



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE  
MATEMÁTICA EDUCATIVA

**“El ángulo y su medida: Definiciones e imágenes del  
concepto en estudiantes que inician el Nivel Superior”**

T E S I S

Que presenta

YANIRA PACHUCA HERRERA

Para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS  
EN LA ESPECIALIDAD DE  
MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de la Tesis:  
Dr. Gonzalo Zubieta Badillo

Ciudad de México

JUNIO, 2021



Agradezco al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (Conacyt) por el apoyo financiero que permitió llevar a cabo mis estudios de Doctorado.

**Becario No. 289905**



Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) por la oportunidad de crecimiento y al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo otorgado para la conclusión de la Tesis.



A la generosidad del Profesor Fabio Julio Dávila Ojeda † y del Profesor José Luis Mejía Soler

A mi director de tesis, Dr. Gonzalo Zubieta Badillo

A mis profesores, Antonio de Gante Ugarte †, José Armando de León Solorzano y Luz María de Guadalupe González Álvarez.

A mis padres, Margarita Herrera Alemán y Pedro Pachuca Pérez.

A mis hermanos, Claudia, Margarita, Pedro y Alejandro.

A mi cuñado Miguel Ángel.

A mis sobrinos, Vanessa, Maurizio, Alejandro, Pedro, Sebastian, Eduardo, Paula, Isaac, Mariana, Luis, Santiago y Fátima.

A mis compañeros, Guillermo, Clarita, César, Dalia y Mario.

A todos aquellos que hicieron posible este trabajo.





# ÍNDICE

<b>PRESENTACIÓN</b> .....	<b>I</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>III</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>V</b>
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.1 ANTECEDENTES.....	2
1.1.1 Desarrollo histórico de la definición de ángulo .....	2
1.1.2 Definiciones de ángulo encontradas en algunos textos escolares y sugeridos como libros de consulta .....	4
1.1.3 Medida angular .....	8
1.1.4 La medida angular en la práctica .....	10
1.1.5 El ángulo y su medida en los programas de los diferentes niveles educativos hasta el bachillerato.....	14
1.1.6 Investigaciones relacionadas con el ángulo y su medida .....	15
1.1.7 Resultados relacionados con el ángulo y su medida .....	16
1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	18
1.2.1 Objetivos de investigación .....	19
1.2.2 Preguntas de investigación.....	19
1.2.3 Justificación .....	19
<b>CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO</b> .....	<b>22</b>
2.1 Imagen del concepto .....	23
2.2 Definición del concepto .....	24
2.2.1 Imagen y definición del concepto en procesos de pensamiento matemático .....	24
<b>CAPÍTULO 3 MÉTODO</b> .....	<b>28</b>
3.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN .....	29
3.1.1 Muestras .....	29
3.1.2 Instrumentos.....	31
3.1.2.1 Cuestionarios.....	31
3.1.2.2 Entrevistas semiestructuradas .....	44
3.1.4 Procedimiento .....	45

<b>CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE DATOS .....</b>	<b>47</b>
<b>CAPÍTULO 5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....</b>	<b>125</b>
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES.....</b>	<b>134</b>
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>138</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>141</b>

## PRESENTACIÓN

---

En este documento se presenta el informe de la investigación “El ángulo y su medida: Definiciones e imágenes del concepto en estudiantes que inician el Nivel Superior”. Esta investigación tiene como objetivo fundamental conocer las definiciones e imágenes que evocan estudiantes de primer semestre del Nivel Superior de una escuela de ciencias, de la Licenciatura en Física y Matemáticas y de una escuela del área administrativa, de la Licenciatura en Psicología, al contestar ítems relacionados con el ángulo y su medida.

La estructura del documento está organizada en seis capítulos. El Capítulo 1, *Introducción*, abarca los antecedentes, se plantea el problema objeto de estudio y se proporcionan antecedentes que lo justifican, así como los objetivos y las preguntas de investigación. El Capítulo 2, *Marco Teórico*, presenta el referente teórico que sustenta esta investigación: El modelo de Tall y Vinner (1981) de imagen y definición del concepto.

El *Diseño, instrumentos y datos* se exponen en el Capítulo 3, donde se muestra el enfoque del estudio, los participantes, los métodos para la recolección de datos, la descripción de los instrumentos que se utilizaron y las etapas del experimento.

En el Capítulo 4, *Análisis de datos*, se presenta el análisis de las respuestas y las justificaciones dadas por los estudiantes a los ítems del cuestionario y su interpretación.

En el Capítulo 5, *Discusión de resultados*, se discuten los resultados de la investigación.

Finalmente, en el Capítulo 6, *Conclusiones y reflexiones finales*, se presentan los resultados más importantes en relación a las definiciones e imágenes evocadas por los estudiantes. A su vez, se plantean nuevas interrogantes que surgen ante los resultados obtenidos en el estudio y posibles líneas abiertas de investigación.



## RESUMEN

El título de este escrito provoca a priori desconcierto, pues el lector podría considerar que el concepto de ángulo y su medida, está superado por los estudiantes al iniciar una licenciatura, no obstante, aunque algunas dificultades reportadas en la literatura sí lo están, otras persisten. En matemáticas la definición de un concepto resulta relevante, sin embargo, en la práctica los estudiantes recurren usualmente a la imagen evocada del concepto, lo que con frecuencia les trae dificultades para realizar una tarea específica. El objetivo de esta investigación es conocer las definiciones e imágenes del concepto del ángulo y su medida en estudiantes que inician el nivel superior. Se diseñaron dos cuestionarios similares basados en la noción de ángulo y su medida. Los ítems del primer cuestionario fueron contestados por 10 estudiantes mexicanos del primer semestre de la Licenciatura en Psicología (G1), y los del segundo cuestionario por 22 estudiantes mexicanos del primer semestre de la Licenciatura en Física y Matemáticas (G2). En G1 y G2, encontramos una amplia variedad en las definiciones personales de ángulo de los estudiantes, que no son una memorización de las definiciones dadas en los cursos o en los libros de texto. En las representaciones gráficas del ángulo, ambos grupos, muestran tener imágenes fuertemente conectadas con ángulos colocados en posiciones estereotipadas: ángulos con su vértice ubicado del lado izquierdo del cual emanan dos rayos, con uno de ellos horizontal. Para ángulos colocados en distintas posiciones, algunos estudiantes en G1 y G2, utilizan parcialmente las figuras de ángulo dadas y evocando otros conceptos matemáticos, construyen nuevos ángulos para los cuales estiman o relacionan con una medida. Algunos estudiantes en G1, tienden a atribuir la medida de un ángulo al tamaño del arco con el cual el ángulo es denotado, o al tamaño de los lados del ángulo, así como a identificar de manera natural ángulos convexos, contrario a G2, donde los estudiantes identificaron ángulos convexos y cóncavos. Un hallazgo importante es el reconocimiento de un ángulo formado por un rayo y una curva al utilizar el zoom en su vértice, por algunos estudiantes en G1 y G2.

Palabras clave: *ángulo; medida de ángulo; definición del concepto; imagen del concepto; nivel superior.*



## ABSTRACT

The title of this work causes a priori bewilderment for the reader might consider that the concept of angle and its measurement is surmounted by students at the beginning of undergraduate studies; although some difficulties reported in the literature are overcome, others remain. In Mathematics, the definition of a concept is relevant; however, in practice, students usually turn to the evoked concept image, which often makes it difficult for them to perform a specific task. The purpose of this research is to know the concept definition and concept image of angle and its measurement in students beginning their undergraduate studies. We designed two similar questionnaires based on the notion of angle and its measurement. 10 Mexican students that were in the first semester of their Bachelor of Psychology (G1) answered the items of the first questionnaire, and 22 Mexican students in the first semester of undergraduate Physics and Mathematics answered the second questionnaire (G2). In both groups, we found a wide variety in the individual definitions of an angle among the students which are not memorizations of definitions given in courses or textbooks. In the graphical representation of an angle, both groups show to have strongly connected images with angles placed in stereotypical positions: angles whose vertex is located at the left side, from which emanate two rays, one of them in a horizontal position. For those angles placed in different positions, some students in G1 and G2 partially use the given angle figures, and evoking other mathematical concepts, construct new angles that estimate or relate to an angle measure. Some students in G1 tend to attribute the measurement of an angle to the size of the arc with which the angle is denoted or to the size of the sides of the angle, as well as to naturally identifying convex angles. In contrast, students in G2 identified convex and concave angles. An important finding is the fact that a few students in G1 y G2 recognized an angle formed by a ray and a curve when zooming in on its vertex.

Keywords: *angle, angle measure; concept definition; concept image; undergraduate level.*



## **CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN**

# **ANTECEDENTES Y EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

Dado que el eje central de esta investigación es el ángulo y su medida, es necesario tener un acercamiento a estos conceptos matemáticos. Primero lo haremos desde el desarrollo histórico de la definición de ángulo. Después, a través de las definiciones del ángulo y su medida que aparecen en algunos textos escolares y sugeridos como libros de consulta de Geometría y Cálculo en los niveles medio superior y superior. Continuaremos con una revisión a los planes de estudio desde los niveles básicos, hasta el nivel medio superior en lo referente a los temas relacionados con el ángulo y su medida, en México. Finalmente, revisaremos las investigaciones reportadas sobre estos conceptos matemáticos. El capítulo termina con el planteamiento de los objetivos y las preguntas de investigación.

## **1.1 ANTECEDENTES**

### **1.1.1 Desarrollo histórico de la definición de ángulo**

El concepto de ángulo, esencial en la teoría matemática, fue concebido a través de la historia desde perspectivas diferentes por matemáticos y filósofos. En la obra de Heath (1956), volumen I, se muestra una recopilación histórica de las diferentes definiciones que se han dado sobre el ángulo, al tomar como punto de partida las definiciones 8 y 9 de Euclides, y continúa con las definiciones dadas por Aristóteles, Apolonio, Plutarco, Carpo, Eudemo, Proclo, hasta las de Schotten y Veronese. Las definiciones vienen acompañadas de una crítica u opinión sobre la definición dada.

Estas definiciones 8 y 9 son las siguientes:

8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo (Heath, 1956, p. 176, nuestra traducción).

En el caso de las definiciones 8 y 9 de Euclides, Heath (1956) comenta lo siguiente:

La expresión ‘y no están en línea recta’ resulta sorprendente, teniendo en cuenta que el ángulo puede estar formado por rectas o curvas. Parece como si Euclides hubiera pensado al principio definir el ángulo rectilíneo y hubiera tomado después en consideración los ángulos formados por una recta y una curva o por dos curvas, con lo que se ve orillado a sustituir ‘líneas rectas’ por ‘líneas’.

Al parecer el uso de *inclinación* es una innovación de Euclides, frente a la tradición anterior presente en Aristóteles quien relacionaba el ángulo con la idea de ‘fractura’ (Heath, 1956, p. 176, nuestra traducción).

Otra reseña histórica del concepto de ángulo se encuentra en los artículos de Matos (1990; 1991) cuyo objetivo es comprender las formas en que los matemáticos entendieron el ángulo, las propiedades que le atribuyeron al concepto y los problemas que resolvieron o no al utilizarlo. En el primer artículo, Matos (1990) hace una división entre las definiciones de ángulo en: Concepciones griegas pre-euclidianas, la concepción de Euclides de ángulo y concepciones post-euclidianas. Dentro de las concepciones griegas pre-euclidianas cita las de Aristóteles y de Eudemo y escribe lo siguiente: “*En algunos escritos, Aristóteles parece haber concebido el ángulo como un desvío o ruptura de una línea.*” (Matos, 1990, p. 7, nuestra traducción). En cuanto a las concepciones post-euclidianas plantea que surgieron debates sobre la naturaleza del ángulo al tratar de responder la pregunta ¿a qué categoría aristotélica de cualidad, cantidad o relación pertenece un ángulo de acuerdo a su definición?

En el segundo artículo, Matos (1991) continúa la discusión sobre la noción de ángulo desde la Edad Media hasta los enfoques contemporáneos. Comenta las definiciones de Proclo, Avicena, Averroes, Alberto Magno, Veronese y Bertrand, entre otros. En cuanto a las concepciones contemporáneas, Matos (1991) cita la definición dada por Hilbert y expresa que ésta es aceptada por muchos matemáticos contemporáneos y utilizada en las matemáticas escolares en algunos países. Hilbert (1971) definió el ángulo de la siguiente manera:

Sea  $\alpha$  un plano cualquiera, y  $h, k$  dos semirrayos diferentes que parten de un punto  $O$  en  $\alpha$  y que pertenecen a rectas distintas. El sistema de estos

dos semirrayos  $h, k$  se llama ángulo y lo designaremos con  $\sphericalangle(h, k)$  o con  $\sphericalangle(k, h)$  (Hilbert, 1971, p. 11, nuestra traducción).

Otras definiciones que aparecen en este artículo son las dadas por Dieudonné, Choquet, Kasner y Waismann.

En sus conclusiones, Matos (1991) señala que la discusión sobre la naturaleza del ángulo aún no ha terminado y que no sólo fue abordada por matemáticos, sino también por físicos interesados en cuestiones relativas a la medida del ángulo. Menciona también que los ángulos están asociados con las rotaciones y con las medidas de eventos periódicos, e indica un concepto innovador de ángulo: el ángulo como cantidad de giro.

Basta con observar las concepciones de ángulo dadas por los matemáticos y filósofos en las obras de Heath (1956) y Matos (1990; 1991) para constatar la transformación de la definición de ángulo con el paso del tiempo, y darse cuenta de cómo cada definición se creó para resolver los problemas de acuerdo a las necesidades en el campo que estudiaba su autor.

Por otro lado, en cuanto a la medida de ángulos, Wallis (2005) da una breve reseña histórica de los métodos más primitivos para medir ángulos hasta los métodos usados durante el último siglo, estos últimos impulsados por científicos y fabricantes de instrumentos que buscaban una mayor precisión en la medida de ángulos.

### **1.1.2 Definiciones de ángulo encontradas en algunos textos escolares y sugeridos como libros de consulta**

En el ámbito escolar, durante los cursos de geometría elemental, se define el ángulo en forma conveniente para el estudio de los triángulos, los criterios de congruencia, semejanza, paralelismo, etcétera. Esta forma se muestra en las siguientes definiciones de dos libros de geometría consultados en el nivel medio superior. En Moise & Downs (1986) el ángulo se define como sigue: “*Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un ángulo. Los dos rayos se llaman los lados del ángulo y el extremo común se llama el vértice*” (Moise & Downs, 1986, p. 75). Esta definición excluye los ángulos de  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $360^\circ$ , los ángulos de más

de una vuelta y negativos. Para ilustrarla, añaden las figuras siguientes, que bastan para una adecuada definición en el contexto geométrico (ver figura 1.1).

Un ángulo es una figura como una de éstas:



Figura 1.1 Ángulo definido como pares de semirrectas con un origen común (Moise & Downs, 1986, p. 75)

Mientras, en Baldor (1983), el ángulo se define así: “Ángulo es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado ‘vértice’. Las semirrectas se llaman ‘lados’ [...]” (Baldor, 1983, p. 22). Esta definición la ilustra con las figuras siguientes (ver figura 1.2).

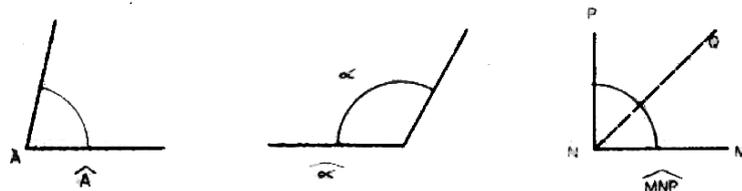


Fig. 19

Figura 1.2 Ángulo definido como abertura (Baldor, 1983, p. 22)

En esta definición, se desconoce con precisión a qué se refiere el autor con la palabra “abertura”, razón por la cual no se sabe si esta definición incluye ángulos de  $0^\circ$ , o no. Sin embargo, en este mismo texto, en el estudio de la trigonometría, el autor define el ángulo desde el punto de vista trigonométrico, donde hace explícito lo que significan ángulos de cualquier tipo (ángulos de  $0^\circ$ , ángulos de  $360^\circ$ , ángulos positivos y negativos) como se verá más adelante (sección 1.1.3).

Observemos que, en las ilustraciones de estos dos libros, todos los ángulos tienen un rayo horizontal respecto a la página. Además, en las figuras de ángulo de la primera definición no hay un arco a diferencia de las figuras en la segunda definición. En Moise

& Downs (1986) es hasta después de definir la medida de un ángulo que los autores indican con un arco el ángulo del cual se desea obtener su medida, seguramente para evitar la ambigüedad de no saber si se refieren al ángulo convexo o cóncavo.

En textos de cálculo consultados en el nivel superior como los de Spivak (1993), Ayres & Moyer (1991) y Leithold (1992) aparece la definición de ángulo como preámbulo al estudio de las funciones trigonométricas; sin embargo, esta definición aparece de forma diferente a la dada en geometría, pues esta se amplía y ahora los ángulos se definirán a través de ángulos dirigidos u orientados. Por ejemplo, en Spivak (1993) aparece lo siguiente:

En geometría elemental, un ángulo es sencillamente la unión de dos semirrectas con un punto común inicial [...] Más útiles para la trigonometría son los « ángulos dirigidos », los cuales pueden ser considerados como pares  $(l_1, l_2)$  de semirrectas con el mismo punto inicial (Spivak, 1993, pp. 425–426).

Spivak añade la figura siguiente (ver figura 1.3).

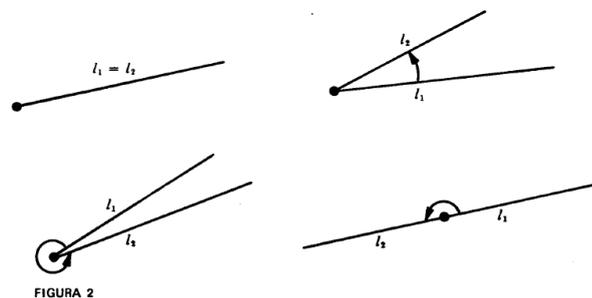


Figura 1.3 Ángulos dirigidos (Spivak, 1993, p. 426)

Ayres & Moyer (1991) mencionan lo siguiente respecto al ángulo plano:

Más comúnmente, puede pensarse que un ángulo plano se genera si se gira (en un plano) una línea de la posición inicial  $OX$  a la posición terminal  $OP$ . Entonces,  $O$  es otra vez el vértice,  $\overrightarrow{OX}$  al que se llama *lado inicial*, y  $\overrightarrow{OP}$  se llama *lado terminal* del ángulo (Ayres & Moyer, 1991, p. 1).

Con la figura siguiente ilustran su definición (ver figura 1.4).

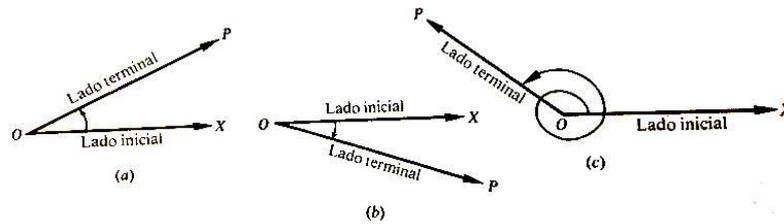


Fig. 1-2

Figura 1.4 Ángulos planos generados a través de giros (Ayres & Moyer, 1991, p. 2)

Leithold (1992) escribe lo siguiente:

Cualquier ángulo es congruente con el ángulo que tenga su vértice en el origen y un lado, llamado lado inicial, sobre el lado positivo del eje  $x$ . Un ángulo tal se dice que está en posición normal. La Figura 0.6.1 muestra un ángulo AOB en posición normal con OA como lado inicial. El otro lado, OB, se llama lado terminal. El ángulo AOB puede ser formado girando el lado OA hasta el lado OB [...] (Leithold, 1992, p. 61)

El autor ilustra la definición con la figura siguiente, que incluye ejes cartesianos (ver figura 1.5).

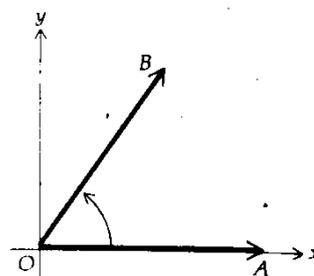


FIGURA 0.6.1

Figura 1.5 Ángulo en posición normal (Leithold, 1992, p. 61)

Estas tres definiciones incluyen ángulos positivos, negativos, de  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $360^\circ$  y ángulos de más de una vuelta. Cabe destacar que en las ilustraciones de los ángulos de las figuras 1.4 y 1.5 todas tienen un lado alineado con la horizontal. Mientras que sólo en la figura 1.4 se representan ángulos negativos y de más de una vuelta. Todas estas definiciones (las dadas en geometría y en trigonometría) descartan la posibilidad de que

al menos uno de los lados del ángulo pueda ser una línea curva. Además, en la mayoría de las ilustraciones de ángulo de estos libros se señala el ángulo convexo.

En resumen, en los niveles medio superior y superior encontramos varias definiciones de ángulo tanto para los ángulos en geometría como para los ángulos en trigonometría. Esta diversidad tiene que ver con el objetivo que pretende cada autor, y está ajustada a la estructura matemática de la que se está haciendo uso.

### 1.1.3 Medida angular

Haremos referencia a Moise & Downs (1986), quienes escriben: “*Así como medimos segmentos con una regla, medimos ángulos con un transportador*” (Moise & Downs, 1986, p.81). Para ilustrar sus ideas Moise & Downs añaden la figura siguiente (ver figura 1.6).

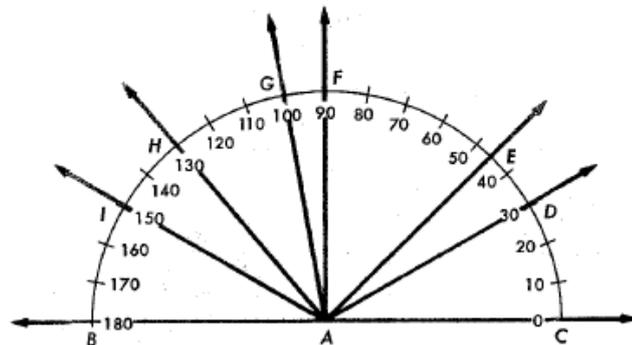


Figura 1.6 Ilustración de un transportador (Moise & Downs, 1986, p. 81)

En seguida agregan lo siguiente: “*El número de grados de un ángulo se llama su medida. Si hay  $r$  grados en el  $\sphericalangle PQR$ , entonces escribimos*

$$m\angle PQR = r.” \text{ (Moise \& Downs, 1986, p. 81).}$$

Por otra parte Baldor (1983), en la sección titulada medida de ángulos señala que: “*Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma por unidad*” (Baldor, 1983, p. 23).

Más adelante, en la sección de trigonometría, Baldor describe lo que es un ángulo generado de la siguiente manera:

Sea  $\overrightarrow{OA}$  una semirrecta fija y  $\overrightarrow{OC}$  una semirrecta móvil del mismo origen y en coincidencia con  $\overrightarrow{OA}$ .

Supongamos ahora que la semirrecta  $\overrightarrow{OC}$  gira alrededor del punto  $O$ , en sentido contrario a las manecillas del reloj. Entonces  $\overrightarrow{OC}$ , en cada posición engendra un ángulo, el ángulo  $\sphericalangle AOC$  (Fig. 303), por ejemplo. Cuando  $\overrightarrow{OC}$  coincide con  $\overrightarrow{OA}$ , el ángulo es nulo; cuando  $\overrightarrow{OC}$  comienza a girar, el ángulo aumenta a medida que  $\overrightarrow{OC}$  gira. Al coincidir  $\overrightarrow{OC}$  de nuevo con  $\overrightarrow{OA}$ , ha engendrado un ángulo completo ( $360^\circ$ ), pero  $\overrightarrow{OC}$  puede seguir girando y engendrar un ángulo de un valor cualquiera (Baldor, 1983, pp. 302–303).

Estas ideas las ilustra con la figura 1.7.

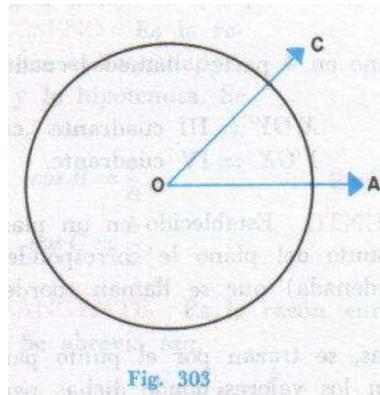


Figura 1.7 Ángulo generado (Baldor, 1983, p. 303)

Baldor (1983), también trata el tema de ángulos positivos y negativos y escribe lo siguiente: “Arbitrariamente se ha convenido que los ángulos engendrados en sentido contrario a las manecillas del reloj se toman como positivos y los ángulos engendrados en el mismo sentido de las agujas del reloj se consideran negativos” (Baldor, 1983, pp. 302–303).

### 1.1.4 La medida angular en la práctica

En la escuela, la medida angular se obtiene usualmente utilizando al menos uno de los siguientes recursos: Comparación con ángulos de referencia, uso del transportador y el uso de postulados y definiciones relacionadas con medida angular. Mencionaremos estos recursos cuando analicemos las respuestas a nuestro cuestionario.

A continuación, hacemos una descripción de cada uno de estos recursos.

**Comparación con ángulos de referencia.** Se puede aproximar la medida de un ángulo, al tomar como referencia ángulos cuya medida es conocida, por ejemplo, el ángulo recto cuya medida es de  $90^\circ$ , el ángulo llano que mide  $180^\circ$  y el ángulo agudo (mide menos de  $90^\circ$ ), entre otros. Por ejemplo, se puede saber una medida aproximada del ángulo de la figura 1.8, si tomamos como ángulo de referencia el ángulo recto, entonces la medida del ángulo sería aproximadamente la mitad de la unidad que es el ángulo recto.

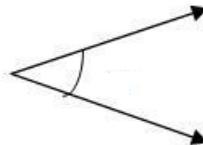


Figura 1.8 Ejemplo de un ángulo del cual se desea conocer su medida

**Uso del transportador.** Para obtener la medida de un ángulo con precisión podemos utilizar como herramienta el transportador, el cual puede tener forma semicircular o de círculo completo. Esta herramienta utiliza el grado como unidad de medida. En la figura 1.9 se ilustra un transportador semicircular.

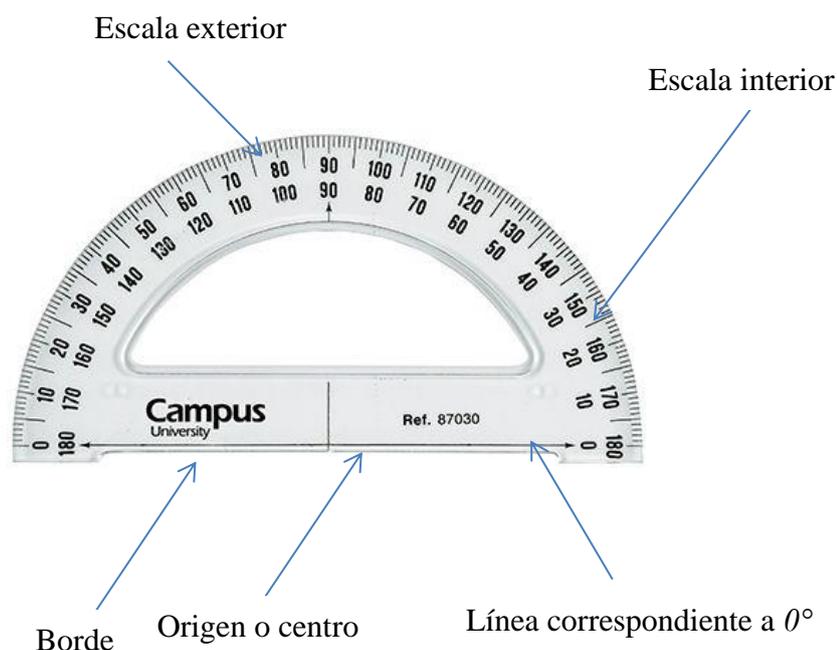


Figura 1.9 Transportador semicircular

La mayoría de los transportadores tiene dos escalas opuestas, una al interior y otra en el exterior. Ambas utilizan el grado como unidad de medida. La escala externa comienza desde la izquierda y va desde 0 hasta 180 hacia la derecha. La escala interna comienza desde la derecha y va desde 0 hasta 180 hacia la izquierda.

La elección de la escala se hace de acuerdo con el ángulo que se vaya a medir, ya sea un cierto ángulo o su suplemento, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Supongamos que queremos medir el ángulo agudo en la figura 1.10. El primer paso para medir el ángulo es colocar el centro u origen del transportador, en el vértice del ángulo (ver figura 1.10).



Figura 1.10 Colocación correcta del origen del transportador en el vértice del ángulo

El segundo paso, es rotar el transportador para alinear un lado del ángulo con la línea correspondiente a  $0^\circ$  la cual es paralela al borde del transportador, pero no es el borde del transportador (ver figura 1.11).

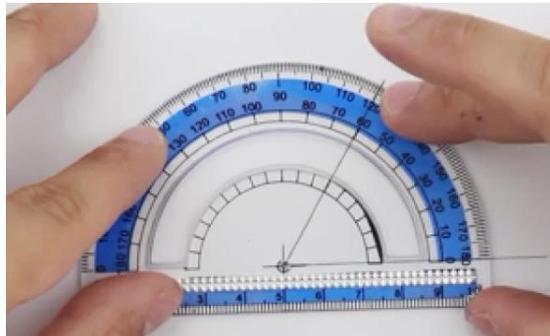


Figura 1.11 Alineación correcta del transportador

El tercer paso consiste en prolongar, si es necesario, de manera imaginaria o con un trazo (este trazo puede rebasar la circunferencia del transportador) el lado que no coincide con la línea correspondiente a  $0^\circ$  hasta llegar a la escala adecuada del transportador (recuerde que la elección de la escala se hace de acuerdo al ángulo que se vaya a medir, ya sea un cierto ángulo o su suplemento). El número en la escala por el que pasa la línea prolongada es la medida del ángulo en grados. En la figura 1.11 la elección de la escala adecuada es la interior obteniéndose una medida de 60, lo cual es consistente de acuerdo a la definición de ángulo agudo (ángulo de referencia).

Si, por ejemplo, ahora el ángulo que se quiere medir es el obtuso entonces, en el tercer paso la escala que se selecciona es la externa que señala una medida de 120, medida que es consistente con la definición de ángulo obtuso (ángulo de referencia).

La limitación que tiene un transportador semicircular es que si se quieren medir ángulos cóncavos (de más de  $180^\circ$  y menos de  $360^\circ$ ), se tiene que realizar una doble medición. Por otro lado, si se desea medir ángulos colocados en posiciones diferentes al de la figura 1.11 como los que se muestran en la figura 1.12, simplemente se debe elegir la escala adecuada del transportador.



Figura 1.12. Ángulos colocados en diferentes posiciones, con un rayo horizontal

En cambio, para obtener la medida de ángulos como los de la figura 1.13, habrá que rotar la hoja donde están impresos los ángulos o rotar el transportador colocándolo en una posición similar al ángulo de la figura 1.11, que facilite la medición de los ángulos.

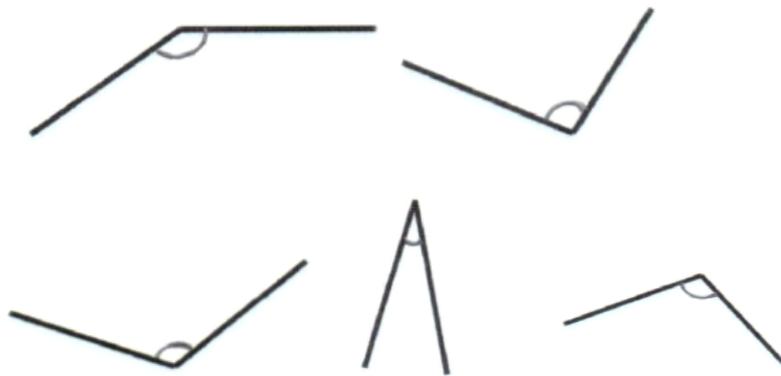


Figura 1.13 Ángulos donde al menos uno de los lados no es horizontal

**Uso de postulados y otras definiciones.** Otro recurso para determinar la medida de ángulos es a través del uso de postulados y otras definiciones como: el postulado de la adición de ángulos, la definición de par lineal, la definición de ángulos suplementarios, definición de rectas, segmentos o rayos perpendiculares, definición de ángulos complementarios, y definición de ángulos congruentes, entre otros.

Por ejemplo, supongamos que en la figura 1.14 el ángulo  $\sphericalangle AOC$  es recto y que se desea conocer la medida de  $\sphericalangle AOB$ .

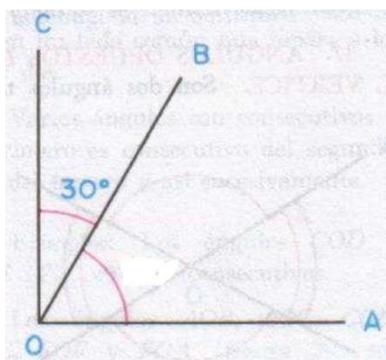


Figura 1.14 Ejemplo de un ángulo del cual se desea conocer su medida

De acuerdo al postulado de la adición de ángulos:  $m\angle AOC = \angle AOB + m\angle BOC$ , pero  $m\angle AOC = 90^\circ$  y  $m\angle BOC = 30^\circ$ , entonces  $m\angle AOB = 60^\circ$ .

### 1.1.5 El ángulo y su medida en los programas de los diferentes niveles educativos hasta el bachillerato

El ángulo y su medida forman parte del estudio de la geometría y la trigonometría. De acuerdo con los Programas de Estudio y Guía para el maestro de Educación Básica Primaria (2011) en México, en el estudio de la Geometría, se tiene un primer acercamiento al concepto del ángulo en el tercer grado. Después, en el cuarto grado, se aborda el tema de medición de ángulos con el transportador utilizando el grado como unidad de medida. Su estudio continúa en el quinto año de primaria. Son el primer y el tercer grado de secundaria de acuerdo con los Programas de Estudio y Guía para el maestro de Educación Básica Secundaria (2011) en México, donde se retoma nuevamente el estudio de estos conceptos matemáticos. Se busca la identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal, se presenta el teorema de Pitágoras, se resuelven problemas que implican el uso de las razones trigonométricas y el valor de la pendiente de una recta, entre otros temas.

En el caso del Nivel Medio Superior, el Plan y Programas Indicativos de la Escuela Nacional Preparatoria (1996) en México, señala que, en el estudio de la Trigonometría en el quinto año de bachillerato, entre otros temas, se aborda que un ángulo puede medirse en grados o radianes, se introduce el círculo trigonométrico y se definen las funciones trigonométricas directas e inversas. Por lo tanto, se asume que al finalizar la

educación media el alumno tiene el dominio de estos conceptos los cuales son esenciales para el aprendizaje de otros cursos de niveles más avanzados como: Cálculo, Geometría Analítica, Mecánica, Estática, Análisis vectorial y otros.

### **1.1.6 Investigaciones relacionadas con el ángulo y su medida**

Varias investigaciones reportan que, desde la enseñanza elemental, los estudiantes muestran dificultades en el aprendizaje del concepto de ángulo, lo cual ha generado interés, desarrollándose varias líneas de investigación.

Una primera línea de investigación está dirigida hacia la formación del concepto de ángulo a partir de experiencias físicas como la de White & Mitchelmore (2003), quienes diseñaron una secuencia de enseñanza cuya finalidad era abstraer el concepto de ángulo a partir de actividades físicas con materiales concretos. En esta misma línea aparece el trabajo de Browning, Garza-Kling & Sundling (2007) quienes desarrollaron actividades enfocadas en el ángulo y su medida al incorporar actividades prácticas, aplicaciones gráficas en la calculadora y software de computadora. El objetivo principal era ayudar a los estudiantes a desarrollar un concepto de ángulo más amplio que incorporara tres aspectos del concepto de ángulo: espacio, giro y dos rayos que se originan desde un vértice común. Otra aportación es el trabajo desarrollado por Smith, King & Hoyte (2014), quienes utilizaron el cuerpo como un medio en el aprendizaje del concepto de ángulo y su medida en un ambiente de computadora al emplear Kinect para Windows. Uno de los objetivos era determinar si las actividades que utilizan representaciones dinámicas del ángulo al usar el cuerpo y la representación visual del ángulo en la pantalla facilitaban la conexión entre las representaciones. Los autores comentan que se pudo observar en uno de los participantes la conexión de su concepto de ángulo, al tomar como metáfora que sus brazos representaban un ángulo, y a dar sentido a la relación entre la posición de sus brazos y diferentes ángulos.

Otra investigación es la de Rotaeché & Montiel (2017) quienes diseñaron una experiencia didáctica cuyo objetivo era que estudiantes de secundaria aprendieran el concepto de ángulo. En su investigación se reporta que, de acuerdo a la evidencia, es posible la construcción de significados, representaciones y usos del concepto de ángulo previo a la formalización del concepto, concluyendo que con el diseño didáctico implementado sólo se logró construir ciertos “*significados angulares*” y que los

estudiantes identificaran, cuantificaran y acotaran la “*angularidad*”, más que al ángulo como concepto, además de interactuar con su naturaleza estática y dinámica, a través de las cualidades del ángulo. Por último, mencionan que dar el paso a la abstracción del concepto articulando estos nuevos significados con los conceptos escolares previos resultó una tarea compleja.

Una segunda línea de investigación se enfocó en la historia del concepto de ángulo, como el trabajo de Keiser (2004), quien en su estudio observó las dificultades en el desarrollo de las nociones del concepto de ángulo en estudiantes y las comparó con las dificultades que experimentaron los matemáticos, de acuerdo al desarrollo histórico del concepto. Keiser encontró similitudes, las cuales clasificó en tres temas principales: ¿qué se está midiendo exactamente cuándo se hace referencia al tamaño del ángulo?, ¿los ángulos pueden estar formados por curvas? y las dificultades en concebir ángulos de  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $360^\circ$ . Esto con la finalidad de destacar la complejidad del concepto del ángulo y con esta evidencia argumentar que los estudiantes también se enfrentan con esta complejidad en el desarrollo de su propio concepto. Es importante mencionar que todos estos trabajos se llevaron a cabo con estudiantes de niveles de educación básica.

Por último, mencionaremos una tercera línea de investigación, desarrollada por Casas & Luengo (2005) quienes estudiaron la evolución de la estructura cognitiva de los alumnos durante el proceso de enseñanza del concepto de ángulo. Este trabajo y el realizado por Moore (2013), (quien examinó la comprensión de la medida de ángulo en estudiantes de precálculo mientras participaban en un experimento de enseñanza), son de las pocas investigaciones donde se muestran las concepciones del ángulo y su medida en estudiantes del nivel superior.

### **1.1.7 Resultados relacionados con el ángulo y su medida**

Algunos de los resultados encontrados en estas investigaciones, como los de White & Mitchelmore (2003), señalan que el concepto de ángulo es un concepto multifacético difícil de aprender, al encontrar en estudiantes de niveles básicos dificultades al identificar los lados que forman un ángulo, por ejemplo, el que se forma al abrir una puerta al no haber un lado visible o con los ángulos de inclinación debido a que no están familiarizados con la idea del ángulo que se forma con la horizontal. Además,

mencionan que les fue difícil determinar lo que los estudiantes intentaban comunicar cuando se les pidió que definieran el concepto de ángulo.

Mientras, Browning, Garza-Kling & Sundling (2007) mencionan que algunos estudiantes de niveles básicos tienen nociones de ángulo tan limitadas que tienen dificultades en proporcionar una definición matemática adecuada para el término y, en cambio, describen lo que estamos midiendo cuando medimos un ángulo, por ejemplo, cuando mencionan que un ángulo es la “cantidad de grados” o “el número de grados”. Además, con frecuencia no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar, y agregan que algunos adultos aún luchan con la identificación de ángulos de 90 grados que no tienen un rayo horizontal.

Entre otras dificultades, Keiser (2004) señala que algunos estudiantes, en los niveles básicos, en sus nociones respecto a qué se mide exactamente al referirse al tamaño de los ángulos expresan que es la amplitud o distancia entre las líneas, además, tienden a atribuir la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen, algunos consideran que en el dibujo de las letras R o P puede haber ángulos al mirar intersecciones entre líneas y curvas, es decir, ellos observan dos líneas que se “conectan” en un punto; en cambio en el dibujo de la letra S no puede haber ángulos porque no observan intersecciones en ningún lado, puesto que mencionan “es un sólo trazo”. No conciben un ángulo de 180 grados porque no ven dos líneas que se conectan y el ángulo de 360 grados no lo consideran un ángulo al no visualizar dos lados que se unen “en una esquina”. Además, suponen que entre más espacio hay entre los rayos, el ángulo es más grande, es decir, dado un ángulo, a medida que se alargan los lados, el área aumenta, y esto hace que los estudiantes consideren que la medida del ángulo cambia, es decir, es mayor. También menciona que es probable que los estudiantes de los niveles básicos carezcan de un vocabulario adecuado para formular descripciones claras del ángulo

En cuanto a la medida angular, Pachuca (2014) reporta que profesores de la educación media superior y alumnos del nivel superior tienen dificultades para interpretar el argumento de la función trigonométrica seno, cuando la unidad de medida es un número real. En las respuestas, cuando se les pide evaluar la función seno en un número real cualquiera, marcan el valor del argumento con el símbolo de grados. Cuando en el argumento aparecía el valor  $\pi$ , por ejemplo, en  $180/\pi$  consideraron como

medida angular los radianes porque asociaron el número  $\pi$  con radianes. Para números como -7, o 0.357 algunos no sabían interpretar el argumento. Mientras, Akkoc (2008) reporta que profesores en formación tuvieron dificultades con el concepto de radián, además de evidenciar que la imagen del concepto de grado predomina sobre la de radián concluyendo que estas dificultades podría causar problemas para comprender las funciones trigonoméricas.

En conjunto, desde diferentes enfoques, las investigaciones antes mencionadas han intentado proporcionar a los estudiantes un entorno de aprendizaje significativo sobre el concepto de ángulo, revelando que algunos estudiantes todavía muestran dificultades para concebir este concepto, mientras otras han revelado que los estudiantes tienen una comprensión fragmentada del ángulo y su medida. La mayoría de estos estudios enfatizaron su atención en estudiantes de niveles básicos. Al parecer carecemos de estudios, en los niveles avanzados, que se centren en conocer las nociones del concepto de ángulo y su medida de los estudiantes.

## **1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

De acuerdo al perfil de egreso de un estudiante del Nivel Medio Superior se asume que al finalizar la educación media el alumno tiene el dominio del concepto de ángulo y su medida el cual es esencial para el aprendizaje de otros cursos de niveles más avanzados como: Cálculo, Geometría Analítica, Mecánica, Estática, Análisis vectorial y otros.

Sin embargo, se han reportado dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de ángulo y su medida desde los niveles básicos como se muestra en las investigaciones desarrolladas por White & Mitchelmore (2003), Browning, Garza-Kling & Sundling (2007), Smith, King & Hoyte (2014), Rotache & Montiel (2017), Keiser (2004), Casas & Luengo (2005), no así en el Nivel Superior donde es casi nula la existencia de investigaciones relacionadas con el ángulo y su medida, quizás dando por un hecho que el concepto ya está adquirido.

De lo anterior, se plantea la siguiente problemática: Se desconoce el estado de los conocimientos del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician el Nivel Superior.

### **1.2.1 Objetivos de investigación**

La presente investigación persigue el siguiente objetivo:

Conocer las definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician el Nivel Superior.

### **1.2.2 Preguntas de investigación**

Con la finalidad de conocer las definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician el nivel superior se plantea la siguiente pregunta general de investigación.

¿Qué definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida tienen los estudiantes al iniciar el nivel superior?

Para dar respuesta a la pregunta general y, como parte de la metodología a seguir, se plantearon las siguientes preguntas de investigación, más específicas que guiaron el trabajo de investigación:

- ¿Qué definición tienen los estudiantes del ángulo al iniciar la enseñanza superior?
- ¿Qué imágenes evocan los estudiantes del ángulo y su medida, al contestar ítems relacionados con estos conceptos?

### **1.2.3 Justificación**

El estudio del ángulo y su medida se hace en todos los niveles de educación, desde el básico hasta el nivel superior. En los niveles básicos se aborda en los temas de Geometría y como un inicio a las razones trigonométricas; en el nivel medio superior se estudia en el tema de funciones trigonométricas. Finalmente, en el nivel superior se utiliza en cursos como Geometría Analítica, Cálculo, Análisis vectorial, Mecánica, Estática, entre otros.

No obstante, existen evidencias que indican que en muchas ocasiones los alumnos no cuentan con los conocimientos básicos que se presumen conocidos en relación con el

ángulo y su medida. Por ejemplo, como resultado de una investigación previa llevada a cabo con profesores de la educación media superior y alumnos del nivel superior, encontramos la falta de un entendimiento sólido del concepto de medida de ángulo, al mostrar dificultades para interpretar el argumento de la función trigonométrica seno, cuando la unidad de medida es un número real. Pero ¿cuál es el origen de estas dificultades? ¿El concepto de ángulo? ¿La medida del ángulo? Estas son algunas de las preguntas que estamos valorando y necesitamos responder.

Finalmente, la experiencia en el aula nos ha mostrado que, en las clases de Estadística de la educación superior, cuando se les solicita a los estudiantes trazar un gráfico de pastel, usando su transportador, la mayoría tiene dificultades al construir y medir los ángulos de los sectores circulares de este gráfico. Por ejemplo, en el curso de Estadística de la educación superior, cuando se le pide a los estudiantes trazar un gráfico de pastel usando su transportador, donde representen sectores con los porcentajes: 25% ( $90^\circ$ ), 12.50% ( $45^\circ$ ), 35% ( $126^\circ$ ) y 27.50% ( $99^\circ$ ), algunos estudiantes trazan una circunferencia y un primer rayo horizontal que relaciona con la parte positiva del eje  $x$ , a partir del cual miden los cuatro ángulos que se corresponden con los porcentajes mencionados. De esta forma construyen el gráfico que se muestra en la figura 1.15.

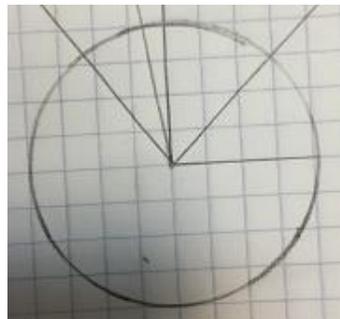


Figura 1.15 Gráfico de pastel donde miden todos los sectores angulares a partir del segmento horizontal trazado.

Además, no saben que escala elegir del transportador para construir los ángulos con las medidas requeridas. Estas dificultades no han sido reportadas en investigaciones relacionadas con el estudio del ángulo y su medida (White & Mitchelmore, 2003; Browning, Garza-Kling & Sundling, 2007; Smith, King & Hoyte, 2014; Rotaecche &

Montiel, 2017; Keiser, 2004), sin embargo, son obstáculos que no les permiten construir a los estudiantes el gráfico de forma correcta.

Tomando en cuenta lo anterior, hemos considerado importante llevar a cabo el siguiente estudio donde nuestro objetivo es conocer la definición e imagen del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. Los resultados de esta investigación nos permitirán tener un acercamiento al conocimiento real de los estudiantes sobre estos conceptos al iniciar su formación en cursos avanzados de Matemáticas o Física; saber si las dificultades reportadas en investigaciones realizadas en los niveles elementales persisten en los niveles avanzados y, por último, proporcionar a los profesores de dichos cursos elementos para el diseño de actividades que permitan al estudiante tener un mejor desempeño.

## **CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO**

Entre los enfoques que estudian la formación de conceptos, tenemos el desarrollado por Tall & Vinner (1981) quienes confrontan los conceptos matemáticos como se definen formalmente y los procesos cognitivos mediante los cuales son concebidos. Estas ideas se formalizaron a través de la llamada *imagen del concepto* y la *definición del concepto*.

De acuerdo con Vinner (2011) el *concepto* es una idea evocada en nuestra mente cuando escuchamos o vemos el *nombre del concepto*. El concepto existe sólo en nuestra mente y puede ser considerado algo abstracto. Por su parte, el nombre del concepto es una entidad lingüística, usualmente llamada una noción o un término que tiene un aspecto físico (visual o vocal).

### 2.1 Imagen del concepto

Según Vinner (2002), cuando vemos o escuchamos el nombre de un concepto, algo es evocado en nuestra memoria, y lo evocado usualmente no es la definición del concepto sino lo que él y Tall denominaron “imagen del concepto”, que definen de la siguiente manera:

Se usa el término imagen del concepto para describir la estructura cognitiva completa, esto es, aquella asociada con el concepto en la mente del individuo y que es continuamente construida, como un proceso de madurez individual que cambia a partir de nuevos estímulos y todo tipo de experiencias (Tall & Vinner, 1981, p. 152, nuestra traducción).

Agrega además que esta imagen es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto, puede ser una representación visual del concepto cuando tenga representaciones visuales, imágenes mentales, una colección de impresiones o experiencias, y estas pueden traducirse a formas verbales. Toma como ejemplo, la palabra "mesa", y dice que una imagen de una determinada mesa puede evocarse en nuestra mente. Se pueden evocar experiencias de comer en una mesa, recordar que muchas mesas están hechas de madera; así como asociaciones que pueden ser también emocionales. Propone un ejemplo en el contexto matemático: al escuchar la palabra "función" el individuo puede recordar una expresión matemática, puede visualizar un gráfico de una función o puede pensar en funciones específicas.

En el caso del concepto de ángulo, la imagen del concepto que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las diferentes representaciones que recuerdan relacionadas con dicho concepto, junto con las distintas propiedades que el estudiante le asocia. Esta imagen es personal, puede variar de persona a persona o de una cultura a otra, por lo tanto, sólo es posible hablar de una imagen conceptual en relación con un individuo en particular.

Tall & Vinner (1981), también introducen el término “*imagen evocada del concepto*” para describir la parte de la memoria evocada en un tiempo dado o en un contexto dado, es decir, aquella porción de la imagen del concepto activada en una situación particular, lo cual no es necesariamente todo lo que un cierto individuo sabe sobre una noción particular.

## **2.2 Definición del concepto**

Para Vinner & Hershkowitz (1980) la “*definición del concepto*” se entiende como una definición verbal que explica con precisión el concepto. La definición del concepto abarca desde la definición formal, es decir, la aceptada por la comunidad científica en su conjunto, hasta la definición personal del concepto, la cual se usa para expresar con nuestras propias palabras la definición de un concepto. La definición personal puede diferir de la formal y se utiliza para construir o reconstruir la definición formal del concepto.

### **2.2.1 Imagen y definición del concepto en procesos de pensamiento matemático**

De acuerdo con Vinner (2011) la mayoría de los conceptos en la vida cotidiana, como casa, naranja, gato, etc., se adquieren sin ninguna implicación de las definiciones a diferencia de los contextos técnicos donde las definiciones pueden tener roles extremadamente importantes. Más allá de esto, señala, en el caso del aprendizaje de las matemáticas, la definición crea un problema serio, quizás, más que nada nace del conflicto entre la estructura de las matemáticas, como fue concebida por los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de adquisición de conceptos, debido a que los hábitos de pensamiento en los contextos técnicos son totalmente diferentes de los contextos de la vida cotidiana.

Respecto a la pedagogía de la enseñanza, según Vinner (2002) debe tenerse en cuenta no sólo cómo se *espera* que los estudiantes adquieran los conceptos matemáticos, sino también, y quizás principalmente, cómo se adquieren *realmente* estos conceptos. Para entender esto, él expone sus ideas al suponer la existencia de dos “*celdas*” diferentes en nuestra estructura cognitiva. Una celda para la(s) definición(es) del concepto, y la segunda para la imagen conceptual.

Vinner (2002) dice que, al plantear una tarea cognitiva al alumno, se supone que la imagen conceptual y las celdas de definición del concepto se activan. Y expresa que al parecer muchos profesores de enseñanza secundaria y nivel universitario esperan que en los procesos intelectuales relacionados con la realización de una tarea determinada los estudiantes basen sus razonamientos principalmente en las definiciones formales del concepto, mientras sus imágenes del concepto juegan un papel secundario. Vinner & Hershkowitz (1980) representan esto con el diagrama de la figura 2.1, donde las flechas indican diferentes formas de funcionamiento de un sistema cognitivo.

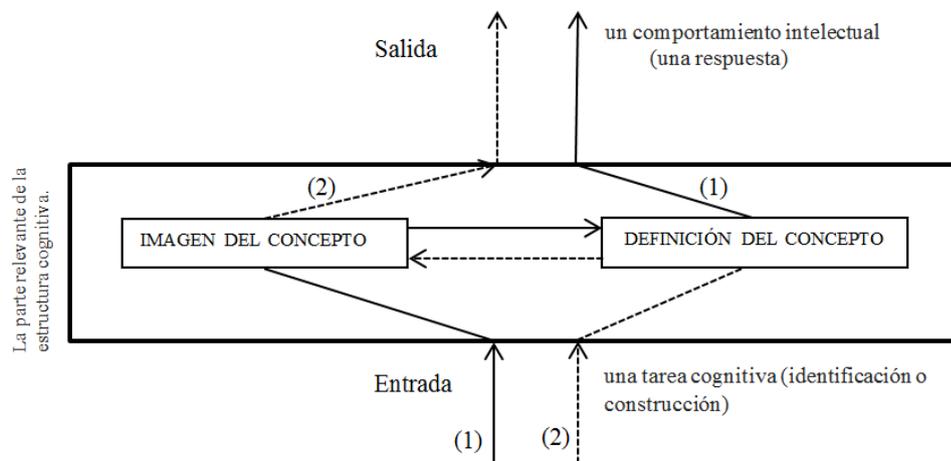


Figura 2.1 Modelo de actividad mental de los estudiantes esperado por los profesores, adaptado de Vinner & Hershkowitz (1980)

Según Vinner (2002), no importa cómo reaccione el sistema de asociación de un individuo en el momento en que se le plantea un problema en un contexto técnico, este no debe formular su solución antes de consultar la definición del concepto, lo cual es, por supuesto, el proceso deseable. Pero, desafortunadamente, la práctica es diferente. Es difícil entrenar un sistema cognitivo para actuar en contra de su naturaleza y forzarlo a consultar definiciones, ya sea al formar una imagen conceptual o al trabajar en una tarea

cognitiva. Por lo tanto, un modelo más apropiado, para los procesos que ocurren en la práctica, es el siguiente (ver figura 2.2).

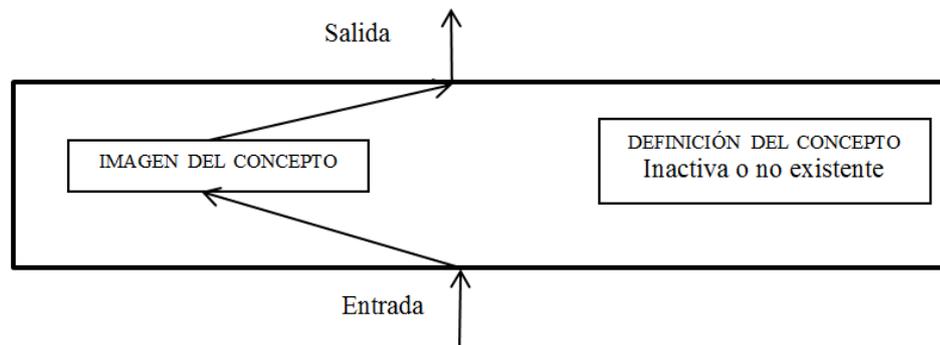


Figura 2.2 Modelo real de actividad mental de muchos estudiantes, adaptado de Vinner & Hershkowitz (1980)

Aquí, explica Vinner (2002), la celda de definición del concepto, incluso si no es nula, no se consulta durante el proceso de resolución de problemas. Los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana toman el control, y el encuestado no está consciente de la necesidad de consultar la definición formal.

Vinner (2002) agrega que el aprendizaje de las matemáticas, impone a los estudiantes ciertas maneras de pensar (distintas al aprendizaje cotidiano), donde las definiciones juegan un rol fundamental, y donde se espera que los estudiantes entiendan que el significado de un concepto está determinado por su definición formal y no por sus puntos de vista previos sobre el concepto, el cual sería el proceso deseable, sin embargo, si se toma en cuenta que la mente de los estudiantes tiende a basarse en su imagen del concepto y no en su definición, puesto que esta definición se vuelve inactiva (porque puede ser difícil de entender, porque nunca la aprendieron, porque se olvida o se ignora), entonces se debería hacer un esfuerzo por formar las imágenes correctas en la mente del estudiante.

Finalmente, para Vinner (2002) cambiar los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana a contextos técnicos es un objetivo importante en la enseñanza de las matemáticas. Agrega que si los estudiantes son candidatos para cursos de matemáticas avanzadas, entonces, sin duda, estos deben estar habituados a usar la definición como un criterio fundamental en la realización de diversas tareas y que más allá de introducir la definición, se debe proponer ejemplos o tareas que permitan al estudiante ver los

conflictos que pueden surgir entre la imagen del concepto que posee y la definición formal del concepto, discutir esos conflictos con la intención de convencer al estudiante sobre el rol tan importante que juegan las definiciones en los contextos técnicos, particularmente en matemáticas. Es decir, sólo si al estudiante se le plantean tareas que no pueda resolver correctamente refiriéndose sólo a su imagen del concepto, se le podría convencer de que es conveniente utilizar la definición del concepto.

Por último, señala que el papel de la definición en un curso debe determinarse de acuerdo con los objetivos deseados en cada caso, y que no se debe perder de vista que las imágenes pueden ser el resultado del conjunto específico de ejemplos dados a los estudiantes. De hecho, Vinner & Hershkowitz (1980) muestran los resultados obtenidos en una prueba aplicada a estudiantes de grado 7, 8 y 9 relacionada con figuras geométricas como el ángulo, donde se encontró que los ángulos obtusos con un rayo horizontal son identificados más fácilmente que otros ángulos obtusos colocados en una posición distinta. De este resultado comentan que los profesores y los libros de texto tienden a dibujar ángulos con un rayo horizontal y que como resultado de este hecho la imagen del concepto puede contener ángulos obtusos con un rayo horizontal.

Este modelo ha sido utilizado en varias investigaciones para conocer la imagen del concepto de radián (Akkoc, 2008), de la integral (Rösken & Rolka, 2007), de la integral definida (Rasslan & Tall, 2002), de función (Vinner & Dreyfus, 1989) y de límites y continuidad (Tall & Vinner, 1981) entre otros.

## **CAPÍTULO 3 MÉTODO**

## **DISEÑO, INSTRUMENTOS Y DATOS**

---

Iniciamos este capítulo exponiendo el diseño de la investigación. Continuamos, haciendo la descripción de la muestra y concluimos con la descripción de los instrumentos y procedimientos para recabar los datos.

### **3.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN**

El método de nuestro estudio es cualitativo. Este tipo de método es particularmente apropiado cuando el propósito es examinar las “formas de expresión” propias a cada individuo, es decir, los conceptos, percepciones, imágenes mentales, etcétera, manifestadas en el lenguaje de los participantes, ya sea de manera individual, grupal o colectiva (Sampieri, 2018). El diseño que guio el estudio fue de naturaleza fenomenológica, puesto que el propósito es conocer las definiciones e imágenes de los estudiantes a partir de su exploración, descripción y comprensión.

#### **3.1.1 Muestras**

Dado que el objetivo de la investigación es conocer las definiciones e imágenes del concepto del ángulo y su medida en estudiantes que inician el nivel superior, los datos de este estudio se recolectaron de dos muestras distintas. Las unidades de muestreo o análisis fueron las respuestas de los estudiantes. Consideramos estudiantes del área de ciencias sociales y del área de ciencias exactas, todos del primer semestre del Nivel Superior, pues al ser áreas diferentes, al contrastar los resultados de estudiantes orientados a las ciencias exactas con los resultados de estudiantes con formación matemática general, podríamos encontrar definiciones e imágenes comunes y distintas. Se seleccionaron ambas muestras por conveniencia. A continuación, se describen las características de cada una de ellas.

Muestra 1: Se conformó por 10 estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Psicología (17 a 19 años de edad) de una universidad privada de la Ciudad de México. Provenían de escuelas del nivel medio superior privadas de la Ciudad de México. El plan de estudios general de su carrera contempla materias relacionadas con matemáticas

como: curso remedial de matemáticas (para estudiantes que no aprobaron el examen Ceneval), Estadística básica, Estadística aplicada, y Análisis cuantitativo. Se hará referencia a este grupo durante todo el escrito como G1 (Grupo uno).

Muestra 2: Compuesta por un total de 22 estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Física y Matemáticas (17 a 19 años de edad) de una universidad pública de la Ciudad de México. Su preparación era variada puesto que provenían de escuelas del nivel medio superior públicas y privadas, de la Ciudad de México y de otros estados de la República Mexicana. Consideramos estudiantes de esta licenciatura puesto que, en los hechos, en el área de las ciencias exactas se encuentran, en promedio, los estudiantes con mayor dominio de las matemáticas (esto se observa, por ejemplo, en el tipo de preguntas de matemáticas que los estudiantes deben contestar para ingresar a una carrera de ciencias, comparando con las preguntas que se les plantean a los estudiantes que buscan ingresar al área de ciencias sociales. También en las asignaturas que conforman los planes de estudio de la Licenciatura en Física y Matemáticas, comparadas con las asignaturas que conforman los planes de estudio de la Licenciatura en Psicología).

El plan de estudios general de los estudiantes de la Licenciatura en Física y Matemáticas contempla materias como: Cálculo I-II, Álgebra I-III, Geometría Analítica, Física I-III, Ecuaciones Diferenciales, Análisis vectorial, como tronco común en los semestres del 1° al 4° y a partir del 5° semestre el alumno deberá elegir entre la opción de Matemáticas, Física, Matemática Educativa o Ingeniería Nuclear. En lo sucesivo haremos referencia a este grupo de 22 estudiantes como G2 (Grupo dos).

Este estudio es esencialmente de carácter cualitativo, no se pretende contrastar dos grupos en términos cuantitativos, por lo tanto, el tamaño de las muestras no es importante desde una perspectiva probabilística, pues no pretendemos hacer una generalización en términos de probabilidad. Consideramos que las unidades que conforman cada una de las muestras nos permiten entender el fenómeno de estudio y a responder las preguntas de investigación.

Cabe señalar que se supondría que ambas muestras tienen las mismas bases matemáticas, puesto que los planes y programas de estudio de los niveles básicos y medio superior son el mismo en términos generales.

### 3.1.2 Instrumentos

#### 3.1.2.1 Cuestionarios

Se diseñó y aplicó un primer cuestionario escrito de 11 ítems relacionado con el ángulo y su medida. Este cuestionario se aplicó a G1. Después, se diseñó y aplicó a G2, un segundo cuestionario escrito de 12 ítems relacionado con el ángulo y su medida, tomando como base el primer cuestionario diseñado pero con un par de modificaciones: después de hacer el análisis de las respuestas al ítem ¿Qué significa para ti medir un ángulo? del cuestionario aplicado a G1, y detectar que la mayoría daba respuestas vagas como: “*Obtener una respuesta para posteriormente resolver un problema.*”, consideramos que podría eliminarse del cuestionario aplicado a G2. En el cuestionario aplicado al grupo G2, agregamos dos ítems que no aparecen en el cuestionario aplicado al G1, los ítems son el 11 y 12. La razón por la que se agregó el ítem 11 fue que a pesar de que la fundamentación del ítem 11 en el cuestionario de G2 es la misma que la del ítem 9 en el cuestionario aplicado a G1, queríamos conocer los argumentos de los estudiantes en dos situaciones equivalentes. Por último, decidimos agregar el ítem 12 al cuestionario aplicado a G2, pues en ninguna de las respuestas del cuestionario aplicado a G1 los estudiantes hicieron alguna referencia a ángulos dirigidos, por lo cual quisimos indagar en la imagen del concepto de ángulo dirigido a través de este ítem.

En el diseño de ambos cuestionarios se tomaron en cuenta: el desarrollo histórico del concepto de ángulo, las definiciones y representaciones de ángulo dadas en los libros de texto reportadas en los antecedentes, las dificultades reportadas en investigaciones previas y se revisaron los planes de estudio desde los niveles básicos hasta el bachillerato en México, con el fin de identificar los aspectos clave que el estudiante debe poseer (al iniciar su carrera) sobre el ángulo y su medida. Los aspectos a considerar son: definición de ángulo, representación gráfica de un ángulo, distintos tipos de ángulos y medida de un ángulo. Su elaboración también se basó en Vinner (2002) quien señala que un método natural para aprender acerca de la definición del concepto de un individuo es a través de preguntas directas como, por ejemplo, ¿qué es una función?, puesto que las definiciones son verbales y explícitas, mientras que para aprender acerca de la imagen del concepto, se deben plantear preguntas indirectas puesto que la imagen del concepto puede ser verbal e implícita.

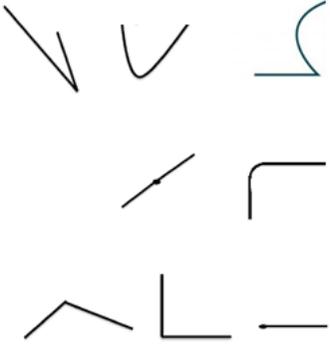
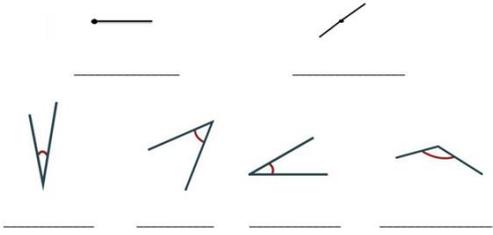
El ítem 1, en ambos cuestionarios, nos ayudará a responder la primera pregunta de investigación ¿Qué definición tienen los estudiantes del ángulo al iniciar la enseñanza superior? y los ítems restantes para responder la segunda pregunta de investigación ¿Qué imágenes evocan los estudiantes del ángulo y su medida, al contestar ítems relacionados con estos conceptos? En el anexo 1 se muestran ambos cuestionarios.

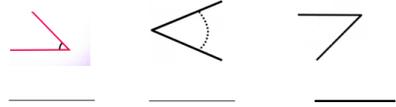
A continuación, indicamos en la tabla 3.1 el propósito de cada uno de los ítems del cuestionario que se aplicó a G1. Para algunos ítems la fundamentación es la misma, sin embargo, en cada ítem se propone un acercamiento diferente puesto que de acuerdo con Driver (1999), se pueden mantener diferentes concepciones de un determinado tipo de fenómeno, empleando a veces argumentos distintos que conducen a predicciones opuestas en situaciones que son equivalentes, e incluso, cambiando de uno a otro tipo de explicación del mismo fenómeno.

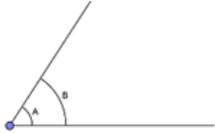
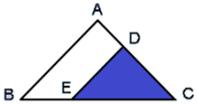
Enseguida, en la tabla 3.2 se señala el propósito de cada uno de los ítems del cuestionario que se aplicó a G2.

Tabla 3.1  
*Descripción de los ítems (G1)*

Ítem	Enunciado	Objetivo	Intención particular	Fundamentación
1	Escribe la definición de ángulo	Conocer la definición del concepto de ángulo que posee el estudiante	Saber si los estudiantes continúan definiendo el ángulo a través de su medida	Definiciones de ángulo encontradas en los libros de texto reportados en los antecedentes  De acuerdo con Browning, Garza-Kling & Sundling (2007), algunos estudiantes de nivel básico definen el ángulo a través de su medida
2	Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes	Conocer la imagen evocada del estudiante al hacer la representación gráfica del ángulo y saber qué elementos o aspectos recuerda en el momento que se le pide señalar sus partes	Saber si la imagen del concepto que evoca el estudiante está relacionada con ángulos en posición estándar.	En Vinner & Hershkowitz (1980) se señala que los profesores y los libros de texto tienden a dibujar ángulos con un rayo horizontal, y como resultado de este hecho la imagen puede contener ángulos con un rayo horizontal
3	Identifica todos los ángulos en la siguiente figura  	Saber si la imagen del concepto del estudiante está asociada principalmente con ángulos cóncavos, convexos o ambos	Saber si la imagen del concepto que evoca el estudiante está relacionada con ángulos convexos principalmente	Ilustraciones de ángulo utilizadas en los libros de texto reportados en los antecedentes

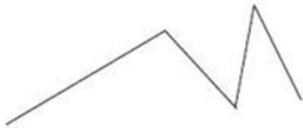
Ítem	Enunciado	Objetivo	Intención particular	Fundamentación
4	<p>Determina la o las figuras que consideres ángulos (TÁCHALOS)</p> 	<p>Conocer qué imagen evoca el estudiante para decidir si una figura dada es un ángulo o no</p>	<p>Saber si los estudiantes consideran ángulos entre líneas y curvas</p> <p>Saber si los estudiantes pueden identificar ángulos de <math>0^\circ</math>, <math>180^\circ</math> y <math>360^\circ</math></p>	<p>De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes de nivel básico consideran que puede haber ángulos entre líneas y curvas, además muestran dificultades para concebir ángulos de <math>0^\circ</math>, <math>180^\circ</math> y <math>360^\circ</math></p>
5	<p>Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos. Escribe tu respuesta sobre la línea.</p> 	<p>Saber en qué imagen evocada se apoya el estudiante para estimar la medida de ángulos agudos, obtusos y llanos trazados en diferentes posiciones</p>	<p>Determinar si la posición influyó en la estimación de la medida que asignaron</p>	<p>Browning, Garza-Kling &amp; Sundling (2007), reportan que los estudiantes de niveles básicos no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar, este resultado nos motivó a elaborar un ítem donde los ángulos estuvieran colocados en posiciones no estándar y estimaran su medida</p>

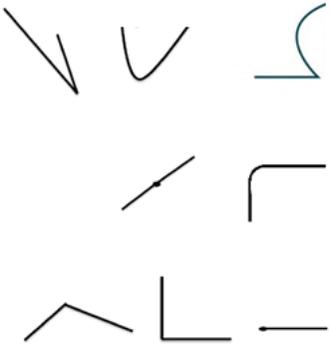
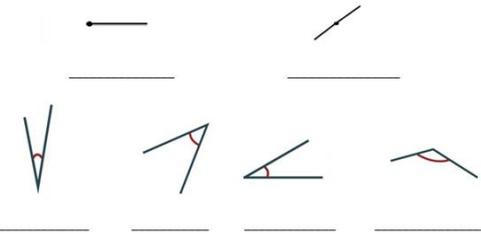
Ítem	Enunciado	Objetivo	Intención particular	Fundamentación
6	<p>Con ayuda de un transportador mide los siguientes ángulos. Coloca tu respuesta sobre la línea.</p> 	<p>Conocer la imagen del concepto de medida de ángulo evocada por los estudiantes para obtener la medida de cada uno de los ángulos que se les muestran utilizando como herramienta un transportador</p>	<p>Observar si la posición de los ángulos y la presencia o no de un arco en la figura y el tamaño de éste, influyen en la obtención de su medida</p> <p>En el caso de la figura de ángulo que no tiene ningún arco, saber qué medida proporcionan, si la del ángulo cóncavo, convexo o ambas</p>	<p>Browning, Garza-Kling &amp; Sundling (2007), reportan que los estudiantes de niveles básicos no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar, este resultado nos motivó a elaborar un ítem donde los ángulos estuvieran colocados en posiciones no estándar y obtuvieran su medida utilizando un transportador</p> <p>En las ilustraciones de ángulo utilizadas en los libros de texto reportados en la mayoría utiliza un arco en la figura de ángulo para indicar el ángulo al que se hace referencia, esto nos motivó a presentar un arco o no en las figuras de ángulo de este ítem</p>
7	<p>Qué significa para ti medir un ángulo</p>	<p>Conocer la imagen evocada de medida angular del estudiante</p>	<p>Saber si los estudiantes continúan haciendo referencia a la amplitud o distancia entre dos líneas en su imagen evocada de medida angular</p>	<p>Nociones de medida angular encontradas en los libros de texto reportados en los antecedentes</p> <p>De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes, en los niveles básicos, en sus nociones respecto a que se mide exactamente al referirse al tamaño de los ángulos expresan que es la longitud lineal o distancia entre dos rayos</p>

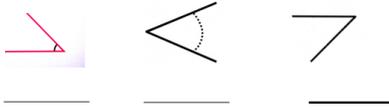
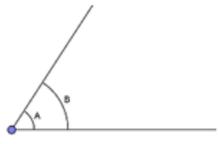
Ítem	Enunciado	Objetivo	Intención particular	Fundamentación
8	<p>Observa la siguiente figura y señala la relación correcta. Explica por qué.</p>  <p>a) El ángulo A es mayor al ángulo B.]</p> <p>b) El ángulo A es igual al ángulo B.</p> <p>c) El ángulo B es mayor al ángulo A.</p> <p>Porque: _____</p>	<p>Averiguar la imagen de ángulo y su medida que evoca el estudiante al determinar la relación entre la medida de dos ángulos. Los ángulos A y B son el mismo, pero se hace referencia a ellos a través de arcos de radio diferentes, queremos saber sí el tamaño de los arcos incide en la elección que hacen de su respuesta</p>	<p>Saber si atribuyen la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen o al espacio que hay entre los rayos</p>	<p>De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes de nivel básico tienden a atribuir la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen o suponen que entre más espacio hay entre los rayos, el ángulo es más grande</p>
9	<p>En la siguiente figura el ángulo ACB mide <math>45^\circ</math>. ¿Cuánto mide el ángulo DCE? Explica por qué.</p>  <p>Porque: _____</p>	<p>Hacer una revisión de la imagen que evoca el estudiante para determinar la medida del ángulo DCE</p>	<p>Saber si el área de los triángulos o la longitud de los lados que conforman este ángulo ejercen alguna influencia al momento de determinar la medida del ángulo que se pide</p>	<p>De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes de nivel básico tienden a atribuir la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen o suponen que entre más espacio hay entre los rayos, el ángulo es más grande</p>

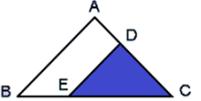
Ítem	Enunciado	Objetivo	Intención particular	Fundamentación
10	<p>En cada una de las figuras, dibuja un ángulo de <math>40^\circ</math></p> <p>a) </p> <p>b) </p> <p>c) </p>	<p>Indagar la imagen evocada del estudiante al hacer una representación de un ángulo de <math>40^\circ</math> en cada uno de los segmentos que se les proporcionaban en los incisos a), b) y c).</p> <p>Los segmentos en los incisos a) y b) tienen un punto que pueden utilizar o no como vértice. Sin embargo, el segmento del inciso c) a diferencia de los otros dos no tiene ningún punto que pueda usarse como vértice</p>	<p>Queremos ver si la ausencia de un punto destacado que pudieran considerar como vértice es un obstáculo para que el estudiante trace el ángulo de <math>40^\circ</math></p>	<p>En las ilustraciones de ángulo utilizadas en los libros de texto reportados en los antecedentes algunas figuras muestran un punto destacado como vértice o dos rayos diferentes que se unen en forma de cuña en un punto, esto nos motivó a mostrar un segmento donde no hubiese un punto destacado que pudiera considerarse como vértice</p>
11	<p>Relaciona cada ángulo con su medida. (Puedes relacionar las figuras con más de una opción)</p> <p>a) Ángulo menor a <math>90^\circ</math></p> <p>b) Ángulo mayor de <math>180^\circ</math></p> <p>c) Ángulo mayor a <math>90^\circ</math></p> <p>d) Ángulo igual a <math>0^\circ</math></p> <p>e) Ángulo igual a <math>360^\circ</math></p> <p>f) Ángulo igual a <math>180^\circ</math></p> 	<p>Conocer la imagen evocada al momento de relacionar cada ángulo con su medida</p>	<p>Saber si los estudiantes reconocen que dos ángulos tienen la misma medida, aunque estén en diferentes posiciones</p>	<p>Browning, Garza-Kling &amp; Sundling (2007), reportan que los estudiantes de niveles básicos no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar</p>

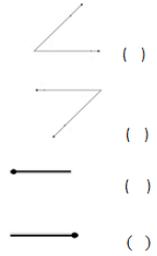
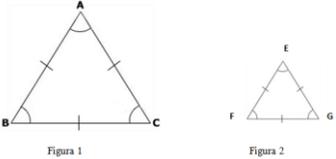
Tabla 3.2  
*Descripción de los ítems (G2)*

Ítem	Enunciado	Objetivo	Intención particular	Fundamentación
1	Escribe la definición de ángulo	Conocer la definición del concepto de ángulo que posee el estudiante	Saber si los estudiantes continúan definiendo el ángulo a través de su medida	Definiciones de ángulo encontradas en los libros de texto reportados en los antecedentes  De acuerdo con Browning, Garza-Kling & Sundling (2007), algunos estudiantes de nivel básico definen el ángulo a través de su medida
2	Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes	Conocer la imagen evocada del estudiante al hacer la representación gráfica del ángulo y saber qué elementos o aspectos recuerda en el momento que se le pide señalar sus partes	Saber si la imagen del concepto que evoca el estudiante está relacionada con ángulos en posición estándar.	En Vinner & Hershkowitz (1980) se señala que los profesores y los libros de texto tienden a dibujar ángulos con un rayo horizontal, y como resultado de este hecho la imagen puede contener ángulos con un rayo horizontal
3	Identifica todos los ángulos en la siguiente figura  	Saber si la imagen del concepto del estudiante está asociada principalmente con ángulos cóncavos, convexos o ambos	Saber si la imagen del concepto que evoca el estudiante está relacionada con ángulos convexos principalmente	Ilustraciones de ángulo utilizadas en los libros de texto reportados en los antecedentes

Ítem	Enunciado	Objetivo	Intención particular	Fundamentación
4	<p>Determina la o las figuras que consideres ángulos (TÁCHALOS)</p> 	<p>Conocer qué imagen evoca el estudiante para decidir si una figura dada es un ángulo o no</p>	<p>Saber si los estudiantes consideran ángulos entre líneas y curvas</p> <p>Saber si los estudiantes pueden identificar ángulos de <math>0^\circ</math>, <math>180^\circ</math> y <math>360^\circ</math></p>	<p>De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes de nivel básico consideran que puede haber ángulos entre líneas y curvas, además muestran dificultades para concebir ángulos de <math>0^\circ</math>, <math>180^\circ</math> y <math>360^\circ</math></p>
5	<p>Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos. Escribe tu respuesta sobre la línea.</p> 	<p>Saber en qué imagen evocada se apoya el estudiante para estimar la medida de ángulos agudos, obtusos y llanos trazados en diferentes posiciones</p>	<p>Determinar si la posición influyó en la estimación de la medida que asignaron</p>	<p>Browning, Garza-Kling &amp; Sundling (2007), reportan que los estudiantes de niveles básicos no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar, este resultado nos motivó a elaborar un ítem donde los ángulos estuvieran colocados en posiciones no estándar y estimaran su medida</p>

Ítem		Objetivo	Intención particular	Fundamentación
6	<p>Con ayuda de un transportador mide los siguientes ángulos. Coloca tu respuesta sobre la línea.</p>  <p>_____</p>	<p>Conocer la imagen del concepto de medida de ángulo evocada por los estudiantes para obtener la medida de cada uno de los ángulos que se les muestran utilizando un transportador</p>	<p>Observar si la posición de los ángulos y la presencia o no de un arco en la figura y el tamaño de éste, influyen en la obtención de su medida.</p> <p>En el caso de la figura de ángulo que no tiene ningún arco, saber qué medida proporcionan, si la del ángulo cóncavo, convexo o ambas.</p>	<p>Browning, Garza-Kling &amp; Sundling (2007), reportan que los estudiantes de niveles básicos no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar, este resultado nos motivó a elaborar un ítem donde los ángulos estuvieran colocados en posiciones no estándar y obtuvieran su medida utilizando un transportador</p> <p>En las ilustraciones de ángulo utilizadas en los libros de texto reportados en la mayoría utiliza un arco en la figura de ángulo para indicar el ángulo al que se hace referencia, esto nos motivó a presentar un arco o no en las figuras de ángulo de este ítem.</p>
7	<p>Observa la siguiente figura y señala la relación correcta. Explica por qué.</p>  <p>a) El ángulo A es mayor al ángulo B.</p> <p>b) El ángulo A es igual al ángulo B.</p> <p>c) El ángulo B es mayor al ángulo A.</p> <p>Porque: _____</p>	<p>Averiguar la imagen de ángulo y su medida que evoca el estudiante al determinar la relación entre la medida de dos ángulos. Los ángulos A y B son el mismo, pero se hace referencia a ellos a través de arcos de radio diferentes, queremos saber si el tamaño de los arcos incide en la elección que hacen de su respuesta</p>	<p>Saber si atribuyen la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen o al espacio que hay entre los rayos</p>	<p>De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes de nivel básico tienden a atribuir la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen o suponen que entre más espacio hay entre los rayos, el ángulo es más grande</p>

Ítem		Objetivo	Intención particular	Fundamentación
8	<p>En la siguiente figura el ángulo ACB mide <math>45^\circ</math>. ¿Cuánto mide el ángulo DCE? Explica por qué.</p>  <p>Porque: _____</p>	<p>Hacer una revisión de la imagen que evoca el estudiante para determinar la medida del ángulo DCE</p>	<p>Saber si el área de los triángulos o la longitud de los lados que conforman este ángulo ejercen alguna influencia al momento de determinar la medida del ángulo que se pide</p>	<p>De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes de nivel básico tienden a atribuir la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen o suponen que entre más espacio hay entre los rayos, el ángulo es más grande</p>
9	<p>En cada una de las figuras, dibuja un ángulo de <math>40^\circ</math></p> <p>a) </p> <p>b) </p> <p>c) </p>	<p>Indagar la imagen evocada del estudiante al hacer una representación de un ángulo de <math>40^\circ</math> en cada uno de los segmentos que se les proporcionaban en los incisos a), b) y c).</p> <p>Los segmentos en los incisos a) y b) tienen un punto que pueden utilizar o no como vértice. Sin embargo, el segmento del inciso c) a diferencia de los otros dos no tiene ningún punto que pueda usarse como vértice</p>	<p>Queremos ver si la ausencia de un punto destacado que pudieran considerar como vértice es un obstáculo para que el estudiante trace el ángulo de <math>40^\circ</math></p>	<p>En las ilustraciones de ángulo utilizadas en los libros de texto reportados en los antecedentes algunas figuras muestran un punto destacado como vértice o dos rayos diferentes que se unen en forma de cuña en un punto, esto nos motivó a mostrar un segmento donde no hubiese un punto destacado que pudiera considerarse como vértice</p>

Ítem		Objetivo	Intención particular	Fundamentación
10	<p>Relaciona cada ángulo con su medida. (Puedes relacionar las figuras con más de una opción)</p> <p>a) Ángulo menor a <math>90^\circ</math></p> <p>b) Ángulo mayor de <math>180^\circ</math></p> <p>c) Ángulo mayor a <math>90^\circ</math></p> <p>d) Ángulo igual a <math>0^\circ</math></p> <p>e) Ángulo igual a <math>360^\circ</math></p> <p>f) Ángulo igual a <math>180^\circ</math></p> 	<p>Conocer la imagen evocada al momento de relacionar cada ángulo con su medida</p>	<p>Saber si los estudiantes reconocen que dos ángulos tienen la misma medida, aunque estén en diferentes posiciones</p>	<p>Browning, Garza-Kling &amp; Sundling (2007), reportan que los estudiantes de niveles básicos no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones no estándar</p>
11	<p>Los triángulos de las figuras 1 y 2 son equiláteros. Señala la relación correcta entre el ángulo B de la figura 1 y el ángulo G de la figura 2.</p>  <p>a) El ángulo B de la figura 1 es "mayor que" el ángulo G de la figura 2.</p> <p>b) El ángulo B de la figura 1 es "menor que" el ángulo G de la figura 2.</p> <p>c) El ángulo B de la figura 1 es "igual" al ángulo G de la figura 2.</p> <p>Porque: _____</p>	<p>Indagar la imagen del estudiante al determinar la relación entre la medida de dos ángulos los cuales forman parte de dos triángulos equiláteros semejantes de diferente tamaño</p>	<p>Saber si el tamaño de los triángulos al momento de determinar la relación entre la medida de los ángulos señalados influyó al momento de determinar su respuesta</p>	<p>De acuerdo con Keiser (2004), algunos estudiantes de nivel básico tienden a atribuir la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen y consideran que entre más espacio hay entre los rayos, el ángulo es más grande</p>

Ítem		Objetivo	Intención particular	Fundamentación
12	<p>Traza una ruta para que el niño llegue a su balón. No puedes trazar sólo una recta, ni curvas, sólo puedes utilizar ángulos distintos de 90 grados. Márcalos en tu ruta. Después descríbela con tus palabras en los renglones de abajo.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Descripción de la ruta: _____</p>	Examinar la imagen gráfica que reproduce el estudiante al trazar una ruta para hacer que un niño llegue a su balón, derivadas de su imagen del concepto de ángulo y su medida	Saber si la imagen del concepto que evoca el estudiante está relacionada con ángulos dirigidos	En la literatura revisada no se encontraron antecedentes

### **3.1.2.2 Entrevistas semiestructuradas**

De acuerdo con Sampieri (2018), las entrevistas semiestructuradas se basan en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información. Para este estudio, se realizaron entrevistas semiestructuradas cuyo propósito era profundizar en las respuestas de los estudiantes con la intención de conocer a partir de su lenguaje y perspectiva, “en sus propias palabras”, su imagen evocada. A las entrevistas se les aplicó un análisis para profundizar en su contenido, utilizando como referente las preguntas de investigación.

### **3.1.3 Proceso de inmersión en las instituciones donde se llevó a cabo el estudio**

El estudio se llevó a cabo en una escuela pública de ciencias y en una Universidad privada, ambas del nivel superior y situadas en la Ciudad de México. El proceso de inmersión en ambas instituciones fue el mismo y se resume así: los estudiantes de primer semestre fueron reclutados por medio de su profesor, quien les impartía un curso de Matemáticas. Previamente, se concertó una cita con el profesor para una entrevista. Al llegar a la universidad nos dirigimos con él, después de presentarnos y dar el nombre de la institución de donde procedíamos, le preguntamos si estaba interesado en participar en un estudio relacionado con el ángulo y su medida. Se le explicó en qué consistía el estudio, porqué fue elegida esta institución, quienes serían los participantes, qué se iba a hacer con los resultados, donde se pretendía publicarlos, resaltando el anonimato y la confidencialidad de la información recopilada y se le ofreció compartir con él los resultados antes de la publicación del estudio. Además de clarificar que se trataba de una investigación cuyos resultados se limitaban a explorar y describir las definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida de cada participante. El profesor dio su consentimiento y autorización para participar y se discutió enseguida con todo detalle el procedimiento que se llevaría a cabo, después se estableció el lugar, la fecha y el horario en el cual se aplicaría el cuestionario. Finalmente, se habló con el profesor sobre la posibilidad de participaciones futuras.

### 3.1.4 Procedimiento

Al llegar a la institución en la fecha y hora previamente pactada con el profesor, nos dirigimos al salón donde se aplicaría el cuestionario. El profesor nos autorizó ingresar al salón y nos cedió la palabra para presentarnos con los estudiantes y dar el nombre de la institución de donde procedíamos.

Los alumnos de G1 respondieron el cuestionario en una sesión de la asignatura de un curso de Matemáticas en el turno matutino, aplicado por el profesor que dictaba la materia, a quien se le dieron indicaciones previas para la aplicación del cuestionario. En el caso de G2, ellos respondieron el cuestionario en una sesión de la asignatura de Geometría Analítica también en el turno matutino en ausencia del profesor que dictaba la materia. El investigador aplicó el cuestionario. A los estudiantes de ambos grupos (G1 y G2) se les explicó en qué consistía el estudio, su propósito y alcance y se les comentó que su participación era voluntaria y que sus respuestas serían anónimas y confidenciales. Todos los estudiantes dieron verbalmente su consentimiento, es decir, no se firmó un formato o formulario de consentimiento (pues consideramos que era poco probable que surgiera algún riesgo potencial durante su participación). Los alumnos disponían de 45 minutos para responder el cuestionario. Se les dio una explicación sobre cuál era el objetivo de su aplicación, así como una descripción general de su contenido. Se les pidió que escribieran en la parte superior derecha del cuestionario sus iniciales y la escuela de nivel medio superior de la cual provenían. Se les solicitó que contestaran los ítems de manera individual, de la manera más honesta posible y de forma clara. A los estudiantes de G1 se les proporcionó un transportador junto con el cuestionario. Mientras a los estudiantes de G2, se les indicó que cuando terminaran de responder el ítem cinco alzarán la mano para ir a su lugar y proporcionarles un transportador para que pudieran responder el ítem seis. Durante la aplicación del cuestionario sólo se respondieron por parte del profesor (en el caso de G1) y del investigador (en el caso de G2), quienes aplicaron el cuestionario, preguntas que no estaban relacionadas con algún contenido matemático.

Al finalizar la aplicación del cuestionario, en ambos grupos, dimos las gracias al profesor y a los estudiantes, insistiendo en el anonimato y la confidencialidad de sus respuestas.

Después de un primer análisis de la información recopilada de los cuestionarios aplicados a G1 y G2 detallado más adelante, seleccionamos algunos estudiantes para entrevistarlos de forma individual. La selección se hizo con base en las respuestas que consideramos proporcionaban información relevante.

Nuevamente, nos pusimos en contacto con los profesores mencionados anteriormente, de ambas instituciones, solicitándoles su consentimiento y autorización para entrevistar a algunos estudiantes, con la finalidad de obtener amplitud en sus respuestas. Ambos accedieron de manera positiva y nuevamente se fijó lugar, fecha y horario para que se llevaran a cabo las entrevistas.

Una semana después, en la misma institución donde se había aplicado el cuestionario al grupo G1, se llevaron a cabo las entrevistas con los alumnos seleccionados. Estas se realizaron en el turno matutino. En el caso del grupo G2, para llevar a cabo las entrevistas nos presentamos dos semanas después en la misma institución donde se había aplicado el cuestionario. Estas también se realizaron en el turno matutino. En ambos grupos, antes de la entrevista, a cada estudiante se le pidió su autorización, informándole que la intención era profundizar en sus respuestas dadas al cuestionario, y se les pidió su aprobación para videgrabar únicamente su voz y sus manos. Se resaltó nuevamente el anonimato y la confidencialidad. Después de que cada participante dio su consentimiento, la videgrabación comenzó. Los estudiantes de G1, tenían que asistir en un horario previamente pactado, a una oficina del departamento de matemáticas, donde fueron entrevistados. Los estudiantes de G2, tenían que salir de su clase de Geometría Analítica y en un salón contiguo se llevaron a cabo las entrevistas. Todas las entrevistas fueron posteriormente transcritas.

Algunas entrevistas no se pudieron realizar en G2, puesto que los estudiantes habían abandonado el curso o simplemente no asistieron a esa sesión.

## **CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE DATOS**

## ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

---

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas y las justificaciones dadas por algunos de los estudiantes de los grupos G1 y G2 a los ítems del cuestionario.

El proceso de análisis se llevó a cabo a cada grupo por separado. Este se desarrolló en cuatro fases para ambos grupos. En la primera, se llevó a cabo una exploración de los datos leyendo las respuestas de los estudiantes, revisando sus dibujos y las anotaciones que los acompañaban, con la finalidad de obtener un panorama general de los datos y determinar si la información recopilada proporcionaba la información deseada de acuerdo al planteamiento del problema. En la segunda fase, se transfirieron todas las respuestas de los estudiantes a un procesador de texto (Word), así como las capturas de imágenes las cuales se cortaron y copiaron. Enseguida, se organizó la información colocando todas las respuestas de los estudiantes a un mismo ítem. Se sustituyeron las iniciales proporcionadas por los estudiantes para ser identificados por números. Se eligieron como unidades de análisis párrafos que eran la respuesta dada por el estudiante, las cuales incluían las expresiones gramaticalmente incorrectas, faltas de ortografía e incluso palabras o frases que nos resultaban confusas, así como los dibujos hechos por los estudiantes y las notas que acompañaban sus dibujos.

En la tercera fase, se inició la codificación abierta que consistió inicialmente en leer cada una de las respuestas dadas a un mismo ítem, buscando el significado de cada una de ellas, es decir, a qué se referían y si estaban vinculadas al objetivo y fundamentación del ítem. Enseguida se compararon las unidades de análisis con la finalidad de encontrar similitudes y diferencias (¿qué tenían en común?, ¿en qué eran diferentes?, ¿significan lo mismo?). De esta comparación emergieron las categorías. Los párrafos similares en términos de significado y conceptos se agruparon en una categoría común. Si los párrafos eran distintos (en términos de significado y conceptos) inducían a generar una nueva categoría. A cada una de estas categorías le asignamos un código (etiqueta) para identificarla.

En los ítems donde el análisis de las respuestas no se hizo a través de una categorización, también se llevó a cabo la fase uno y dos antes descritas, además de buscar el significado de cada una de las respuestas, es decir, ¿a qué se referían?, y de comparar las unidades de análisis con la finalidad de encontrar similitudes y diferencias. Pero, en este caso, nuestro interés era descubrir las respuestas más importantes en

términos de frecuencia o relevancia vinculada con el objetivo y la fundamentación del ítem.

En la cuarta y la última fase del análisis, en cada ítem se fue desarrollando una narrativa, por parte de nosotros, sobre algún patrón presente, alguna apreciación u opinión sobre algunas de las respuestas dadas por los estudiantes y sobre las categorías o temas comunes o diferentes.

En el caso de las entrevistas, su proceso de análisis también se llevó a cabo a cada grupo por separado. Este se desarrolló en cuatro fases para ambos grupos. En la primera, se llevó a cabo la lectura de cada entrevista para determinar si su contenido proporcionaba información relacionada con el planteamiento del problema. En la segunda fase, se transcribieron todas las entrevistas a un procesador de texto (Word), la transcripción de los materiales grabados a un procesador de texto (Word) incluyeron todas las palabras y sonidos como: “¡oh!, ¡ah!, Ok”, las expresiones gramáticamente incorrectas, faltas de ortografía e incluso palabras o frases que nos resultaban confusas. Las intervenciones del entrevistador y el entrevistado se señalaron como: entrevistadora y estudiante 1, 2, 3.... respectivamente.

Se eligieron como unidades de análisis párrafos que eran las intervenciones de los estudiantes. Enseguida, en la tercera fase, se inició su análisis buscando captar su contenido y significado (es decir, ¿a qué se refiere el estudiante?, ¿Qué parece significar lo que dice el estudiante?). Por último, en la cuarta fase, se describió nuestra interpretación de las intervenciones de los estudiantes acompañada de alguna apreciación u opinión de nuestra parte.

El análisis de la información recopilada nos permitió desarrollar una descripción de las definiciones e imágenes del concepto del ángulo y su medida a través de la exploración y comprensión de las respuestas dadas por los estudiantes, así como tener un panorama de sus diferentes apreciaciones.

A continuación, se presenta el análisis de datos y resultados por ítem.

Para ejemplificar el proceso de análisis llevado a cabo en las cuatro fases antes descritas presentamos en todo detalle el análisis y los resultados del ítem 1 para G1. Dado que los ítems restantes siguen un proceso similar, no se presenta en detalle su

análisis, pero sí se exponen los aspectos más relevantes que aparecen al analizar cada uno de ellos.

### Ítem 1 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Escribe la definición de ángulo

**Definición del concepto de ángulo que posee el estudiante** Para conocer la definición de ángulo que poseen los estudiantes, se inició el análisis recogiendo las respuestas de los estudiantes del grupo G1 y G2 a este ítem. Las respuestas se organizaron en hojas de Word, por grupo, como se muestra en la tabla 4.1 para G1. Se hizo una transcripción fiel de lo escrito por el estudiante aún con todas sus peculiaridades.

Tabla 4.1  
*Respuestas de los estudiantes de G1 al ítem 1*

Alumno	Respuestas
1	No escribió ninguna respuesta.
2	Es la medida en grados de una figura geométrica que se mide con un transportador y existen diferentes tipos de ángulos.
3	Son las medidas de las esquinas de alguna figura que nos ayuda a sacar las medidas de los lados.
4	Adimensional una magnitud física adimensional que se define como la razón entre la longitud del arco de circunferencia trazado entre dos semirrectas y su distancia al centro o vértice de las mismas que lo limitan.
5	El grado de inclinación de dos lados que se intersectan en un punto.
6	El punto donde se juntan dos líneas. Se puede calcular.
7	Porción indefinida de plano limitada por dos líneas que parten de un mismo punto o por dos planos que parten de una misma línea y cuya abertura puede medirse en grados.
8	Un ángulo se forma en la intersección de dos líneas y dependiendo a la inclinación de las líneas se forma el ángulo.
9	Es el punto que une dos rectas, se mide en grados y se divide en: ángulo recto, agudo y obtuso. El instrumento que mide un ángulo es el transportador. Determina la inclinación de una figura.
10	Es la abertura de un triángulo o la abertura de dos líneas unidas.

Enseguida, leímos cada respuesta y analizamos cada segmento respondiendo a las siguientes preguntas: ¿en su escrito a qué se refiere su definición de ángulo?, ¿Qué significa su definición de ángulo? Después se establecieron las categorías.

Rotaache & Montiel (2017), mencionan que hay tres clases particulares de la definición de ángulo que suelen ser las más frecuentes, estas son (1) cantidad de giro alrededor de un punto, entre dos líneas, (2) un par de rayos con un punto en común y (3) una región formada por la intersección de dos semiplanos. Mientras que Browning, Garza-Kling & Sundling (2007) señalan que el concepto de ángulo tiende a considerarse de tres maneras: dos de ellas similares a (1) y (2) y agregan otra clase más: la idea de ángulo como el espacio entre dos rayos (ángulo como cuña).

Las categorías no se formaron a priori considerando las distintas definiciones de ángulo mostradas en los diferentes textos expuestos en los antecedentes, ni en las distintas clases mencionadas en el párrafo anterior, puesto que algunas respuestas no corresponden a ninguna de estas. De esta manera, utilizando segmentos de texto de sus respuestas se les hizo una codificación abierta (Sampieri, 2018).

A continuación, presentamos cada categoría y su código, señalando algunas respuestas que pertenecen a cada una de ellas. En cada categoría especificamos el número de respuestas, por ejemplo (3/10) indica que 3 de las 10 respuestas pertenecen a esta categoría. Las categorías que emergieron en G1 fueron 5: C1, C2, C3, C4, y C5.

C1: El ángulo definido como abertura de dos líneas (1/10)

Ejemplo: *“Es la abertura de un triángulo o la abertura de dos líneas unidas.”*

C2: El ángulo definido como intersección de dos líneas (1/10)

Ejemplo: *“Un ángulo se forma en la intersección de dos líneas y dependiendo de la inclinación de las líneas se forma el ángulo.”*

C3: El ángulo definido a través de su medida (3/10)

Ejemplo: *“Es la medida en grados de una figura geométrica que se mide con un transportador y existen diferentes tipos de ángulos.”*

C4: El ángulo definido como un punto donde se unen dos líneas o rectas (2/10)

Ejemplo: *“El punto donde se juntan dos líneas. Se puede calcular.”*

C5: No respondió/Se anularon sus respuestas (3/10)

Se anularon dos respuestas porque los alumnos consultaron internet en su celular para dar su respuesta.

De manera similar, se analizó la información de G2. Las categorías que emergieron en G2 fueron 6: C1, C2, C3, C4, C5 y C6.

C1: El ángulo definido como apertura/abertura de segmentos (rayos o líneas) (7/22)

Ejemplo 1: *“Es la apertura o separación de dos rayos que tienen un punto en común.”*

Ejemplo 2: *“Abertura que existe entre dos rayos con un origen en común.”*

C2: El ángulo definido como intersección de dos rayos (líneas o semiplanos) (4/22)

Ejemplo 1: *“Es la intersección de dos líneas diferentes las cuales tienen un punto en común.”*

Ejemplo 2: *“Es la intersección de dos semiplanos formados por dos rayos con un mismo vértice.”*

C3: El ángulo definido a través de su medida (3/22)

Ejemplo: *“Es la medida de la apertura de dos líneas que se unen en un punto.”*

C4: El ángulo definido como medida particular (3/22)

Ejemplo: *“Es la separación entre dos rectas perpendiculares.”*

C5: Otras definiciones (2/22)

Ejemplo: *“Un ángulo es cuando dos rayos se cruzan entre sí.”*

C6: No respondió/No conoce la definición (3/22)

Ejemplo: *“No conozco la definición, porque no tengo una definición muy concreta y me falta más información.”*

Al comparar las categorías y sus códigos en G1 y G2, encontramos que algunas fueron similares, el ángulo definido como: la apertura/abertura de dos segmentos (rayos o líneas), la intersección de dos rayos (líneas o semiplanos) y a través de su medida,

mientras otras fueron diferentes, el ángulo definido como: medida particular y como un punto donde se unen dos líneas o rectas.

Estas categorías emergentes reflejan una amplia variedad en las definiciones personales de ángulo de los estudiantes al definirlo, por ejemplo, como: la apertura/abertura de dos segmentos (rayos o líneas), la intersección de dos rayos (líneas o semiplanos), a través de su medida, de una medida en particular o como un punto donde se unen dos líneas o rectas.

En este ítem no se hicieron entrevistas en G1 ni en G2.

## **Ítem 2 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes**

**Imagen del concepto de ángulo evocada al hacer una representación gráfica del ángulo** Aquí revisamos las figuras que hicieron los estudiantes para representar un ángulo. Notamos algunas características comunes que predominaban en la mayoría de las figuras, en cada uno de los grupos. En G1, la mayoría de los estudiantes (8 de 10) dibujaron un ángulo de  $90^\circ$  con su vértice ubicado del lado izquierdo, y del cual emanan dos segmentos, uno de los segmentos alineado con la horizontal (ver figura 4.1). De los ocho estudiantes, cinco no señalaron sus partes mencionando dos de ellos que no recordaban sus nombres (ver figura 4.2).

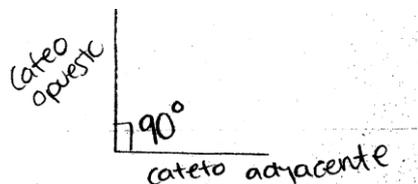


Figura 4.1 Ejemplo de una representación gráfica de ángulo de uno de los estudiantes, ángulo de  $90^\circ$  con el vértice ubicado a la izquierda y uno de sus lados alineado con la horizontal



Figura 4.2 Ejemplo de una representación gráfica de ángulo donde el estudiante señala no recordar el nombre de las partes de un ángulo

Las respuestas de los dos estudiantes restantes se anularon porque consultaron internet en su celular para dar su respuesta (mismos estudiantes del ítem anterior).

Por su parte, en G2, todos los estudiantes dibujaron ángulos colocados de tal manera que su vértice estaba ubicado en el lado izquierdo, uno de sus lados estaba alineado o no con la horizontal, mientras el otro lado se hallaba por encima de éste como lo muestra la figura 4.3.

2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.

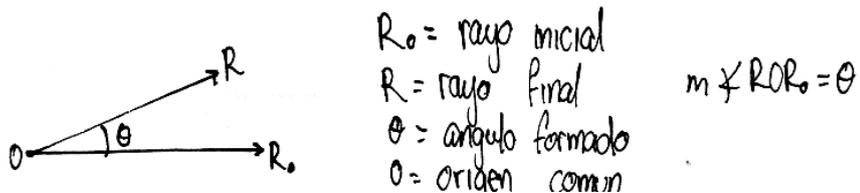


Figura 4.3 Ejemplo de una representación gráfica de ángulo de uno de los estudiantes, con el vértice ubicado a la izquierda y uno de sus lados alineado con la horizontal

15 de los 22 estudiantes trazaron ángulos agudos, con uno de sus lados alineado con la horizontal, de los cuales doce eran como los de la figura 4.3, y tres como los de la figura 4.4, donde no señalan ningún arco.

2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.

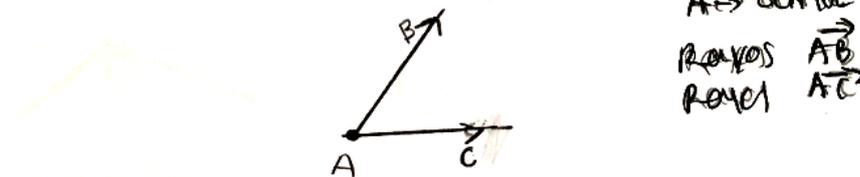
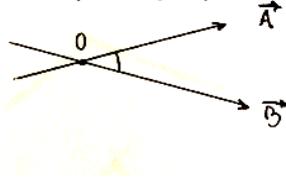


Figura 4.4 Ejemplo de una representación gráfica de ángulo de uno de los estudiantes, con uno de sus lados alineado con la horizontal donde no señalan ningún arco

Los ángulos que no tenían un lado horizontal eran ángulos agudos como el de la figura 4.5.

2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.



$O = \text{Vértice (Intersección de los rayos)}$   
 $\vec{A} = \text{Rayo}$   
 $\vec{B} = \text{Rayo}$   
 $\angle AOB = \text{Ángulo}$

Figura 4.5 Ejemplo de una representación gráfica de ángulo de uno de los estudiantes, con uno de sus lados no alineado con la horizontal

18 estudiantes trazaron dos rayos, segmentos o líneas distintas que emanaban de un punto, y en algunos casos nombraron sus partes (véanse figuras 4.3 y 4.4), mientras que los otros cuatro dibujaron dos rayos, líneas o lados distintos que se intersecaban, y nombraron sus partes (véase figura 4.5).

Como parte del análisis del ítem 2, en G2, comparamos la definición de ángulo con la representación que hacían de él, con la finalidad de ver si había consistencia entre estas. Veamos la tabla 4.2.

Tabla 4.2

*Definición vs representación gráfica de ángulo de algunos estudiantes*

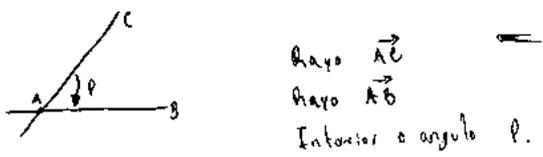
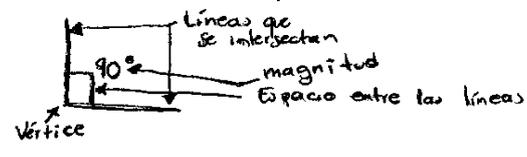
Definición de ángulo	Representación gráfica de ángulo
Es la medida de la apertura de dos líneas que se unen en un punto.	<p>2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.</p> <p>Internal Apertura Vertice External Apertura L2 etc.</p>
Distancia que hay entre dos rayos, suponiéndolas en una circunferencia, medida del arco que hay entre ellas.	<p>2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.</p> <p>Arco que hay entre ellas</p>

Como resultado, de comparar la definición de ángulo y su representación, encontramos: primero, que en los dos ejemplos de la tabla 4.2, las definiciones de ángulo no se corresponden con las representaciones gráficas dadas.

También, de comparar la definición de ángulo con su representación gráfica, se observan estudiantes que señalan en su bosquejo una zona, la cual consideran es el ángulo (ver la tabla 4.3). Sin embargo, la zona señalada se conoce formalmente como el interior de un ángulo (véase Moise & Downs, 1986, p. 76).

Tabla 4.3

*Definición y representación gráfica del ángulo de algunos estudiantes*

Definición de ángulo	Representación gráfica de ángulo
Un ángulo son dos rayos que se intersectan en un punto y tiene cierta abertura, y el espacio que hay entre ellas dos se llama ángulo interior.	<p>2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.</p> 
Es una magnitud que se define como el espacio que hay entre dos líneas que se intersectan en un punto, siendo este espacio no siempre el mismo, pues depende de la posición de cada línea.	<p>2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.</p> 

En este ítem no se llevaron a cabo entrevistas en ninguno de los grupos.

**Ítem 3 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Identifica todos los ángulos en la siguiente figura**



**Imagen del concepto de ángulo evocada al identificar ángulos en una figura dada**

Revisamos la figura dada y observamos dónde y cuántos ángulos señalaron los estudiantes encontrando lo siguiente:

En G1, nueve estudiantes identificaron tres ángulos internos. De estos estudiantes, dos de ellos, escribieron lo siguiente (ver figuras 4.6 y 4.7):

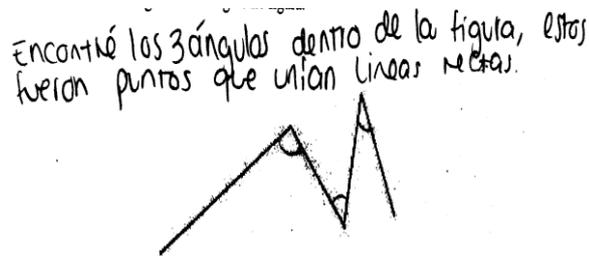


Figura 4.6 Ejemplo de los tres ángulos identificados por un estudiante en la figura dada

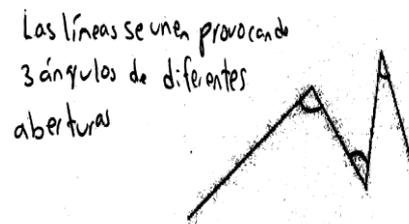


Figura 4.7 Ejemplo de los tres ángulos identificados por otro estudiante en la figura dada

De acuerdo con lo que escribió el estudiante en la figura 4.6, su imagen evocada para identificar los ángulos en la figura dada está relacionada con el punto donde se unen las líneas rectas. Si comparamos esta imagen con su definición de ángulo dada en el ítem 1: “*Es el punto que une dos rectas...*” encontramos consistencia entre éstas.

En el caso de la figura 4.7, la imagen evocada del estudiante para identificar los ángulos en la figura dada se relaciona con la unión de las líneas rectas que provocan diferentes aberturas. En este caso, si comparamos su imagen con su definición de ángulo dada en el ítem 1: “*Es la abertura de un triángulo o la abertura de dos líneas unidas.*”, también encontramos consistencia entre éstas.

Un caso que llamó nuestra atención fue donde el estudiante identificó sólo dos ángulos en la figura y se refirió a estos a través de su medida (ver figura 4.8).

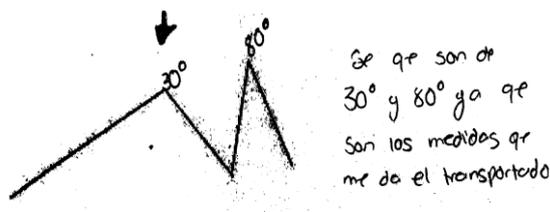


Figura 4.8 Ejemplo de los dos únicos ángulos identificados por uno de los estudiantes en la figura dada

A continuación, veremos un extracto de la entrevista donde el estudiante expresa cómo determinó la medida de estos ángulos. El estudiante será identificado como estudiante 1.

*Entrevistadora:* ¿Cómo determinaste esas medidas de 30 y 80 grados? [se refiere a la figura 4.8], te voy a proporcionar un transportador a ver si me puedes explicar.

*Estudiante 1:* Según yo, era ponerlo así [coloca el origen del transportador en el extremo izquierdo de la figura dada, y la línea correspondiente a 0 grados la alinea con la horizontal, como se muestra en la figura 4.9] y me acuerdo que me daba 30 [prolonga imaginariamente la línea no horizontal hasta la escala externa del transportador y señala con su dedo índice el número 30 sobre la escala] y luego en el siguiente punto marcarlo [se refiere al punto donde coloca el origen del transportador para medir el segundo ángulo] y me daba 80 [nuevamente alinea la línea correspondiente a 0 grados con la horizontal, como se muestra en la figura 4.10, prolonga imaginariamente la línea no horizontal hasta la escala externa del transportado y señala con su dedo índice el número 80 sobre la escala]



Figura 4.9 Uso del transportador por el estudiante 1 para determinar la medida del ángulo de 30 grados

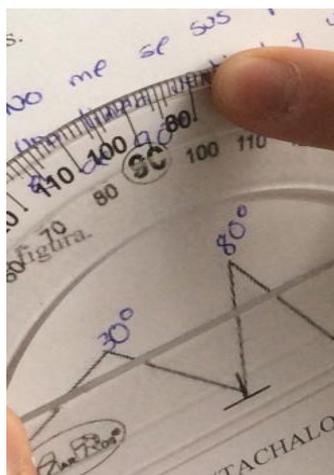


Figura 4.10 Uso del transportador por el estudiante 1 para determinar la medida del ángulo de 80 grados

Por el lugar donde coloca las medidas de  $30^\circ$  y  $80^\circ$  en la figura dada, el estudiante identificó dos ángulos, cuya medida obtuvo creando nuevos ángulos utilizando como uno de los lados segmentos de la figura dada. De acuerdo con la forma en que coloca el transportador, los ángulos que midió tienen uno de sus lados, el cual no es visible, alineado con la horizontal y el otro lado, el segmento visible, es no horizontal, que proyecta imaginariamente hacia la escala externa del transportador para obtener la medida de los ángulos.

De acuerdo a la definición de ángulo dada por este estudiante en el ítem 1: “*Son las medidas de las esquinas de alguna figura...*” un ángulo está determinado o definido a través de su medida, posiblemente esa es la razón por la cual hizo referencia a los dos ángulos a través de su medida.

En este grupo, G1, todos los ángulos identificados por los estudiantes fueron convexos, ningún estudiante señaló ángulos cóncavos.

Por su parte, en G2, la mayoría (13 de 22 estudiantes) identificaron seis ángulos como lo muestra la figura 4.11, 3 menores de 180 grados y 3 mayores de 180 grados.

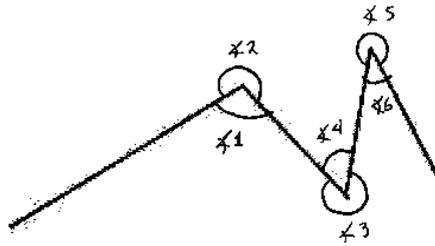


Figura 4.11 Ejemplo de los seis ángulos identificados por uno de los estudiantes en la figura dada

Mientras, 9 de los 22 estudiantes sólo identificaron tres ángulos como lo muestra la figura 4.12. Tres ángulos menores de 180 grados.



Figura 4.12 Ejemplo de los tres ángulos identificados por uno de los estudiantes en la figura dada

Es interesante notar que se presentó también este tipo de respuesta (véase la figura 4.13), donde el estudiante, además de señalar ángulos convexos y cóncavos, también señala dos ángulos de una vuelta en los extremos de la figura dada. Consciente de su concepto de ángulo, y no sólo de la imagen habitual de dos segmentos no colineales que comparten un extremo, él considera que también se forma un ángulo cuando a la vista se observa un solo segmento, (considerando que en realidad son dos segmentos superpuestos) y no solamente cuando se observan dos segmentos diferentes que tienen el mismo extremo.

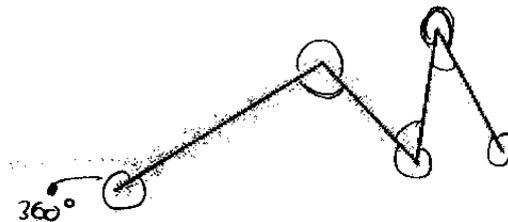
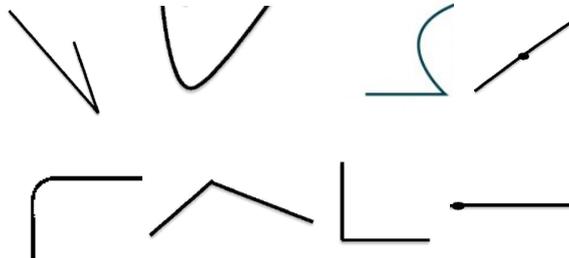


Figura 4.13 Ejemplo de los ángulos identificados por un estudiante donde se señala un ángulo de una vuelta

En G2, la mayoría identificó ángulos convexos y cóncavos.

**Ítem 4 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Determina la o las figuras que consideres ángulos. (TÁCHALOS)**



**Imagen del concepto de ángulo evocada para decidir si una figura es un ángulo o no** En el análisis de las respuestas creamos dos categorías. En la categoría C1 colocamos las figuras que los estudiantes consideraban como ángulos, y en C2 las que no. Se revisaron las categorías y encontramos que en G1, 5 de los 10 estudiantes consideraron la figura 4.14 un ángulo. Incluso los cinco señalaron el ángulo con un arco en la figura (ver figura 4.15).



Figura 4.14 Figura del cuestionario considerada por algunos estudiantes como un ángulo



Figura 4.15 Arco dibujado por uno de los estudiantes que denota donde se forma el ángulo en la figura dada

A continuación, veremos un extracto de la entrevista donde el estudiante expresa como determinó que la figura 4.15 es un ángulo. El estudiante será identificado como estudiante 1.

*Entrevistadora:* En el ejercicio número cuatro donde escribes como comentario que “estas líneas provocan un sólo ángulo”, me puedes ampliar tu respuesta por favor.

*Estudiante 1:* Sinceramente no me acordaba cuando hicimos esto, no me acordaba mucho de los ángulos, entonces, me puse a pensar que los ángulos siempre tenían que terminar como en pico no en curva, entonces cuando vi esta figura dije pues solo hay un pico y si se logra un ángulo, pero después hay una curva, entonces ya para mí no hay ángulo, sólo hay uno, pero ahora que lo vuelvo a ver me pongo a pensar que esta línea sí provoca el ángulo porque está curva, ahora que lo pienso, entonces sinceramente ya no sé si lo considero ángulo o no.

La imagen evocada de ángulo del estudiante 1 está formada por dos líneas que terminan en pico. Al parecer, la línea curva vista en su totalidad lo hace entrar en conflicto en su respuesta. Esta fue la única entrevista que se llevó a cabo en este grupo.

En G2, 5 de los 22 estudiantes consideraron la figura 4.14 un ángulo.

A continuación, veremos un extracto de la entrevista donde el estudiante expresa porqué determinó que la figura 4.14 es un ángulo. El estudiante será identificado como estudiante 2.

*Entrevistadora:* ¿Por qué determinaste que esta figura era un ángulo? [se refiere a la figura 4.14].

*Estudiante 2:* ¡Ah! bueno, porque pues tenemos que tomar esta línea [señala con su dedo índice la línea horizontal de la figura 4.15], entonces aquí pues hay otra [señala con su dedo índice la curva en la misma figura] que hasta cierto punto haciendo un acercamiento cada vez más y más grande se podría ver que ya no conectamos en una

curva si no que hay un punto en el que va a tener un comportamiento de línea recta. Un acercamiento muy grande como hacerle un super zoom.

La imagen evocada por el estudiante 2 está asociada con una imagen formada por dos líneas rectas diferentes con un punto en común, que forman una cuña o una punta. De los cuatro estudiantes restantes que contestaron de manera similar al estudiante 2, entrevistamos a tres de ellos y nos proporcionaron argumentos similares.

Otro caso de interés es el de un estudiante que señaló que la figura 4.16 no era un ángulo.



Figura 4.16 Figura del cuestionario que no fue considerada como un ángulo por un estudiante

Veamos a continuación, un extracto de la entrevista que se le realizó a este estudiante, el cual será identificado como estudiante 3.

*Entrevistadora:* Esta figura [la figura 4.16] ¿por qué no la consideramos como ángulo?

*Estudiante 3:* Es que ese me confundí un poco no sé si sea un ángulo de 0 o de...sí pero no, no creo porque es una línea.

*Entrevistadora:* Pero esta es también una línea [se le señala la figura 4.17] ¿por qué esta sí la consideraste un ángulo y esta no?

*Estudiante 3:* Bueno lo que yo observé es que aquí está el punto [el alumno coloca su dedo índice sobre la figura 4.17 del lado derecho], está donde empieza el ángulo [enseguida traza una trayectoria con su dedo índice como se muestra en la figura 4.18] y esta es la abertura que tiene, en esta de acá [señala la figura 4.8] no se ve claramente [se refiere a que no se ve abertura de acuerdo a sus palabras].



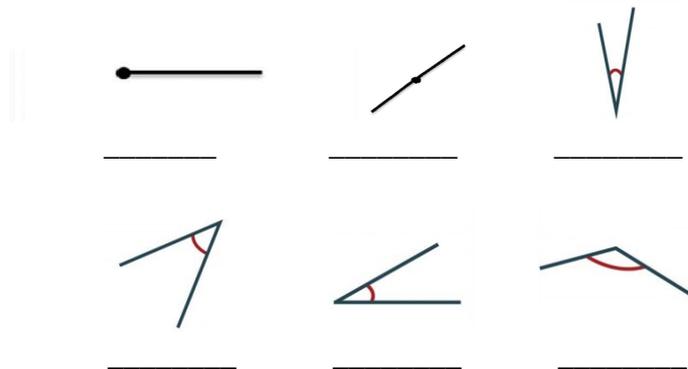
Figura 4.17 Figura del cuestionario que fue considerada como un ángulo por el estudiante 3



Figura 4.18 Representación de la trayectoria trazada por el estudiante 3

Aquí, la imagen evocada del estudiante 3 está asociada con dos líneas diferentes con un punto común que forman una “abertura”. Dos estudiantes más contestaron de manera similar al estudiante 3, ambos fueron entrevistados proporcionando argumentos similares.

**Ítem 5 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos. Escribe tu respuesta sobre la línea.**



**Imagen del concepto de medida angular evocada al estimar la medida de ángulos agudos, obtusos y llanos, trazados en diferentes posiciones** En G1, todos los estudiantes usaron su transportador para estimar la medida de los ángulos. Después de observar sus respuestas, llamó nuestra atención las medidas asignadas a algunas figuras.

A continuación, mostramos extractos de las entrevistas que se llevaron a cabo, donde los alumnos explican cómo obtuvieron las medidas de los ángulos con su transportador. Iniciemos con un primer estudiante el cual será identificado como estudiante 1.

*Entrevistadora:* ¿Cómo determinaste el ángulo de 40 grados [se refiere a la figura 4.19]?

*Estudiante 1:* Desde el punto medio. [En la figura 4.19 se observa como sitúa el origen del transportador en el punto destacado de la figura, después coloca el transportador de manera horizontal respecto a la página. Para obtener la medida del ángulo, prolonga imaginariamente la línea no horizontal hasta la escala externa del transportador y señala con su dedo índice el número 40 sobre la escala].

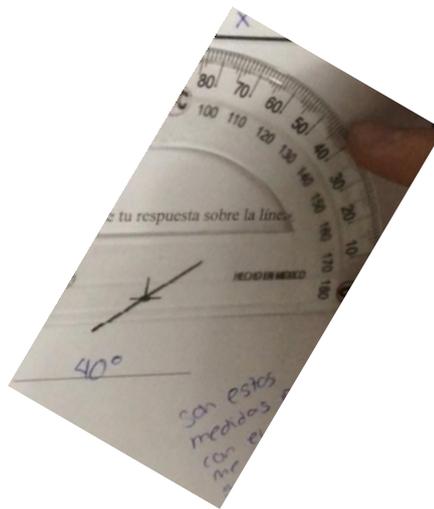


Figura 4.19 Uso del transportador por el estudiante 1 para estimar la medida del ángulo

Otra respuesta que llamó nuestra atención es la dada por el siguiente estudiante, el cual será identificado como estudiante 2 y del cual mostramos a continuación un extracto de la entrevista que se llevó a cabo.

*Entrevistadora:* ¿Cómo obtuviste esa medida de ángulo de 130 grados [se refiere a la figura 4.20]?

*Estudiante 2:* Nada más ubique el transportador alineándolo junto con la inclinación y ya, para mí tiene sentido que era 130 por alguna

extraña razón pero son 140, no sé, me equivoqué en su momento me pareció que tenía sentido.

*Entrevistadora:* Puedes mostrarme como colocaste el transportador y con tu dedo señárame la medida del ángulo.

*Estudiante 2:* Ok. [En la figura 4.20 se observa como sitúa el origen del transportador en el punto destacado de la figura, después coloca el transportador de manera horizontal respecto a la página. Para obtener la medida del ángulo, prolonga imaginariamente la línea no horizontal hasta la escala interna del transportador y señala con su dedo índice el número 140 sobre la escala].

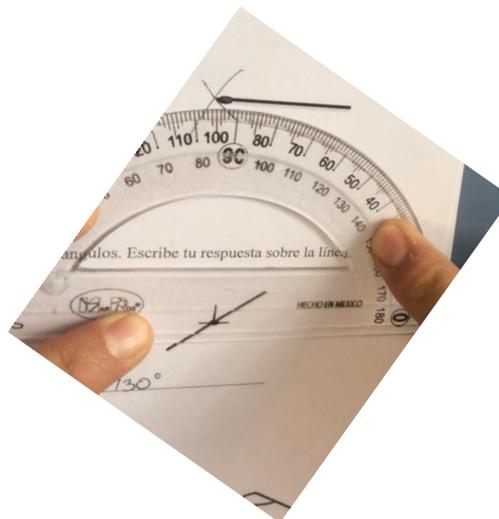


Figura 4.20 Uso del transportador por el estudiante 2 para estimar la medida del ángulo

En ambos casos, observamos que los estudiantes utilizan el punto destacado en la figura dada como el vértice del ángulo que van a medir, sin embargo, colocan el transportador de manera que el ángulo que consideran no es el dado, sino un ángulo que tiene uno de sus lados alineado con la horizontal el cual no es visible, y el otro lado como una parte de la figura dada, el cual van a proyectar imaginariamente hasta la escala que van a seleccionar para obtener la medida del ángulo. Los nuevos ángulos que construyen los estudiantes, de acuerdo a la descripción que hacen son ángulos agudos,

aunque en el caso del estudiante 2 este consideró la escala errónea, de acuerdo al ángulo que quería medir.

Ahora, vamos a mostrar la medida dada por un estudiante a otra de las figuras. El estudiante será identificado como estudiante 3. A continuación, se muestra un extracto de la entrevista que se llevó a cabo.

*Entrevistadora:* ¿Me podrías explicar cómo determinaste esa medida [se refiere a la figura 4.21]?

*Estudiante 3:* Igual tomé mi transportador y lo puse en la línea y pues lo marqué donde daban 160 grados.

*Entrevistadora:* ¿Cómo colocaste tu transportador?

*Estudiante 3:* Así en la línea, esta rayita en la línea [en la figura 4.21 se observa que coloca el transportador de manera casi vertical. Después, la línea del transportador correspondiente a 0 grados la alinea con uno de los lados del ángulo, el que está en el lado izquierdo en la figura, el cual no es horizontal respecto a la página, además se observa que el origen del transportador no coincide exactamente con el vértice del ángulo] y también quedaba esta línea y lo marque [prolonga imaginariamente el otro lado del ángulo, el que está en el lado derecho de la figura, hasta la escala externa del transportado y señala con su dedo índice el número 160 sobre la escala].

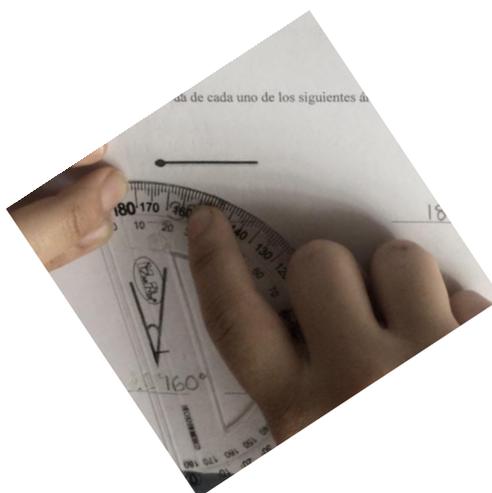


Figura 4.21 Uso del transportador por el estudiante 3 para estimar la medida del ángulo de 160 grados

Este estudiante, de acuerdo a la descripción que hace, el ángulo que quería medir era un ángulo agudo, sin embargo, al elegir la escala errónea en el transportador asigna una medida errónea.

Otra respuesta interesante es la dada por otro estudiante, este será identificado como estudiante 4 y del cual mostramos a continuación un extracto de la entrevista que se llevó a cabo.

*Entrevistadora:* ¿Y el ángulo de -40 grados? El signo menos me llama la atención.

*Estudiante 4:* ¡Ah! pensé que por estar volteado era como un ángulo negativo [En la figura 4.22 se observa como coloca el transportador “de cabeza”. Después alinea la línea correspondiente a 0 grados del transportador con uno de los lados del ángulo el cual no es horizontal respecto a la página, además se observa que el origen del transportador no coincide exactamente con el vértice del ángulo. Para obtener la medida del ángulo, prolonga imaginariamente el otro lado del ángulo, hasta la escala interna del transportador y señala con su dedo índice el número 40 sobre la escala].

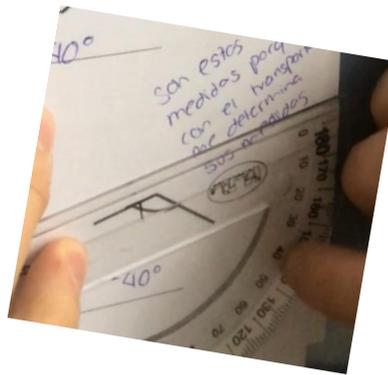


Figura 4.22 Uso del transportador por el estudiante 4 para estimar la medida del ángulo

Los estudiantes 3 y 4, además de no hacer coincidir el origen del transportador con el vértice del ángulo que van a medir, consideran la escala errónea por lo cual asigna una medida errónea y ninguno verifica su respuesta con algún ángulo de referencia.

Por su parte, en G2, llamó nuestra atención las medidas asignadas a dos de las figuras que se les mostraron a los estudiantes. En la tabla 4.4 se muestran estas figuras (figuras 4.23 y 4.24) y las respuestas proporcionadas por los estudiantes.

Tabla 4.4  
*Respuestas de los estudiantes*

Figura 4.23	Número de estudiantes	Medidas estimadas	Figura 4.24	Número de estudiantes	Medidas estimadas
	5	180°		2	45°
	1	180° o 0°		1	0°
	4	360°		18	180°
	3	360° o 0°		1	Sin respuesta
	9	0°			

A continuación, mostraremos extractos de dos entrevistas, ambos respecto a la respuesta que dieron dos estudiantes a la figura 4.24, y que mencionaremos como Caso I y Caso II. Iniciemos con el Caso I, donde el estudiante estima que la figura 4.24 mide 45 grados. Este estudiante será identificado como estudiante 5.

*Entrevistadora:* En el ítem 5 se te pedía que estimaras la medida de la siguiente figura [la entrevistadora señala la figura 4.24] ¿Cómo determinaste esta medida de 45 grados?

*Estudiante 5:* Dentro de mi idea estaba de que podía trazar un plano, un plano cartesiano y ya tomar como referencia este, el centro pues aquí [señala el extremo izquierdo del ángulo de la figura 4.24] y tomar de referencia que estaba inclinado junto al eje  $x$

*Entrevistadora:* Entonces tú colocaste el centro del plano  $(0,0)$  en este punto [se refiere al extremo izquierdo del ángulo de la figura 4.24] y entonces eso te ayudó a estimar la medida [en la figura 4.25 tratamos de ilustrar lo que el alumno hizo para estimar la medida].

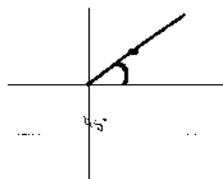


Figura 4.25 Ilustración del razonamiento del estudiante 5 para estimar la medida del ángulo de la figura 4.24

*Estudiante 5:* Sí

La imagen evocada en el estudiante 5 surge de la inclinación que observó en la figura, respecto a la horizontal. La posición de la figura lo llevó a colocar el extremo izquierdo como origen del plano cartesiano y considerar al mismo tiempo el lado positivo del eje  $x$ , formándose un ángulo en posición normal del cual estimó que su medida era de 45 grados.

En el Caso II, el alumno no asignó ninguna medida a la figura 4.24. Este estudiante será identificado como estudiante 6.

*Entrevistadora:* Muy bien, vamos al ítem número 5...en este ítem [señala la figura 4.24] ¿por qué no estimaste la medida?

*Estudiante 6:* En éste es que no sabía cómo sacarla. Si lo tomaría recto [se refiere a que la línea estuviera completamente de forma horizontal] sí sería 180 si lo tomo así normal.

*Entrevistadora:* Ok. La inclinación es lo que te generó...

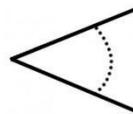
*Estudiante 6:* Un poco de dudas de verlo.

El estudiante reconoció un ángulo de 180 grados, sin embargo, la posición del ángulo le generó un conflicto por lo cual no contesta el ítem.

**Ítem 6 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Con ayuda de un transportador mide los siguientes ángulos. Coloca tu respuesta sobre la línea.**



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

**Imagen del concepto evocada de medida angular para obtener la medida de tres ángulos colocados en diferentes posiciones y con la presencia o no de un arco utilizando un transportador** Derivados de la revisión de las respuestas de G1, obtuvimos los siguientes resultados: respecto a la primera figura de esta pregunta (ver la figura 4.26), 7 estudiantes de los 10, proporcionaron medidas en un rango de los 45 a los 50 grados. Los tres restantes mencionaron que el ángulo media 140 grados.

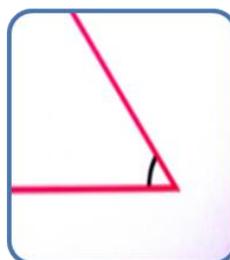


Figura 4.26 Primera figura del ítem 6 del cuestionario

Pasando a la segunda figura de esta pregunta (ver la figura 4.27), 8 estudiantes de los 10, proporcionaron medidas en un rango de los 45 a los 50 grados. Los dos restantes mencionan que mide 70 y 90 grados respectivamente.

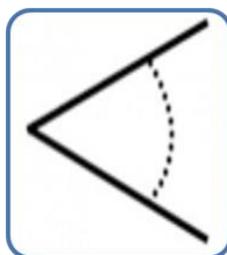


Figura 4.27 Segunda figura del ítem 6 del cuestionario

Respecto a la tercera figura de esta pregunta (ver figura 4.28), es importante mencionar que esta no tenía dibujado un arco, a diferencia de las dos primeras figuras. En este caso, el estudiante podía elegir de acuerdo a su imagen evocada el ángulo convexo, el cóncavo o ambos para medir.

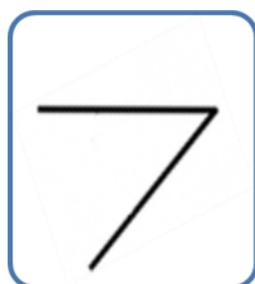


Figura 4.28 Tercera figura del ítem 6 del cuestionario

De los 10, siete estudiantes proporcionaron medidas en un rango de los 45 a los 50 grados. De los tres restantes, un estudiante señala que el ángulo mide 80 grados, otro estudiante 130 grados y el último estudiante 225 grados.

A continuación, mostraremos las medidas asignadas por un estudiante a las tres figuras (ver figura 4.29). El estudiante será identificado como estudiante 1 y del cual mostramos a continuación un extracto de la entrevista que se llevó a cabo.

*Entrevistadora:* En el ítem 6 determinas que uno de los ángulos mide 90 grados [se refiere a la segunda figura] y el otro 80 grados [se refiere a la tercera figura]. ¿Cómo determinaste esas medidas?

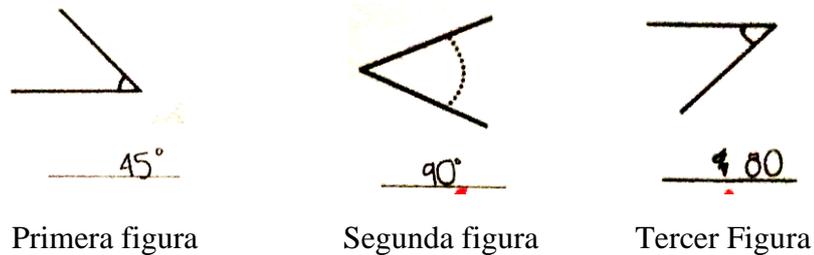


Figura 4.29 Medidas asignadas por el estudiante 1 a las tres figuras dadas

*Estudiante 1:* Yo vi que era más grande el de 90, yo me basé en la pancita y vi que era lo doble por eso deduje y el de 80 yo igual lo vi más grande que el de 45 pero menor que el de 90. Yo le dibujé la pancita, yo le puse cuanto media la pancita. Este que no tenía yo se la puse.

En este caso, el tamaño del arco en las figuras influyó en la medida del ángulo que el estudiante les asignó. Él comparó los tamaños de los arcos en la primera y segunda figura y de esta comparación asignó una medida más grande al ángulo que tenía el arco más grande, en este caso al ángulo de la segunda figura. Después comparó los ángulos de la segunda figura y de la tercera figura a simple vista y le pareció que el ángulo de la tercera figura era más pequeño que el ángulo de la segunda figura razón por la cual le asignó una medida más pequeña. Puesto que el ángulo de la tercera figura no tenía ningún arco señalado, de la relación que él estableció entre la medida de los ángulos le dibujó a la tercera figura un arco de un tamaño que se correspondiera con su medida.

Otra respuesta interesante dada por otro estudiante es la que se muestra a continuación. El estudiante será identificado como estudiante 2. En seguida, mostramos un extracto de la entrevista que se llevó a cabo.

*Entrevistadora:* ¿En el ítem 6 cómo determinaste las medidas de 140 y 130 grados [se refiere a las figuras 4.30 y 4.31]?

*Estudiante 2:* Puse mi transportador así y me dio 140 [En la figura 4.30 se observa como sitúa el origen del transportador en el vértice del ángulo, después coloca el transportador de manera horizontal respecto a la hoja alineando el lado horizontal del ángulo con la línea correspondiente a 0 o 180 grados del transportador. Para obtener la medida del ángulo, prolonga imaginariamente la línea no horizontal del ángulo hasta la escala externa del transportador y señala con su dedo índice el número 140 sobre la escala] y lo mismo para el de 130 [En la figura 4.31 se observa como gira el transportador y sitúa el origen de este cerca del vértice del ángulo, después alinea el lado horizontal del ángulo con la línea correspondiente a 0 o 180 grados del transportador. Para obtener la medida del ángulo, prolonga imaginariamente la línea no horizontal del ángulo hasta la escala interna del transportador y señala con su dedo índice el número 130 sobre la escala].



Figura 4.30 Medida de 140 grados asignada por el estudiante 2 a la primera figura

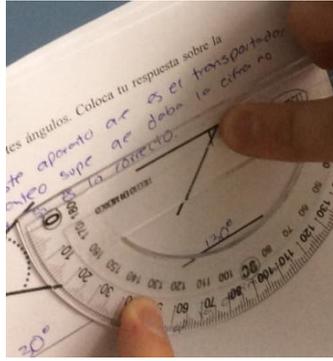


Figura 4.31 Medidas de 130 grados asignada por el estudiante 2 a la tercera figura

En el caso del estudiante 2, en las figuras 4.30 y 4.31, de acuerdo a las escalas que eligió para determinar la medida de los ángulos son erróneas. Además, es interesante notar que, en el caso de la figura 4.30, utiliza la escala externa del transportador y en el caso de la figura 4.31, la escala externa del transportador. Posiblemente la elección de la escala esté relacionada con la posición del ángulo. En ninguna de las respuestas el estudiante utilizó algún ángulo de referencia para verificar su respuesta.

Un caso más fue el del estudiante cuyas respuestas se muestran a continuación. El estudiante será identificado como estudiante 3 y del cual mostramos a continuación un extracto de la entrevista que se llevó a cabo.

*Entrevistadora:* Quisiera ver si puedes comentar cómo obtuviste las medidas de los ángulos de 140 y 225 grados en el ítem 6.

*Estudiante 3:* Sí, el de 140 puse mi transportador y la rayita daba 140 [en la figura 4.32 se observa como sitúa el origen del transportador en el vértice del ángulo, después coloca el transportador de manera horizontal respecto a la hoja alineando el lado horizontal del ángulo con la línea correspondiente a 0 o 180 grados del transportador. Para obtener la medida del ángulo, prolonga imaginariamente la línea no horizontal del ángulo hasta la escala externa del transportador y señala con su dedo índice el número 140 sobre la escala]. Para el de 225 pues mi lógica fue, esto es de 180 [señala con su dedo índice la línea horizontal que forma

parte del ángulo] y luego aquí lo que me dé [en la figura 4.33 se observa como gira el transportador y sitúa el origen de este en el vértice del ángulo, después alinea el lado horizontal del ángulo con la línea correspondiente a 0 o 180 grados del transportador. Para obtener la medida del ángulo, prolonga imaginariamente la línea no horizontal del ángulo hasta la escala externa del transportador y señala con su dedo índice el número 40 sobre la escala] se lo sumo a 180, le sume cuarenta y tantos.

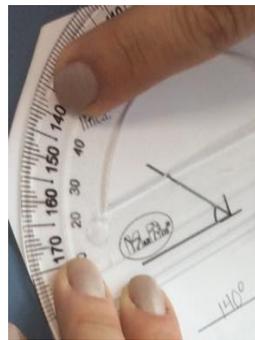


Figura 4.32 Medida de 140 grados asignada por el estudiante 3 a la primera figura



Figura 4.33 Medida de 225 grados asignada por el estudiante 3 a la tercera figura

En la figura 4.32, observamos que el estudiante elige la escala incorrecta al momento de determinar la medida del ángulo. En el caso de la figura 4.33, la posición del ángulo influyó en la obtención de la medida del ángulo, pues el segmento horizontal en la figura lo asocia con un ángulo de 180 grados, después mide con el transportador el ángulo de la figura dada (40 grados), y suma ambas medidas para determinar que el ángulo es de 225 grados.

Por su parte, en G2, respecto a la primera figura de esta pregunta (ver la figura 4.26), 21 estudiantes de los 22, proporcionaron medidas en un rango de los 43 a los 50 grados.

Sólo un estudiante asignó la medida de “  $-45^\circ$  ”. Dado que la respuesta de este estudiante es de interés para nuestro estudio se le realizó una entrevista cuyo extracto se presenta a continuación donde da la justificación a su respuesta. Este estudiante será identificado como estudiante 4.

*Entrevistadora:* Me podrías comentar cómo obtuviste la medida de este ángulo de  $-45^\circ$ . [señala la primera figura del ítem 6 del cuestionario figura 4.26].

*Estudiante 4:* Tomando como referencia el origen en el vértice y el sentido hacia la izquierda y como es en dirección a las manecillas del reloj los ángulos son negativos.

*Entrevistadora:* ¿Por qué consideraste esa dirección?

*Estudiante 4:* ¡Por eh...! Bueno es que en realidad aquí está intrínsecamente el rayo que parte del vértice hacia el exterior [el alumno señala con su dedo índice el lado del ángulo que está alineado con la horizontal] y la dirección del rayo permite medir la dirección del ángulo.

*Entrevistadora:* ¿Cuál rayo?

*Estudiante 4:* El rayo de referencia es respecto a la horizontal.

En este caso, la posición del ángulo influyó en la obtención de la medida, puesto que el estudiante consideró el ángulo como un ángulo dirigido al alinear o hacer coincidir uno de los rayos del ángulo con el eje  $x$ , de manera natural, el rayo que asocia

con el eje  $x$  es el que está en la posición horizontal, luego este lado lo consideró como el lado inicial. El otro rayo que no está en la posición horizontal lo consideró como el lado final, así pues, el ángulo que se generó fue en el sentido de las manecillas del reloj por lo tanto determinó que la medida del ángulo era de “  $-45^\circ$  ”.

Pasando a la segunda figura de este ítem (ver la figura 4.27), 21 estudiantes de los 22, proporcionaron medidas en un rango de los 45 a los 51 grados.

Sólo un estudiante asignó la medida de “  $141^\circ$  ”. El estudiante obtuvo su respuesta usando de forma incorrecta el transportador, al elegir la escala errónea. Además, él no evoca algún ángulo de referencia (en este caso un ángulo agudo) para verificar la medida que obtuvo.

Respecto a la tercera figura de este ítem (ver figura 4.28), es importante recordar que esta no tenía dibujado un arco, a diferencia de las dos primeras figuras. En este caso, el estudiante podía elegir de acuerdo a su imagen evocada el ángulo convexo, el cóncavo o ambos para medir.

De los 22 estudiantes, un estudiante dibujó dos arcos sobre la figura haciendo referencia a dos ángulos diferentes (ver figura 4.34).

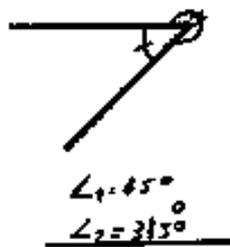


Figura 4.34 Respuesta de uno de los estudiantes a la tercera figura del ítem 6 del cuestionario

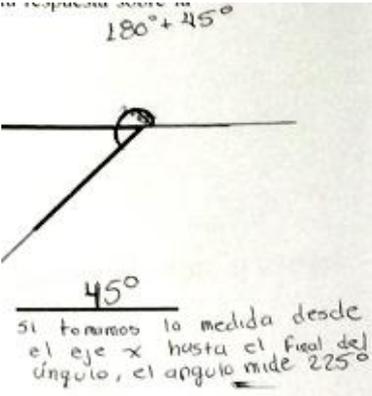
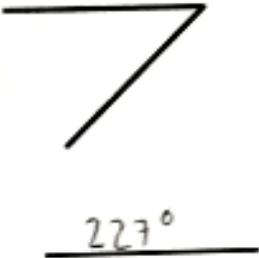
Para medir el ángulo agudo el estudiante utilizó el transportador; mientras que, para el ángulo obtuso el estudiante evocó un ángulo de referencia, alguna definición o postulado relacionado con medida de ángulos.

Continuando con el análisis de las respuestas, encontramos que 17 estudiantes seleccionaron únicamente el ángulo convexo y para su medición utilizaron el transportador. Dieciséis de ellos dieron medidas en un rango de los 44 a los 46 grados y sólo uno asignó “  $-45^\circ$  ” como medida.

De los cinco estudiantes restantes, en la tabla 4.5 se ilustran primero las respuestas de dos estudiantes que construyeron un nuevo ángulo para dar su respuesta. Estas van acompañadas de la descripción o comentarios sobre algún aspecto de interés presente en sus respuestas.

Tabla 4.5

*Respuestas de dos estudiantes que construyeron un nuevo ángulo para dar su respuesta*

Respuesta	Descripción
<p>Este estudiante dio dos respuestas, una medida de “<math>45^\circ</math>” y otra de “<math>225^\circ</math>”.</p>	<p>El estudiante trazó dos arcos que indican dos ángulos diferentes. Para la obtención de la medida de <math>45^\circ</math> usó el transportador, sin embargo, para obtener la medida del otro ángulo (<math>225^\circ</math>), la posición de la figura influyó puesto que el estudiante trazó una prolongación del segmento horizontal del ángulo dado y considerando el segmento no horizontal construyó un nuevo ángulo, del cual para determinar su medida evocó un ángulo de referencia (el ángulo de <math>180^\circ</math>) al cual sumó el ángulo de <math>45^\circ</math> para obtener la medida de <math>225^\circ</math></p>
	<p>Consideramos que este caso es similar al caso anterior ya que la medida que asignó es semejante a la medida del ángulo de <math>225^\circ</math>, aunque no contamos con ninguna evidencia ya que el estudiante no realizó ningún trazo sobre la figura ni fue posible entrevistarlo.</p>
<p>La respuesta de este estudiante fue “<math>227^\circ</math>”</p>	
	

En el caso de estos dos estudiantes consideramos que la posición del ángulo influyó en su respuesta al observar que el ángulo o uno de los lados del ángulo estaba en un “tercer cuadrante”, lo cual los llevó a construir un nuevo ángulo que se ajustara a su imagen y fue el que midieron.

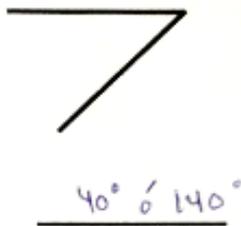
Ahora, en la tabla 4.6 se ilustran las respuestas de otros dos estudiantes quienes utilizaron la escala errónea del transportador para dar su respuesta.

Tabla 4.6

*Respuestas de dos estudiantes que utilizaron la escala errónea del transportador para dar su respuesta*

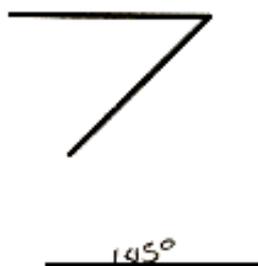
Respuesta	Descripción
-----------	-------------

Este estudiante escribió como respuesta “ $40^\circ$  ó  $140^\circ$ ”.



El estudiante utilizó el transportador, sin embargo, consideró para su respuesta las dos escalas del transportador.

La respuesta de este estudiante fue “ $145^\circ$ ”.



El estudiante utilizó el transportador, pero eligió la escala incorrecta para obtener la medida del ángulo.

Para indagar acerca de la última respuesta que se muestra en la tabla 4.6, se realizó una entrevista al estudiante, donde explica los motivos por los cuales asignó a este ángulo la medida de “ $145^\circ$ ”. El estudiante será identificado como estudiante 5.

A continuación, se presenta un extracto de esta entrevista:

*Entrevistadora:* ¿Cómo obtuviste la medida de 145 grados? ¿Necesitas el transportador para recordar?

*Estudiante 5:* No, así está bien. Es que yo tome como medida el lado derecho como cero [se refiere a que imaginariamente prolongó el rayo horizontal a partir del vértice a su derecha como lo muestra la figura 4.35] y después lo tome así [coloca su dedo índice sobre la línea imaginaria y enseguida traza una trayectoria con su dedo como se muestra en la figura 4.35], pero no estaría bien.

*Entrevistadora:* ¿Necesitas el transportador?

*Estudiante 5:* Sí [el estudiante toma el transportador y lo coloca sobre la figura de forma correcta para determinar la medida del ángulo]. Es que creo que lo hice así y es como me salió 145 grados [ver la figura 4.36].



Figura 4.35 Representación de la trayectoria trazada por el estudiante 5



Figura 4.36 Uso del transportador por el estudiante 5 para determinar la medida del ángulo

En un inicio la imagen evocada de ángulo por el estudiante 5 tiene que ver con extender o prolongar el rayo horizontal del ángulo, e ignorando el rayo horizontal original como uno de los lados del ángulo considera que uno de los lados del ángulo es

esta prolongación y que el otro rayo que compone su ángulo es el rayo que está en la posición no horizontal, el nuevo ángulo que construye es un ángulo obtuso el cual después de haber hecho una breve reflexión se da cuenta que de esta manera no determinó la medida pedida.

En un segundo intento por explicar cómo obtuvo la medida le proporcionamos un transportador, el estudiante colocó el transportador como se muestra en la figura 4.36 y para asignarle una medida, señaló la escala interior del transportador mencionando que era de 145 grados. En este caso, el estudiante eligió la escala incorrecta, además interpoló incorrectamente ya que en la entrevista señaló en el transportador un número entre 140 y 130. En este caso no hubo ninguna reflexión sobre la medida que obtuvo.

### **Ítem 7 del cuestionario aplicado a G1. Qué significa para ti medir un ángulo.**

**Imagen evocada de medida angular** De los 10 estudiantes sólo 4 dieron respuestas concretas. De sus respuestas emergieron dos categorías: C1 y C2. A continuación, presentamos cada categoría y su código, señalando algunas respuestas que pertenecen a cada una de ellas. En cada categoría especificamos el número de respuestas, por ejemplo (3/10) indica que 3 de las 10 respuestas pertenecen a esta categoría.

C1: La medida angular definida como apertura/abertura (4/10)

Ejemplo 1: *“Determinar la apertura de la intersección de dos líneas.”*

Ejemplo 2: *“Saber que tan abierta o cerrada esta una figura.”*

Ejemplo 3: *“Es lograr saber la abertura que tiene un ángulo.”*

Ejemplo 4: *“Ver cuánto se abren las líneas.”*

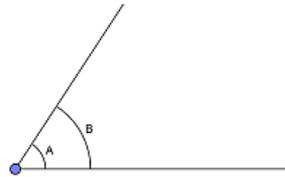
C2: Respuestas vagas (6/10)

Ejemplo 1: *“Medir el grado de una figura geométrica.”*

Ejemplo 2: *“Obtener una respuesta para posteriormente resolver un problema.”*

En las respuestas se observa que la mayoría de los estudiantes dan una respuesta vaga de medida angular.

**Ítem 8 del cuestionario aplicado a G1. Ítem 7 del cuestionario aplicado a G2.**  
**Observa la siguiente figura y señala la relación correcta. Explica por qué.**



- a) El ángulo A es mayor al ángulo B.
- b) El ángulo A es igual al ángulo B.
- c) El ángulo B es mayor al ángulo A.

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Imagen de ángulo y su medida que evoca el estudiante al determinar la relación entre la medida de dos ángulos.** En la figura que se muestra en esta pregunta se observan dos arcos de tamaño diferente que aparentemente se refieren a dos ángulos diferentes. Queremos observar las imágenes de ángulo y su medida en las que los estudiantes se apoyaron para determinar la elección de su respuesta, entre las tres opciones que se les dan, con lo cual queda establecida la relación para ellos, entre las medidas de estos dos ángulos. Además, queremos saber si el tamaño de los arcos incide en la elección que hacen, es decir, si al ángulo denotado con el arco más pequeño le asignan una medida menor o si al ángulo denotado con el arco más grande le asignan una medida mayor. Se obtuvieron los siguientes resultados:

En G1, cinco de los diez estudiantes señalaron que “El ángulo A es igual al ángulo B”. Mientras cuatro estudiantes señalaron que “El ángulo B es mayor que el ángulo A”. Un estudiante no respondió el ítem. Para conocer las imágenes de los estudiantes, se formaron dos categorías C1, y C2 que surgieron a partir de las respuestas. En cada categoría, se colocaron las respuestas que consideramos similares. Las dos categorías son las siguientes:

C1: El tamaño del arco no incidió (5 de 10 estudiantes).

Los siguientes casos ilustran esta categoría:

Ejemplo 1: *“Porque no importa donde marques el ángulo siempre va a ser igual.”*

Ejemplo 2: “Porque no cambia la abertura, solo se pone otra marca al lado.”

C2: El tamaño del arco sí incidió (4 de 10 estudiantes).

Los siguientes casos ilustran esta categoría:

Ejemplo 1: “Cuando lo medí con el transportador me dio una medida diferente y lo medí desde cada punto el A y B.”

Ejemplo 2: “Si porque mientras más cerca es más chico, y supongo ya que es menor que B.”

Ejemplo 3: “Porque el ángulo B está más abierto que el ángulo A.”

De la categoría C2: El tamaño del arco sí incidió, seleccionamos a tres estudiantes a los cuales entrevistamos. A continuación, mostramos extractos de esas tres entrevistas.

El primer estudiante será identificado como estudiante 1.

*Entrevistadora:* Tú seleccionaste el inciso c) como respuesta. ¿Me puedes explicar esa respuesta?

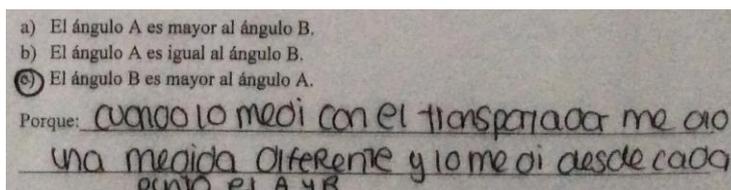


Figura 4.37 Respuesta seleccionada por el estudiante 1 y su justificación

*Estudiante 1:* Pues igual volví a usar mi transportador, pero primero lo medí del ángulo A y me daba esta, quedaba en 50 [el estudiante coloca el origen del transportador sobre el punto de intersección del arco más pequeño y el lado horizontal del ángulo, enseguida alinea la línea correspondiente a 0 grados del transportador con el lado horizontal del ángulo como se observa en la figura 4.38 y prolonga imaginariamente el lado no horizontal del ángulo hasta la escala externa]. Después lo puse en el ángulo B y me daba más, me daba 70 [el estudiante coloca el origen del transportador sobre el punto de intersección del arco más grande y el lado horizontal del ángulo, enseguida alinea la línea correspondiente a 0 grados del transportador con el lado horizontal del ángulo

como se observa en la figura 4.39 y prolonga imaginariamente el lado no horizontal del ángulo hasta la escala externa]. Entonces pensé que el B era más grande que el A.

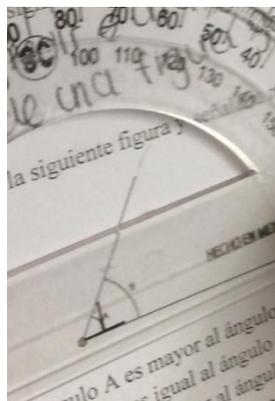


Figura 4.38 Medida obtenida del ángulo A por el estudiante 1 para establecer la relación entre los ángulos A y B

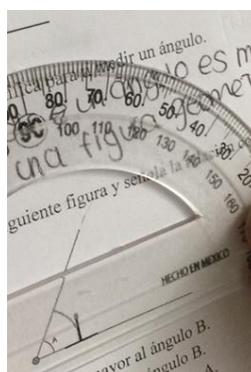


Figura 4.39 Medida obtenida del ángulo B por el estudiante 1 para establecer la relación entre los ángulos A y B

En este caso para el estudiante 1, los dos arcos de diferente tamaño hacían referencia a dos ángulos diferentes, por esta razón hace dos mediciones colocando el transportador de forma errónea como se observa en las figuras 4.38 y 4.39. Posiblemente las respuestas que obtuvo le parecieron lógicas pues para él, el arco pequeño está asociado con un ángulo de menor medida y el arco más grande con un ángulo de mayor medida.

El segundo estudiante será identificado como estudiante 2.

*Entrevistadora:* Tú seleccionaste el inciso c) como respuesta. ¿Me puedes explicar por qué?

*Estudiante 2:* Sentí que entre más cerca del punto [se refiere al vértice] es más pequeño y mientras más lejos es mayor.

El tercer estudiante será identificado como estudiante 3.

*Entrevistadora:* ¿Por qué seleccionaste el inciso c) en el ítem 8?

*Estudiante 3:* Por el tamaño de la pancita

En el caso de los estudiantes 2 y 3, ellos no utilizaron el transportador a diferencia del estudiante 18 para establecer la relación entre las medidas de los ángulos A y B. Posiblemente el estudiante 19 observó que el área limitada entre el vértice, los lados y el arco más pequeño era más pequeña en comparación con el área limitada por el vértice, los lados y el arco más grande, razón por la cual establece que el ángulo B es mayor que el ángulo A. En el caso del estudiante 20, simplemente asoció el arco más pequeño con un ángulo menor y el un arco más grande con un ángulo de mayor medida.

Por su parte, en G2, todos los estudiantes señalaron que “El ángulo A es igual al ángulo B”. En la justificación del porqué de su elección, se deduce que los distintos tamaños de los arcos no influyeron en su respuesta. Para observar las imágenes de los estudiantes, se formaron cuatro categorías C1, C2, C3 y C4 que surgieron a partir de sus justificaciones. En cada categoría, se colocaron las justificaciones que consideramos similares.

Las cuatro categorías son las siguientes:

C1: Igualdad entre los dos ángulos por la comparación entre los elementos de ambos ángulos (6 de 22 estudiantes)

Los siguientes casos ilustran esta categoría:

Ejemplo 1: *“Todo ángulo es congruente consigo mismo, los ángulos tienen los mismos componentes, luego los ángulos son iguales.”*

Ejemplo 2: *“Porque los rayos que componen cada ángulo son los mismos.”*

En esta categoría, los 6 estudiantes evocaron su imagen de ángulo al comparar los elementos de los ángulos A y B. En su respuesta, señalan que los ángulos A y B coinciden en todos sus elementos (tamaño y forma), concluyendo que es el mismo ángulo y por lo tanto su medida es la misma.

C2: Igualdad entre los dos ángulos porque ambos tienen la misma apertura/abertura (9 de 22 estudiantes)

Los siguientes casos ilustran respuestas de esta categoría:

Ejemplo 1: *“Porque el ángulo lo determina la abertura o sea las líneas que se intersectan y es el mismo en todo el interior.”*

Ejemplo 2: *“El grado de apertura de A y B es el mismo, sólo que está tomado a diferentes alturas, pero la proporción es la misma.”*

La mayoría de las respuestas están en esta categoría (9 de 22). En este caso, evocaron la imagen de ángulo en términos de “apertura /abertura”. Ellos observan en la figura lo que consideran como “apertura” o “abertura”, y la cuantifican para los ángulos A y B, concluyendo que es la misma para ambos ángulos.

C3: Igualdad entre los dos ángulos porque se pueden igualar el tamaño de los lados de ambos ángulos (3 de 22 estudiantes)

Los siguientes casos ilustran respuestas de esta categoría:

Ejemplo 1: *“La magnitud de un ángulo no depende de la extensión de los rayos (líneas dirigidas), es constante la medida.”*

Ejemplo 2: *“La magnitud del ángulo depende de la inclinación de las líneas, intersectadas, y está será la misma, aunque su longitud de las líneas aumente.”*

Los dos estudiantes responden en términos de la medida de los rayos o líneas que los componen, al expresar que, aunque los rayos aumenten su tamaño el ángulo sigue siendo el mismo. Es decir, consideran que los lados del ángulo A tienen menor longitud que los del ángulo B, pero que pueden prolongarlos o extenderlos imaginariamente, hasta igualarlos con la longitud de los lados del ángulo B los cuales consideran más largos. Además, están en la misma dirección.

C4: Lenguaje impreciso (4 de 22 estudiantes)

En esta última categoría se agruparon las respuestas que carecieron de un lenguaje preciso para expresar sus ideas.

Los siguientes casos ilustran respuestas de esta categoría:

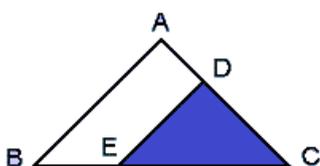
Ejemplo 1: *“No importa qué tan grande sea B de A en la figura ya que se toma de otros puntos”*

Ejemplo 2: *“Opción B ya que tiene el mismo origen, sólo cambia el punto de referencia.”*

En términos generales, podemos observar que los estudiantes en G2, en su mayoría, evocaron la imagen del concepto de ángulo para dar su respuesta, es decir, no necesitaron evocar el concepto de medida para establecer la relación entre la medida de los ángulos A y B. La mayoría de los estudiantes (nueve), se apoyaron en su imagen del concepto de ángulo relacionada con apertura/abertura.

En G2 no se hicieron entrevistas.

**Ítem 9 del cuestionario aplicado a G1. Ítem 8 del cuestionario aplicado a G2. En la siguiente figura el ángulo ACB mide  $45^\circ$ . ¿Cuánto mide el ángulo DCE? Explica por qué.**



Porque: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Imagen evocada por el estudiante para determinar la medida del ángulo DCE** En primer lugar, queremos conocer qué medida asocian los estudiantes a un ángulo (el ángulo DCE). Después se revisarán las justificaciones de los estudiantes para saber si las áreas de los triángulos o la longitud de los lados que conforman este ángulo incidieron al momento de determinar su medida, en el sentido de considerar el hecho de que, si la longitud de los lados del ángulo DCE son de menor longitud que los del ángulo ACB, entonces la medida del ángulo DCE sería menor que la medida del ángulo ACB. Lo mismo ocurre en el caso de las áreas de los triángulos, queremos ver si al

triángulo de mayor área lo asocian con un ángulo de mayor medida o si a un triángulo de menor área lo asocian con un ángulo de menor medida.

Para conocer las imágenes que evocaron los estudiantes para determinar su respuesta se llevará a cabo una categorización de sus justificaciones y se comentarán los aspectos relevantes que se observaron en cada una de ellas.

A continuación, se muestran los resultados encontrados:

En G1, cinco de los 10 estudiantes mencionaron que el ángulo DCE mide 45 grados. En sus justificaciones encontramos lo siguiente: “*mide exactamente lo mismo porque por más que se agrande la recta el ángulo no cambia*”, “*no cambia, se mantienen los lados en la misma inclinación solo se reduce la escala*”, “*El ángulo DCE mide lo mismo que ACB, sólo se encuentra a escala pero el ángulo C mide lo mismo dentro del triángulo grande como del triángulo chico y los otros también miden lo mismo...*”, “*45° porque aunque el triángulo está más chiquito la abertura de los ángulos es la misma.*”

Tres estudiantes escribieron que no se acordaban cómo determinar el valor del ángulo. Uno más no contestó. Y el estudiante restante mencionó que 22 grados. A este último estudiante se le hizo una entrevista de la cual mostramos un extracto a continuación. El estudiante será identificado como estudiante 1.

*Entrevistadora:* En el ítem 9, mencionas que el ángulo DCE mide 22 grados y escribes “yo considero que es como la mitad” me puedes explicar tu respuesta [señala la figura 4.40]

*Estudiante 1:* Igual del dibujo, todo el triángulo es de 45 grados y este triángulo es la mitad unos 22 es la mitad [el estudiante se refiere a que el tamaño del triángulo DCE es la mitad del tamaño del triángulo ACB]

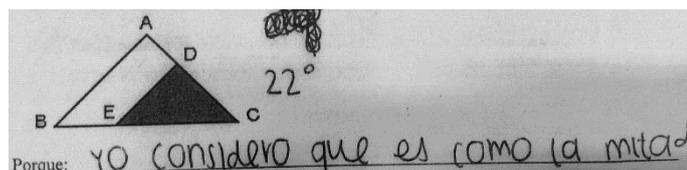


Figura 4.40 Respuesta de uno de los estudiantes donde señala que el ángulo DCE mide 22 grados

En este caso, el tamaño de los triángulos ACB y DCB incidió en la respuesta del estudiante.

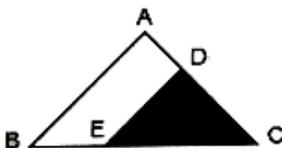
Por su parte, en G2, 21 estudiantes respondieron que el ángulo DCE mide  $45^\circ$ . Un estudiante dio como medida  $90^\circ$ , pero de acuerdo con su justificación, consideramos que se trató de un error al momento de escribir su respuesta.

Para observar las imágenes de los estudiantes, se formaron cinco categorías denominadas C1: congruencia de triángulos, C2: semejanza de triángulos, C3: apertura/abertura, C4: mismos lados y C5: otros. En cada categoría, se colocaron las respuestas que consideramos similares. En las tablas 4.7 a la 4.11 se ilustran algunos casos.

Encontramos cinco respuestas en la categoría C1. En la tabla 4.7 se muestran dos de estas.

Tabla 4.7

*Algunas justificaciones que pertenecen a C1: congruencia de triángulos*

Estudiante	Justificaciones
1	Porque: $m\angle DCE = m\angle ACB = 45$ debido a que los triángulos son congruentes, es decir, $\triangle BAC \cong \triangle EDC$
2	<p>8. En la siguiente figura el ángulo ACB mide <math>45^\circ</math>. ¿Cuánto mide el ángulo DCE? . Explica por que. Mide <math>45^\circ</math> igual.</p>  <p>Porque: por la congruencia de los triángulos.</p>

Dos de los cinco estudiantes, argumentaron que el triángulo más grande es congruente con el más pequeño, lo cual, de acuerdo a la definición de congruencia de triángulos es erróneo. Otra interpretación posible es que estos estudiantes no estaban confundiendo el concepto sino la palabra. Los otros tres estudiantes únicamente mencionaron la congruencia de triángulos sin decir más al respecto.

En la categoría C2, semejanza de triángulos, encontramos dos respuestas las cuales se ilustran en la tabla 4.8.

Tabla 4.8

*Algunas justificaciones que pertenecen a C2: semejanza de triángulos*

Estudiante	Justificaciones
1	<p>Porque: El ángulo DCE mide <math>45^\circ</math>, esto se debe a que <math>\angle ACB \cong \angle DCE</math> porque son el mismo ángulo C. Solo que son dos triángulos y por <del>congruencia</del> semejanza el triángulo <math>\triangle BAC</math> es semejante con diferentes medidas de sus lados con el triángulo <math>\triangle EDC</math>.</p>
2	<p>Porque: <math>\angle DCE = 45^\circ</math> por semejanza de triángulos</p>

En la tabla 4.8, observamos que el primer estudiante determinó que la medida del ángulo DCE es  $45^\circ$ , partiendo de reconocer que los ángulos “son los mismos” y por lo tanto son “congruentes”, pero después completa su respuesta utilizando semejanza de triángulos, únicamente mencionando que el triángulo BAC es semejante al triángulo EDC sin dar más detalles.

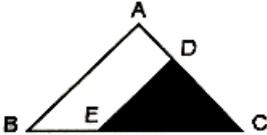
Por su parte, el segundo estudiante también indicó que la medida del ángulo DCE es  $45^\circ$ , argumentando que “por semejanza de triángulos” aunque no especificó cuáles triángulos, ni tampoco el criterio de semejanza que utilizó.

En la categoría C3, apertura/abertura, encontramos cuatro respuestas donde se observa que los estudiantes evocaron la imagen de ángulo para asignar la medida del

ángulo. Su respuesta se basó en observar que la “apertura” o “abertura” es la misma para los ángulos ACB y DCE y por lo tanto “tienen la misma medida”. Estas respuestas se ilustran en la tabla 4.9.

Tabla 4.9

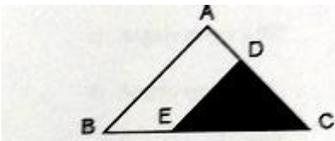
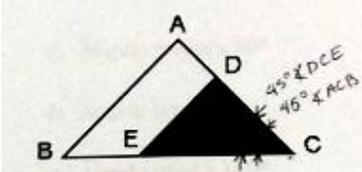
*Algunas justificaciones que pertenecen a C3: apertura/abertura*

Estudiante	Justificaciones
1	<p>8. En la siguiente figura el ángulo ACB mide <math>45^\circ</math>. ¿Cuánto mide el ángulo DCE? . Explica por que. <span style="float: right;"><math>45^\circ</math></span></p>  <p>Porque: Igual que la respuesta anterior la apertura no cambia</p>
2	<p>Porque: <math>45^\circ</math>, por que necesariamente los rayos no están cambiando ni la abertura entre ellos el menor o mayor.</p>

Ocho respuestas pertenecen a la categoría C4, mismos lados. En la tabla 4.11 se muestran tres de estas.

Tabla 4.10

Algunas justificaciones que pertenecen a C4: mismos lados

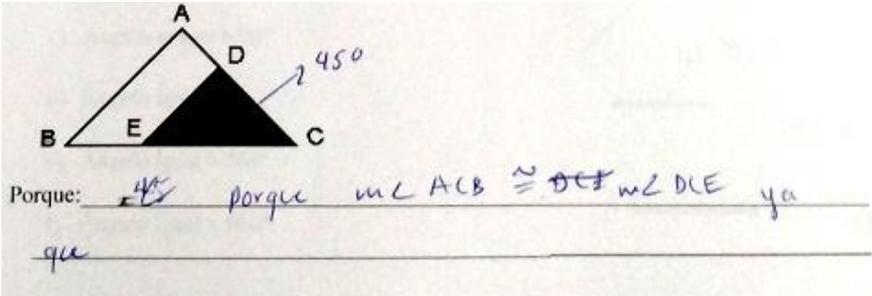
Estudiante	Justificaciones
1	 <p data-bbox="469 577 1364 689">Porque: <math>\sphericalangle</math> es el mismo ángulo solo cambia la distancia tomada de los rayos o segmentos</p>
2	 <p data-bbox="469 1034 1364 1182">Porque: El ángulo <math>\sphericalangle ACB</math> está determinado por los rayos <math>\vec{CA}</math> y <math>\vec{CB}</math> pero como en una línea se puede escoger <math>DE\vec{CA}</math> (D pertenece al rayo <math>\vec{CA}</math>) y <math>E\vec{CB}</math> y como el vértice en común es C por lo tanto <math>\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE</math></p>

En esta categoría, los estudiantes determinaron que los ángulos ACB y DCE son el mismo ángulo en algunos casos igualando la longitud los lados del ángulo DCE con los lados del ángulo ACB, mediante una prolongación imaginaria de estos, en otros casos tomando en cuenta que el tamaño de un ángulo no depende de la longitud de los lados del ángulo, o al considerar los lados del ángulo como rayos.

Finalmente, tres respuestas forman parte de la última categoría, la C5, donde encontramos las justificaciones incompletas o imprecisas. Estas se muestran en la tabla 4.12.

Tabla 4.11

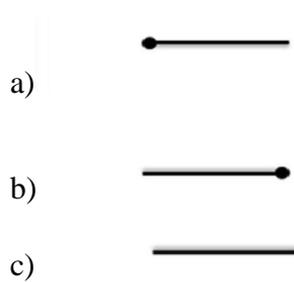
Algunas justificaciones que pertenecen a C5: otros

Estudiante	Justificaciones
1	 <p>Porque: <math>45^\circ</math> porque <math>m\angle ACB \approx DCE</math> <math>m\angle DCE</math> ya que</p>
2	<p>Porque: lo mismo (<math>45^\circ</math>) puesto que en ambos casos lo unico que cambia es la distancia de un punto a otro, pero como D y A, y B y E tienen una inclinación igual, su ángulo es igual.</p>

En términos generales, podemos observar que la mayoría de los estudiantes (ocho), en G2, basaron su respuesta apoyándose en su imagen del concepto de ángulo, al determinar que los ángulos ACB y DCE son el mismo ángulo igualando la longitud los lados del ángulo DCE con los lados del ángulo ACB, mediante una prolongación imaginaria de estos. La presencia de triángulos en esta pregunta motivó a los estudiantes a evocar imágenes relacionadas con congruencia y semejanza de triángulos, sin embargo, se observa que muestran un conocimiento parcial sobre estos temas o simplemente confundieron la palabra congruente con semejante.

En este ítem no se hicieron entrevistas.

**Ítem 10 del cuestionario aplicado a G1. Ítem 9 del cuestionario aplicado a G2. En cada una de las figuras, dibuja un ángulo de  $40^\circ$ .**



**Imagen evocada para representar un ángulo de  $40^\circ$  dado un segmento** Aquí se busca conocer las imágenes que evocaron los estudiantes al dibujar un ángulo de  $40^\circ$  usando cada uno de los tres segmentos que se les proporcionaron.

Los dos primeros segmentos tenían un punto destacado que podían utilizar o no como vértice. En el primer segmento el punto destacado está colocado en el extremo izquierdo, mientras que en el segundo segmento el punto destacado está colocado en el extremo derecho. Queremos observar el uso que el estudiante hace del punto destacado para su trazo del ángulo.

El tercer segmento no tuvo ningún punto destacado. Nos interesa observar la forma en que el estudiante dibujó el ángulo en este caso.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

En G1, para el segmento con punto destacado a la izquierda, todos los estudiantes dibujaron ángulos como los de la figura 4.41, donde el segmento proporcionado lo utilizó como uno de los lados, el punto destacado como el vértice y ellos trazaron el otro lado para formar el ángulo.



Figura 4.41 Representación gráfica de un ángulo de  $40^\circ$  trazada por un estudiante

Para el segmento con punto destacado a la derecha, encontramos que 9 estudiantes trazaron un ángulo como el de la figura 4.42, donde todos utilizan el segmento dado como uno de los lados, el punto destacado como el vértice y ellos dibujaron el otro lado.



Figura 4.42 Ángulo de  $40^\circ$  trazado por un estudiante

El estudiante restante dibujó un ángulo mayor a  $90^\circ$  como el de la figura 4.43.



Figura 4.43 Ángulo trazado por un estudiante

Consideramos que el estudiante utilizó su transportador para auxiliarse en el trazo del ángulo. El estudiante colocó el transportador utilizando el punto destacado como vértice y el segmento horizontal lo alineó con la línea correspondiente a  $180$  o  $0$  grados del transportador, en seguida midió un ángulo de  $40$  grados a partir de la línea correspondiente a  $0$  grados en el sentido contrario a las manecillas del reloj y trazó un segmento desde el vértice para formar el ángulo de  $40$  grados, sin embargo, el ángulo que señaló en la figura 4.43 es un ángulo obtuso, no el ángulo agudo de  $40$  grados. En este caso la posición del punto destacado y del segmento horizontal dado influyó al dibujar el ángulo en este estudiante.

Para el tercer segmento, en el cual no había ningún punto destacado, 5 estudiantes utilizaron el extremo izquierdo de éste como vértice y trazaron el lado faltante a partir de él como lo muestra la figura 4.44.



Figura 4.44 Ángulo de  $40^\circ$  dibujado por un estudiante quien utiliza como vértice el extremo izquierdo del segmento dado

Tres estudiantes seleccionaron un punto en el segmento, el cual utilizaron como vértice para dibujar el ángulo como lo muestra la figura 4.45.



Figura 4.45 Ángulo de  $40^\circ$  dibujado por un estudiante quien utiliza como vértice un punto cualquiera en el segmento dado

Finalmente, dos estudiantes no realizaron ningún trazo en el tercer segmento. Uno de ellos escribió lo siguiente “*no tiene*”, suponemos en este caso que se refiere a un punto destacado que pudiera usar como vértice para trazar el ángulo de  $40^\circ$ . El otro estudiante escribió “*no se puede porque no tiene un punto de inicio*”

A continuación, mostramos extractos de la entrevista que tuvimos con este último estudiante. El estudiante será identificado como estudiante 1.

*Entrevistadora:* Me puedes explicar tu respuesta del ítem 10, el inciso c [señala la figura 4.46]

*Estudiante 1:* Claro, bueno, en los ejemplos de aquí [señala las figuras a) y b) del mismo ítem] puso que tenía un punto y por eso pude hacer el ángulo pero como este no tiene ningún punto de referencia, supuse que no tiene o podría ser en todo caso de 180 grados, que sea de aquí hasta acá [el estudiante coloca su dedo índice sobre la parte derecha del segmento y hace un movimiento circular hasta llegar al lado izquierdo del segmento] pero como no vi ningún punto de referencia o algo puse que no tenía.

c)

NO se puede por que  
no tiene un punto de  
inicio

Figura 4.46 Respuesta de uno de los estudiantes donde no traza ningún ángulo

En este caso, como parte de las imágenes de ángulo de estos dos estudiantes consideran que una condición necesaria para dibujar un ángulo es la presencia explícita de un punto marcado de manera sobresaliente en el segmento que pueda ser considerado como vértice.

Por su parte, en G2, para el segmento con punto destacado a la izquierda, 13 estudiantes dibujaron ángulos como los de la figura 4.47.

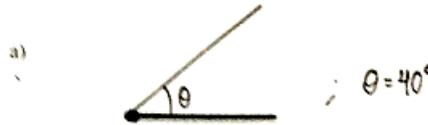


Figura 4.47 Representación gráfica de un ángulo de  $40^\circ$  trazada por uno de los estudiantes

Otros cinco estudiantes, dibujaron ángulos en la misma posición que la figura 4.46, pero sin ninguna anotación adicional como lo muestra la figura 4.48.

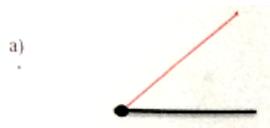


Figura 4.48 Representación gráfica de un ángulo de  $40^\circ$  trazada por uno de los estudiantes donde no se hace referencia al ángulo

De acuerdo a las figuras 4.47 y 4.48, en ambos casos, para dibujar el ángulo de  $40^\circ$  utilizaron el punto destacado como vértice, el segmento proporcionado como uno de los lados, y ellos dibujaron el otro lado para completar el ángulo.

Sólo un estudiante, evocó la imagen de ángulo dirigido al dibujar el ángulo como se observa en la figura 4.49, donde el segmento proporcionado lo utilizó como el lado inicial, el lado que trazó como lado final y el punto destacado como el vértice.

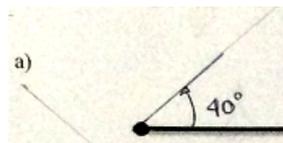


Figura 4.49 Representación gráfica de un ángulo dirigido de  $40^\circ$  trazada por un estudiante

De los tres estudiantes restantes, dos dibujaron ángulos como los de la figura 4.50.

a)



Figura 4.50 Representación gráfica de un ángulo de  $40^\circ$  trazada por un estudiante en una posición diferente a la anterior figura

En estos dos casos, para dibujar el ángulo de  $40^\circ$  utilizaron el punto destacado como vértice, el segmento proporcionado como uno de los lados, y ellos dibujaron el otro lado trazando un segmento no horizontal “hacia abajo” para completar el ángulo.

El otro estudiante, dibujó un ángulo como el de la figura 4.51, siendo este el único caso donde no utilizó el punto destacado en el segmento como vértice.

a)

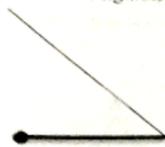


Figura 4.51 Representación gráfica de un ángulo de  $40^\circ$  trazada por un estudiante en una posición diferente a la anterior figura

Para el segmento con punto destacado a la derecha, encontramos que 19 alumnos trazaron un ángulo como el de la figura 4.52, donde todos utilizan el segmento dado como uno de los lados, el punto destacado como el vértice y ellos dibujaron el otro lado.

b)

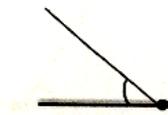


Figura 4.52 Ángulo de  $40^\circ$  trazado por un estudiante

De los 19, 13 indican el ángulo y se destacan los dos casos siguientes:

En el primer caso el estudiante escribe una nota a la derecha del ángulo que dibujó (ver figura 4.53).

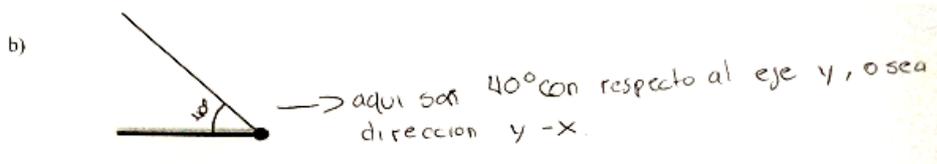


Figura 4.53 Ángulo de  $40^\circ$  trazado por un estudiante

Consideramos que de acuerdo con la nota que el estudiante escribe, él evocó como imagen aquella relacionada con ángulos dirigidos, al parecer la posición del punto destacado le sugirió considerarlo de esta manera. Aquí, el estudiante toma el lado que él trazó como el lado inicial y el segmento dado como el lado final, el cual está alineado con el eje  $x$ .

En el segundo caso, la respuesta de interés corresponde al mismo estudiante ya citado en el caso del primer segmento, y que utilizó ángulos dirigidos para dar su respuesta. En la figura 4.54 se muestra el ángulo que él dibujó.



Figura 4.54 Ángulo dirigido de  $40^\circ$  trazado por un estudiante

Desde la perspectiva del segmento con punto destacado a la izquierda, se había considerado que su imagen estaba relacionada con ángulos dirigidos. Sin embargo, en este segundo segmento él continuó utilizando la misma notación, pero el ángulo que indica es de  $40^\circ$ , cuando debería ser, desde su notación, de  $-40^\circ$ .

Esto nos muestra que el estudiante presenta cierta confusión en lo que es un ángulo y un ángulo dirigido.

Las respuestas de los tres estudiantes restantes corresponden a dibujos de ángulos distintos a los de la figura 4.52:

El primer caso, corresponde al ángulo dibujado en la figura 4.55, donde considera el punto destacado como vértice y completa el ángulo con un rayo no horizontal trazado “hacia abajo”.

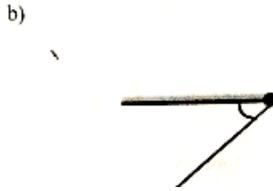


Figura 4.55 Ángulo de  $40^\circ$  trazado por un estudiante

El siguiente caso, se muestran en la figura 4.56.

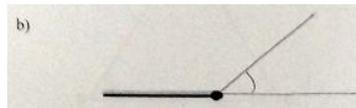


Figura 4.56 Ángulo de  $40^\circ$  trazado por otro estudiante

El último caso (ver figura 4.57), es similar a la figura 4.56, aunque el dibujo aporta poca información sobre los elementos que el estudiante consideró para dibujar el ángulo; sin embargo, la entrevista que se realizó y de la cual se muestra un extracto a continuación aclara su procedimiento para dibujar el ángulo. El estudiante será identificado como estudiante 2.



Figura 4.57 Ángulo de  $40^\circ$  dibujado por el estudiante 2

*Entrevistadora:* ¿Me podrías comentar como se formó este ángulo? [Señala la figura 4.57].

*Estudiante 2:* Lo consideré con los ejes  $x$  y  $y$ . Solamente que pensé que la línea estuviera del otro lado [ver figura 4.58].

*Entrevistadora:* ¡Ah! Ok. Lo que tu hiciste fue que imaginariamente prolongaste esta línea [la entrevistadora señala una línea imaginaria que parte del punto destacado hacia la derecha como se muestra en la figura 4.58] y bueno ya la prolongamos, entonces ¿dónde se forma tu ángulo de 40 grados?

*Estudiante 2:* Hacia arriba [el estudiante coloca su dedo índice sobre el segmento imaginario y traza una trayectoria como se muestra en la figura 4.59].



Figura 4.58 Representación de la línea imaginaria trazada por el estudiante 2



Figura 4.59 Representación de la trayectoria trazada con su dedo índice por el estudiante 2

En estos dos últimos casos, al parecer su imagen está relacionada con la de un ángulo colocado en una posición que posiblemente le resulte familiar, en este caso, la de un ángulo cuyo vértice está a la izquierda y uno de sus lados alineado con la horizontal o la de un ángulo en posición normal. Teniendo esto en mente, el estudiante ignoró la figura dada para ser parte del ángulo que tenía que dibujar, y trazó o imagina un segmento adicional de izquierda a derecha que es una extensión del segmento dado a partir del punto destacado, el cual va a usar como uno de los lados del ángulo y traza otro segmento que también parte del punto destacado y que será el lado faltante. Con ambos lados forma el ángulo de  $40^\circ$  (ver figuras 4.58 y 4.59).

Para el tercer segmento, en el cual no había ningún punto destacado, ocho estudiantes utilizaron el extremo izquierdo de éste como vértice y trazaron el lado faltante a partir de él como lo muestra la figura 4.60.

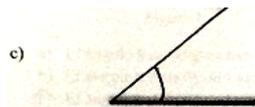


Figura 4.60 Ángulo de  $40^\circ$  dibujado por un estudiante utilizando como vértice el extremo derecho del segmento dado

Seis estudiantes seleccionaron un punto en el segmento, el cual utilizaron como vértice para dibujar el ángulo solicitado como lo muestra la figura 4.61.



Figura 4.61 Ángulo de  $40^\circ$  dibujado por un estudiante utilizando como vértice un punto cualquiera en el segmento dado

Es importante notar, que los 14 ángulos dibujados hasta aquí han sido trazados en la misma posición, lo cual nos deja ver que puede existir una tendencia en dibujar ángulos como estos. Por otro lado, siete estudiantes utilizaron el extremo derecho para trazar el ángulo como lo muestra la figura 4.62.

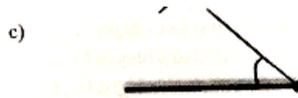


Figura 4.62 Ángulo de  $40^\circ$  dibujado por un estudiante utilizando como vértice el extremo izquierdo del segmento dado

Finalmente, un estudiante no realizó ningún trazo en el tercer segmento. A continuación, mostramos extractos de la entrevista que tuvimos con él. El estudiante será identificado como estudiante 3.

*Entrevistadora:* En esta pregunta se te pedía que dibujaras un ángulo de 40 grados en cada una de las figuras, pero observo que para esta figura [señala la figura 4.63] no dibujaste ningún ángulo a diferencia de las otras figuras. Me podrías explicar por qué.

*Estudiante 3:* Me basé a lo que se especifica en estos dos incisos anteriores [señala el punto destacado en las figuras de los incisos a) y b)], en el cual indica que hay un punto en el cual tenemos que medir el centro del transportador, o lo que sea, ¿no?, y éste no lo contenía así que supuse que no tenía nada... de grados.

*Entrevistadora:* Entonces, para ti era digamos como condicionante que hubiera...

*Estudiante 3:* Una referencia.

c)



Figura 4.63 Respuesta de uno de los estudiantes donde no traza ningún ángulo

En este caso, de manera similar a los dos estudiantes de G1, una condición necesaria para dibujar un ángulo es la presencia explícita de un punto marcado de manera sobresaliente en el segmento que este pueda ser considerado como vértice.

**Ítem 11 del cuestionario aplicado a G1. Ítem 10 del cuestionario aplicado a G2. Relaciona cada ángulo con su medida. (Puedes relacionar las figuras con más de una opción)**

a) Ángulo menor a  $90^\circ$

b) Ángulo mayor de  $180^\circ$

c) Ángulo mayor a  $90^\circ$

d) Ángulo igual a  $0^\circ$

e) Ángulo igual a  $360^\circ$

f) Ángulo igual a  $180^\circ$



( )



( )



( )



( )

**Imagen evocada al relacionar un ángulo con su medida** En este ítem, los estudiantes tenían que relacionar cuatro ángulos con una columna de respuestas dadas. Dos de los ángulos son los ángulos A y B que se muestran en la figura 4.64. Estos ángulos tienen la misma medida, sin embargo, están colocados en posiciones diferentes.



Ángulo A



Ángulo B

Figura 4.64 Dos de los ángulos del cuestionario que los estudiantes tenían que relacionar con su medida

En G1, siete estudiantes relacionaron el ángulo A con la respuesta a) “Ángulo menor a  $90^\circ$ ”. Uno de ellos no contestó y los dos restantes lo relacionaron con la opción c) “Ángulo mayor a  $90^\circ$ ”. Suponemos que, en estos dos últimos casos, ambos estudiantes usaron su transportador para medir el ángulo, sin embargo, utilizaron la escala incorrecta.

En el caso del ángulo B, seis alumnos relacionaron esta figura con la opción c) “Ángulo mayor a  $90^\circ$ ”. Se llevaron a cabo cinco entrevistas de las cuales mostraremos el extracto de tres de estas, puesto que en las otras dos muestran argumentos similares. Los estudiantes serán identificados como estudiante 1, 2 y 3, respectivamente.

Iniciemos con el estudiante 1.

*Entrevistadora:* ¿Me puedes explicar tu respuesta, como determinaste esa relación? [señala la figura 4.65]

*Estudiante 1:* Igual puse mi transportador y pues un ángulo de  $90$  mide aquí [coloca el origen del transportador sobre el vértice del ángulo, después alinea el lado horizontal del ángulo con la línea de  $0$  grados del transportador, señalando con su dedo índice en la escala interna del transportador el  $90$ , ver figura 4.65] , entonces pues yo pensé que como este estaba hasta acá [con su dedo índice de la mano izquierda señala el lado que no es horizontal del ángulo, ver figura 4.65] pues medía más de  $90$ .

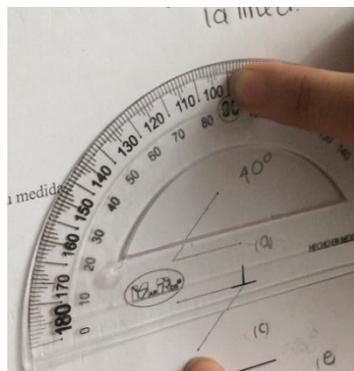


Figura 4.65 Respuesta de uno de los estudiantes donde señala como midió el ángulo B para relacionarlo con la opción c), ángulo mayor a  $90$  grados

En este caso, el estudiante utiliza como referencia el ángulo de 90 grados, pero de acuerdo a la posición en la que coloca el transportador, observa que el segmento que no está alineado con la horizontal sobrepasa los 90 grados, razón por la cual determina que este ángulo mide más de 90 grados.

Continuemos ahora con el estudiante 2.

*Entrevistadora:* Vamos al ítem 11, si me puedes explicar por qué esta figura la relacionaste con el inciso c).

*Estudiante 2:* Porque si ponía el transportador al revés [coloca el transportador al revés o “de cabeza” como se muestra en la figura 4.66, después, coloca el origen del transportador en el extremo izquierdo del lado horizontal del ángulo y alinea este lado horizontal con la línea de 0 grados del transportador, ver figura 4.66] me salía mayor a 90 [prolonga la línea no horizontal del ángulo imaginariamente y con su dedo índice señala en la escala interior el 130, ver figura 4.66] ya que 90 siempre es como una línea recta, al poner el transportador al revés vi las opciones y vi como quedaban, sinceramente no tenía mucha idea pero cuando intente usar mi lógica puse el transportador así.

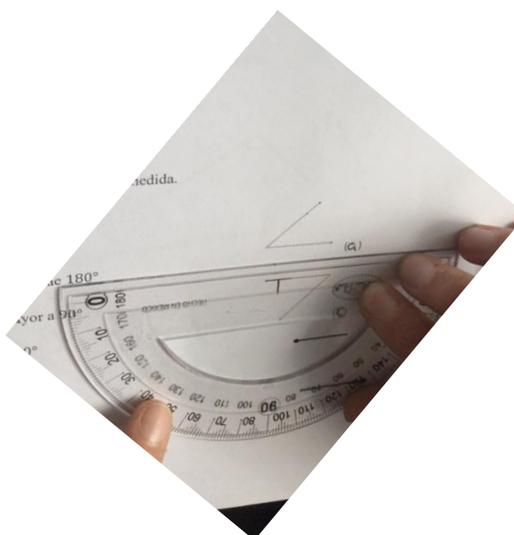


Figura 4.66 Uso del transportador por uno de los estudiantes para dar su respuesta

Desde chiquito me costó trabajo geometría, use como los números chiquitos porque no sabía si los grandes o los chiquitos [se refiere a los números de la escala exterior e interior] porque siempre me costó mucho trabajo eso, esta vez basándome en las respuestas intente que me diera 120 o 130.

*Entrevistadora:* La ubicación de la marca que trae el transportador tú la ubicaste de la misma forma que ahora.

*Estudiante 2:* Si.

En este caso, el estudiante al observar un ángulo en posición diferente a lo habitual coloca el transportador de una manera también diferente. Tomando como referente su imagen de un ángulo de 90 grados, el segmento que no está alineado con la horizontal lo prolonga imaginariamente hasta una de las escalas, donde muestra sentir ambigüedad al momento de elegir una de las dos, pero finalmente se decide por la escala que marca 130 grados de acuerdo a la posición de su dedo en la figura 4.63, decide considerar esta medida pues observa en el transportador que el segmento no alineado con la horizontal sobrepasa al ángulo de 90 grados que usó como referente.

Por último, veamos el caso del estudiante 3.

*Entrevistadora:* Vamos al ítem 11, ¿me puedes explicar por qué estas figuras las relacionaste con la misma opción c), ángulo mayor a 90 grados? [ver figura 4.67]

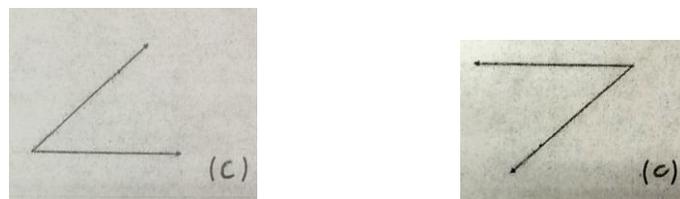


Figura 4.67 Respuesta de uno de los estudiantes donde señala que ambos ángulos miden más de 90 grados

*Estudiante 3:* ¡Ah! pues básicamente estaba bastante confundido, yo creo que me confundió lo de mayor y menor y en ese momento ya me sentí bastante estresado porque sentí que no sabía usar el

transportador, entonces puse que sería más fácil correlacionar estos dos [se refiere a los dos ángulos que se muestran en la figura 4.67], puse lo mismo porque siento que este [señala el ángulo con el vértice del lado derecho de la figura 4.67] es el mismo grado de apertura nada más que en diferente sentido por eso puse la misma respuesta en este y en esta [señala los dos ángulos que se muestran en la figura 4.67].

En este caso, el estudiante menciona tener dificultades con el significado de mayor o menor que, por lo tanto, opta por establecer una relación entre la medida de los dos ángulos (el ángulo que tiene su vértice del lado derecho y el ángulo que tiene el vértice del lado izquierdo) al observar que ambos tienen la misma apertura pero que están colocados en diferente sentido. Al ángulo que tiene su vértice del lado derecho le asigna una medida mayor a 90 grados, y por la relación que establece entre estos dos ángulos determina que el ángulo que tiene el vértice del lado izquierdo también tiene una medida mayor a 90 grados.

A continuación, veamos las respuestas asociadas a los dos ángulos restantes del ítem 11. (Véase tabla 4.13). Si observamos los ángulos C y D estos son el mismo (ambos tienen la misma medida:  $0^\circ$ ), salvo que el ángulo D es el ángulo C pero rotado 180 grados.

Tabla 4.13  
*Respuestas de los estudiantes de G1*

Ángulo C	Número de estudiantes	Medida relacionada	Ángulo D	Número de estudiantes	Medida relacionada
	4	$360^\circ$		2	$360^\circ$
	4	$0^\circ$		3	$0^\circ$
	1	$180^\circ$		3	$180^\circ$
	1	Sin respuesta		2	Sin respuesta

En seguida, se muestra el extracto de una entrevista que resulta interesante para nuestro estudio, donde el estudiante será identificado como estudiante 4.

*Entrevistadora:* ¿Me puedes indicar como relacionaste estos ángulos [señala el ángulo C] con el inciso d) “Ángulo 0°” y [señala el ángulo D] f) “Ángulo de 180°”. [Ver figuras 4.68 y 4.69].

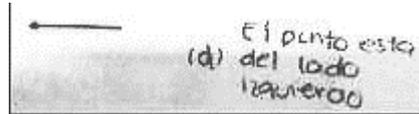


Figura 4.68 Medida relacionada por un estudiante con el ángulo C

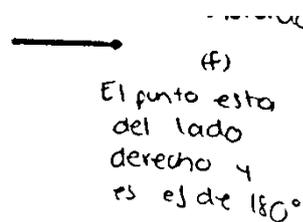


Figura 4.69 Medida relacionada por un estudiante con el ángulo D

*Estudiante 4:* La verdad fue por el puntito que está aquí [señala el punto destacado en la figura 4.70], entonces yo dije, si el punto está acá entonces está como cero [coloca el origen del transportador sobre el vértice del ángulo C, después el segmento dado lo alinea con la línea de 0 grados del transportador y señala con su dedo índice el 0 en la escala exterior del transportador, ver figura 4.70]. En el otro como, como el otro está acá aquí [señala el punto destacado en la figura 4.71] me dio 180° [coloca el origen del transportador sobre el vértice del ángulo D, después el segmento dado lo alinea con la línea de 0 grados del transportador y señala con su dedo índice el 180 en la escala interna del transportador, ver figura 4.71]

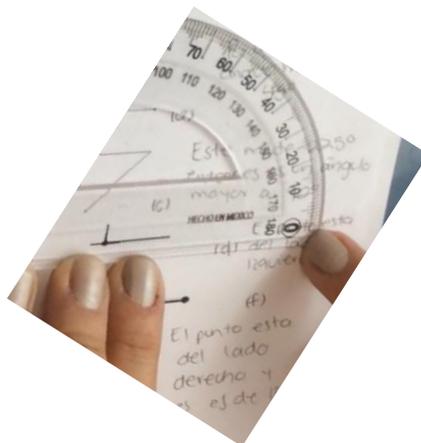


Figura 4.70 Uso del transportador para determinar la medida del ángulo D



Figura 4.71 Uso del transportador para determinar la medida del ángulo D

En el caso de la estudiante 4, para el ángulo que tiene su vértice del lado izquierdo, después de colocar el transportador como se muestra en la figura 4.70, le asigna una medida de 0 grados, número que señala con su dedo índice en la escala que va de 0 a 180 grados, de derecha a izquierda. Ahora, para el ángulo que tiene su vértice del lado derecho después de colocar el transportador como se muestra en la figura 4.71, le asigna una medida de 180 grados, número que se observa en la escala que va de 180 a 0 grados de izquierda a derecha y que señala con su dedo índice.

En estos casos, la posición de los ángulos influyó en los estudiantes al momento de relacionar los ángulos con su medida.

Por su parte, en G2, 16 estudiantes relacionaron los dos ángulos A y B con la respuesta a) “Ángulo menor a 90°”. Sin embargo, hubo 4 estudiantes que relacionaron el ángulo A con la respuesta a) “Ángulo menor a 90°” y el ángulo B con otra respuesta, la

b) “Ángulo mayor a  $180^\circ$ ”. A continuación, presentamos un extracto de la entrevista realizada a uno de estos cuatro estudiantes sobre la medida que asignó al ángulo B. Este estudiante será identificado como estudiante 5.

*Entrevistadora:* En este ítem te voy a preguntar por esta figura [señala el ángulo B de la figura 4.64], me dices que lo relacionas con la respuesta b), “Ángulo mayor a 180 grados”, si me puedes explicar, ¿por qué lo relacionaste con esta opción?

*Estudiante 5:* Pues igual que el anterior, por lo mismo de que me imaginé la línea prolongada [coloca su dedo índice en el vértice del ángulo dado y con este traza una prolongación del segmento horizontal efectuando el movimiento de izquierda a derecha. Véase la línea punteada de la figura 4.72] y tomé como este el eje  $x$  para poder hacer el ángulo [coloca su dedo índice sobre la prolongación que trazó, y considerándola como lado inicial, dibuja una trayectoria como se muestra en la figura 4.72 hasta llegar al segmento inclinado].

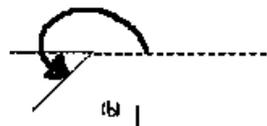


Figura 4.72 Ilustración del razonamiento considerado por el estudiante 29 para determinar que la medida del ángulo B es mayor a 180 grados

La imagen evocada en este caso está relacionada con ángulos dirigidos. Posiblemente la posición en la que se encuentra el ángulo B le hizo pensar al estudiante que este se situaba en un “tercer cuadrante”, por ello trazó una prolongación del rayo horizontal que funcionaría como el sentido positivo de un eje  $x$ , tomándolo como lado inicial y desde ahí hacer la medición. Aquí el alumno ignoró el segmento horizontal dado como uno de los lados del ángulo B. Trazó imaginariamente una prolongación del segmento horizontal, el cual tomó como lado inicial y como lado final el inclinado. De los tres estudiantes restantes que contestaron de manera similar al estudiante 5, entrevistamos a dos de ellos y nos proporcionaron argumentos similares.

Ahora, veamos las respuestas asociadas a los dos ángulos restantes del ítem 10. (Véase tabla 4.13). Si observamos los ángulos C y D estos son el mismo (ambos tienen la misma medida:  $0^\circ$ ), salvo que el ángulo D es el ángulo C pero rotado 180 grados.

Tabla 4.13

*Respuestas de los estudiantes de G2*

Ángulo C	Número de estudiantes	Medida relacionada	Ángulo D	Número de estudiantes	Medida relacionada
	5	$0^\circ$		4	$0^\circ$
	11	$0^\circ, 360^\circ$		5	$0^\circ, 360^\circ$
	1	$0^\circ, 180^\circ$		2	$0^\circ, 180^\circ$
	2	$0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$		2	$0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
	2	$180^\circ$		8	$180^\circ$
	1	Sin respuesta		1	Sin respuesta

En la tabla 4.13 observamos, que 8 estudiantes asignaron la medida de  $180^\circ$  al ángulo D. A continuación, mostramos un extracto de la entrevista realizada a uno de ellos, el cual será identificado como estudiante 6. Este estudiante inicialmente asignó al ángulo C la respuesta d) “Ángulo igual a  $0^\circ$ ”, sin embargo, al ángulo D, le asignó las respuestas f) “Ángulo igual a  $180^\circ$ ” y c) “Ángulo mayor a  $90^\circ$ ”. En la entrevista, el estudiante menciona por qué asignó esas opciones.

*Entrevistadora:* Vamos a la siguiente figura [ángulo D], esa tú la relacionaste con f), “Ángulo igual a  $180^\circ$ ” y c), “Ángulo mayor a  $90^\circ$ ”. Me podrías explicar, ¿por qué lo relacionaste así?

*Estudiante 6:* Igual, me imaginé la línea prolongada y lo hice [el alumno coloca su dedo índice en el vértice del ángulo dado y con este traza una prolongación del segmento horizontal efectuando el movimiento de izquierda a derecha. Véase la línea punteada de la figura 4.73. Después coloca su dedo índice sobre la prolongación que trazó y considerándola como lado inicial dibuja una trayectoria como se muestra en la figura 4.73 hasta llegar al segmento dado].



Figura 4.73 Representación de la trayectoria trazada por el estudiante 6

En este caso, para el estudiante un ángulo se forma con dos segmentos diferentes. Pero en la figura él sólo ve un segmento, razón por la cual traza imaginariamente otro, el cual, de acuerdo al movimiento de su dedo índice, en una rotación, lo considera como el lado inicial, y el dado en la figura como lado final de un ángulo dirigido de 180 grados. Al parecer la posición del segmento que ve le sugiere considerarlo como la parte negativa del eje  $x$ , y el rayo trazado por él, como su complemento, la parte positiva del eje  $x$ , desde donde él mide el ángulo. A los siete estudiantes restantes que contestaron que la medida del ángulo  $D$  es de  $180^\circ$ , se les hizo una entrevista y ellos proporcionaron argumentos similares a los del estudiante 6.

**Ítem 11 del cuestionario aplicado a G2. Los triángulos de las figuras 1 y 2 son equiláteros. Señala la relación correcta entre el ángulo B de la figura 1 y el ángulo G de la figura 2.**

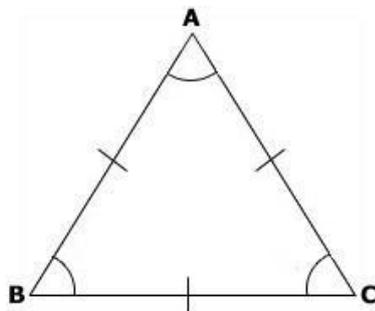


Figura 1

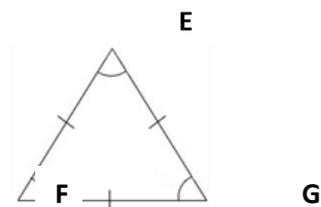


Figura 2

- El ángulo B de la figura 1 es “mayor que” el ángulo G de la figura 2.
- El ángulo B de la figura 1 es “menor que” el ángulo G de la figura 2.
- El ángulo B de la figura 1 es “igual” al ángulo G de la figura 2.

**Porque:**

---



---

**Imagen evocada al determinar la relación entre la medida de dos ángulos que forman parte de dos triángulos equiláteros semejantes de diferente tamaño** Con esta pregunta queremos observar la relación que los estudiantes encuentran entre la medida de dos ángulos que forman parte de dos triángulos equiláteros semejantes, pero de diferente tamaño. Asimismo, queremos indagar acerca de las imágenes que los estudiantes evocan en su respuesta, y señalar si el tamaño de los triángulos incide al momento de determinar la relación entre la medida de los ángulos señalados, en el sentido de que a mayor tamaño del triángulo le asignen una mayor medida del ángulo o a mayor longitud de los lados le asignen una mayor medida del ángulo.

Los resultados que se obtuvieron son los siguientes:

Todos los estudiantes indicaron que “El ángulo B de la figura 1 es “igual” al ángulo G de la figura 2”. No hay evidencia de que el tamaño de los triángulos o la longitud de los lados tuvieran alguna influencia en su respuesta.

Se generaron seis categorías: C1–C6, que surgieron de sus justificaciones. Las categorías son: C1: triángulos equiláteros y semejanza, C2: triángulos equiláteros, no depende del tamaño del triángulo o de los lados, C3: triángulo equilátero y equiángulo, C4: ángulos iguales y mismos lados, C5: congruencia de triángulos y C6: otros. En cada una se colocaron las respuestas que consideramos similares. En las tablas 4.14 a la 4.19 se ilustran algunos casos. Se hizo una transcripción fiel de lo escrito por el estudiante aun con todas sus peculiaridades.

Tabla 4.14

*Algunas justificaciones en C1: triángulos equiláteros y semejanza*

Estudiante	Justificaciones
1	Al ser triángulos equiláteros, todos sus ángulos son iguales en medida, y congruente con $\angle G$ por semejanza de triángulos

Un solo caso pertenece a esta categoría. Este estudiante evocó la imagen relacionada con el triángulo equilátero, considerando la propiedad de que sus tres ángulos internos miden lo mismo. También evocó semejanza de triángulos, aunque no especifica cuales triángulos son semejantes ni algún criterio de semejanza.

Tabla 4.15

*Algunas justificaciones en C2: triángulo equilátero, no depende del tamaño del triángulo o de los lados*

Estudiante	Justificaciones
1	Porque al tratarse de un triángulo equilátero, todos sus ángulos tienen la misma medida de $60^\circ$ , independientemente del tamaño que éste tenga
2	Ya que sólo cambia la escala de los segmentos no la abertura entre ellos y en un triángulo equilátero todos sus ángulos son iguales
3	Un triángulo equilátero a pesar de sus medidas de cada lado, sean muy grandes o muy pequeñas, tendrá el valor de la magnitud de sus ángulos iguales. Por lo tanto, el ángulo B y G son iguales

Cinco estudiantes están en C2, de los cuales tres evocaron la imagen relacionada con el triángulo equilátero, considerando la propiedad de que sus tres ángulos internos son iguales y miden  $60^\circ$ , enfatizando que la medida de los ángulos es independiente del tamaño del triángulo equilátero o de la longitud de los lados. Dos estudiantes evocaron la imagen del ángulo relacionada con “apertura” para dar su respuesta, ellos consideraron que el tamaño de los lados no influyó en la medida del ángulo, sino sólo la “apertura” entre los lados, un ángulo con mayor apertura se asocia con un ángulo de mayor medida.

Tabla 4.16

*Algunas justificaciones en C3: triángulos equiláteros y equiángulos*

Estudiante	Justificaciones
1	En un triángulo equilátero todos los ángulos son iguales, por lo tanto, miden lo mismo y como los dos son equiángulos pues, son iguales
2	$\angle B \cong \angle G$ . Todos los ángulos equiláteros son equiángulos, no existe correspondencia entre triángulos, se puede sobreponer $G \leftrightarrow B$ , pero eso no indica nada, la suma de los ángulos de un triángulo es $180^\circ$ luego, los ángulos son congruentes: $m < B + m < A + m < C = 3m < B; m < B = 180/3 = \angle G$

De los cinco casos en C3, dos evocan la imagen relacionada con el triángulo equilátero, considerando la propiedad de que sus tres ángulos internos son iguales y miden  $60^\circ$ , uno de ellos señala además que los dos triángulos que se le mostraban eran “equiángulos”. Otro estudiante no sólo evocó la imagen relacionada con triángulo equilátero y equiángulo (véase al estudiante 3 en la tabla 4.16), sino que además evocó un teorema fundamental de los triángulos pues escribe “... la suma de los ángulos de un triángulo es igual a  $180^\circ$  luego, los ángulos son congruentes:  $m < B + m < A + m < C = 3m < B \quad m < B = 180/3 = m < G$ ”, ecuación en la que se apoyó para justificar su opción.

Tabla 4.17

*Algunas justificaciones en C4: lados congruentes, ángulos iguales*

Estudiante	Justificaciones
1	Claro está en la figura que ambos tienen lados congruentes y por definición de un triángulo equilátero los ángulos del mismo todos son iguales a $60^\circ$
2	<p>Como el enunciado menciona que ambos triángulos son equiláteros, entonces conociendo sus propiedades de un triángulo equilátero sabemos que sus ángulos tienen que sumar <math>180^\circ</math> y que son iguales y también sabemos que sus lados son congruentes</p> <p>Aunque la figura dos muestre un triángulo pequeño, esto no quiere decir que sus propiedades cambian</p> <p>Relacionando las figuras, sabemos que no son congruentes por sus tamaños. Pero sí podemos decir que son semejantes</p>

Los dos estudiantes en C4, basaron su respuesta evocando la imagen del concepto de ángulo al considerar que los lados de los ángulos B y G son los mismos, lo cual se observa en expresiones como: “ambos tienen lados congruentes” y sus “lados son congruentes”. El segundo estudiante menciona que “ambos tienen lados congruentes” aunque esto muestra una ambigüedad pues no es claro si se refiere a si los lados son congruentes entre sí para cada uno de los triángulos o se refiere a que los seis lados (si consideramos los dos triángulos) son congruentes entre sí.

Por último, el estudiante 2 evocó imágenes que relacionó con el triángulo equilátero pues escribe lo siguiente: “sus ángulos tienen que sumar  $180^\circ$  y que son iguales y también sabemos que sus lados son congruentes”, además consideró que estas mismas propiedades se cumplirían para el triángulo más pequeño; para finalmente evocar la imagen de congruencia al escribir que las figuras por su tamaño no son congruentes, y

la imagen de semejanza para señalar que los triángulos son semejantes, aunque no mencionó que triángulos ni algún criterio de semejanza.

Tabla 4.18

*Algunas justificaciones en C5: congruencia de triángulos*

Estudiante	Justificaciones
1	El $\Delta BAC \cong \Delta FEG$ , si $m < B = m < F$ , $m < A = m < E \wedge m < C = m < G$
2	Porque si un triángulo es congruente entonces sus ángulos son congruentes
3	c) El ángulo B de la figura 1 es igual al ángulo G de la figura 2 porque son equiláteros y por el ejercicio anterior no importa si el triángulo es pequeño sus ángulos del $\Delta BAC \cong \Delta FEG$ . Entonces $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle EGF$

Las tres respuestas en esta categoría evocaron como imagen la relacionada con congruencia de triángulos. Los estudiantes 1 y 3 confunden el concepto de congruencia entre dos triángulos, con el de semejanza. La respuesta del estudiante 2 carece de sentido porque la congruencia es una relación entre dos triángulos.

Tabla 4.19  
*Algunas justificaciones en C6: otros*

Estudiante	Justificaciones
1	Por el teorema de ALA
2	Son de misma magnitud

En C6 ubicamos seis justificaciones, aquellas que nos parecieron incompletas o que carecen de sustento. Por ejemplo, en la justificación: “Por el teorema de ALA”, siendo que dicho postulado sólo se aplica para triángulos congruentes, lo cual no es nuestro caso.

En general, la mayoría de los estudiantes (C1, C2 y C3) evocaron su imagen de ángulo para responder. En este ítem no se hicieron entrevistas.

**Ítem 12 del cuestionario aplicado a G2. Traza una ruta para que el niño llegue a su balón. No puedes trazar sólo una recta, ni curvas, solo puedes utilizar ángulos distintos de 90 grados. Márcalos en tu ruta. Después descríbela con tus palabras en los renglones de abajo.**



Descripción de la ruta:

**Imagen evocada de ángulo para trazar una ruta que conecte dos objetos** Con esta pregunta queremos observar la ruta trazada por el estudiante derivadas de su imagen de ángulo y su medida. La ruta trazada no podía ser sólo una recta, ni curvas, ni podían utilizar ángulos de 90 grados.

Al analizar las imágenes gráficas que producen los 22 estudiantes, encontramos lo siguiente: dos estudiantes trazaron una trayectoria, pero no marcaron ningún ángulo en ella. En su descripción de la ruta no proporcionaron alguna medida precisa del ángulo que consideraron, sólo escribieron que se trataba de un ángulo mayor o diferente de  $90^\circ$  (véase la figura 4.74).

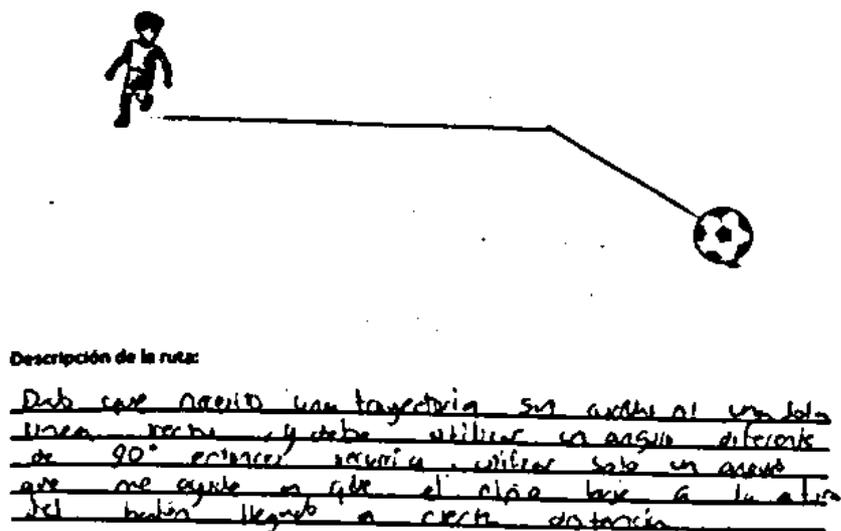


Figura 4.74 Ejemplo de la trayectoria trazada por uno de los estudiantes donde no señalan ángulos ni medidas de ángulo

Otros dos estudiantes trazaron alguna trayectoria, pero tampoco marcaron algún ángulo en ella. En su descripción de la ruta, escribieron las medidas de los ángulos que consideraron, apoyándose en los cuatro puntos cardinales Norte, Sur, Este y Oeste para describir su ruta (véase la figura 4.75). Cabe señalar el hecho de que aplican la convención de que, en la hoja, el norte queda hacia arriba, como se acostumbra en los mapas.

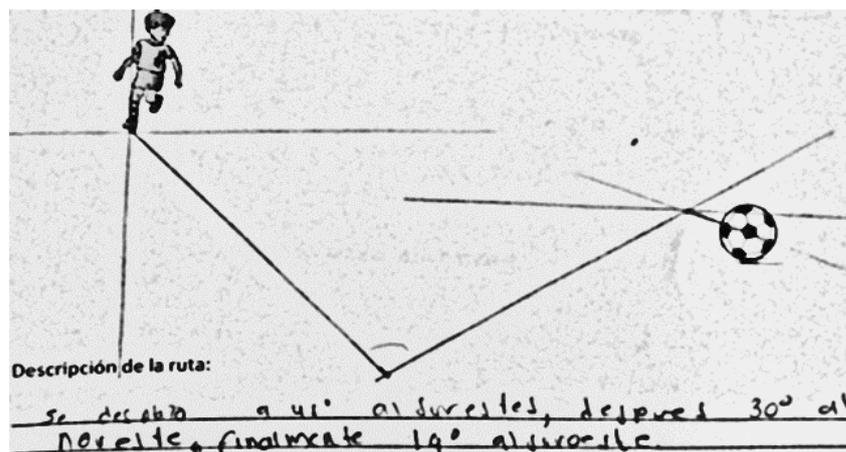


Figura 4.75 Ejemplo de otra trayectoria trazada por uno de los estudiantes apoyándose en los cuatro puntos cardinales

Dos estudiantes trazaron alguna trayectoria y ambos marcaron dos ángulos dirigidos en ella. Uno de ellos no escribió las medidas de los ángulos. En su descripción de la ruta, escribió que los ángulos deben estar “entre  $180^\circ$  y  $90^\circ$ ”. Mientras, el segundo estudiante, asignó medida a los ángulos dirigidos que marcó en la ruta trazada (véase la figura 4.76).



Figura 4.76 Trayectoria trazada con ángulos dirigidos señalados y con su medida

Ocho estudiantes trazaron rutas señalando ángulos, pero no ángulos dirigidos. Cuatro de ellos en la descripción de su ruta indicaron las medidas de los ángulos que trazaron, pero sin indicar la dirección de dichos ángulos, mientras tres estudiantes trazaron alguna ruta, señalando ángulos y sus medidas y al mismo tiempo se apoyaron

en los cuatro puntos cardinales Norte, Sur, Este y Oeste. Un estudiante sólo señaló los ángulos, no dio sus medidas y se apoyó en los cuatro puntos cardinales.

Un ejemplo de estos casos son las respuestas de los estudiantes que se muestran en las figuras 4.77 y 4.78.

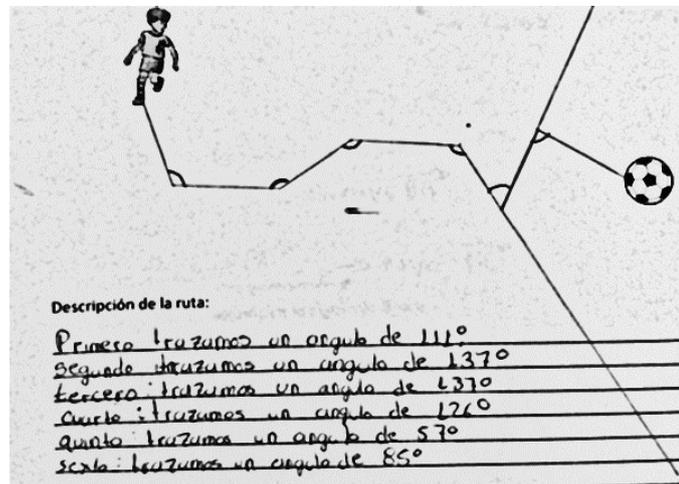


Figura 4.77 Trayectoria trazada sin indicar la dirección del ángulo trazada por el estudiante

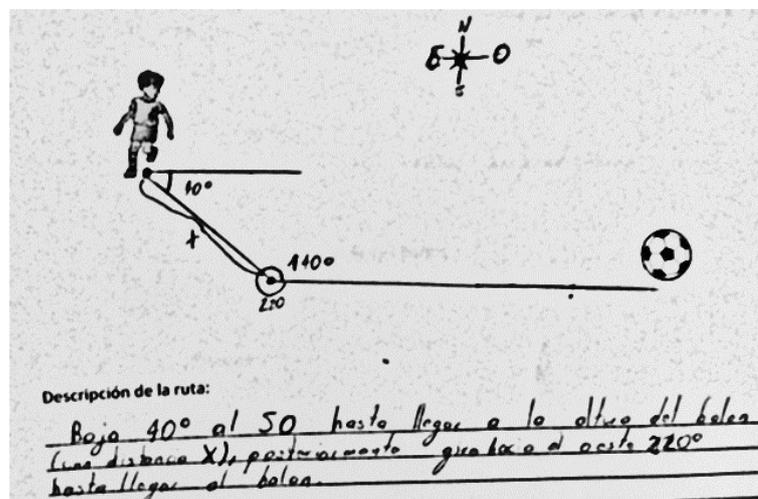


Figura 4.78 Trayectoria trazada con ángulos utilizando los puntos cardinales

Tres estudiantes trazaron rutas señalando ángulos, pero no ángulos dirigidos. Ellos utilizaron los lados de los ángulos como referencia para indicar la dirección en que se mueve el niño para llegar a su balón. Uno de los estudiantes escribió la medida del ángulo en su descripción de la ruta señalando que era un ángulo negativo (vea la figura 4.79).

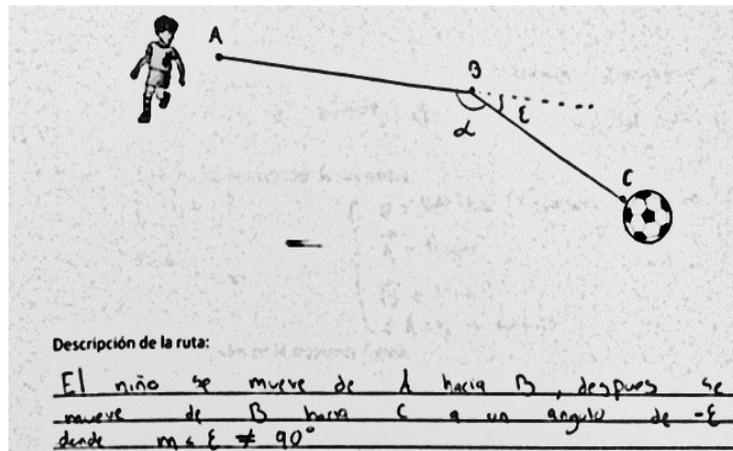


Figura 4.79 Respuesta de un estudiante donde señala un ángulo negativo

Otro estudiante trazó la ruta que se muestra en la figura 4.80.

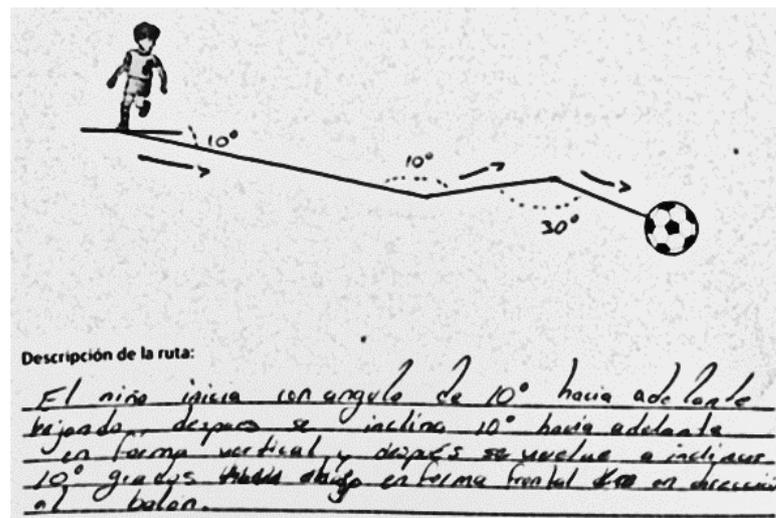


Figura 4.80 Trayectoria trazada con ángulos de medidas erróneas

En esta trayectoria observamos que el estudiante escribe tres medidas de ángulos, pero dos medidas no corresponden con su trazo. En sus imágenes evocadas no hay alguna que corresponda con ángulos de referencia pues no verificó que las medidas que asignó fueran las correctas.

Finalmente, tres de los 22 estudiantes no contestaron la pregunta y otro estudiante respondió utilizando ángulos de  $90^\circ$ , al hacer caso omiso de la instrucción que se le dio en el enunciado del problema.

Así concluimos nuestro análisis del cuestionario. La descripción y la interpretación de las respuestas nos permitieron conocer las diferentes definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida evocadas por los estudiantes. En este ítem no se hicieron entrevistas.

## **CAPÍTULO 5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

---

La exploración, descripción y comprensión de las respuestas nos permitió conocer las diferentes definiciones e imágenes evocadas por los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Psicología (G1) y de la Licenciatura en Física y Matemáticas (G2), al contestar ítems relacionados con el ángulo y su medida. Vamos a centrar la discusión en los aspectos más relevantes extraídos de los resultados obtenidos y señalaremos si los hallazgos confirman o no el conocimiento previo citado en los antecedentes.

*Ítem 1 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Conocer la definición de ángulo que posee el estudiante.* En G1, la categoría con mayor número de respuestas es la C3: El ángulo definido a través de su medida (3/10). Por su parte, en G2, la mayoría de las definiciones están en su categoría C1: El ángulo definido como apertura/abertura de segmentos, rayos o líneas (7/22), al ser las pertenecientes a esta categoría (las que están en términos de abertura) similares a la definición dada en Baldor (1983).

Además, en G2, las categorías en las que se define el ángulo a través de su medida o como una medida en particular, son C3 y C4 y en ellas encontramos seis estudiantes de 22, esto indica que en los niveles superiores los estudiantes aún tienen dificultades en distinguir entre el concepto de ángulo y su medida como viene sucediendo desde los niveles básicos, de acuerdo con Browning, Garza-Kling & Sundling (2007).

En las categorías restantes, los estudiantes en G1 y G2 sólo dieron como definición una descripción de su imagen evocada. Esto apoya lo dicho por Vinner (2002) respecto a que la actividad de los estudiantes está, en una mayoría de casos, basada sólo en sus imágenes y no en las definiciones formales de los conceptos. Aunado a ello Acuña (2012) comenta que la definición de un objeto matemático es sustituida por la descripción de un ejemplo estereotipado que el estudiante asocia con la definición. Por último, ningún estudiante proporcionó alguna definición de ángulo que se correspondiera con las definiciones de ángulo dirigido u orientado.

*Ítem 2 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Imagen evocada al hacer la representación gráfica del ángulo.* En las representaciones gráficas del ángulo en G1, se puede observar una fuerte conexión con un ángulo recto, con su vértice ubicado del lado izquierdo, y del cual emanan dos segmentos, uno de ellos alineado con la horizontal, a diferencia del ángulo agudo, dibujado por la mayoría de los estudiantes en G2. Las

representaciones gráficas de los estudiantes en G2, muestran un ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo, y del cual emanan dos rayos, uno de ellos horizontal. Ángulos con estas mismas características los podemos observar en la mayoría de las ilustraciones de los libros de texto que presentamos en los antecedentes. Este hecho da lugar a considerar lo expresado por Vinner & Hershkowitz (1980) quienes comentan que los profesores y los libros de texto tienen una tendencia a dibujar ángulos con un rayo horizontal y como resultado de este hecho la imagen del concepto puede contener ángulos con un rayo horizontal, aunque puede suceder que dibujar este tipo de ángulos no signifique que son los únicos que forman parte de sus imágenes del concepto.

Como resultado de comparar la definición de ángulo y su representación en G2, encontramos la no correspondencia de la definición con su representación gráfica, en estos casos, se ve influenciada principalmente por confundir el ángulo con su medida al definir el ángulo como: “es la medida...” o “distancia que hay...”, definiciones que no es posible representar gráficamente, sin embargo, el estudiante lo hace representando no su definición, sino su imagen evocada. Otro resultado que surgió de esta comparación es la zona que los estudiantes señalan en su bosquejo, la cual consideran es el ángulo. Pero, si comparamos la definición de interior de un ángulo, con la zona señalada, es claro que hay una confusión entre el concepto de ángulo y el concepto de interior de un ángulo.

*Ítem 3 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Imagen evocada de ángulo asociada principalmente con ángulos convexos, cóncavos o ambos.* En G1, ningún estudiante señaló ángulos cóncavos, a diferencia de G2 quienes en su mayoría identificaron ángulos convexos y cóncavos. En ambos grupos, se observa una tendencia a identificar de manera natural ángulos convexos. La imagen de estos estudiantes posiblemente podría verse influenciada por los ejemplos dados en clase o en los libros de texto como los reportados en los antecedentes, donde principalmente se ilustra un ángulo utilizando ángulos convexos y señalando a través de un arco el ángulo considerado y como consecuencia de esta tendencia, la imagen del concepto que se evoca está relacionada principalmente con la de un ángulo convexo.

*Ítem 4 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Imagen evocada para decidir si una figura dada es un ángulo o no.* En el análisis de los resultados en el caso de la figura 4.14, se observa que algunos estudiantes en G1 (5/10) y en G2 (5/22) reconocen su

imagen de ángulo solamente en una parte de la figura (la punta), ignorando la totalidad de la figura. Este resultado es similar al reportado por Keiser (2004), donde señala que algunos estudiantes consideran que en el dibujo de las letras R o P puede haber ángulos al mirar intersecciones entre líneas y curvas. Por otro lado, para la figura 4.16, se observa que la imagen del estudiante 3 (en G2) está asociada con dos líneas diferentes con un punto común que forman una “abertura”. Esta imagen lo llevó a decidir que la figura no era un ángulo al no visualizar en la figura 4.16 ninguna abertura. Este resultado se asemeja a lo encontrado en el trabajo de Keiser (2004), donde se menciona que las dificultades para concebir ángulos de  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $360^\circ$  están relacionadas con la definición de ángulo que se está considerando.

*Ítem 5 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Imagen evocada para estimar la medida de ángulos agudos, obtusos y llanos trazados en diferentes posiciones.* En las respuestas de los estudiantes en G1 y G2 encontramos que la posición de los ángulos influyó en la obtención de la medida de los ángulos. En G1, a esto se suma el uso incorrecto del transportador y la elección de la escala incorrecta, además de no comprobar su respuesta utilizando algún ángulo de referencia. Para los estudiantes 1, 2 (en G1) y 4 (en G2) es posible considerar que ellos construyeron una situación que les era familiar donde están acostumbrados a medir ángulos desde el lado positivo del eje  $x$  o posiblemente consideraron la inclinación respecto a una horizontal determinada por su hoja. Estos hallazgos son distintos a lo reportado en White & Mitchelmore (2003) quienes mencionan que los estudiantes tienen dificultades al identificar los lados que forman un ángulo, por ejemplo, el que se forma al abrir una puerta al no haber un lado visible o con los ángulos de inclinación debido a que no están familiarizados con la idea del ángulo que se forma con la horizontal. Posiblemente estas diferencias tienen que ver con el nivel escolar de los estudiantes puesto que los de nuestro estudio son de un nivel más avanzado.

En el Caso II, el estudiante 6 (en G2) reconoció en la figura 4.24 un ángulo de 180 grados, sin embargo, su imagen posiblemente está ligada con el tipo de ejemplos que se utilizan comúnmente para representar un ángulo de 180 grados, los cuales son colocados completamente en forma horizontal de modo que la posición del ángulo, diferente a la acostumbrada le generó un conflicto por lo cual no contesta la pregunta. Rösken & Rolka (2007) señalan que, en los entornos de aulas tradicionales, los ejemplos se utilizan principalmente para introducir un nuevo concepto, así pues, las

figuras utilizadas como ejemplos de ángulos en la clase o en los libros de texto pueden llegar a formar parte de las imágenes de los estudiantes y si estas se presentan sólo en ciertas posiciones estereotipadas, pueden volverse esenciales o determinantes al momento de resolver un problema como podría ser el Caso II.

*Ítem 6 del cuestionario aplicado a G1 y G2. Imagen evocada para obtener la medida de ángulos colocados en diferentes posiciones y con la presencia o no de un arco, utilizando un transportador.* Observamos que la posición de los ángulos y la presencia o no de un arco en la figura influyeron en algunos casos en G1 y G2, en la obtención de la medida. Algunos estudiantes usaron parcialmente las figuras de ángulo que se les proporcionaban y construían nuevos ángulos que se ajustaban a su imagen de medida de angular. Es decir, construían un problema diferente al planteado originalmente como es el caso del estudiante 1 (en G1) y de las dos respuestas que se muestran en la tabla 4.5 (correspondientes a dos estudiantes de G2). En los casos del estudiante 2 (en G1) y de las respuestas que aparecen en la tabla 4.6 (correspondientes a dos estudiantes de G2), los estudiantes utilizaron la escala incorrecta del transportador o mostraron ambigüedad al dar dos respuestas diferentes como medidas de un mismo ángulo, además no evocan ninguna imagen relacionada con ángulos de referencia en la que pudieran apoyarse para verificar su respuesta. En el caso de la figura de ángulo que no tiene ningún arco, la mayoría de los estudiantes en ambos grupos, sólo hacen referencia al ángulo convexo.

*Ítem 7 del cuestionario aplicado a G1. Imagen evocada de medida angular.* Menos de la mitad de los estudiantes en G1 (4/10) dieron respuestas concretas y todas ellas se referían a ideas relacionadas con la cuantificación de la apertura/abertura de dos líneas, una figura o del ángulo. Estos hallazgos son distintos a lo reportado en Keiser (2004) donde señala que algunos estudiantes, en los niveles básicos, en sus nociones respecto a que se mide exactamente al referirse a la magnitud de los ángulos expresan que es la longitud lineal o distancia entre dos rayos.

Ninguna de las imágenes evocadas por los estudiantes se corresponde con las nociones dadas en los libros de texto reportadas en los antecedentes, donde expresan que medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad o referencia.

*Ítem 8 del cuestionario aplicado a G1. Ítem 7 del cuestionario aplicado a G2. Imagen evocada al determinar la relación entre la medida de dos ángulos señalados a través de arcos de radio diferentes.* En el caso de G1, el tamaño de los arcos sí incidió

en algunos estudiantes (4/10) en la elección de su respuesta. En respuestas como: “*Si, porque mientras más cerca [se refiere al vértice] es más chico, y supongo ya que es menor que B.*” y “*Porque el ángulo B está más abierto que el ángulo A.*”, encontramos que estos resultados son similares con lo reportado por Keiser (2004), quien comenta que algunos estudiantes de niveles básicos, tienden a atribuir la medida de un ángulo a la longitud de los segmentos de recta que lo constituyen o suponen que entre más espacio hay entre los rayos, el ángulo es más grande. Estas dificultades reportadas en los niveles básicos al parecer no han sido superadas en los niveles superiores en estos estudiantes.

Contrario a G1, en G2, encontramos en todas las respuestas de los estudiantes, que no importa el tamaño del arco que se ponga en el ángulo para distinguirlos, sigue siendo el mismo ángulo, es decir, otro arco no hace otro ángulo. En el caso de la categoría dos y tres, donde los estudiantes expresan que los dos ángulos tienen la misma apertura o que aunque los rayos aumenten su tamaño, el ángulo sigue siendo el mismo, es contrario a lo reportado por Keiser (2004), señalado en renglones anteriores. Es decir, las dificultades reportadas en los niveles básicos al parecer han sido superadas por los estudiantes de G2.

*Ítem 9 del cuestionario aplicado a G1. Ítem 8 del cuestionario aplicado a G2. Imagen evocada al determinar la relación entre la medida de dos ángulos que “al parecer” forman parte de dos triángulos de áreas diferentes.* En G1, cuatro alumnos de los 10, no contestaron este ítem. En el caso del estudiante 1 (en G1), el tamaño de los triángulos ACB y DCB incidió en su respuesta, puesto que en el enunciado del ítem se señalaba que el ángulo ACB medía 45 grados, el estudiante de observar el tamaño del triángulo que contenía al ángulo DCB dedujo que este triángulo tenía la mitad del área del triángulo que tenía el ángulo ACB, por lo tanto, la medida del ángulo DCB era la mitad del ángulo ACB. El estudiante al parecer relacionó la medida de los ángulos con el área de los triángulos.

Mientras, en G2, en ninguna de las imágenes evocadas por los estudiantes encontramos una asociación entre el tamaño de los lados del ángulo y la medida del ángulo, en el sentido de que a mayor longitud de los lados mayor medida del ángulo. Tampoco encontramos una asociación entre el tamaño de las áreas de los triángulos y la medida del ángulo, en el sentido de que, a mayor área, mayor medida del ángulo.

*Ítem 10 del cuestionario aplicado a G1. Ítem 9 del cuestionario aplicado a G2. Imagen evocada al dibujar un ángulo dado un segmento de línea.* Para todos los estudiantes, considerando G1 y G2, su imagen evocada está relacionada con el hecho de que un ángulo está formado por un vértice y dos lados diferentes. La mayoría de los estudiantes trazaron ángulos agudos en los tres segmentos (nuevamente observamos que existe una tendencia en trazar ángulos en posiciones estereotipadas), excepto los estudiantes que no trazaron ningún ángulo en la figura c). En el caso del segmento con punto destacado a la derecha, la posición del punto destacado influyó en algunos estudiantes al momento de dar su respuesta puesto que ellos relacionan el segmento que ven con la parte negativa del eje  $x$ , el cual ignoran, y construyen un nuevo ángulo que se ajuste a su imagen de medida de ángulo, una imagen de ángulo en una posición que les resulte familiar o habitual (un ángulo en posición normal) que les permite dar respuesta de forma sencilla o cómoda a este caso. En el caso de los estudiantes que no dibujaron ningún ángulo en la figura c), una condición necesaria para dibujar un ángulo es la presencia explícita de un punto marcado de manera sobresaliente en el segmento para que este pueda ser considerado como vértice.

*Ítem 11 del cuestionario aplicado a G1. Ítem 10 del cuestionario aplicado a G2. Averiguar la imagen evocada al momento de relacionar cada ángulo con su medida.* Se observa, en G1 y G2, que, para ángulos colocados en distintas posiciones, los estudiantes asignan medidas diferentes, aun cuando es el mismo ángulo. Algunos estudiantes utilizaron parcialmente las figuras de ángulo dadas y evocando otros conceptos matemáticos construyeron nuevos ángulos para los cuales estimaron o relacionaron con una medida. Los estudiantes 1, 2, 3 y 4 (en G1) utilizaron el transportador para determinar las medidas de los ángulos a diferencia de los estudiantes de G2, quienes hicieron trazos imaginarios adicionales para asignar las medidas a los ángulos dados. Por ejemplo, los estudiantes 5 y 6, hicieron una prolongación del lado horizontal del ángulo dado. Debe considerarse la posibilidad de que trazar la prolongación del rayo horizontal, se deba porque esto conduce a los estudiantes a una situación familiar donde están acostumbrados a medir ángulos desde el lado positivo del eje  $x$ . El hecho de que asignan medidas diferentes a ángulos iguales colocados en distintas posiciones es similar a lo reportado en Browning, Garza-Kling & Sundling (2007), donde señalan que algunos estudiantes no reconocen que dos ángulos tienen la misma medida si están orientados en direcciones diferentes no estándar. Todos los

nuevos ángulos que construyen los estudiantes están en posición normal. Posiblemente, su imagen de ángulo (en posición normal) está construida a partir de ilustraciones o ejemplos como el que se muestra en Leithold (1992), donde los ángulos parecen tener el lado inicial sobre el eje positivo  $x$  de un plano cartesiano, y estar en un primer cuadrante.

*Ítem 11 del cuestionario aplicado a G2. Imagen evocada al momento de determinar la relación entre la medida de dos ángulos que forman parte de dos triángulos equiláteros semejantes de diferente tamaño.* En general, la mayoría de los estudiantes argumentaron que ni el tamaño de los triángulos, ni el tamaño de los lados inciden en la medida de los ángulos internos de los triángulos equiláteros. Otros estudiantes, como los de la categoría C5 evocaron imágenes relacionadas con congruencia de triángulos y de ángulos, aunque en sus justificaciones muestran un conocimiento parcial sobre estos temas pues en algunos casos hacen un uso incorrecto de estos conceptos lo cual también es importante que sea considerado.

*Ítem 12 del cuestionario aplicado a G2. Imagen evocada al momento de trazar una ruta que no puede incluir una sola línea recta, curvas, ni ángulos de 90 grados.* De los 18 estudiantes de 22 que contestaron esta pregunta, tan sólo dos estudiantes evocaron como imagen aquella relacionada con ángulos dirigidos al trazar la ruta, es decir, en las imágenes de los estudiantes es casi nula la imagen relacionada con ángulos dirigidos.

En resumen, las imágenes evocadas por los estudiantes, en G1 y G2, son congruentes con lo señalado en Vinner (2002), en cuanto a que la definición se vuelve inactiva, y los estudiantes responden basándose en su imagen del concepto. Además, de que los estudiantes evocan diferentes imágenes. Estas imágenes dependen del problema a resolver, es decir, no poseen una única imagen del concepto.



## **CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES**

## CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

---

En nuestra investigación nos hemos planteado las siguientes preguntas: ¿qué definición tienen los estudiantes del ángulo al iniciar la enseñanza superior? ¿Qué imágenes evocan del ángulo y su medida, al contestar ítems relacionados con estos conceptos? En las respuestas de los estudiantes, de primer semestre de la Licenciatura en Psicología (G1) y de la Licenciatura en Física y Matemáticas (G2), encontramos una amplia variedad en las definiciones personales de ángulo de los estudiantes. Observamos que la imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica del ángulo está fuertemente conectada a una figura estereotipada: en G1, un ángulo de  $90^\circ$  con su vértice ubicado del lado izquierdo, y del cual emanan dos segmentos, con uno de los segmentos alineado con la horizontal, mientras en G2, un ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del cual emanan dos rayos, con uno de ellos horizontal.

En G1, hay una tendencia a identificar de manera natural ángulos convexos. Sin embargo, en G2, los estudiantes identificaron ángulos convexos y cóncavos. Otro resultado está relacionado con ángulos colocados en distintas posiciones, donde algunos estudiantes, en ambos grupos, utilizan parcialmente las figuras de ángulo dadas y evocando otros conceptos matemáticos, construyen nuevos ángulos para los cuales estiman o relacionan con una medida. También encontramos, en ambos grupos, dificultades en el uso correcto del transportador y en la elección de la escala correcta del transportador, así como la nula relación de los estudiantes con imágenes relacionadas con ángulos de referencia que les permitieran verificar sus respuestas (es decir, comparar su respuesta con ángulos cuya medida es conocida, por ejemplo, el ángulo recto cuya medida es de  $90^\circ$ , el ángulo llano que mide  $180^\circ$  y el ángulo agudo que mide menos de  $90^\circ$ ).

Algunos estudiantes en G1, tienden a atribuir la medida de un ángulo al tamaño del arco con el cual el ángulo es denotado, en el sentido de que, al ángulo denotado con el arco más pequeño, lo relacionan con una medida menor o al ángulo denotado con el arco más grande lo relacionan con una medida mayor, además de que asocian el tamaño de los lados del ángulo a su medida, a mayor longitud de los lados de un ángulo, mayor medida del ángulo. También, en G1, encontramos, al menos en un estudiante, una asociación entre el tamaño de las áreas de los triángulos y la medida del ángulo, en el

sentido de que, a mayor área, mayor medida del ángulo. Estas dificultades no se observaron en G2. Estas relaciones entre el tamaño del arco y la longitud de los lados del ángulo con la medida del ángulo fueron las únicas durante toda la evaluación donde los estudiantes en G2 presentaron un mejor dominio que los estudiantes de G1.

Un resultado interesante es el caso de la figura 4.14, donde algunos estudiantes en G1 y G2, miran un ángulo entre líneas y curvas. Cuando el estudiante 5 dice que la curva en algún momento tiene un comportamiento de línea recta al hacerle un “*zoom*” y ésta se conecta con la recta dada, él está indicando, de manera intuitiva, la forma en que se define el ángulo entre dos curvas en Cálculo (como el ángulo entre sus tangentes), y que será aprovechado así en dicho curso. Estas ideas intuitivas podrían explotarse con estudiantes que tienen alguna familiaridad con el uso de algún software de Geometría dinámica, para darle sentido a la definición posterior de ángulo entre dos curvas.

En resumen, los resultados encontrados en esta investigación apoyan lo dicho por Vinner (2002) respecto a que la actividad de los estudiantes está, en una mayoría de casos, basada sólo en sus imágenes y no en las definiciones formales de los conceptos, puesto que la definición se vuelve inactiva, y los estudiantes responden basándose en su imagen del concepto.

Como los resultados lo indican algunas de las dificultades identificadas en estudiantes de niveles elementales persisten en niveles más avanzados, podríamos considerar que la persistencia de estas dificultades está relacionada con lo que Driver, Guesne & Tiberghien (1985) mencionan sobre las ideas estables, las cuales son nociones que, aunque a veces puedan parecer incoherentes persisten a lo largo de su escolaridad. Este trabajo busca motivar futuras investigaciones destinadas a profundizar en estas ideas estables que permitan explicar por qué los estudiantes de nivel superior siguen teniendo los errores que los estudiantes de niveles básicos tal y como lo muestran las investigaciones previas reportadas.

Según Driver, Guesne & Tiberghien (1985) una estrategia que permite adaptar mejor la enseñanza consiste en tener en cuenta las ideas previas de los estudiantes, puesto que en ocasiones algunos conceptos se consideran obvios y se dan por conocidos al planificar el curso. Además, las ideas de los estudiantes sugieren que incluso nociones aparentemente sencillas pueden no ser captadas de manera adecuada. La incomprensión de estas ideas fundamentales puede, en tal caso, llevar a posteriores y más serios

problemas de aprendizaje. Por lo tanto, en nuestro tema, el profesor podría tomar en cuenta las definiciones e imágenes mostradas en este estudio para el diseño de actividades que permitan al estudiante tener un mejor desempeño y tener presente que los estudiantes podrían evocar nuevos conceptos y sus imágenes, para contestar la tarea propuesta. También consideramos importante compartir con los estudiantes el hecho de que existe una definición de ángulo para geometría y otra para trigonometría (las cuales serán elegidas, según convenga, entre la variedad de definiciones encontradas en los libros de texto), al ser la definición de ángulo dada en trigonometría el resultado de una evolución y generalización tal y como se observa en la historia misma del concepto. Esta evolución no se detiene en la trigonometría, pues tenemos además el concepto de ángulo entre curvas, que se utiliza en Cálculo.

Hay que tomar en cuenta que una de las muestras que se utilizó en este estudio fueron estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Física y Matemáticas a quienes consideramos tienen un mayor dominio de las matemáticas, sin embargo, encontramos dificultades, las cuales coinciden o se complementaron con las expuestas por los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Psicología. Analizar las diferencias y similitudes en las definiciones e imágenes del concepto de ángulo en ambos grupos fue posible, en primer lugar porque al ser estudiantes de primer semestre aún no hay un efecto de su nueva escuela en cuanto a la evolución de su pensamiento matemático, particularmente en los estudiantes de la carrera de ciencias, en segundo lugar, muchos temas básicos como ángulos o medida angular, no son retomados en una escuela de ciencias y sobreviven en su manejo previo a lo largo de su escolaridad, antes de adquirir una mayor madurez matemática que repercuta en sus conductas.

De acuerdo con Driver, Guesne & Tiberghien (1985), aunque los conceptos que los alumnos emplean para interpretar los fenómenos son diferentes, existen ciertas pautas generales en los tipos de ideas que tienden a utilizar los estudiantes, o hacen idénticas interpretaciones de hechos semejantes, como se observó en las respuestas en ambos grupos.

Por último, recordemos que la importancia de los hallazgos encontrados en este estudio radica en ofrecer a los profesores información para la elección de los conceptos que enseñarán y para planear sus actividades de aprendizaje.

## REFERENCIAS

- Acuña, C. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*. Barcelona, España: Gedisa.
- Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857–878. doi: 10.1080/00207390802054458.
- Ayres, F. & Moyer, R. (1991). *Trigonometría* (2da. ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Baldor, A. (1983). *Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.
- Browning, C., Garza-Kling, G. & Sundling, E. (2007). What's your angle on angles? *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 283–287.
- Casas, L. & Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 201–216.
- Godino, J. (2003). Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática. Recuperado el 10 de julio de 2017, de <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary* (Vol. I, 2nd. ed.). New York: Dover.
- Hilbert, D. (1971). *The foundations of Geometry* (L. Unger, Trans.) (2nd. ed.). La Salle, IL: Open Court.
- Keiser, J. M. (2004). Struggles with developing the concept of angle: Comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(3), 285–306. doi: 10.1207/s15327833mtl0603\_2.
- Leithold, L. (1992). *El cálculo con geometría analítica* (6ta. ed). México: Harla.
- Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, 1(1), 4–11.

- Matos, J. (1991). The Historical Development of the Concept of Angle (2). *The Mathematics Educator*, 2(1), 18–24.
- Moise, E. & Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Moore, K. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics Education*, 83(2), 225–245. doi: 10.1007/s10649-012-9450-6.
- Pachuca, Y. (2014). *Concepciones sobre el argumento de la función  $\text{sen } x$  en profesores del nivel medio superior y alumnos del nivel superior mexicano* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN.México.
- Rasslan, S. & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 89–96). Norwich, UK: University of East Anglia.
- Rösken, B. & Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 181–204.
- Rotaeché, A. & Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática*, 29(1), 171–200. doi: 10.24844/em2901.07.
- SEP (2011). *Programas de Estudio 2011 y Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP (2011). *Programas de Estudio 2011 y Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Smith, C. P., King, B. & Hoyte, J. (2014). Learning angles through movement: Critical actions for developing understanding in an embodied activity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 95–108. doi: 10.1016/j.jmathb.2014.09.001.
- Spivak, M. (1993). *Calculus: Cálculo infinitesimal*. Barcelona, España: Reverté.

- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. doi: 10.1007/BF00305619.
- UNAM (1996). *Plan y Programas Indicativos. Escuela Nacional Preparatoria. Matemáticas V*. México: Escuela Nacional Preparatoria.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (4), 356–366.
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177–184). Berkeley: University of California, Lawrence Hall of Science.
- Vinner S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.65–81). Dordrecht: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47203-1\_5.
- Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, 43(2), 247–256. doi:10.1007/s11858-010-0304-3.
- Wallis, D. A. (2005). History of angle measurement. *Proceedings of From Pharaohs to Geoinformatics*. FIG Working Week 2005 and GSDI-8, Cairo, Egypt.
- White, P. & Mitchelmore, M. (2003). Teaching Angles by Abstraction from Physical Activities with Concrete Materials. In: N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, 403–410). Honolulu, Hawaii: Program Committee.

## ANEXOS

Anexo 1: Cuestionario aplicado a G1

### TEMA: EL ÁNGULO Y SU MEDIDA

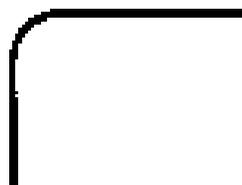
**Instrucciones:** Lee cuidadosamente cada una de las siguientes preguntas y contesta de la forma más clara posible. Tus respuestas deben ser con pluma. Si de alguna de las preguntas no conoces su respuesta indica brevemente por qué.

1. Escribe la definición de ángulo.
2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.
3. Identifica todos los ángulos en la siguiente figura.

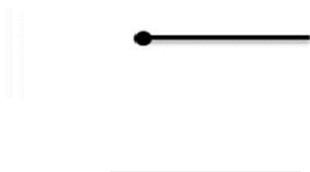


4. Determina la o las figuras que consideres ángulos. (TÁCHALOS)





5. Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos. Escribe tu respuesta sobre la línea.



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

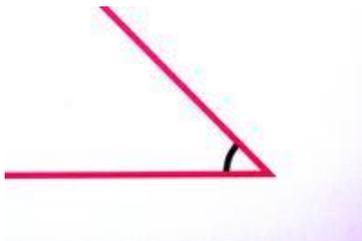


\_\_\_\_\_

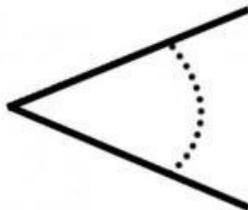


\_\_\_\_\_

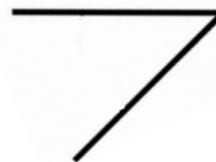
6. Con ayuda de un transportador mide los siguientes ángulos. Coloca tu respuesta sobre la línea.



\_\_\_\_\_



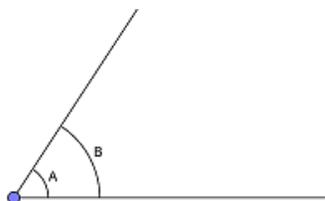
\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

7. Explica que significa para ti medir un ángulo.

8. Observa la siguiente figura y señala la relación correcta. Explica por qué.

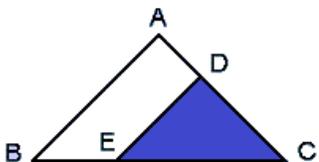


- a) El ángulo A es mayor al ángulo B.
- b) El ángulo A es igual al ángulo B.
- c) El ángulo B es mayor al ángulo A.

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

9. En la siguiente figura el ángulo ACB mide  $45^\circ$ . ¿Cuánto mide el ángulo DCE?. Explica por qué.



Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

10. En cada una de las figuras, dibuja un ángulo de  $40^\circ$ .

a)



b)



c)



11. Relaciona cada ángulo con su medida.

a) Ángulo menor a  $90^\circ$

b) Ángulo mayor de  $180^\circ$

c) Ángulo mayor a  $90^\circ$

d) Ángulo de  $0^\circ$

e) Ángulo de  $360^\circ$

f) Ángulo de  $180^\circ$



( )



( )



( )



( )

**Anexo 2:** Cuestionario aplicado a G2

**TEMA: EL ÁNGULO Y SU MEDIDA**

**Instrucciones:** Lee cuidadosamente cada una de las siguientes preguntas y contesta de la forma más clara posible. Tus respuestas deben ser con pluma. Si de alguna de las preguntas no conoces su respuesta indica brevemente por qué.

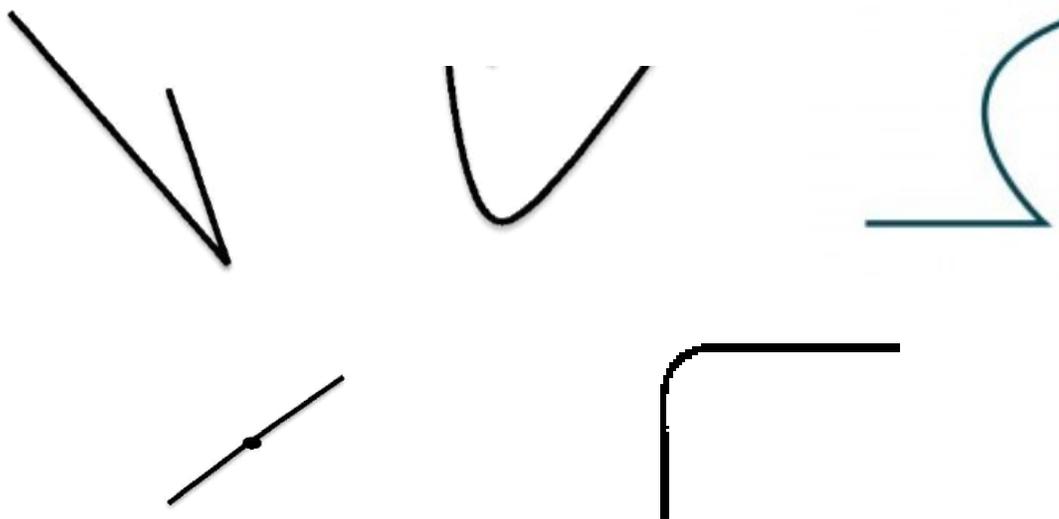
1. Escribe la definición de ángulo.

2. Dibuja un ángulo y señala cada una de sus partes.

3. Identifica todos los ángulos en la siguiente figura.

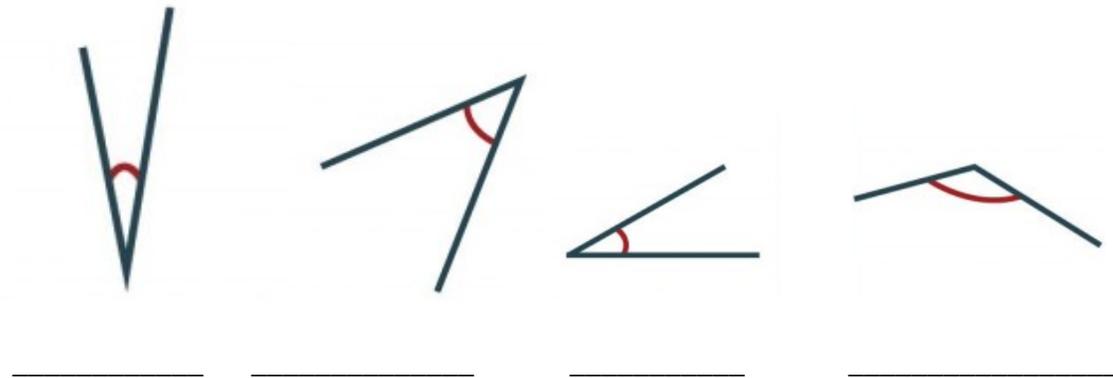


4. Determina la o las figuras que consideres ángulos. (TÁCHALOS)

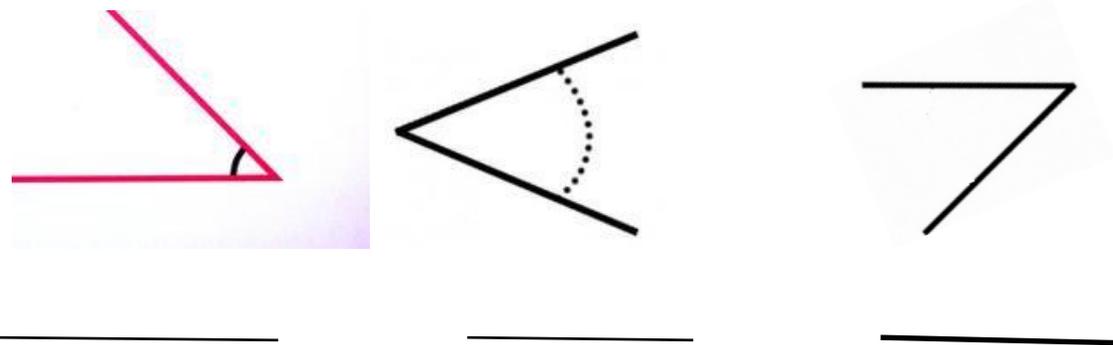




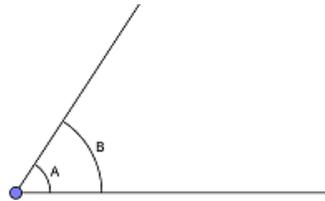
5. Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos. Escribe tu respuesta sobre la línea.



6. Con ayuda de un transportador mide los siguientes ángulos. Coloca tu respuesta sobre la línea.



7. Observa la siguiente figura y señala la relación correcta. Explica por qué.

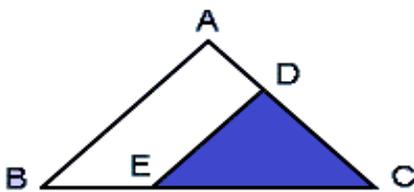


- a) El ángulo A es mayor al ángulo B.
- b) El ángulo A es igual al ángulo B.
- c) El ángulo B es mayor al ángulo A.

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

8. En la siguiente figura el ángulo ACB mide  $45^\circ$ . ¿Cuánto mide el ángulo DCE?. Explica por qué.



Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

9. En cada una de las figuras, dibuja un ángulo de  $40^\circ$ .

a)



b)



c)



10. Relaciona cada ángulo con su medida. (Puedes relacionar las figuras con más de una opción)

a) Ángulo menor a  $90^\circ$

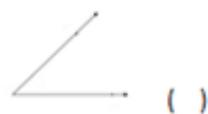
b) Ángulo mayor de  $180^\circ$

c) Ángulo mayor a  $90^\circ$

d) Ángulo igual a  $0^\circ$

e) Ángulo igual a  $360^\circ$

f) Ángulo igual a  $180^\circ$



( )



( )



( )



( )

11. Los triángulos de las figuras 1 y 2 son equiláteros. Señala la relación correcta entre el ángulo B de la figura 1 y el ángulo G de la figura 2.

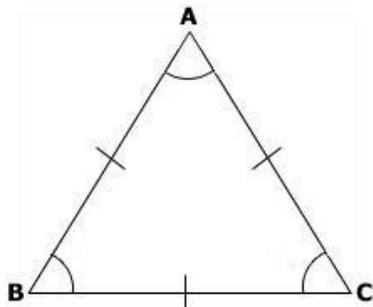


Figura 1

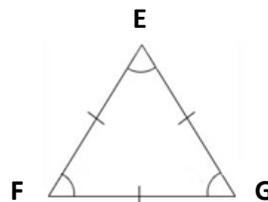


Figura 2

- a) El ángulo B de la figura 1 es “mayor que” el ángulo G de la figura 2.
- b) El ángulo B de la figura 1 es “menor que” el ángulo G de la figura 2.
- c) El ángulo B de la figura 1 es “igual” al ángulo G de la figura 2.

Porque:

---



---

12. Traza una ruta para que el niño llegue a su balón. No puedes trazar sólo una recta, ni curvas, solo puedes utilizar ángulos distintos de 90 grados. Márcalos en tu ruta. Después descríbela con tus palabras en los renglones de abajo.



Descripción de la ruta:

---



---



---



---

