importantes en la curricula actual de Cálculo, parece no ser adecuada. De acuerdo con Tall (1991), los matemáticos tienden a cometer un error típico cuando diseñan una secuencia de instrucción para el cálculo. Como ejemplo, Tall describe una posible secuencia de diferenciación, con la siguiente línea de razonamiento: Para poder entender la derivada $f'(x)$, uno tiene que tener el concepto de límite a su disposición. Para ello, hay que tomar el límite del cociente de diferencias $(f(x+h)-f(x))/h$ donde h tiende a cero. Por lo tanto, el concepto de límite tiene que preceder a la derivada. Para el estudiante, sin embargo, la introducción del concepto de límite aparece de repente sin razón alguna, con todos los problemas cognitivos que esto puede traer (citado en Gravemeijer & Doorman, 1999). Si además entendemos que el concepto de límite tiene dificultades propias debido a su estrecha relación con el infinito *real* (Riestra, 2004) y que los alumnos no lo ven como algo intuitivo, se puede entender que se trata de un concepto no *asimilado* y que difícilmente constituye una base didácticamente adecuada para cimentar el concepto de derivada. Citando a Tall:

> Mis incursiones iniciales en la enseñanza del Cálculo y el Análisis se basaron en la consideración de la enseñanza de las ideas matemáticas de una manera significativa (e.g., Tall, 1975). Habiendo encontrado dificultades inherentes al concepto de límite (Tall & Schwarzenberger, 1978; Tall, 1980a y 1980b), busqué un nuevo método de introducir ideas en el cálculo que utilizara el concepto de límite de forma implícita, en lugar de convertirlo en el fundamento explícito de la teoría para los principiantes. Habiendo estudiado los infinitesimales en Análisis No Estándar (que es demasiado sutil para utilizarlo como fundamento para los principiantes), me di cuenta de que una función diferenciable es aquella que "parece recta"

> cuando se amplía mucho y sigue pareciendo recta cuando se amplía más. Utilicé esta idea para desarrollar un software de cálculo gráfico que permitiera al alumno interactuar de forma dinámica con estas ideas. Esto incluyó la ampliación de una parte del gráfico para ver que se vea recto con un gran aumento, y el trazado del gradiente numérico a lo largo del gráfico (Extracto de Calculus and Computers de la página web de D. Tall).
> https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html

Esta dificultad con el concepto de derivada para el estudiante, o para su enseñanza por el profesor de cálculo, tiene raíces profundas. El desarrollo histórico del concepto de derivada revela los problemas que los matemáticos encontraron para llegar a su definición rigurosa. Grabiner (1983) muestra como en el transcurso de aproximadamente 200 años el concepto de derivada pasa por varias etapas: desde su uso hasta su definición, concluyendo que el método de enseñanza actual del concepto de derivada, partiendo de su definición como un límite, no es adecuada (dándole la razón a Tall), pues invierte su desarrollo histórico. El concepto de límite podría ser considerado entonces, con el estudio de Grabiner, como un *obstáculo epistemológico*, usando el término acuñado y definido por Bachelard (2000).

La propuesta desarrollada en esta tesis, busca dar una alternativa didáctica y curricular para introducir la derivada en el contexto de la determinación de máximos y mínimos acorde al desarrollo histórico descrito por Grabiner, sin el recurso explícito del concepto de límite, evitando el uso temprano de lo que ya se ha perfilado como un obstáculo epistemológico (siguiendo a Tall, podríamos decir que constituye un obstáculo cognitivo).

La derivada aparece implícitamente en el Método de Fermat para la resolución de problemas de máximos y mínimos. Grabiner (1983) describe el problema y la resolución hecha por Fermat. *Dado un segmento, dividirlo en dos partes tales que el producto de ellas sea máximo*. Considerando B la longitud del segmento, y A la longitud de la primera de las partes en las que se divide, el producto de ambas partes es

$$A(B - A) = AB - A^2.$$

Fermat había leído en los escritos de Pappus de Alejandría que un problema, que en general tiene dos soluciones, tendrá sólo una de ellas en el caso de un máximo. Esta observación, dice Grabiner, lo condujo a su método de máximos y mínimos. Suponga que en el problema enunciado, hay una segunda solución, continúa, la cual, su primera parte del segmento sea designada con $A + E$; la segunda parte es entonces $B - (A + E) = B - A - E$, y el producto de las dos partes

$$(A + E)(B - A - E) = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2.$$

Fermat iguala el resultado de ambos productos encontrados en lo que llama una pseudo-igualdad

$$AB - A^2 = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2.$$

Simplifica, obteniendo la ecuación: $2A + E = B$. Sin más explicación dice: "suprima E", obteniendo $A = B/2$.

Grabiner comenta que Fermat nunca dice que E sea infinitamente pequeño, o desaparezca o sea un límite, ni explica por qué es posible dividir por E (tratándolo como distinto de cero) y luego simplemente eliminarlo (tratándolo como cero).

Obsérvese que en el ejemplo de Fermat, la función a maximizar es el producto de las dos partes, a saber $F(A) = A(B - A) = AB - A^2$, donde A es la la variable independiente (la primera de las dos partes) y B es una constante (la longitud del segmento original). Por lo que la ecuación que iguala a cero la derivada, $F'(A) = 0$, es $B - 2A = 0$. En el desarrollo de Fermat, esta ecuación (y por lo tanto la derivada) aparece *implícita* en el penúltimo paso, después de suprimir E, a saber, $2A = B$. Esto deja en claro que la derivada no era un objeto identificado.

Riestra (2001) propone una versión moderna del método de Fermat, el cual es retomado más tarde en Andreu & Riestra (2005) y en la tesis doctoral de Andreu (2006) para desarrollar lo que conoceremos como *derivada algebraica*, planteando la función derivada a partir de métodos algebraicos, que evitan el uso directo del concepto de límite. Esta versión moderna se presenta también en el contexto de máximos y mínimos y se justifica con un acercamiento gráfico para una función $y = f(x)$ polinomial cualquiera, donde se busca dar una condición para localizar los puntos (abscisas) de los extremos (mínimo y/o máximo). Usando la técnica del problema resuelto, suponemos una función polinomial que tiene un valor extremo. La figura 1 describe esta situación, donde el razonamiento se hace en detalle para un máximo, pero es enteramente similar para el caso de un mínimo. La argumentación que se expone a continuación es una reelaboración que conjunta la dada originalmente por Riestra (2001) con la dada en Andreu & Riestra (2005), con la esperanza que resulte más clara.

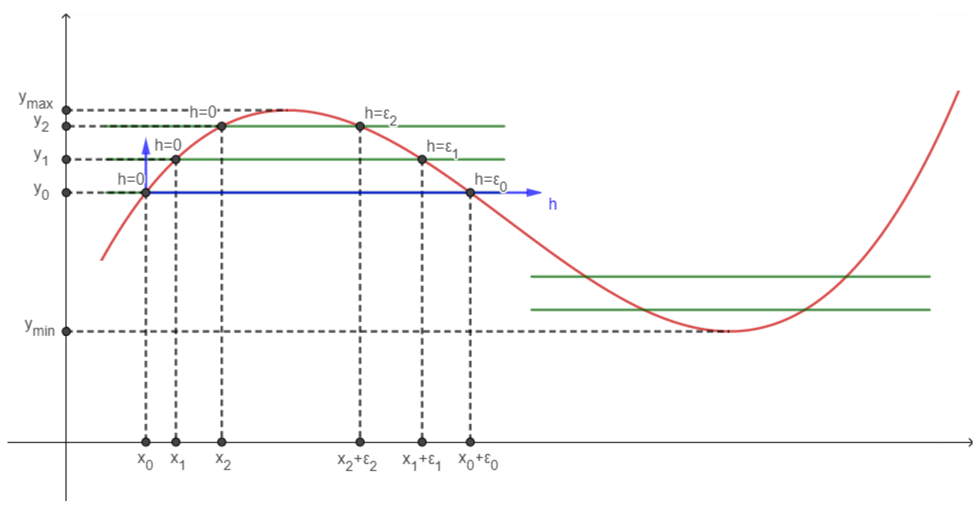


Figura 1: Comportamiento de $y = f(x)$ "cerca" de un extremo

La figura ilustra que cada valor de y "cercano" a la máxima ordenada y_{max} (como también ocurre para la ordenada mínima), determina dos soluciones para las abscisas, digamos x y $x + h$, que satisfacen $f(x) = f(x + h) = y$, luego, expresándolo en función de x, estas parejas satisfacen $f(x+h) - f(x) = 0$. Una solución de la ecuación $f(x+h) - f(x) = 0$, es siempre $h = 0$, en cada caso, esto es, para cualquier valor de x (determinado por y). Se puede observar también que conforme y se acerca al valor y_{max}, además del valor $h = 0$, el otro valor $h \neq 0$ que satisface la ecuación, a saber, $h = \varepsilon_n$, se vuelve más y más pequeño en magnitud. Por un principio de continuidad, las segundas soluciones, $h = \varepsilon_n$, no desaparecen simplemente, cuando $y = y_{max}$ sino que devienen en una segunda raíz $h = 0$. El método se justifica entonces apelando a que la ecuación $f(x+h) - f(x) = 0$ tiene a $h = 0$ como raíz doble cuando x es la abscisa de un extremo, es decir, cuando $f(x)$ es máximo o mínimo. Por el teorema del factor, es posible escribir $f(x+h) - f(x) = Q_x(h) \cdot h$ para cualquier x. Para que $h = 0$ sea una raíz doble, es necesario que ésta sea también raíz del factor $Q_x(h)$, en cuyo caso $Q_x(0)$ que es una función de x (de hecho, la derivada de la función $f(x)$) debe satisfacer $Q_x(0) = 0$. La condición $Q_x(0) = 0$ (que equivale a $f'(x) = 0$) se convierte entonces en una *condición* (necesaria) para la determinación de extremos locales en *puntos interiores* del dominio.

Para fijar ideas, realicemos el ejemplo de Fermat, con la versión moderna. Si el segmento tiene longitud B y llamamos x a una de las partes, la otra será $B - x$ y su producto, la función a maximizar, será $f(x) = x(B - x)$, o sea, $f(x) = Bx - x^2$. Para determinar el máximo consideramos la ecuación

$$f(x+h) - f(x) = 0, \quad \textit{o sea,} \quad f(x+h) - f(x) = Bh - 2xh - h^2 = (B - 2x - h)h = 0.$$

Luego $Q_x(h) = B - 2x - h$ es el cociente *realizado* de $(f(x+h) - f(x))/h$. Y para que x corresponda a la abscisa del máximo se requiere que $h = 0$ sea raíz doble de $f(x+h)-f(x) = Q_x(h)\cdot h$, o sea, que $Q_x(0) = 0$, es decir, $Q_x(0) = B-2x = 0$, de donde $x = B/2$ es la abscisa del valor máximo, a saber, $f(B/2) = B^2/4$. Pero, lo más interesante es que el producto de las partes se alcanza cuando las partes son iguales (si una es $B/2$ la otra será $B-B/2 = B/2$), o lo que es lo mismo, cuando el segmento se divide en partes iguales.

Desde luego, en los entretelones está presente $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h = \lim_{h\to 0} Q_x(h) = Q_x(0) = B - 2x$, por lo que la ecuación $Q_x(0) = 0$, no es otra que $f'(x) = 0$.

Entonces, la *derivada algebraica* de una función $f(x)$ se define como $Q_x(0)$, una vez que se factorice por h a la diferencia $f(x+h) - f(x)$ en la forma: $f(x+h) - f(x) = Q_x(h) \cdot h$. La versión moderna del método de Fermat, será referida en esta tesis como el *método de la derivada algebraica*.

Recordemos la introducción de la derivada de la manera tradicional, a saber, explícitamente como el límite del cociente diferencial $(f(x+h) - f(x))/h$ cuando h tiende a cero, donde no se puede sustituir directamente $h = 0$ y donde, inicialmente el cociente diferencial surge de la nada.[1] En comparación, la introducción de la derivada con el método de la derivada algebraica presenta ventajas como las siguientes:

1. La derivada se introduce a través de problemas de máximos y mínimos, creando un significado y acercándose a una experiencia más real para el estudiante.

[1] A toro pasado se le da una interpretación geométrica como la pendiente de una secante

2. No se utiliza directamente el concepto de límite.
3. Es congruente con el desarrollo histórico del concepto de derivada.

Sin embargo, hubo observaciones a este método relativas a la argumentación que conduce al máximo ó mínimo y por lo tanto a la forma en que se introduce la derivada algebraica: el hecho de que deba haber una raíz doble se *deduce* de una figura geométrica y tal deducción presenta algunas sutilezas (Aguilar y Riestra, 2009). El análisis de estas observaciones condujo a un nuevo acercamiento a la derivada en la tesis de Aguilar (2007) y en el artículo por Aguilar y Riestra (2009), donde se presenta una generalización del Método de Fermat que ya había sido anticipada en Riestra (2001) y que consiste en hacer desarrollos de Taylor pero obtenidos algebraicamente. El método alternativo desarrolla la diferencia $f(x+h) - f(x)$ en potencias del incremento h, y analiza el signo de dicha diferencia para valores permisibles de un incremento algebraico h. Nos referiremos a éste como el *método de desarrollos de Taylor algebraicos*. Hacemos ahora una descripción del mismo.

Este método tiene también su contexto en la resolución de problemas de máximos y mínimos, y permite establecer condiciones no sólo necesarias sino también suficientes para un valor extremo. Para empezar, el que la función alcance un valor extremo en x (máximo o mínimo) se caracteriza con que el signo de la diferencia $f(x+h) - f(x)$ no cambie, en vez de caracterizarlo con desigualdades, por ejemplo, para un máximo en x que ocurra $f(x+h) \leq f(x)$, o bien $f(x+h) \geq f(x)$ para un mínimo, mientras h toma *valores permisibles*, i.e. aquéllos valores de h, para los cuales $x+h$ se mantiene en el dominio de la función y además valores de h "pequeños" en magnitud. Si el dominio de $f(x)$ es $[a,b]$, para $x=a$ los valores permisibles de h son *positivos*, para $x=b$ los valores permisibles de h son *negativos*, y cuando x se encuentra en el *interior* del intervalo dominio, los valores de h pueden ser tanto *positivos* como *negativos*. La figura 2 muestra los tres casos descritos respectivamente en (a), (b) y (c).

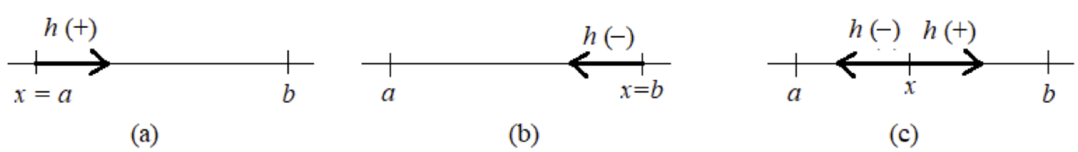


Figura 2: Valores permisibles de h en el intervalo $[a,b]$

Considerando siempre valores permisibles de $h \neq 0$ y en principio "pequeños" en magnitud, un signo *siempre positivo* de la diferencia $f(x+h) - f(x)$ para un valor determinado x nos dice que en ese punto existe un *mínimo* local (punto donde la función alcanza un valor mínimo), mientras que un signo *siempre negativo* de la diferencia para cierto valor x nos dice que en ese punto hay un *máximo* local (donde la función alcanza un valor máximo) y que los valores de x en los que la diferencia *cambia de signo* no corresponden a un valor extremo (no hay máximo ni mínimo en dichos puntos). Si el signo de la diferencia se mantiene positivo (respectivamente negativo) para *todos* los valores permisibles de h

(luego, no es necesario restringir su magnitud) se trata de un mínimo (respectivamente, máximo) *absoluto*.

Así pues, para localizar posibles extremos se analiza el signo de la diferencia $f(x+h)-f(x)$, para lo cual ésta se desarrolla en potencias de h:

$$f(x+h)-f(x)=E_1(x)h+E_2(x)h^2+TOS$$

donde TOS es el acrónimo de *Términos de Orden Superior*, y en este contexto se refiere a términos que contienen como factor a las potencias h^3, h^4, etc.

Un principio fundamental en este método es que *para valores de h suficientemente cercanos a cero, los signos de los términos no nulos con potencias inferiores de h son dominantes*.

Esto es, en la diferencia $f(x+h)-f(x)=E_1(x)h+TOS$, considerando valores de h *suficientemente pequeños en magnitud* y con $E_1(x)\neq 0$, los términos en TOS pueden despreciarse y el signo de la diferencia es el signo de $E_1(x)h$. Si el análisis es en un punto interior del dominio de $f(x)$, entonces h cambia de signo, por lo que $E_1(x)h$ cambia de signo y el punto no puede ser extremo local. De ese modo, una condición necesaria para que la función $f(x)$ alcance un valor extremo en un punto interior x es que $E_1(x)$, el coeficiente de h llamado *coeficiente diferencial*, sea igual a cero $E_1(x)=0$.

Al sustituir el valor $x=c$ que resuelve la ecuación $E_1(x)=0$ en la diferencia, obtenemos las potencias de h correspondientes, esto es $f(c+h)-f(c)=E_2(c)h^2+TOS$ suponiendo que $E_2(c)\neq 0$. Aplicando el mismo principio que antes, para valores suficientemente cercanos a cero, el signo de TOS es despreciable con respecto al término en h^2 y el signo de la diferencia será el de $E_2(c)$ pues h^2 será siempre positiva. En función del signo de $E_2(c)$, en $x=c$ se tendrá un mínimo ($E_2(c)>0$) ó un máximo ($E_2(c)<0$). En el caso que $E_2(c)=0$, la diferencia se verá como $f(c+h)-f(c)=E_3(c)h^3+TOS$ suponiendo $E_3(c)\neq 0$, en este caso el signo de la diferencia variará con el signo de h pues h^3 cambia de signo en un punto interior, y en el punto $x=c$ no se tendrá un valor extremo. En resumen, si el desarrollo de potencias comienza con una potencia *par* en $x=c$, se tendrá un extremo de la función, y si empieza con una potencia *impar*, $x=c$ no será extremo local. El método presenta entonces no sólo condiciones necesarias, sino también suficientes para determinar extremos de funciones.

Ilustremos el método con el mismo problema resuelto por Fermat: *Dado un segmento, dividirlo en dos partes de tal forma que el producto de las partes sea máximo*. Consideremos el segmento AC de longitud b, y la longitud x como la longitud de la primera de las partes en las que se divide (ver figura 3)

Figura 3: Problema de Fermat

La otra parte del segmento será $b-x$ y la función que representa el producto de ambas será $f(x)=x(b-x)$, luego $f(x)=bx-x^2$ y su dominio será el intervalo $[0,b]$. Desarrollamos la diferencia:

$$f(x+h) - f(x) = b(x+h) - (x+h)^2 - (bx - x^2) = (b-2x)h - h^2$$

Entonces $E_1(x) = (b-2x)$ y $E_2(x) = -1$. Analizando los extremos, en $x = 0$, $E_1(0) = b > 0$ y $h > 0$, entonces para valores suficientemente pequeños en magnitud de h, $f(0+h)-f(0) = bh - h^2 > 0$ y en $x = 0$ se tendrá un mínimo local. Para el extremo final del intervalo $x = b$, $E_1(b) = -b < 0$ y $h < 0$, entonces nuevamente despreciando el signo del término en h^2 para valores suficientemente cercanos a cero, el signo de $f(b+h) - f(b) = -bh - h^2 > 0$ y en $x = b$ también tendremos un mínimo local.

Ahora para valores en el interior del intervalo dominio (i. e. $0 < x < b$), si $E_1(x) = b-2x \neq 0$ y sabiendo que el signo de h puede ser positivo y negativo, el signo del término $E_1(x)h$ cambiará con el signo de h (despreciando el signo de $-h^2$ para valores suficientemente pequeños en magnitud) y en ese punto x, no habrá extremo local. Haciendo ahora $E_1(x) = 0$, la diferencia se ve como $f(x+h)-f(x) = -h^2$ que es negativa para todo valor h permisible, luego entonces en este valor de x, habrá un máximo local. Comprobamos en este ejemplo que la condición para encontrar un valor extremo dentro del intervalo es que $E_1(x)$, el coeficiente diferencial (que no es otro que la derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$) sea igual a cero, $E_1(x) = 0$. Resolviendo la ecuación obtenemos $b - 2x = 0 \Rightarrow x = b/2$. Entonces el producto es máximo cuando el segmento se divide en dos partes iguales.

El nuevo método tiene tres ventajas principales con respecto al método de derivada algebraica, sin menoscabo de las ventajas que ambos métodos comparten:

1. Es un método algebraico que se justifica completamente en un registro algebraico basado en los signos de la diferencia $f(x+h) - f(x)$.

2. No sólo da condiciones necesarias sino también suficientes para identificar abscisas de valores extremos.

3. Permite identificar mínimos y máximos tanto en el interior del intervalo dominio como en sus extremos.

Por otro lado, las ventajas del método de la derivada algebraica con respecto al método de desarrollos de Taylor son:

1. Permite justificar las reglas de derivación, incluida la regla de la cadena.

2. Es un método menos demandante en destrezas algebraicas que el método de desarrollos de Taylor, el cual requiere habilidad en el manejo de cantidades relativas (en la comparación del orden de magnitud de las potencias de h), aunque es más limitado.

En trabajos posteriores se buscó combinar las ventajas de los dos métodos. Empezar con los desarrollos de Taylor algebraicos resolviendo problemas de máximos y mínimos y conectar rápidamente con la derivada algebraica para tener reglas de derivación y aprovechar sus ventajas en la resolución de ejercicios más complejos con los desarrollos del teorema de Taylor. Esto se intentó por vez primera en la tesis de maestría de Calderón (2009), pero no se logró una conexión muy afortunada y se trató de una experimentación muy modesta en condiciones un tanto ideales, o de laboratorio. Y era el propósito de combinar los dos métodos de una mejor manera en la etapa final de la tesis doctoral de Calderón (2019), pero como se sabía que los grupos donde se realizó la investigación, estaban formados por jóvenes con importantes carencias tanto en álgebra como en geometría analítica, el desarrollo de la tesis doctoral se centró en cubrir los prerrequisitos necesarios para la introducción del Cálculo con el método combinado. En la etapa final, la parte de Cálculo resultó muy modesta, por lo que lo más valioso de la investigación en esta parte fue que se pudieron comparar los desempeños de los estudiantes que llevaron el curso de prerrequisitos con los de los estudiantes que no lo llevaron (la mitad del grupo en cada caso), siendo claramente favorable la de los primeros.

El presente trabajo de tesis, retoma el propósito de las tesis de Calderón, con una implementación del método que no sólo combina la resolución de problemas de máximos y mínimos mediante desarrollos de Taylor con la derivada algebraica para justificar las reglas de derivación, sino que la derivada algebraica se entiende como un límite en un caso simplificado (de una discontinuidad removible), cuando la función en cuestión es algebraica. Esta es la primera vez que se experimenta la propuesta en condiciones reales de aula, además de que en esta implementación de la propuesta se hizo especial énfasis en el uso de la tecnología, en particular el uso de GeoGebra para percibir el movimiento en geometría dinámica y el comportamiento de cantidades relativas mediante la utilización de magnificaciones (*zoom in*) las cuales permiten rescatar la visión infinitesimal que caracterizó a la etapa del desarrollo del Cálculo antes de su formalización rigurosa. Los objetivos de la investigación y el diseño experimental, se describen en secciones aparte.

2. Marco Teórico. El Problema de Investigación

2.1. Marco Teórico

En este apartado se revisarán aspectos relevantes de teorías cognitivas, didácticas y epistemológicas en la fundamentación de la presente tesis.

Iniciemos con la *Teoría de Recapitulación* propuesta por el biólogo alemán Ernst Haeckel (1834-1919), a saber, la teoría de que los estadios del desarrollo embrionario de un organismo imitan los estadios morfológicos del desarrollo evolutivo característicos de la especie; es decir, la ontogenia recapitula la filogenia. La teoría fue abandonada a principios del siglo XX cuando la embriología no mostró una correspondencia consistente entre la ontogenia y la filogenia. (APA, s.f., definición 1). Aunque en la actualidad no se considera vigente, la idea de fondo no deja de tener interés y es posible aterrizarla en el ámbito epistemológico donde tendremos una formulación interesante: *El ser individual (esto es, el ser psicológico) reproduce durante la adquisición de un conocimiento (digamos un concepto), en síntesis, las etapas por las que atravesó históricamente el ser social para la aprehensión de dicho concepto* (Andreu y Riestra, 2005).

Esto sugiere buscar en el desarrollo histórico de los conceptos, pautas para la enseñanza de los mismos, es decir, la síntesis del desarrollo histórico de un concepto, puede proveer un acercamiento metodológico para su enseñanza.

Grabiner (1983) muestra un mapa cronológico de 200 años, sobre las etapas principales que llevaron a la definición actual de derivada. La autora menciona que ésta fue primeramente *utilizada*, después *descubierta*, más tarde fue *explorada* y *desarrollada* y finalmente *definida*.

En la primera etapa, Fermat utiliza la derivada de manera inconsciente para determinar valores máximos y mínimos. En su método (1637), la derivada aparece de manera implícita y no es considerada (desde luego) como un objeto matemático.

La segunda etapa descrita por Grabiner, se refiere al descubrimiento de la derivada en la invención del Cálculo gracias a Leibniz y Newton, quienes, trabajando cada uno por su cuenta, tomaron los métodos para calcular tangentes, extremos y áreas y los englobaron en dos conceptos generales conocidos hoy como *derivada* e *integral*; desarrollaron una notación que facilitaba el uso de estos conceptos generales; y dieron un argumento para lo que hoy se conoce como *Teorema Fundamental del Cálculo* (Grabiner, 1983).

La etapa del desarrollo, nos dice Grabiner, está bien ejemplificada por las contribuciones de Euler y Lagrange. Este último es quien le da su nombre de (función) *derivada*. Y finalmente, la última etapa, donde Cauchy da una primera *definición de derivada* como función, la cual es corregida (como la derivada puntual) más tarde por la escuela de Weierstrass.

Entre sus observaciones, Grabiner resalta el hecho de que el desarrollo histórico de la derivada no corresponde a la introducción del concepto que suelen dar los libros de texto, los cuales, de hecho, invierten el orden histórico. Se comienza con lo último, esto es, con la *definición* de derivada, por supuesto, como un *límite*. Y podríamos agregar que, como ya sabemos y se comentará luego, se dejan hasta el final sus aplicaciones (que suelen incluir problemas de máximos y mínimos).

El desarrollo de la derivada coincide, desde luego, con el desarrollo del concepto de límite, y Grabiner deja claras las dificultades por las que los matemáticos pasaron tratando de definirlo. Cauchy definió la derivada (1823) como el límite, cuando existe, del cociente de diferencias $(f(x + h) - f(x))/h$ cuando h tiende a 0, pero su definición de límite tenía aun algunos inconvenientes. Cauchy asumió que el cociente de diferencias convergía uniformemente hacia su límite (la función derivada). Más tarde (década de 1850) Weierstrass utilizó su propia distinción entre la convergencia puntual y uniforme junto con las técnicas delta-épsilon de Cauchy para presentar un tratamiento sistemático y completamente riguroso del cálculo. Esto fue publicado por sus alumnos en 1872.

El análisis de Grabiner, sugiere que la definición de límite (y por lo tanto, la derivada) constituye lo que Bachelard (2000) define como *obstáculo epistemológico*. De acuerdo con Bachelard (2000), "es en el acto mismo de conocer donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos".

Los obstáculos epistemológicos, que representan una ruptura en el desarrollo continuo del conocimiento, son aquellos elementos que impiden o dificultan los conocimientos nuevos o nuevas concepciones, como pueden ser los conocimientos previos o empíricos, que funcionan como prejuicios. "En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos [. . .] Frente a lo real, lo que cree saberse claramente ofusca lo que debiera saberse. Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecer espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado" (Bachelard, 2000).

La idea de que la enseñanza de nuevos conceptos debe ser introducida mediante su uso en situaciones cercanas a los estudiantes es desarrollada por varios autores. Skemp (1987), en su primer principio del aprendizaje de las matemáticas establece que *los conceptos de un orden superior a los que las personas tienen, no pueden ser comunicados a ellas por una definición, sino sólo haciendo que experimenten una colección adecuada de ejemplos* (Skemp, 1987). Esto permite un acercamiento motivado y gradual al nuevo concepto, diferenciado de una presentación abstracta con poco o nulo significado para el alumno. En este sentido, los métodos, como el de Fermat o sus generalizaciones se describen para ejemplos de funciones de una colección adecuada, buscando establecer patrones de comportamiento. Así, en el método de los desarrollos de Taylor algebraicos, en los que se trata de desarrollar la diferencia $f(x+h)-f(x)$ en potencias de h (i.e, $f(x+h)-f(x) = E_1(x)h+E_2(x)h^2+\ldots$), se parte de ejemplos de funciones que se van complicando en los que se observan patrones comunes, por ejemplo, para un máximo o mínimo en un punto interior del intervalo dominio, una condición (necesaria) que se observa en los ejemplos estudiados es que el coeficiente diferencial (el coeficiente de h) debe ser nulo ($E_1(x) \equiv 0$).

Skemp distingue en la educación matemática dos tipos de comprensión, *comprensión relacional* y *comprensión instrumental*. Nos dice "Por la primera se entiende lo que siempre he querido decir por comprensión: saber qué hacer y por qué". La comprensión instrumental, nos dice, "hasta hace poco, no la habría considerado como comprensión en absoluto. Es lo que en el pasado describí como 'reglas sin razones', sin darme cuenta de que para muchos alumnos y sus maestros, la posesión de tal regla y la capacidad para usarla era lo que ellos entendían por *comprensión*". Todos podemos pensar en ejemplos de reglas este tipo, dice citando varias: *pedir prestado* en la resta, *darle la vuelta y multiplicar* para dividir por una fracción, *llevarlo al otro lado y cambiar el signo* (Skemp, 1976). En este sentido, en el método de desarrollos de Taylor uno es conducido razonadamente a la regla: una condición necesaria para que la función alcance en x un máximo o mínimo es que se cumpla la ecuación $E_1(x) = 0$. Puesto que luego va a resultar que el coeficiente diferencial es la función derivada, se convierte en la conocida regla que *para tener todos los candidatos a extremos, hay que resolver la ecuación que resulta de igualar a cero la (función) derivada*. Pero se llega a esta regla con comprensión relacional.

Skemp (1976) destaca características importantes de la enseñanza relacional, entre ellas, menciona que se trata de una enseñanza más adaptable a nuevas tareas, pues al enseñar no solo qué método funciona en la resolución de un problema sino por qué, permite al alumno inferir soluciones alternas y entender nuevos problemas o variaciones de los primeros. Dice también que es más fácil de recordar, pues entendiendo el por qué de los conceptos, los alumnos pueden llegar a deducir las fórmulas. El conocimiento relacional es una recompensa en sí mismo, se reduce la necesidad de "recompensas y castigos" externos e incrementa la motivación en los alumnos. Skemp también destaca que los esquemas relacionales actúan como un agente de su propio crecimiento, es decir, el alumno que aprende de esta forma se interesa por conocer más e ir más a fondo en su enseñanza.

La enseñanza de las matemáticas relacionales, al dar prioridad al entendimiento de las razones que rigen los conceptos, es más efectiva a largo plazo, permitiendo una asimilación más profunda del conocimiento. Sin embargo, es necesario reconocer que existen dificultades para implementar un curso únicamente con enseñanza relacional. Al respecto, Skemp (1976) menciona cuatro "factores circunstanciales" que representan dificultades para la implementación de un curso con enseñanza relacional:

1. El efecto colateral de los exámenes. La forma en que los alumnos trabajan está influenciada por el objetivo para el que trabajan, que es responder correctamente un número suficiente de preguntas para obtener una buena nota en los exámenes.

2. Un programa de estudios sobrecargado. Parte del problema es la gran concentración de contenido en los cursos. La enseñanza relacional no puede implementarse si el objetivo es ver una gran cantidad de temas en un tiempo justo, Skemp menciona que casi todos los programas de estudio serían mucho mejores si se redujeran en contenido para que hubiera tiempo de enseñar mejor.

3. Dificultad para evaluar si un alumno comprende de manera relacional o instrumental. A partir de lo que un estudiante escribe en un examen, es muy difícil hacer una inferencia válida sobre los procesos mentales que ha seguido para llegar a sus respuestas. Hablar con el estudiante es la mejor manera de averiguar dichos procesos, pero en una clase de más de 30, puede ser difícil.

4. La gran dificultad psicológica para los profesores de reestructurar sus *esquemas* (estructuras conceptuales) existentes, incluso para los pocos que saben que lo necesitan, quieren hacerlo y tienen tiempo para estudiar.

Dichas dificultades están presentes, como se apuntará desde el Planteamiento del Problema, en el diseño de la experimentación.

En resumen, la psicología del aprendizaje de las matemáticas de Skemp resalta dos temas importantes incluidos en este trabajo de tesis, el uso de un número considerable de ejemplos que permite a los alumnos un acercamiento significativo a un concepto de orden superior, a saber la derivada, y la aplicación de la comprensión relacional para establecer reglas conocidas en la teoría de máximos y mínimos, a saber *resolver la ecuación que resulta de igualar a cero la (función) derivada*.

Con respecto a la importancia del contexto en el aprendizaje de las matemáticas, Freudenthal, fundador de la *Educación Matemática Realista* (RME por sus siglas en inglés), no sólo buscaba incorporar enfáticamente la realidad cotidiana en la educación matemática, sino que su idea fundamental era dejar que ese rico contexto de realidad sirviera como fuente para el aprendizaje de las matemáticas (Treffers, 1993).

En la enseñanza tradicional los problemas de contexto suelen limitarse a aplicaciones que se abordan al final de una secuencia de aprendizaje como complemento. Sin embargo, desde el punto de vista de la Educación Matemática Realista, los problemas de contexto tienen un papel esencial, toman su valor por el énfasis que se pone en la utilidad de lo aprendido y por su poder de motivación (Gravemeijer & Doorman, 1999). El acercamiento que se realiza al concepto de derivada mediante problemas isoperimétricos en esta tesis, permite a los alumnos experimentar con objetos conocidos, como áreas y volúmenes de figuras geométricas, para encontrar resultados particulares que permiten luego generalizar reglas para resolver problemas de optimización usando la derivada.

Este principio de la Educación Matemática Realista es coherente con la forma en que históricamente se desarrolla el conocimiento matemático y considera que esa es también la forma en que los individuos deberían adquirir dicho conocimiento. Freudenthal hace una crítica a la educación matemática tradicional donde los resultados finales del trabajo de los matemáticos se toman como punto de partida para la educación matemática. Como alternativa, aboga por que la educación matemática tome su punto de partida principalmente en las matemáticas como actividad, y no en las matemáticas como un sistema preestablecido (citado en Gravemeijer & Doorman, 1999). El método descrito en este trabajo fomenta la actividad algebraica para encontrar puntos extremos y definir valores máximos o mínimos.

La actividad matemática está presente desde el comienzo no en la aplicación del resultado "haga la derivada igual a cero y resuelva", sino en el desarrollo que permite llegar a esta conclusión.

2.2. El Problema de Investigación

El objetivo general de la investigación es experimentar una propuesta para introducir el concepto de derivada de una manera conceptualmente significativa, sin recurrir de manera explícita al concepto de límite de una función en un punto, lo cual se realiza de una manera no rigurosa pero correcta, conduciendo al estudiante a descubrir a la (función) derivada en el contexto mismo de sus aplicaciones (máximos y mínimos) los cuales se plantean como propósito desde el mismo inicio y sin despreciar los aspectos computacionales, esto es, las fórmulas asociadas a las destrezas operativas, puesto que aparecen como una necesidad para seguir avanzando.

Tales características posee el método de los desarrollos de Taylor algebraicos que se plantea en el contexto de la determinación de los extremos, esto es, los máximos y mínimos, de una función. El considerar $f(x+h)-f(x)$, la diferencia de los valores de la función en términos del incremento en la variable independiente, no es, para nada, gratuito, pues se hace ver que es posible caracterizar los máximos y los mínimos con los signos de la diferencia (con x fija y h variando) como ya se explicó en la introducción. En general, utilizar signos en vez de desigualdades resulta más fácil de manejar para el estudiante, como cualquier profesor experimentado lo sabe. Como ya se dijo en la introducción, se trata de desarrollar la diferencia en potencias de h cuyos coeficientes son funciones de x, esto es, $f(x+h)-f(x) = E_1(x)\,h + E_2(x)\,h^2 + \cdots$. Para poder hacer esto algebraicamente se necesita que $f(x)$ sea una función algebraica de x y tenerla en forma explícita, así que la teoría se desarrolla a través de ejemplos. De hecho se parte de una colección graduada de ejemplos, casi todos problemas isoperimétricos, por lo tanto contextualizados. A través de los ejemplos se encuentran algunas reglas generales, como que cuando x es punto interior del dominio, una condición necesaria para que x_0 corresponda a un máximo o un mínimo es que el coeficiente diferencial, a saber $E_1(x_0)$, se anule. Un ejemplo muestra que no basta que se anule en ese valor de x (la condición es necesaria, pero no suficiente). Con otros ejemplos se ilustra que las condiciones $E_1(x_0) = 0$ y $E_2(x_0) < 0$ (respectivamente $E_2(x_0) > 0$) garantizan que en x_0 la función alcanza un máximo (respectivamente mínimo) local (que luego se van a enunciar como el *criterio de la segunda derivada*).

Aunque se restrinja a funciones algebraicas, muy pronto resulta claro que, aunque posibles, los desarrollos de Taylor obtenidos algebraicamente resultan largos y complicados. Partiendo de que el desarrollo de la diferencia en potencias de h es posible para una función dada al tratar de despejar al coeficiente diferencial $E_1(x)$ acabamos por "descubrir" que en los casos afortunados dicho coeficiente es el cociente realizado $(f(x+h)-f(x))/h$ evaluado en cero. Y en los casos en los que no veamos el teorema del factor, dicho coeficiente será el límite cuando h tiende a cero de ese cociente que es llamado el *cociente diferencial*. En el caso en que f es algebraica es cuando se puede sustituir $h = 0$ que es el caso simple del límite (caso de una discontinuidad removible). Se conecta así $E_1(x)$ con la derivada algebraica, pero se apunta el caso más general. Este acercamiento es nuevo. Con esta derivada se ven las reglas de derivación, incluida la regla de la cadena. Se hace ver que los coeficientes $E_n(x)$ son en principio las derivadas sucesivas de $f(x)$. Más precisamente que $E_n(x) = f^n(x)/n!$. Se enuncia el desarrollo de Taylor para una función (fórmula de Taylor) y se trabajan los ejemplos restantes utilizándolo y aplicando las fórmulas de derivación.

Hay algunos detalles del método en sí que podrían ser fuente de dificultades. Por ejemplo, para pasar del criterio de la segunda derivada al caso general a partir de un ejemplo afortunado donde se trata de un polinomio de grado 2, cuyo desarrollo acaba con $E_2(x)\,h^2$ (no hay términos de orden superior) que cumple $E_1(x_0) = 0$ y $E_2(x_0) \neq 0$ y que tendrá por tanto no sólo un extremo local, sino absoluto, en $x = x_0$, hay que ver antes otro ejemplo que se continúe más allá de la segunda derivada, utilizar ese argumento ya mencionado de que *para valores de h suficientemente cercanos a cero, los signos de los términos no nulos con potencias inferiores de h son dominantes*. Si esto se comprende bien, sabremos que sólo podremos asegurar un extremo local (pues no sabemos, con exactitud, que tan pequeño hay que tomar $|h|$ para que el signo del término en h^2 domine a los de orden superior). Desde luego, en esto se manifiesta la presencia de la noción de límite que inevitablemente subyace en todo el asunto de la derivada y sus aplicaciones.

Pero aparte de estos detalles (que serán examinados en el capítulo donde se describen los aspectos metodológicos del diseño experimental), como propuesta, el método de los desarrollos de Taylor presenta una estructura muy robusta educativamente hablando. Es consistente con el primer principio del aprendizaje de las matemáticas de Skemp (1987). De hecho, no sólo los conceptos nuevos se desarrollan a través de una serie organizada de ejemplos, sino la teoría misma. De hecho, el contexto es tan rico que permite al estudiante "descubrir" algunos de los teoremas más básicos e intuir otros. Es por lo tanto, congruente con la corriente educativa de las Matemáticas Realistas. Ni que decir con el desarrollo histórico. Y por lo tanto, hay mucho énfasis en la génesis de las nociones y las reglas, promoviendo enfáticamente la comprensión relacional (Skemp, 1976).

La introducción de la derivada con el método de los desarrollos de Taylor algebraicos, a diferencia de sus antecesores, se experimenta en condiciones reales de aula, enmarcando esta introducción en un curso de Cálculo diferencial para ingeniería. A reserva de verlo más en detalle, el programa del curso, como suelen serlo en la mayoría de las universidades, es un programa cargado de temas que además incluyen la noción de límite propio (puntual) e impropio, álgebra de límites y definición de continuidad puntual como límite. Podríamos decir que están presentes las cuatro dificultades circunstanciales que enuncia Skemp (1976) para promover la comprensión relacional, mismas que fueron reproducidas en la sección 2.1, Marco Teórico. Las examinaremos una a una, pues constituyen en gran medida los problemas de la presente investigación.

1. **El efecto colateral de los exámenes**. En la Universidad Panamericana, donde se llevó a cabo la investigación, existen tres periodos de exámenes departamentales ca-

da semestre, esto es, exámenes que deben cumplir con un mínimo de contenido con el objetivo de asegurar el cumplimiento del programa de estudios. El promedio de calificaciones (basado principalmente en las notas de los exámenes de cada periodo) determina la aprobación del curso, el otorgamiento y conservación de becas y la *posición* para la elección de horarios del siguiente semestre. Es comprensible, que el objetivo principal de muchos estudiantes sea el obtener buenas notas en los exámenes departamentales, dando mayor prioridad a la práctica de ejercicios "tipo examen" (comprensión instrumental) que a entender a mayor profundidad los conceptos estudiados (comprensión relacional).

2. **Un programa de estudios sobrecargado**. La Universidad Panamericana, como parte de la oferta académica que ofrece a los nuevos alumnos y como un factor de competitividad con respecto a otras universidades, considera programas de estudio ambiciosos en el contenido de sus materias. El tiempo requerido para analizar de manera relacional los conceptos más importantes del curso no es suficiente si el objetivo del profesor es cubrir el programa completo. Este factor tiene mayor repercusión en el presente trabajo de tesis, pues la investigación tuvo lugar en un curso de verano que consistió en 5 semanas de clases intensivas en el que se debe cubrir el mismo programa que el curso normal de 4 meses.

3. **Dificultad para evaluar si un alumno comprende de manera relacional o instrumental**. Los exámenes departamentales mencionados en el primer punto, suelen estar diseñados para que el alumno demuestre su capacidad para resolver un determinado número de problemas que siguen reglas específicas "estudiadas en clase". Por lo tanto, las evaluaciones dan poco espacio para mostrar los procesos mentales que llevan al alumno a dar determinada respuesta, y es difícil concluir si el alumno ha aprendido por comprensión relacional.

4. **La gran dificultad psicológica para los profesores de reestructurar sus *esquemas*** (**estructuras conceptuales**). Así como los alumnos fueron educados en un esquema principalmente instrumental, los profesores hemos trabajado de la misma forma, primero como alumnos que aprendimos con una enseñanza instrumental y después como docentes que replicamos el diseño de las clases que recibimos o el que encontramos en libros de texto. En lo particular, con una experiencia de más de 5 años dando el curso de cálculo diferencial (en su mayoría bajo un esquema instrumental), he requerido reestructurar mis procesos de pensamiento, analizar de manera crítica el trabajo realizado hasta ahora, y encaminarlo a una nueva forma de enseñanza (relacional) más adecuada a la comprensión de los conceptos.

Puesto que tenemos un curso de Cálculo diferencial sobrecargado de conceptos y sus propiedades, luego aparentemente diseñado para ser implementado con matemáticas instrumentales, unos estudiantes que aparentemente esperan recibir matemáticas instrumentales (lo más expedito para aprobar los exámenes) y que va a ser impartido por un profesor, probablemente con una mayor experiencia en enseñar matemáticas instrumentales que relacionales ¿Cómo copar con estas dificultades (primera, segunda y cuarta en la lista de Skemp), dado que la introducción de la derivada con los desarrollos de Taylor tiene un marcado enfoque de matemáticas relacionales?

Con respecto a la dificultad pendiente, la tercera en la lista de Skemp (1976), ¿cómo distinguir a través de los exámenes si el o la estudiante comprende de manera relacional el asunto y no sólo de manera instrumental?

Por otra parte, con respecto a la noción de límite, en el caso en que subyace implícitamente, ¿qué provisiones se van a tomar para conseguir cierta comprensión de la regla de que para valores pequeños de $|h|$, las potencias de h de orden inferior dominan a las de orden superior? Y en el segundo caso, donde se le quiere entender intuitivamente, ¿qué provisiones se han pensado para la comprensión, por parte del estudiante, del límite (puntual) del cociente diferencial,en los casos afortunados, como una instancia de discontinuidad removible?

Resumiendo, tenemos las siguientes preguntas de investigación.

Dado que la propuesta es introducir la derivada a través de resolver problemas de máximos y mínimos con desarrollos de Taylor algebraicos, cuyo carácter favorece la comprensión relacional, se plantean las primeras tres preguntas.

1. ¿Cómo lidiar con la dificultad de que los estudiantes esperan exámenes con preguntas previsibles asociadas a procedimientos mecanizados propios de la comprensión instrumental?

2. ¿Cómo copar con el problema de un curso sobrecargado de temas, diseñado para la comprensión instrumental, basada en reglas y procedimientos mecánicos, que contrasta con la introducción de la derivada a través de ejemplos de problemas de máximos y mínimos que favorece la comprensión relacional?

3. ¿Cómo remontar la dificultad psicológica de un profesor acostumbrado más bien a promover la comprensión instrumental para cambiar esos esquemas?

Y por otra parte, tenemos otras tres:

4. ¿Cómo distinguir a través de los exámenes si el o la estudiante comprende de manera relacional cierto asunto y no sólo de manera instrumental?

5. ¿Qué provisiones se van a tomar para conseguir cierta comprensión de la regla de que para valores pequeños de $|h|$, las potencias de h de orden inferior dominan a las de orden superior?

6. ¿Qué provisiones se han pensado para la comprensión, por parte del estudiante, del límite (puntual) del cociente diferencial, en los casos afortunados, como una instancia de discontinuidad removible?

En el tercer capítulo veremos los aspectos metodológicos y el diseño experimental realizados para tratar de responder a estos interrogantes.

3. Aspectos metodológicos. Diseño experimental

La experimentación de la propuesta se realizó, de manera no prevista, en dos etapas, las cuales se describirán a continuación.

La primera etapa, que por su naturaleza será referida como *Pre-experimentación*, consistió en experimentar la propuesta de introducir la derivada con desarrollos de Taylor algebraicos en condiciones reales de aula, impartiendo a dos grupos un curso de Cálculo Diferencial en la Universidad Panamericana, durante el primer semestre (curso de primavera) el cual inició en enero de 2020. Este intento se caracterizó por una considerable improvisación no del todo consciente. Abarcó en cierta medida, tanto la planeación, como la dinámica y la falta de comunicación efectiva entre el tesista y el asesor en la realización la experimentación. Estas deficiencias fueron acentuadas por una serie de agentes (acontecimientos) externos. Sin embargo, como se verá, hubo resultados rescatables y sobre todo enseñanzas importantes y benéficas para la segunda etapa.

En la segunda etapa, que será referida como *experimentación* (o con las palabras clave de Curso de Verano), se experimentó la propuesta de introducir la derivada con desarrollos de Taylor algebraicos en condiciones reales de aula (virtual), al impartir un curso intensivo de Cálculo Diferencial en la Universidad Panamericana, durante el verano de 2020. Se caracterizó por una gran planeación, elaboración de guiones detallados, una gran comunicación y participación entre asesor y asesorado. Y por aprovechar las enseñanzas y el legado académico (técnico) de la *Pre-experimentación*.

3.1. Pre-experimentación de la propuesta

La *Pre-experimentación* se llevó a cabo en condiciones reales de aula en la Universidad Panamericana, en dos grupos de ingeniería de primer semestre, en la materia de Cálculo Diferencial que tuvo inicio en enero de 2020 (Curso de Primavera). El objetivo era experimentar la introducción de la derivada a través de los desarrollos de Taylor algebraicos como alternativa a la forma tradicional, contemplada en el programa, de introducirla como un límite puntual, lo que presupone la definición de límite.

Formalmente, el seminario de tesis empezó en marzo, cuando el curso ya tenía unas 8 semanas, pero este curso introducía el tema de funciones, límites y continuidad previos al de derivada y además había intercambiado información con mi asesor sobre experimentaciones anteriores del método de desarrollos de Taylor y nos reunimos un par de semanas antes, en febrero. Puesto que el Método se desarrolla necesariamente a partir de ejemplos (como si siguiera el primer principio de Skemp) una de las primeras tareas consistió en seleccionar y adaptar problemas isoperimétricos de máximos y mínimos que figuran en la tesis de maestría de Aguilar (2007) y la tesis doctoral de Calderón (2019).

Tres situaciones adversas se presentaron en el curso:

1. Cuando tuvimos una preselección de los ejemplos para implementar el método, el curso de cálculo estaba ya avanzado. El tema de límites ya había sido presentado a

los alumnos como parte del programa tradicional de la universidad y los chicos estaban familiarizados con el cálculo de límites. Se presentaron entonces las dificultades 2 y 4, descritas en la sección anterior, relacionadas con un programa sobrecargado que debía ser cubierto como requisito de la universidad (situación de la que no éramos conscientes en ese momento), y la dificultad del autor de esta tesis como profesor habituado a dar clases basadas en comprensión instrumental que trataba de empaparse con una nueva forma de trabajo, mientras avanzaba en su clase.

2. El jueves 12 de marzo, se nos informó a través de un comunicado general en la universidad, que las clases presenciales serían suspendidas debido a la pandemia de covid-19 iniciada unos días antes en otros países, forzando tanto a alumnos como a profesores a implementar y reorientar sus cursos a clases no presenciales vía comunicación remota a través de vídeo llamadas y clases virtuales. El periodo de adaptación aunque fue corto, afectó la implementación de una mitad del curso, el número de clases y el tiempo que pudimos dedicar a la aplicación del nuevo método.

3. El programa de la universidad incluye dos periodos de exámenes departamentales que requerían cubrir ciertos temas, incluidas las fórmulas y métodos directos de derivación. Esto nos quitó tiempo para ver en el método ejemplos introductorios con más detalle, obligándonos a interrumpir y alterar el hilo conductor de la experimentación. Se presenta entonces la primera dificultad descrita en la sección anterior relacionada con el efecto colateral de los exámenes y la necesidad de cubrir un temario que permitiera a los alumnos aprobarlos.

Tanto la contingencia como los exámenes parciales nos obligaron a recortar el material de experimentación, que además de los problemas isoperimétricos, incluía un análisis sobre la velocidad instantánea y su relación directa con la derivada.

Para evaluar el efecto de la experimentación en los alumnos y la comprensión del método (relacionado con las preguntas de investigación 4 y 5), y con poco tiempo para hacer nuevo material, se tomaron los tests existentes desarrollados por el Dr. Riestra y Angélica Aguilar en su tesis de maestría de 2007. El día 17 de marzo se aplicó el PreTest01 con preguntas sobre traducir desigualdades en signos, sobre incrementos algebraicos y otras acerca del comportamiento de las potencias de h cuando $h > 1$, $0 < h < 1$ y $-1 < h < 0$, respectivamente. Una vez que se trabajó con el método, se aplicó el PostTest01, que corresponde al Test Final de la tesis de Aguilar (2007) para comparar resultados. Estos se tomaron tal cual, aunque lamentablemente pasó desapercibido que en el postest se omiten las preguntas sobre traducir desigualdades a signos de diferencias, y viceversa.

Los ejemplos con los que se introdujo el método de desarrollos de Taylor algebraicos en el curso de primavera fueron los primeros cinco de la lista del Apéndice 6.1. Hay que notar que los primeros tres sirven para motivar a los problemas isoperímetricos. Plantean hallar las dimensiones de un rectángulo de semiperímetro 12 unidades que tienen un área dada. ¿Es posible formar un rectángulo de semiperímetro 12 unidades y área 20 unidades cuadradas? ¿Y de área 35? ¿Y de área 40?, preguntan sucesivamente los tres ejemplos.

Puesto que el semiperímetro 12, en los tres casos, es la suma de la base con la altura, se puede poner el área en términos de una de las dimensiones, digamos la base. Si llamamos x a la base, el área será $x(12 - x)$, así que se trata de resolver una ecuación cuadrática en cada caso. Para el área 20 y el área 35, hay solución, pero ya no para el área de 40 unidades cuadradas. Estos problemas sugieren que hay un área máxima para los rectángulos de semiperímetro fijo (en este caso 12).

Después de estos ejercicios, nos vimos obligados a cortar el hilo que se venía desarrollando, pues se aproximaba la fecha de los exámenes departamentales y era necesario introducir las reglas de derivación y el cálculo de derivadas incluidas en el examen parcial. Adelantamos entonces la introducción de la derivada (algebraica) despejando al coeficiente diferencial, aunque este despeje se hizo como el cálculo de un límite. Nuevamente se pone de manifiesto la cuarta dificultad apuntada por Skemp, la resistencia del profesor para reestructurar viejos esquemas, pues en la exposición se muestra directamente que el coeficiente (llamado *coeficiente diferencial*) del término en h del polinomio de Taylor, es la derivada de la función que se busca optimizar, y que la manera de obtenerla es calcular el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para los alumnos, acostumbrados a aprender por comprensión instrumental, el resultado no es una sorpresa, pues recuperan la definición de derivada vista en el bachillerato, y como el cálculo de límites no les es extraño debido a que se estudió en la primera etapa del curso, adoptan bien la definición.

Es en este momento, donde se da la noticia de la suspensión de actividades presenciales en la universidad debido a la contingencia por covid-19 y nos vemos obligados a reestructurar actividades, tiempos y formas de impartir el curso.

3.1.1. Legado del Curso de Primavera

Como parte del material utilizado para apoyar la comprensión de la derivada y en particular de la regla de la cadena, se incluyó una presentación, autoría del Dr. Riestra, relativa a la notación de Leibniz (Apéndice 6.4). Esta notación, permite identificar una función como una variable, por ejemplo $y = x^2$ ó $y = \sqrt{t}$, y su derivada como un cociente de diferenciales, $dy/dx = 2x$ ó $dy/dt = 1/(2\sqrt{t})$ respectivamente. Esta notación es en particular útil para la aplicación de la regla de la cadena.

En la última parte del curso de primavera se identificaron deficiencias en algunos alumnos relacionadas con la prioridad de las operaciones, uso de paréntesis y la simplificación de expresiones algebraicas. Se integró entonces una lección, elaborada por el Dr. Riestra, relacionada con este tema. El problema original lo detecté cuando algunos alumnos, al desarrollar la diferencia $f(x+h) - f(x)$ en una función del tipo $f(x) = x^2 + x$, obtenían $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 + x + h - x^2 + x$ olvidando que la expresión $x^2 + x$ debe considerarse como una operación realizada donde el signo negativo afecta a toda la expresión, i.e. $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 + x + h - (x^2 + x)$. La lección retrocede a los conceptos más básicos, coherente con el segundo principio del aprendizaje de Skemp (1987), e incluye operaciones binarias, prioridad de las operaciones aritméticas, uso de paréntesis, la adición algebraica y las propiedades conmutativa y asociativa (Apéndice 6.5).

La exposición sobre la prioridad de las operaciones se examinó también con una dupla de tests, PreTest 02 y PostTest 02. Por de falta de tiempo, los resultados en este curso fueron analizados tardíamente, sin embargo, estas primeras versiones sirvieron de base para tests mejor elaborados, que se aplicaron en el curso de verano.

El curso de primavera terminó con una mezcla de un curso tradicional y un esfuerzo por introducir el método de desarrollos de Taylor algebraicos. La exposición permitió que los alumnos tuvieran otra perspectiva en la resolución de problemas de optimización, y en el caso del trabajo de tesis, dejó enseñanzas que permitieron mejorar en gran medida la etapa de experimentación en el curso de verano. La pre-experimentación mostró la pobre planeación en general, la falta de un guion detallado y la falta de comunicación entre asesor y asesorado en esta etapa. Además de que salió a la luz el problema que plantea la tercera pregunta de investigación, sobre la dificultad psicológica del profesor, en este caso, específicamente con la comprensión relacional del concepto de límite.

El curso de primavera dejó también legados académicos, ya mencionados, como una lección, con su dupla de tests, acerca de la prioridad de operaciones que concluye con entender las expresiones algebraicas y una lección sobre la notación de Leibniz, especialmente útil para la regla de la cadena.

Al revisar los resultados del PreTest01 y PostTest01 se detectó la omisión en este último de las preguntas sobre la traducción de desigualdades a signos, lo cual juega un papel básico en la caracterización de extremos con el signo de la diferencia $f(x+h) - f(x)$, cuando x se fija y h varía. Otra "omisión" que se hizo consciente en ambos tests, se corrigió incluyendo una pregunta que solicita al estudiante el bosquejo de las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$ (relacionada con contacto, cantidades relativas y tangencia, que se vinculan a la pregunta de investigación 5) . Estas correcciones y ampliaciones de estos tests empleados en el Curso de Primavera, los pudimos aprovechar en la experimentación del Curso de Verano. Los cambios para las dos duplas de Tests mencionados (01 y 02), para ser utilizados en el curso de verano, en términos de su estructuración consisten principalmente en cambiar la redacción de las preguntas para permitir respuestas cerradas fáciles de comparar, tener una única respuesta a cada pregunta, redactar las preguntas del postest de manera que hubiera una relación directa con aquellas del pretest para compararlas.

3.2. Experimentación de la propuesta

Como consecuencia del aprendizaje que dejó la experiencia con el Curso de Primavera, se tomó la decisión de que la siguiente oportunidad de poder experimentar la propuesta en un nuevo curso de Cálculo tendría que estar muy bien planeada. En particular, preparar un guion con la exposición de la introducción de la derivada y sus propiedades tan completo y preciso en los detalles como fuera posible. La oportunidad se presentó con un curso de Cálculo diferencial (Curso de Verano) que comenzaría en junio.

3.2.1. Planeación de la experimentación (Curso de Verano)

En las tres semanas previas al inicio del curso, lo primero que se examinó fue el programa temático del curso, a saber,

Funciones

- Definición. Dominio y Rango. Gráficas de funciones. Operaciones con funciones. Composición de funciones. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Funciones pares e impares
- Función signo, valor absoluto y mayor entero. Funciones lineales y cuadráticas. Funciones paramétricas
- Funciones trascendentes: trigonométricas, logarítmicas, exponenciales e hiperbólicas. Funciones implícitas. Funciones inversas

Límites y Continuidad

- Idea intuitiva. Definición y teoremas sobre límites
- Límites de funciones racionales. Formas indeterminadas 0/0. Funciones algebraicas y límites unilaterales
- Límites al infinito y límites infinitos. El límite $\lim_{x\to 0} senx/x$. Formas indeterminadas 0/0 (funciones trigonométricas)
- Continuidad de una función en un punto. Continuidad de una función en un intervalo. El teorema del valor intermedio

Derivadas

- Idea intuitiva de derivada. Definición de derivada Derivada de una función constante. Derivada de la función $f(x) = x^n$. Reglas de derivación para suma, producto y cociente
- Derivadas de funciones trascendentes: trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Derivadas de funciones compuestas (Regla de la Cadena) Aplicaciones de la Derivada
- Rectas tangente y normal a la gráfica de una función en un punto. Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy. Regla de L'Hôpital
- Puntos críticos. Extremos de una función en un intervalo compacto. Criterio de la primera derivada
- Puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada. Asíntotas. Análisis general de las funciones y sus gráficas
- Otras aplicaciones de la derivada.

Resultó ser un programa sobrecargado, la segunda dificultad para promover la comprensión relacional, apuntada por Skemp (1976). De hecho, el mismo orden de los temas sugiere una enseñanza para la comprensión instrumental (por ejemplo, antes de ver ejemplos elementales de funciones se introducen las definiciones *en abstracto* de las operaciones con funciones). Hubo que lidiar con este reto planteado en la *segunda pregunta de investigación*: ¿Cómo copar con un curso sobrecargado de temas, diseñado para la comprensión instrumental, basada en reglas y procedimientos mecánicos, que contrasta con la introducción de la derivada que se tiene en mente, que favorece la comprensión relacional?. Tratamos de instilar algo del espíritu de la comprensión relacional en los temas de Función y de Límites y Continuidad, previos a la introducción de la derivada, siguiendo el primer principio del aprendizaje de las matemáticas de Skemp (1987), a saber, que *los conceptos nuevos no deben darse al o la estudiante por una definición sino haciéndolo(a) experimentar una lista preparada de ejemplos*. Para ese fin, se elaboró el guion de *Funciones* (ver Apéndice 6.2), una colección estructurada de ejemplos básicos y representativos de funciones reales de una variable real. En casi todos se ofrece su gráfica comentada.

Una de las características principales de este trabajo de tesis es el uso de la tecnología como medio didáctico de aprendizaje. El software GeoGebra constituye, en particular, una herramienta de geometría dinámica, que permitió darle *vida* al comportamiento gráfico de las funciones de los ejemplos propuestos.

GeoGebra es un software libre, destinado a la educación y capaz de trabajar en prácticamente cualquier dispositivo como una aplicación de instalación local o como una aplicación en línea a través de un navegador de Internet. Es altamente flexible y tiene el apoyo y documentación de muchos desarrolladores alrededor del mundo, por lo que la convierte en una herramienta muy útil para el aprendizaje de los alumnos.

En el mes de junio comenzamos el Curso de Verano de Cálculo diferencial, que tuvo una duración de 5 semanas comprendidas en el periodo del 8 de junio al 10 de julio de 2020, con clases de 3hrs. de lunes a viernes. El curso fue dirigido a alumnos de primer semestre de ingeniería que adelantaban la clase de cálculo diferencial en semestre ordinario y a alumnos que recursan la materia por haberla reprobado en algún periodo anterior.

El grupo que participó en la experimentación estuvo formado por 10 alumnos de carreras de ingeniería con las siguientes características:

Alumno	Carrera	Semestre	Cursa por primera vez
Demian	Ing. Industrial	Primero	Sí
Fernanda	Ing. Innovación y Diseño	Tercero	No
Daniel	Ing. Industrial	Cuarto	No
Bryant	Ing. Mecatrónica	Primero	Sí
David	Ing. Industrial	Primero	Sí
Adolfo	Ing. Innovación y Diseño	Segundo	Sí
Edgardo	Ing. Animación	Tercero	No
Alicia	Ing. Innovación y Diseño	Segundo	Sí
Paulina	Ing. Innovación y Diseño	Segundo	Sí
Carmen	Ing. Innovación y Diseño	Segundo	Sí

Debido a la pandemia de Covid-19, el curso fue impartido bajo la modalidad de *cursos a distancia (online)* con las siguientes herramientas tecnológicas:

1. Google Meet: Software de video llamadas y comunicación que permite reuniones virtuales hasta de 250 participantes. Esta aplicación pertenecía originalmente a las aplicaciones de la Suite de Google que requería pago, pero que cambió a una forma gratuita debido a la pandemia. Es actualmente la herramienta institucional de la universidad para la comunicación en clases virtuales.

2. Inkodo: Aplicación de pizarrón virtual. Es una aplicación disponible en la App Store de Windows para este sistema operativo donde, con ayuda de un lápiz digital, es posible usar la pantalla táctil de una computadora como pizarra virtual. Esto permite presentar temas y resolver ejercicios de matemáticas de manera similar que con un pizarrón en un curso presencial.

3. Moodle: Software para la administración del curso. Es la herramienta institucional para el control y administración del curso. Permite la comunicación con los alumnos a través de correos y foros, la entrega de tareas, resolución de exámenes en línea, etc.

Los alumnos participantes contaban todos con *computadora (de escritorio o portátil)* y/o *tablet*.

3.2.2. Desarrollo del Curso de Verano

A manera de Cronograma, exponemos el desarrollo del curso, con énfasis en los aspectos innovativos.

Una de las primeras actividades del curso, fue la aplicación de la versión mejorada del PreTest 01 y una simplificada del PreTest 02. Las dos duplas de tests, Pre y Post tests 01 y Pre y Post tests 02 (Apéndice 6.6), son legados del Curso de Primavera. La dupla PreTest 01 y PostTest 01 plantea preguntas sobre traducir desigualdades en signos, incrementos algebraicos, simétrico de un número y cantidades relativas (Apéndice 6.6.1). La mejora de los tests 01 con respecto a los aplicados en el curso de primavera, se refieren a la estructuración de las preguntas y agregar una pregunta solicitando el bosquejo de las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$. Con los test 01 se pretende, al menos parcialmente, responder a la *pregunta 4 de investigación* sobre cómo *detectar* la comprensión relacional. Los tests 02 se refieren a prioridades de las operaciones y utilización de paréntesis y corresponden a una lección desarrollada para subsanar deficiencias (Apéndice 6.6.2 y 6.5). Los cambios que se hicieron, de hecho, para las dos duplas de Tests, referentes a su estructuración, consisten en cambiar la formulación de las preguntas para permitir respuestas cerradas fáciles de comparar, tener una única respuesta a cada pregunta, redactar las preguntas del postest de manera que hubiera una relación directa con aquellas del pretest para compararlas.

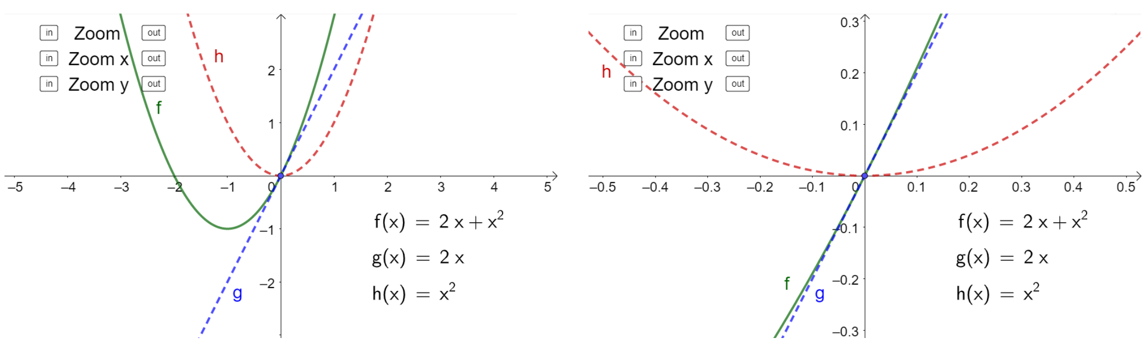
3.2.3. Los temas de Función, Límites y Continuidad, apoyados con tecnología

Durante las primeras semanas del curso, se expusieron los temas de Función, Límites y Continuidad con apoyo y guía del guion de *Funciones* (ver Apéndice 6.2), donde a través del análisis progresivo de ejemplos de funciones y con apoyo de la Tecnología, se introdujeron algunos conceptos importantes.

Los ejemplos se mostraban en GeoGebra, se explicaba la regla de correspondencia y se presentaban sus principales características para distintos parámetros. Conceptos como dominio, codominio y rango, así como la caracterización de funciones como par e impar, inyectiva, suprayectiva ó biyectiva, se vieron en esta parte del curso con apoyo de la tecnología. Para algunos de estos ejemplos desarrollé recursos en GeoGebra, para realizar magnificaciones (*zoom in*, *Y-zoom*) y alejamientos (*zoom out*) (ver Apéndice 6.8), abonando en el primer caso a la respuesta a la *pregunta 5 de investigación*: ¿Qué provisiones se van a tomar para la comprensión de la regla de que para valores pequeños de $|h|$, las potencias de h de orden inferior dominan a las de orden superior?

A este respecto de la pregunta 5 de investigación, mostramos el siguiente ejemplo del guion de *Funciones* (Apéndice 6.2) y otro visto en el curso, ambos desarrollados con GeoGebra.

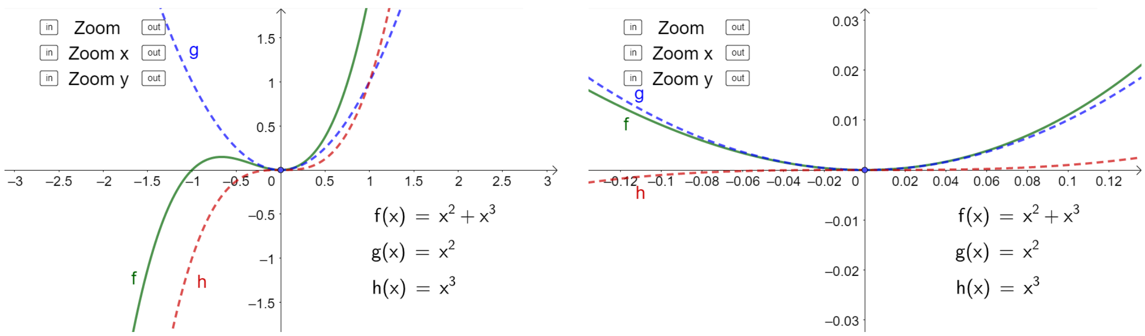
Ejemplo 2(a). Es un ejemplo de suma de funciones que muestra la gráfica de $y = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$, una parábola con vértice en $(-1, -1)$, resultante de sumar algebraicamente, punto por punto, las ordenadas de la parábola $y = x^2$ y las de la recta $y = 2x$. Para hacerlo en vivo, se graficaron con GeoGebra la recta $y = 2x$, la parábola $y = x^2$ y su suma $y = 2x+x^2$ con diferentes colores. Se aprovechó el ejemplo haciendo magnificaciones sucesivas con centro en el origen, para mostrar que la párabola $y = 2x+x^2$ y la recta $y = 2x$ se confunden, ilustrando por una parte que $y = 2x$ es la tangente a esa parábola en el origen y que para $|x|$ *suficientemente pequeño* (x *suficientemente cercano a cero*), el término con la menor potencia, $2x$, domina, o bien, que la potencia superior x^2 no "pinta".



(a) escala original (b) *zoom in* en el origen

Figura 4: Actividad con $y = 2x + x^2$

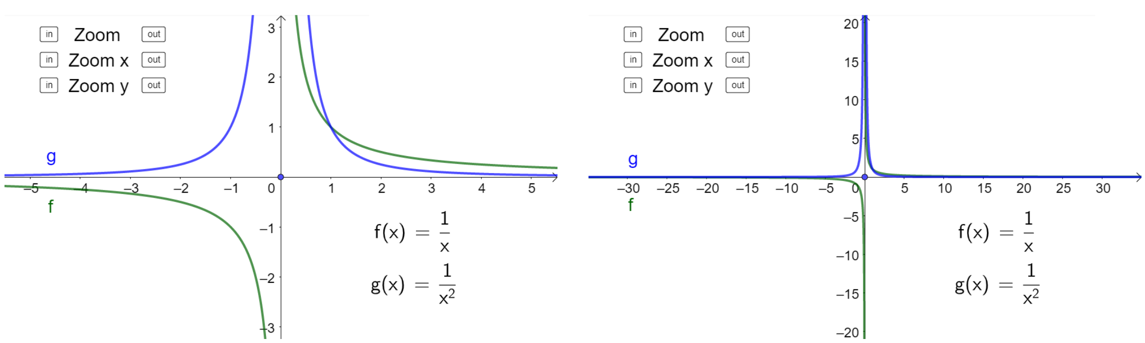
Otro ejemplo de la utilización de GeoGebra para visualizar el comportamiento de las potencias enteras para valores cercanos a cero y contribuir a la comprensión de la regla de que las potencias de orden inferior son *dominantes*, es el estudio de la gráfica de la función $y = x^2 + x^3$ para valores de x arbitrariamente cercanos a cero, comparándola con las gráficas los sumandos $y = x^2$ y $y = x^3$, donde es posible observar que para valores de x muy cercanos al origen (valores de $|x|$ arbitrariamente pequeños), la función $y = x^3$ se "aplana" en el eje de las abscisas mucho más rápido que $y = x^2$, haciendo que la gráfica de la función suma $y = x^2 + x^3$ se confunda con la de $y = x^2$. Aplicando el *zoom in* con magnificaciones mayores en el eje Y que en el eje X, permite acentuar más claramente este comportamiento de la función suma, como lo intenta mostrar la figura 5.



(a) escala original (b) *zoom y*: más magnificado en el eje Y

Figura 5: Actividad con $y = x^2 + x^3$

Se estudiaron también, con importante apoyo de GeoGebra, los límites impropios, haciendo uso de alejamientos (*zoom out*), con ejemplos como 2(c) $H(x) = 1/x$ y 2(d) $G(x) = 1/x^2$, del Apéndice 6.2. La actividad consiste en observar el comportamiento de las funciones $H(x)$ y $G(x)$ para valores arbitrariamente grandes, o arbitrariamente negativos, de x, así como para valores arbitrariamente cercanos a aquellos puntos donde la función no está definida, en estos ejemplos, en $x = 0$. En el primer caso, se observa que las ordenadas de las gráficas de las funciones se acercan a la recta $y = 0$ mostrando la tendencia límite de la función cuando x tiende a infinito o menos infinito y permitiendo introducir de manera intuitiva las *asíntotas horizontales*. En el segundo caso, las gráficas de las funciones tienden a pegarse a la recta vertical $x = 0$, permitiendo introducir las *asíntotas verticales* al mostrar la *tendencia a infinito* de las ordenadas cuando x tiende a cierto valor x_0, en este caso, 0.

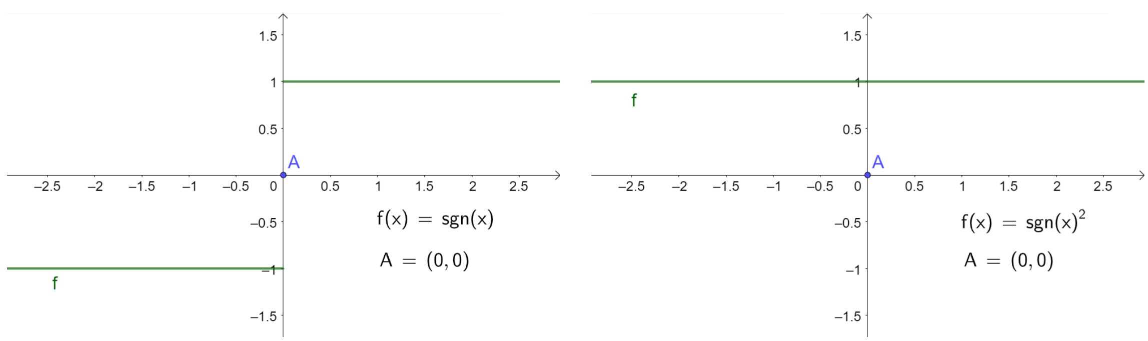


(a) escala original (b) *zoom out* en el origen

Figura 6: Actividad: similitud y contraste entre $y = \dfrac{1}{x}$ & $y = \dfrac{1}{x^2}$

También se estudiaron, con apoyo de esta tecnología las funciones valor absoluto, signo y escalón unitario (Apéndice 6.2.5), con las que se dio cierta introducción a los conceptos de límite y continuidad. Especialmente con el concepto de Discontinuidad Removible, como recurso para ayudar a comprender el límite del cociente diferencial para funciones algebraicas, atendiendo a la *pregunta 6 de investigación*: ¿Qué provisiones se han pensado para la comprensión por el o la estudiante, del límite (puntual) del cociente diferencial, de funciones algebraicas, como una instancia de discontinuidad removible?

La actividad consistió en graficar con GeoGebra la función $sgn(x)$, la cual suele ser definida como una función por tramos, cuyo valor es -1 para $x < 0$, 0 para $x = 0$ y 1 para $x > 0$. Se escoge un punto A sobre la gráfica de la función y se *arrastra* con el puntero dicho punto a lo largo de ésta, aprovechando las características de geometría dinámica del software. El efecto "sensible" de esta actividad es reconocer los saltos que da el punto al pasar de $x < 0$ a $x = 0$ y luego de $x = 0$ a $x > 0$, permitiendo introducir en el curso los límites unilaterales y la no existencia del límite de $f(x) = sgn(x)$ en $x = 0$ (pues dichos límites unilaterales son distintos), se observa una *discontinuidad esencial*. Se estudia ahora la función $f(x) = sgn^2(x)$, definida por tramos como 1 si $x \neq 0$ y 0 si $x = 0$. Al mover el punto A sobre la función y pasar por el punto $x = 0$ se percibe el salto de $y = 1$ a $y = 0$. En este caso, los límites laterales cuando x tiende a 0 son iguales a 1 y, por lo tanto, el límite de la función existe y es igual a 1 (cuando x tiende a 0). Se presenta entonces una *discontinuidad removible*, la cual se puede *remover*, redefiniendo $f(0)$ como 1, con lo que $f(x) \equiv 1$, es decir f se convierte en la función constante de valor 1.



(a) discontinuidad esencial en el origen (b) discontinuidad removible en el origen

Figura 7: Actividad: discontinuidad en el origen de $y = sgn(x)$ & $y = sgn^2(x)$

Una actividad similar se hizo con la función $f(x) = |x|/x$ que se evalúa como -1 para $x < 0$ y como 1 para $x > 0$ (Ejemplo 3(a), Apéndice 6.2.5) y la cual, a diferencia de la función signo, no está definida en $x = 0$, por lo que al mover el punto A sobre la gráfica y llegar a $x = 0$ éste desaparece y GeoGebra lo muestra como *indefinido*, pues en $x = 0$, $f(x)$ no existe. Ahora bien, si $g(x)$ es la función que se obtiene al elevar al cuadrado a $f(x)$, entonces $g(x) = (|x|/x)^2 = |x|^2/x^2 \equiv 1$, pero aunque el álgebra nos dice que es la función constante de valor 1, sabemos que $g(0)$ no existe (i.e., $g(x) \equiv 1$ para $x \neq 0$) y su gráfica en GeoGebra parece ser la función constante 1, al mover un punto en ella, éste desaparece en

$x = 0$. Pero los límites laterales en cero, como antes, existen y son iguales a 1, por lo que la discontinuidad se *remueve*, justamente *definiendo* $g(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Ilustrando con estos ejemplos, cómo la versatilidad y las capacidades de GeoGebra, permiten utilizarla como ayuda en la comprensión relacional del concepto de continuidad en un punto, entendida como límite, recurriendo a la noción de discontinuidad por "salto".

3.2.4. La introducción de la Derivada

En la tercera semana del curso, se inició, contando con un material detallado, el guion de la Introducción de la Derivada (ver Apéndice 6.3). Inicia resolviendo algebraicamente tres ejemplos de áreas de rectángulos de semiperímetro dado como introducción a los problemas isoperimétricos de máximos y mínimos.

El método de los desarrollos de Taylor algebraicos (Apéndice 6.3.1) se inicia introduciendo la terminología: incrementos *algebraicos*, valores *permisibles* de los incrementos, etcétera y la caracterización de máximos y mínimos en términos de los *signos* la diferencia $f(x+h) - f(x)$, con x fija y h variando (Apéndice 6.3.1). Como ya se dijo en la introducción, se trata de desarrollar la diferencia en potencias de h cuyos coeficientes son funciones de x, esto es, $f(x+h) - f(x) = E_1(x)\,h + E_2(x)\,h^2 + \cdots$. Para poder hacer esto algebraicamente se necesita que $f(x)$ sea una función algebraica de x y además tenerla en forma explícita, así que la teoría se desarrolla a través de ejemplos. Se desarrollan en detalle 4 ejemplos de máximos y mínimos, a saber, los Ejemplos 4 a 7 (Apéndice 6.1), donde los primeros tres son isoperimétricos. En todos ellos se buscan máximos y mínimos, incluyendo los extremos del intervalo dominio. Se "descubre" con estos ejemplos, que una condición *necesaria* para un extremo en x_0 punto interior es que el coeficiente diferencial se anule, i.e. $E_1(x_0) = 0$. En efecto, para los puntos donde $E_1(x_0) \neq 0$, como el término de menor potencia, en tal caso $E_1(x_0)\,h$, domina al término en h^2, en particular con su signo, por lo que no habría máximo ni mínimo, pues al ser $E_1(x_0) \neq 0$, el signo de $E_1(x_0)\,h$ cambiaría, de un signo al opuesto, al cambiar el signo del incremento h. Una vez establecida la condición $E_1(x_0) = 0$ para un candidato a máximo o mínimo, al sustituir el valor encontrado el desarrollo para los Ejemplos 4 a 6, queda en la forma $f(x_0+h) - f(x_0) = E_2(x_0)\,h^2$, pues no hay término en h^3 (su coeficiente es idénticamente nulo), así que un signo positivo de $E_2(x_0)$, asegura un mínimo de la función en x_0 y, respectivamente, un signo negativo un máximo en x_0, de hecho, como extremos globales (absolutos) y no sólo locales.

Como ya puede verse, el Método permite dar condiciones suficientes para caracterizar un máximo en estos casos, mismas que se habrán de generalizar más adelante. El último, el Ejemplo 7, que es sólo un ejercicio técnico, sirve para mostrar una función para la cual el coeficiente diferencial se anula en el punto interior $x = 0$, pero no alcanza ni máximo ni mínimo en dicho punto. Otros ejemplos, clásicos e interesantes, que involucrarían desarrollos algebraicos laboriosos y tediosos, se posponen hasta después de introducir la derivada y las reglas de derivación, esto es, hasta que puedan hacerse los desarrollos usando una fórmula, a saber, la Fórmula de Taylor.

La derivada surge al tratar de despejar el *coeficiente diferencial* $E_1(x)$ en el desarrollo de la diferencia $f(x+h) - f(x) = E_1(x)\,h + E_2(x)\,h^2 + \cdots$, esto es, $(f(x+h) - f(x))/h = E_1(x) + E_2(x)\,h + \text{TOS}$; al hacerlo, acabamos por "descubrir", en los casos afortunados, que dicho coeficiente es el cociente realizado $(f(x+h) - f(x))/h$ evaluado en cero. Y en los casos en los que no podamos aplicar el teorema del factor que permita cancelar h en el miembro izquierdo, dicho coeficiente será el límite cuando h tiende a cero de ese cociente que es llamado el *cociente diferencial*. En el caso en que $f(x)$ sea algebraica es cuando se puede sustituir $h = 0$ que es el caso simple del límite (caso de una discontinuidad removible). Se conecta así $E_1(x)$ con la derivada algebraica, pero se apunta el caso más general (Apéndice 6.3.2). Con la derivada algebraica se obtienen las reglas de derivación, incluida la regla de la cadena.

Con el cálculo de las derivadas, es posible simplificar el método para determinar máximos y mínimos utilizando una fórmula para desarrollar la diferencia $f(x+h) - f(x)$ con las derivadas, a saber, la Fórmula de Taylor (Apéndice 6.3.3) y poder abordar problemas que resultarían muy laboriosos haciendo un desarrollo algebraico, como es el caso de los problemas clásicos de los Ejemplos 8 y 9 (Apéndice 6.1). En estos ejemplos, los términos del desarrollo de $f(x+h) - f(x) = E_1(x)\,h + E_2(x)\,h^2 + \cdots$, a diferencia de los Ejemplos 4 a 6, se continúan más allá del segundo término $E_2(x)$ (i.e de la segunda derivada), por lo que al desarrollar la diferencia para un punto crítico x_0 queda ahora en la forma $f(x_0 + h) - f(x_0) = E_2(x_0)\,h^2 + \text{TOS}$, donde $E_2(x_0) = f''(x_0)/2$, por lo que hay que utilizar el argumento de que *para valores de h suficientemente cercanos a cero, los signos de los términos no nulos con potencias inferiores de h son dominantes*, por lo que si $f''(x_0) > 0$ tendremos una diferencia positiva y por lo tanto un mínimo y si $f''(x_0) < 0$ la diferencia será negativa que corresponde a un máximo (criterio de la segunda derivada). Si esto se comprende bien, sabremos que sólo podremos asegurar, en principio, un extremo local (puede ser complicado saber, con exactitud, que tan pequeño hay que tomar $|h|$ para que el signo del término en h^2 domine a los de orden superior).

La Fórmula de Taylor $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \text{TOS}$ también es empleada para determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado (Apéndice 6.3.4). Se fija la x haciendo $x = x_0$ en dicha fórmula y el incremento h variable como $h = x - x_0$ quedando la Fórmula de Taylor expresada:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \text{TOS (términos en } (x - x_0)^3, \ldots)$$

El argumento utilizado en el método de desarrollos de Taylor algebraicos, de que para incrementos $x - x_0$ cercanos a cero ($x - x_0$ cercano a cero se traduce en x cercano a x_0) el término de la potencia menor domina, principio que nos bastaba aplicarlo a que el signo del término de menor orden domina. En este caso, necesitamos ir más lejos que los signos, utilizando todo su poder: que $f'(x_0) \neq 0$, para valores de x suficientemente cercanos a x_0, los términos de orden superior al menor se vuelven *relativamente* despreciables con respecto al primero, por lo que se tendrá prácticamente la igualdad $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ para valores de x *suficientemente cercanos* a x_0. En realidad se tiene $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$, pero la aproximación es del tipo $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \pm \epsilon(x - x_0)$, donde $\epsilon > 0$ se puede tomar tan pequeño como se quiera (restringiendo la distancia de x a x_0, lo que haga falta). Finalmente, haciendo $y = f(x)$ (muy común cuando se habla de la gráfica de la función), obtenemos la ecuación de la recta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente $f'(x_0)$, la cual es llamada la (ecuación de la) *recta tangente* a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

El trabajo con GeoGebra se retoma con una actividad para introducir el criterio de la primera derivada para máximos y mínimos, empezando con la comprobación visual del grado de *parecido* de la gráfica con la recta tangente en un punto, usando acercamientos sucesivos (*zoom in*) centrados en dicho punto. Para ello, se utiliza el Ejemplo 8, el de hallar el volumen máximo de una caja sin tapa construida recortando cuadrados iguales en las esquinas de una hoja de cartón rectangular, mismo que fue resuelto con desarrollos de Taylor (ver Apéndice 6.1 y 6.3.3). La función que describe el volumen (variable dependiente) está dada por $f(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$, cuyo dominio es el intervalo $[0, 2.5]$ de los valores del lado x del cuadrado (variable independiente) restringido por la dimensión menor (5 dm).

Previo al trabajo en GeoGebra y siguiendo el guión descrito en la sección *Interpretación Geométrica de la Derivada* (Apéndice 6.3.4), se obtiene la ecuación de la recta tangente, obtenida a partir de la fórmula de Taylor, en tres puntos distintos de la gráfica de la función $f(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$. En $x = 0.5$ la ecuación de la recta tangente calculada es $y = 17x - 5.5$, en $x = 1$ la ecuación de la recta tangente es $y = 18$ y finalmente en $x = 2$, la ecuación de la recta tangente obtenida es $y = -16x + 40$. Para comprobar nuestros resultados, se traza la curva de la función $f(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ en GeoGebra y se coloca un punto A sobre la gráfica de $f(x)$, en la abscisa $x = 0.5$ (el primer punto de los ejercicios realizados analíticamente). Utilizando la funcionalidad del software, trazamos (con un color distinto a la gráfica de la función) la línea tangente a $f(x)$ en el punto A y comprobamos que nuestro resultado es correcto de dos formas: primero observando que la ecuación de la recta creada de manera automática en GeoGebra es la misma que obtuvimos de manera analítica, y segundo, observando el comportamiento de ambas gráficas al hacer *zoom in* centrado en el punto A, y comprobando que la gráfica de la función se convierte en la recta tangente, o usando palabras de los alumnos, “se superponen”, “se confunden”, “son la misma”. La geometría dinámica de GeoGebra permitió mover el punto A sobre la gráfica de $f(x)$ a los tres puntos usados en la actividad analítica, a saber $x = 0.5$, $x = 1$ y $x = 2$, para mostrar intuitivamente que en $x = 0.5$ donde la gráfica de la función es creciente, la pendiente de la recta tangente es positiva (a saber $f'(0.5) = 17$), en $x = 1$, donde se había encontrado el valor máximo (ver ejemplo 8 de la sección 6.3.2) la pendiente de la recta tangente es cero ($f'(1) = 0$) y finalmente, en $x = 2$ donde la gráfica de la función es decreciente, la pendiente de la recta tangente es negativa (a saber $f'(2) = -16$). Esta actividad permitió introducir el criterio de la *primera derivada* para la caracterización de máximos y mínimos locales, a saber: Si en un intervalo cerrado $[a, b]$ la derivada se anula en un único punto interior c, $a < c < b$, entonces en el subintervalo $[a, c)$ la derivada tendrá un mismo signo y lo mismo ocurrirá en el subintervalo $(c, b]$.

Cuando $f'(x)$ tiene signos distintos en $[a, c)$ y $(c, b]$ tendremos:

(i) Si $f'(x) > 0$ ($f(x)$ crece) en $[a, c)$ y $f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrece) en $(c, b]$ entonces $f(x)$ alcanza un máximo en $x = c$ que es absoluto en $[a, b]$.

(ii) Si $f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrece) en $[a, c)$ y $f'(x) > 0$ ($f(x)$ crece) en $(c, b]$ entonces $f(x)$ alcanza un mínimo en $x = c$ que es absoluto en $[a, b]$.

En la parte final del curso se aplicaron el Post Test 01 y el Post Test 02 para evaluar los avances de los chicos.

En la última clase del curso, y como parte de la evaluación requerida por la Universidad, se aplicó un cuestionario de opción múltiple, que incluyó, en ese formato, 8 preguntas relativas a la parte de Cálculo (Cuestionario de Cálculo, Apéndice 6.6.3). Además se elaboraron dos problemas de máximos y mínimos (Apéndice 6.6.4), no vistos en el curso y ambos planteados en formato abierto, para analizar los desarrollos de los alumnos y poder evaluarlos en la comprensión de los procedimientos estudiados. Esta última evaluación se vincula con la *pregunta 4 de investigación*, tratando de averiguar si el estudiante comprende de manera relacional y no sólo instrumental. Como puede verse, excepto por estas dos preguntas abiertas, el grueso de las preguntas tuvieron un formato (dictado por la Universidad, por la pandemia) vinculado a la comprensión instrumental, así que no hubo el posible conflicto planteado en la *pregunta 1 de investigación*, acerca de las expectativas de los estudiantes sobre el tipo de las preguntas (midiendo comprensión instrumental) de los exámenes.

Tomando como eje las Preguntas de Investigación, describimos en tablas las acciones (Respuestas) como respuesta ante las dificultades planteadas y/o los instrumentos para percibir (Detección) la comprensión del estudiante planteados en la pregunta, según sea el caso.

Preguntas de Investigación	*Respuestas/Detección*	Comentario
1. ¿Cómo lidiar con la dificultad de que los estudiantes esperan exámenes con preguntas previsibles asociadas a la comprensión instrumental?	*Respuesta*: Cuestionario de Cálculo (preguntas de opción múltiple) más 2 preguntas abiertas planteando problemas de máximos y mínimos (Apéndice 6.6.3 y 6.6.4).	En todo el curso, sólo hubo dos preguntas abiertas; el resto fueron de opción múltiple. No causó problema a los y las estudiantes
2. ¿Cómo copar con un curso sobrecargado, diseñado para la comprensión instrumental, que contrasta con la introducción de la derivada propuesta, orientada a una comprensión relacional?	*Respuesta*: Colección estructurada de ejemplos de funciones para introducir los conceptos asociados (Funciones Apéndice 6.2)	Se trató de instilar algo del espíritu de la comprensión relacional en los temas previos a la derivada, siguiendo el primer principio del aprendizaje de Skemp (1987)
3. ¿Cómo remontar la dificultad psicológica de un profesor acostumbrado más bien a promover la comprensión instrumental para cambiar esos esquemas?	*Respuesta*: El aprendizaje que dejó la experiencia del Curso de Primavera (Pre-experimentación) ayudó a este respecto.	La experiencia de la Pre-experimentación puso de manifiesto la necesidad de una planeación adecuada, algo indispensable para promover la comprensión relacional.

Preguntas de Investigación	*Respuestas/Detección*	Comentario
4. ¿Cómo distinguir a través de los exámenes si el o la estudiante comprende de manera relacional cierto asunto y no sólo de manera instrumental?	*Detección*: PreTest y PostTest 01 (Apéndice 6.6.1) miden indirectamente conocimientos y destrezas en desigualdades, signos y órdenes de magnitud, requisitos en la comprensión relacional del Método. Y, directamente, con los 2 problemas de máximos y mínimos (Apéndice 6.6.4)	En el caso de la dupla de Tests 01, los progresos entre su aplicación antes y después de ver el Método, comprueban a la vez que los conocimientos y destrezas implícitos son requeridos por el Método y que en el ejercicio de comprenderlo se desarrollan.
5. ¿Qué provisiones se van a tomar para conseguir cierta comprensión de la regla de que para valores pequeños de $\|h\|$, las potencias de h de orden inferior dominan a las de orden superior?	*Respuesta*: Las dos actividades con GeoGebra mostrando con magnificaciones que $f(x) = 2x+x^2$ se ve como $g(x) = 2x$; y $f(x) = x^2 + x^3$ como $g(x) = x^2$. *Detección*: Las preguntas sobre órdenes de magnitud y la del bosquejo de las gráficas de la dupla PreTest y PostTest 01 (Apéndice 6.6.1).	Las preguntas de la dupla PreTest y PostTest 01 se refieren, las de orden de magnitud, a la comparación entre diversas potencias de h cuando $h > 1$, $0 < h < 1$ y $-1 < h < 0$ y la del bosquejo de las gráficas a las de $y = x^2$ y $y = x^3$. Los progresos reflejando comprensión de la regla.
6. ¿Qué provisiones se han pensado para la comprensión, por parte del estudiante, del límite (puntual) del cociente diferencial, en los casos afortunados, como una instancia de discontinuidad removible?	*Respuesta*: El desarrollo del Ejemplo 3(a) (Apéndice 6.2.5), con la función *signo* mostrando una discontinuidad esencial y la función *signo cuadrado* con una discontinuidad removible, las cuales cobran vida con GeoGebra	Las actividades fueron descritas arriba y es necesario experimentar estas vivencias con GeoGebra para "sentir" casi de manera real los saltos de las discontinuidades.

4. Resultados y Conclusiones

Ahora tomamos como eje los referidos como *instrumentos de detección* de la tabla anterior, en vez de hacerlo con las Preguntas de Investigación, excepto que hemos de agregar otros tests o exámenes (Cuestionario de Cálculo y Tests 02) poco o nada vinculados a las preguntas de investigación. Especificaremos el propósito del instrumento para interpretar los resultados, esto es, las mediciones obtenidas al ser aplicados a los estudiantes del curso. En la Sección de Resultados, habremos de interpretar las mediciones obtenidas y en la última sección, las Conclusiones que se pueden extraer de todo el proceso.

4.1. Resultados

Empezaremos presentando tablas, enumerando los distintos instrumentos de detección en la primera columna, sus propósitos, o qué pretenden medir, en la segunda columna (para interpretar los resultados) y en la tercera, la referencia a los resultados en el Apéndice. Luego procederemos a comentar e interpretarlos.

Instrumentos de detección	*Propósito/Vinculación*	Resultados
PreTest y PostTest 01 (Apéndice 6.6.1) Reactivos sobre conocimientos y destrezas 1. Conversión de desigualdades en signos, 2. Incrementos algebraicos, 3. Simétricos y valor absoluto, 4. Órdenes de magnitud y bosquejo de las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$	Los progresos en los puntajes entre el PreTest y el PostTest se consideran un buen indicador de la comprensión relacional. Se vinculan globalmente con la pregunta 4 sobre comprensión relacional. La parte 4 de los Tests se vincula con la pregunta 5, comprensión de que en la cercanía a cero las potencias inferiores dominan	Apéndice 6.7.1 y Apéndice 6.7.2
PreTest y PostTest 02 (Apéndice 6.6.2) Reactivos sobre prioridades de las operaciones, uso de paréntesis y expresiones algebraicas, asociados a una lección sobre el tema (Apéndice 6.5)	Los progresos entre el PreTest y el PostTest valida la efectividad de la lección que promueve comprensión relacional del tema. Se vincula a deficiencias observadas, v.gr., $x^2 + x$, no se trata como *suma*, encerrada entre paréntesis	Apéndice 6.7.3

Observando la tabla de resultados comparativos del PreTest 01 al PostTest 01 (Apéndice 6.7.1), vemos en las partes 1 y 2 (conversión de desigualdades a signos e incrementos algebraicos) *progresos* más bien modestos, cuando los hay, que corresponden a puntajes altos (un porcentaje alto de estudiantes acertando) de entrada. Progresos significativos en la parte 3 (simétricos y valor absoluto) donde el porcentaje de estudiantes acertando pasa del 70 % al 100 % que equivale a un progreso del 43 % y del 60 % al 100 % equivalente a un progreso del 67 %. El progreso se calcula como un incremento relativo entre el número de aciertos del PreTest (*apret*) y el número de aciertos del PostTest (*apost*) con la ecuación

$\dfrac{apost - apret}{apret} \times 100\,\%$ y en caso de que el número de aciertos del PreTest sea cero y el incremento positivo, el progreso se podría tomar como $\frac{apost+10\,\%}{10\,\%} \times 100\,\%$ (de 0 a $X\,\%$ como incremento de 10 % a $X+10\,\%$). En la parte 4, órdenes de magnitud, se pide la comparación entre diversas potencias de h cuando $h > 1$, $0 < h < 1$ y $-1 < h < 0$. Sólo en la pregunta 4.2, cuando $h > 1$, se tienen porcentajes altos de entrada, 80 %, que suben al 100 % dando un incremento relativo modesto (progreso 25 %). En cambio en las preguntas 4.1 y 4.3, los porcentajes de estudiantes acertando tienen incrementos relativos estratosféricos: En 4.1 ($0 < h < 1$) del 125 % y en 4.3 ($-1 < h < 0$) del 350 % pues pasan del 40 % acertando al 90 % acertando y del 20 % acertando al 90 % acertando, respectivamente. Con respecto a la pregunta 4.4 que pide bosquejar las gráficas $y = x^2$ y $y = x^3$, se observan progresos del 50 % en ambas actividades, aunque son mejores los resultados del bosquejo de $y = x^2$ que se incrementan del 60 % al 90 % de aciertos mientras que los resultados de $y = x^3$ se incrementan del 40 % al 60 % que siguen siendo modestos. Se observa que los alumnos tienen más claro el bosquejo de $y = x^2$ que el de $y = x^3$, aunque ambas son las gráficas de funciones polinómicas. También es importante mencionar que aunque las gráficas del 40 % de los alumnos siguen con errores en el PostTest, se notan mejorías en los bosquejos con respecto a los primeros intentos hechos en el PreTest.

Observando la tabla de resultados comparativos entre PreTest 02 y PostTest 02 (Apéndice 6.7.3), resaltamos las preguntas 1, 5 y 6; la primera, relativa al lenguaje matemático donde en un principio los alumnos consideran “suma” y “adición” como sinónimos, cuando, en realidad, *suma* es el *resultado* de la *operación* de *adición*. Después de la lección *Prioridad de operaciones y expresiones algebraicas* (ver Apéndice 6.5), el uso del lenguaje mejoró un 700 % cambiando el resultado de 10 % al 80 % de aciertos. El segundo resultado importante de progreso se observa en la pregunta 6 relacionada con la necesidad de hacer explícito el paréntesis implícito en la expresión $x^2 - 2x$ (se escribe indicada pero se piensa realizada), que surge al desarrollar la diferencia $f(x + h) - f(x)$ para una función como $f(x) = x^2 - 2x$, a saber, $f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - 2(x + h) - (x^2 - 2x)$. El progreso en esta pregunta es del 167 %, sube de 30 % de aciertos a 80 % de aciertos entre el PreTest y el PostTest. Mostrando entonces una muy buena efectividad de la lección si nos guiamos por los resultados de las preguntas 1, 5 y 6. Pero son por las que habremos de guiarnos, pues el resto de resultados, preguntas 2 a 5, de las cuales sólo muestra progreso, del PreTest al PostTest 02, la pregunta 2 con un más bien modesto 25 % (pasa de 80 % de aciertos a 100 %), tienen el desafortunado defecto de que su complejidad no es la misma en el PreTest que en el PostTest, siendo superior en este último, donde la o el estudiante debe hacer explícitos los paréntesis implícitos antes de hacer el desarrollo de la expresión aritmética, mientras que en el PreTest sólo debe escoger entre dos que se le proponen.

Instrumentos de detección	*Propósito/Vinculación*	Resultados
Cuestionario de Cálculo (Apéndice 6.6.3) Reactivos de opción múltiple sobre el aprovechamiento en las aplicaciones de la derivada (reactivos 3 a 8). Los reactivos 1 y 2 se refieren al comportamiento gráfico de las distintas potencias enteras con acercamientos y alejamientos	Los dos primeros reactivos miden comprensión de que las potencias inferiores dominan para valores cercanos a cero y lo opuesto, las superiores dominan para magnitudes grandes. Se vinculan al aprovechamiento de las Actividades con Geogebra usando *zoom in* y *zoom out*	Apéndice 6.7.4
Problemas de máximos y mínimos (Apéndice 6.6.4) son dos preguntas abiertas para analizar los desarrollos de las y los estudiantes al resolverlos	Pretenden medir la comprensión relacional de las y los estudiantes sobre el método y aplicaciones a máximos y mínimos. Se vinculan a la Pregunta 4, si la evaluación permite distinguir entre la comprensión instrumental y la relacional del estudiante	Apéndice 6.7.5 y Apéndice 6.7.6

Las preguntas del Cuestionario de Cálculo (Apéndice 6.7.4) con reactivos de opción múltiple, consideran cuatro temas: comportamiento de $y = x+x^2+x^3+x^4$ para valores cercanos a cero (80 % aciertan: a $y = x$) y para valores grandes en magnitud (90 % aciertan: a $y = x^4$), signo de la derivada determinando monotonía (100 %) e identificación de los criterios de la primera derivada (90 %) y segunda derivada (70 %) para máximos y mínimos. Los resultados muestran en general que los temas fueron asimilados, obteniendo 70 % de aciertos como nota más baja la identificación del criterio de la segunda derivada.

Además del cuestionario de cálculo, se aplicaron dos problemas de máximos y mínimos que, como ya se ha mencionado, buscaban medir la comprensión relacional de los alumnos sobre la aplicación del método. El primer problema debe desarrollarse con la aplicación del Método de Desarrollos de Taylor Algebraicos revisado durante la experimentación (ver Apéndice 6.7.5), el segundo problema debe resolverse mediante el análisis de intervalos de monotonía y la aplicación del criterio de la primera derivada (ver Apéndice 6.7.6). Los resultados generales del primer problema son buenos en cuanto a la obtención del punto extremo buscado y a la aplicación del método; se destaca también el buen resultado en el planteamiento de la función a maximizar y en determinar su *dominio*. Esto último conviene destacarlo, pues en este problema del cercado de un terreno a diferencia de otros vistos anteriormente, incluía una reja, por lo que el intervalo dominio no iniciaba en $x = 0$ sino en $x = 6$, lo cual todos los alumnos determinaron correctamente, luego *no procedieron mecánicamente, sino mostrando comprensión relacional*. El segundo problema presenta mejores resultados en la aplicación del método (criterio de la primera derivada) donde los alumnos llegan al resultado esperado (el valor de x donde se alcanza el extremo) sin errores en el procedimiento. Los alumnos utilizan un registro tabular para representar los intervalos de monotonía como se hizo en clase. Un aspecto negativo que se observa en los resultados de ambos problemas es que, en general, los alumnos consideran como terminados los ejercicios al encontrar el valor donde se alcanzan los extremos, pues la mayoría no interpreta sus resultados y no responde explícitamente a la pregunta planteada (dar las dimensiones).

Los alumnos observaron, en general, al comparar la resolución de ambos problemas una mayor dificultad en el Método de Desarrollos de Taylor Algebraicos [debido posiblemente a la poca práctica], aunque reconocen que éste permite una mejor comprensión de los resultados que utilizando el criterio de la primera derivada.

4.2. Conclusiones

Una de las principales aportaciones de este trabajo de tesis es haber experimentado por primera vez la introducción de la derivada en condiciones reales de aula dentro de un curso de Cálculo diferencial conjuntando las ventajas de dos métodos: El Método de Desarrollos de Taylor Algebraicos estudiado por Aguilar (2007) donde se dan condiciones suficientes (no sólo necesarias) para la obtención de valores máximos y/o mínimos incluyendo los extremos del dominio cuando éste es un intervalo cerrado y el método de la Derivada Algebraica experimentada por Andreu (2006) que permite de manera sencilla a través de operaciones algebraicas obtener las reglas de derivación (incluida la importante regla de la cadena); combinación que había sido intentada en la tesis de maestría de Calderón (2009) y posteriormente planteada como una especie de epílogo en la parte final de su tesis de doctorado (Calderón, 2019) de la que se hizo una experimentación muy modesta. La vinculación de estos métodos ha permitido simplificar el procedimiento algebraico de los desarrollos de Taylor calculando directamente las derivadas y utilizando la fórmula de Taylor, permitiendo también tratar problemas de máximos y mínimos con funciones más complicadas, sin sacrificar la comprensión de lo que se está haciendo.

Así, la introducción de la derivada a través del método estudiado, permitió un acercamiento relacional a uno de los conceptos más importantes del Cálculo sorteando en cierta medida a un obstáculo epistemológico y cognitivo como es el concepto de límite.

Otra de las aportaciones del trabajo es una utilización mucho más importante del software de geometría dinámica. El uso de ejemplos (más cercanos a la intuición de los alumnos que las definiciones formales) y de la tecnología mediante GeoGebra, facilitaron la asimilación de conceptos. La geometría dinámica del software permitió a los alumnos explorar las gráficas de diversas funciones con un acercamiento más profundo que el de imágenes estáticas, permitiéndoles "sentir" diversos comportamientos en los conceptos de continuidad, límite, recta tangente, entre otros. En este aspecto fue relevante la funcionalidad del *zoom* que permitió entender que para puntos cercanos a cero, el término de menor orden domina a los términos de orden superior, así como para reconocer la recta tangente al "linealizar" la gráfica de una función en los alrededores cercanos a un punto sobre ella.

Por otro lado, la experimentación en este trabajo de tesis, pone en evidencia algunas dificultades que impiden la enseñanza del cálculo (y en general de las matemáticas) a través de una comprensión relacional. Principalmente, un temario sobrecargado en contenidos, y unos objetivos basados en el aprendizaje de reglas para la resolución de ejercicios, característicos en la comprensión instrumental.

A pesar de las dificultades, la aplicación del método y de las lecciones desarrolladas permitieron un avance importante en la asimilación de conceptos, como lo muestran los resultados comparativos de los tests presentados en la sección anterior. Así por ejemplo, aun cuando el PostTest 01 muestra deficiencias en el bosquejo de la gráfica de $y = x^3$, se tiene un avance significativo en comparación con los primeros intentos presentados en el PreTest 01, donde en algunos casos el bosquejo de la gráfica no se acercaba siquiera a la curva real.

En la comparación del método de Desarrollos de Taylor Algebraicos con el recurso del criterio de la primera derivada en la resolución de los problemas de máximos y mínimos, los alumnos se sienten más cómodos con el segundo, pues se trata de un método conocido que sigue pasos concretos más cercanos a la comprensión instrumental a la que se encuentran habituados, aunque destacan el apoyo que el método de Desarrollos de Taylor Algebraicos ofrece para *entender* las razones de la regla que lleva a la resolución del problema, a saber, el posible máximo o mínimo se encuentra resolviendo la derivada $f'(x) = 0$.

Para terminar, y teniendo claro que la comprensión instrumental es útil y necesaria para solventar dificultades en los cursos actuales de matemáticas, consideramos que las experiencias y avances alcanzados en este trabajo de tesis podrían permitir la construcción de un curso de Cálculo Diferencial completo basado principalmente en comprensión relacional.

5. Referencias

Aguilar, A. M. (2007). *Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada* [Tesis de maestría no publicada]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Aguilar, A. M., & Riestra, J. A. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. *El Cálculo y su Enseñanza*, *1*, 1-12. https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/down.php?q=A9sd1110juv.pdf

American Psychological Association. (s.f.). Teoría de la Recapitulación. En *Diccionario de Psicología APA*. Recuperado el 09 de septiembre de 2020, de https://dictionary.apa.org/recapitulation-theory

Anderson, R.D., y Loftsgaarden, D. (1987). A Special Calculus Survey: Preliminary Report. en L.A. Steen (Ed.). *Calculus for a New Century: A Pump Not a Filter*. (Coloquio Nacional, Octubre 28-29, 1987 pp. 215-216). Mathematical Association of America.

Andreu, M. E. y Riestra, J. A. (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico epistemológica de su desarrollo. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza* (157-174). Morelia, Mich., México: Morevallado Editores.

Andreu, M. E. (2006). *Propuesta alternativa para un curso de cálculo diferencial acorde con el desarrollo histórico epistemológico de la derivada y con apoyo computacional*. [Tesis doctoral no publicada]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Andreu, M. E. & Riestra, J. A. (2007). Et si nous en restions a Euler et Lagrange? Mise à léssai dún enseignement dánalyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures (article adapté et augmenté par F. Pluvinage). *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, Irem de Strasbourg*, *12*, 165-187.

Bachelard, G. (2000). *La Formación del Espíritu Científico* (23a edición). Siglo XXI.

Calderón, I. (2009). *Un refinamiento de un método algebraico de máximos y mínimos para introducir la derivada y algunas de sus propiedades*. [Tesis de maestría no publicada]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Calderón, I. (2019). *Un estudio de prerrequisitos para la introducción de la derivada con desarrollos de Taylor algebraicos*. [Tesis doctoral no publicada]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel.

Grabiner, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivate from Fermat to Weiertrass. *Mathematics Magazine*, *56*(4), 195-206.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*. *39*. 11-129. https://doi.org/10.1023/A:1003749919816

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Congreso llevado a cabo en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.
https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_cálculo

Peterson, I. (1987). Calculus Reform: Catching the Wave?. *Science News*, *132* (20), 317.

Riestra, J. A. (2001). El método de Fermat para la determinación de Extremos de Polinomios. Una Visión Moderna, *Miscelánea Matemática*, *34*, 103-112

Riestra, J. A. (2004). El Estudio de la Variación en la Edad Media y su Relación con el Concepto de Límite, *Miscelánea Matemática*, *39*, 49-60.

Skemp, R. (1976). Instrumental understanding and relational understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26. http://www.davidtall.com/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf

Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. (1975). A long-term learning schema for calculus/analysis. *Mathematical Education for Teaching*, *2*(2), 3-16.
https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1975a-long-term-learning.pdf

Tall, D. & Schwarzenberger, R. L. E. (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44-49.
https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1978c-with-rolph.pdf

Tall, D. (1980a) The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 271-284.
https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980b-inf-measuring-num.pdf

Tall, D. (1980b) Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Berkeley*, 170-176.
https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980d-int-lims-pme.pdf

Tall, D. (1997) Functions and Calculus. En A. J. Bishop et al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer.
https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997a-functions-calculus.pdf

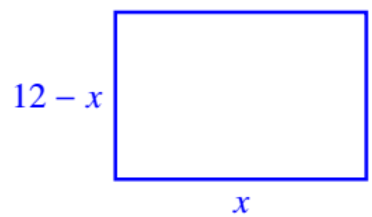
Toh, T. L. (2009). On In-Service Mathematics Teachers'Content Knowledge of Calculus and Related Concepts. *The Mathematics Educator*, *12*(1), 69-86.

Treffers A. (1993). Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*. *25*. 89-108.

6. Apéndices

6.1. Lista de ejemplos de máximos y mínimos del curso de verano

1. Consideremos un rectángulo de semiperímetro igual a 12 unidades lineales. Con estas condiciones, ¿Sería posible formar un rectángulo cuya área mida 20 unidades cuadradas?



2. Consideremos nuevamente el rectángulo de semiperímetro igual a 12 unidades lineales, pero ahora consideremos un área de 35 unidades cuadradas. ¿Cuáles serían las dimensiones del rectángulo?

3. Consideremos por último, un área de 40 unidades cuadradas bajo las mismas condiciones de semiperímetro fijo igual a 12 unidades. ¿Sería posible formar tal rectángulo?

4. (*Problema de Fermat*). Dado un segmento AC de tamaño b, se busca dividirlo en dos partes de manera que el producto de las partes sea máximo.

5. (*Problema de Pluvinage*). Se considera un rectángulo $ABCD$ de base $b = 12$cm y altura $a = 6$cm en el cual se inscribe un paralelogramo cuyos vértices $IJKL$ se encuentran sobre cada uno de los lados del rectángulo, de tal manera que las longitudes $\overline{IB} = \overline{JC} = \overline{KD} = \overline{LA}$ sean iguales. Determinar la longitud $\overline{IB} = \overline{JC} = \overline{KD} = \overline{LA}$ que haga mínima al área del paralelogramo.

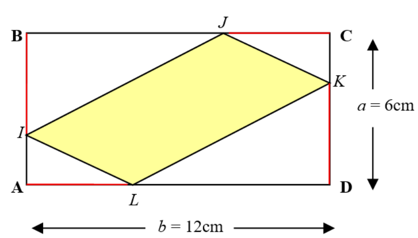
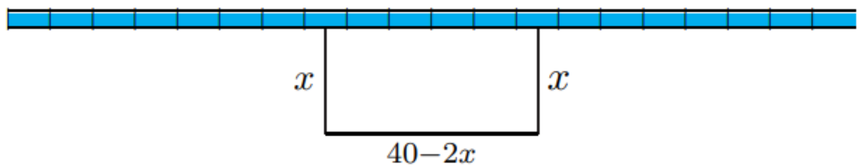


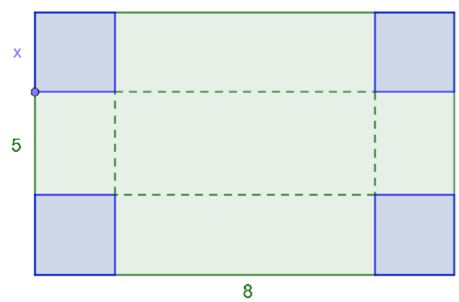
Figura 8: Paralelogramo inscrito en rectángulo $ABCD$

6. Con 40 metros de malla de alambre se desea cercar un terreno rectangular aprovechando un gran muro de piedra como uno de los lados ¿Cuáles serán las dimensiones del terreno de mayor área?

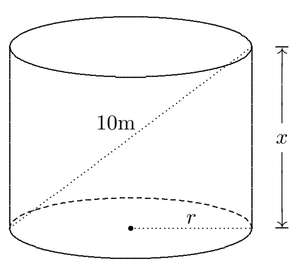


7. Función cúbica. Se busca determinar los valores mínimo y máximo de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$.

8. Caja sin tapa. Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de $8 \times 5dm$. Para ello, se corta un cuadrado de lado x en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja. Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo.



9. (*Kepler*) Dado un recipiente cilíndrico con diagonal $d = 10$ (metros). Determinar las dimensiones del cilindro para que su volumen sea máximo.



6.2. Funciones. Ejemplos. Curso de Verano

6.2.1. Introducción. Definición de Función.

Diremos que se tiene una función f de $\mathcal{D}$ en C, denotada $f : \mathcal{D} \to C$, si hay una *regla* que a cada elemento del conjunto $\mathcal{D}$, digamos x, le hace corresponder un elemento (bien definido) de un conjunto C, digamos $f(x)$ (léase "f de x"), donde $f(x) \in C$ es la *imagen* del elemento $x \in \mathcal{D}$ bajo la función f. El conjunto $\mathcal{D}$ es el *dominio* de la función y el conjunto C el *codominio* o *contradominio* de la función f.

Los elementos clave de una función, aparte del nombre, son el *dominio* (un conjunto), el *codominio* (un segundo conjunto) y la *regla de correspondencia*. Esta última asigna a cada elemento del dominio un elemento unívocamente determinado del codominio. Si x es una variable que representa a cualquier elemento del dominio, la regla de correspondencia es como una fórmula que dice cual es el correspondiente a x, a saber, su *imagen* $F(x)$ en el codominio, asumiendo que la función se represente con F.

Veamos un ejemplo, muy sencillo, para mostrar que tan general puede ser una función. La función se denotará con g. El dominio será el conjunto $\mathcal{D}_g$ que consiste de dos colores, rojo y naranja, es decir, $\mathcal{D}_g = \{\text{rojo}, \text{naranja}\}$ y el codominio el conjunto C_g dado por $C_g = \{\text{rojo-ladrillo}, \text{rojo-quemado}, \text{naranja-quemado}\}$. Vemos pues que el dominio consiste de dos colores y el codominio de tres colores. Nuestra regla de correspondencia dice "asígnele a cada color del dominio su versión quemada (en el codominio)". En vez de usar x, parece más apropiado usar la variable *color*; así la regla puede formularse $g(\textit{color}) = \textit{color}\text{-quemado}$. Podemos listar las correspondencias:

$$g(\text{rojo}) = \text{rojo-quemado}, \quad g(\text{naranja}) = \text{naranja-quemado}.$$

También se pueden listar como: rojo $\overset{g}{\mapsto}$ rojo-quemado, naranja $\overset{g}{\mapsto}$ naranja-quemado. ¿Y qué pasó con el color rojo-ladrillo del codominio? Pues nada, no lo invitaron al baile. La regla tiene que *agotar* los elementos del dominio en el sentido de asignarles a cada uno, sin excepción, un elemento del codominio. Pero nada dice que hay que *agotar* el codominio. Pero sí conviene registrar este hecho. Por ejemplo, no se puede regresar (invertir) la correspondencia, justo porque el color rojo-ladrillo no pertenece al *rango* o *recorrido* de la función g, que podemos denotar con $\mathcal{R}_g$ y el cual es el conjunto de todas las imágenes (en nuestro caso 2), esto es,

$$\mathcal{R}_g = \{g(\text{rojo}), g(\text{naranja})\} = \{\text{rojo-quemado}, \text{naranja-quemado}\}.$$

Como puede apreciarse, el concepto de función puede ser muy versátil para modelar muchas situaciones y es muy probable que utilicemos funciones en la vida diaria sin darnos cuenta. Pero en un curso de Cálculo, los codominios y dominios suelen ser subconjuntos de $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. De preferencia, que el dominio sea el conjunto de todos los números reales, cuando la regla de correspondencia lo permita. En el caso del codominio, como no tiene que agotarse, éste suele ser el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales

En Cálculo, cuando se estudian fuciones, se pone el énfasis en la regla de correspondencia que define la función, digamos la asignación $x \mapsto f(x)$, y especialmente en la fórmula, esto es, en la expresión explícita para $f(x)$, dejando implícito el dominio y el codominio, excepto que se dice que x y $f(x)$ deben representar números reales. $f(x)$ o f misma es referida como *función de x*. Muchas veces se utiliza una variable, digamos y, para denotar los valores de la función bajo la regla de correspondencia, esto es, $y = f(x)$, donde se dice "y está en función de x". En este caso x se le llama *variable independiente* o *argumento* de la función y a y la *variable dependiente*. Como las variables x e y deben representar números reales, la función es referida como *función real de variable real*. Luego el dominio es un subconjunto de los números reales, el conjunto $\mathbb{R}$ mismo, o el mayor subconjunto posible que la fórmula permita y típicamente el codominio suele ser el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, a menos que convenga restringirlos, lo cual se aplica en ambos casos (dominio o codominio), algo que habremos de tratar en su oportunidad.

Todo esto lo iremos dejando claro a través de ejemplos.

6.2.2. Ejemplos de funciones algebraicas. Gráficas

Empezaremos examinando varios grupos de funciones, empezando por las más sencillas, desde luego. Pero además se irá introduciendo gradualmente la terminología que caracteriza ciertas propiedades de las funciones y las operaciones algebraicas que se extienden de manera más bien natural de los números a las funciones. Como se ha anunciado, las funciones serán definidas a través de su regla de correspondencia, así que las primeras tareas serán determinar su dominio (el conjunto más grande posible de números reales que la fórmula, de la regla de correspondencia, permita) y, pensando que, en principio, el codominio es el conjunto mismo de todos los números reales, determinar su rango o rango.

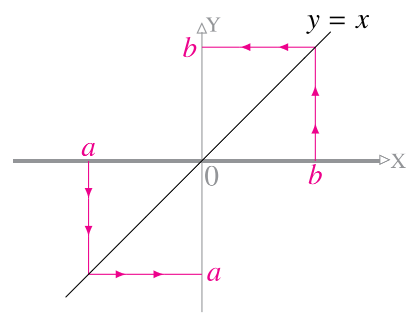
6.2.3. Funciones asociadas a Rectas

Ejemplo 1. (*Función Identidad*) Sea $f(x) = x \quad [y = x]$

Como variable real, x representa, en principio, a cualquier real, a menos que lo limite la regla de correspondencia, que no es el caso, pues al real x le asigna el mismo real x, lo cual es posible establecerlo para todos los números reales. El dominio es, por tanto, el conjunto mismo de los números reales, lo cual se puede expresar $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ó $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$. Como se acostumbra, se escoge el codominio C, como el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Para el rango $\mathcal{R}$, observamos que al coincidir la imagen de x, a saber $f(x)$, con el valor de x , mientras x recorre los números reales, las imágenes harán lo mismo. Así que $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ y el rango llena el codominio. Por cierto, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ (léase "dominio igual a $\mathbb{R}$") y $C = \mathbb{R}$ ("codominio igual a $\mathbb{R}$") pueden obviarse con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pues la notación f : *Dominio* $\to$ *Codominio*, es sobrentendida. Como tanto el dominio como el codominio son conjuntos, se suelen representar con letras mayúsculas. Pero no tendría nada de malo decir, en este caso, simplemente *Dominio* $=\mathbb{R}$, *Codominio* $=\mathbb{R}$ y *Rango* $=\mathbb{R}$. Por cierto, una función cuyo rango coincide con el codominio se dice ser *suprayectiva*.

La notación alternativa a $f(x) = x$, para describir nuestra función, a saber, $y = x$, por los cursos de Geometría Analítica, la *identificamos* como la ecuación de una recta que hace 45º con la parte positiva del eje X y que pasa por el origen. En efecto, esa va a resultar la *gráfica* de la función $y = x$, o $f(x) = x$. Traducido gráficamente, o mejor dicho como lugar geométrico, $y = x$, significa la colección de puntos del plano cartesiano que cumplen *Ordenada* = *Abscisa*, que determina las parejas (x, x) de la gráfica. Pero conviene tener en mente que nuestra función es *la correspondencia* que a cada valor posible de x, le asigna ese mismo valor a su imagen $f(x)$ (o a y). Se establece la correspondencia $x \mapsto x$, que se traduce en $2 \mapsto 2$ (al número 2 se le asigna el 2 mismo), $\sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}$, $0 \mapsto 0$, $-\pi \mapsto -\pi$, etc. (por eso se llama *Función Identidad*). Ilustramos la forma de leer las correspondencias $a \mapsto a$ en la gráfica, a saber, en el eje X se traza una recta perpendicular a la abscisa $x = a$ [una vertical por el punto $(a, 0)$], cuando corte a la gráfica en un punto [esto ocurre en general en $(a, f(a))$ y en este caso en (a, a)], por el que se traza una horizontal hasta que corte al Eje Y [esto ocurrirá en general en el punto $(0, f(a))$ y en este caso en $(0, a)$], finalmente se toma la ordenada de este último corte [$f(a)$ en general y en este caso a] como el correspondiente a $x = a$. Tratamos de ilustrarla en color magenta, a continuación:

Gráfica de la función $y = x$, mostrando la correspondencia $x \mapsto x$ para $x = a$ y $x = b$, donde $a < 0 < b$.



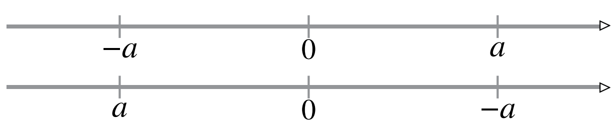
Ejemplo 1(a). $F(x) = -x \quad [y = -x]$

La ley de correspondencia, $F(x) = -x$, dice que a cada valor de la variable x se le asigna el valor de su *simétrico* o *aditivo inverso* representado con $-x$. Puesto que cualquier número real tiene un aditivo inverso, el dominio para esta función es la totalidad de los números reales: $\mathcal{D} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Tomaremos al conjunto de los números reales como codominio: $C = \mathbb{R}$. Veamos el rango o recorrido $\mathcal{R}$ de esta función. Tal vez alguien podría pensar, dado que las imágenes de esta función F se expresan por la fórmula $F(x) = -x$, que dichas imágenes serán siempre negativas, excepto para $x = 0$, cuya imagen es cero: $F(0) = -0 = 0$, es decir, que las imagenes son números negativos o cero; pero no es así. De hecho el rango es todo el conjunto de los reales, es decir, esta función es *suprayectiva*, como se muestra, a continuación.

Argumento Intuitivo. Ya vimos que 0 está en el rango ($0 \in \mathcal{R}$); ahora bien, mientras x recorre todos los números reales positivos, su aditivo inverso $-x$ recorrerá todos los números reales negativos y, recíprocamente, cuando x recorre todos los números reales negativos, su aditivo inverso $-x$ recorrerá todos los números reales positivos.

Argumento Formal. Puesto que claramente $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, para ver la igualdad debemos mostrar la otra contención, esto es, que cualquier número real es imagen, bajo F, de un elemento del dominio $\mathbb{R}$; sea pues x un número real cualquiera, entonces existe el real $-x$, su simétrico o aditivo inverso, por lo tanto $-x$ está en el dominio y se cumple $F(-x) = -(-x) = x$, es decir x pertenece a $\mathcal{R}$. Como x es cualquier real, hemos demostrado que $\mathbb{R} \subset \mathcal{R}$ y ,por lo tanto, la igualdad $\mathcal{R} = \mathbb{R}$.

Retroalimentación. Es importante distinguir el signo aritmético del algebraico. Con la notación $-a$ denotamos el *simétrico* del número real a, también llamado el *aditivo inverso* de a, ésto último atendiendo a su propiedad algebraica característica, que al sumarse con a el resultado es cero: $a + (-a) = 0$. El término *simétrico de a* se refiere a su representación geométrica:



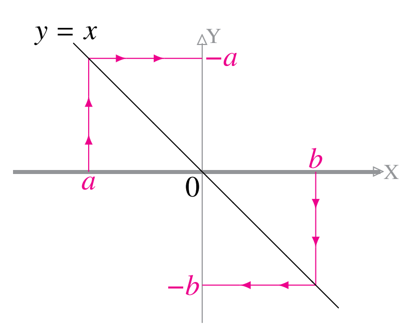
Cuando $a > 0$, tenemos que $-a < 0$.

Cuando $a < 0$, tenemos que $-a > 0$.

En cambio, aunque -5 sigue denotando el simétrico de 5, su signo lo denota como un real negativo. El asunto es que a es una constante real y bien puede representar un negativo, aunque no tenga signo negativo. Por ejemplo, que se tenga $a = -5$, en cuyo caso $a < 0$ y $-a = -(-5)$ (léase "a igual al simétrico de -5"). Pero el simétrico de -5, esto es el aditivo inverso de -5 es indudablemente 5, luego $-a = 5$ y por tanto $-a > 0$ en este caso.

De nuevo, por los cursos de Geometría Analítica, *identificamos* a $y = -x$ como la ecuación cuyo lugar geométrico es la recta que pasa por el origen y hace -45^{o} con la parte positiva del eje X. Como lugar geométrico, $y = -x$, significa la colección de puntos del plano cartesiano que cumplen *Ordenada* $=$ $-$*Abscisa*, que determina las parejas $(x, -x)$ de la gráfica. Pero conviene tener en mente que nuestra función es *la regla* que a cada valor de x, le asigna $y = -x$, estableciendo la ley de correspondencia $x \mapsto -x$. Enfatizamos la forma de leer las correspondencias $a \mapsto -a$ en su gráfica, a continuación:

Gráfica de la función $y = -x$, mostrando la correspondencia $x \mapsto -x$ para $x = a$ y $x = b$, donde $a < 0 < b$. Ojo, al negativo a, la función le hace corresponder su simétrico, el positivo $-a$.



¿Todas las rectas que se ven en el curso de Geometría Analítica son gráficas de funciones? Respuesta: Sí, con la excepción de las rectas *verticales*: $x = 0$ (o eje Y), $x = 1$, etc., las cuales no pueden ser gráficas de funciones.

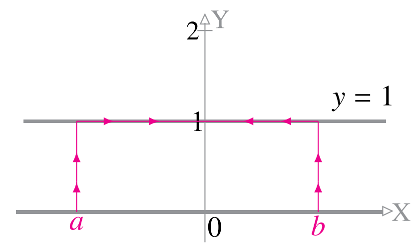
Pero ciertamente las rectas horizontales son gráficas de funciones. De hecho, son las gráficas de las funciones *constantes*.

Ejemplo 1(b). (*Función Constante*) $g(x) = 1 \quad [y = 1]$

La escritura $g(x) = 1$ puede confundirse con una ecuación en x. Para evitar esa confusión, se expresa a veces $g(x) \equiv 1$ (léase "g(x) es idénticamente 1"). Es decir, no importa el valor de x, el valor de la función será siempre la unidad. El dominio es $\mathbb{R}$, pues la regla no limita y se tiene entonces $\mathcal{D} = \mathcal{C} = \mathbb{R}$. Puesto que todas las imágenes tienen valor 1, el rango es el conjunto cuyo único elemento es la unidad: $\mathcal{R} = \{1\}$.

Con la otra notación para la función, a saber, $y = 1$, identificamos la recta horizontal a la altura 1, la cual es la gráfica de la *función constante* de valor 1.

Gráfica de la función $g(x) \equiv 1$, o $y = 1$, mostrando la correspondencia $x \mapsto 1$ para $x = a$ y $x = b$, donde $a < 0 < b$.

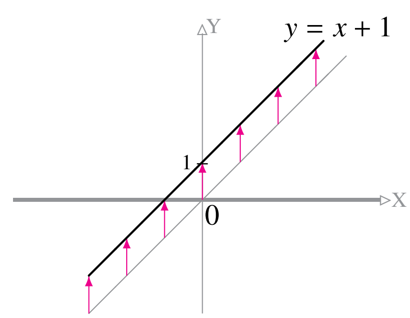


Ejemplo 1(c). (*Suma de la identidad f con la función constante g*) $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x + 1 \quad [y = u + v = x + 1$, donde $u = x$ y $v = 1]$

En este ejemplo observamos que el dominio sigue siendo todo $\mathbb{R}$ pues cada uno de los sumandos es una función definida para cualquier real. Así que $\mathcal{D} = \mathcal{C} = \mathbb{R}$. Para ver que el rango llena todo el dominio, observe que la relación $(f + g)(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$ se cumple para todo real x. El argumento sería: dado cualquier real x del codominio, existe el real $x - 1$ en el dominio, cuya imagen bajo $(f + g)$ es igual a x, luego x está en el rango. Como el rango $\mathcal{R}$ es igual al codominio (o sea $\mathbb{R}$) la función es *suprayectiva*.

Con $y = x + 1$ identificamos la gráfica como una recta de pendiente 1 (que es la tangente de 45º) y cuya ordenada al origen es 1.

Gráfica de la función $y = x + 1$. Intentando mostrar la adición de una unidad a la gráfica de $y = x$ (todos sus puntos suben una unidad) para convertirla en $y = x + 1$.



6.2.4. Funciones potencia entera: cuadráticas, cúbicas

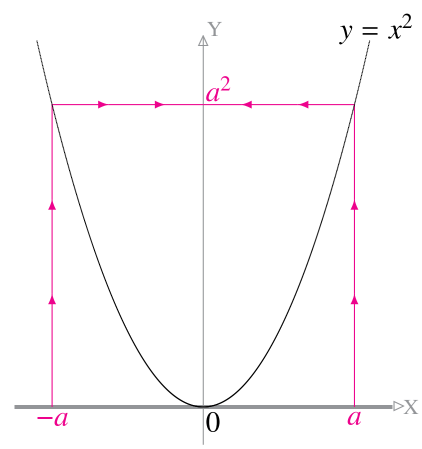
Ejemplo 2. (*Función cuadrática*) Sea $f(x) = x^2 \quad [y = x^2]$

Su dominio es todo $\mathbb{R}$, pues a cualquier número real podemos aplicarle la fórmula (lo podemos elevar al cuadrado, es decir, podemos multiplicarlo por sí mismo). Así $\mathcal{D} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < \infty\}$. Como siempre C, el codominio, se puede tomar como $\mathbb{R}$. Pero en este caso, el rango no llena el codominio al estar contenido en el intervalo $[0, \infty]$, pues los valores de la función, al ser cuadrados de números son ≥ 0 [Claro, al elevar cero al cuadrado da cero, pero ¿por qué al elevar al cuadrado un número real distinto de cero el resultado es positivo?].Que el rango $\mathcal{R}$ esta contenido el intervalo $[0, \infty]$, esto es, que toda imagen satisface $f(x) \geq 0$ es cosa fácil, pero que el rango llene al intervalo se pospone.

Puesto que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ (i.e. $f(-x) = f(x)$) la función se dice ser *par*. Esto se traduce en que la gráfica resulta *simétrica* con respecto al eje Y.

Con la notación $y = x^2$, identificamos esta relación como el lugar geométrico de *una parábola* con vértice en el origen que abre hacia arriba: esta es la gráfica de la función. Al graficarla conviene leerla como la correspondencia $x \mapsto x^2$. Veamos la gráfica:

Gráfica de la función $y = x^2$, mostrando la correspondencia $x \mapsto x^2$ para $x = -a$ y $x = a$ (donde $a > 0$) y poniendo de manifiesto su simetría, al ser una función par: $f(x) = f(-x)$; en este caso $x^2 = (-x)^2$.



Retomemos el problema de que el rango $\mathcal{R}$ llene al intervalo $[0, \infty)$. Vimos que $\mathcal{R} \subset [0, \infty)$. Para la contención recíproca, dado cualquier $x \geq 0$, hay que mostrar que pertenece a $\mathcal{R}$, o sea, que para algún y elemento del dominio (es decir un real y), se da $f(y) = x$; esto plantea la ecuación $y^2 = x$; *resolverla* para y real *significa hallar un número real cuyo cuadrado sea* x. Cuando $x = 0$, la ecuación $y^2 = 0$ tiene por única solución $y = 0$. Y para $x > 0$ esperamos, de hecho dos soluciones. Por ejemplo, para $x = 4$, $y^2 = 4$ tiene dos soluciones:

$y^2 = 4$ equivale a $(y + 2)(y - 2) = y^2 - 4 = 0$ que da dos soluciones $y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

En general, tendremos para cualquier $x \geq 0$,

$y^2 = x$ equivale a $(y + \sqrt{x})(y - \sqrt{x}) = y^2 - (\sqrt{x})^2 = y^2 - x = 0$ que da las soluciones $y = \pm\sqrt{x}$, las cuales se reducen a una si $x = 0$: $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$.

Donde $\sqrt{x}$, denota *la raíz cuadrada no negativa de* $x \geq 0$ y significa un número positivo o cero cuyo cuadrado es igual a x. Su existencia como número real, para *cualquier* $x > 0$, esto es, como algo que determina una posición exacta o una magnitud exacta en el Eje Real, es consecuencia de la continuidad de los números reales. Así, $\sqrt{2}$ significa exactamente un número (positivo) que al elevarse al cuadrado es igual a 2. Su valor no lo da una calculadora ni la computadora más poderosa. Sólo dan aproximaciones. Se sabe que la expresión decimal para $\sqrt{2}$ es infinita y no periódica (no puede expresarse como cociente de enteros), por lo que nunca sabremos su valor exacto; pero como tiene una magnitud concebible (la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1), no sería admisible un "hueco" en el Eje Realgarantizada la existencia de $\sqrt{x}$ para cualquier $x \geq 0$, por su definición $f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, pero también $f(-\sqrt{x}) = (-\sqrt{x})^2 = x$, prueban cada una que el rango es $[0, \infty)$ y que éste se recorre dos veces, excepto por el cero. La relación $f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ para $x \geq 0$ (i. e. $x \in [0, \infty)$ nos dice que la restricción de $f(x) = x^2$ al intervalo $[0, \infty)$ *invierte* la correspondencia de la función *raíz cuadrada no negativa*, la cual a cada $x \in [0, \infty)$ le asigna $\sqrt{x}$ (ver Sección 3).

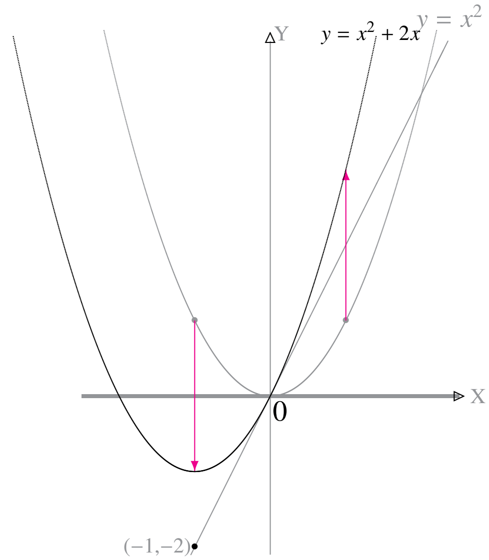
Ejemplo 2(a). (*Suma de f, función cuadrado, con la función lineal g, $x \mapsto 2x$*) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x \quad [y = u + v = x^2 + 2x$, donde $u = x^2$ y $v = 2x]$

El dominio de esta función es el conjunto $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ puesto que las operaciones indicadas se pueden realizar para cualquier real x, y el codominio también se toma, como es costumbre, el mismo conjunto, hecho que se puede expresar $(f + g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El rango se abordará más adelante por etapas.

La expresión $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ define la función suma $f + g$ como la suma punto a punto de los valores $f(x)$ con $g(x)$, en este caso, a cada valor de x le hace corresponder la suma de x^2 con $2x$ que se traduce gráficamente en que para cada abscisa x, se le hace corresponder la ordenada que resulte de sumar la ordenadas de la primera función con la ordenada de la segunda. Se trata de comprobar esto gráficamente en unos pocos casos, pero cuyo resultado global sólo se puede anticipar con el recurso algebraico:

$(f + g) = x^2 + 2x = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1$, donde en esta última expresión, el primer término $y = (x + 1)^2$, corresponde a una parábola con vértice en $(-1, 0)$ a la que se le desplaza rígidamente una unidad hacia abajo al restarle la función constante $y = 1$. Así pues, con ayuda del álgebra vemos que la gráfica de la suma se traduce en una parábola con vértice en $(-1, -1)$ que se abre hacia arriba. La última expresión $y = (x + 1)^2 - 1 \geq -1$ (pues $(x+1)^2 \geq 0$) también permite reconocer que el rango $\mathcal{R}$ está contenido en el intervalo $[-1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$ (léase "el conjunto de (todos) los reales mayores o iguales que -1"). Más adelante mostramos la igualdad del rango con dicho intervalo. A continuación mostramos la gráfica de la suma $f + g$:

Gráfica de la función $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, una parábola con vértice en $(-1,-1)$, resultante de sumar algebraicamente, punto por punto, las ordenadas de la parábola $y = x^2$ y las de la recta $y = 2x$ (ambas en gris). Se ilustra para las abscisas $x = -1$ y $x = 1$. Al punto $(-1, 1)$ de la parábola $y = -x^2$, se le suma la ordenada -2 del punto $(-1,-2)$ de la recta $y = 2x$, cuyo efecto es que el punto $(-1, 1)$ de la parábola baja 2 unidades hasta el punto $(-1,-1)$, vértice de la parábola resultante (en negro). Para $x = 1$, al punto $(1, 1)$ de la parábola $y = x^2$ se le suma la ordenada 2 del punto $(1, 2)$ de la recta $y = 2x$, por lo que $(1, 1)$ sube 2 unidades hasta el punto $(1, 3)$ de la parábola resultante.

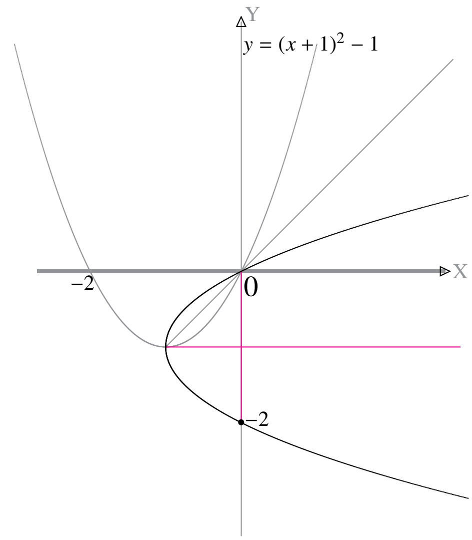


Retomemos el problema del rango $\mathcal{R}$ de la función $y = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$, habiamos visto que $\mathcal{R} \subset [-1,\infty)$, para probar la otra contención, vimos en el Ejemplo 2, que tratar de probar que cualquier elemento del intervalo $[-1,\infty)$ es una imagen equivale a regresar (invertir) la correspondencia. Esto se consigue invirtiendo los papeles de x e y. En este caso, partiendo de $y = (x+1)^2 - 1$ al intercambiar x e y se obtiene $x = (y+1)^2 - 1$ que es el lugar geométrico de una parábola que se abre a la derecha con vértice en $(-1,-1)$ que pasa por el origen y $(0,-2)$ que no define a la gráfica de una función (sino de dos): la perpendicular a cualquier abscisa $x > -1$ (por ejemplo, $x = 0$) corta siempre a esta párabola en dos puntos determinando dos ordenadas ($y = 0$ e $y = -2$). Véase la gráfica de la función original en gris y la parábola con eje horizontal $y = 1$ que pasando por el vértice $(-1, 1)$ divide a la parábola en la gráfica de dos funciones:

La ecuación $x = (y + 1)^2 - 1$ es equivalente a $(y + 1)^2 - 1 - x = 0$, luego, equivalente a

$\big((y+1) - \sqrt{1+x}\big)\big((y+1) + \sqrt{1+x}\big) = (y+1)^2 - (1+x) = 0$, que da dos soluciones $y = -1 + \sqrt{1+x}$ e $y = -1 - \sqrt{1+x}$, cuyas gráficas corresponden a la mitad superior de la parábola y la mitad inferior, respectivamente. Observe que la expresión dentro del radical, $1 + x$ debe ser positiva o cero, lo cual está garantizado pues $x \geq -1$ (i.e., $x \in [0,\infty)$. Comprobamos que $(f + g)(-1 + \sqrt{1+x}) = (-1 + \sqrt{1+x} + 1)^2 - 1 = (\sqrt{1+x})^2 - 1 = (1+x) - 1 = x$ y también $(f+g)(-1 - \sqrt{1+x}) = (-1 - \sqrt{1+x} + 1)^2 - 1 = (-\sqrt{1+x})^2 - 1 = (1+x) - 1 = x$, así que las imágenes del rango cubren dos veces al intervalo $[0,\infty)$. En la sección 3, veremos los inversos de funciones y retomaremos este caso. A continuación las gráficas correspondientes.

Gráfica de la función $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, una parábola con vértice en $(-1,-1)$, la cual se abre hacia arriba pasando por $(-2,0)$ y por el origen $(0,0)$ se ha dibujado en gris. Al invertir la correspondencia (intercambiar x e y) se obtiene el lugar geométrico de $x = (y+1)^2 - 1$, una parábola que se abre a la derecha con vértice en $(-1,-1)$ que pasa por el origen y $(0,-2)$ que no define a la gráfica de una función (sino de dos): la perpendicular a cualquier abscisa $x > -1$ (por ejemplo, $x = 0$) corta siempre a esta párabola en dos puntos determinando dos ordenadas ($y = 0$ e $y = -2$). Las parábolas están reflejadas en la recta $y = x$.

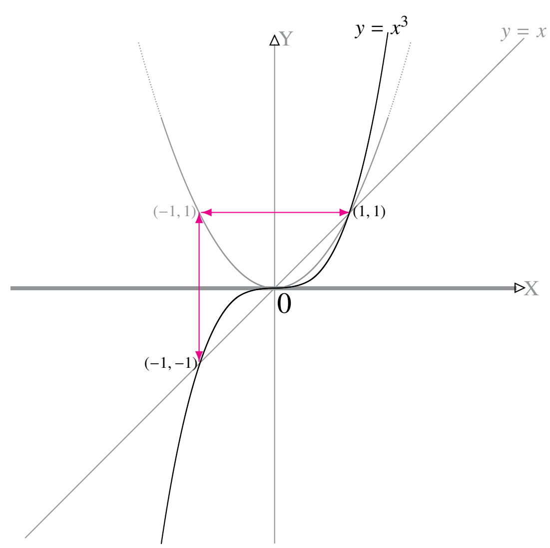


Ejemplo 2(b) (*Función cúbica*) $F(x) = x^3 \quad [y = x^3]$

Puesto que cualquier real x puede ser elevado al cubo, por lo que abreviamos con $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Note que $F(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -F(x)$. Por esta propiedad la función se dice ser impar. Puesto que positivos van en positivos y negativos en negativos., el rango aparentemente llena todo $\mathbb{R}$, como se verá en su oportunidad. Con el propósito de comparar las funciones $y = x$, $y = x^2$ e $y = x^3$ hacemos una tabla, previa a la gráfica.

x	−1.5	−1	−0.5	−0.25	0	0.25	0.5	1	1.5	$(-\infty,\infty)$
$y = x$	−1.5	−1	−0.5	−0.25	0	0.25	0.5	1	1.5	impar
$y = x^2$	2.25	1	0.25	0.0625	0	0.0625	0.25	1	2.25	par
$y = x^3$	−3.375	−1	−0.125	−0.0156	0	0.0156	0.125	1	3.375	impar

Gráfica comparativa de las funciones $y = x$ (recta, función impar), $y = x^2$ (parábola, par: simétrica) y $f(x) = x^3$ $[y = x^3]$, llamada *parábola cúbica*, que al ser una función impar: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, su gráfica tiene simetría de rotación (180º) con respecto al origen de coordenadas, es decir, su gráfica no se altera luego de una rotación de 180 grados alrededor del origen (o bien, su gráfica no se altera si se refleja en el eje Y y luego se vuelve a reflejar en el eje X.



Ejemplo 2(c) (*Función multiplicativo inverso*) $H(x) = \dfrac{1}{x} \quad [y = \dfrac{1}{x}]$

Esta función que asocia a cada real posible su *multiplicativo inverso* o *recíproco*, $x \mapsto \frac{1}{x}$, se puede ver como la función cociente de la función constante 1 ($g(x) \equiv 1$) entre la función identidad ($f(x) = x$): $H(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. Aunque ambas funciones están definidas en todo $\mathbb{R}$, hay que limitar el dominio común, excluyendo los ceros (i.e. las raíces) de la función del denominador, en este caso, los valores de x donde $f(x) = 0$, es decir, $x = 0$ (división por cero excluida). Tenemos entonces que el dominio es el conjunto de reales, menos el cero. Ahora bien, recordemos la *ley de tricotomía* que dice *cualquier real satisface una y sólo una de tres propiedades: 1. el real es* positivo, *2. el real es* cero, *3. el real es* negativo. Simbólicamente, *cualquier* $x \in \mathbb{R}$ *cumple una y sólo una de* $x > 0$ *o* $x = 0$ *o* $x < 0$. (Equivalentemente, cumple exactamente una entre $x > 0$ o $x = 0$ o $-x > 0$). Luego entonces, $x \neq 0$ es equivalente a $x < 0$ o $x > 0$ y el dominio de la función está dado por

$$\{x \in \mathbb{R} | x < 0 \ \text{ o } \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Podríamos escribir entonces $H : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$. El rango $\mathcal{R}$, el conjunto de imágenes, también excluye al origen, pues $H(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ para todo valor permitido de x. Esto se puede ver de varias maneras (un cociente sólo puede ser cero si el numerador es cero). En este caso, como $x \neq 0$, tenemos, como ya vimos, dos posibilidades $x < 0$ o $x > 0$ y tienen el mismo signo x y $1/x$ (su producto es la unidad, un positivo), luego los signos se corresponden y tenemos que $H(x) = \frac{1}{x} < 0$ o $H(x) = \frac{1}{x} > 0$, respectivamente. Así que $\mathcal{R} \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, más aún; veremos fácilmente que el rango coincide con el dominio: dado cualquier x en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, es decir, dado cualquier real $x \neq 0$, existe un real que es su multiplicativo inverso, $\frac{1}{x}$ y además (ya lo vimos) es distinto de cero, por lo tanto pertenece al dominio y su imagen satisface

$$H\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{x \cdot \frac{1}{x}} = \frac{x}{1} = x.$$

Verificando de pasada que el multiplicativo inverso del multiplicativo inverso de un número es el número original y con lo cual se prueba la otra contención y por lo tanto la igualdad $\mathcal{R} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Esto sugiere dos cosas: Tomar como codominio a $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ que es igual al dominio: $H : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, de este modo el rango coincide con el codominio y observar, lo por que acabamos de ver que H misma invierte su correspondencia, o lo que es lo mismo, que si se aplica dos veces se convierte en la identidad:

$$x \overset{H}{\mapsto} \frac{1}{x} \overset{H}{\mapsto} x. \quad \text{O bien,} \ \ H(H(x)) = H\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

En ambos se ilustra lo mismo, la *composición* de la función H consigo misma da por resultado la función identidad. Cuando se invierte la regla de correspondencia se obtiene la misma función. Por ello, su gráfica resulta simétrica con respecto a la recta $y = x$.

Pero veamos más propiedades de esta función *multiplicativo inverso*. Por ejemplo, esta función es impar: $H(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -H(x)$, así que la función tiene simetría de rotación de 180^o (si se rota 180^o no se altera su gráfica). La función es *decreciente* en cada uno de los intervalos de su dominio. Decreciente en un intervalo de su dominio quiere decir que al crecer los argumentos de la función en dicho intervalo, los valores o imágenes correspondientes de la función *decrecen* y viceversa. Desde el punto de vista técnico, decreciente, en un intervalo del dominio, quiere decir que la relación de orden entre dos valores en dicho intervalo, la función los invierte. F es decreciente significa: Dados x_1 y x_2 cualesquiera dos elementos del intervalo del dominio de la función F, entonces, $x_1 < x_2$ implica $F(x_1) > F(x_2)$ (o lo que es lo mismo, $x_1 > x_2$ implica $F(x_1) < F(x_2)$).

Veamos que nuestra función H es decreciente en cada uno de los intervalos de su dominio, a saber, en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.

H es decreciente en $(-\infty, 0)$: Sean $x_1 < x_2 < 0$. Como x_1 y x_2 son ambos negativos, su producto es positivo ($x_1 \cdot x_2 > 0$), luego dividiendo por $x_1 \cdot x_2$ los tres miembros, no alteramos la desigualdad inicial: $\dfrac{x_1}{x_1 \cdot x_2} < \dfrac{x_2}{x_1 \cdot x_2} < \dfrac{0}{x_1 \cdot x_2}$, es decir, $\dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1} < 0$, que se traduce en $H(x_2) < H(x_1)$ o $H(x_1) > H(x_2)$.

H es decreciente en $(0, \infty)$: Sean $0 < x_1 < x_2$. Como x_1 y x_2 son ambos positivos, su producto es positivo ($x_1 \cdot x_2 > 0$), luego dividiendo por $x_1 \cdot x_2$ los tres miembros, no alteramos la desigualdad inicial: $\dfrac{0}{x_1 \cdot x_2} < \dfrac{x_1}{x_1 \cdot x_2} < \dfrac{x_2}{x_1 \cdot x_2}$, es decir, $0 < \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1}$, que se traduce en $H(x_2) < H(x_1)$ o $H(x_1) > H(x_2)$.

Vale la pena comentar que no se puede cruzar el origen, no se pueden tomar $x_1 < 0 < x_2$. No hay intervalo en el dominio de nuestra función que contenga al origen (el valor $x = 0$ para H no existe). Pero en cambio el intervalo $(0, \infty)$ del dominio nos permite tomar argumentos positivos de la función tan cercanos a cero como queramos, por ejemplo, los valores $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{1}{10}$, $x_4 = \frac{1}{20}$, $x_5 = \frac{1}{100}$, etc., estos valores, decrecen a 0 por valores positivos, por lo que sus imágenes, por el contrario crecerán (la función invierte la relación de orden por ser decreciente). En efecto, sus imágenes, bajo H, son $H(x_1) = 2$, $H(x_2) = 5$, $H(x_3) = 10$, $H(x_4) = 20$, $H(x_5) = 100$, etcétera (recuerde que $H(\frac{1}{x}) = x$). Este crecimiento, puede resultar arbitrariamente grande al ir decreciendo lo suficiente los valores positivos hacia cero: Si queremos que $H(x) > 10^6$ (i.e. que los valores de la función resulten mayores que un millón) basta o es suficiente tomar a $0 < x < 10^{-6}$ (i.e. basta tomar a x positivo y menor que un millonésimo) y así le podemos seguir. Este hecho, de que se garantizan valores arbitrariamente grandes (tanto como queramos) de la función al tomar los valores positivos del argumento suficientemente cercanos a cero, se expresa con la fórmula:

$$\lim_{x \to 0+} H(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to 0+} H(x) = \infty$$

léase: *el límite de* $H(x)$, *cuando* x *tiende a* 0 *por la derecha* [o por valores mayores] *es igual a (más) infinito.*

Similarmente, el intervalo $(-\infty, 0)$ del dominio permite tomar argumentos negativos de la función tan cercanos a cero como queramos, por ejemplo, los valores $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$,

$x_3 = -\frac{1}{10}$, $x_4 = -\frac{1}{20}$, $x_5 = -\frac{1}{100}$, etc., estos valores, *crecen* a 0 por valores negativos, por lo que sus imágenes, por el contrario, decrecerán (la función es decreciente). Sus imágenes, bajo H, cada vez son menores, o sea, más negativos: $H(x_1) = -2$, $H(x_2) = -5$, $H(x_3) = -10$, $H(x_4) = -20$, $H(x_5) = -100$, etcétera. De hecho, se pueden garantizar valores arbitrariamente pequeños (tan negativos como queramos) de la función, tomando valores negativos del argumento suficientemente cercanos a cero, lo cual se expresa con la fórmula:

$$\lim_{x\to 0-} H(x) = -\infty$$

léase: *el límite de $H(x)$, cuando x tiende a 0 por la izquierda* [o por valores menores] *es igual a menos infinito.*

Estos límites se llaman *impropios*, porque tanto ∞ como $-\infty$ no son números reales. No existen números reales infinitamente grandes, ni infinitamente pequeños (negativamente hablando). Los símbolos denotan que los reales se pueden tomar arbitrariamente grandes o arbitrariamente pequeños, respectivamente, en este caso refiriendo a las imágenes (o valores) de la función. No porque 0 esté excluido del dominio, sino porque los dos límites laterales en 0, son distintos, no se puede hablar del límite en 0.

Procediendo justamente a la inversa en el intervalo $(0, \infty)$ del dominio, haciendo ahora crecer arbitrariamente a x, los valores de la función decrecen hacia cero. De manera que las imágenes se pueden acercar arbitrariamente (tanto como se quiera) a cero, tomando a x suficientemente grande. Así si queremos garantizar que $0 < H(x) < 10^{-6}$ (menor que un millonésimo), basta tomar $x > 10^6$ (basta tomar x mayor que un millón). Esto se expresa:

$$\lim_{x\to +\infty} H(x) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} H(x) = 0$$

léase: el límite de $H(x)$, cuando x tiende a [mas] infinito es igual a 0.

Y también procediendo a la inversa de como lo hicimos antes en el intervalo $(-\infty, 0)$ del dominio, haciendo ahora decrecer a x (valores cada vez más negativos), los valores de la función crecen hacia cero. De manera que las imágenes se pueden acercar tanto como se quiera a cero, tomando a x suficientemente pequeño (suficientemente negativo). Así si queremos garantizar que $H(x) > -10^{-6}$ (mayor o menos negativo que menos un millonésimo), basta tomar $x < -10^6$ (basta tomar x menor, o más negativo, que menos un millón). Esto se expresa:

$$\lim_{x\to -\infty} H(x) = 0$$

léase: el límite de $H(x)$, cuando x tiende a menos infinito es igual a 0.

Estos límites también se llaman *impropios*.

Ejemplo 2(d) $G(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad [y = \dfrac{1}{x^2}]$

Esta función se puede ver como la función cociente de la función constante 1 ($g(x) \equiv 1$) entre la función cuadrática ($f(x) = x$): $G(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. Aunque ambas funciones están definidas en todo $\mathbb{R}$, hay que limitar el dominio común, excluyendo los ceros (i.e. las raíces) de la función del denominador, en este caso, los valores de x donde $x^2 = 0$, es decir, excluir $x = 0$. Tenemos entonces que el dominio es el conjunto de reales, menos el cero, esto es, el mismo de la función del Ejemplo 2(c), a saber, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Pero a diferencia de esa función el rango $\mathcal{R}$ es el intervalo $(0, \infty)$. La contención $\mathcal{R} \subset (0, \infty)$ es clara, pues para cualquier x real, $G(x) = 1/x^2 > 0$. Otra diferencia es que esta función es *par*, pues $G(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = G(x)$ para cualquier $x \neq 0$.

Consiguientemente, su gráfica es simétrica. Esto tiene como consecuencia práctica que estudiando el comportamiento de la función en el intervalo positivo de su dominio, esto es $(0, \infty)$, podremos deducir su comportamiento en el intervalo negativo $(-\infty, 0)$.

Al igual que la función H del Ejemplo 2(c), esta función G es *decreciente* en $(0, \infty)$. En efecto, de $0 < x_1 < x_2$ deducimos multiplicando primero por el positivo x_1 y luego por el positivo x_2 (que no alteran la relación de orden): $0 < x_1^2 < x_1 \cdot x_2$ y $x_1 \cdot x_2 < x_2^2$, o sea, $0 < x_1^2 < x_1 \cdot x_2 < x_2^2$, de donde $0 < x_1^2 < x_2^2$; dividiendo por el positivo $x_1^2 \cdot x_2^2$, obtenemos $0 < \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} < \frac{x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$, o sea, $0 < \frac{1}{x_2^2} < \frac{1}{x_1^2}$, luego $G(x_2) < G(x_1)$, invirtiendo el orden $x_1 < x_2$, lo que muestra que G es *decreciente* en el intervalo de los positivos. Sean ahora $x_1 < x_2 < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$; multiplicando por -1 se invierte el orden obteniendo $0 < -x_2 < -x_1$ en $(0, \infty)$, donde G decrece, luego $G(-x_1) < G(x_2)$ y por simetría finalmente $G(x_1) < G(x_2)$. Como partimos de $x_1 < x_2 < 0$, la función G preserva el orden en el intervalo $(-\infty, 0)$ y por tanto es *creciente* en el intervalo de los negativos.

Ahora bien, en el intervalo $(0, \infty)$ de los positivos, cuando x se acerca a cero, la función G crece más que la función H, pues para $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{1}{10}$, $x_4 = \frac{1}{20}$, $x_5 = \frac{1}{100}$, etc., valores positivos que decrecen a 0, por lo que sus imágenes, por el contrario crecerán (la función invierte la relación de orden por ser decreciente), en efecto $G(x_1) = 4$, $G(x_2) = 25$, $G(x_3) = 100$, $G(x_4) = 400$, $G(x_5) = 10{,}000$, etcétera, pues $G(\frac{1}{n}) = n^2$. Así que con más razón,

$$\lim_{x \to 0+} G(x) = +\infty\,, \quad \textit{luego por simetría,} \quad \lim_{x \to 0-} G(x) = +\infty\,.$$

La consecuencia inmediata es que siendo iguales los límites laterales (acercando x a cero por valores mayores o por valores menores), es que se puede escribir $\lim_{x \to 0} G(x) = +\infty$, es decir, al acercar x arbitrariamente a cero, los valores de la función $G(x)$ crecen tanto como se quiera. Hay que recalcar que en este acercamiento arbitrario a 0 (en este caso por los dos lados), la variable independiente *no debe* tomar el valor cero y no sólo porque la función no esté definida en $x = 0$, como en este caso, sino porque es una característica de los límites, la cual corresponde a la notación $x \to 0$ que se lee x *tiende a cero*, aunque el lenguaje coloquial que acompaña a esto, pudiera sugerir otra cosa, al hablar, en este caso, de que el límite en $x = 0$ de $G(x)$ *es igual* a (más) infinito; pero ya se sabe que $+\infty$ no es un número y por lo tanto no puede ser un valor de $G(x)$. Así que podemos concluir, en este caso, en que el valor límite de la función es $+\infty$, que cuando $x \to 0$ se tiene $G(x) \to \infty$, que es otro modo de decir que en la medida en que x se aproxime arbitrariamente a cero el valor de la función $G(x)$ crecerá sin restricción alguna, esto es, que crece "tomando valores arbitrariamente grandes” o que crece *tanto como se quiera*. Volveremos a reconsiderar las peculiaridades acerca del concepto de límite, en el caso de los límites propios.

Por otra parte, en el intervalo $(0, \infty)$ de los reales positivos, cuando x crece arbitrariamente el decrecimiento de $G(x) = 1/x^2$ hacia cero es más pronunciado que el de H; Así si queremos garantizar que $0 < G(x) < 10^{-6}$ (menor que un millonésimo), basta tomar $x > 10^3$ (basta tomar x mayor que mil). Para H se requería x mayor que un millón. Así que tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0 \ \text{ o } \ \lim_{x\to\infty} G(x) = 0$$ léase: el límite de $G(x)$, cuando x tiende a [más] infinito es igual a 0.

Y por simetría:

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$$ léase: el límite de $G(x)$, cuando x tiende a menos infinito es igual a 0.

Estos también son límites *impropios*, aunque lo ‘ìmpropio” se refiere a la variable independiente. En el primer caso, $x \to \infty$ (léase literalmente: x *tiende a infinito*), se puede referir como el límite de x en $+\infty$, cuando sabemos que es una forma de hablar, que quiere decir que x crece sin restricción alguna. El valor límite, a saber 0, por otra parte, es un valor propio, aunque los valores de la función, a saber, $1/x^2$, nunca “alcanzan” ese valor límite. Estamos diciendo que la ecuación $1/x^2 = 0$ no tiene solución en los números reales. En el segundo caso, la situación es enteramente similar. Volveremos, como se dijo antes, a examinar las peculiaridades acerca del concepto de límite.

6.2.5. Funciones Valor Absoluto, Signo y Escalón Unitario

Ejemplo 3. (*función valor absoluto*) $v(x) = |x| \quad [y = |x|]$

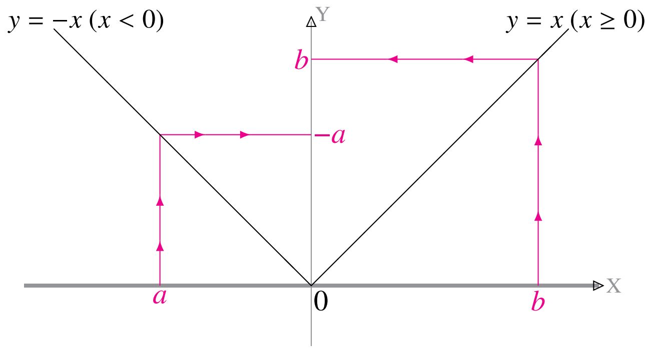
El dominio de la función es $\mathbb{R}$. En efecto, a todo número real x se le puede tomar su valor absoluto $|x|$. Si x es *positivo*, su valor absoluto coincide con él mismo, si x es *cero* también coincide con él y si x es *negativo* su valor absoluto es el simétrico del número (por la *ley de tricotomía* se han cubierto todos los casos). Formalmente, agrupando en uno los dos primeros casos ($x \geq 0$), se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{si } x \textit{ es positivo o cero } (x \geq 0) \\ -x, & \textit{si } x \textit{ es negativo } (x < 0) \end{cases}$$

Note que para cualquier real x se tiene $|x| \geq 0$ y que $|x|$ solamente puede ser cero cuando $x = 0$. Hay que mantener en mente que si $x < 0$ entonces $-x > 0$. Entonces nuestra función cumple $v(x) = |x| \geq 0$ $[y = |x| \geq 0]$, por lo que el rango satisface $\mathcal{R} \subset [0, \infty)$. De hecho se cumple la igualdad y esto es fácil de ver, pues $v(x) = x$ para $x \geq 0$ y $v(x) = -x$ para $x < 0$. Dicho de otro modo, $y = x$ para $x \geq 0$ y $y = -x$, para $x > 0$. Su gráfica coincide entonces con la recta $y = x$ para abscisas positivas o cero y coincide con la recta $y = -x$ para las abscisas negativas. Al partir de valor 0 y recorrer x los valores positivos las ordenadas y

que coinciden con x ($y = x$) recorren el intervalo $[0, \infty)$ en el eje Y. Como $|-x| = |x|$ [¿por qué?], la función es par: $v(-x) = v(x)$, que es lo mismo que decir que su gráfica es *simétrica*.

Gráfica de la función $y = |x|$, mostrando la correspondencia $x \mapsto |x|$ para $x = a$ y $x = b$, donde $a < 0 < b$.



Ejemplo 3.(a) (*función signo*) Consideremos primero la función $s(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\quad [y = \dfrac{|x|}{x}]$

Notamos primero que aunque es un cociente de funciones cada una de las cuales tiene por dominio $\mathbb{R}$, se tienen que evitar los ceros de la función $f(x) = x$ del denominador, a saber $x = 0$. Así que el dominio $\mathcal{D}$ de esta función es el mismo del ejemplo 2(c): $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (el conjunto de todos los reales menos el cero). Para la parte negativa ($x < 0$) tenemos que $|x| = -x$, luego $s(x) = -1$ para $x < 0$. Pero para valores positivos de x, el valor absoluto coincide con x y por lo tanto $s(x) = 1$ para $x < 0$. Resumiendo, tenemos

$$s(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \textit{si } x \textit{ es positivo } (x > 0) \\ -1, & \textit{si } x \textit{ es negativo } (x < 0) \end{cases}$$

Esta función que es constante de valor 1 en el intervalo de los reales positivos, $(0, \infty)$, y constante, de valor -1, en el intervalo $(-\infty, 0)$ de los números negativos, nos da oportunidad de examinar el "salto" que representa pasar de negativos a positivos y viceversa, expresado con el lenguaje de los límites laterales en $x = 0$. Cuando acercamos los valores positivos de x a cero, lo que se suele decir, acercar x a 0 por *la derecha*, $x \to 0+$, los valores de la función, $s(x)$, son siempre iguales a 1. Y al acercar x a 0 por *la izquierda*, $x \to 0-$, esto es, por valores negativos de x, los valores de la función, $s(x)$, son siempre iguales a -1. Luego, resulta natural escribirlos como:

$$\lim_{x \to 0+} s(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0-} s(x) = -1$$

Léanse, respectivamente: *el límite de* $s(x)$, *cuando* x *tiende a* 0 *por la derecha es igual a 1 y el límite de* $s(x)$, *cuando* x *tiende a* 0 *por la izquierda es igual a* -1.

Vamos a completar esta función $s(x)$ asignándole el valor 0 en $x = 0$ y resultará en *la función signo*, denotada con $sgn(x)$, que quedará definida por

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \textit{si } x \textit{ es positivo } (x > 0) \\ 0, & \textit{si } x \textit{ es cero } (x = 0) \\ -1, & \textit{si } x \textit{ es negativo } (x < 0) \end{cases}$$

La única diferencia entre ambas funciones, $s(x)$ y $sgn(x)$ es que la primera no está definida en $x = 0$ y la segunda sí (tiene el valor 0). Ahora, esto no tiene ningún efecto para el cálculo de los límites laterales. Habíamos dicho, desde antes, que la variable independiente no puede tomar el valor límite, en este caso $x = 0$ y que eso no depende de si la función esté definida o no en $x = 0$. Así que es perfectamente legítimo en los dos límites sustituir una función por la otra:

$$\lim_{x\to 0+} sgn(x) = \lim_{x\to 0+} s(x) = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0-} sgn(x) = \lim_{x\to 0-} s(x) = -1$$

En el primer límite, porque para $x > 0$ las funciones $s(x)$ y $sgn(x)$ son indistinguibles: $sgn(x) = s(x) = 1$ si $x > 0$. En el segundo límite, porque $sgn(x) = s(x) = -1$ si $x < 0$.

Lo que resulta un tanto distintivo, en estos casos, es que el valor límite de las funciones es alcanzado, es decir, es un valor posible para la función, en ambos casos. También, en ambos casos, no corresponde al valor de la función. Pero además, no podría corresponder, pues los límites son 1 y -1. No se le puede asignar (o reasignar) un valor a las funciones, de tal modo que corresponda a los límites. Se habla de una *discontinuidad esencial* en $x = 0$. El tamaño del salto, podría tomarse como una medida de la discontinuidad.

Como va a quedar seguramente más claro con el siguiente ejemplo, para que una función sea continua en un punto, digamos $x = 0$, en primer lugar se requiere que la *función esté definida en el punto*, en segundo lugar que *exista el límite de la función en el punto* y en tercer lugar que *el valor límite coincida con el valor de la función en el punto*. Y de las tres condiciones, la segunda, la de la existencia del límite en el punto, va a resultar la más importante . Justamente en el ejemplo anterior, la segunda condición falla en $x = 0$, pues la función signo no tiene límite en $x = 0$, dado que los límites laterales en dicho punto, aunque existen, son distintos.

Ejemplo 3.(b) (*Discontinuidad removible*) Consideremos la multiplicación de la función signo por sí misma, esto es, la función $q(x) = \left(sgn(x)\right)^2$. Es claro que esta función está definida para cualquier real, puesto que eso le ocurre a la función signo. Como $(-1)^2 = 1^2 = 1$, tenemos que esta función satisface:

$$q(x) = \begin{cases} 1, & \textit{si } x \textit{ es distinto de 0 } (x \neq 0) \\ 0, & \textit{si } x \textit{ es cero } (x = 0) \end{cases}$$

Puesto que en particular, para $x > 0$ $q(x) \equiv 1$ ($q(x)$ es idénticamente la unidad) y también para $x < 0$ $q(x) \equiv 1$ ($q(x)$ es idénticamente la unidad), tenemos que

$$\lim_{x\to 0+} q(x) = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0-} q(x) = 1. \textit{ Luego, existe el límite en cero: } \lim_{x\to 0} q(x) = 1.$$

La función q está definida en $x = 0$, a saber $q(0) = 0$, lo único que falla para que q sea continua es que $\lim_{x\to 0} q(x) = 1 \neq q(0)$. Tenemos una discontinuidad por *salto* en $x = 0$, pero un salto que luce forzado. Podemos remover esta discontinuidad reasignando el valor

1, el valor del límite en $x = 0$. Esto es, definimos $g(x)$ como una función que es igual a $q(x)$, excepto en $x = 0$, donde $g(x)$ toma el valor 1 del límite:

$$g(x) = \begin{cases} q(x), & \textit{si } x \textit{ es distinto de 0 } (x \neq 0) \\ 1, & \textit{si } x \textit{ es cero } (x = 0) \end{cases}$$

Como se vio antes, en el límite, la variable independiente x no puede tomar el valor 0, por lo que las funciones al coincidir fuera de $x = 0$ satisfacen $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} q(x) = 1$, luego la función g satisface $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$, por lo que g es continua en cero, *la discontinuidad ha sido removida*. No se requiere muchos cálculos (o mucha imaginación) para darse cuenta que la "nueva" función g no es otra que la función constante de valor 1 ($g(x) \equiv 1$). Esta función, de hecho, es continua en cualquier real r, pues resulta muy fácil sustituir el papel de r por el papel de 0, dado que su límite en cualquier punto acercando x por la derecha o por la izquierda es igual a 1: $\lim_{x\to r} g(x) = 1 = g(r)$.

De hecho, estamos acostumbrados a remover discontinuidades, sin ser conscientes de ello, especialmente cuando una expresión no está definida en cierto punto. Si retomamos la función $s(x) = |x|/x$ que vimos antes ($s(x) = 1$ para $x > 0$ y $s(x) = -1$ para $x < 0$) la cual no está definida en $x = 0$, al elevarla al cuadrado, obtenemos $s^2(x)$ una función que satisface $s^2(x) = 1$ para $x \neq 0$ ($s^2(x) = (s(x))^2$. Si la pensamos como expresión algebraica, tendremos:

$$s(x) = \frac{|x|}{x}, \;\; \textit{luego} \;\; s^2(x) = \big(s(x)\big)^2 = \left(\frac{|x|}{x}\right)^2 = \frac{|x|^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1\,.$$

Nos quedamos con la idea de que el cuadrado de $s(x)$ es igual a la unidad y seguramente nos olvidamos que dicho cuadrado no estaba definido en $x = 0$. A $s^2(x)$ la "completamos" de modo continuo, como la función constante unidad, removiendo la discontinuidad que consistía en no estar definida en $x = 0$. Esta política de remover la discontinuidad, cuando es posible, es algo frecuente, como veremos.

6.2.6. Funciones polinomiales y racionales

Hemos visto las operaciones básicas con funciones como suma (adición), resta (sustracción), producto (multiplicación) y cociente (división). Cuando nuestras funciones son las constantes y las potencias enteras y nos restringimos a las primeras tres operaciones, obtenemos las funciones polinomiales. Y los cocientes de estas últimas, son las funciones racionales.

Formalmente una función polinomial es una función constante o una que puede expresarse como adición y/o sustracción de monomios, cada uno de los cuales es una (función) contante o el producto de una (función) constante por una (función) potencia entera positiva.

6.2.7. Composición, Monotonía, Inversas

Lo primero es introducir una nueva operación entre funciones que se llama COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Primero verla como concatenar dos reglas de correspondencia. Por ejemplo, aplicar la función valor absoluto v (ejemplo 3) seguida de g (donde $g(x) = 2x$, es la función que le aplica a cada real su doble): correspondencia de v seguida de la de g:

$$x \overset{v}{\mapsto} |x| \overset{g}{\mapsto} 2|x| \quad \textit{(Recuerde que } g \textit{ duplica lo que le pongan enfrente)}$$

La correspondencia resultante se rotula con $g \circ v$: $x \overset{g \circ v}{\mapsto} 2|x|$, el aparente cambio de orden, es por el anidamiento: $(g \circ v)(x)) \overset{\text{def}}{=} g(v(x)) = g(|x|) = 2|x|$. La función resultante cumple $g \circ v(x) = 2x$ para $x \geq 0$ y $g \circ v(x) = -2x$ para $x < 0$ y su gráfica (...).

6.2.8. Funciones monótonas e inyectivas

Una función se dice ser (estrictamente) creciente en un intervalo de su dominio, si al tomar valores crecientes de los argumentos en dicho intervalo, sus imágenes tienen valores crecientes también; formalmente, una función F se dice ser *creciente* en un intervalo si para cualesquiera x_1, x_2 en dicho intervalo satisfaciendo $x_1 < x_2$, se tiene necesariamente $F(x_1) < F(x_2)$. Y se dice ser *decreciente* en el intervalo si para cualesquiera x_1, x_2 en dicho intervalo satisfaciendo $x_1 < x_2$, se tiene necesariamente $F(x_1) > F(x_2)$. En otras palabras las imágenes de las funciones crecientes respetan las desigualdades de sus argumentos y las decrecientes las invierten. Las imágenes de las crecientes crecen con sus argumentos y las imágenes de las decrecientes decrecen cuando sus argumentos crecen.

Una función estrictamente monótona (i.e creciente o decreciente) es un caso particular de una función *inyectiva*, que para el caso de poder invertir su ley de correspondencia es el concepto clave, podríamos decir. Una función inyectiva tiene imágenes distintas de argumentos distintos: F es inyectiva si $x_1 \neq x_2$ implica $F(x_1) \neq F(x_2)$.

6.2.9. Funciones biyectivas e Inversa

Cuando se vió el Ejemplo 2, $f(x) = x^2$ $[y = x^2]$, con dominio $\mathbb{R}$, resultó inmediato que su rango $\mathcal{R}$ estaba contenido en $[0, \infty)$. Para la contención recíproca y justificar la igualdad, había que mostrar que cualquier $x \in [0, \infty)$ $(x \geq 0)$ pertenecía al rango $\mathcal{R}$. Garantizada la existencia de $\sqrt{x}$ para cualquier $x \geq 0$, por su definición $f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, pero también $f(-\sqrt{x}) = (-\sqrt{x})^2 = x$, prueban cada una que el rango es $[0, \infty)$ y que éste se recorre dos veces, excepto por el cero. La relación $f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ para $x \geq 0$ (i. e. $x \in [0, \infty)$ nos dice que la restricción de $f(x) = x^2$ al intervalo $[0, \infty)$ *invierte* la correspondencia de la función *raíz cuadrada no negativa*, la cual a cada $x \in [0, \infty)$ le asigna $\sqrt{x}$.

Esto quiere decir que $f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ se traduce en $x \overset{\sqrt{\ }}{\mapsto} \sqrt{x} \overset{f}{\mapsto} x$. Se trata de una *composición* de dos funciones: la función f, cuadrado de no negativos ($f : [0, \infty) \to [0, \infty)$) con la función raíz cuadrada (no negativa) de no negativos ($\sqrt{\ } : [0, \infty) \to [0, \infty)$), cuya composición resulta en la función identidad de $[0, \infty) \to [0, \infty)$, que nos dice que la función raíz cuadrada no negativa es la función inversa de la restricción de f al dominio $[0, \infty)$ (con este recorte de dominio f se vuelve una función estrictamente *creciente*) y tomando su rango $[0, \infty)$ como codominio (este recorte la hace *suprayectiva*). Las funciones que son *inyectivas* y *suprayectivas* se dicen ser *biyectivas*. Estas funciones siempre tienen inversas. Es decir para una función suprayectiva, es posible invertir la correspondencia de forma que el dominio de una se vuelve el rango de la inversa y viceversa, el dominio de la inversa es el rango de la original. de tal modo que si componen, la composición es la identidad. Este es el caso de la función cuadrado de no negativos con dominio y rango iguales al intervalo de los reales no negativos, es decir $[0, \infty)$ y su inversa la función raíz cuadrada no negativa de los no negativos. Al componerse dan la identidad de $[0, \infty)$ en sí mismo, en cualquier orden, pues si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por $f(x) = x^2$ y $\sqrt{\ } : [0, \infty) \to [0, \infty)$ la función raíz cuadrada no negativa, entonces, $f \circ \sqrt{\ }(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ y también $\sqrt{\ } \circ f(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x$. En general, $\sqrt{x^2} = |x|$, pues por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = 2$. Pero en este caso, $x \geq 0$, así que $|x| = x$.

6.3. Introducción de la Derivada. Curso de Verano

Comenzamos por analizar problemas geométricos isoperimétricos con condiciones dadas.

Ejemplo 1. Consideremos un rectángulo de semiperímetro igual a 12 unidades lineales. Con estas condiciones, ¿Sería posible formar un rectángulo cuya área mida 20 unidades cuadradas?

Respuesta: El semiperímetro del rectángulo representa la suma de su base y de su altura, sabiendo esto, consideremos x la variable independiente que representará la base del rectángulo. Como el semiperímetro es fijo, los valores que puede tomar x están en un intervalo fijo también (a saber $0 \leq x \leq 12$) y por lo tanto podemos representar tanto la base como la altura en función de la variable independiente. La figura 9 describe la situación general.

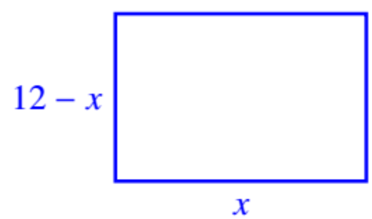


Figura 9: Esquema ejemplo 1

La ecuación que representa el área del rectángulo será:

$$\begin{aligned} A &= base \times altura \\ &= x(12 - x) \\ &= 12x - x^2 \end{aligned}$$

Sabiendo que el área requerida mide 20 unidades cuadradas, igualamos la ecuación del área a 20 y resolvemos por fórmula general.

$$\begin{aligned} A = 20 &= 12x - x^2 \\ 20 - 12x + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

La resolución por fórmula general nos da los resultados: $x_1 = 10$ y $x_2 = 2$ que no es más que el mismo rectángulo pero en posición horizontal (10 unidades de base y 2 de altura) y en posición vertical (2 unidades de base y 10 de altura).

Ejemplo 2. Tomemos el mismo caso, pero ahora consideremos un área de 35 unidades cuadradas. Basándonos en el procedimiento del ejemplo anterior, la ecuación a resolver se ve como:

$$\begin{aligned} A = 35 &= 12x - x^2 \\ 35 - 12x + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos mediante fórmula general son: $x_1 = 7$ y $x_2 = 5$ que nuevamente muestran el mismo rectángulo en dos posiciones, horizontal (7 unidades de base y 5 de altura) y vertical (5 unidades de base y 7 de altura).

Ejemplo 3. Consideremos por último, un área de 40 unidades cuadradas bajo las mismas condiciones de semiperímetro fijo igual a 12 unidades. Utilizamos nuevamente el procedimiento de los problemas revisados y observamos la siguiente ecuación a resolver:

$$A = 40 = 12x - x^2$$
$$40 - 12x + x^2 = 0$$

En este ejemplo, los resultados obtenidos mediante fórmula general son: $x_1 = 6 + 2i$ y $x_2 = 6 - 2i$ que son soluciones fuera del conjunto de los reales, esto es, bajo las condiciones de semiperímetro fijo y un área de 40 unidades cuadradas, el problema no tiene solución.

6.3.1. Método de Desarrollos de Taylor Algebraicos

Los resultados de los problemas anteriores nos muestran que con la restricción del semiperímetro, es posible encontrar rectángulos con distintos valores del área. La siguiente pregunta lógica sería, ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con mayor área posible, conservando la restricción del semiperímetro fijo?

Para responder esta pregunta, emplearemos el método de desarrollos de Taylor algebraicos, descrito en Aguilar y Riestra (2009), que consiste en *determinar máximos y mínimos locales de una función f a partir de los signos de las diferencias $f(x+h) - f(x)$ correspondientes a un incremento algebraico $h \neq 0$ en la variable independiente x*. Esto es, si x es un valor donde se encuentra un máximo local para la función f, los valores de $f(x+h)$ correspondientes a puntos cercanos a x (i.e., $x+h$, donde h es un incremento algebraico *permisible* y "pequeño") deben ser menores que $f(x)$, en cuyo caso la diferencia $f(x+h)-f(x)$ debe ser negativa. Del mismo modo, si x es un valor donde se encuentra un mínimo local para la función f, los valores de $f(x+h)$ correspondientes a puntos cercanos de x deben ser más grandes que $f(x)$, por lo que la diferencia $f(x+h) - f(x)$ debe ser positiva. Estamos excluyendo el valor $h = 0$ que, aunque sería un valor *permisible*, carece de interés.

Siguiendo la terminología empleada en Aguilar y Riestra (2009), un *valor permisible* de h es aquél que hace que $x+h$ se mantenga en el dominio de la función. Esto es, si el dominio es el intervalo $[a, b]$, para el extremo inicial, $x = a$, los valores permisibles de h ($h \neq 0$) son *positivos*, para el extremo final del intervalo en $x = b$, los valores permisibles de h son *negativos* y para el resto de puntos con x en el interior del intervalo, los valores permisibles de h pueden ser *tanto positivos como negativos*. La figura 10 muestra los tres casos para valores permisibles ((a) extremo inicial, (b) extremo final y (c) valores intermedios), donde se han representado los incrementos h como segmentos dirigidos.

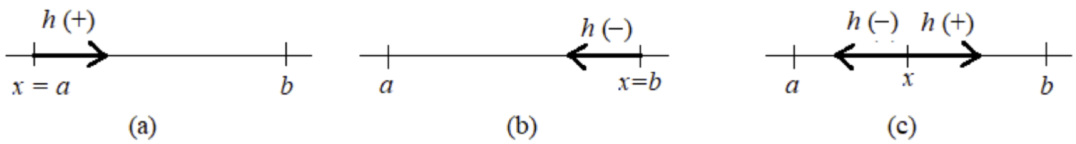


Figura 10: Signos de los valores permisibles del incremento h

Vale la pena notar que además de que los incrementos permisibles en cada punto x no sólo deben tener ciertos signos, sino además tener ciertos valores límite. Así, si $x = a$ en el extremo inicial del dominio de la función, los valores permisibles de h satisfacerán $0 < h \leq (b - a)$, es decir, h será un *positivo* menor o igual que el número positivo $b - a$, pues $a + (b - a) = (b - \cancel{a}) + \cancel{a} = b$ y b es el mayor valor del intervalo $[a, b]$. Del mismo modo, si $x = b$ en el extremo final del intervalo, los valores permisibles para h cumplirán $a - b \leq h < 0$, es decir, serán *negativos* mayores o iguales que el valor negativo $a - b$ pues $b + (a - b) = (\cancel{b} - \cancel{b}) + a = a$. Finalmente, cuando x está en el interior del intervalo, o sea $a < x < b$, entonces el valor negativo $a - x$ y el positivo $b - x$ son los valores límite permisibles para el incremento h: $a - x \leq h \leq b - x$ (cuando $a < x < b$).

Cuando el intervalo dominio sea de la forma $[a, \infty)$, los valores permisibles de h serán positivos arbitrarios ($h > 0$) para $x = a$ y mayores iguales que el negativo $a - x$ y sin límite para el tamaño de los valores positivos, es decir $h \geq a - x$, cuando x sea interior al intervalo ($a < x < \infty$). Cuando el intervalo dominio sea $(-\infty, \infty)$, o sea el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, todos sus puntos son interiores, por lo que los valores permisibles de h serán tanto positivos como negativos, pero sin límite a su tamaño. Los primeros ejemplos tendrán por dominio un intervalo cerrado de la forma $[a, b]$, donde $a < b$.

Para analizar el signo de la diferencia $f(x+h) - f(x)$ y determinar los máximos y mínimos de una función f, el *método de los desarrollos de Taylor algebraicos* empieza por desarrollar la diferencia, expresándola en términos de potencias de h en la forma:

$$f(x + h) - f(x) = E_1(x)\, h + E_2(x)\, h^2 + \text{TOS [términos en } h^3, h^4, \text{etcétera]}$$

Donde TOS (acrónimo para Términos de Orden Superior) es una notación contextual, en este caso escrita inmediatamente después del término de orden 2 ($E_2(x)\, h^2$) incluye a los términos que inicien con la tercera potencia y los superiores (cuando éstos existen) y será fundamental analizar cómo dichos términos puedan afectar al signo de la diferencia, cuando se consideran valores de h suficientemente cercanos a cero, tratando de establecer por qué el signo de la potencia inferior no nula es el que domina.

Ilustraremos el método con un problema de máximos y mínimos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. (*Problema de Fermat*). Dado un segmento AC de tamaño b, se busca dividirlo en dos partes de manera que el producto de las partes sea máximo.

Planteamiento: Representemos con x a una de las partes del segmento; puesto que las partes deben sumar b, la otra parte será entonces $b - x$ (ver figura 11). Nuestra variable independiente es x y el producto de las partes, dado por $f(x) = x(b-x)$, nuestra variable dependiente. El problema consiste entonces en encontrar el valor de x que hace máximo el valor de la función $f(x) = bx - x^2$, donde, por las condiciones del problema $0 \leq x \leq b$, es decir, su dominio es el intervalo $[0, b]$.

Figura 11: Esquema del problema de Fermat

Aunque el problema es determinar el máximo de la función, para ilustrar el método, haremos el análisis completo:

Determinar los máximos y mínimos locales de $f(x) = bx - x^2$ para $x \in [0, b]$ (D_f)

1. Desarrollamos la diferencia $f(x+h) - f(x)$ en potencias crecientes de h:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= [b(x+h) - (x+h)^2] - [bx - x^2] \\ &= bx + bh - x^2 - 2xh - h^2 - bx + x^2 \\ &= \cancel{bx} + bh - \cancel{x^2} - 2xh - h^2 - \cancel{bx} + \cancel{x^2} \\ f(x+h) - f(x) &= (b-2x)h - h^2 \end{aligned}$$

Obtenemos un polinomio en potencias de h, cuyos coeficientes son expresiones en x. El primer coeficiente es $E_1(x) = b - 2x$, el segundo es constante $E_2(x) \equiv -1$. Los siguientes se entiende que son nulos.

2. Analizamos los signos de la diferencia $f(x+h) - f(x)$, cuando $x = 0$ y $x = b$, para incrementos h permisibles, en cada caso. Empecemos con $x = 0$, el extremo inicial del intervalo dominio $[0, b]$.

Cuando $x = 0$, *analizaremos la diferencia* $f(0+h) - f(0) = bh - h^2 = h(b-h)$

Donde los valores permisibles de h son positivos, más precisamente $0 < h \leq b$. Así que la diferencia, que es igual al producto $h(b-h)$ es un producto de positivos para $0 < h < b$, que son todos los valores permisibles, excepto $h = b$, donde la diferencia $f(b) - f(0)$ se anula. De este modo, en $x = 0$, no sólo alcanza la función un mínimo local $f(0) = 0(b-0) = 0$, pues $f(0+h) - f(0) > 0$ para $0 < h < b$, sino que el valor con el que falta comparar $x = b$ da el mismo valor $f(b) = b(b-b) = 0$. Así, que la función alcanza un *mínimo absoluto* en $x = 0$. Excepto que no es único como ya lo anticipamos y que se confirma analizando la diferencia para $x = b$:

Cuando $x = b$, *analizaremos la diferencia* $f(b+h) - f(b) = -bh - h^2 = -h(b+h)$

Donde ahora los valores de h permisibles son negativos (eso hace que el factor $-h$ en la diferencia sea positivo), más precisamente $-b \leq h < 0$, que al recorrer estos valores de h, $b+h$ recorre todos los valores excepto b misma (de $-b \leq h < 0$ se sigue $0 \leq b+h < b$), por lo que $f(b+h) - f(b)$ compara $f(b)$ con todos los valores del intervalo, excepto b mismo, dando una diferencia positiva, pues el segundo factor $b+h$ resulta positivo excepto para $h = -b$ que se anula, esto es la diferencia $f(b+h)-f(b)$ es positiva, excepto $f(0)-f(b) = 0$, lo que hace que en $x = b$ la función alcance su otro valor mínimo absoluto.

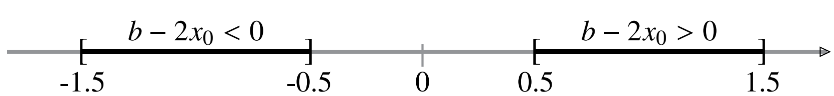
3. Analizamos los signos de la diferencia $f(x+h)-f(x)$, cuando x no es un punto extremo del intervalo $[0, b]$, sino un punto *interior* del mismo, es decir, x satisface $0 < x < b$.

$$\begin{aligned} \text{Veamos los signos de la diferencia } f(x+h) - f(x) &= (b-2x)h - h^2 \\ &= (b-2x-h)h, \ \text{donde } 0 < x < b. \end{aligned}$$

Donde el valor de la diferencia $(b-2x)h - h^2$ ha sido convenientemente factorizado como $(b-2x-h)h$. Como ahora x es interior al intervalo es posible tomar incrementos h tanto positivos como negativos. Cuando el coeficiente de h, que es llamado el coeficiente diferencial, en este caso $E_1(x) = (b-2x)$, es diferente de cero para cierto valor de x, digamos $(b-2x_0) \neq 0$, vamos a mostrar que para h "suficientemente pequeña" el signo del término $(b-2x_0)h$ *dominará* en la diferencia $f(x_0+h) - f(x) = (b-2x_0)h - h^2$. En este sentido el término h^2 resultará insignificante. Por lo que tendremos:

$$sgn\Big(f(x_0+h) - f(x_0)\Big) = sgn\Big((b-2x_0)h\Big) = \begin{cases} sgn\,(b-2x_0), & si\ h > 0 \\ -sgn\,(b-2x_0), & si\ h < 0 \end{cases}$$

En tal caso, como el signo de la diferencia cambiará con el signo de h, la función no alcanzará un máximo ni un mínimo en $x = x_0$. Habíamos asegurado que esto ocurriría para $|h|$ (léase *magnitud de h*) *suficientemente pequeña*. Se mostrará que la condición sobre la magnitud de h, dada por $|h| \leq 0.5\,|b-2x_0|$, será suficiente para que el signo del factor $b-2x_0-h$ sea el mismo que el signo de $b-2x_0$. En efecto, en el peor caso $h = 0.5(b-2x_0)$, donde $b-2x_0-h = 0.5(b-2x_0)$ y en el mejor caso $h = -0.5(b-2x_0)$, donde $b-2x_0-h = 1.5(b-2x_0)$, por lo que el factor $b-2x_0-h$ estará entre los valores $0.5(b-2x_0)$ y $1.5(b-2x_0)$. En la siguiente figura ilustramos los Intervalos de existencia del factor $b-2x_0-h$, cuando $|h| \leq 0.5\,|b-2x_0|$.



Intervalos de existencia del factor $b-2x_0-h$ para $|h| \leq 0.5\,|b-2x_0|$, tomando como unidad a $|b-2x_0|$.

Para nuestros fines bastaría saber que $sgn\,(b-2x_0-h) = sgn\,(b-2x_0)$, para $|h|$ tan pequeña como $|h| \leq 0.5\,|b-2x_0|$, con lo cual se garantiza

$$sgn\Big(f(x_0+h) - f(x_0)\Big) = sgn\Big((b-2x_0-h)h\Big) = \begin{cases} sgn\,(b-2x_0), & si\ h > 0 \\ -sgn\,(b-2x_0), & si\ h < 0 \end{cases}$$

Pero podemos ir más lejos. Para economía de pensamiento hagamos $c = b - 2x_0$, con lo que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ch - h^2 = (c - h)h, \text{ donde } c = b - 2x_0 \neq 0$$

El factor de h, a saber, $(c - h)$, lo escribiremos como $c - h = c(1 - c^{-1}h)$. Para $|c^{-1}h| \leq 0.1$, esto es, que la magnitud de h sea tan pequeña como $|h| \leq 0.1\,|c|$, se tendrá en el peor caso $c - h = c(1 - 0.1) = 0.9\,c$ y en el mejor caso $c - h = c(1 + 0.1) = 1.1\,c$; luego para $|h| \leq 0.1\,|c|$ tendremos que $c - h$ estará entre $0.9\,c$ y $1.1\,c$ y por lo tanto la diferencia, que es igual a $(c - h)h$ estará entre $0.9\,c\,h$ y $1.1\,c\,h$. Esto quiere decir que el efecto "adverso" de $-h^2$ sobre el término $E_1(x_0)h = c\,h$ (y lo mismo sobre el coeficiente diferencial), en el peor caso, es disminuir un 10 % su positividad o negatividad. Pero si hubiésemos tomado una magnitud de h más restrictiva, digamos $|h| \leq 0.01\,|c|$, estaríamos hablando de que el término $-h^2$ le haría mella a $E_1(x_0)h = c\,h$ (o al coeficiente diferencial $E_1(x_0) = c$) en sólo un 1 % (en el peor caso), etcétera, etcétera. Ahora bien si el término con h^2 hubiese sido $k\,h^2$ $(k \neq 0)$, en vez de $-h^2$, se hubiese conseguido el mismo "detrimento" del 1 %, a lo sumo, con el peor caso de $|h| \leq 0.01\,|c|/|k|$.

Generalizándolo un tanto, lo anterior lo podemos resumir del siguiente modo: En el desarrollo de la diferencia, a saber, $E_1(x)h + E_2(x)h^2 + TOS$, donde $TOS = E_3(x)h^3 + \ldots$, cuando para cierto valor de x, digamos $x = x_0$, el coeficiente de h, llamado *coeficiente diferencial*, a saber $E_1(x)$, **NO** se anula, es decir que se cumple $E_1(x_0) \neq 0$, el signo de la diferencia será el mismo que el del término $E_1(x_0)h$, para $|h|$ *suficientemente pequeña*. En símbolos,

$$\textit{Sea } f(x + h) - f(x) = E_1(x)h + E_2(x)h^2 + TOS\ \ (E_3(x)h^3 + \ldots).\ \ \textit{Cuando } E_1(x_0) \neq 0$$
$$\mathit{sgn}\Big(f(x_0 + h) - f(x_0)\Big) = \mathit{sgn}\Big(E_1(x_0)h\Big),\ \ \textit{para } |h| \textit{ suficientemente pequeña.}$$

Más aún, estirándole más allá de los *signos*, cuando $E_1(x_0) \neq 0$, para $|h|$ *suficientemente pequeña*, $E_1(x_0)h + E_2(x_0)h^2 + TOS$ se comporta como si fuera $E_1(x_0)h$:
Cuando $E_1(x_0) \neq 0$ y $|h|$ *suficientemente pequeña*: $E_1(x_0)h + E_2(x_0)h^2 + TOS \approx E_1(x_0)h$.

Esto último hay que leerlo como $E_1(x_0)h + E_2(x_0)h^2 + TOS$ tiene el valor de $E_1(x_0)h$ más menos un ε % ($\pm$10 %, $\pm$1 %, etcétera) para valores de $|h|$ suficientemente pequeños y dependiendo este porcentaje de fluctuación de la cercanía de h a cero. Como si se tratara del valor nominal de un capacitor o resistor que tienen tolerancias de $\pm$5 % o $\pm$1 %.

OJO: El término cuadrático $E_2(x)h^2$ se vuelve despreciable, en todo caso, con respecto al término $E_1(x)h$, y eso sólo cuando el coeficiente de h no es nulo, esto es, debe cumplirse, $E_1(x) \neq 0$ y además que h en magnitud sea lo suficientemente pequeña. [*Diseñar Actividad con GeoGebra, con $x + kx^2$ y $x^2 + kx^3$, con diferentes valores de k*]

Entonces, una *condición necesaria* para que la diferencia $f(x + h) - f(x)$ *no cambie de signo* con h en un *punto interior* x (y poder tener la posibilidad de máximo o mínimo) es que el coeficiente de h, o sea el *coeficiente diferencial*, en este caso $E_1(x) = (b - 2x)$, sea igual a *cero*. Resolvemos entonces la ecuación $(b - 2x) = 0$:

$$b - 2x = 0, \quad b = 2x, \quad 2x = b, \quad x = \frac{b}{2}$$

Encontramos que $x = \frac{b}{2}$ es el único punto interior, candidato para que la función alcance un valor extremo (máximo o mínimo) local.

4. Analizamos el signo de la diferencia $f(x+h) - f(x)$, para $x = \frac{b}{2}$

$$f\left(\frac{b}{2}+h\right) - f\left(\frac{b}{2}\right) = \left(b - 2\left(\frac{b}{2}\right)\right)h - h^2 = -h^2 < 0$$

Excepto para $h = 0$, encontramos que la diferencia $f(b/2+h) - f(b/2)$ es siempre negativa para todos los valores permisibles de h $(-b/2 \leq h \leq b/2))$ en los que $f(b/2+h)$ abarca las imágenes de todo el intervalo. Por lo tanto, la función f alcanza un *máximo* en $x = \frac{b}{2}$ y este máximo no es sólo local, sino absoluto.

La solución al problema de encontrar el tamaño de las dos partes del segmento cuyo producto es máximo, es dividir el segmento en dos partes iguales. El producto máximo es entonces:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b}{2}\right) &= b\left(\frac{b}{2}\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} \end{aligned}$$

El problema de Fermat nos ayuda a resolver el problema original del rectángulo con semiperímetro dado. Recordemos el ejercicio: Dado el semiperímetro de 12 unidades de un rectángulo, encontrar las medidas de su base y su altura para que su área sea máxima.

El segmento del problema de Fermat puede asociarse directamente con el semiperímetro de dimensión 12 del rectángulo, donde la altura y la base pueden ser las dos partes en las que el segmento se divide. El producto de ambas partes corresponde al producto de base por altura del rectángulo, es decir a su área.

Usando el resultado encontrado para el problema de Fermat, podemos concluir que el rectángulo con mayor área se encuentra cuando la base y la altura son del mismo tamaño, es decir, el área máxima se encuentra cuando se tiene un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$, que para nuestro caso particular, se trata de un cuadrado de lado 6, y cuya área será:

$$A_{max} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} = \frac{12^2}{4} = 36 \text{ unidades cuadradas}$$

Hagamos más ejercicios de optimización.

Ejemplo 5. (Problema de Pluvinage). Se considera un rectángulo $ABCD$ de base $b = 12$cm y altura $a = 6$cm en el cual se inscribe un paralelogramo cuyos vértices $IJKL$ se encuentran sobre cada uno de los lados del rectángulo, de tal manera que las longitudes $\overline{IB} = \overline{JC} = \overline{KD} = \overline{LA}$ sean iguales. Determinar la longitud $\overline{IB} = \overline{JC} = \overline{KD} = \overline{LA}$ que haga mínima al área del paralelogramo. El problema se muestra en la figura 12.

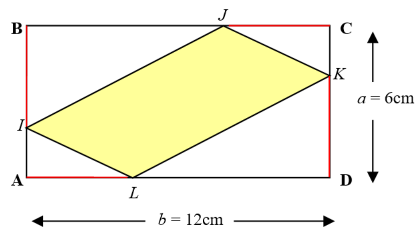


Figura 12: Paralelogramo inscrito en rectángulo $ABCD$

Utilizando el software de geometría dinámico GeoGebra para mover el punto I, observamos que el área del paralelogramo varía en función de la posición de sus vértices, pues al variar dicha posición, cambian las longitudes $\overline{IB} = \overline{JC} = \overline{KD} = \overline{LA}$, cambian las longitudes de los lados del paralelogramo y entonces cambia también su área.

Para resolver el problema consideramos el área del paralelogramo como nuestra variable dependiente (que denotaremos con $f(x)$), y la distancia $x = \overline{IB} = \overline{JC} = \overline{KD} = \overline{LA}$ como la variable independiente, cuyo dominio será el intervalo $[0, 6]$ pues la distancia máxima que pueden recorrer dos de los vértices, es el lado angosto del rectángulo.

Observemos que nuestra variable dependiente f es igual al área total del rectángulo menos las áreas de los cuatro triángulos que se forman al inscribir el paralelogramo. Nombremos (I) al área de los dos triángulos pequeños y (II) al área de los triángulos grandes. La figura 13 ilustra la posición de nuestra variable independiente así como las áreas usadas para el cálculo de f.

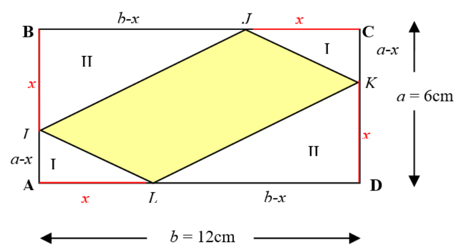


Figura 13: Variable independiente x y áreas útiles

Área total del rectángulo: $ba = 12 \times 6 = 72$

Área de los triángulos pequeños (I): $2\left(\frac{1}{2}(x(6-x))\right) = 6x - x^2$

Área de los triángulos grandes (II): $2\left(\frac{1}{2}((12-x)x)\right) = 12x - x^2$

Área total de los triángulos (I) + (II): $(6x - x^2) + (12x - x^2) = 18x - 2x^2$

El área del paralelogramo: $f(x) = 72 - (18x - 2x^2) = 72 - 18x + 2x^2$ con $0 \leq x \leq 6$

Con la función $f(x)$ ya explícita, realizamos el método descrito para tratar de encontrar mínimos o máximos locales.

1. Comenzamos desarrollando la diferencia $f(x+h) - f(x)$ en potencias de h

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (72 - 18(x+h) + 2(x+h)^2) - (72 - 18x + 2x^2) \\ &= 72 - 18x - 18h + 2(x^2 + 2xh + h^2) - 72 + 18x - 2x^2 \\ &= \cancel{72} - \cancel{18x} - 18h + \cancel{2x^2} + 4xh + 2h^2 - \cancel{72} + \cancel{18x} - \cancel{2x^2} \\ &= -18h + 4xh + 2h^2 \\ &= (-18 + 4x)h + 2h^2 \end{aligned}$$

2. Analizamos el signo de la diferencia para los extremos del intervalo dominio $x = 0$ y $x = 6$

$$f(0+h) - f(0) = (-18+0)h + 2h^2 = (-18+2h)h \;\; (0 < h \leq 6)$$
$$f(6+h) - f(6)) = (-18+4(6))h + 2h^2 = (6+2h)h \;\; (-6 \leq h < 0)$$

En el primer caso, para todos los valores permisibles (todos los valores del intervalo), excepto $x = 0$ mismo, el signo del primer factor en $(-18+2h)h$ es negativo y el segundo positivo, por lo que la diferencia será negativa y tenemos que la función alcanza un *máximo absoluto* en $x = 0$. Más aún, apoyados del argumento geométrico, observamos que en $x = 0$ el área del paralelogramo es el área total del rectángulo, por lo que queda claro que se trata de un punto donde existe un máximo absoluto.

En el segundo caso, $x = 6$, para valores de h permisibles (es decir negativos) y suficientemente pequeños en magnitud, $|h| < 3$, a saber, $-3 < h < 0$, el signo de la diferencia $f(6+h) - f(6)) = (6+2h)h$ será negativo pues el primer factor, a saber $6 + 2h = 2(3+h)$, será positivo y el segundo, h, es negativo. Por lo tanto la función $f(x)$ tendrá un *máximo local o relativo* en $x = 6$. Este máximo relativo no es absoluto, pues aunque $h = -4$ es un valor permisible $(-6 \leq h < 0)$, $f(6+(-4)) - f(6)) = (6+2(-4))(-4) = 8 > 0$, es decir $f(2) > f(6)$.

Hemos encontrado que en los extremos, la función tiene valores máximos, analizaremos los puntos en el interior del intervalo para encontrar posibles valores mínimos.

3. Analicemos los puntos en el interior del intervalo dominio, es decir para $0 < x < 6$.

Para cualquier punto al interior del intervalo, la diferencia se ve como:

$$f(x+h) - f(x) = (-18+4x)h + 2h^2 = (-18+4x+2h)h$$

Hemos, como antes, factorizado el valor de la diferencia, para estudiar más fácilmente su signo y observamos también que para puntos en el interior del intervalo, el valor de h puede ser tanto negativo como positivo. Analicemos el caso donde el coeficiente diferencial (recordemos que se trata del coeficiente de h), a saber $E_1(x) = -18 + 4x$, es distinto de cero para cierto valor x_0. Como en el ejemplo anterior, veamos que para un valor suficientemente pequeño de h, el signo del término $E_1(x_0)h = (-18 + 4x_0)h$ es dominante en la diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0) = E_1(x_0)h + E_2(x_0)h^2$, donde $E_1(x_0) = -18 + 4x_0 \neq 0$ y $E_2(x_0) = 2$. Denotemos con $c = E_1(x_0)$ y $k = E_2(x_0) = 2$, entonces la diferencia queda:

$f(x_0 + h) - f(x_0) = ch + kh^2 = h(c + k\,h)$, donde las constantes cumplen $c \neq 0$ y $k > 0$

Vamos a analizar el factor $c + k\,h$, sacando como factor a c: $c + k\,h = c\left(1 + \frac{k}{c}\,h\right)$, donde $sgn\left(\frac{k}{c}\right) = sgn(c)$. Como h se puede escoger tanto positivo como negativo, si queremos limitar la variación del factor de c, a saber $1 + \frac{k}{c}\,h$, alrededor de la unidad, entre $1 - \varepsilon$ y $1 + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$, basta tomar $\left|\frac{k}{c}\,h\right| \leq \varepsilon$, lo que equivale a $|h| \leq \varepsilon\frac{|c|}{|k|}$. Por ejemplo, con $|h| \leq 0.2\frac{|c|}{|k|}$ se consigue que (el factor) $c + k\,h = c\left(1 + \frac{k}{c}\,h\right)$ quede entre $0.8c$ y $1.2c$. En efecto, cuando, en los casos extremos ("peores" casos), $|h| = 0.2\frac{|c|}{|k|}$, esto es, $h = \pm 0.2\frac{|c|}{|k|}$, se tendrá $c + k\,h = c\left(1 \pm 0.2\frac{k}{c}\frac{|c|}{|k|}\right) = c\,(1 \pm 0.2sgn(c))$, pues $\frac{k}{|k|} = sgn(k) = 1$ y $\frac{|c|}{c} = sgn(c)$ (el cual, no se puede saber, depende del valor de x_0). Eligiendo el signo de h como $-sgn(c)$, se obtiene $0.8c$ y con el signo de h igual a $sgn(c)$, se obtiene $1.2c$. es decir que el factor estará entre $0.8c$ y $1.2c$, o bien, que la diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0) = (c \pm 0.2c)h = ch \pm 20\,\% = E_1(x_0)h \pm 20\,\% = (-18 + 4x_0)h \pm 20\,\%$, la igualdad se da con una tolerancia del 20 %, luego el signo de la diferencia será el signo del término en h.

Hay que estar prevenido de que se trata de una aproximación tosca, aunque correcta. Como el argumento debe funcionar para *cualquier* punto x_0 en el interior del dominio para el cual el coeficiente diferencial no sea nulo, es decir, que cumpla $0 < x_0 < 6$ y $c = E_1(x_0) = (-18 + 4x_0) \neq 0$, para ciertos valores posibles de x_0 el hecho de que h sea un incremento algebraico permisible impone una restricción mayor que la que dimos: $|h| \leq 0.2\frac{|c|}{2}$, o sea $|h| \leq 0.2\,|-9 + 2x_0|$ (pues $c = -18 + 4x_0$ y $k = 2$). En efecto, para $x_0 = \frac{1}{2} = 0.5$, donde $|-9 + 2x_0| = |-9 + 1| = 8$, la más negativa h permisible es $h = -\frac{1}{2}$, luego $|h| \leq 0.5$, que traducido a $|h| \leq \varepsilon\,|-9 + 2x_0|$ sería $|h| \leq 0.0625\,|-9 + 2x_0| = 0.5$. Que corresponde a una tolerancia de $\pm 6.25\,\%$. Desde luego, está dentro de la otra, la general de $\pm 20\,\%$ que es la que funciona para la mayor parte del intervalo; simplemente el llamado peor caso por defecto o por exceso (v. gr. tomando $x_0 = 6 - \frac{1}{2}$) , a veces no se alcanza. Podriamos hablar de una tolerancia máxima de $\pm 20\,\%$, aunque ese es siempre el sentido de la *tolerancia* en las componentes eléctricas, por ejemplo.

En resumen, y con el análisis para el signo de la diferencia, con $|h| \leq 0.2|9 - 2x_0|$ tendremos una condición suficiente para garantizar:

$$sgn\Big(f(x_0 + h) - f(x_0)\Big) = sgn\Big((-18 + 4x_0 + 2h)h\Big) = \begin{cases} sgn\,(-18 + 4x_0), & si\; h > 0 \\ -sgn\,(-18 + 4x_0), & si\; h < 0 \end{cases}$$

Como en el ejemplo anterior, ha sido demostrado que si el coeficiente diferencial $E_1(x_0) \neq 0$ con h suficientemente pequeña, los términos de orden superior de la diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0)$ no cuentan, haciendo que el signo de la diferencia cambie con el signo de h, como le ocurre al primer término. Entonces, nuevamente constatamos que una *condición necesaria* para que la diferencia $f(x+h) - f(x)$ *no cambie de signo* con h en un *punto interior* x (para encontrar un posible extremo local) es que el *coeficiente diferencial*, en este caso $E_1(x) = (-18 + 4x)$, sea igual a *cero*.

Resolvamos entonces la ecuación $-18 + 4x = 0$

$$\begin{aligned} -18 + 4x &= 0 \\ 4x &= 18 \\ x &= \frac{18}{4} \\ x &= 4.5 \end{aligned}$$

4. Analizamos la diferencia $f(x+h) - f(x)$ en $x = 4.5$

$$\begin{aligned} f(4.5+h) - f(4.5) &= [18 - 4(4.5)]h + 2h^2 \\ &= \cancel{[18 - 4(4.5)]}h + 2h^2 \\ &= 2h^2 > 0 \end{aligned}$$

Observamos que en $x = 4.5$ la diferencia $f(4.5+h) - f(4.5)$ es siempre positiva, para todos los valores permisibles, excepto como siempre $h = 0$, por lo que podemos concluir que la función alcanza, no sólo un mínimo relativo, sino un *mínimo absoluto*.

Por lo tanto, la solución al problema del área mínima del paralelogramo, se da para $x = 4.5cm$ y corresponde a un área de $31.5cm^2$.

Nota. Cuando una función alcanza un valor máximo (respectivamente mínimo) en $x = x_0$, suele decirse que el punto x_0 es un máximo (respectivamente, un mínimo) de la función, cuando en realidad $f(x_0)$ es el máximo (respectivamente, el mínimo).

Ejemplo 6. Con 40 metros de malla de alambre se desea cercar un terreno rectangular aprovechando un gran muro de piedra como uno de los lados ¿Cuáles serán las dimensiones del terreno de mayor área?

Le llamamos x a las dos *alturas*, por lo que la *base* sumada con $2x$ dará 40 (metros), luego la *base* es lo que le falta a $2x$ para ser 40: *base* $= 40 - 2x$. Así $2x$ no puede exceder a $40m$ pues no hay bases negativas, es decir, x no puede exceder a $20m$. La figura 14 muestra el esquema asociado a este problema.

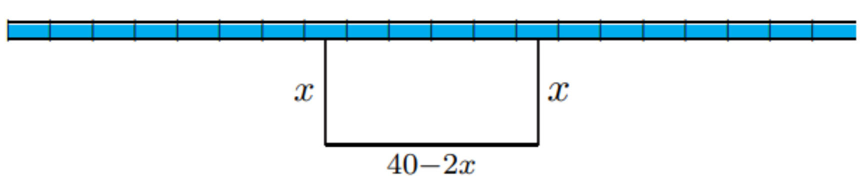


Figura 14: Cercado rectangular uno de cuyos lados es el muro

El área del terreno está dada por:

$$\begin{aligned} A &= base \times altura \\ &= (40-2x)(x) \\ &= 40x - 2x^2 \end{aligned}$$

Así la función a maximizar es $f(x) = 40x - 2x^2$, donde x recorre el intervalo dominio $[0, 20]$. Realizamos ahora el método descrito para encontrar mínimos o máximos locales.

1. Desarrollamos la diferencia $f(x+h) - f(x)$ en potencias de h

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= 40(x+h) - 2(x+h)^2) - (40x - 2x^2) \\ &= 40x + 40h - 2x^2 - 4xh - 2h^2 - 40x + 2x^2 \\ &= \cancel{40x} + 40h - \cancel{2x^2} - 4xh - 2h^2 - \cancel{40x} + \cancel{2x^2} \\ &= 40h - 4xh - 2h^2 \\ &= (40-4x)h - 2h^2 \end{aligned}$$

2. Analizamos el signo de la diferencia para los extremos del intervalo dominio $x = 0$ y $x = 20$

$$\begin{aligned} f(0+h) - f(0) &= [40-(4)(0)]h - 2h^2 = 40h - 2h^2 = (40-2h)h \ \ (0 < h \leq 20) \\ f(20+h) - f(20) &= [40-(4)(20)]h - 2h^2 = -40h - 2h^2 = (-40-2h)h \ \ (-20 \leq h < 0) \end{aligned}$$

En el primer caso, observamos que ambos factores de $(40-2h)h$ son siempre positivos para todos los valores permisibles, excepto como siempre $x = 0$ (donde la imagen se compara consigo misma) y en $h = 20$, cuando $f(0)$ se compara con $f(20)$. Por lo que el signo de la diferencia será positiva con estas excepciones y tenemos que la función alcanza un *mínimo local* en $x = 0$, que resulta ser *absoluto*, aunque no único.

En el segundo caso $x = 20$, para valores de h permisibles, a saber, $-20 \leq h \leq 0$, ambos factores en $(-40-2h)h$ serán negativos, por lo que el signo de la diferencia será también positivo, excepto en $x = 0$ y $x = 20$, donde la diferencia se anula. Por lo tanto la función $f(x)$ tendrá también un *mínimo relativo* en $x = 20$, que resulta ser *absoluto*, compartido con $x = 0$.

Apoyándonos en argumentos geométricos constatamos que para $x = 0$ y $x = 20$ el área del terreno es $A = 0$ por lo que estos puntos representan mínimos absolutos ya que el área debe ser positiva.

Hemos encontrado que en los extremos, la función tiene valores mínimos, analizaremos los puntos en el interior del intervalo para encontrar posibles valores máximos.

3. Analicemos los puntos en el interior del intervalo dominio, es decir para $0 < x < 20$.

Para cualquier punto al interior del intervalo, la diferencia se ve como:

$$f(x+h) - f(x) = (40-4x)h - 2h^2 = (40-4x-2h)h$$

Factorizamos el valor de la diferencia para estudiar más fácilmente su signo y nuevamente tenemos que para puntos en el interior del intervalo, el valor de h puede ser tanto negativo como positivo. Analicemos el caso donde el coeficiente diferencial $E_1(x) = 40-4x$, es distinto de cero para cierto valor x_0. Como en el ejemplo anterior, veamos que para un valor suficientemente pequeño de h, el signo del término $E_1(x_0)h = (40-4x_0)h$ es dominante en la diferencia $f(x_0+h) - f(x_0) = E_1(x_0)h + E_2(x_0)h^2$, donde $E_1(x_0) = 40-4x_0 \neq 0$ y $E_2(x_0) = -2$. Denotemos con $c = E_1(x_0)$ y $k = E_2(x_0) = -2$, entonces la diferencia queda:

$f(x_0+h) - f(x_0) = ch + kh^2 = h(c + k\,h)$, donde las constantes cumplen $c \neq 0$ y $k < 0$

La expresión de la diferencia se ve como la ecuación genérica ya analizada del ejercicio anterior, entonces, como vimos antes, basta tomar un valor ε (con $0 < \varepsilon < 1$) que nos permita limitar la variación del factor $1 + \frac{k}{c}\,h$ al rededor de la unidad, basta tomar $\left|\frac{k}{c}\,h\right| \leq \varepsilon$, lo que equivale a $|h| \leq \varepsilon\frac{|c|}{|k|}$.

Entonces, con $\varepsilon = 0.2$ (por ejemplo) tendremos que el factor $c + kh$ de la diferencia variará entre $0.8c$ y $1.2c$, o bien, que la diferencia $f(x_0+h) - f(x_0) = ch = E_1(x_0)h = (40-4x_0 \neq 0\,)h \pm 20\,\%$, donde la igualdad se da con una tolerancia del $20\,\%$, luego el signo de la diferencia será el signo del término en h.

Al igual que en ejemplos anteriores, podemos observar que en términos de signos, si el coeficiente diferencial $c = E_1(x_0)$ es distinto de cero con h suficientemente pequeña, los términos de orden superior de $f(x_0+h) - f(x_0)$ pueden despreciarse, haciendo que el signo de la diferencia cambie con el signo de h. Se concluye una vez más que una *condición necesaria* para que la diferencia $f(x+h) - f(x)$ *no cambie de signo* con h en un *punto interior* x (para encontrar un posible extremo local) es que el *coeficiente diferencial*, en este caso $E_1(x) = 40-4x$, sea igual a *cero*.

Resolvamos entonces la ecuación $40-4x = 0$

$$\begin{aligned} 40 - 4x &= 0 \\ 4x &= 40 \\ x &= \frac{40}{4} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

4. Analizamos ahora el signo de la diferencia $f(x+h) - f(x)$, para $x = 10$

$$\begin{aligned} f(10+h) - f(10) &= [40-(4)(10)]h - 2h^2 \\ &= \cancel{[40-(4)(10)]h} - 2h^2 \\ &= -2h^2 < 0 \end{aligned}$$

Observamos que en $x = 10$ la diferencia $f(x+h) - f(x)$ es siempre negativa para todos los valores permisibles de h, por lo tanto en ese punto hay un *máximo absoluto*.

Por último, respondiendo al problema planteado, las dimensiones del terreno que permiten la mayor área son $base = 40 - (2)(10) = 20m$ y $altura = x = 10m$ dando como resultado un área $A_{max} = 20 \times 10 = 200m^2$

Ejemplo 7. Función cúbica. Se busca determinar los valores mínimo y máximo de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$.

El dominio de la función queda determinado por el problema $D_f = [-1, 1]$, i.e. $-1 \leq x \leq 1$.

1. Comencemos por desarrollar la diferencia $f(x+h) - f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 - x^3 \\
&= \cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3} \\
&= 3x^2h + 3xh^2 + h^3
\end{aligned}
$$

2. Con el desarrollo del polinomio de h, analicemos ahora el signo de la diferencia en los extremos del intervalo, a saber $x = -1$ y $x = 1$:

En $x = -1$ tenemos que h permisible sólo puede ser positivo y tan pequeño como se requiera, del mismo modo, en $x = 1$ h permisible sólo puede ser positivo y tan pequeño como se requiera. Entonces:

$$
\begin{aligned}
f(-1+h) - f(-1) &= 3(-1)^2h + 3(-1)h^2 + h^3 = 3h - 3h^2 + h^3 = (3 - 3h + h^2)h \\
f(1+h) - f(1) &= 3(1)^2h + 3(1)h^2 + h^3 = 3h + 3h^2 + h^3 = (3 + 3h + h^2)h
\end{aligned}
$$

Nuevamente factorizamos la diferencia para hacer un estudio más sencillo de su signo. En el primer caso, observamos que el factor $3 - 3h + h^2$ es un término siempre positivo, pues de nuestros cursos de geometría analítica, vemos que se trata de una parábola en h que abre hacia arriba y cuyas raíces son complejas (pues el discriminante $b^2 - 4ac$ de la ecuación genérica $ah^2 + bh + c$ es en este caso negativo). El segundo factor de la diferencia, h, es también positivo para sus valores permisibles, por lo que la diferencia es siempre positiva y encontramos en el extremo del intervalo $x = -1$ un *mínimo absoluto*.

Para el segundo caso, el primer factor $3 + 3h + h^2$ es también siempre positivo, lo que se descubre haciendo un análisis parecido al caso anterior de la función cuadrática. Sin embargo, el segundo factor, h, es siempre negativo para sus valores permisibles, por lo que el signo de la diferencia es siempre negativo. Encontramos entonces en $x = 1$, el extremo derecho del intervalo, un *máximo absoluto*.

3. Analicemos los puntos en el interior del intervalo dominio, es decir para $-1 < x < 1$.

Para cualquier punto al interior del intervalo, la diferencia se ve como:

$$f(x+h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

Observamos que en este ejemplo, la diferencia contiene un término más, a saber $E_3(x)h^3 = h^3$. Consideremos un valor $x = x_0$ que haga que el coeficiente diferencial $E_1(x_0) = 3x_0^2$ sea distinto de cero. Un análisis parecido a los ejemplos anteriores para justificar que en lo relacionado al signo de la diferencia, los términos $E_2(x_0)h^2 = 3x_0h^2$ y $E_3(x_0)h^3 = h^3$ pueden despreciarse, no es sencillo. Sin embargo, es posible realizar dos análisis independientes donde se encuentre un valor de $|h|$ para el cual los signos de los términos $E_2(x_0)h^2$ y $E_3(x_0)h^3$ no afecten el signo de $E_1(x_0)h$.

En un primer análisis comparemos el término $E_1(x_0)h$ con $E_2(x_0)h^2$ considerando que $E_3(x_0) = 0$. Esto nos dará un valor de $|h|$ para el cual el término $E_2(x_0)h^2$ no afectará el signo del término $E_1(x_0)h$. Dicho análisis es el que ya hemos realizado en los ejercicios previos.

En estas condiciones, la diferencia se verá como: $f(x_0+h)-f(x_0) = 3x_0^2h+3x_0h^2$. Como en ejemplos anteriores, consideramos $c = 3x_0^2 \neq 0$ y $k = 3x_0$ y factorizando apropiadamente tendremos $f(x_0 + h) - f(x_0) = ch\left(1 + \frac{k}{c}h\right)$

Entonces, de acuerdo al procedimiento ya visto en problemas pasados, basta tomar un valor ε (con $0 < \varepsilon < 1$) que nos permita limitar la variación del factor $1 + \frac{k}{c}h$ al rededor de la unidad, tomamos $\left|\frac{k}{c}h\right| \leq \varepsilon$, lo que equivale a $|h| \leq \varepsilon\frac{|c|}{|k|}$.

Entonces, con $\varepsilon = 0.25$ (por ejemplo) tendremos que el factor $c + kh$ de la diferencia variará entre $0.75c$ y $1.25c$, o bien, que la diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0) = ch = E_1(x_0)h = (3x_0^2)h \pm 25\,\%$, donde la igualdad se da con una tolerancia del $25\,\%$, luego el signo de la diferencia será el signo del término en h.

Ahora comparamos en un segundo análisis, el término $E_1(x_0)h$ con $E_3(x_0)h^3$ haciendo $E_2(x_0) = 0$. La diferencia bajo estas condiciones se verá como $f(x_0+h)-f(x_0) = 3x_0^2h+h^3$. Hacemos $c = E_1(x_0) \neq 0$ y $r = E_3(x_0)$. En este caso, r es un valor constante, pero conservaremos r como incógnita en el análisis para buscar un resultado genérico.

Factorizando adecuadamente tendremos $f(x_0 + h) - f(x_0) = ch\left(1 + \frac{r}{c}h^2\right)$. Se observa que $\frac{r}{c}$ tiene un signo definido que no se modifica por h, pues $h^2 > 0$ ($h \neq 0$), pero el tamaño de $\frac{r}{c}h^2$ se puede controlar con el tamaño de $|h|$. Hacemos $\left|\frac{r}{c}h^2\right| = \left|\sqrt{\left|\frac{r}{c}\right|}h\right|^2 \leq 0.25$ que equivale a $\sqrt{\left|\frac{r}{c}\right|}|h| \leq 0.5$, o $|h| \leq 0.5\sqrt{\left|\frac{c}{r}\right|}$.

Tenemos entonces que $f(x_0+h)-f(x_0) = ch = E_1(x_0)h = (3x_0^2)h\pm 25\,\%$, donde nuevamente la igualdad se da con una tolerancia del $25\,\%$, luego el signo de la diferencia será el signo del término en h.

Por último, basta con elegir $|h|$ menor o igual al menor de los dos valores encontrados en los análisis anteriores para asegurar que el signo de la diferencia es el signo del término $E_1(x_0)h$, esto es, $|h| \leq \text{mín}\left\{0.25\left|\frac{c}{k}\right|, 0.5\sqrt{\left|\frac{c}{r}\right|}\right\}$.

Al garantizar ambas estimaciones, se tiene que en el "peor" de los casos el factor $1+\frac{k}{c}h+\frac{r}{c}h^2$ está entre $1 - 0.25 - 0.25 = 0.5$ y $1 + 0.25 + 0.25 = 1.5$ por lo que $f(x_0 + h) - f(x_0) =$

$ch\left(1+\frac{k}{c}h+\frac{r}{c}h^2\right)$ estará entre $0.5ch$ y $1.5ch$, o sea, $f(x_0+h)-f(x_0)=E_1(x_0)h\pm 50\,\%$ y el signo de la diferencia dependerá del signo de $E_1(x_0)h$.

Ahora bien, para un valor $x=x_0$ tal que $E_1(x_0)\neq 0$ el signo de $E_1(x_0)$ permanece fijo y el signo de la diferencia varía con el signo de h, luego entonces, bajo estas condiciones, en el interior de intervalo *no habrá valores mínimos ni máximos*.

Si consideramos ahora $E_1(x)=3x^2=0$ y resolvemos para x, obtenemos que $x=0$. En cuyo caso la diferencia se ve como:

$$f(0+h)-f(0)=3(0)^2h+3(0)h^2+h^3=h^3$$

Bajo estas condiciones, el signo de la diferencia variará también con el signo de h, entonces en este punto *tampoco tendremos un extremo local*.

Concluimos entonces que la función $f(x)=x^3$ tiene un mínimo absoluto en $x=-1$, y un máximo absoluto en $x=1$.

En el último ejemplo observamos que el método de desarrollos de Taylor algebraicos puede complicarse cuando se utilizan funciones más complejas, pues aumenta el trabajo algebraico. En la siguiente sección introduciremos una simplificación a este método mediante la derivada algebraica.

6.3.2. La Derivada. Derivada Algebraica. Reglas de derivación

Consideremos el siguiente desarrollo para una función $f(x)$:

$$f(x+h)-f(x)=E_1(x)h+E_2(x)h^2+TOS$$

Donde TOS representa los *Términos de Orden Superior*, en este caso $E_3(x)h^3+E_4(x)h^4+\ldots$. Cuando no figuran se entiende que los coeficientes son nulos.

Buscamos ahora un método para obtener a $E_1(x)$ conocido como *coeficiente diferencial*, sin tener que hacer el desarrollo completo de las potencias de h para $f(x)$.

Utilizamos la técnica del problema resuelto, suponiendo la igualdad ya establecida y tratando de despejar a $E_1(x)$. Para esto, dividimos ambos miembros entre h, obteniendo:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=E_1(x)+E_2(x)h+TOS$$

Viendo la expresión del lado derecho, haríamos $h=0$ para eliminar los términos de $E_2(x)h$ en adelante. Pero viendo el cociente del lado izquierdo, sustituir directamente $h=0$, no está permitido, obtendríamos $\frac{0}{0}$ que suele ser referida como una *indeterminación*. Dicho de otro modo la función cociente no está definida en $h=0$. La manera general de resolver este problema es recurrir a la noción de límite, en este caso, el límite cuando $h\to 0$; en efecto, es fácil calcular este límite en el lado derecho, simplemente haciendo $h=0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\Big(E_1(x)+E_2(x)h+TOS\Big)=E_1(x).$$

El límite del lado izquierdo (cuando existe) se conoce como la *derivada de f en x*, denotada con $f'(x)$. En tal caso, la derivada en x, es una función de x que coincide con el coeficiente diferencial: $f'(x) = E_1(x)$. Pero ya hemos visto que el coeficiente diferencial ha podido en muchos ejemplos ser determinado por métodos puramente algebraicos. ¿No puede ocurrir lo mismo con la derivada? La respuesta es que sí. Veamos un ejemplo:

$$\textit{Sea } f(x) = \sqrt{x}, \textit{ donde } x \geq 0. \textit{ Luego}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)h}$$

$$= \frac{(x+h)-x}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)h} = \frac{\cancel{h}}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)\cancel{h}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right|_{h=0} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Hemos podido dividir por h ambos, numerador y denominador porque h debe mantenerse distinta de cero, lo mismo que con el límite cuando $h \to 0$. Pero al hacer la división, la indeterminación desaparece y se remueve la discontinuidad en $h = 0$, de modo que el nuevo cociente si está definido y es continuo en $h = 0$ (para cada valor fijo de x). Así que el límite equivale a valuar en $h = 0$ el nuevo cociente $1/(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})$, el cual va a ser referido como el *cociente realizado* de $(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})/h$.

Para dejar esto muy claro y ponerlo en términos puramente algebraicos, repasemos lo anterior escribiéndolo de manera alternativa

$$\textit{Partiendo de } f(x+h)-f(x) = \sqrt{x+h}-\sqrt{x} \text{ y multiplicando y dividiendo por el conjugado,}$$

$$\text{se tiene } f(x+h)-f(x) = Q_x(h)\,h, \text{ donde } Q_x(h) = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \text{ es el cociente realizado}$$

$$\textit{Finalmente } f'(x) = Q_x(0) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Donde, por razones prácticas hemos denotado con $Q_x(h)$ el cociente realizado de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, en el que es posible valuar en $h = 0$ para obtener la derivada $f'(x)$ por medios algebraicos, la cual será referida como la *derivada algebraica*, la cual en los casos afortunados (las funciones algebraicas) permite darle la vuelta al concepto de límite.

El cociente realizado $Q_x(h)$ de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, permite factorizar por h la diferencia $f(x+h) - f(x)$:

$$f(x+h)-f(x) = Q_x(h)\cdot h. \textit{ Y por otro lado } f(x+h)-f(x) = (E_1(x)+E_2(x)h+TOS)\,h$$

Por lo que comparando , tendremos de manera natural que $Q_x(h) = E_1(x) + E_2(x)h + TOS$. Luego $f'(x) = Q_x(0) = E_1(x)$, que iguala la derivada algebraica con el *coeficiente diferencial*.

Calculemos algunas derivadas de funciones simples y las reglas de derivación mediante este recurso. La idea consiste en poder factorizar la diferencia $f(x+h) - f(x)$ en la forma $f(x+h) - f(x) = Q_x(h) \cdot h$, donde $Q_x(h)$ (el cociente realizado) está definida (y es continua) en $h = 0$, en cuyo caso $f'(x) = Q_x(0)$. Note que tal factorización permite expresar:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = Q_x(h), \text{ con el miembro izquierdo no definido en } h = 0, \text{ pero el derecho sí}$$

Empecemos con la derivada de una función contante $f(x) = K$ ($f(x) \equiv K$, donde K es una constante).

$$f(x+h) - f(x) = K - K = 0 = Q_x(h) \cdot h, \text{ donde } Q_x(h) \equiv 0.$$

De donde $f'(x) = Q_x(0) = 0$. *La derivada de una función constante, es la función constante cero*.

La derivada de la función identidad $f(x) = x$.

$$f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = 1 \cdot h = Q_x(h) \cdot h, \text{ donde } Q_x(h) \equiv 1.$$

De donde $f'(x) = Q_x(0) = 1$. *La derivada de la función identidad, es la función constante unidad*.

La derivada de la función potencia $n-$ésima $f(x) = x^n$.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^n - x^n \\ &= x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + TOS - x^n \\ &= \cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + TOS - \cancel{x^n} \\ &= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + TOS \\ &= \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + TOS\right)h = Q_x(h) \cdot h \end{aligned}$$

De donde $f'(x) = Q_x(0) = nx^{n-1}$. *La derivada de la función potencia n-ésima, es el exponente veces la potencia disminuida en una unidad*.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones *susceptibles de derivarse algebraicamente*,es decir, $f(x+h) - f(x) = Q_x(h) \cdot h$, $g(x+h) - g(x) = R_x(h) \cdot h$ y donde $f'(x) = Q_x(0)$ y $g'(x) = R_x(0)$.

Con esos supuestos, la función suma de f con g dada por $(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ tiene derivada algebraica:

$$\begin{aligned} (f+g)(x+h) - (f+g)(x) &= [f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)] \\ &= f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x) \\ &= f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x) \\ &= Q_x(h) \cdot h + R_x(h) \cdot h \\ &= (Q_x(h) + R_x(h))h \\ &= S_x(h)\,h, \quad \textit{donde } S_x(h) = Q_x(h) + R_x(h) \end{aligned}$$

De donde $S_x(h) = Q_x(h) + R_x(h)$ es el cociente realizado de la función suma $f + g$ por lo que $(f + g)'(x) = S_x(0) = Q_x(0) + R_x(0) = f'(x) + g'(x)$, esto es

La derivada de la función suma, es la suma de las derivadas de cada función.

Consideremos nuevamente $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones *susceptibles de derivarse algebraicamente*, es decir, $f(x+h) - f(x) = Q_x(h) \cdot h$, $g(x+h) - g(x) = R_x(h) \cdot h$ y donde $f'(x) = Q_x(0)$ y $g'(x) = R_x(0)$.

Con esos supuestos, la función producto de f con g dada por $(fg)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)g(x)$ tiene derivada algebraica:

$$\begin{aligned}
(fg)(x+h) - (fg)(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\
&\textit{[sumamos y restamos } f(x)g(x+h)\textit{]} \\
&= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \\
&= [f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)] \\
&= [Q_x(h) \cdot h]g(x+h) + f(x)[R_x(h) \cdot h] \\
&= [Q_x(h)g(x+h) + f(x)R_x(h)]h \\
&= T_x(h)\,h, \quad \text{donde } T_x(h) = Q_x(h)g(x+h) + f(x)R_x(h)
\end{aligned}$$

De donde $T_x(h) = Q_x(h)g(x+h) + f(x)R_x(h)$ es el cociente realizado de la función producto fg por lo que $(fg)'(x) = T_x(0) = Q_x(0)g(x+0) + f(x)R_x(0) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, esto es:

La derivada de la función producto de dos funciones, es igual al producto de la derivada de la primera por la segunda, más el producto de la primera por la derivada de la segunda.

Consideremos ahora $f(x)$ y $g(x)) \neq 0$ dos funciones *susceptibles de derivarse algebraicamente*, es decir, $f(x+h) - f(x) = Q_x(h) \cdot h$, $g(x+h) - g(x) = R_x(h) \cdot h$ y donde $f'(x) = Q_x(0)$ y $g'(x) = R_x(0)$.

Con esos supuestos, la función cociente de f con g dada por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene derivada algebraica:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)} \\
&\textit{[sumamos y restamos } g(x)f(x) \textit{ en el numerador]} \\
&= \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)-[g(x+h)-g(x)]f(x)}{g(x)g(x+h)} \\
&= \frac{[Q_x(h)\cdot h]g(x)-[R_x(h)\cdot h]f(x)}{g(x)g(x+h)} \\
&= \left[\frac{Q_x(h)g(x)-R_x(h)f(x)}{g(x)g(x+h)}\right]h \\
&= W_x(h)\,h, \quad \text{donde } W_x(h)=\frac{Q_x(h)g(x)-R_x(h)f(x)}{g(x)g(x+h)}
\end{aligned}$$

De donde $W_x(h)=\frac{Q_x(h)g(x)-R_x(h)f(x)}{g(x)g(x+h)}$ es el cociente realizado de la función cociente $\frac{f}{g}$ por lo que $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=W_x(0)=\frac{Q_x(0)g(x)-R_x(0)f(x)}{g(x)g(x+0)}=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, esto es:

La derivada de la función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, es igual al cociente de la diferencia del producto de la derivada de $f(x)$ por $g(x)$ menos el producto de la derivada de $g(x)$ por $f(x)$, sobre el cuadrado de $g(x)$.

Como corolario de las fórmulas de derivación para una constante y un producto, la derivada de la función $Kf(x)$ donde K es una función constante se calcula como:

$$\begin{aligned}
[Kf]'(x) &= (K)'f(x)+Kf'(x) \\
&= (0)f(x)+Kf'(x) \\
&= Kf'(x)
\end{aligned}$$

La derivada del producto de una constante por una función, es el producto de la constante por la derivada de la función.

Como corolario de las fórmulas de derivación para una constante y un cociente, la derivada de la función $\left(\frac{K}{f}\right)(x)$ donde K es una función constante y $f(x)\neq 0$ se calcula como:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{K}{f}\right)'(x) &= \frac{(K)'f(x)-f'(x)K}{f^2(x)} \\
&= \frac{(0)'f(x)-Kf'(x)}{f^2(x)} \\
&= -K\frac{f'(x)}{f^2(x)}
\end{aligned}$$

La derivada del producto de una constante por el recíproco de una función, es el opuesto del producto de la constante, la derivada de la función y el cuadrado del recíproco de la función.

6.3.3. El Método con la Fórmula de Taylor

Ya hemos definido que en la diferencia $f(x+h)-f(x)$ el coeficiente $E_1(x)$, llamado *coeficiente diferencial*, es la derivada de la función $f(x)$. Veamos un poco más allá y estudiemos los otros términos de la diferencia.

Consideremos el desarrollo:

$$f(x+h) - f(x) = E_1(x)h + E_2(x)h^2 + E_3(x)h^3 + TOS \text{ (Términos de Orden Superior)}$$

Consideremos también la función $f(x) = x^2$ y desarrollemos la diferencia $f(x+h) - f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - x^2 \\ &= \cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2} \\ &= 2xh + h^2 \end{aligned}$$

Donde $f'(x) = E_1(x) = 2x$ y donde observamos que $E_2(x) = 1$. Va a resultar que la expresión $E_2(x) = 1 = \frac{1}{2}(2)$ corresponde a un medio de la segunda derivada de $f(x) = x^2$. En efecto, sabiendo que la derivada de la función $f(x) = x^2$ denotada por $f'(x)$, está dada por:

$$f'(x) = 2x$$

Estamos diciendo ahora que si derivamos de nuevo la última expresión, esto es, si derivamos dos veces x^2, o bien derivamos una vez $2x$, obtenemos el doble de $E_2(x)$:

$$\left(x^2\right)'' = \left((x^2)'\right)' = (2x)' \stackrel{?}{=} 2$$

Para verificar la última igualdad, utilizamos la regla ya probada para la derivada del producto de una constante por una función, esto es:

$$(Kf)'(x) = Kf'(x)$$

Y la derivada de la función identidad, a saber:

$$(x)' = 1$$

Entonces la derivada de la función $2x$ es:

$$(2x)' = (2)(1) = 2$$

Esto comprueba que efectivamente $E_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2\right)'' = \frac{1}{2}(2)$. La moraleja es que, una vez que se tienen las reglas de derivación, es más sencillo determinar $E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_3(x)$, ..., derivando, que haciendo desarrollos algebraicos. Esto es, sabiendo que

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)\,h + \frac{1}{2!}f''(x)\,h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)\,h^3 + \frac{1}{4!}f^{iv}(x)\,h^4 + TOS$$

Donde $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{iv}(x)$, representan la primera, la segunda, la tercera y la cuarta derivada de $f(x)$, respectivamente; y donde $2! = 1\times 2 = 2$, $3! = 1\times 2\times 3 = 6$, $4! = 1\times 2\times$

$3 \times 4 = 24$, etcétera. Estamos diciendo, desde luego, que $E_1(x) = f'(x)$, $E_2(x) = \frac{1}{2!}f''(x)$, $E_3(x) = \frac{1}{3!}f'''(x)$, etcétera.

Comprobemos este resultado con otro ejemplo. Retomemos ahora la función $f(x) = x^3$ estudiada anteriormente. Sabemos que la diferencia $f(x+h) - f(x)$ para esta función se ve como:

$$f(x+h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

Donde los coeficientes son: $E_1(x) = 3x^2$, $E_2(x) = 3x$ y $E_3(x) = 1$.

Desarrollando las derivadas mediante la regla de derivación de potencias tenemos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^3\right)' = 3x^2 \\
f''(x) &= \left(x^3\right)'' = \left(3x^2\right)' = 6x \\
f'''(x) &= \left(x^3\right)''' = \left(3x^2\right)'' = (6x)' = 6
\end{aligned}$$

Con lo que comprobamos que para $f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned}
E_1(x) &= f'(x) = 3x^2 \\
E_2(x) &= \frac{1}{2!}f''(x) = \frac{1}{2}(6x) = 3x \\
E_3(x) &= \frac{1}{3!}f'''(x) = \frac{1}{6}(6) = 1
\end{aligned}$$

Una vez conocidas las reglas de derivación, usemos estos resultados para hacer ejercicios de optimización más complejos, en los que el desarrollo algebraico para encontrar los coeficientes del resultado de la diferencia $f(x+h) - f(x)$ pueden ser complicados.

Ejemplo 8. Caja sin tapa. Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 8×5 dm. Para ello, se corta un cuadrado de lado x en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja. Determina las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo. En la figura 15 se ilustran las condiciones del problema.

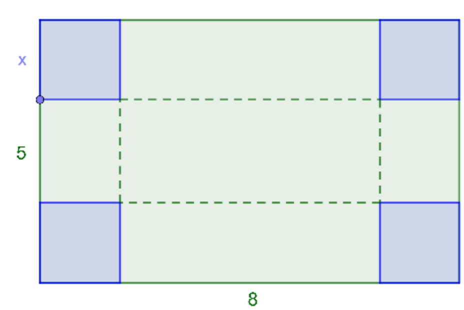


Figura 15: Caja sin tapa a partir de una hoja rectangular

El volumen de la caja se calcula por la ecuación:

$$V = A_{base} \times altura$$

Donde A_{base} es el área de la base que se calcula como $A_{base} = ancho \times fondo$.

La *altura* será representada por nuestra variable independiente x, pues es el tamaño del cuadro a cortar en cada esquina. El *ancho* y el *fondo* dependerán de la variable independiente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} altura &= x \\ ancho &= 8 - 2x \\ fondo &= 5 - 2x \end{aligned}$$

La ecuación del volumen de la caja, que se representará por nuestra variable dependiente $f(x)$, se verá como:

$$\begin{aligned} f(x) &= (8 - 2x)(5 - 2x)(x) \\ &= 4x^3 - 26x^2 + 40x \end{aligned}$$

El dominio de $f(x)$ está dado por los valores donde x existe, esto es $D_f = [0, 2.5]$, i.e. $0 \leq x \leq 2.5$, ya que x no puede superar la mitad del lado menor de la hoja de cartón.

Usando las reglas de derivación y el resultado del Teorema de Taylor, obtengamos la diferencia $f(x + h) - f(x)$. Comenzamos por calcular las derivadas de orden 1, 2 y 3 de la función $f(x)$. Observemos que las derivadas de orden 4, $f^{iv}(x)$, en adelante son igual a cero.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 26x^2 + 40x \\ f'(x) &= (4x^3 - 26x^2 + 40x)' = 12x^2 - 52x + 40 \\ f''(x) &= (12x^2 - 52x + 40)' = 24x - 52 \\ f'''(x) &= (24x - 52)' = 24 \\ f^{iv}(x) &= (24)' = 0 \end{aligned}$$

De donde los coeficientes $E_k(x)$ de la diferencia son:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= f'(x) = 12x^2 - 52x + 40 \\ E_2(x) &= \frac{1}{2!}f''(x) = \frac{1}{2}(24x - 52) = 12x - 26 \\ E_3(x) &= \frac{1}{3!}f'''(x) = \frac{1}{6}(24) = 4 \\ E_4(x) &= \frac{1}{4!}f^{iv}(x) = \frac{1}{24}(0) = 0 \end{aligned}$$

Y la diferencia $f(x+h) - f(x)$ se ve como:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= E_1(x)h + E_2(x)h^2 + E_3(x)h^3 \\ &= (12x^2 - 52x + 40)h + (12x - 26)h^2 + (4)h^3 \end{aligned}$$

Con la diferencia desarrollada en potencias de h, podemos ahora analizar el signo de la misma para los puntos del dominio de $f(x)$, a saber, $0 \leq x \leq 2.5$. Comencemos por los puntos extremos $x = 0$ y $x = 2.5$. Con $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0+h) - f(0) &= (12(0)^2 - 52(0) + 40)h + (12(0) - 26)h^2 + (4)h^3 \\ &= 40h - 26h^2 + 4h^3 \\ &= (40 - 26h + 4h^2)h \; con \; 0 < h \leq 2.5 \end{aligned}$$

Analizando la ecuación cuadrática y recordando nuestros cursos de geometría analítica, observamos que se trata de una parábola que abre hacia arriba con raíces en $h = 2.5$ y $h = 4$ por lo que podemos concluir que en el intervalo de valores permisibles de h, a saber $0 < h \leq 2.5$, el signo de $40 - 26h + 4h^2$ es no negativo (se hace nulo en el valor extremo). Entonces, el signo de la diferencia $f(0+h) - f(0)$ no cambia para los valores permisibles de h y como éste permanece positivo, en $x = 0$ tenemos un *mínimo local*. Como esta condición se cumple para todos los valores permisibles de h y apoyados por el argumento geométrico (en $x = 0$ la altura de la caja vale 0 y por lo tanto su volumen vale 0), se puede concluir que en $x = 0$ el valor mínimo es *absoluto*.

Con $x = 2.5$, el extremo derecho del intervalo.

$$\begin{aligned} f(2.5+h) - f(2.5) &= (12(2.5)^2 - 52(2.5) + 40)h + (12(2.5) - 26)h^2 + (4)h^3 \\ &= -15h + 4h^2 + 4h^3 \\ &= (-15 + 4h + 4h^2)h \; con \; -2.5 \leq h < 0 \end{aligned}$$

Haciendo un análisis parecido al caso anterior, observamos que $-15 + 4h + 4h^2$ es una parábola que abre hacia arriba con raíces en $x = -2.5$ y $x = 1.5$ por lo que en el intervalo de valores permisibles de h, a saber $-2.5 \leq h < 0$ el signo del factor $-15 + 4h + 4h^2$ es siempre negativo o nulo (en el valor extremo) y con $h < 0$ el signo de la diferencia es positivo para los valores permisibles de h, por lo tanto también en $x = 2.5$ tenemos un *mínimo absoluto*. El argumento geométrico también apoya esta conclusión pues en $x = 2.5$ el fondo de la caja se hace cero, entonces el volumen de la caja se haría cero también.

Concluimos que en los extremos del intervalo dominio de $f(x)$, la función alcanza *mínimos absolutos* donde el volumen de la caja es igual a cero.

Analicemos ahora los puntos dentro del intervalo dominio, es decir, $0 < x < 2.5$.

De ejercicios anteriores hemos visto que para los puntos dentro del intervalo, con x_0 fijo, la diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0)$ se comporta como el término en h de menor orden que no sea nulo, así, si el primer término $E_1(x)$ es no nulo, el signo de la diferencia cambia con el signo de h para un x_0 fijo, y no hay extremos locales. En cambio si el primer término es nulo, el signo de la diferencia es el signo del coeficiente $E_2(x)$ pues h^2 es siempre positivo.

Los valores de x que anulan el coeficiente diferencial $E_1(x) = 12x^2 - 52x + 40$ son $x = 1$ y $x = \frac{10}{3}$ (resolviendo por fórmula general) pero sólo $x = 1$ pertenece al dominio de $f(x)$ entonces en $x = 1$ la diferencia se ve como:

$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= (12(1) - 26)h^2 + (4)h^3 \\ &= -14h^2 + 4h^3 \end{aligned}$$

Y su signo es negativo para valores de h permisibles y suficientemente pequeños. Entonces en $x = 1$ tenemos un *máximo local*.

Un análisis más profundo nos muestra que $x = 1$ es el único valor posible en el que puede haber un extremo dentro del intervalo, por lo que podemos concluir que éste será *máximo absoluto*.

Así, cuando la altura de la caja es $x = 1dm$, el volumen de la caja será máximo, y su valor será:

$$V_{max} = f(1) = 4(1)^3 - 26(1)^2 + 40(1) = 18dm^3$$

Ejemplo 9. (Kepler) Dado un recipiente cilíndrico con diagonal $d = 10$ (metros), determinar las dimensiones del cilindro para que su volumen sea máximo.

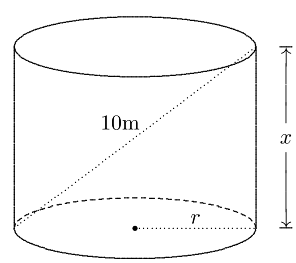


Figura 16: Cilindro problema de Kepler

Si como muestra la figura, llamamos x a la altura, el volumen V del cilindro está dado por:

$$V = (\text{área de la base}) \times (\text{altura}) = \pi r^2 x \quad (\text{Volumen en función de } x \text{ y } r^2)$$

Podemos ver que la diagonal del cilindro es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son, uno la altura, que mide x y el otro el diámetro de la base, que mide $2r$ (el doble del radio). Por el teorema de Pitágoras la suma de los cuadrados de los catetos debe ser igual al cuadrado de la hipotenusa: $4r^2 + x^2 = 100$; de donde despejamos r^2:

Tenemos $4r^2 + x^2 = 100$, luego $4r^2 = 4r^2 + x^2 - x^2 = 100 - x^2$, de donde $r^2 = \frac{1}{4}(100 - x^2)$.

Sustituyendo el valor de r^2 en la fórmula de arriba, obtenemos el volumen en función de x:

$$V(x) = \pi \left(\frac{1}{4}(100 - x^2) \right) x = \frac{\pi}{4}(100x - x^3) \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 10\,.$$

La diferencia de volumen $V(x+h) - V(x)$, para un incremento h en la altura x, lo vamos a expresar en términos de las derivadas del volumen $V(x)$:

$$V(x+h) - V(x) = E_1(x)\,h + E_2(x)\,h^2 + \text{TOS} = V'(x)\,h + \frac{1}{2}V''(x)\,h^2 + \text{TOS}$$

Donde con TOS denotamos términos con potencias h^3 o superiores. Encontremos las derivadas:

$$\begin{aligned} V'(x) &= \left(\frac{\pi}{4}(100x - x^3)\right)' = \frac{\pi}{4}\left(100x - x^3\right)' = \frac{\pi}{4}((100x)' - (x^3)') \\ &= \frac{\pi}{4}\left(100 - 3x^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V''(x) &= \left(\frac{\pi}{4}\left(100 - 3x^2\right)\right)' = \frac{\pi}{4}\left(100 - 3x^2\right)' = \frac{\pi}{4}\left((100)' - (3x^2)'\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(0 - 3(x^2)'\right) = \frac{\pi}{4}(\,-3(2x)) = \frac{\pi}{4}(-6x) \\ V''(x) &= -\frac{3\pi}{2}\,x \end{aligned}$$

Finalmente, hallamos $V'''(x) = -3\pi/2$, por lo que $V^{iv}(x) \equiv 0$. La función diferencia es entonces:

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{\pi}{4}\left(100 - 3x^2\right)h + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3\pi}{2}x\right)h^2 + \left(\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{3\pi}{2}\right)h^3 \\ &= \frac{\pi}{4}\left(100 - 3x^2\right)h - \frac{3\pi}{4}x\,h^2 - \frac{\pi}{4}h^3 \end{aligned}$$

Donde el coeficiente diferencial $E_1(x) = V'(x) = \frac{\pi}{4}(100 - 3x^2)$, $E_2(x) = \frac{1}{2}V''(x) = -\frac{3\pi}{4}x$ y $E_3(x) = \frac{1}{6}V'''(x) = -\frac{\pi}{4}$ $(E_4(x) \equiv 0)$

Analicemos la función diferencia en los puntos extremos, o sea, el incremento del valor de la función correspondiente a un incremento h del valor $x = 0$ o $x = 10$, respectivamente. En el primer caso, los valores permisibles son $0 < h \leq 10$, luego h es positivo (omitimos $h = 0$), mientras que en el segundo $-10 \leq h < 0$, por lo tanto, h es negativo (omitimos $h = 0$).

En el extremo $x = 0$ la función diferencia es

$$\begin{aligned} V(0+h) - V(0) &= V'(0)\,h + \frac{1}{2}V''(0)\,h^2 + \frac{1}{6}V'''(0) \\ &= \frac{100\pi}{4}\,h - \frac{\pi}{4}\,h^3, \quad \text{con valores permisibles } 0 \leq h \leq 10. \end{aligned}$$

El signo del término de menor potencia, a saber, $V'(0)\,h$, o $\frac{100\pi}{4}\,h$, es positivo para h permisible (excepto $h = 0$) y como sabemos resulta el dominante, es decir, para h suficientemente pequeña y permisible el signo de $V(0+h)-V(0)$ será entonces positivo, por lo que el volumen tiene al menos un mínimo local en $x=0$. De hecho, tenemos

$$V(0+h)-V(0)=\frac{100\pi}{4}\,h-\frac{\pi}{4}\,h^3=\frac{\pi h}{4}(100-h^2)=\frac{\pi h}{4}(100+h)(100-h)$$

Donde los tres factores son positivos para todos los valores permisibles excepto en $h=0$ (como siempre) y en $h=10$. Por lo tanto $V(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x=0$, pero no es único (el otro es cuando $h=10$, es decir en $x=10$)

Continuamos desarrollando la diferencia para el extremo final $x=10$:

$$\begin{aligned}V(10+h)-V(10)&=V'(10)\,h+\frac{1}{2}V''(10)\,h^2+\frac{1}{6}V'''(10)\\&=-\frac{100\pi}{2}\,h-\frac{15\pi}{2}h^2-\frac{\pi}{4}\,h^3\end{aligned}$$

Pues $V'(10)=\frac{\pi}{4}\left(100-3\cdot 10^2\right)=-\frac{200\pi}{4}$ y $\frac{1}{2}V''(10)=-\frac{3\pi}{4}\cdot 10=-\frac{15\pi}{2}$. El signo del término de menor potencia, a saber, $-\frac{100\pi}{2}\,h$, es positivo (producto de negativos) y como resulta el dominante, $V(10+h)-V(10)$ resulta ser positiva también, por lo que $V(x)$ alcanza un mínimo local en $x=10$. Como $V(10)-V(0)=0$, de hecho es también un mínimo absoluto. Esto es consistente con la geometría del problema, pue el volumen es cero en $x=0$ y $x=10$, por lo tanto mínimo absoluto.

Como en los extremos del intervalo dominio, la función volumen alcanza mínimos (locales), debemos buscar el máximo en un punto interior x.

Figura 17: valores permisibles de h para x interior

Consideremos la diferencia para un punto interior x

$$V(x+h)-V(x)=V'(x)\,h+\frac{1}{2}V''(x)\,h^2+\frac{1}{6}V'''(x)\,h^3$$

Donde el incremento h, distinto de cero, puede ser tanto positivo como negativo, pues x es interior al intervalo $[0,10]$. Cuando $V'(x)\neq 0$, el signo del término de la primera potencia, a saber $V'(x)\,h$ será dominante, pero este signo cambiará con el signo de h y el mismo cambio de signo ocurrirá a la diferencia $V(x+h)-V(x)$, por lo que la función volumen no tendrá máximo ni mínimo en tal punto interior x. Estamos repitiendo el mismo argumento ahora con la derivada: *una condición necesaria para un máximo o un mínimo en un punto interior del intervalo dominio es que la derivada se anule:* $V'(x)=0$.

Por lo tanto, en un punto interior x, es necesario que $V'(x) = \frac{\pi}{4}(100 - 3x^2) = 0$. Al resolver la ecuación $100 - 3x^2 = 0$, hallaremos el valor de x candidato a ser máximo o mínimo. En este caso $x = \pm\sqrt{\frac{100}{3}}$, de donde tomaremos solamente el valor positivo [¿por qué?], a saber $x = \sqrt{\frac{100}{3}}$.

Verifiquemos finalmente que en $x = \sqrt{\frac{100}{3}}$, la función volumen tiene un valor máximo.

$$\begin{aligned}
V(x+h) - V(x) &= \frac{\pi}{4}(100-3x^2)\,h - \frac{3\pi}{4}x\,h^2 - \frac{\pi}{4}\,h^3 \\
V\left(\sqrt{\frac{100}{3}} + h\right) - V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) &= \frac{\pi}{4}\left(100 - 3\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)^2\right)h - \frac{3\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)h^2 - \frac{\pi}{4}\,h^3 \\
&= \frac{\pi}{4}(100-100)\,h - \frac{3\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)h^2 - \frac{\pi}{4}\,h^3 \\
&= -\frac{3\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)h^2 - \frac{\pi}{4}\,h^3
\end{aligned}$$

Como sabemos para valores de h "suficientemente pequeños" predominará el signo del término con la menor potencia, a saber el signo del coeficiente de h^2, a saber $\frac{1}{2}V''\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) = -\frac{3\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)$ que siempre es negativo ($h \neq 0$). Por lo tanto podemos concluir que para $x = \sqrt{\frac{100}{3}}$ el volumen del cilindro alcanza un valor máximo local.

Este máximo local tiene que ser su valor máximo absoluto, pues no hay otros candidatos a ser máximo.

La solución al problema es un cilindro cuyas dimensiones son:

$$\text{diagonal} = 10m; \quad \text{altura} = \sqrt{\frac{100}{3}}m \quad \text{y} \quad \text{diámetro de la base} = 2\sqrt{\frac{50}{3}}m$$

Y donde el volumen máximo de este cilindro es

$$V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{100}{3}}\left(100 - \left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)^2\right) = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{100}{3}}\frac{200}{3} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)^3 \approx 302.30\,m^3.$$

En el problema anterior utilizamos implícitamente el *criterio de la segunda derivada*, a saber, *una condición suficiente para que una función f tenga un máximo local en un punto interior x_0 es que la primera derivada se anule en dicho punto y la segunda derivada sea negativa: $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$.* Y claro hay su contraparte, la condición suficiente para mínimo local en punto interior, que la primera derivada se anule y la segunda derivada sea positiva. En efecto,

$$\text{Sea } f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)\,h^2 + \text{TOS} \;\text{ donde } f'(x_0)=0. \text{ Luego}$$
$$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)\,h^2 + \text{TOS}. \;\textit{Como } h^2>0,\ \textit{si } f''(x_0)\neq 0,\ \textit{tendremos}$$
$$sgn\Big(f(x_0+h)-f(x_0)\Big) = sgn\left(\frac{1}{2}f''(x_0)\,h^2\right) = sgn\,(f''(x_0))$$

para $|h| \neq 0$ suficientemente pequeña.

6.3.4. Interpretación geométrica de la Derivada. Aplicaciones

Retomemos la función volumen de la caja formada por una hoja rectangular de $8\times 5\,dm$ del ejemplo 8, a saber, $f(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$, donde x representa el lado del cuadrado de cada esquina a remover, y que se convertirá en la altura de la caja sin tapa, y cuyos valores se encuentran en el intervalo $[0, 2.5]$, es decir, $0 \le x \le 2.5$

Tomando los resultados del ejemplo 8, la diferencia $f(x+h)-f(x)$ se ve como:

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)h^3 \\ &= (12x^2-52x+40)h + \frac{1}{2}(24x-52)h^2 + \frac{1}{6}(24)h^3 \\ &= (12x^2-52x+40)h + (12x-26)h^2 + (4)h^3 \end{aligned}$$

En el extremo inicial $x=0$, $f'(0) = 12(0)^2 - 52(0) + 40 = 40$ que es positiva, luego como el coeficiente del primer término es distinto de cero, este término va a resultar dominante para valores de h permisibles y suficientemente pequeños, así que la diferencia correspondiente a un incremento h cercano a cero, será:

$$f(0+h)-f(0) = f'(0)\,h + \text{TOS} = 40\,h + \text{TOS (términos en } h^2, h^3)$$

Como los signos de 40 y de h son positivos, el signo del primer término $40\,h$ también es positivo y como este término es *dominante* para los valores de h permisibles y suficientemente pequeños, el signo de la diferencia $f(0+h)-f(0)$ también será positivo, por lo que la función volumen tiene en $x=0$ un mínimo relativo.

Este argumento ya lo hemos utilizado en repetidas ocasiones, el signo del término de menor orden domina, pero ahora lo vamos a extender para aplicarlo no sólo a los signos, sino al valor mismo del término de menor orden, en este caso el primer término, esto es, la diferencia misma $f(0+h)-f(0)$, para h suficientemente cercana a cero, es aproximadamente igual a (léase “en términos relativos se comporta como...”) el primer término $f'(0)\,h = 40\,h$, lo cual escribimos:

$$f(0+h)-f(0) \approx f'(0)\,h = 40\,h$$

Para entender mejor lo anterior, consideraremos un punto cualquiera $x = x_0$ y el incremento h como una diferencia $h = x - x_0$, así, la diferencia $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + TOS$ se ve como:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \text{TOS (en } (x - x_0)^3, \ldots)$$

Cuando $f'(x_0) \neq 0$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

Se suele hablar de $y = f(x)$ especialmente para referirse a la gráfica de $f(x)$. Así, sustituyendo y en vez de $f(x)$, tenemos que $y - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ se comporta como la *recta tangente*, dada en forma punto - pendiente, $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ cuya pendiente es la derivada en la abscisa del punto $(x_0, f(x_0))$ y la recta claro, pasa por dicho punto.

Calculemos ahora las ecuaciones de las rectas tangentes para algunos puntos sobre $f(x)$.

En $x_0 = 0.5$, $f(0.5) = 4(0.5)^3 - 26(0.5)^2 + 40(0.5) = 14$, la pendiente debe ser $f'(0.5) = 12(0.5)^2 - 52(0.5) + 40 = 17$, así que la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $P = (0.5, 14)$ debe ser

$$y - 14 = 17\,(x - 0.5) \text{ o sea } y = 17\,x + 5.5$$

En $x_0 = 1$, $f(1) = 4(1)^3 - 26(1)^2 + 40(1) = 18$, la pendiente será $f'(1) = 12(1)^2 - 52(1) + 40 = 0$, así que la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $Q = (1, 18)$ será una recta horizontal de altura 18:

$$y - 18 = (0)(x - 1), \text{ o sea } y = 18$$

Finalmente, determinemos la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x_0 = 2$. $f(2) = 4(2)^3 - 26(2)^2 + 40(2) = 8$, la pendiente es $f'(2) = 12(2)^2 - 52(2) + 40 = -16$, así que la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $R = (2, 8)$ será:

$$y - 8 = -16\,(x - 2), \text{ o sea } y = -16x + 40$$

La figura 17 ilustra la gráfica de $y = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ y las tres últimas tangentes calculadas.

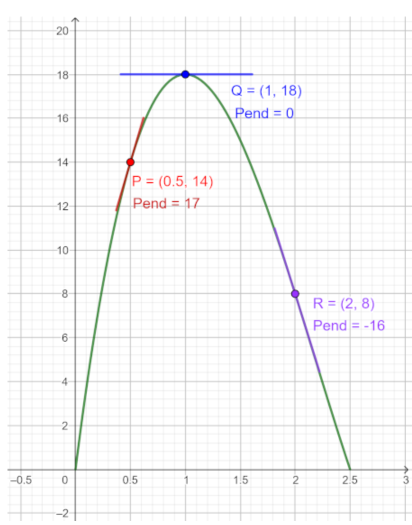


Figura 18: Gráfica de la función $y = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ y tangentes en los puntos P, Q y R

6.3.5. El Criterio de la Primera Derivada para máximos y mínimos

A partir de la gráfica y de la actividad en GeoGebra donde movemos el punto para distintos valores de x_0, podemos observar que en toda la parte del intervalo $[0, 1)$, $f'(x_0)$ se mantiene positiva y su tangente tendrá pendiente positiva pegándose a la gráfica que corresponde a una función creciente. De hecho, $f(x)$ es creciente en $[0, 1]$ (se incluye el valor donde la derivada es cero) y similarmente como $f'(x_0)$ es negativa en el intervalo $(1, 2.5]$, es decir, las pendientes de la tangentes son negativas por lo que la función será decreciente en $[1, 2.5]$. Este es otro modo de leer que hay un máximo (local) en $x = 1$.

Caracterización de máximo (absoluto en $[0, 2.5]$) con el criterio de la primera derivada

Enunciando ahora el criterio de la primera derivada: Si en un intervalo cerrado $[a, b]$ la derivada se anula en un único punto interior c, $a < c < b$, entonces en el subintervalo $[a, c)$ la derivada tendrá un mismo signo y lo mismo ocurrirá en el subintervalo $(c, b]$.

Si $f'(x)$ tiene signos distintos en $[a, c)$ y $(c, b]$ tendremos:

(i) Si $f'(x) > 0$ ($f(x)$ crece) en $[a, c)$ y $f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrece) en $(c, b]$ entonces $f(x)$ alcanza un máximo en $x = c$ que es absoluto en $[a, b]$.

(ii) Si $f'(x) < 0$ ($f(x)$ decrece) en $[a, c)$ y $f'(x) > 0$ ($f(x)$ crece) en $(c, b]$ entonces $f(x)$ alcanza un mínimo en $x = c$ que es absoluto en $[a, b]$.

En la práctica, al resolver la ecuación $f'(x) = 0$, se encuentra que en el intervalo $[a, b]$ hay una única solución en su interior $x = c$, $a < c < b$. Tiene que haber un mismo signo en $[a, c)$ y en $(c, b]$. Para averiguar cuál es el signo en cada subintervalo, basta averiguarlo en un punto cualquiera de cada uno de ellos, es decir, si tomamos $x_1 \in [a, c)$ el signo de $f'(x_1)$ es el signo de $f'(x)$ en todo punto de $[a, c)$. Del mismo modo, si tomamos $x_2 \in (c, b]$ el signo de $f'(x_2)$ es el signo de $f'(x)$ en todo punto de $(c, b]$.

Además, si $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$, implica que los signos en cada subintervalo son opuestos y en base a la condición $f'(x) = 0$ tiene única solución $x = c$, se presentan dos casos:

1. Si $f'(x_1) < 0$ y $f'(x_2) > 0$ determinan que $f(x)$ alcanza un mínimo en $x = c$.

2. Si $f'(x_1) > 0$ y $f'(x_2) < 0$ determinan que $f(x)$ alcanza un máximo en $x = c$.

La figura 18 muestra la representación gráfica de un mínimo y un máximo locales en gráficas de funciones $f(x)$ de acuerdo al criterio de la primera derivada.

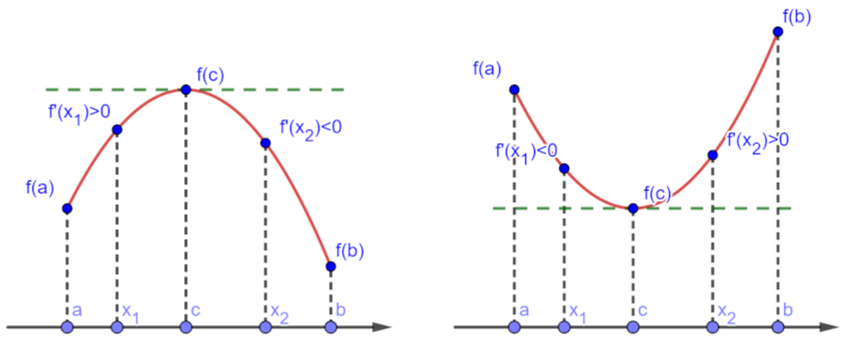


Figura 19: Máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$ de acuerdo al *criterio de la 1a derivada*

Podemos observar en la figura 18 que para ambos casos, $x = c$ es una solución única en $[a, b]$ de la ecuación $f'(x) = 0$

Analizando más a fondo, en el primer caso la función crece en $[a, c]$ y decrece en $[c, b]$, luego en $x = a$ y $x = b$ la función presenta *mínimos relativos* y comparando $f(a)$ con $f(b)$ se determina cuál de los dos es el mínimo absoluto (en caso de que $f(a) = f(b)$), ambos son mínimos *absolutos*.

Del mismo modo, en el segundo caso la función decrece en $[a, c]$ y crece en $[c, b]$, luego en $x = a$ y $x = b$ la función presenta *máximos relativos* y comparando $f(a)$ con $f(b)$ se determina cuál de los dos es el máximo absoluto (en caso de que $f(a) = f(b)$) ambos son máximos *absolutos*.

Observemos que el criterio de la primera derivada no aplica en todos los casos. Consideremos la función $f(x) = x^3$ en $[-1, 1]$. Aunque $f'(x) = 0$ solo ocurre para $x = 0$, como $f'(-1) > 0$ y $f'(1) > 0$, el criterio de la primera derivada no aplica al no cumplir $f'(-1) \cdot f'(1) < 0$. Esto está justificado, pues en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo para $f(x) = x^3$.

6.4. Notación de Leibniz para la derivada

Hasta ahora hemos visto la notación de Lagrange. En el modo clásico una función se representa con símbolos como $f(x)$ o $g(x)$, en cuyo caso se habla de una función de x. También se puede representar como $f(t)$ o $g(t)$, en cuyo caso se habla de una función de t. En los primeros casos, la x representa a la variable independiente y en los segundos, la t representa a la variable independiente. La función misma sería la variable dependiente.

Un modo, tal vez, de hacer esto de manera más propia sería volver a las raíces, donde las funciones se describían como una relación entre dos variables, una de las cuales era la variable dependiente, digamos y, la cual se expresaba en términos de otra que era la independiente, digamos x, a través de una ecuación que las ligaba. El modo explícito tendría una forma como $y = x^2+1$, ó $y = \sqrt{1 - x^2}$, etc. Esto es, $y = f(x)$. Esta es la forma de escribir funciones de Leibniz. La leemos "y es una función de x", algo que posteriormente y hasta nuestros días se suele abreviar con $y = y(x)$.

Existen numerosos ejemplos en física e ingeniería donde se destaca la importancia en la notación, esto debido a que las funciones en estos ámbitos tienen un nombre propio, como también las variables independientes. Veamos de cerca un ejemplo.

Consideremos un muy simple circuito sujeto a la ley de Ohm: Un voltaje variable v alimenta a un resistor de resistencia R (constante), entonces circula una corriente eléctrica de intensidad variable i a través del resistor, dada por la ley de Ohm $v = Ri$, a saber, $i = \frac{v}{R}$ (despejándola). Estamos usando las convenciones en Ingeniería Eléctrica de utilizar letras minúsculas para variables y mayúsculas para constantes. En este caso, el voltaje es función del tiempo $v = v(t)$. Un voltaje alterno típico sería uno senoidal: $v = V_m \sin(2\pi\omega t)$, donde ω es la frecuencia. De cualquier manera produce una intensidad i (de corriente) variable. Pero no necesitamos explícita a la función voltaje, la dejamos en calidad de variable y nos enfocaremos en la potencia eléctrica (energía por unidad de tiempo) w. La figura 19 muestra el esquema eléctrico con el que trabajaremos.

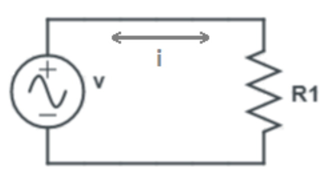


Figura 20: Circuito eléctrico simple

La Ley de Ohm establece que la diferencia de potencial que se aplica entre los extremos de un conductor determinado, es proporcional a la intensidad de la corriente que circula por el conductor. El factor de proporcionalidad entre ambas magnitudes es la resistencia eléctrica: $v = Ri$ ó $i = \frac{v}{R}$

Potencia eléctrica (watts): Es la proporción por unidad de tiempo con la cual la energía eléctrica es transferida en un circuito y puede calcularse como el producto de la diferencia de potencial por la corriente eléctrica $w = vi$

Entonces usando la ley de Ohm, la potencia en función de la corriente:

$$\begin{aligned} w &= vi \\ &= (Ri)i \\ &= Ri^2 \end{aligned}$$

La potencia en función del voltaje:

$$\begin{aligned} w &= vi \\ &= v\left(\frac{v}{R}\right) \\ &= \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

Se observa que la potencia eléctrica se puede escribir en función de la corriente eléctrica $w = Ri^2$ (por tanto $w = w(i)$), o en función del voltaje $w = \frac{v^2}{R}$ (entonces $w = w(v)$) y es necesario ser claro en cuál de las variables se toma como variable independiente.

Cuando utilizamos la notación de Lagrange para denotar una función, digamos $f(x)$ (o bien, $g(t)$), en que hablamos de una función de x (respectivamente, de una función de t), por ejemplo, $f(x) = x^2$ (respectivamente, $g(t) = \sqrt{t}$), la derivada se denota $f'(x)$ (respectivamente, $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$). Vemos que la derivada es también una función de x (respectivamente una función de t), que es referida como la función derivada.

Cuando utilizamos la notación de Leibniz en la que, como vimos, utilizamos variables para referirnos a las funciones, por ejemplo, $y = x^2$ (respectivamente, $y = \sqrt{t}$), todavía podemos denotar a la derivada con la notación de Lagrange, a saber, $y' = 2x$ (respectivamente, $y' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$). Sin embargo, esta notación no es muy propia, pues y' igualmente sirve para denotar a una función de x, a saber, la derivada de una función de x, que a una función de t, a saber, la derivada de una función de t. Para evitar esta ambigüedad, utilizaremos la notación de Leibniz para la derivada, que en este caso queda: $\frac{dy}{dx} = 2x$, léase "derivada de y con respecto a x" (respectivamente $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ que se lee derivada de y con respecto a t). El origen de esta notación es la diferencial de Leibniz. Veamos.

Para el caso de $y = x^2$, la fórmula de Leibniz para la diferencial dy sería $dy = 2x\,dx$, donde dy representaba una "diferencia infinitesimal de y" y su fórmula, la expresa en términos de una "diferencia infinitesimal" de x (o, sea, dx). En un lenguaje más sugestivo, diríamos que dy es el incremento infinitesimal de la función y como consecuencia de un incremento infinitesimal dx en x, lo cual vamos a desarrollar a continuación. Si $y = f(x)$, tomando prestada de momento la notación de Lagrange, dy significa $f(x + dx) - f(x)$, para un incremento dx en la variable independiente x. Para el ejemplo, $dy = (x + dx)^2 - x^2$, lo cual desarrollaremos a continuación, como ya sabemos hacerlo:

$$\begin{aligned} dy &= (x + dx)^2 - x^2 \\ &= \cancel{x^2} + 2xdx + (dx)^2 - \cancel{x^2} \\ &= 2xdx + (dx)^2 \\ &= 2xdx \end{aligned}$$

El último paso se explica por el carácter infinitesimal de dx, esto es, $(dx)^2$ es un infinitesimal de "orden superior" con respecto a dx, luego con respecto a $2xdx$, lo cual permite despreciarlo como sumando cuando se le suma a $2xdx$.

Finalmente, dividiendo entre dx:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

¿Cómo quedan las fórmulas para la derivada de la suma, diferencia, producto, cociente, etcétera? Para empezar si u y v son funciones de x ($u = u(x)$ y $v = v(x)$), podemos hablar de $u + v$, $u - v$, cu, uv, $\frac{u}{v}$, etcétera. Luego las reglas de derivación, derivada de una suma es igual a suma de derivadas, derivada de una diferencia es igual a la diferencia de derivadas, la derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por el segundo factor sumado con el producto del primer factor por la derivada del segundo. En símbolos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u + v) &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \\ \frac{d}{dx}(u - v) &= \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \\ \frac{d}{dx}(uv) &= \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u \end{aligned}$$

Donde, el operador $\frac{d}{dx}$ se lee "derivada con respecto a x". Así que en el primer caso leemos literalmente "derivada de $u + v$ con respecto a x es igual a derivada de u con respecto a x más derivada de v con respecto a x. Es útil comparar estas fórmulas con la correspondiente versión en la notación de Lagrange, convencerse de que son las mismas y ver además que su importancia recae cuando se busca calcular las derivadas. Probablemente donde se hace más claro la ventaja de la notación de Leibniz es en la versatilidad de la fórmula de la regla de la cadena.

Antes de proceder con la importante regla de la cadena, veamos las reglas de derivación para suma, diferencia, producto y cociente, usando también variables para denotar funciones y con la notación de Lagrange para la derivada. Supondremos, por ejemplo, que en la suma

$u+v$ las funciones u y v tienen la misma variable independiente y la misma suposición para la diferencia $u-v$ y el producto $u \cdot v$, aunque la variable independiente para los sumandos de la suma no sea la misma que para minuendo y sustrayendo en la diferencia: por ejemplo, que u y v dependan de x en la suma, pero que en la diferencia $u-v$, u y v dependan de t. Observe que no podríamos sumar u con v si no dependieran de la misma variable independiente y similarmente para u y v en la diferencia, etcétera. Así, puede ocurrir que para $u+v$, tengamos $u = u(x)$ y $v = v(x)$, mientras que para $u-v$, tengamos $u = u(t)$ y $v = v(t)$.

Usando la notación de Lagrange para la derivada y la de Leibniz para denotar funciones, las reglas de derivación para la suma, resta, etcétera, nos quedan: $(u+v)' = u' + v'$; $(u-v)' = u' - v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (!Una formulación de las reglas extraordinariamente breve!) Sin embargo, como hemos estado mencionando, tiene muchos implícitos, el principal es saber que tanto u como v dependen de la misma variable independiente para que sea posible operar con ellas.

Esta compacta notación, sin embargo, tiene el gran inconveniente de que no permite expresar la importante regla de la cadena. Por el contrario, la regla de la cadena funciona muy bien con la notación de Leibniz, como veremos a continuación.

Vamos a traducir la regla de la cadena en la notación de Lagrange: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, donde $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, a la correspondiente versión en la notación de Leibniz. Hagamos $y = (f \circ g)(x)$ $[y = y(x)]$, por lo que $\frac{dy}{dx} = (f \circ g)'(x)$. Sea $u = g(x)$, entonces $\frac{du}{dx} = g'(x)$ y por otra parte, $y = f(g(x)) = f(u)$, por lo que $\frac{dy}{du} = f'(u)$. Sustituyendo en $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, obtenemos $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)$, o sea, finalmente $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, la regla de la cadena en la notación de Leibniz. Conviene leerla: La derivada de la función y con respecto a x (i.e. la derivada de y como función de x), $\frac{dy}{dx}$, es igual al producto de la derivada de y con respecto a u (i.e., la derivada de y como función de u) por la derivada de u con respecto a x: $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Hay que ver como se usa, ilustrando con ejemplos.

Sea $y = (1-x^2)^n$ $[y = y(x)]$, encontrar su derivada, $\frac{dy}{dx}$. Hagamos $u = 1 - x^2$, $[u = u(x)]$; luego $y = u^n$ $[y = y(u)]$. Aplicamos la regla de la cadena $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. La derivada de y con respecto a u, $\frac{du}{dx}$, la calculamos de $y = u^n$: $\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$; y de $u = 1 - x^2$, hallamos $\frac{du}{dx} = -2x$; luego literalmente $\frac{dy}{dx} = (nu^{n-1})(-2x) = -2nxu^{n-1}$. Sustituyendo el valor de u, obtenemos finalmente $\frac{dy}{dx} = -2nx(1-x^2)^{n-1}$.

6.5. Prioridad de operaciones y expresiones algebraicas

En esta lección se hablará de paréntesis y de su ausencia, es decir, de prioridades. Empezamos con un ejemplo que relató François Pluvinage, atribuyéndolo al sabio repertorio de Brousseau. Para ir más allá de la anécdota, la disgresión la intentamos convertir en un guion de clase en varias partes.

6.5.1. Introducción

Sucede que se les pidió a unos chicos de secundaria en Francia calcular $32-2+5$. Ustedes, seguramente, pudieron mentalmente realizar las sencillas operaciones obteniendo [...] De cualquier manera, ocurrió que muchos chicos respondieron 25 ¿Pueden imaginarse como llegaron esos chicos a ese resultado de 25? [...]

Los que pensaron que tales chicos le dieron prioridad a la adición sobre la sustracción, acertaron; ellos seguramente centraron su mirada en el signo "+", viendo algo así: $32 - 2 + 5$. Y después de sumar 2 con 5, realizaron la sustracción $32 - 7$, obteniendo 25 como diferencia. Pero seguramente muchos de ustedes vieron $32 - 2 + 5$, centrando su mirada en el signo "-", o sea, dando prioridad a la operación de sustracción, que al realizarla dejó $30 + 5$ y luego efectuaron la operación de adición obteniendo la suma 35 como resultado.

Si les parece que estamos hablando "raro" o complicado, esta es una oportunidad para recordar que la operación indicada con el signo "+" se llama adición y el resultado de realizar la operación es la suma. Así $2 + 5$ indica la operación de adición, consistente en adicionarle 5 al número 2 ("sumar 2 con 5" suele decirse con mayor frecuencia) y el resultado de la adición siendo la suma, 7 en este caso. Algo que se escribe $2 + 5 = 7$; del lado izquierdo está la operación de adición indicada "2 + 5" y del lado derecho, 7, la suma, el resultado de la operación realizada.

Ahora bien, decir que los chicos que obtuvieron 25 priorizaron la adición (sobre la sustracción), se expresa técnicamente diciendo que leyeron incorrectamente a $32-2+5$ como $32-(2+5)$ en vez de leerlo (correctamente) priorizando la sustracción, a saber, $(32-2)+5$, porque hay que aceptar que se entiende a $32 - 2 + 5$ de una forma o de la otra, dado que las operaciones de adición y sustracción son binarias: sólo podemos sumar o restar dos números a un mismo tiempo.

6.5.2. Prioridad de las operaciones y uso de paréntesis

La convención sobre las prioridades de las operaciones dicta que cuando tenemos tres números ligados por *dos* operaciones binarias con la *misma prioridad*, en el caso del ejemplo, la sustracción y la adición, éstas las efectuamos en el orden en que las leemos de izquierda a derecha, lo cual significa, para $32 - 2 + 5$, agrupar (se dice *asociar*) de dos en dos en la forma $(32-2)+5 = 30+5 = 35$. Y para un segundo ejemplo, $32+5-2$, significa asociar en la forma $(32 + 5) - 2 = 37 - 2 = 35$.

Esta convención de que hay que realizar dos operaciones binarias de la misma prioridad realizándolas de izquierda a derecha, la sigue una calculadora de las llamadas "científicas". Para el segundo ejemplo, $32 + 5 - 2$, observe lo que pone la calculadora cuando recién se escriba "$32 + 5-$" (pone 37 y espera el *sustraendo* que será 5). Si queremos cambiar esta forma, es decir, priorizar la adición, hay que utilizar necesariamente paréntesis, a saber, $32 + (5 - 2)$; esto también simula "entenderlo" una calculadora científica, pues cuando recién escribimos "32 + (5", la calculadora muestra 5 en la pantalla y al agregar "-2", muestra 2 y luego, al cerrar el paréntesis, muestra 3, el resultado de $5 - 2$; finalmente al acabar de teclear "=" da 35.

Dijimos que la adición y la sustracción tienen la misma prioridad ¿Hay operaciones con distinta prioridad que la adición y la sustracción? La respuesta es que sí, de hecho, mayor; tal es el caso de la multiplicación y la división, aunque tienen la misma prioridad comparadas entre sí. De hecho, la operación de *potenciación* (incluida la radicación) tiene la prioridad mayor.

Seguimos restringiéndonos al caso de dos operaciones binarias y tres números. Veamos como se realizan las operaciones en una expresión aritmética que combina la sustracción y la multiplicación, o bien, la adición y la multiplicación. Partimos del supuesto de que la expresión original no tiene paréntesis y del hecho de que la prioridad de la multiplicación es igual a la prioridad de la división y mayores que la de la adición y la sustracción. Consideremos un ejemplo, calcular el valor de la expresión $32 - 2 \times 5$. Como la multiplicación tiene prioridad sobre la sustracción, la multiplicación debe realizarse antes, cuyo resultado se llama *producto*, es decir, hay que determinar el producto antes de realizar la sustracción: $32 - 2 \times 5 = 32 - 10 = 22$. Este es el modo como trabaja una calculadora científica. Similarmente para la adición: $32 + 2 \times 5 = 32 + 10 = 42$. Es como si uno tuviese un paréntesis en la multiplicación: $32 + (2 \times 5) = 32 + 10 = 42$. De hecho, una calculadora científica que reconoce paréntesis hace el mismo cálculo.

Similarmente para la división, por lo que tenemos $32 - 2 \div 5 = 32 - 0.4 = 31.6$, la prioridad es realizar la división, esto es, hallar el *cociente* (el resultado de dividir) antes de restar (o sumar). Y si combinamos la multiplicación con la división, como tienen la misma prioridad se realiza la primera que se encuentre de izquierda a derecha: $32 \div 2 \times 5 = 16 \times 5 = 80$. Finalmente, un ejemplo donde aparece la potenciación que tiene la prioridad mayor: $32 \div 2^2 \times 5 = 32 \div 4 \times 5 = 8 \times 5 = 40$.

Para cambiar la prioridad hay que utilizar paréntesis; por ejemplo, para hacer prioritaria a la sustracción sobre la multiplicación, hay que escribir $(32 - 2) \times 5$ que da $30 \times 5 = 150$, donde, por supuesto, $(32 - 2) \times 5$ modela algo bien distinto de $32 - 2 \times 5$ que da 22.

Bien importante, cuando tengamos más de dos operaciones, leemos la expresión de izquierda a derecha y nos abocamos a las primeras dos operaciones, procediendo con estas dos como hemos visto y el proceso continúa con una operación menos. Veamos ejemplos:

$$32-2+5-2\times5 = 32-2+5-2\times5 = 30+5-2\times5 = 30+5-2\times5 = 35-2\times5 = 35-10 = 25$$

Repasemos lo que hemos aprendido. Tenemos las palabras clave: *adición, sustracción, su-*

ma, diferencia, prioridad de las operaciones, operaciones binarias, uso de paréntesis.

Terminología. Vimos que al realizar la operación de adición el resultado se llama: ________. Y al efectuar la operación de sustracción el resultado se llama ________.

Prioridades. Vimos también que las operaciones de adición y sustracción tienen la misma *prioridad*, la menor. La multiplicación y la división tienen la misma prioridad y es mayor que la de la adición. Finalmente, la prioridad mayor la tiene la potenciación, la cual incluye la radicación.

La Convención. Cuando en una expresión no hay paréntesis explícitos y al menos dos operaciones binarias, la primera que se realiza es la primera que se encuentre leyendo la expresión de izquierda a derecha (como en $29 - 8 + 3$ y en $32 \div 2 \times 5$), *a menos* que la segunda operación tenga prioridad mayor, en cuyo caso debe completarse antes, como en $29 - 8 \div 2 + 3 = 29 - 4 + 3$. Y si quedaren dos o más operaciones pendientes, el esquema se repite.

Paréntesis. Cuando haya paréntesis agrupando a una de dos operaciones en una expresión, digamos $29 - (8 + 3)$ (léase 29 menos *el resultado de sumar 8 con 3*), primero se realiza la operación dentro del paréntesis, seguida de la otra: $29 - (8 + 3) = 29 - 11 = 18$.

Aunque, quizá, el papel más importante del paréntesis es indicar el *resultado* de efectuar todas las operaciones encerradas por él. Esto va a resultar especialmente útil, como veremos, cuando las operaciones son entre símbolos y aparentan estar *indicadas*, pero hay que pensarlas *realizadas*.

Hay, sin embargo, el problema de simplificar una expresión como $a-2+5$. De acuerdo a la convención significa lo mismo que $(a-2)+5$. Se requiere el resultado de la sustracción antes de sumar 5. Pero sin conocer el valor de a, se pide un imposible. Una solución provisional sería hacer ver razonable la equivalencia de $a - 2 + 5$ con $a + 5 - 2$ y que este último que significa $(a + 5) - 2$ es igual a $a + (5 - 2)$. Pero, mejor daremos de una vez una solución definitiva, más general, propia del álgebra. Pero antes, hablaremos de la asociatividad.

6.5.3. La Adición algebraica. Leyes asociativa y conmutativa. Suma algebraica

¿Cómo está eso de las operaciones binarias? Eso de que, por ejemplo, la adición y sustracción son *binarias*, que quiere decir que sólo pueden realizarse, en un mismo tiempo, *entre dos* números. Especialmente, porque todos sabemos que podemos sumar fácilmente tres números. Veamos de cerca como realizamos la adición de tres números. Pensemos en sumar $33 + 29 + 11$ siguiendo el procedimiento algorítmico que todos conocemos, pero haciendo consciente el proceso paso a paso. Escribimos los números en columna y procedemos a sumar primero los dígitos menos significativos (unidades) o sea los dígitos de la columna de la derecha y luego con los dígitos más significativos (decenas). La figura 20, a continuación, ilustra el procedimiento convencional:

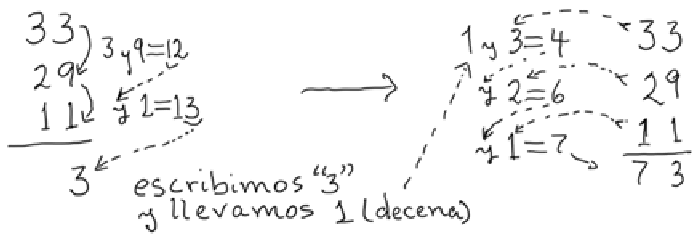


Figura 21: Procedimiento convencional de la suma de 3 números

Empezando con la columna de las unidades, decimos 3 y 9 da 12 y 1 dan 13 (i.e, $3+9 = 12$ y $12 + 1 = 13$, sumando los tres dígitos 3, 9 y 1 en la forma $(3 + 9) + 1 = 12 + 1 = 13$), escribimos "3" debajo de la raya y llevamos 1 (una decena), seguimos arriba con la columna de las decenas, continuamos diciendo 1 (que llevamos) y 3 da 4 y 2 da 6 y 1 dan 7 (i.e., $1 + 3 = 4$, $4 + 2 = 6$ y $6 + 1 = 7$), escribimos 7 en la columna de las decenas debajo de la raya y hemos obtenido 73, esto es, $33 + 29 + 11 = 73$. Hagamos consciente el hecho de que estamos sumando solamente dos números cada vez.

Dando esto por sentado, veamos un procedimiento hecho por un "experto" para la misma tarea, sólo nos detendremos en el cálculo de la suma de los dígitos de la columna de las unidades $(3 + 9 + 1)$. El experto, agrupa mentalmente el 9 y el 1 (que suman 10, pues es muy cómodo sumar 10), así que dice $3 + 10 = 13$ (i.e. $3 + 9 + 1 = 3 + (9 + 1) = 3 + 10$). Se ilustra esta primera parte en la figura 21

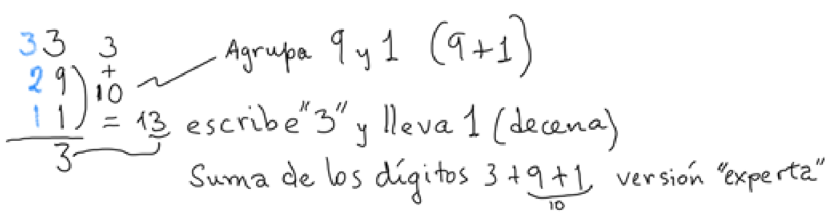


Figura 22: Procedimiento "versión experto" de la suma de 3 números

Siguiendo el algoritmo, la suma de los tres dígitos de las unidades, $3 + 9 + 1$, se realiza $(3 + 9) + 1 = 12 + 1 = 13$, mientras que con el método del "experto" se realiza como $3 + (9 + 1) = 3 + 10 = 13$. Hemos visto que al sumar los tres dígitos, asociando *de dos en dos* (pues la adición es una operación *binaria*) de los dos modos posibles existentes (sin cambiar el orden), llegamos al mismo resultado. Así, $(3 + 9) + 1 = 13$ y también $3 + (9 + 1) = 13$. La igualdad $(3 + 9) + 1 = 3 + (9 + 1)$ es un caso particular de la llamada *propiedad asociativa* de la adición.

En general, para sumar tres números, digamos a, b y c, en ese orden, el hecho de que las dos distintas formas de asociarlos de dos en dos, den el mismo resultado: $(a+b)+c = a+(b+c)$, se conoce como la *propiedad asociativa* de la adición. Nos dice que, aunque la escribimos simplemente $a + b + c$ no tenemos que regirnos por la convención de agrupar de izquierda a derecha: $(a + b) + c$, pues como lo sabe el "experto" (y ahora nosotros) da lo mismo que $a + (b + c)$.

Observe que la operación de sustracción, la cual también es binaria, NO es asociativa. Esto quiere decir que no siempre se cumple que $(a - b) - c$ sea igual a $a - (b - c)$, cualesquiera que sean los números a, b y c. En efecto, aunque se cumple la igualdad para $c = 0$, siendo a y b cualesquiera (¿por qué es esto?), no se cumple cuando $c \neq 0$ (¿por qué?). Sin embargo, para hacer ver que una propiedad no se cumple para cualesquiera terna de números, es suficiente mostrar una terna que no la cumple: $(2-1)-1 = 0$, mientras que $2-(1-1) = 2$. Es suficiente dar la terna 2, 1 y 1, en ese orden. No existe tal cosa como la sustracción de tres números, pues tal connotación sería ambigua. Si podemos hablar, sin embargo, de $a - b - c$, pero significando exactamente $(a - b) - c$, de acuerdo a la convención.

Esto nos ha regresado, de algún modo, al problema original: calcular $32-2+5$. Se hizo ver que las dos formas de agrupar de dos en dos, para realizar las operaciones binarias, a saber, $(32 - 2) + 5$ y $32 - (2 + 5)$ daban distintos resultados, 35 y 25, respectivamente, hecho que ahora, con el lenguaje que hemos aprendido, diríamos que no hay asociatividad. Se hizo ver que $32-2+5$ significaba la primera, a saber $(32-2)+5$, siguiendo la convención de que las dos operaciones se realizan *asociando* de dos en dos de izquierda a derecha, puesto que las dos operaciones tienen la misma prioridad. Aquí no hay problema pues son números pero ¿cómo le hacemos con $a - 2 + 5$, la cual ya se sabe que significa $(a - 2) + 5$ y que no es posible efectuar primero la sustracción?

Se intentará darle significado al problema de calcular expresiones como $32 - 2 + 5$ (incluso podrían ser más generales como $a - 2 + 5$) ubicándolas en un contexto adecuado:

Carlos empezó el juego de canicas con 32 canicas, perdiendo 2 y luego ganando 5. Empezar con 32 y perder 2 en un episodio deja de momento a Carlos con 30 canicas, así cuando gana 5 en un segundo episodio queda finalmente con 35 canicas. El modelo numérico $35 - 2 + 5$ le viene bien y también, la forma como hemos asociado $(32 - 2) + 5 = 30 + 5$. En cambio el modelo $32 - (2 + 5)$ parece absurdo: se restan (se sustraen) las pérdidas, luego pareciera en ese modelo que echamos la ganancia de 5 canicas en el ?saco? de las pérdidas junto con las 2 canicas perdidas.

Podemos ir más lejos explorando con estos significados. Si cambiamos el orden de los episodios, es decir, Carlos inicia con 32 canicas, pero primero gana 5 y en un segundo episodio pierde 2, el sentido común dicta que debe dar el mismo resultado. En efecto, esta segunda versión de la historia la modelamos con $32 + 5 - 2$. Efectivamente, $(32 + 5) - 2$ da $37 - 2 = 35$, sólo que en este caso además tenemos asociatividad pues $32 + (5 - 2) = 32 + 3 = 35$. ¿Por qué resulta tan bueno este modelo?

Probablemente porque se parece más al modelo de la *adición algebraica*. En este modelo lo que se tiene o se gana se representa con un número positivo y lo que se pierde o se adeuda con un número negativo. Se modela como una adición de positivos y negativos (adición algebraica) y su resultado, la *suma algebraica* es el *saldo* (o balance) que de ser positivo representa saldo a favor y en caso negativo saldo deudor. Por ejemplo, para esta última versión (Carlos inicia con 32 canicas, primero gana 5 y en un segundo episodio pierde 2) el modelo sería $32+5+(-2)$. Sabiendo que la adición de un positivo y un negativo (cuando no es cero) se realiza como la sustracción aritmética de la magnitud mayor menos la magnitud menor anteponiéndole el signo dominante, puede comprobarse la asociatividad: $(32+5)+(-2) = 37+(-2) = 37-2 = 35$ (se omitió escribir $+(37-2)$, algo que no se puede omitir cuando el signo dominante es negativo) y por otra parte $32+(5+(-2)) = 32+(5-2) = 32+3 = 35$. Más aún, como la adición es conmutativa vemos que $32+5+(-2) = 32+(-2)+5$, siendo este último el modelo de la primera situación, donde Carlos empezó con 32 canicas, primero perdió 2 y en un segundo evento ganó 5. Para la asociatividad, veamos la parte "difícil": $32+((-2)+5) = 32+(5-2) = 32+3 = 35$; recuerde que domina el signo del de magnitud mayor, en este caso el signo de 5, que es positivo y su magnitud es 5, se le resta la magnitud de (-2) que es 2 y la menor de las magnitudes. En realidad, para realizar la adición algebraica se echa mano de la conmutatividad de la operación para poder realizar por separado la adición de todos los positivos de la adición de todos los negativos. Esta última se realiza sumando sus magnitudes y poniéndole un signo negativo a dicha suma. Esto reduce la suma algebraica de números, a sumar un numero positivo y un negativo. Lo ilustramos con un ejemplo.

Carlos empezó con tan sólo 5 canicas, primero ganó 3, luego perdió 6, en un tercer evento ganó 2 y debieron prestarle algunas pues en un cuarto y último evento perdió 6. ¿Cuál fue su saldo? Modelizamos con la adición algebraica y resolvemos (i.e., hacemos el balance): $5+3+(-6)+2+(-6) = (5+3+2)+(-(6+6)) = 10+(-12) = -(12-10) = -2$. Un saldo deudor de 2 canicas. Esto se ilustra en la tercera columna que le hemos llamado *Haber algebraico*. Las dos primeras columnas, el Debe y el Haber, representan el modelo clásico en contabilidad elemental. Un saldo deudor de 2 canicas significa que Carlos después de regresar todas las que le quedaron al prestador, quedó debiendo 2 (¿por qué?). Imagine varios posibles escenarios. Ilustramos uno de ellos en la figura 22.

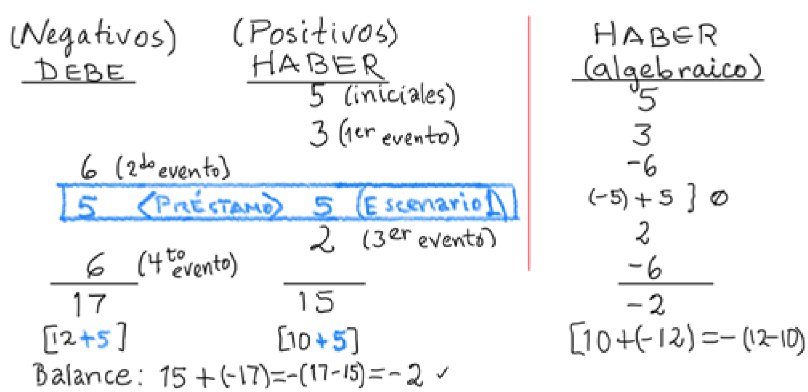


Figura 23: Debe - Haber, ejemplo canicas

La idea será extender (entre otras) las propiedades asociativa y conmutativa generalizadas de la adición algebraica al caso de símbolos. Empecemos retomando el problema de simplificar la expresión $a-2+5 = (a-2)+5$. Primero lo cambiamos a $(a+(-2))+5$, luego aplicamos la ley asociativa para la adición algebraica y luego la conmutatividad de la misma operación, etcétera:

$$a-2+5 = (a-2)+5 = (a+(-2))+5 = a+((-2)+5) = a+(5+(-2)) = a+(5-2) = a+3$$

Además de echar mano de la asociatividad y conmutatividad de la adición algebraica, se utilizaron otras, como la definición de sustracción algebraica en un caso particular. En el caso general: $a-b = a+(-b)$, lo cual leemos *sustraer b equivale a sumar (algebraicamente) el simétrico de b*. El simétrico de b, denotado con $-b$ (¡ojo! no se vaya a pensar que es necesariamente negativo) es también llamado *aditivo inverso de b* por su propiedad característica: $b + (-b) = 0$. Puesto que la operación es conmutativa tenemos que $(-b) + b = 0$, lo cual nos dice que *b es el simétrico de* $-b$; lo cual se escribe $b = -(-b)$.

Otra importante propiedad es $-(a + b) = (-a) + (-b)$, que se lee *el simétrico de la suma es igual a la suma de los simétricos de los sumandos*. Ésta se generaliza a cualquier número de sumandos. La verificamos en este caso sencillo (recuérdese que podemos cambiar el orden y asociar como queramos): $(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$, lo cual comprueba que la suma de simétricos, a saber, $(-a) + (-b)$, la cual se suele escribir como *indicada* pero se piensa *realizada*, es el simétrico de la suma $a + b$, de nuevo escrita como indicada pero pensada como $(a + b)$, donde los paréntesis indican explícitamente la suma. Note que escribimos la propiedad $-(a + b) = (-a) + (-b)$ haciendo explícito del lado izquierdo la suma con el paréntesis, porque no podíamos anteponer el signo "-" de simétrico sin usar el paréntesis (no podíamos haber escrito $-a + b$ que se lee "la suma del simétrico de a con b", que es otra cosa). La expresión del lado derecho $(-a)+(-b)$ no causa problema (¡por supuesto que estamos pensando en la suma!). La propiedad se ilustra en la recta numérica en la figura 23, cuando los reales a y b tienen el mismo signo:

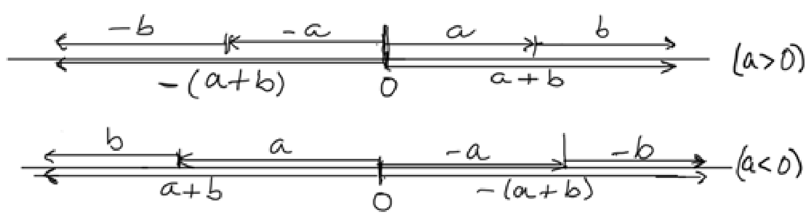


Figura 24: Ilustrando $-(a + b) = (-a) + (-b)$ con $ab > 0$

En ocasiones, puede ser simplemente *conveniente*, pero en otras es *indispensable* usar paréntesis haciendo explícita la referencia al resultado de la operación, como acabamos de ver y que, por su importancia, ejemplificaremos más. Por de pronto, como una aplicación de la definición de sustracción y aprovechando la asociatividad y conmutatividad generalizadas de la adición tenemos: $a + b - c + d = a - c + b + d = a + b + d - c$, que equivale a $a + b + (-c) + d = a + (-c) + b + d = a + b + d + (-c)$. Hay que pensar en una expresión algebraica en general, donde a, b, c, d, son los términos (números, constantes, variables, productos y cocientes) están separados por los signos de adición o sustracción en la que podemos asociar y conmutar como queramos. En tal caso, necesitamos tener claro cuando es indispensable utilizar paréntesis. El error más común se da al sustituir una adición o sustracción que aunque parezca indicada necesitamos considerarla realizada.

Por ejemplo, se pueden cometer errores escribir la diferencia de $f(x+h)-f(x)$, donde la función está dada por $f(x)=x^2+x$.

¿Cuál es la expresión para $f(x+h)$? Respuesta: se consigue sustituyendo simplemente $x+h$ en vez de x en la fórmula x^2+x. ¡Cuidado! No vayamos a escribir x^2+h^2+x+h (¡error!). Mejor respuesta: ¿Cuál es la expresión para $f(x+h)$? Respuesta: se consigue sustituyendo $(x+h)$ en vez de x en la fórmula x^2+x. Nos queda $f(x+h)=(x+h)^2+(x+h)$ (el segundo paréntesis se puede omitir, pero más vale ...)

Finalmente, para expresar $f(x+h)-f(x)$, se sustituye el valor de $f(x+h)$ encontrado antes menos el valor de $f(x)$, a saber, x^2+x ¡Cuidado! Puedes acabar escribiendo $(x+h)^2+(x+h)-x^2+x$ (??).

Mejor: Para expresar $f(x+h)-f(x)$, se sustituye el valor de $f(x+h)$ encontrado antes menos el valor de $f(x)$, a saber, (x^2+x), o sea, $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2+(x+h)-(x^2+x)=(x+h)^2+(x+h)-x^2-x$ (!!), donde hemos hecho uso de la definición de sustracción algebraica de ida y vuelta y el simétrico de una suma: $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2+(x+h)-(x^2+x)=f(x+h)-f(x)=(x+h)^2+(x+h)+[-(x^2+x)]=f(x+h)-f(x)=(x+h)^2+(x+h)+[(-x^2)+(-x)]=f(x+h)-f(x)=(x+h)^2+(x+h)-x^2-x$.

6.6. Tests y Cuestionarios

6.6.1. Tests 01 Prerrequisitos del Método

Pre Test 01

Nombre: ____

Edad: __________ Carrera: ____________________ Fecha: ____________________

I. Relación de orden en términos de signos

Responde marcando la respuesta correcta:

1. Como $2 < 3$ entonces $2 - 3$ es:
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

2. Puesto que $7 - 3$ es *positivo* resulta que:
   ☐ $7 < 3$
   ☐ $7 > 3$

3. Si $a > b$, entonces $a - b$ es:
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

4. Puesto que $a - b$ es *negativo*, entonces:
   ☐ $a < b$
   ☐ $a > b$

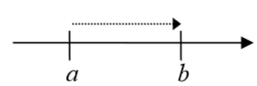
5. Si $x < 0$, entonces x^2 es:
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

II. Incrementos algebraicos

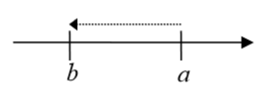
1. ¿Cuánto hay que incrementar a 4.5 para que nos de 6?
   $4.5 + (\qquad) = 6$

2. ¿Cuánto hay que incrementar a a para que nos de b?
   $a + (\qquad) = b$

3. Si $a < b$, el incremento que se debe agregar a a para obtener b es:
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

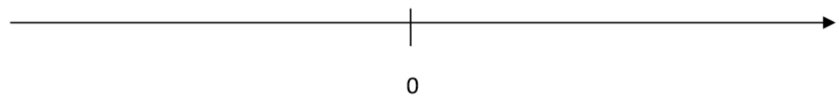


4. Si $a > b$, el incremento que se debe agregar a a para obtener b es:
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

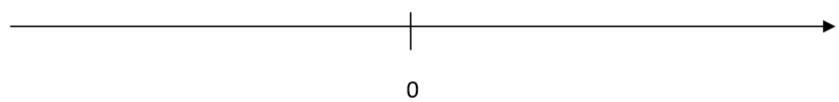


III. Simétrico de un número

1. Sea x un número *positivo*, es decir $x > 0$. Ubica los números $x, |x|, -x$ en el eje Real.

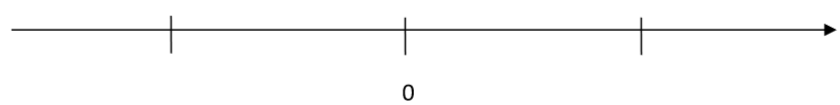


2. Sea x un número *negativo*, es decir $x < 0$. Ubica los números $x, |x|, -x$ en el eje Real.



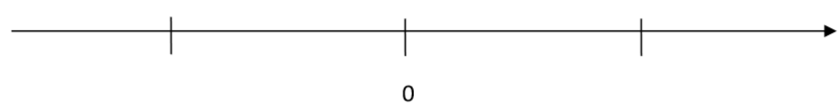
IV. Cantidades Relativas

1. Sea h un número entre 0 y 1. Ubica los números $h, \sqrt{h}, h^2, h^3$ en el eje Real. Editando en Word la figura puedes cambiar la posición del origen y la escala si lo consideras pertinente.



2. Sea h un número mayor que 1. Ubica los números $h, \sqrt{h}, h^2$ en el eje Real. Editando en Word la figura puedes elegir la escala si lo consideras pertinente.

3. Sea h un número entre -1 y 0. Ubica los números $h, h^2, h^3, |h|, |h|^2, |h|^3$ en el eje Real. Editando en Word la figura puedes elegir la escala si lo consideras pertinente.



4. Bosqueja a mano en el plano cartesiano, la función $f(x) = x^2$ $(y = x^2)$. En un plano cartesiano distinto bosqueja la función $g(x) = x^3$ $(y = x^3)$. Puede ser en hojas aparte.

Post Test 01

Nombre: ____

Edad: ____________ Carrera: _______________________ Fecha: ______________________

I. Relación de orden en términos de signos

Responde marcando la respuesta correcta:

1. Como $\pi > 2$ entonces $\pi - 2$ es:
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

2. Puesto que $2.5 - 4$ es *negativo* resulta que:
   ☐ $2.5 < 4$
   ☐ $2.5 > 4$

3. Si $a < b$, entonces $a - b$ es:
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

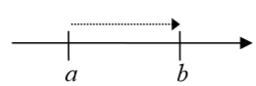
4. Puesto que $a - b$ es *positivo*, entonces:
   ☐ $a < b$
   ☐ $a > b$

5. Si $x < 0$, entonces x^3 es:
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

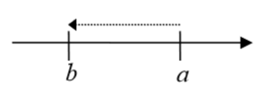
II. Incrementos algebraicos

1. ¿Cuánto hay que incrementar a 9 para que nos de 7?
   $9 + (\qquad) = 7$

2. ¿Cuánto hay que incrementar a a para que nos de b?
   $a + (\qquad) = b$

3. Si $a < b$, el incremento que se debe agregar a a para obtener b es:
   

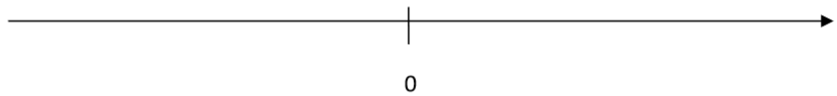
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

4. Si $a > b$, el incremento que se debe agregar a a para obtener b es:
   

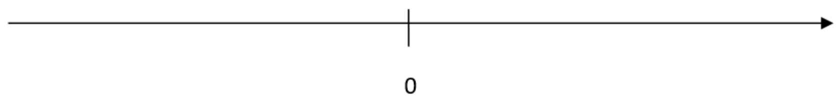
   ☐ Positivo
   ☐ Negativo

III. Simétrico de un número

1. Sea x un número *positivo*, es decir $x > 0$. Ubica los números $x, |x|, -x$ en el eje Real.

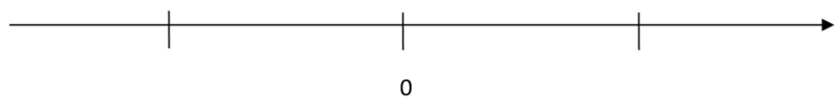


2. Sea x un número *negativo*, es decir $x < 0$. Ubica los números $x, |x|, -x$ en el eje Real.



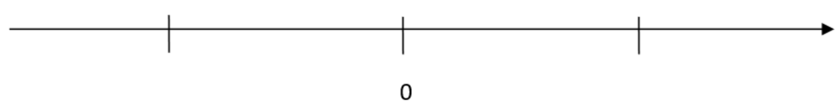
IV. Cantidades Relativas

1. Sea h un número entre 0 y 1. Ubica los números $h, \sqrt{h}, h^2, h^3$ en el eje Real. Editando en Word la figura puedes cambiar la posición del origen y la escala si lo consideras pertinente.



2. Sea h un número mayor que 1. Ubica los números $h, \sqrt{h}, h^2$ en el eje Real. Editando en Word la figura puedes elegir la escala si lo consideras pertinente.

3. Sea h un número entre -1 y 0. Ubica los números $h, h^2, h^3, |h|, |h|^2, |h|^3$ en el eje Real. Editando en Word la figura puedes elegir la escala si lo consideras pertinente.



4. Bosqueja a mano, en el mismo plano cartesiano, las funciones $f(x) = x^2$ ($y = x^2$) y $g(x) = x^3$ ($y = x^3$). Puede ser en una hoja aparte.

6.6.2. Tests 02 Prioridades de las operaciones y expresiones algebraicas

Pre Test 02

Nombre: ____

Edad: ____________ Carrera: ______________________ Fecha: ______________________

Responde las siguientes preguntas:

1. En uso correcto del lenguaje matemático, ¿cuál es la diferencia entre suma y adición?
   R.

2. Elige cuáles son los paréntesis implícitos en la expresión $29 - 5 + 7$ y su desarrollo:
   ☐ Asociando operaciones según: $29 - (5 + 7) = 29 - 12 = 17$
   ☐ Asociando operaciones según: $(29 - 5) + 7 = 24 + 7 = 31$

3. Elige cuáles son los paréntesis implícitos en la expresión $22 + 4 \div 2$ y su desarrollo:
   ☐ Asociando operaciones según: $(22 + 4) \div 2 = 26 \div 2 = 13$
   ☐ Asociando operaciones según: $22 + (4 \div 2) = 22 + 2 = 24$

4. Elige cuáles son los paréntesis implícitos en la expresión $32 \div 2 \times 5$ y su desarrollo:
   ☐ Asociando operaciones según: $32 \div (2 \times 5) = 32 \div 10 = 3.2$
   ☐ Asociando operaciones según: $(32 \div 2) \times 5 = 16 \times 5 = 80$

5. ¿Cuál es el resultado de la operación $10 - 3 + 5 \times 2$? Escribe el desarrollo incluyendo los paréntesis implícitos en la expresión.
   R.

6. Sea $f(x) = x^2 - 2x$, ¿Cuál es el desarrollo de la diferencia $f(x + h) - f(x)$?
   R.

Post Test 02

Nombre: ____

Edad: __________ Carrera: ____________________ Fecha: ____________________

Responde las siguientes preguntas:

1. En uso correcto del lenguaje matemático, ¿cuál es la diferencia entre suma y adición?
   R.

2. Muestra los paréntesis implícitos y desarrolla la expresión $12 - 7 - 3$
   R.

3. Muestra los paréntesis implícitos y desarrolla la expresión $10 + 4 \times 3$
   R.

4. Muestra los paréntesis implícitos y desarrolla la expresión $36 \div 4 \times 2$
   R.

5. Muestra los paréntesis implícitos y desarrolla la expresión $12 - 4 + 2 \times 3$
   R.

6. Sea $f(x) = x^2 - 2x$, ¿Cuál es el desarrollo de la diferencia $f(x + h) - f(x)$?
   R.

6.6.3. Cuestionario de Cálculo

Cuestionario Cálculo

Nombre: ____

Edad: ____________ Carrera: ______________________ Fecha: _____________________

Responde marcando la respuesta correcta:

1. Consideremos la gráfica de la función $y = f(x)$, dada por $f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$, nota que $f(0) = 0$. Al considerar valores de x cada vez más cercanos a cero, la gráfica de $y = f(x)$ se va pareciendo cada vez más a:
   ☐ $y = x$
   ☐ $y = x^2$
   ☐ $y = x^3$
   ☐ $y = x^4$
   ☐ Ninguna de las anteriores

2. Consideremos la gráfica de la función $y = f(x)$, dada por $f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$. Al considerar valores de x cada vez más grandes en magnitud (más alejados del cero), la gráfica de $y = f(x)$ se va pareciendo cada vez más a:
   ☐ $y = x$
   ☐ $y = x^2$
   ☐ $y = x^3$
   ☐ $y = x^4$
   ☐ Ninguna de las anteriores

3. Si una función f satisface $f'(x) > 0$ en un intervalo, entonces en dicho intervalo la función f:
   ☐ Es decreciente
   ☐ Es constante
   ☐ Es creciente
   ☐ Puede crecer y decrecer

4. Si una función f satisface $f'(x) < 0$ en un intervalo, entonces en dicho intervalo la función f:
   ☐ Es decreciente
   ☐ Es constante
   ☐ Es creciente
   ☐ Puede crecer y decrecer

5. Si una función f satisface $f'(x) > 0$ para $x < c$ y $f'(x) < 0$ para $x > c$ entonces la función f tiene en $x = c$ (elige la mejor opción):
   ☐ Un mínimo
   ☐ Un máximo
   ☐ Un punto de inflexión

☐ Un punto crítico

6. Si una función f satisface $f'(x) < 0$ para $x < c$ y $f'(x) > 0$ para $x > c$ entonces la función f tiene en $x = c$ (elige la mejor opción):
   ☐ Un mínimo
   ☐ Un máximo
   ☐ Un punto de inflexión
   ☐ Un punto crítico

7. Si una función f satisface $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$ entonces la función f tiene en $x = c$ (elige la mejor opción):
   ☐ Un mínimo
   ☐ Un máximo
   ☐ Un punto de inflexión
   ☐ Un punto crítico

8. Si una función f satisface $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$ entonces la función f tiene en $x = c$ (elige la mejor opción):
   ☐ Un mínimo
   ☐ Un máximo
   ☐ Un punto de inflexión
   ☐ Un punto crítico

6.6.4. Problemas de Máximos y Mínimos

Problemas de Máximos y Mínimos

Instrucciones

Resuelve los siguientes ejercicios desarrollando cada uno de los incisos. Convierte tus hojas de respuesta en un archivo pdf y envíalo por correo electrónico.

I. Problema 1. Terreno cercado, con reja.

Se va a cercar un terreno en forma rectangular aprovechando una reja con sus postes que mide 6 m y disponiendo de 74m de tela de malla y 3 postes más. La reja quedará en una esquina del cercado como se muestra en la figura. Hay que determinar las dimensiones del cercado que encierre la mayor área posible. Se sugiere usar la longitud del lado opuesto al de la reja como la variable independiente (x en la figura).

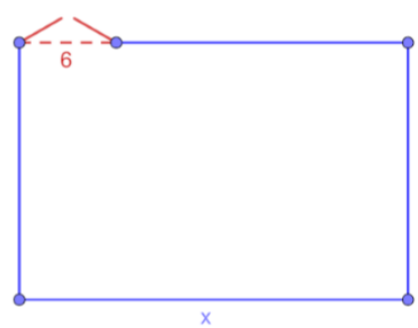


Figura 1. Terreno cercado con malla y reja

a. Encuentra $A(x)$, el área encerrada en función de x.
b. Determina el intervalo dominio de la función.
c. Desarrolla la diferencia $A(x+h) - A(x)$ en potencias de h, calculando las derivadas de $A(x)$ y utilizando el teorema de Taylor.
d. Realiza el análisis de los signos de la diferencia en los puntos importantes del intervalo, determinando los máximos y mínimos de la función área.
e. Responde la pregunta sobre las dimensiones del rectángulo de mayor área e interpreta el resultado obtenido.

I. Problema 2. Prisma recto de base cuadrada.

De todos los prismas rectos de base cuadrada (o paralelepípedos rectángulos) que tienen un volumen V_0 igual a $1000\ cm^3$ ($1\ lt$), encuentra las dimensiones del que su superficie posea la menor área posible. Observa que como el volumen está en cm^3 (centímetros cúbicos), las dimensiones lineales estarán en centímetros. Se recomienda utilizar x como variable independiente.

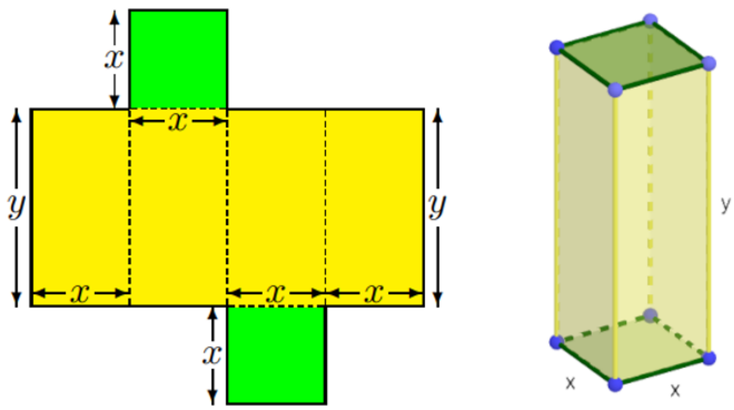


Figura 2. Prisma recto de base cuadrada

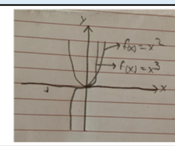
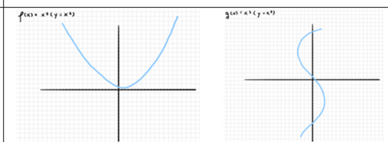
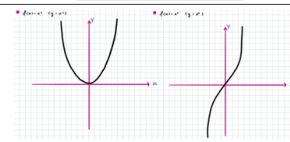
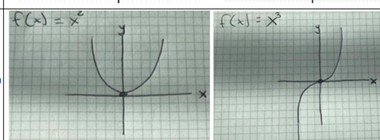
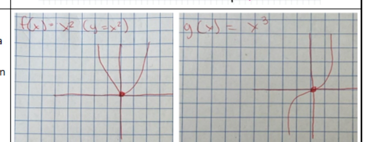
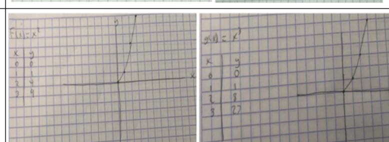
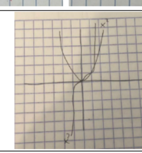
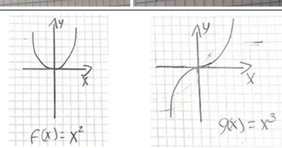
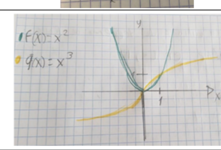
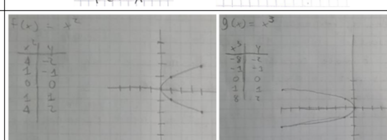
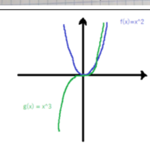
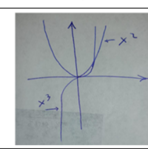
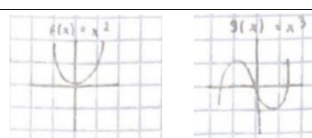
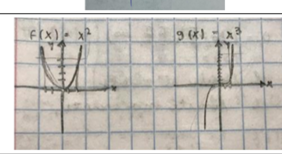
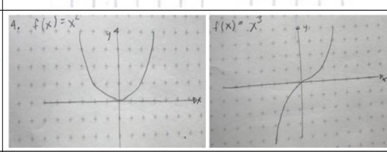
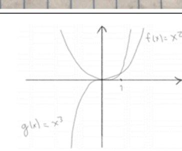
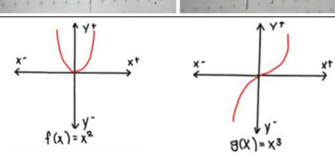
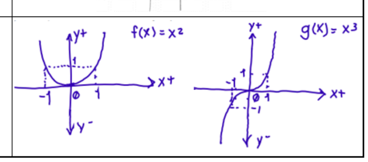
a. Encuentra $A(x)$, el área del prisma en función de la variable independiente.
b. Determina el intervalo dominio de la función.
c. Define los intervalos de monotonía de la función $A(x)$.
d. De acuerdo con el criterio de la primera derivada, define la naturaleza de los posibles puntos críticos.
e. Responde la pregunta sobre las dimensiones del prisma de menor área e interpreta el resultado obtenido.

6.7. Resultados de los Tests y Cuestionarios

6.7.1. Resultados de los Tests 01. Prerrequisitos del Método

Comparativo Test 1 Reactivo	PreTest 1 aciertos | %	PostTest 1 aciertos | %	Progreso (inc. Rel.)
1.1 Como 2 < 3 [pi >2] entonces 2 - 3 [pi - 2] es: Negativo [Positivo]	8 | 80%	10 | 100%	25%
1.2 Puesto que 7 - 3 [2.5 - 4] es positivo [negativo] resulta que: 7 > 3 [2.5 < 4]	9 | 90%	9 | 90%	0%
1.3 Si a > b [a < b], entonces a - b es: Positivo [Negativo]	9 | 90%	10 | 100%	11%
1.4 Puesto que a - b es negativo [positivo], entonces: a < b [a > b]	9 | 90%	10 | 100%	11%
1.5 Si x < 0, entonces x^2 [x^3] es: Positivo [Negativo]	9 | 90%	10 | 100%	11%
2.1 ¿Cuánto hay que incrementar a 4.5 [9] para que nos de 6 [7]? 4.5 + (1.5) = 6 [9 + (-2) = 7]	10 | 100%	10 | 100%	0%
2.2 ¿Cuánto hay que incrementar a a para que nos de b? a + (b - a) = b	7 | 70%	8 | 80%	14%
2.3 Si a < b, el incremento que se debe agregar a a para obtener b es: Positivo	9 | 90%	10 | 100%	11%
2.4 Si a > b, el incremento que se debe agregar a a para obtener b es: Negativo	9 | 90%	10 | 100%	11%
3.1 Sea x un número positivo, es decir x > 0. Ubica los números x, |x|, -x en el eje Real.	*7 | 70%*	*10 | 100%*	*43%*
3.2 Sea x un número negativo, es decir x < 0. Ubica los números x, |x|, -x en el eje Real.	*6 | 60%*	*10 | 100%*	*67%*
4.1 Sea h un número entre 0 y 1. Ubica los números h, sqrt(h), h^2, h^3 en el eje Real.	**4 | 40%**	**9 | 90%**	**125%**
4.2 Sea h un número mayor que 1. Ubica los números h, sqrt(h), h^2 en el eje Real.	8 | 80%	10 | 100%	25%
4.3 Sea h un número entre -1 y 0. Ubica los números h, h^2, h^3, |h|, |h|^2, |h|^3 en el eje Real.	**2 | 20%**	**9 | 90%**	**350%**
4.4 Bosqueja a mano en un plano cartesiano, la función f(x) = x^2.	*6 | 60%*	*9 | 90%*	*50%*
4.4 Bosqueja a mano en un plano cartesiano, la función g(x) = x^3.	*4 | 40%*	*6 | 60%*	*50%*

6.7.2. Comparación de Gráficas. Test 01. Prerrequisitos del Método

Observaciones sobre el trazo de las gráficas				
Alumno	PreTest1		PostTest1	
	Comentarios	Gráfica	Comentarios	Gráfica
Atilano Demian	Sin respuesta. Calificación x^2 = sin respuesta Calificación x^3 = sin respuesta		Buena aproximación en ambas gráficas, considera la intersección, tangencia y posición entre ambas. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto	
Cruz Fernanda	En x^2, buena aproximación a la gráfica. En x^3, la gráfica no corresponde a una función. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = error		Hace las gráficas en planos cartesianos distintos. Mejor aproximación que en el pretest para x^3 pero cruza el origen con una pendiente muy grande. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = error	
Gutiérrez Daniel	En x^2, la gráfica se dibuja separada del eje x, se hace un punto grueso en el origen para marcar el contacto. En x^3, la gráfica cruza el origen con una pendiente distinta de cero. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto		Hace las gráficas en planos cartesianos distintos, vuelve a marcar el contacto para x=0. No es una buena aproximación considerando todo lo que se vió en el curso. Calificación x^2 = error Calificación x^3 = error	
Jiménez Bryant	En ambas gráficas intenta tabular, lo hace sólo del lado positivo. Calificación x^2 = error Calificación x^3 = error		La gráfica de x^3 intersecta mal a la gráfica de x^2, puede tratarse de un error al intentar forzar la posición de una función sobre otra y no una falta de conocimiento sobre las representaciones gráficas. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = error	
Meneses David	Ambas gráficas trazadas correctamente. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto		La gráfica de x^2 es correcta. Error en el trazado de la gráfica de x^3, parece que comete el error que corrigió en el bosquejo del pretest. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = error	
Mora Adolfo	En ambas gráficas intenta tabular pero no lo hace correctamente. Calificación x^2 = error Calificación x^3 = error		Gráficas dibujadas correctamente. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto	
Pérez Ríos Edgardo	Sin respuesta. Calificación x^2 = sin respuesta Calificación x^3 = sin respuesta		Gráficas dibujadas correctamente. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto	
Rodríguez Alicia	En x^2, buena aproximación a la gráfica. En x^3, la gráfica no corresponde a la función. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = error		Buena aproximación a las gráficas aunque las dibuja en planos cartesianos distintos. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto	
Terrazas Paulina	En x^2, buena aproximación a la gráfica. En x^3, aceptable aproximación a la gráfica pero cruza el origen con una pendiente distinta de cero. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto		Gráficas dibujadas correctamente. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto	
Zaldivar Carmen	En x^2, buena aproximación a la gráfica. En x^3, aceptable aproximación a la gráfica pero cruza el origen con una pendiente distinta de cero. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto		Buena aproximación a las gráficas aunque las dibuja en planos cartesianos distintos. Calificación x^2 = acierto Calificación x^3 = acierto	

6.7.3. Resultados de los Tests 02. Prioridades de las operaciones y expresiones

Comparativo Test 2 Reactivo	PreTest 2 aciertos | %	PostTest 2 aciertos | %	Progreso (Inc. Rel.)
1. En uso correcto del lenguaje matemático, ¿cuál es la diferencia entre suma y adición?	**1 | 10%**	**8 | 80%**	**700%**
2. (PreTest) Elige cuáles son los paréntesis implícitos en la expresión 29 - 5 + 7 y su desarrollo: ☐ Asociando operaciones según: 29 - (5 + 7) = 29 - 12 = 17 ☒ Asociando operaciones según: (29 - 5) + 7 = 24 + 7 = 31 (PostTest) Muestra los paréntesis implícitos y desarrolla la expresión 12 - 7 - 3: (12 - 7) - 3 = 5 - 3 = 2	8 | 80%	10 | 100%	25%
3. (PreTest) Elige cuáles son los paréntesis implícitos en la expresión 22 + 4 ÷ 2 y su desarrollo: ☐ Asociando operaciones según: (22 + 4) ÷ 2 = 26 ÷ 2 = 13 ☒ Asociando operaciones según: 22 + (4 ÷ 2) = 22 + 2 = 24 (PostTest) Muestra los paréntesis implícitos y desarrolla la expresión 10 + 4 × 3: 10 + (4 × 3) = 10 + 12 = 22	10 | 100%	10 | 100%	0%
4. (PreTest) Elige cuáles son los paréntesis implícitos en la expresión 32 ÷ 2 × 5 y su desarrollo: ☐ Asociando operaciones según: 32 ÷ (2 × 5) = 32 ÷ 10 = 3.2 ☒ Asociando operaciones según: (32 ÷ 2) × 5 = 16 × 5 = 80 (PostTest) Muestra los paréntesis implícitos y desarrolla la expresión 36 ÷ 4 × 2: (36 ÷ 4) × 2 = 9 × 2 = 18	10 | 100%	10 | 100%	0%
5. (PreTest) ¿Cuál es el resultado de la operación 10 - 3 + 5 × 2? Escribe el desarrollo incluyendo los paréntesis implícitos en la expresión. (10 - 3) + (5 × 2) = 7 + 10 = 17 (PostTest) Muestra los paréntesis implícitos y desarrolla la expresión 12 - 4 + 2 × 3 (12 - 4) + (2 × 3) = 8 + 6 = 14	*6 | 60%*	*9 | 90%*	*50%*
6. Sea f(x)=x^2 - 2x, ¿Cuál es el desarrollo de la diferencia f(x+h) - f(x)?	**3 | 30%**	**8 | 80%**	**167%**

6.7.4. Resultados del Cuestionario de Cálculo

Cuestionario Cálculo (opción múltiple)				
Reactivo	a | %	e | %	s/r | %	Total
1. [...] f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 [...] Al considerar valores de x cada vez más cercanos a cero, [...] y = f(x) se va pareciendo cada vez más a: ☒ y = x ☐ y = x^2 ☐ y = x^3 ☐ y = x^4 ☐ Ninguna de las anteriores	8 | 80%	2 | 20%	0 | 0%	10
2. [...] f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 [...] Al considerar valores de x cada vez más grandes en magnitud [...] y = f(x) se va pareciendo cada vez más a: ☐ y = x ☐ y = x^2 ☐ y = x^3 ☒ y = x^4 ☐ Ninguna de las anteriores	9 | 90%	1 | 10%	0 | 0%	10
3. Si una función f satisface f'(x) > 0 en un intervalo, entonces en dicho intervalo la función f: ☐ Es decreciente ☐ Es constante ☒ Es creciente ☐ Puede crecer y	10 | 100%	0 | 0%	0 | 0%	10
4. Si una función f satisface f'(x) < 0 en un intervalo, entonces en dicho intervalo la función f: ☒ Es decreciente ☐ Es constante ☐ Es creciente ☐ Puede crecer y	10 | 100%	0 | 0%	0 | 0%	10
5. Si una función f satisface f'(x) > 0 para x < c y f'(x) < 0 para x > c entonces la función f tiene en x = c (elige la mejor opción): ☐ Un mínimo ☒ Un máximo ☐ Un punto de inflexión ☐ Un punto crítico	9 | 90%	1 | 10%	0 | 0%	10
6. Si una función f satisface f'(x) < 0 para x < c y f' (x) > 0 para x > c entonces la función f tiene en x = c (elige la mejor opción): ☒ Un mínimo ☐ Un máximo ☐ Un punto de inflexión ☐ Un punto crítico	9 | 90%	1 | 10%	0 | 0%	10
7. Si una función f satisface f'(x) = 0 y f''(x) < 0 entonces la función f tiene en x = c (elige la mejor opción): ☐ Un mínimo ☒ Un máximo ☐ Un punto de inflexión ☐ Un punto crítico	7 | 70%	3 | 30%	0 | 0%	10
8. Si una función f satisface f'(x) = 0 y f''(x) > 0 entonces la función f tiene en x = c (elige la mejor opción): ☒ Un mínimo ☐ Un máximo ☐ Un punto de inflexión ☐ Un punto crítico	7 | 70%	3 | 30%	0 | 0%	10

a	acierto
e	error
s/r	sin resp.

6.7.5. Resultados del Primer Problema de Máximos y Mínimos

Primer problema de optimización: Determinar las dimensiones de un cercado rectangular que encierre la mayor área posible, aprovechando una reja de 6 m y disponiendo de 74 m de malla.								
Observaciones Generales: - Al ser un nuevo procedimiento, a los chicos les cuesta un poco más de trabajo - Los alumnos obtienen la ecuación a optimizar a partir del perímetro - Para hacer explicitos los valores permisibles de h, los alumnos usan la figura mostrada en la clase - En general los alumnos no responden de manera explícita a la pregunta del problema - Los alumnos no interpretan el resultado: El área máxima es la de un cuadrado								
	Plantea y justifica la ecuación	Especifica / Argumenta el dominio	Explicita los valores permisibles de h	Justifica el signo de la diferencia en los extremos	Argumenta por qué domina el término en h en la diferencia	Argumenta por qué el término en h debe ser cero para hallar un extremo	Explícita las dimensiones buscadas	Observaciones particulares
Atilano Demian	Sí	Sí / Sí	No	No	No	No	No	Error en su desarrollo: El resultado para el área máxima la calcula en un mínimo local No hace un análisis de puntos internos Al parecer se queda con parte del método pero no llega a comprenderlo del todo
Cruz Fernanda	Sí	Sí / Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	El método es correcto, sólo tiene una distracción en el planteamiento de la ecuación (que corrige en el desarrollo del problema)
Gutiérrez Daniel	Sí	Sí / No	Sí	No	No	Sí	No	El método es correcto aunque da pocos argumentos en su desarrollo Calcula el área máxima
Jiménez Bryant	Sí	Sí / No	No	Sí	Sí	Sí	No	El método es correcto aunque da pocos argumentos en su desarrollo
Meneses David	Sí	Sí / Sí	No	No	Sí	No	No	Concluye muy rápido y utiliza resultados sin justificación o con argumentos confusos Al parecer el método no queda del todo claro

Primer problema de optimización: Determinar las dimensiones de un cercado rectangular que encierre la mayor área posible, aprovechando una reja de 6 m y disponiendo de 74 m de malla.								
Observaciones Generales: - Al ser un nuevo procedimiento, a los chicos les cuesta un poco más de trabajo - Los alumnos obtienen la ecuación a optimizar a partir del perímetro - Para hacer explicitos los valores permisibles de h, los alumnos usan la figura mostrada en la clase - En general los alumnos no responden de manera explícita a la pregunta del problema - Los alumnos no interpretan el resultado: El área máxima es la de un cuadrado								
	Plantea y justifica la ecuación	Especifica / Argumenta el dominio	Explicita los valores permisibles de h	Justifica el signo de la diferencia en los extremos	Argumenta por qué domina el término en h en la diferencia	Argumenta por qué el término en h debe ser cero para hallar un extremo	Explícita las dimensione s buscadas	Observaciones particulares
Mora Adolfo	Sí	Sí / No	No	Sí	Sí	No	No	El desarrollo del método es correcto Calcula el área máxima
Pérez Ríos Edgardo	Sí	Sí / No	No	Sí	Sí	Sí	No	Tiene un error de signo que le da un resultado equivocado en el extremo derecho del intervalo Parece tener conocimiento del método pero no está del todo claro
Rodríguez Alicia	Sí	Sí / No	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Parece tener claro el método Los argumentos y resultado son correctos Calcula el área máxima
Terrazas Paulina	Sí	Sí / Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Hace explícitos los datos del problema Buen trabajo con el método Calcula el área máxima
Zaldivar Carmen	Sí	Sí / Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Hace explícitos los datos del problema Buen trabajo con el método Calcula el área máxima Da una conclusión personal sobre los distintos métodos

6.7.6. Resultados del Segundo Problema de Máximos y Mínimos

Segundo problema de optimización: De todos los prismas rectos de base cuadrada que tienen un volumen Vo igual a 1000 cm^3, encuentra las dimensiones del que su superficie posea la menor área posible

Observaciones Generales:
- El procedimiento en general es correcto
- Los alumnos obtienen la ecuación a optimizar a partir del volumen
- Al parecer, los alumnos se sienten más cómodos con este método
- Se utiliza un registro tabular practicado en clase para presentar los intervalos de monotonía
- Los alumnos no interpretan el resultado: El área mínima es la de un cubo

	Plantea y justifica la ecuación	Especifica / Argumenta el dominio	Da los intervalos de monotonía	Comprueba el signo de la derivada en cada intervalo	Caracteriza al extremo con el criterio de la 1a	Explícita las dimensiones buscadas	Observaciones particulares
Atilano Demian	Sí	Sí / No	Sí	No	Sí	Sí	Encuentra el valor del área mínima
Cruz Fernanda	Sí	Sí / No	Sí	No	Sí	Sí	Encuentra el valor del área mínima
Gutiérrez Daniel	Sí	Sí / No	Sí	No	Sí	No	Encuentra el valor del área mínima
Jiménez Bryant	Sí	Sí / No	Sí	Sí	Sí	No	Sólo da la dimensión de la variable independiente
Meneses David	No	No / No	Sí	No	Sí	Sí	No entrega la primera parte del problema Hace falta argumentación en los resultados Necesita más orden y limpieza
Mora Adolfo	Sí	Sí / No	Sí	No	Sí	No	Encuentra el valor del área mínima
Pérez Ríos Edgardo	Sí	Sí / No	Sí	No	Sí	Sí	Poca argumentación en cada paso pero correcto
Rodríguez Alicia	Sí	Sí / Sí	Sí	No	Sí	No	Trabajo ordenado y limpio
Terrazas Paulina	Sí	Sí / Sí	Sí	No	Sí	No	Trabajo ordenado y limpio
Zaldivar Carmen	Sí	Sí / Sí	Sí	No	Sí	Sí	Busca argumentar sus resultados Buen trabajo y muy organizado

6.8. Zoom Dinámico

El objetivo de esta sección es describir el archivo zoom_dinamico.ggb en el que se ha desarrollado un zoom independiente en cada eje para las lecciones de gráficas de funciones en GeoGebra.

GeoGebra cuenta con una funcionalidad de zoom en la Vista Gráfica que permite hacer acercamientos (*zoom in*) y alejamientos (*zoom out*) alrededor del centro de la pantalla. La vista gráfica puede desplazarse para realizar el zoom en un punto distinto del centro.

Otros dos botones con los que cuenta la vista gráfica por defecto son el de *home* para volver a la vista original eliminando cualquier zoom que se haya realizado, y *full screen* que permite ver la vista gráfica en pantalla completa.

La figura 24 muestra los controles por defecto que provee GeoGebra.

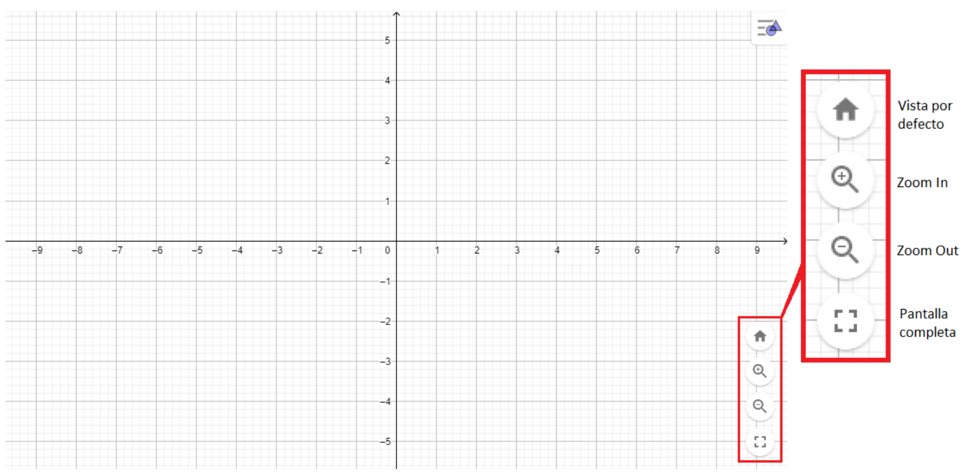


Figura 25: Zoom por defecto en la vista gráfica de GeoGebra

Por la experiencia de uso del programa *Derive*, que permite hacer zoom de manera independiente en cada uno de los ejes coordenados, se buscó programar en GeoGebra botones específicos que permitieran esta funcionalidad.

Los comandos específicos utilizados en cada botón son:

CopiaObjetoLibre[Objeto]. Hace una copia del objeto especificado en el argumento, en el caso de un punto copia sus coordenadas en la vista gráfica.

Esquina[n]. Crea un punto en la esquina 1, 2, 3 ó 4 de la vista gráfica. La numeración de las esquinas es contra reloj comenzando en la inferior izquierda.

ZoomAcerca[Mín x, Mín y, Máx x, Máx y]. Acerca la Vista Gráfica al rectángulo construido a partir de los vértices (Mín x, Mín y) y (Máx x, Máx y). Al utilizar este comando se "bloquea" la vista gráfica, desactivando todo botón de zoom. Con el comando **ZoomAcerca(0,0,0,0)** se recuperan las funcionalidades de defecto.

La figura 25 muestra los botones programados para la función extendida de zoom en GeoGebra.

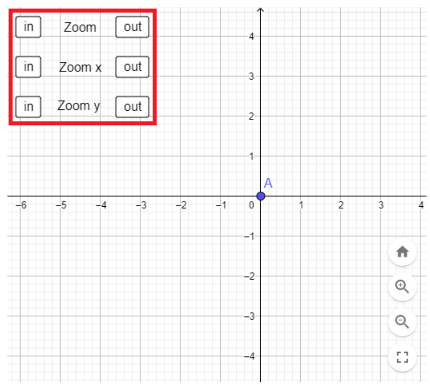


Figura 26: Botones de zoom programados en GeoGebra

Dos parámetros utilizados en la programación de los botones son:

A = (0, 0). Punto centro del zoom, por defecto en el origen de los ejes coordenados. Es un punto móvil que se puede desplazar a cualquier lugar de la vista gráfica y que se usa como centro para realizar el zoom.

k = 0.25. Constante entre 0 y 1 que define la escala de zoom (acercamiento o alejamiento) que dará cada presión de un botón. Su valor por defecto es 0.25.

La programación de los botones se presenta a continuación

```
Zoom in
E1 = CopiaObjetoLibre[Esquina[1]]
E3 = CopiaObjetoLibre[Esquina[3]]
sx = x(E3 - E1)/2
sy = y(E3 - E1)/2
ZoomAcerca[x(A)-sx*(1-k),y(A)-sy*(1-k),x(A)+sx*(1-k),y(A)+sy*(1-k)]
ZoomAcerca[0,0,0,0]

Zoom out
E1 = CopiaObjetoLibre[Esquina[1]]
E3 = CopiaObjetoLibre[Esquina[3]]
sx = x(E3 - E1)/2
sy = y(E3 - E1)/2
ZoomAcerca[x(A)-sx*(1+k),y(A)-sy*(1+k),x(A)+sx*(1+k),y(A)+sy*(1+k)]
ZoomAcerca[0,0,0,0]

zoom x in
E1 = CopiaObjetoLibre[Esquina[1]]
```

```
E3 = CopiaObjetoLibre[Esquina[3]]
sx = x(E3 - E1)/2
sy = y(E3 - E1)/2
ZoomAcerca[x(A)-sx*(1-k),y(A)-sy,x(A)+sx*(1-k),y(A)+sy]
ZoomAcerca[0,0,0,0]

zoom x out
E1 = CopiaObjetoLibre[Esquina[1]]
E3 = CopiaObjetoLibre[Esquina[3]]
sx = x(E3 - E1)/2
sy = y(E3 - E1)/2
ZoomAcerca[x(A)-sx*(1+k),y(A)-sy,x(A)+sx*(1+k),y(A)+sy]
ZoomAcerca[0,0,0,0]

zoom y in
E1 = CopiaObjetoLibre[Esquina[1]]
E3 = CopiaObjetoLibre[Esquina[3]]
sx = x(E3 - E1)/2
sy = y(E3 - E1)/2
ZoomAcerca[x(A)-sx,y(A)-sy*(1-k),x(A)+sx,y(A)+sy*(1-k)]
ZoomAcerca[0,0,0,0]

zoom y out
E1 = CopiaObjetoLibre[Esquina[1]]
E3 = CopiaObjetoLibre[Esquina[3]]
sx = x(E3 - E1)/2
sy = y(E3 - E1)/2
ZoomAcerca[x(A)-sx,y(A)-sy*(1+k),x(A)+sx,y(A)+sy*(1+k)]
ZoomAcerca[0,0,0,0]
```