Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Estudio socioepistemológico de las raíces polinómicas en población con discapacidad visual

Tesis que presenta
Rubén Abraham Moreno Segura

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en la especialidad
de Matemática Educativa

Director de la Tesis
Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Ciudad de México Noviembre, 2021

«Una persona rica puede pensar en otra cosa, pero un pobre no. Uno piensa en lo que le falta, no en lo que tiene. Cuando yo tenía vista no pensaba que fuera un privilegio, en cambio daría cualquier cosa por recobrar mi vista.»

– Jorge Luis Borges, 1981.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo recibido durante el desarrollo de esta investigación

No. de Becario 1000493

A las tres personas que son aquel nido bajo cielos naranjas reflejados en la cantera rosa emblemática del lugar de origen, que me brindan fuerza y amor desde siempre.

Dalila, madre, guía, guerrera.

Dalila, hermana, madre, soporte.

Damián, sobrino, curioso, imaginativo.

A las dos personas que han confiado y motivado mi curiosidad, las guardo siempre en el corazón después de su partida.

Magdalena, abuela, madre, bondadosa.

Jenny, amiga, compañera, valiente.

AGRADECIMIENTOS

Siempre que acudía a consultar algún documento recepcional o tesis para profundizar algún tema o aclarar alguna duda académica me gustaba detenerme a leer los agradecimientos, ya que en ellos la persona suele vislumbrar un reflejo mucho más personal del proceso de investigación. También pensaba que el día que me tocara escribir mis agradecimientos la lista de gente a quién agradecer sería más larga que mi repertorio de referencias. Sin afán de jerarquizar, las siguientes líneas no tienen un orden específico más que el cómo fueron viniendo a mi mente.

A mi familia en general, porque gran parte de quien soy el día de hoy es gracias al ejemplo, apoyo y amor de ustedes. A mi mamá porque ella más que nadie ha estado ahí cuando emprendo una aventura y por enseñarme con el ejemplo que el trabajo que se hace desde el corazón es el más gratificante. A mis hermanas por ser incondicionales y ser mis primeras amigas. A mi sobrino por mostrarme como volver a asombrarme y ser curioso sin importar la edad. A papá por creer en mí.

Al director de esta investigación, Dr. Ricardo Cantoral, por creer en mí y en este proyecto desde sus inicios. Por la orientación, guía y redirección cuando la información llegaba a ser abrumadora y el camino incierto. Así como por la libertad de explorar nuevos horizontes.

A la Dra. Rosa María Farfán, la Dra. Gisela Montiel, la Dra. Daniela Reyes-Gasperini y el Dr. Francisco Cordero, por permitirme adentrarme en la disciplina y en la Socioepistemología a través de los diálogos y las reflexiones suscitadas en seminarios.

A Adriana Parra, Susana Gómez y Jacqueline Desfassiaux por todo el apoyo administrativo, académico, bibliográfico antes y durante la pandemia. Sin duda alguna mi estancia y la información pertinente para el desarrollo del trabajo sería imposible sin ustedes.

A Ana Chapa, por acompañar este proceso desde la reflexión personal y académica, así como la ayuda para calmar las tormentas en mi mente cuando sentía que todo se venía abajo.

Hablando de tempestades mentales, gracias por todos los momentos que ayudaron a brindarme calma y paz cuando más lo necesité, por las ocasiones donde se profundizó la reflexión, creció la confianza, el cariño y el apoyo. Me debo a ustedes colegas, compañeras, amigas, *roomies* y hermanas: Wen y Viri. Remamos.

A los y las colegas del seminario de Construcción Social del Conocimiento Matemático: Rebe, Fo, Cris, Sel, Meli, Antonio, Elena, Eleany, Juli, Maxi, Ita, por compartir su experiencia académica, profesional y personal. También por brindarme su punto de vista y entender el proyecto cuando incluso para mí resultaba complejo. Finalmente, por reflexionar en colectivo sobre qué es hacer investigación y sobre la teoría misma. Indiscutiblemente con ustedes aprendí el significado de la frase “Si quieres ir rápido camina solo, si quieres llegar lejos ve acompañado”.

A la red de apoyo que se fue entretejiendo desde distintos lugares del globo terráqueo: Fernanda, Carmen, Lucero, Pao González, Pao Cano, Sharon, Emmanuel, Adrián, Paulina, Andrea, Jair, Alberto y a quiénes no nombre para no hacer una profecía auto cumplida con el número de agradecimientos mayor que el de referencias, pero que sin duda alguna saben que forman parte de.

⠨⠛ ⠗ ⠁ ⠉ ⠊ ⠁ ⠎ (“Gracias” en braille).

Tabla de contenido

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Debido a la complejidad que plantea la lectoescritura algebraica mediante Braille, reportada en la literatura, se han propuesto distintas estrategias para la inclusión de las personas con discapacidad visual al aula de matemáticas. Empero, en el marco teórico planteado por la Socioepistemología, la inclusión radica más allá del mero acceso escolar, ya que también resulta necesario propiciar escenarios en los que actores del sistema didáctico sean partícipes activos del proceso constructivo del conocimiento matemático. Por lo tanto, el objetivo de la presente investigación, realizada con una metodología múltiple de tipo cualitativo, radica en propiciar elementos basados en prácticas para la construcción de la noción de raíz de polinomio o bien, de solución de una ecuación polinómica de grados pequeños, 1 a 3, en jóvenes con discapacidad visual.

Para ello se diseñó una situación exploratoria con categorías transversales a cada uno de los grados de interés, es decir: 1.- *multiplicidad de la raíz*, 2.- *relación signo – raíz*, y 3.- *relación coeficiente – raíz*. La situación se plantea desde el contexto gráfico, lo que permite abordar elementos como raíz, ordenada al origen, pendiente, concavidad y punto de inflexión mediante un conjunto de sensaciones no visuales. Se eligió dicho contexto debido a la importancia del sentido háptico por parte de la población con discapacidad visual, ya que es el principal medio de interacción con su realidad. Asimismo, la situación exploratoria tiene como base un estudio epistemológico de corte teórico, del cual se infieren prácticas implementadas por Descartes en *De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides* (1637) para la relación signo – raíz, y por Viète en *Æqvationum recognitione et emendatione. Tractatus duo* para la relación coeficiente – raíz. Para la primera relación, multiplicidad de raíces se apoyó en la literatura sobre visualización en Matemática Educativa.

Del análisis de los resultados obtenidos de la puesta en escena de la situación exploratoria con un estudiante ciego de nacimiento, del nivel superior se postulan las prácticas invariantes de *visualizar*, *comparar*, *agrupar* y *generalizar*. Cada una se matiza debido al contexto matemático y al escenario donde aparecen. La práctica de *visualizar* es una aproximación teórica de lo propuesto por Bértolo (2005) y Cantoral y Montiel (2002).

ABSTRACT

Due to the complexity of algebraic reading and writing using Braille, as reported in the literature, different strategies have been proposed for the inclusion of people with visual impairment in the mathematics classroom. However, from the theoretical position proposed by Socioepistemology, inclusion goes beyond simple school access, but it is also necessary to promote scenarios in contexts where the actors of the didactic system are active participants in the constructive process of mathematical knowledge. Therefore, the objective of this research, carried out with a multiple qualitative methodology, is to promote elements based on practices for the construction of the notion of polynomial root or solution of a polynomial equation of small degrees, 1 to 3, in students with visual impairment.

For this purpose, an exploratory situation was designed with transversal categories for each of the grades of interest, in other words: 1.- *multiplicity of the root*, 2.- *sign-root relation*, and 3.- *coefficient-root relation*. The situation is approached from the graphic context, which allows to approach elements such as root, the value in the y-axis, slope, concavity, and inflection point through a set of non-visual sensations. This context was chosen due to the importance of the haptic sense for the visually impaired population since it is the main way of interacting with their reality. Likewise, the exploratory situation is based on a theoretical epistemological study, from which practices implemented by Descartes in *De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides* (1637) for the sign-root relationship, and by Viète in *Æqvationum recognitione et emendatione. Tractatus duo* for the coefficient-root relation. For the first relation, multiplicity of roots, support was provided by the literature on visualization in Educational Mathematics.

From the analysis of the results obtained from the staging of the exploratory situation with a student blind since birth, of the higher level certain invariant practices are postulated, such as: *visualizing*, *comparing*, *grouping,* and g*eneralizing*. Each one nuanced due to the mathematical context and the scenario where they appear. The practice of visualizing is a theoretical approximation of that proposed by Bértolo (2005) and Cantoral and Montiel (2002).

CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo pone en evidencia las motivaciones de origen de esta investigación. Así como algunas consideraciones iniciales sobre la educación inclusiva, el sistema de lectoescritura Braille y cómo esta se utiliza en matemáticas, dando pie a una hipótesis de investigación que atiende a la pregunta y a los objetivos de investigación que guiaron el desarrollo del presente trabajo. Se finaliza con una presentación general y sistemática del documento en su conjunto.

1.1 Motivaciones

El interés por la investigación en la población con discapacidad visual, surge al tener contacto con una persona con baja visión en el verano de 2017 en San Luis Potosí (en la licenciatura en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí), lo que llevó a la tutoría voluntaria en las tareas de matemáticas de los jóvenes de preparatoria (abierta y en línea) y de secundaria en el Instituto para Ciegos y Débiles Visuales “Ezequiel Hernández Romo” de la capital del Estado. De la interacción con los jóvenes del instituto se obtuvieron aportes como la importancia del uso de texturas y objetos que se encuentran en su entorno y que puedan manipularse con facilidad para favorecer la adquisición de conceptos como *forma* y *cálculo de volúmenes* de prismas y pirámides (Moreno y Zúñiga, *en prensa*). Por otro lado, gracias al programa de estancias de investigación de la Academia Mexicana de Ciencias, en el verano del 2018 se presentó la oportunidad de realizar un estancia bajo la dirección del Dr. Cantoral, la cual antecedió a la investigación actual (Moreno, 2018). Adicionalmente, los primeros acercamientos a la actual investigación fueron acreedores al premio como mejor investigación en el área de Educación y Humanidades – Ciencias Socio Administrativas en el 6º Encuentro de Jóvenes Investigadores del Estado de San Luis Potosí. Así que la motivación surge de experiencias previas como docente de personas con discapacidad visual donde se reconoció la complejidad de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas desde diversas aristas: la dificultad añadida en las traducciones del sistema Braille, la falta de material y herramientas que propicien la inclusión, el desconocimiento de cómo llevar a cabo los procesos de construcción de conocimiento matemático por parte de los diversos participes del sistema didáctico, en ciertas ocasiones la escasa (o nula) consideración de poblaciones diversas en los planes y programas de estudio de nivel superior y la poca sensibilización que hay al respecto, entre muchos otros factores; y los acercamientos al desarrollo de investigación científica en torno al tema de atención entre la población con discapacidad visual desde el aula de matemáticas.

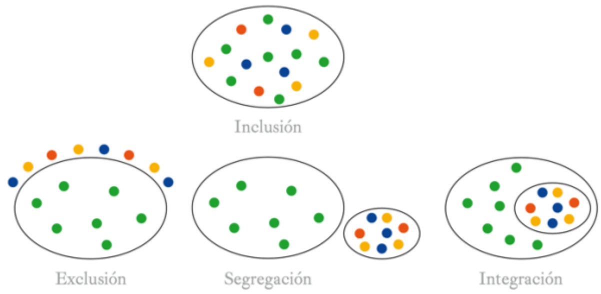
1.2 Consideraciones iniciales

En la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México desde hace un par de años se alude a la inclusión de la diversidad dentro de las aulas, para lo cual se han establecido, en los planes de estudio, textos que aportan indicaciones sobre cómo podría eficazmente llevarse a cabo. Por citar algunos, se encuentra el *Plan Nacional de Educación 2001 – 2006* (SEP, 2001), la *Guía para facilitar la inclusión de alumnos y alumnas con discapacidad en escuelas que participan en el Programa Escuelas de Calidad* (SEP, 2010), *Equidad e Inclusión* (SEP, 2017a), *Estrategia de equidad e inclusión en la educación básica: para alumnos con discapacidad, aptitudes sobresalientes y dificultades severas de aprendizaje, conducta o comunicación* (SEP, 2018), entre muchos otros. En ellos se alude a la importancia de hacer válido el artículo 3º constitucional, el cual señala el derecho a recibir una educación laica, gratuita y de calidad sin importar algún tipo de característica que sea parte de la identidad del individuo como género, creencia religiosa, condición socioeconómica, discapacidad, etcétera. La importancia y validez de este artículo constitucional queda respaldada, además, por una larga lista de documentos y tratados internacionales que hablan sobre la educación y la inclusión que la SEP ha usado como base y guía para el establecimiento de políticas públicas en temas educativos. Entre ellos:

- Declaración Universal de los derechos Humanos, 1948.
- Convención de la ONU sobre los derechos de los niños y niñas, 1989.
- Conferencia mundial sobre educación para todos, Jomtien, Tailandia, 1990.
- Reunión regional de Venezuela, 1992.
- Ley General de Educación, 1993.
- Proyecto General de Educación Especial en México, 1994.
- Declaración de Salamanca, 1994.
- Programa de desarrollo educativo, México, 1995-2000.
- Convención Interamericana para la eliminación de todas las formas de discriminación contra las personas con discapacidad (Declaración de Guatemala), 1999.
- Modelo de atención de los servicios de educación especial: los CAM y las USAER.
- Educación para todos, UNESCO, 2005.
- Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad, 2006.
- Políticas sobre políticas de inclusion en la educación, UNESCO, 2009.
- Observación General Nº 4 sobre el derecho a la educación inclusiva, 2019.

En ellos se pueden identificar cuatro momentos en los que se se explica la forma de actuar como sociedad ante la diversidad: exclusión, segregación, integración e inclusión. Para explicarlo a mayor detalle se retoma lo señalado en (Fadel, Kuntz y Zuravski, 2020; CILSA, 2017; Marín, 2019) (Figura 1.1).

Figura 1.1 *Modelo de exclusión, segregación, integración e inclusión social.*



Nota: Tomado de Construcción de inclusión y accesibilidad en la universidad a través de las tic (Fadel, Kuntz y Zuravski, 2020, p. 34).

En el modelo de exclusión social, también conocido como el "modelo de prescindencia" existe la idea de que hay personas "normales" y aquellos que quedan en la "otredad". Todo aquello que rompa con la norma, quedará fuera de la sociedad. En el caso de las personas con discapacidad, se hace uso de términos como *impedido, discapacitado, inválido, minusválido* o cualquier otro término que haga alusión a que quien vive con discapacidad es un ser considerado inferior. Así pues, desde esta óptica pierden derechos básicos como el acceso a la educación.

Para el caso de la segregación o el modelo tradicional se entiende que aquellas personas que pertenecen a la otredad por el hecho de no ser normales tienen que ser cuidados. Para lograr esa atención/vigilancia se crean instituciones dedicadas exclusivamente a las poblaciones diversas. Los términos empleados para las personas con discapacidad siguen siendo los mismos del modelo de exclusión social. Aún tienen derechos negados, pero en el caso de la educación puede ser reflejado al crear escuelas especiales en las que se atiende a alumnos con discapacidad con la finalidad de alfabetizarlos.

En el modelo de integración o también llamado "médico rehabilitador" prevalece la idea de normalidad y de lo que no es normal. Empero, aquellas personas que son diferentes aún tienen la posibilidad de rehabilitarse y convertirse en parte de la sociedad de manera activa. A las personas con discapacidad desde este enfoque se les denomina *personas con capacidades diferentes* o *personas con necesidades especiales*, ambas formas refuerzan la idea de que el otro es diferente, cuando en realidad todos tenemos capacidades diferentes y el hecho de requerir apoyo no tiene algo de especial ya que en algún momento todos requerimos el apoyo de alguien o algo más, y no por esa razón se debe condicionar la identidad de alguien. En términos escolares, la integración se puede entender en aquellos escenarios en escuelas regulares en los que se le brinda acceso a personas con discapacidad pero no se realizan adecuaciones de ningún tipo para que la persona pueda ejercer el derecho a la educación en totalidad.

Finalmente, en el modelo social de inclusión se cree en la igualdad de oportunidades a todas las personas. Desde este modelo, es responsabilidad de toda la sociedad que sus miembros puedan vivir y desarrollarse en equidad de condiciones. También se considera que la discapacidad está determinada por la interacción con entornos que fungen como barreras. Si la misma sociedad promoviera espacios sin barreras arquitectónicas, actitudinales y de comunicación, todas las personas podrían ejercer sus derechos siendo parte y desarrollándose en sociedad. En esta etapa la escuela es la que brinda las condiciones y adecuaciones necesarias para que el estudiantado pueda ejercer su derecho a la educación sin ningún tipo de restricción.

No obstante, es cierto que dada la complejidad del aula inmersa en un contexto muy particular y único, no se posibilita en todas las ocasiones, la inclusión de las personas con discapacidad. Blanco (2006) afirma lo siguiente:

> **Los niños y niñas con necesidades educativas asociadas a una discapacidad es el colectivo que se encuentra más excluido**. En muchos países no existen estadísticas confiables, pero cuando las hay queda de manifiesto que un alto porcentaje de estos alumnos no recibe ningún tipo de educación, <u>especialmente los que tienen discapacidades más severas</u>. Aunque la tendencia de las políticas de los países es promover la *integración*[1] de estos alumnos en la escuela común, la gran mayoría está escolarizada en centros de educación especial, por lo que también son los más discriminados (p. 6, subrayado, cursiva y resaltado propio).

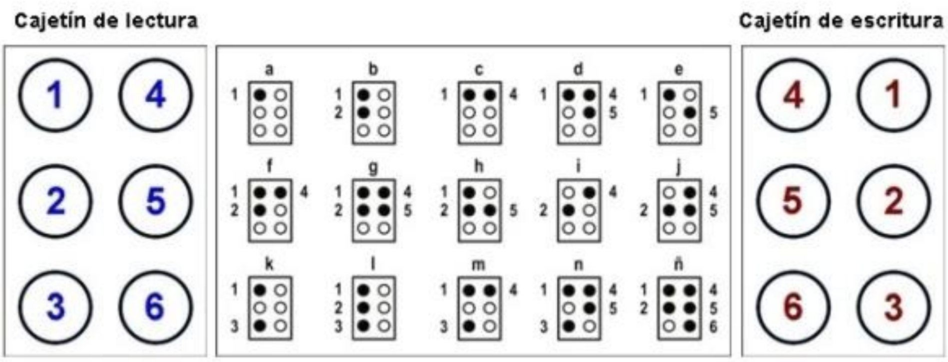
De esta manera, resulta necesario buscar herramientas teóricas, metodológicas y didácticas para promover la inclusión del estudiantado. No entendido solo como una acción positiva hacia aquellos miembros de la sociedad que histórica y socialmente han sido excluidos, sino para la mejora de la sociedad en su conjunto (García, 2009). En esta investigación nos centramos en una parte de la diversidad que se puede presentar en el aula, <u>las personas con discapacidad visual (personas ciegas o con baja visión).</u>

[1] Es común que, en diversos textos legales, de investigación, educativos, etcétera, se aluda al término "inclusión" y en realidad se esté refiriendo a características propias de integración o de manera contraria, se use "integración" para mencionar elementos de inclusión.

Para ello, en el escrito y en el desarrollo de la investigación se entiende a la discapacidad según el "modelo social de inclusión", es decir, la discapacidad es el resultado de la existencia simultánea de las variaciones físicas, intelectuales y/o psicológicas y de las barreras arquitectónicas, actitudinales y de comunicación (UNESCO, 2006). Particularmente, la discapacidad visual, entendida como la disminución total o parcial de la vista, es una pérdida grave de funcionalidad de la visión que se va a manifestar, por un lado, en limitaciones muy severas de la persona para llevar a cabo de forma autónoma sus desplazamientos, las actividades de la vida diaria, o el acceso a la información; por otro, en restricciones para el acceso y la participación de la persona en sus diferentes entornos vitales: educación, trabajo, ocio, entre otros y que adoptan la forma, no sólo de barreras físicas y arquitectónicas, sino también sociales y actitudinales (ONCE, 2020).

En el caso de las restricciones en entornos educativos se reconoce la complejidad del sistema de lectoescritura Braille, sobretodo que no es un conocimiento dominado por la totalidad de docentes y el alumnado (con o sin discapacidad visual). Tal sistema si bien es el medio de interacción con información escrita de las personas con discapacidad visual es limitado para áreas como la matemática, debido a que en la forma de su construcción cuenta con un número relativamente pequeño de símbolos con los cuales se expresan letras, números, símbolos, subíndices, superíndices, etcétera. El Braille se compone de símbolos marcados en relieve, organizados en cajetines de seis puntos cada uno como se muestra en la Figura 1.2.

Figura 1.2 *Forma básica del cajetín en Braille (lectura y escritura) y alfabeto (primeras 15 letras).*



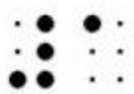
Tomado de Hitóptica: Método Braille (disponible en https://bit.ly/3eVNa2X).

Con seis puntos se crea una forma para volver accesible la información escrita a personas con discapacidad visual. Este sistema cuenta con seis puntos por cajetín que pueden o no ser marcados por un punzón, siendo entonces posibles 64 símbolos simples, es decir, 2^6 posibles combinaciones (Mackenzie, 1954). De esto se desprenden dos características: la primera es que al recurrir al relieve la forma de escritura es distinta de la de lectura. Para escribirse la numeración de los puntos que conforman el cajetín se comienza del lado derecho, mientras que en la lectura se empieza por la izquierda. Haciendo una analogía con la escritura en tinta / carácter común, se lee de igual forma, es decir, de izquierda a derecha, pero se escribe en espejo. Se recurre a herramientas para escribir en Braille, como la regleta y el punzón (Figura 1.3); se añade que no se puede leer lo escrito hasta que se acabe una línea, se quite la regleta de la hoja y se dé vuelta a esta última. Por otro lado, al existir sólo 64 posibilidades para cada cajetín se tiene que recurrir a símbolos con más de un significado o símbolos compuestos por dos o más cajetines. El caso de los números es un ejemplo de ello donde se utilizan los símbolos correspondientes a las primeras diez letras del alfabeto antecedidas del código marcado por los puntos 3, 4, 5, 6 llamado “númeral”, lo cual *convierte* la *a* en 1, la *b* en 2, y así hasta llegar a lo presentado Tabla 1.1. Por ello, si no se tiene el suficiente cuidado se pueden cometer errores de escritura y lectura fácilmente.

Figura 1.3 *Regleta y punzón empleados para escribir Braille.*

Nota: Tomado de Estudiantes con discapacidad: el discurso matemático escolar y la doble exclusión (Moreno y Cantoral, 2021, p. 172).

Tabla 1.1 *Numeración en braille (lectura).*

Tinta	***Braille***	
	Notación	*Códigos*
1		*3456, 1*
2		*3456, 12*

3	⠼⠉	*3456, 14*
4	⠼⠙	*3456, 145*
5	⠼⠑	*3456, 15*
6	⠼⠋	*3456, 124*
7	⠼⠛	*3456, 1245*
8	⠼⠓	*3456, 125*
9	⠼⠊	*3456, 24*
0	⠼⠚	*3456, 245*

En la tabla se presentan los dígitos del 0 al 9 en carácter común o tinta, su representación en braille y su código. Tomado de Braille y Matemática (p. 21) por Fernández (2004).

Para el caso de matemáticas el uso de símbolos compuestos se presenta con frecuencia (Robles, 1997; Fernández, 2004), por lo cual el usuario requiere desarrollar una destreza para discernir cuál es el significado de lo que se lee / escribe, es decir, que mecanice los procedimientos matemáticos. En Moreno y Cantoral (2021) presentan una colección de las *traducciones* a Braille requeridas para la solución de ecuaciones polinómicas, por ejemplo la división de polinomios, el método de la secante, la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado. Además de mostrar una centración en la traducción de argumentos, significados y procedimientos algebraicos, este énfasis puede ser resultado de la sobrevalorización de los argumentos analíticos y algorítmicos sobre los de naturaleza visual, ya que estos últimos no son considerados rigurosos o formales matemáticamente hablando (Farfán, 2013). Asimismo, dada esta característica en la enseñanza de la matemática se puede rescatar el ejemplo de la facilidad de mostrar algebraicamente la existencia de una raíz múltiple en comparación con hacerlo de manera gráfica (Cantoral y Farfán, 2004). De esto se identifica como problemática del manejo de un solo contexto pues obstaculiza el dominio matemático del estudiantado, a lo que se suma que la lectoescritura con el sistema braille se vuelve más difícil que la de construir nociones matemáticas menos áridas en personas con discapacidad visual, puesto que la lectoescritura resulta más difícil que la tarea en sí.

Lo anterior es un reflejo de lo que según la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se ha teorizado como *discurso Matemático Escolar* (dME), el cual se asume como un sistema de razón que delinea lo que está dentro y fuera de lo aceptado como matemática, su enseñanza y aprendizaje lo que deriva en una violencia simbólica a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos (Soto, 2010) [véase aquí en el Capítulo 3: Aspectos teóricos]. De ahí que no se favorezca realmente un ambiente de inclusión para la construcción del conocimiento matemático, si bien en la investigación relacionada al tema se han propuesto materiales didácticos, situaciones, softwares entre otras herramientas [véase en el Capítulo 2: Antecedentes] la traducción del mensaje no implica realmente la accesibilidad a la idea.

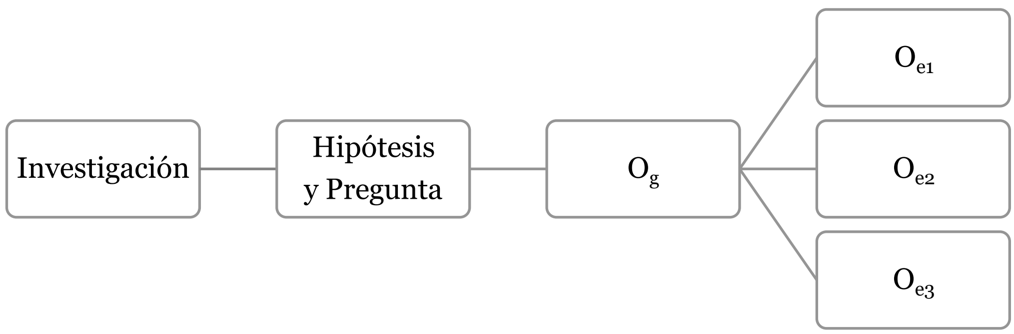
Aunque por las limitaciones necesarias del estudio al no se abarca todo el contenido del álgebra escolar, se focaliza en las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3, debido a la versatilidad de los métodos de solución, lo cual brinda un panorama de posibles escenarios de significación, siendo en los escenarios de construcción social de conocimiento donde emergen *prácticas*, en la que, de acuerdo con Farfán (2013),

> [...] para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, elementos centrales del estudio del precálculo y cálculo, se precisa, entre otros, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento de la recta [ecuaciones de grado uno] y la parábola [ecuaciones de grado 2] no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de cálculo (p. 25).

Por lo tanto, se abordó el tema desde un contexto gráfico, es decir, se tratarán con las ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3 y su representación gráfica que son la recta, la parábola y la cúbica, respectivamente, así como sus soluciones reales. Esto se debe a que el cruce de la curva con el eje x es un punto singular distinguible al tacto o la vista, a diferencia por ejemplo, de otros puntos singulares como podría serlo el punto de inflexión. Este tópico matemático es estudiado desde el inicio del nivel secundaria en México al trabajar con ecuaciones lineales; al finalizar esta etapa se trabaja con la ecuación de segundo grado; sin embargo, no se abordan ecuaciones de grado tres (SEP, 2017b). Por otro lado, en el nivel medio superior existen diversas modalidades en México, sin embargo, en los libros de texto utilizados como material de consulta [Véase en Capítulo 5: Análisis histórico–epistemológico] no se encontró evidencia del tratamiento de las ecuaciones de grado 3. Sólo en los textos de nivel superior en áreas relacionadas con STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas por sus siglas en inglés) se encontró trabajo con las ecuaciones de grado mayor a 2. Por esta razón, la decisión de abordar hasta el grado 3 es de carácter metodológico para corroborar si lo encontrado en la interacción con las ecuaciones de grado 1 y 2, con las cuales ya se ha tenido cierto contacto escolar, se reproduce con las ecuaciones de grado 3, con las que no identificamos un contacto previo curricularmente hablando.

Con esto en consideración, la presente investigación se centra en caracterizar cómo es el desarrollo del pensamiento matemático, normado por prácticas desde una postura socioepistemológica, particularmente de las personas con discapacidad visual, al interactuar con las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3 de manera gráfica. Debido al tratamiento algebraico típicamente escolar de las raíces de ecuaciones polinómicas se vuelve más complicado mediante la lectoescritura Braille que la resolución del problema en sí (Fernández, 2004), produciendo una barrera a dicha población al interactuar con los significados que subyacen en este tema, excluyéndolos de la construcción del conocimiento matemático. A partir de esto se configuran el objetivo general (O_g) y los objetivos especifícos (O_e), así como la hipótesis y la pregunta de investigación, los cuales se relacionan como se muestra en la Figura 1.4 y se explicitan a continuación.

Figura 1.4 *Relación entre pregunta, hipótesis y objetivos de investigación.*



Elaboración propia

Nuestra hipótesis de investigación la siguiente:

El desarrollo del pensamiento matemático mediado por prácticas, relativo a las raíces reales de polinomios de grado 1 a 3, sucede <u>*independientemente*</u> *de si la persona tiene o no discapacidad visual.*

La pregunta de investigación que planteamos es:

¿Cuáles son las prácticas y su anidación que emergen en la interacción con el conocimiento matemático, relativo a las raíces de polinomios de grado 1, 2 y 3, de alumnos con discapacidad visual?

Para abordar la pregunta e hipótesis de investigación se plantean los siguientes objetivos:

O_g: *Problematizar* el saber matemático relacionado con las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3 desde una postura socioepistemológica.

O_{e1}: Realizar un estudio histórico – epistemológico respecto de las soluciones de ecuaciones polinómicas en la obra de Viète (1646) y Descartes (1637) para inferir una epistemología de prácticas asociada a este saber.

O_{e2}: Diseñar una situación exploratoria que promueva el desarrollo de la epistemología de prácticas identificada en el estudio histórico–epistemológico y adaptada para población con discapacidad visual.

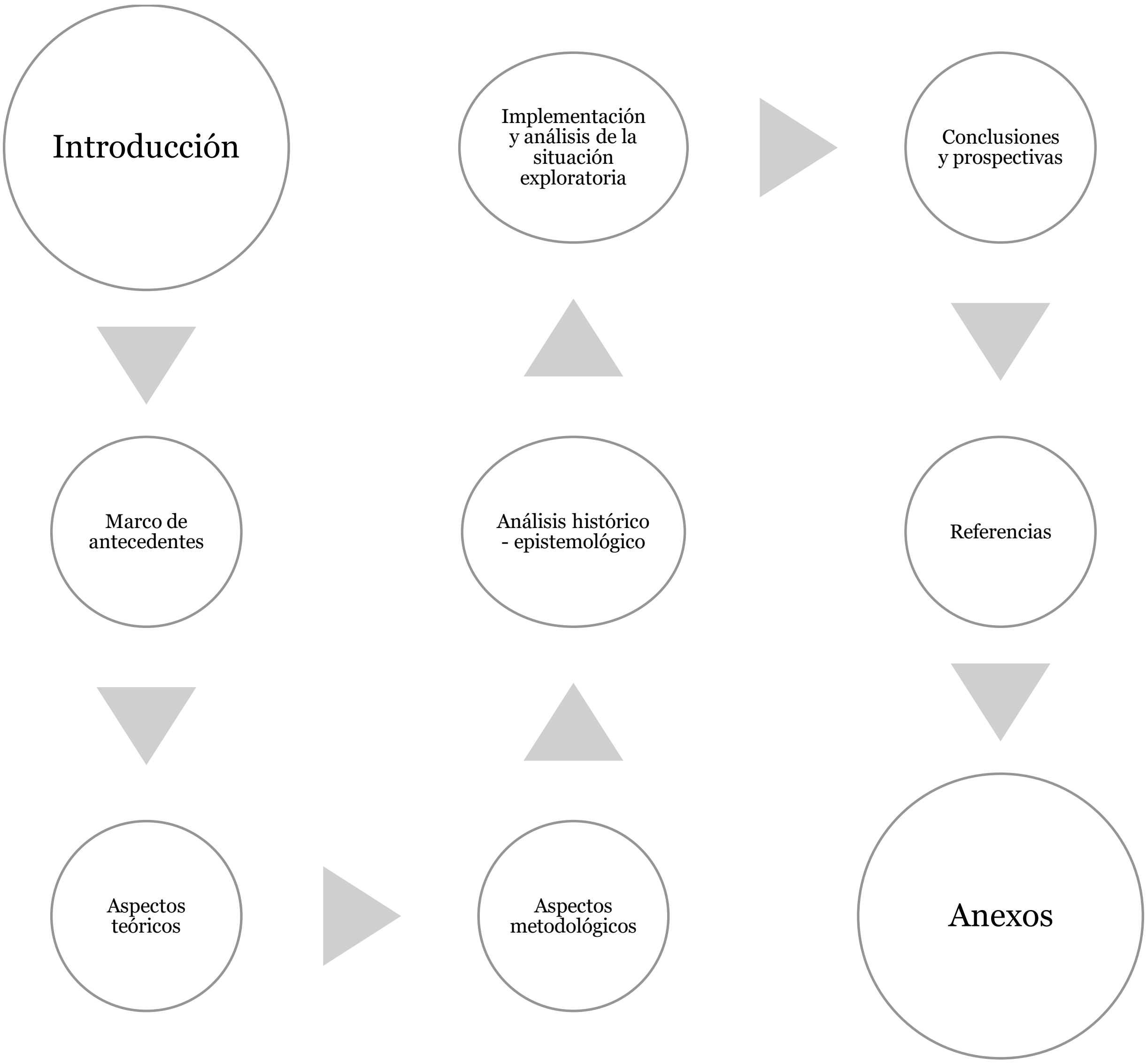
O_{e3}: Analizar la implementación en términos del constructo teórico de *prácticas* la puesta en escena de la situación exploratoria.

Con estos objetivos, pregunta e hipótesis de investigación se busca, principalmente, brindar nueva información a la disciplina, la Matemática Educativa, sobre el conocimiento matemático de las personas con discapacidad visual en niveles de educación secundaria y medio superior, ya que existe poca investigación al respecto y gran parte de ésta se centra en niveles básicos. De este modo se busca aportar elementos qe hagan efectiva la inclusión en la clase de matemáticas. Para ello se posiciona el trabajo desde la TSME dada su naturaleza y carácter inclusivo, es decir, ya que el objeto de estudio de la teoría es la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, lo que resulta en la perspectiva sociocultural de la misma, la cual es idónea para realizar estudios con poblaciones diversas bajo la luz de sus cuatro principios [véase más en Capítulo 3: Aspectos teóricos].

1.3 Presentación

Para el logro de los objetivos tanto generales como específicos, así como para responder a la pregunta de investigación y confirmar o refutar la hipótesis de investigación, el documento se encuentra organizado en capítulos como se muestra en la Figura 1.5, y se explicita a profundidad en los capítulos subsecuentes.

Figura 1.5 *Mapa general del documento.*



Elaboración propia

CAPÍTULO 2
ANTECEDENTES

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

Dada la especificidad del tema de estudio del presente escrito, sobre la interacción del estudiantado con discapacidad visual con las soluciones de las ecuaciones polinómicas sólo se identificaron cuatro escritos relacionados. Por lo tanto, se decidió “dar un paso atrás” al buscar en la literatura de no más allá de 10 años de antigüedad buscando qué se dice en torno a la forma de actuar del alumnado con discapacidad visual en el aula de matemáticas, particularmente en campos enseñados en nivel medio superior (15-18 años). La finalidad fue identificar cuáles son las concepciones de la inclusión social de esta comunidad que se consideran en la Matemática Educativa, así como reconocer las estrategias que han propuesto para fomentarla y cómo el estudiantado actúa ante tales estrategias. La forma en que se presentan los artículos más significativos de la revisión bibliográfica se compone de seis contenidos escolares: geometría, trigonometría, estadística, álgebra y raíces de polinomios y finalmente una síntesis de lo recuperado.

2.1 Geometría

El proceso de enseñanza y de aprendizaje resulta complejo en personas con discapacidad visual debido a las abstracciones y formas visuales que caracterizan a la geometría, por lo tanto es necesario generar estrategias que no involucren representaciones visuales, o bien, ampliar el sentido de visual, no entendido únicamente el relacionado con el sentido de la vista para la inclusión de este tipo de población. Espinosa, Castañeda-Roldán y Medellín-Castillo (2015) mencionan que el <u>tacto activo es la manera en la que las personas con discapacidad visual conocen el mundo que los rodea y a partir de ahí empiezan a abstraer y traducir el espacio a imágenes mentales</u>. También hacen alusión a la utilización del oído como medio para interactuar con su entorno, siendo así cada uno de estos tipos de interacción con el medio propicios para determinado tipo de situaciones.

> La Matemática nace de la cantidad, extensión configurada en el espacio. Hablar de configuración espacial exige hablar de "simultaneidad". <u>El oído solo puede aportar sucesión, linealidad</u>; la simultaneidad es confusión [...] <u>**a través de la acción de palpar podemos adquirir nociones de espacio, extensión y solidez**</u>, y el éxito académico de los estudiantes con discapacidad visual depende en gran medida del <u>acceso a la información y a los materiales didácticos</u> (p. 21, subrayado y remarcado nuestro).

Siguiendo la línea de la importancia del tacto activo, o del sentido háptico, Sánchez y colaboradores (2012) lo diferencian de la percepción táctil y de la kinestésica, es decir, del hecho de sólo tocar aludiendo más al sentido del tacto y de los músculos y tendones, respectivamente. Para ellos, el sentido háptico (o tacto activo) es la combinación de ambos, ya que a partir de éste la persona con discapacidad visual obtiene información de los objetos de su entorno tales como textura, dureza, peso, rugosidad, forma, tamaño, temperatura, entre otros. Esto es, la información percibida hápticamente es más amplia que atendiendo sólo a otros sentidos y se debe potenciar para la inclusión social de las personas con discapacidad visual dentro del aula (Niño y Vanegas, 2013). Además, Figueiras y Arcavi (2014) tratan del uso de metáforas visuales como complemento a la percepción háptica, *i.e.*, recurrir a movimientos corporales, el uso de analogías o narrativas cercanas a su entorno que les ayuden a terminar de comprender qué está sucediendo matemáticamente. Este medio de interacción es primordial en las personas con discapacidad visual ya que es el medio principal con el que construyen imágenes mentales (Bértolo, 2005) [más información ver capítulo 3: Aspectos teóricos]. Por lo tanto, en la propuesta de intervención para el diseño exploratorio se potencia el uso del sentido háptico.

Además, se detectó una centración en la elaboración de materiales didácticos para la inclusión de las personas con discapacidad visual dentro del aula de geometría. Estos pueden ser tecnológicos (Espinoza, Castañeda-Roldán y Medellín-Castillo, 2015; Pritchard y Lamb, 2012; Sánchez, *et al.*, 2012) o físicos (D'Urzo, 2017; Zamora-Araya y Vallejos-Brenes, 2019; Joya y Morales, 2012; Rühmann, Otero y Oakley, 2016). Si bien en esta investigación se recurre al uso del geoplano mediante un plano cartesiano tangible [Véase en Anexo III] retomado y readaptado de la propuesta de Escalante (2017), la presente investigación no lo problematiza, *i.e.*, no es el foco principal de atención, más bien, usa este material como parte de la problematización.

2.2 Trigonometría

Con frecuencia las relaciones trigonométricas se encuentran a un nivel memorístico e incluso el estudiantado con discapacidad visual tiene dificultades para distinguir triángulos de acuerdo a su clasificación. Peña y Rodríguez, (2015) trabajan con tres estudiantes de nivel secundaria (de 11 a 15 años) con el objetivo de profundizar en su aprendizaje de esas relaciones planteando la interacción con triángulos rectángulos en relieve; rescatan que el trabajo trigonométrico con alumnado con discapacidad visual requiere un mayor tiempo al empleado con sus pares sin discapacidad. El orden que siguieron fue iniciar con la identificación de triángulos y su clasificación de acuerdo a los ángulos y/o lados. Después se centraron en el triángulo rectángulo y en la identificación de los catetos e hipotenusa a fin de introducir el teorema de Pitágoras y explorar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Respecto a la forma "tradicional" de una clase de trigonometría, es decir, aquella sin estudiantes con discapacidad visual, esta propuesta presenta sólo una variación, el uso de figuras con relieve. No se le brinda al estudiante la posibilidad de explorar, construir, e interactuar con el conocimiento trigonométrico de una forma que no sea lineal. Esto, según el marco teórico que enmarca la presente investigación, se relaciona con la concepción de la matemática como un conocimiento acabado y continuo [véase en el Capítulo 3: Aspectos teóricos]. Además, se rescata el uso de texturas para la interacción con imágenes en relieve al trabajar con estudiantes con discapacidad visual, lo cual se retomó mediante el uso del geoplano para la situación exploratoria.

2.3 Estadística

Dada la variedad de formas en las que la estadística presenta información, tales como gráficas y tablas u otro tipo de recursos visuales, esto obstaculiza traducir esta información a Braille o representar las gráficas con el apoyo del relieve, además de la dificultad de realizar estas adecuaciones de manera oportuna (Rosenblum, Cheng y Beal, 2018). Es de suma importancia que los estudiantes con discapacidad visual tengan la habilidad de poder interpretar este tipo de información, pues fomenta un razonamiento crítico con la información presentada de esta forma.

Las propuestas en la enseñanza de la estadística se orientan en dos sentidos, aquellos con predilección a los medios tecnológicos (Rosenblum, Cheng y Beal, 2018; Hahn, Mueller y Gorlewicz, 2019) y los que le dan mayor peso a materiales didácticos tangibles (Peña y Rodríguez, 2015). En los primeros se recurre al uso de vibración y sonido para la exploración háptica por parte del estudiantado con discapacidad visual. Adicionalmente, recomiendan dar tiempo de explorar el material con información gráfica, que esta exploración puede ser de arriba hacia abajo, de un costado hacia el otro, entre otros; evitar el uso de líneas con texturas similares que terminen cruzándose entre sí; incluir contrastes de color adecuados para quienes son personas con baja visión; señalan la importancia de presentar la información gráfica de la manera más simple posible, esto es, no agregar elementos que no proporcionan información pertinente para la tarea a desarrollar o que puedan fungir como distractor de lo que se quiere priorizar. En los segundos se menciona la dificultad de construir gráficas de barras o circulares por parte del estudiantado con discapacidad visual de nivel secundaria y bachillerato.

Para la adaptación del geoplano propuesto por Escalante (2017), se sigue la recomendación de evitar el uso de líneas con texturas similares para la diferenciación entre la cuadrícula de los cuadrantes y las líneas de los ejes x,y. También se sigue la sugerencia de presentar la información de la manera más simple posible teniendo una curva por geoplano, que a la par evita el uso de texturas similares que puedan causar confusión.

2.4 Álgebra

Por cuestiones relacionadas con la asignatura de álgebra y la naturaleza de la discapacidad visual, los estudiantes con esta condición tienen más dificultades para aprender álgebra; la complejidad de las expresiones algebraicas que dependen en gran medida de representaciones bidimensionales, así como también las notaciones algebraicas abstractas que "ocultan" mucha información (Alajarmeh y Pontelli, 2012; Bouck y Weng, 2014; Moreno y Cantoral, 2021). Por ejemplo, en el caso de las representaciones bidimensionales, la expresión $f(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0$ se tiene que representar como f(x)= a_n * x^n + a_(n-1) * x^(n-1) +...+ a_0 * x^0, lo cual complica la lectoescritura en sistema Braille. Ahora bien, para las notaciones que ocultan información se puede mostrar el caso de la expresión "uno entre equis más dos", que puede ser interpretada al menos de dos formas. Una de ellas como $\frac{1}{x} + 2$ o la otra $\frac{1}{x+2}$. Aunado a esto, las expresiones algebraicas largas requieren una mayor cantidad de memoria de trabajo por parte del estudiantado con discapacidad visual, así como la importancia de hacer distinciones claras y explícitas entre el comienzo y final de cada parte (Gulley, *et al*., 2017). Adjudicado a estas características del Braille, Bouck, *et al*. (2013) se refieren a los cinco problemas fundamentales del estudiantado de *highschool* con discapacidad visual al trabajar con álgebra

> Even when they master basic mathematical concepts, students with visual impairments still face five fundamental challenges across any mathematical area, including algebra: (a) access to [appropriate] materials/textbooks; (b) access to qualified teachers; (c) the ability to navigate through complex equations and information; (d) the ability to conduct calculations while manipulating variables and understanding the problem; and (e) the ability to complete and turn in assignments in a format that is legible to both the student and instructor (p. 50).

Por otro lado, investigaciones como las de Alajarmeh y Pontelli (2012), y de Leal, Perilla y Rosero (2013) centran su estudio en el material didáctico para la enseñanza del álgebra. De igual manera, hay material apoyado en tecnologías digitales y material tangible. Alajarmeh y Pontelli (2012) proponen un lector de pantalla que guía al alumnado en exámenes de opción múltiple. En el artículo se afirma que a menor tiempo y menor número de errores se logra una mejor comprensión del álgebra incluida en las evaluaciones que presentaban. En el caso de Jiménez, Barreto, y Funeme (2013) trabajan con material tangible apoyados en la idea de álgebra geométrica con el uso de texturas, braille y carácter común / escritura en tinta.

Dada la complejidad de las expresiones algebraicas en sistema de lectoescritura Braille se pretende usar lo menos posible este tipo de representación en la situación exploratoria; esto es, se involucrará el contexto algebraico pero no será central al proceder con las preguntas planteadas. Además, explicitar los elementos de las expresiones, por ejemplo cuando comienza y termina un denominador o numerador, en qué casos se trata de exponente o subíndice, entre otros. Si bien, no se recurrirá a un contexto digital sino a uno tangible, la situación exploratoria no busca la resolución de las preguntas de manera correcta ni en el menor tiempo posible, sino identificar las prácticas que acompañan y anteceden a las soluciones de ecuaciones polinómicas de manera gráfica.

2.5 Raíces de polinomios

Esta sección se divide en dos apartados. El primero se refiere a las investigaciones que trabajan las raíces de polinomios (o las soluciones de ecuaciones polinómicas de manera gráfica) con estudiantes con discapacidad visual. El segundo apartado se refiere a las investigaciones acerca del mismo tópico, pero con alumnado sin esa condición.

2.5.1 Investigaciones relacionadas con estudiantado con discapacidad visual

El trabajo con ecuaciones polinómicas pueden recurrir a diversos contextos, como el algebraico, el gráfico, el geométrico, entre otros, con la finalidad de brindar las condiciones necesarias para que el estudiantado con discapacidad visual tenga una interacción de mayor calidad con este objeto matemático. Se identificaron cuatro investigaciones que consideran este tema matemático, ya sea únicamente para ecuaciones de grado 1, de grado 2 o para ambos casos.

La importancia del material didáctico para superar barreras de accesibilidad a la información matemática, particularmente en las operaciones con polinomios (suma, resta, multiplicación, entre otros) es el eje central en la investigación de Escalante, Carrillo y López (2020). Los autores presentan el *cubarín algebraico*, una adaptación del *cubarín aritmético*, el cual tiene como finalidad brindar un ambiente más propicio para interactuar con polinomios. Si bien, no centran la atención en las soluciones sino en las operaciones con polinomios, éstas suelen ser necesarias al momento de resolver una ecuación por métodos algebraicos. Para la resolución de ecuaciones de segundo grado y primer grado, Escalante (2020) recurre a la representación geométrica de área usando un mosaico con texturas para representar y manipular los términos de la ecuación con mayor dominio a comparación de un tratamiento meramente alegbraico. Entre sus hallazgos reportan que el estudiantado con discapacidad visual de nivel medio presentó las mismas dificultades, errores y obstáculos que sus pares sin discapacidad. Además, aún con esos contratiempos son capaces de simplificar términos semejantes y agilizar sus procedimientos.

Por otro lado, Figueiras y Arcavi (2015) comparten una experiencia de un profesor ciego y dos estudiantes de una escuela especial para personas con discapacidad visual, uno ciego y la otra con baja visión, al dibujar una parábola. Al hacer este proceso se compara con el recorrido por estudiantes sin discapacidad visual para mostrar la diferencia entre los procesos que se llevan a cabo entre alguien con discapacidad visual y alguien sin esta condición (Figura 2.1).

Figura 2.1 *Comparación de los pasos realizados para dibujar una parábola entre estudiantes sin discapacidad visual y aquellos que sí tienen esta condición.*

Some common steps in order to begin to sketch the graph of the parabola $y = 2x^2 + 4x$	Steps followed by the blind in order to begin to sketch the graph of the parabola $y = 2x^2 + 4x$
	Detect the intersection point at (0, 0)
	Reason by contradiction regarding the existence of a second root:
	If there is only one root, it must be the vertex (relies on previous knowledge)
	If the vertex is at (0,0), the graph is symmetric with respect to the y-axis
	Check if $f(x) = f(-x)$
	If the function is symmetric, then it is even
	The function is not even, therefore this root is not unique.
Solve the equation $y = 2x(x + 2)$	Solve the equation $y = 2x(x + 2)$
Find the two roots $x = 0$ and $x = -2$	Find the two roots $x = 0$ and $x = -2$
Conclude that there are intersection points at (0, 0) and (−2, 0)	Conclude that there are intersection points at (0, 0) and (−2, 0)

Tomado de Learning to see: The viewpoint of the blind (Figueiras y Arcavi, 2015, p. 182). La primera columna corresponde a estudiantes sin discapacidad; la segunda, al estudiantado con discapacidad visual con el que trabajaron.

Para realizar el bosquejo de la gráfica del polinomio de grado dos se vislumbra que hay elementos de la gráfica que se suelen usar de manera implícita, tales como el vértice de la parábola, el origen del plano cartesiano, la paridad de la función, entre otros. No obstante, el estudiantado con discapacidad visual recuperó dichos elementos para identificar las raíces y con ello obtener la parábola de manera gráfica. En sus observaciones finales señalan la riqueza de las descripciones orales y la ingeniosidad en el uso de los conocimientos matemáticos cuando no se dispone del sentido de la vista. Esto les resulta de particular interés porque la comunicación verbal relativa a los conceptos matemáticos suele implicar elementos implícitos de los que no se hablan; retomando el caso de la Figura 2.1 como ejemplo, se podría mencionar la paridad de la parábola. Además, a veces se generaliza la experiencia propia y se asume, por lo tanto, que las demás personas son capaces de detectar en la figura algunas propiedades que no son explícitas (Figueiras y Arcavi, 2015).

Torres (2020) trata el caso de los polinomios de grado uno y sus soluciones. Se refiere a la dificultad del lenguaje algebraico en el sistema de lectoescritura Braille, por lo que propone en el marco de la teoría APOS (acción – proceso – objeto – esquema, por sus siglas en inglés) la elaboración de un material didáctico tangible que usa texturas y contraste de colores para la resolución de las ecuaciones polinómicas de grado uno. Además, reporta narrativas que aluden a la falta de conocimiento del estudiantado de nivel medio con discapacidad visual sobre el momento en el que ellos habían obtenido el resultado antes de la intervención que se realiza, *i.e.*, el alumnado con el que trabaja le mencionan que en sus clases regulares sobre este tema les resultaba complejo identificar el momento en el que habían obtenido una respuesta. Esto se debe a que antes de la presentación del material el procedimiento solía ser guiado por un tercero y con la implementación de la propuesta el alumnado se vuelve más autónomo. Así, en sus conclusiones se refiere a tres cuestiones. La primera de ellas es la secuencia utilizada, la cual afirma es efectiva para la evolución de las estructuras mentales relativas a las ecuaciones polinómicas de primer grado en poblaciones con o sin discapacidad visual a nivel bachillerato. La segunda, del material didáctico propuesto, señala que es funcional para el estudiantado con o sin discapacidad visual. Además, ayuda al docente a conocer qué está haciendo el estudiante de manera inmediata, factor que no está presente al efectuar el mismo procedimiento con regleta y punzón. Finalmente, se refiere a las complicaciones con el lenguaje oral relativo a analogías espaciales sin el debido sistema de referencia construido o explicitado, ya que éstas obstaculizan la comprensión de los objetos matemáticos debido a que “falta” información para lograr entenderlas de manera más oportuna.

Por último, Correa y Pulido (2013) señalan la importancia del material didáctico para la intervención educativa en estudiantado con discapacidad visual en nivel secundaria. Primero, enfatizan que el material no es una garantía de éxito en sí, sino que requiere del acompañamiento de estrategias metodológicas que apuntalen el objetivo que se tenga. Segundo, el material debe ser creado para y con los estudiantes con discapacidad visual dependiendo de las características de cada uno de ellos. Por ejemplo, rango de visión, gama de colores que identifica, conocimientos previos, etcétera. Con estas reflexiones en cuenta proponen material didáctico tangible para la resolución de ecuaciones polinómicas de primer y segundo grado. Para ello usan formas (cuadrado grande, rectángulo y cuadrado pequeño) así como colores distintos y contrastantes entre sí. Los cuadros grandes representan las x^2, los rectángulos las x y los cuadrados pequeños el número 1. Entonces, formando una especie de rompecabezas el estudiantado va manipulando las piezas de manera conveniente para representar las ecuaciones y posteriormente dar con las raíces.

En la mayoría de las investigaciones presentadas relacionadas con el tema matemático de interés, se muestra una fuerte carga de la responsabilidad de favorecer con el material didáctico la inclusión del estudiantado con discapacidad visual, dejando de lado la naturaleza del conocimiento mismo (Moreno y Cantoral, 2021). Si bien las propuestas son de material tangible y aluden a la importancia del sentido háptico como principal forma de interacción de las personas con discapacidad visual con su entorno, también es necesario reconocer la centración en la traducción a Braille. Además, cabe mencionar que las propuestas aluden a contextos algebraicos y/o geométricos, mientras que en esta investigación se recurre a un contexto gráfico. Con estas observaciones no se quiere decir que el estudiantado con discapacidad visual no debe conocer, interactuar o construir conocimiento matemático sin la ayuda de su sistema de lectoescritura, sino que se debe cuestionar si en el momento en el que se encuentren el estudiantado es relevante proporcionarles escenarios en los que puedan construir e interactuar con los significados matemáticos o brindarles mecanismos de simbolización y abstracción alusivos a un lenguaje particular. Se tiene en cuenta también el hecho de que se requiere más tiempo de trabajo al estar con alumnado con discapacidad visual y dejar que los argumentos, significados y procedimientos que surjan por su cuenta se deben explorar y encaminar hacia el objetivo deseado, como en el caso de Figueiras y Arcavi (2015).

2.5.2 Investigaciones relacionadas a estudiantado sin discapacidad visual

Debido a que la transición de la resolución de estas ecuaciones básicas de primer orden a los polinomios de orden superior puede resultar bastante difícil tanto para el estudiantado como para el profesorado (ambos sin discapacidad visual), se revisó en la literatura respecto a las soluciones de ecuaciones polinómicas. Esto es, investigaciones que traten de manera general de las raíces de los polinomios, los ceros de la ecuación polinómica, ya sea en contextos algebraicos, aritméticos, gráficos y/o geométricos. Los escritos en los que sólo se tratan las ecuaciones de un determinado grado se dejaron por fuera de este escrito ya que la presente investigación se centra en las soluciones de las ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3 de manera gráfica y no se enfatiza más una que otra.

El uso de software, particularmente de calculadora gráfica, para la construcción de nociones de los ceros de la función y de la raíz de la ecuación polinómica, es el eje principal en el artículo de Balzadua (2007). En su investigación rescata las relaciones entre los contextos algebraico, en el uso de expresiones algebraicas; numérico, al incorporar tablas de valores; y gráfico, por la incorporación de la calculadora gráfica. Al establecer estos vínculos menciona que se favorecen la identificación de las raíces reales pero no de las raíces complejas. Así también el uso de elementos como la ordenada al origen, el signo del coeficiente del término del mayor grado y el comportamiento general de la curva de acuerdo al grado (si es par o impar) facilitan la construcción de la noción de la gráfica de la función polinomio. La dificultad que se destaca en el reporte es la de identificar las raíces múltiples, si son pares o impares, lo cual propone como investigación futura.

Una gran cantidad del profesorado de matemáticas de secundaria coinciden en que la introducción de la calculadora gráfica ayuda al aprendizaje de conceptos como las soluciones de ecuaciones polinómicas, aunque algunos argumentan que la comprensión de los algoritmos y los procesos es esencial para avanzar en las matemáticas. Dada esta reflexión, Wayne (2010) desarrolla algunos de los métodos más convencionales para encontrar raíces de polinomios o las soluciones a ecuaciones polinómicas de grados superiores; señala que el pasaje de las soluciones de las ecuaciones de primer grado a las de segundo es un punto importante para el estudiantado, ya que es ahí cuando debe empezar a trabajar con mayor destreza elementos como función, la relación entre la ecuación y su dominio y rango, y cómo la propia función produce los puntos asociados a la gráfica. Una vez que el estudiantado haya logrado trabajar con estos objetos relacionados a las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, las de grado superior no serán muy distintas, salvo por la existencia de raíces complejas, lo cual conlleva un trabajo adicional para presentarlas al alumnado. También menciona que los polinomios de segundo y tercer grado pueden presentarse en tres formas, de manera tal que se rescata cierta información de importancia para la construcción de la gráfica correspondiente (Figura 2.2).

Figura 2.2 *Formas de presentar los polinomios de segundo grado.*

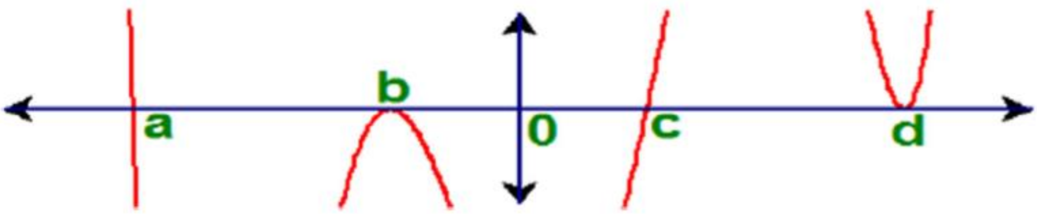
Name	Form	Use
Standard Form	$f(x) = ax^2 + bx + c$	easy to generate points, especially the y-intercept
Vertex Form	$f(x) = c(x-a)^2 + b$	easy to find vertex (a, b) and graph
Root Form	$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$	easy to find the x-intercepts $(r_1, 0)$ and $(r_2, 0)$

Tomado de Exploring Methods For Finding Solutions to Polynomial Equations (Wayne, 2010, p. 3).

Cabe mencionar que en la llamada “forma de la raíz” es posible encontrar el valor de la ordenada al origen al realizar la multiplicación $a * r_1 * r_2$. El autor menciona que los métodos de resolución o las formas de presentar los polinomios son más o menos apropiados dependiendo de las condiciones dadas y los objetivos que se buscan, por lo que no hay un método universal o uno que sea mejor que todos para enseñar/aplicar.

La relación entre los contextos gráfico y algebraico del conocimiento relativo a los polinomios, y particularmente a sus raíces, son el objeto de interés en diversas investigaciones (Adu-Gyamfi, Bossé y Chandler, 2017; Bossé, Adu-Gyamfi y Chandler, 2014). Para estudiar esto presentan a los estudiantes el siguiente gráfico (Figura 2.3)

Figura 2.3 *Esquema presentado para analizar las conexiones entre los contextos algebraico y gráfico de los estudiantes.*



Tomado de Student connections between algebraic and graphical polynomial representations in the context of a polynomial relation (Adu-Gyamfi, Bossé y Chandler, 2017, p. 96).

La Figura 2.3 muestra un gráfico truncado de una relación polinómica. Se le utiliza para interrogar a los estudiantes sobre qué expresión(es) podría(n) describir el esquema. Se reportan dos experiencias, una con un grupo de seis estudiantes (Adu-Gyamfi, Bossé y Chandler, 2017) y otra con ocho (Bossé, Adu-Gyamfi y Chandler, 2014). De manera general, las respuestas brindadas por el grupo de estudiantes que participaron en ambas ocasiones se encuentran en un umbral amplio. Los argumentos pueden ir desde la falta de alguna respuesta algebraica y vinculaciones precarias del desarrollo por factores de la expresión polinómica, pasando por aquellas réplicas que requerían el uso de algún software que les permitiera graficar para valores específicos de *a, b, c, d* que el alumnado proponía, hasta soluciones que consideraban la forma de las raíces proporcionando expresiones algebraicas incluyendo si cada factor con raíz real (*a, b, c,* d) tenía una multiplicidad par o impar y la inclusión de aquellos factores con raíces complejas que no podían ser determinados únicamente por el esquema.

La investigación de la forma con la que se pretende brindar mayor comprensión al estudiantado o robustecer los significados en juego al enfrentar las soluciones de ecuaciones polinómicas es recurrir al contexto gráfico y generar vínculos con los demás contextos (algebraico, numérico, entre otros), así como exponer distintos métodos de resolución que le agreguen más aristas por las cuales ser abordado. También es importante prestar especial atención a la multiplicidad de las raíces, ya que eso puede generar ideas que obstaculicen la interacción con la idea más general sobre las soluciones y su representación gráfica. Por parte de las raíces complejas se pueden suscitar problemas con el estudiantado con discapacidad visual cuando la curva no interseque el eje x, empero el foco de atención en esta investigación se encuentra únicamente en las raíces reales.

2.6 Una síntesis necesaria

La investigación relativa al estudiantado con discapacidad visual toma ciertos matices dependiendo de la rama de la matemática que se aborde, el nivel educativo con el que se trabaje, el lugar geográfico en el que se posicione y otros factores. Empero, se pueden identificar puntos de encuentro independientes de esos elementos que indican cómo es la interacción de dicha población con el conocimiento matemático. Se tratará de enlistar aquellos resultados de investigación que resultan pertinentes para el desarrollo de la presente investigación.

- El estudiantado con discapacidad visual refleja esencialmente el mismo espectro de habilidades cognitivas que sus compañeros sin impedimentos visuales (Kumar, Ramasamy, y Stefanich, 2001; Fernández, 1986; Hidalgo, 2011).
- Se incentiva la motivación cuando el estudiantado con discapacidad visual toma un rol activo en la exploración de un contenido (Falvey, 2005; Rule, *et al.,* 2011).
- A menudo se presentan dificultades en el estudiantado con discapacidad visual para construir conceptos abstractos debido a la falta de actividades que favorezcan la *visualización* (cada investigación con su caracterización propia). Necesitan más experiencias prácticas que involucren materiales táctiles para aprender ciencias. A pesar de que los contenidos se pueden explicar oralmente incluyendo aquellos elementos visuales al estudiantado, es mejor transformarlos en gráficos táctiles. (Sahin y Yorek, 2009; Jones, *et al.*, 2004; Fraser y Gutwin, 2000; Healy y Fernandes, 2014; Okungu, Griffin-Shirley y Pogrund, 2019).
- El estudiantado con discapacidad visual requiere un mayor tiempo a comparación con sus pares sin discapacidad para de realizar algún trabajo, problema o exploración de la situación debido al esfuerzo que se debe realizar para interactuar con la información oral y/o háptica (Ivy y Hooper, 2015; van Leendert, *et al.,* 2019; Mascret, Mille y Guillet, 2012).

En razón de lo expuesto, no sólo en este apartado sino en el presente capítulo, se tienen en consideración elementos como la importancia del <u>rol activo</u> y del <u>uso del sentido háptico</u> para la exploración e interacción con el entorno, de manera tal que permitan al estudiantado visualizar la gráfica de la ecuación polinómica. Esto debido a que el uso del contexto gráfico o de figuras no es tan socorrido al trabajar con estudiantes con discapacidad visual dentro del aula de matemáticas. También cabe destacar el uso del tiempo que le toma al alumnado examinar y reconocer el material que se le presente es mayor que el que le tomaría a sus compañeros sin discapacidad, por lo que se debe seleccionar un determinado número de preguntas y problemas que sean retadores pero que no se prolongue demasiado al punto de extenuar a los informantes. Por el lado de las raíces de polinomios se prioriza el contexto gráfico y desde ahí generar vínculos con el algebraico, numérico, situacional, entre otros; prestando atención a la multiplicidad de las raíces dado lo expuesto anteriormente, y las relaciones signo–raíz y coeficiente–raíz de acuerdo a lo presentado en el capítulo 5.

CAPÍTULO 3
ASPECTOS TEÓRICOS

CAPÍTULO 3. ASPECTOS TEÓRICOS

La presente investigación se enmarca en los elementos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME). Este acercamiento atiende a la necesidad de *democratizar el aprendizaje*, esto es, de ofrecer la viabilidad a todo el estudiantado de ser parte de la construcción del conocimiento matemático por lo que se deben brindar las posibilidades de estar en oportunidad de aprender. Así pues, no basta con garantizar el derecho a la educación para que todos los jóvenes realmente logren un aprendizaje, mucho menos que lo que sea que aprendan les sea funcional en su vida diaria y/o laboral (Cantoral, 2013a; Reyes-Gasperini, 2016a). Para el alumnado con discapacidad visual existe el derecho a la educación, y por lo tanto hay escuelas regulares y otras que atienden únicamente a personas con esta condición. Empero, su presencia en las aulas no es sinónimo de interacción de calidad con el conocimiento matemático que redunde en un aprendizaje que reconozca su forma de construir conocimiento y el modo de interactuar con su realidad. La *democratización del aprendizaje* tiene, entonces, la intención de generar estrategias para que los estudiantes accedan a una educación matemática funcional en sus vidas. Por tal motivo en este marco teórico posicionamos la necesidad de reconocer las formas de interacción que les son adecuadas y oportunas al estudiantado con discapacidad visual.

La TSME tiene como objeto de estudio la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, al considerar la complejidad de la naturaleza del *saber* (Cantoral, 2013a). La Socioepistemología considera que los conocimientos matemáticos, aún aquellos considerados "avanzados", son producto de prácticas humanas, reconociendo así la naturaleza social del conocimiento, considera al *saber* como el conocimiento puesto en uso, movilizado por situaciones. Asimismo, se preocupa por los mecanismos de institucionalización que actúan sobre el *saber* a través de la organización social de su enseñanza, aprendizaje e investigación (Cantoral, 2016). Además, este enfoque descansa en cuatro principios que lo articulan y no siguen un orden jerárquico preestablecido, sino una red nodal compleja. Así, el contenido de este capítulo se refiere a esos principios, se explica de manera breve la naturaleza multidimensional del saber, lo que la TSME se postula como el modelo de anidación de prácticas y el paso del discurso Matemático Escolar (dME) a su rediseño. Finalizando con la acepción que se asume en esta investigación sobre la *visualización* en tanto práctica inmersa en la construcción del conocimiento matemático.

3.1 Cuatro principios de la TSME

Los principios sobre los que se fundamenta la TSME son cuatro. Aunque no siguen un orden lineal, para fines de la explicación serán presentados en secuencia: *Principio normativo de la práctica social*, Principio de la *racionalidad contextualizada*, Principio del *relativismo epistemológico* y Principio de la *resignificación progresiva* (Cantoral, 2013a, 2016; Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Cabe mencionar que los principios no son constructos que se utilicen para el análisis en una investigación, sino que al ser los pilares en los que descansa la TSME brindan una postura y una forma de "ver" o entender a los fenómenos de investigación.

3.1.1 Principio normativo de la práctica social

El eslabón fundamental para el funcionamiento de la TSME es el principio normativo de la práctica social. Dicho principio establece que las prácticas sociales son la base y la orientación en los procesos de construcción de conocimiento, es decir, son las generadoras del conocimiento (Cantoral, 2013a, 2016; Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Este regula el sistema conceptual.

3.1.2 Principio de la racionalidad contextualizada

La relación del sujeto con el *saber* es una función del contexto; es la idea que establece el principio de la racionalidad contextualizada, es decir, la racionalidad de la persona en proceso de construcción se ve directamente afectada por la influencia del contexto en el que se encuentre inmerso (Cantoral, 2013a, 2016; Cantoral, Reyes-Gasperini, Montiel, 2014; Espinoza, 2009). Entonces, dicho de otra forma, la TSME acepta que la forma de actuar y pensar de las personas va a depender del contexto en el que se localice.

3.1.3 Principio del relativismo epistemológico

Este principio se refiere a la inexistencia de un punto de vista verdadero en forma absoluta o universal, sino que se le construye a través de múltiples relativos y puntos de referencia. Los puntos de vista poseen únicamente una validez subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). En otras palabras, la validez del conocimiento es cambiante dependiendo de la persona y lo que cada una considere por correcto e incorrecto, así como de la coherencia que avale sus argumentos.

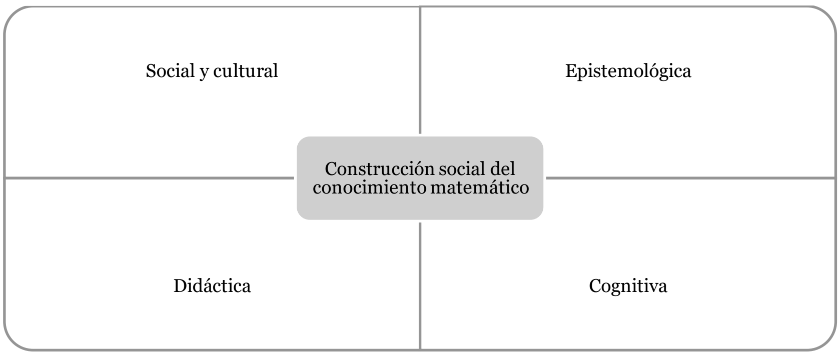
3.1.4 Principio de la resignificación progresiva

El conocimiento matemático se transforma al ponerlo en juego en diversas situaciones, dotándolo de nuevos significados y usos, sin dejar de lado los significados existentes al momento, sino agregando y modificando aristas que lo terminan por fortalecer. Es decir, el principio de la resignificación progresiva consiste en aceptar que la dinámica de significación está en construcción constante, provocando una significación funcional, relativa y contextual (Cantoral, 2013a, 2016; Hinojos, 2020, Ríos, 2020).

3.2 Cuatro dimensiones del saber

Por los principios de la Socioepistemología, la naturaleza del *saber* es sistémica, pues considera su estudio desde una perspectiva múltiple, atendiendo lo didáctico, lo epistemológico, lo cognitivo y lo social, así como las relaciones entre ellos (Figura 3.1). Si bien se considera que estas dimensiones interactúan de manera tal que no puede analizarse la una sin la otra, por cuestiones de método se hace este proceso de manera parcial o individualizado.

Figura 3.1 *Enfoque sistémico de la socioepistemología.*



Tomado de Socioepistemology in Mathematics Education (Cantoral, 2019, p. 2).

3.2.1 La dimensión didáctica

La dimensión didáctica se vincula con la costumbre didáctica, *i.e.*, la forma en la que se aborda la matemática escolar en las instituciones. Esto abarca libros de texto; currículo; evaluaciones; mensajes orales de parte de los profesores, alumnos, o cualquier actor del sistema didáctico, entre otros tipos de estructuras objetivables; todo esto ya sea dentro o fuera del ámbito tradicionalmente escolar. En otras palabras, el estudio de esta dimensión sirve para localizar y explicitar el papel del *discurso Matemático Escolar*.

Adicionalmente, los libros son una forma cultural de difusión del saber, a la vez que un instrumento de poder. Debido a esto, en los libros se puede apreciar una distribución y jerarquía impuesta del conocimiento matemático (Cantoral 1997; 2004). Por tal motivo, en esta investigación, la forma de abordar dicha dimensión será a través de la revisión de libros de texto de Álgebra de los niveles medio y superior mexicano que traten las raíces de polinomios con la finalidad de analizar la forma de tratamiento.

3.2.2 La dimensión epistemológica

A través de la dimensión epistemológica se localizan las fenomenologías y los constructos característicos de la *problematización del saber*. Para ello se estudian las circunstancias que favorecieron la emergencia de determinado conocimiento matemático, tanto sociales, económicas, culturales o científicas, entre otras. Además, el proceso de su difusión institucional (Cantoral, 2016). El propósito de incorporar el análisis de esta dimensión en el presente trabajo es construir una epistemología de prácticas al revisar las obras originales *Æqvationum recognitione et emendatione. Tractatus duo* (Viète, 1646) y *De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides* (Descartes, 1637), las cuales trabajan con la idea de raíz de polinomios, ya sea implícita o explícitamente.

3.2.3 La dimensión cognitiva

Por otra parte, mediante la dimensión cognitiva se estudian las formas en las que ocurren los procesos de apropiación, significación y resignificación del *saber* por parte de aquellos que están en interacción con el conocimiento matemático. Estos procesos pueden incluir abstracciones, justificaciones, razonamientos bajo hipótesis, el empleo de la estimación, visualización, entre otros, todo esto bajo el desempeño de prácticas normadas (Cantoral, 2016).

La inclusión de esta dimensión al estudio se debe al hecho de que se tiene como hipótesis que la visualización, al no ser exclusivamente dependiente de la visión, puede existir en los estudiantes con discapacidad visual, quienes pueden representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información háptica[2]. Además, será considerada la gesticulación al ser una forma no verbal de transmitir ideas y aspectos del lenguaje formal, explicaciones, concepciones de las distintas nociones matemáticas que están vinculadas con la noción de raíz en los polinomios.

[2] A través del tacto activo.

3.2.4 La dimensión social

Ahora bien, en cuanto a la dimensión social se reconoce el *saber* desde una orientación histórica, situacional y funcional, es decir, como una construcción social con usos, significados y prácticas en situaciones específicas (Cantoral, 2013a). Esta dimensión permea a las otras tres, ya que la matemática y quien construye conocimiento matemático están inmersos en una cultura particular y, por lo tanto, para la persona que construye el conocimiento matemático tiene un valor de *uso* propio.

Dado que la dimensión social focaliza los juegos de roles de los actores así como del *saber*, esta investigación pretende conocer el contexto en el que estuvieron inmersas las obras originales *Æqvationum recognitione et emendatione. Tractatus duo* (Viète, 1646) y *De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides* (Descartes, 1637), para que con posterioridad se vislumbren las prácticas empleadas por Viète y Descartes, y con ellas realizar una triangulación con las prácticas empleadas por un estudiante con discapacidad visual al trabajar nociones relacionadas con las raíces de polinomios.

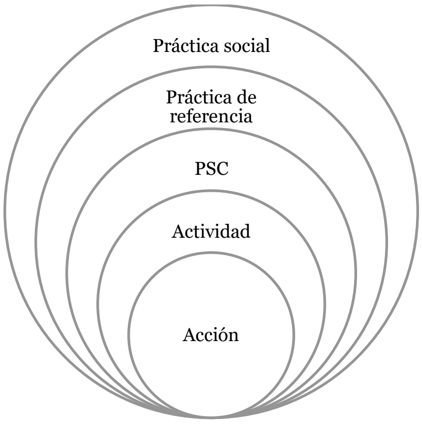
3.3 Modelo de anidación de prácticas

La TSME propone como alternativa al sistema educativo, lineal y jerarquizado, la organización de los contenidos curriculares a partir de las prácticas habituales de quien aprende para lograr una etapa simbólica progresivamente (Cantoral, 2019). La propuesta sugiere una descentración, es decir, pasar de la centración exclusiva en los objetos matemáticos, a una centración en las prácticas. Esto no implica un completo abandono del objeto, sino que se presta mayor atención a las prácticas que acompañan y anteceden al objeto en el proceso de construcción del conocimiento. Es importante señalar que las prácticas de las que hace mención la TSME se encuentran esquematizadas en lo que se denomina *Modelo de anidación de prácticas* (MAP); dicho modelo explica teórica y empíricamente la organización de las prácticas en el proceso de construcción social del conocimiento. El funcionamiento del MAP (Figura 3.2) es introducido por Cantoral (2013) y explicado por Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014) de la siguiente forma:

> se pasa de la acción, directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones: material (entorno), organizacional (contexto), social (normativo), esto se organiza como una actividad humana situada socioculturalmente, para perfilar una práctica (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una práctica de referencia que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico,

disciplinar y cultural), la que a la vez es normada mediante cuatro funciones por la práctica social (normativa, identitaria, pragmática y discursiva–reflexiva) (p. 99).

Figura 3.2 *Modelo de anidación de prácticas.*



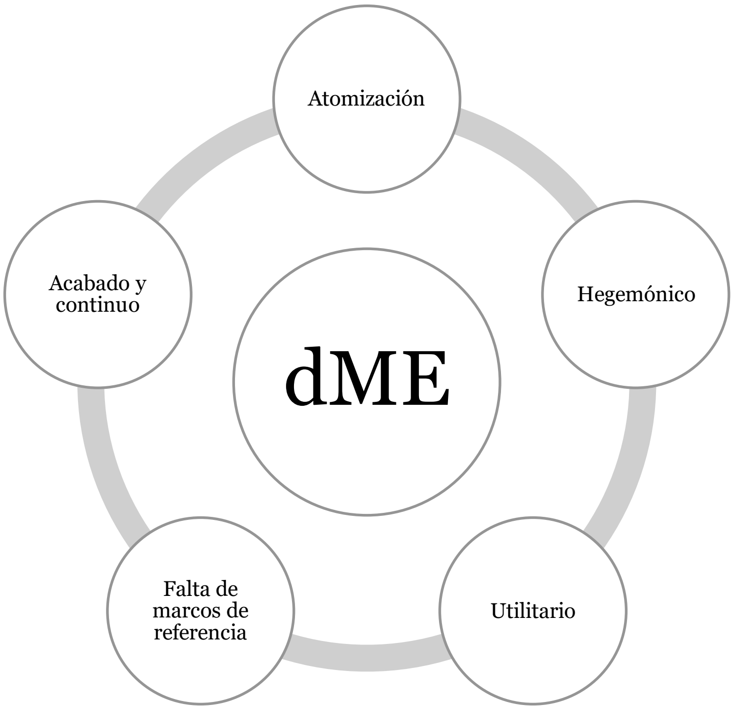
Tomado de Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción del conocimiento. (Cantoral, 2016, p. 338).

En la presente investigación se pretende utilizar el MAP para identificar las acciones y actividades inmersas en la génesis del conocimiento vinculado con la relación coeficiente–raíz en la obra de Viète (1646) y con la relación signo–raíz a partir de la obra de Descartes (1637), así como las acciones y actividades realizadas por un estudiante con discapacidad visual.

3.4 discurso Matemático Escolar

En el intento por una matemática para todos se ha conformado un discurso Matemático Escolar (dME) (Ímaz, 1985, Cantoral, 1983) producto de la transposición didáctica (Chevallard, 1989). Adicionalmente, en general el dME, en su intento por una matemática inclusiva ha dejado de lado los contextos, comunidades y situaciones propios de la génesis del conocimiento matemático, pero también aquellos escenarios donde diversos actores han significado y resignificado dicho conocimiento, lo cual provoca una imposición de argumentos, significados y procedimientos (Cordero, *et al.*, 2015). El dME es entendido como “las manifestaciones del conocimiento normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje” (Soto y Cantoral, 2010, p. 839). El dME es el responsable de la exclusión de los actores del sistema didáctico, es decir estudiantes, docentes, personas dedicadas a la elaboración de textos escolares y/o currículo, etcétera del proceso creativo de la construcción del conocimiento matemático. Esto es debido a la imposición de una epistemología dominante que impide su modificación por quienes están inmersos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El dME es entendido hoy día como un sistema de razón que rige las prácticas y las representaciones sociales de los actores del sistema educativo que actúa como un mapa, delineando lo que queda dentro y lo que queda fuera de la razón o de lo que es considerado como "aceptable" (Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014). El mapa del dME (Figura 3.3) tiene cinco características: La atomización en los conceptos, el carácter hegemónico, el carácter utilitario del conocimiento, la falta de marcos de referencia para la resignificación y la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo.

Figura 3.3 *Mapa del discurso Matemático Escolar (dME).*



Tomado de El discurso Matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad (Cordero, et al., 2015, p. 63).

3.4.1 Atomización de los conceptos

La atomización de los conceptos matemáticos es el motivo por el cual el conocimiento matemático escolar queda desprovisto de las argumentaciones, los significados y procedimientos que hicieron posible su construcción, es decir, no considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la construcción del conocimiento.

3.4.2 Carácter hegemónico

La dirección de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que privilegia un tipo particular de argumentos, significados y procedimientos es consecuencia del carácter hegemónico. Esta característica del dME, que favorecer argumentos, significados y procedimientos sobre otros que también son usados por las personas al momento de construir conocimiento, impide que ellas sean partícipes del proceso de construcción de una manera más activa.

3.4.3 Carácter utilitario del conocimiento
La organización de la matemática escolar ha colocado como prioridad la utilidad del conocimiento sobre sus demás cualidades, haciendo creer que la matemática únicamente está para responder necesidades dentro de la matemática misma.

3.4.4 Falta de marcos de referencia para la resignificación
Se ha dejado de lado que la matemática responde a otras prácticas de referencia y es ahí donde encuentra una base de significaciones distintas, lo que provoca que se deje al marginen las prácticas realizadas por diferentes grupos e individuos al momento de construir su conocimiento matemático.

3.4.5 Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo.
La organización del contenido y las problemáticas presentadas en las instituciones educativas dan la impresión de que el conocimiento es perpetuo e intocable, *i.e.*, que siempre ha sido así y no hay lugar para la duda que posibilite la configuración de hipótesis, inferencias, conjeturas u otras formas para construir y reconstruir el conocimiento matemático.

El propósito de considerar la caracterización del dME es analizar una de sus estructuras objetivables acerca de las relaciones coeficiente–raíz y signo–raíz que nos permitan delinear un mapa sobre la forma en la que se excluye de la construcción del conocimiento matemático. Cabe mencionar que esta exclusión es epistémica y no es una caracterización particular de la exclusión de algún grupo minoritario en particular, sino que es una forma de exclusión que todos los actores del sistema didáctico sufren por igual.

3.5 Visualización

Desde la TSME se ha trabajado con la noción de *visualización* al destacar el trabajo gráfico con funciones (Cantoral y Montiel, 2001, 2002, 2003, 2014; Cantoral, *et al.*, 2005; Farfán, 2013; Farfán y Romero, 2016). En estas investigaciones se prioriza el trabajo gráfico debido a que se parte del supuesto de que el dME promueve mayormente argumentos algebraicos y analíticos sobre los gráficos. Esto se debe a que en matemáticas (como disciplina) un dibujo no tiene un estatus epistemológico como demostración. O por ejemplo, es más fácil mostrar la existencia de una raíz múltiple de forma algebraica que de forma gráfica.

Cantoral y Farfán (1998) establecen la hipótesis de que previo al estudio del cálculo es necesaria la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite un isomorfismo operativo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. Para ello se desarrolló una línea de investigación que operaba con gráficas para lograr este dominio entre lo algebraico y lo gráfico. Esto se debe a que los argumentos relacionados y formulados a partir de la visualización favorecen diversas formas de representación, tanto de conceptos como de procesos. Para que la visualización de gráficas sea más fructífera es necesario que ésta sea entendida como algo más que solo una técnica de tabulación, sino que es necesario que haya una interacción con las gráficas de manera genuina y libre, *i.e.*, que el estudiantado pueda formar y reformar las curvas con las que está en contacto, al menos las relacionadas a los primeros de grados de funciones polinómicas, ya que en ellas se pueden identificar elementos como ordenada al origen, pendiente, concavidad y punto de inflexión. Cantoral (2013b) menciona lo siguiente en relación a la visualización y la graficación:

> Una revisión de la literatura especializada sobre el tema de visualización y graficación de funciones reales de variable real, nos permite extraer que, en esencia, son dos las formas clásicas de entender a la enseñanza de la graficación de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; una, la más difundida en el medio educativo, asume que la graficación es una técnica o conjunto de técnicas que permiten bosquejar la gráfica de una función particular, y otra, menos difundida, que entiende a la graficación como una forma de interpretar el sentido y significado de las funciones y de sus propiedades desde una perspectiva cognitiva (pp. 45-46).

Además, Cantoral y Montiel (2003, p.694) al trabajar con los polinomios de Lagrange de manera gráfica señalan “que habremos de entender a la visualización no como el simple acto de ver, pues una función, por ejemplo, no significa solamente verla, mirar o contemplar su gráfica, de hecho es posible visualizarla sin verla”. Mas aún, Cantoral y Montiel (2002) profundizan la caracterización de *visualización* en el marco de la TSME, como:

> La visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales, digamos que se requiere del ámbito de lo gestual. Los gestos, sostenemos, anteceden a la palabra y a la representación. La visualización entonces trata con el funcionamiento

> de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado pero sobre todo, precisa de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados que incluyan lo gestual (p. 24).

Si bien la acepción anterior alude al uso de información visual y por lo tanto a la manipulación de una imagen mental al poner en funcionamiento las estructuras cognitivas necesarias al resolver un problema, hay estudios que afirman la posibilidad de personas con discapacidad visual congénita[3] de crear y manipular imágenes mentales (Bértolo, *et al.*, 2003; Bértolo, 2005; Kennedy, 1993, 1997; Knauff y May, 2006; Halpern and Zatorre, 1999; Levy, *et al.*, 1999a, 1999b; Lacey y Sathian, 2013). Bértolo y colaboradores (2003) estudian la imagen mental de personas con y sin discapacidad visual y las comparan con las de las personas sin discapacidad visual. Para ello toman en cuenta las narrativas y las ilustraciones que crean después de soñar. Sus conclusiones dejan de lado la controversia de que la experiencia visual se considera como un elemento esencial para la formación de imágenes mentales que permitan la visualización.

La visualización sin experiencia visual previa, como es el caso de los ciegos congénitos, indicaría la existencia de imágenes mentales independientes de la percepción visual. Esto implica que los sujetos con discapacidad visual congénita son capaces de utilizar otras modalidades sensoriales para integrar estas entradas a través del sistema visual y producir conceptos capaces de ser representados gráficamente, es decir, son capaces de visualizar. Mas aún, el conocimiento espacial y las propiedades métricas se mantienen en las imágenes mentales creadas por las personas con discapacidad visual congénita. Las representaciones pictográficas son la única diferencia destacable entre las personas con discapacidad visual y aquellas que no tienen dicha discapacidad, ya que las personas con discapacidad visual presentaron más problemas para representar sus imágenes mentales a través de este medio (Bértolo, *et al.*, 2003). Otra diferencia significativa entre las imágenes mentales es que las correspondientes a las personas con discapacidad visual carecen de las características visuales únicas, como el color y el brillo, y dan lugar a ligeras diferencias con respecto al rendimiento de los individuos sin discapacidad visual en tareas de creación de imágenes (Kerr y Domhoff, 2004).

Estas similitudes en las imágenes mentales, las cuales pueden tener diversas modalidades de creación como visual, olfativa, auditiva, háptica, entre otras entradas de tipo sensorial (Halpern y Zatorre, 1999; Levy, *et al.*, 1999), han sido estudiadas en

[3] Personas en condición de ceguera desde el nacimiento o que perdieron la vista antes de los 4 años.

disciplinas relacionadas a las neurociencias, y llegan a la conclusión de que muchas regiones corticales cerebrales, que antes se consideraban especializadas en el procesamiento de diversos aspectos de la información visual, también se activan durante tareas táctiles o hápticas análogas, auditivas o con el procesamiento generalizado de imágenes que no está vinculado a ninguna modalidad específica (Hagen, *et al.*, 2002; Blake, *et al.*, 2004; Summers, *et al.*, 2009; Bértolo, *et al.*, 2003).

Por lo tanto, la aproximación teórica sobre el concepto de visualización desde la TSME de Cantoral y Montiel (2002) para esta investigación se adapta a los resultados de Bértolo (2005) principalmente, ya que suponemos que las personas con discapacidad visual son capaces de visualizar, es decir, son capaces de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información háptica y auditiva en el pensamiento y el lenguaje de quien está en proceso de construcción de conocimiento matemático. En otras palabras, **la visualización es entendida como el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se operan al resolver problemas con las relaciones abstractas que se formulan entre las diversas representaciones de un objeto matemático.** En este caso las soluciones de las ecuaciones polinómicas, a fin de operar con ellas y obtener información nueva a partir de esto, destacando el uso de lo háptico, auditivo y gestual, con el objetivo de proporcionar escenarios en los que el alumnado pueda significar a la noción matemática que es de interés en esta investigación desde su racionalidad con el propósito de enfrentar nuevos problemas con un repertorio de herramientas mucho más amplio.

CAPÍTULO 4
ASPECTOS METODOLÓGICOS

CAPÍTULO 4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este capítulo se describe *grosso modo* el esquema metodológico empleado en la investigación, así como los elementos teórico–metodológicos que fundamentaron su desarrollo. Finalmente se especifican algunos detalles del diseño e implementación de la situación exploratoria y la situación de diagnóstico.

Dado que esta investigación se enmarca en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), para su diseño y desarrollo se implementó la *problematización del saber matemático*. Esta problematización tiene como característica la consideración de la matemática puesta en juego como parte de la unidad de análisis y al cuestionar el estatus del saber institucional como aquello que "se debe aprender", reconoce sus usos y significados en distintos escenarios que son inherentes al saber y que resultan omitidos, transformados y excluidos por el discurso Matemático Escolar (Montiel y Buendía, 2011). Tal *problematización* se entiende como:

> Se lo *construye*, *reconstruye*, *significa* y *resignifica* [al saber], se lo ubica en el tiempo y el espacio, se lo explora desde otra óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona a la opción constructiva en la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos. Esto es, el saber se *problematiza*: *historiza* y *dialectiza*, con intencionalidad (Cantoral, 2016, pp. 101-102).

La TSME propone *problematizar* el saber desde al menos tres aspectos de análisis: desde su la naturaleza epistemológica, su resignificación y los procesos de transmisión. Esta investigación se centra en la naturaleza epistemológica de las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado uno a tres, en los trabajos de Viète (1646) y Descartes (1637), es decir, se considera la naturaleza de las prácticas asociadas en un ámbito algebraico en la génesis de este saber y, a la par, con un contexto gráfico, para identificar la epistemología de prácticas que subyace a los miembros de la comunidad de personas con discapacidad.

4.1 Esquema metodológico

Si bien la investigación se enmarca en la TSME, no se rige por un esquema metodológico único riguroso, lineal y secuenciado, pues por los principios que fundamentan la teoría se acepta que cada proyecto se adapte a las características del problema que se investiga, del saber, de la población que se considera, de las condiciones que inherentes al ambiente en el que se desarrolla la investigación, entre otros factores. Empero se seguirá en este trabajo el esquema metodológico que presenta la Figura 4.1, propuesto por Montiel y Buendía (2011).

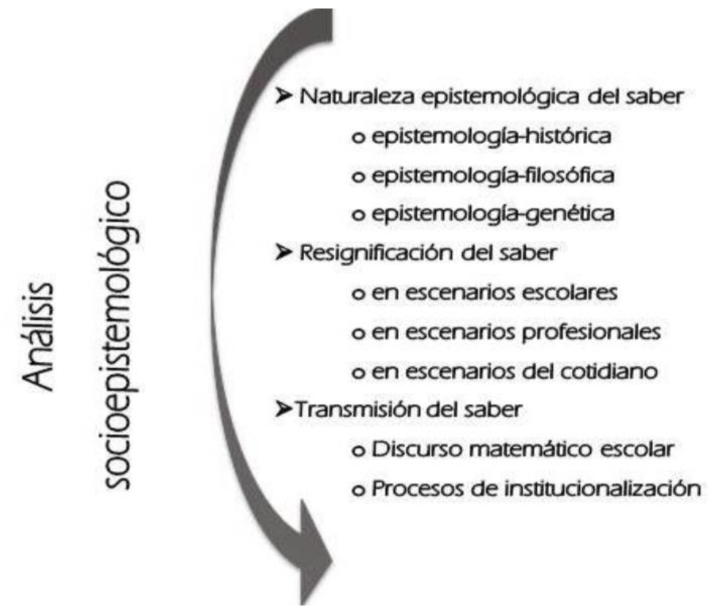
Figura 4.1 *Esquema metodológico propuesto por Montiel y Buendía (2011).*

Tomado de Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica (Montiel y Buendía, 2011, p. 446).

Para fines de comunicación se enumeran los momentos y las acciones relacionantes en el esquema, es decir, los globos y las flechas, respectivamente. Sin embargo, esto no implicó en esta investigación que sea el orden en el que se desarrollaron durante todo el transcurso. En el Momento 1: Problemática / Fenómeno didáctico se identifica una problemática relacionada a un saber, ya sea dentro o fuera del aula, se plantean las preguntas y objetivos de investigación, con la finalidad de conocer, comprender y explicar procesos de construcción y transmisión de conocimientos matemáticos. En este trabajo, la problematización está asociada a las soluciones de las ecuaciones polinómicas de grado uno a tres, de las que se identifica la problemática de la dificultad asociada al tratamiento excesivamente algebraico que obstaculiza la interacción con los conocimientos matemáticos, que, en el caso de estudiantes con discapacidad visual se vuelve aún más complejo debido a la estructura del lenguaje matemático en el sistema de lectoescritura Braille. Por tal motivo, el objetivo es identificar las prácticas realizadas por estudiantes con discapacidad visual al momento de trabajar con un tema puntual de álgebra, las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3. Esto obedece a la versatilidad de métodos y significados que se pueden rescatar de tal tópico, priorizando aquellos para los que la solución de la ecuación polinómica se asocia a sus raíces.

La acción relacionante denominada “Análisis socioepistemológico” se lleva a cabo una vez que se tienen las preguntas y objetivos de investigación. En esta etapa se procede a realizar el análisis del saber, de lo que le es inherente, esencial y que lo caracteriza, así como lo que se logra de su aprehensión a través de sus significados contextualizados y situados en un tiempo y lugar específicos. Montiel y Buendía (2011) señalan la importancia de hacer explícitas las condiciones y los escenarios en los que se desarrolla la investigación, ya que eso es lo que brinda racionalidad a los métodos y técnicas empleados. Una lista de ejemplos de posibles análisis socioepistemológicos se muestran en la Figura 4.2.

Figura 4.2 *Ejemplos de los análisis socioepistemológicos interesados en la construcción y transmisión de conocimiento matemático.*



Tomado de Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica (Montiel y Buendía, 2011, p. 448).

Dado el interés en las prácticas asociadas que acompañan y anteceden a las soluciones de ecuaciones polinómicas, en esta investigación se rescata el análisis de la naturaleza epistemológica del saber, particularmente la epistemología histórica al analizar obras originales, y la epistemología genética, al poner en juego las prácticas identificadas en el análisis de obras originales en un diseño intencionado de prácticas adaptado para estudiantes con discapacidad visual. Así también se analiza el discurso Matemático Escolar (dME), con la finalidad de estructurar una propuesta para una situación exploratoria que no recaiga en los argumentos, significados y procedimientos predominantes de éste.

En el segundo momento “Epistemología de prácticas”, se postula una epistemología de prácticas en diversas investigaciones, con la finalidad de formular una explicación al problema de investigación, que además funge como una primera base para la elaboración de diseños de intervención didáctica. En esta etapa se evidencia la construcción social del conocimiento matemático, entendida como la relación entre las prácticas asociadas en interacción y/o construcción de un *saber* y la persona que lo hace.

Una vez analizados los textos originales propuestos para esta investigación se propuso un modelo de anidación de prácticas preliminar, el cual se desarrolla con mayor profundidad en el capítulo 5 “Análisis Histórico–Epistemológico”.

La segunda acción relacionante intitulada “Desarrollo intencional de prácticas” consiste en la reinterpretación de las prácticas identificadas para su incidencia en el contexto escolar. Cabe mencionar que las prácticas inferidas a partir de análisis históricos–epistemológicos no buscan reproducir la historia, ni mucho menos retomar problemas y situaciones históricas como reto o problema a resolver. El propósito radica en identificar aquellos elementos característicos del quehacer de las comunidades que resultaron significativos; adaptarlos y reinterpretarlos de manera tal que hoy tengan sentido y favorezcan el desarrollo de significados, argumentos y procedimientos distintos a los establecidos por el dME guiados por un desarrollo intencional de prácticas que recae en el momento tres “Situación–problema”. La situación–problema puede ir desde prácticas de laboratorio, situaciones de aprendizaje, situaciones exploratorias, entre otras. Lo que se presente como situación–problema robustece la *problematización* y será el instrumento que permita el desarrollo de acciones y actividades en el sistema didáctico.

Las prácticas presentadas en el modelo de anidación de prácticas preliminar y el análisis del dME a través de una selección de libros empleados en la educación del nivel medio superior en el contexto mexicano que se presentan en el capítulo 5, son la base para la elaboración de la situación exploratoria [Anexo I] que se llevó a cabo para la recolección de los datos empíricos usados en esta investigación.

Finalmente, la tercera acción relacionante es la “Revisión del rol de prácticas”, donde se confronta la epistemología de prácticas inferida en el análisis histórico–epistemológico y la resultante de llevar a cabo la situación–problema. De dicha confrontación emergen reflexiones de lo que se identifica en los argumentos situacionales. El modelo de anidación de prácticas revisado se presenta en el capítulo 7 "Conclusiones" de este escrito.

Una vez descrita la ruta metodológica de la investigación es preciso aclarar los esquemas teórico–metodológicos del análisis de las prácticas en las soluciones de las ecuaciones polinómicas de grado uno a tres y del dME. Así como explicar a grandes rasgos el planteamiento de la situación exploratoria y el proceso de levantamiento de datos empíricos.

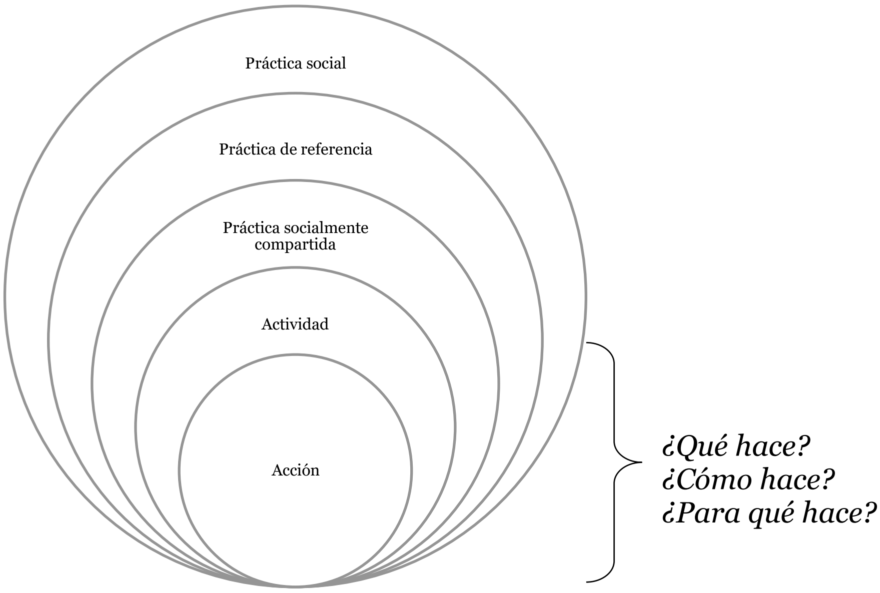
4.2 Modelo de anidación de prácticas

La TSME presenta un modelo jerárquico que explica la evolución del desarrollo del pensamiento matemático basado en prácticas. El modelo, si bien tiene lectura "de subida" y "de bajada", en investigaciones recientes se ha encontrado que también hay escenarios en los que se sigue un desenvolvimiento reiterativo (Hernández-Zavaleta, 2019; Ríos, 2020). Para fines de explicación de los niveles del modelo se hará en una lectura de subida de los primeros dos niveles: acción y actividad.

La acción es entendida como la intervención directa del sujeto con el objeto, siendo ésta cercana a la idea piagetiana de acción; e incorporamos también las acciones entre sujetos por un lado y con los objetos por otro. Esta operación se ejecuta sobre objetos y/u otras acciones por parte del sujeto con la finalidad de adaptarse al entorno y organizarse internamente (Cantoral, 2016). Por otro lado, la actividad se refiere al elemento vinculante del desarrollo humano al desarrollo cultural. El proceso de formación de las funciones psicológicas superiores se da a través de la actividad práctica e instrumental mediada socialmente. Así pues, la actividad humana se caracteriza entonces por modificar y transformar la naturaleza de manera intencionada (Cantoral, 2016).

Ahora bien, en (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015) se propone un método para el análisis refinado de acciones en libros de texto escolar. Dicho análisis se reestructura para los fines de esta investigación, resultando en las preguntas *"¿qué hace?*", *"¿cómo hace?*" para identificar las acciones, *i.e.*, las intervenciones directas del sujeto sobre el objeto. Así también la pregunta *"¿Para qué lo hace?*" a fin de identificar las actividades con intencionalidad que caracteriza este nivel. El esquema se presenta en la Figura 4.3

Figura 4.3 *Modelo de anidación de prácticas y las preguntas que guían el análisis refinado de acciones propuesto en (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).*



Reinterpretación del Modelo de anidación de prácticas presentado en (Cantoral, 2013a) y el análisis refinado de acciones de (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

El esquema presentado en la Figura 4.3 se emplea en el análisis de las obras originales *Æqvationum recognitione et emendatione. Tractatus duo* (Viète, 1646) y *De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides* (Descartes, 1637) para inferir un modelo preliminar de prácticas. También es utilizado en las transcripciones de las interacciones obtenidas de la situación exploratoria para identificar las prácticas llevadas a cabo en la parte empírica de la investigación.

4.3 Exclusión por el discurso Matemático Escolar

El discurso Matemático Escolar (dME) es el sistema de razón que produce una forma particular de exclusión (epistémica). Dicho sistema de razón tiene cinco características (Tabla 4.1) produce violencia simbólica a partir de la imposición de argumentos, significados y procedimientos. La Tabla 4.1 que presenta una articulación entre las cinco características del dME, los principios de la TSME y la propuesta de Re-diseño del dME.

Tabla 4.1 *Articulación entre dME, principios de la TSME y el RdME.*

Discurso Matemático Escolar actual (Soto, 2010).	**Principios de la TSME (Cantoral, 2011)**	**Propuesta de dME**

CARÁCTER UTILITARIO La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.	NORMATIVO DE LA PRÁCTICA SOCIAL	CARÁCTER FUNCIONAL La matemática escolar se organiza con base en el saber y el funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, al reconocer las prácticas sociales en la base de la creación del conocimiento.
ATOMIZACIÓN EN LOS CONCEPTOS No se consideran los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento	RACIONALIDAD CONTEXTUALIZADA	RACIONALIDADES CONCEPTUALES DIVERSAS Se reconocen, privilegian y potencian diversos tipos de racionalidad relativos a la realidad en la que el individuo se encuentre en un momento y lugar; desde el cual se construirá conocimiento.
CARÁCTER HEGEMÓNICO Supremacía de argumentaciones y significados frente a otros	RELATIVISMO EPISTEMOLÓGICO	VALIDACIÓN DE SABERES La matemática escolar tiene diversas maneras de verse, trabajarse, construirse y desarrollarse, al concebir que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural en el cual éste ha emergido y respecto a la racionalidad contextualizada que éste posea.
CONOCIMIENTO ACABADO Y CONTINUO La enseñanza de la matemática se reduce a la mecanización de procesos o de memorización de los conceptos		
FALTA DE MARCOS DE REFERENCIA PARA LA RESIGNIFICACIÓN Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, donde se encuentran las bases de significados naturales	RESIGNIFICACIÓN PROGRESIVA	PLURALIDAD DE PRÁCTICAS DE REFERENCIA PARA LA RESIGNIFICACIÓN La pluralidad de prácticas de referencia, su interacción con diversos contextos y la propia evolución del individuo o grupo resignifica los saberes construidos,

		enriqueciéndolos con nuevos significados.

Tabla tomada de Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, Montiel, Reyes-Gasperini, 2015, p. 15).

El uso de la Tabla 4.1 se rescata para identificar la forma de exclusión epistémica que se vive al trabajar las soluciones de ecuaciones polinómicas. A la luz de los principios de la TSME es posible generar una propuesta teórica de Re-diseño, *i.e.*, con base de significación a partir del análisis histórico–epistemológico y de identificar prácticas que acompañan y anteceden a la construcción del objeto matemático de interés, así como del análisis de los libros de texto. Se delinea el dME según las caracterísitcas del Re-diseño del dME en la solución de ecuaciones polinómicas, las cuales se utilizan para el diseño de la situación exploratoria.

4.4 Diagnóstico y situación exploratoria

Se preparó una situación diagnóstica [Anexo V] en la que se recuperaron problemas presentados en los libros de texto analizados para identificar los conocimientos previos del estudiantado con discapacidad visual participante. Los ejercicios plantearon la solución de ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas dejando a consideración de cada participante el método de resolución para cada caso. También se plantearon preguntas más amplias sobre qué aspectos recordaban de las ecuaciones polinómicas y sus gráficas.

Por otro lado, al tomar en cuenta las características planteadas de la Tabla 4.1 acerca de la propuesta de Re-diseño se elaboró una situación exploratoria. Tal situación se enmarca en del contexto gráfico–háptico por la importancia de generar un medio de interacción adecuado para estudiantes con discapacidad visual. En términos de Espinoza (2015), es necesario aludir a este sentido cuando se trabaja con estudiantes con discapacidad visual debido a que a través del tacto activo se pueden adquirir nociones de extensión, espacio y solidez, a diferencia de recurrir únicamente al oído, el cual aporta sucesión y linealidad.

Para que el estudiante lograra interactuar con las gráficas de manera adecuada, se recurrió a la idea de geoplano propuesta por Escalante (2017), se adecuó al material didáctico para facilitar su transporte y orientar al estudiantado para que lo manipulara sin ser dirigido por un docente/guía, así como de evitar el uso de material punzocortante. El geoplano se diseñó para su impresión en 3D [Anexo III], lo cual facilita la producción de tantos geoplanos como sean necesarios, e incluso para su difusión.

La estructura general de la situación exploratoria se presenta en la Figura 4.4, mientras que la situación exploratoria en sí se presenta en el Anexo I.

Figura 4.4 *Esquema general de la situación exploratoria.*

Elaboración propia.

La situación exploratoria se divide en tres secciones principales, una para cada grado de las ecuaciones. A su vez, cada una a su vez se subdivide en tres apartados: multiplicidad de la raíz, donde se trabaja la multiplicidad de la solución de manera gráfica, es decir, si es de multiplicidad uno, dos o tres, tomando en cuenta los resultados reportados en la literatura [Capítulo 2: Antecedentes]; la relación signo–raíz, para la que se pretende trabajar aspectos como ordenada al origen, pendiente, concavidad y puntos de inflexión de manera gráfica dada la reconstrucción racional de la regla de los signos de Descartes hecha por Cantoral y Ferrari (2009), que se profundizan en el capítulo 5. Finalmente, para la relación coeficiente–raíz en la cual se busca establecer primeros acercamientos al contexto algebraico una vez explorados los aspectos gráficos de las curvas presentadas, *i.e.*, ya habiendo identificado elementos de la gráfica como raíz, ordenada al origen, pendiente, concavidad y punto de inflexión, establecer relaciones entre éstos y la forma de la expresión algebraica como signos y valores de los coeficientes.

Cada sección de la situación exploratoria se compone de diversas preguntas y tareas en las cuales se esperan ciertas prácticas, como *visualizar*, *comparar*, *agrupar* y *generalizar*. Del análisis histórico–epistemológico, estas prácticas se reinterpretan [Capítulo 5], ya que al ser inferidas en un contexto algebraico donde se buscaba generalizar ciertas propiedades de las soluciones de las ecuaciones polinómicas, éstas no se "trasladan" a la situación exploratoria de la misma forma. Por tanto, para su posible emergencia se les reinterpreta en un contexto gráfico–háptico propuesto para personas con discapacidad visual. Un ejemplo de los planteamientos propuestos puede ser la pregunta 1.2.1: "*Dadas las gráficas de la sección anterior se le pide al estudiante que ahora las acomode siguiendo algún criterio que él logre identificar de acuerdo a* *la forma de las rectas. Preguntar: ¿Por qué los juntaste de esa forma?, ¿qué características logras identificar en común?, ¿cómo son las raíces en los "equipos" que armaste con los geoplanos? Escoge un "equipo" de los que armaste e intenta graficar una tercera recta que pueda pertenecer a éste*". Con esto se espera particularmente que el estudiante *compare* la forma global de las curvas; que *visualice* las intersecciones, *i.e.*, pueda conformar una imagen mental de los puntos singulares que le sirva para realizar las *comparaciones* y *agrupe* las curvas de acuerdo a un criterio que él establezca como oportuno.

El diseño considera las lineales y cuadráticas de forma gráfica, que son contenidos ya explorados en el sistema educativo mexicano en niveles básico y medio superior; sin embargo, la incorporación de las cúbicas es de carácter metodológico. Al carecer de contacto previo con ellas, curricularmente hablando, los argumentos, significados y procedimientos que emerjan de forma invariante según el grado informará de lo que le es propio de las raíces, independientemente del grado.

Se eligió el contexto gráfico–háptico para el desarrollo de la situación exploratoria por los resultados de la revisión de la literatura que indican que es necesario propiciar la visualización en personas con discapacidad visual (Sahin y Yorek, 2009; Jones, *et al.*, 2004; Fraser y Gutwin, 2000; Healy y Fernandes, 2014; Okungu, Griffin-Shirley y Pogrund, 2019), y porque es un contexto en el que se pueden tratar los tres grados de las ecuaciones polinómicas. Tal contexto se diferencia de los de situaciones de movimiento, como el movimiento rectilíneo uniforme, que se asocia a las de primer grado; el movimiento uniformemente acelerado, para las de segundo grado; pero en general, para esos niveles educativos, no se tienen propuestas del contexto físico para las de tercer grado.

La situación exploratoria es una entrevista semiestructurada (Toscano, 2009) ya que entendemos la situación como un diseño flexible de investigación, contando con un nudo central en las prácticas asociadas a las soluciones de las ecuaciones polinómicas, en el cual el sujeto ocupa el lugar protagónico y conforme sus respuestas se van reestructurando las preguntas planteadas de manera anticipada.

4.5 Implementación

Para la puesta en escena de la situación exploratoria se considera lo propuesto por Stake (1998) referente a los estudios de caso. Se entienden los estudios de caso no como la intervención con un solo informante, sino como una situación única, irrepetible, específica, compleja y en funcionamiento. Para el desarrollo del estudio de caso en esta investigación y dadas las condiciones sanitarias a nivel mundial por la pandemia provocada por SARS-COV2, la implementación se llevó de manera híbrida con un estudiante con discapacidad visual. Esto es, la situación diagnóstica se llevó a cabo por la plataforma Zoom y la situación exploratoria de manera presencial en su ciudad de residencia con las medidas sanitarias pertinentes y la autorización por parte del informante del uso de la información obtenida.

El estudiante con discapacidad visual que funge como informante en esta investigación es considerado una persona ciega de nacimiento. También ha culminado satisfactoriamente sus estudios de nivel medio superior, por lo que ya ha tenido algún tipo de interacción con las ecuaciones de primer y segundo grado, así como con sus respectivas gráficas. Declaró estar de acuerdo con el uso de la información obtenida en la situación exploratoria para el desarrollo de esta investigación. Para mayor información del perfil del estudiante, a quien se nombra en esta investigación como Jair, se puede acudir al Anexo IV.

La situación diagnóstico [Anexo I] se grabó a través de la plataforma Zoom y se le transcribió para su posterior análisis. De igual forma la situación exploratoria se videograbó con dos cámaras: una de manera frontal a Jair y otra de manera lateral (Figura 4.5). En la sesión presencial se recurrió también a la grabación de audio en caso de tener dudas con lo obtenido en los vídeos, y la toma de fotografías de las producciones de Jair en los distintos momentos en las que fue necesario que él construyera alguna gráfica.

Figura 4.5 *Vista de los ángulos usados para la toma de vídeo.*

Imagen propia donde se muestran los dos ángulos de cámara utilizados para la toma de vídeo que permitió tener una mejor perspectiva de los movimientos realizados por Jair. Censura por cuestiones de privacidad.

Una vez obtenidos los vídeos y audio de lo ocurrido en la implementación de la situación exploratoria, la cuál tuvo una duración de aproximadamente tres horas reloj, se transcribieron los diálogos y gestos realizados por Jair utilizando el código de la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 *Código empleado para la transcripción de los vídeos y audio.*

Notación	**Significado**
A	Abreviatura usada para identificar las intervenciones del investigador.
J	Abreviatura usada para identificar las intervenciones del estudiante con discapacidad visual.
Guion al final de una oración (–)	Interrupción que no permitió finalizar la oración.
Dos palabras unidas por un guion corto ($palabra_1$-$palabra_2$)	Cuando el hablante se corrige a sí mismo rápidamente.
Tres puntos (...)	Silencio mayor a dos segundos.
Tres puntos entre corchetes cuadrados ([...])	Se pierde el audio.
Descripción entre corchetes	Descripción escrita de una gesticulación que se haya hecho.

cuadrados ([*descripción*])	
Números entre llaves ({00:00})	Segundo del vídeo en el que comienza a hablar acompañado de gesticulaciones.
Descripción entre numerales (#descripción#)	Sonido externo que interfiere en el dialogo.
*	Inicio de la discusión acerca de las rectas.
**	Inicio de la discusión acerca de las parábolas.
***	Inicio de la discusión acerca de las cúbicas.
(a)	Inicio de la discusión acerca de la multiplicidad
(b)	Inicio de la discusión acerca de la relación signo – raíz
(c)	Inicio de la discusión acerca de la relación coeficiente – raíz
ÇÇÇ	Inicio del anexo de música propuesto por J

Elaboración propia.

Y el tercer método de registro de la información fue la bitácora en formato libre por parte de una observadora no participante. La observadora es estudiante de maestría en ciencias con especialidad en Matemática Educativa del Cinvestav – IPN y conocía de antemano la propuesta del diseño de la situación experimental. En el momento de la implementación contaba con una copia de la situación para tener un conocimiento de cuáles eran las preguntas que seguían y la intencionalidad con ellas. La finalidad de la observación por parte de una investigadora no participante fue comparar los puntos de vista de alguien con más experiencia al trabajar con estudiantes con discapacidad visual ("A" en la notación de la transcripción) y alguien que comienza a interactuar con dicha ellos (Al no tener interacciones en la implementación de la situación exploratoria no se le asignó algún símbolo). La transcripción de la bitácora se está en el Anexo VIII.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICO

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS HISTÓRICO–EPISTEMOLÓGICO

El análisis histórico–epistemológico que tiene como propósito identificar prácticas asociadas a las soluciones de ecuaciones polinómicas desde su génesis. Tales prácticas fungirán posteriormente como base del diseño de una situación exploratoria con el estudiantado con discapacidad visual. Las obras elegidas para realizar el análisis de prácticas son De Æqvationum Recognitione Et Emendatione Tractatus Duo de Viète (1646) y La Géométrie de Descartes (1637). La primera de ellas se trabaja con las soluciones a ecuaciones polinómicas de grado dos en adelante, tiene la peculiaridad de que son aquellas formas que no podían ser resueltas por la Zetética conocida hasta el momento, y presenta una solución a la ecuación en términos de sus coeficientes. Además, es una obra que marcó un punto de inflexión al pasar del trabajo desde una *logística numerosa* hacia una *logística speciosa*, es decir, trabajar con las ecuaciones de una forma más próxima a como se les trata actualmente. En la segunda de ellas es donde se encuentra enunciada por primera vez lo que hoy se conoce como “La regla de los signos de Descartes”, que establece una relación entre los signos de los coeficientes y el posible signo de las raíces. Todo esto se efectúa en un contexto que carece de imágenes o esquemas en las obras o secciones donde aparece, lo cual resulta oportuno al trabajar con una población que, de inicio, “carece de imágenes visuales”.

Este capítulo se divide en cuatro secciones principalmente: “Fraçois Viète” y “René Descartes”, donde se explica grosso modo sobre sus obras y los escenarios donde emergieron sus respectivos escritos utilizados en esta investigación; “Análisis de prácticas”, donde se muestran las prácticas inferidas en las obras; y “Exclusión por el discurso Matemático Escolar”, con la información de libros de texto de nivel medio superior y superior usados en México donde se trata de bosquejar una primera aproximación a la forma en la que el dME excluye de forma epistémica en la solución de ecuaciones polinómicas.

5.1 François Viète

François Viète (1540 – 1603) fue un abogado francés interesado en la matemática. Él realizó grandes aportes a la trigonometría, geometría, astronomía y álgebra, siendo esta última el área de interés de esta investigación. Una de sus obras más significativas es *Opera Mathematica* publicada en 1646 por Frans van Schooten quien recopiló los textos de Viète en un solo documento, empero no incluyó los dos trabajos sobre trigonometría publicados en 1579, ni el último borrador sobre astronomía (Oaks, 2018). La Figura 5.1 enlista de los trabajos que conforman *Opera Mathematica*.

Figura 5.1 *Índice de Opera Mathematica (1646).*

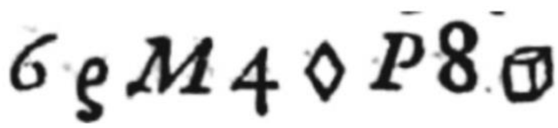
CATALOGVS OPERVM.

I.
Isagoge in Artem Analyticam. pag. 1.
II.
Ad Logisticen Speciosam Notæ priores. 13.
III.
Zeteticorum libri quinque. 42.
IV.
De Æquationum Recognitione, & Emendatione Tractatus duo. 82. 127.
V.
De Numerosâ Potestatum ad Exegesin Resolutione. 163.
VI.
Effectionum Geometricarum Canonica Recensio. 229.
VII.
Supplementum Geometriæ. 240.
VIII.
Pseudo-Mesolabum & alia quædam adjuncta Capitula. 258.
IX.
Theoremata ad Sectiones Angulares. 287.
X.
Responsum ad Problema, quod omnibus Mathematicis totius Orbis construendum proposuit Adrianus Romanus. 305.
XI.
Apollonius Gallus. 325.
XII.
Variorum de rebus Mathematicis Responsorum Liber VIII. 347.
XIII.
Munimen adversùs nova Cyclometrica. 437.
XIV.
Ratio Kalendarij verè Gregoriani. 449.
XV.
Kalendarium Gregorianum perpetuum. 505.
XVI.
Adversùs Christophorum Clavium Expostulatio. 542.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646).

Isogage in analyticam art fue su contribución más notable al álgebra debido al simbolismo que propone, bastante similar a la notación actual (Collete, 1986). Además, de establecer que las proporciones pueden resolverse en igualdades y viceversa. Para lograr el uso de esa notación fue necesario utilizar magnitudes geométricas que son metrizables, lo cual facilita el cálculo numérico con ellas. Esto les adjudica una doble naturaleza con respecto a su tamaño: las magnitudes tienen medidas no aritméticas en comparación con otras magnitudes que se muestran en la razón y la proporción, y también pueden adoptar medidas numéricas (Oaks, 2018). Los géneros que usa para esas magnitudes son *latis*, *planum*, y *solidum* para expresiones o términos lineales, cuadráticos y cúbicos, respectivamente. Para los géneros superiores a tres, Viète utiliza una combinación de los primeros tres vocablos; por ejemplo, para una magnitud de grado cinco sería nombrada *planum–solidum*. Al mismo tiempo, utiliza vocales para referirse a cantidades desconocidas, A y E principalmente; y consonantes para las cantidades conocidas, B, D y Z preferentemente. Esto se diferencia de otras notaciones de la época en la que había símbolos iconográficos. Por ejemplo, Borrel (1559) escribe la expresión "$6x - 4x^2 + 8x^3$" es como se muestra en la Figura 5.2

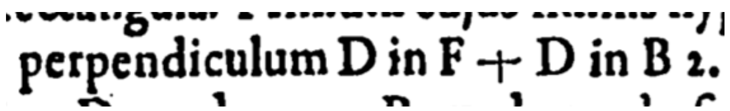
Figura 5.2 *Expresión algebraica en la Obra de Borrel.*



Tomado de Borrel (1559).

Todos los números con los que opera son magnitudes geométricas que involucran cantidades naturales, racionales y/o irracionales positivos mayores a cero. También cabe destacar que los términos por sí solos representan un valor, y no una clase, ya que por ejemplo, Viète escribe "A *cubus*" en lugar de "1A *cubus*". Por otro lado, la preposición *in* alude a una multiplicación, por mencionar un caso podría ser "D *in* B2" (Figura 5.3) que, en notación actual, correspondería a "2DB".

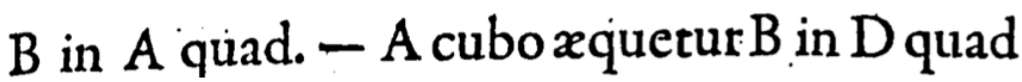
Figura 5.3 *Expresión algebraica donde usa la preposición "in" en la Obra de Viète.*


perpendiculum D in F + D in B 2.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 40).

Para el caso de los exponentes, Viète utiliza los términos *quadratum / quad* para los términos cuadráticos, y *cubus / cubo* para los términos cúbicos, como lo presenta la Figura 5.4. Para los exponentes mayores a tres usa combinaciones, por ejemplo, para el caso de la potencia siete sería *quad.-quad.-cubus*.

Figura 5.4 *Expresión algebraica en la Obra de Viète en la que usa los términos "quad"/"cubo"*


B in A quad. — A cubo æquetur B in D quad

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 89). En notación actual la expresión es $BA^2 - A^3 = BD^2$.

En el capítulo II: *De symbolis aequalitatum y proportionum* de *Isogage in Artem Analyticam*, Viète establece las dieciséis reglas fundamentales de las ecuaciones y proporciones, las cuales son:

1. El todo es igual a [la suma de] sus partes.
2. Las cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí.

3. Si los iguales se suman a los iguales, las sumas son iguales.
4. Si se restan cosas iguales a cosas iguales, los restos son iguales.
5. Si se multiplican iguales por iguales, los productos son iguales.
6. Si se dividen iguales entre iguales, los cocientes son iguales.
7. Lo que está en proporción directa está en proporción inversa y alternativamente.
8. Si se suman proporcionales semejantes con proporcionales semejantes, las sumas son proporcionales.
9. Si se restan proporcionales semejantes a proporcionales semejantes los restos son proporcionales.
10. Si los proporcionales se multiplican proporcionalmente, los productos son proporcionales.
11. Si los proporcionales se dividen proporcionalmente, los cocientes son proporcionales.
12. Una ecuación o proporción no se modifica por la multiplicación o división [de sus términos].
13. La [suma de los] productos de las diversas partes [de un conjunto] es igual al producto del conjunto.
14. Las multiplicaciones consecutivas de términos y las divisiones consecutivas de términos dan los mismos resultados independientemente del orden en que se realice la multiplicación o la división de los términos.
15. Si hay tres o cuatro términos tales que el producto de los extremos es igual al cuadrado de la media o al producto de los medios, son proporcionales. A la inversa,
16. Si hay tres o cuatro términos y el primero es al segundo como el segundo o el tercero es al último, el producto de los extremos será igual al producto de los medios. Así, puede decirse que una proporción es aquello de lo que se compone una ecuación y una ecuación aquello en lo que se resuelve una proporción (pp.11 – 12).

Estas reglas son las que rigen la obra de Viète, por lo que fue necesario tenerlas en cuenta al estudiar sus demás escritos. Uno de los grandes aportes de este autor es transitar de una *logística numerosa*, que es en la que los analistas de aquella época ejercían sus talentos con números únicamente, a una *logística speciosa,* que compara magnitudes entre sí, y las relaciona con la ley de los términos homogéneos, que es la que permite comparar magnitudes de igual dimensión. Estas magnitudes son el cuadrado, el cubo, el cuadrado-cuadrado, y así sucesivamente, cuyos géneros son los ya señalados *latis, planum, solidum,* etcétera (Guzmán, 1989).

Esta investigación se ocupó de *De Æqvationum Recognitione Et Emendatione Tractatus Duo* para identificar *¿qué hace?*, *¿cómo hace?* y *¿para qué hace?*, al seguir el análisis fino de acciones propuesto por Cantoral, Montiel, Reyes-Gasperini (2015). Se eligió este fragmento de la obra debido a que muestra la obra más como una teoría de ecuaciones que como un recetario. Esto es así porque Viète buscaba la generalización de las ecuaciones, *i.e.*, dada una situación, cuál es la forma más adecuada de resolverla si las proporciones pueden resolverse en igualdades y viceversa. Se ejemplificarán únicamente los casos relacionados con ecuaciones de grado dos y tres.

5.1.1 De æqvationum recognitione et emendatione tractatus duo

En este texto Viète presentó métodos para resolver ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, principalmente. Aunque logró generalizar algunos métodos para encontrar las raíces de ecuaciones de grados superiores. Además, estaba al tanto de la relación entre las raíces positivas de una ecuación y los coeficientes de las distintas potencias de la incógnita.

5.1.1.1 Primer tratado

Se completa el amplio principio tratado de forma general sobre la resolución numérica de las potencias, ya que las ecuaciones necesitan con frecuencia una preparación antes de resolverlas, especialmente cuando las potencias principales se restan de términos homogéneos, cuando las potencias tienen afecciones positivas y negativas y las negativas superan a las positivas y, finalmente, cuando las ecuaciones aparecen con fracciones o irracionales.

En geometría, por cierto, la presencia de una fracción o de un irracional no suele impedir que las ecuaciones se resuelvan fácilmente, ni tampoco la *imperfección* de un negativo, pues el tema sobre el que trabaja el geómetra es siempre seguro. Pero la multiplicidad de afectos es un obstáculo, y cuanto mayor es la potencia y el orden de un afecto, más probable es que aparezca una fracción o un irracional en la solución de un problema. De ahí la necesidad de realizar una teoría de ecuaciones que permita encontrar una solución satisfactoria a partir de la cual desarrollará un teorema para la construcción y explicación de cada una.

El primer teorema que hace alusión explícitamente a una ecuación es el teorema I del capítulo III (Figura 5.5).

Figura 5.5 *Primer tratado. Capítulo III. Teorema I.*

THEOREMA I.
ΚΑΤΑΦΑΤΙΚΗΣ.

SI A quad. + B in A, æquetur Z quad: ſunt tres proportionales radices, quarum media eſt Z, differentia verò extremarum B; & fit A minor extrema.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 85).

La traducción sería

Si $A^2 + BA = Z^2$ *hay tres proporcionales cuya media es Z y la diferencia entre los extremos es B, por lo que A es el extremo menor.*

La traducción de la demostración que se proporciona sería:

Sea, pues, Z la media de las tres proporciones y B la diferencia entre los extremos. Hay que encontrar el extremo menor.

Sea A. El mayor, entonces, será $A + B$. *Multipliquemos el mayor por el menor, haciendo* $A^2 + AB$. *Como son proporcionales, el producto de los extremos es igual al cuadrado de la media. Por tanto,* $A^2 + AB = Z^2$. *Que es lo que se ha dicho.*

Un caso particular que propone Viète (1646, p. 85) podría ser la ecuación $x^2 + 10x = 144$. Nótese que $A \coloneqq x; B \coloneqq 10; Z \coloneqq 14$. Entonces x es la más pequeña de las tres proporcionales, 12 es la media y la mayor es $x + 10$. Por lo que se debe cumplir entonces

$$\frac{x}{12} = \frac{12}{x + 10}$$

De lo que se sigue que $x = 8$, para cumplir la proporción; las tres proporcionales son 8, 12 y 18. Se puede seguir que 8 es la solución positiva a la ecuación cuadrática; empero, para el caso de la solución negativa, que es $x = -18$, Viète no la considera en este caso, ya que, como se señaló antes se restringe únicamente a soluciones reales positivas mayores a cero.

Dada una ecuación cuadrática, es posible reconstruir la relación entre sus raíces y así tener una manera de encontrarlas. En relación con eso, la ecuación se resuelve por medio de la relación entre las raíces y su media proporcional, y esta última es la raíz cuadrada del término independiente (Ríos, 2020).

De este ejemplo se puede reconocer lo que actualmente se conoce como “las fórmulas de Viète” o “las fórmulas de Cardano–Viète” en la matemática escolar. Estas establecen la relación entre las soluciones de la ecuación que permiten factorizar un polinomio y determinar sus coeficientes por medio de la suma y la multiplicación de los valores que satisfacen la ecuación. En Ríos (2020) al respecto de esta forma de resolver las ecuaciones de segundo grado menciona:

> De la forma del problema, si a y b son las dos raíces que se buscan, entonces: $a + b=s$ y $ab=p$, de donde, $a(a-s)=p \rightarrow a^2 - sa=p$, así,dada la relación entre dos raíces se construye una ecuación que las conserva y cuyos coeficientes son precisamente esas relaciones (p. 81).

En el teorema I del capítulo XVIII del primer tratado (Figura 5.6) se puede ver un caso similar al presentado en el teorema anterior sólo que con el término cuadrático afectado de manera negativa (coeficiente –1).

Figura 5.6 *Primer tratado. Capítulo XVIII. Teorema I.*

De affectis ſub depreſſiore gradu, ſeu latere.

THEOREMA I.

SI B in A — A quad., æquetur Z plano: eſt B compoſita è duobus lateribus, ſub quibus quod fit rectangulum, æquum eſt Z plano: & fit A latus majus minuſve.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 111).

La traducción sería:

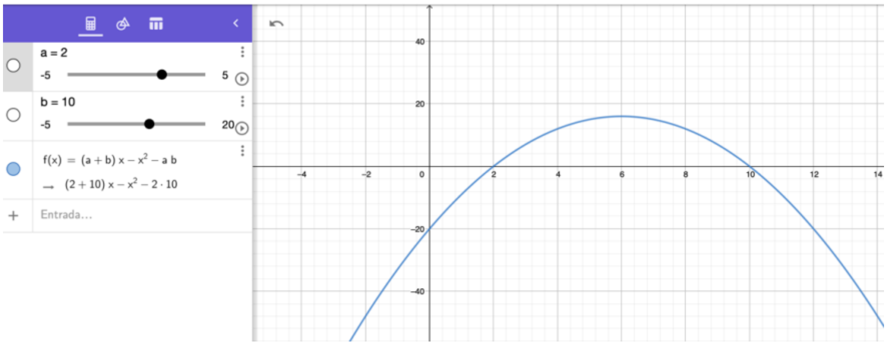
Si $BA - A^2 = Z^p$*, B es la suma de dos raíces cuyo producto es* Z^p*, lo que hace que A sea la raíz más grande o más pequeña.*

Viète a partir de cierto punto comienza a omitir las demostraciones debido a que recurre a los teoremas, proposiciones, etcétera, que ya escribió en los cinco libros de Zetética, o hace alusión a ellos para omitir ciertos pasos. La que podría ser la demostración a este teorema sería un corolario de la demostración del Teorema I del Capítulo III del primer tratado (ejemplo anterior), sólo que con A como la raíz mayor, Z la media y B–A la menor. Además, cuando son cosas que ya demostró antes o que pueden ser corolarios de cosas que ya mostró, sólo se restringe a sólo dar ejemplos particulares.

Una ecuación que haga alusión a este teorema podría ser $12x - x^2 = 20$, cuyas raíces son $x_1 = 2; x_2 = 10$, ya que cumplen que su suma es 12, y su producto 20 (Figura 5.7). Por ejemplo, la proporción que sirve para resolver este caso es la siguiente:

$$\frac{12 - x}{10} = \frac{2}{x}$$

Figura 5.7 *Ejemplo gráfico de la relación entre las raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática.*



Elaboración propia.

Con elementos tales como la "afección" positiva o negativa del término cuadrático, la suma de las raíces y su producto, podemos recrear gráficamente la ecuación en términos de una función polinómica. Y así, identificar sus raíces, como en la Figura 5.7.

En cuanto a los ejemplos de ecuaciones cúbicas, dentro del primer tratado tenemos el teorema II del capítulo IV (Figura 5.8).

Figura 5.8 *Primer tratado. Capítulo IV. Teorema II.*

THEOREMA II.

ΑΠΟΦΑΤΙΚΗΣ.

SI A cubus — B quadr. in A, æquetur B quad. in D: ſunt quatuor continue proportionales quarum prima minor inter extremas eſt B, differentia ſecundæ & quartæ D, & fit A ſecunda.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 87).

La traducción sería:

Si $A^3 - B^2A = B^2D$ son cuatro proporcionales continuas, la primera o más pequeña de las cuales es B y la diferencia entre la segunda y la cuarta es D, haciendo que A sea la segunda.

La traducción de la demostración sería:

Esto se desprende de la zética, dado el primero y menor de los extremos en una serie de cuatro proporcionales continuados y la diferencia entre el segundo y el cuarto, para encontrar el segundo.

Sea B el primer o menor extremo y D la diferencia entre el segundo y el cuarto. Hay que encontrar las proporciones continuas.

Sea A el segundo. El cuarto, por tanto, será $A + D$. *Además, el cubo del segundo es igual al producto del cuarto por el cuadrado del primero. Por tanto,* $A^3 = B^2A + B^2D$, *por trasposición* $A^3 - B^2A = B^2D$.

Un ejemplo numérico de lo anterior podría ser $x^3 - 64x = 960$, para la que se sigue que $A = x; B = 8; D = 15$. Lo que significa que la menor de las cuatro proporcionales es 8, y la diferencia entre la segunda y la cuarta es 15, por lo que la ecuación tiene como solución $x = 12$. Las cuatro proporcionales son 8, 12, 18 y 27 ya que cumplen que $\frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{18}{27}$.

Un caso de ecuación cúbica en el que se "pierde" una raíz por ser negativa puede ser el teorema II del capítulo XVIII (Figura 5.9).

Figura 5.9 *Primer tratado. Capítulo XVIII. Teorema II.*

THEOREMA II.

Si B planum in A—A cubo, æquetur Z ſolido: eſt B planum compoſitum ex quadratis trium proportionalium: & Z ſolidum quod fit ductu alterius extremæ in aggregatum quadratorum à reliquis: & fit A prima vel tertia.

Sunto proportionales. 2. √20. 10. dicetur 124 N — 1 C, æquari 240. & fit 1 N 2, vel 10.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 111).

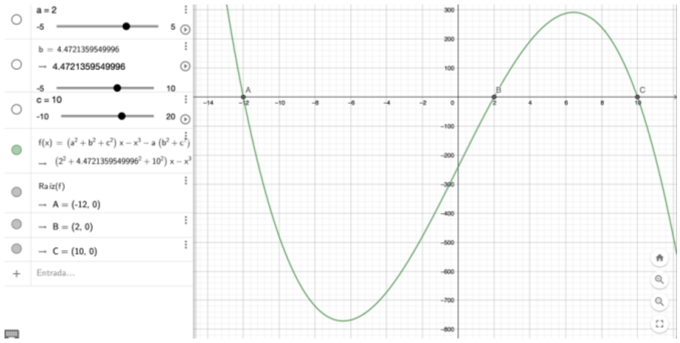
La traducción sería:

Si $B^pA - A^3 = Z^s$ *donde* B^p *es la suma de los cuadrados de tres proporcionales y* Z^s *es el producto de uno de los extremos y la suma de los cuadrados de los otros dos, lo que hace que A sea el primero o el tercero.*

El ejemplo numérico que presenta Viète en este caso es $124x - x^3 = 240$. Partiendo de las tres proporcionales $2, \sqrt{20}, 10$ (ya que $\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{10}$). De donde se sigue que $A = x; B^p = 124; Z^s = 240$ (Figura 5.10). Por lo que $x = 2$ o $x = 10$. Siendo el menor, o el mayor, de las tres proporcionales, respectivamente. Por ejemplo, para el caso de la raíz menor, una proporcional que sirve para resolverlo es

$$\frac{124 - x^2}{80} = \frac{3}{x}$$

Figura 5.10 *Ejemplo gráfico de la solución a la ecuación* $124x - x^3 = 240$.



Elaboración propia.

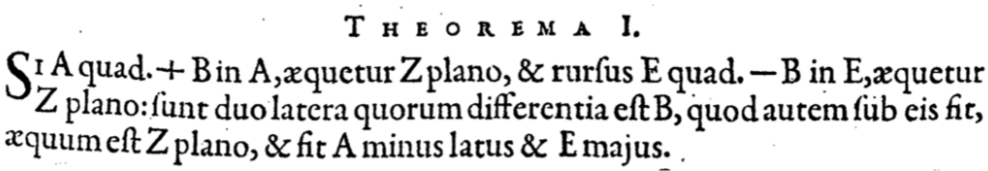
Como muestra la Figura 5.10, al recrear la ecuación en términos de una función polinómica de grado tres se observan tres raíces: las dos reconocidas por las proporciones con las que trabaja Viète ($x_2 = 2; x_3 = 10$), sin que refiera la raíz $x_1 = -12$ no la menciona en algún momento. Para los polinomios que cumplan las características señaladas en el teorema II del capítulo XVIII del primer tratado podemos llegar a la siguiente generalización en términos actuales.

Sean $a, c \in \mathbb{R}^+$ *y* $b = \sqrt{ac}$. *Si* $(a^2 + b^2 + c^2)x - x^3 = a(b^2 + c^2)$, *entonces las soluciones a la ecuación son* $x_1 = -(a + c); x_2 = a; x_3 = c$.

Una manera en la que Viète "recupera" las raíces o soluciones negativas la expone en el capítulo XIX *Æqualitatum contradicentium constitutiva* (Los componentes de las ecuaciones contradictorias) para las ecuaciones de grado par. En los capítulos XX *Æqualitum inversarum constitutiva inversarum denique systatica sunt hæc* (Los componentes de las ecuaciones inversas) y XXI *Alia rursus æqualitatum inversarum constitutiva* (Otra contrucción de ecuaciones inversas) para aquellas de grado impar.

Respecto a las ecuaciones de grado par, en particular ecuaciones cuadráticas se tiene el siguiente caso (Figura 5.11).

Figura 5.11 *Primer tratado. Capítulo XIX. Teorema I.*



THEOREMA I.

SI A quad. + B in A, æquetur Z plano, & rurſus E quad. — B in E, æquetur Z plano: ſunt duo latera quorum differentia eſt B, quod autem ſub eis fit, æquum eſt Z plano, & fit A minus latus & E majus.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 123).

La traducción sería:

Si $A^2 + BA = Z^p$ y $E^2 - BE = Z^p$ hay dos raíces cuya diferencia es B y cuyo producto es igual a Z^p a lo que hace que A sea la raíz más pequeña y E la más grande.

Para ilustrar esto se puede tomar $x^2 + x = 2$ y $y^2 - y = 2$. De la primera ecuación las raíces son $x_1 = -2; x_2 = 1$. Mientras que para la segunda son $y_1 = -1; y_2 = 2$. Si bien estrictamente no son las mismas raíces, sí lo son en valor absoluto. Y dadas las condiciones en las que se desarrolló la obra y el tipo de problemas que pretendía resolver (astronómicos, criptográficos, comercio), las raíces negativas no eran soluciones que fueran efectivas en esos contextos. Una interpretación actual podría reconocer que al ser una ecuación cuadrática tiene dos posibles soluciones reales y recurrir a estas formas de "rescatar" el valor negativo muestra la racionalidad con la que trabajó Viète. Matemáticamente hablando, esto es posible a la reflexión de una función respecto al eje y en el plano cartesiano. Al tener $f(x) = x^2 + bx + c$, y evaluar en $f(-x)$ se logra esa reflexión. Si bien no se puede especular si éste fue el pensamiento de Viète, es una estrategia de resolución poderosa.

Con relación a las ecuaciones cúbicas Viète tiene más teoremas. Esto se debe a la forma en la que se relacionan los términos, pero al igual que en el caso anterior, se les puede explicar con la simetría de funciones y evaluar en $f(-x)$ en cada uno de los casos. Para presentar un caso referente a esto tenemos la Figura 5.12.

Figura 5.12 *Primer tratado. Capítulo XX. Teorema III.*

THEOREMA III.

SI B in A quad. + A cubo, æquetur Z ſolido, & rurſus B in E quad. — E cubo, æquetur Z ſolido: ſunt tres proportionales, quarum alterne ſumptarum differentia eſt B. Fit autem Z ſolidum ductu alterutrius extremæ in quadratum differentię reliquarum alterne ſumptarum: & dum intelligitur prima minor inter extremas, eſt A differentia alterne ſumpta duarum primarum, E differentia duarum poſtremarum.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 125).

La traducción sería:

Si $BA^2 + A^3 = Z^s$ y $BE^2 - E^3 = Z^s$ son tres proporcionales, la diferencia entre las cuales, tomadas alternativamente es B. Esto hace que Z^s sea el producto de cualquiera de los extremos y el cuadrado de la diferencia entre los otros. A será la diferencia entre los dos primeros y E la diferencia entre los últimos dos.

Para comprobar esto Viète propone que las tres proporcionales sean 1, 2, 4. A partir de estos datos construye las ecuaciones $3x^2 - x^3 = 4$ y $3y^2 + y^3 = 4$, cuyas raíces son $x_1 = -2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$ y $y_1 = -1$; $y_2 = 2$; $y_3 = 2$, respectivamente. Cabe destacar que Viète no señala particularmente el hecho de que haya una solución doble a estas ecuaciones, ya que, al "recobrar" las raíces negativas, podría darse la idea de que al final del proceso se obtendrían tres valores distintos que sean solución por ser una ecuación cúbica la que se está resolviendo. Pero el autor no menciona nada más, salvo que las soluciones son 1 y 2.

Una generalización sobre este teorema podría ser:

Sean $a,c \in \mathbb{R}$ y $b = \sqrt{ac}$. Si $(a - b + c)x^2 + x^3 = a(c - b)^2$ sus soluciones son $x_1 = -(c - b)$; $x_2 = -b$; $x_3 = b - a$. Para $(a - b + c)y^2 - y^3 = a(c - b)^2$ sus soluciones son $y_1 = -x_3$; $y_2 = -x_2$; $y_3 = -x_1$.

Los otros casos que retoma Viète son de ecuaciones cúbicas de la forma $B^p - A^3 = Z^s$ y $B^pA - A^3 = Z^s$, principalmente. Los otros casos son variaciones de estos dos y el desarrollado en el ejemplo, lo que muestra la racionalidad con la que recobra las cantidades que satisfacen la proporción.

5.1.1.2 Segundo tratado

El segundo tratado de Viète en *Æquationum recognitione et emendatione tractatus duo* presenta el análisis numérico de cinco métodos de preparación para encontrar las soluciones numéricas de ecuaciones que por métodos usuales o ya presentados en su zetética resultan complejos. Esto es, en el segundo tratado Viète presenta formas de trabajar con los defectos e impedimentos de las ecuaciones para resolverlas. Los métodos a los que hace alusión son:

1. *Expurgatio per uncias* (purgando por fracciones)
2. *Transmutatio Πρϖτον–εχατον* (Primera–Última transformación)
3. *Anastrophe* (Anástrofe)
4. *Isomœria* (Isomería)
5. *Climactica Paraplerosis* (Cierre de la potencia)

La primera forma de tratamiento de ecuaciones es el remedio más seguro y más fácilmente disponible para una multiplicidad de afecciones. Es una especie de transformación por adición o sustracción. Mediante ella, las ecuaciones con una afección en alguno de los términos, que complique su solución de acuerdo a lo establecido en la *Zetética*, pueden liberarse de esta afección sin destruir la racionalidad de los números. En los cuadráticos es cuestión de sumar o restar la mitad del coeficiente de la afección a o de la raíz, en los cúbicos la tercera parte, y así sucesivamente dependiendo de qué grado sea la ecuación.

Por ejemplo, si tenemos $A^2 + 2BA = Z^p$ podemos ver que el término lineal tiene una afección positiva, la cual se produjo por la adición de la mitad del coeficiente del término lineal, tal como exige la naturaleza del cuadrado. Para superar la modificación Viète propone purgar a la mitad dicho coeficiente. Para ello es necesario que A+B=E de donde se sigue que $E - B$ más el producto de $2B$ y $E - B$ será igual a Z^p. Es decir, si sustituimos en la ecuación original A por $E - B$ tenemos lo siguiente

$$A^2 + 2BA = Z^p$$
$$(E - B)^2 + 2B(E - B) = Z^p$$
$$E^2 = Z^p + B^2$$

con lo que cuya nueva ecuación está libre de afectos lineales que sí tenía la ecuación original. Además, cuando E se conoce, A también se puede conocer, pues la diferencia entre las dos raíces ya está dada.

Viète propone sustituciones que dependen de la forma de la ecuación y dónde se localice la afección. Por mencionar algunos casos, si la ecuación es afectada directamente por un negativo, como en $A^2 - 2BA = Z^p$ o en $A^3 - 3BA^2 = Z^s$ la sustitución debe ser $A - B = E$. Mientras que si la ecuación propuesta es la de una potencia afectada por una negativa inversa, como en $2BA - A^2 = Z^p$ o en $3BA - A^3 = Z^s$ la sugerencia es $B - A = E$.

Una forma numérica de ver esto podría ser: si $A^3 - 3BA^2 = Z^s$, con la sustitución presentada anteriormente llegamos a $E^3 - 3B^2E = Z^s + 2B^3$. En el caso particular de $x^3 - 6x^2 = 400$ se llega a $y^3 - 12y = 416$. Para la segunda ecuación, es posible encontrar su solución, $y_1 = 8$. Al conocer esa solución y B=2, por la forma en la que están construidas las ecuaciones, tenemos que $x_1 = 10$.

La primera y última transformación es para las ecuaciones en las que la potencia tiene un término homogéneo con un afecto "muy fuerte", que se pueden enmendar mediante una relación implícita, *i.e.*, dividiendo el término homogéneo de comparación por la raíz desconocida. De ésta surge otra raíz desconocida en términos de la cual la ecuación original se replantea y se establece una nueva. Con este método, las afecciones positivas se convierten en negativas, y viceversa, sin destruir la racionalidad de los números. Este método en ocasiones es conveniente en casos donde se trabaja con irracionales.

Sea $A^3 - B^pA = Z^s$. Esta ecuación no puede ser resuelta, ya que Z^s es una potencia con una afección negativa y en el arte no se contemplan este tipo de situaciones con negativos. Por lo tanto, es necesario que se transforme en una ecuación que sí sea explicable con una afección positiva.

Así que Viète sugiere que se tome $\frac{Z^s}{A} = E^p$, de lo que se sigue que $A = \frac{Z^s}{E^p}$. Sustituyendo tenemos $\frac{Z^{sss}}{E^{ppp}} - \frac{B^pZ^s}{E^p} = Z^s$. Multiplicando todo por E^{ppp} se obtiene $Z^{sss} - B^pZ^sE^{pp} = Z^sE^{ppp}$. Dividiendo por Z^s y despejando se llega a $E^{ppp} + B^pE^{pp} = Z^{ss}$. Reescribiendo $(E^p)^3 + B^p(E^p)^2 = (Z^s)^2$.

Es posible tratar esta ecuación por el análisis usual de potencias cúbicas afectadas positivamente por un término inferior y un coeficiente dado. La proporción revelada por la ecuación en A fue que $A = \sqrt[3]{Z^s}$, como $\sqrt[3]{Z^{ss}}$ es a $A^2 - B^p$, es decir, a E^p. De esta relación proviene el nombre "primero–último".

Para ilustrar esto en un ejemplo numérico se considera la ecuación $x^3 - 96x = 40$ cuya construcción parte de la sustitución $y = \frac{40}{x}$.

Entonces se sigue que $\left(\frac{40}{y}\right)^3 - 96\left(\frac{40}{y}\right) = 40$. Desarrollando las potencias y los productos dados $\frac{64000}{y^3} - \frac{3840}{y} = 40$. Multiplicando ambos lados de la igualdad por y^3 y simplificando se obtiene $64000 - 3840 = 40y^3$. Dividiendo entre 40 en ambos lados y acomodando de manera adecuada se llega a $y^3 + 96y^2 = 1600$. Con la nueva ecuación es posible encontrar la solución positiva con el arte, $y_1 = 4$. Luego, de la relación entre y y x usada para la construcción de ecuación en términos de y se deduce que $x_1 = 10$.

Siguiendo con el ejemplo anterior, las raíces negativas en la ecuación en términos de y son $y_2 = 10(\sqrt{21} - 5)$ y $y_3 = -10(5 + \sqrt{21})$. Pero al ser negativas, como ya se ha mencionado, Viète no las explicita en su escrito. Sin embargo, al conocerlas y la relación $y = \frac{40}{x}$ utilizada para deshacerse de las afecciones que impedían la solución de la ecuación original, podemos encontrar las otras dos raíces en la ecuación en términos de x. Las raíces son $x_2 = (\sqrt{21} - 5)$ y $x_3 = -(5 + \sqrt{21})$. Por lo que, aunque en el segundo tratado no se trabaje con las raíces negativas, los métodos de Viéte conservan la racionalidad de las raíces, sean positivas o no.

Sobre la anástrofe se puede decir que es la transformación de las ecuaciones negativas inversas en sus correlaciones. Se lleva a cabo de manera que la ecuación original con la ayuda de su correlativa puede reducirse mediante un descenso “climático” irregular a una potencia inferior, *i.e.*, dada una ecuación se puede reducir el grado a uno inferior con ayuda de ciertas relaciones en las sumas o diferencias de cubos de manera tal que su solución es más sencilla que en la ecuación original. Las anástrofes sólo se pueden llevar a cabo en ecuaciones cúbicas o de grado impar mayores a tres. Para llevar a cabo una anástrofe primero a la potencia de la raíz desconocida se añade la potencia igualmente elevada de otra raíz. La suma de las dos potencias en el orden mencionado puede ser fácilmente dividida. Luego se equipara el término de comparación homogéneo transpuesto y la potencia añadida con el primer término creado, *i.e.*, el que admite la división. Esto crea una ecuación correlativa, ya sea positiva o negativa. Conociendo la raíz del término añadido, surgen por un lado términos que pueden compararse con los otros del otro lado, y la ecuación que de otro modo sólo sería soluble con dificultad, puede reducirse a una que se resuelve de manera más simple.

Para explicar esto de forma numérica se toma el teorema II del capítulo III (Figura 5.13).

Figura 5.13 *Segundo tratado. Capítulo III. Teorema II.*

THEOREMA II.

SI B in A quad. — A cubo, æquetur Z ſolido, & E cubus + B in E quad., æquetur Z ſolido. E autem innoteſcat eſſe D. $\overline{D+B}$ in A — A quad., æquabitur B in D + D quad.

Nota: Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 136).

La traducción sería:

Si $BA^2 - A^3 = Z^s$ *y* $E^3 + BE^2 = Z^s$, *y se sabe que* $E = D$, *entonces* $A(D + B) - A^2 = BD + D^2$.

El teorema es una generalización a partir del problema que surge al intentar resolver $BA^2 - A^3 = Z^s$, ya que el cubo se resta de un sólido y tiene dos raíces (positivas), por lo que no es posible su resolución a través del arte analítico. Por tanto, se requiere una anástrofe y para ello se emplea una trasposición adecuada de los términos dados, tal como $A^3 = -Z^s + BA^2$. Se añade E^3 en ambos lados para mantener la igualdad, la que resulta en $A^3 + E^3 = BA^2 + E^3 - Z^s$. El primer miembro de la ecuación puede dividirse entre $(A + E)$. Cuando la suma de las raíces se divide en la suma de los cubos, el resultado es la suma de los cuadrados menos su producto. Ahora es necesario que ahora el otro miembro de la ecuación, al ser dividido entre $(A + E)$, dé un plano que pueda ser comparado con el primer cociente. Proponiendo $Z^s - E^3 = BE^2$ tenemos que $E^3 = Z^s - BE^2$. Por lo tanto, $A^3 + E^3 = BA^2 - BE^2$. Por consiguiente, un sólido afectado por la adición de un cubo, se debe reducir dividiéndolo entre $(A + E)$ como venimos de señalar, lo cual tiene como resulta en $A^2 - EA + E^2 = B(A - E)$. E, empero, se sabe que es D por resolución y por lo tanto se establece una nueva ecuación de grado dos: $BA + DA - A^2 = D^2 + BD$. Luego, una ecuación con un negativo inverso se ha transformado en una del mismo orden que es positiva y dada la raíz de la nueva ecuación se ha hecho un descenso irregular a una potencia inferior.

Un caso numérico de este teorema es $7x^2 - x^3 = 36$. De ahí se transforma a $y^3 + 7y^2 = 36$. Siguiendo el arte se tiene la raíz positiva $y_1 = 2$ (las negativas son $y_2 = -3; y_3 = -6$). Con el valor de la solución se puede llevar a cabo la anástrofe, teniendo así $9x - x^2 = 18$. Al resolver la cuadrática se tiene que $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$, que son valores simétricos a las raíces que en la ecuación no se podían localizar debido a que los métodos usados no se aplican para valores negativos.

En otro orden de ideas, la isomería es una especie de transformación por multiplicación, llevada a cabo con el fin de liberar ecuaciones de las fracciones por las cuales pueden ser afectadas. Las fracciones primero se reducen a un denominador común por reglas de la logística. El objetivo principal de la isomería es multiplicar o dividir, según sea el caso, la potencia de una ecuación dada y sus términos homogéneos de afecto y comparación por el mismo término o una de sus potencias.

Supóngase $A^3 + \frac{B^s A}{D} = Z^s$. Para dejar la ecuación libre de esa afección fraccionaria Viète supone $DA = E^p$, de lo cual se sigue que $A = \frac{E^p}{D}$. Por lo tanto, $\frac{(E^p)^3 + B^s D E^p}{D^3} = Z^s$. Multiplicando por D^3 se llega a $(E^p)^3 + B^s D E^p = D^3 Z^s$.

Numéricamente se puede mostrar que $x^3 + \frac{3}{2}x = 225$. De ahí se puede identificar que $A = x; Z^s = 225; D = 2; B^s = 3$. Por lo que al recurrir a la isomería se tiene la nueva ecuación $y^3 + 6y = 1800$. La raíz de la ecuación transformada será a la ecuación dada como 2 a 1. Entonces, usando el arte se tiene que la raíz de la ecuación en términos de y

es $y_1 = 12$. Y dada la relación de este valor con la raíz de la ecuación original se llega a $x_1 = 6$.

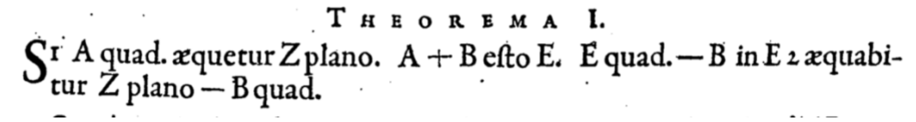
La quinta forma para tratar con ecuaciones, la *Symmetrica climactismus*, es una especie de elevación de la potencia de la ecuación. Se lleva a cabo si alguno de los términos de la ecuación dada es irracional. Se eleva a la potencia que sea necesaria (cuadrado, cubo, bi-cuadrada, ...) las veces que sea necesario hasta que todos los irracionales desaparezcan sin estropear la ecuación, ya que los productos de iguales son iguales.

Una muestra de una elevación simétrica es considerar la ecuación $A^3 - B^p A = \sqrt{Z^{ss}}$. Para eliminar el término irracional es necesario elevar ambos lados de la igualdad al cuadrado, ya que el la raíz cuadrada es la que está afectando al término independiente, por lo que se tiene $A^6 + B^{pp}A^2 - 2B^p A^2 = Z^{ss}$. Las ecuaciones que se resuelven con este método son de grados superiores a tres, por lo que no se profundizará en este estudio ya que el objetivo está centrado en ecuaciones de grados 1, 2 y 3. Sólo se muestra para ilustrar *grosso modo* como Viète las trabaja.

Viète tiene otros métodos “no estándar” en el resto del tratado para la resolución de ecuaciones. No se pueden establecer reglas para los casos irregulares ya que sus peculiaridades no son más limitadas que la fuerza y la habilidad del artífice para investigarlos. Empero, a fin de señalar algunos teoremas se muestran los siguientes ejemplos.

En el capítulo IX, el teorema I menciona lo siguiente (Figura 5.14)

Figura 5.14 *Segundo tratado. Capítulo IX. Teorema I.*


THEOREMA I.

SI A quad. æquetur Z plano. A + B esto E. E quad. — B in E 2 æquabitur Z plano — B quad.

Tomado de Opera Mathematica (Viète, 1646, p. 95).

La traducción sería:

Si $A^2 = Z^p$. *Además, si* $A + B = E$, *entonces* $E^2 - 2BE = Z^p - B^2$

La demostración se sigue a partir de la sustitución que se obtiene al despejar A en términos de B y E. Si $A + B = E$, entonces $A = E - B$. Sustituyendo en $A^2 = Z^p$ se tiene $(E - B)^2 = Z^p$. Desarrollando y acomodando adecuadamente se llega a $E^2 - 2BE =$

$Z^p - B^2$. Este tipo de sustituciones le sirven para transformar la ecuación en términos conocidos y poder resolverla con herramientas ya conocidas por él en los libros de Zetética. O en el arte.

También tiene reducciones anómalas de ciertas ecuaciones cúbicas a ecuaciones cuadráticas simples. Una muestra es si tenemos la ecuación $A^3 - 2B^2 = B^3$, entonces $A^2 + BA = B^2$. La prueba es la siguiente: *Está claro por trasposición que* $A^3 = B^3 + 2B^2A$. *Sumando* B^3 *en ambos lados* $A^3 + B^3 = 2B^3 + 2B^2A$. *Dividiendo entre* $A + B$, $A^2 + BA + B^2 = 2B^2$. *Restando* B^2 *en ambos lados* $A^2 + BA = B^2$.

Un caso numérico para mostrar esto es $x^3 - 18x = 27$ (cuyas raíces son $x_1 = -3; x_2 = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$). De ahí podemos deducir que $A = x; B^3$. Entonces, $x^2 + 3x = 9$, con soluciones x_2 y x_3. Con este método, al igual que con otros ya vistos, se "pierde" la respuesta negativa. Pero no era único con raíces negativas, en ciertos métodos de este estilo (reducción de cúbica a cuadrática) la solución que se "pierde" al hacer esta transformación es la raíz media, es decir ordenando las raíces de mayor a menor, sin importar si es negativa o no como en el siguiente teorema.

Si $A^3 - 3BA^2 + D^p = D^pB - 2B^3$, *y si* $3B^2 > D^p$, *entonces* $2BA - A^2 = D^p - 2B^2$. La demostración es a partir de que se ha dado $2BA - A^2 = D^p - 2B^2$, se multiplica por $(B - A)$ en ambos lados, teniendo así $2B^2A - BA^2 - 2BA^2 + A^2 = 2B^2A - D^pA + D^pB - 2B^3$. Acomodando de manera adecuada la ecuación se concluye que $A^3 - 3BA^2 + D^p = D^pB - 2B^3$. Numéricamente podría ser $x^3 - 30x^2 + 236x = 360$ (cuyas raíces son $x_1 = 2, x_2 = 10; x_3 = 18$). De la ecuación se puede deducir que $A = x; B = 10; D^p = 236$. Entonces la transformación resulta en $20x - x^2 = 36$, cuyas soluciones son x_1 y x_3.

Finalmente, ecuaciones con afecciones múltiples muestran la relación entre las raíces y los coeficientes de manera más explícita. Por ejemplo, si $A(B + D) - A^2 = BD$, A es explicable por B o D. Es decir, recae en lo ya mencionado en el primer tratado, capítulo XVIII, teorema I (Figura 5.6). Es decir, el producto de las raíces es el término independiente de la ecuación y la suma de las raíces es el coeficiente del término lineal.

Ahora bien, si $A^3 - A^2(B + D + G) + A(BD + BF + DG) = BDG$, A es explicable por cualquiera de las tres B, D, G. Por ejemplo, $x^3 - 6x^2 + 11x = 6$, donde se puede tomar que $B = 1, D = 2, G = 3$. Entonces las raíces son $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Cabe destacar que en estos últimos dos casos no es necesaria la construcción de proporciones como es usual en la obra de Viète. Además, podría decirse que trabaja con cantidades continuas, ya que si bien tiene estrategias para transformar las afecciones irracionales o racionales a afecciones enteras sin afectar la racionalidad de las soluciones, tratar con este tipo de valores no implica mayor complicación que un par de pasos extra para llevar la ecuación a algo más elemental que ya esté establecido dentro del arte. Eso es posible debido a las generalizaciones que logra con su teoría de ecuaciones. Que incluso como ya se mencionó, aunque él no explicitara las raíces negativas en sus escritos, porque su interés estaba en encontrar los valores que satisfacen las proporciones que estudia, sus métodos son capaces de encontrar esos valores.

5.2 René Descartes

René Descartes (1586 – 1650) fue un matemático, físico y filósofo francés. Descartes estudió la obra de Viète y fue un referente para su estudio de la relación entre el álgebra y la geometría. Para mostrar esta relación se dedicó a la construcción de manera geométrica de las soluciones de las ecuaciones algebraicas (Katz, 2009). Una de sus obras más emblemáticas para este proceso fue *La Géométrie* (1637). El escrito se compone de tres libros; el primero de ellos *Des problèmes qu'on peut construire sans y empoyer que des cercles et des lignes droites*; el segundo *De la nature des lignes courbes*, y finalmente *De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides*. En este escrito se profundizará únicamente en el último de los libros tomando en consideración la problematización realizada por Ríos (2020).

5.2.1 De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides

El tercer libro tiene como objetivo construir una teoría general apoyándose de recursos geométricos y algebraicos. Comenzó haciendo alusión al resultado de Girard de que "toda ecuación puede tener tantas raíces distintas como el número de dimensiones de la incógnita en la ecuación". Cada ecuación se supone de la forma $P_n(x) = 0$, donde $P_n(x)$ es un polinomio con coeficientes reales en orden descendiente de los exponentes, *i.e.*, comienza con el término del exponente mayor y termina con el de grado menor (Ribnikov, 1987). En su estudio Descartes concluye que el número de raíces de una ecuación es igual al número del exponente mayor. Otro resultado importante que muestra es la relación entre los signos de los coeficientes, éstos los *construye* partiendo del supuesto que el problema ya está resuelto (Figura 5.15).

Figura 5.15 *Presentación del problema que Descartes utiliza para analizar la relación entre número de raíces y el grado del exponente.*

372 LA GEOMETRIE.

Combien il peut y auoir de racines en chaſq; Equatiõ.

Scachés donc qu'en chaſque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimenſions, autant peut il y auoir de diuerſes racines, c'eſt a dire de valeurs de cete quantité. car par exemple ſi on ſuppoſe *x* eſgale a 2; oubien *x* -- 2 eſgal a rien; & derechef *x* ∞ 3; oubien *x* -- 3 ∞ *o*; en multipliant ces deux equations *x* -- 2 ∞ *o*, & *x* -- 3 ∞ *o*, l'vne par l'autre, on aura *xx* -- 5*x* + 6 ∞ *o*, oubien *xx* ∞ 5*x* -- 6, qui eſt vne Equation en laquelle la quantité *x* vaut 2 & tout enſemble vaut 3. Que ſi derechef on fait *x* -- 4 ∞ *o*, & qu'on multiplie cete ſomme par *xx* -- 5*x* + 6 ∞ *o*, on aura *x*³ -- 9*xx* + 26*x* -- 24 ∞ *o*, qui eſt vne autre Equation en laquelle *x* ayant trois dimenſions a auſſy trois valeurs, qui ſont 2, 3, & 4.

Quelles ſont les fauſſes racines.

Mais ſouuent il arriue, que quelques vnes de ces racines ſont fauſſes, ou moindres que rien. comme ſi on ſuppoſe que *x* deſigne auſſy le defaut d'vne quantité, qui ſoit 5, on a *x* + 5 ∞ *o*, qui eſtant multipliée par *x*³ -- 9*xx* + 26*x* -- 24 ∞ *o* fait

*x*⁴ -- 4*x*³ -- 19*xx* + 106*x* -- 120 ∞ *o*

pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a ſçauoir trois vrayes qui ſont 2, 3, 4, & vne fauſſe qui eſt 5.

Tomado de La Géométrie (Descartes, 1637, p. 372).

La traducción sería:

> *Cada ecuación puede tener tantas raíces distintas como el número de dimensiones de la cantidad desconocida en la ecuación. Supóngase, por ejemplo* $x = 2$ *o* $x - 2 = 0$, *y de nuevo* $x = 3$ *o* $x - 3 = 0$. *Multiplicando ambas ecuaciones* $x - 2 = 0$ *y* $x - 3 = 0$, *se tiene* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *o bien* $x^2 = 5x - 6$. *Esta es una ecuación la cual tiene x con el valor de 2 y el valor de 3 al mismo tiempo. Si el después se hace* $x - 4 = 0$ *y se multiplica esto por* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *se obtiene* $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, *otra ecuación en la cual x tiene tres dimensiones y además tres valores: 2, 3 y 4.*
>
> *Suele suceder que algunas raíces son falsas o menos que nada. Entonces, si se supone x que represente este defecto en una cantidad de 5 se tiene que* $x + 5 = 0$, *la cual multiplicada por* $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, *resulta en* $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, *una ecuación teniendo cuatro raíces, tres de ellas verdaderas 2, 3, 4 y una de ellas falsa, 5* (p. 372).

Como se mencionó, Descartes parte del supuesto que el problema tiene solución, y a partir de ciertas "respuestas" o condiciones construye un ejemplo que muestra el hecho que un polinomio de grado cuatro puede tener cuatro raíces reales; que uno de tercer grado puede tener tres soluciones; y que una ecuación cuadrática, dos. También hace la distinción entre las raíces "verdaderas" o positivas, y las "falsas" o negativas.

Continúa el análisis de ese ejemplo, pero ahora centrando la atención en la relación de los signos de los coeficientes y las raíces (Figura 5.16).

Figura 5.16 *Regla de los signos de Descartes en La Géométrie (1637).*

On connoiſt auſſy de cecy combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fauſſes en chaſque Equation. A ſçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que les ſignes + & -- s'y trouuent de fois eſtre changés ; & autant de fauſſes qu'il s'y trouue de fois deux ſignes +, ou deux ſignes -- qui s'entreſuiuent. Comme en la derniere, a cauſe qu'aprés + x^4 il y a -- $4x^3$, qui eſt vn changement du ſigne + en --, & aprés -- $19xx$ il y a + $106x$, & aprés + $106x$ il y a -- 120 qui ſont encore deux autres changemens, on connoiſt qu'il y a trois vrayes racines; & vne fauſſe, a cauſe que les deux ſignes --, de $4x^3$, & $19xx$, s'entreſuiuent.

Combien il peut y auoir de vrayes racines en chaſque Equatiõ.

Tomado de La Géométrie (Descartes, 1637, p. 373).

La traducción sería

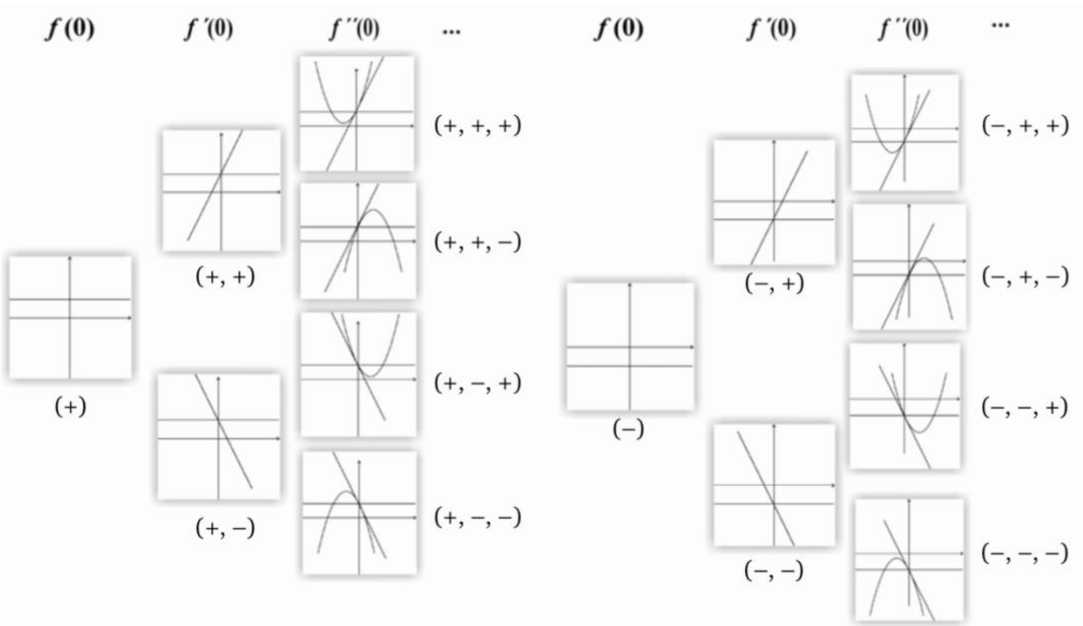
> *Se puede determinar también el número de raíces verdaderas y falsas que cualquier ecuación puede tener de la siguiente manera: Una ecuación puede tener tantas raíces verdaderas como cambios de signo, de + a –, o de – a +: y cuantas raíces falsas como el número de veces dos signos +, o dos signos – se encuentren en sucesión. Así, en la última ecuación, ya que* $+x^4$ *es seguida de* $-4x^3$*, dando un cambio de signo de + a –, y* $-19x^2$ *es seguida de* $+106x$ *y* $+106x$ *seguida por* -120*, dando dos cambios más, se sabe que hay tres raíces verdaderas; y ya que* $-4x^3$ *es precedida por* $-19x^2$ *existe una raíz falsa* (p. 373).

Descartes no lo demuestra formalmente, sino que a partir de ejemplos algebraicos concluye esta relación. La primera demostración satisfactoria de la regla de los signos de Descartes fue hasta 1828 por Gauss.

5.2.2 Reconstrucción racional socioepistemológica

Asimismo, Cantoral y Ferrari (2003, 2009) estudian esta regla desde un enfoque socioepistemológico tomando en cuenta la noción de predicción. Para ello, retoman el polinomio escrito en términos de las derivadas sucesivas para el estudio analítico, y conceptos como ordenada al origen, pendiente, concavidad y punto de inflexión para el análisis gráfico. Para la parte analítica se puede ejemplificar tomando el polinomio $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con $a_3 \neq 0$, y reescribirlo como el polinomio de Taylor usando las derivadas sucesivas evaluadas en $f(0)$, resultando así $f(x) = \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''(0)}{2}x^2 + f'(0)x + f(0) = 0$. El cambio de los signos entre los coeficientes a_3, a_2, a_1, a_0 van a ser los mismos que los cambios en $f'''(0), f''(0), f'(0), f(0)$. De este modo se puede estudiar, sin pérdida de generalidad, las combinaciones de signos y analizar las posibles gráficas de los polinomios (Figura 5.17).

Figura 5.17 *Posibles combinaciones gráficas de acuerdo a la Regla de los Signos de Descartes.*



Tomado de La predicción y la regla de los signos de Descartes. Segunda Parte: Visualizando la regla (Cantoral y Ferrari, 2009, p. 16). Los signos son nuestros.

En la primera columna se toma un $f(0) > 0$. En la segunda columna primero se muestra $f'(0) > 0$, y después $f'(0) < 0$. En la tercera columna se comienza con $f''(0) > 0$ y se va alternando entre positivo y negativo. De manera análoga a partir de la cuarta columna comenzando con $f(0) < 0$. Lo que se pretende mostrar es la veracidad de la regla desde un aspecto gráfico que permita visualizarla usando conceptos como ordenada al origen, pendiente, concavidad y punto de inflexión. El caso de las ecuaciones igual a una constante no se discutirá en este escrito. Para las rectas se puede apreciar que cuando no hay cambio de signo, *i.e.*, cuando es $(+,+)$ o $(-,-)$ la raíz es falsa o negativa. Cuando hay un cambio de signo $(+,-)$ o $(-,+)$ la raíz es verdadera o positiva. Ahora bien, en el caso de las parábolas, cuando no hay cambios de signo como en $(+,+,+)$ o en $(-,-,-)$ existen tres posibles escenarios: que no tenga raíces reales, que sea una raíz doble falsa o negativa, o que ambas raíces sean falsas o negativas. Cuando sólo existe un cambio de signo, como en los casos de $(+,+,-),(+,-,-),(-,+,+)$ y $(-,-,+)$ se asegura la existencia de una raíz falsa y de una positiva. Mientras que para los casos donde hay dos cambios de signo $(-,+,-)$ y $(+,-,+)$ puede que sea una parábola sin raíces reales, una raíz doble verdadera, o dos raíces distintas verdaderas.

Este tipo de argumentos, que si bien Descartes no mostró en su obra, son un ejemplo de la trascendencia de sus ideas y de como una regla que él enuncia en un par de líneas a partir de un ejemplo que construyó tiene potencial tanto en lo analítico, lo algebraico y lo gráfico.

5.3 Análisis de prácticas

En cuanto al análisis de prácticas tomando las preguntas *¿qué hace?*, *¿cómo hace?* y *¿para qué lo hace?* como guía para inferir las prácticas en lo estudiado de la obra de Viète se pueden mostrar los siguientes ejemplos analizados en términos de prácticas (Tabla 5.1):

Tabla 5.1 *Análisis de prácticas en Æquationum recognitione tractatus duo de François Viète de 1646.*

<table>
<tr><th>Teorema y procedimiento de resolución / demostración.</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas.</th></tr>
<tr><td>I. Si tenemos $\boldsymbol{A^2+2BA=Z^p}$ vemos que el término lineal tiene una afección positiva, la cual se produjo por la adición de la mitad del coeficiente del término lineal, como lo exige la naturaleza del cuadrado. Para superar la modificación Viète propone purgar a la mitad dicho coeficiente.</td><td colspan="2">Teniendo una ecuación de la forma $A^2+2BA=Z^p$, la cual no es posible resolver debido a la afección provocada por el 2 en el coeficiente del término lineal.</td></tr>
<tr><td>Para ello es necesario que

$\boldsymbol{A+B=E}$</td><td>*¿Qué hace?*</td><td>Para poder superar esta afección se **comparan** cantidades conocidas (B) con desconocidas (A y E): $A+B=E$.</td></tr>
<tr><td>si sustituimos en la ecuación original A por $E–B$ tenemos lo siguiente

$\boldsymbol{A^2+2BA=Z^p}$</td><td>*¿Cómo hace?*</td><td>Al sustituir se **agrupa** la sustitución propuesta en la que de manera conveniente para poder mantener las relaciones establecidas entre las cantidades desconocidad y conocidas de manera tal que la ecuación siga</td></tr>
</table>

$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})^2+2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{Z^p}$		respetando la ley de los términos homogéneos.
Teniendo finalmente $\boldsymbol{E^2}=\boldsymbol{Z^p}+\boldsymbol{B^2}$	*¿Para qué lo hace?*	Finalmente se **equivale**, *i.e.*, se mantiene una relación de igualdad en valor o cantidad de una magnitud con otra(s) que dé solución al problema original usando proporciones.
II. Sea $\boldsymbol{A^3}-\boldsymbol{B^pA}=\boldsymbol{Z^s}$. Esta ecuación no puede ser resuelta ya que $\boldsymbol{Z^s}$ es una potencia con una afección negativa, y en el arte no se contemplan este tipo de situaciones con negativos.	Si se trabaja con una ecuación de la forma $A^3-B^pA=Z^s$, la forma de ecuación requiere una enmienda para poder encontrar sus raíces.	
Así que Viète sugiere que se tome $\boldsymbol{\frac{Z^s}{A}}=\boldsymbol{E^p}$, de lo que se sigue que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\frac{Z^s}{E^p}}$.	*¿Qué hace?*	Al proponer $A=\frac{Z^s}{E^p}$ está **comparando** nuevamente cantidades desconocidas (A y E^p) con conocidas (Z^s).
Sustituyendo tenemos $\boldsymbol{\frac{Z^{sss}}{E^{ppp}}}-\boldsymbol{\frac{B^pZ^s}{E^p}}=\boldsymbol{Z^s}$.	*¿Cómo hace?*	Al sustuir se produce una **agrupación** de las cantidades desconocidas y conocidas de manera adecuada tal que siga manteniendo la racionalidad de las soluciones.
Multiplicando todo por $\boldsymbol{E^{ppp}}$ se obtiene $\boldsymbol{Z^{sss}}-\boldsymbol{B^pZ^sE^{pp}}=\boldsymbol{Z^sE^{ppp}}$. Dividiendo por $\boldsymbol{Z^s}$ y despejando se llega a $\boldsymbol{E^{ppp}}+\boldsymbol{B^pE^{pp}}=\boldsymbol{Z^{ss}}$. Reescribiendo $(\boldsymbol{E^p})^3+\boldsymbol{B^p}(\boldsymbol{E^p})^2=(\boldsymbol{Z^s})^2$.	*¿Para qué lo hace?*	Al multiplicar y dividir por magnitudes apropiadas se transforma la ecuación en otra esté dentro del alcance de los métodos conocidos por Viète y le permita llegar a una **equivalencia** y solucionar la ecuación original; esto es, se propone una ecuación nueva para resolverla en términos de proporciones.
III. Si $\boldsymbol{A^3}+\boldsymbol{\frac{B^sA}{D}}=\boldsymbol{Z^s}$.	Para una ecuación con una afección fraccionaria Viète se infiere lo siguiente en el procedimiento matemático de resolución:	
Para liberar la ecuación libre de esa afección fraccionaria Viète supone $\boldsymbol{DA}=\boldsymbol{E^p}$, de la cual se sigue que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\frac{E^p}{D}}$.	*¿Qué hace?*	**Compara** cantidades desconocidas con cantidades conocidas.
Por lo tanto $\boldsymbol{\frac{(E^p)^3+B^sDE^p}{D^3}}=\boldsymbol{Z^s}$.	*¿Cómo hace?*	**Agrupa** las relaciones manteniendo la racionalidad de las raíces.
Multiplicando por $\boldsymbol{D^3}$ se llega a $(\boldsymbol{E^p})^3+\boldsymbol{B^sDE^p}=\boldsymbol{D^3Z^s}$.	*¿Para qué lo hace?*	Reconstruye la ecuación original en términos de una nueva **equivalencia**.

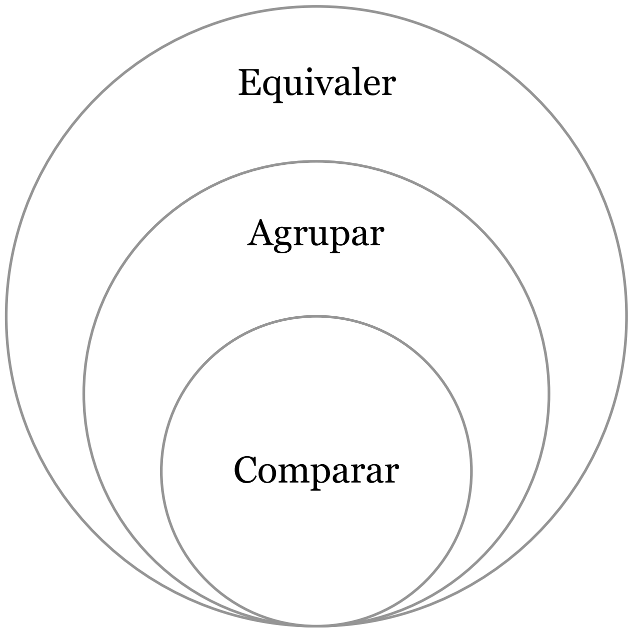
Elaboración propia.

Este análisis profundiza el hecho por Ríos (2020). El ejemplo que muestra de su anális es del teorema *Si $A^2+BA=Z^2$ hay tres proporcionales cuya media es Z y la diferencia entre los extremos es B, por lo que A es el extremo menor.* La autora menciona lo siguiente:

> Cada una de las relaciones, la suma y el producto provienen de una comparación. En $x+y=S$, trabajar con $y=S-x$, devienen de otra comparación, eligiendo una de las variables. Al sustituir $y = S - x$ en $xy = P$, las relaciones se agrupan, y lo que hace posible dicha agrupación es lo que Viète llama "Ley de los términos homogéneos", términos homogéneos se comparan con términos homogéneos. Finalmente, al encontrar $x^2 + (-S)x + P = 0$, se tiene una relación común a las dos relaciones iniciales, es decir, una equivalencia (p. 108).

Concuerda con las mismas prácticas encontradas. Tiene así una propuesta del modelo de anidación de prácticas propuesto por Cantoral (2013) respecto a *Æquationum recognitione tractatus duo* de François Viète de 1646 (Figura 5.18).

Figura 5.18 *Modelo de anidación de prácticas reconocidas en Æquationum recognitione tractatus duo de François Viète de 1646.*



Nota: elaboración propia.

Por parte de las prácticas identificadas en la obra de René Descartes se identifica lo siguiente en la Tabla 5.2

Tabla 5.2 *Análisis de prácticas en la regla de los signos de Descartes (1636)*

<table>
<tr><th>Teorema y procedimiento de resolución/demostración</th><th colspan="2">Explicación en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Supóngase, por ejemplo $\boldsymbol{x = 2}$ o $\boldsymbol{x - 2 = 0}$, y de nuevo $\boldsymbol{x = 3}$ o $\boldsymbol{x - 3 = 0}$.

Multiplicando ambas ecuaciones $\boldsymbol{x - 2 = 0}$ y $\boldsymbol{x - 3 = 0}$, se tiene $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6 = 0}$ o bien $\boldsymbol{x^2 = 5x - 6}$.

Esta es una ecuación la cual tiene $\boldsymbol{x}$ con el valor de 2 y el valor de 3 al mismo tiempo.

Si después se hace $\boldsymbol{x - 4 = 0}$

Se multiplica esto por $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6 = 0}$ se obtiene $\boldsymbol{x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0}$,

otra ecuación en la cual x tiene tres dimensiones y además tres valores: 2, 3 y 4.

[...]

Entonces, si se supone x que represente este defecto en una cantidad de 5 se tiene que $\boldsymbol{x + 5 = 0}$

la cual multiplicada por $\boldsymbol{x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0}$, resulta en $\boldsymbol{x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0}$,

una ecuación teniendo cuatro raíces, tres de ellas verdaderas 2, 3, 4 y una de ellas falsa, 5.</td>
<td colspan="2">Se comparan los valores de la cantidad desconocida como diferencia al tomar $x - 2$ y $x - 3$.

Agrupa las comparaciones realizadas para obtener el polinomio de grado dos.

Obtiene una “generalización” del ejemplo que construyó.

Vuelve a tomar una cantidad desconocida $x - 4 = 0$

Se agrupa con lo que ya había construido hasta el momento resultando así una ecuación cúbica.

Menciona el resultado “general”, al establecer la relación entre el grado del exponente y la cantidad de raíces.

Se toma una cantidad desconocida nuevamente $x + 5 = 0$

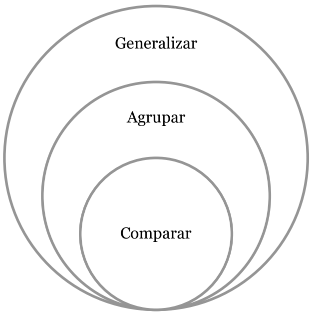
Al realizar la multiplicación se agrupan los términos de manera adecuada para llegar a una expresión de grado cuatro.

Finalmente se generaliza la propiedad al identificar una regla a partir de la construcción de un ejemplo cada vez más elaborado.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Compara usando diferencias entre la cantidad desconocida y el valor de la raíz para establecer relaciones entre ellas.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Agrupando al realizar el producto y formando la expresión mínima posible.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Para generalizar una propiedad de los polinomios y sus raíces.</td></tr>
</table>

Elaboración propia.

Esto coincide con lo encontrado por Ríos (2020) quien en su análisis de esta regla menciona que "Se comparan los valores de la cantidad desconocida y se agrupan en una misma ecuación mediante el producto. Al realizar una serie de comparaciones y agrupaciones, para valores particulares de la cantidad desconocida, la propiedad se generaliza (p. 113)." Tiene así un modelo de anidación de prácticas referente a la regla de los signos de Descartes (Figura 5.19).

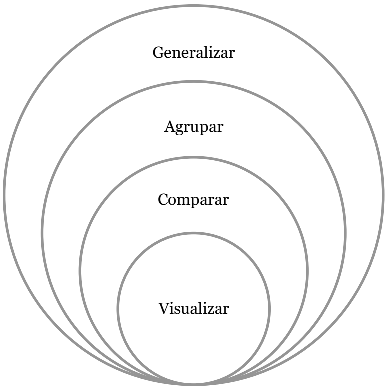
Figura 5.19 *Modelo de anidación de prácticas reconocidas en la regla de Descartes (1637).*



Elaboración propia.

Si bien, el modelo presentado en la Figura 19 corresponde al análisis histórico – epistemológico, al incorporar los elementos propuestos por la problematización de Cantoral y Ferrari (2003, 2009) este modelo incorpora la práctica *visualización*. Es decir, al recurrir a elementos de la gráfica como lo son la ordenada al origen, la pendiente, concavidad y el punto de inflexión para poder determinar el posible signo de la raíz lo cual requiere de una interacción con un contexto gráfico. Por lo que el modelo de anidación de prácticas que se utilizará en esta investigación relativa a la regla de los signos de Descartes es el presentado en la Figura 5.20.

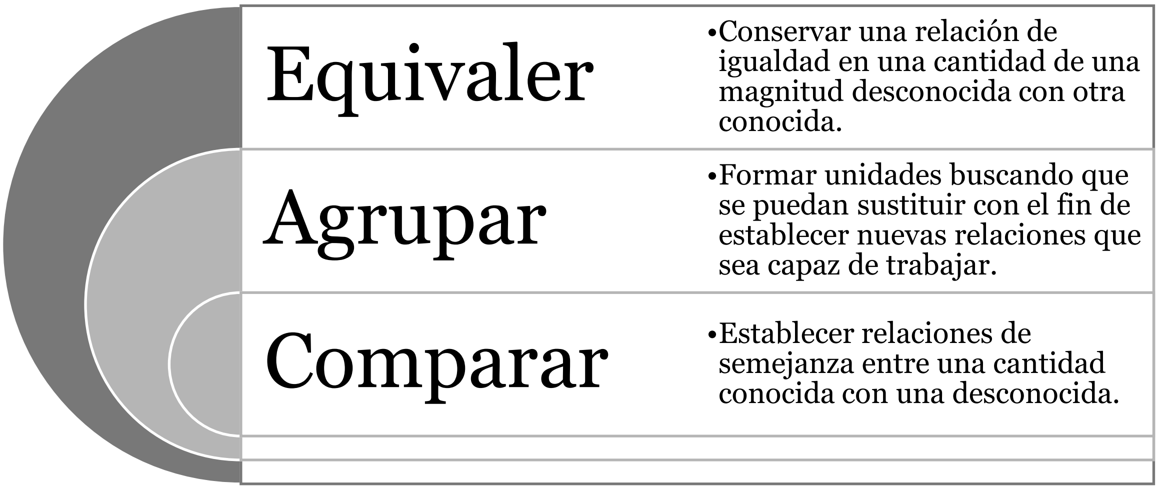
Figura 5.20 *Modelo de anidación de prácticas reconocidas entorno a la regla de Descartes (análisis de la obra de 1637 + reconstrucción propuesta por Cantoral y Ferrari en 2003 y 2009).*



Elaboración propia.

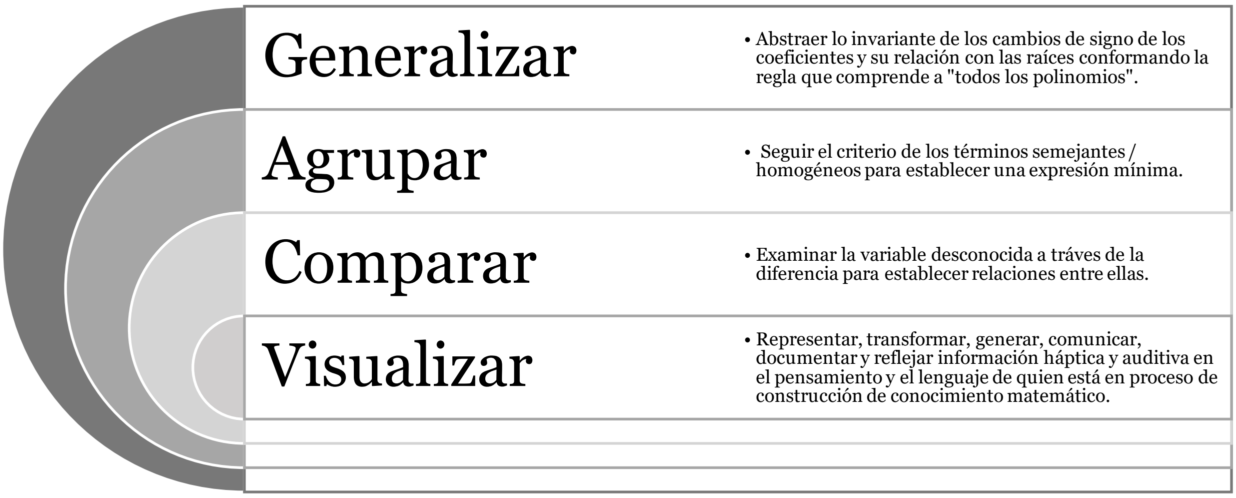
Si bien, en ambos modelos de anidación propuestos se comparten las prácticas de *comparar* y *agrupar*, no se refieren al mismo tipo de comparación ni agrupamiento, es menester hacer una caracterización de cada una para establecer una distinción entre ambas prácticas. La caracterización de las prácticas identificadas en la obra de Viète estudiada se presenta en la Figura 5.21, mientras que as relacionadas con la regla de los signos de Descartes se explicitan en la Figura 5.22.

Figura 5.21 *Caracterización de las prácticas identificadas en Æquationum recognitione tractatus duo de François Viète de 1646.*



Elaboración propia.

Figura 5.22 *Caracterización de las prácticas identificadas en la regla de los signos de Descartes (1636)*[4].



Elaboración propia.

---

[4] Para la *acción* de *visualizar* se profundiza más en el capítulo 3: Aspectos teóricos. La caracterización presentada en la Figura 5.22 es la que se rescata a partir de Bértolo (2005) y Cantoral y Montiel (2002) y que se usa a lo largo del escrito.

Al inferir ambos modelos de anidación de prácticas de distintas obras que fueron elaboradas por diferentes matemáticos en diversos lugares y años claramente no van a ser iguales. Por ello es importante enfatizar los matices de cada una de ellas para lograr hacer una distinción, pero también para apreciar lo que es invariante entre ellas, ya que el acento desde un enfoque socioepistemológico radica en las prácticas.

Estas evoluciones pragmáticas, constituyen la base del diseño exploratorio, es decir, las prácticas inferidas en el análisis de obras originales (Viète, 1646; Descartes, 1637) se retoman y se reinterpretan para llevarlas a un contexto gráfico – háptico pensado para población con discapacidad visual. Se retoma la *comparación*, *agrupación*, *visualización* y *generalización* (Figura 6.1).

5.4 Exclusión por el discurso Matemático Escolar

Para mostrar las características del discurso Matemático Escolar (dME) que provocan la exclusión de los actores del sistema didáctico de la construcción social del conocimiento matemático se ofrecen algunos casos del tratamiento que se da al estudio de las raíces en algunos libros de texto contemporáneos y así, diferenciarlo de las prácticas y nociones que se pusieron en juego durante su construcción por matemáticos de los siglos XVI y XVII que ya no se consideran actualmente o que quedan relegadas a un segundo plano. Para ello se siguió la pregunta *¿Qué argumentos, significado y procedimientos se favorecen en el libro de texto?*

5.4.1 Relación entre coeficiente y raíz

En cuanto al dME reconocido en este tópico matemático se escogieron cuatro libros de texto para identificar de qué forma se presenta y trata la relación entre las raíces de ecuaciones polinómicas y los coeficientes de la ecuación. Los libros seleccionados son *Álgebra* de Aurelio Baldor (1997); *Matemáticas I. Enfoque por competencias* de René Jiménez (2011); *Matemáticas I* de telebachillerato común de la Secretaría de Educación Pública en México, escrito por Misael Garrido, Luz Llamas e Israel Sánchez (2015); y *Álgebra Superior* de Cárdenas *et al.* (1995). La elección de estos cuatro libros se debe a que brindan panorámicas distintas. El primero es un libro ya tradicional en el estudio del álgebra a nivel medio superior y primeros semestres de superior en diversos países. El segundo es un libro enfocado en el aprendizaje por competencias; mientras que el tercero se propone para un contexto muy particular de la educación en México, el telebachillerato, el cual es una modalidad de educación para zonas rurales del país. El cuarto libro es un libro usado en nivel superior, principalmente en carreras del área STEM, por lo cual tiene una profundidad matemática mayor a los tres anteriores.

En Baldor se presenta como un conocimiento que al procedimiento para factorizar una ecuación de segundo grado. No se le presta mayor importancia o se explica más allá de por qué sucede esto (Figura 5.23).

Figura 5.23 Presentación del algoritmo para factorizar una ecuación de segundo grado en Baldor (1997).

(1) Factorar $x^2 + 5x + 6$.

El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raiz cuadrada de x^2 o sea x:

$$x^2 + 5x + 6 \quad (x \quad)(x \quad)$$

En el primer binomio después de x se pone signo $+$ porque el segundo término del trinomio $+5x$ tiene signo $+$. En el segundo binomio, después de x, se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de $+5x$ por el signo de $+6$ y se tiene que $+$ por $+$ da $+$ o sea:

$$x^2 + 5x + 6 \quad (x + \quad)(x + \quad)$$

Ahora, como en estos binomios tenemos signos *iguales* buscamos dos números que cuya *suma* sea 5 y cuyo *producto* sea 6. Esos números son 2 y 3, luego:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3). \quad \text{R.}$$

Tomado de Álgebra (Baldor, 1997, p. 159)

La indicación que da es: "*buscamos dos números que cuya suma sea 5 y cuyo producto sea 6*". Los argumentos de proporcionales quedan excluidos, y la utilidad de las relaciones entre coeficiente y raíz se reduce a un paso para poder lograr la factorización.

Por su parte, Jiménez (2011) hace más evidente esta relación en ecuaciones de segundo grado, e incluso muestra una forma de encontrarlos por ensayo y error (Figura 5.24).

Figura 5.24 *Presentación de la factorización de ecuaciones de la forma x^2+bx+c=0 en Jiménez (2011).*

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Para factorizar un polinomio cuadrático de la forma $x^2 + bx + c$, es necesario observar que

$$(x+m)(x+n) = \underbrace{x^2}_{\text{Producto del común}} + \underbrace{(m+n)x}_{\text{Suma de los no comunes por el común}} + \underbrace{mn}_{\text{Producto de los no comunes}}$$

donde m y n son números tales que $(m+n) = b$ y $mn = c$.

Ejemplos:

Factores de $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

a) Factoriza $x^2 + 7x + 12$.

Solución:

Aquí, $mn = 12$ y $m + n = 7$; así que buscamos por ensayo y error factores de 12 cuya suma sea 7.

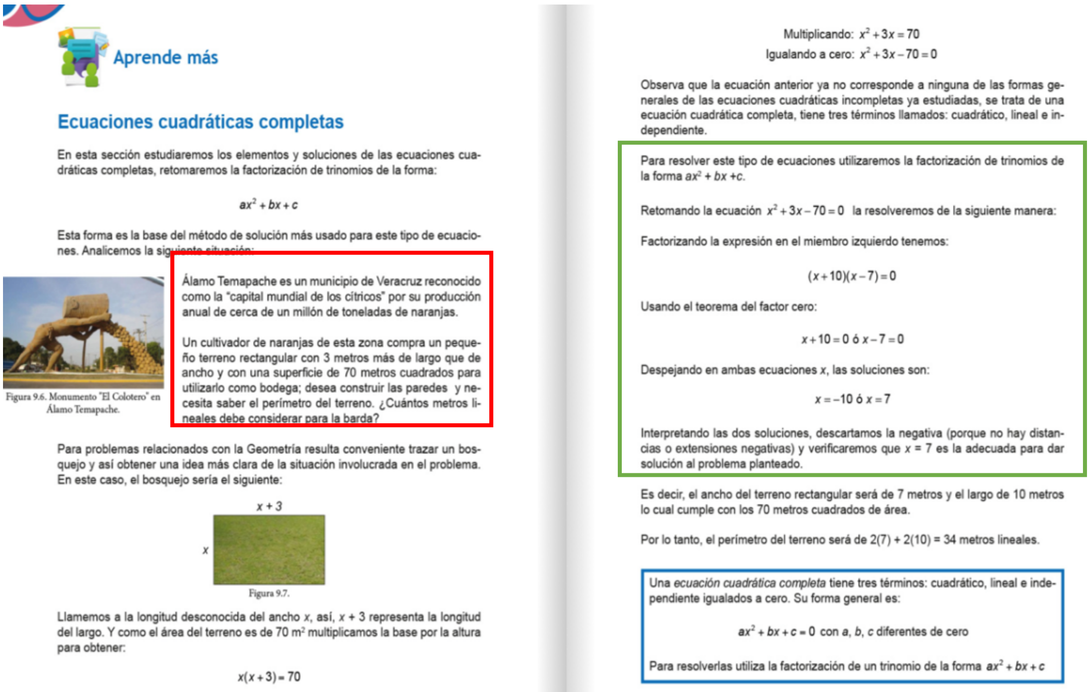
m	n	Suma
12	1	13
6	2	8
3	4	7

Tomado de Matemáticas I. Enfoque por competencias (Jiménez, 2011, p. 115).

Jiménez hace una explicación más detallada de por qué se cumple esa relación entre coeficientes y raíces al mencionar que la suma de los “no comunes” es el coeficiente del término lineal, y el producto de los mismos es el término independiente. Para poder encontrar los valores que cumplen las relaciones establecidas en el ejemplo se apoya del producto de las raíces para así identificar a través de ensayo y error cuáles factores que al sumarlos, cumplen con el valor del coeficiente del término lineal. La utilidad sigue siendo como un requisito necesario para cumplir con la factorización de las ecuaciones. Y los argumentos utilizados son el del producto, y con esos valores identificados intentar por ensayo y error encontrar los valores específicos “que calzan” con la ecuación.

En cuanto al libro de texto de telebachillerato de Garrido, *et al.* (2015), recurren a problemas del área de terrenos, contexto con el cual probablemente están familiarizados los estudiantes, para introducir la necesidad de factorizar (Figura 5.25)

Figura 5.25 *Presentación de las ecuaciones cuadráticas completas por Garrido, et al. (2015).*



Aprende más

Ecuaciones cuadráticas completas

En esta sección estudiaremos los elementos y soluciones de las ecuaciones cuadráticas completas, retomaremos la factorización de trinomios de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

Esta forma es la base del método de solución más usado para este tipo de ecuaciones. Analicemos la siguiente situación:

Álamo Temapache es un municipio de Veracruz reconocido como la "capital mundial de los cítricos" por su producción anual de cerca de un millón de toneladas de naranjas.

Un cultivador de naranjas de esta zona compra un pequeño terreno rectangular con 3 metros más de largo que de ancho y con una superficie de 70 metros cuadrados para utilizarlo como bodega; desea construir las paredes y necesita saber el perímetro del terreno. ¿Cuántos metros lineales debe considerar para la barda?

Figura 9.6. Monumento "El Colotero" en Álamo Temapache.

Para problemas relacionados con la Geometría resulta conveniente trazar un bosquejo y así obtener una idea más clara de la situación involucrada en el problema. En este caso, el bosquejo sería el siguiente:

$x + 3$

x

Figura 9.7.

Llamemos a la longitud desconocida del ancho x, así, $x + 3$ representa la longitud del largo. Y como el área del terreno es de 70 m^2 multiplicamos la base por la altura para obtener:

$$x(x+3) = 70$$

Multiplicando: $x^2 + 3x = 70$

Igualando a cero: $x^2 + 3x - 70 = 0$

Observa que la ecuación anterior ya no corresponde a ninguna de las formas generales de las ecuaciones cuadráticas incompletas ya estudiadas, se trata de una ecuación cuadrática completa, tiene tres términos llamados: cuadrático, lineal e independiente.

Para resolver este tipo de ecuaciones utilizaremos la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

Retomando la ecuación $x^2 + 3x - 70 = 0$ la resolveremos de la siguiente manera:

Factorizando la expresión en el miembro izquierdo tenemos:

$$(x+10)(x-7) = 0$$

Usando el teorema del factor cero:

$$x + 10 = 0 \text{ ó } x - 7 = 0$$

Despejando en ambas ecuaciones x, las soluciones son:

$$x = -10 \text{ ó } x = 7$$

Interpretando las dos soluciones, descartamos la negativa (porque no hay distancias o extensiones negativas) y verificaremos que $x = 7$ es la adecuada para dar solución al problema planteado.

Es decir, el ancho del terreno rectangular será de 7 metros y el largo de 10 metros lo cual cumple con los 70 metros cuadrados de área.

Por lo tanto, el perímetro del terreno será de 2(7) + 2(10) = 34 metros lineales.

Una *ecuación cuadrática completa* tiene tres términos: cuadrático, lineal e independiente igualados a cero. Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \text{ diferentes de cero}$$

Para resolverlas utiliza la factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Tomado de Matemáticas I (Garrido, et al., 2015, pp. 348 – 349). Los recuadros rojo y verde son nuestros.

Se aprecia que el significado que se pretende está en un contexto de áreas de terrenos (recuadro rojo). Al momento de factorizar no hay algún tipo de énfasis en las relaciones entre coeficientes y raíces, *i.e.*, cómo se obtienen los valores –10 y 7. Empero, destacan que una de las respuestas no tiene sentido al trasladarlo de nuevo al problema inicial debido a que no hay distancias negativas (recuadro verde).

Por último, Cárdenas, *et al.* (1995), tiene un capítulo donde se estudia los polinomios y la teoría de ecuaciones, y dentro de éste una sección dedicada al análisis de coeficientes y raíces (Figura 5.26).

Figura 5.26 *Presentación de la relación entre coeficientes y raíces en Cardenas, et al. (1995).*

11. COEFICIENTES Y RAÍCES

PROPOSICIÓN: Sea

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_n).$$

Entonces

$$a_i = \sum_{1 \leq r_1 < \cdots < r_i \leq n} \prod_{j=1}^{i} (-\alpha_{r_j})$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Conviene aclarar la notación en la fórmula anterior. El significado del símbolo

$$\sum_{1 \leq r_1 < \cdots < r_i \leq n}$$

es que para cada sistema de i números enteros $r_1, \ldots, r_i$ que satisfacen las condiciones $1 \leq r_1 < \cdots < r_i \leq n$ debe considerarse el sumando

$$\prod_{j=1}^{i} (-\alpha_{r_j}) = (-\alpha_{r_1})(-\alpha_{r_2}) \cdots (-\alpha_{r_i})$$

correspondiente a esos $r_1, \ldots, r_i$.

Por ejemplo, si $i = 2$ y $n = 3$ tenemos las siguientes maneras de elegir r_1 y r_2:

$$r_1 = 1 \quad y \quad r_2 = 2,$$
$$r_1 = 1 \quad y \quad r_2 = 3,$$
$$r_1 = 2 \quad y \quad r_2 = 3.$$

Por lo tanto

$$\sum_{1 \leq r_1 < r_2 \leq 3} \prod_{j=1}^{2} (-\alpha_{r_j}) = \sum_{1 \leq r_1 < r_2 \leq 3} (-\alpha_{r_1})(-\alpha_{r_2})$$
$$= (-\alpha_1)(-\alpha_2) + (-\alpha_1)(-\alpha_3) + (-\alpha_2)(-\alpha_3)$$
$$= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3.$$

Tomado de Álgebra superior (Cárdenas, 1995, p. 303).

El rigor matemático es considerablemente mayor al presentado en los otros tres textos que se han ejemplificado. Los argumentos y significados están considerando sumatorias y series de productos. Hay, además, una generalización para cualquier *n*.

En ningún texto de los expuestos anteriormente se advierte el uso o la incitación de argumentos o significados distintos a los relacionados con la factorización o la presentación de una regla manera algorítmica y procedimental sin presentar algún tipo de tratamiento gráfico que permita una comprensión más robusta de este concepto. Además, se evidencia la *aritmetización* de procesos algebraicos, esto es, en los textos revisados se muestra una centración en las relaciones aritméticas y no en las relaciones de cantidades.

5.4.2 Relación entre el signo del coeficiente y raíz

Para conocer el tratamiento que se da en libros de texto a la regla de los signos de Descartes Cantoral y Ferrari (2003) mencionan que los escritos que tratan este tema se pueden clasificar en dos grandes grupos: aquellos que se enfocan en la veracidad y pertinencia de la regla a partir de ejemplos algebraicos y los que tiene un carácter más riguroso y se centran en la demostración. En este trabajo se seleccionaron dos textos pertenecientes al primer grupo únicamente: Apuntes, Álgebra y Polinomios de Ortíz (2008), que es un material de consulta de la Facultad de Estudios Superiores – Aragón de la Universidad Nacional de México y Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry 12th edition de Swokowski y Cole (2010). Ambos textos son utilizados en nivel superior, mientras en los empleados en medio superior que se revisaron no se encontró algún apartado o sección que hablará particularmente de la relación entre el signo del coeficiente y las raíces.

Swokoski y Cole, presentan la regla como un conocimiento memorístico cuya utilidad es la de aplicarse para hacer supuestos sobre el posible número de raíces positivas o negativas (Figura 5.27). Además, presentan diversos ejemplos para mostrar su validez.

Figura 5.27 *Presentación de la Regla de los Signos de Descartes en Swokoski y Cole (2010).*

Descartes' Rule of Signs

Let $f(x)$ be a polynomial with real coefficients and a nonzero constant term.

(1) The number of *positive* real zeros of $f(x)$ either is equal to the number of variations of sign in $f(x)$ or is less than that number by an even integer.

(2) The number of *negative* real zeros of $f(x)$ either is equal to the number of variations of sign in $f(-x)$ or is less than that number by an even integer.

Tomado de Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry (Swokoski y Cole, 2010, p. 235).[5]

Una distinción entre la regla "original" enunciada por Descartes y el tratamiento que se le da en la matemática escolar actual es para las raíces negativas, ya que como se mencionó anteriormente en la forma en la que Descartes encuentra el número posible de las soluciones *falsas* es con el número de veces que dos signos + o − se encuentren en sucesión. Mientras que en textos contemporáneos para las raíces que sean menores que cero se localizan usando argumentos de transformación de funciones al hacer un cambio por simetría de $f(x)$ a $f(-x)$.

Ahora bien, por parte del texto de Ortíz (2008) usa una acepción de la regla bastante similar a la empleada en Swokowski y Cole (2010), donde se consideran los cambios de signo en $f(x)$ y en $f(-x)$ para las soluciones *verdaderas* y *falsas*, respectivamente. Sin embargo, hace un especial énfasis en el completamiento de tablas para estimar el posible número de raíces positivas, negativas e imaginarias las cuales llama "Tabla de la naturaleza de raíces" (Figura 5.28).

[5] La traducción al teorema sería: "Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y distinto de cero el término constante: (1) El número de los ceros de $f(x)$ positivos es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$ o es menos que ese número por un número entero par. (2) El número de los ceros de $f(x)$ negativos es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$ o es menor que ese número por un número entero par".

Figura 5.28 Presentación de las tablas de la naturaleza de raíces.

RAÍCES	.PROPUESTA			
	1	2	3	4
REALES POSITIVAS	2	2	0	0
REALES NEGATIVAS	0	2	0	2
COMPLEJAS	2	0	4	2
TOTAL	4	4	4	4

Esta tabla se llama *Tabla de la Naturaleza de las Raíces.*

Es necesario hacer la aclaración de que al obtenerse raíces pares siempre es necesario restarlas de dos en dos, hasta llegar al cero. Cuando las raíces sean impares es necesario también restar de dos en dos hasta llegar a la unidad.

Tomado de Apuntes, Álgebra y Polinomios (Ortíz, 2008, p. 22).

En el ejemplo de la Figura 5.27 se detallan las posibilidades de un polinomio particular de grado cuatro. Presentando la regla de los signos de Descartes como una regla a seguir cuya utilidad es la de llenar tablas que permitan conjeturar cuantas posibles raíces positivas o negativas tendrá cada caso.

La regla es presentada como un conocimiento mnemotécnico y que requiere el uso de de transformaciones de funciones para poder lograr su "máximo potencial" en el llenado de tablas del posible número de raíces reales positivas y negativas, así como imaginarias. No dando cabida al uso de argumentos analíticos o gráficos que favorezcan la predicción.

De manera general los argumentos, procedimientos y significados que favorecen los libros de texto en cuanto a las relaciones estudiadas se presentan en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3 *Argumentos, procedimientos y significados que se favorecen en los libros de texto.*

Tipo de relación	Libro de texto.	Argumentos, procedimientos y significados que se favorecen.
Coeficiente y raíz	*Álgebra* de Aurelio Baldor (1997)	El uso de un procedimiento mecanicista que se apoya en argumentos como raíz cuadrada de un término, la ley de los signos así como la suma y el producto de las raíces sin realmente explicar porque sucede esto. Favoreciendo un significado centrado en la factorización de ecuaciones de segundo grado.
	Matemáticas I. Enfoque por competencias de René Jiménez (2011)	Se favorece un procedimiento de ensayo y error donde el argumento utilizado es el producto y la suma de las raíces. Para esto se apoya en un significado centrado en la

		factorización de las ecuaciones de segundo grado.
	Matemáticas I por Misael Garrido, Luz Llamas e Israel Sánchez (2015)	Se apoya en el procedimiento típicamente escolar de la factorización de las ecuaciones de segundo grado y el teorema del factor cero para encontrar las raíces del polinomio de segundo grado. Usa argumentos geométricos de área (contextualizado en un terreno donde siembran naranjas) para apoyar de manera iconográfica cómo cada factor representa un lado del rectángulo y así poder descartar la solución de la ecuación que no tiene sentido en el contexto situacional del problema.
	Álgebra Superior de Humberto Cárdenas, Emilio Lluis, Francisco Raggi y Francisco Tomás (1995).	Es un procedimiento matemático más riguroso ya que busca la generalización de la relación entre los coeficientes y las raíces usando argumentos y significados como sumatoria y productoria.
Signo del coeficiente y raíz	*Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry* de Swokowski y Cole (2010).	Es un procedimiento apoyado en una técnica mecanicista que usa argumentos de transformación de funciones para verificar la variación de los signos de los coeficientes. Su significado es meramente intramatématico al rescatar únicamente un posible número de raíces positivas o negativas.
	Apuntes, Álgebra y Polinomios de Francisco Ortíz (2008)	El procedimiento usa la transformación de funciones para encontrar un posible número de raíces positivas y/o negativas, el cual se utiliza para la construcción de tablas que muestren las posibles combinaciones de las soluciones del polinomio (reales positivas, reales negativas y complejas). Su significado es una estrategia meramente estimativa.

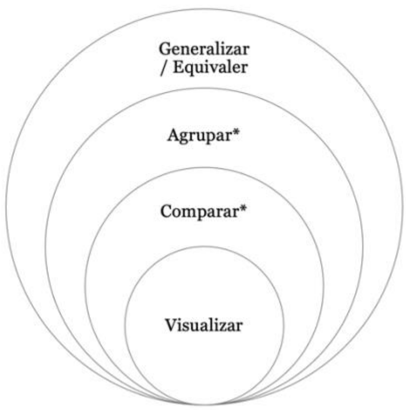
Elaboración propia.

Los resultados de la Tabla 5.3 sirven de base para perfilar las características que provocan la exclusión epistémica en lo relacionado a la raíz de ecuaciones polinómicas (Tabla 5.4) y como fundamento para el diseño de la situación diagnóstico [Anexo V], *i.e.*, se retoman ejercicios y problemas de los libros analizados y se esperan respuestas que favorezcan ese tipo de argumentos, procedimientos y significados [Anexo VI].

5.4.3 Características del dME y propuesta socioepistemológica

Como se observa en ninguna de las presentaciones de las estructuras objetivables del dME la gráfica en el plano está puesto en juego. Lo geométrico que se puede tomar en cuenta es únicamente en contextos donde se involucra áreas (para el caso de las ecuaciones cuadráticas) y volúmenes (para las cúbicas). Los significados se encuentran en el proceso de factorización para el caso de la relación entre coeficiente y raíz, y únicamente para las ecuaciones de segundo grado. Para las cúbicas no se encontró ejemplos en los que se muestre la relación entre coeficientes y raíces. Para la relación entre el signo del coeficiente y raíz los significados se focalizan en construcción de tablas que permitan conjeturar el posible número de raíces de un polinomio en particular. Esta revisión del dME en libros de texto puede mostrar que las relaciones entre coeficiente y raíz y entre signo y raíz son una herramienta mnemotécnicas utilizada sólo para la factorización de ecuaciones y la construcción de tablas como un algoritmo que seguir de la misma forma en cada uno de los casos y que no en en todas las ocasiones se llega a explicitar qué valores son raíces de la ecuación (Tabla 5.4).

Tabla 5.4 *Caracterización teórica del dME alrededor de la raíz de una ecuación polinómica y la fundamentación para su rediseño.*

dME alrededor de la raíz de una ecuación polinómica	Principios de la TSME	Propuesta de dME para la raíz de una ecuación polinómica
Carácter Utilitario	**Normativa de la práctica social**	**Carácter funcional**
Los argumentos y significados que privilegia el dME se centran en la utilización de relaciones para la factorización de ecuaciones de manera álgebraica habitualmente en el caso de la relación coeficiente–raíz; mientras que la relación signo–raíz es utilizado para el llenado de tablas que permitan estimar un posible número de	Esquemas de anidación de prácticas preliminares.[6] 	Promover argumentos tomando en cuenta las prácticas identificadas, suscitando diversos escenarios que lo permitan.

[6] Se muestra "un solo modelo de anidación de prácticas" con fines de presentación. Sin embargo, se es consciente que la caracterización de *comparar* y *agrupar* cambia y se puede incluir o no *visualizar* de acuerdo con que relación se esté trabajando, si signo–raíz o coeficiente–raíz. Por eso en el modelo presentado en la tabla estas prácticas tienen una marca para hacer esta distinción.

raíces reales positivas y negativas.		
Atomización en los conceptos No hay argumentos ni significados relacionados a una ecuación como proporción ni una proporción como ecuación. También carece de argumentos gráficos en el plano que cuestionen las relaciones entre coeficiente y su signo con las raíces de la ecuación. O bien de argumentos que favorezcan la predicción.	**Racionalidad contextualizada**	**Racionalidades contextuales diversas** Reflexionar acerca de las ecuaciones como proporciones y viceversa, que permita un tránsito de un tema ya conocido a uno nuevo. Además involucrar otros contextos situacionales, como el gráfico que consideren la predicción como elemento central.
Carácter hegemónico Las relaciones entre coeficiente y raíz sirven para factorizar una ecuación (significado impuesto). El uso de la transformación de funciones para encontrar un posible número de raíces negativas (argumento impuesto).	**Relativismo epistemológico**	**Validación de saberes** Diversidad de argumentaciones y significados gráficos, analíticos y algebraicos. Por lo que se deben considerar esta variedad al momento de construir el conocimiento. Esto debido a que cada individuo y grupo tendrá una racionalidad contextualizada influyendo factores como el contexto histórico, geográfico, económico, si tiene discapacidad o no, etcétera.
Conocimiento acabado y continuo Se presentan las relaciones entre coeficiente y raíz y entre signo del coeficiente y raíz como una regla provocando que deba ser memorizado y aplicado		

a problemas específicos.		
Falta de marcos de referencia para su resignificación No se toman en cuenta otros escenarios donde se pueda explicar esta relación. Ni dentro de la matemática misma (lo proporcional, lo predictivo, lo geométrico, lo gráfico), ni en otras prácticas de referencia o contextos situacionales.	**Significación progresiva**	**Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación** Tomar en cuenta escenarios como lo puede ser lo proporcional, lo predictivo, lo geométrico (cuestiones de áreas y volúmenes) y lo gráfico (plano cartesiano). Así como prácticas de referencia que estén relacionadas con la construcción social de este conocimiento matemático.

Elaboración propia a partir de (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

Las características presentadas en la Tabla 3 sobre el dME alrededor de la raíz de un polinomio son las causantes de la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático a todos los actores del sistema didáctico, sin hacer distinción entre género, edad, rol dentro del sistema didáctico (profesor, alumno, etcétera), si tiene una discapacidad o no, entre otras características. Estos aspectos del dME son retomados de la investigación realizada por Soto (2010) quien menciona que este fenómeno de exclusión se produce debido a la legitimidad de la cual goza la matemática escolar resultando así en que los diversos actores del sistema didáctico no se les tome en cuenta, es decir, se les incluya en la construcción del conocimiento matemático.

Finalmente, las prácticas identificadas en el presente capítulo en la obra de Viète (1646) y Descartes (1637) además de la Tabla 3 sirven de base para la elaboración de la situación exploratoria [Anexo I]. Esto es, del análisis de *Æquationum recognitione tractatus duo* (viète, 1646) se rescatan las prácticas de *comparar* y *agrupar*, así como el uso de las ecuaciones con forma $A^3 - A^2(B + D + G) + A(BD + BF + DG) = BDG$, donde B, D, G son las raíces de la ecuación cúbica; y $A^2 - (B + D) = BD$ donde BD son las raíces de la ecuación cuadrática. Por otro lado, del análisis de *De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides* (Descartes, 1637) se rescatan las prácticas de *comparar, agrupar* y *generalizar*, y de la reconstrucción racional socioepistemológica de Cantoral y Ferrari (2009) la práctica de *visualizar*, esto con el fin de propiciar un escenario en el que resignifique lo que actualmente se conoce como la Ley de los signos de Descartes. Además, se utiliza lo propuesto en la Tabla 5.4, *i.e.*, se evita la centración de argumentos algebraicos alusivos a la factorización en el diseño de la situación exploratoria y se trata de promover argumentos, significados y procedimientos geométricos que permitan interactuar con este saber desde otras aristas.

CAPÍTULO 6
IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN EXPLORATORIA

Capítulo 6. Implementación y análisis de la situación exploratoria

En el presente capítulo se muestra la descripción de la puesta en escena y el análisis de la transcripción de los vídeos y audios obtenidos en la puesta en escena de la situación exploratoria, además de utilizar la bitácora de la observadora no participante [Anexo VIII] con el fin de corroborar las inferencias realizadas. El capítulo se divide en dos secciones principales: la contextualización del escenario de implementación, donde se muestran los rasgos generales del informante, su conocimiento previo en la solución de ecuaciones polinómicas y una descripción *grosso modo* de cómo se encuentra dividida la situación exploratoria y las prácticas esperadas en cada apartado.

6.1 Contextualización del escenario de implementación

Como se mencionó en el capítulo 4: Aspectos metodológicos la persona que funge como informante en esta investigación es ciego de nacimiento (al cual se hará alusión llamándolo *Jair* o por simplicidad, *J*). Actualmente se encuentra cursando sus estudios en educación superior, esto implica que ha culminado sus estudios de nivel secundaria y medio superior satisfactoriamente, teniendo así interacciones previas con la solución de ecuaciones polinómicas de primer y segundo grado. Empero, fue necesario realizar un diagnóstico para conocer los conocimientos previos o recuerdos asociados a determinadas palabras relativas a las ecuaciones polinómicas. Dadas las condiciones sanitarias actuales por la pandemia por el virus Covid-19, ésta fue realizada por videollamada, por lo cual no se implementó material didáctico, ya que el diagnóstico no fue diseñado de manera tal que requiriera el uso de alguno; ni notas en braille, por elección de *Jair*.

El diagnóstico [Anexo V] para las ecuaciones lineales y cuadráticas solicita resolver una ecuación y graficar o mencionar qué argumentos, procedimientos o estrategias emplearía para graficarlas. Mientras que para las cúbicas se cuestiona si tiene algún conocimiento previo que recuerde al respecto. Al intentar resolver una ecuación de primer grado mencionó lo siguiente

> A: [...] Bueno, si te doy una ecuación, por ejemplo $15t - 7 = 37$ ¿Cuánto valdría *t?*
> J: Sí. Ehmm... Bueno tú me corriges porque me da pena, pero bueno. Es *15t*, el 15 pasa ¿no?
> A: ¿Cómo pasa?
> J: Pasa al lado de la-del 37.
> A: Ajam, ¿Cómo?

J: Ehmm, menos 15. O sea, sí. Quedaría 37, 37 menos 15. ¿Sí?
A: Ok ¿Qué más?
J: Creo que, no me acuerdo-no recuerdo si… si se hace la operación del 37 meno 15 o se hace antes lo del 7. Hmm… Pero creo que se resta primero. Bueno, me parece más lógico eso…
A: ¿Cuánto te quedaría entonces?
J: Pues quedaría, hmm, veinti… 22, ¿no?
A: Ajá
J: Entonces quedaría *t menos 7 igual a 22* [$t - 7 = 22$]
A: Sí, pero ¿qué más?
J: Ehmm, perdón. Es que hace mucho tiempo que no hago este tipo de matemáticas. Eh.. Entonces el *menos 7* ahora pasaría sumando ¿no? sumando. Quedaría *t igual a 22 más 7* [$t = 22 + 7$]. Entonces, pues, sería hmm, ¿29?
A: Entonces ¿t vale 29?
J: *t igual a 29* [$t = 29$], creo.

En el episodio J recurre a "despejar" *t pasando* los demás miembros al lado izquierdo de la igualdad, lo hace sin identificar la forma en la que el despeje sería más adecuado con el uso de operaciones inversas, *i.e.*, si está multiplicando entonces corresponde una división, si está sumando pasa restando, etc. Simplemente pasa los términos con el signo contrario. Se ve que recuerda el método del despeje y que el uso de una letra distinta a *x* para representar la incógnita no causa conflicto. Esta combinación de operaciones aditivas con multiplicativas es un fenómeno reportado en la literatura con poblaciones sin discapacidad visual (Herscovics y Linchevski, 1994; Egodawatte, 2011).

Para el caso de la graficación de la función lineal asociada a la ecuación de primer grado Jair comentó explícitamente que no recordaba elementos asociados a la gráfica, lo cual dio oportunidad a la situación exploratoria al utilizar este contexto en mayor medida a comparación de un contexto algebraico.

A: Ahora, si te doy una expresión y te pido que la grafiques que sería $y = -2x + 4$. ¿cómo le harías?
J: Ajam. ¿cuál es la expresión?
A: $-2x + 4$ ¿cómo graficarías eso?
J: Ok… Creo que eso sí no me acuerdo nada de las gráficas. Hm… sí, de eso no recuerdo bien

Por el lado de las ecuaciones de segundo grado se reproduce un procedimiento similar al empleado en el caso de las ecuaciones de primer grado, es decir, se despeja la ecuación *mandando* los términos del lado izquierdo al derecho de la ecuación de manera indistinta, pero en este caso presentando ciertos pasos relacionados con el término cuadrático. El procedimiento empleado fue el siguiente (Tabla 6.1) [la conversación completa se encuentra en el Anexo VI].

Tabla 6.1 Procedimiento empleado por J al resolver una ecuación de segundo grado.

Paso	Argumento empleado
$\boldsymbol{y^2 + 7y = 0}$	Problema original
$\boldsymbol{y^2 + 7y = 0 - 12}$	"Se empieza [despejando] con los números en este tipo de ecuaciones"
$\boldsymbol{y^2 + 7y = -11}$	El resultado de efectuar $0 - 12$ es igual a -11
$\boldsymbol{y^2 + y = -11 - 7}$	"Creo que ahora pasa... el 7 restando, menos 7"
$\boldsymbol{2y + y = -18}$	El resultado de efectuar $-11 - 7$ es igual a -18. Además, "creo que pasa la y^2, que sería como $2y$".
$\boldsymbol{y = -18 - 2y}$	"Pasaría, pues negativo, creo. Sí, sí pasa al otro lado sí. Si se queda ahí mismo es más $2y$"

Elaboración propia

Se replica la combinación de operaciones aditivas y multiplicativas suscitada en el caso de las ecuaciones lineales. Sin embargo, en esta ocasión también surge el argumento "$y^2 = 2y$" el cual es una ideal usual en el tratamiento algebraico de ciertos estudiantes (Kaur, 1991). Una vez realizada esta conversión se continúa con el proceso que conoce hasta ahora y muestra dominio en la identificación del signo de los términos y su cambio en caso de ser despejados.

Para el caso de las gráficas asociadas a las ecuaciones de segundo grado menciona nuevamente el no recordar como realizarlas. Empero, al escuchar la palabra "parábola" evoca ciertos recuerdos y dice

> J: Y... la parábola, hmm, es como una, no sé si sea esta forma. Así como [*mueve el dedo índice de su mano izquierda en forma de "U"*] Que sube y que luego baja. ¿O la estoy confundiendo con otra cosa? [...] Cuando practicaba jabalina. Me decían que tenía que ser una parábola.

Si bien él logra recordar la forma no la asocia a la ecuación cuadrática. La curva la relaciona con el tiro parabólico al tener experiencias previas relativas a este fenómeno cuando practicaba jabalina. Por lo que apoyarse de experiencias previas del estudiante puede ser un método para fomentar la interacción del alumno con el tema matemático, y no centrarse únicamente en lo gráfico.

En el caso de las cúbicas Jair menciona no recordar nada, lo cual es congruente con lo presentado en el capítulo 1: Introducción, en el cual se menciona que el tema de ecuaciones de tercer grado no se considera en los planes de estudio de educación secundaria ni media superior, sino sólo en determinadas carrerras relacionadas con ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas. Sin embargo, él al no encontrarse formándose en alguna de estas áreas tiene sentido que las desconozca. Por lo que las respuestas que emerjan de su reflexión en la parte de las ecuaciones de tercer grado servirán para corroborar aquellas suscitadas en las de primer y segundo grado.

De manera general se puede reconocer el desconocimiento del contexto gráfico de las ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3, y por lo tanto también de cómo las soluciones a dichas ecuaciones se ven reflejadas a manera de intersecciones con el eje x. De modo que, más allá de servir como un contexto novedoso por parte del informante, su interacción será más genuina, es decir, no habrá elementos conocidos por parte de Jair que en algún momento puedan ocasionar una interpretación que obstaculice su razonamiento. Además, al igual que sus contemporáneos sin discapacidad presenta procedimientos que reflejan una comprensión mecanicista de los métodos de resolución, siendo esto concordante a lo reportado por Escalante (2020).

Por otro lado, dada la tabla de intencionalidades de los cuestionamientos en el desarrollo de la situación exploratoria se presenta el siguiente esquema el cual muestra la forma en la que se secciona la misma en términos de grado de la ecuación, elementos que se abordan entorno a la gráfica y las prácticas esperadas (Figura 6.1). Si bien, en términos generales se presentan cuatro prácticas: *comparar*, *agrupar*, *generalizar* y *visualizar* rescatadas del análisis histórico epistemológico [Capítulo 5], dada la puesta en escena éstas se matizan distinto en el contexto gráfico y dependiendo de las intencionalidades de cada cuestionamiento. Es decir, hay una similitud con la práctica en el contexto algebraico al poder analizar estados, particularmente puntos críticos (ordenada al origen y raíces) sin embargo, toman características distintas por el ambiente en el que se encuentran. En la Figura 6.1 se encuentran explicitadas de manera breve cómo se consideran las prácticas a lo largo de la situación exploratoria, y de manera transversal la *visualización*. Puesto que la *visualización* es entendida en esta investigación como el uso de lo háptico y auditivo para la interacción con el entorno de manera tal que permite representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información relacionada con procesos de construcción de conocimiento matemático [Capítulo 3: Aspectos teóricos], es una *práctica* que está en constante ejercicio en la exploración por lo que en cada una de las tareas y ejercicios surge como primera forma de interacción del sujeto ante el medio (el geoplano).

Entonces, teniendo en cuenta el diseño de la situación exploratoria con intencionalidad en el desarrollo de prácticas se llevó a cabo su puesta en escena con el apoyo de un geoplano impreso en 3D [Anexo III] y su versión homóloga en macocel sin marcar la cuadrícula, es decir, solo se identificaron en relieve los ejes xy y no se estableció algún tipo de escala; plastilina para modelar las curvas; y las expresiones algebraicas en braille para ciertas gráficas utilizadas. Para mayor detalle del escenario presencial en el que ocurrió consultar el Capítulo 4: Aspectos metodológicos.

Figura 6.1 *Esquema de la situación exploratoria y las prácticas esperadas en cada sección.*

Primer grado	Multiplicidad	Comparar (rectas en el plano)
		Generalizar (el número máximo de cruces de la curva con el eje x)
	Signo-Raíz	Comparar (rectas en el plano)
		Agrupar (rectas dado una característica en común)
		Generalizar (una propiedad que le permita describir los grupos formados)
	Coeficiente-Raíz	Comparar (elementos de la gráfica)
		Agrupar (elementos de la gráfica con elementos de la expresión algebraica)
		Generalizar (una forma de agrupar expresiones algebraicas con gráficas de rectas)
Segundo grado	Multiplicidad	Comparar (parábolas en el plano)
		Generalizar (el número máximo de cruces de la curva con el eje x)
	Signo-Raíz	Comparar (elementos gráficos)
		Agrupar (ejemplos propuestos)
		Generalizar (una propiedad que permita describir los grupos formados)
	Coeficiente-Raíz	Comparar (puntos de la gráfica con expresiones algebraicas)
		Agrupar (puntos de la gráfica para relacionar con los coeficientes)
		Generalizar (una forma de agrupar expresiones algebraicas con gráficas de parábolas)
Tercer grado	Multiplicidad	Comparar (cúbicas en el plano)
		Generalizar (el número máximo de cruces de la curva con el eje x)
	Signo-Raíz	Comparar (elementos gráficos)
		Agrupar (ejemplos propuestos)
		Generalizar (una propiedad que permita describir los grupos formados)
	Coeficiente-Raíz	Comparar (puntos de la gráfica con expresiones algebraicas)
		Agrupar (puntos de la gráfica para relacionar con los coeficientes)
		Generalizar (una formar de agrupar expresiones algebraicas con gráficas de cúbicas)

Visualizar (creación de una imagen mental a partir del reconocimiento y manipulación del entorno que permite la manipulación de la información gráfica)

Elaboración propia.

En las siguientes secciones del capítulo se muestran ejemplos que evidencian la presencia de *prácticas* de acuerdo al grado de la ecuación que se trate. La transcripción completa de la implementación de la situación exploratoria se encuentra en el Anexo VII.

6.2 Prácticas asociadas a las raíces en ecuaciones de primer grado

Como se mostró en la Figura 6.1, en la situación exploratoria se abordaron tres aspectos de las raíces: la multiplicidad de las soluciones, es decir, si las raíces son simples o múltiples (dobles o triples) y cuál es el número máximo posible de cruces con el eje x; la relación signo–raíz, en la cual se retoma la reconstrucción racional hecha por (Cantoral y Ferrari, 2003, 2009) donde se acude a elementos de la recta como pendiente y ordenada al origen para establecer cuál podría ser el signo de los coeficientes dado el signo de la raíz; y finalmente, la relación coeficiente–raíz, donde se pretende establecer relaciones entre los valores de los coeficientes y el valor de la raíz a tráves de sumas y/o multiplicaciones. En esta sección se muestran las prácticas presentadas por Jair en el desarrollo de la situación exploratoria en cada una de las secciones mencionadas.

6.2.1 Multiplicidad en las soluciones de ecuaciones de primer grado

En la parte de inicial de la situación exploratoria se utilizaron ocho geoplanos en macocel, *i.e.*, fueron ocho rectas, una en cada geoplano. Y cada geoplano sólo tenía marcados los ejes *x,y*. Las expresiones algebraicas correspondientes a las gráficas de las rectas presentadas son $y = -\frac{1}{5}x - 1; y = -x - 8; y = \frac{1}{2}x - 3; y = 4x - 8; y = -\frac{1}{3}x - 3; y = -3x + 9; y = \frac{1}{4}x + 1; y = x + 2$ (Figura 6.2). La elección de estas curvas se debe a que representan variedad en los signos de los coeficientes, y por lo tanto distintos lugares de intersección con los ejes xy. En esta sección el alumno desconocía las expresiones algebraicas, sólo se le proporcionó la representación gráfica, una por una, y la oportunidad de explorar el tiempo necesario cada una y si fuese necesario regresar a interactuar con gráficas que ya había examinado. La consigna principal era analizar las gráficas e identificar elementos en común y diferencias entre ellas. En el primer acercamiento a las gráficas menciona que son “diagonales” aquellas rectas cuya pendiente en valor absoluto se encuentra entre 0 y 1, es decir, aquéllas cuyo valor de pendiente es fraccionario. Por el lado de las rectas cuya inclinación corresponde a un valor entero, positivo o negativo, las denomina “rectas”. Así también, en la Tabla 6.2 se muestra un extracto de la conversación en donde se evidencia lo que él está considerando como una recta “positiva” y “negativa”.

Figura 6.2 Imagen de los geoplanos utilizados en la sección de Ecuaciones de primer grado de la situación exploratoria.

Los colores de cada curva sirvieron al investigador para identificar la expresión al momento de la transcripción.

Tabla 6.2 *Análisis de prácticas en la sección "Multiplicidad" en ecuaciones de primer grado. Identificación del número de cruces.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">A: [le proporciona el geoplano con la recta $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + 1}$ y retira la anterior, $\boldsymbol{y = -\frac{1}{5}x - 1}$]
J: [hace una exploración rápida con las dos manos sobre la recta] Está es como la otra, pero al revés creo... [señala con la mano derecha el segmento de recta que está en el cuadrante tres] La x es ahora negativa. [recorre dos veces la recta empezando por el lado más cercano a él y terminando en el más lejano con la mano derecha] y la y es positiva, creo. Porque va hacia arriba. Y... ¿cuántas veces cruza? [toca con la mano derecha la recta cerca del eje y] pues el eje y una vez, y el eje x una vez igual.
A: Sí. Entonces está hacia arriba ¿y la anterior?
J: ... ¿la anterior?
A: Sí, dijiste ésta "va hacia arriba". Entonces, ¿la anterior?
J: Ah, ok. Sí. Que era inversa [toca dos veces con su mano derecha el cuadrante cuatro simulando "la trayectoria" de la recta anterior] la x</td><td colspan="2">Dado que en la primera etapa de la situación exploratoria Jair estaba analizando distintas gráficas y mencionando lo que le parecía pertinente.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Compara las pendientes de dos gráficas analizando secciones de ellas por cuadrantes.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Explora de manera háptica las gráficas usando una o dos manos al mismo tiempo. Es decir, está usando el tacto activo para identificar información con la cual afirma, encuentra diferencias o similitudes.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Identifica el número de cruces que pueden tener las rectas y el signo de las coordenadas de las intersecciones con los ejes x,y.</td></tr>
</table>

era positiva y [*toca con su mano derecha el cuadrante dos haciendo un movimiento circular*] y la *y* también era positiva, pero aquí la diferencia es que la *x* es negativa.		

Elaboración propia.

En el extracto se nota que su principal medio de interacción con el medio es la exploración háptica, y que ésta se realiza en más de una forma de hacerlo y más de una vez. Además, que logra identificar la curva con pendiente positiva por su análisis por cuadrantes, al momento de decir que en cierto momento la recta tiene *x* negativas y *y* que "crecen", ya que en su exploración lo más destacado son esos elementos, comparándolo con el caso de la recta con pendiente negativa, en la que nota un comportamiento distinto al de la que tiene pendiente positiva. Por otra parte, a la pregunta directa a *Jair* de si era posible que no existiera algún corte de la recta con el eje *x,* hizo tres cosas, dos de ellas podrían anticipar al momento del diseño de la situación exploratoria [Anexo II] (Tabla 6.3).

Tabla 6.3 *Análisis de prácticas en la sección "Multiplicidad" en ecuaciones de primer grado. Confirmación del número de cruces.*

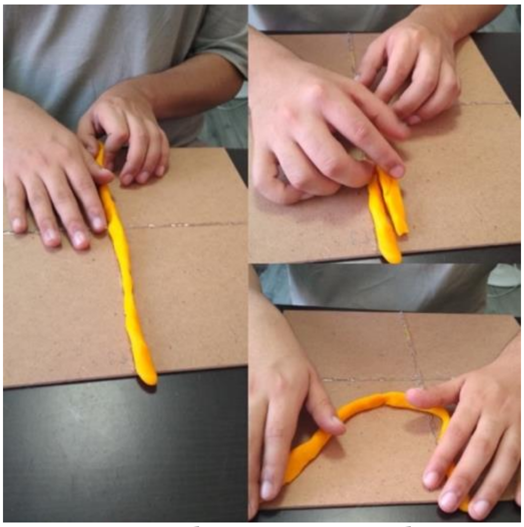
<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">A: ¿Puede que no la corte ninguna?
J: Hm ¿cómo?
A: Que… Que la línea de alguna forma nunca cruce por más que la prolongues
J: [toca con la mano derecha el eje x] ¿Qué nunca cruce la x? Creo que sí puedo. ¿Sí se puede, no?
A: ¿Cómo lo harías?
J: [toma la recta de plastilina y la coloca sobre el eje y] Sí, ¿no? ¿sí se puede, no?
A: Pero, a ver. Checa si en algún momento cruza
J: [con ambas manos, una de cada lado de la recta x=0, recorre cerca del centro del geoplano de arriba a abajo] Sí, bueno. Aquí en el centro. Pues no, tendría que ir partido, casi.
A: ¿Cómo?
J: No sé, [toma la parte inferior de la recta x=0 y superpone sobre la parte positiva de manera, i.e., "dobla la recta a la mitad hacia arriba"] Sólo ¿así?
A: No, pero eso no es una recta completa, es un segmento de recta.</td><td colspan="2">En la conversación ya se había identificado que la recta cruzaba una vez por el eje x, por lo que se preguntó acerca de si era posible que no hubiera cortes o existieran más de uno.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Construye gráficas para explorar de manera háptica la intersección con el eje x.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Recurre cada gráfica con una o dos manos.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Identifica cuántos cruces pueden existir de la curva de grado uno con el eje x de manera general.</td></tr>
</table>

J: [*regresa la parte que dobló a su posición inicial, es decir, vuelve a poner con plastilina la recta x=0*] Entonces creo que no se puede. [*Dibuja una parábola con concavidad positiva y sin raíces reales en el cuadrante uno*] ¿O así? Aquí no toca el eje. A: Esa forma la vamos a ver ahorita más adelante. No es una de grado uno, sino una de grado dos. Entonces ahorita estamos con las de grado uno que son todas éstas. Pero muy bien. Pero, ¿y las de grado uno? Que sean rectas, quiero decir. J: No. [*regresa la parábola a la forma de la recta x=0*] De éstas creo que no. A lo mejor estoy equivocado, pero creo que no. […] Pasa una vez por *x* y una vez por *y*. ¿Y puede pasar dos veces por un mismo eje? Yo creo que sí. A: ¿Por el mismo eje? J: Sí, que pase dos veces por [*con la mano derecha recorre el eje y de "arriba hacia abajo"*] No, creo que eso ya no se puede. A: No, ahorita del eje x ya viste que no. ¿Y de *y*? J: [*toma los extremos de la recta y los une de manera tal que la Figura resultante es una forma circular*] Tendría que ser como un círculo.		

Elaboración propia.

Primero coloca una recta sobre el eje *y*, pero se da cuenta al volver a analizarla con detenimiento que sí existe un corte con el eje *x*. La primera respuesta esperada era que presentara únicamente un segmento de recta, pero con orientación logra entender que es un argumento que no funciona en la situación que se plantea. Finalmente, la otra réplica prevista es la construcción de una curva de segundo grado, la cual también con guía es capaz de entender que tampoco es válido. Siendo así, argumenta que no es posible que no existan cortes de la recta con el eje *x*. Para el caso de más de un corte construye un círculo que inmediatamente descarta al no tener una forma similar a las rectas que ha estado analizado hasta el momento (Figura 6.3). Por lo tanto, de manera general logra identificar que las rectas tienen un único cruce con el eje *x*.

Figura 6.3 *Gráficas construidas por Jair para corroborar el número de cruces de la curva de grado uno con el eje x.*



En la primera imagen se presenta la recta x=0, en la imagen superior derecha el segmento de recta que presenta como respuesta y en la imagen inferior derecha la curva de grado dos que propuso. Elaboración propia.

6.2.2 Relación signo–raíz en las ecuaciones de primer grado

En la segunda parte de las ecuaciones de primer grado se sigue trabajando con las mismas ocho gráficas de la primera parte. Ahora la consigna consiste en relacionarlas de acuerdo con algún criterio que Jair sugiera o crea conveniente. Para ello retoma la exploración de cada una de ellas y reformula lo que entiende por una recta *positiva* y una recta *negativa*. Las *positivas* ahora son aquellas que en realidad tienen una pendiente menor a cero ya que independientemente de su estrategia de exploración, en su narrativa tiende a *leerlas* de izquierda a derecha. Entonces *positivo* va a ser aquello que de inicio tiene valores de y mayores a cero y continúa hacia valores de x positivos. Por otro lado, las rectas *negativas* para Jair son las que tienen pendiente mayor a cero, puesto que en su relato lo que menciona primero es que la curva tiene valores negativos en y y pasa a valores positivos de x (Tabla 6.4).

Tabla 6.4 *Análisis de prácticas en la sección "signo–raíz" en ecuaciones de primer grado. Primera agrupación.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">J: [recorre nuevamente de "izquierda a derecha" la recta $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}\,x - 3}$ dos veces] Están así, como, casi casi recta. Pero, pero, hacia [empieza a tocar de "izquierda a derecha" la recta $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x - 3}$ de manera repetitiva] Así, o</td><td colspan="2">Jair en el momento de la transcripción explora cuatro gráficas para proponer una característica por la cual pueda esteblecer relaciones entre las gráficas.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Compara los comportamiento globales</td></tr>
</table>

sea... [*señala la parte de la recta que está en el cuadrante cuatro*] esto va hacia lo positivo y [*señala la parte de la recta* $y = -\frac{1}{3}\ x - 3$ *que está en el cuadrante dos*] esto a lo negativo. No al revés, [*señala la parte de la recta* $y = -\frac{1}{3}\ x - 3$ *que se encuentra en el cuadrante cuatro, luego la recorre desde el centro hacia el extremo derecho*] esto a lo positivo y [*señala la parte de la recta* $y = -\frac{1}{3}\ x - 3$ *que está en el cuadrante dos*] y esto a lo positivo. O sea, sí, [*señala el geoplano con la recta* $y = -\frac{1}{3}\ x - 3$] está es positiva y [*señala al geoplano con la recta* $y = \frac{1}{2}\ x - 3$] y esta es negativa. A ver no, porque [*señala el segmento de la recta* $y = \frac{1}{2}x - 3$ *que queda en el cuadrante tres*] Esta *x* es positi-negativa. Y [*señala el segmento de la recta* $y = \frac{1}{2}x - 3$ *que está en el primer cuadrante*] esta *y* es positiva. Entonces me estoy equivocando ¿Cómo te podré explicar? [*con ambas manos, una en cada extremo, toca los extremos de la recta* $y = -\frac{1}{3}\ x - 3$. *Luego repite haciendo lo mismo en la recta* $y = \frac{1}{2}x - 3$] No, espera. Creo que más bien [*toca los extremos de cada una de las rectas que tiene en la mesa*] Esto se parece más [*señala el geoplano con la recta* $y = \frac{1}{2}\ x - 3$] No a ver, tengo que ver bien [*toca brevemente con ambas manos la recta* $y = 4x - 8$ *cerca de la parte cercana al centro del geoplano. Luego pasa sus manos a la recta* $y = -3x + 9$*, las coloca en los "extremos" de la recta, la mano izquierda en el superior y la mano derecha en el inferior. Con ambas manos realiza movimientos cortos que la recorren de "arriba hacia abajo" de manera reiterativa. Finalmente, con la mano izquierda recorre toda la recta de "arriba hacia abajo" y de "abajo hacia arriba" cuatro veces*] Perdón, es que soy muy indeciso. [*Con la mano izquierda recorre la recta* $y = -3x + 9$ *de "abajo hacia arriba unicamente de manera repetida*] Esto está como una		de las rectas. Es decir, de manera cualitativa interpreta el valor de la pendiente de las rectas y con esas afirmaciones establece similitudes o diferencias entre los cuatro geoplanos.
	¿Cómo hace?	Examina los geoplanos en diversas ocasiones y empleando diversas estrategias con una o dos manos de manera tal que le permitan **visualizar** de una manera más formal e informada las características de cada recta y como se relacionan o no entre ellas.
	¿Para qué lo hace?	Realiza **agrupaciones** de acuerdo con las características que considera relevantes entre los geoplanos analizados.

montaña o algo así. Como una… no sé [*con ambas manos recorre desde el centro hacia los extremos la recta* $\boldsymbol{y = 4x - 8}$] Bueno, éstas [*señala el geoplano con la recta* $\boldsymbol{y = -3x + 9}$ *y luego el geoplano con la recta* $\boldsymbol{y = 4x - 8}$] estas dos sí se parecen. De eso ya estoy de acuerdo [*señala el geoplano con la recta* $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\, x - 3}$ *y luego al que tiene la curva* $y= -\frac{1}{3}\, \boldsymbol{x - 3}$] Pero, no sé. Creo que ésta y ésta son de diferente tipo.		

Elaboración propia.

La exploración de las ocho gráficas concluyó en una primera composición (Figura 6.4) de tres grupos: el primero de ellos con cuatro gráficas correspondientes a aquéllas con un valor de pendiente entero; el segundo con dos gráficas con pendiente fraccionaria negativa; y el tercero, por las dos gráficas con pendiente fraccionaria positiva. En la explicación a lo largo del desarrollo de la primera clasificación continuaron las ideas sobre las rectas *positivas* y *negativas*. Cabe mencionar que no corresponde del todo con alguna de las clasificaciones que se previeron que podrían surgir, como agrupar por aquéllas con pendiente entera (más próximas al eje *x*) y pendiente fraccionaria (más cercanas al eje *y*) o por aquéllas con valor de pendiente positiva (*crecientes*) y negativas (*decrecientes*).

Figura 6.4 *Primera agrupación realizada por Jair.*

Pendiente con valor entero	Pendiente con valor negativo y fraccionario	Pendiente con valor positivo y fraccionario
•$y = -3x + 9$	•$y = -\frac{1}{3}x - 3$	•$y = \frac{1}{2}x - 3$
•$y = x + 2$	•$y = -\frac{1}{5}x - 1$	•$y = \frac{1}{4}x + 1$
•$y = -x - 8$		
•$y = 4x - 8$		

Elaboración propia.

Su argumento para la clasificación realizada recae en aspectos cualitativos de la pendiente, como se puede apreciar en el siguiente fragmento

> A: No, en realidad lo que te quería preguntar es: ¿Qué notaste en común para hacer los equipos o los grupos?
> J: Me basé más en la línea la verdad. A lo mejor es porque no tengo todavía bien el concepto de-de los números. De qué número significa cada [*con la mano derecha recorre de "arriba hacia abajo" y "abajo hacia arriba" la recta* $y = \frac{1}{4}x + 1$] cada extremo, cada cuadrante, sí. [*toma el geoplano con la curva* $y = \frac{1}{4}x + 1$ *con la mano*

derecha y después señala al geoplano con $y = \frac{1}{2}x - 3$] Pero, me base más en la figura. Mira, ésta y ésta son muy similares.

Si bien dentro de su vocabulario está ausente la palabra “pendiente”, se puede inferir que logra percibir similitudes en el comportamiento de las rectas al mencionar que dos rectas son similares en su forma. Ya que el elemento que las diferencia es el signo de la ordenada al origen, una positiva y otra negativa, pero no lo considera relevante para la agrupación. Es hasta el momento en el que se le cuestiona directamente que “¿En qué lado corta al eje x? ¿En los positivos o en los negativos? ¿O a la derecha o a la izquierda?” que comienza a reesctruturar su forma de clasificación. Ahora se concentra en los cruces con los ejes *xy* y explora nuevamente las ocho gráficas buscando similitudes o diferencias entre ellas, lo que produce una segunda agrupación. En esta ocasión fueron cuatro grupos los resultantes, y para ese proceso se muestra un fragmento de la transcripción de los argumentos presentados por Jair en la Tabla 6.5

Tabla 6.5 *Análisis de prácticas en la sección “signo–raíz” en ecuaciones de primer grado.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">J: [sostiene el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$ con la mano derecha a la altura del pecho y con la mano izquierda recorre la recta de “arriba hacia abajo”] Y éste igual. Acá está el negativo y... ah caray, éste no. Éste es negativo y negativo. [recorre nuevamente de “arriba hacia abajo” la curva $y = -\frac{1}{5}x - 1$] O sea corta en los dos ejes negativos. [recorre de “arriba hacia abajo” la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ con la mano izquierda una vez a lo largo de todo el geoplano, repite el movimiento pero en la segunda ocasión se detiene en las intersecciones con los ejes x y y] Entonces, a ver. Déjame ver. [señala con la mano izquierda la intersección de la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ con el eje y] Éste está en negativo. No, éste... Sí, está en el negativo. [señala con la mano izquierda la intersección de la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ con el eje x] Pero acá está en el positivo de x. [señal con la mano izquierda el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$] Entonces estos dos no se parecen... [recorre de “abajo hacia</td><td colspan="2">Vuelve a explorar nuevamente las gráficas pero ahora focalizando la atención en la intersección con los ejes x,y, lo cual hace que reestructure sus argumentos y, por lo tanto comienza a construir una nueva asociación entre las curvas.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Analiza los signos de las intersecciones con los ejes xy de cada gráfica para compararlos uno a uno, i.e., toma por pares dos geoplanos distintos y compara que signo tiene la raíz y la ordenada al origen cada curva.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Recorre atenta y cuidadosamente de manera háptica con una o dos manos las gráficas, prestando atención a los cruces con los ejes xy</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Para construir una agrupación con elementos en común teniendo la ordenada al origen y la raíz como</td></tr>
</table>

arriba" la recta $\boldsymbol{y = -\frac{1}{5}x - 1}$] Porque estos dos cortan en lo-en los dos negativos. [*busca el geoplano con la recta* $\boldsymbol{y = 4x - 8}$ *y la empieza a recorrer con la mano izquierda de "arriba hacia abajo". Luego busca la recta* $\boldsymbol{y = -x - 8}$ *y la recorre de "abajo hacia arriba"*] Debo buscar algo. Sí, éste. [*Apila uno sobre otro los geoplanos con las rectas* $\boldsymbol{y = -\frac{1}{5}x - 1}$ *y* $\boldsymbol{y = -x - 8}$]		criterios para establecer semejanzas o diferencias.

Elaboración propia.

Como ya se mencionó se establecieron cuatro grupos bajo el nuevo criterio de conformación, los cruces con los ejes xy, resultando entonces de la siguiente manera: el primero de ellos con pendiente y ordenada al origen negativas, el segundo con pendiente y ordenada al origen positivas, el tercero con pendiente positiva y ordenada negativa, y finalmente el último con pendiente negativa y ordenada positiva. Siendo esto relacionado con la Figura 17 del Capítulo 5: Análisis histórico–epistemológico. Es decir, al tener variaciones de signo en los coeficientes resulta en una raíz positiva, mientras que al tener el mismo signo en pendiente y ordenada al origen produce una raíz negativa. Las expresiones algebraicas correspondientes a cada geoplano y la manera en la que se consolidó en la segunda agrupación se muestran en la Figura 6.5

Figura 6.5 *Segunda agrupación realizada por Jair.*

$(-,-)$	$(+,-)$	$(+,+)$	$(-,+)$
• $y = -\frac{1}{5}x - 1$ • $y = -x - 8$ • $y = -\frac{1}{3}x - 3$	• $y = 4x - 8$ • $y = \frac{1}{2}x - 3$	• $y = x + 2$ • $y = \frac{1}{4}x + 1$	• $y = -3x + 9$

En los encabezados de cada grupo se muestra un par ordenado de signos que representa el signo de la pendiente y el signo de la ordenada respectivamente. Elaboración propia.

El uso de las intersecciones con los ejes para Jair resulta una manera más clara de ordenar las rectas, en su narrativa se encuentra lo siguiente:

> J: Bueno, Primero es una manera más fácil de clasificar así que en líneas. Porque en líneas pues es muy, bueno como muy subjetivo. Y más subjetivo si no sabes los números o sea qué es cada cuadrito, no sé cómo decirlo, qué valor tiene cada parte del cuadrante, cada porción del cuadrante... cada fracción. Y eso es básicamente, que es más fácil clasificar en los ejes, basándonos en los ejes.

Al mencionar la palabra “líneas” se refiere a la interpretación cualitativa que hubo del valor de la pendiente. Ya que sin un sistema que le permita cuantificar el valor de la pendiente de cada recta se dificulta poder establecer una relación más adecuada entre las gráficas presentadas. El uso de las intersecciones, es decir de los signos de los coeficientes le permitió establecer una relación que en sus palabras es más fácil de identificar. Como parte final de esta sección se le solicitó que construyera una gráfica que perteneciera a alguna de las clasificaciones propuestas. El resultado lo coloca en aquellas rectas con pendiente negativa y ordenada al origen positiva. Aunque no lo hizo a partir de una expresión algebraica se puede inferir dado las intersecciones con los ejes que corresponde a $y = -\frac{6}{5}x + 6$ (Figura 6.6).

Figura 6.6 *Recta $y = -\frac{6}{5}x + 6$ construida por Jair.*

Desde la perspectiva de Jair la pendiente es negativa y la ordenada al origen es positiva. Elaboración propia.

<u>*6.2.3 Relación coeficiente–raíz en las ecuaciones de primer grado*</u>

En la tercera parte relacionada con las ecuaciones de primer grado se siguen usando las mismas ocho rectas que se han presentado de las curvas en macocel desde el inicio de la situación exploratoria. Empero, ahora se proporciona en braille las expresiones algebraicas correspondientes a cada una. La consigna consiste en leer la forma algebraica de la recta y tratar de inferir como se podría reflejar el valor de los coeficientes en la gráfica. Por ejemplo, dada $y = mx + b$ donde podría localizar un b en el geoplano, o cómo podría decir que se relaciona m con la curva. Cabe mencionar que desde el inicio de la situación exploratoria a Jair le llamó particularmente la atención al triángulo rectángulo que se forma de la intersección de los ejes x,y (catetos) y la recta (hipotenusa). Pero, en un inicio no logró darle una explicación a las implicaciones de esa forma. En la Tabla 6.6 se presenta un extracto de una parte de la exploración de Jair acompañada por el investigador.

Tabla 6.6 *Análisis de prácticas en la sección "coeficiente–raíz" en ecuaciones de primer grado.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">A: La última que vamos a analizar juntos. [le proporciona el geoplano con la recta $\boldsymbol{y = -x - 8}$ con su expresión algebraica escrita en Braille] Luego quedan dos y esas tú solito las vas a–
J: Ok. [lee la expresión en braille algebraica en braille] "ye igual a menos equis menos ocho". Se parece a- bueno acaba igual que otra ¿no? [utiliza la yema del dedo indice izquierdo para cuantificar el eje y en el sentido negativo] uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. Creo que está aquí. [señala el eje x en el sentido negativo. Luego utiliza la llama de su dedo índice para cuantificar el eje x en el sentido negativo] Aunque acá también está hacia el menos, entonces voy a contar uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve. Aquí digamos que queda como nueve, yo creo. Sí, el número sí está un poco más complicado, [señala el eje y en el sentido negativo] pero acá está el –8 [relee la expresión algebraica en Braille] –1, bueno es –x, pero es –1. ¿Dónde está el –1? [recorre con la mano izquierda el triángulo que se forma con los ejes y la curva $\boldsymbol{y = -x - 8}$] ¿Puede estar aquí en el triángulo? Estaría como aquí ¿no? Bueno, yo creo que está aquí. Pero, no sé si esté bien.</td><td colspan="2">Jair en el momento de la transcripción se encuentra explorando la gráfica con la recta $y = -x - 8$. Recurre a estrategias que se presentaron al examinar gráficas previas en esta sección.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Establece una relación entre los elementos de la gráfica con los de la expresión algebraica. Es decir, trata de vincular de cierta manera ambos contextos.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Explora de manera háptica los geoplanos y expresa de forma numérica una magnitud, es decir, a través del tacto activo cuantifica los ejes xy usando la yema de sus dedos como unidad de medida.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Para encontrar una regularidad en la forma de agrupar la forma de la gráfica con los coeficientes de la expresión algebraica.</td></tr>
</table>

Elaboración propia.

Jair logra identificar al final de la exploración acompañada por el investigador que el término independiente en la expresión algebraica se relaciona con la ordenada al origen en la gráfica de la curva. Empero, el -1 que menciona alude a la pendiente, logra inferir que puede estar involucrado en la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma de la intersección de la recta con los ejes *xy*, pero no logra justificar su razonamiento de una manera más profunda. Esto se debe a que se ha reportado que la noción de pendiente requiere un trabajo más profundo y amplio para ser construido (Jiménez y

Buendía, 2017; Cantoral, 2004). Se debe encontrar cierta regularidad o invariante en el comportamiento de la curva, la cual puede ser apoyada por un trabajo a partir del análisis puntual o un uso situado en un contexto cercano a la realidad de quien aprende, por ejemplo, los gráficos presentados en notas periodísticas.

Una vez identificados ciertos razonamientos que le fuesen funcionales a Jair se procedió a entregarle dos geoplanos y dos expresiones algebraicas las cuales él tenía que relacionar. Esto es, él tenía que usar los argumentos que había construido hasta el momento para asociar los dos contextos pero ahora de manera individual, escogiendo a que expresión correspondía a cada una de las rectas presentadas (Tabla 6.7).

Tabla 6.7 *Análisis de prácticas en la sección "coeficiente–raíz" en ecuaciones de primer grado.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">J: Voy a compararlas antes de decirte ya seguro… creo que sí voy bien [lee la expresión algebraica en braille] "ye igual a un cuarto de equis menos, más uno". [con la mano derecha sostiene el geoplano con la recta $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}\, x + 1}$ a la altura de su pecho, mientras que con la mano izquierda recorre la parte de la recta que está en el cuadrantre dos, de "abajo hacia arriba", deteniéndose en la intersección de la recta con el eje y] Pues aquí. Luego, luego. La y. +1 es y [relee la expresión en braille] "un cuarto de equis" ¿es menos o más? más. Más un cuarto está muy chiquito [señala el triángulo rectángulo que se forma de la intersección de los ejes con la recta $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + 1}$ haciendo énfasis en la hipotenusa] Aquí sería, creo. Y ya creo que ésta. ¿Están bien?
A: Sí, las dos están correctas. Entonces, la pregunta el número o el término independiente ¿dónde está: en yes o en equis?
J: Casi todas están en y. Solo me equivoqué con una.
A: De ¿estas dos últimas podrías darme un valor estimado de dónde corta con el eje x?
J: [retoma una expresión escrita en braille, particularmente la de $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\, x - 3}$ y la relee. Después utiliza la yema de su dedo índice izquierdo y comienza a</td><td colspan="2">Jair analiza las gráficas y las expresiones algebraicas antes de dar una respuesta final sobre la asociación entre éstas.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Asocia elementos de la gráfica, como la ordenada al origen con el término independiente.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Cuantifica los ejes xy, y examina de manera háptica las curvas para ubicar ciertos elementos de interés</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Para identificar lo que es común entre lo gráfico y lo algebraico y hacer inferencias sobre el valor numérico en el que la recta corta el eje x.</td></tr>
</table>

cuantificar el eje x en el sentido positivo] Como con el seis.		

Elaboración propia

La *generalización* que llega a establecer Jair sobre la relación entre la ordenada al origen y el término independiente se basa en identificar cierta regularidad en la mayoría de sus argumentos al explorar de manera háptica las gráficas. Si bien en la primera vez que examinó dónde podría encontrar una relación entre lo gráfico y lo algebraico de estos elementos mencionó que podría ser en el valor de la intersección de la curva con el eje x. Entonces, al reconocer este elemento en 7 de las 8 veces en el eje y llega a la conclusión de que había cometido un error al inicio, según sus palabras. Así también, es necesario para Jair cuantificar los ejes para establecer un valor aproximado de la raíz en la gráfica. Para el caso de la pendiente, sigue estableciendo argumentos cualitativos que les son apropiados al examinar el segmento de recta que se ubica entre los ejes xy, aunque en su discurso lo nombra como "ángulo". Cuando se le cuestionó acerca de qué estrategias de manera general utilizaría en el caso de que se le presentara una nueva gráfica mencionó lo siguiente

> J: [*retoma una expresión algebraica en braille y la relee*] Por ejemplo aquí... ¿sí puedo usar este ejemplo, verdad? "Un cuarto de equis" O sea, es un cuarto, no "menos un cuarto". Entonces, yo me baso en la figura que se forma aquí [recorre con la mano derecha el triángulo rectángulo que se forma con los ejes y la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$] Bueno, el ángulo que se forma aquí. Creo que eso es lo que me indica, o sea, leo la... el signo, o sea si es positivo o negativo y ya. ¿Sí es claro, no?

Aunque no es una generalización que involucre un vocabulario más apegado al discurso Matemático Escolar, sí es una generalización construida a partir de diversos eventos particulares que le es adecuada a Jair en el escenario de situación exploratoria.

6.3 Prácticas asociadas a las raíces en ecuaciones de segundo grado

Como ya se señaló, en la Figura 6.1, la situación exploratoria considera tres aspectos: la multiplicidad de las soluciones, la relación signo–raíz, y la relación coeficiente–raíz. En esta sección se muestran las prácticas presentadas por Jair en el desarrollo de la situación exploratoria en cada una de las secciones mencionadas.

6.3.1 Multiplicidad en las soluciones de las ecuaciones de segundo grado

Las expresiones algebraicas utilizadas para esta sección fueron catorce, cuya gráfica correspondiente se presentó en macocel. Las curvas corresponden a $y = -\frac{1}{8}(x-8)(x+5); y = \frac{1}{2}(x-7)(x+2); y = (x-3)(x+2); y = -3(x+5)(x+2); y = (x-5)(x+1);\ y = (x+1)(x-6); y = -2(x-6)(x-9); y = (x-4)(x-9); = \frac{1}{10}(x-5)(x+5); y = (x-8)^2; y = \frac{1}{4}(x-2)^2; y = x^2; y = -x^2-4; y = x^2-4x+6$[7]. Las primeras 9 parábolas tienen dos raíces reales distintas entre sí, las siguientes 3 presentan una raíz doble y las últimas dos tienen raíces complejas[8]. La exploración háptica en esta ocasión fue más agil por parte de Jair, razón por la cual no se presentaron el mismo número de ejemplos del posible número de raíces en las cuadráticas. Además, al momento de analizar y reconocer el comportamiento de cada curva mencionaba figuras a las cuales lo asociaba, por ejemplo un columpio, una pirámide, la forma de la letra "J" o "V", o un puente (Figura 6.7).

Figura 6.7 *Exploración de las cuadráticas.*

En la imagen se puede apreciar a Jair explorando la curva $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$. También se observan las curvas $y = \frac{1}{10}(x-5)(x+5)$ (curva de color amarillo) y $y = (x-8)^2$ (curva de color verde).

En el estudio de las raíces simples no presenta mayor complicación y menciona que no se pueden más de tres raíces y que siga siendo una ecuación de segundo grado.

> A: ¿Podría haber alguna que cruce tres?
> J: ¿tres veces?
> A: Ajá, pero que respete la forma claro de pirámide, de triángulo–

[7] La notación en factores es para identificar de manera rápida las raíces de cada curva.
[8] Este estudio se centra únicamente en las raíces reales, por lo que no habrá una exploración más profunda en la existencia de las raíces complejas.

> J: [*recorre nuevamente la parábola* $y = (x-4)(x-9)$ *con ambas manos yendo desde el centro hacia los extremos*] No. Este… no.

Empero, en el caso de las raíces dobles emerge un argumento sobre el hecho de que la curva no “cruza” el eje x como lo hicieron los casos de parábolas anteriores o las rectas previamente analizadas. Tiene dificultad para poder verbalizarlo, y sólo menciona que la plastilina roza el eje, pero no la toca. Finalmente, para las raíces complejas no se detiene tanto a analizar porque no toca el eje x, solo comenta el cruce con el eje y. De hecho, es lo que nota como rasgo común a las gráficas de segundo grado que examina (Tabla 6.8).

Tabla 6.8 *Análisis de prácticas en la sección “Multiplicidad” en ecuaciones de segundo grado. Identificación del número de cruces.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">J: [toma el geoplano con la recta $\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$con la mano derecha y lo sostiene a la altura de su pecho. Con la mano izquierda recorre la curva desde el centro hacia el extremo izquierdo. Luego del extremo izquierdo hacia el vértice. Cuando llega a éste se detiene y toca la vecindad cercana tanto en la curva como en el eje x] Una vez por $\boldsymbol{y}$, porque roza el eje de x pero no lo toca. O sea, no está encima del eje. Entonces solamente una vez por $\boldsymbol{y}$.
A: ¿Entonces eso que decías que no toca el eje $\boldsymbol{y}$ a comparación de las rectas en este último se cumple o no?
J: No, en éste no. [con la mano izquierda recorre la parábola $\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$ desde el vértice hacia el extremo izquierdo] Aquí toca el eje $\boldsymbol{y}$. Pero no la x. Es como una… no sé.
A: ¿No la toca pero la roza entonces? Porque dijiste que sólo lo rozaba
J: [con ambas manos recorre el eje x cercano a la vecindad del vértice de la parábola $\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$. Luego continua recorriéndolo solo con la mano derecha mientras con la mano izquierda toca el vértice de la curva] Sí, está aquí muy cerquita del eje de x. [comienza a recorrer la parábola $\boldsymbol{y} = \frac{1}{10}(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})(\boldsymbol{x}+\mathbf{5})$ con ambas manos comenzando desde el centro y yendo hacia los extremos] Pero no está</td><td colspan="2">Examina diferentes gráficas buscando ciertas similitudes o diferencias en las parábolas. Es decir, se presentan cuadráticas con dos raíces distintas entre sí, raíz doble o sin raíces reales para identificar ciertas regularidades entre las curvas presentadas.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Compara la forma en la que distintas parábolas cruzan el eje x, es decir, analiza como es el comportamiento de una raíz real simple, de una raíz real doble y de como no existen intersecciones con el eje x cuando hay raíces complejas.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Recorre en diversas ocasiones y de diversas formas con una o dos manos las curvas para conformar una imagen mental que le permita visualizar la manera en la que se comportan las cuadráticas cerca del eje x.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Para generalizar el número máximo de cruces de la parábola con el eje x e identificar regularidades de las cuadráticas.</td></tr>
</table>

encima como ésta. [...] A: ¿Cuántas veces en general podrían todas estas formas cruzar el eje x? O sea, de estos ejemplos que estás viendo ahorita y de los de hace ratito que comenzamos con las parábolas J: Creo que una vez, ¿no? A: Ajá, tienes ejemplos de una.. Por ejemplo éste [*le muestra el geoplano con la parábola* $\boldsymbol{y = x^2}$] J: [*con la mano izquierda recorre desde el centro hacia la izquierda la parábola* $\boldsymbol{y = -x^2 - 4}$, *mientras con la mano derecha recorre la parábola* $\boldsymbol{y = x^2}$ *desde el centro hacia el extremo izquierdo, luego del centro hacia el extremo derecho. Finalmente desde el extremo derecho hacia el centro y luego del extremo izquierdo hacia el centro*] Sí, pero no tanto, es que es más tendencia a $\boldsymbol{y}$. Tienen más tendencia a $\boldsymbol{y}$ mas bien. A: Ese una, ¿los primeros que habías dicho cuántas tenían? J: ¿Los qué pasamos? ¿Los de recta o estos mismos? A: Los de parábola J: Ah, esos eran dos veces. A: ¿Y esos que estás tocando ahora mismo? J: [*recorre la vecindad cercana al vértice de la parábola* $\boldsymbol{y = -x^2 - 4}$ *con la mano izquierda*] Esta sólo… bueno, no. No la toca ninguna, solo pasa por $\boldsymbol{y}$ A: ¿Qué podrías decir en general? J: Que todas tocan $\boldsymbol{y}$		

Elaboración propia.

Como en casos anteriores, la *generalización* de Jair es una construcción a partir de casos particulares en la cual no emplea un lenguaje riguroso y formal, matemáticamente hablando. Más bien es un explicación cualitativa para realizar ciertas afirmaciones y que le sean funcionales para expandir su universo de ejemplos.

6.3.2 Relación signo–raíz en las ecuaciones de segundo grado

Dada la Figura 5.17 del capítulo 5: Análisis histórico–epistemológico, el universo de posibles combinaciones de los signos de los coeficientes de las expresiones algebraicas de segundo grado aumenta a 8 formas. Esto debido a las 2^3 combinaciones, donde 2 es la posibilidad del signo, más o menos; y 3 las entradas, coeficiente del término cuadrático, coeficiente del término lineal y término independiente. Por lo que presentar 16 geoplanos (2 para cada caso) siguiendo la secuencia presentada en el caso de las curvas de primer grado sería sobresaturar de información háptica a Jair. Por esto, en la situación exploratoria se optó por que él construyera ejemplos dando diversas indicaciones para cubrir la mayor cantidad de las combinaciones de signos en los coeficientes posibles (Figura 6.8).

Figura 6.8 *Construcción de cuadráticas.*

Elaboración propia.

Para el caso en el que las dos raíces son positivas se presenta el siguiente extracto de la transcripción del audio y vídeo en la tabla 6.9. En esa parte Jair construye tres gráficas que podrían corresponder a tal característica, pero eventualmente comienza a proponer otras curvas que no son necesariamente una curva de grado dos en términos de x y y.

Tabla 6.9 *Análisis de prácticas en la sección "signo–raíz" en ecuaciones de segundo grado.*

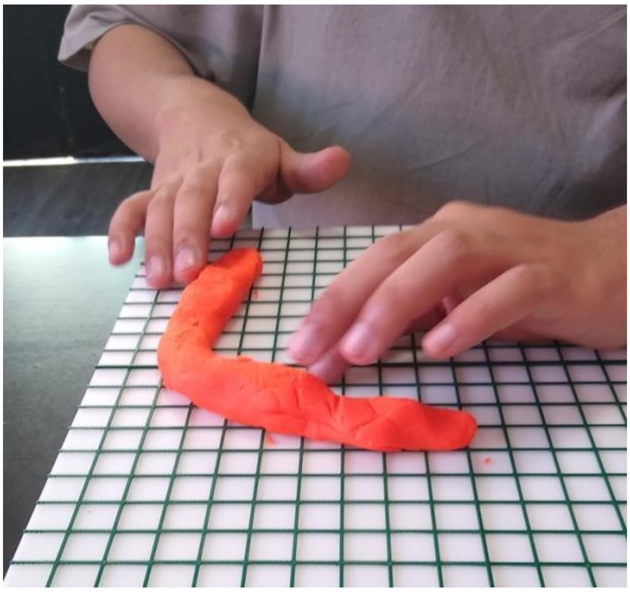
Fragmento de la transcripción	Análisis en términos de prácticas
J: [*comienza a modelar una curva concavidad negativa y vértice en el origen*] Así A: ¿Dónde está lo positivo?	Jair en esta sección comienza a construir parábolas con raíz o raíces reales positivas modelando la plastilina. Empieza a probar nuevas formas o ejemplos puntuales que cumplan con lo solicitado.

J: Lo $\boldsymbol{y}$ hacia arriba. Las $\boldsymbol{y}$ hacia arriba, digo, lo positivo es hacia arriba [*"abre" más las ramas de la curva que construyó*] A: Las raíces son donde corta con el eje $\boldsymbol{x}$ J: Ah, ok. [*traslada la curva que había construído de manera tal que las dos raíces queden positivas*] Entonces así. ¿Pero tiene que tocar, $\boldsymbol{y}$, no? A: ¿necesariamente? J: Bueno, no. Había un ejemplo que no tocaba [*señala la curva que construyó, que podría asemejarse a la curva* $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{3})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{8})$ *con* $\boldsymbol{a \epsilon R^{+}}, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$] Entonces así. A: ¿Podría ser la única forma en la que podría– J: [*cambia la concavidad de la parábola que había construido, ahora siendo ésta cóncava hacia arriba y manteniendo las raíces. Por lo tanto una aproximación algebraica de la curva podría ser* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{3})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{8})$ *con* $\boldsymbol{a \epsilon R^{+}}, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$] No, también así. De estas dos formas A: ¿Y esas dos formas son las únicas? J: Tal vez... no sé [*la parábola que había construído la gira 135º aproximadamente en el sentido antihorario*] No es que aquí sería otra forma, ¿así? A: [*señala la rama de la curva que queda "por encima" del eje x, aquella que corta el eje* $\boldsymbol{y}$ *y no el x*] ¿Y con este lado qué pasa? ¿Se extiende hasta dónde? J: [*señala la intersección de la curva con el eje* $\boldsymbol{y}$] Hasta aquí A: ¿Cómo un boomerang? J: Algo así [*recorre con la mano derecha la curva de "arriba hacia abajo" y luego de "abajo hacia arriba"*] No sé si pueda ¿se puede o no se puede? A: No, sí tendría que tener– J: Caída, ah sí porque es parábola. Entonces... [*construye una nueva parábola que podría aproximarse algebraicamente a* $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{3})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{7})$*, con* $\boldsymbol{a \epsilon R^{+}}, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$] ¿así? ¿Cómo una P? No, más bien es como un "9". [*recorre la curva que construyó de "derecha a izquierda"*] wow, qué padre.	¿Qué hace?	Construye diversos ejemplos de acuerdo a una característica dada de manera tal que usa las curvas previas como referente
	¿Cómo hace?	**Representa información de manera háptica** construyendo diversos ejemplos al variar parámetros como la concavidad o el valor numérico de las raíces, pero respetando el signo solicitado.
	¿Para qué lo hace?	Para **reunir** una colección de parábolas que tienen raíces positivas una vez identificando los invariantes en la forma de las parábolas.

Elaboración propia.

La representación de las curvas de manera háptica realizada por Jair consistía principalmente en parábolas con concavidad negativa, se infiere que es debido a la relación con su experiencia previa en el lanzamiento de jabalina y el movimiento "que sube y que luego baja". Por lo que su conocimiento previo se manifiesta en la priorización de esa forma sobre otras que se favorecen desde el discurso Matemático Escolar, como lo puede ser la curva $y = x^2$. Incluso es ese argumento el que lo orienta a identificar que no sería parte de los ejemplos cuando comienza a graficar otra especie de curvas (Figura 6.9).

Figura 6.9 *Curva construida por Jair que fue girada 135º en la exploración de nuevos ejemplos.*



Nota: En la imagen se puede apreciar el giro que realizó para construir un ejemplo de parábola que tuviera dos raíces positivas. Sin embargo con el diálogo logró identificar que no correspondía a una cuadrática. Elaboración propia.

6.3.3 Relación coeficiente–raíz en las ecuaciones de segundo grado

En la última parte de la sección relacionada con las ecuaciones de segundo grado se le proporcionó a Jair cuatro gráficas en el geoplano cuadriculado, y con cada curva tres opciones de la expresión algebraica que describiera el comportamiento. Esto es, con la parábola asociada a $y = x^2 - 8x + 12$, él tenía que analizarla de manera háptica para establecer cuál de las expresiones $y = x^2 - 13x + 12$, $y = x^2 - 8x + 12$, y $y = x^2 - 7x + 12$ correspondía. Entre las opciones destaca la característica de que tienen el mismo valor de término independiente, esto se debe a que en el caso de las rectas fue el argumento que le permitió dar respuesta a los cuestionamientos planteados. Ahora, ese argumento ya no es del todo funcional, porque las tres opciones lo tienen. Lo que se esperaba que sucediera era que utilizara ahora el valor de las raíces para establecer algún tipo de relación con los coeficientes de la expresión algebraica. Las otras cuadráticas que tuvo que examinar fueron $y = x^2 - 8x + 16$; $y = x^2 - 12x + 20$ y $y = x^2 + 2x + 80$. En general Jair logró identificar un argumento que le fuera eficaz al discernir entre las opciones que se le presentaban. Se presenta un fragmento de la transcripción de un caso suscitado en la Tabla 6.10.

Tabla 6.10 *Análisis de prácticas en la sección "coeficiente–raíz" en ecuaciones de segundo grado.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">A: Igual en esta va a valer dos cada cuadrito en ambas direcciones [le entrega el geoplano con la parábola] $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 16}$
J: [con mano derecha recorre una vecindad cercana al vértice de la parábola $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 16}$] Bueno este roza nada mas.
A: Ajá. ¿En dónde o cerca de qué valor?
J: [empieza a contar utilizando su dedo indice derecho para moverse en el eje x] cero, dos, cuatro… Cómo del dos y el cuatro, más o menos. A ver espera que voy a ver bien [con la mano derecha sobre la curva $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 16}$ en el vértice particularmente, y con la mano izquierda utilizándola para contar sobre el eje x] A ver cero, sí ya. Y tengo que contar los… [con la mano derecha hace un movimiento horizontal sobre el eje x desde el centro del geoplano hacia el extremo derecho] primero hacia acá. Es que ya vi donde corta. ¿Cuento dónde corta con y?
A: Sí, por favor
J: [con la mano izquierda empieza a contar en el eje y en el sentido positivo] cero, dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce… catorce. Como en el dieciséis
A: Sí, en el dieciséis. Entonces como en el dos o cuatro, por ahí en x. Y en y en dieciséis. Aquí están las tres expresiones y me vas a decir cual es.
J: [comienza a leer las expresiones algebraicas en braille] es "ye igual a equis a la segunda potencia menos ocho"… Creo que éste no es. Éste ya había pasado. Ah, son las mismas
A: No, sí son otras. A lo mejor se repite el valor, pero–</td><td colspan="2">Dado que ahora el propósito de la consigna es establecer vínculos entre el contexto gráfico y el algebraico Jair examina la gráfica de $y = x^2 - 8x + 16$, buscando puntos singulares: la ordenada al origen y las raíces para con esa información poder discrepar entre $y = x^2 - 17x + 16$, $y = x^2 - 10x + 16$, y $y = x^2 - 8x + 16$ como expresión que describe el comportamiento de la curva.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Agrupa los valores de las raíces en forma de suma para utilizar información proporcionada por la gráfica que le permita establecer una relación con alguna expresión algebraica de las presentadas.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Explora de manera háptica la curva para obtener información sobre el comportamiento de la cuadrática, destacando las raíces y el valor de la ordenada al origen.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Para seleccionar una relación entre el contexto gráfico y el algebraico que le sea apropiada.</td></tr>
</table>

J: Ah, ya vi que sí son otras [*comienza a leer otra expresión algebraica en braille*] "ye igual a equis a la segunda potencia menos diez equis más doce". [*toma la tercera expresión algebraica en braille y la comienza a leer*] "diecisiete equis igual"... "ye igual a equis a la segunda potencia menos diecisiete equis más doce". ¿Cómo puedo resolverla? [*comienza a tocar nuevamente la intersección de la parábola* $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 16}$ *con el eje x*] Bueno aquí dijimos que era como menos ocho... [*busca entre las expresiones algebraicas*] ¿Dónde dejé el menos ocho? cuatro y dos son seis. [*toma una nueva expresión algebraica*] A ver si hay un seis. Es que la estoy resolviendo como la otra. [*toma la tercera expresión algebraica y la lee nuevamente*] No, no hay un seis ¿Me equivoqué al contar? [*con la mano derecha comienza a contar sobre el eje x la cuadrícula para encontrar el valor en el que la curva* $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 16}$ *"roza" al eje*] dos... es como en el cuatro entonces. Cambiemos eso, es cuatro. [*relee las expresiones algebraicas en braille*] y ahora... no sé si se sume. "Menos diez equis". Pues, no sé. A la segunda veinte... No ya estoy divagando. A: ¿En la pasada que fue lo que hiciste? J: Pues pasé el número de la menos equis, por ejemplo menos diez equis sumando, pero no sé. Aquí no. [...] J: Creo que ya sé [*relee las expresiones algebraicas en braille*] "Menos ocho equis", pasarlo sumando. Por aquí tenemos un cuatro. Y si sumo cuatro más cuatro es ocho. A: ¿Te quedas con ese entonces? J: Sí. Creo		

Elaboración propia.

En esta sección Jair no logra formular una manera *general* en términos, palabras o expresiones propias del discurso Matemático Escolar, sino que a partir de los ejemplos explorados concluye que el término lineal lo usa con el signo opuesto y la suma de los valores de las raíces, simples o dobles, corresponde a ese número. Así también considera que en el caso de que las dos raíces tengan valor real negativo esta estrategia sigue siendo funcional. Es decir, dada la expresión $y = x^2 + bx + c$, se tiene que $b = -(r_1 + r_2)$ donde r_1, r_2 son las raíces reales de la expresión.

6.4 Prácticas asociadas a las raíces en ecuaciones de tercer grado

Como en las dos secciones pasadas, los momentos de análisis para las raíces en ecuaciones de tercer grado son la multiplicidad de las raíces, es decir, si son simples, dobles o triples; la relación signo – raíz, retomada de la regla de los signos de Descartes y la reconstrucción racional de Cantoral y Ferrari (2003, 2009) y la relación coeficiente – raíz, retomada de la *problematización* realizada de la obra de Viéte (1646).

6.4.1 Multiplicidad en las soluciones de las ecuaciones de tercer grado

En el comienzo de la parte de cúbicas se le presentan a Jair ocho geoplanos con las curvas $y = -x^3 - x^2 + x + 4; y = \frac{1}{4}x^3; y = x^3; y = \frac{1}{6}(x+2)^2(x-3); y = \frac{1}{8}(x+3)(x-4)^2; y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5); y = x^3 - x^2 + 3x; y = -\frac{1}{10}(x+5)^2(x-2)$. De las cuales existe diversidad en el signo del coeficiente principal y la existencia de raíces simples, dobles y/o triples. Al haber examinado lineales y cuadráticas el tiempo de exploración de Jair se redujo considerablemente, ya que prestó su atención directamente a los cruces de las curvas con los ejes *xy*. También, empezó a encontrar similitudes entre la forma de la gráfica y elementos que ya conocía hasta ese momento como su firma, "combinaciones" o "figuras híbridas" entre rectas y parábolas, según sus palabras (Tabla 6.11).

Tabla 6.11 *Análisis de prácticas en la sección "Multiplicidad" en ecuaciones de tercer grado.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">A: Dices que tiene contacto con el eje x dos veces, pero ¿cómo son esas dos veces?
J: [con la mano izquierda recorre una vecindad cercana a la raíz en $\boldsymbol{x = -2}$ de la curva $\boldsymbol{y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2}$]
Aquí roza, [señala la intersección de la curva $\boldsymbol{y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2}$ con el eje x, en $\boldsymbol{x = 3}$] Y acá directamente lo pasa [...] [recorre de "arriba hacia abajo" la curva con el dedo índice derecho cuatro veces] como una parábola</td><td colspan="2">Analiza la forma de la curva presentada y como es el comportamiento en los cruces con el eje x. Jair trata de explicar porque los lugares de intersección son distintos entre sí.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Compara el comportamiento de la curva $\boldsymbol{y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2}$ en vecindades cercanas a $x = 3$ y $x = -2$, es decir, cerca de las raíces. Además, establece</td></tr>
</table>

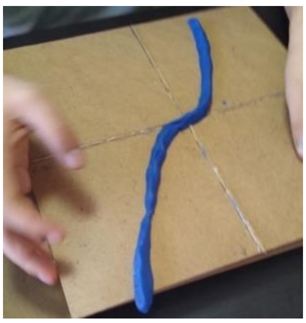
combinada con una diagonal [*recorre con la mano derecha la curva* $\boldsymbol{y} = \frac{1}{6}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{3})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2})^{2}$ *de abajo hacia arriba*] Porque mira, aquí sube. De hecho creo que se parece un poco a mi firma. Yo firmo más o menos así. Entonces, sí es como una combinación de figuras, como híbridos. Perdón siempre hago mis comparaciones muy subjetivas [*toma el geoplano con la curva* $\boldsymbol{y} = \frac{1}{8}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})^{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{3})$*, con ambas manos comienza a recorrer la curva desde el centro hacia los extremos cuatro veces*] Éste igual, bueno, todos son combinaciones, creo. Hasta ahorita eso pienso, es la combinación de una parábola con una diagonal. [*toma el geoplano con la curva* $\boldsymbol{y} = \frac{1}{6}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{3})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{5})$ *y con ambas manos recorre la curva desde el centro hacia los extremos y luego de los extremos hacia el centro*] O la transformación de una parábola, no sé.		**relaciones** con elementos familiares para él.
	¿Cómo hace?	Recurre a distintas estrategias de **visualización**, *i.e.*, recorre las curvas con una o dos manos de distintas formas de manera tal que le permite asociar la información háptica que percibe con experiencias previas.
	¿Para qué lo hace?	Para explicar de alguna manera el comportamiento de las raíces, es decir, formular algún argumento que le permita describir una solución simple y una doble.

Elaboración propia.

En la exploración también *compara* curvas entre sí. Un caso particular es cuando la curva presenta una raíz triple, ya que en sus argumentos menciona que es doble por el hecho de *rozar* el eje *x* (Figura 6.10).

> J: [*con ambas manos recorre una vecindad cercana a la raíz de la cúbica* $y = \frac{1}{4}x^3$ *y al origen del geoplano*] Bueno, según yo son dos. Porque aquí toca, bueno roza, no lo pasa, pero roza. Entonces solamente una vez cada uno, sí, porque roza. [*toma el geoplano con la curva* $y = x^3$*, con ambas manos recorre la curva desde el centro hacia los extremos*] Este igual.

Figura 6.10 *Exploración de* x^3*.*



En la fotografía se puede apreciar el geoplano de macocel con la curva $y = x^3$*.*
Elaboración propia.

Fue necesario guiar con más preguntas e incluso reestructurar las curvas para que no hubiera información háptica que pudiera interpretarse de una manera inadecuada, pero al final Jair logró vincular las exploraciones previas con las relacionadas con las cúbicas y *generaliza* sobre el número posible de cruces con el eje *x* de una curva polinómica.

> A: ¿A qué crees que se deba que ahora son tres veces las que puede cruzar?
> J: Por lo de cúbico. Según yo decían que cuando era segunda potencia era al cuadrado y cuando era tercera potencia era al cubo.
> A: ¿Y eso cómo crees que se puede reflejar en el número de cruces?
> J: Pues suma tres, no sé.
> A: ¿Y en las parábolas o en las de grado dos?
> J: Dos veces por el *x*
> A: ¿Y las de grado uno o las rectas?
> J: Una.

Entonces, al igual que en ocasiones pasadas la forma más "abstracta" de información acerca de las curvas polinómicas Jair la construye a partir del análisis de casos particulares y de encontrar regularidades de esas exploraciones.

6.4.2 Relación signo–raíz en las ecuaciones de tercer grado

Dado lo que ya se mencionó en la sección *Relación signo–raíz en las ecuaciones de segundo grado* acerca del número de posibles combinaciones de los signos de los coeficientes en la expresión algebraica, ahora las posibilidades son 2^4, es decir 16 posibles combinaciones en las que se va a variar la ordenada al origen, la pendiente en la intersección con el eje y, la concavidad y el punto de inflexión. Por lo que presentar 16 o más geoplanos implicaría sobresaturar de información háptica, razón por la cual se presenta de nuevo la estrategia utilizada en las ecuaciones de segundo grado en la relación signo–raíz, es decir, que Jair construya las agrupaciones de manera tal que le permita analizar el mayor número de ejemplos posibles. El inicio de la construcción de ejemplos ocurrió sin mayor problema, al considerar sólo raíces positivas Jair logra construir diversos ejemplos de donde se rescata lo siguiente (Tabla 6.12).

Tabla 6.12 *Análisis de prácticas en la sección "signo–raíz" en ecuaciones de tercer grado. Ejemplos con raíces positivas*.

Fragmento de la transcripción	Análisis en términos de prácticas
J: Entonces no. Vamos a ver... [*reconstruye la gráfica, la cual podría expresarse algebraicamente como* $\boldsymbol{y = a(x-4)(x-5)(x-8)}$ *con* $\boldsymbol{a \epsilon \mathbb{R}^+, a \neq 0}$] Así... ¿así?	Jair reconstruye la gráfica $y = ax(x-4)(x+5)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$, la cual había formado anteriormente. La razón del cambio es que se le había solicitado construir una curva con todas sus raíces

A: ¿Es la única forma? J: [*invierte el signo de la gráfica, i.e., la expresión que podría representar la curva algebraicamente sería* $y = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{5})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{8})$ *con* $\boldsymbol{a} \epsilon \mathbb{R}^+, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$] O al reves. O ya sé cual... bueno tú me dices si sí se puede o no. [*estira los extremos de la plastilina con la cual construyó la gráfica*] Creo que estoy copiando lo mismo, es que iba a hacer lo de pasarla por y así, [*construye una nueva curva que podría expresarse algebraicamente como* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{5})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{7})$ *con* $\boldsymbol{a} \epsilon \mathbb{R}^+, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, *sin embargo el extremo izquierdo de la curva que construyo queda "de manera horizontal" lo cual puede ser prolongado provocando que haya la posibilidad de una nueva raíz*] mira así... [*con la mano derecha empieza a señalar las intersecciones de la curva* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{5})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{7})$ *con el eje* x] uno, dos, tres.. y bueno y. A: Ok, mis dudas acá con y, ¿lo vas a dejar así acostado, lo vas a dejar caer o cómo va a ser ese extremo? J: Pues es que mira, puedo dejarlo así caer un poquito que roce un poquito x negativo. A: Pero si te doy más plastilina seguiría cayendo, ¿no? y cruzaría otra vez J: Entonces mejor lo levanto. Y ya está.	positivas. A partir de ahí propone varios ejemplos.	
	¿Qué hace?	Modela diferentes curvas utilizando referencias previas.
	¿Cómo hace?	**Representa información háptica** al construir tres ejemplos con raíces positivas que le sirven para mostrar casos particulares de cúbicas con una característica solicitada.
	¿Para qué lo hace?	Para **construir una colección de ejemplos** que cumplan una característica dada

Elaboración propia.

Al momento de solicitarle ejemplos con raíces negativas Jair comenzó a presentar dificultades para mostrar la curva que quería, ya que no eran cúbicas las formas que mostraba. Esto es, tenían cuatro o más intersecciones con el eje x o tomaban formas que podrían denominarse sinosoidales. Él recurrió a la ayuda del investigador y al análisis de las curvas estudiadas en la primera parte de la sección de cúbicas para obtener una respuesta que el informante considerara adecuada (Figura 6.11).

Figura 6.11 *Curva construida por Jair con soluciones negativas.*

En la imagen se puede apreciar una cúbica con raíces negativas. Empero al añadirle más plastilina a la curva se incluía una nueva raíz. Elaboración propia.

Al recurrir a las gráficas de los geoplanos de macocel, Jair empezó a establecer ciertos elementos de las cúbicas que no estaba considerando en los ejemplos que construyó. El rasgo principal es que las curvas de tercer grado tienen un rango en todos los reales, es decir, la gráfica cruza todo el plano, a diferencia de las parábolas que al tener un máximo o mínimo su rango no abarca todos los reales (Tabla 6.13).

Tabla 6.13 *Análisis de prácticas en la sección "signo – raíz" en ecuaciones de tercer grado.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">J: [coloca un pedazo de plastilina en forma de parábola con concavidad negativa que cruza en $\boldsymbol{x = -8}$ y en $\boldsymbol{x = -6}$] ¿puede empezar así, aquí? Y luego que... [retira el pedazo de plastilina que había colocado para reconstruir la gráfica] a ver otra vez, es que está muy delgada para lo que quiero hacer. [comienza a colocar la tira de plastilina siguiendo una forma "senoidal" comenzando por el cuadrante tres, haciendo que la curva cruce en $\boldsymbol{x = -9}$, luego en $\boldsymbol{x = -6}$, posterior en $\boldsymbol{x = -4}$ y $\boldsymbol{x = -3}$] aquí, aquí y luego quiero que toque el negativo. ¿ya se pudo o no? [con el dedo índice derecho recorre el eje x contando el número de cruces que tiene su gráfica] uno, dos, tres, ¿son cuatro verdad? uno, dos, tres, cuatro. Chin, creo que no se puede. Queda como muy zigzagueante.
A: Esa de cuatro cruces que haces ¿dónde quedan los extremos de la plastilina?
J: [señala el cuadrante tres] aquí
A: O sea, quedan viendo hacia ti, o–
J: Ah, ya. Sí. Es uno y uno [señala la parte superior del geoplano y luego la parte inferior] es uno hacia acá y otro hacia acá.
A: ¿Y en las cúbicas cómo queda? Si quieres te paso una [le entrega el geoplano con la cúbica $\boldsymbol{y = \frac{1}{6}\,(x+2)^2\,(x-3)}$]
J: [con la mano derecha comienza a recorrer la curva $\boldsymbol{y = \frac{1}{6}(x+2)^2\,(x-3)}$ desde el centro hacia el extremo izquierdo, luego de "izquierda a</td><td colspan="2">Jair intenta construir una gráfica de grado tres con tres raíces negativas pero tiene dificultades al presentar sus ejemplos, por lo que con ayuda del investigador recurre a los ejemplos anteriores para tratar de superar esa duda.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Intenta construir una gráfica de manera háptica con tres raíces negativas que pueda servir de ejemplo para la agrupación que se le está solicitando construir.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Comparando la forma de la curva que está construyendo con la forma de un ejemplo</td></tr>
<tr><td>¿Para qué hace?</td><td>Para identificar la forma prototipo de las curvas de tercer grado y así tener más ejemplos de cómo lucen las curvas con la característica solicitada.</td></tr>
</table>

derecha"] Ah, ya vi. Es que también, bueno queda viendo hacia mí A: Uno, ¿y el otro extremo? J: El otro queda viendo hacia ti. A ver, primero uno tiene que ver hacia ti. Chin. A ver si puedo, si no ya me rindo. [*comienza a reconstruir la gráfica colocando la barra de plastilina de forma zigzagueante comenzando el cuadrante tres, cruzando en* $\boldsymbol{x} = -\mathbf{9}, \boldsymbol{x} = -\mathbf{8}, \boldsymbol{x} = -\mathbf{4}$] uno hacia ti, uno hacia mí. Y ya ahí fueron tres veces, ¿no? [*con el dedo índice derecho recorre el eje x de derecha a izquierda contando el número de cruces de la curva que construyó con el eje x*] uno, dos, tres.		

Elaboración propia.

Después de recuperar el argumento de "uno hacia ti, uno hacia mí" respecto a los extremos de la curva Jair no presentó mayores dificultades de modelar otras cúbicas con otras características en las raíces solicitadas. Incluso lo reestructura y menciona que es "Uno y uno. Es la gráfica de la dualidad". Esto aludiendo a que la curva tiene cierto parecido con las cuadráticas y lineales y por la forma en la que se comportan los "extremos".

6.4.3 Relación coeficiente–raíz en las ecuaciones de tercer grado

En la parte final de la situación exploratoria se presentan dos gráficas y tres opciones para cada una de las expresiones algebraicas que pueden descubrir su comportamiento. La primera de ellas es $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, cuyas opciones son $y = x^3 - 9x^2 + 8x$, $y = x^3 - 2x^2 + 10x$, y $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Se escogió una curva con una de sus raíces igual a cero para que hubiera cierta familiaridad con la estrategia empleada en el caso de las cuadráticas. Es decir, que hubiera cierta similitud para que el tránsito de las de grado dos a tres no presentara mayores complicaciones. Para el segundo caso se escogió $y = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ para la curva presentada en el geoplano, mientras que las opciones son $y = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$, $y = x^3 - 27x^2 + 74x - 48$, y $y = x^3 - 13x^2 + 46x - 48$. De igual manera, en ambos casos la ordenada al origen no brinda información que resulte realmente diferenciadora entre las expresiones algebraicas, por lo que se tiene que recurrir a los valores de las raíces y agrupar de cierta manera que coincida con alguna de las opciones (Tabla 6.14).

Tabla 6.14 *Análisis de prácticas en la sección “coeficiente – raíz” en ecuaciones de tercer grado.*

<table>
<tr><th>Fragmento de la transcripción</th><th colspan="2">Análisis en términos de prácticas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">A: [le entrega el geoplano con la gráfica de la cúbica $\boldsymbol{y = x^3 - 12x^2 + 44x - 48}$] Ok, en éste cada uno vale uno y en y te voy a hacer trampa, vale $\boldsymbol{-48}$.
J: [con ambas manos recorre la curva $\boldsymbol{y = x^3 - 13x^2 + 46x - 48}$ desde el centro hacia los extremos, y luego de los extremos hacia el centro] Sí, porque va hacia abajo...
A: Sí, porque no se nos va a alcanzar.
J: [comienza a recorrer el eje x desde el origen hacia la derecha contando usando la escala propia del geoplano] cero, ¿sí es cero aquí, verdad? uno. Corta en uno. Ah, corta en uno.
A: Es que lo estás contando abajo del eje, tiene que ser en el eje
J: Ah, arriba. Bueno aquí está el cero
A: No, porque el cero es donde cruzan los dos ejes
J: Deja me ubico bien.
A: ¿Qué valores son?
J: ¿dónde está el cero? Es que soy muy desubicado
A: El cero, cero está aquí. Entonces de acá es uno...
J: Ya me ubiqué más. [comienza a recorrer el eje x desde el origen hacia la derecha contando usando la escala propia del geoplano] uno dos, en el dos, primero en el dos. Dos, tres, cero uno, dos, tres, cuatro, cinco... en el siete, en el ocho. Es, a ver si recuerdo dos, tres y ocho. Y menos cuarenta y ocho.
A: [le entrega las expresiones algebraicas escritas en Braille] Correcto, de todos modos, las expresiones tienen ahí escritas el menos cuarenta y ocho.
J: ¿son tres ahora? [comienza a leer las expresiones algebraicas en braille] “ye igual a equis a la tercera potencia menos veintesiete equis más dos”, ah no, aquí está “veintesiete equis a la dos menos” bueno... no, es “más setenta y cuatro equis menos” bueno “menos cuarenta y ocho”; luego es “ye igual a equis a la tercera potencia menos trece equis a la dos más cuarenta y seis equis</td><td colspan="2">La consigna ahora radica en vincular una curva desde lo gráfico y la información que pueda obtener ahí de forma háptica para discernir cuál de las tres expresiones algebraicas describe el comportamiento de la curva presentada.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Agrupa los valores de las raíces en forma de suma para utilizar información proporcionada por la gráfica que le permita establecer una relación con alguna expresión algebraica de las presentadas.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Explora de manera háptica la curva para obtener información sobre el comportamiento de la cúbica, priorizando el valor de las raíces.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué hace?</td><td>Para elegir la opción más adecuada que permita vincular el contexto gráfico con el algebraico una vez identificado el mecanismo de selección en estos casos.</td></tr>
</table>

menos cuarenta y ocho". Y por último "ye igual a equis a la tercera potencia menos doce equis a la dos más cuarenta y cuatro equis menos cuarenta y ocho"... Creo que es "ye igual a equis a la tercera potencia menos trece equis a la dos más cuarenta y seis equis menos cuarenta y ocho". Y bueno pasaríamos el trece sumando y sumando los valores de dos, tres y ocho te da trece.		

Elaboración propia.

6.5 Prácticas invariantes identificadas en el estudio de raíces en ecuaciones polinómicas

Como se mencionó en el Capítulo 1: Introducción, la elección de las raíces de polinomios hasta grado 3 radica en una decisión metodológica. Esto se debe a que las prácticas invariantes entre los tres grados se van a considerar como indicio de lo que le es propio a las soluciones de ecuaciones polinómicas de manera gráfica cuando se trabaja con población con discapacidad visual. Sin embargo, se reconoce la emergencia de otras prácticas como *cuantificar*, al usar la yema de su dedo para aproximar un valor a las intersecciones de las curvas con los ejes en los planos que no están cuadriculados, por mencionar un ejemplo. El esquema presentado en la Figura 6.1 sirve como modelo preliminar de las prácticas que se consideran contingentes, pero al contraponerlo con las tablas de la 6.2 a la 6.14, se puede identificar cuáles de las prácticas esperadas sucedieron y cuáles se presentan independientemente del grado en cada uno de los tres momentos: Multiplicidad de la raíz, relación signo–raíz y relación coeficiente–raíz (Figura 6.12).

Figura 6.12 *Prácticas invariantes identificadas en la situación exploratoria*

Ecuaciones polinómicas	Multiplicidad	Visualizar
		Compara
		Generalizar
	Signo – Raíz	Visualizar
		Comparar
		Agrupar
	Coeficiente – Raíz	Visualizar
		Agrupar
		Generalizar

Elaboración propia.

Las prácticas, aunque aludan a *visualizar*, *comparar*, *agrupar* y *generalizar*, no se refirieron específicamente al mismo tipo de *visualización*, *comparación*, *agrupación* y *generalización* entre secciones de la situación exploratoria [véase Capítulo 7: Conclusiones] ni a las prácticas identificadas en el análisis histórico–epistemológico [véase Capítulo 5: Análisis Histórico–Epistemológico]. Además, en el escenario histórico y sociocultural en el que se ven inmersos los procesos de construcción de conocimiento matemático y en el de condiciones en términos de discapacidad, la emergencia de las prácticas tiene que ver con la intencionalidad de las tareas o situaciones en las que se ven inmersos los actores de dichos procesos.

Como se mencionó las características de las prácticas identificadas en *Æquationum recognitione tractus duo* de Viète (1646) y en lo que actualmente se conococe como la Regla de los signos de Descartes (1637), Figuras 5.21 y 5.22, respectivamente. Para el primer caso se busca establecer una relación de igualdad de una cantidad desconocida con una o varias cantidades conocidas que permitan dar solución al problema en cuestión, para ello las tres prácticas, *comparar*, *agrupar* y *equivaler* manejan símbolos que representan cantidades conocidas y desconocidas, no necesariamente asignadas a un valor determinado, es decir, desde una *logística speciosa* que le permitió trabajar con cantidades generales. Por otro lado, en el caso de Descartes (1637) se buscaba la abstracción de una propiedad de las raíces en relación con los signos de los coeficientes, para ello las prácticas *comparar*, *agrupar* y *generalizar* están vinculadas a la resolución de un cuestionamiento que de inicio se supone ya resuelto, el problema se resuelve en un contexto algebraico al igual que el de Viète. Mientras que la *visualización* obtenida a partir de la reconstrucción racional de Cantoral y Ferrari (2003, 2009) se apoya en los elementos como ordenada al origen, pendiente, concavidad y punto de inflexión desde un contexto gráfico. Aunque el contexto es similar al planteado en la situación exploratoria, gráfico–háptico, las prácticas que emergieron de la interacción de Jair con el conocimiento matemático están permeadas por el interés de explorar las formas en las que interactúa con el conocimiento matemático relativo a las raíces de ecuaciones polinómicas y no necesariamente la *formalización* y abstracción de dicho concepto a un nivel como lo manejaron Viète y Descartes. Sin embargo, de manera general, la *comparación* realizada por Jair alude a los análisis que realizó de elementos locales o globales de las curvas; la *visualización* a la manipulación, representación y manejo de imágenes mentales que le permitieron obtener información pertinente; mientras que la *agrupación* a reunir elementos (gráficas o puntos singulares) que le permitieran conjeturar una explicación; y finalmente, la *generalización* de propiedades de las curvas.

6.6 Sobre el cierre de la situación exploratoria

Al final de la situación exploratoria Jair mencionó que la dificultad que implicaba usualmente este tipo de temas no fue tanta como creyó que hubiera podido ser. Además, que esto le ayudó a comprender mejor el tema y que incluso le resultó "divertido". También entre los comentarios que surgieron en la implementación se pueden destacar las características del material didáctico, ya que él como usuario recomienda que no sean pesados, así como la necesidad de darles alguna señalética para orientar a la persona con discapacidad visual sin necesidad de ayuda. En el caso del geoplano impreso en 3D, se cumplen ambas propiedades; empero en los geoplanos de macocel faltó incluir algún tipo de marca que guiara el norte a Jair en la orientación sin necesidad de la intervención de un tercero.

Por otro lado, durante el desarrollo de la situación exploratoria fue constante la curiosidad por conocer la funcionalidad de las curvas polinómicas de grado 1 a 3 en escenarios fuera de la matemática. Para las lineales se reconocen problemas de gasto o uso de dinero, problemas de proporcionalidad directa, y movimiento rectilíneo uniforme; para las cuadráticas problemas relacionados a áreas, tiro parabólico, caída libre y movimiento rectilíneo uniformemente acelerado; mientras que para las cúbicas, los que se refieren a volumen, sondas cerebrales y variación de temperatura. Entonces, dada la posibilidad de escenarios en los cuales se puede significar se escogió un contexto gráfico al ser común a los tres grados de polinomios, lo que no sucede en los escenarios enlistados previamente y que podía implicar una variable más a considerar en este estudio. No obstante, al final de la implementación se mencionaron algunos de estos ejemplos como dato para cerrar la sesión.

CAPÍTULO 7
CONCLUSIONES

Capítulo 7. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas del trabajo de investigación. Como se expresó, la investigación es relativa a las prácticas asociadas a las soluciones de ecuaciones polinómicas de grados 1, 2 y 3 de manera gráfica en el estudiantado con discapacidad visual. Como se verá, también se responde la pregunta de investigación, se menciona el posicionamiento ante la hipótesis de investigación y finalmente, se profundiza sobre los alcances y las limitaciones de este trabajo respecto de los objetivos planteados.

7.1 Sobre los resultados

A partir de los antecedentes expuestos, se confirma la importancia del material didáctico, tangible o digital, para el uso y la intervención educativa en personas con discapacidad visual. Empero, gran parte de la literatura revisada se centra en ello, <u>dejando en segundo plano la importancia de la complejidad propia del conocimiento matemático que se enseña</u>. Con esta aseveración, no se pretende minimizar el uso del material o medios que sirven como "puente" entre el profesorado y el estudiantado con discapacidad visual, sino que además es necesario el cuestionarse sobre los objetivos por alcanzar, la naturaleza del saber puesto en juego, la complejidad de la *traducción* a Braille y el dominio del lenguaje matemático en el sistema de lectoescritura propio de esta población, entre una amplia diversidad de otros factores. Asimismo, es fundamental ser conscientes de que el Braille en matemáticas, si bien comunica el mensaje, no necesariamente manifiesta el significado de manera inmediata. Éste tiene que ser construido por parte de la persona en situación de interacción/construcción de conocimiento. Aquí radica el primer hallazgo.

Uno de los mecanismos de construcción de significados, y a la que privilegia la presente investigación, es el desarrollo del pensamiento matemático a través de prácticas, las cuales tomarán matices dependiendo del contexto en el que se desenvuelvan y la intencionalidad con la que emergen. Por ejemplo, la *comparación*, una actividad que no tiene la misma connotación en la obra de Viète (1646), en un contexto algebraico situado en la Francia renacentista y realizado por una persona sin discapacidad visual; como la que tiene en la regla de los signos de Descartes (1637), donde el autor tampoco vive con condición de discapacidad visual en la Francia del siglo XVII y además influido por el trabajo de Viète, quien trabajando a la par la construcción de curvas mecánicas al enunciar la regla de los signos desde el punto de vista algebraico; o más aun, aquella realizada por Jair en un escenario propio de confinamiento por pandemia, recientemente en el siglo XXI, la cual ha restringido el contacto físico de unos con otros. Siendo que este contacto es un elemento primordial al guiar a un estudiante con discapacidad visual en una situación de interacción con el conocimiento matemático, y que además la *comparación* fue evocada desde un contexto gráfico–háptico. Por lo que el estudio histórico–epistemológico [Capítulo 5] fue esencial para la realización e implementación de la situación exploratoria, ya que es el que brinda la orientación de base en el desarrollo de la investigación desde la postura teórica asumida, la socioepistemológica, que acepta diversidad de contextos, funcionalidades y saberes.

Este mismo estudio histórico–epistemológico fue el que permitió realizar una primera caracterización de la exclusión epistémica que se vive en el ámbito educativo a causa del discurso Matemático Escolar (dME) respecto de las raíces de polinomios. Esto se logró al contrastar los elementos encontrados en las obras de Viète y Descartes con libros de texto de educación media y superior de uso en México, los cuales fungen como estructura objetivable del dME. De suerte que se propone como resultado la síntesis expuesta en la Tabla 7.1

Tabla 7.1 *Caracterización teórica del dME alrededor de la raíz de un polinomio.*

Categoría del dME	**Descripción de como se ve reflejado**
Carácter utilitario	Los argumentos y significados que privilegia el dME se centran en la utilización de relaciones para la factorización de ecuaciones de manera algebraica habitualmente en el caso de la relación coeficiente–raíz; mientras que la relación signo–raíz es utilizado para el llenado de tablas que permitan estimar un posible número de raíces reales positivas y negativas
Atomización en los conceptos	No hay argumentos ni significados relacionados a una ecuación <u>como proporción ni una proporción como ecuación</u>. También carece de argumentos gráficos en el plano que cuestionen las relaciones entre coeficiente y su signo con las raíces de la ecuación. O de argumentos que favorezcan la predicción.
Carácter hegemónico	Las relaciones entre coeficiente y raíz sirven para factorizar una ecuación (significado impuesto). El uso de la transformación de funciones para encontrar un posible número de raíces negativas (argumento impuesto).
Conocimiento acabado y continuo	Se presentan las relaciones entre coeficiente y raíz y entre signo del coeficiente y raíz como una regla provocando que deba ser memorizado y aplicado a problemas específicos.
Falta de marcos de referencia	No se toman en cuenta otros escenarios donde se pueda explicar esta relación. Ni dentro de la matemática misma (lo

proporcional, lo predictivo, lo geométrico, lo gráfico), ni en otras prácticas de referencia o contextos situacionales.

Elaboración propia.

Cabe destacar que la exclusión epistémica provocada por el dME se vive independientemente de la exclusión social, sean estas cuestiones de género, de discapacidad, de contexto socioeconómico o cultural.

Empero, hay aproximaciones hacia esa caracterización desde una perspectiva de género, por ejemplo, el presentado por Simón, Farfán y Rodríguez (2020). Entonces, sería factible, al menos, plantear la pregunta de investigación para estudios futuros a fin de mostrar la manera en que la exclusión epistémica se desarrolla en personas con discapacidad visual usando algún tipo de análisis interseccional, *i.e.*, al cohabitar en un mismo escenario la exclusión epistémica y la exclusión social las características del dME tomarán una tonalidad diferente y relativa a la población y saber puesto en juego.

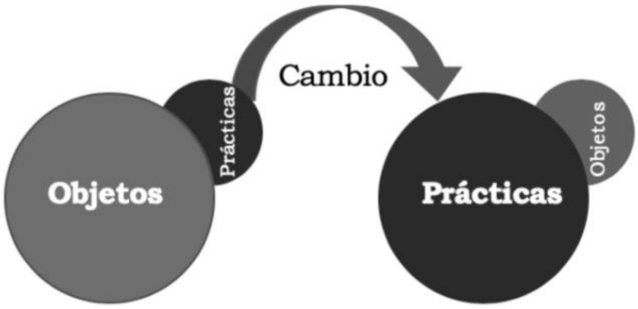
Otro elemento importante que parte del análisis histórico–epistemológico recae en la identificación de prácticas, las cuales se reinterpretaron para diseñar una situación exploratoria considerando el contexto, la población y elementos que fueron pertinentes o considerados como variables dentro de la investigación. En el desarrollo de la situación exploratoria se esperó que emergieran las prácticas postuladas en el análisis histórico–epistemológico, empero, no se eximió la posibilidad de que surgieran otras prácticas. En el caso de las prácticas identificadas en el desarrollo de la situación exploratoria en un contexto gráfico–háptico con Jair emergieron otras aparte de las ya esperadas, tales como *asociar*, *cuantificar*, *argumentar*, entre otras. Estas prácticas no sucedieron de manera invariante, ya que elementos como la intencionalidad de la pregunta, el material de apoyo o el uso de resultados previos influyeron para que éstas sucedieran. Por lo tanto, se puede atestiguar que aún con la existencia de un modelo de animación de prácticas previo inferido de un análisis histórico–epistemológico estas prácticas no son las únicas que puedan emerger en la implementación de una situación de intervención. La contingencia de las prácticas se ve influenciada del contexto, de la intencionalidad de las tareas, la población con la que se esté trabajando y de los recursos con los que cuente la persona.

Finalmente, de forma general, los resultados mostrados fueron plausibles debido al enfoque teórico, ya que éste fue el que permitió observar los fenómenos de una forma determinada debido al asumir sus cuatro principios (*Normativo de la práctica social,* *resignificación progresiva, relativismo epistemológico, racionalidad contextualizada*) los cuales han regido el desarrollo de la investigación. Por mencionar algunos ejemplos para el caso del Principio de *la normativa de la práctica social*, al ser las prácticas sociales la base del conocimiento son las que se buscan en el análisis histórico – epistemológico. Asimismo, dichas prácticas son la base del diseño de la situación exploratoria, lo cual provoca su emergencia. Para el caso del Principio de *racionalidad contextualizada* un ejemplo podría ser el entender porque Viète (1646) no explicita las soluciones negativas, ya que dada la intencionalidad de los problemas (problemas de comercio y distancias) que él buscaba atender éstas no tienen sentido un valor negativo; o en los argumentos de Jair al mencionar que las rectas con pendiente con un valor absoluto entre cero y uno son rectas, mientras que aquellas con pendiente mayor a uno en valor absoluto son diagonales debido a que al mencionar este tipo de explicaciones está poniendo en juego su forma de entender, sus conocimientos previos y demás elementos de su contexto. Por otro lado, en el Principio del *relativismo epistemológico* un momento en que su presencia fue bastante evidente fue al no catalogar de error cuando Jair menciona lo que es una recta con pendiente positiva o negativa, ya que los argumentos que él usaba como base daban a entender que esto se debía a la forma en la que estaba explorando, es decir, al explorar de manera háptica percibe que la recta con pendiente negativa “va hacia las x positivas y hacia las y positivas”, por lo tanto para él eso es una recta positiva. Entonces, entender porque se considera que es verdadera esa afirmación antes de juzgarla cómo correcta o incorrecta denota la aceptación de este principio. Finalmente, para el Principio de *resignificación progresiva* se puede mencionar como ejemplo la adquisición de herramientas, discursos y argumentos que llevaron a Jair del realizar despejes pasando todos los términos al lado derecho de la igualdad, tanto en la situación diagnóstico como en las primeras interacciones con expresiones algebraicas dentro de la situación exploratoria a ya no recurrir a este método, sino a otros que él mismo fue construyendo y le fueron apropiados para dar solución y explicación a los cuestionamientos que se le planteaban.

7.2 Sobre la hipótesis y pregunta de investigación

La investigación parte de una hipótesis y una pregunta de investigación enmarcadas en la TSME. Desde esta postura se pasa de una centración de los objetos matemáticos a una centración en las prácticas (Figura 7.1). Este hecho no implica que se deje de lado completamente al objeto matemático, sino que enfatiza las prácticas que acompañan y anteceden el desarrollo de dicho objeto. Entonces, la hipótesis y pregunta se encuentran relacionadas con las prácticas socialmente compartidas y con los objetos matemáticos. ¿Cuál es la naturaleza de dicha relación? ¿Cuál es su nivel de contingencia?

Figura 7.1 *Representación gráfica de la descentración del objeto*



Tomado de Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa. (Reyes, 2016b, p. 63).

La hipótesis fue la siguiente:
El desarrollo del pensamiento matemático mediado por prácticas, relativo a las raíces reales de polinomios de grado 1 a 3, sucede independientemente de si la persona tiene o no discapacidad visual.

Este supuesto se acepta, ya que se mostró que el desarrollo del pensamiento matemático mediante prácticas también sucede en una persona con discapacidad visual. Si bien, dentro de la TSME se encuentra una diversidad de investigaciones que muestran la emergencia de prácticas en distintas poblaciones como cardiólogos, bachilleres (sin algún tipo de discapacidad), profesorado, comunidad sorda, ingenieros agrónomos, culturas originarias, entre otros (Moreno-Durazo, 2018; Caballero, 2018; Reyes-Gasperini, 2016; Méndez, 2015; Buendía, 2004; Covián, 2005). Es decir, las prácticas son propias de la interacción humana con el saber matemático en uso y los dispositivos culturales de que disponga, en independencia de las características apriorísticas de los individuos. Las particularidades de cada población, como el escenario, las situaciones en las que se encuentra inmersa, si tiene o no discapacidad, y todo aquello que componga su contexto sociocultural son importantes pues matizan la forma en la que emergen las prácticas y adquieren materialidad los principios teóricos, pero no condicionan su aparición (su emergencia).

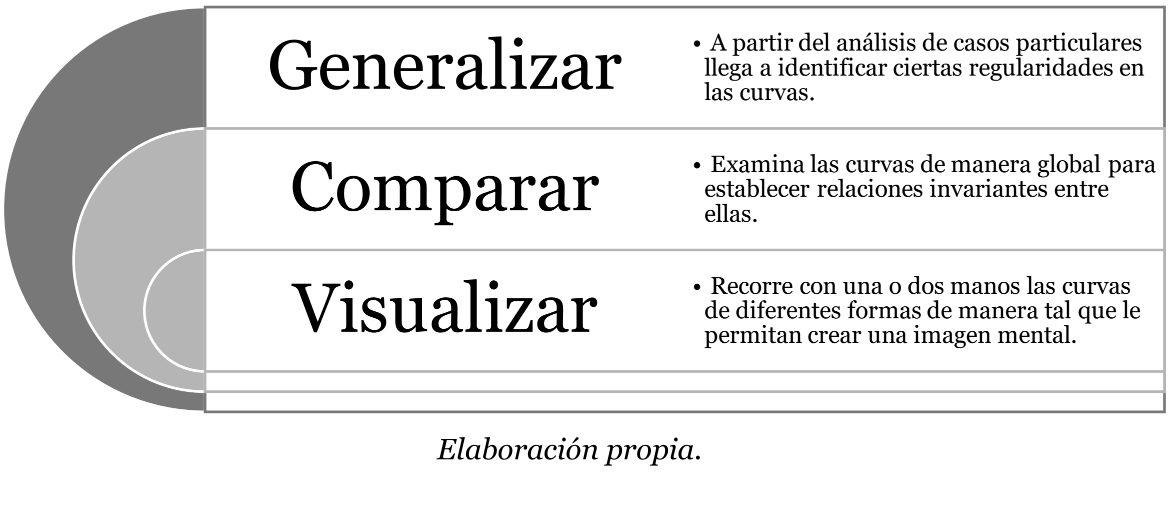
Así que la pregunta de investigación:
¿Cuáles son las prácticas y su anidación que emergen en la interacción con el conocimiento matemático, relativo a las raíces de polinomios de grado 1, 2 y 3, de alumnos con discapacidad visual?

Retomando la Figura 6.11, de manera general, las prácticas emergentes fueron *comparar*, *visualizar*, *agrupar* y *generalizar*. No obstante, al tener tres momentos de estudio en cada uno de los grados abordados las prácticas toman diferentes características y no acontecen las cuatro en cada sección.

Recordando un poco cómo se infirieron, se acudió a los cuestionamientos; *¿qué hace?* y *¿cómo lo hace?* para identificar las acciones y *¿para qué lo hace?* identificando las actividades dentro del modelo de anidación de prácticas (Figura 3.2). Los momentos fueron "Multiplicidad" (Figura 7.2), donde las acciones son *visualizar* y *comparar*, mientras que la actividad es *generalizar*.

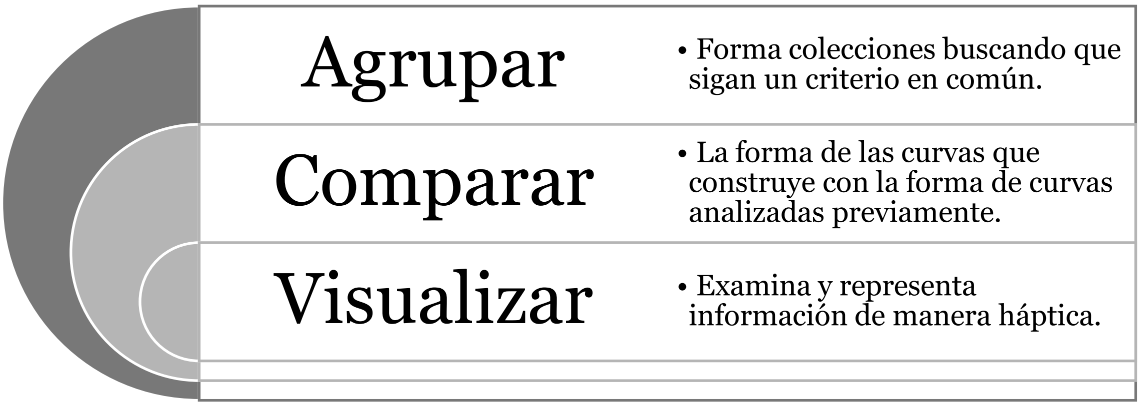
Con la "Relación signo–raíz" (Figura 7.3) se encontraron *visualizar* y *comparar* en el primer nivel del modelo de anidación de prácticas en lectura de subida y *agrupar* en el segundo nivel. Y finalmente, en la "Relación coeficiente–raíz" (Figura 7.4) como acciones son *visualizar* y *agrupar*, y de actividad es *generalizar*.

Figura 7.2 *Caracterización de las prácticas invariantes identificadas en la sección "Multiplicidad" de la situación exploratoria*



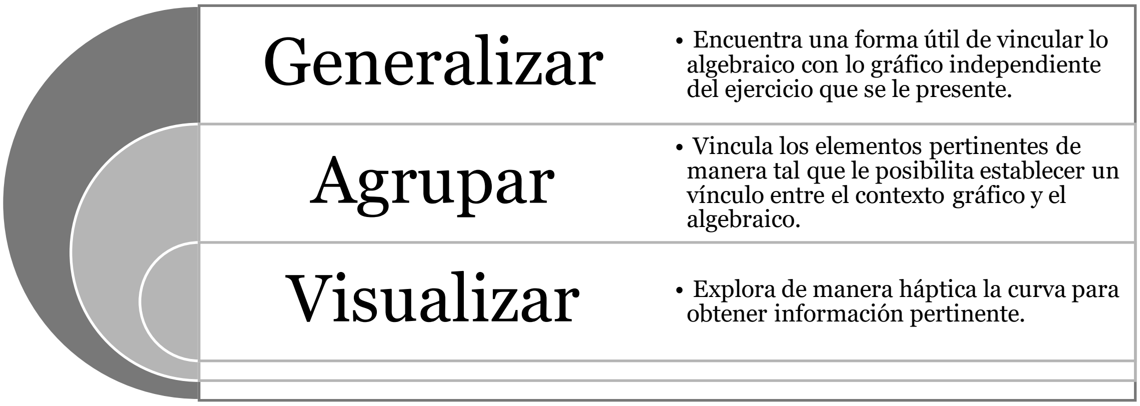
Elaboración propia.

__Figura 7.3__ Caracterización de las prácticas invariantes identificadas en la sección “Relación signo – raíz” de la situación exploratoria



Elaboración propia.

__Figura 7.4__ Caracterización de las prácticas invariantes identificadas en la sección “Relación coeficiente – raíz” de la situación exploratoria



Elaboración propia.

7.3 Sobre los objetivos, alcances y limitaciones

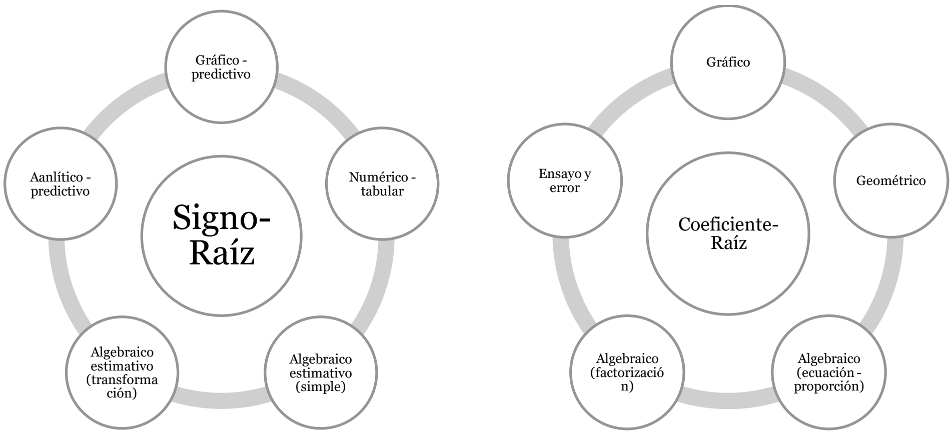
En cuanto a los objetivos planteados en la investigación que permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación y confirmar la hipótesis fue uno general. Se mencionó lo siguiente: *Problematizar* el saber matemático relacionado con las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado 1 a 3 desde una postura socioepistemológica. Para lograrlo se planteron tres objetivos específicos. Uno relacionado con el análisis histórico–epistemológico (Tabla 7.2), otro con el diseño de la situación exploratoria (Tabla 7.3), y el último de ellos con el análisis en términos de prácticas de lo ocurrrido en la implementación de dicha situación (Tabla 7.4).

Tabla 7.2 *Alcances y limitaciones del objetivo relativo al análisis histórico – epistemológico*

O_{e1}: Realizar un estudio histórico – epistemológico respecto de las soluciones de ecuaciones polinómicas en la obra de Viète (1646) y Descartes (1637) para inferir una epistemología de prácticas asociada a este saber.	
Alcances	**Limitaciones**
Se identificaron prácticas asociadas a las soluciones de ecuaciones polinómicas en *De Æqvationum Recognitione Et Emendatione Tractatus Duo* de Viète (1646) y *La Géométrie* de Descartes (1637) con las preguntas *¿Qué hace?, ¿cómo hace?, ¿para qué hace?* propuestas en (Cantoral, Montiel, Reyes-Gasperini, 2015).	Las obras de Viète (1646) y Descartes (1637) de inicio no se desarrollan en un contexto gráfico, lo cual implica una complejidad teórico–metodológica que es necesario subsanar a través de la profundización y robustecimiento de la *problematización* realizada hasta el momento.
El estudio histórico–epistemológico permitió vislumbrar nuevos argumentos, significados y procedimientos, así como formas de abordar las relaciones signo–raíz y coeficiente–raíz además de las identificadas en los libros de texto (Figura 7.5).	Las relaciones signo–raíz y coeficiente–raíz (de forma algebraica) no son las únicas que pueden encontrarse. Existen también las relaciones factor–raíz en la obra de Lagrange y coeficiente–raíz de forma geométrica, esto es, a partir de construcciones con regla y compás (Viète, 1646).

Elaboración propia

Figura 7.5 *Formas de abordar las relaciones signo–raíz y coeficiente–raíz*



Elaboración propia

En las posibles formas de abordar la relación signo–raíz lo “gráfico–predictivo” alude a lo relativo de la problematización de Cantoral y Ferrari (2003, 2009) donde usan aspectos gráficos de las curvas como ordenada, pendiente, concavidad y punto de inflexión para resignificar la Regla de los signos de Descartes. Lo “numérico–tabular” hace referencia a las tablas que se construyen donde a partir del número de cambios de signo se infiere el posible número de raíces positivas, negativas y complejas. Lo “algebraico estimativo (simple)” apunta al estudio de los cambios de signo de la forma en la que lo hizo Descartes en un inicio, *i.e.*, sólo se requiere el ordenamiento de los términos en forma ascendente o descendente de acuerdo al grado y se cuentan los cambios de signo para las raíces *verdaderas* (positivas en términos actuales) o las veces que se mantiene el mismo signo para las raíces *falsas* (negativas en notación actual) en esa seriación. Lo “algebraico estimativo (transformación)” indica el proceso igual al anterior en el caso de las raíces *verdaderas*, mientras que para las *falsas* es necesario evaluar en $f(-x)$ para contabilizar los cambios de signo. Finalmente, lo “analítico–predictivo” es usando el polinomio de Taylor para estudiar las variaciones sucesivas de la expresión, también se relaciona con la *problematización* realizada por Cantoral y Ferrari (2003, 2009).

Para el caso de la relación coeficiente–raíz lo “gráfico” indica el estudio de las raíces desde el plano cartesiano, tal como se llevó a cabo en la situación exploratoria. Lo “geométrico” alude a las construcciones realizadas por Viète en *Effectionum Geometricarum Canonica Recensio* dentro de su *Opera Mathematica* (1646), las cuales son construcciones con regla y compás para la solución de ecuaciones de primer y segundo grado. Lo “algebraico (ecuación – proporción)” refiere a la relación entre ecuación y proporción que trabaja Viète en su Zetética y permea su trabajo en *De Æquationum Recognitione Et Emendatione Tractatus Duo* de Viète (1646). Lo “algebraico (factorización)” se entiende en el uso de las raíces para factorizar una expresión polinómica mediante algún método establecido como la fórmula general de segundo grado, completación de cuadrados, etcétera. Y el “ensayo y error” apunta también a la factorización, pero como un método exploratorio / introductorio y sin algún tipo de esquema general o rigor.

En cuanto al segundo objetivo, relacionado con el diseño de la situación exploratoria en la Tabla 7.3 se presentan los alcances y limitaciones identificados en el desarrollo de la investigación.

Tabla 7.3 *Alcances y limitaciones del objetivo relativo al diseño de la situación exploratoria*

O_{e2}: Diseñar una situación exploratoria que promueva el desarrollo de la epistemología de prácticas identificada en el estudio histórico–epistemológico y adaptada para población con discapacidad visual.	
Alcances	**Limitaciones**
El diseño intencionado de prácticas tiene como base en las prácticas inferidas en el estudio histórico–epistemológico (*comparar, agrupar, visualizar, generalizar*), por lo que son las prácticas esperadas en la implementación, sin cerrarse a la posibilidad de que emerjan otras.	El paso de lo gráfico a lo algebraico no se considera en la situación, es decir, hay primeros acercamientos para establecer un vínculo entre ambos contextos, pero no se diseñó alguna sección que recurriera al uso del contexto algebraico solamente.
El uso del geoplano impreso en 3D es un material que tiene un tamaño y peso adecuado para la manipulación por parte del estudiantado con discapacidad visual de manera autónoma.	Se necesitó de guía por parte del investigador para orientar al informante al momento de usar los geoplanos de macocel. Si bien, las medidas y peso son bastante similares al geoplano impreso en 3D, éstos requieren un rediseño que permita al usuario identificar la orientación sin la intervención de un tercero.
El diseño favorece la motivación, según lo expresado por la persona que fungió como informante en esta investigación. Además, incentiva la exploración autónoma de las curvas.	El diseño se implementó en un solo informante, lo cual sitúa los resultados en un escenario muy particular. Además, la puesta en escena ocurrió en una sola sesión, lo cual no es limitante en sí mismo, sino que por las condiciones sanitarias no se pudo desarrollar la situación con más tiempo para explorar con mayor profundidad la interacción de Jair con el conocimiento matemático.

Elaboración propia

En relación con el material didáctico, debido a tiempos y costos fue posible imprimir un único geoplano en 3D, los demás se recurrió a una estructura similar en Macocel con la diferencia de sólo marcar los ejes sin algún tipo de cuadrícula como en el caso del 3D. En el caso del primero, las ventajas fueron la utilización de la escala, la cual dependiendo de la curva a analizar cada marca podía valer 1, 2 o 3 unidades; así como una orientación debido a la distinción del grueso de los ejes *xy* lo que permite ser manipulado de manera autonoma, es decir, sin la guía constante de alguien que le mencione al alumno cuál es la posición correcta de la gráfica. Por la parte de los geoplanos de macocel, al ser realizados en un periodo de tiempo más corto y de manera artesanal los ejes *xy* no tienen la misma uniformidad dado el material que se empleó; también, al carecer de escala permitieron que la atención se focalizara en la forma de la curva y no en sus intersecciones, sólo cuando fue necesario *Jair* recurrió a escalar los ejes usando las llamas de sus dedos índices. Además, el uso de plastilina brindó la posibilidad al estudiante de manipular con mayor versatilidad y crear curvas que no necesariamente fueran de grado 1 a 3, o de intentar formas que al inicio desde su racionalidad correspondían a las que se estaban estudiando. Se escogió la plastilina como material para modelar las curvas dada la facilidad de su manejo y que se adherian al geoplano impidiendo que se moviera la curva en algún descuido. Empero, se reconoce que pudo haber otros materiales que también pudieron haber sido funcionales como el caso de los limpiapipas. No obstante, este material fue utilizado como medio para acceder a las *prácticas* que emergen en la interacción de una persona con discapacidad visual con el conocimiento relativo a las soluciones de ecuaciones polinómicas, *i.e.*, el foco de atención en la presenta investigación está en las *prácticas* y no en los instrumentos empleados para acceder a ellas.

Tabla 7.4 *Alcances y limitaciones del objetivo relativo al análisis de la situación exploratoria*

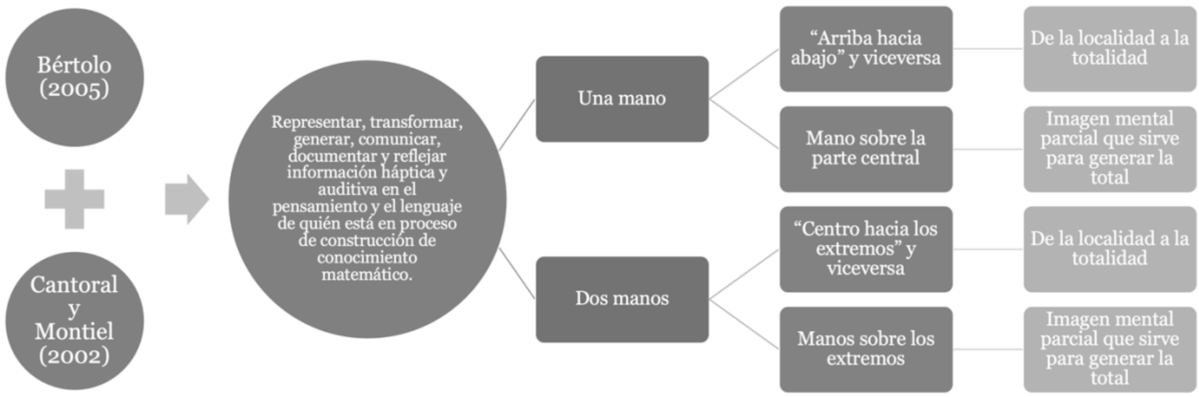
O_{e3}: Analizar la implementación en términos del constructo teórico de prácticas la puesta en escena de la situación exploratoria.	
Alcances	**Limitaciones**
Se identifican las cuatro prácticas supuestas de manera invariante en el desarrollo de la situación exploratoria (*comparar, visualizar, agrupar, generalizar*). No obstante, se reconoce también que hubo ciertas prácticas que emergieron sólo en determinadas tareas.	Dörfler (1991) alude a dos tipos de generalización: empírica y teórica. La primera se basa en reconocer elementos invariantes en objetos comunes. Mientras que la segunda es más compleja, ya que involucra la identificación de invariantes que son sustituidos por prototipos. Por lo tanto, la *generalización* realizada por Jair

	muestra indicios de una generalización empírica. Sin embargo, no se desconoce que la práctica de *generalizar* puede ser entendida de una manera más amplia implicando una abstracción mayor, así como el uso de un lenguaje matemático más formal que el presentado en la situación exploratoria.
El planteamiento socioepistemológico basado en prácticas brinda evidencias empíricas sobre el desarrollo de la inclusión epistémica. Esto es, a pesar de que el propósito de la situación exploratoria y el análisis es identificar prácticas, Jair al establecer relaciones (entre las gráficas o con su conocimiento previo), argumentos (para justificar sus respuestas) y significados (para interpretar la información con la que estaba trabajando) muestra indicios de una interacción con el conocimiento más robusta que la presentada en el diagnóstico realizado.	Sobre la relación "signo–raíz" no se logra la generalización, *i.e.*, no se logra hacer consciencia de los signos de los coeficientes y como se relacionan con las raíces. Lo cual da la impresión de que llegar a la Regla de los signos de Descartes requiere un trabajo más profundo, tanto teórico como experimentalmente, para su adecuada significación.
La práctica de *visualizar* se presenta de manera invariante en el desarrollo de la situación exploratoria. Se identifican distintas estrategias realizadas por Jair en la implementación (Figura 7.6)	

Elaboración propia.

La literatura reportada señala desde el punto de vista conceptual que los problemas de tipo algebraico van a presentar dificultades independientemente de la naturaleza la población (Escalante, 2020; Escalante, Carrillo y López, 2020), empero los resultados muestran que Jair *generaliza* de forma tal que se podría denominar una *generalización empírica*, es decir, para aplicar una forma única que le sirva en distintos casos que cumplan con una estructura similar él recrea sus pasos para formular una posible respuesta o argumento que le sea adecuado. Esto podría deberse a que el manejo de conceptos abstractos, como en este caso lo es la solución de ecuaciones polinómicas, usualmente recae en lo simbólico. Ejemplos de esto podrían ser métodos de despeje de ecuaciones lineales, la utilización de la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado, división sintética, la utilización de las fórmulas de Cardano–Viète, entre otros; y que, estos métodos al complejizarse en Braille, *i.e.*, se vuelve más intrincada la lectoescritura que el problema en sí, producen que el uso de lo simbólico no sea algo tan socorrido en el caso de Jair. Produciendo así que una *generalización simbólica* requiera más tiempo y trabajo en el caso del estudiantado con discapacidad visual a comparación de aquel sin esta condición.

Figura 7.6 *Estrategias de visualización identificadas en la situación exploratoria*



Elaboración propia.

Retomando un poco lo presentado en el capítulo 3 [Aspectos teóricos], se retoma la postura de Bértolo (2005) y la de Cantoral y Montiel (2002) para configurar una acepción de la práctica de *visualizar*. Teniendo eso como base se identificaron distintas estrategias a las cuales de manera indistinta Jair recurrió. Dichos métodos le permitieron interactuar con el conocimiento durante la implementación de la situación exploratoria y en sus palabras "creo que sí las comprendí mejor [las ecuaciones polinómicas de manera gráfica] así con esto".

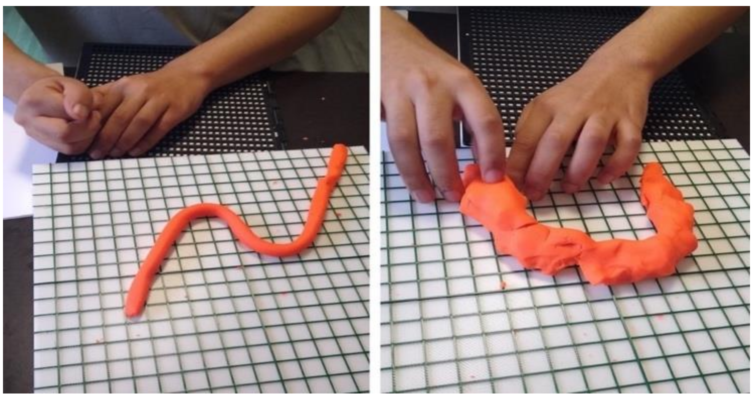
CAPÍTULO 8
PROSPECTIVAS

Capítulo 8. Prospectivas

El vínculo entre la educación musical y la educación matemática ha sido objeto de interés en la disciplina desde hace algún tiempo. Dentro de esta relación se encuentran estudios que mencionan que entre mayor tiempo esté el alumno en instrucción musical y entre más intensiva sea ésta, el incremento en sus habilidades matemáticas será mucho mayor (Moreno y Romero, 2016). Así también, se postula una posibilidad de que al escuchar música se activan las mismas áreas del cerebro que se utilizan en ciertos cálculos matemáticos y las relacionadas con el razonamiento espacio–temporal (Altenmüller y Gruhn, 2002; Mallory, 2012). Empero, se reconoce en la literatura revisada una centración del uso de la educación musical para el aumento en las calificaciones de pruebas relacionadas a tópicos como fracciones y mejorar la capacidad de memoria (Courey, *et al.*, 2012). En (Hernández, 2016) se identificó el uso del valor de las notas usando melodías tocadas con un xilófono para motivar a los estudiantes al ubicar puntos en el plano cartesiano. Sin embargo, a pesar de construir melodías y gráficas de éstas no se encontraron investigaciones que utilizaran la música como medio para favorecer y/o desarrollar argumentos variacionales, es decir, que al tener interacción con melodías se preguntaran aspectos sobre el cambio y variación de lo agudo/grave de las notas, la velocidad con la que se presentan, los silencios, la intensidad de la melodia en general, entre otros aspectos.

Esto se debe a que en la situación exploratoria Jair convirtió dos curvas en melodías ya que en la exploración emergió de él la curiosidad por realizar esta *traducción* de un contexto gráfico a uno musical [Anexo IX]. Una de ellas corresponde a la gráfica de una parábola con concavidad negativa, y otra a una cúbica con coeficiente principal mayor que cero (Figura 8.1).

Figura 8.1 *Curvas que se utilizaron como base para la construcción de melodías*

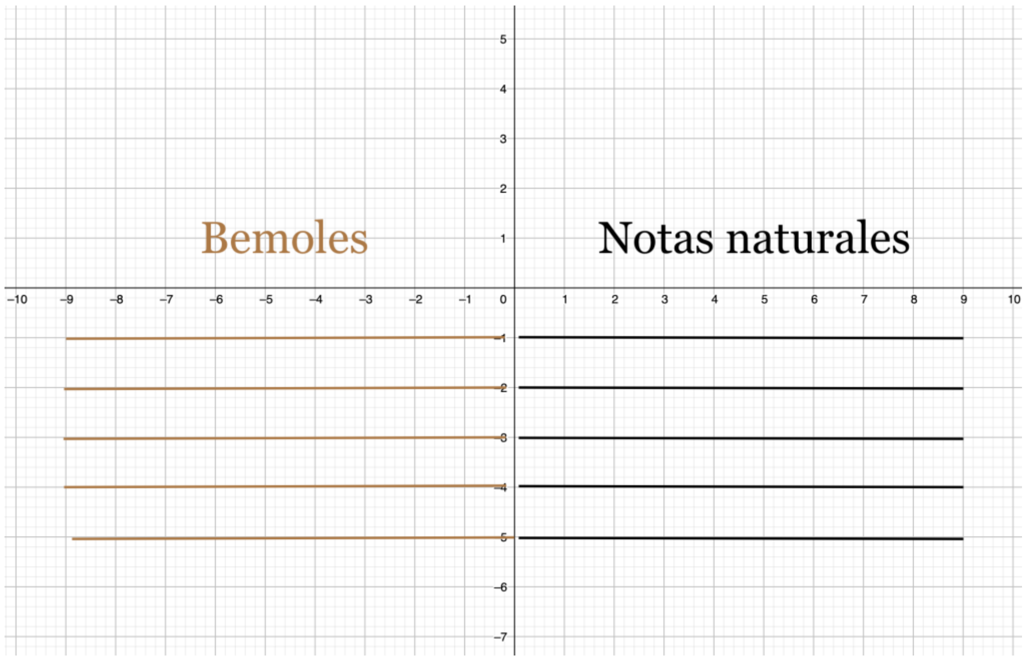


En la foto de la izquierda se presenta la curva de una cúbica con coeficiente principal *mayor a cero (construida por el investigador) y en la foto de la derecha se muestra la parábola con concavidad negativa (construida por Jair). Elaboración propia.*

Para realizar la conversión de las curvas en melodías Jair explica lo siguiente:

> J: Ah, sí mira. Te voy a explicar, es... bueno a diferencia de que sean números les das el significado de notas [*recorre el geoplano con ambas manos, luego con la mano derecha señala el eje x en el sentido positivo y con la mano izquierda el sentido negativo*] para este lado serían notas naturales [*señala cada marca en el eje x positivo con la mano derecha*] do, re, mi, fa, sol, la, si, do y todo eso, [*señala el eje x en el sentido negativo con la mano derecho*] y para este lado ya empezarían a ser sostenidos y bemoles, que son como... son alteraciones (Figura 8.2) [...] Entonces imaginemos que [*cuenta en el eje y]* está una, dos, tres, cuatro y cinco. Y ya pones cruzado en el *x*. Ya solo vas escribiendo las notas y así, solo vas escribiendo las notas todas las notas, es un poco música aleatoria porque vas escribiendo un montón de notas, todas las notas en las posiciones. Y luego ya la gráfica que elijas es la que decide en verdad tu melodía.

Figura 8.2 *Interpretación del geoplano de acuerdo a la narrativa de Jair para construir el pentagrama usando el geoplano como base*



El pentagrama lo construyó usando los cuadrantes III y IV del geoplano, y en el sentido del eje x negativo es para los bemoles y en el sentido positivo las notas naturales. Elaboración propia.

Esto podría interpretarse como la construcción de un sistema de referencia[9] en el cual se involucran claves, notas, duración de un sonido (Figura musical), tiempos, compases, silencios. Es decir, la utilización de esos elementos implica la existencia de diversas variables relacionadas entre sí que pueden modificarse continuamente. Así, procedente de esta relación de variables surge la incógnita *¿qué cambia?*, las que en el caso particular de las melodías compuestas por Jair eso que cambia es el ritmo y el tono del sonido musical. En el caso de la curva relacionada con la parábola, en los primeros momentos los sonidos se presentan con mayor velocidad y más agudos; conforme se avanza se va alcanzando cierta regularidad en la velocidad, se alcanza un agudo "máximo" y comienza a decrecer en tonos más graves; hacia el final la velocidad es más lenta y se vuelven más graves los sonidos.

Además, "estudiar el cambio en un fenómeno implica la existencia de algún referente para dar cuenta de esa modificación y que al mismo tiempo sirva como base para la medición del cambio" (Caballero, 2018, p. 93). En este caso el *elemento de referencia* es la nota musical, ya que ante el cuestionamiento *¿respecto de qué cambia?*, la respuesta es que cambia en relación con la intensidad del sonido (más grave o más agudo).

En la pregunta *¿cuánto cambia?* que permite vislumbrar la unidad de medida, ésta se entiende como "aquel elemento que permite medir el cambio en una variable mediante la comparación entre dos elementos" (Caballero, 2018, p. 94). En la composición realizada por Jair dicho elemento es la escala musical, ya que es ésta la que permite realizar la comparación entre las notas colocadas en el sistema de referencia, identificar cuál es más aguda o más grave que otra dados dos elementos. Si bien, esta medición de inicio no es a través de la comparación de valores numéricos, sí lo es a partir de detalles, características y descripciones de la intensidad del cambio de lo agudo o grave de los sonidos en la melodía. También podría ser la velocidad con la que se presenta la melodía, es decir, que fuese cada vez más lento/rápido en otras composiciones en la que el énfasis recaiga en este elemento.

Finalmente, para responder *¿cómo cambia?* se alude a la *temporización* que es entendida por Caballero (2018), basado en la perspectiva piagetiana, como

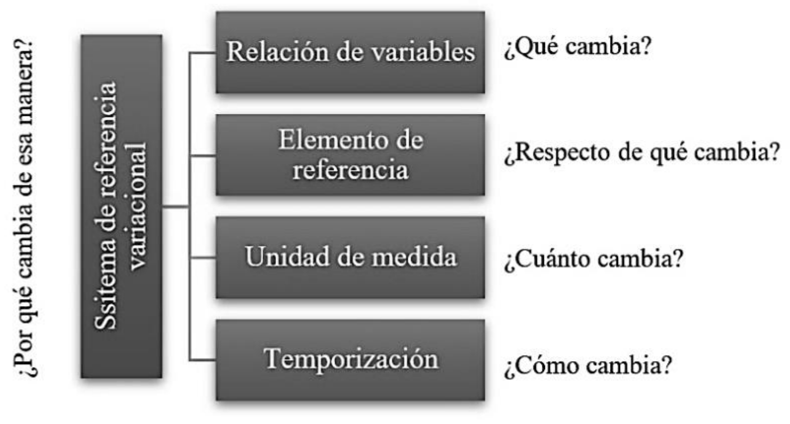
[9] Se utiliza "sistema de referencia" en el sentido físico clásico entendido como aquel conjunto de convenciones usadas por un observador para medir la posición y otras magnitudes físicas de un sistema físico y de mecánica.

> La temporización establece un conjunto de estados, cuyo número y naturaleza evidencian formas específicas de temporizar. En cuanto al número de estados, identificamos dos casos: estados extremos y estados intermedios. Los estados extremos consisten en identificar dos estados, uno que se considera el estado inicial y otro el estado final, lo que puede coincidir con el verdadero principio y fin del fenómeno, o bien, consistir en la localización de los extremos de un intervalo específico (p. 96).

La respuesta es que la regularidad con la que se van sucitando los sonidos musicales cada vez decrece un poco más conforme se va avanzando en la melodía, *i.e.*, el ritmo de la composición decrece conforme el tiempo. El estado inicial corresponde a una presentación de las notas con menos tiempo entre sí, mientras que el estado final es a silencios más prolongados. El estado intermedio de la melodía, usando un metrónomo para establecer una relación con el ritmo, se encuentra en un ritmo de 80 PPM.[10]

Ante estas cuatro preguntas se vislumbra los elementos de un *sistema de referencia variacional*, el cual es necesario para el estudio del cambio y la variación. Para identificar dicho sistema se acude a la interrogante: *¿Por qué cambia de esa manera?* Esta cuestión se plantea con el objetivo de reconocer y justificar la forma de variación que se reconoce. Para lo cual, Caballero (2018) propone el siguiente esquema (Figura 8.3).

Figura 8.3 *Elementos del sistema de referencia variacional*



Tomado de Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Caballero, 2018, p. 99).

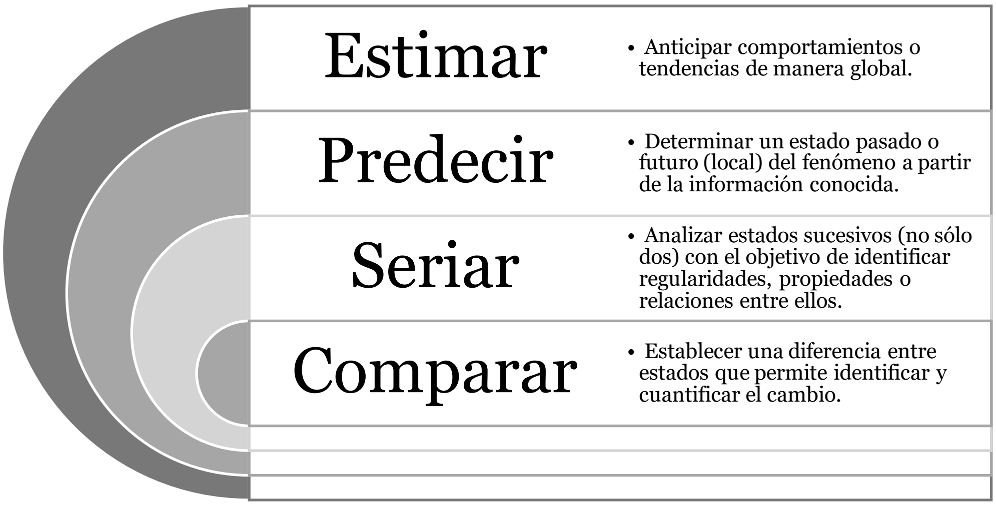
[10] Un metrónomo es un artefacto que reproduce una pulsación constante, que ayuda a los músicos a tocar en armonía con los tiempos. La pulsación se mide en PPM (pulsaciones por minuto.

Se infiere que el *sistema de referencia variacional* que construyó Jair se infiere que consiste en el establecimiento de una relación de dependencia entre dos variables, la nota musical empleada y el ritmo de acuerdo a la posición donde se encuentre en la curva que utilizó como base al construir la melodía, es decir, donde la forma de aumentar o disminuir la velocidad y agudeza de la nota está determinado por consideraciones del estudiante acerca del fenómeno de cambio en cuestión.

El estudio del pensamiento y lenguaje variacional (PyLVar) desde la TSME enfatiza el carácter viariacional de las ideas matemáticas, no sólo desde el contexto algebraico o analítico. Esto debido a que las ideas relacionadas con el cambio y la variación son nociones intrínsecas a la génesis de lo que actualmente se conoce como Cálculo. El impedimento propio de la humanidad de no poder adelantar el tiempo a voluntad crea la necesidad de predecir estados futuros, por lo que ante tal situación se requiere identificar, cuantificar y analizar la forma de aquello que cambia para inferir posibles estados futuros de un fenómeno (Cantoral, 2013b; Caballero y Cantoral, 2015). Para ello se hace una distinción entre el término *cambio*, siendo entendido como aquellas modificaciones de estado que pueden ser percibidas, y el término de *variación*, el cuál se acuñe a la abstracción de las modificaciones de estado percibidas que permite su cuantificación para explicar su evolución (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005; Caballero, 2018; Moreno-Durazo, 2018).

Además, al estar enmarcada la línea de investigación sobre PyLVar en la TSME se identifica y reconoce el uso normado de prácticas que están involucradas en el estudio del cambio y la variación. Entre las prácticas identificadas se encuentra *comparar*, *seriar*, *predecir* y *estimar*. Cada una con sus propios matices, ya que éstas no se presentan exactamente igual en cada situación, sino que dependen del escenario en el que se desarrollen, el contexto en el que se esté trabajando, las personas involucradas, y demás variables. Empero, se brinda una caracterización sobre ellas en la Figura 8.4.

Figura 8.4 *Caracterización de las prácticas variacionales*



Elaboración propia a partir de la interpretación de (Moreno-Durazo, 2018; Caballero, 2012, 2018; Caballero y Cantoral, 2013; Salinas, 2003).

Si bien, en la presente investigación se muestra evidencia de que el desarrollo del pensamiento matemático mediante el uso normado de prácticas sucede independientemente de si la persona tiene o no discapacidad visual, y entre las prácticas evidenciadas se encuentra la de *Comparar*, se reconoce que no es el mismo tipo de comparación. En las prácticas variacionales la intención de determinar estados futuros o pasados desconocidos a partir de la información conocida es lo que le brinda el status de *variacional*. Mientras que esa intencionalidad no estaba presente al momento de interactuar con las soluciones de ecuaciones polinómicas de manera gráfica, se trata un motivo (que llamamos los motívicos) específico del cambio, en este caso posicional y no temporal. Quizá con esta investigación estamos ante otro tipo de motivo, que agregaría al temporal y posicional más marcados por la física, otro más teñido por lo sensorial, como lo háptico, o el *motivo háptico*.

Retomando, dentro de las investigaciones relacionadas al PyLVar desde la TSME se ha trabajado alrededor de la noción de prácticas y su evolución con la finalidad del estudio sobre un comportamiento para predecir estados futuros aportando a formas de desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en ambientes deterministas y contextos como el de la Reforma Integral de la Educación Media Superior, el llenado o vaciado de recipientes, o lo proporcional directo (Cabrera, 2009; Caballero, 2012, 2018; Fallas, 2019; Reyes-Gasperini, 2016b) y en ambientes no deterministas y contextos como el péndulo doble o el diagnóstico y tratamiento de enfermedades cardíacas (Hernández-Zavaleta, 2019; Moreno-Durazo, 2018). Además, se reconoce en el Pylvar que existen diferentes ordenes de variación (Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017; Caballero, 2018; Moreno-Durazo, 2018). El primer orden de variación se centra en la medición del cambio en la variable, el segundo orden mide como son los cambios del primer orden, y así de manera continua para los demás órdenes superiores. Un método para identificar el orden de variación es mediante el uso de diferencias. En éste se calculan las diferencias de dos momentos de cambio continuos y se prosigue hasta encontrar una regularidad en las diferencias obtenidas. Por ejemplo, en los polinomios de grado 1 la primera diferencia es constante tomando intervalos equiespaciados, mientras que en un polinomio de grado 3 se obtiene esta regularidad hasta el cálculo de las terceras diferencias.

Así que debido a la *traducción* de una situación gráfica de polinomios de grados 2 y 3 a melodías musicales para reinterpretar y resignificar las curvas brindan indicios sobre el pensamiento y lenguaje variacional de las personas con discapacidad visual usando la música como medio para acceder a dicho conocimiento podría ser una posible ruta de investigación futura. El hecho de emplear la música como recurso para profundizar sobre el PyLVar de las personas con discapacidad visual se debe a que dado su condición el sonido es un elemento con el que pueden interactuar sin mayor complicación, a diferencia de presentar fenómenos de cambio y variación que tienden a apoyarse en experiencias visuales como el tiro parabólico o el llenado/vaciado de recipientes donde puede resultar complicado tratar realizar alguna especie de *traducción* para hacer estas experiencias accesibles a la realidad del estudiante donde además de identificar que hay cambios de estado se deben de cuantificar. Usando una analogía con contextos como el cálculo, la física, lo gráfico o lo cotidiano se puede profundizar en investigación futura sobre los órdenes de variación en el contexto musical (Tabla 8.1). Esto usando como antecendente lo presentado en (Moreno-Durazo, 2018) donde se presenta una analogía similar desde la cardiología.

Tabla 8.1 *Escenarios de significación de los ordenes de variación*

Cálculo	**Física**	**Gráfico**	**Cotidiano**	**Música**
$f(x)$	Posición	Ordenada	Estatura: pequeño, mediano, grande	
$f'(x)$	Velocidad	Pendiente	Noción de crecimiento	
$f''(x)$	Aceleración	Concavidad	Cantidad de crecimiento	

Reinterpretación a partir de Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica (Cantoral, 2004).

Para finalizar, el estudio del pensamiento al tratar fenómenos de cambio y variación en diversos contextos impacta en la enseñanza y el aprendizaje de saberes matemáticos. Esto debido al énfasis que se hace en los procesos cognitivos y socioculturales que les son inherentes en escenarios de construcción de conocimiento matemático. Cantoral (2013b) menciona que

> El pensamiento y lenguaje variacional desarrollado por los estudiantes, evidenciado en el análisis de sus diálogos, les ha brindado herramientas para, entre otros aspectos, reconocer variaciones referidas a elementos que a su vez varían, estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficos, establecer relaciones entre la variación de una función y las funciones derivadas sucesivas, hacer presente la concepción de los elementos del dominio como elementos fijos e independientes entre ellos, a los cuales se les aplica un proceso, y de elementos que se pueden relacionar por ciertas variaciones, y además, comunicar oralmente y gestualmente sus conjeturas y argumentos [...] En forma general permitirá que el estudiante desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, que desarrolle su capacidad de visualizar en matemáticas, y brinda la oportunidad de discutir con compañeros, conjeturar, argumentar, refutar, lo cual ayudara a que las ideas evolucionen hacia ideas más robustas matemáticamente (pp. 64–65).

Por lo que el estudio del PyLVar en personas con discapacidad visual podría ser una ruta de investigación para profundizar sobre lo ya conocido en esta perspectiva. Esto con el antecedente del desarrollo del pensamiento matemático normado por prácticas sociales sucede con o sin discapacidad visual, así como de la posibilidad de visualizar elementos matemáticos a través del sentido háptico. Esto también con la intencionalidad de conocer y evidenciar las formas matemáticas de pensamiento de personas con discapacidad visual desde el estudio del cambio y la variación. En esa medida se estaría en condiciones de incidir en la política pública educativa con fines de inclusión a gran escala.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J. & Chandler, K. (2017). Student connections between algebraic and graphical polynomial representations in the context of a polynomial relation. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(5), 915-938.

Alajarmeh, N. & Pontelli, E. (2012). A non-visual electronic workspace for learning algebra. In Miesenberger, K., Karshmer, A. &Penaz, P. (Eds), *International Conference on Computers for Handicapped Persons*. (pp. 158-165). Springer.

Altenmüller, E. & Gruhn, W. (2002). Brain Mechanisms. In Parncutt, R. & McPherson, G. (Eds.) *The Science and Psychology of Music Performance* (pp. 63-81). Oxford University Press.

Baldor, A. (1997). *Álgebra*. Compañía Cultural Editora y Distribuidora de Textos Americanos, S.A.

Balzadua, S. (2007). *Acercamiento gráfico a los ceros de la función polinomio y a las raíces de la ecuación polinomio. Una experiencia con estudiantes universitarios* [Tesis de maestría no publicada]. CICATA–IPN.

Bértolo, H. (2005). Visual imagery without visual perception?. *Psicológica*, *26*(1), 173-188. https://www.redalyc.org/pdf/169/16926113.pdf

Bértolo, H., Paiva, T., Pessoa, L., Mestre, T., Marques, R. & Santos, R. (2003). Visual dream content, graphical representation and EEG alpha activity in congenitally blind subjects. *Cognitive brain research*, *15*(3), 277-284.

Blake R., Sobel K. & James T. (2004). Neural synergies between kinetic vision and touch. *Psychol Sci*, *15*, 397-402

Blanco, R. (2006). La equidad y la inclusión social: uno de los desafíos de la educación y la escuela hoy. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *4*(3), 1-15.

Borrel, J. (1559). *Logística*. Lugduni: Apud Gulielmum Rovillium.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. & Chandler, K. (2014). Students' Differentiated Translation Processes. *International Journal for Mathematics Teaching y Learning*. https://www.cimt.org.uk/journal/bosse5.pdf

Bouck, E. & Weng, P. (2014). Hearing Math: Algebra Supported eText for Students With Visual Impairments. *Assistive Technology*, *26*(3), 131-139. https://doi.org/10.1080/10400435.2013.870939

Bouck, E., Meyer, N., Joshi, G. & Schleppenbach, D. (2013). Accessing algebra via mathspeak™: Understanding the potential and pitfalls for students with visual impairments. *Journal of Special Education Technology*, *28*(1), 49-63. https://doi.org/10.1177/016264341302800105

Buendía, G. (2004). *Una epistemología de los aspectos periódicos de la función en un marco de prácticas sociales* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav – IPN.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav–IPN.

Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav–IPN.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*, 1007-1015. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2015). Pensamiento y Lenguaje Variacional: Un estudio sobre mecanismos de construcción del conocimiento matemático. En Rodríguez, F. y Rodríguez, R. (Eds.), *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La Profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa*, *17*, 307-314. Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional como eje rector para el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la RIEMS*. [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav–IPN.

Cantoral, R. (1983). *Procesos del Cálculo y su Desarrollo Conceptual*. [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav–IPN.

Cantoral, R. (1997). Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas. *Revista EMA, 2*(2), 115-131.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En Díaz, L. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1-9. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R. (2013a). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento* (1ª ed.). Editorial Gedisa SA.

Cantoral, R. (2013b). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R. (2016). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento* (2ª ed.). Editorial Gedisa SA.

Cantoral, R. (2019). Socioepistemology in Mathematics Education. In Lerman, S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer Nature. 1-7. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100041-1

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *42*(14), 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Thomson.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En Lezama J. y Sánchez, M.; Molina, J. (Eds.), *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa, 18, 463-468. Mexico D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de investigación en educación matemática, 5*(8), 9-28.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, *7*(3), 91-116.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2003). La predicción y la regla de los signos de Descartes. En Díaz, L. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *16*(2), 393-399. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Ferrari, M. (2009). La predicción y la regla de los signos de Descartes. Segunda parte: visualizando la regla. *Premisa*, *11*(42), 3-21.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático*. Prentice Hall.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002). Desarrollo del pensamiento matemático: el caso de la visualización de funciones. En Díaz, L. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *15*(1), 430-434. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. En Díaz, L. (Ed). *Acta latinoamericana de matemática educativa*, *16*(2), 694-701. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2014) *Precálculo: Un enfoque visual*. Pearson.

Cárdenas, H., Lluis, E., Ragui, F. y Tomás, F. (1995). *Álgebra superior* (3ª ed.). Trillas.

Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: Some introductory notes. In *Proceedings of the international symposium on selected domains of research and development in mathematics education* (pp. 51-62). Comenius University.

CILSA. (2017). Un poco de historia: exclusión, segregación, integración, inclusión ¿Solo palabras? Junio, 2021, Sitio web: https://desarrollarinclusion.cilsa.org/diversidad/un-poco-de-historia-exclusion-segregacion-integracion-inclusion-solo-palabras/

Colette, J. (1986). *Historia de las matematicas I*. Siglo XXI.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* Gedisa.

Cordero, F., Méndez, C. y Pérez, R., (2014). Atención a la diversidad. La matemática educativa y la teoría socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática:* Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, *7*(3), pp. 71-90 .

Correa, P. y Pulido, E. (2013). Adaptación e implementación de recursos didácticos para la enseñanza de ecuaciones de primer y segundo grado a niños con discapacidad visual en un aula inclusiva. *Revista Científica* (edición especial), 568-572.

Courey, S., Balogh, E., Siker, J., y Paik, J. (2012). Academic Music: Music Instruction to Engage Third Grade Students in Learning Basic Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), 251-278. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9395-9

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura Maya* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav–IPN.

D'Urzo, P. (2017). *Integración del no vidente en la clase de matemática. La clasificación de ángulos, un contenido para la inclusión* [Trabajo final integrador]. Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

de Toscano, G. (2009). La entrevista semi-estructurada como técnica de investigación. En Tonon, G. (Ed.), *Reflexiones latinoamericanas sobre investigación cualitativa* (pp. 46-68). UNLAM.

Descartes, R. (1886). *La géométrie*. Leiden.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen, y J. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Kluwer Academic Publishers.

Egodawatte, G. (2011). *Secondary school students' misconceptions in algebra* [PhD thesis]. University of Toronto.

Escalante, E. (2017). *Propuesta de recurso didáctico para ciegos y débiles visuales para aplicar en el aula matemática. Caso de estudio en San Luis Potosí.* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Escalante, E. (2020). *Material didáctico para el proceso enseñanza – aprendizaje de operaciones con polinomios para personas con discapacidad visual* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Zacatecas.

Escalante, E., Carrillo, C. y López, J. (2020). Álgebra y discapacidad visual. Material para operaciones con polinomios. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemática*, *90*, 36-42.

Espinosa, R. Castañeda-Roldán, C. y Medellín-Castillo, I. (2015). Objetos de aprendizaje 3D como una forma de comunicar significados geométricos a tráves del sentido virtual del tacto en personas ciegas y débiles visuales. *Revista de Sistemas Computacionales y TIC's*, *1*(1), 16-28.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX: un estudio socioepistemológico* [Tesis de maestría no publicada] Cinvestav–IPN.

Fadel, L., Kuntz, V. y Zuravski, L. (2020). Panorama sobre la accesibilidad en la educación superior: escenario brasileño en la especificidad de UNINTER-SIANEE. En Míguez, M. y Ribas, V. (Eds.) *Construcción de inclusión y accesibilidad en la universidad a través de las tic*. (pp. 31-44). Ediciones Universitarias.

Fallas, R. (2019). *Prácticas socialmente compartidas en la significación de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav–IPN.

Falvey, M. (2005). *Believe in my child with special needs: Helping children achieve their potential in school*. Brookes Publishing.

Farfán, R. (2013). *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de précalculo (1ª ed.).* Secretaría de Educación Pública

Farfán y Romero, F. (2016). El diseño de situaciones de aprendizaje como elemento para el enriquecimiento de la profesionalización docente. *Perfiles educativos*, *38,* 116-139.

Fernández, J. (1986). *La enseñanza de la matemática a los ciegos*. ONCE.

Fernández, J. (2004). *Braille y matemática*. ONCE.

Figueiras, L. & Arcavi, A. (2014). A touch of mathematics: Coming to our senses by observing the visually impaired. *ZDM*, *46*(1), 123-133.

Figueiras, L. & Arcavi, A. (2015). Learning to see: the viewpoint of the blind. In Je Cho, S. (Ed.). *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 175-186). Springer, Cham. DOI: https://doi.org 10.1007/978-3-319-17187-6_10

Fraser, J. & Gutwin, C. (2000). A framework of assistive pointers for low vision users. In Tremaine, M., Cole, E. & Mynatt, E. (Eds.). *Proceedings of the fourth international ACM conference on Assistive technologies,* (pp. 9-16). https://doi.org/10.1145/354324.354329

García, I. (2009). *Educación inclusiva en Latinoamérica y el Caribe. El caso mexicano*. Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Garrido, M., Llamas, L. y Sánchez, I. (2015). Matemáticas I. Secretaria de Educación Pública. Disponible en https://www.dgb.sep.gob.mx/servicios-educativos/telebachillerato/LIBROS/1-semestre-2016/Matematicas-I.pdf

Gulley, A., Smith, L., Price, J., Prickett, L. & Ragland, M. (2017). Process-driven math: An auditory method of mathematics instruction and assessment for students who are blind or have low vision. *Journal of visual impairment y blindness*, *111*(5), 465-471. https://doi.org/10.1177/0145482X1711100507

Guzmán, J. (1989). *Desarrollo conceptual del álgebra.* Sección de Matemática educativa, CINVESTAV, IPN.

Hagen M., Franzen O., McGlone F., Essick G. & Dancer C. (2002) Tactile motion activates the human middle temporal/V5 (MT/V5) complex. *Eur J Neurosci*, *16,* 957-964. https://doi.org/10.1046/j.1460-9568.2002.02139.x

Hahn, M., Mueller, C. & Gorlewicz, J. (2019). The Comprehension of STEM Graphics via a Multisensory Tablet Electronic Device by Students with Visual Impairments. *Journal of Visual Impairment and Blindness*, *113*(5), 404-418. https://doi.org/10.1177/0145482X19876463

Halpern A. & Zatorre R. (1999) When that tune runs through your head: a PET investigation of auditory imagery for familiar melodies. *Cereb Cortex, 9*, 697-704. https://doi.org/10.1093/cercor/9.7.697

Healy, L. & Fernandes, S. (2014). Blind students, special needs, and mathematics learning. In Lerman, S. (Ed.) *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 79-81) Springer.

Hernández-Zavaleta, J. (2018). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de "lo errático"* [Tesis de doctorado no publicada] Cinvestav–IPN.

Hernández, K. (2016). *La música como registro transicional en el aprendizaje del álgebra en secundaria y preparatoria. Elemento motivador para las matemáticas* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01284528.pdf

Hidalgo, A. (2011). Dificultades de aprendizaje en el alumnado con déficit visual y ciego. *FOAL*, 1-22. https://bit.ly/2S6E5cE

Hinojos, J. (2020). *Una caracterización de las concepciones de estudiantes de Ingeniería Electrica acerca de la noción matemática del estado estacionario* [Tesis de doctorado no publicada] Cinvestav–IPN.

Imaz, C. (1985). Una propuesta didáctica para la integral definida. *Cuadernos de Investigación, 3*. PNFAPM.

Ivy, S. & Hooper, J. (2015). Using constant time delay to teach braille and the Nemeth Code for Mathematics and Science Notation to students making the transition from print to braille. *Journal of Visual Impairment y Blindness*, 109(5), 343-358. https://doi.org/10.1177/0145482X1510900504

Jiménez, E. y Buendía, G. (2017). Significados gráficos para la pendiente desde el cotidiano. *Revista Pakbal*, *39*, 5-11.

Jiménez, R. (2011). *Matemáticas I. Álgebra*. Pearson Educación.

Jiménez, R., Barreto, D. y Funeme, F. (2013). Propuesta de un material didáctico para la enseñanza aprendizaje de polinomios para población con limitación visual. *Educación científica y tecnológica*. 559-563.

Jones, M., Andre, T., Kubsko, D., Bokinsky, A., Tretter, T., Negishi, A. & Superfine, R. (2004). Remote atomic force microscopy of microscopic organisms: Technological innovations for hands-on science with middle and high school students. *Science Education*, *88*(1): 55-71. https://doi.org/10.1002/sce.10112

Joya, S. y Morales, R. (2012). Enseñanza de las secciones cónicas como lugares geométricos en un aula inclusiva de estudiantes invidentes. En Obandom G. (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 302 – 307). Sello Editorial Universidad Medellín.

Katz, J. (2009). *A history of mathematics. An introduction*. Pearson Education, Inc.

Kaur, B. (1991). Some common misconceptions in algebra. *Teaching and Learning*, *11*(2), 33-39.

Kennedy, J. (1993). *Drawing and the blind: Pictures to touch*. Yale University Press.

Kennedy, J. (1997). How the blind draw. *Scientific American, 276*(1)*,* 76-81.

Knauff, M. & May, E. (2006). Mental imagery, reasoning, and blindness. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *59*(1), 161-177. https://doi.org/10.1080/17470210500149992

Kumar, D., Ramasamy, R. y Stefanich, G. (2001). Science for students with visual impairments. *Electronic Journal of Science Education*, *5*(3). https://ejrsme.icrsme.com/article/view/7658

Lacey, S. y Sathian, K. (2013). Visual Imagery in Haptic Shape Perception. In Lacey, S. & Lawson, R. (Eds) *Multisensory Imagery* (pp. 207-219). Springer. 10.1007/978-1-4614-5879-1_11

Leal, R., Perilla, D. y Rosero, F. (2013). Propuesta de un material didáctico para la enseñanza aprendizaje de polinomios para población con limitación visual. *Revista científica*, 501-505. https://core.ac.uk/reader/33253240

Levy L., Henkin R., Lin C., Finley, A. & Schellinger, D. (1999a) Taste memory induces brain activation as revealed by functional MRI. *J Comput Assist Tomogr 23*(4): 499–505.

Levy, L., Henkin R., Lin, C., Hutter, A. & Schellinger, D. (1999b). Odor memory induces brain activation as measured by functional MRI. *J Comput Assist Tomogr 23*(4): 487–498.

Mackenzie, S. (1954). *La escritura Braille en el mundo*. UNESCO.

Mallory, C. (2012). *The effect of music on math and science standardized test scores* [Unpublished bachelor thesis]. Faculty of Worcester polytechnic.

Marín, C. (2019). Enfoques educativos de la concepción de integración e inclusión. *Revista Internacional De Apoyo a La inclusión, Logopedia, Sociedad Y Multiculturalidad*, *5*(1), 115-124. https://revistaselectronicas.ujaen.es/index.php/riai/article/view/4599

Mascret, B., Mille, A. & Guillet, V. (2012). Supporting Braille learning and uses by adapting transcription to user's needs. In Miesenberger, K., Karshmer, A., Penaz, P. &Zagler, W. (Eds) *International Conference on Computers for Handicapped Persons*, (pp. 150-157). Springer.

Méndez, C. (2015). *Comunidad de conocimiento matemático de Sordos. Lo matemático y la escuela* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav–IPN.

Montiel, G. y Buendía, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En Sosa, L., Rodríguez, R. y Aparicio, E. (Eds.), *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 443-454). Red Cimates.

Moreno-Durazo, G. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav–IPN.

Moreno, R. (2018). El discurso Matemático Escolar en el aprendizaje de polinomios. Exclusión en alumnos con discapacidad visual. *Experiencias de Investigación de los jóvenes de San Luis Potosí*, (6), 216.

Moreno, R. y Cantoral, R. (2021). Estudiantes con discapacidad visual: el discurso matemático escolar y la doble exclusión. *RAES*, *13*(22), 169-179.

Moreno, R. y Romero, S. (2016). Efectos de la educación musical en el desempeño escolar de niños y jóvenes en la asignatura de matemáticas. *Inducción a la ciencia, la tecnología y la innovación en la UASLP, 4*(3), 248-252.

Moreno, R. y Zúñiga, S. (en prensa). Enseñanza del concepto de volumen a alumnos con discapacidad visual. *Revista Wiphala*.

Niño, M. y Vanegas, L. (2013). Enseñanza de la geometría en población invidente y de baja visión. *Revista científica y tecnológica*. 336-339 Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://doi.org/10.14483/23448350.7069

Oaks, J. (2018). François Viète's revolution in algebra. *Archive for History of Exact Sciences*, *72*(3), 245-302. https://doi.org/10.1007/s00407-018-0208-0

Okungu, P., Griffin-Shirley, N. & Pogrund, R. (2019). Accommodation needs for teachers who are blind and teach students with visual impairments. *Journal of Visual Impairment y Blindness*, *113*(3), 248-259. https://doi.org/10.1177/0145482X19854902

ONCE. (2020). La discapacidad visual, marzo, 2020. de Organización Nacional de Ciegos Españoles https://www.once.es/dejanos-ayudarte/la-discapacidad-visual

Ortiz, F. (2008). *Apuntes. Álgebra. Polinomios.* UNAM–FES Aragón.

Otero, N. & Oakley, I. (2016). A tangible tool for visual Impaired users to learn geometry. In Bakker, S., Hummels, C. & Ullmer, B. (Eds.) *Proceedings of the TEI '16: Tenth International Conference on Tangible, Embedded, and Embodied Interaction (TEI '16),* (pp. 577-583). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/2839462.2856536

Peña, C., y Rodríguez, Y. (2015). *Proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula inclusiva de matemáticas con estudiantes con discapacidad visual* [Tesis de licenciatura]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. http://hdl.handle.net/11349/5560

Pritchard, C., y Lamb, J. (2012). Teaching geometry to visually impaired students. *The Mathematics Teacher*, *106*(1), 22-27. National Council of Teachers of Mathematics.

Reyes-Gasperini, D. (2016a). *Empoderamiento docente y socioepistemología: Un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas.* Gedisa.

Reyes-Gasperini, D. (2016b). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la trnasformación y la mejora educativa* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav–IPN.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas.* Mir Moscú.

Ríos, D. (2020). *Socioepistemología y Transversalidad: Una reconstrucción racional de tres teoremas fundamentales* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav–IPN.

Robles, I. (1997). *Matemática braille. Guía para estudiantes, maestros y padres.* Trillas.

Rosenblum, L., Cheng, L. & Beal, C. (2018). Teachers of students with visual impairments share experiences and advice for supporting students in understanding graphics. *Journal of visual impairment y blindness*, 112(5), 475-487. https://doi.org/10.1177/0145482X1811200505

Rule, A., Stefanich, G., Boody, R. & Peiffer, B. (2011). Impact of adaptive materials on teachers and their students with visual impairments in secondary science and mathematics classes. *International Journal of Science Education*, *33*(6), 865-887. https://doi.org/10.1080/09500693.2010.506619

Sahin, M. & Yorek, N. (2009). Teaching science to visually impaired students: A small-scale qualitative study. *US-China Education Review*, *6*(4): 19-26.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav–IPN.

Sánchez, J., Espinoza, M., Carrrasco, M. y Garrido, J. (2012). Modelo de videojuegos para mejorar habilidades matemático-geométricas en aprendices ciegos. *XVII Congreso Internacional de Informática,* 97-104.

SEP. (2001). *Plan Nacional de Educación 2001-2006*. Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2010). *Guía para facilitar la inclusión de alumnos y alumnas con discapacidad en escuelas que participan en el Programa Escuelas de Calidad*. Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2017a). *Equidad e Inclusión*. Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2017b). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2018). *Estrategia de equidad e inclusión en la educación básica: para alumnos con discapacidad, aptitudes sobresalientes y dificultades severas de aprendizaje, conducta o comunicación*. Secretaría de Educación Pública.

Simón, M., Farfán, R. y Rodríguez, C. (2020). Retos teórico-metodológicos para la transversalidad de género en las investigaciones de corte socioepistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(2), 606-614.

Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav–IPN.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión – Inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático*. [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav–IPN.

Soto, D. y Cantoral, R. (2010). ¿Fracaso o exclusión en el campo de la matemática? En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 839-848). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Summers I., Francis S., Bowtell R., McGlone F. & Clemence M. (2009). A functional magnetic resonance imaging investigation of cortical activation from moving vibrotactile stimuli on the fingertip. *J Acoust Soc Am 125*, 1033–1039.

Swokowski, E. & Cole, J. (2010). *Algebra and trigonometry with analytic geometry*. Cengage Learning.

Torres, J. (2020). *Aprendizaje del conpceto de ecuación lineal de una variable, para estudiantes con discapacidad visual. Un estudio de caso*. [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Zacatecas.

UNESCO. (2006). *Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad*. https://www.un.org/esa/socdev/enable/documents/tccconvs.pdf

van Leendert, A., Doorman, M., Drijvers, P., Pel, J. & van der Steen, J. (2019). An exploratory study of reading mathematical expressions by braille readers. *Journal of Visual Impairment y Blindness*. *113*(1), 68-80.

Viète, F. (1646). *Opera Mathematica*. (Trans Francisci a Schooten., Ed.). Leyden, Universidad de Leiden.

Wayne, D. (2010) *Exploring methods for finding solutions to polynomial equations* [Master dissertation]. University of Texas at Austin.

Zamora-Araya, J. y Vallejos-Brenes, R. (2019). Una propuesta de estrategias para el estudio de la geometría en poblaciones con discapacidad visual. En Flores, R., García, D., Pérez-Vera, I. (Eds.), A*cta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 161-170. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ANEXOS

ANEXOS

I. Situación exploratoria con intencionalidades

Tarea	Intencionalidad	Momento	Intencionalidad	Pregunta	Descripción de la pregunta	Intencionalidad	Practicas esperadas
1. Trabajo gráfico con los polinomios de grado uno.	Favorecer el desarrollo de prácticas en la noción de raíz en los polinomios de grado uno.	1. Sobre el número de raíces en los polinomios de grado uno.	Identificar que los polinomios de grado uno tienen una raíz real.	1.1.1 Dada las gráficas de los polinomios $[y=]\ x+2,\ [y=]\frac{1}{4}x+1, [y=]-3x+9, [y=]-\frac{1}{3}x+3, [y=]\ 4x-8, [y=]\frac{1}{2}x-3, [y=]-x-8$ y $[y=]-\frac{1}{5}x-1$, entre otras. ¿Qué similitudes puedes notar entre todas las gráficas?, ¿Qué pasa con la recta y el eje x?, ¿Cuántas veces puede cruzar el eje x la gráfica de un polinomio de grado uno? ¿Es posible que no lo corte ninguna vez? ¿O más de una? Intenta mostrar un ejemplo que no lo corte ninguna o más de una vez.	Se presentan diversas gráficas de rectas correspondientes a polinomios de grado uno en el geoplano, una en cada geoplano donde solo están marcados los ejes xy, y sin darle la expresión analítica aún, para que el estudiante logre identificar elementos como el número de cruces con el eje x, independientemente de la pendiente u ordenada al origen. Se le cuestiona sobre la posibilidad de un	Identificar que las rectas tienen una raíz real. Usar argumentos como pendiente y ordenada al origen.	Comparar [rectas en el plano] Visualizar [de manera háptica el comportamiento global de la curva]

					contraejemplo de manera gráfica. También se le da la opción de realizar anotaciones en braille en hojas aparte.[11]		
		2. Sobre la relación signo – raíz en la recta.	Reconocer la relación entre los signos del coeficiente del término lineal y del término independie nte con la raíz de la función.	1.2.1 Dadas las gráficas de la sección anterior se le pide al estudiante que ahora las acomode siguiendo algún criterio que él logre identificar de acuerdo a la forma de las rectas. Preguntar ¿Por qué los juntaste de esa forma? ¿Qué características logras identificar en común? ¿Cómo son las raíces en los "equipos" que armaste con los geoplanos? Escoge un "equipo" de los que armaste e intenta gráficar una tercera	Las gráficas presentadas en la sección anterior continuan siendo estudiadas y aún no se le proporciona la expresión analítica, pero ahora se le pide al estudiante que arme grupos siguiendo algún criterio que él haya identificado. Se puede estudiar las gráficas cuantas veces sean necesarias. Se le pregunta el por qué de su	Identificar características en común en las rectas y sus respectivas raíces que permitan generar grupos de acuerdo a características en común o diferentes según crea conveniente el estudiante. Usar argumentos como pendiente y ordenada al origen.	Comparar [rectas en el plano] Visualizar [de manera háptica elementos locales de la curva] Agrupar [rectas siguiendo un criterio establecido]

[11] Durante toda la situación esta posibilidad permanece constante.

				recta que pueda pertenecer a éste. ¿Podrías armar otros equipos siguiendo otro criterio? ¿Cuál fue el nuevo juicio para juntarlos de esta nueva forma? ¿Ahora cómo son las raíces en los nuevos “equipos” que armaste? Escoge un “equipo” de los que armaste e intenta gráficar una tercera recta que pueda pertenecer a éste. ¿Podrías armar “equipos” de acuerdo a la forma de las raíces? ¿Cómo son las rectas? ¿Qué similitudes y diferencias notas en estos nuevos grupos? Grafica un tercer ejemplo en cada uno de los nuevos grupos que armaste. ¿Por qué la recta que graficaste sí encaja en ese nuevo “equipo”?	elección y cómo son las raíces en cada uno de los grupos. Además, se le pide que grafique un tercer ejemplo en alguno de los grupos y justifique su construcción. En caso de que no agrupe por signo de las raíces se le pide nuevamente hacer una nueva agrupación siguiendo un criterio nuevo de su elección. Así como que grafique un tercer ejemplo en alguno de los grupos. Si el estudiante sigue sin agrupar de acuerdo al signo de la raíz, preguntarle si cree posible hacer nuevos “equipos” en los que se		

					ponga esto en juego. Preguntarle como son las rectas y que similitudes y diferencias logra identificar en los grupos que haya armado. Finalmente, se le pide que grafique un tercer ejemplo de cada una de las nuevas categorías y justifique su construcción.		
				1.2.2 Dados los casos estudiados anteriormente, ¿qué reflexiones puedes mencionar acerca de la relación signo – raíz?	Cuestionar al estudiante sobre que logra identificar como “invariante” en los casos estudiados sobre la recta anteriormente.	A partir de los ejemplos presentados como se puede llegar a una “generalización” de la relación signo – raíz en las rectas.	Agrupar [comparaciones / ejemplos realizados anteriormente] Generalizar [una propiedad]
		3. Sobre la relación coeficiente – raíz en los polinomios de grado uno.	Reconocer la relación entre el coeficiente del término lineal y el	1.3.1 Dadas las ocho gráficas con las que se ha venido trabajando hasta ahora presentar la expresión analítica de cuatro de ellas	Se presentan cuatro de las expresiones analíticas de las gráficas con las que se ha venido	Identificar como se ve reflejado el término lineal e independiente en la gráfica, es decir, que el valor del	Comparar [coeficiente y su relación con la gráfica]

			término independiente con la raíz del polinomio.	($[y =]\ x + 2,\ ,[y =] -3x + 9, [y =]\frac{1}{2}x - 3,$ $y\ [y =] -\frac{1}{5}x - 1$) Preguntar ¿Qué relación encuentras entre la gráfica y los términos independientes de las expresiones analíticas?, ¿Qué relación identificas entre el término lineal y la gráfica? ¿Podrías dar un valor aproximado de la raíz conociendo la gráfica y la expresión analítica?	trabajando hasta ahora. Una de cada combinación de signos [(+,+), (+,−), (−,+), (−,−)]; dos con coeficiente lineal entero, y dos con coeficiente lineal fraccionario. Se pide al estudiante que identifique la relación entre el término independiente y la ordenada al origen en la gráfica, así como la relación entre el coeficiente del término lineal y la pendiente de la recta (positiva/negativa y “que tan pegada al eje x o y”). Además, se solicita que de un valor aproximado de las raíces conociendo la	coeficiente del término lineal es la pendiente de la recta y el término independiente es la ordenada al origen. Usar argumentos como pendiente y ordenada al origen.	Visualizar [de manera háptica elementos locales de la curva]

					gráfica y la expresión analítica. No se espera que haga un despeje algebraico en regleta y punzón, sino que con la información que conoce el estudiante pueda dar un valor aproximado (o exacto) de la raíz.		
				1.3.2 Presentar en braille las expresiones $[y =]\frac{1}{4}x + 1$, $[y =] -\frac{1}{3}x + 3$, $[y =]\ 4x - 8$, $y\ [y =] -x - 8$ Identificar cual expresión corresponde a cada gráfica de las restantes ocho. Justificar la respuesta.	De las ocho gráficas con las que se ha venido trabajando, ahora presentar la expresión analítica de las cuatro restantes. Pedir al estudiante que haga una relación entre la expresión analítica y la gráfica.	Se espera que el estudiante use argumentos como pendiente, ordenada al origen y raíz para lograr identificar las relaciones entre la expresión analítica y la gráfica.	Agrupar [expresión analítica con la gráfica de la recta]
				1.3.3 De las cuatro gráficas anteriores, intenta dar el valor exacto o aproximado de la raíz.	Se pide que dé un valor aproximado de las raíces conociendo la gráfica y la expresión	Identificar el valor de las raíces de las cuatro gráficas restantes, usando la expresión analítica y la	Generalizar [la relación entre coeficientes y raíz]

				¿Cómo identificaste estos valores? ¿Qué elementos de la expresión analítica utilizaste? ¿Podrías sólo usar los coeficientes de los términos para obtener el valor de la raíz? ¿cómo lo harías?	analítica. No se espera que haga un despeje algebraico en regleta y punzón, sino que con la información que conoce el estudiante pueda dar un valor aproximado (o exacto) de la raíz. Además, que justifique su respuesta. También que mencione si logra identificar algún tipo de relación entre los coeficientes y la raíz.	gráfica. Así como intentar llegar a una generalización de la forma de las raíces en los polinomios de primer grado.	
2. Trabajo gráfico con los polinomios de grado dos.	Favorecer el desarrollo de prácticas en la noción de raíz en los polinomios de grado dos.	1. Sobre el número de raíces en los polinomios de grado dos.	Identificar que los polinomios de grado dos tienen dos raíces que pueden ser dos reales distintas,	2.1.1 Dada la gráfica de los polinomios de grado dos $[y =]\ x^2 + 4x - 2$, $[y =] -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3$, $[y =]\ 3x^2 - x + 4$. ¿Qué tienen en común estas curvas? ¿Qué tienen de diferencias? Muestra un ejemplo donde se conserve *eso*	Se exponen ejemplos de diversas gráficas de polinomios de grado dos que tienen en común la existencia de dos raíces reales distintas. No se le da la expresión	Identificar que los polinomios de grado dos tienen dos raíces reales distintas entre sí. Usar argumentos como concavidad, raíz, vértice.	Comparar [parábolas en el plano] Visualizar [de manera háptica elementos globales de la curva]

			una real doble o dos complejas.[12]	que tienen en común las curvas de los ejemplos.	analítica al estudiante. Se cuestiona al estudiante sobre las similitudes y diferencias que logre identificar. Además, se pide que grafique un ejemplo más donde el polinomio de grado dos tiene raíces reales distintas.		
				2.1.2 Dada la gráfica de los polinomios de grado dos $[y =]\ x^2$, $[y =]\ (x - 5)^2$, $[y =]\ -(x + 6)^2$, $[y =] -(5x - 2)^2$ ¿Qué tienen en común estas curvas? ¿Qué diferencias hay entre cada una de ellas? ¿Cómo es la forma en la que toca el eje x a diferencia de los casos anteriores? ¿Crees qué tenga algo que ver?	Se presentan ejemplos donde los polinomios de grado dos tienen una raíz real de multiplicidad dos. No se le da la expresión analítica al estudiante. Se cuestiona sobre las similitudes y diferencias que logra identificar en los ejemplos propuestos.	Identificar que los polinomios de grado dos tienen una raíz real con multiplicidad dos. Usar argumentos como concavidad, raíz, vértice, raíz múltiple.	Comparar [parábolas en el plano] Visualizar [de manera háptica elementos locales de la curva]

[12] Este estudio se centra únicamente en el estudio de raíces reales, por lo que no se profundizara en el caso de las raíces complejas para el caso de las cuadráticas ni tampoco para las cúbicas.

					Además, se pide que ponga atención en la forma en la que la curva “toca” el eje x, la cual no lo atravieza como en los casos anteriormente estudiados.		
				2.1.3 Dada la gráfica de los polinomios de grado dos [$y =$] $-x^2 - 4$, [$y =$] $x^2 + 2x + 8$ [$y =$] $x^2 - 5x + 9$, [$y =$] $-x^2 - x - 3$ ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre las gráficas? Muestra un ejemplo donde se cumplan estas semejanzas. ¿Qué pasa con las raíces en estos casos? ¿Por qué en los ejercicios anteriores tenía dos y ahora ninguna?	Se muestran casos donde los polinomios de grado dos tienen raíces complejas, por lo que no cruza el eje x. No se le da la expresión analítica al estudiante. Se le pide que grafique una curva que cumpla esta característica. Se pregunta sobre la opinión del estudiante acerca de si cree o no que tenga raíces la curva.	Identificar que las curvas de grado dos no tienen raíz real. Usar argumentos como concavidad, raíz, vértice, raíz real.	Comparar [parábolas en el plano] Visualizar [de manera háptica elementos locales de la curva]
				2.1.4 ¿Cuántas veces puede cruzar el eje x las	Preguntar directamente al	Identificar que las parábolas pueden	Generalizar [el número

				curvas de grado dos? ¿Es posible que no lo corte más de dos? ¿Cuántas raíces va a tener una parábola en total? ¿Cómo se relaciona este número con el grado del exponente?	estudiante la relación con el grado del polinomio y el número de raíces reales.	cruzar dos o menos veces el eje *x*.	de raíces reales de una parábola a partir de la comparación de comparacion es hechas anteriorment e]
		2. Sobre la relación signo - – raíz en los polinomios de grado dos.	Reconocer la relación entre los signos del coeficiente del término cuadrático, lineal y del término independie nte con la raíz de la función.	2.2.1 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado dos con raíz positiva.[13] Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde interseca el eje y?, ¿Cómo es la forma de la parábola cerca del valor donde interseca con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga una raíz positiva?,	Se pide al estudiante que grafique un polinomio de grado dos con raíces reales positivas. Después de eso se le cuestiona sobre la forma, la concavidad, el término independiente y la linealidad del polinomio.	Pedir que el estudiante vaya construyendo gráficas de polinomios de grado dos que cumplan que tenga dos raíces distintas positivas, una doble positiva o complejas. Cuestionar en torno al tipo de concavidad, la linealidad del polinomio y el término independiente para identificar	Comparar [parábolas en el plano con raíces positivas] Visualizar [al presentar información de manera háptica]

[13] Hay que pedir que grafique cuantas veces sean necesarias después de cada análisis guiado por las preguntas al estudiante a lo largo de todo el Momento 2.

				Además ¿Qué forma puede tener para que tenga dos raíces distintas[14] positivas?, y repetir las preguntas.		regularidades, *i.e.*, cuando hay dos cambios de signo en los coeficientes [(+,−,+) y (−,+,−)].	
				2.2.2 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado dos con raíz negativa. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la parábola cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga una raíz positiva?, Además ¿Qué forma puede tener para que tenga dos raíces	Se pide al estudiante que grafique un polinomio de grado dos con raíces reales negativas. Después de eso se le cuestiona sobre la forma, la concavidad, el término independiente y la linealidad del polinomio.	Pedir que el estudiante vaya construyendo gráficas de polinomios de grado dos que cumplan que tenga dos raíces distintas negativas, una doble negativa o complejas. Cuestionar en torno al tipo de concavidad, la linealidad del polinomio y el término independiente para identificar regularidades, *i.e.*, cuando no hay cambios de signo en los coeficientes	Comparar [parábolas en el plano con raíces negativas] Visualizar [al presentar información de manera háptica]

[14] En caso de que el estudiante haya empezado con raíces sencillas distintas entre sí, pedir que grafique con raíces dobles para continuar el análisis.

				distintas negativas?, y repetir las preguntas.		[(+,+,+) y (−,−,−)].	
				2.2.3 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado dos con una raíz positiva y una negativa Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la parábola cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga una raíz positiva y otra negativa?, Además ¿Qué forma puede tener para que tenga dos raíces distintas?, y repetir las preguntas.	Se pide al estudiante que grafique un polinomio de grado con una raíz positiva y otra negativa. Después de eso se le cuestiona sobre la forma, la concavidad, el término independiente y la linealidad del polinomio.	Pedir que el estudiante vaya construyendo gráficas de polinomios de grado dos que cumplan que tenga dos raíces distintas, *i.e.*, una positiva y una negativa. Cuestionar en torno al tipo de concavidad, la linealidad del polinomio y el término independiente para identificar regularidades, *i.e.*, hay un cambio de signo en los coeficientes [(+,−,−), (+,+,−), (−,−,+) y (−,+,+)].	Comparar [parábolas en el plano con raíces de distinto signo entre ellas] Visualizar [al presentar información de manera háptica]

				¿Se puede que no tenga ninguna raíz real?			
				2.2.4 Dados los casos estudiados anteriormente, ¿qué reflexiones puedes mencionar acerca de la relación signo – raíz?	Cuestionar al estudiante sobre que logra identificar como “invariante” en los casos estudiados sobre los polinomios de grado dos.	A partir de los ejemplos presentados como se puede llegar a una “generalización” de la relación signo – raíz en los polinomios de grado dos.	Agrupación [de ejemplos revisados anteriorment e] Generalizar [la relación entre signo y raíz]
		3. Sobre la relación coeficiente – raíz en los polinomios de grado dos.	Reconocer la relación de los coeficientes de la expresión cuadrática con las raíces de la función.	2.3.1 Dada la gráfica de $[y =]\ x^2 - 8x + 12$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) $[y =]\ x^2 - 13x + 12$, b) $[y =]\ x^2 - 8x + 12$, y c) $[y =]\ x^2 - 7x + 12$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el tipo de concavidad de la parábola en la gráfica, y en las expresiones algebraicas?, ¿Y la ordenada al origen?,	Se presenta la gráfica de un polinomio de grado dos con concavidad positiva y con ordenada al origen 12. Además se dan tres expresiones algebraicas escritas en Braille que cumplen con las características mencionadas. La diferencia es la linealidad del polinomio, sin embargo, no es tan sencillo distinguir a tacto las pendientes, por	Identificar la relación entre las raíces y los coeficientes del término lineal e independiente.	Comparar [elementos en la parábola] Visualizar [de manera háptica elementos locales de la curva] Agrupar [el valor de las raíces]

				¿Cuáles son sus raíces?, ¿Cómo es la forma en la que cruza el eje y, *i.e.*, qué tan inclinado está?,	lo que la forma de identificar la expresión correcta es recurrir a los coeficientes de los términos lineales, que es el único elemento diferente entre entre las expresiones, Además de que se conocen las raíces $(x_1 = 2; x_2 = 6)$ con lo cual puede encontrar una relación entre el gráfico y la expresión. En caso de ser necesario, guiar con las preguntas propuestas y/o necesarias.		
				2.3.2 Dada la gráfica de $[y =]\ x^2 - 8x + 16$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) $[y =]\ x^2 - 17x + 16$, b) $[y =]\ x^2 -$	Se presenta la gráfica de un polinomio de grado dos con concavidad positiva y con ordenada al origen 16. Además se dan tres expresiones	Identificar la relación entre las raíces y los coeficientes del término lineal e independiente.	Comparar [elementos en la parábola] Visualizar [de manera háptica elementos

				$10x + 16$, y c) $[y =]\ x^2 - 8x + 16$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el tipo de concavidad de la parábola en la gráfica, y en las expresiones algebraicas?, ¿Y la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, ¿Cómo es la forma en la que cruza el eje y, *i.e.*, qué tan inclinado está?, ¿Las raíces te dan más información de cómo es la ordenada al origen? ¿Crees que las raíces te puedan dar más información sobre la parábola y cómo elegir una expresión de las opciones?	algebraicas escritas en Braille que cumplen con las características mencionadas. La diferencia es la linealidad del polinomio, sin embargo, no es tan sencillo distinguir a tacto las pendientes, por lo que la forma de identificar la expresión correcta es recurrir a los coeficientes de los términos lineales, que es el único elemento diferente entre entre las expresiones, Además de que se conocen las raíces $(x_1 = 4; x_2 = 4)$ con lo cual puede encontrar una relación entre el gráfico y la expresión. En caso de ser necesario, guiar		locales de la curva] Agrupar [el valor de las raíces]

					con las preguntas propuestas y/o necesarias.		
				2.3.3[15] Dada la gráfica de $[y =]\ x^2 - 12x + 20$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) $[y =]\ x^2 - 21x + 20$, b) $[y =]\ x^2 - 12x + 20$, y c) $[y =]\ x^2 - 9x + 20$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el tipo de concavidad de la parábola en la gráfica, y en las expresiones algebraicas?, ¿Y la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, ¿Cómo es la forma en la que cruza el eje y, *i.e.*, qué tan inclinado está?, ¿Las raíces te dan más información de cómo es la ordenada al origen?	Se presenta la gráfica de un polinomio de grado dos con concavidad positiva y con ordenada al origen 12. Además se dan tres expresiones algebraicas escritas en Braille que cumplen con las características mencionadas. La diferencia es la linealidad del polinomio, sin embargo, no es tan sencillo distinguir a tacto las pendientes, por lo que la forma de identificar la expresión correcta es recurrir a los coeficientes de los términos lineales, que es el único	Identificar la relación entre las raíces y los coeficientes del término lineal e independiente.	Comparar [elementos en la parábola] Visualizar [de manera háptica elementos locales de la curva] Agrupar [el valor de las raíces]

[15] En caso de que hasta este momento el estudiante no haya logrado identificar relaciones entre las raíces y los coeficientes.

				¿Crees que las raíces te puedan dar más información sobre la parábola y cómo elegir una expresión de las opciones?	elemento diferente entre entre las expresiones, Además de que se conocen las raíces $(x_1 = 10; x_2 = 2)$ con lo cual puede encontrar una relación entre el gráfico y la expresión. En caso de ser necesario, guiar con las preguntas propuestas y/o necesarias.		
				2.3.4 Dados los ejemplos anteriores, ¿Qué reflexiones puedes mencionar acerca del valor de las raíces y la forma de los coeficientes del polinomio de grado dos? ¿Crees que la forma en la que realizaste las actividades previas sea la misma con los casos donde se tiene dos raíces negativas o una	Se cuestiona al estudiante sobre que conclusiones llega respecto a la relación coeficiente – raíz y si cree que la idea que tiene se puede extender a casos donde la concavidad permanece positiva pero ambas raíces no necesariamente son positivas.	Corroborar si el estudiante logra dilucidar un patrón en la relación de los coeficientes y raíces a partir del estudio de varios ejemplos. Se espera que la relación sea que dada la expresión del polinomio de segundo grado $[y =]\ x^2 + bx + c$ con raíces reales	Generalizar [sobre la relación coeficiente – raíz]

				positiva y una negativa? (Intentalo)		r_1, r_2. Entonces $b = -(r_1 + r_2)$ y $c = r_1 * r_2$. Poner a prueba la relación que el estudiante cree que es en un caso donde las dos raíces no son positivas.	
3. Trabajo gráfico con los polinomios de grado tres.	Favorecer el desarrollo de prácticas en la noción de raíz en las cúbicas.	1. Sobre el número de raíces en las cúbicas.	Identificar que los polinomios de grado tres tienen tres raíces que pueden ser tres reales distintas, una real doble con una real distinta, o una real con dos complejas.	3.1.1 Dadas las gráficas de las cúbicas $[y =]\ x^3 + 3$, $[y =] -x^3 - 2x + x - 4$, $[y =]\ 2x^3 + 3x^2 + 4$, $[y =] -x^3 + 2x + 5$ ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las cúbicas? Intenta mostrar un ejemplo extra que muestre esto.	Se presentan diferentes gráficas con una raíz real simple, sin darle la expresión algebraica al estudiante. Se le cuestiona al estudiante sobre las similitudes (que es la existencia de una raíz real simple) y las diferencias. Luego se le pide que grafique un nuevo ejemplo de esto.	Identificar que las cúbicas tienen una raíz real simple. Usar argumentos como concavidad, punto de inflexión, raíz simple.	Comparar [cúbicas en el plano] Visualizar [de manera háptica elementos globales y locales de la curva]
				3.1.2 Dadas las gráficas de las cúbicas $[y =]\ x^3$, $[y =] -(x-3)^3$,	Se dan ejemplos gráficos de cúbicas que tienen una	Identificar que las cúbicas tienen una raíz real triple.	Comparar [cúbicas en el plano]

				$[y =]\ (x+5)^3$, $[y =]\ -(x-1)^3$ ¿Qué parecidos y diferencias encuentras entre las curvas?, ¿Cómo se parece o se diferencia la forma en la que tocan al eje x de los ejemplos anteriores? Construye una curva de grado tres que cumpla con esta característica.	raíz real triple sin darle la expresión algebraica al estudiante. Se le pregunta al estudiante si logra identificar alguna similitud entre los ejemplos. Luego si la forma de contacto de estos ejemplos tiene alguna semejanza o diferencia con los revisados en la pregunta anterior. Finalmente, se pide que grafique un nuevo ejemplo con raíz triple.	Usar argumentos como concavidad, punto de inflexión, raíz simple, raíz triple.	Visualizar [de forma háptica elementos globales y locales de la curva]
				3.1.3 Dadas las gráficas de las cúbicas $[y =]\ x^3+3x^2-1$, $[y =]\ -x^3+2x$, $[y =]\ 5x^3+3x^2-6x$, $[y =]\ -x^3+2x^2-1$ ¿Qué similitudes y diferencias logras encontrar entre las curvas? Construye un	Se proporcionan ejemplos gráficos de cúbicas con tres raíces reales distintas sin darle la expresión algebraica al estudiante. Se cuestiona sobre las diferencias y	Identificar que las cúbicas tienen tres raíces reales simple. Usar argumentos como concavidad, punto de inflexión, raíz simple.	Comparar [cúbicas en el plano] Visualizar [de manera háptica elementos globales y locales de la curva]

				ejemplo donde se mantengan esas similitudes.	similitudes que el estudiante logra identificar. A partir de esta información tiene que gráficar un nuevo ejemplo que cumpla estas características.		
				3.1.4 Dadas las gráficas de las cúbicas $[y =] (x^2 - 4)(x - 2), [y =] -x^3 - 2x^2$ $[y =] -2x^3 - 3x^2, [y =] -(x^2 - 9)(x - 3)$ ¿Qué tienen en común y en que se diferencian estas curvas? ¿Cómo se parece o se diferencia la forma en la que tocan al eje x de los ejemplos anteriores? Muestra un caso distinto a los ya presentados donde se cumpla este tipo de "*contacto*".	Las gráficas presentadas tienen una raíz real doble y una raíz real simple sin proporcionar la expresión algebraica al estudiante. Se cuestiona sobre las diferencias y similitudes que el estudiante logra identificar. A partir de esta información tiene que gráficar un nuevo ejemplo que cumpla estas características.	Identificar que las cúbicas tienen una raíz real simple. Usar argumentos como concavidad, punto de inflexión, raíz simple, raíz doble.	Comparar [cúbicas en el plano] Visualizar [de manera háptica elementos locales y globales de la curva]
				3.1.5 ¿Cuántas veces puede cruzar el eje x	Preguntar directamente al	Identificar que las cúbicas pueden	Generalizar [sobre el

				una cúbica? ¿Es posible que no lo corte más de tres? ¿Cuántas raíces va a tener una cúbica en total? ¿Cómo se relaciona este número con el grado del exponente?	estudiante la relación con el grado del polinomio y el número de raíces reales.	cruzar tres o menos veces el eje *x*.	número de raíces que tiene una cúbica]
		2. Sobre la relación signo - – raíz en los polinomios de grado tres.	Reconocer la relación entre los signos del coeficiente del término cúbico, cuadrático, lineal y del término independiente con la raíz de la función.	3.2.1 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con tres raíces negativas. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la cúbica cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las cúbicas y de las parábolas? ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla	Se pide al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con raíces reales negativas. Después de eso se le cuestiona sobre la forma, el punto de inflexión, la concavidad, el término independiente y la linealidad del polinomio.	Pedir que el estudiante vaya construyendo gráficas de polinomios de grado tres que cumplan que tenga tres raíces reales negativas. Cuestionar en torno al tipo de concavidad, punto de inflexión, la linealidad del polinomio y el término independiente para identificar regularidades, *i.e.*, cuando no hay cambios de signo en los coeficientes [(+,+,+,+) y (–,– ,–,–)].	Comparar [cúbicas en el plano con raíces negativas] Visualizar [al representar información de manera háptica]

				que tenga raíces negativas?			
				3.2.2 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con dos raíces negativas. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la cúbica cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las cúbicas y de las parábolas? ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga dos raíces negativas?	Se pide al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con dos raíces reales negativas. Después de eso se le cuestiona sobre la forma, el punto de inflexión, la concavidad, el término independiente y la linealidad del polinomio.	Pedir que el estudiante vaya construyendo gráficas de polinomios de grado tres que cumplan que tenga dos raíces reales negativas. Cuestionar en torno al tipo de concavidad, punto de inflexión, la linealidad del polinomio y el término independiente para identificar regularidades, *i.e.*, cuando hay un cambio de signo en los coeficientes [(+,+,+,–), (+,+,–,–), (+,–,–,–),(–,+,+,+), (–,–,+,+), y (–,–,–,+)].	Comparar [cúbicas en el plano con dos raíces negativas] Visualizar [al representar información de manera háptica]
				3.2.3 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado	Se pide al estudiante que grafique un polinomio de	Pedir que el estudiante vaya construyendo gráficas de	Comparar [cúbicas en el plano con

				tres con una raíz negativa. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la cúbica cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las cúbicas y de las parábolas? ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga una raíz negativa?	grado tres con una raíz real negativa. Después de eso se le cuestiona sobre la forma, el punto de inflexión, la concavidad, el término independiente y la linealidad del polinomio.	polinomios de grado tres que cumplan que tenga una raíz real negativa. Cuestionar en torno al tipo de concavidad, punto de inflexión, la linealidad del polinomio y el término independiente para identificar regularidades, *i.e.*, cuando hay dos cambios de signo en los coeficientes [(+,+,–,+), (+,–,+,–), (+,–,–,+),(–,+,+,–), (–,+,–,–), y (–,–,+,–,)].	una raíz real negativa] Visualizar [al representar información de manera háptica]
				3.2.4 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con tres raíces reales positivas. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?,	Se pide al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con raíces reales positivas. Después de eso se le cuestiona sobre	Pedir que el estudiante vaya construyendo gráficas de polinomios de grado tres que cumplan que tenga tres raíces reales positivas.	Comparar [cúbicas en el plano con raíces negativas] Visualizar [al representar información

				¿Cómo es la forma de la cúbica cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las cúbicas y de las parábolas? ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga raíces positivas?	la forma, el punto de inflexión, la concavidad, el término independiente y la linealidad del polinomio.	Cuestionar en torno al tipo de concavidad, punto de inflexión, la linealidad del polinomio y el término independiente para identificar regularidades, *i.e.*, cuando hay tres cambios de signo en los coeficientes [(+,−,+,−) y (−,+,−,+)].	de manera háptica]
				3.2.5 Dados los casos estudiados anteriormente, ¿qué reflexiones puedes mencionar acerca de la relación signo – raíz?	Cuestionar al estudiante sobre que logra identificar como "invariante" en los casos estudiados sobre la recta anteriormente.	A partir de los ejemplos presentados como se puede llegar a una "generalización" de la relación signo – raíz en las rectas.	Agrupación [de ejemplos revisados anteriormente] Generalizar [la relación entre signo y raíz]
		3. Sobre la relación coeficiente – raíz en los polinomios de grado tres.	Reconocer la relación de los coeficientes de la expresión cuadrática	3.3.1 Dada la gráfica de $[y =]\ x^3 - 6x^2 + 8x$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las	Se presenta la gráfica de un polinomio de grado tres con tres raíces reales ($x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 4$). Además se dan	Identificar la relación entre las raíces y los coeficientes del término cuadrático y lineal.	Comparar [elementos en la cúbica] Visualizar [de manera háptica

			con las raíces de la función.	opciones a) [$y =$] $x^3 - 9x^2 + 8x$, b) [$y =$] $x^3 - 2x^2 + 10x$, y c) [$y =$] $x^3 - 6x^2 + 8x$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica?, ¿Cuál es la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, Recordando un poco sobre las relaciones que vimos en los polinomios de grado dos, ¿Cómo podrías ayudarte de esas ideas en este caso?	tres expresiones algebraicas escritas en Braille que tienen en similitud que son cúbicas positivas con ordenada al origen cero. La diferencia es que el inciso a) tiene raíces $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 8$. El segundo inciso cumple que el coeficiente del término cuadrático es la resta de las raíces de la gráfica presentada, pero el coeficiente del término lineal no se puede obtener mediante una suma o multiplicación de las mismas. Por lo que la forma de identificar la expresión correcta es recurrir a los coeficientes de los términos		elementos locales de la curva] Agrupar [el valor de las cúbica]

					cuadráticos y lineales tratando de usar lo empleado en el caso de los polinomios de grado dos. En caso de ser necesario, guiar con las preguntas propuestas y/o necesarias.		
				3.3.2 Dada la gráfica de $[y =]\ x^3 - 12x^2 + 44x - 48$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) $[y =]\ x^3 - 12x^2 + 44x - 48$, b) $[y =]\ x^3 - 27x^2 + 74x - 48$, y c) $[y =]\ x^3 - 13x^2 + 46x - 48$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el comportamiento de la	Se presenta la gráfica de un polinomio de grado tres con tres raíces reales ($x_1 = 2; x_2 = 4; x_3 = 6$). Además se dan tres expresiones algebraicas escritas en Braille que tienen en similitud que son cúbicas positivas con ordenada al origen −48. La diferencia es que el inciso b) tiene raíces $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 24$. El segundo inciso	Identificar la relación entre las raíces y los coeficientes del término cuadrático y lineal.	Comparar [elementos en la cúbica] Visualizar [de manera háptica elementos locales de la curva] Agrupar [el valor de las cúbica]

				gráfica?, ¿Cuál es la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, Recordando un poco sobre las relaciones que vimos en el ejemplo anterior, ¿Cómo podrías ayudarte de esas ideas en este caso?	tiene raíces $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 8$. Por lo que la forma de identificar la expresión correcta es recurrir a los coeficientes de los términos cuadráticos e independiente tratando de usar lo empleado en el caso de los polinomios de grado dos, *i.e.*, la suma de las raíces, y el producto de las mismas para tratar de elegir la respuesta correcta. En caso de ser necesario, guiar con las preguntas propuestas y/o necesarias.		
				3.3.3 Dados los ejemplos anteriores, ¿Qué reflexiones puedes mencionar acerca del valor de las raíces y la forma de los	Se cuestiona al estudiante sobre que conclusiones llega respecto a la relación coeficiente – raíz.	Corroborar si el estudiante logra dilucidar algún patrón en la relación de los coeficientes y	Generalizar [sobre la relación coeficiente – raíz]

				coeficientes del polinomio de grado tres?		raíces a partir del estudio de varios ejemplos. La relación que subyace es dada la expresión del polinomio de segundo tres $[y =]\ x^3 + bx^2 + cx + d$ con raíces reales $r_1, r_{2,} r_3$. Entonces $b = -(r_1 + r_2 + r_3)$, $c = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$ y $d = -r_1 r_2 r_3$ No es espera que el estudiante realmente llegue a esta expresión ya que requiere más trabajo algebraico y numérico. Pero la sección está pensada en dar una antesala a este tipo de tratamiento.	

II. Análisis *A priori*

Pregunta	Respuesta esperada
1.1.1 Dada las gráficas de los polinomios $[y=]\, x+2$, $[y=]\,\frac{1}{4}x+1$, $[y=]-3x+9$, $[y=]-\frac{1}{3}x+3$, $[y=]\,4x-8$, $[y=]\,\frac{1}{2}x-3$, $[y=]-x-8$ y $[y=]-\frac{1}{5}x-1$, entre otras. ¿Qué similitudes puedes notar entre todas las gráficas?, ¿Qué pasa con la recta y el eje x?, ¿Cuántas veces puede cruzar el eje x la gráfica de un polinomio de grado uno? ¿Es posible que no lo corte ninguna vez? ¿O más de una? Intenta mostrar un ejemplo que no lo corte ninguna o más de una vez.	Se espera que la exploración háptica por parte del estudiante lleve cierto tiempo. Ya que son ocho gráficas, una en cada geoplano, y antes de terminar de revisar las ocho detenidamente el estudiante ya será capaz de identificar ciertas regularidades. Entre las regularidades que se espera que el estudiante logre identificar son la forma de las rectas, es decir, que es una inclinación constante en cada una de ellas, que cruza una vez el eje x y una el eje y. Cuando se le cuestione si puede no cortar el eje se espera que el estudiante muestre un segmento de recta, *i.e.*, que limite el dominio de la función polinómica de manera tal que en la gráfica no "corte" el eje x. Una vez confrontada esta idea diciéndole que eso solo es un segmento de recta y que necesita mostrar una recta "completa" logre identificar que los polinomios de grado uno tienen una raíz real.
1.2.1 Dadas las gráficas de la sección anterior se le pide al estudiante que ahora las acomode siguiendo algún criterio que él logre identificar de acuerdo a la forma de las rectas. Preguntar ¿Por qué los juntaste de esa forma? ¿Qué características logras identificar en común? ¿Cómo son las raíces en los "equipos" que armaste con los geoplanos? Escoge un "equipo" de los que armaste e intenta gráficar una tercera recta que pueda pertenecer a éste. ¿Podrías armar otros equipos siguiendo otro criterio? ¿Cuál fue el nuevo juicio para juntarlos de esta nueva forma? ¿Ahora cómo son las raíces en los nuevos "equipos" que armaste? Escoge un "equipo" de los que armaste e intenta gráficar una tercera recta que pueda pertenecer a éste. ¿Podrías armar "equipos" de acuerdo a la forma de las raíces? ¿Cómo son las rectas? ¿Qué similitudes y diferencias notas en estos nuevos grupos? Grafica un tercer ejemplo en cada uno de los nuevos grupos que armaste. ¿Por qué la recta que graficaste sí encaja en ese nuevo "equipo"?	En la pregunta 1.2.1 se retoman las gráficas de la sección anterior y se le pide al estudiante que dado el análisis anterior proponga una agrupación de acuerdo con algún criterio que él escoja. Se espera que priorice características como inclinación, es decir, las que tienen un acercamiento mayor o menor al eje x; signo de la pendiente, ya sea positiva o negativa; valor de la ordenada al origen, mayor o menor que cero. Para que el estudiante logre identificar la clasificación por signo de la raíz va a ser necesario guiarlo a través de preguntas que le hagan prestar atención a este punto dentro de las rectas.
1.2.2 Dados los casos estudiados anteriormente, ¿qué reflexiones puedes	Se espera que a partir de las distintas agrupaciones propuestas por el estudiante logre identificar cierta regularidad. No se pide que enuncie de manera explicita la

mencionar acerca de la relación signo – raíz?	regla de los signos de Descartes, sino que en alguna de las agrupaciones que él hizo logre mencionar las características generales del grupo y como se relaciona con el signo de la raíz.
1.3.1 Dadas las ocho gráficas con las que se ha venido trabajando hasta ahora presentar la expresión analítica de cuatro de ellas ($[y =]\ x + 2$, , $[y =] -3x + 9$, $[y =] \frac{1}{2}x - 3$, y $[y =] -\frac{1}{5}x - 1$) Preguntar ¿Qué relación encuentras entre la gráfica y los términos independientes de las expresiones analíticas?, ¿Qué relación identificas entre el término lineal y la gráfica? ¿Podrías dar un valor aproximado de la raíz conociendo la gráfica y la expresión analítica?	Al presentar la expresión algebraica el estudiante será capaz de identificar la relación entre el término independiente y la ordenada al origen en la gráfica. Con preguntas podrá dilucidar la relación del signo de la pendiente con la forma gráfica, *i.e.*, si va del extremo inferior izquierdo al extremo superior derecho es una pendiente positiva. O bien, si va del extremo superior izquierdo al extremo inferior derecho una pendiente negativa. La cuestion del valor de la pendiente y su relación con el coeficiente del término lineal, orientado con preguntas, determinar que si es un valor entre 0 y 1 (en valor absoluto) va a ser una línea recta más acercada al eje x. Mientras que si es un valor (absoluto) mayor a 1 se acerca más al eje y. Se espera que dada la expresión algebraica y la gráfica háptica de la recta pueda dar un valor aproximado de la raíz.
1.3.2 Presentar en braille las expresiones $[y =] \frac{1}{4}x + 1$, $[y =] -\frac{1}{3}x + 3$, $[y =]\ 4x - 8$, y $[y =] -x - 8$ Identificar cual expresión corresponde a cada gráfica de las restantes ocho. Justificar la respuesta.	Dado el ejercicio 1.3.1 el estudiante ha logrado conjeturar ciertas relaciones entre las expresiones algebraicas y las gráficas, así que las nuevas expresiones algebraicas servirán para corroborar, refutar y/o reelaborar sus conjeturas al respecto. Se espera que como primer recurso para identificar las relaciones entre la expresión algebraica y la gráfica sea el valor del término independiente que corresponde al valor de la ordenada al origen. Empero, en dos de ellas tiene el mismo valor, lo que las diferencia es el valor de la pendiente, entonces en ese momento tendrá que recurrir a una estrategia distinta, tal vez al signo de la pendiente, ya que una es positiva y otra negativa.
1.3.3 De las cuatro gráficas anteriores, intenta dar el valor exacto o aproximado de la raíz. ¿Cómo identificaste estos valores? ¿Qué elementos de la expresión analítica utilizaste? ¿Podrías sólo usar los coeficientes de los términos para obtener el valor de la raíz? ¿cómo lo harías?	Se pide al estudiante que verbalice sus estragegias al momento de relacionar las expresiones algebraicas con las gráficas para corroborar si lo observado en el ejercicio 1.3.2 se corresponde a lo que afirma. La respuesta esperada es que se apoyó principalmente en el valor del término independiente para identificar la ordenada al origen.
2.1.1 Dada la gráfica de los polinomios de grado dos $[y =]\ x^2 + 4x - 2$, $[y =] -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3$, $[y =]\ 3x^2 - x + 4$. ¿Qué tienen en común estas curvas? ¿Qué tienen de diferencias? Muestra un ejemplo donde se conserve eso que tienen en común las curvas de los ejemplos.	Se le presenta al estudiante diversos ejemplos de gráficas de grado dos con dos raíces reales distintas entre sí. Se espera que logre identificar esta característica en común y discernir de elementos como la concavidad, ya que en algunos casos es negativa y en otros positiva, así como la apertura de las mismas. Con dicha característica identificada se espera que el estudiante grafique una parábola con concavidad positiva con vértice en el eje y y dos raíces reales distintas entre sí.
2.1.2 Dada la gráfica de los polinomios de grado dos $[y =]\ x^2$, $[y =]\ (x - 5)^2$, $[y =] -(x + 6)^2$, $[y =] -(5x - 2)^2$ ¿Qué	Al interactuar con gráficas con raíz doble se espera que el estudiante logre identificar que está es la característica que tienen en común y pueda discernir entre otros elementos

tienen en común estas curvas? ¿Qué diferencias hay entre cada una de ellas? ¿Cómo es la forma en la que toca el eje x a diferencia de los casos anteriores? ¿Crees qué tenga algo que ver?	como la concavidad o la apertura de la parábola. Así también que no considere que es una raíz doble, sino simplemente una raíz, *i.e.*, un lugar de encuentro de la curva con el eje x sin atribuirle aún el adjetivo "doble". Se espera que con los ejemplos presentados sea capaz de construir una gráfica que tenga raíz doble.
2.1.3 Dada la gráfica de los polinomios de grado dos $[y =] -x^2 - 4$, $[y =]\ x^2 + 2x + 8$ $[y =]\ x^2 - 5x + 9$, $[y =] -x^2 - x - 3$ ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre las gráficas? Muestra un ejemplo donde se cumplan estas semejanzas. ¿Qué pasa con las raíces en estos casos? ¿Por qué en los ejercicios anteriores tenía dos y ahora ninguna?	Siguiendo la lógica de iniciar con gráficas con dos raíces, luego con una raíz, que espera que el estudiante sea capaz de identificar que ahora las gráficas presentadas corresponden a polinomios de grado dos sin raíces reales, es decir, sin cruces con el eje x. Y que el estudiante logre recrear algun ejemplo donde esto se cumpla. Así también se espera que el estudiante intente prolongar las "ramas" de la parábola de cierta forma para que cruce con el eje x, o hacerle algún tipo de prolongación y/o modificación para que cruce con el eje x.
2.1.4 ¿Cuántas veces puede cruzar el eje x las curvas de grado dos? ¿Es posible que no lo corte más de dos? ¿Cuántas raíces va a tener una parábola en total? ¿Cómo se relaciona este número con el grado del exponente?	Se espera que la respues del estudiante sea "dos veces, una vez, o ninguna". Esto siguiendo las reflexiones del estudiante obtenidas a partir del análisis de las gráficas presentadas anteriormente. Así también, que el grado de la expresión determine el número máximo de raíces que puede tener la curva.
2.2.1 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado dos con raíz positiva. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la parábola cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga una raíz positiva?, Además ¿Qué forma puede tener para que tenga dos raíces distintas positivas?, y repetir las preguntas.	La gráfica que se piensa que el estudiante realizará es una parábola con concavidad positiva y dos raíces reales distintas entre sí, una positiva y otra negativa. Al cuestionarle como es el comportamiento de la curva cerca de la intersección con el eje y se espera que intente mover la curva de manera tal que cambie el comportamiento, pero al hacer esto cuestionar al estudiante si se mantienen las demás caracterísitcas de la parábola que había construido como raíces, concavidad y amplitud.
2.2.2 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado dos con raíz negativa. Preguntar: ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la parábola cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Es la única forma que	La gráfica que se piensa que el estudiante realizará es una parábola con concavidad positiva y dos raíces reales distintas entre sí, las dos negativas. Al cuestionarle como es el comportamiento de la curva cerca de la intersección con el eje y se espera que intente mover la curva de manera tal que cambie el comportamiento, pero al hacer esto cuestionar al estudiante si se mantienen las demás caracterísitcas de la parábola que había construido como raíces, concavidad y amplitud. También se espera que el estudiante cuando se le pida graficar nuevas curvas con raíces negativas solo desplace la construida sobre el eje x.

puede tener la curva que cumpla que tenga una raíz positiva?, Además ¿Qué forma puede tener para que tenga dos raíces distintas negativas?, y repetir las preguntas.	
2.2.3 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado dos con una raíz positiva y una negativa Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la parábola cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga una raíz positiva y otra negativa?, Además ¿Qué forma puede tener para que tenga dos raíces distintas?, y repetir las preguntas. ¿Se puede que no tenga ninguna raíz real?	Se presume que el estudiante a este punto ya pueda graficar distintas parábolas con las características solicitadas. Primero graficando una parábola con concavida positiva y dos raíces distintas ente sí, una positiva y otra negativa. Después una con las mismas raíces pero concavidad negativa. Así también, se espera que al preguntarle sobre el comportamiento de la curva cerca de la intersección con el eje y el estudiante ya no tarde tanto en formular su respuesta.
2.2.4 Dados los casos estudiados anteriormente, ¿qué reflexiones puedes mencionar acerca de la relación signo – raíz?	Se espera que el estudiante logre identificar ciertas relaciones entre el signo de las raíces y el signo de elementos como concavidad, ordenada al origen y la linealidad del polinomio.
2.3.1 Dada la gráfica de $[y =]\ x^2 - 8x + 12$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) $[y =]\ x^2 - 13x + 12$, b) $[y =]\ x^2 - 8x + 12$, y c) $[y =]\ x^2 - 7x + 12$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el tipo de concavidad de la parábola en la gráfica, y en las expresiones algebraicas?, ¿Y la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, ¿Cómo es la forma en la que cruza el eje y, *i.e.*, qué tan inclinado está?	Al presentarle las expresiones algebraicas al estudiante se espera que recurra al valor del término independiente para discernir cuál es la correcta. Sin embargo, las tres tienen el mismo valor, es decir, tienen ordenada al origen 12. Además de las tres tener concavidad positiva. Por lo que tendrá que recurrir a una estrategia distinta. A través del diálogo de que elementos puede identificar al tacto y como los puede relacionar para encontrar algo que le sea útil al escoger cual expresión algebraica corresponde a la gráfica presentada.Se espera que tarde en usar las raíces en forma de suma para poder identificar el coeficiente del término lineal o incluso que no logre hacerlo de esa forma en un primer acercamiento.
2.3.2 Dada la gráfica de $[y =]\ x^2 - 8x + 16$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) $[y =]\ x^2 - 17x + 12$, b) $[y =]\ x^2 - 10x + 12$, y c) $[y =]\ x^2 - 8x + 12$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el tipo	Siguiendo la reflexión de que elementos identificables al tacto puede usar el estudiante para discernir cual es la expresión algebraica que corresponde se presenta otro ejemplo. En esta ocasión se espera que el estudiante logre identificar con mayor facilidad las intersecciones de la curva con los ejes xy, y utilizarlos de forma tal que pueda escoger una de las tres expresiones presentadas en Braille. Ya sea esto a traves de la suma, o de alguna otra forma de relacionar los puntos singulares de manera tal que le sea adecuado para justificar su respuesta.

de concavidad de la parábola en la gráfica, y en las expresiones algebraicas?, ¿Y la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, ¿Cómo es la forma en la que cruza el eje y, *i.e.*, qué tan inclinado está?, ¿Las raíces te dan más información de cómo es la ordenada al origen? ¿Crees que las raíces te puedan dar más información sobre la parábola y cómo elegir una expresión de las opciones?	
2.3.3 Dada la gráfica de $[y =]\ x^2 - 12x + 20$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) $[y =]\ x^2 - 21x + 20$, b) $[y =]\ x^2 - 12x + 20$, y c) $[y =]\ x^2 - 9x + 20$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el tipo de concavidad de la parábola en la gráfica, y en las expresiones algebraicas?, ¿Y la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, ¿Cómo es la forma en la que cruza el eje y, *i.e.*, qué tan inclinado está?, ¿Las raíces te dan más información de cómo es la ordenada al origen? ¿Crees que las raíces te puedan dar más información sobre la parábola y cómo elegir una expresión de las opciones?	Para cerrar las ideas que el estudiante haya construido hasta el momento se presenta un tercer ejemplo en el cual tiene que escoger la expresión algebraica correspondiente a la gráfica presentada. Se presume que el estudiante utilice la misma estragia empleada hasta el momento.
2.3.4 Dados los ejemplos anteriores, ¿Qué reflexiones puedes mencionar acerca del valor de las raíces y la forma de los coeficientes del polinomio de grado dos? ¿Cuál crees que pueda ser la relación común de las raíces distintas y de los coeficientes? ¿Crees que sea la misma con los casos donde se tiene dos raíces negativas o una positiva y una negativa? (Intentalo)	Se espera que el estudiante sea capaz de verbalizar la estrategia empleada hasta ese momento. Y que intente ponerla a prueba con dos raíces negativas. En caso de que la estrategia empleada no sea adecuada para dar solución a los nuevo ejemplos presentados que reformule y trate de encontrar una nueva forma de relacionar los puntos singulares.
3.1.1 Dadas las gráficas de las cúbicas $[y =]\ x^3 + 3$, $[y =]\ -x^3 - 2x^2 + x - 4$, $[y =]\ 2x^3 + 3x^2 + 4$, $[y =]\ -x^3 + 2x + 5$ ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las cúbicas? Intenta mostrar un ejemplo que muestre esto.	Dadas diversas gráficas de polinomios cúbicos con una sola raíz real se espera que el estudiante logre identificar que es la característica que tienen en común. Así también que use estos ejemplos como referencia para construir una nueva gráfica.
3.1.2 Dadas las gráficas de las cúbicas $[y =]\ x^3$, $[y =]\ -(x-3)^3$, $[y =]\ (x+5)^3$, $[y =]\ -(x-1)^3$ ¿Qué parecidos y diferencias encuentras entre las curvas?, ¿Cómo se parece o se diferencia la forma en la que tocan al	Teniendo diversas gráficas de polinomios cúbicos con una raíz real triple se espera que el estudiante logre identificar que es la característica que tienen en común. Se espera que el estudiante logre identificar que la forma de cruzar el eje x es distinta que la forma en la que cruza la curva en los ejemplos

eje x de los ejemplos anteriores? Construye una curva de grado tres que cumpla con esta característica.	de la pregunta 3.1.1. Así también que use estos ejemplos como referencia para construir una nueva gráfica.
3.1.3 Dadas las gráficas de las cúbicas $[y =]\ x^3 + 3x^2 - 1$, $[y =] -x^3 + 2x$, $[y =]\ 5x^3 + 3x^2 - 6x$, $[y =] -x^3 + 2x^2 - 1$. ¿Qué similitudes y diferencias logras encontrar entre las curvas? Construye un ejemplo donde se mantengan esas similitudes.	Se espera que el estudiante logre identificar que la característica en común las gráficas presentadas en este ejercicio es que tiene tres raíces reales distintas entre sí. Y usando las gráficas presentadas como referencia construya una nueva con tres raíces reales distintas entre sí.
3.1.4 Dadas las gráficas de las cúbicas $[y =]\ (x^2 - 4)(x - 2)$, $[y =] -x^3 - 2x^2$ $[y =] -2x^3 - 3x^2$, $[y =] -(x^2 - 9)(x - 3)$ ¿Qué tienen en común y en que se diferencian estas curvas? ¿Cómo se parece o se diferencia la forma en la que tocan al eje x de los ejemplos anteriores? Muestra un caso distinto a los ya presentados donde se cumpla este tipo de "contacto".	Se le presentan diversas gráficas con una raíz real simple y una raíz real doble. Se espera que el estudiante diga que únicamente tiene dos raíces. Una similar a la forma en la que cruzan las rectas el eje x y otra como cruzan ciertas parábolas al mismo eje. Así también, que use los ejemplos presentados como referente para construir una nueva gráfica.
3.1.5 ¿Cuántas veces puede cruzar el eje x una cúbica? ¿Es posible que no lo corte más de tres? ¿Cuántas raíces va a tener una cúbica en total? ¿Cómo se relaciona este número con el grado del exponente?	Se espera que el estudiante mencione que las cúbicas pueden cruzar el eje tres, dos o una vez el eje x. Y que el grado indica el número máximo de raíces reales que puede tener la gráfica.
3.2.1 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con tres raíces negativas. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la cúbica cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las cúbicas y de las parábolas? ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga raíces negativas?	Se le pide al estudiante que grafique una cúbica con tres raíces negativas, se presume que construya una con tres raíces reales distintas entre sí. Se espera que el estudiante de argumentos como concavidad, intersección con el eje x y y, pendiente. Así también, que intente modificar la curva al cuestionarle si es la única forma en la que ese tipo de comportamientos es posible.
3.2.2 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con dos raíces negativas. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la cúbica cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las cúbicas y de las	Al intentar graficar una cúbica con dos raíces negativas se espera que el estudiante esboce una curva con dos negativas simples y distintas entre sí y una simple positiva. Se espera que el estudiante de argumentos como concavidad, intersección con el eje x y y, pendiente. Así también, que intente modificar la curva al cuestionarle si es la única forma en la que ese tipo de comportamientos es posible.

parábolas? ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga dos raíces negativas?	
3.2.3 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con una raíz negativa. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la cúbica cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las cúbicas y de las parábolas? ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga una raíz negativa?	Se espera que la grafica que proponga tenga una raíz real simple negativa y otras dos simples positivas. También que modifique la curva sin alterar las raíces para que el valor donde intersecta el eje y sea negativo.
3.2.4 Pedir al estudiante que grafique un polinomio de grado tres con tres raíces reales positivas. Preguntar ¿Cómo es?, ¿Cuál es el valor de la curva donde intersecta el eje y?, ¿Cómo es la forma de la cúbica cerca del valor donde intersecta con el eje y?, ¿se puede que sea de otra forma?, ¿Es posible que sea negativo el valor donde corta el eje y?, ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las cúbicas y de las parábolas? ¿Es la única forma que puede tener la curva que cumpla que tenga raíces positivas?	Siguiendo la reflexión sobre las raíces, la nueva curva que proponga se espera que tenga tres raíces reales distintas entre sí en primera instancia. Luego alguna con cierta multiplicidad y que varie el signo del término principal, es decir si es creciente o decreciente la curva.
3.2.5 Dados los casos estudiados anteriormente, ¿qué reflexiones puedes mencionar acerca de la relación signo – raíz?	Se espera que el estudiante logre identificar ciertas relaciones entre el signo de las raíces y el signo de elementos como concavidad, ordenada al origen y la linealidad del polinomio.
3.3.1 Dada la gráfica de $[y =]\ x^3 - 6x^2 + 8x$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) $[y =]\ x^3 - 9x^2 + 8x$, b) $[y =]\ x^3 + 2x^2 + 10x$, y c) $[y =]\ x^3 - 6x^2 + 8x$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica?, ¿Cuál es la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, Recordando un poco sobre las relaciones que vimos en los polinomios	Al presentarle las expresiones algebraicas se espera que recurra a la estrategia empleada en los ejercicios en la sección de las parábolas. Es decir, identificar las intersecciones con los ejes xy y tratar de relacionarlas de manera tan que pueda discernir entre las opciones planteadas.

de grado dos, ¿Cómo podrías ayudarte de esas ideas en este caso?	
3.3.2 Dada la gráfica de [$y =$] $x^3 - 12x^2 + 44x - 48$, pedir al estudiante que elija la expresión algebraica que describe el comportamiento de la gráfica entre las opciones a) [$y =$] $x^3 - 12x^2 + 44x - 48$, b) [$y =$] $x^3 - 27x^2 + 74x - 48$, y c) [$y =$] $x^3 - 13x^2 + 46x - 48$. Cuestionar ¿Qué elementos te permiten justificar tu elección? ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica?, ¿Cuál es la ordenada al origen?, ¿Cuáles son sus raíces?, Recordando un poco sobre las relaciones que vimos en el ejemplo anterior, ¿Cómo podrías ayudarte de esas ideas en este caso?	Se le muestra un ejemplo más donde el valor de la ordenada al origen es distinta de cero. Se espera que con los ejemplos ya analizados el estudiante recurra a la estrategia que le haya funcionado hasta ahora para escoger cual expresión algebraica corresponde a la gráfica presentada.
3.3.3 Dados los ejemplos anteriores, ¿Qué reflexiones puedes mencionar acerca del valor de las raíces y la forma de los coeficientes del polinomio de grado tres?	Se espera que el estudiante logre verbalizar la estrategia final que haya utilizado para encontrar relación entre las raíces y los coeficientes del polinomio de grado 3 y 2.

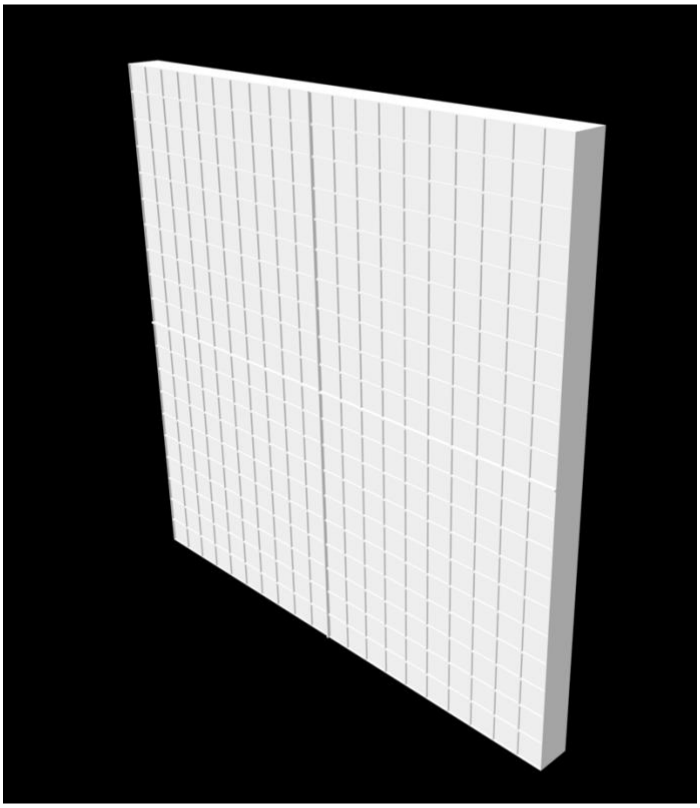
III. Diseño del geoplano

El geoplano es una pieza impresa en 3D de medidas 30cm x 30 cm x 2 cm en plástico PLA blanco, con el cuadriculado impreso encima de color verde, y encima de esto los ejes en color negro. La distinción de colores y relieve es para que fuera distinguible al tacto y fuera funcional además para personas con baja visión[16]. Las medidas del cuadriculado es de 1.5 cm por lado[17]. En la Figura II.1 se presentan los detalles del geoplano, la Figura II.2 el diseño del geoplano utilizado para su impresión y en la Figura II.3 fotografías del mismo ya impreso.

Figura III.1 *Detalles del geoplano*

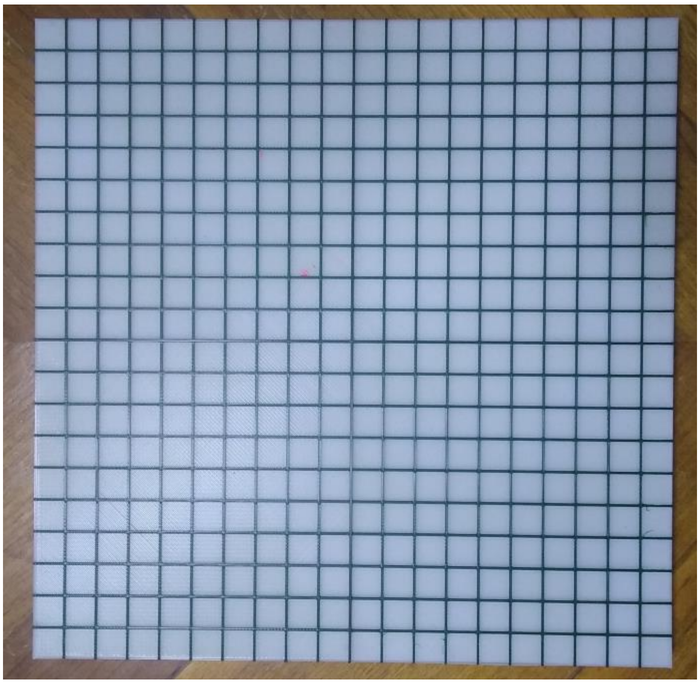
Elige el Material	Plastico PLA	Item price
Elige el color	Blanco	981.29mxn
Cantidad de piezas solicitadas	1	Unit price
Elige el grosor de capa	Borrador 290 µm	
Tiempo de producción	Estandar 5 dias habiles	
Bounding box	300mm x 300mm x 20mm	

Figura III.2 *Diseño del geoplano*



[16] Se recomienda la elección de otros colores para las personas con baja visión. El color verde y negro no fueron tan distinguibles a la vista.
[17] Se hicieron pruebas anteriormente con un cuadriculado de 1cm por lado y resultaba complejo para los usuarios la manipulación del geoplano.

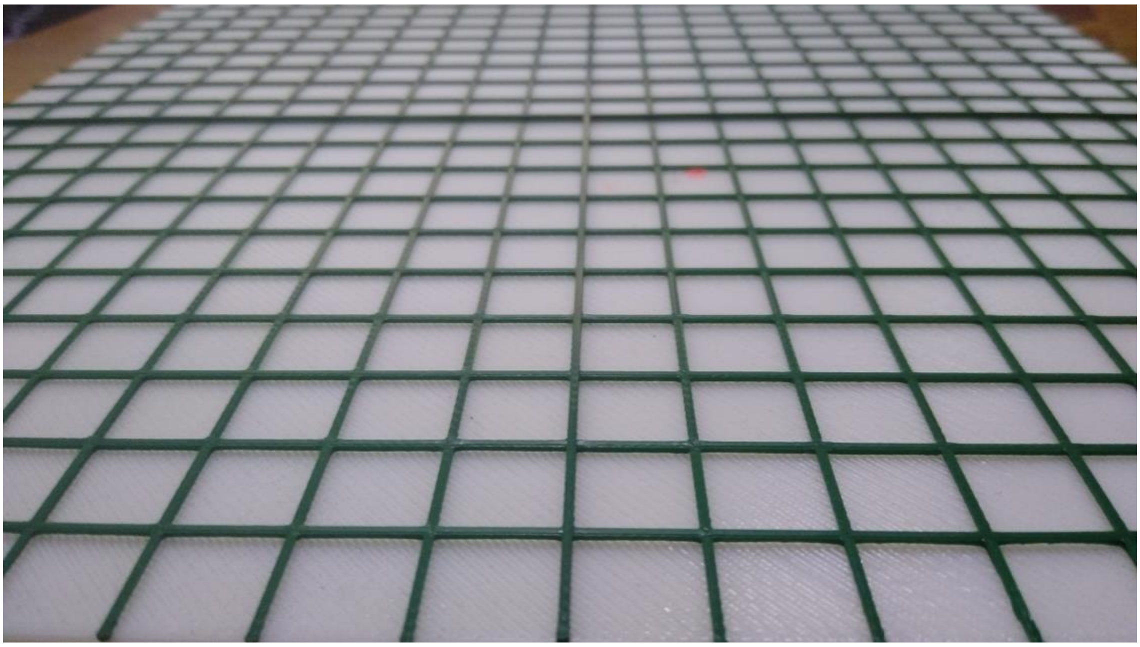
Figura III.3 *Imágenes del geoplano*



Vista frontal

Vista lateral

Vista posterior



Vista de cerca al relieve del cuadriculado y ejes

IV. Quién es Jair

Nombre del Informante: Jair I. Saucedo H.

Edad: 20 años (al momento de la implementación)

Ocupación: Estudiante de la licenciatura en Música de la Universidad Autónoma de Guanajuato y músico en una banda

Lugar de origen: Guanajuato, México

Diagnóstico médico: Retinoblastoma congénita[18]

Tipo de discapacidad visual: Persona ciega

Tiempo de no llevar clase de matemáticas: 3 años

Opinión sobre las matemáticas: Cree que si la gente supiera más matemática o más cálculo tendrían mejor calidad de vida porque tendrían mejor conocimiento del dinero y de también cuantos elementos tienen y como dividirlos. Puede pasar eso o puede pasar lo contrario, que alguien se aproveche de los demás sabiendo de cálculo se puede quedar con más cantidad. Él cree que conocer las matemáticas le ha hecho ser más consciente de todo lo que tiene en cuanto a material y eso.[19]

EL INFORMANTE DIO AUTORIZACIÓN DE USAR SU INFORMACIÓN CON FINES ACADÉMICOS (la transcripción de su autorización se encuentra en la transcripción de la situación exploratoria)

---

[18] El retinoblastoma es el tumor intraocular más frecuente en la infancia; característicamente agresivo, afecta inicialmente al globo ocular, con extensión posterior al cráneo y al sistema nervioso central a través del nervio óptico, la órbita y la diseminación metastásica a todo el cuerpo excluyendo los pulmones. Dado la agresividad del diagnóstico es usual la extirpación de los globos oculares para evitar la metastasis (Sachetto, Lustrusa & Miyuki, 2002).

Sachetto, A., Lustrusa, S. & Miyuki, R. (2002). Congenital retinoblastoma: report of a case. *Arquivos Brasileiros de Oftalmologia*, 65, 571-573.

[19] Recuperado de una comunicación personal.

V. Diseño del diagnóstico

Momento	Intencionalidad	Pregunta	Intencionalidad	Origen
1. Grado uno.	Conocer las estrategias del estudiante al trabajar con ecuaciones/polinomios de grado uno.	1. Resolver la ecuación $15t - 7 = 37$	Conocer las estrategias que el estudiante usa al resolver una ecuación lineal. Se cambia la incógnita "usual" x, por la incógnita t, esperando que el cambio de literal genere algún tipo de conflicto que movilice sus conocimientos previos.	*Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry* de Swokowski and Cole (2010).
		2. Gráfica el polinomio $y = -2x + 4$.	Identificar las estrategias que el alumno usa al momento de graficar una recta, *i.e.*, si tabula, si usa argumentos como pendiente y ordenada al origen, etcétera. Se espera que recurra a la tabulación.	*Álgebra* de Baldor (1997).
		3. ¿Qué recuerdas de las rectas?	Preguntar si tiene algún otro conocimiento previo del que sea consciente sobre las rectas, polinomios de grado uno, ecuaciones lineales.	–
2. Grado dos.	Conocer las estrategias del estudiante al trabajar con ecuaciones/polinomios de grado dos.	4. Resolver la ecuación $y^2 + 7y + 12 = 0$	Conocer las estrategias que el estudiante usa al resolver una ecuación cuadrática. Se cambia la incógnita "usual" x, por la incógnita y, esperando que el cambio de literal genere algún tipo de conflicto que movilice sus conocimientos previos. Se espera que utilice la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.	*Álgebra* de Jiménez (2011).
		5. Factorizar la expresión $x^2 + 8x + 15$	Conocer las estrategias que emplea el estudiante al factorizar una ecuación de segundo grado. Se espera que el estudiante use la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado o las fórmulas de Cardano – Viéte para encontrar la expresión adecuada.	*Álgebra* de Jiménez (2011).
		6. Gráfica el polinomio $y = \frac{1}{4}x^2 + 4$.	Identificar las estrategias que el alumno usa al momento de graficar una cuadrática, *i.e.*, si tabula, si usa argumentos como concavidad y ordenada al origen, etcétera. Se espera que recurra a la tabulación.	*Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry* de Swokowski

				and Cole (2010).
		7. ¿Qué recuerdas de las parábolas?	Preguntar si tiene algún otro conocimiento previo del que sea consciente sobre las parábolas, polinomios de grado dos, ecuaciones cuadráticas.	–
3. Grado tres.	Conocer las estrategias del estudiante al trabajar con ecuaciones/polinomios de grado tres.	8. ¿Qué recuerdas de las cúbicas?	Preguntar si tiene algún conocimiento previo del que sea consciente sobre las cúbicas, polinomios de grado tres, ecuaciones cúbicas. Se espera que no haya una gran variedad de argumentos, significados y/o procedimientos dado que las ecuaciones cúbicas difícilmente se ven en nivel medio superior.	–

VI. Transcripción de la implementación del diagnóstico

Participantes: Jair Hernández (estudiante con discapacidad visual) y Abraham Moreno (investigador).
Contextualización de la sesión: Como parte del levantamiento de datos empíricos de la investigación sobre la interacción de estudiantes con discapacidad visual con el conocimiento matemático relativo a las raíces de polinomios de grado 1 a 3 se acordó previamente vía Messenger con Jair Hernández una sesión diagnóstica a través de Zoom el lunes 12 de abril de 2021 a las 14:00 horas.

Notación	**Significado**
A	Abreviatura usada para identificar las intervenciones del investigador.
J	Abreviatura usada para identificar las intervenciones del estudiante con discapacidad visual.
Guion al final de una oración (–)	Interrupción que no permitió finalizar la oración.
Dos palabras unidas por un guion corto (palabra_1-palabra_2)	Cuando el hablante se corrige a sí mismo rápidamente.
Tres puntos (...)	Silencio mayor a dos segundos.
Tres puntos entre corchetes cuadrados ([...])	Se pierde el audio.
Descripción entre corchetes cuadrados ([descripción])	Descripción escrita de una gesticulación que se haya hecho.
Números entre llaves ({00:00})	Segundo del vídeo en el que comienza a hablar acompañado de gesticulaciones.
*	Inicio de la discusión acerca de las rectas.
**	Inicio de la discusión acerca de las parábolas.
***	Inicio de la discusión acerca de las cúbicas.

A: Hola Jair, ¿Cómo estás?
J: Hola, hola. Bien, ¿y tú?
A: También bien. Hace mucho que no coincidíamos.
J: Sí, tiene mucho tiempo. ¿Qué tal, cómo te ha ido en tu escuela? Bueno, ¿estás en el doctorado o en la maestría? Ya no recuerdo.
A: Eeeh, finalizando la maestría. A ver si se puede continuar con el doctorado.
J: Ah, ok. No, pues qué padre.
A: ¿Y tú qué tal como vas con música?
J: Bien, es más cansado de lo que creí, pero hasta ahorita me sigue gustando todavía.
A: ¿Qué materias ves?
J: Es teoría, que es pues leer la-las notas. Todo eso. Eeeehm, coro, piano e historia.
A: Se oye cool lo de piano.
J: Sí, pues todas las materias están padres, pero algunas sí son pesadas.
*A: Sí, pues como todo. Ya este nivel de universidad es más complicado –
J: Te iba a decir que las preguntas o ¿con qué empezamos?
A: Sí, eso. Pues primero agradecerte y lo segundo explicarte mas o menos como está la onda. Ahorita solo te voy a hacer unas cinco-seis preguntas. Igual eh, si no tienes algo

con que graficar ahorita nomás que me cuentes como lo harías. No es necesario que me muestres la gráfica o así. Sino que me cuentes tus ideas.
J: Sí.
A: Como te dije, no es necesario que me des la respuesta tal cual. Lo que estoy buscando es de que te acuerdas, qué procedimientos harías, cómo lo harías, ese tipo de cosas más como un diagnóstico que a mí me ayuda a entender desde donde estamos iniciando–
J: Sí
A: Igual, de todos modos "la clase chida" no está pensada en fórmulas. Es más la interacción con los geoplanos que se van a ir construyendo las cosas y–
J: mhjm
A: y ya. Entonces si no te acuerdas o "no sé" es una respuesta totalmente–
J: valida
A: valida. No te preocupes por eso. Bueno, si te doy una ecuación, por ejemplo $15t - 7 = 37$ ¿Cuánto valdría *t?*
J: Hm, *15t*–
A: Ajam...
J: menos 7... a ver...
A: Igual si puedes pensar en voz alta también me ayudaría.
J: Sí. Ehmm... Bueno tú me corriges porque me da pena, pero bueno. Es *15t*, el 15 pasa ¿no?
A: ¿Cómo pasa?
J: Pasa al lado de la-del 37.
A: Ajam, ¿Cómo?
J: Ehmm, menos 15. O sea, sí. Quedaría 37, 37 menos 15. ¿Sí?
A: Ok ¿Qué más?
J: Creo que, no me acuerdo-no recuerdo si... si se hace la operación del 37 meno 15 o se hace antes lo del 7. Hmm... Pero creo que se resta primero. Bueno, me parece más lógico eso...
A: ¿Cuánto te quedaría entonces?
J: Pues quedaría, hmm, veinti... 22, ¿no?
A: Ajam
J: Entonces quedaría *t menos 7 igual a 22*
A: Sí, pero ¿qué más?
J: Ehmm, perdón. Es que hace mucho tiempo que no hago este tipo de matemáticas. Eh.. Entonces el menos 7 ahora pasaría sumando ¿no?-sumando. Quedaría *t* igual a 22 más 7. Entonces, pues, sería hmm, ¿29?
A: Entonces ¿*t* vale 29?
J: *t* igual a 29, creo.
A: No, sí. En serio no te preocupes si está bien o mal. O sea, realmente no me interesa el número que obtienes, sino el procedimiento. Entonces, neta no te disculpes. Tampoco es como que te vaya a reprobar o algo.
J: ¿Mas o menos o...?
A: No, sí. Sí, o sea. Nomás es como antecedente. Te digo, en "la chida" no vamos a ocupar fórmulas.
J: sí, sí. Las ecuaciones.
A: Entonces–
J: Por cierto, son ecuaciones... perdón, perdón.
A: No, sigue. Ecuaciones ¿qué?
J: Son ecuaciones, este.. ¿Cómo se llama? ¿Ecuaciones lineales todavía?
A: vamos a ver de varios tipos
J: Bueno.
A: Ahora, si te doy una expresión y te pido que la grafiques que sería $y = -2x + 4$. ¿cómo le harías?
J: Ajam. ¿cuál es la expresión?

A: $-2x + 4$ ¿cómo graficarías eso?
J: Ok… Creo que eso sí no me acuerdo nada de las gráficas. Hm… sí, de eso no recuerdo bien… vale. No pasa nada.
A: Y en general, ¿qué recuerdas de las gráficas, de las rectas, de ecuaciones lineales, de todo eso?
J: Bueno, sí. Bueno, de gráficas no-lo que no recuerdo es como, como, o sea como se… […]recuerdo si cuando estabas allá si nos las enseñaste o ya no estaba yo, o no sé la verdad. Pero eso si no recuerdo ni siquiera haberlo visto. O sea, bueno, en la prepa sí, pero no a fondo. Si lo hubiera visto contigo al menos me acordaría un poco como la de la pasada-la pasada fórmula.
A: Sí, sí. Ehm. ¿algo más qué quieras decir de las rectas, de las gráficas en general? O sea, a lo mejor ya no de las gráficas, pero de la ecuación que resolviste hace rato. Otras cosas que a lo mejor no estoy mencionando ahorita, pero se te vienen a la mente.
J: No, pues sólo si me gustaría que me recordaras lo de la gráfica ahorita porque eso si no me acuerdo nada. A lo mejor si lo sé, pero no se, no se que es graficar o no sé.
A: Sí, o sea te digo. La clase "chida" este… es más centrada en gráficas, pero igual no necesitamos bien como recordar bien como se empieza. Estoy pensándola en otra forma, como siendo más progresivo que–
J: Creo que ya me acordé un poco.
A: Ajá, dime…
J: Creo, porque no sé. Pero, creo que en las gráficas, hm, hay, es donde hay como tres-cuatro cuadros, ¿no? O sea, son cuatro cuadros. Y en uno es menos, y el otro son más. De un lado son los números negativos y del otro los números positivos. Y… de arriba no recuerdo bien. O sea, de la parte de arriba no me acuerdo muy bien que se ponía, creo que arriba son los números… no, no, no-no. Ahmm, bueno mejor sólo eso, que de un lado van los números negativos y del otro los positivos.
A: Sí, ya pues con eso la armamos que te acuerdes de esto, de los cuatro cuadros, que de un lado están los positivos, que del otro están los negativos y sí son las ideas con las que mas o menos vamos a empezar a trabajar.
J: A ok, ok. Entonces no estoy tan pérdido.
A: No, no. Para nada–
J: Entonces, no es que sólo te iba a preguntar que había de diferencia entre arriba y abajo porque eso si se me quedó como de curiosidad.
A: Ehmm… te digo al final de las preguntas, ¿va?
J: Sí.
**A: Bueno, ahora sí te doy otra ecuación, pero ahora es $y^2 + 7y + 12 = 0$ ¿cuánto vale y?
J: ¿cuánto vale qué? Es que se te entrecortó un poco
A: y. Perdón, $y^2 + 7y + 12 = 0$.
J: Ok, y^2… Creo que sería… bueno comienzo pasando la y^2 como menos y^2. Creo… hm a ver… me tengo que acordar… ahmm… ahmm… creo que se empieza por los números, ¿no? en este tipo de ecuaciones.
A: ¿cuáles serían esos números?
J: El, buenos los… era y^2… aja–
A: más $7y + 12 = 0$
J: más 2, ¿se empieza por el 2, no?–
A: 12
J: 12, ah, se empieza por el ¿cómo se le llama? Es la literal y la otra cosa, bueno, por el número creo. Entonces, sería igual a 0 menos 12. Ah, no recuerdo.
A: ¿Eso cuánto te da?
J: Pues, menos 11, creo… Igual a menos 11.
A: vale. ¿Y luego qué más harías?
J: Ahmm, y^2 más $7y$. Creo que ahora pasa… el 7 restando, menos 7.
A: Entonces, menos sie-menos 11.

J: Menos 11 menos 7. [risas] Ay, no manches. Creo que sí estoy muy pérdido. Ahmm… menos 18. Y quedan las literales ahí solas… Ah, queda $y^2 + y$, ¿no?
A: Ajá–
J: Y no recuerdo bien si las letras también se pasaban o… o que onda. En esa parte creo que me voy a atorar un poco. Ahmmm… pasaba menos, bueno primero creo que pasa la y^2, que sería como $2y$ ¿no?
A: ¿Positivo o negativo?
J: Pasaría, pues negativo, creo. Si, sí pasa al otro lado sí. Si se queda ahí mismo es mas $2y$. Es que no recuerdo bien, pero, este, tiene que pasar ¿no? Creo que sí. Entonces, si pasa queda menos $2y$.
A: Entonces, te queda menos 18 menos. Entonces, te queda menos 18 menos $2y$. Hasta donde te voy siguiendo.
J: Ajá, entonces queda e igual a menos 18 menos 2y. Ahmm… creo que… creo que ya queda así. O no sé. No me acuerdo.
A: Vale, sí. Si crees que esa ya es la respuesta–
J: Se tiene que resolver.
A: Ya llegaste a un "y igual a algo".
J: Y […] la verdad no recuerdo muy bien. No recuerdo.
A: Sí, no pasa nada. Ok… Ahora sí te digo que grafiques la expresión $y = \frac{1}{4}x^2 + 4$ ¿cómo le harías?
J: y, ajam…
A: ¿cómo le harías? $y = \frac{1}{4}x^2 + 4$.
J: $\frac{1}{4}x^2 + 4$… ahmm… creo que ya recordé, pero no sé. Creo que las y van arriban y las x abajo. No sé, no me acuerdo muy bien, pero creo que sí… Pero bueno, el más 4 iría partiendo del cero a la derecha… Ahmm, o no sé, creo que las fracciones también podrían ir arriba, y… $\frac{1}{4}x$… no inventes, mejor esa, esa la paso.
A: Sí, no pasa nada. Ahora en general que recuerdas de-de las parábolas, de las ecuaciones de grado dos, cuadráticas.
J: Ah, sí. Eso sí lo recuerdo con más… esos son figuras ¿no? bueno como tipos de gráfica.
A: Ajá, sí. Muy bien.
J: Y… la parábola, hmm, es como una, no sé si sea esta forma. Así como [mueve el dedo índice de su mano izquierda en forma de U] {31:08} Que sube y que luego baja. ¿O la estoy confundiendo con otra cosa?
A: No, sí es esa.
J: Ok. ¿Y qué otra me decías?
A: Ecuaciones cuadráticas
J: Ah, sí. Eso es lo malo de… este, ehmm… no me-no se. No me acuerdo muy bien.
***A: Vale, no pasa nada, en serio. Y ya, la última: de las cúbicas ¿qué recuerdas? Ecuaciones de grado tres, cubicas, gráficas–
J: [risas] Ay, no. Creo que de esa sí no sé nada…
A: Sí, te digo no pasa nada. En realidad, si no quieres decir como algo más de las rectas, de las parábolas, cúbicas ya te puedo ir explicando como un poquito. Pero no sé si quieras como agregar un poco–
J: Agregar un poco. Pues, pues es que recuerdo muy poco de gráficas porque casi siempre en prepanet, sobretodo, ehmm… las tutoras no te-bueno no te ayudaban mucho en ese sentido. O sea, si veían que había una gráfica y así y en lugar de explicartela hacían lo más fácil ¿no? que es contestarla y ya. Pues sí, ellas mismas o ellos mismos. Entonces, pues creo que eso es algo que me afectó a mí. A lo mejor con mis otros compañeros fue diferente, pero, eso a mí no me ayudó a comprenderlas.
A: Sí, eso era lo malo de algunos tutores de ahí de prepanet que llegaban y les hacían las tareas.

J: Pero a lo mejor si ahorita me dices el concepto lo recuerdo un poco. O sea, voy a lo mejor te voy a decir “ah, a lo mejor sí lo vi”, “si recuerdo que lo vi”, porque la verdad me acuerdo de algunos conceptos. Por ejemplo, de la parábola de eso me acuerdo porque hay algunas formas musicales. O sea, unas estructuras de canciones o así estructuras de piezas que son así como que los músicos quieren hacer algo así [mueve el dedo índice de su mano izquierda en forma de U] {33:40} como que va subiendo y bajando, cosas más de vanguardia-de la vanguardia. Entonces, por eso lo recuerdo un poco y también porque pues en jabalina. Cuando practicaba jabalina. Me decían que tenía que ser una parábola. O sea, que-creo que solo me falta aplicar todos los demás conceptos que tengo en la mente y que a lo mejor no puedo expresar.
A: Sí, tienes-recuerdas un montón de cosas realmente. Yo sé que si le pregunto a cualquiera que haya salido de la prepa hace uno o dos años y no este estudiando nada de matemáticas se va a acordar de mucho menos que esto. Entonces, no te sientas mal ni te preocupes. Y de tu duda de hace rato, de las líneas que mencionabas. No sé si te acuerdas de una que era como acostada y otra que era como parada
J: Formando como una cruz ¿no? Bueno, una especie de cruz.
A: Ajá, bueno la acostada o la horizontal es el eje x. Esa es nuestra variable independiente, esa puede cambiar como quiera. Y la variable dependiente era la y. Y entonces al ir jugando con esas expresiones son la forma de esta parábola que recuerdas–
J: Ok, entonces por ejemplo si hay una menos x más una y. O no sé, algo así. La gráfica sería que la x-Bueno no dije un número, pero supongamos que menos $5x$ ahmm, la x iría a la izquierda, cinco puntos a la izquierda. Bueno, no sé como decirlo, si, ¿se movería cinco puntos a la izquierda? Y la y ahmm, dependería de la x ¿o qué onda?
A: Sí, eso es lo que vamos a ver en-lo que vamos a ir viendo. Pero te digo, va a empezar como muy tranquilo, más relajado. Y no necesariamente de un inicio que ya me digas la expresión. Si no, analizar las formas, como se comportan, qué está pasando y luego ya tratar de ir avanzando en el nivel de–
J: ¿Y las cúbicas? Esas que mencionaste, bueno como–
A: Las cúbicas… este, ijole… Tiene sentido que no las recuerdes porque según yo tu plan de estudios, porque según yo acabaste antes, no las mencioba, pero luego ves que a Naza y a Isaac se los cambiaron, el plan de estudios en prepaNet. En ellos ya venía.
J: Nosotros nomas llegamos a la-llegamos a las cua-cuadradas cuadráticas, si ¿no?
A: Sí, y pues tiene como mucho sentido porque en general en muchas prepas, sino es que en la gran mayoría no ven las cúbicas. Entonces era una pregunta para ver si así de pasillo o simplemente para corroborar que no lo habías visto. Las cúbicas… es que no quiero poner palabras antes de, quiero que tú la describas cuando te la presente
J: Ok

VII. Transcripción de la implementación de la situación exploratoria

Participantes: Jair Hernández (estudiante con discapacidad visual), Abraham Moreno (investigador).
Contextualización de la sesión: Como parte del levantamiento de datos empíricos de la investigación sobre la interacción de estudiantes con discapacidad visual con el conocimiento matemático relativo a las raíces de polinomios de grado 1 a 3 se acordó una reunión presencial el día 17 de abril de 2021 a las 14:00 horas en Guanajuato, Guanajuato (con las medidas sanitarias pertinentes). La sesión fue grabada con una cámara de manera frontal y con otra de manera lateral. Además, se grabó audio y hubo captura de imágenes fotográficas, así como la posibilidad al estudiante de hacer anotaciones con regleta y punzón.

Notación	**Significado**
A	Abreviatura usada para identificar las intervenciones del investigador.
J	Abreviatura usada para identificar las intervenciones del estudiante con discapacidad visual.
Guion al final de una oración (–)	Interrupción que no permitió finalizar la oración.
Dos palabras unidas por un guion corto ($palabra_1$-$palabra_2$)	Cuando el hablante se corrige a sí mismo rápidamente.
Tres puntos (…)	Silencio mayor a dos segundos.
Tres puntos entre corchetes cuadrados ([…])	Se pierde el audio.
Descripción entre corchetes cuadrados ([descripción])	Descripción escrita de una gesticulación que se haya hecho.
Números entre llaves ({00:00})	Segundo del vídeo en el que comienza a hablar acompañado de gesticulaciones.
Descripción entre numerales (#descripción#)	Sonido externo que interfiere en el dialogo.
*	Inicio de la discusión acerca de las rectas.
**	Inicio de la discusión acerca de las parábolas.
***	Inicio de la discusión acerca de las cúbicas.
(a)	Inicio de la discusión acerca de la multiplicidad
(b)	Inicio de la discusión acerca de la relación signo – raíz
(c)	Inicio de la discusión acerca de la relación coeficiente – raíz
ÇÇÇ	Inicio del anexo de música propuesto por J

J: Estoy de acuerdo con que me graben, que se use para todo lo necesario respecto a la tesis. Y bueno, ya.
*(a) A: Ok, vale. Te voy a presentar varios geoplanos. Aquí está uno {00:27} [le entrega un geoplano en macocel con la recta $y = -x - 8$] Y tú me vas a ir diciendo que identificas en cada uno. No sé si te acuerdas de lo que estuvimos platicando un poco el lunes.

J: {00:38} [recorre con su mano izquierda la recta de la parte más cercana a él a la más lejana] Supongo que esto es de x ¿no?
A: Ajá. Si tienes alguna duda de qué eje es cual o cosas así que no recuerdes mucho me dices y lo vemos. No es como que todo lo tengas que recordar ya.
J: {00:56} [recorre con la mano derecha el eje x] Este eje es de la x. {00:59} [recorre con su mano derecha el eje y] Y este eje es de la y.
A: Muy bien.
J: {1:02} [Coloca su mano izquierda sobre el cuadrante dos y da un pequeño golpe para señalarlo] Según yo este es un cuadrante A ¿O al reves? {1:07} [Señala con la mano derecha repitiendo el golpe para señalar sobre el cuadrante uno y luego sobre el cuadrante cuatro] Cuadrante A y cuadrante B ¿si no?
A: En realidad es poco usual que se usen las letras, sino los números. Entonces sería {1:19} [toma la mano derecha de J y lo acompaña para señalar el orden de los cuadrantes] uno, dos, tres y cuatro.
J: {1:25} [repite el movimiento por sí solo] uno, dos, tres y cuatro. {1:30} [recorre la recta con ambas manos] Y está es la gráfica ¿no?
A: La de plastilina, sí.
J: {1:36} [señala con su mano derecha la parte de la recta que se encuentra en el cuadrante cuatro] Bueno es que según yo esta x está en positivo. Bueno, de este lado está en positivo y {1:42} [recorre la gráfica de la parte más lejana de él hacia la más cercana y después señala la parte de la gráfica en el cuadrante dos] las y están hacia lo negativo. O sea, tendencia negativa ¿no?
A: Las y positivas ahmm…
J: Ah, es al reves.{1:55} [señala el cuadrante 1] la x positiva está acá y {2:00} [señala el cuadrante dos] y la y positiva está acá.
A: Las y positivas son hacia arriba.
J: {2:05} [recorre el eje y de abajo hacia arriba empezando por el origen] Ah, hacia acá. {2:07} [recorre el eje y de arriba hacia abajo empezando por el origen] Y las y negativas hacia acá.
A: Sí.
J: Ah, ok, ok. Ya entendí. {2:13} [señala con ambas manos la parte de la recta que está en el cuadrante dos] Entonces está y es positiva, ¿no?
A: Sí, en esos valores de y son positivos
J: Y el valor ese sí no sé.
A: Sí, eso ahorita no nos vamos a estar preocupando por lo valores. Por eso sólo tiene los ejes–
J: No tiene como importancia ahorita.
A: Sí, no tiene como cuadritos para que vayas contando ahorita. Ahorita solo las formas más generales que vayas descubriendo.
J: {2:38} [recorre toda la recta empenzando de la parte más cercana a él a la más lejana con la mano izquierda] Sí, pues esto es una gráfica de y y x positivo, ¿no? {2:45} [sigue recorriendo completamente la gráfica con su mano izquierda] ¿Y tiene algún nombre?
A: Ehmm, sí. Pero, ¿a ti a qué te recuerda o qué figura lo asocias de las que conoces?
J: Es como, diagonal ¿no?
A: Ok. Hay más, entonces si me dices “creo que a esta ya no puedo sacarle más jugo” pasamos a otra.
J: {3:15} [recorre la recta completamente con su mano derecha] Pues creo que esta es diagonal, no sé. A lo mejor tiene un nombre más técnico pero no lo recuerdo. Así que si quieres otra.
A: {3:22} [le proporciona el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$]
J: {3:24} [recorre la recta con la mano izquierda del centro del geoplano hacia la izquierda] Igual. Están positivos los dos, ¿no? {3:35} [recorre con ambas manos desde el centro del geoplano hacia los extremos al mismo tiempo, *i.e.*, con la mano derecha del centro hacia la derecha y con la mano izquierda del centro hacia la izquierda] Bueno

eso parece… {3:45} [señala con ambas manos el segmento de la recta que está en el cuadrante dos] esta es y.
A: Sí, esas son las y positivas.
J: {3:48} [señala com ambas manos el segmento de recta que está en el cuadrante cuatro] y la x igual.
A: Por ejemplo, ¿cuántas veces cruza el eje y?
J: {4:00} [recorre con ambas la recta en repetidas ocasionas en el segmento cerca del eje y] ¿sólo una?
A: Ajá. ¿Y el eje x?
J: {4:10} [regresa a analizar hápticamente la recta cerca del centro del geoplano] A ver… {4:12} [recorre la recta cerca del origen con ambas manos haciendo movimientos repetitivos, empezando por el centro y moviendose hacia los extremos un poco y regresando] Este es el cruce… ah, una igual.
A: Ok.
J: {4:20} [recorre con ambas manos el triángulo rectángulo formado por la recta y los ejes xy] Se forma como un ángulo aquí, ¿no?
A: Sí.
J: No se si eso sea importante, pero–
A: Sí, todo lo que tú consideres importante.
J: {4:30} [continua recorriendo el triángulo rectángulo formado por la recta y los ejes con ambas manos] sí, se forma aquí como… no sé, esta me pareció más como casi recta. No sé, cómo qué palabra sería más técnica #sonido de notificación de mensaje en celular#
A: Sí, si para ti es más como una "recta" lo podemos llamar "recta"
J: Voy a silenciar mi–
A: Sí, no pasa nada. Tú tranqui… ¿Con esta ya o te paso otra?
J: Sí, con esta ya.
A: {5:02} [le proporciona el geoplano con la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$ y retira la anterior]
J: {5:05} [hace una exploración rápida con las dos manos sobre la recta] Está es como la otra, pero al reves creo… {5:18} [señala con la mano derecha el segmento de recta que está en el cuadrante tres] La x es ahora negativa {5:20} [recorre dos veces la recta empezando por el lado más cercano a él y terminando en el más lejano con la mano derecha] y la y es positiva, creo. Porque va hacia arriba. Y… ¿cuántas veces cruza? {5:34} [toca con la mano derecha la recta cerca del eje y] pues el eje y una vez, y el eje x una vez igual.
A: Sí. Entonces está hacia arriba ¿y la anterior?
J: … ¿la anterior?
A: Sí, dijiste esta "va hacia arriba". Entonces, ¿la anterior?
J: Ah, ok. Sí. Que era inversa. {5:56} [toca dos veces con su mano derecha el cuadrante cuatro simulando "la trayectoria" de la recta anterior] la x era positiva y {6:00} [toca con su mano derecha el cuadrante dos haciendo un movimiento circular] y la y también era positiva, pero aquí la diferencia es que la x es negativa.
A: Sí, tú velo describiendo. Vamos a ir poco a poco avanzando en esto. No hay respuestas equivocadas {6:21} [le proporciona el geoplano con la recta $y = x + 2$]
J: {6:22} [recorre la recta con ambas manos empezando en los extremos del geoplano yendo hacia el centro. Al finalizar eso con ambas manos toca recorre el segmento de recta que se encuentra en el cuadrante uno] Oh, esta-está más levantada. {6:28} [con la mano derecha toca el segmento de recta que está en el cuadrante tres] y la x, bueno la x es negativa.{6:34} [se inclina un poco sobre la mesa para acercarse al geoplano, con ambas manos toca el segmento de recta que se localiza en el cuadrante uno] y la y sí es positiva. Pero, creo que mucho. Porque muy hacia arriba.
A: ¿Más qué–
J: Sí, más que los otros. {6:45} [recorre con ambas manos el triángulo rectángulo formado por los ejes y la recta] Y pues igual, forma aquí un ángulo y pasa una vez por x y una vez por y {6:50} [con la mano izquierda fija en el centro del geoplano recorre dos

veces con la mano derecha el segmento de recta que está en el cuadrante uno]. Y la… {6:55} [recorre con ambas manos recorre la recta comenzando por el centro y yendo hacia los extremos] es como una diagonal pero, de hecho ahora que recuerdo la otra la otra diagonal primera, la que dije que era una diagonal estaba mas o menos así. Bueno, mas o menos como esto pero al reves ¿no? {7:08} [señala la forma de la recta que está en el geoplano, es decir, un recorrido principalmente a traves de los cuadrantes uno y tres. Posteriormente, señala los cuadrantes dos y cuatro con la mano izquierda y derecha, respectivamente] Entonces sí, creo que es una gráfica que tiende más hacia, que la y tiende más a lo positivo y x a lo negativo.

A: Ok, sí. Vamos bien {7:32} [le pasa el geoplano con la gráfica de $y = -\frac{1}{3}x - 3$]

J: {7:33} [recorre la gráfica con ambas manos comenzando por el centro del geoplano y yendo hacia los extremos] Esta es casi una recta. Casi… {7:42} [señala con la mano derecha el segmento de recta que se encuentra en el cuadrante dos] Este creo yo que es y negativo {7:45} [señala el cuadrante tres con la mano derecha y hace un movimiento de vertical de arriba hacia abajo] ¿O tiene que pasar hasta acá abajo?

A: Hm, ¿las y negativas? Acuerdate las y es–

J: Ah, sí. Sí. {7:56} [señala con la mano izquierda el cuadrante tres mientras hace un moviemiento vertical de arriba hacia abajo] Entonces sí. Tendría que estar hacia acá. {8:03} [toca la parte de la recta que se encuentra más cercana al centro del geoplano. Posteriormente, recorre con la mano izquierda la recta desde el centro del geoplano hasta la derecha] Es una x positiva. Bueno, va hacia acá {8:13} [señala con la mano derecha el segmento de recta que está en el cuadrante dos] igual la y es positiva.

A: Ok, ¿crees que pueda cruzar más de dos veces el eje x?

J: ¿En esta gráfica?

A: Ajá. En todas estas que has estado viendo ahorita

J: En está, ah. Es que sí me surgió una duda porque, por que pues no sé siento-veo que… No sé, creo que estoy confundido porque… {8:44} [señala el cuadrante uno con la mano derecha haciendo un movimiento horizontal de izquierda a derecha de manera reiterativa] o sea al mismo tiempo esta puede ser, todas las x solo en está recta. {8:57} [señala el cuadrante cuatro con la mano izquierda] Y pues casi todas están hacia acá, entonces no sé.

A: ¿Podrías cómo desarrollar un poquito más esa idea?

J: O sea, que tú me dijiste que la x {9:13} [hace con la mano derecha un movimiento horizontal del centro del geoplano hacia la derecha, y luego de regreso hacia la izquierda] solo va hacia acá y hacia acá ¿no? {9:19} [hace con la mano derecha un movimiento vertical desde la parte superior del geoplano hacia la parte inferior de arriba hacia abajo] y las y van hacia acá. Y bueno, hacia arriba y hacia abajo. y veo que, {9:33} [señala el cuadrante dos del geoplano] bueno siento que esto está como tan arriba. No sé, a lo mejor es eso lo que a lo mejor me confundió. Pero, no sé. Igual y no tiene mucho sentido. Mas bien, sólo estoy haciendome bolas.

A: ¿O sea que no hay mucho de la recta hasta arriba del geoplano?

J: Ajá.

A: Ya. ¿No crees que– Bueno, esto es como una representación o una partecita. Si le hacemos “zoom”. O sea ¿podemos agrandar o achicar la gráfica que en algún momento llegue hasta arriba?

J: ¿O sea que ya digamos que–

A: Si la quieres mover, muevela. No pasa nada.

J: {10:07} [toma los extremos de la recta y los mueve de manera tal que quedan en las esquinas superior izquierda e inferior derecha, respectivamente] Que llegue así. O sea, sí se podría ¿no?

A: Sí.

J: Entonces, pues… creo que-creo que me queda, creo que ya ahí quedaría más claro para mí {10:34} [recorre la recta con su mano derecha empezando por el cuadrante dos y terminando en el cuadrante cuatro, *i.e.*, “de arriba hacia abajo”] que esto es y {10:36}

[señala con la mano derecha el cuadrante cuatro deslizando cerca de la recta sus dedos] y esto es x. Pero no sé.
A: Sí, ahorita es exploración. Así que vamos a ver que te acuerdas, cómo lo entiendes. Pero sí podemos hacer eso, ¿no? Que quede, como por ejemplo, esta {10:53} [le acerca el geoplano con la gráfica $-3x + 9$]
J: {10:55} [coloca sus manos sobre el centro del geoplano para comenzar la exploración] ¿Esta es la que sigue?
A: Esta ya la habíamos visto. En esa–
J: Ah, sí. Sí
A: Esa es más a la forma que estabas haciendo ahorita.
J: {11:05} [con ambas manos recorre la recta $y = -3x + 9$] Esta sí es más como más, digo se ve más y. Mas claro que es y. Aparte de que esta pegado casi al eje de la y.
A: Ok. Entonces, sí mira. Vamos a repasar los cuadrantes {11:25} [toma la mano derecha de J y la ubica en el cuadrante uno] Por ejemplo, en este cuadrante x y y son positivas.
J: Ok.
A: {11:28} [toma la mano derecha de J y hace que recorra el eje x en sentido positivo y el eje y en sentido positivo] A la derecha en las x son positivos y hacia arriba. Hacia la izquierda–
J: {11:35} [señala con la mano derecha el cuadrante dos]
A: Ahí. Las x son negativas pero las y siguen siendo positivas
J: {11:42} [recorre el eje y desde el origen hacia arriba]
A: Porque estás hacia arriba.
J: {11:45} [recorre con la mano derecha el eje x desde el origen hacia la izquierda] Y acá son negativas las x y {11:50} [recorre el eje y desde el origen hacia abajo] también las y, ¿no? O sea que… bueno lo voy a relacionar así, no sé si esté bien pero… las y positivas y x positivas están aquí {12:02} [señala el cuadrante uno con la mano derecha] las que comparte y {12:06} [señala el cuadrante tres con la mano izquierda] las y negativas y x negativas están-O sea, está cruzado. {12:13} [primero señala con la mano derecha el cuadrante cuatro y luego con la mano izquierda el cuadrante tres] Y acá es una combinación de ambas, y acá igual. Ok. ¿Hay otra gráfica?
A: Sí, otras dos. {12:23} [le entrega el geoplano con la recta $y = 4x - 8$]
J: {12:31} [con la mano izquierda recorre la recta comenzando por el segmento de recta que queda más cerca del geoplano y yendo hacia la parte más cercana a él, *i.e.*, “hacia abajo” en un par de ocasiones; mientras la mano derecha hace el moviemiento desde el centro hacia la parte superior para posteriormente dejarla estática en el segmento de recta que queda en la parte superior del geoplano] Esta es una, bueno cruza el eje de la x.
A: Ajá, ¿cuántas veces?
J: Una vez, creo. {12:46} [con la mano izquierda recorre nuevamente la recta de “arriba hacia abajo”]
A: ¿Puede que no la corte ninguna?
J: Hm ¿cómo?
A: Que… Que la línea de alguna forma nunca cruce por más que la prolongues
J: {13:05} [toca con la mano derecha el eje x] ¿Qué nunca cruce la x? Creo que sí puedo. ¿Si se puede, no?
A: ¿Cómo lo harías?
J: {13:11} [toma la recta de plastilina y la coloca sobre el eje y] Sí, ¿no? ¿si se puede, no?
A: Pero, a ver. Checa si en algún momento cruza
J: {13:25} [con ambas manos, una de cada lado de la recta $x = 0$, recorre cerca del centro del geoplano de arriba a abajo] Sí, bueno. Aquí en el centro. Pues no, tendría que ir partido, casi.
A: ¿Cómo?
J: No se, {13:37} [toma la parte inferior de la recta $x = 0$ y superpone sobre la parte positiva de manera, *i.e.*, “dobla la recta a la mitad hacia arriba”] Sólo ¿así?

A: No, pero eso no es una recta completa, es un segmento de recta.
J: {13:47} [regresa la parte que dobló a su posición inicial, es decir, vuelve a poner con plastilina la recta $x = 0$] Entonces creo que no se puede. {13:50} [Dibuja una parábola con concavidad positiva y sin raíces reales en el cuadrante uno] ¿O así? Aquí no toca el eje.
A: Esa forma la vamos a ver ahorita más adelante. No es una de grado uno, sino una de grado dos. Entonces ahorita estamos con las de grado uno que son todas estas. Pero muy bien. Pero, ¿y las de grado uno? Que sean rectas, quiero decir.
J: No {14:16} [regresa la parábola a la forma de la recta $x = 0$] De éstas creo que no. A lo mejor estoy equivocado, pero creo que no.
A: No, vas muy bien. {14:28} [le proporciona el geoplano con la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$] y la última.
J: {14:30} [con ambas manos empieza a explorar, partiendo del centro del geoplano hacia los extremos] Esta es... igual, como una diagonal. {14:38} [con ambas manos explora el segmento de recta que está cerca del centro del geoplano] Pasa una vez por x y una vez por y. ¿Y puede pasar dos veces por un mismo eje? Yo creo que sí.
A: ¿Por el mismo eje?
J: Sí, que pase dos veces por {14:52} [con la mano derecha recorre el eje y de “arriba hacia abajo”] No, creo que eso ya no se puede.
A: No, ahorita del eje x ya viste que no. ¿Y de y?
J: {15:01} [toma los extremos de la recta y los une de manera tal que la figura resultante es una forma circular] Tendría que ser como un círculo.
A: Sí, pero entonces ya no sería–
J: una recta.
A: Y lo que estamos analizando ahorita son–
J: son rectas. {15:14} [regresa la plastina a una forma de una recta] Así está bien. Lo que más me llamó la atención, no sé, son los ángulos que se forman aquí {15:21} [señala el triángulo rectángulo que se forma a partir de el eje x, el eje y y la recta. Lo recorre con la mano izquierda sin una dirección aparente de manera reiterativa] Como que me parece interesante, así lo que se forma en el eje, en los dos ejes. Como una ventana o algo así. Bueno, como la parte de... como un triángulo.
A: ¿Identificas que tipo de triángulo es?
J: {15:41} [con el dedo indice de la mano izquierda recorre los lados del triángulo] Según yo es como... triángulo rectángulo, ¿no? {15:54} [le entrega el geoplano a A]
*(b) A: Ok, lo que vamos a hacer ahora es... Si quieres hacer anotaciones ahí tengo una regleta, punzón y hojas.
J: No, bueno al final.
A: Todas estas gráficas te las voy a ir pasando, incluso... forma equipos. Con algún criterio que tú elijas.
J: ¿Cómo de clasificación?
A: Ajá. Que digas esto tienen–
J: Que relación tienen.
A: Estos se parecen, o con algún criterio que tú escojas. Bueno, aquí te voy dejando los geoplanos
J: {16:28} [comienza a explorar con ambas manos el geoplano con la gráfica de la recta $y = 4x - 8$ comenzando por la parte de la recta más cerca del centro del geoplano y llendo a los extremos]
A: Tengo cuatro en la mesa. Ahorita que digas “estos no tienen nada que ver” o “éstos van con éstos” te voy pasando los demás [coloca cuatro geoplanos en la mesa, en la parte inferior derecha aquel con la gráfica $y = \frac{1}{2}x - 3$, en la parte inferior izquierda $y = 4x - 8$, en la parte superior derecha $y = -\frac{1}{3}x - 3$, y finalmente en la parte superior izquierda $y = -3x - 9$.

J: {16:34} [con la mano derecha empieza a explorar la gráfica de $y = -3x + 9$ partiendo de la parte inferior del geoplano hacia la parte superior del mismo] A ver, ¿Con estas cuatro, no?
A: Son ocho en total. En la mesa hay cuatro, pero igual ve pensando que las otras pueden ir encajando con lo que–
J: Pero las primeras {16:45} [coloca la mano derecha sobre la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ y la mano izquierda sobre el geoplano con $y = -3x + 9$. Luego coloca las dos manos sobre la recta $y = -3x + 9$ y comienza a explorarla desde la parte inferior hacia la parte superior con un movimiento de "abajo hacia arriba", cuando llega a la parte superior del geoplano hace el movimiento inverso, es decir de "arriba hacia abajo". Posterior a esto, regresa a examinar la recta $y = 4x - 8$, empezando por el centro y yendo hacia los extremos con ambas manos] Bueno, creo... Tengo que estar bien seguro {16:55} [regresa a examinar de manera mucho más breve la recta $y = -3x + 9$ tocando con ambas manos la parte mas cercana al centro de la recta y yendose a los extremos. Después hace lo mismo con la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$. Finaliza con la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ con la cual demora más tiempo, haciendo este proceso de ir del "centro a los extremos" dos veces]
#sonido de que se cae un lápiz, lo que provoca que J detenga su exploración#
J: {17:07} [explora nuevamente la recta $y = 4x - 8$ repitiendo su estrategia de ir de la parte más cerca del centro del geoplano a los extremos utilizando ambas manos. Se detiene en los extremos y los toca un par de ocasiones más. Posterior a esto vuelve a tocar el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$, lo hace de manera breve solo tocando el extremo de la recta que está en el cuadrante tres. Continua después con la recta $y = -3x + 9$ tocando con ambas manos la parte cerca del centro del geoplano de manera breve] Creo que estas dos se parecen {17:16} [señala con la mano derecha el geoplano con la recta $y = -3x + 9$ y con la mano izquierda a $y = 4x - 8$] porque están pegadas, muy pegadas al eje de la y. Pero, pero, {17:28} [con ambas manos recorre la recta $y = -3x + 9$] una es hacia arriba. Bueno, una está pegada hacia lo positivo, muy pegada del y positivo. {17:35} [señala la recta $y = 4x - 8$. Coloca sus manos en el segmento de recta que queda en el cuadrantre tres lo recorre] Y ésta al reves, a lo negativo. Pero no sé, creo que figurativamente. ¿O cómo se podría decir?... Geométricamente, no sé {17:53} [empieza a recorrer con ambas manos de manera rápida las dos rectas que señaló, buscando la parte más cerca del centro de la recta. Cuando recorre una con sus manos cambia a la otra. Hace esto cuatro veces] Son similares, linealmente. No sé, es que no sé las palabras técnicas.
A: No, la idea o sea–
J: Sí, se parecen en la línea {18:04} [recorre con su mano derecha de "arriba hacia abajo" la recta $y = 4x - 8$ una vez, y luego dos vece de "arriba hacia abajo"] Bueno, en el recorrido. Ésta y ésta, ay es que... {18:11} [acerca a sí el geoplano con la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ y toca solo la parte más cerca del centro. Después buscala recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ y con ambas manos explora desde la parte más proxima al origen hacia los extremos] ésta y ésta se parecen mucho
A: ¿En qué?
J: {18:22} [explora nuevamente la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ con la mano izquierda recorriendo la parte que está en el cuadrante tres y con la derecha la parte que queda en el cuadrante uno] Es que mira, son similares, pero {18:25} [recorre ahora la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ usando la mano derecha para la parte que está en el cuadrante dos y la izquierda para el cuadrante cuatro] están a la inversa. O sea, éste está muy pegado- Bueno, está muy pegado así {18:37} [recorre con la mano derecha de "izquierda a derecha" la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$] Hm...
A: Sí, no pasa nada. No es necesario que utilices un lenguaje técnico o matemático. Tú describelo con tus palabras, no pasa nada. Yo te voy siguiendo la idea.

J: {18:48} [recorre nuevamente de “izquierda a derecha” la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ dos veces] Están así, como, casi casi recta. Pero, pero, hacia {18:54} [empieza a tocar de “izquierda a derecha” la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ de manera repetitiva]Así, osea... {19:00} [señala la parte de la recta que está en el cuadrante cuatro] esto va hacia lo positivo y {19:01} [señala la parte de la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ que está en el cuadrante dos] esto a lo negativo. No al reves, {19:05} [señala la parte de la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ que se encuentra en el cuadrante cuatro, luego la recorre desde el centro hacia el extremo derecho] esto a lo positivo y {19:08} [señala la parte de la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ que está en el cuadrante dos] y esto a lo positivo. O sea, sí, {19:15} [señala el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$]está es positiva y {19:16} [señala al geoplano con la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$] y esta es negativa. A ver no, porque {19:22} [señala el segmento de la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ que queda en el cuadrante tres] Esta x es positi-negativa. Y {19:27} [señala el segmento de la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ que está en el primer cuadrante] esta y es positiva. Entonces me estoy equivocando ¿Cómo te podré explicar? {19:36} [con ambas manos, una en cada extremo, toca los extremos de la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$. Luego repite haciendo lo mismo en la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$] No, espera. Creo que más bien {19:41} [toca los extremos de cada una de las rectas que tiene en la mesa] Esto se parece más {19:43} [señala el geoplano con la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$] No a ver, tengo que ver bien {19:47} [toca brevemente con ambas manos la recta $y = 4x - 8$ cerca de la parte cercana al centro del geoplano. Luego pasa sus manos a la recta $y = -3x + 9$, las coloca en los “extremos” de la recta, la mano izquierda en el superior y la mano derecha en el inferior. Con ambas manos realiza movimientos cortos que la recorren de “arriba hacia abajo” de manera reiterativa. Finalmente, con la mano izquierda recorre toda la recta de “arriba hacia abajo” y de “abajo hacia arriba” cuatro veces] Perdón, es que soy muy indeciso. {20:00} [Con la mano izquierda recorre la recta $y = -3x + 9$ de “abajo hacia arriba unicamente de manera repetida] Esto está como una montaña o algo así. Como una... no sé {20:05} [con ambas manos recorre desde el centro hacia los extremos la recta $y = 4x - 8$] Bueno, estas {20:11} [señala el geoplano con la recta $y = -3x + 9$ y luego el geoplano con la recta $y = 4x - 8$] estas dos sí se parecen. De eso ya estoy de acuerdo {20:16} [señala el geoplano con la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ y luego al que tiene la curva $y = -\frac{1}{3}x - 3$] Pero, no sé. creo que ésta y ésta son de diferente tipo.
A: Entonces tenemos tres equipos, ok. Te voy pasando una por una y me vas diciendo en qué equipo de los tres que ya tienes o si haces otro nuevo {20:31} [le pasa el geoplano con la recta $y = x + 2$]
J: {20:32} [toma el geoplano con la mano derecha y lo pone sobre su hombro izquierdo. Con la mano izquierda empieza a explorar la recta de “abajo hacia arriba” y luego de “arriba hacia abajo” de manera repetida, aproximadamente cuatro veces] Ojalá que no haga otro nuevo. {20:40} [con la mano derecha sosteniendo a la altura de su pecho el último geoplano que se le proporciono, empieza a recorrer con la mano izquierda el geoplano con la recta $y = 4x - 8$ de “abajo hacia arriba” y luego de regreso, *i.e.*, de “arriba hacia abajo”] Creo que ésta se parece a ésta {20:45} [señala el geoplano con la recta $y = 4x - 8$ y luego a $y = -3x + 9$]. O sea, a estos dos.
A: Sí. Si quieres ponlo encima. {20:50} [le proporciona el geoplano con la recta $y = -x - 8$]
J: {20:52} [recorre el geoplano de “arriba hacia abajo” y luego de “abajo hacia arriba”] Me gusta mucho el olor a madera. Hm... {21:01} [toca con la mano izquierda de manera rápida de “abajo hacia arriba” la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ y luego la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$] Ay, por

fin encontré algo. {21:12} [coloca encima del geoplano con la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ al que tiene la curva $y = -x - 8$] Esto se parece a este, creo.
A: ¿En qué?
J: {21:15} [retoma el geoplano con la curva $y = -x - 8$ y con la mano derecha recorre de "arriba hacia abajo la recta"] Por el tipo de línea. Porque, a ver, espera. Deja toco bien {21:19} [recorre con la mano derecha de "abajo hacia arriba" la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$. Luego, hace el mismo tipo de recorrido con la curva $y = -x - 8$]
A: Espera, creo que es así {21:28} [re orienta el geoplano para que los sentidos positivos de los ejes y y x queden hacia arriba y hacia la derecha, respectivamente]
J: Ah, es al revés. Ok. {21:33} [recorre de "abajo hacia arriba" la curva $y = -x - 8$ con la mano derecha. Luego recorre los extremos del geoplano] Sería buena idea, bueno no sé si puedo hacer sugerencias.
A: Sí, sí. Dale.
J: Sería buena idea que le pusieras aquí, o sea no sé, alguna así-algún simbolo para qué. No sé, bueno, si por ejemplos vas a enseñar gráficas y todo eso para que no volteen la–
A: Sí, ya. La orientación.
J: Espera, creo que sí lo hiciste sin querer. A ver, sonstenmelo.
A: Las etiquetas de abajo ¿no?
J: sí, creo que sí. Todos lo tienen de este lado
A: Casi
J: Este no.
A:No, unos quedaron al reves.
J: Unos abajo. Bueno, este ya.
A: No, de todos modos yo te agradezco las sugerencias. Ahorita no te preocupes por eso, yo te voy ayudando con la orientación.
J: {22:30} [con la mano derecha recorre rápidamente de "abajo hacia arriba" la recta $y = -x - 8$] No, espera. {22:33} [cambia la mano con la que sostiene el geoplano con la recta $y = -x - 8$. Después, con la mano izquierda toca buscando geoplano con la recta $y = x + 2$. Una vez que lo localizó recorre de "abajo hacia arriba" con la mano izquierda la recta $y = x + 2$ y luego la recta $y = -x - 8$. Posteriormente pone el geoplano que sostenía sobre el que buscó] Esto se parece más a... ésta. Entonces ya estoy como muy confundido, pero al final llegaré a algo.
A: {22:46} [le proporciona el geoplano con la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$]
J: {22:47} [con la mano derecha sostiene el geoplano a la altura de su pecho de manera tal que sus dedos quedan tocando el extremo derecho de la recta, mientras que con la mano izquierda toca solo el extremo izquierdo de la recta. Posterior a esto, toca brevemente la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ en la parte más cercana al centro del geoplano] Sí, estos son iguales, casi.
A: {22:56} [le proporciona el geoplano con la curva $y = -\frac{1}{5}x - 1$]
J: {22:57} [con la mano derecha sostiene el geoplano de manera tal que sus dedos quedan tocando el extremo derecho de la recta, mientras que con la mano izquierda toca el extremo izquierdo de la recta. Luego toca la parte de en medio del geoplano con la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$] Bueno, éste es con éste.
A: Ok, entonces...
J: ¿Estoy muy lejos?
A: No, en realidad lo que te quería preguntar es ¿Qué notaste en común para hacer los equipos o los grupos?
J: Me base más en la línea la verdad. A lo mejor es porque no tengo todavía bien el concepto de-de los números. De qué número significa cada {22:30} [con la mano derecha recorre de "arriba hacia abajo" y "abajo hacia arriba" la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$] Cada extremo, cada cuadrante, sí. {23:41} [toma el geoplano con la curva $y = \frac{1}{4}x + 1$ con la

mano derecha y señala al geoplano con $y = \frac{1}{2}x - 3$] Pero, me base más en la figura. Mira, ésta y ésta son muy similares.
A: Por ejemplo, en-¿En qué lado corta al eje x? ¿En los positivos o en los negativos? ¿O a la derecha o a la izquierda?
J: {23:56} [señala el geoplano con la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$. Después lo recorre de "arriba hacia abajo" dos veces. Siendo en la última vez, que se detiene en el eje y] ¿en este? En este corta en los positivos
A: ¿Al eje x?
J: Sí. Ah, al eje x. A ver, espera {24:05} [recorre con la mano derecha el eje x desde el origen hacia la izquierda, cuando siente la intersección con la recta regresa hacia el origen. Después vuelve a repetir el moviemiento, pero esta vez sí "cruza" la recta. Una vez hecho esto continua recorriendo el eje x hacia la izquierda hasta el extremo del geoplano] No, aquí en los negativos.
A: ¿Y el otro también de ese equipo?
J: {24:14} [con la mano derecha recorre el eje x desde el origen hacia la derecha] No, este no. Este acaba en los positivos. {24:21} [señala con la mano izquierda el eje x y con la mano derecha el segmento de la recta que queda en el cuadrante uno] Sí, porque aquí está el eje x. Y acá está positivo. Esto es al reves, ¿no?
A: Sí, pero o sea–
J: {24:29} [busca el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$. Cuando lo encuentra, recorre la recta de "abajo hacia arriba"] Deja toco la otra... Ok, entonces, yo creo que éstas, más bien, son similares. Sí me baso en el eje. {24:42} [con la mano izquierda de "arriba hacia abajo" la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$] O sea, éste. Porque corta en el eje de x negativo. Y... a ver {24:50} [señala la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$ y con la mano derecha sostiene al geoplano con la recta $y = \frac{1}{5}x - 1$] y ésta igual. Estos dos cortan en el negativo {25:02} [señala la intersección del eje y con la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$] y a la vez en el positivo también.
A: En el eje de y sí
J: {25:06} [sostiene el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$ con la mano derecha a la altura del pecho y con la mano izquierda recorre la recta de "arriba hacia abajo"] Y éste igual. Acá está el negativo y... ah caray, éste no. Éste es negativo y negativo. {25:15} [recorre nuevamente de "arriba hacia abajo" la curva $y = -\frac{1}{5}x - 1$] O sea corta en los dos ejes negativos. {25:25} [recorre de "arriba hacia abajo" la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ con la mano izquierda una vez a traves de todo el geoplano, repite el movimiento pero en la segunda ocasión se detiene en las intersecciones con los ejes x y y] Entonces, a ver. Déjame ver. {25:30} [señala con la mano izquierda la intersección de la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ con el eje y] Éste está en negativo. No, éste... Sí, está en el negativo. {25:35} [señala con la mano izquierda la intersección de la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$ con el eje x] Pero acá está en el positivo de x. {25:40} [señal con la mano izquierda el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$] Entonces estos dos no se parecen... {25:45} [recorre de "abajo hacia arriba" la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$] Porque estos dos cortan en lo-en los dos negativos. {25:47} [busca el geoplano con la recta $y = 4x - 8$ y la empieza a recorrer con la mano izquierda de "arriba hacia abajo". Luego busca la recta $y = -x - 8$ y la recorre de "abajo hacia arriba"] Debo buscar algo. Sí, éste. {25:56} [Apila uno sobre otro los geoplanos con las rectas $y = -\frac{1}{5}x - 1$ y $-x - 8$]
A: Te los cuido
J: Van a terminar así, bueno como sandwich de plastilina. {26:00} [con ambas manos comienza a explorar la recta $y = 4x - 8$ partiendo desde la parte más cercana al centro del geoplano y llendo hacia los extremos. Señala con la mano derecha la intersección de

la recta con el eje y] Éste corta en el negativo {26:14} [señala con la mano derecha la intersección de la recta $y = 4x - 8$ con el eje x] y en el positivo. Entonces... {26:16} [señala con la mano izquierda el geoplano con la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$] se parece a ésta. {26:19} [con la mano izquierda busca las intersecciones de los ejes con la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$, una vez que las encuentra apila uno sobre otro los geoplanos con las rectas $y = 4x - 8$ y $y = \frac{1}{2}x - 3$] ¿sí, no? Y ya, creo. ¿O falta otro?
A: {26:23} [Le acerca los geoplanos con las rectas $y = x + 2$ y $y = -3x + 9$] Pues no sé... Ahora que hiciste otro tipo de–
J: De clasificación.
A: Ajá, pues entonces falta eso...
J: ¿Éstas faltan?
A: Éstas son las que ya están, con las dos negativas.
J: Ok, creo que ya están todas.
A: Estas son las que faltaban
J: {26:48} [sotiene el geoplano con la mano derecha a la altura de su pecho mientras que con la mano izquierda recorre la recta $y = x + 2$ de "abajo hacia arriba". Se detiene en la intersección de la recta con el eje x. Luego en la intersección de la recta con el eje y] Corta en el negativo y en el positivo. {26:53} [busca el geoplano con la recta $y = 4x + 8$] Igual que estos {26:55} [recorre con la mano izquierda la recta $y = 4x - 8$ de "abajo hacia arriba" deteniendose en las intersecciones de la recta con los ejes] Negativo, y positivo... No. {26:59} [recorre con la mano izquierda la recta $y = -3x + 9$ de "abajo hacia arriba". Se detiene en la intersección de la recta con el eje x y luego en la intersección de la recta con el eje y] éste está en el positivo y éste en el positivo. ¿sí, no? {27:11} [recorre de "abajo hacia arriba" y de "arriba hacia abajo" con la mano izquierda la recta $y = x + 2$] Estos dos son... bueno, este es negativo y... Ah, ya. {27:22} [busca el geoplano con la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$] Estos son los que están así, ¿verdad? {27:23} [recorre con la mano izquierda la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$ y se detiene en las intersecciones de la recta con los ejes] O sea, éste está en el negativo.. x negativo y y positivo. {27:31} [recorre nuevamente con la mano izquierda la recta $y = x + 2$] Creo que estos dos. {27:33} [apila uno sobre otro los geoplanos con las rectas $y = x + 2$ y $y = \frac{1}{4}x + 1$] Está es parte de esta. {27:38} [señala el geoplano con la recta $y = -3x + 9$] Y, ¿éste es el que queda, no?
A: {27:43} [le proporciona el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$] éste falta, ahora que estás acomodando todo otra vez.
J: {27:46} [con la mano derecha sostiene el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ a la altura de su pecho, mientras que con la mano izquierda recorre la recta de "arriba hacia abajo"] Negativo, negativo. ¿Cuál era el negativo y negativo? {27:58} [señala el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$] ¿ésta no? {28:00} [apila el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{3}x - 3$ sobre los geoplanos con las rectas $y = -\frac{1}{5}x - 1$ y $y = -x - 8$. Luego, con la mano derecha los señala] Negativos. {28:02} [señala los geoplanos con las rectas $y = 4x - 8$ y $y = \frac{1}{2}x - 3$. Con la mano derecha recorre la recta $y = 4x - 8$ de "abajo hacia arriba" deteniendose en las intersecciones de la recta con los ejes] Estos son combinación de x positivo y y negativo. {28:10} [recorre con ambas manos la recta $y = -3x + 9$ partiendo desde el segmento mas cerca del centro del geoplano yendo hacia los extremos] Esto es x positivo y y positivo. ¿Dóndé estaban los positivos? ¿No existen aquí?, O sea, ¿no existen en los que ya he clasificado?
A: No
J: Entonces éste va solo. Todos son como un licuado

A: Te voy a dar otro geoplano, este sí… en este me escoges una de las clasificaciones y te voy a pasar plastilina. Para que escogas uno y haces otra recta que pueda encajar en una de las clasificaciones que hiciste.
J: Está padre. Supongo que este es el uno…
A: Sí, ese sí tiene los cuadritos. Ahorita igual no importan tanto los cuadritos sino que puedas hacer tú uno
J: Está ligerísimo.
A: Es impresión 3D
J: No manches, algo de ciegos siempre pesa, bueno es pesado. Bueno, voy a quitar esto. Bueno, ya no importa que lo deje en otra parte. No tiene familia. {29:42} [toma la plastilina con ambas manos y comienza a moldear] ¿qué será bueno replicar?... Ah, pero ¿son dos rectas las que tengo que hacer?
A: No, con una.
J: Ah, con una.
A: Ah, ya, de ahí identificas los ejes y dices "ah, quiero que encaje con tal clasificacion" y has uno nuevo que encaje con esa familia. Haces la familia más grande o le das familia al que…
J: Sería mejor idea hacerle familia. Aparte es muy positivo él. {30:26} [continua moldeando la plastilina. Después, con ambas manos empieza a recorrer el geoplano, una vez que identifica el eje x y el eje y coloca la plastilina en en los extremos en los que detuvo su recorrido en cada eje. La expresión analítica de la recta que construyó es $y = -1.2x + 6$] Ahí está ¿sí, no? Un poco rato, pero… muy rustico. {30:51} [recorre la línea $y = 4x - 8$ con la mano derecha de "abajo hacia arriba"] No como las tuyas que son líneas muy perfectas
A: El chiste es la idea. Bueno ya hiciste el hermano para la familia. Bueno, ¿qué puedes decir de todo esto? Qué estás… ¿de lo positivo y lo negativo? ¿Qué podrías reflexionar?
J: Bueno, Primero es una manera más fácil de clasificar así que en líneas. Porque en líneas pues es muy, bueno como muy subjetivo. Y más subjetivo si no sabes los números o sea que cuadrito, no sé como decirlo, qué valor tiene cada parte del cuadrante, cada porción del cuadrante… cada fracción. Y eso es básicamente, que es más fácil clasificar en los ejes, basandonos en los ejes.
*(c) A: Te voy a quitar éste. Vamos a seguir trabajando con los mismos. Esta gráfica corresponde a esta expresión algebraica. Si me haces favor de leerla en voz alta, también para yo saber que no cometí error en Braille. Ya ves que también siempre me equivoco.
J: $y = -$ aquí pusiste como un "abre paréntesis", *menos* y bueno *abre paréntesis* 1 *por*…
A: Era *entre*
J: Esperate, que a lo mejor yo no sí estoy bien, es que dudé un poco. No, espera, sí estoy mal. Es que tiene mucho que no tengo matemáticas. No sí, el *por* es la h baja y el *entre* es la d baja. ¿sí entiendes así, no?
A: Sí
J: Entonces no estás mal, tranquilo. *Entre c* ¿Sí es *c* o quisiste poner 3?
A: *Entre tres*. Según yo como todo era la expresión se seguía leyendo y no necesitaba el numerador.
J: Te informaron mal
A: Voy a darle quejas a ese autor de libro
J: *Entre tres*. Bueno, a lo mejor yo estoy mal pero creo que todo mundo… bueno, que le hace falta el signo numerador. Se ciera el paréntesis. Equis. Bueno no pusiste, pero supongo que es *por*. *Por equis más tres*. Bueno, es toda la expresión. Creo que… ¿quieres que la lea bien así de corrido para que ya no quede duda o algo?
A: Para la escritura braille, porque ya ves que es más complicado.
J: Bueno, es $y = -\left(\frac{1}{3}\right)x + 3$

A: En ésta, que es la gráfica que le corresponde… [acomoda la gráfica para que corresponda con la expresión algebraica, ya que fue una de las curvas de las que manipuló J en la parte *(a)] La expresión te va a decir que–
J: Qué gráfica es
A: Ajá, a cada valor de x que tú le metas te va a regresar algo en y. Entonces, en general al gráficar te va a dar esa forma. Pero, ahorita no vamos a-se llama tabular, no vamos a ir contando en y o de "si x vale tanto entonces en y es…" en realidad es muy tardado y poco productivo pero sí podemos identificar por ejemplo cuál es el último número de la expresión.
J: Si recuerdo bien es 3
A: Bueno, ¿dónde podrías identificar un 3 en los ejes?
J: {5:55} [recorre el extremo izquierdo del geoplano] Pues supongamos que aquí está, supongo que hacia arriba.. casi tres.
A: Esto es en los cuadrantes, pero ¿en los ejes?
J: En x entonces, es más cerquita {6:15} [con la mano derecha recorre el eje x mientras utiliza la llama de su dedo indice como medida para cuantificar el desplazamiento] uno, dos, tres. Aquí. Supongo, no… O también, aquí, espera… {6:33} [recorre con el dedo indice de la mano el eje y] Es que aquí está más reducido.
A: Sí, acá es más interpretativo porque no tenemos los
J: Los cuadritos
A: Ajá, es ir jugando poco a poco.
J. Sí, igual supongo que acá está el 3, en la x.
A: ¿y el $\frac{1}{3}$ cómo lo podrías identificar en la gráfica?
J: ¿es la fracción?
A: Igual si ahorita no puedes, con el mismo análisis de otros vamos a ir como…
J: Creo que no, no sé-
A: Pero si recuerdas mas o menos como es la forma.
J: ¿Te refieres a $\frac{1}{3}$ literal?
A: ¿Cómo podría estar el $\frac{1}{3}$ ahí escondido en la forma de la gráfica?
J: La forma del ángulo, ¿no? {7:45} [señala el interior del triángulo rectángulo que se forma con los ejes y la recta $y = -\frac{1}{3}x + 3$] Aquí, ay, un tercio aquí. Creo. Perdón es que… Y eso que estudié ayer un poco, en la noche.
A: {8:00} [le proporciona el geoplano con la recta $y = 4x - 8$] Ahora éste
J: Es $y = 4x - 8$. Oh, está muy pequeño… Estoy acostumbrado a–
A: ¿Expresiones super grandes?
J: Sí, en la prepa… Ok, primero sí entendí bien buscar donde hay un 4.
A: Si quieres -8
J: Ok, primero el -8 ¿se empieza como hacia atrás? Bueno, más bien se empieza como desde el… ¿cómo se llama? Número. Es que no recuerdo como se llama. Porque todo es como un binomio, pero no sé
A: Sí tiene nombre, se llama "término independiente", pero lo podemos llamar "número", tampoco te compliques con los términos.
J: El término independiente o número, que es -8 {9:10} [recorre con la mano izquierda la recta $y = 4x - 8$ de "abajo hacia arriba" y luego el eje x desde el origen hacia la derecha]
A: ¿dónde estaban los negativos en las x?
J: {9:20} [recorre con la mano izquierda la parte que queda por debajo del eje x de la recta $y = 4x - 8$] Creo que está más hacia acá, hacia la y. Supongamos que {9:24} [utiliza la llama de su dedo índice izquierdo para cuantificar la recta] uno, dos, tres, cuatro, cinco… {9:25} [utiliza la llama de su dedo índice izquierdo para cuantificar el eje y en el sentido negativo] Bueno, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. Después, se sigue con el $4x$ aquí está como muy lógico. {9:43} [utiliza la llema de su

dedo izquierdo para cuantificar el eje x en el sentido positivo] uno, dos, tres, cuatro. Sí, $4x$. Sí está bien la expresión, creo. Igual con la y no se si se hace algo.
A: La y es más para poder hacer las gráficas, poder pasar de lo algebraico a lo gráfico. Pero, en el anterior, el número o el término independiente estaba en las x y en éste que está en las y ¿te parece si analizamos otro? {10:33} [le proporciona el geoplano con la recta $y = -3x + 9$]
J: Ok, $y = -3x + 9$. Bueno comenzamos desde el 9, ¿es correcto decir 9 o +9, o de las dos formas?
A: De las dos formas es válido.
J: Ok, +9 {11:00} [recorre con la mano izquierda la recta $y = -3x + 9$, comenzado por la parte más cercana al centro del geoplano yendo "hacia abajo". Luego recorre de "abajo hacia arriba"hasta llegar a la intersección de la recta con el eje x. Al tocar el eje x lo recorre hacia la izquierda hasta que toca el origen. Una vez hecho esto sigue el recorrido por el eje y "hacia arriba". Cuando alcanza la intersección de la recta con el eje y retoma el recorrido por la recta pero ahora "hacia abajo"] Ah, pues creo que está vez está en y {11:07} [con la llama de su dedo indice izquierdo cuantifica el eje y] uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve. Sí, vamos a decir que sí. Ok. {11:20} [relee la expresión en Braille] $-3x$ {11:27} [con la llama de su dedo indice izquierdo cuantifica el eje x en sentido positivo] uno, dos, tres. No, esto no encaja. {11:30} [recorre el eje x de "derecha a izquierda" y de "izquierda a derecha" dos veces. En el último movimiento de "derecha a izquierda" continua el movimiento incluso después de haber pasado el extremo izquierdo del geoplano] ¿O sí? No, porque hasta acá están los negativos {11:36} [recorre el eje y en sentido negativo con su mano izquierda] Entonces ¿hacia abajo?... Pues creo que no encaja aquí, según yo.
A: ¿Y en el triángulo? Si solo te enfocas en la parte del triángulo
J: {12:01} [señala con la mano izquierda el triángulo rectángulo que se forma con la recta $y = -3x + 9$ y los ejes] ¿Aquí? {12:02} [recorre el triángulo rectángulo que se forma con la recta $y = -3x + 9$ y los ejes, prestandole atención a los ejes, *i.e.*, los recorre más lento que a la recta] Pues no la encuentro yo. Pero, a lo mejor sí está aquí... A ver tengo que pensar....{12:40} [con la mano izquierda recorre el segmento de la recta $y = -3x + 9$ que está en el cuadrante uno de "arriba hacia abajo" y de "abajo hacia arriba" de manera reiterativa] Pues es que... sólo cruza el eje de la x una vez
A: Ok, pero el 9 ya lo identificaste ¿no?
J: Sí
A: Entonces, igual vamos viendo como parte como poco a poquito. Ahorita van dos ganando que el "número" o el término independiente están en la y–
J: Y sólo uno en las x
A: Entonces ahí vamos viendo cuál sería la regularidad {13:23} [le proporciona el geoplano con la recta $y = x + 2$ con la expresión algebraica en Braille]
J: {13:25} [lee la expresión algebraica en braille] $y = x + 2$. Empiezo por el 2. {13:45} [utiliza la llema de su indice izquierdo para cuantificar el eje y] uno, dos. Aquí en las y. Otro más de y. Y el x está solo ¿Ése qué? ¿Este qué se hace?
A: ¿Te acuerdas que cuando solo teníamos una letra deciamos–
J: La pasamos
A: No, ¿qué número estaba escondido ahí?... O sea, que no lo escribiamos porque se daba por entendido que ahí estaba ese número.
J: ¿el uno?
A: Sí.
J: ¿–1? $y = -1 + 2y$
A: No, no. Ahorita el despeje no lo vamos a estar usando ahora
J: Perdón, soy muy ansioso a veces
A: Sí, no pasa nada. Tratamos de siempre usar lo que sabemos. Pero ahorita no vamos a usar despeje. Bueno, el 2 ya me dijiste donde está. Pero, ¿y el –1?
J: {14:58} [señala el segmento de la recta $y = x + 2$ que está en el cuadrante dos] Aquí, ¿no? Bueno, según yo.

A: Ajá, ¿en el triangulito o en el–
J: O sea, en el eje... Bueno no sé, porque yo cuento con el dedo y se cuentan dos, entonces... No sé. Bueno también podría estar en el... No, bueno mejor no porque me hago bolas. Iba a decir que también podría estar en y pero no, porque aquí ya está el +2. Bueno, así, por ahora. Estoy seguro que al final entenderé un poco más.
A: {15:48} [le proporciona el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$ con su expresión algebraica en braille]
J: {15:50} [lee la expresión algebraica el braille] *ye menos se abre paréntesis menos un quinto de equis, se cierra parentesis equis menos uno* ¿no? {16:30} [recorre con la mano izquierda el geoplano con la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$ de "abajo hacia arriba", mientras con la mano derecha sostiene el geoplano a la altura de su pecho] Pues acá está el −1, en x
A: ¿En x?
J: No, me hiciste pensar con esa-bueno, con el tono de voz
A: Sí, lo sé. Por eso fue como de "rayos"
J: Aquí está en y.
A: Eso es trampa. En los demás no te había dicho nada, era uno de x contra los demás de y.
J: La x está sola por lo que sería un 1. ¿sí, verdad?
A: $\frac{1}{5}$, ¿no?
J: Ah es que, está antes, del... Ah sí. Pero, es que antes como yo me voy hacia atrás mi lógica fue está el −1, después esta x, después está un quinto. Entonces, ¿Qué resulevo primero lo de un quinto o lo de x? Lo de un quinto, ¿no? porque es un número.
A: Bueno, en realidad lo de $\frac{1}{5}x$ va pegado.
J: ¿Aunque esté en paréntesis?
A: Sí, porque en realidad es como para que no se pierda la fracción.
J: Entonces sería *un quinto de equis* ¿no? {18:00} [con la mano derecha sostiene el geoplano a la altura del pecho, mientras que con la mano izquierda recorre la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$, de "abajo hacia arriba"] Un quinto, ¿Puede estar aquí en la fracción-en el triángulo? {18:10} [recorre de el extremo izquierdo la recta $y = -\frac{1}{5}x - 1$ con la mano izquierda, cuando llega al borde del geoplano continua el movimiento en el aire] Porque está hacia x pero es menos. Bueno, digamos que sí. {18:20} [relee la expresión algebraica en braille] Ah, sí. Es $-\frac{1}{5}x$ {18:24} [señala con la mano izquierda el triángulo rectángulo que se forma con la recta y los ejes] entonces sí es este.
A: La última que vamos a analizar juntos. {18:45} [le proporciona el geoplano con la recta $y = -x - 8$ con su expresión algebraica escrita en Braille] Luego quedan dos y esas tú solito las vas a–
J: Ok. {18:50} [lee la expresión en braille algebraica en braille] *ye menos equis menos ocho*. Se parece a- bueno acaba igual que otra ¿no? {19:08} [utiliza la llema del dedo indice izquierdo para cuantificar el eje y en el sentido negativo] uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. Creo que está aquí. {19:15} [señala el eje x en el sentido negativo. Luego utiliza su la llama de su dedo indice para cuantificar el eje x en el sentido negativo] Aunque acá también está hacia el menos, entonces voy a contar uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve. Aquí digamos que queda como nueve, yo creo. Sí, el número sí está un poco más complicado, {19:36} [señala el eje y en el sentido negativo] pero acá está el −8 {19:43} [relee la expresión algebraica en Braille] −1, bueno es $-x$, pero es −1. ¿Dónde está el −1? {19:54} [recorre con la mano izquierda el triángulo que se forma con los ejes y la curva $y = -x - 8$] ¿Puede estar aquí en el triángulo? Estaría como aquí ¿no? Bueno, yo creo que está aquí. Pero, no sé si esté bien.
A: No te preocupes, ahorita checamos eso. Ya casi acabamos. Ahora te voy a dar estas dos gráficas
J. ¿Y yo las tengo que analizar?

A: Ajá. Y aquí tienes–
J: Las expresiones.
A: Y me tienes que decir cuál es cuál
J: Pensé que las había roto. Es que a veces soy muy atravancado. {20:51} [lee la expresión algebraica en Braille] *ye igual a menos uno– ah, menos un quinto, un medio de equis menos tres.* Ok, vamos a ver, −3 {21:13} [recorre con la mano izquierda la gráfica $y = \frac{1}{2}x - 3$ de "abajo hacia arriba". Luego señala la intersección de la recta con el eje y] Pues yo creo que aquí está. y es −3. Espero que no me esté traicionando mi sentido común, como todas acaban en menos, o sea las y. {21:30} [relee la expresión algebraica] *un medio de equis* {21:35} [con la mano derecha recorre el triángulo rectángulo que se forma con la intersección de los ejes y la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$] Pues el medio está aquí, es que es un triángulo pero, iba a hacer algo pero no. Me tengo que concentrar {21:50} [relee la expresión algebraica] Sí, es un más, {21:55} [con la mano izquierda recorre el triángulo rectángulo que se forma con la intersección de los ejes y la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$] entonces sí está aquí. Y creo que está está correcta.
A: {22:00} [le proporciona el geoplano con la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$ y su expresión algebraica escrita en Braille] El papelito lo tiene encima.
J: Voy a compararlas antes de decirte ya seguro… creo que sí voy bien {22:20} [lee la expresión algebraica en braille] *ye igual a un cuarto de equis menos, más uno.* {22:26} [con la mano derecha sostiene el geoplano con la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$ a la altura de su pecho, mientras que con la mano izquierda recorre la parte de la recta que está en el cuadrantre dos, de "abajo hacia arriba", deteniendose en la intersección de la recta con el eje y] Pues aquí. Luego, luego. La y. +1 es y {22:35} [relee la expresión en braille] *un cuarto de equis* ¿es menos o más? más. *Más un cuarto* está muy chiquito {22:47} [señala el triángulo rectángulo que se forma de la intersección de los ejes con la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$ haciendo énfasis en la hipotenusa] Aquí sería, creo. Y ya creo que esta. ¿Están bien?
A: Sí, las dos están correctas. Entonces, la pregunta el número o el término independiente ¿dónde está: en yes o en equis?
J; Casi todas están en y. Solo me equivoqué con una.
A: De ¿estas dos últimas podrías darme un valor estimado de donde corta con el eje x?
J: {23:34} [retoma una expresión escrita en braille, particularmente la de $y = \frac{1}{2}x - 3$ y la relee. Después utiliza la llema de su dedo indice izquiero y comienza a cuantificar el eje x en el sentido positivo] Como con el seis.
A: {23:56} [le proporciona el geoplano con la recta $y = \frac{1}{4}x - 1$ con su expresión algebraica escrita en Braille] Ahora ésta.
J: {24:00} [recorre con la mano derecha la recta $y = \frac{1}{4}x - 1$ de "arriba hacia abajo"] Este corta en menos, de eso sí sé, pero el valor… {24:06} [con la llema de su dedo indice izquierdo cuantifica el eje x en el sentido negativo] como tres, menos tres.
A: Ok, con el número que viene con la x ¿qué podrías decir? ¿cómo lo podrías identificar en otras rectas?
J: ¿Cómo?
A: Ajá, ahorita que estuviste analizando el número o el término independiente te ibas directo a las y pero luego, por ejemplo el $\frac{1}{4}x, \frac{1}{2}x, -x$ ¿cómo le harías?
J: ¿Cómo le hacía?
A: Ajá, ¿cómo podría ser el patrón general? Si te doy una nueva recta…
J: {25:07} [retoma una expresión algebraica en braille y la relee] Por ejemplo aquí… ¿si puedo usar este ejemplo, verdad? *Un cuarto de equis* O sea, es un cuarto, no *menos un cuarto*. Entonces, yo me baso en la figura que se forma aquí {25:22} [recorre con la mano derecha el triángulo rectángulo que se forma con los ejes y la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$]

Bueno, el ángulo que se forma aquí. Creo que eso es lo que me indica, o sea, leo la... el signo, o sea si es positivo o negativo y ya. ¿Sí es claro, no?
A: Sí.
**(a) A: {28:27} [le proporciona un geoplano con la parábola $y = -\frac{1}{8}(x-8)(x+5)$, *i.e.*, con concavidad negativa, el vértice en el eje y, y dos raíces reales distintas entre]
J: {28:29} [con ambas manos comienza a recorrer la curva comenzando por el vértice y yendo hacia los extremos] Esta ya es diferente, pasa dos veces por x y una vez por y.
A: Sí, muy bien. Ya todas, a tu izquierda puedes ir checando. Ya tú vas cambiando el geoplano.
J: {29:23} [toma un geoplano con la parábola $y = \frac{1}{2}(x-7)(x+2)$, *i.e.*, con concavidad positiva, el vértice en el cuarto cuadrante y dos raíces reales distintas. Comienza a recorrerla desde el vértice hacia los extremos con ambas manos] Esta pasa por.. pasa igual, dos veces por x. Y la diferencia es que acá pasa en *menos y*, no en *más y*.
A: ¿Logras identificar la forma en general?, ¿cómo se llama?
J: {29:54} [recorre nuevamente la primera curva cuadrática que se le presento, esto es $y = -\frac{1}{8}(x-8)(x+5)$ con la mano izquierda del centro hacia el extremo derecho, y luego de regreso, partiendo del extremo derecho hacia el izquierdo, pasando por el centro] Esta es como una parábola {29:59} [recorre nuevamente con ambas manos la curva $y = \frac{1}{2}(x-7)(x+2)$ comenzando por el vértice y yendo hacia los extremos] Esto es al reves pero no sé como se llama, pero... espera es un poco más hacia arriba. Pero, bueno yo ahorita le voy a decir como un columpio. {30:13} [toma el siguiente geoplano, con la parábola $y = (x-3)(x+2)$, que es concáva hacia arriba, con el vértice en el eje y negativo, y dos raíces reales distintas entre sí, una positiva y otra negativa; con la mano derecha sostiene el geoplano y con la izquierda recorre la curva de "izquierda a derecha" una sola vez] No, esto es más como un columpio {30:20} [recorre nuevamente con la mano izquierda la última gráfica que había analizado previamente, es decir $y = \frac{1}{2}(x-7)(x+2)$ de "izquierda a derecha"] No, como una Jota (J), esto es como una J. {30:25} [con la mano derecha sostiene el geoplano a la altura de su pecho, mientras con la mano izquierda recorre de "izquierda a derecha" $= (x-3)(x+2)$; luego recorre indistintamente las ramas de la parábola] Esto sí es como un columpio, porque está más parejito de acá arriba. Bueno, pasa una vez por x positivo, una por negativo y una vez por y. y ¿cómo se llama? y negativo. {30:53} [toma el geoplano con la curva $y = -3(x+5)(x+2)$ con la mano derecha a la altura de su pecho, con la mano izquierda recorre la curva de "izquierda a derecha"] Oh, está... esta está padra. Me gusta la forma, no sé porque. Es como un puente... {31:16} [con el dedo indice de la mano derecha recorre la forma que se genera con la parábola y el eje x indistintamente] ay, no había visto los triángulos que se formaban. Bueno, es que todos son como que triángulos rectángulos obviamente porque... bueno casi todos. {31:34} [con ambas manos recorre la curva $y = -3(x+5)(x+2)$ comenzando por el centro y yendo hacia los extremos] pero bueno, es como un puente. Pasa dos veces por x, y una vez por y. {31:42} [toma el geoplano con la curva $y = (x-5)(x+1)$ con la mano derecha a la altura del pecho mientras con la izquierda recorre la parábola de "izquierda a derecha"] Igual este, éste es como una *u ve* (v) mas o menos. {32:02} [comienza a recorrer la curva $y = (x-5)(x+1)$ con ambas manos, comenzando por el centro y yendo hacia los extremos] Y de igual forma pasa una vez por x, bueno dos veces por x, perdón. Y una vez por y negativo. {32:11} [toma el geoplano con la parábola $y = (x+1)(x-6)$ con la mano izquierda a la altura de su pecho mientras con la mado derecha la recorre de "derecha a izquierda". Luego cambia de mano para sostener el geoplano y recorre la curva de "izquierda a derecha". Posteriormente coloca el geoplano en la mesa y con ambas manos comienza a recorrer la parábola desde el centro hacia los extremos deteniendose en la intersección con el eje x, luego hace el recorrido inverso, *i.e.*, de los extremos hacia el centro deteniendose nuevamente en la intersección con el eje x. Para

finalizar comienza a recorrer solo con la mano izquierda de “izquierda a derecha” y luego de “derecha a izquierda”] Bueno, pasa una vez por x y una vez por y.
A: ¿Una vez por x?
J: Sí, aquí está. {32:47} [recorre el eje x de “derecha a izquierda” con la mano izquierda mientras que con la mano derecha recorre la curva de “derecha a izquierda” la parábola $y = (x + 1)(x - 6)$] No, espera, es que no sé, tu voz… bueno, es que está muy encimado y pensé que pasaba solamente una vez {33:03} [señala con ambas manos la raíz negativa de la parábola $y = (x + 1)(x - 6)$] Pero aquí está. {33:05} [toma el geoplano con la curva $y = -2(x - 6)(x - 9)$ con la mano derecha y lo sostiene a la altura de su pecho mientras que con la mano izquierda recorre la parábola de “derecha a izquierda”. Luego pone el geoplano sobre la mesa y con ambas manos comienza a explorar la curva desde los extremos hacia el centro, luego con la mano derecha va recorriendo de “del centro a derecha”, luego de la derecha a la izquierda. Finalmente con ambas manos toca los extremos de la curva y “brinca” hacia el centro con ambas manos para cerrar con el recorrido del “centro a los extremos”] Bueno, la figura con la que la relaciono es como una pirámide pero sin los… bueno como un triángulo porque no es pirámide {37:28} [con la mano derecha recorre de manera horizontal de “izquierda a derecha” y después de “derecha a izquierda” el espacio entre los extremos de la parábola $y = -2(x - 6)(x - 9)$] como un triángulo sin la base, y esta sí-sí solo pasa una vez por x y no pasa por y. {33:37} [señala con la mano derecha el primer cuadrante, y luego con la misma mano recorre el eje y de “arriba hacia abajo”] Aunque sí está en el cuadrante de y, pero no pasa por el eje. {33:41} [toma el geoplano con la parábola $y = (x - 4)(x - 9)$ y coloca toda la mano derecha sobre la curva] Esta es a la inversa, ¿no? {33:43} [toma el geoplano con la parábola $y = (x - 4)(x - 9)$ con la mano derecha y lo sostiene a la altura de su pecho mientras que con la mano izquierda recorre la curva de “derecha a izquierda” y luego de “izquierda a derecha”] O sea, la figura no lo del eje, sino la figura. Pero bueno.
A: Ok, entonces ¿en general cuántas veces podría cruzar el eje estas figuras?
J: ¿Todas éstas? Dos veces por x.
A: ¿Podría haber alguna que cruce tres?
J: ¿tres veces?
A: Ajá, pero que respete la forma claro de pirámide, de triángulo–
J: {34:14} [recorre nuevamente la parábola $y = (x - 4)(x - 9)$ con ambas manos yendo desde el centro hacia los extremos] No. Este… No. Son más ¿no?, o sea son más que las rectas
A: Sí, estás son de grado dos. {34:33} [le proporciona el geoplano con la curva $y = (x - 8)^2$]
J: {33:35} [coloca toda la palma de su mano derecha sobre la curva $y = (x - 8)^2$. Luego con la mano izquierda recorre la parábola desde el centro hacia el extremo izquierdo de la misma, y con el dedo indice de la mano derecha recorre la curva cerca del vértice de la parábola y la vecindad cerca al mismo pero en el eje x. Posterior, repite la estrategia pero ahora usa la mano izquierda para recorrer la vecindad cercana al vértice en la curva y la mano derecha para recorrer la vecindad cercana al vértice pero en el eje x] Este es un… sólo pasa una vez por x. Toca una vez el eje de x
A: ¿Y cómo se diferencia esa vez que lo toca a como lo tocan las rectas?
J: Que no… que no está como… cruzado. O sea, que no toca la y. Bueno, eso en referencia a las rectas. A comparación de las rectas más bien. {35:35} [recorre con la mano derecha el eje x desde el extremo izquierdo del geoplano hacia el centro. Al llegar al origen cambia de dirección ahora recorriendo el eje y en desde el centro hacia arriba] Las rectas sí tocan y y x. {35:40} [toca con la mano derecha el vértice de la parábola $y = (x - 8)^2$] pero ésta sólo toca x.
A: {36:15} [le proporciona el geoplano con la parábola $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2$] ¿y ésta?
J: {35:44} [toma el geoplano con la recta $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2$ con la mano derecha y lo sostiene a la altura de su pecho. Con la mano izquierda recorre la curva desde el centro

hacia el extremo izquierdo. Luego del extremo izquierdo hacia el vértice. Cuando llega a éste se detiene y toca la vecindad cercana tanto en la curva como en el eje x] Una vez por y, porque roza el eje de x pero no lo toca. O sea, no está encima del eje. Entonces solamente una vez por y.
A: ¿Entonces eso que decías que no toca el eje y a comparación de las rectas en este último se cumple o no?
J: No, en éste no. {36:21} [con la mano izquierda recorre la parábola $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$ desde el vértice hacia el extremo izquierdo] Aquí toca el eje y. Pero no la x. Es como una… no sé.
A: ¿No la toca pero la roza entonces? Porque dijiste que sólo lo rozaba
J: {36:31} [con ambas manos recorre el eje x cercano a la vecindad del vértice de la parábola $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$. Luego continua recorriendolo solo con la mano derecha mientras con la mano izquierda toca el vértica de la curva] Sí, está aquí muy cerquita del eje de x. {36:39} [comienza a recorrer la parábola $y = \frac{1}{10}(x-5)(x+5)$ con ambas manos comenzando desde el centro y yendo hacia los extremos] Pero no está encima como ésta.
A: Ajá, de que sí le pasa encima {36:42} [le proporciona el geoplano con la curva $y = (x-1)(x+3)$]
J: {36:45} [con la mano derecha sostiene el geoplano con la parábola $y = x^2$ mientras con la mano izquierda recorre la curva desde el centro hacia el extremo izquierdo dos veces] Éste está en el centro, entonces aquí como que me confundo. Pero, según yo está en el eje de y {37:05} [con la mano izquierda toca las intersecciones de la curva $y = x^2$ con el eje y] Sí. Ah bueno, toca un… yo calculo un puntito del eje de x pero está más en el de y. Está justo en el centro. ¿Estas gráficas como para que se usan?
A: Ahorita vamos a hablar un poquito de las aplicaciones. De hecho me llamó la atención que el lunes dijiste que los musicos de vanguardia que hacían estas–
J: Ah, sí. En figuras. En melodías. Es como muy loco pero sí.
A: ¿Podrías intentar hacer una tonada con esto?
J: Pues es que no sé si, sería buena idea…
A: Una improvisada, ya sea aplaudiendo, con la voz,
J: Si quieres lo intentamos al final. Sabe que resulte.
A: Igual también con la forma de las rectas.
J: Es más hasta… bueno ahorita al final. {38:00} [comienza a recorrer la parábola $y = x^2 - 4x + 6$ de los extremos al centro con ambas manos. Luego, una vez que encontró el vértice de la parábola comienza a recorrer en una vecindad cercana a la intersección de la curva con el eje y] Éste toca una vez el eje de y. Este yo no lo había tocado, bueno se parece a… bueno, cuando me toque las clasificaciones ya voy a saber
A: Bueno, toca una vez el y, pero ¿el x?
J: {38:41} [con ambas manos recorre la curva $y = x^2 - 4x + 6$ desde el centro hacia los extremos, luego con la mano izquierda recorre la parávola desde el centro hacia la izquierda] Este que pasó no toca ninguna. El cuadrante sí, pero el eje no. {38:49} [comienza a recorrer la parábola $y = -x^2 - 4$ del extremo izquierdo hacia el centro con la mano izquierda, mientras con la mano derecha la coloca encima de la curva ocupando el segmento que va desde el centro hacia la derecha] También,
A: ¿Cuántas veces en general podría todas estas formas cruzar el eje x? O sea, de estos ejemplos que estás viendo ahorita y de los de hace ratito que comenzamos con las parábolas
J: Creo que una vez, ¿no?
A: Ajá, tienes ejemplos de una.. Por ejemplo éste {39:12} [le muestra el geoplano con la parábola $y = x^2$]
J: {39:14} [con la mano izquierda recorre desde el centro hacia la izquierda la parábola $y = -x^2 - 4$, mientras con la mano derecha recorre la parábola $y = x^2$ desde el centro hacia el extremo izquierdo, luego del centro hacia el extremo derecho. Finalmente

desde el extremo derecho hacia el centro y luego del extremo izquierdo hacia el centro] Sí, pero no tanto, es que es más tendencia a y. Tienen más tendencia a y mas bien.
A: Ese una, ¿los primeros que habías dicho cuántas tenían?
J: ¿Los qué pasamos? ¿Los de recta o estos mismos?
A: Los de parábola
J: Ah, esos eran dos veces.
A: ¿Y esos que estás tocando ahora mismo?
J: {40:00} [recorre la vecindad cercana al vértice de la parábola $y = -x^2 - 4$ con la mano izquierda] Esta sólo... bueno, no. No la toca ninguna, solo pasa por y
A: ¿Qué podrías decir en general?
J: Que todas tocan y
**(b) A: {40:29} [le entrega el geoplano que tiene tiene cuadricula y una barra de plastilina para moldear] Te voy a pedir que grafiques, por favor, con raíz positiva
J: Mi figura favorita. ¿con qué?
A: Con raíz positiva
J: Raíz, Ok, supongo que es el inicio. {40:55} [comienza a modelar una curva concavidad negativa y vértice en el origen] Así
A: ¿Dónde está lo positivo?
J: Lo y hacia arriba. Las y hacia arriba, digo, lo positivo es hacia arriba {41:15} ["abre" más las ramas de la curva que construyó]
A: Las raíces son donde corta con el eje x
J: Ah, ok. {41:26} [traslada la curva que había construído de manera tal que las dos raíces queden positivas] Entonces así. ¿Pero tiene que tocar, y, no?
A: ¿necesariamente?
J: Bueno, no. Había un ejemplo que no tocaba. {41:40} [señala la curva que construyó, que podría asemejarse a la curva $y = -a(x-3)(x-8)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] Entonces así.
A: ¿Podría ser la única forma en la que podría–
J: {41:42} [cambia la concavidad de la parábola que había construido, ahora siendo ésta concava hacia arriba y manteniendo las raíces. Por lo tanto una aproximación algebraica de la curva podría ser $y = a(x-3)(x-8)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] No, también así. De estas dos formas
A: ¿Y esas dos formas son las únicas?
J: Tal vez... no sé {42:03} [la parábola que había construído la gira 135° aproximadamente en el sentido antihorario] No es que aquí sería otra forma, ¿así?
A: {42:10} [señala la rama de la curva que queda "por encima" del eje x, aquella que corta el eje y y no el x] ¿Y con este lado qué pasa? ¿Se extiende hasta dónde?
J: {42:16} [señala la intersección de la curva con el eje y] Hasta aquí
A: ¿Cómo un boomerang?
J: Algo así {42:24} [recorre con la mano derecha la curva de "arriba hacia abajo" y luego de "abajo hacia arriba"] No sé si pueda ¿se puede o no se puede?
A: No, sí tendría que tener–
J: Caída, ah sí porque es parábola. Entonces... {42:37} [construye una nueva parábola que podría aproximarse algebraicamente a $y = -a(x-3)(x-7)$, con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] ¿así? ¿Cómo una P? No, más bien es como un "9". {42:47} [recorre la curva que construyó de "derecha a izquierda"] wow, qué padre.
A: ¿Y qué tenga raíz negativa o raíces negativas?
J: Ya entendí {43:01} [traslada la parábola que había construído a la izquierda del geoplano de manera tal que las dos raíces son negativas y distintas entre sí. Una expresión algebraica que podría utlizarse para describir la nueva curva es $y = -a(x+3)(x+8)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] Así. {43:04} [invierte la concavidad de la parábola que había construido pero respetando las raíces que había puesto en un principio, teniendo ahora como aproximación algebraica a la curva que construyó $y = a(x+3)(x+8)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] O así
A: ¿Ahí cuántas veces va a cruzar el eje x?
J: Dos

A: ¿Y se puede que solo sean dos o menos?
J: ¿Sólo una?
A: Ajá
J: Creo que no se puede..
A: Bueno, de eso que dijiste que lo rozaba
J: Ah, sí. Sólo así.
A: ¿Cómo sería si solo lo roza?
J: {43:30} [construye la curva $y = -a(x + 6)^2$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] Así
A: ¿Y es la única forma que lo roce?
J: O al reves {43:38} [invierte la concavidad de la curva que había construido, ahora teniendo $y = a(x + 6)^2$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] así. O no se si se pueda así {43:45} [gira la curva que construyó 135° en el sentido horario] No, pero no cae ¿Verdad? {43:51} [gira 180° la "hiperbola" que tenía] O al reves, ¿así? No, tampoco cae
A: Y ahora que sea una y una
J: {44:02} [construye una parábola que podría asemejarse algebraicamente a $y = -a(x - 2)(x + 1)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] así
A: Igual, ¿es la única forma?
J: {44:10} [invierte la concavidad de la parábola que construyó, pero cambia las raíces en el proceso, ahora teniendo $y = a(x - 4)(x + 2)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$] Así no
A: ¿Podrías que sea una negativa, una positiva y que roce el eje x?
J: {44:27} [traslada la parábola que había construido hacia abajo de manera tal que los extremos de la plastilina quedan sobre el eje x, en $x = -3$ y $x = 2$] Así, ¿no? Los roza
A: Dijimos que si lo rozaba no lo iba a cruzar. Dale. Hasta aquí ¿qué podrías decir si cruza o roza al eje x si es positivo, si es negativo? ¿Cómo podrías identificarlo?
J: ¿Identificar si es positivo o negativo? Si solo lo roza por el cuadrante porque está del {45:13} [recorre con la mano derecha el eje x desde el origen hacia la derecha] lado negativo- positivo, perdón {45:15} [recorre con la mano derecha el eje x desde el origen hacia la izquierda] y del lado negativo. Aunque supongo que también tiene que ver la y
A: ¿Cómo crees que sería?
J: Bueno, es que la y está como... creo que aquí la y es como parte importante de definir la gráfica
A: ¿Crees que la parábola no se puede extender más? Por ejemplo en las ramas {45:47} [toma las manos de J y las coloca sobre los extremos de la plastilina en la curva que construyó] O sea estas ramas, porque aquí tenemos la plastilina limitada, pero si te doy más plastilina ¿crees que se podría extender?
J: Sí, creo que sí. Creo que podría llegar desde aquí hasta {45:57} [traslada la parábola que construyó a la parte inferior del geoplano, y luego la traslada hasta la parte superior] o sea que llegue la base aquí y las ramas acá
A: ¿Quieres más plastilina para eso?
J: Sí, a ver {46:13} [traslada nuevamente la parábola a la parte inferior del geoplano]
A: Para eso de que si las roza, porque si te doy más plastilina puede que ya no lo roce
J: Las pase... Creo que ya no se puede extender más porque sino va a pasar. {46:44} [señala el extremo derecho de la parábola que construyó con la intersección que tiene con el eje x] ¿Sólo es hasta aquí?
A: Pero se podría extender todavía más, ¿no? Porque todavía tienes más plastilina
J: {47:02} ["alarga" la rama derecha de la parábola que había construído de manera tal que ahora cruza el eje x y llega hasta la parte superior del geoplano] Qué padre. Esta figura es muy... Una "J" de Jair. A ver si la otra se extiende...
A: Ya no va a ser la "J" de Jair
J: Va a ser la "U" de no sé qué. ¿Cómo te apellidas?
A: Moreno Segura
J: Ah, entonces no {47:45} ["alarga" ahora la rama izquierda de la parábola que había construido de manera tal que cruza el eje x y llega hasta la parte superior del geoplano. Queda una parábola que podría expresarse algebraicamente como $y = a(x + 5)(x - 3)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^+, a \neq 0$].

A: ¿Ahí cuántas veces –
J: Cruza? Dos veces el eje de x {48:38} [toca la intersección de la curva con el eje x en el sentido positivo] positivo {48:41} [toca la intersección de la curva con el eje x en el sentido negativo] y negativo y una vez el eje de y
A: ¿Podrías que nada mas roce el eje x, pero que sea positivo y negativo?
J: {48:59} [reconstruye la parábola $a(x+5)(x-3)$ con $a\epsilon\mathbb{R}^{+}, a \neq 0$ de manera tal que las ramas de la parábola "culminan" en $x=-5$ y $x=3$] ¿Así?
A: No, pero entonces ahí le estás quitando parte de la parábola. Por eso el chiste era darte la plastilina para que no hubiera problemas con–
J: Entonces creo que no se puede
A: ¿Dudas con esto?
J: No, creo que sí se puede porque podrías-no sé podrías hacer la parábola así y dejar un pedazo sin nada pero ya sería otra cosa. {49:38} [recorre con ambas manos el eje x desde el centro hacia los extremos] O sea, dejar libre sin plastilina todo el eje y seguirle construyendo pero ya sería otra cosa. Ya no sería ni siquiera una gráfica creo. ¿O Sí?
A: No de segundo grado. Porque ahorita las que estamos analizando son de grado uno, grado dos…
**(c) A: Ah, cada cuadrito aquí va a estar valiendo dos. [le entrega el geoplano con la parábola $y = x^2 - 8x + 12$]
J: ¿Hacia arriba?
A: Hacia todos los lados
J: Primero hacia- bueno voy a empezar hacia arriba porque es más fácil para mí {52:20} [con los dedos indice de la mano derecha e izquierda comienza a contar la cuadrícula en el eje x] Aquí empezaría como dos.. ¿O empieza desde el cero?
A: Desde donde están… desde donde se cortan los dos ejes es cero.
J: {52:40} [con la mano izquierda señala el origen en el plano cartesiano] Bueno aquí es cero, {52:55} [mueve el dedo indice de la mano izquierda en el eje x en el sentido positivo] Luego sigue dos. Bueno, de este lado igual. ¿Si se cuenta así, verdad? Luego cuatro, bueno seis, ocho y aquí empieza a ir hacia allá así que no sé. Diez, doce, catorce, diesiseis, diciocho, veinte. ¿Desde cuándo tienes esto hecho?
A: El geoplano como quince días
J: ¿Y dónde hay impresora 3D?
A: En cdmx hay varias. Acá no sé. Supongo que sí, si en San Luis hay. ¿Qué valores puedes identificar de la parábola y los ejes?
J: ¿De los ejes solamente? {55:02} [señala el eje x con la mano derecha. Luego señala el origen en el geoplano y el extremo derecho del mismo] Pero, contar desde aquí hasta aquí. O sea desde que empieza hasta el fin
A: Sí, de donde cruza
J: ¿Hacia arriba o hacia abajo? {55:20} [hace un movimiento sobre el geoplano vertical y luego uno horizontal con la mano derecha] ¿O sea, hacia acá o hacia acá?
A: De los dos, porque va a chocar con los dos eventualmente.
J: Horizontal, ok. {55:32} [comienza a contar utilizando su dedo indice izquierdo para desplazarse en el eje x] Uno, bueno comienza con cero, dos, cuatro, seis. Creo {55:42} [señala la intersección de la curva $y = x^2 - 8x + 12$ con el eje x] Aquí es seis, creo.
A: Ok, corta en el seis ¿y en cual otro?
J: En el cero. Ah, ¿o te refieres arriba? Bueno aquí está el cero {56:06} [señala el origen del geoplano, después comienza a contar de nuevo la cuadrícula en el eje x] y acá, corta como en el dos
A: Ok, entonces dos y seis dijiste. ¿Y en y?
J: {56:12} [comienza a recorrer el eje y en el sentido negativo con la llema del dedo izquierdo contanto la cuadricula]uno, no. Cero, dos, cuatro, seis, ocho, nueve. Ah caray, diez. En el diez creo. Como por el diez. Doce.
A: En x ¿Qué valores fueron?
J: En x dos y seis.
A: ¿y en y?

J: doce.
A: Te voy a dar tres expresiones, y me vas a tratar de decir cuál es la que corresponde
J: ¿A esta gráfica?
A: Ajá. Igual si las lees en voz alta para también yo darme cuenta si las escribí bien
J: {57:15} [comienza a leer la expresión algebraica en Braille] *Más doce,* ah perdón. Empecé al reves. *ye igual a equis* ¿este signo qué era?
A: Exponente
J: Perdón es que confundo la verdad porque es–
A: Es la “i” acentuada, ¿no?
J: Y aparte es un signo musical. Es lo dificil luego de ver tantas cosas de Braille y no saber bien el Braille. Es *ye igual a equis exponente dos menos siete equis más doce* ($y = x^2 - 7x + 12$). Empiezo con ésta para ver. Bueno es *más doce* {58:19} [toca la curva $y = x^2 - 8x + 12$ con la mano izquierda buscando la intersección de la parábola con el eje y] y aquí sencaja con el *más doce*. Vamos a ver los otros {58:26} [relee la expresión algebraica $y = x^2 - 7x + 12$] doce y siete. No para mí no encaja.
A: ¿Por qué no encaja?
J: Porque es *menos dos* {58:37} [con la mano izquierda recorre el eje x en el sentido de los negativos] y aquí no hay ningún *menos dos*. O sea menos. Ah, perdón. *Menos siete equis* y aquí no hay ningún menos siete x. Y el exponente que es dos, creo que no hay ninguna
A: Ahí te voy a ayudar un poquito. El exponente dos lo que va a hacer es que nos va a dar el exponente de la parábola.
J: Ah ok, ok. {59:02} [toma una expresión algebraica escrita en Braille y la comienza a leer] *ye igual a equis exponente dos*, igual
A: También se puede leer al cuadrado
J: Ah, ok. Ah sí es al cuadrado. *Al cuadrado, a la segunda potencia* ¿si se puede verdad? *menos trece equis más doce*. Aquí también está el doce. Voy a leer la última porque
A: Sí, está bien. El doce que era lo que te ayudaba ya no está ayudando.
J: {59:39} [toma la tercer expresión algebraica en braille y la comienza a leer] *ye igual a equis a a segunda potencia menos ocho equis* ¿Conté mal? Porque van dos veces que aparece el menos ocho entonces me entró un poco la duda.
A: No. ¿Ya tuviste el de *menos trece* y el de *menos siete*, no?
J: Sí. *Menos ocho equis más doce*. Es que el doce ya lo tengo aquí, pero…
A: Y los tres tienen *doce*.
J: Sí, pero… dijimos dos y seis
A: Ajá.
J: Bueno ya tenemos eso.
A: ¿Cómo podemos usar ese *dos* y *seis*? El *doce* no nos está ayudando que era lo que nos estaba ayudando en las rectas, ahora acá ya no nos está ayudando. El *dos* es lo que nos da la forma así que no es como de mucha ayuda.
J: ¿Es el x? O sea la x que está antes del exponente o la de *ocho equis,* bueno *menos ocho equis*.
A: ¿Cómo podríamos? Porque solo nos queda una cosa por analizar y nos quedan dos datos
J: ¿Se puede pasar este *menos ocho* sumando? *Menos ocho equis más* que pase *más ocho equis*
A: ¿Con ese *ocho equis* qué harías?
J: Pues es que {1:01:39} [toca con la mano izquierda la intersección de parábola $y = x^2 - 8x + 12$ con el eje x] aquí me da el resultado de 2+6 es 8
A: Ok, ¿entonces te irías por esa?
J: Sí. Ahorita me dices si…
A: Igual en esta va a valer dos cada cuadrito en ambas direcciones {1:04:54} [le entrega el geoplano con la parábola $y = x^2 - 8x + 16$]

J: {1:04:55} [con mano derecha recorre una vecindad cercana al vértice de la parábola $y = x^2 - 8x + 16$] Bueno este roza nada mas.
A: Ajá. ¿En dónde o cerca de qué valor?
J: {1:05:03} [empieza a contar utilizando su dedo indice derecho para moverse en el eje x] cero, dos, cuatro… Cómo del dos y el cuatro, mas o menos. A ver espera que voy a ver bien {1:05:23} [con la mano derecha sobre la curva $y = x^2 - 8x + 16$ en el vértice particularmente, y con la mano izquierda utilizandola para contar sobre el eje x] A ver cero, sí ya. Y tengo que contar los… {00:03} [con la mano derecha hace un movimiento horizontal sobre el eje x desde el centro del geoplano hacia el extremo derecho] primero hacia acá. Es que ya vi donde corta. ¿Cuento dónde corta con y?
A: Sí, por favor
J: {00:10} [con la mano izquierda empieza a contar en el eje y en el sentido positivo] cero, dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce… catoce. Como en el dieciseis
A: Sí, en el dieciseis. Entonces como en el dos o cuatro, por ahí en x. Y en y en dieciseis. Aquí están las tres expresiones y me vas a decir cual es.
J: {00:28} [comienza a leer las expresiones algebraicas en braille] es *ye igual a equis a la segunda potencia menos ocho*… Creo que éste no es. Este ya había pasado. Ah, son las mismas
A: No, sí son otras. A lo mejor se repite el valor, pero–
J: Ah, ya vi que sí son otras {00:59} [comienza a leer otra expresión algebraica en braille] *ye igual a equis a la segunda potencia menos diez equis mas doce*. {01:12} [toma la tercer expresión algebraica en braille y la comienza a leer] *diecisiete equis igual… ye igual a equis a la segunda potencia menos diecisiete equis más doce*. ¿Cómo puedo resolverla? {01:46} [comienza a tocar nuevamente la intersección de la parábola $y = x^2 - 8x + 16$ con el eje x] Bueno aquí dijimos que era como *menos ocho*… {01:52} [busca entre las expresiones algebraicas] ¿Dónde deje el *menos ocho*? *cuatro y dos* son seis. {02:12} [toma una nueva expresión algebraica] A ver si hay un seis. Es que la estoy resolviendo como la otra. {02:24} [toma la tercer expresión algebraica y la lee nuevamente] No, no hay un *seis* ¿Me equivoqué al contar? {02:29} [con la mano derecha comienza a contar sobre el eje x la cuadricula para encontrar el valor en el que la curva $y = x^2 - 8x + 16$ "roza" al eje] dos… es como en el cuatro entonces. Cambiemos eso, es cuatro. {02:48} [relee las expresiones algebraicas en braille] y ahora… no se si se sume. *Menos diez equis*. Pues, no sé. A la segunda *veinte*… No ya estoy divagando.
A: ¿En la pasada que fue lo que hiciste?
J: Pues pase el numero de la *menos equis,* por ejemplo *menos diez equis* sumando, pero no sé. Aquí no.
A: Y luego con ese número sumando ¿cómo, qué más hiciste?
J: Lo sumé al otro número, creo. O deja recuerdo… Sí, creo que sí. Bueno me fijé en lo de la y, que era *doce* en ese tiempo…
A: Pero todos tenían doce al final
J: Sí, pero estos también
A: Tienen dieciseis.
J: Te equivoscaste
A: Oh ya ví. Sí, pero lo bueno que es en un número que no te iba a ayudar
J: Creo que ya sé {05:13} [relee las expresiones algebraicas en braille] *Menos ocho equis*, pasarlo sumando. Por aquí tenemos un cuatro. Y si sumo cuatro más cuatro es ocho.
A: ¿Te quedas con ese entonces?
J: Sí. Creo.
A: ¿Quieres hacer otro más de este tipo?
J: Sí, quiero probarme. A ver si ya le entendí
A: Igual es dos cada cuadrito. {08:10} [le entrega el geoplano con la curva $y = x^2 - 12x + 20$]
J: {08:20} [con la mano izquierda comienza a contar la cuadricula que está sobre el eje x] cero, dos… creo que aquí sí está en dos cuadritos.
A: Pero, ¿En el eje x?

J: Sí, aquí sí pega
A: ¿Pero, ese es el eje x? Ese es el más grueso. O sea el mas grueso que distingue al horizontal es el x, y el más grueso vertical es el y.
J: {08:58} [recorre el eje y y luego el eje x con la mano derecha] A ver
A: Ese que tienes con tu pulgar es el–
J: *ye*
A: El x .
J: Ah, ok ok, Entonces así no hay problema si está chueco ya lo puedes acomodar. ¿Cómo no lo observé? Bueno es que no soy tan lógico. No tengo tanto sentido común. Entonces no toca. A ver esperate, no sí toca. Es que como empecé a tocar todas las líneas. {09:49} [recorre el eje x desde el centro del geoplano hacia el sentido positivo] Entonces pasa el eje. {09:55} [comienza a contar sobre el eje x la cuadricula] dos, cuatro, seis, ocho. Dos y ocho otra vez. Es *dos* y *diez*... {10:21} [toca con ambas manos la intersección de la parábola $y = x^2 - 12x + 20$ y el eje y] Y este es el veinte... o no corta, no sé si corta
A: Sí, en el veinte.
J: Bueno, en el veinte. Y dos y diez. {10:44} [comienza a leer las expresiones algebraicas en braille] Ok, ahora sí pusiste el *más veinte*... Es *ye igual a equis a la segunda potencia menos nueve equis más veinte*. Este igual es *ye,* o sea, va a acabar en *más veinte* eso quise decir. Es *ye igual a equis a la segunda potencia menos veintiuno equis más veinte*. Y la última, ok... *ye igual a equis a la segunda potencia mas,* digo *menos doce equis más veinte*. Ok. Entonces empezemos. {12:06} [relee la expresión algebraica $y = x^2 - 12x + 20$] Tiene que pasar en... el *menos*... a ver. {12:24} [relee las otras dos expresiones algebraicas] *más nueve, más diez, más doce,* ya sé cuál es. Pasaría como *más doce*.
A: Y luego, ¿Cómo obtienes ese *más doce*?
J: Pasandolo a... ah, sumando *diez más dos*.
A: En general, ¿qué podrías decir?
J: ¿De esto? Qué es muy divertido. Pero aún no le encuentro una aplicación
A: Ahorita te las cuento. Las raíces en estos tres ejemplos, o bueno, los valores donde cruza el eje x en todos los casos eran positivas eran ambas. ¿Qué crees si le metemos negativas: que se siga cumpliendo o no?
J: ¿Lo de que pasará el número? Creo que eso ya sería otro procedimiento
A: O que ambos sean negativos
J: Si los dos son negativos creo que sería el mismo procedimiento. Creo que sólo cambiaría si de un lado... si tocara ambos cuadrantes.
A: ¿Quieres intentarlo o pasamos a la última parte?
J: Vamos a intentarlo. A ver que tal
A: Construye una y dime que valores son donde cruza x
J: ¿Aleatoriamente?
A: Ajá. Si quieres que valga uno, dos, tres cada cuadrito.
J: Que valga dos igual {14:40} [comienza a construir una parábola con concavidad negativa] Tú eres un maestro haciendo líneas y yo las hago muy gruesas. Así está bien
A: ¿Qué valores son donde cruza a x?
J: ¿De ambos lados o sólo de uno?
A: De los dos
J: {15:19} [comienza a contar en el eje x la cuadricula en el sentido positivo] cruza, vamos a decir... cero, dos, cuatro, seis, en el ocho. Mas ocho. {15:35} [comienza a contar en el eje x la cuadricula pero en el sentido negativo] Y cero, menos dos... A ver otra vez, cero, menos dos, menos cuatro, menos seis, menos ocho. Ok, es menos diez de este lado. Y ¿cuénto el de *y?*
A: Sí.
J: Espero no haberme equivocado
A: Ok, para que nos cumpla digamos que en y son 80. La expresión es $y = x^2 + 2x + 80$. Entonces ahí si se nos da. *menos diez más ocho* ¿Cuánto te da?
J: Dos
A: Y es ese dos que tenemos, ¿no?

J: Sí.
***(a) A: {20:00} [le entrega el geoplano con la cúbica $y = -x^3 - x^2 + x + 4$]
J: {20:05} [coloca toda la palma de su mano izquierda sobre la curva $y = -x^3 - x^2 + x + 4$, luego con la misma mano comienza a recorrer la cúbica del centro al extremo derehco] Esta es de otro tipo, como forma de "S" {20:22} [vuelve a colocar su mano izquierda sobre la curva] No, de "5". Algo así, no sé.
A: {20:24} [reorienta la dirección del geoplano para que J tenga el geoplano "en el sentido correcto"]
J: {20:25} [con la mano izquierda comienza a recorrer la curva $y = -x^3 - x^2 + x + 4$ desde el centro del geoplano hacia el extremo izquierdo] Ah, no. Entonces no es una "S"... Toca una vez el eje de x y una vez el eje de y.
A: A tu derecha hay más gráficas
J: {22:10} [recorre la gráfica $y = \frac{1}{4}x^3$ con la mano derecha de "abajo hacia arriba" y luego de "arriba hacia abajo". Posterior a eso, regresa a recorrer la curva $y = -x^3 - x^2 + x + 4$ con las dos manos desde los extremos hacia el centro] Estas son igual, pero van de más puntos a otros. {22:19} [toma el geoplano con la cúbica $y = \frac{1}{4}x^3$ con la mano izquierda y la sostiene a la altura del pecho mientras que con la mano derecha comienza a recorrer la curva de "abajo hacia arriba" y luego de regreso, *i.e.*, de "arriba hacia abajo"] ¿Y en esto se basan también las coordenadas, no? Ah, mira ya le encontré una utilidad. Una de tantas de seguro. {22:36} [con la mano derecha toca la curva $y = -x^3 - x^2 + x + 4$ de "arriba hacia abajo". Luego, recorre la cúbica $y = \frac{1}{4}x^3$ de "abajo hacia arriba" y toca con mayor detenimiento la intersección de la curva con los ejes] Esta también toca solamente una vez el eje de y, y una vez-dos veces, dos veces el eje de x
A: ¿Dónde son esas dos veces?
J: {22:58} [con ambas manos recorre una vecindad cercana a la raíz de la cúbica $y = \frac{1}{4}x^3$ y al origen del geoplano] Bueno, según yo son dos. Porque aquí toca, bueno roza, no lo pasa, pero roza. Entonces solamente una vez cada uno, sí, porque roza. {23:11} [toma el geoplano con la curva $y = x^3$, con ambas manos recorre la curva desde el centro hacia los extremos] Este igual.
A: ¿Dos o una?
J: A ver, espera. {22:34} [con ambas manos recorre una vecindad cercana a la intersección de la cúbica $y = x^3$ con los ejes xy] No, éste si pasa por encima de x dos veces. O sea, de cada lado. Del negativo- {23:34} [con el dedo indice derecho señala el eje x en el sentido positivo y luego con el dedo indice izquierdo el eje x en el sentido negativo] del positivo y del negativo. Y una vez por el de y. {23:43} [toma el geoplano con la cúbica $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$. Con ambas manos comienza a recorrerlo desde el centro hacia los extremos. Luego recorre una vecindad cercana a las intersecciones de la curva con el eje x] Hm... {23:53} [con ambas manos recorre una vecindad cercana a la intersección en $x = 3$ de la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ con el eje x] una vez en el de x {23:56} [con ambas manos señala la intersección de la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ con el eje y] y una vez con el de y. Pero te digo... como que van de... {23:58} [con ambas manos señala el extremo superior de la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$, luego con la mano izquierda la recorre de "arriba hacia abajo". Después con la mano derecha la recorre de "arriba hacia abajo" hasta el mínimo local encontrado en $x = \frac{4}{3}$, mientras con la mano izquierda la recorre de "abajo hacia arriba" hasta el máximo local encontrado en $x = -2$, que también es raíz de la función polinómica] no son como las rectas, sino que van de un punto-muchos puntos o como de varios puntos a otros. O sea, son figuras un poquito más complejas {24:15} [coloca sus manos en el centro del geoplano y hace un movimiento con ambas manos simulando una recta con pendiente negativa] No es tanto nada más así. {24:20} [recorre

nuevamente la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ con ambas manos desde el centro hasta los extremos] No es tan primitivo
A: ¿Te acuerdas que te había preguntado de las cúbicas? Pues son éstas.
J: Me gustan las cúbicas en forma, pero a lo mejor al momento de expresarlas y todo eso no me va a gustar pero la forma está padre.
A: Dices que tiene contacto con el eje x dos veces, pero ¿cómo son esas dos veces?
J: {24:50} [con la mano izquierda recorre una vecindad cercana a la raíz en $x = -2$ de la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$] Aquí roza, {24:54} [señala la intersección de la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ con el eje x, en $x = 3$] Y acá directamente lo pasa.
A: Ok, lo pasa. ¿Qué crees que signifique que uno lo pase y el otro nada mas lo roce?
J: {25:09} [señala la intersección de la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ con el eje x, en $x = 3$] pues que de este lado es x {25:11} [señala la intersección de la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ con el eje x, en $x = -2$] y de este... bueno de los dos es x, pero ¿ya sería otro número no?
A: Sí, serían valores distintos, pero ¿a qué crees que se deba que en uno si lo puede atravesar y en el otro no? El chiste también de esto es no darle ahorita un número a la raíz para no culpar al número de eso
J: {25:46} [recorre el segmento de la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ que está en el cuadrante tres con ambas manos de manera indistinta] Ay, pues aquí no sé bien, la verdad. Pero, no se... {23:52} [con ambas manos recorre la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ de "abajo hacia arriba", luego con la mano derecha realiza movimientos que rozas el geoplano "como sacudiendo de afuera hacia adentro" por encima de la plastilina] a lo mejor es la trayectoria que sigue.
A: ¿Podrías describir como es esa trayectoria?
J: {23:53} [recorre de "arriba hacia abajo" la curva con el dedo indice derecho cuatro veces] como una parábola combinada con una diagonal {26:15} [recorre con la mano derecha la curva $y = \frac{1}{6}(x-3)(x+2)^2$ de abajo hacia arriba] Porque mira, aquí sube. De hecho creo que se parece un poco a mi firma. Yo firmo más o menos así. Entonces, sí es como una combinación de figuras, como híbridos. Perdón siempre hago mis comparaciones muy subjetivas {26:40} [toma el geoplano con la curva $y = \frac{1}{8}(x-4)^2(x+3)$, con ambas manos comienza a recorrer la curva desde el centro hacia los extremos cuatro veces] Éste igual, bueno, todos son combinaciones, creo. Hasta ahorita eso pienso, es la combinación de una parábola con una diagonal. {26:58} [toma el geoplano con la curva $y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5)$ y con ambas manos recorre la curva desde el centro hacia los extremos y luego de los extremos hacia el centro] O la transformación de una parábola, no sé.
A: ¿La transformación de la parábola en qué?
J: En forma, en extensión, no sé... {27:17} [señala el geoplano con la curva $y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5)$] mira, aquí ya encontré otra. De hecho no sé si la otra {27:19} [recorre la curva $y = \frac{1}{8}(x+3)(x-4)^2$ con la mano izquierda de "abajo hacia arriba"]
A: ¿Esa o la anterior?
J: No, es que estaba comparando. Pero, ya encontré una que pasa dos veces por el eje de x
A: ¿Dos?
J: Sí, {27:28} [señala la intersección de la curva $y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5)$ con el eje x en $x = 3$ y en $x = -5$] mira, aquí y aquí. {27:33} [señala la intersección de la cúbica $y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5)$ con el eje y] y una vez por el de y. Sí, ¿no?

A: {27:37} [re construye la gráfica de manera tal que la gráfica resultante permita a J tocar la intersección de la curva $y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5)$ con el origen] ¿Y si le muevo acá?
J: Ya solamente una vez
A: ¿una?
J: {27:48} [recorre la curva $y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5)$ con ambas manos partiendo del centro del geoplano hacia los extremos] Ah, no sigue dos veces. Y una vez por el eje de y. Sigue igual, casi igual
A: ¿Seguro que una?
J: De x dos
A: A ver, recorre todo x con el dedo
J: {28:06} [recorre el eje x de derecha a izquierda con el dedo indice] una, dos... chin, tres. Son tres.
A: ¿a qué crees que se deba que ahora son tres veces las que puede cruzar?
J: Por lo de cúbico. Según yo decían que cuando era segunda potencia era al cuadrado y cuando era tercera potencia era al cubo.
A: ¿Y eso cómo crees que se puede reflejar en el número de cruces?
J: Pues suma tres, no sé.
A: ¿Y en las parábolas o en las de grado dos?
J: Dos veces por el x
A: ¿Y las de grado uno o las rectas?
J: Una. {28:59} [toma el geoplano con la cúbica $y = x^3 - x^2 + 3x$ y con ambas manos lo comienza a recorrer desde el centro del geoplano hacia los extremos. Luego con la mano derecha comienza a recorrerla de “arriba hacia abajo” y de “abajo hacia arriba” de manera reiterada] Pero mira esta, ¿no es una recta? No, no es una recta ¿verdad? Es que pasa una vez por el de x, y una vez por el de y. {29:15} [toma el geoplano con la cúbica $y = -\frac{1}{10}(x+5)^2(x-2)$ y con ambas manos lo recorre de “abajo hacia arriba”, luego lo hace del centro del geoplano a los extremos] y roza este y pasa una vez por el de x y el de y.
***(b) A: {29:36} [le entrega el geoplano con escala y una barra de plastilina] Que cruce positivos pero de grado tres.
J: {31:18} [construye una gráfica de grado tres, la cuál algebraicamente se podría representar como $y = ax(x-4)(x+5)$ con $a \epsilon \mathbb{R}^+, a \neq 0$] Ahí está mira. Tres veces. Creo que copié una.
A: No pasa nada, las formas son muy genéricas, pero ¿las tres son positivas?
J: Ah, ¿tiene que ser todo positivo?
A: Sí, ahorita sí.
J: Entonces no. Vamos a ver... {31:41} [reconstruye la gráfica, la cual podría expresarse algebraicamente como $y = a(x-4)(x-5)(x-8)$ con $a \epsilon \mathbb{R}^+, a \neq 0$] Así... ¿así?
A: ¿Es la unica forma?
J: {32:00} [invierte el signo de la gráfica, *i.e.*, la expresión que podría representar la curva algebraicamente sería $y = -a(x-4)(x-5)(x-8)$ con $a \epsilon \mathbb{R}^+, a \neq 0$] O al reves. O ya sé cual... bueno tú me dices si sí se puede o no. {32:14} [estira los extremos de la plastilina con la cual construyó la gráfica] Creo que estoy copiando lo mismo, es que iba a hacer lo de pasarla por y así, {32:40} [construye una nueva curva que podría expresarse algebraicamente como $y = a(x-2)(x-5)(x-7)$ con $a \epsilon \mathbb{R}^+, a \neq 0$, sin embargo el extremo izquierdo de la curva que construyo queda “de manera horizontal” lo cual puede ser prolongado provocando que haya la posibilidad de una nueva raíz] mira así... {32:42} [con la mano derecha empieza a señalas las intersecciones de la curva $y = a(x-2)(x-5)(x-7)$ con el eje x] uno, dos, tres.. y bueno y.
A: Ok, mis dudas acá con y, ¿lo vas a dejar así acosatado, lo vas a dejar caer o cómo va a ser ese extremo?
J: Pues es que mira, puedo dejarlo así caer un poquito que roce un poquito x negativo.
A: Pero si te doy más plastilina seguiría cayendo, ¿no? y cruzaría otra vez
J: Entonces mejor lo levanto. Y ya está.
A: Ok, ahora que sean todas negativas.

J: {33:33} [construye una gráfica que algebraicamente parece ser una parábola con concavidad negativa]
A: ¿esa sería parábola o cúbica?
J: Estoy haciendo, estoy intentando hacerla, pero... Ah, ya, ya la concebí {34:42} [Comienza a recrear la curva] ¿Así puede estar, no? {34:50} [señala el extremo izquierdo de la curva que está construyendo y después señala el eje y en el sentido negativo] Es que quería poner este negativo pero está complicado, que fuera pegado al eje de lo negativo. Pero ya solamente cruza una vez... [la curva que construyó puede ser representada algebraicamente como $y = -a(x+1)(x+3)(x+6)(x+8)$ con $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 0$] ¿Así puede ir?
A: ¿cuántas veces cruza?
J: No. Tengo que poder. {35:28} [cuenta las veces que cruza el eje x la curva que construyó] uno, dos, tres. ¿Sí?
A: Yo le cuento ahí una más.
J: {35:34} [vuelve a contar las veces que cruza el eje x la curva que construyó, señalando primero la intersección de la curva $y = -a(x+1)(x+3)(x+6)(x+8)$ con $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 0$ con la mano derecha] este es el primer cruce, dos, tres... ah cuatro. Chin! A ver... {35:55} [comienza a reconstruir la gráfica nuevamente] Voy a intentarlo otra vez, y si no puedo aquí voy a estar horas y horas. Voy a necesitar más plastilina.
A: Sí, ahí hay. Tenemos muchos botecitos de play-doh!
J: {36:36} [comienza a reconstruir la gráfica contando los cruces] uno, y dos. Dos cruces van... tres. {36:50} [la gráfica que termina de construir algebraicamente puede ser representada por $y = a(x+3)(x+5)(x+8)$ con $a \epsilon \mathbb{R}^+, a \neq 0$] Otra vez me equivoqué, no. Aquí ya están que pasen todos en negativo. Pero creo que esa ya la había hecho, ¿no?
A: Lo que quieres es que esa rama se acerce a las y negativas
J: {37:02} [toma la rama izquierda de la curva $y = a(x+3)(x+5)(x+8)$ con $a \epsilon \mathbb{R}^+, a \neq 0$ hecha con plastilina y la acerca al eje y en el sentido negativo] Así, creo que ya por fin. {37:12} [comienza a contar el número de cruces por el eje x de la curva $y = a(x+3)(x+5)(x+8)$ con $a \epsilon \mathbb{R}^+, a \neq 0$] uno, dos, tres, ya. ¿sí, no?
A: Cuentale bien los cruces.
J: A ver, voy a reforzar esta rama porque al estirarla se dobla {37:20} [comienza a reconstruir la gráfica que había hecho. Después comienza a contar las raíces nuevamente usando como estrategia el recorrer su dedo indice derecho por el eje x de derecha a izquierda] uno, dos, tres, ¿sí, no? ¿o no?
A: ¿cómo eran las otras gráficas? Ahí están por si las quieres analizar. Fijate donde empiezan, donde terminan, de que lado a que lado va de los cuadrantes. {38:04} [le entrega el geoplano con la cúbica $y = -\frac{1}{10}(x+5)^2(x-2)$]
J: Sí, voy a verlas {38:09} [comienza a explorar la gráfica de $y = -\frac{1}{10}(x+5)^2(x-2)$ con ambas manos desde el centro del geoplano hacia los extremos] Ésta pasa por-bueno roza por... bueno no sé {38:25} [con el dedo indice izquierdo comienza a recorrer el eje x de derecha a izquierda] una {38:26} [señala la intersección de la curva $y = -\frac{1}{10}(x+5)^2(x-2)$ con el eje x en $x = -5$, luego comienza a recorrer la curva de "abajo hacia arriba" y de "arriba hacia abajo"] ¿esta sí es una cúbica, verdad?
A: Sí, todas las que ahorita te voy a mostrar, si es que quieres seguir viendo, son las que ya analizaste
J: Sí, son las mismas.
A: {38:42} [le entrega el geoplano con la cúbica $y = x^3 - x^2 + 3x$] todas son cúbicas.
J: {38:46} [comienza a recorrer la gráfica de $y = x^3 - x^2 + 3x$ con ambas manos partiendo del centro del geoplano y yendo hacia los extremos. Luego con la mano derecha va de "arriba hacia abajo" y de "abajo hacia arriba"]
A: ¿más o con esas?
J: No, unas dos más. Es que quiero ver si esa figura se puede
A: {38:58} [le entrega el geoplano con la cúbica $y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5)$]

J: {39:01} [comienza a explorar la gráfica de $y = \frac{1}{6}x(x-3)(x+5)$ con ambas manos yendo desde el centro hacia los extremos de la misma] ¿Tú crees que se pueda? Bueno, tú eres el que debe de saber si se puede
A: Como pienso que lo quieres hacer ahí hay un "truco" {39:09} [le entrega el geoplano con la cúbica $y = \frac{1}{6}(x+2)^2(x-3)$] Pero no sé cuales son las condiciones que quieras
J: {39:14} [recorre con ambas manos el geoplano con la cúbica $y = \frac{1}{6}(x+2)^2(x-3)$ desde el centro hacia los extremos] A ver, hazlo tú
A: No, ja ja ja
J: Es que quiero ver
A: ¿Dónde quieres que empiece?
J: {39:38} [coloca un pedazo de plastilina en forma de parábola con concavidad negativa que cruza en $x = -8$ y en $x = -6$] ¿puede empezar así, aquí? Y luego que… {39:40} [retira el pedazo de plastilina que había colocado para reconstruir la gráfica] a ver otra vez, es que está muy delgada para lo que quiero hacer. {40:05} [comienza a colocar la tira de plastilina siguiendo una forma "sinoidal" comenzando por el cuadrante tres, haciendo que la curva cruce en $x = -9$, luego en $x = -6$, posterior en $x = -4$ y $x = -3$] aquí, aquí y luego quiero que toque el negativo. ¿ya se puedo o no? {40:24} [con el dedo indice derecho recorre el eje x contando el número de cruces que tiene su gráfica] uno, dos, tres, ¿son cuatro verdad? uno, dos, tres, cuatro. Chin, creo que no se puede. Queda como muy sigzageante.
A: Esa de cuatro cruces que haces ¿dónde quedan los extremos de la plastilina?
J: {40:48} [señala el cuadrante tres] aquí
A: O sea, quedan viendo hacia ti, o–
J: Ah, ya. Sí. Es uno y uno {40:56} [señala la parte superior del geoplano y luego la parte inferior] es uno hacia acá y otro hacia acá.
A: ¿Y en las cúbicas cómo queda? Si quieres te paso una {41:05} [le entrega el geoplano con la cúbica $y = \frac{1}{6}(x+2)^2(x-3)$]
J: {41:06} [con la mano derecha comienza a recorrer la curva $y = \frac{1}{6}(x+2)^2(x-3)$ desde el centro hacia el extremo izquierdo, luego de "izquierda a derecha"] Ah, ya vi. Es que tambien, bueno queda viendo hacia mí
A: Uno, ¿y el otro extremo?
J: El otro queda viendo hacia ti. A ver, primero uno tiene que ver hacia ti. Chin. A ver si puedo, sino ya me rindo. {41:30} [comienza a reconstruir la gráfica colocando la barra de plastilina de forma zigzageante comenzando el cuadrante tres, cruzando en $x = -9, x = -8, x = -4$] uno hacia ti, uno hacia mí. Y ya ahí fueron tres veces, ¿no? {41:42} [con el dedo indice derecho recorre el eje x de derecha a izquierda contando el número de cruces de la curva que construyó con el eje x] uno, dos, tres. Lo que iba a hacer es le pongo una colita y listo. Pero creo que así no funciona. Ya me rindo, bueno, por ahora.
A: No, pero sí ubicas como esa de "una hacia ti y una hacia mí"
J: Sí, ya vi.
A: Bueno, ahora que sean dos positivas y una negativa
J: {42:22} [comienza a construir una nueva gráfica. Coloca la plastilina de forma de parábola con concavidad negativa comenzando en el cuadrante cuatro, teniendo cruces en $x = 3, x = 5$] Aquí ya están los dos positivos {42:49} [toma más plastilina para unirla a la que ya colocó en el geoplano, pero al hacerlo mueve una raíz, es decir, el cruce en $x = 3$ lo cambia por un cruce en $x = 0$. Coloca el tercer y cuatro cruce en $x = -5, x = -7$] Así, ¿no?
A: ¿Dónde quedan los extremos?
J: Ay, sí es cierto {43:02} [mueve la rama de la cúbica que tenía el cruce en $x = 5$ de manera tal que pasa la rama del cuadrante cuatro al cuadrante uno y conservando las dos raíces en $x = 0, x = -7$. Luego con la mano derecha comienza a recorrer la curva de "derecha a izquierda" y luego con las dos manos desde el centro hacia los extremos]

Espera, que me equivoque, es así. Uno y uno. Es la gráfica de la dualidad. Quedó padre. Y ¿ahora dos negativas y una positiva?
A: Correcto
J: {43:34} [comienza a construir una nueva gráfica, coloca la plastilina de forma zigzageante iniciando en el cuadrante tres con una parábola con concavidad negativa cruzando el eje en $x = -4, x = -7$, luego para construir la raíz positiva se fija en si el extremo que ya tiene "va hacia él" o al lado contrario, al percatarse de que "va hacia él" cambia el otro y lo pone en dirección contraria, *i.e.*, lo coloca con un cruce en $x = 2$ y que la rama siga en el cuadrante uno] ¿así, no? Ok. Y ahora van las expresiones.
***(c) A: {46:55} [le entrega el geoplano con la gráfica de $y = x^3 - 6x^2 + 8x$] Aquí está.
J: {46:59} [comienza a explorar la gráfica con ambas manos partiendo del centro hacia los extremos] ¿Esta ya está así correcta?
A: Sí
J: ¿Y tengo que contar?
A: Sí, en ésta cada uno vale uno.
J: {47:11} [señala el origen con la mano derecha] igual este cuadrito es cero, ¿no?
A: Ajá
J: {47:15} [comienza a contar en el eje x la cuadricula] cero, uno, dos, tres. Tres. Debo cortar donde también corta con y {47:23} [comienza a contar en el eje y en el sentido positivo] corta en el uno... en el cero, ¿no? {47:35} [recorre una vecindad cercana al origen en la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$] y en el menos x igual en el cero, bueno aquí están.
A: y es cero, ¿y con x que valores?
J: {47:52} [comienza a señalar las intersecciones de la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ con el eje x, después cuenta en el eje x utilizando la escala que ya tiene el geoplano] es en cuatro, en uno, dos, tres, cuatro. En cuatro. Y acá es igual, cero.
A: Ajá, pero luego acá queda un "huequito", ¿no?
J: Bueno, ahora sí es *menos uno*
A: No, pero el *menos uno* en x es donde tienes tu dedo medio.
J: {48:50} [señala el origen] Ah, este
A: No, ese es el (0,0). Corta el cero en y y el cero en x. ¿Entonces cuáles quedan?
J: Ah, uno y el cuatro. ¿cero también? O es como dos.
A: En este caso solo van a ser dos {49:19} [le entrega las dos expresiones algebraicas en braille]
J: Que bueno porque mi cerebro me está doliendo, y tú quieres {49:45} [comienza a leer la expresión algebraica en braille] *ye igual a equis a la tercera potencia menos seis equis a la dos,* bueno *a la segunda potencia más ocho equis*. What? *Ye equis a la tercera potencia menos nueve equis a la segunda potencia más ocho equis* ¿sí, verdad? Bueno ya se que ocho equis no va a ayudar en nada. Entonces queda dos, cuatro, cero y cero son los números. {50:52} [relee ambas expresiones algebraicas en braille] Creo que pasa el... no se si se resuelva igual, no sé si se resuleva igual, pero creo que se pasa el *menos seis equis* como *más seis equis* y obtengo ese resultado sumando dos más cuatro. ¿Hay alguna otra?
A: Sí, una más de éstas, porque en estás si te fijas en y cruzaba en cero. Entonces vamos a ver en una en la que no. Y ya eso es lo último, sólo tus comentarios finales y después de eso solo es que digas "me duele el cerebro, no llevaba matemáticas desde hace dos años"
J: No, pero la verdad no está difícil, bueno creo que no está difícil. De hecho hasta me divertí. Muy raro que me divierta con las matemáticas... No, pero estuvo padre. De hecho hasta se me pasó el tiempo rápido.
A: {56:34} [le entrega el geoplano con la gráfica de la cúbica $y = x^3 - 13x^2 + 46x - 48$] Ok, en éste cada uno vale uno y en y te voy a hacer trampa, vale -48.
J: {56:45} [con ambas manos recorre la curva $x^3 - 13x^2 + 46x - 48$ desde el centro hacia los extremos, y luego de los extremos hacia el centro] Si porque va hacia abajo...
A: Sí, porque no se nos va a alcanzar.

J: {56:56} [comienza a recorrer el eje *x* desde el origen hacia la derecha contando usando la escala propia del geoplano] cero, ¿sí es cero aquí, verdad? uno. Corta en uno. Ah, corta en uno.
A: Es que lo estás contando abajo del eje, tiene que ser en el eje
J: Ah, arriba. Bueno aquí está el cero
A: No, porque el cero es donde cruzan los dos ejes
J: Deja me ubico bien.
A: ¿Qué valores son?
J: ¿dónde está el cero? Es que soy muy desubicado
A: El cero, cero está aquí. Entonces de acá es uno…
J: Ya me ubiqué más. {58:06} [comienza a recorrer el eje *x* desde el origen hacia la derecha contando usando la escala propia del geoplano] uno dos, en el dos,primero en el dos. Dos, tres, cero uno, dos, tres, cuatro, cinco… en el siete, en el ocho. Es, a ver si recuerdo dos, tres y ocho. Y menos cuarenta y ocho.
A: {58:49} [le entrega las expresiones algebraicas escritas en Braille] Correcto, de todos modos las expresiones tienen ahí escritas el *menos cuarenta y ocho*.
J: ¿son tres ahora? {58:58} [comienza a leer las expresiones algebraicas en braille] *ye igual a equis a la tercera potencia menos veintesiete equis más dos*, ah no, aquí está *veintesiete equis a la dos menos* bueno… no es *más setenta y cuatro equis menos* bueno *menos cuarenta y ocho;* luego es *ye igual a equis a la tercera potencia menos trece equis a la dos más cuarenta y seis equis menos cuarenta y ocho*. Y por último *ye igual a equis a la tercera potencia menos doce equis a la dos más cuarenta y cuatro equis menos cuarenta y ocho…* Creo que es *ye igual a equis a la tercera potencia menos trece equis a la dos más cuarenta y seis equis menos cuarenta y ocho*. Y Bueno pasaríamos el trece sumando y sumando los valores de dos, tres y ocho te da trece.
A: ¿Y si los multiplicas cuánto te da?
J: Trece….
A: No, los que sumaste
J: Ah, los que sumé… chin, ay por que las tablas, maldita sea. Ocho por dos dieciseis. Y tres por dieciseis, bueno eso que da noventa… ah no. tres por uno tres, ah no tres por seis, está bien fácil y yo…. es tres por seis es diciocho, si es diciocho, ¿verdad? Ay no, y tres por una tres y uno, cuatro. Cuarenta y ocho.
A: ¿Qué relaciones ves entre esos tres valores?
J: Que esos como que se transforman. Cuarenta y ocho, o sea, menos cuarenta y ocho… O sea, el cuarenta y ocho tiene que ver con el cuarenta y ocho.
A: ¿y el trece?
J: Ah, el que sumé, ese es la división, no…
A: ¿qué hiciste con esos tres valores?
J: Ah, los sumé
A: En general, ¿qué dirías de las cúbicas?
J: De las cúbicas que no sé, no sé bien para que sirven pero creo que también pueden servir para coordenadas igual que las otras.
A: Y en general, de todo esto que vimos, rectas, parábolas, cúbicas.
J: Pues, creo que sí las comprendí mejor así con esto. Pero ah, me tienes que decir para que son útiles sino se me va a olvidar para toda la vida.
A: Pues hay varias aplicaciones, una de ellas es de movimiento rectilíneo uniforme, cuando no llevas aceleración
J: Aparte de crear música.
A: Las… hay cosas de proporcionalidad que ahí van metidas a veces. Las parábolas para cuando ya llevas aceleración en movimiento, por ejemplo caída libre es muy usado.
J: Para lo de lanzar una jabalina {1:04:41} [dibuja una parábola con concavidad negativa en "el aire" con la mano derecha] ¿Puedes graficar el lanzamiento de una jabalina?
A: Sí, puede ser como una de las parábolas que hicimos. Podría ser así, se puede incluso tomar un vídeo y hacer una gráfica a partir de eso.
J: Como no lo supe cuando competía, me hubiera ayudado mucho.

A: Las cúbicas hay unas cosas de navegación para lo que ayuda, está un poquito más elaborado pero funciona.
J: Es que yo quiero aprender todo eso, pero no sé si a lo mejor sirva pero yo quiero aprender un poco de brujula porque hay veces que me pierdo y yo como no tengo mucho-no soy rico no tengo datos para el maps a veces entonces lo que hago es poner la brujula pero nunca me ayuda porque no sé. Entonces al final siempre regreso a mi casa y todo bien, y aparte imaginate un poco ebrio. O sea un ciego ebrio perdido
A: En las empinadas calles de Guanajuato... Sí, pues eso. Las melodías ¿cómo las harías?
ÇÇÇ J: Ah, sí mira. Te voy a explicar, es... bueno a diferencia de que sean números les das el significado de notas {01:01} [recorre el geoplano con ambas manos, luego con la mano derecha señala el eje x en el sentido positivo y con la mano izquierda el sentido negativo] para este lado serían notas naturales {01:05} [señala cada marca en el eje x positivo con la mano derecha] do, re, mi, fa, sol, la, si, do y todo eso {01:14} [señala el eje x en el sentido negativo con la mano derecho] y para este lado ya empezarían a ser sostenidos ibemoles, que son como... son alteraciones. Son notas que están alteradas gracias a Pitagoras de hecho, todo el recorrido que hizo de las notas musicales. Y es que así van, es una manera de crear nueva música. Se les ocurrió en el siglo XX como ya ves que estaban haciendo muchas cosas raras en el arte. Entonces fue una forma como de que, ya no se me ocurre mucho como escribir música o así. Yo me imagino que un compositor dijo así "no se me ocurre como escribir que tal si en el pentagrama pongo como si fuera un plano cartesiano". Entonces, pues eso fue lo que hicieron y ya pues las alturas y todo eso tiene que ver con los pentagramas. Ya ves que los pentagramas tienen cuatro líneas, no, son cinco. Entonces imaginemos que {02:50} [cuenta en el eje y] está una, dos, tres, cuatro y cinco. Y ya pones cruzado en el x. Ya solo vas escribiendo las notas y así, solo vas escribiendo las notas todas las notas, es un poco música aleatoria porque vas escribiendo un montón de notas, todas las notas en las posiciones. Y luego ya la gráfica que elijas es la que decide en verdad tu melodía.
A: ¿Podrías ahorita improvisar algo aunque no sea super exacto?
J: Sí, es más prestame una regleta y un punzón para, o sea, no voy a escribir las notas antes de. Pero, voy a imaginarme las notas y todo eso. Vamos a poner un título o así, no sé. "Matemúsica". Ahora, voy a imaginar que aquí están las notas ¿la gráfica? ¿el plano?
A: Aquí está.
J: ¿Tienes plastilina? ¿Con qué te gustaría: con una parábola? Yo creo que es más funcional con una parábola. {05:42} [construye una gráfica que podría ser similar algebraicamente a $y = -ax^2$ con $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$] Ahorita voy a intentar cantarla, así que mejor te envío el resultado cuando llegue a mi casa y esté con el piano. Bueno tiene que ir así, haciendo todo el recorrido. Entonces imaginemos que aquí está do, re, mi, fa, sol. Bueno, empieza en fa. ¿De qué linea sería? Creo que las líneas me falló, pero vamos a inventarle. Fa 7. O sea, de la octava siete. Bueno, la música se divide en octavas o sonidos y las octavas van son como las alturas de las notas. Si es agudo, grave y todo eso. Entonces empezamos en fa, el fa más agudo. {07:21} [con la mano izquierda recorre la gráfica que construyó buscando la siguiente nota de acuerdo a las especificaciones que había mencionado anteriormente] otro fa, pero más rápido. A ver déjame checar. Sí, otro fa. Ay, ya la moví un poco, pero bueno. {07:52} [comienza a construir el resto de la melodía buscando las notas de acuerdo a las especificaciones que dio y la curva que construyó] Es que es muy diferente la musicografía en braille.
A: ¿Tus profes saben de eso?
J: No, la ventaja es que ya hay programas de computo donde yo puedo escribir las notas y se ven en carácter común, entonces eso está muy chido. Se llama Braille Music Editor. {09:56} [toca el vértice de la parábola] aquí ya cambia el sentido de las notas, aquí sería un Si. Todo esto es muy imaginativo así que no esperes mucha precisión de mi parte... {11:35} [toca la rama de la parábola que queda en el cuadrente tres] ya todo esto sería en descenso. Casi la misma nota en descenso... Quien sabe si pueda, ok... {13:57} [comienza vocalizar] Es que está muy aguda y va muy brusco a muchos graves. Mejor te lo mando

en la noche. Eso es lo malo de hacer música como muy aleatoria. A lo mejor el resultado está padre.
A: ¿Con una cúbica?
J: Eso va a estar más violento. A ver tú ponla.
A: {15:26} [construye una gráfica que algebraicamente se puede expresar como $y = a(x+3)^2(x-5)$ con $a \in \mathbb{R}^+$]
J: {15:53} [recorre la gráfica con ambas manos desde el centro hacia el extremo derecho, luego cuenta cuanto se desplazó en x y cuanto en y para conocer las coordenadas del extremo derecho de la plastilina] Como es una cúbica le voy a poner el efecto de que suene tres, o sea, tres notas… {16:00} [comienza a recorrer por secciones la curva $y = a(x+3)^2(x-5)$ comenzando por el extremo derecho y luego traduciendolo a notas musicales como mencionó] Ya está. Esto está más loco. Hasta eso no es tanto, pero… {22:45} [relee las melodías que escribió] son diez. Si quieres en la noche te lo muestro.

VIII. Transcripción de la bitácora de la observadora no participante durante la implementación de la situación exploratoria

Transcripción textual de la bitácora.

Identifica que existen diferentes cuadrantes

* ¿Qué significa cada cuadrante?

Sabe identificar de cierta forma la monotonía y el cambio en el valor de la pendiente.

La agrupación de la recta las hace por la cercanía de las rectas con los ejes y dice que se parecen.

Luego empieza con la clasificación $xy - y - x - xy$ con un poco de ayuda para el criterio de clasificación, pero con independencia para agrupar.

Hace una recta para acompañar a una de las rectas de la clasificación anterior e identifica que es una clasificación buena porque el hacerlo con el criterio que el quería es subjetivo.

Para el nexo de la gráfica con la representación algebraica identifica que donde corta al eje y es el termino independiente.

Con las cuadráticas identifica las veces que corta el eje las veces que corta al eje x y al eje y. Identifica que no es posible tocar más de dos veces el eje x.
Todas tocan y.

Identificó que la suma de las raíces es igual al coeficiente de la x.

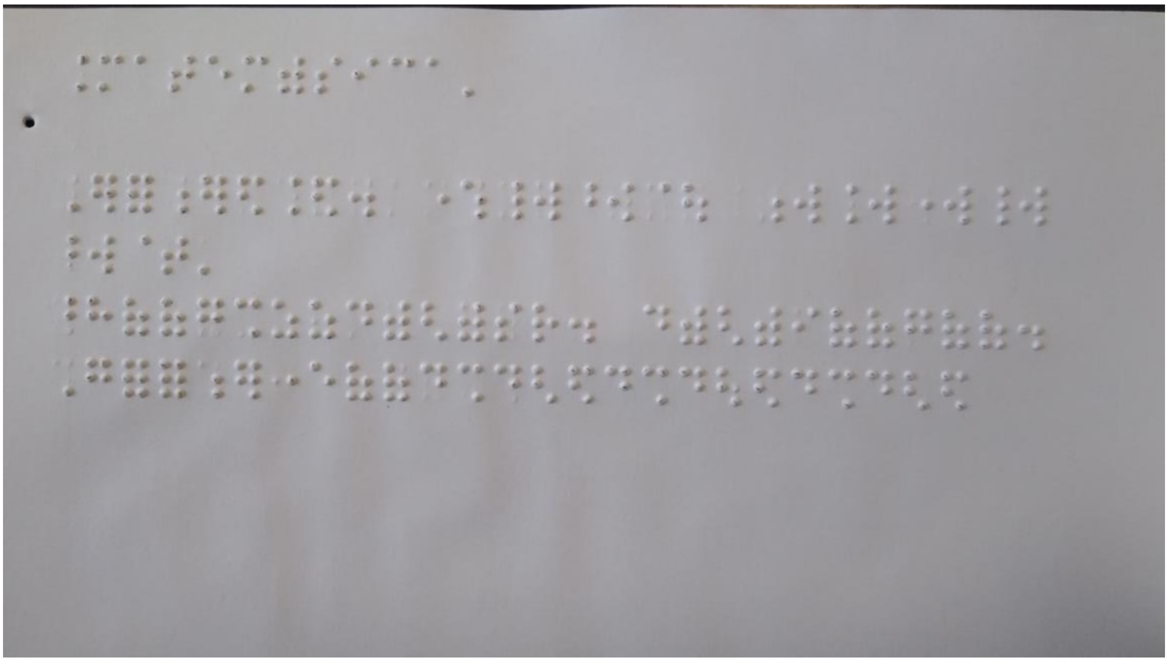
Las cúbicas no le son familiares mediante el tacto identifica que el grado va a estar asociado con el número de veces que cruza el eje x.

Logra reproducir cúbicas en el plano ubicando las raíces con signo pedido.

Con ayuda identifica los cambios de concavidad.

Insiste en la utilidad de estas graficas para recordar luego.

IX. Melodía compuesta por Jair



En la imagen se puede apreciar la melodía compuesta por Jair al *traducir* una cuadrática y una cúbica en música. La melodía tiene por nombre “Matemúsica”.