Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad de Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

La práctica matemática de definir: Un análisis del discurso de estudiantes de secundaria al definir familias de poliedros

Tesis que presenta

Daniela Alexandra Ropero Quintero

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

En la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la tesis: **Dr. Gonzalo Zubieta Badillo**

Ciudad de México Enero, 2022

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradezco especialmente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me brindó para llevar a cabo mis estudios de maestría.

Becario: 1018150

Agradecimientos

El haber llevado a cabo esta investigación no hubiera sido posible sin la ayuda y la participación de:

Primeramente Dios, por guiarme en cada una de las decisiones que tomo en mi vida, por ser misericordioso conmigo y brindarme la oportunidad de continuar con mis estudios y así poder aprender de este mundo de la investigación que ha sido tan significativo para mí.

Al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, que me abrió sus puertas para guiarme en este proceso.

A mi asesor, el Doctor Gonzalo Zubieta, por su paciencia, su acompañamiento constante, sus enseñanzas, sugerencias y comentarios que fueron esenciales para la culminación de este proyecto. Y con él, a mis compañeros de estudio del seminario, Mario, José Luis y Yanira que estuvieron dispuestos a escuchar cada una de las ideas de esta investigación.

A mis sinodales, la Dra. Leonor Camargo y la Dra. Claudia Acuña, por aceptar ser partícipes de la lectura y evaluación de esta investigación y por cada uno de sus comentarios y sugerencias que permitieron que este documento obtuviera una mujer versión.

A mi familia, que me apoyo constantemente en este sueño de seguir estudiando y aprendiendo, aun sabiendo lo difícil que podía ser el estar tan lejos. Un sincero agradecimiento a mi madre y mi hermano, porque sé lo difícil que fue para los tres el que hubiera estado tan lejos de casa, pero sin duda alguna siempre los llevaba en mi corazón.

No puedo dejar de agradecer a las grandes amistades que siempre hicieron que me sintiera como en casa: a Alejandra B, que en gran parte influyó para que yo pudiera estar acá y me abrió sus puertas al llegar, a Alejandra C, Cristian, Fredy y Andrea, por siempre estar dispuestos y tomarse el tiempo de escucharme, de estar pendiente, sugerirme ideas y darme los ánimos necesarios para continuar. Especialmente agradezco a Andrea, que sin dudarlo dos veces me brindó su ayuda en diferentes etapas de mi proyecto y que con sus ideas y comentarios permitieron que este trabajo intentara tener su mejor versión.

A Luis Carlos, por el cariño sincero que me brindó, por sus ideas, que desde su conocimiento permitieron que muchas de las ideas que yo tenía se fundamentaran más.

A los estudiantes que participaron en este estudio, porque a pesar de la situación de pandemia en la que estamos estuvieron dispuestos a brindarme su tiempo y participación para poder llevar a cabo la implementación de las actividades.

Y por último, pero no menos importante, agradezco a todo el personal académico y administrativo de Departamento de Matemática Educativa, en especial a Adrianita, porque ella siempre pone a nuestra disposición su ayuda con todo los trámites administrativos y académicos que se deben hacer.

Sin duda algunas cada una de las personas que nombro y aquellas que no menciono pero que también me acompañaron, fueron muy importantes en todo este proceso de aprendizaje tanto a nivel académico como personal. A todas ellas, muchas gracias.

Este trabajo se lo dedico especialmente a mi madre, Mireya, porque gracias a ella soy lo que soy, porque ella es el principal motivo por el cual busco mejorar cada día como persona y porque las decisiones y acciones que tomo en mi vida las hago pensando en ella.

Tabla de contenido

Resumen **9**

Abstract **11**

Introducción **13**

Capítulo 1. .... **15**

Problema de Investigación **15**

1.1. Revisión Bibliográfica 15

1.1.1. Una Mirada a la Enseñanza y el Aprendizaje de las Definiciones Desde Diferentes Perspectivas 16

1.1.2. El Proceso de Definir en la Geometría Sólida 21

1.1.3. Propuestas Didácticas para el Desarrollo de la Práctica Matemática de Definir en Primaria y Secundaría 25

1.1.4. Investigaciones que Analizan el Discurso 32

1.2. Delimitación del Problema de Investigación 35

1.3. Preguntas de Investigación 37

1.4. Objetivos de la Investigación 38

Capítulo 2. .... **40**

Elementos Conceptuales **40**

2.1. La Práctica Matemática de Definir 40

2.1.1. Aspectos de la Práctica Matemática de Definir 42

2.1.2. Caracterización de una Definición 44

2.2. La Teoría Comognitiva de Sfard 46

2.2.1. Caracterización de la Teoría 47

2.2.2. El Discurso Matemático: ¿Cómo se Caracteriza? 50

2.2.3. Principios Teóricos 53

Capítulo 3. .... **56**

Elementos Metodológicos **56**

3.1. Tipo de Estudio 56

3.2. Método 57

3.2.1. Características de los Participantes y Contexto inmerso de la Investigación 58

3.2.2. Diseño de las Actividades e Instrumentos Utilizados 58

3.2.3. Procedimientos para el Análisis de los Datos 69

Capítulo 4. .... **76**

Descripción y Análisis de los Datos **76**

4.1. Generalidades de la Actividad Diagnostica 76

4.1.1. En relación con el Primer Objetivo: Caracterización de los Sólidos Geométricos y los Elementos que los Componen 77

4.1.2. En Relación con el Segundo Objetivo: Identificación de Familias de Sólidos Geométricos Desconocidas por los Participantes 80

4.2. Etapa 1 de Análisis: Descripción, Caracterización y Desarrollo de la Práctica Matemática de Definir 83

4.2.1. Primera Actividad: ¿Qué es un Poliedro? 84

4.2.2. Segunda Actividad: Definiendo los Poliedros Cóncavos 102

4.2.3. Tercera Actividad: En Busca de las Características de los Sólidos Platónicos 120

4.3. Etapa 2 de Análisis: Caracterización de las Definiciones 130

4.3.1. Definiciones Propuestas por los Participantes 131

4.3.2. Características del Discurso Cuando se Desarrolla el Aspecto Proponer una Definición 137

Capítulo 5. .... **139**

Discusión de Resultados y Conclusiones **139**

5.1. Discusión En torno a las Preguntas de Investigación 139

5.1.1. Sobre los Aspectos de la Práctica Matemática de Definir 140

5.1.2. Sobre las Características del Discurso de los Participantes Cuando Desarrollan Aspectos de la Práctica matemática de Definir 143

5.1.3. Sobre las Características de las Definiciones Propuestas por los Participantes 148

5.2. Reflexiones Adicionales 149

Capítulo 6. .... **151**

Prospectivas **151**

Referencias **154**

Anexos **161**

Anexo 1. Actividad propuesta por SEP (2020) 161

Anexo 2. Carta de autorización dirigida a los padres de familia 163

Anexo 3. Actividad diagnostica 164

Anexo 4. Hoja de trabajo 1 169

Anexo 5. Ejemplos y no-ejemplos a evaluar para la familia de poliedros 170

Anexo 6. Hoja de trabajo 2 171

Anexo 7. Cuestionario final 173
Anexo 8. Análisis de la primera actividad para los otros dos subgrupos de trabajo............... 174
Anexo 9. Transcripción de la discusión de E1 y E2 cuando identifican similitudes y diferencias entre ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos 181
Anexo 10. Transcripción del discurso de los estudiantes cuando argumentan sobre la evaluación de ejemplos y no-ejemplos de los sólidos platónicos. 182

Resumen

El presente trabajo trata un problema de investigación que identificamos a partir de la revisión bibliográfica descrita en el primer capítulo, en la cual se resalta la importancia de que los estudiantes participen en el proceso de construcción de definiciones o lo que identificamos como la *práctica matemática de definir,* pues muchos investigadores dentro de la investigación en Matemática Educativa argumentan que el involucrar a los estudiantes en el proceso de definir puede llegar a promover su comprensión de las definiciones. Además, se conoce poco, por no decir que nada, cómo estudiantes de niveles educativos como secundaría construyen definiciones y cómo participan y desarrollan la *práctica matemática de definir.*

Por eso, como una primera iniciativa para incentivar la participación de *la práctica matemática de definir*, propusimos un estudio exploratorio/descriptivo que nos permitiera caracterizar y describir cómo se desarrolla el proceso de definir cuando estudiantes de secundaria participan en la construcción de definiciones de conceptos geométricos propios de la geometría espacial. Esto con el fin de proporcionar descripciones detalladas de lo que los estudiantes dicen y hacen mientras definen.

Con el fin de alcanzar los objetivos de investigación propuestos, estructuramos un marco conceptual que por un lado, fundamenta qué entendemos como *práctica matemática de definir* y cómo se caracteriza, y por el otro, especificamos los elementos claves de una teoría que promete darnos las herramientas pertinentes para el análisis de nuestros datos: la Teoría Comognitiva de Anna Sfard, teoría que centra su atención en el análisis del *discurso* matemático y en la que se identifican cuatro aspectos del *discurso* matemático que constituyen la base de nuestro método analítico: el *uso de palabras, narrativas, mediadores visuales* y *rutinas.*

A partir del análisis realizado y los resultados encontrados identificamos características particulares y propias del *discurso* de nuestra población de estudio que dan cuenta de todo lo que implicó para ellos llevar a cabo el proceso de construcción de definiciones. Algunos de estos resultados arrojan información respecto a que algunos *aspectos de la práctica matemática de*

definir como *revisar una definición* o *negociar criterios para juzgar la adecuación de una definición* para determinar si es la adecuada o no, no se logran desarrollar en nuestra población de estudio; el *uso de palabras* coloquiales para describir características de una familia particular de sólidos geométricos es usual en el *discurso* de nuestra población de estudio; se identificaron diferentes *rutinas* en el quehacer de los estudiantes que dan cuenta de cómo ellos participan en diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir*. Además, como un resultado adicional de nuestro trabajo, se resalta la importancia del uso de ejemplos y no-ejemplos como un elemento esencial para el diseño de tareas que se relacionen con la *práctica matemática de definir*.

Abstract

This thesis presents a research issue, that we identified as a result of the literature review described in the first chapter, which highlights the importance of students' participation in the process of constructing definitions or what we identify as the *mathematical practice of defining*, since many researchers in Mathematics Education research argue that involving students in the process of defining can promote their understanding of definitions. In addition, little, if anything, is known about how students at educational levels such as high school construct definitions and how they participate and develop the *mathematical practice of defining*.

Therefore, as a first initiative to encourage the participation of *the mathematical practice of defining*, we proposed an exploratory/descriptive study which would allow us to characterize and describe how the process of defining develops when high school students participate in the construction of definitions of geometric concepts in spatial geometry. This to provide detailed descriptions of what students say and do while defining.

In order to achieve the proposed research objectives, we structured a conceptual framework that, on the one hand, underlies what we understand as *mathematical practice of defining* and how it is characterized, and on the other, we specified the key elements of a theory that promised to provide us with the relevant tools for the analysis of our data: Anna Sfard's commognitive theory, a theory that focuses its attention on mathematical *discourse* and in which four aspects of mathematical *discourse* are identified that constitute the basis of our analytical method: the *use of words*, *narratives*, *visual mediators*, and *routines*.

In consequence to the analysis, we identified particular characteristics of the *discourse* of our students sample that account for everything that was involved for them in the process of constructing definitions. Some of these characteristics yield information that some *aspects of the mathematical practice of defining*, such as *reviewing a definition* to determine whether it is adequate or not, do not arise naturally on the part of the students; the *use of colloquial words* to describe characteristics of a particular family of geometric solids is usual in the students' *discourse*;

different *routines* were identified in the students' work that show how the students participate in different aspects of the mathematical practice of defining. Moreover, as an additional result of our work, the importance of the use of examples and non-examples is highlighted as an essential element for the design of tasks related to the *mathematical practice of defining*.

Introducción

Desde hace más de dos décadas en investigaciones de Matemática Educativa se reconoce que dentro de los diferentes contextos escolares se ha atribuido poca importancia a que los estudiantes participen en el proceso de construcción de definiciones geométricas, pues para nadie es un secreto que generalmente en las escuelas las diferentes definiciones de los objetos geométricos de los que se habla son impartidas o por el profesor o por un libro de texto, pero no se les da la oportunidad a los estudiantes a que participen en el proceso de construcción de definiciones.

A pesar de que muchos investigadores afirman que definir debe considerarse un problema básico en la educación matemática y que por lo tanto sería fundamental conocer todo lo que implicaría para los estudiantes construir definiciones matemáticas, nuestra revisión bibliográfica pone en manifiesto la poca investigación que hay al respecto.

Ante esto, varias investigaciones han basado sus trabajos bajo la consideración sobre la importancia y las ventajas que puede traer el que los estudiantes participen en la *práctica matemática de definir,* bajo la premura de que para aumentar la comprensión de los estudiantes de las definiciones es primordial hacerlos participes en alguna etapa del proceso de definir. Sin embargo, la mayoría de estas investigaciones no nos ofrecen información detallada y profunda de todo lo que implicaría para los estudiantes participar en el proceso de construcción de definiciones. Por tanto, este trabajo está en dicha línea.

Basados en estas ideas y en la delimitación del problema que identificamos en la revisión bibliográfica descrita en el primer capítulo, llevamos a cabo una investigación con el fin de lograr caracterizar, a partir de un análisis del *discurso,* cómo estudiantes de secundaria llevan a cabo el proceso de construcción de definiciones de conceptos geométricos propios de la geometría espacial.

Para alcanzar el objetivo propuesto, en el segundo capítulo se especifican los elementos conceptuales que fundamentan nuestro trabajo y que fueron la base para el análisis de nuestros datos; en el tercer capítulo describimos de manera detallada cada una de las decisiones metodológicas que nos guiaron hacía el diseño de las actividades propuestas para la implementación; en el cuarto capítulo se presenta el análisis detallado de los datos; en el quinto capítulo describimos los resultados hallados a partir del análisis realizado y que nos permitieron dar respuesta a nuestras preguntas de investigación, y en el sexto y último capítulo se describe una posible línea de trabajo en la que se le puede dar continuidad a esta investigación.

Capítulo 1.
Problema de Investigación

En el presente capítulo plasmamos el origen de este proyecto de investigación que inicio con el interés de revisar el estado actual de las investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las definiciones, pues muchas veces como docentes pasamos por alto la importancia que tiene la comprensión de las mismas tanto en las matemáticas como en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes. Durante el proceso de la revisión bibliográfica nos surgieron algunas preguntas —que se irán planteando en cada una de las secciones de este capítulo— que nos permitieron delimitar el problema de investigación y centrar el interés en la *práctica matemática de definir*. Particularmente nos centramos en la *práctica matemática de definir* conceptos geométricos de la geometría sólida.

Con base en la revisión bibliográfica y la respectiva delimitación del problema de esta investigación, al final de este capítulo planteamos las preguntas de investigación y los objetivos que se esperan alcanzar.

1.1. Revisión Bibliográfica

La revisión bibliográfica se divide en cuatro partes: la primera, presenta diferentes investigaciones que trabajan desde distintas perspectivas la enseñanza y el aprendizaje de la definiciones, las cuales nos permitieron evidenciar que hay poca investigación en el tratamiento de la geometría sólida; por lo que planteamos la segunda parte de la revisión, en la que plasmamos algunos antecedentes que se centran en la formación de conceptos de la geometría sólida, antecedentes que, en su gran mayoría, se desarrollan con poblaciones cuyos participantes son estudiantes universitarios o maestros en formación; lo que nos llevó a la tercera parte de la revisión, donde se describen algunas investigaciones que hacen participes a la población de estudio en la actividad de definir en el contexto de la geometría espacial en niveles educativos como primaria y secundaria, y por último, se describen algunas investigaciones que resaltan la importancia de tomar un marco sociocultural como lente analítico para estudiar el *discurso* de los estudiantes cuando participan en la *práctica matemática de definir*.

Las investigaciones que reportamos se encontraron en diferentes bases de datos: libros especializados, artículos de revistas científicas de alto impacto, trabajos presentados en congresos, simposios y eventos similares. La búsqueda la realizamos con el uso de palabras claves o descriptores distintivos que nos permitieron filtrar la búsqueda para identificar las investigaciones que estaban más relacionadas con nuestro interés. Las palabras claves usadas fueron: definir, definiciones, geometría espacial o geometría sólida, y una vez que identificamos una posible perspectiva teórica para abordar nuestra investigación —a partir de las primeras fuentes encontradas— agregamos a nuestra búsqueda las palabras *discurso* o *análisis del discurso*.

Para cada una de las investigaciones encontradas en nuestra revisión, centramos nuestra atención a varios aspectos: el objeto matemático de estudio; el tipo de contexto, ambiente, participantes y muestras en las que se llevaba a cabo la investigación; cómo se recolectaban los datos; los métodos y técnicas de recolección de los datos; cómo se llevaba a cabo el análisis de los datos y bajo que fundamentación teórica, y, por último, los resultados a los que se llegaban. También identificamos en cada una de las investigaciones revisadas referentes importantes en su bibliografía para continuar con la revisión y rescatar aspectos teóricos, metodológicos o didácticos importantes para esta investigación y que iremos rescatando en el transcurso de la descripción de la revisión bibliográfica.

1.1.1. Una Mirada a la Enseñanza y el Aprendizaje de las Definiciones Desde Diferentes Perspectivas

Sin duda alguna, las matemáticas son concebidas como un sistema teórico conformado por axiomas, definiciones y teoremas. Pero esta manera de concebir las matemáticas no representa la forma en que se construyen, pues el interés no solo se centra en estudiar los axiomas, las definiciones y los teoremas, sino también la forma o el proceso en el que éstas han sido construidas (Vinner, 2002; Martin-Molina, González-Regaña y Gavilán-Izquierdo, 2018). Esta idea nos lleva a reconocer, por un lado, que las definiciones son un elemento importante dentro de las estructuras teóricas que componen las matemáticas, y por el otro, que también es importante estudiar el proceso de construcción de definiciones en un ámbito educativo, pues tal y como lo mencionan Mariotti y Fischbein (1997) "aprender a definir es un problema básico de la educación matemática" (p. 219, traducción propia[1]).

La importancia que se le atribuye a la definición desde el ámbito educativo ha sido investigada desde diferentes perspectivas e incluso en diferentes áreas de las matemáticas, como el cálculo, el álgebra, la probabilidad y la estadística (ver, por ejemplo, Swinyard, 2011; Van Darmolen y Zaslavsky, 2003; Tabach y Nachaeli, 2015; Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas, 2013; Megías, Gea y Batanero, 2018). Van Darmolen y Zaslavsky (2003), por ejemplo, en su estudio pretenden promover la reflexión de maestros en formación de matemáticas en aspectos relacionados con el papel y la naturaleza de las definiciones en la escuela. Una de las reflexiones que abordaron los maestros en formación se relaciona con el papel de los ejemplos en el proceso de aprendizaje de las definiciones, pues ellos consideran que a través de uno o más ejemplos de un concepto en particular podría ser la mejor manera, desde el punto de vista pedagógico, de iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto.

La importancia del uso de ejemplos y no-ejemplos para iniciar el aprendizaje de un concepto también se resalta en Alvarado y González (2016), quienes proponen una secuencia didáctica para estudiantes universitarios con el propósito de estudiar el papel y la relevancia de la definición en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. La primera parte de la secuencia está centrada en las definiciones y busca desarrollar habilidades para definir y manipular definiciones; para esto, se les solicita a los estudiantes que construyan la definición de doce conceptos que ya son conocidos para ellos (número par, triángulo isósceles, círculo, etc.). Los investigadores rescatan que en esta parte de la secuencia toma un papel importante el uso de ejemplos y no-ejemplos de los conceptos que se están definiendo, ya que, según los autores, "[…] el uso de ejemplos y no-ejemplos ha sido de gran importancia, en virtud de que ayuda a extraer características propias de los objetos y a construir espacios de ejemplos que apoyan al alumno al

[1] Todas las citas que realizamos de documentos escritos en ingles son traducciones propias

construir y comprender una definición" (p. 545). Además, de acuerdo con los resultados de su investigación, los autores apoyan la idea de que los procesos de definir deben considerarse como objeto de estudio en los diferentes niveles educativos.

Indudablemente, si se trata de hablar de las investigaciones que toman como objeto de estudio los procesos de definir, gran parte de éstas se encuentran en el área de la geometría y se abordan desde diferentes puntos de vista. Por ejemplo, Zaslavsky y Shir (2005) estudian las concepciones que tienen estudiantes de duodécimo grado sobre las definiciones matemáticas. Para esto, se enfrenta a la población de estudio a varias definiciones de diferentes conceptos, dos de las cuales son geométricos —cuadrado y triángulo isósceles—, para que decidieran cuáles podrían ser consideradas como definiciones y cuáles no. En esta investigación se recalca la necesidad de que los estudiantes generen ejemplos y no-ejemplos para apoyar sus afirmaciones, pues, según los autores "[…] el hecho de tratar con ejemplos y contraejemplos suele presentar a los alumnos un conflicto cognitivo cuya solución puede llevar a la modificación de sus conocimientos". (p.340)

Esta idea de que los estudiantes generen sus propios ejemplos fue el centro de atención de la investigación de Zaskis y Leikin (2008), quienes, tomando como población de estudio maestros en formación, les solicitan a los maestros que den tantos ejemplos como sea posible de lo que ellos consideran una definición de cuadrado. Los investigadores realizaron una categorización de las definiciones planteadas por los maestros en formación en términos de las cualidades de las definiciones: si las definiciones eran ejemplos de definiciones apropiadas y rigurosas, si eran ejemplos de definiciones inapropiadas con condiciones necesarias pero no suficientes, si eran definiciones con condiciones suficientes pero no necesarias o sin condiciones necesarias ni suficientes. Ante sus resultados los investigadores nos previenen sobre la variabilidad de los posibles ejemplos de una definición, aun cuando se trata de un concepto tan conocido como lo es el cuadrado, y aún más cuando son maestros en formación quienes definen; pero **¿ocurría lo mismo cuando estudiantes de primaria y secundaria participan en el proceso de construcción de definiciones?** Esto lo abordaremos más adelante.

En paralelo a las investigaciones que hemos mencionado hasta el momento, la mayoría de las investigaciones que encontramos en la revisión utilizan como fundamento teórico las ideas de

Vinner (1983) en relación con la imagen conceptual[2] que se tiene de un determinado concepto y su respectiva definición formal. Gran parte de estas investigaciones estudian la imagen conceptual de la población de estudio para determinar si son acordes a la definición formal del concepto (Tsamir, Tirosh y Levenson, 2015; Zandieh y Rassmusen, 2010; Mantica y Freyre, 2019; Ulusoy, 2020). Ulusoy (2020), por ejemplo, con el objetivo de investigar las imágenes y definiciones conceptuales que tienen los maestros en formación del concepto geométrico triángulo, propone una tarea que consiste en escribir una definición de triángulo y dar cuatro ejemplos y cuatro no-ejemplos distintos del mismo. Los resultados muestran que la gran mayoría de los participantes escriben definiciones inapropiadas con condiciones necesarias pero no suficientes o con condiciones ni necesarias ni suficientes, tal como lo categorizan Zaskis y Leikin (2008), además, gran parte de los ejemplos y no-ejemplos dibujados por los maestros en formación indicaban una imagen conceptual prototípica, que, según Mantica y Freyre (2019), esto se debe a que en la escuela la gran mayoría de los ejemplos presentados para un concepto en específico suelen ser prototípicos.

Hasta el momento hemos mencionado las investigaciones que estudian el proceso de enseñanza y aprendizaje de las definiciones desde distintos ángulos: algunos estudian las concepciones que tienen los estudiantes sobre la definición matemática; otros, el papel y la naturaleza de las definiciones, y otras se centran en estudiar la relación entre la imagen mental y la definición de un concepto, tomando como marco de análisis las ideas de Vinner. Es de rescatar en cada una de estas investigaciones la importancia que le atribuyen al uso de ejemplos y no-ejemplos como un elemento fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las definiciones, consideración que tendremos en cuenta para el diseño de nuestras actividades. Sin embargo, evidenciamos que en estas investigaciones la población de estudio no participa en el proceso de construcción de definiciones. Es aquí entonces donde nos surge la primera pregunta: **¿qué investigaciones se centran en estudiar aquellos ambientes educativos en los que la población de estudio participa en la construcción de definiciones de un determinado concepto?**

[2] Se entiende imagen conceptual, desde el punto de vista de Vinner (1983), como el conjunto de todas las imágenes mentales que se asocian a un concepto en particular. Este se puede interpretar como las imágenes mentales que se vienen a nuestro pensamiento cuando escuchamos el nombre que caracteriza a un concepto.

Ante la pregunta que nos planteamos, Sinclair, Bartolini Bussi, De Villers, Jones, Kortenkamp, Leung y Owens (2016) afirman que:

> Se ha investigado poco o nada sobre el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para definir constructivamente (*a priori*) los conceptos por sí mismos. Esto a pesar de que muchos matemáticos y educadores han argumentado en contra de la presentación directa de las definiciones, como un producto terminado para los estudiantes […]. (p. 706, *énfasis añadido*)

Coincidimos con la conclusión a la que llegan Sinclair et al. (2016); pues desde años atrás el mismo De Villers (1998) apoyó la idea de la importancia que tiene que los estudiantes sean participes en la construcción de definiciones —a lo que él llama definir— de conceptos geométricos, pues según él esta participación permitiría aumentar la comprensión de los estudiantes sobre las definiciones geométricas y los conceptos con los que se relacionan. A pesar de que estas ideas vienen de más de veinte años atrás, evidenciamos que actualmente se encuentra poca investigación que aborde y tenga en cuenta estos aspectos.

Dentro de las pocas investigaciones que aportan información con relación a lo que mencionamos en los párrafos anteriores son las planteadas por Samper y Vargas (2019), Zandieh y Rasmussen (2010), Okazaki (2013) y Kobiela y Lehrer (2015). Zandieh y Rasmussen (2010), por ejemplo, en el contexto de la geometría esférica y bajo el análisis de los datos de su investigación con estudiantes universitarios, identifican que el proceso de definir no solo se caracteriza por la actividad de crear una definición, sino que actividades como: formular una definición, negociar lo que se quiere que sea una definición y refinar o revisar la definición, son actividades que también hacen parte del proceso de definir.

El incluir estás actividades dentro de los procesos de definir fueron elementos importantes en la investigación de Kobiela y Lehrer (2015), quienes complementan estas ideas y las de otros investigadores para proponer un marco que permite describir las formas de participación en la definición, lo que ellos llaman *aspectos de la práctica matemática de definir*, entendida como, desde el punto de los autores, una forma de actividad regida por normas sociales que permiten crear conocimiento, o en este caso, construir definiciones. Este marco se caracteriza por ocho aspectos: (1) proponer una definición, (2) construir o evaluar ejemplos o no-ejemplos, (3) describir propiedades o relaciones, (4) construir explicaciones o argumentos de definición, (5) revisar definiciones, (6) establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas, (7) formular preguntas de definiciones y (8) negociar criterios para juzgar la adecuación o la aceptabilidad de las definiciones. Estos investigadores también mencionan algunos aspectos sobre las interacciones que se presentan entre el profesor y los estudiantes que aportaron significativamente a la práctica de definir; aspectos que se tendrán en cuenta para nuestro diseño y que mencionaremos en posteriores capítulos. Cabe mencionar que en este punto de nuestra revisión ya identificamos un elemento importante para nuestra investigación y se relaciona directamente con lo que Kobiela y Lehrer (2015) llaman y caracterizan la *práctica matemática de definir*.

Es aquí donde nos surgió una segunda pregunta pues hemos mencionado hasta el momento investigaciones que centran su interés en el proceso de definir en el contexto de la geometría plana, o en su defecto, en otras áreas como el cálculo, la probabilidad y la estadística, y entonces **¿qué pasa con las investigaciones que se desarrollan en el contexto de la geometría espacial y que están relacionadas con lo que hemos identificado como la *práctica matemática de definir*?** En busca de respuestas a esta pregunta nuestra revisión se centró en buscar investigaciones que aportaran información al cuestionamiento planteado, las cuales expondremos en las siguientes secciones de este capítulo.

1.1.2. El Proceso de Definir en la Geometría Sólida

Al iniciar la búsqueda de investigaciones que dirigieran el interés en los procesos de definición en la geometría sólida, encontramos gran parte de investigaciones que desarrollan diferentes actividades geométricas que van desde desarrollar el concepto de medición de volumen (Huang, 2012; Seah y Horne, 2018), tanto en ambientes dinámicos (Panorkou, 2019; Bock y Dimmel, 2017) como con el uso de material concreto (ver por ejemplo, Ambrose 2019); hasta en actividades relacionadas con desarrollos planos y construcción de diferentes sólidos, particularmente prismas y pirámides (Fielding-Wells y Makar, 2015). Vale la pena también destacar los trabajos de Guillen (2000; 2001; 2004; 2005) donde caracteriza cada uno de los niveles de van Hiele con actividades como analizar, clasificar, definir, probar, demostrar, conjeturar, particularizar y generalizar con lo que respecta a la geometría espacial centrándose en la descripción y clasificación de familias de prismas.

Encontramos pocas investigaciones con relación a nuestro tema de interés[3]. Una de ellas es la llevada a cabo por Tanguay y Grenier (2010), quienes en su estudio con maestros en formación llevan a cabo una situación didáctica enmarcada en actividades de definición, exploración y experimentación a través de construcciones y manipulaciones con material concreto; cuyo objetivo es que los estudiantes logren demostrar que solo existen cinco poliedros regulares.

En la primera fase de la implementación se les solicitó a los participantes que definieran y construyeran los poliedros regulares, y para su sorpresa, los investigadores encontraron que los participantes no lograban definirlos de manera adecuada —daban condiciones necesarias pero no suficientes— pues para las autoras un poliedro regular es "[…] un sólido convexo en el espacio, delimitado por caras que son todas congruentes con el mismo polígono regular, y que tienen todos los vértices del mismo grado[4]" (p. 37); por lo que se enfrentó constantemente a los participantes a la construcción de ejemplos y no-ejemplos para reconocer las propiedades necesarias y suficientes que caracterizan a los poliedros como regulares. Por ejemplo, cuando los participantes conjeturaron algunas de las propiedades que caracterizaban un poliedro como regular: "las caras son todas iguales", "en todas partes es el mismo polígono regular", "encierran un volumen finito", "no puede haber más de tres caras compartiendo cada vértice", entre otras; los investigadores pusieron a su consideración el poliedro estrellado que se forma al pegar pirámides de base cuadrada en las caras de un cubo y el octaedro, ilustradas en la Figura 1.

[3] Solo por dar un ejemplo, en la revisión de algunas actas de congreso entre los años 2010 y 2019, encontramos solo 44 actividades relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría sólida, y solamente el 9% de éstas se centraban en los que identificamos como la *práctica matemática de definir*.

[4] Recordemos que el grado de un vértice lo determina la cantidad de aristas adyacentes al vértice.

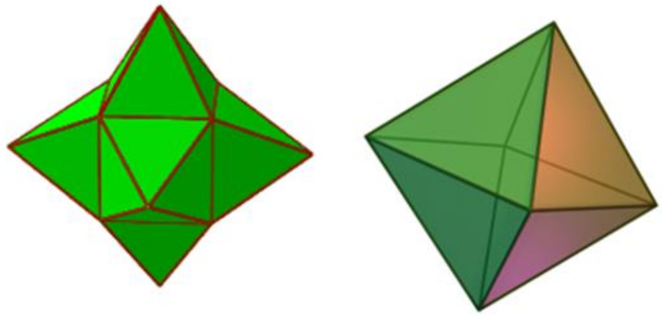


Figura 1. Poliedro estrellado y octaedro. Tomada de Wikipedia

Indudablemente, el poner en consideración estos poliedros permitió, en gran parte, que los estudiantes apreciaran la convexidad y la característica de que todos los vértices tienen el mismo grado como propiedades necesarias para definir un poliedro regular. De nuevo se pone en manifiesto el papel importante que juegan los ejemplos y no-ejemplos en el proceso de identificación de las características relevantes del objeto que se esté definiendo para así lograr establecer una definición.

Algo similar a los resultados encontrados por la investigación mencionada en los párrafos anteriores fue confirmado por Ertekin, Yazici y Delice (2014), pues en su estudio con maestros en formación encuentran que los futuros maestros no logran definir con las condiciones suficientes cuando se les solicita que definan conceptos geométricos como el cono y el cilindro. Ante estos resultados, De Villiers (1998) menciona que quizás esto se debe a que en las experiencias pasadas de los participantes las definiciones les fueron impartidas directamente.

Nuevamente persiste la idea de que si en las investigaciones que se llevan a cabo en un ambiente con maestros en formación y quienes probablemente ya se encuentran resultados como los mencionados hasta el momento, entonces persiste nuestra pregunta: **¿ocurriría lo mismo con estudiantes de primaria o secundaria? ¿cómo definirían ellos conceptos geométricos?**

Si bien es importante identificar en las definiciones dadas, por una población de estudio particular, las dificultades que tienen para definir un concepto y apreciar si las definiciones cumplen con las condiciones necesarias y suficientes para que sean consideradas como rigurosas; también es importante caracterizar el proceso real que ocurre cuando los participantes contribuyen al proceso de construcción de definiciones e ilustrar como va avanzando el razonamiento de los estudiantes que parten de construir definiciones menos rigurosas hasta lograr construir una definición que se considera aceptada bajo una comunidad matemática. Bajo esta idea, el estudio de Gavilán et al. (2019) aborda la práctica matemática —entendida, desde el punto de vista de los autores, como un proceso de construcción del conocimiento matemático— de definir con maestros en formación de educación primaria para explicar, detallar e identificar cómo ellos desarrollan esta práctica matemática.

Para alcanzar su objetivo los investigadores fundamentan su *análisis en el discurso* de los participantes estructurándolo con aspectos de la teoría sociocultural de Sfard (2008) e identificando elementos de la misma, elementos como: el *uso de palabras* matemáticas y las *narrativas* utilizadas, este último elemento de análisis es entendido como un "conjunto de expresiones habladas o escritas que describen objetos y procesos, así como relaciones entre estos" (Gavilán et al., 2019, p. 139). La identificación del *uso de palabras* y *narrativas* les permitió a los investigadores caracterizar el proceso de construcción de definiciones de algunos prismas, ilustrados en la

Figura 2.

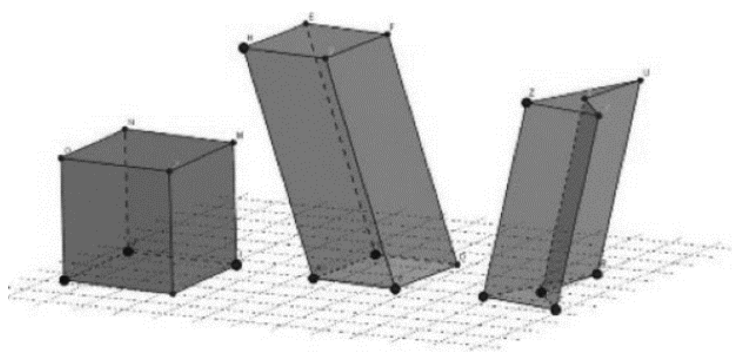


Figura 2.Prismas para definir en el estudio de Gavilán et al. Tomada de Gavilán et al. (2019, p. 142)

A partir del análisis de los datos, los investigadores identifican que los maestros en formación utilizan diferentes *narrativas* para definir: *narrativas* en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo una etiqueta, mediante una etiqueta y características o mediante solo características.

Según los autores, la identificación de estos elementos (el *uso de palabras* y las *narrativas* utilizadas) junto con otros elementos propios de su fundamentación teórica, permiten tener una visión general del *discurso* de los estudiantes cuando participan en la actividad de definir y podría ayudar a identificar y caracterizar las diferentes fases del proceso de definir. Esto para explicar cómo los estudiantes pasan de definir un concepto solo con su etiqueta, a definirlo con la enumeración de sus propiedades.

Gran parte de las investigaciones que hemos mencionado hasta el momento se han desarrollado en un ambiente cuyas poblaciones son maestros en formación o estudiantes universitarios, entonces nos surge una tercera pregunta **¿qué investigaciones se desenvuelven en un ambiente escolar como primaria y secundaria cuyo interés se centre en la *práctica matemática de definir* conceptos propios de la geometría sólida?** La búsqueda de una respuesta nos llevó a la revisión de diferentes propuestas didácticas que potenciarán la participación de estudiantes de primaria o secundaria en el proceso de definir, para así identificar más elementos relevantes que permitieran el desarrollo y la fundamentación de nuestra investigación. Esta búsqueda la hicimos tanto a nivel curricular como investigativo. Algunas de estas propuestas las mencionamos a continuación.

1.1.3. Propuestas Didácticas para el Desarrollo de la Práctica Matemática de Definir en Primaria y Secundaría

Para darnos un panorama general de los estudios que aportan información sobre cómo se desarrollan los procesos de definir en ambientes escolares como primaria y secundaria, a continuación mencionamos diferentes propuestas didácticas que potencian la *práctica matemática de definir*.

1.1.3.1. Desde un Punto de Vista Curricular.

Los Estándares estatales básicos comunes para las matemáticas (*National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers*, 2010) proponen una nueva mirada a la educación orientada hacia las co-constitución de conceptos y prácticas matemáticas; por lo que nos obliga a nosotros como educadores dejar a un lado las ideas tradicionales de concebir al maestro como el único poseedor del conocimiento y permitirle al estudiante que construya los conceptos y no que los memorice. Este enfoque a la educación se ha identificado en algunas propuestas curriculares del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), *The National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM) y algunos documentos de la Secretaría de Educación Pública de México (SEP).

En particular los NCTM (2000) proponen como estándar general para los programas desde primaria hasta secundaria que los estudiantes tengan la oportunidad de "analizar características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas" (p.41). Esta generalidad del estándar se desarrolla de manera específica en cada uno de los grados escolares. Por ejemplo, para el conjunto de grados de tercero a quinto se espera que los estudiantes logren identificar, comparar y analizar atributos de figuras tridimensionales y desarrollar su propio vocabulario para describirlos. También se espera que los estudiantes clasifiquen figuras geométricas de tres dimensiones de acuerdo con sus propiedades para desarrollar definiciones de algunas clases de figuras, como las pirámides por ejemplo. De acuerdo con los NCTM, el desarrollo de este estándar se puede consolidar con algunas actividades como: permitir que los estudiantes, por sí mismos, encuentren similitudes y diferencias comparando objetos geométricos; que los estudiantes tengan una variedad de ejemplos y no-ejemplos de figuras que correspondan o no al mismo concepto geométrico para examinar sus características; que los estudiantes dibujen o construyan figuras tridimensionales, comparando y discutiendo sus propiedades; entre otras.

Bajo lo propuesto por los NCTM, sigue prevaleciendo la idea de que los estudiantes deben participar en alguna etapa del proceso de construcción de definiciones, como lo es el caso de establecer propiedades relevantes del objeto que se quiere definir. Además, persiste también la idea de la importancia del uso de ejemplos y no-ejemplos para identificar propiedades relevantes.

Esta visión general de cómo se deberían enfocar las actividades y los objetivos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos geométricos, particularmente los que nos competen: los tridimensionales, son acogidos por algunas, no todas, de las actividades propuestas por la mayoría de los libros gratuitos de la SEP[5]. Solo por dar un ejemplo, en la SEP (2020) se proponen como

[5] Revisamos algunos de los libros propuestos por la SEP desde primaria hasta tercero de secundaria en el periodo 2019-2020 para identificar el tratamiento que se le dan al proceso de enseñanza de aprendizaje de conceptos tridimensionales.

actividad (Ver anexo 1) que los estudiantes identifiquen y comparen las propiedades entre distintos prismas y pirámides para que construyan sus respectivas definiciones. Es de resaltar que en esta actividad se le da la oportunidad a los estudiantes que a partir de la visualización de las representaciones planas de figuras geométricas tridimensionales, reconozcan las propiedades de los conceptos geométricos observados para que por sí solos construyan las definiciones de los mismos y no sea como tradicionalmente se da: que los libros de texto den las definiciones matemáticas para que sean memorizadas por los estudiantes, perdiendo la gran productividad que puede llegar a tener que los estudiantes sean participes en la construcción, revisión, y evaluación de las definiciones (Kobiela y Lehrer, 2015).

La revisión de algunos de los libros de la SEP también nos permitió evidenciar algunos aspectos como:

- Gran parte de los temas que se abordan en los libros se centran en la identificación de las características de diferentes prismas y pirámides, a partir de la caracterización de la cantidad y la forma que tienen sus caras;
- los ejemplos y no-ejemplos que se ponen a consideración de estudio son comunes, en su mayoría son prismas rectos, no se consideran prismas oblicuos o poliedros cóncavos;
- la mayoría de las actividades están enfocadas en determinar el volumen de prismas con base poligonal, pirámides, conos y cilindros, o en identificar y construir desarrollos planos para algunas pirámides y prismas específicos;
- y como ya lo mencionamos, sí se encontraron actividades que les permiten a los estudiantes construir las definiciones de algunos conceptos geométricos, particularmente la definición de prisma y pirámide. Esto se logra con preguntas orientadoras que les permiten a los estudiantes identificar las propiedades específicas que caracterizan al concepto geométrico que se espera logren definir.

1.1.3.2. Desde el Punto de Vista de la Investigación.

Las investigaciones enmarcadas en nuestra disciplina en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las definiciones de conceptos propios de la geometría espacial en ambientes de primaria y secundaria promueven la importancia y la riqueza que tiene incluir a los estudiantes como protagonistas en alguna fase de la construcción de definiciones. Esta idea —tal como lo mencionamos en secciones anteriores— viene desde hace más de diez años atrás y es planteada en investigaciones como la de Mariotti y Fischbein (1997), quienes, a partir del análisis de algunos ejemplos de un experimento de enseñanza en grado sexto, consideran la definición como un problema educativo complejo en situaciones del aula, y por ende:

> El proceso de definición debe considerarse desde el punto de vista de su complejidad como un componente del razonamiento geométrico y un proceso específico de la actividad matemática. Este es el último aspecto que a menudo se escapa del dominio de la práctica escolar: los alumnos nunca participan en el verdadero juego de las definiciones; los aspectos significativos se proponen a los alumnos sin darles ninguna posibilidad de comprender el motivo de su significado. (p. 226)

Bajo esta idea, la esencia de la experimentación propuesta se centra en diferentes actividades en donde los estudiantes analizan varios ejemplos de prismas y pirámides para que logren una caracterización común que les permita estructurar una definición de estos poliedros, así como una definición para lo que conocemos como el desarrollo plano. El análisis de los datos, fundamentado desde la teoría de los conceptos figurales, les permitió a los investigadores evidenciar que el proceso de definir demanda a la par la intervención del nivel figural y del nivel conceptual, pues hay un constante ir y venir entre observar, identificar las características principales, plantear las características observadas, volver a observar y comprobar la definición planteada entre las figuras. Este proceso, según los autores, se logra con la intervención específica del profesor, pues es el profesor quien media y guía las discusiones que se presentan en el aula para así lograr transformar una definición que tiene una lista larga de propiedades a una definición más formal. Además, el profesor interviene en el proceso de verificación de si un objeto puede ser considerado o no como un ejemplo de la definición dada. He aquí otros elementos que identificamos como relevantes para la puesta en práctica de nuestra experimentación y que fundamentamos en el capítulo tres.

Tres años después, Lehrer y Curtis (2000) continúan con la idea de brindarles la oportunidad a los estudiantes de ser partícipes en la construcción de definiciones. En esta ocasión les corresponde a los niños de tercer grado de primaria construir la definición de poliedros regulares o como los nombran los autores: sólidos perfectos. Vale la pena aclarar que los estudiantes ya habían tenido algunas secciones de clase en las que reconocieron los componentes y las características de algunos poliedros, como la identificación de sus carcas sus vértices y sus nombres.

La experimentación consistió en que a partir de la visualización de dos ejemplos de poliedros regulares (el cubo y el tetraedro) y dos no-ejemplos de los mismos (pirámide cuadrada y prisma triangular), los estudiantes descubrieran los otros tres poliedros regulares a partir de la construcción de posibles ejemplos con el material concreto "*polydron*"[6]. A medida que surgían las propuestas de los posibles candidatos se perfeccionaban las características que definen a los poliedros regulares. Por ejemplo, una de las primeras propuestas que surgió fue la ilustrada en la Figura 3, pues al inicio se conjeturó, según lo visualizado con lo ejemplos y no-ejemplos, que quizás una de las propiedades que caracteriza a un poliedro como regular es que todas sus caras tienen la misma forma.

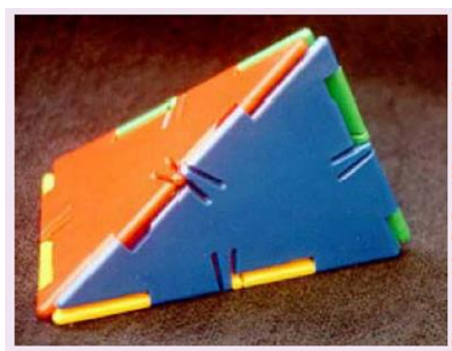


Figura 3. Posible candidato como ejemplo de poliedro regular. Tomando de Lehrer y Curtis (2000, p. 327)

En el momento en el que los investigadores mencionan que este no es un poliedro regular, los estudiantes dan cuenta de que no basta con que las caras de los poliedros regulares tengan la misma forma, sino que además las caras deben ser polígonos iguales. Teniendo en cuenta los resultados de esta experimentación, los investigadores mencionan que el intercambio de ideas y la discusión fue importante para ayudar a los estudiantes a aprender a construir y mejorar las definiciones, además, mencionan que:

[6] Son piezas poligonales de plástico entrelazadas

> La búsqueda de definiciones ofrece una oportunidad para que el profesor y los estudiantes entablen un debate que conduzca al consenso, o al menos a la especificación de las propiedades de manera que sean reproducibles y comprensibles para los demás. (p. 329)

Con una población de estudio con edades similares y considerando la relevancia que tienen los procesos de definir en el aula, sobre todo cuando los estudiantes son participes en él, Ambrose y Kene-han (2009) realizan un experimento de enseñanza para que niños entre los 8 y 9 años construyan, clasifiquen y definan poliedros, particularmente pirámides. Un elemento importante dentro de su experimento de enseñanza fue la gama de ejemplos y no-ejemplos que construyeron los estudiantes para dar cuenta de las partes que componen a una pirámide y las relaciones que hay entre ellas.

Los investigadores analizan los resultados de su investigación para caracterizar el pensamiento de los estudiantes de acuerdo con los niveles de van Hiele y establecer si hubo o no una evolución en su comprensión sobre los poliedros. Ante esto, los investigadores encuentran que los estudiantes sí evolucionaron en su pensamiento geométrico pues, de acuerdo con los resultados del cuestionario aplicado al iniciar la experimentación, los participantes describían las formas tridimensionales de forma holística; y al final, la mayoría identificaron los elementos que componen a los poliedros, particularmente las formas de sus caras. Estos resultados, según los autores y en concordancia con los mencionado por Lehrer y Curtis (2000), se lograron gracias a las interacciones que se dieron en el aula, pues contribuyeron a que los estudiantes visualizaran de nuevas maneras y desarrollaran un nuevo lenguaje para describir los poliedros.

Más recientemente, en la investigación de Wongkamalasai y Lehrer (2018) se propone una secuencia didáctica para determinar si esta ayuda alcanzar el objetivo de desarrollar conjuntamente la *práctica matemática de definir* conceptos relacionados con poliedros, particularmente pirámides. Nuevamente el uso de ejemplos y no-ejemplos fue la esencia de esta secuencia, pues jugó un papel importante para que los estudiantes apreciaran las características esenciales que definen a una pirámide. Por ejemplo, a partir de la visualización de varios ejemplos como la pirámide de base cuadrada, hexagonal y octogonal, los estudiantes lograron reconocer el vértice —donde todas las caras triangulares se juntan— y la base como elementos importantes; sin embargo, aún no reconocían que el resto de sus caras debían tener forma triangular. Esta situación implicó traer a discusión y proponer el prisma triangular como un no-ejemplo de una pirámide, lo que permitió que los estudiantes reconocieran la propiedad faltante. Los resultados de la propuesta didáctica les permitieron a los investigadores darse cuenta de que la *práctica matemática de definir* se puede considerar accesible en poblaciones con edades tempranas; sin embargo,

> […] aunque las ciencias del aprendizaje han ayudado a establecer nuevas formas de conceptualizar el aprendizaje que hacen hincapié en el acceso de los estudiantes a la práctica disciplinar, todavía entendemos poco sobre cómo los niños pequeños pueden aprender a participar en estas prácticas. (párr. 24)

Hemos evidenciado con las investigaciones hasta aquí mencionadas que el proceso de definir puede ser accesible en poblaciones distintas a universitarios y maestros en formación; sin embargo, este proceso en sí mismo es complejo y, de acuerdo a Mariotti y Fischbein (1997), no puede caracterizarse completamente con los niveles de van Hiele, pues lo consideran insuficientes para analizar el desarrollo geométrico de una población particular, sobre todo cuando de los procesos de definición se habla. Esta idea también sigue persistiendo años después, cuando Wang y Kinzel (2014) mencionan que en el modelo de van Hiele falta información para caracterizar cada nivel en relación con el razonamiento de los estudiantes sobre el proceso de definir pues, aunque se considere que en el nivel tres los estudiantes logran construir definiciones, el modelo no describe rigurosa y específicamente el razonamiento en este nivel.

Bajo esta idea Wang y Kinzel (2014) proponen una nueva mirada que permite comprender mejor el razonamiento geométrico de los estudiantes en el proceso de definir. Esta nueva mirada se centra en analizar el *discurso* de los estudiantes; pues, de acuerdo con los autores, el uso de una lente discursiva promete proporcionarnos información detallada y profunda del razonamiento que no se especifica en los niveles de van Hiele.

Es aquí donde nuestra búsqueda se centró en identificar las investigaciones que aportan información detallada sobre el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes en los procesos de definir, tomando como lente de análisis *el discurso* de los estudiantes. Pues la revisión de estas investigaciones nos permite tener una visión general de cómo, tomando una fundamentación teórica que centra su atención en la comunicación, se podría caracterizar la participación por parte de los estudiantes en la *práctica matemática de definir*.

1.1.4. Investigaciones que Analizan el Discurso

Entre los diferentes fundamentos teóricos que centran su interés en el *análisis del discurso* de estudiantes cuando se enfrentan a diferentes actividades matemáticas, encontramos uno en común: la Teoría Comognitiva —nombrada así por la relación existente entre pensamiento y comunicación— de Sfard (2008), que promete ser una fundamento teórico fuerte y explicativo permitiendo tener una comprensión más profunda del razonamiento geométrico de los estudiantes cuando se desarrollan en diferentes contextos (Gavilán et al., 2019; Wang y Kinzel, 2014: Presmeg, 2016).

La propuesta teórica de Sfard (2008) ha sido empleada en los últimos años, en estudios que vienen desde el cálculo (Glücer, 2016; Nardi, Ryve, Stabdler y Viirman, 2014) hasta en aspectos relacionados con la simetría de triángulos (Ng y Sinclair, 2015) o la clasificación de los mismos (Kaur, 2015). Y bajo nuestro centro de interés, identificamos un fuerte trabajo para caracterizar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes cuando participan en el proceso de definir, usando elementos de esta propuesta teórica, que, aunque si bien su población de estudio no son estudiantes de primaria o secundaria, sí nos brinda una visión general de cómo se puede caracterizar el proceso de construcción de definiciones a partir del *análisis del discurso*. Tal es el caso de los trabajos que inician con la investigación de Escudero, Gavilán-Izquierdo y Sánchez-Matamoros (2014) hasta la investigación de González-Regaña, Martín-Molina, Fernández-León, Toscano y Gavilán-Izquierdo (2019).

Este grupo de investigadores parte de un estudio en el año 2014 con maestros en formación, y aunque la temática que se aborda no se relaciona con la geometría espacial, vale la pena mencionarlo, pues nos aportó significativamente a entender cómo podría caracterizarse el proceso de definir en términos de las herramientas teóricas que brinda la teoría de Sfard. El estudio de Escudero et al. (2014) analiza el *discurso* de futuros maestros de matemáticas identificando elementos propios de la teoría de Sfard: el *uso de palabras*, los *mediadores visuales*, el uso de *narrativas* y las *rutinas* que llevan a cabo los maestros cuando definen diferentes clases de cuadriláteros: un cuadrado, un rectángulo y un rombo.

El análisis de los datos provenientes de los quince grupos analizados permitió identificar diferentes procedimientos de cambio en el *discurso* matemático en el proceso de definir, pues los investigadores identificaron, a partir de las relaciones entre *narrativas* y *rutinas*, que los participantes parten de definir etiquetando el concepto geométrico, a definirlo con una lista de características mínimas. Esto lleva a los investigadores a identificar que hubo un aprendizaje pues se evidenciaron cambios en el *discurso* de los estudiantes, y bajo la teoría de Sfard, se puede evidenciar si hay o no aprendizaje a partir de un cambio en el *discurso* analizado. Los investigadores mencionan que la caracterización que hacen del *discurso* matemático sobre cómo definen los maestros en formación fue posible gracias a las herramientas teóricas que brinda la teoría de Sfard (2008).

Bajo este descubrimiento del potencial que brinda la teoría comognitiva, los investigadores, junto con otros colaboradores continúan con su estudio sobre la caracterización de los procesos de definir con maestros en formación, esta vez en un ambiente de geometría sólida. Esta investigación se reportó en tres artículos (Gavilán-Izquierdo et al., 2019; González-Regaña et al, 2019; Fernández, Gavilán-Izquierdo, González-Regaña, Martín-Molina y Toscano, 2019) que nos permitieron tener una visión amplia sobre cómo cada uno de los elementos de la teoría de Sfard permiten caracterizar profundamente el proceso de definir cuando los estudiantes participan en él.

El primero de ellos lo mencionamos en la sección 1.1.2 del presente capítulo, en donde se identifica en el *uso de las palabras* el para qué las usan y cómo las usan y las *narrativas* utilizadas para caracterizar cómo los participantes definen diferentes tipos de prismas, ilustrados en la Figura 2. En esta investigación se identificaron diferentes *narrativas* para definir los prismas: *narrativas* para etiquetar y *narrativa*s para describir las características; sin embargo, en este estudio no se reportaron las diferentes acciones —identificadas desde la teoría de Sfard como *rutinas*— realizadas por los estudiantes que los llevó a definir de la manera como lo hicieron.

Esto nos lleva al reporte de investigación de Fernández et al. (2019) donde identifican las *rutinas* que llevaron a cabo los maestros en formación en el proceso de definir los prismas. Las *rutina*s o las acciones que se identificaron se categorizaron en tres grupos: en el primero se encuentran aquellas *rutinas* que se relacionan con la descripción de las propiedades de los elementos de los prismas; en la segunda, están las *rutinas* que se relacionan con cómo construyen las definiciones, y en la tercera, se encuentran las de tipo transversal, denominadas así porque dichas *rutinas* pueden aparecer durante cualquier fase del proceso de definición de los prismas.

Es inevitable que en las investigaciones se presenten conflictos en el proceso de enseñanza y aprendizaje; sin embargo, muy pocas veces vemos estos conflictos como oportunidades de aprendizaje. Tal es el caso de la última investigación que encontramos del grupo de investigadores que hemos estado mencionado, que, bajo las mismas condiciones, González et al. (2019) identifican los conflictos comognitivos que se presentaron en su experimentación, conflictos que desde el punto de vista de la teoría Sfard son necesarios para que haya un cambio en el *discurso*, es decir, haya evidencia de un aprendizaje. Los investigadores identifican tres conflictos comognitivos: el primero se vincula con las diferentes formas que tienen los estudiantes de entender el proceso de definir, pues se evidenció una confusión entre definir y describir; el segundo se relaciona con el choque existente entre el *discurso* matemático que es propio de la geometría plana con el de la geometría espacial, y el tercero, se relaciona con las diferencias entre los *discursos* de los estudiantes cuando intentan convencer al otro de sus ideas.

Este conjunto de investigaciones, que se complementan una con la otra, nos dan un panorama general sobre los elementos, las acciones, las estrategias, los conflictos que se pueden presentar y las oportunidades de aprendizaje en el proceso de definir o como lo hemos identificado: la *práctica matemática de definir*. Sin embargo, esto nos da un panorama desde el punto de vista de lo que hacen los maestros en formación, que es importante claro, pues sus acciones influyen en sus decisiones pedagógicas; pero no es menos importante también entender este proceso desde el punto de vista de los mismos estudiantes, pues como lo mencionan Fernández et al. (2019):

> […] la continuación de este estudio con otros estudiantes y otras preguntas podría producir una visión más completa de cómo los estudiantes describen y definen los objetos matemáticos. Por ejemplo, podríamos obtener más información sobre las diferencias que existen cuando los estudiantes definen objetos 3D en lugar de objetos 2D. Toda esta información también podría ser valiosa para los profesores de matemáticas y de educación

matemática en el sentido de que saber cómo los estudiantes describen y definen podría influir en su enseñanza. (párr. 63)

1.2. Delimitación del Problema de Investigación

Michael De Villers en su escrito "*To teach definitions in geometry or to teach to define?*" dijo:

> […] la construcción de definiciones (definir) es una actividad matemática no menos importante que otros procesos como la resolución de problemas, la formulación de conjeturas, la generalización, la especialización, la demostración, etc., por lo que resulta extraño que se haya descuidado en la mayor parte de la enseñanza de las matemáticas. (De Villiers,1998, p. 249)

A pesar de esta consideración, nuestra revisión bibliográfica pone en manifiesto que sigue existiendo esta problemática en la enseñanza y el aprendizaje de las definiciones, sobre todo cuando los estudiantes de primaria o secundaria pueden tener todo el protagonismo en este y aún más cuando de definir conceptos propios de la geometría espacial se trata. Esto lo podemos afirmar porque a raíz de la revisión y de las preguntas que nos fuimos planteando en el transcurso evidenciamos lo siguiente.

Primero, son pocas las investigaciones que hacen participes a la población de estudio en el proceso de definir, y cuando es así, la mayorías de las poblaciones estudiadas son estudiantes universitarios o en su defecto maestros en formación.

Segundo, estas investigaciones, en su gran mayoría, se desarrollan en el contexto de la geometría plana y pocas en la geometría sólida; y cuando es así, se lleva a cabo el estudio con objetos geométricos que son muy comunes en el aula, o como lo mencionan algunos investigadores, son prototípicos; pues la mayoría se centra en definir prismas, pirámides, cilindros y conos y no en otros objetos geométricos con características distintas como los que definen a los poliedros cóncavos, los prismas oblicuos, poliedros regulares, los poliedros arquimedianos etc.

Tercero, hemos apreciado en gran parte de las investigaciones que revisamos cómo definen maestros en formación, qué estrategias utilizan para lograr una definición, cómo entienden lo que es una definición, las dificultades que se presentaron en el proceso de definición, entre otras; sin embargo, conocemos poco y no tenemos un panorama general sobre cómo estudiantes de primaria o secundaria participan y llevan a cabo el proceso de definir, o lo que identificamos como la *práctica matemática de definir*.

Teniendo en cuenta los mencionado anteriormente, nuestro trabajo de investigación busca obtener información que nos permita caracterizar o describir cómo estudiantes de secundaria construyen definiciones de conceptos propios de la geometría sólida. La idea de que consideremos importante que los conceptos a definir sean conceptos propios de la geometría sólida proviene de la revisión bibliográfica que realizamos, pues evidenciamos que las poblaciones de estudio de las investigaciones revisadas ya tenían un conocimiento previo de los conceptos a definir, lo que puede conducir a que las definiciones dadas sean un producto de recordar las definiciones que en algún momento les fueron impartidas. Esto hace que se pierda la esencia de obtener información para caracterizar cómo se lleva a cabo un proceso real de construcción de definiciones y cómo se desarrolla esa práctica de definir cuando los estudiantes no están familiarizados con los conceptos a definir. Esto, creemos lo podríamos lograr bajo conceptos geométricos, no comunes, de la geometría sólida.

Por otro lado, nuestra revisión bibliográfica también nos permitió identificar las diferentes perspectivas con las que se llevaron a cabo las investigaciones, fundamentadas principalmente en las ideas de van Hiele, de Vinner y las ideas de Fischbein sobre los conceptos figurales; que aunque si bien aportan información importante de la *práctica matemática de definir* en poblaciones con niveles educativos como primaria y secundaria, no nos permiten tener una visión completa sobre las acciones, las estrategias o las diferentes actividades que pueden surgir en el proceso de definir.

Por eso concordamos con distintos investigadores en Matemática Educativa (Sinclair y Moss, 2012; Wang y Kinzel, 2014) sobre la importancia de explorar con otras perspectivas teóricas para obtener información más detallada que permita caracterizar el razonamiento geométrico de los estudiantes. Al respecto, la revisión nos llevó a considerar una fundamentación teórica —la teoría comognitiva de Sfard— que, desde el punto de vista de las investigaciones mencionadas en la sección 1.1.4, nos permite tener un panorama general y detallado del desarrollo de la *práctica matemática de definir* a partir del *análisis del discurso* de los estudiantes. Además, en la búsqueda que realizamos no encontramos investigaciones que analizaran el *discurso* de estudiantes de secundaria para caracterizar el proceso de participación en la construcción de definiciones de objetos geométricos propios de geometría sólida. Además, según Wang y Kinzel (2014):

El uso de una lente discursiva nos permite centrarnos en lo que los estudiantes dicen y hacen en relación con las figuras geométricas y sus propiedades, con el objetivo de proporcionar descripciones detalladas y profundas de los procesos de pensamiento de los estudiantes cuando comunican ideas matemáticas. (pp. 288-289)

Bajo las ideas plateadas en los párrafos anteriores, nuestro problema de investigación rescata cuatro elementos importantes: primero, reconocer la importancia de caracterizar la *práctica matemática de definir* cuando la población de estudio participa y es el principal protagonista en el desarrollo de esta; segundo, centrar nuestro interés en una población de estudio en la que no se encuentra mucha investigación con respecto al anterior aspecto mencionado; tercero, centrar nuestra investigación en objetos matemáticos de estudio que hacen parte de la geometría espacial y con los que la población de estudio no se encuentre familiarizada, y por último, tomar una perspectiva teórica, diferente a las usualmente tomadas, que analiza el *discurso*.

Por tanto, nuestro trabajo busca responder a las siguientes preguntas de investigación bajo los objetivos que a continuación también planteamos.

1.3. Preguntas de Investigación

¿Cómo se caracteriza y se desarrolla la *práctica matemática de definir* llevada a cabo por estudiantes de secundaria cuando definen conceptos propios de la geometría sólida y cuando no están familiarizados con los conceptos a definir?

Además, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación específicas que no guiarán en el proceso para dar respuesta a la pregunta anteriormente planteada.

- ¿Qué *aspectos de la práctica matemática de definir* se manifiestan cuando estudiantes de secundaria participan en el proceso de construcción de definiciones de conceptos de la geometría sólida?
- ¿Qué elementos de la teoría de Sfard pueden evidenciarse para caracterizar el *discurso* de estudiantes de secundaria cuando participan en diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir*?, y, si se evidencian algunos elementos, ¿cómo se caracterizan?
- ¿Qué características tienen la definiciones propuestas por estudiantes de secundaria cuando definen conceptos propios de la geometría sólida y cuando no están familiarizados con estos?

1.4. Objetivos de la Investigación

Caracterizar y describir cómo se desarrolla el proceso de definir cuando estudiantes de secundaria son participes en la construcción de definiciones de conceptos geométricos propios de la geometría espacial. Esto a partir de la identificación y caracterización de elementos de la Teoría Comognitiva de Sfard (2008) que se centra en la caracterización y *análisis del discurso*.

Para dar cumplimiento con este objetivo, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Describir los *aspectos de la práctica matemática de definir* que desarrollan los estudiantes de secundaria en el proceso de construcción de definiciones.
- Analizar e interpretar el *discurso* de los estudiantes de secundaria para caracterizar y describir como se manifiestan los diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir* a partir de las herramientas teóricas de Sfard.
- Determinar las características, desde el punto de vista formal de las matemáticas, de las definiciones dadas por los participantes para cada una de las familias de sólidos geométricos definidos.

Capítulo 2.
Elementos Conceptuales

En el planteamiento y la delimitación del problema descritos en el capítulo anterior mencionamos nuestro interés en caracterizar cómo se realiza y se desarrolla la *práctica matemática de definir* en estudiantes de secundaria, la cual buscamos caracterizar a partir del *análisis del discurso* de los participantes. Teniendo en cuenta esto, estructuramos este capítulo en dos apartados: por un lado, conceptualizamos y describimos aspectos importantes sobre lo que entendemos como *práctica matemática de definir,* no sin antes tomar postura sobre qué conceptualizamos como práctica matemática; y por el otro, especificamos los elementos claves de la Teoría Comognitiva de Sfard que centra su análisis en el *discurso* matemático, y que consideramos nos da los fundamentos pertinentes para el análisis de nuestros datos y por ende dar respuestas a nuestras preguntas de investigación[7].

2.1. La Práctica Matemática de Definir

No podríamos conceptualizar puntualmente a qué nos referimos con *la práctica matemática de definir* y qué la caracteriza sin antes mencionar qué significa una práctica matemática.

Los axiomas, los teoremas, las definiciones, todas las proposiciones que podemos hacer de un objeto matemático y que edifican la estructura teórica de las matemáticas hacen parte importante de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; pero no es menos importante

[7] Cabe resaltar que la justificación de la elección de este marco teórico se dará en el capítulo de consideraciones metodológicas.

también considerar las acciones, los procesos o las formas que llevaron a nuestros antepasados a construir estos cimientos teóricos, a construir conocimiento matemático, en palabras de Martín-Molina et al. (2018) "el punto central no es sólo el conjunto de afirmaciones que se pueden hacer [...] sino más bien **las formas** en que estas afirmaciones han sido producidas por las matemáticas como producto **cultural** (las "prácticas de los matemáticos")" (p.1070, **énfasis añadido**). O según Gavilán-Izquierdo et al. (2019) quienes también destacan la importancia de conocer los **procesos** de **construcción de conocimiento matemático**, que es lo que los autores identifican como práctica matemática.

Lo que resaltamos en las citas anteriores destacan varias ideas importantes que consideramos nos da una luz sobre lo que se podría estimar como aspectos centrales que caracterizan a una práctica matemática: la idea de que debe existir una construcción de conocimiento, que hay diferentes formas y procesos que llevan a tal construcción, y que estas formas y procesos de hacer son influenciadas y reguladas por aspectos propiamente culturales.

Estos aspectos centrales son elementos comunes en diferentes posturas frente a lo que se considera una práctica matemática. Por ejemplo, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2019) y González-Regaña et al. (2019) identifican una práctica matemática como aquellas actividades que desarrollan los matemáticos o investigadores en matemáticas cuando construyen conocimiento matemático, además las consideran también como un proceso social y cultural., Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) afirman que las prácticas matemáticas, entre ellas la definición, son prácticas social o culturalmente situadas.

Sin duda alguna, a pesar de las diferencias entre una concepción y otra, en cuanto a lo que se considera una práctica matemática, persiste la idea de que haya una construcción de conocimiento que se lleva a cabo por acciones, actividades, formas o procesos que son mediados por normas, factores o reglas socioculturales. Sin embargo, identificamos que en cada una de estas concepciones falta alguno de los aspectos centrales que hemos mencionado; por ejemplo, en lo que menciona Gavilán-Izquierdo et al. (2019) no se conceptualiza que los procesos de construcción del conocimiento son regulados por normas o reglas socioculturales.

Es aquí entonces donde conceptualizamos, adoptando la postura de Kobiela y Lehrer (2015), las prácticas matemáticas como: "formas recurrentes de actividades regidas por normas sociales que sirven para crear y perfeccionar el conocimiento" (p.424). Adoptamos esta postura porque en esta se tiene en cuenta los tres elementos centrales de una práctica matemática a los que hemos estado haciendo referencia.

Con el término "normas sociales" en nuestra conceptualización de práctica matemática hacemos referencia a las reglas distintivas de una comunidad particular que norman y validan las diferentes maneras en las que los individuos, pertenecientes a dicha comunidad, hacen cierta actividad matemática; por ejemplo, la manera en que se realiza la operación matemática de multiplicar en Latinoamérica difiere de la China, porque este proceso se regula y valida por las normas características de cada una de estas dos comunidades.

Bajo las ideas planteadas en los párrafos anteriores, el proceso que lleva a una definición (definir) se considera como una práctica matemática (Rasmussen et al., 2005; Kobiela y Lehrer, 2015; González-Regaña, Martín-Molina, Toscano, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2021), y al ser considerada como tal implica que en la *práctica matemática de definir* debe existir la coordinación de diferentes formas o maneras recurrentes de realizar actividades que conducen a la construcción de una definición, las cuales hemos identificado como *aspectos de la práctica matemática de definir*.

2.1.1. Aspectos de la Práctica Matemática de Definir

Kobiela y Lehrer (2015) identifican ocho aspectos de la *práctica matemática de definir*, ilustrados en la Figura 4. Estos aspectos son identificados bajo la influencia de múltiples investigaciones como la de Zandieh y Rasmussen (2010), Zaslavsky y Shir (2005), Lehrer y Curtis (2000), entre otros.

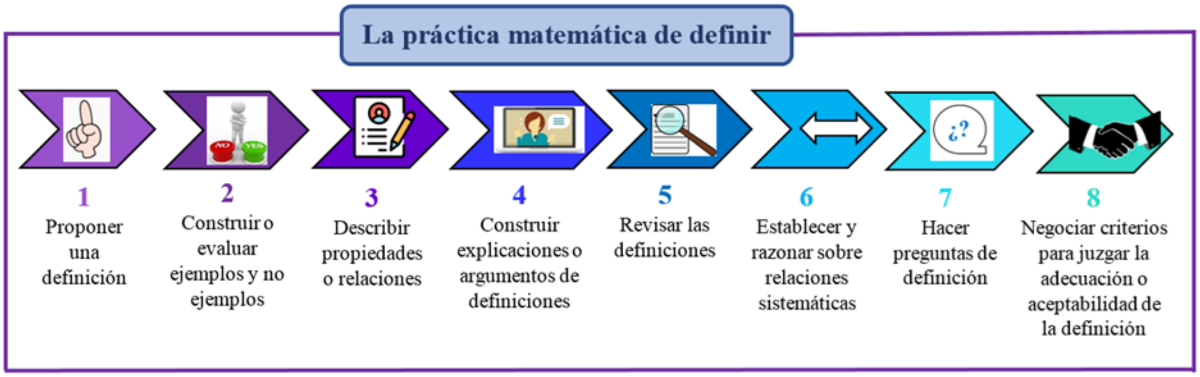


Figura 4. Aspectos de la práctica matemática de definir. Elaboración propia con base en Kobiela y Lehrer (2015)

El primer aspecto al que se refieren los autores —*proponer una definición*— se origina cuando se invita a los participantes a construir una definición, por supuesto, esta definición no tiene que ser matemáticamente formal; el segundo aspecto —*construir o evaluar ejemplos y no-ejemplos*— facilita la identificación de las características relevantes del objeto que se esté definiendo; esto nos lleva al tercer aspecto —*describir propiedades o relaciones*— que como su nombre lo indica, consiste en describir las propiedades que caracterizan al objeto que se define; el cuarto aspecto —*construir explicaciones o argumentos de definiciones*— implica justificar varias cosas: porqué aceptar o rechazar una definición, el porqué de la relevancia de una propiedad o relación observada y el porqué de la aceptación o el rechazo de un ejemplo del objeto que se está definiendo; este aspecto, en la mayoría de los casos, lleva a una *revisión de las definiciones* —el quinto aspecto— para incluir o eliminar características que fueron innecesarias e imprecisas en la definición.

Cabe destacar que los siguientes tres aspectos se desarrollan a partir de la interacción y el dialogo entre los participantes involucrados en el proceso de construcción de definiciones. Por ejemplo, el sexto aspecto surge cuando los participantes realizan preguntas relacionadas sobre los ejemplos, las propiedades, las características o las relaciones del objeto que se está definiendo, esto lleva al desarrollo del séptimo aspecto en el que se identifican relaciones sistemáticas del objeto: si pertenece a una clase general de objetos o si sus propiedades se relacionan con las características de otras clases de objetos etc., y el último aspecto —*negociar criterios para juzgar la adecuación o aceptabilidad de la definición*— surge cuando se negocia con otros participantes qué características de las definiciones deben tenerse en cuenta para determinar si una definición es adecuada o no: si una definición tiene que ser económica, si cualquier propiedad o característica puede servir como definición o como parte de la definición, etc.

Vale la pena mencionar que no queremos dar a entender que estos aspectos se presentan de manera ordenada, como se ilustran en la Figura 4, que el aspecto dos prevalece sobre el tres, que todos deben presentarse en el proceso de construcción de una definición, o que son las únicas formas de participar en el proceso de definir, simplemente son diferentes tipos de actividades que pueden surgir en la construcción de definiciones.

2.1.2. Caracterización de una Definición

No podríamos hablar de la *práctica matemática de definir* sin caracterizar su producto final: la definición. Son muchos los investigadores que se han ocupado de identificar las características de una definición matemática para ser considerada como tal. En la Figura 5 se recogen algunas de estas características que identificamos en investigaciones como las de Van Dormolen y Zaslavsky (2003), Vinner (2002), Zaskis y Leikin (2008) y Zaslavsky y Shir (2005).

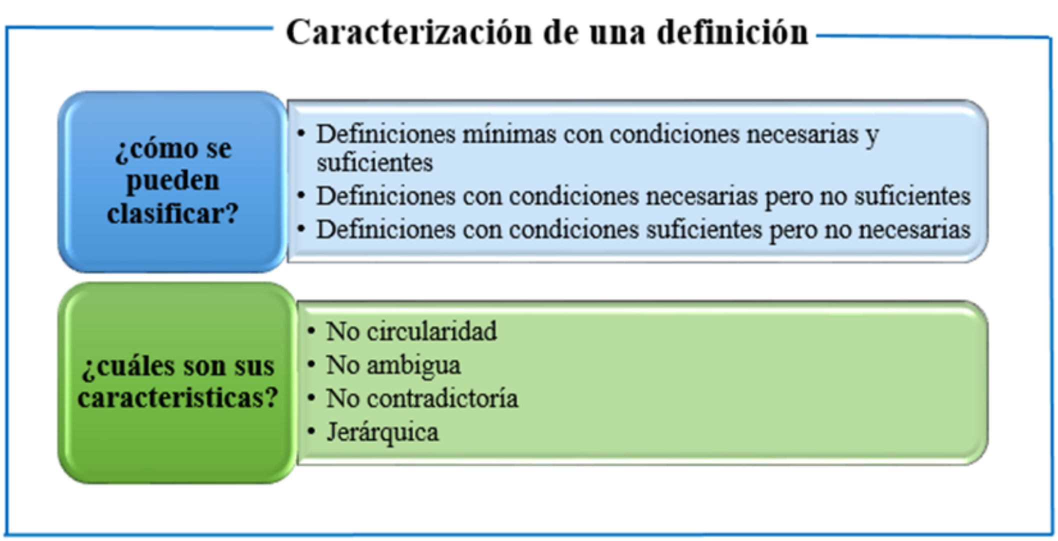


Figura 5.Caracterización de una definición. Elaboración propia

Algunas de las características que se ilustran en la Figura 5 son consideradas porque provienen de un carácter lógico e imperativo, características tales como:

- Una definición no deber ser **ambigua** en el sentido de que las características que incluye del objeto que define deben ser interpretadas de manera única; por ejemplo, si se define un polígono como una figura geométrica cerrada limitada por líneas, esta definición puede llevar a interpretar que la palabra "líneas" incluye tanto las líneas curvas como las rectas; por lo que no hay una interpretación única para la palabra "líneas" (Zaslavsky y Shir, 2005).
- Una definición no puede ser **contradictoria,** esto conlleva a que todas las características que se contemplan deber coexistir, es decir, en la definición no pueden estar incluidas una característica y su contraria (Zaslavsky y Shir, 2005).
- En una definición de un concepto no se puede hacer referencia al propio concepto, esto caracteriza la **no circularidad** (Zaslavsky y Shir, 2005).
- Una definición debe ser **jerárquica** en el sentido de que los términos empleados en la definición deben estar previamente definidos; por ejemplo, al incluir la palabra "poliedro convexo" en la definición de un sólido platónico permite identificarlo como parte de la familia de poliedros que previamente debió ser caracterizada (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003; Zaslavsky y Shir, 2005)

En cuanto a la manera en la que se puede clasificar una definición en relación con el conjunto de características que incluye del objeto que se está definiendo, se identifican cuatro tipos:

- Definiciones **mínimas con condiciones necesarias y suficientes,** hacen referencia a la no redundancia de las características incluidas, es decir, que ninguna de las características incluidas pueda deducirse de las otras. El ejemplo más claro que nos permite ilustrar esto lo podemos encontrar en las posibles definiciones de un rectángulo: si definimos un rectángulo como un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, estas condiciones son necesarias y suficientes, pero no son mínimas, pues basta con definirlo como un cuadrilátero con tres ángulos rectos ya que se puede deducir que el otro ángulo es efectivamente recto (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003; Vinner, 2002; Zaskis y Leikin, 2008; Zaslavsky y Shir, 2005)
- Definiciones con **condiciones necesarias pero no suficientes**; por ejemplo, cuando definimos un cuadrado como un cuadrilátero con cuatro lados iguales, bajo esta definición, se puede considerar un rombo como un cuadrado, por lo que la definición incluye condiciones que son necesarias pero insuficientes, pues falta incluir en su definición que al menos uno de sus ángulos es recto (Zaskis y Leikin, 2008).

- Definiciones con **condiciones suficientes pero no necesarias**; por ejemplo, cuando se define un cuadrado como dos líneas rectas paralelas horizontales de igual longitud y dos verticales de igual longitud que las horizontales, las cuales forman ángulos de noventa grados en su intersección, esta definición incluye condiciones innecesarias que se refieren a la orientación de un cuadrado (Zaskis y Leikin, 2008).

Es claro que un enunciado que no cumpla con las características imperativas como la no ambigüedad, la no circularidad, la no contradicción, la jerarquización y que no incluya la condiciones necesarias y suficientes para definir un objeto, se pude considerar como un no-ejemplo de una definición desde el punto de vista formal de las matemáticas (Zaslavsky y Shir, 2005).

Hasta aquí hemos mencionado elementos importantes de lo que conceptualizamos como la *práctica matemática de definir*, elementos que son claves para caracterizar esta práctica en nuestra población de estudio; sin embargo, para fines de esta investigación, el estudio de la *práctica matemática de definir* por sí sola no nos da los elementos suficientes para caracterizarla, por lo que el proceso de definir, al ser considerada como una práctica matemática, puede ser articulado coherentemente con posiciones teóricas socioculturales (Godino y Font, 2007) como lo es la teoría comognitiva de Sfard.

2.2. La Teoría Comognitiva de Sfard

La Teoría Comognitiva de Sfard (2006, 2008), denominada así por considerar que existe una interrelación fuerte entre la cognición y la comunicación, conceptualiza las matemáticas como un tipo particular de *discurso* caracterizado por ciertos elementos que lo hacen propiamente matemático. De esta manera, bajos los principios de esta teoría y bajo una visión participativa y sociocultural del aprendizaje, se identifica el aprendizaje matemático como la participación en prácticas matemáticas discursivas, en donde el pensamiento ya no es visto como una actividad autónoma e independiente de la comunicación, sino más bien se consideran, y se conceptualizan así, como casi equivalentes (Sfard, 2001; Sfard y Kieran, 2001).

Lo que describimos en el párrafo anterior realza varios aspectos importantes que caracterizan la Teoría Comognitiva de Sfard: la existencia de una fuerte relación y unión entre comunicación y pensamiento; su particularidad de considerarse un enfoque participativo y discursivo del aprendizaje; el considerar las matemáticas como un *discurso* y centrar su atención en este para caracterizarlo bajo los principios teóricos en los cuales se fundamenta la teoría, y así establecer cómo se conceptualiza el aprendizaje matemático. Son estos algunos de los aspectos que ahondaremos más específicamente.

2.2.1. Caracterización de la Teoría

En la Figura 6 intentamos rescatar los aspectos característicos e ideas centrales de la teoría comognitiva de Sfard que ya hemos estado mencionando y que guían nuestra ruta para describirla.

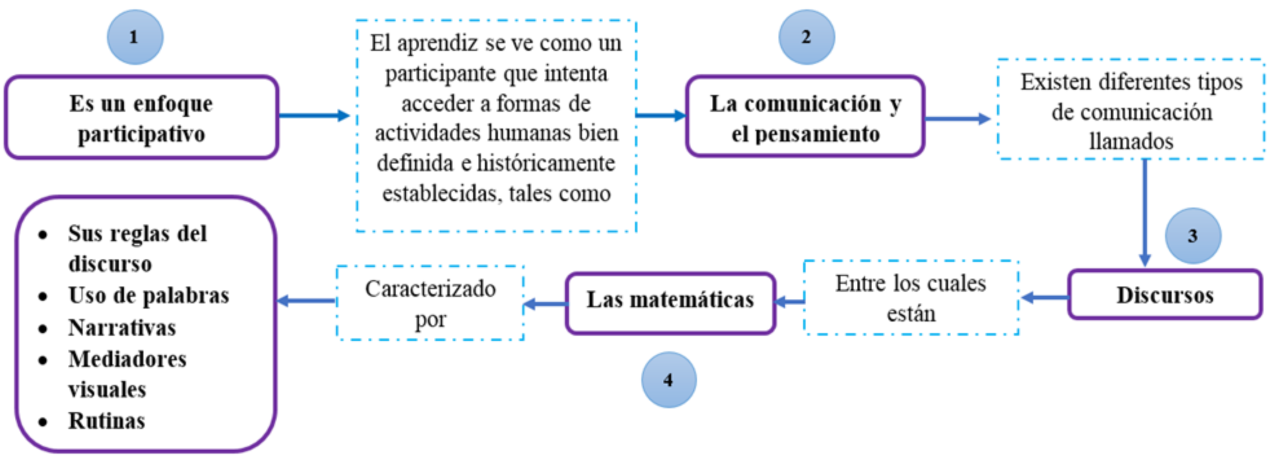


Figura 6. Aspectos importantes de la Teoría Comognitiva de Sfard. Elaboración propia

El primer aspecto al que hacemos mención en la anterior figura hace referencia a que la Teoría Comognitiva de Sfard se caracteriza por estar arraigada a las ideas de los enfoques participativos que, desde el punto de vista de Sfard (2001, 2006, 2008), se remontan a las ideas de Vygotsky sobre la popular idea de que el desarrollo del aprendizaje humano se da si previamente existió una interacción con otros; que va más allá de creer que el desarrollo del aprendizaje individual de una persona se obtiene a partir de la adquisición de conceptos, conocimientos habilidades, etc., sino más bien que éste desarrollo de aprendizaje individual proviene y se adquiere de la participación de ciertas actividades socialmente organizadas, prácticas humanas o formas de hacer humanas que son realizadas colectivamente hasta tal punto que el participante sea capaz de realizarlas por sí solo; es decir, el desarrollo del aprendizaje va de lo colectivo a lo individual.

Permítanme ahondar más en esto, la palabra clave en lo mencionado es participación, que se refiere a que una persona participe en las diferentes formas de actividades humanas[8] que están bien definidas e históricamente establecidas, que provienen de un entorno social y colectivo, y que permiten que se adquiera y se desarrolle el aprendizaje individual de la persona. En palabras de Sfard (2001) y bajo las ideas de los enfoques participativos, se debe "considerar el aprendizaje como una participación en ciertas actividades distintas, más que como una posesión de esquemas conceptuales generalizados e independientes del contexto" (p.23).

Bajo esta visión de que el aprendizaje de una persona inicia y surge bajo la participación de actividades humanas bien definidas e históricamente establecidas, Sfard centra su atención en dos actividades humanas particulares: el pensamiento y la comunicación, esto nos lleva a la segunda idea que ilustramos en la Figura 6.

La manera como se conciben estos dos elementos centrales en la teoría de Sfard, particularmente el pensamiento, está fuertemente arraigada a la idea central del enfoque participativo que hemos estado exponiendo, en el sentido de que si se considera el pensamiento como una actividad humana entonces esta solo puede desarrollarse a partir de una actividad colectiva pautada: la comunicación, que es considerada como "el precursor colectivo del pensamiento" (Sfard, 2008, p. 80).

Poniendo a consideración estas ideas, entonces, la comunicación y el pensamiento se consideran dos procesos que están fuertemente relacionados en el sentido de que ahora "el pensamiento puede definirse como una forma individualizada de un hacer colectivo" (Sfard, 2008, p. 80) y este hacer colectivo no es más que la comunicación interpersonal (ahondaremos más en esta idea en el apartado de los principios teóricos).

Si bien la comunicación se considera como un término central en la teoría de Sfard y que permite conceptualizar lo que se entiende por pensamiento, se es necesario explicitar cómo se entiende este término bajo la perspectiva de la teoría.

La comunicación se define en un sentido más amplio a como comúnmente es definida por una de varias razones: primero, debido a que la comunicación es considerada una actividad

[8] Hacen referencia a aquellas actividades que son exclusivamente humanas como razonar, la capacidad de pensar de forma compleja, la muy desarrollada capacidad humana para comunicarnos, etc. (Sfard, 2006; 2008)

colectiva, entonces no se puede limitar la definición a un proceso cerrado entre solo dos individuos— el "emisor" y el "receptor" como normalmente se denominan— y segundo, no se limita a las interacciones que son mediadas por el lenguaje. Entonces, la comunicación es concebida como una actividad regulada por reglas colectivas que permiten la mediación y coordinación de otras actividades del colectivo; es decir "los individuos que participan en la actividad de comunicar realizan acciones que habitualmente son seguidas por un cierto tipo de reacción de otros individuos" (Sfard, 2006, p.164).

Ahora bien, si la comunicación es una actividad humana pautada que permite el desarrollo del pensamiento, entonces esta actividad se manifiesta de diferentes formas y se caracteriza distintamente dependiendo de las comunidades particulares en las que se genera. Por ejemplo, en una comunidad de médicos la comunicación se manifiesta con un lenguaje específico que hace que solo los miembros de esta comunidad entiendan lo que comunican, así que todo aquel que no sea un médico no logra participar asertivamente en actividades comunicativas dentro de esta comunidad. Al igual ocurre con comunidades como ingenieros químicos, mecánicos, científicos, matemáticos, etc., cada una de estas comunidades utilizan diferentes herramientas comunicativas que las hacen únicas y particulares; esto es lo que Sfard identifica como *discursos*: "Los diferentes tipos de comunicación que unen a algunas personas y excluyen a otras se denominarán *discursos*. Dada esta definición, cualquier sociedad humana puede dividirse en *comunidades de discursos parcialmente superpuestas*" (Sfard, 2006, p. 165) y son el principal objeto de estudio de la teoría.

Por supuesto que, al definir el *discurso* como un tipo específico de comunicación, Sfard (2006, 2008) también hace referencia a que este tipo de comunicación puede ser interpersonal e intrapersonal, puede ser dominantemente verbal o con ayuda de cualquier herramienta simbólica, o que puede ser diacrónica o sincrónica. Lo importante es que estos tipos de comunicación se diferencian por sus reglas, objetos y tipos de mediadores utilizados en el acto de comunicación. Esto nos lleva a la tercera y cuarta idea que ilustramos en la Figura 6: hablar de los discursos, específicamente del *discurso* matemático, pues bajo la visión del enfoque participativo que caracteriza a la teoría y que llevó a identificar el pensamiento como una forma de comunicación, las matemáticas son consideradas un tipo especial de *discurso*.

2.2.2. El Discurso Matemático: ¿Cómo se Caracteriza?

Ya hemos mencionado que el principal objeto de estudio de la teoría de Sfard es el *discurso*, sin embargo, entre los diferentes *discursos* existentes, centra su atención en uno en particular: el *discurso* matemático. Este *discurso* es característico por una serie de herramientas comunicativas que lo hacen propiamente matemático: su *uso de palabras*, las *narrativas* que hace de los objetos de los que se habla, los *mediadores visuales*, las reglas que rigen el *discurso* y las *rutinas*; cada una de las cuales explicaremos a continuación.

2.2.2.1. Uso de Palabras.

Un *discurso* se considera matemático si utiliza palabras que son parte de un vocabulario matemático. Por ejemplo, el *uso de palabras* como poliedro, aristas, caras, vértices, etc., son palabras propias de un *discurso* matemático. Sin embargo, palabras coloquiales como "ladeado" y "volteado" cuando se hace referencia a un prisma oblicuo, por ejemplo, también son consideras palabras características del *discurso* matemático porque tienen un significado matemático para un objeto particular propio, que en este caso es para un prisma oblicuo.

Para Sfard (2008) el *uso de palabras* es importante ya que es a través de estas que podemos identificar lo que un participante puede decir sobre los objetos matemáticos.

2.2.2.2. Narrativas.

Las *narrativas* en el *discurso* matemático son un conjunto de proposiciones —verbales o escritas— que describen objetos matemáticos, relaciones entre los objetos matemáticos o de las actividades o procesos matemáticos que se pueden hacer con o por los objetos, y, además, tienen la característica de que pueden ser consideradas como verdaderas o falsas bajo las reglas de la comunidad que participa en el *discurso* matemático. Por ejemplo, la preposición que manifiesta que en un poliedro todas sus caras son planas es una *narrativa* que describe una característica del objeto matemático poliedro, y que puede estar sujeta a la aceptación o rechazo de los participantes del *discurso* matemático.

Tal y como mencionamos, las *narrativas* que caracterizan al *discurso* matemático no solo describen las características de los objetos matemáticos, sino que también se incluyen a aquellas *narrativas* referentes a las actividades o procesos que se hacen con o por los objetos. Por ejemplo, una actividad que se puede hacer con una familia de poliedros es definirlos, por lo que una *narrativa* que puede surgir en este proceso es considerar que definir es dar una lista de características (Gavilán-Izquierdo et al., 2019), y esta *narrativa* también está sujeta a una evaluación para considerarse como una proposición verdadera o falsa.

2.2.2.3. Mediadores Visuales.

Los *mediadores visuales* son considerados como los objetos visibles por los cuales los participantes del *discurso* matemático identifican los objetos de los que se está hablando y coordinan su comunicación. Por ejemplo, si dentro del *discurso* matemático se está hablando del objeto cubo como un sólido geométrico, los participantes pueden identificarlo a partir de distintos *mediadores visuales*: por medio de su desarrollo plano o por su representación tridimensional que brindan algunos software, como GeoGebra por ejemplo. O más sencillamente, si yo quiero identificar y reconocer el objeto matemático función, puedo hacerlo a partir de su gráfica en el plano cartesiano, a partir de las relaciones entre las variables en su representación tabular o a partir de su representación algebraica. Son diferentes medios visuales que nos permiten conocer más e identificar los objetos matemáticos.

2.2.2.4. Rutinas.

Las *rutinas* son patrones repetitivos que se observan en las acciones que hacen los participantes del *discurso* cuando realizan tareas matemáticas. Estos patrones repetitivos pueden observarse en cualquiera de las otras tres características; ya sea en el *uso de palabras*, los *mediadores visuales*, o siguiendo el proceso en las actividades y acciones que hacen los participantes en el proceso de creación de las *narrativas* de los objetos matemáticos. A decir verdad, las *rutinas* pueden identificarse en cualquier aspecto de los discursos matemáticos: en las formas matemáticas de argumentar, probar, definir, categorizar, etc.

Las *rutinas*, una vez definido el término metarreglas (ver el siguiente apartado) pueden también conceptualizarse como el conjunto de reglas meta-discursivas que describen acciones que hacen los participantes y que se repiten en el *discurso* (Sfard, 2008). Este conjunto de reglas meta-discursivas pueden situarse en un cómo y en un cuándo se realiza la *rutina*.

El cómo de una *rutina* se conceptualiza como el conjunto de reglas meta-discursivas que determinan y guían las acciones o los procedimientos que se deben hacer; el cuándo determina el conjunto de reglas meta-discursivas que restringen aquellas situaciones en las que el participante del *discurso* consideraría las acciones o los procedimientos que se hacen como apropiados. Por ejemplo; la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas nos da indicios de las acciones y los procedimientos que debemos hacer para resolver una ecuación cuadrática —el cómo de la rutina—; sin embargo, en muchos de los casos esta *rutina* suele hacerse tan deliberadamente que suele usarse en todos los casos de resolución de ecuaciones cuadráticas sin analizar que en algunos casos no es necesario —el analizar el cuándo de la *rutina*—.

2.2.2.5. Reglas del Discurso.

Al ser concebidas las matemáticas como un tipo especial del *discurso* (como un tipo de comunicación) éste deber estar regulado por ciertas reglas que Sfard (2008) ha identificado como reglas a nivel del objeto y reglas meta-discursivas.

Las reglas a nivel del objeto son afirmaciones que brindan información sobre las propiedades que cumplen los objetos matemáticos. En este sentido, las reglas a nivel del objeto pueden adoptar la forma de *narrativas* que describen propiedades de los objetos del *discurso*. Por ejemplo, la expresión “los ángulos alternos internos entre rectas paralelas que son cortadas por una recta secante son iguales” es una regla del *discurso* matemático a nivel del objeto porque brinda información sobre las características propias del objeto matemático ángulos alternos internos iguales.

Y las reglas meta-discursivas son patrones del comportamiento que se observan en las acciones o procesos que hacen los participantes —no del comportamiento de los objetos— cuando intentan producir y justificar las reglas a nivel del objeto. Por ejemplo, las acciones que pueden surgir en la forma en que los participantes prueban que efectivamente los ángulos alternos internos entre rectas paralelas que son cortadas por una secante son iguales son consideradas como reglas-meta-discursivas. O el enunciado que nos brinda información sobre cómo aplicar la ley asociativa de la multiplicación, es una regla meta-discursiva de la aritmética (Sfard, 2008).

2.2.3. Principios Teóricos

El principio fundamental de la teoría de Sfard está relacionado con el nombre que la identifica: comognición, fuertemente arraigado a las ideas del enfoque participativo mencionado anteriormente y por supuesto a las ideas no dualistas entre el pensamiento y la comunicación; ya que el pensamiento y la comunicación se consideran como uno solo, no como procesos separados donde la comunicación solo juega el papel de herramienta o medio por el cual expresamos lo que pensamos, sino que el pensamiento "deja de ser un proceso autosuficiente separado y, en cierto sentido, primario de cualquier acto de comunicación, para convertirse en un acto de comunicación en sí mismo […]" (Sfard, 2006, p.163).

Este principio que pretende ilustrar cómo se concibe el pensamiento, establece la idea de que pensar no es más que comunicarse con uno mismo, puesto que "la *comunicación interpersonal* es la actividad colectiva que se transforma en pensamiento a través del proceso de individualización[9]" (Sfard 2008, p. 81). Es decir, existe una actividad colectiva en la cual una persona se involucra y participa en ella, en este caso en la comunicación interpersonal, y luego la persona incorpora y transforma esta actividad internamente, es aquí entonces donde la comunicación se convierte en pensamiento. De hecho, si nos detenemos un poco, cuando nosotros pensamos se activa una comunicación intrapersonal donde nos informamos, nos hacemos preguntas, argumentamos y de alguna manera esperamos darnos respuesta a nosotros mismos (Sfard 2006, 2008).

Vale la pena mencionar que esta comunicación intrapersonal que se ha identificado como el pensamiento, no tiene que ser audible, visible, interna o verbal. Ni tampoco se quiere dar a entender que bajo esta teoría se busca establecer hechos empíricos sobre el pensamiento, solo se

[9] El término individualización, puede considerarse como una versión participativa de lo que Vygotsky identifica como la internalización (Sfard,2008)

busca encontrar una forma útil de hablar sobre el pensamiento, que en este caso es a través de la comunicación (Sfard 2006; 2008).

2.2.3.1. ¿Cómo se Concibe el Aprendizaje?

Teniendo en cuenta cómo se caracteriza la teoría de Sfard y bajo el principio básico por el cual se fundamenta, entonces se puede afirmar que pensar en matemáticas y aprender matemáticas significa e implica al menos dos cosas: por un lado, participar en un *discurso* históricamente desarrollado y conocido como matemático para convertirse en miembro de una comunidad matemática, y por otro lado, significa que a través de la participación de este *discurso* y de la individualización del mismo, el participante sea capaz de tener una comunicación matemática con otros y con sí mismo (Sfard 2006; 2020a). Esto realza nuevamente las ideas del enfoque participativo de que el aprendizaje individual se origina en la comunicación con los demás.

En este sentido, cuando una persona se involucra en la iniciación del *discurso* matemático, aún no tiene un dominio de este *discurso*, y si bien se busca que el participante lo domine hasta tal punto que logre tener una comunicación matemática asertiva, es evidente entonces que se debe mejorar tal participación y por tanto debe existir un cambio en el *discurso* del participante para que se pueda evidenciar un aprendizaje. Esto nos lleva a considerar también que "el aprendizaje de las matemáticas es un cambio de *discurso*" (Sfard, 2008, p. 255). Este cambio se puede identificar a raíz de alguna variación en algunas de las cuatro características del *discurso* matemático anteriormente mencionadas: el *uso de palabras*, *narrativas*, *mediadores visuales* y *rutinas*.

Bajo esta conceptualización del aprendizaje como un cambio de *discurso*, Sfard (2008; 2012) identifica dos tipos de aprendizaje, uno a nivel del objeto y otro a nivel meta.

El **aprendizaje a nivel del objeto** implica que hay una ampliación en el *discurso* existente de los que participan en el *discurso*: hay un nuevo uso de palabras, hay nuevas *narrativas* avaladas de los objetos matemáticos, se amplía el uso y la identificación de *mediadores visuales* por los cuales se identifican los objetos matemáticos y se crean nuevas *rutinas*. Por ejemplo, cuando el objeto matemático protagonista son las funciones, a medida que se amplían los ejemplos de las familias de funciones aparecen nuevas propiedades; nuevos *usos de palabras*; diferentes *mediadores visuales* como el grafico, el tabular, etc., y se crean nuevas *rutinas*. Esto amplia el *discurso* de los estudiantes sobre funciones y por tanto hay un aprendizaje a nivel del objeto.

El **aprendizaje a nivel meta** implica cambios en las reglas meta-discursivas del *discurso*; por ejemplo, cuando se conocen las reglas meta-discursivas para operar en el conjunto de los números naturales y se introduce el conjunto de los números enteros o el de los racionales, implica que algunas reglas que se tenían para operar ya no son válidas en este nuevo objeto matemático, como el hecho de concebir que el producto de dos números es mayor a los dos factores. Esto implica que se deben pasar por alto algunas de las *narrativas* que fueron previamente avaladas, por lo tanto, debe haber un cambio en las reglas meta-discursivas que surgieron anteriormente.

Capítulo 3.
Elementos Metodológicos

La realización de un proyecto de investigación lleva consigo la toma de decisiones metodológicas para llevar a cabo acciones o procedimientos implicados en cada una de las etapas de una investigación, decisiones que van desde la elección de un marco teórico como lente para analizar los datos, la población de estudio, el proceso de recogida de datos y la gestión y análisis de los mismos, entre otros (Torres-Corrales, López-Acosta y Montiel, 2020).

Por tanto, en este capítulo se pretende describir cada una de las acciones que se hicieron para el desarrollo y fundamentación de esta investigación: desde la descripción de los instrumentos utilizados para el diseño de las actividades, las características de la población, el procedimiento de análisis realizado, que todos en conjunto conforman el método de esta investigación, y la especificación del tipo de estudio que caracteriza a esta investigación.

3.1. Tipo de Estudio

El principal objetivo de nuestra investigación es caracterizar y describir cómo se desarrolla el proceso de definir cuando estudiantes de secundaria son participes en la construcción de definiciones de conceptos geométricos propios de la geometría espacial, y este objetivo se espera llevar a cabo bajo la exploración y descripción de las diferentes acciones, actividades y formas en que los participantes experimentan la *práctica matemática de definir*. Es por esto por lo que enmarcamos nuestro estudio, de manera general, desde el punto de vista de Hernández et al. (2014) bajo un enfoque cualitativo; ya que los autores consideran que los enfoques cualitativos son elegidos cuando el propósito se relaciona con examinar cómo los participantes perciben, comprenden y experimentan un determinado fenómeno, que en nuestro caso es la *práctica matemática de definir.*

Más específicamente caracterizamos nuestra investigación, desde el punto de vista de Hernández et al. (2014) y Steffe y Thompson (2000), como un tipo de estudio exploratorio/descriptivo. Exploratorio en el sentido de que queremos abordar nuestra problemática desde una nueva perspectiva; ya que evidenciamos en nuestra revisión bibliográfica que nuestro foco sobre la *práctica matemática definir* no ha sido estudiada desde el punto de vista del *análisis del discurso* de estudiantes de secundaria, además, no sabemos a profundidad cómo estudiantes de secundaria definen, qué acciones realizan en este proceso, cómo se caracterizan las definiciones que construyen desde el punto de vista matemático y menos aun cuando se trata de definir conceptos geométricos con los que ellos no estén familiarizados. Esto concuerda con lo mencionado por Steffe y Thompson (2000) al considerar la necesidad de hacer, previamente a un experimento de enseñanza y un diseño de actividades, un proceso al que llaman enseñanza exploratoria con el fin de obtener información y familiarizarse sobre lo modos y formas de operar de los participantes en una determinada actividad matemática, en nuestro caso sobre la *práctica matemática de definir*.

Y, consideramos nuestra investigación de tipo descriptiva en el sentido de que se quiere especificar detalladamente todo lo que implica el proceso de construcción de definiciones y profundizar en cómo se caracterizan y cómo se manifiestan cada uno de los *aspectos de la práctica matemática de definir*.

3.2. Método

Hernández et al. (2014) menciona que la descripción del método de una investigación incluye: una descripción de los participantes; la descripción del contexto en el que se llevó a cabo la investigación, en el que se describe el lugar en el que se llevó a cabo, los tiempos, los accesos y permisos, etc.; una descripción de los procedimientos efectuados para realizar la investigación, en la que se detallan las formas de recolección de los datos y el tratamiento para el análisis de los mismos. Estos son algunos de los aspectos que describimos a continuación.

3.2.1. Características de los Participantes y Contexto inmerso de la Investigación

Considerando que nuestra revisión bibliográfica nos llevó a identificar la poca investigación que hay sobre la caracterización de la *práctica matemática de definir* en estudiantes de secundaria, esto nos llevó a la búsqueda de participantes cuyo nivel de escolaridad estuviera bajo esta norma.

Debido a la finalidad del estudio como exploratorio se considera la participación de pocos estudiantes: seis estudiantes colombianos entre los trece y los quince años, particularmente dos de trece años que identificaremos como estudiantes cinco y seis —en adelante E5 y E6—, uno de catorce años que identificaremos como estudiante tres —en adelante E3—, y tres estudiantes de quince años identificados como estudiantes uno, dos y cuatro —en adelante E1, E2 y E4—. El nivel de escolaridad de cada uno de ellos varía entre primero y tercero de secundaria y provienen de diferentes instituciones educativas públicas.

Teniendo en cuenta esta caracterización, la investigación se llevó a cabo bajo un escenario extra-clase, no en un aula convencional, en el que se contaban con los recursos y espacios necesarios y suficientes para la implementación de las actividades. Además, contamos con la participación de alguien externo quien manejaba la cámara en las respectivas grabaciones de las sesiones realizadas.

Además, y considerando la edad de los participantes, se redactó una carta de autorización (ver anexo 2) dirigida a los padres de familia para aprobar la participación de sus hijos en esta investigación. En la carta también se autoriza el manejo del registro escrito, fotográfico y de video de los participantes, aclarando que este manejo se hace bajo las normas éticas del manejo de datos personales en el campo de la investigación.

3.2.2. Diseño de las Actividades e Instrumentos Utilizados

Una vez realizada la revisión bibliográfica, la identificación del problema de investigación y la delimitación del mismo y de haber tomado una postura teórica, se procedió al diseño de las actividades, las cuales se organizaron en tres fases (ver *Figura 7*) cada una de las cuales describiremos a más detalle.

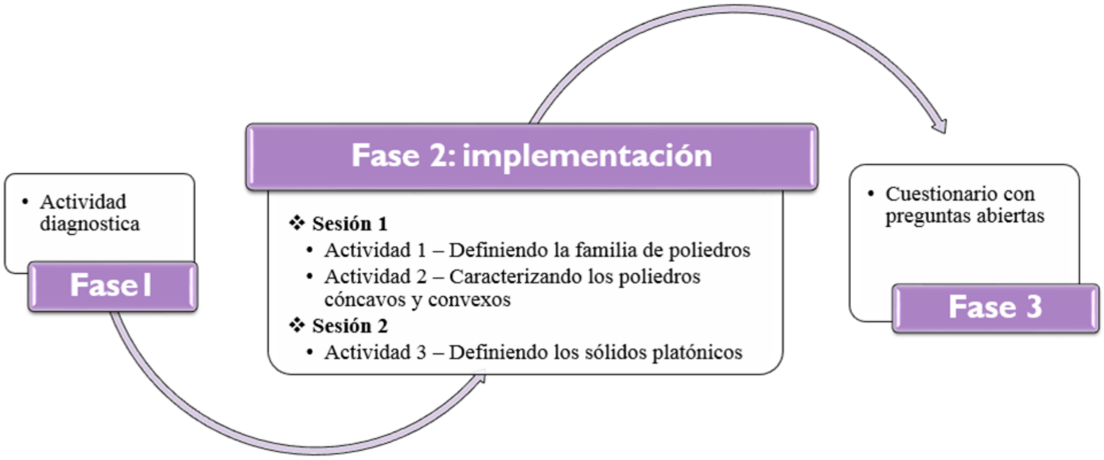


Figura 7. Fases del diseño e implementación de las actividades. Elaboración propia

3.2.2.1. Fase 1: Actividad Diagnostica.

.

El diseño de una actividad diagnostica (ver anexo 3) se realizó, en primera medida, con el fin de identificar el conocimiento que tenían los participantes en cuanto a la caracterización de los sólidos geométricos y los elementos que los componen —caras, aristas, vértices y diagonales—, conocimientos que creíamos eran claves para el desarrollo de las actividades en la fase de implementación y que considerábamos, desde nuestra experiencia docente y desde lo referentes curriculares, son conocimientos que los participantes debían tener pues, de acuerdo a lo estipulado por el referente curricular de Estándares Básicos de Competencia Matemática[10] Colombianos (MEN, 2006), los participantes de este estudio han desarrollado temas de geometría espacial que comprenden de manera general y en relación a nuestro interés:

- La identificación y descripción de figuras tridimensionales;
- la comparación y clasificación de figuras tridimensionales de acuerdo con sus elementos, como caras y aristas, y sus propiedades;

[10] Es un referente curricular colombiano en el que se estipulan y establecen los criterios básicos de educación que permiten conocer a lo que tienen derecho y lo que deben saber los estudiantes en los diferentes niveles educativos desde primaría hasta secundaria.

- y la construcción de objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales.

En segunda medida, y en concordancia con una de nuestras preguntas de investigación, el diseño de la actividad diagnostica se realizó con el fin de identificar aquellos sólidos geométricos con los que los participantes no estuvieran familiarizados; pues, como lo mencionamos en el apartado de delimitación del problema del capítulo uno, consideramos importante esto para evitar que las definiciones dadas de los participantes fueran un producto de recordar las definiciones que previamente les fueron impartidas y así lograr caracterizar el proceso de construcción de definiciones con todo lo que ello implica.

El diseño de la primera versión de la actividad diagnostica estuvo a revisión de la profesora/investigadora y de quién asesora esta investigación. Esta revisión se llevó a cabo con el fin de evaluar la claridad de los enunciados, la pertinencia de las preguntas que se plantean y de las representaciones planas de las figuras tridimensionales que se proponen. La revisión condujo a la versión final de la actividad diagnostica en las que se realizaron algunos cambios con respecto a la redacción de algunos de los enunciados y se cambiaron algunas de las representaciones planas que se tenían de varias figuras tridimensionales, pues al principio en algunas de ellas no se alcanzaba a percibir que las figuras eran tridimensionales.

Ahora, teniendo en cuenta los objetivos principales del diseño de la actividad diagnostica, esta se divide en dos partes:

- La primera parte —ítems uno y dos (ver anexo 3) — se propone con el fin de abordar nuestro primer objetivo, particularmente el ítem uno con el fin de evidenciar, para el caso de la primera pregunta, si los estudiantes identifican y diferencian las figuras tridimensionales de las bidimensionales, y, para el caso de la segunda pregunta, si los estudiantes identifican cuáles son las caras de un sólido geométrico. El segundo ítem se propone con el objeto de identificar si lo estudiantes reconocen en una figura tridimensional qué elementos de la figura representan los vértices, las aristas y las diagonales.
- La segunda parte —ítems tres, cuatro cinco y seis (ver anexo 3) — se propone con el fin de identificar posibles familias de sólidos geométricos con las que los

participantes no estén familiarizados. Específicamente el ítem tres se propone para identificar si los estudiantes reconocen y diferencian las características de la familia de poliedros y conocen su definición; los ítems cuatro y cinco para identificar si conocen la familia de poliedros cóncavos y convexos, los diferencian y conocen su definición, y en el ítem seis se propone una lista de figuras geométricas tridimensionales para evidenciar cuáles de estas reconocen y definen, entre las que están: prismas, pirámides, antiprismas y algunos sólidos platónicos.

3.2.2.2. Fase 2: Implementación de las Actividades.

Teniendo en cuenta los resultados de la actividad diagnostica (ver primer apartado del capítulo 4), identificamos tres conjuntos de familias de sólidos geométricos con los que la mayoría de los participantes no estaban familiarizados: la familia de poliedros, poliedros cóncavos y convexos y los sólidos platónicos; por lo que las actividades implementadas se diseñaron con el fin de propiciar que los estudiantes definan cada una de estas familias de sólidos geométricos. Además, la elección de estas tres familias de sólidos geométricos también fue influenciada por el hecho de que identificamos una oportunidad en ellas para evidenciar si los estudiantes realizan relaciones sistemáticas entre ellas: los sólidos platónicos son un subconjunto de la familia de poliedros convexos, y los poliedros cóncavos y convexos son subconjuntos de la familia de sólidos geométricos que son poliedros.

Vale la pena mencionar que, aunque si bien la base de las actividades realizadas en la fase dos de la implementación ilustradas en la *Figura 7* dependían en gran parte de los resultados de la actividad diagnostica, ya se tenía previsto algunos elementos del diseño y algunas familias de poliedros a definir, como los poliedros cóncavos y los sólidos platónicos, antes de la aplicación de la actividad diagnostica. Esto debido a que, según algunos antecedentes que mencionamos en el primer capítulo, no es común que en el nivel de educación secundaria se trabaje, por ejemplo, con poliedros cóncavos, y, además, evidenciamos que los sólidos más comunes en estos niveles educativos son los prismas, las pirámides, el cilindro y el cono.

Cada una de las actividades diseñadas pretenden promover que los participantes definan diferentes conjuntos de sólidos geométricos, sin embargo, las tres actividades tienen varios elementos en común que se describen a continuación.

Primero, y en concordancia con nuestro problema de investigación y respaldado bajo las afirmaciones de diferentes investigadores que afirman la importancia de que los estudiantes construyan sus propias definiciones y participen en el proceso de lo que identificamos como *práctica matemática de definir*, consideramos como parte importante del diseño de las actividades: un papel activo donde los estudiantes son los protagonistas del desarrollo de la *práctica matemática de definir*. Esto también concuerda con el supuesto teórico de Sfard (2008) de que el desarrollo del aprendizaje matemático se da bajo la participación de prácticas discursivas matemáticas.

Segundo, el uso de diferentes *mediadores visuales* para cada una de las tres actividades a desarrollar —representaciones planas de sólidos, uso de software dinámico y representaciones tridimensionales con el uso material concreto—pues es una de nuestras herramientas teóricas a analizar en el *discurso* de los participantes y quizás, a partir de su respectivo análisis, identificar posibles ventajas o desventajas que ofrecen cada uno de los distintos mediadores visuales.

Tercero, también consideramos, tomando algunas resultados de investigaciones que describimos en nuestra revisión bibliográfica (Alvarado y González, 2016; Kobiela y Lehrer, 2015; Okazaki, 2013; Tanguay y Grenier, 2010), la importancia de tener en cuenta la construcción y evaluación del uso de ejemplos y no-ejemplos como un elemento importante en el diseño de las tres actividades, ya que según estos investigadores el uso de dicho elemento se considera un recurso didáctico que contribuye en el proceso de construcción y comprensión de las definiciones, en la medida que ayuda a extraer las características propias de los objetos a definir y fomentan un rico debate.

Un último elemento en común en las actividades implementadas en la fase dos se relaciona con el proceder del profesor/investigador y que está altamente influenciado por lo que mencionan Kobiela y Lehrer (2015) en cuanto a considerar que el profesor es quien: invita a los estudiantes a participar en la construcción de definiciones, hace preguntas que sirven para ampliar el *discurso* matemático de los participantes, modela la participación en los diferentes *aspectos de la práctica* *matemática de definir*, propone los ejemplos y no-ejemplos que crean competencia, y además, el profesor es quien fomenta que se presente un debate matemático rico sobre las formas, sus atributos y propiedades (Clements, Sarama, Swaminathan, Weber, Trawick-Smith, 2018).

Teniendo en cuenta estos elementos que son el común denominador en el diseño de las actividades a implementar; la descripción a detalle del material utilizado, las hojas de trabajo y las tareas realizadas en cada una de las tres actividades se describen a continuación.

3.2.2.2.1. Sesión 1.

Como ya se mencionó, se diseñaron tres actividades con el fin de que los participantes caractericen y definan tres familias de sólidos geométricos: los poliedros, los poliedros cóncavos y convexos y los sólidos platónicos; en la primera sesión de la implementación las actividades se relacionaban con las dos primeras familias de sólidos mencionadas. La descripción de cada una de las actividades, el material utilizado, las tareas propuestas y el tiempo empleado para cada una de las actividades se mencionan en la Tabla 1.

Es de mencionar que la primera actividad a realizar en esta sesión fue la socialización de la solución, por parte de los participantes, de los primeros ítems de la actividad diagnostica, debido a las diferentes respuestas encontradas (ver el primer apartado del capítulo 4).

Tabla 1. Tareas a desarrollar en la sesión 1. Elaboración propia.

Actividad	Material	Tareas propuestas	Tiempo
1 Discusión de la actividad diagnostica previamente desarrollada por los participantes	✓ Televisor para proyectar la actividad diagnostica	Se socializa y se discute la solución presentada por los participantes en el ítem uno y dos de la actividad diagnostica con el fin de aclarar algunas dudas con respecto a las características y elementos de figuras tridimensionales	13 minutos
2	✓ Hoja de trabajo 1 (ver anexo 4)	**T1:** Observar ejemplos y no-ejemplos de poliedros a partir de su representación plana (figuras dadas en la hoja de trabajo)	15 minutos

¿qué es un poliedro?	✓ Televisor como medio para proyectar	**T2:** Identificar similitudes y diferencias de las figuras mostradas y escribirlas en una tabla dada en la hoja de trabajo	
		T3: Escribir una definición para los poliedros	
		T4: Socializar lo trabajado hasta el momento	8 minutos
		T5: Evaluar ejemplos y no-ejemplos de poliedros (ver figuras propuestas en el anexo 5)	6 minutos
3 Definiendo los poliedros cóncavos	✓ Hoja de trabajo 2 (ver anexo 6) ✓ Laptops para el trabajo con el software dinámico GeoGebra ✓ Televisor como medio para proyectar	**T1:** Explorar y observar los ejemplos de poliedros cóncavos: https://www.geogebra.org/m/w55cwaj2 y no-ejemplos de poliedros cóncavos: https://www.geogebra.org/m/pkjwqkqg representados en GeoGebra	18 minutos
		T2: Identificar similitudes y diferencias de las figuras mostradas y escribirlas en la tabla dada en el ítem 1 de la hoja de trabajo	
		T3: Socializar lo trabajado hasta el momento	13 minutos
		T4: Escribir una definición para los poliedros cóncavos	3 minutos
		T5: Evaluar ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos: https://www.geogebra.org/m/mzt3fuam y escribir su justificación en la tabla dada del ítem 2 de la hoja de trabajo	12 minutos

Vale la pena mencionar que las tareas uno, dos y tres de la actividad dos, y las tareas uno, dos, cuatro y cinco de la actividad tres se desarrollaron por subgrupos de trabajo. Se conformaron tres subgrupos, cada uno de dos integrantes. El resto de las tareas se desarrollaron y discutieron frente a todo el grupo.

Es de resaltar que para la actividad tres se consideró el uso del software dinámico GeoGebra como principal mediador visual ya que en diferentes investigaciones (Sinclair y Moss, 2012; Ng y Sinclair, 2015; Dogruer y Akyuz, 2020) se resalta su potencial en la visualización, particularmente la que respecta a la geometría espacial. Drogruer y Akyuz (2020), por ejemplo, resaltan la importancia que tuvo el uso de GeoGebra en su investigación pues apoyó a la comprensión conceptual de las figuras tridimensionales, los estudiantes pudieron interactuar con las figuras y observarlas desde diferentes puntos de vista, y, además, permitió que los estudiantes tomaran conciencia de las propiedades de las figuras tridimensiones que, según los autores, son difíciles de observar.

3.2.2.2.2. Sesión 2.

Para esta sesión en particular la familia de sólidos geométricos a definir corresponde a los sólidos platónicos. La descripción de cómo se llevado a cabo la sesión, el material utilizado, las tareas propuestas y la forma de trabajo se describe a continuación.

Material.

Guillen (2000; 2004) menciona que las experiencias con material concreto y representaciones físicas de sólidos geométricos les permite a los estudiantes fijar su atención en las características de los elementos que la componen y las relaciones entre estos: la forma y número de caras que componen el sólido, el número de aristas y vértices que lo componen, encontrar relaciones como el número de caras que se juntan en un vértice, etc. Además, menciona que el uso del material concreto también facilita el proceso de construcción de ejemplos de familias de sólidos.

Teniendo en cuenta lo mencionado en el párrafo anterior, las actividades propuestas para esta sesión se desarrollaron mediante el uso de un material concreto en particular. Este material fue elaborado por el profesor/investigador — en base a algunas ideas propuestas en trabajos como Guillen (1997) y Reseteo (2017)— con las siguientes características.

Se construyeron a base de cartulina de distintos colores polígonos regulares de tres, cuatro y cinco lados, todos ellos con lados de la misma longitud para que puedan unirse, y algunos polígonos irregulares (ver Figura 8). El total de polígonos construidos y sus respectivas características fueron:

- 120 triángulos equiláteros;

- 36 cuadrados;
- 45 pentágonos regulares;
- 48 triángulos isósceles de ángulos 36°, 72° y 72°, donde el lado menor tiene la misma longitud que el lado de los polígonos regulares;
- 24 rectángulos, donde sus lados tienen las longitudes de los lados de longitud mayor de los triángulos isósceles y de los polígonos regulares;
- 36 rombos de ángulos 72°, 108°.

Además, cada polígono se encuentra bordeado por pestañas que permiten unir dos polígonos, la unión de estos polígonos se realiza con el uso de ligas de caucho (ver Figura 8) —que representan las respectivas aristas de un sólido geométrico—.

Figura 8. Material construido para las actividades de la sesión 2.

Como las actividades a desarrollar se realizaron en subgrupos de trabajo, a cada subgrupo se le entregó un paquete (ver Figura 9) que contenía 40 triángulos equiláteros, 12 cuadrados, 15 pentágonos, 26 triángulos isósceles, 12 rombos y 8 rectángulos, y un paquete que contenía las ligas de caucho.

Figura 9. Paquetes del material entregado para la sesión 2

Tareas propuestas.

Las actividades propuestas para esta sesión se basaron y adaptaron de la experimentación realizada por Lehrer y Curtis (2000) descrita en el apartado 1.1.3.2. del primer capítulo, ya que consideramos que su investigación condujo a un rico debate sobre la construcción de ejemplos y no-ejemplos de poliedros regulares para determinar sus características esenciales.

La esencia de la actividad también se basa en lo que propone Guillen (2005) al considerar que una manera para clasificar familias de sólidos es por medio de lo que ella llama clasificación por construcción; en la que se construyen los ejemplos de una familia particular a partir de algunas reglas de construcción o buscando los ejemplos que se parecen a otros, por ejemplo, cuando se solicita a los estudiantes que construyan sólidos cuyas caras sean polígonos regulares, puede llevar a la construcción y caracterización de los poliedros regulares.

La actividad propuesta para esta sesión consistió en que, con el material descrito en el apartado anterior, los participantes (por subgrupos) construyeran y caracterizaran la familia sólidos platónicos, también conocidos como poliedros regulares[11], a partir de la visualización de ejemplos y no-ejemplos. Para lograr esto se realizaron las siguientes acciones:

Primero, se les mostró a los participantes dos ejemplos de sólidos platónicos: el cubo y el tetraedro (ver Figura 10a), y tres no-ejemplos de los mismos: un prisma hexagonal para que los

[11] En este caso decidimos llamarlos sólidos platónicos en lugar de poliedros regulares porque quizás la palabra regular les podría dar pistas a los estudiantes sobre las características de los mismos.

participantes evidenciaran que, en los sólidos platónicos, todas las caras deben ser de la misma figura; una bipirámide pentagonal para centrar su atención en la regularidad de las aristas de los sólidos platónicos y el grado de cada vértice, y un tetraedro estrellado para evidenciar la convexidad característica de los sólidos platónicos (ver Figura 10b). Esto lo realizamos con el fin de que los participantes conjeturarán sobre posibles características de los sólidos platónicos —las primeras reglas de construcción a las que hace mención Guillen (2005)— y así descubrir los otros tres sólidos: el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

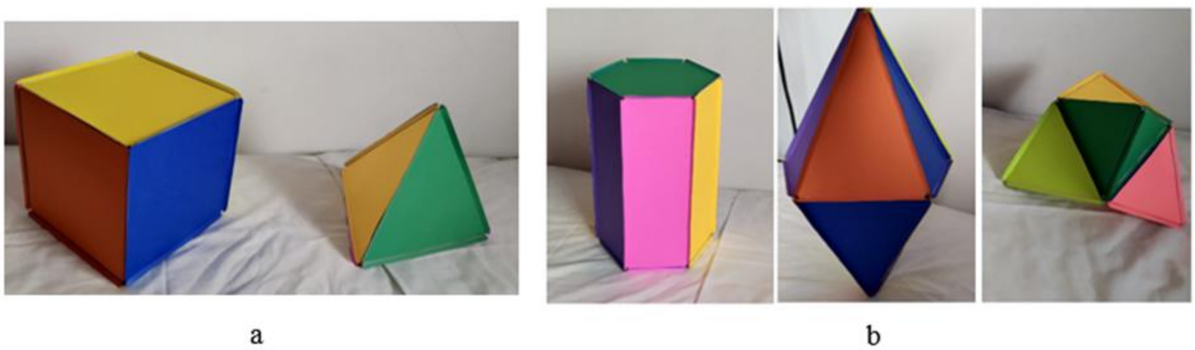


Figura 10. Ejemplos y no-ejemplos mostrados como sólidos platónicos

Segundo, se les solicitó a los estudiantes que construyeran el cubo y el tetraedro para que se familiarizaran con el material entregado.

Luego, a raíz de las primeras conjeturas que surgieron sobre las características de los sólidos platónicos, se les pidió a los estudiantes que encontraran los tres sólidos platónicos que faltaban. A medida que surgían las propuestas para los posibles candidatos, la profesora/investigadora les indicaba a los participantes si el candidato propuesto era o no un sólido platónico y los invitaba a reflexionaran sobre la información nueva que les daba cada candidato, y así lograr que los participantes perfeccionaran y encontraran las características que definen a los sólidos platónicos.

Por último, una vez construidos los cinco sólidos platónicos, se promovió una discusión, entre todos los participantes, para caracterizar y definir los sólidos platónicos.

3.2.2.3. Fase 3: Cuestionario.

Una vez desarrolladas las actividades de la fase dos, se procedió a realizar un cuestionario (ver anexo 7) en el que cada uno de los participantes, de manera individual, escribían una definición para cada una de las familias caracterizadas: poliedros, poliedros cóncavos y sólidos platónicos.

3.2.3. Procedimientos para el Análisis de los Datos

Considerando la idea de que el análisis de los datos en una investigación se realiza bajo la postura teórica que se adopta y teniendo en cuenta nuestro interés en caracterizar cómo se realiza y se desarrolla la *práctica matemática de definir* en estudiantes de secundaria; nuestra unidad de análisis centra su atención en el *discurso* de los participantes, tanto el verbal como el escrito. En palabras de Sfard (2020a) “los registros detallados de las interacciones multimodales y sus transcripciones meticulosamente preparadas constituyen el principal tipo de datos en la investigación comognitiva sobre el aprendizaje” (p. 97).

Es por esto por lo que los datos utilizados para nuestro análisis son las videograbaciones de cada una de las sesiones realizadas y la respectiva transcripción detallada de las discusiones presentadas, tanto a nivel grupal como de cada uno de los subgrupos formados, cuando se resuelven las tareas y las actividades propuestas en cada una de las sesiones. Además, consideramos las respuestas escritas consensuadas de los subgrupos en las hojas de trabajo uno y dos y el cuestionario final resuelto por los participantes.

La primera fuente de datos nos permite acceder a las discusiones que se llevaron a cabo durante el desarrollo de la *práctica matemática de definir* y así identificar, a raíz de las herramientas teóricas, elementos importantes para caracterizar esta práctica matemática. Y la segunda fuente de datos nos permite caracterizar las definiciones consensuadas como el producto final de la *práctica matemática de definir*.

Estos datos, particularmente las transcripciones de las discusiones, se organizaron y sistematizaron de la siguiente manera.

3.2.3.1. Organización de las fuentes de datos.

Para nuestra primera fuente de análisis realizamos una transcripción detallada de las videograbaciones de las sesiones, se transcribieron en total 84 páginas en Word. Para estas transcripciones consideramos lo mencionado por Sfard (2020a, 2020b) y Heyd-Metzyuyanim, Morgan, Tang, Nachlieli, Sfard, Sinclair y Tabach, (2013) sobre los principios que hay que tener en cuenta cuando se trata de las transcripciones verbales y no verbales para analizar el *discurso*, los cuales son:

- *Principio de totalidad*: Cada una de las discusiones y acontecimientos estudiados deben registrarse y documentarse en su totalidad.
- *Principio de fidelidad verbal:* las transcripciones, en la medida de los posible, deben documentar las declaraciones de los participantes literalmente, deben ser lo más exactas y precisas posibles.
- *Principio de multimodalidad:* en las transcripciones también se debe documentar aspectos de las acciones no verbales de los participantes de la manera más rica y completa posible

Para la transcripción detallada de las grabaciones de video de las sesiones utilizamos un código de transcripción que detallamos en la Tabla 2.

Tabla 2. Código usado para la transcripción de las grabaciones del video de las sesiones. Elaboración propia

Códigos usados para el protocolo de transcripción	
Código	**Modo de uso**
P:	Intervención identificada por el profesor
E1, E2, E3, E4, E5, E6:	Intervención identificada por cada uno de los estudiantes
Todos:	Indica que los participantes al tiempo dieron respuesta a una pregunta
/	Indica una pausa mínima, menor a un segundo
(1’’)	Indica que hubo una pausa. El número dentro del paréntesis indica el lapso en segundos de lo que duró la pausa.
…	Indican que la última letra de la palabra que antepone los tres puntos se alarga un poco. Por ejemplo, en expresiones como ahhhh, mmmm se escribe ah…, m… respectivamente.
[…]	Indica que se omitió un fragmento de las intervenciones que se consideran no relevantes

< >	Indica que las intervenciones se superponen, cuando un participante interrumpe la intervención de otro o hablan al mismo tiempo. Lo que menciona el participante que interrumpe se pone entre < >
(( ))	Los paréntesis dobles contienen comentarios o descripciones de los investigadores de las acciones que están haciendo los participantes

3.2.3.2. Análisis de los datos.

Una vez transcritas las videograbaciones y sistematizadas las respuestas escritas en las hojas de trabajo, procedimos al análisis de los datos, los cuales se realizaron en dos etapas que ilustramos en la Figura 11 .

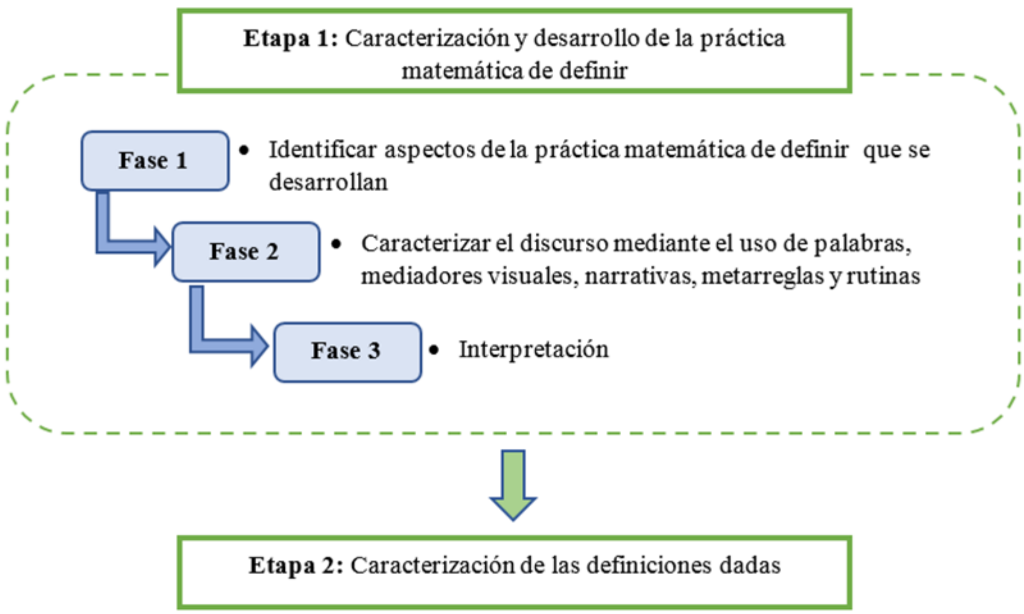


Figura 11. Etapas del análisis de los datos. Elaboración propia

3.2.3.2.1. Etapa 1.

Con el fin de desarrollar la primera etapa de nuestro análisis para caracterizar la participación y el desarrollo de la *práctica matemática de definir*, en un primer momento, identificamos en cada una de las tres actividades propuestas episodios en los que se promoviera o desarrollara algún aspecto de la *práctica matemática de definir* que describimos en el capítulo de elementos teóricos. Para ello usamos algunos indicadores, ilustrados en la Tabla 3, que nos permitieron identificarlos.

Tabla 3. Indicadores para identificar aspectos de la práctica matemática de definir. Adaptada y basada en Kobiela y Lehrer (2015

Aspecto de la práctica matemática de definir	**Indicador**
Construir o evaluar ejemplos y no-ejemplos	✓ Los participantes construyen ejemplos de la familia de sólidos que se define. ✓ Los participantes evalúan ejemplos y no-ejemplos para determinar si pertenecen o no a la familia particular de sólidos que se define
Describir propiedades o relaciones	Los participantes describen de manera verbal o escrita propiedades y relaciones de las familias de sólidos o de un caso particular de las familias
Construir explicaciones o argumentos de definiciones	Los participantes justifican algunas de las siguientes acciones: ✓ La inclusión o exclusión de una definición ✓ La relevancia de una propiedad o relación observada ✓ La aceptación o el rechazo de un ejemplo de la familia de sólidos que se define
Proponer una definición	Los participantes proponen una definición
Revisar las definiciones	Los participantes añaden propiedades, eliminan propiedades o modifican una definición
Establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas	✓ Los participantes consideran las relaciones existentes entre cada una de las familias que se definen u otras clases de familias generales. ✓ Los participantes elaboran una definición jerárquica
Hacer preguntas de definición	Los participantes hacen preguntas sobre las propiedades, relaciones o ejemplos de las familias de sólidos que se definen
Negociar criterios para juzgar la adecuación o aceptabilidad de la definición	Los participantes negocian con otros participantes qué características deben tener las definiciones para considerarlas adecuadas o no

El considerar identificar los aspectos de la *práctica matemática de definir* para nuestro análisis se fundamenta bajo lo que mencionan Kobiela y Lehrer (2015): “el marco de los ocho aspectos de la práctica de la definición proporciona un marco analítico útil para investigar la participación de los estudiantes en la práctica de la definición" (p.450).

Una vez identificados los episodios en los que se estaba desarrollando un aspecto de la *práctica matemática de definir*, se analizaron, en cada uno de estos aspectos, las herramientas teóricas de la teoría de Sfard: el *uso de palabras*, las *narrativas*, *mediadores visuales*, y la identificación de secuencias de acciones repetidas por los estudiantes que nos permitían reconocer y analizar las *rutinas*; esto para caracterizar el *discurso* de los participantes.

Las herramientas teóricas mencionadas, se analizaron con ayuda del instrumento que ilustramos en la Tabla 4.

Tabla 4. Formato usado para las fases uno y dos del análisis en la etapa 1. Elaboración propia.

ACTIVIDAD ___

<table>
<tr><td colspan="4">Descripción:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Transcripción:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir</td></tr>
<tr><td>Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado</td><td colspan="3">¿Qué aspecto o aspectos de la práctica matemática de definir se idéntica y se desarrolla en el fragmento del discurso de los participantes anteriormente transcrito?</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Uso de palabras</td><td>¿qué palabras matemáticas se utilizan?</td><td>¿cómo las usan?</td><td>¿para qué las usan?</td></tr>
<tr><td></td><td>Se usan de manera correcta, incorrecta, con un uso de lenguaje coloquial …</td><td>El objetivo del uso de palabras. Por ejemplo: para caracterizar una figura particular</td></tr>
<tr><td>Narrativas</td><td>Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir</td><td colspan="2">Sobre las actividades o procesos que se hacen con o por los objetos geométricos</td></tr>
</table>

	¿Cuáles afirmaciones surgen sobre las propiedades, características o relaciones de los objetos geométricos que se definen?	¿surgen afirmaciones sobre las actividades que se hacen con los objetos a definir? Si es así, ¿cuáles *narrativas* surgen? Por ejemplo: considerar que definir es dar una lista de todas las características evidenciadas
Mediadores visuales	¿qué mediador o *mediadores visuales* utilizan los participantes para identificar el objeto geométrico del que se está hablando?	
Rutinas	¿Se evidencia alguna *rutina* realizada en las actividades y acciones realizadas por los participantes? Si es así, ¿qué secuencia de acciones repetidas hacen? ¿para qué las hacen?	
Fase 3 de análisis: Descripción / Interpretación		

Algunas de las preguntas que se plantean en la anterior tabla vienen de las investigaciones que reportamos en el apartado 1.1.4. del primer capítulo donde se analizaba el *discurso* de maestros en formación cuando definen diferentes prismas. Por ejemplo, en estas investigaciones se cuestionaron sobre cómo era el *uso de las palabras* de los maestros en formación y para qué las usaban; son estas algunas de las preguntas que planteamos en la tabla anterior.

La última fase de análisis consiste en hacer un análisis de tipo descriptivo/interpretativo que se realiza a raíz de las dos fases de análisis mencionadas en los párrafos anteriores.

3.2.3.2.2. Etapa 2.

Como la caracterización del proceso de construcción de definiciones por parte de los participantes no es completa si no analizamos las definiciones consensuadas por los participantes para cada una de las familias de sólidos geométricos que se esperaba definieran, desarrollamos una segunda etapa de análisis para caracterizar las definiciones en términos de lo mencionado en el apartado de 2.1.2 del segundo capítulo: si las definiciones son ambiguas, contradictorias, jerárquicas y si tienen las condiciones necesarias y suficientes. Este análisis se realiza con lo registrado por los participantes en las hojas de trabajo uno y dos y el cuestionario final.

Además, realizamos esta etapa de análisis para caracterizar particularmente uno de los *aspectos de la práctica matemática de definir*: *proponer una definición*, ya que, a través de las respuestas escritas, también podemos identificar regularidades que nos permitan caracterizar las *rutinas* y las *narrativas* de lo que los estudiantes consideran debe tener una definición y lo que es una definición.

El procedimiento de análisis desarrollado bajo estas dos etapas consideramos nos da una visión detallada de cómo nuestros estudiantes de secundaria construyen definiciones, participan en la *práctica matemática de definir* y cómo se desarrollan cada uno de los aspectos que implica llevar acabo esta práctica.

Capítulo 4.
Descripción y Análisis de los Datos

En el presente capítulo se presenta el análisis de los datos recogidos, para cada una de las tres actividades implementadas, que nos permitieron obtener la información necesaria para dar respuestas a nuestras preguntas de investigación. Este análisis, tal y como lo mencionamos en la sección 3.4.3 del capítulo anterior, se dividió en dos etapas: la descripción y caracterización de cómo nuestros participantes desarrollaron y participaron en la *práctica matemática de definir* sólidos geométricos y la caracterización y análisis de las definiciones dadas por nuestros participantes. Por tanto, este capítulo expone los resultados del análisis realizado en cada una de estas etapas, no sin antes mencionar algunas generalidades de los resultados obtenidos en la actividad diagnostica; ya que, aunque si bien, la actividad diagnostica no es nuestro centro de análisis, creemos necesario aludir a algunos resultados obtenidos pues influyeron directamente en el diseño y la implementación de las actividades propuestas.

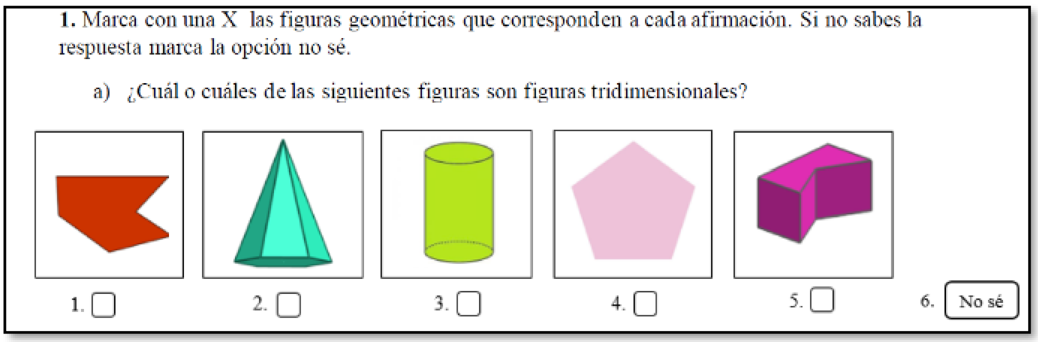
4.1. Generalidades de la Actividad Diagnostica

A continuación, mencionamos algunas generalidades de los resultados obtenidos en la actividad diagnostica en relación con los dos objetivos principales de esta: evidenciar si los participantes identificaban conceptos básicos de la geometría sólida, conceptos que considerábamos eran importantes para la implementación de las actividades posteriores, e identificar las familias de sólido geométricos con los que nuestros participantes no estuvieran familiarizados. Para la descripción de los resultados, se presentan las Tabla 5 y Tabla 6 en las que ilustramos algunos ejemplos de las respuestas dadas por los participantes en cada uno de los ítems de la actividad diagnostica y algunas observaciones generales de las mismas. En las observaciones que realizamos, traemos algunos fragmentos de conversación cuando socializamos las respuestas dadas por cada uno de los participantes y les cuestionamos sobre el porqué de sus respuestas.

4.1.1. En relación con el Primer Objetivo: Caracterización de los Sólidos Geométricos y los Elementos que los Componen

Tabla 5. Algunos resultados de los ítems 1 y 2 de la actividad diagnóstica

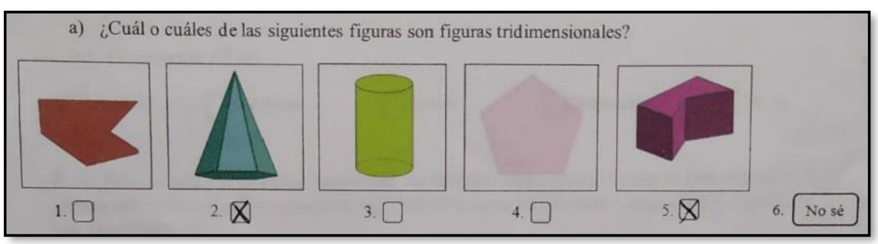
Ítem 1-a: Identificación de figuras tridimensionales


1. Marca con una X las figuras geométricas que corresponden a cada afirmación. Si no sabes la respuesta marca la opción no sé.

a) ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras son figuras tridimensionales?

1. ☐ 2. ☐ 3. ☐ 4. ☐ 5. ☐ 6. No sé

Observaciones: Los seis participantes logran identificar del conjunto de figuras geométricas dadas aquellas que son figuras tridimensionales; sin embargo, tres de los seis participantes no identifican el cilindro como una figura tridimensional, ya que se obtuvieron respuestas como la que se ilustra a continuación.


a) ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras son figuras tridimensionales?

1. ☐ 2. ☒ 3. ☐ 4. ☐ 5. ☒ 6. No sé

El haber obtenido este tipo de respuestas, quizás, se debe al tipo de representaciones planas que usamos para representar las figuras tridimensionales, particularmente al cilindro; ya que al cuestionarles a los participantes por qué no identificaron la figura tres como una figura tridimensional se obtuvieron respuestas como las que se ilustran en el siguiente fragmento de conversación:

[26] **P:** Entonces, quiero preguntarles a unos por qué no marcaron esta ((señala la figura tres del primer ítem)) como una figura tridimensional, ¿ustedes reconocen esa figura?, ¿la 3? (2’’)

[27] **Todos:** Es un cilindro

[28] **P:** Es un cilindro, ¿cierto? Entonces por qué no lo marcaron como figura tridimensional, ¿el cilindro es plano?

[29] **Todos:** No

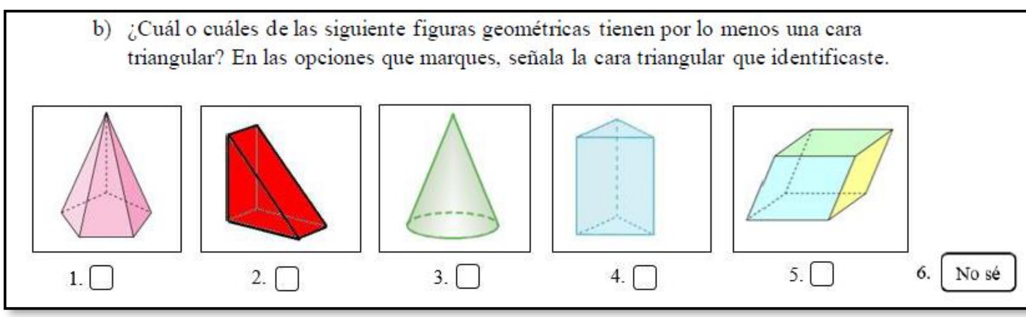
[30] **P:** Entonces, ¿por qué no lo marcaron?

[31] **E4:** Porque se veía como plano

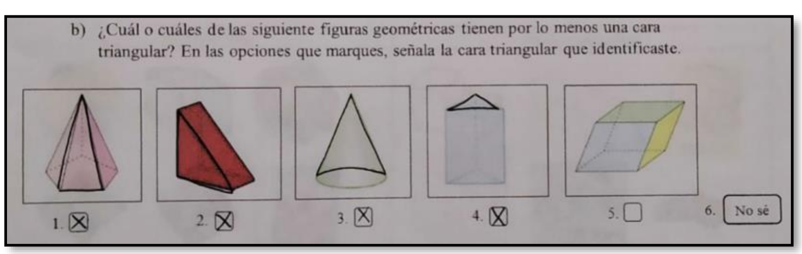
[32] **E5:** Sí…

Aquí se observa que a pesar de que los estudiantes identifican que la figura tres es un cilindro y que por lo tanto es tridimensional, se dejan llevar por la representación plana que representa al cilindro, ya que según ellos la figura se veía plana. Esto, según Gutiérrez (1998), se debe a que las representaciones bidimensionales que usualmente se usan para representar objetos tridimensionales no corresponden por completo a la realidad, y, además, algunas ocultan información importante para identificar y caracterizar la figura tridimensional que se está representando. En este caso la representación que usamos para el cilindro no fue la adecuada.

Ítem 1-b: 1.b. y 2. Identificación de los elementos que componen a un sólido geométrico



Observaciones: Con respecto al ítem 1-b, se identifica que los estudiantes logran distinguir cúales son las caras, particularmente aquellas que son triangulares, de algunos de los sólidos geométricos dados; sin embargo, tres de los seis estudiantes identifican una de las caras del cono como triangular, tal y como se ilustra en la siguiente imagen.



Al indagar sobre el porqué de las respuestas dadas se produjo la siguiente conversación:

[41] **P:** […] Entonces en este caso yo les pedía que identificaran una cara triangular y hubo varios que me marcaron la tres como que tenía una cara triangular ¿por qué? (3'')

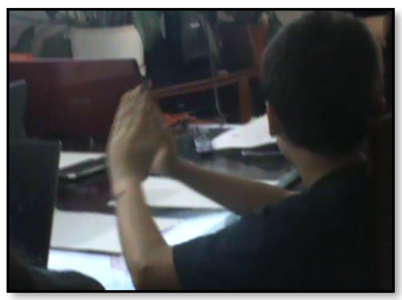
[42] **E5:** Por su forma <**E2:** Porque cuando está…> porque tiene forma de triángulo

[43] **E2:** Porque cuando está, si cuando está como la base, la base es un círculo / entonces la…/ se ve como si fuera triangular

[44] **E3:** Sí, parece un triángulo

[45] **E5:** Cuando se ve lateralmente se ve como un triángulo más si se ve por encima se ve como si fuera un círculo con un… así ((con sus manos hace una seña, ilustrada en la siguiente imagen)) como empuntado

((Después, E3 menciona que no se puede considerar que la cara sea triangular debido a que uno de sus lados es curvo))



Nuevamente se pone de manifiesto las dificultades que pueden traer consigo algunas de las representaciones bidimensionales que usamos para representar figuras tridimensionales, tal y como lo menciona Gutiérrez (1998): algunas representaciones bidimensionales de objetos geométricos tridimensionales pueden llegar a agregar información no relevante de estos; tal y como ocurrio en nuestro ejemplo, la representación plana utilizada para el cono llevó a la idea de que una de sus caras es triangular.

Con respecto al segundo ítem donde se buscaba identificar si los estudiantes reconocen elementos como vértices, aristas y diagonales en un cubo, se encontró que cinco de los seis estudiantes no identificaron cuáles son los vértices, las aristas y las diagonales de un determinado sólido geométrico, pues se obtuvieron respuestas de no sé a las preguntas correspondientes o respuestas incorrectas.

Debido a las diferentes respuestas que evidenciamos en esta primera parte de la actividad diagnostica, decidimos iniciar, en la primera sesión de implementación, con la socialización de los ítems que hasta aquí hemos estado mencionando para aclarar las dudas y confusiones que tenian nuestros participantes en cuanto a la identificación de los elementos (caras, aristas, vértices y diagonales) de los sólidos geométricos.

4.1.2. En Relación con el Segundo Objetivo: Identificación de Familias de Sólidos Geométricos Desconocidas por los Participantes

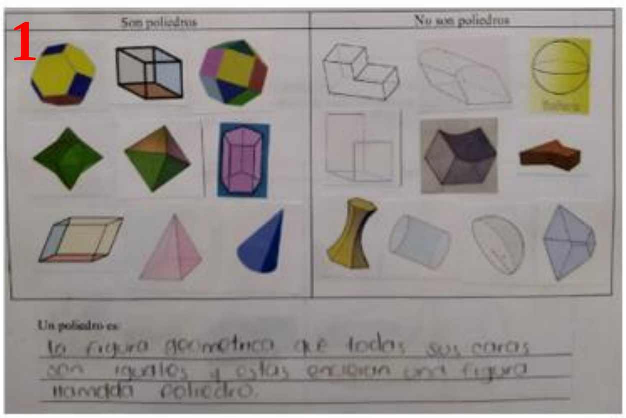
Tabla 6. Algunos resultados de los ítems 3, 4, 5 y 6 de la actividad diagnostica

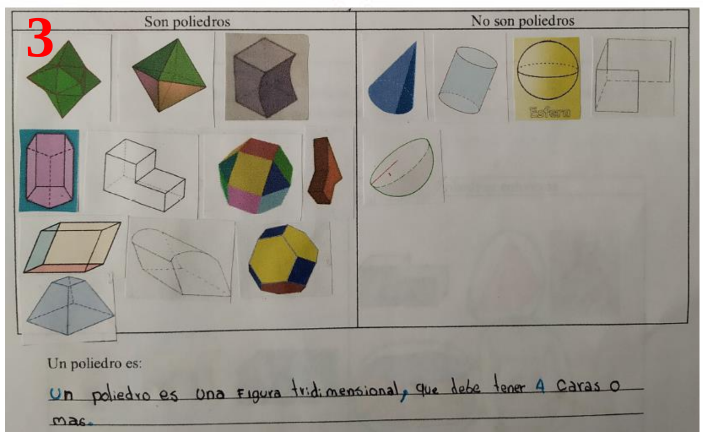
Ítem 3. Familia de poliedros
3. Al final de este cuestionario encontraras un recuadro con algunas figuras tridimensionales, recorta cada una de ellas y pégalas en la siguiente tabla según corresponda. Luego explica y escribe qué es un poliedro.

Son poliedros	No son poliedros

Un poliedro es:

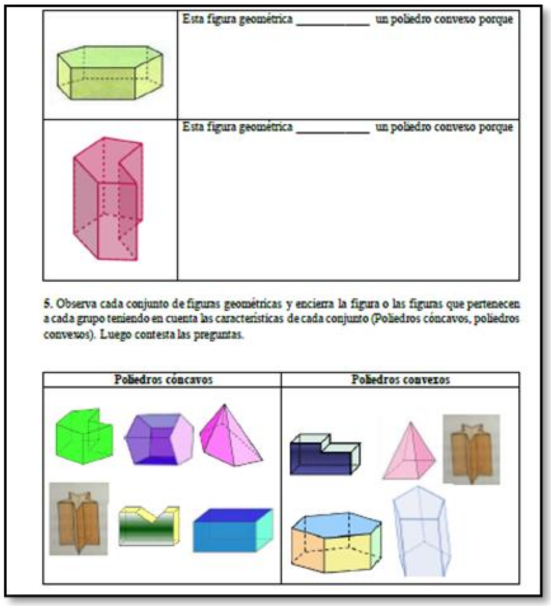
Observaciones: Con este ítem buscábamos identificar si los participantes reconocen y diferencian las características de la familia de poliedros y conocen su definición. Ante esto, encontramos que solo tres de los seis participantes dan respuesta a la actividad planteada, tal y como se ilustra a continuación.





Sin embargo, en las respuestas dadas por los tres participantes se evidencia que no reconocen las propiedades que caracterizan a los poliedros; sus respuestas fueron un intento por encontrar características comunes entre todas las figuras dadas y luego clasificarlas como poliedros, de acuerdo con las características que evidenciaban. Por ejemplo, en la imagen 3, el participante encuentra una característica en común: figuras que tienen cuatro caras o más, de acuerdo con esta característica el participante clasifica el conjunto de figuras dadas y determina que un poliedro es "una figura tridimensional que debe tener 4 caras o más". Al igual ocurre en lo ilustrado en la imagen uno y dos, en la imagen dos, por ejemplo, el participante encuentra como característica común: figuras que tienen caras planas; así, el participante clasifica el conjunto de figuras dadas y determina que para él un poliedro es "una figura donde sus caras son planas"

Ítem 4 y 5. Poliedros cóncavos y convexos



Esta figura geométrica ___________ un poliedro convexo porque

Esta figura geométrica ___________ un poliedro convexo porque

5. Observa cada conjunto de figuras geométricas y encierra la figura o las figuras que pertenecen a cada grupo teniendo en cuenta las características de cada conjunto (Poliedros cóncavos, poliedros convexos). Luego contesta las preguntas.

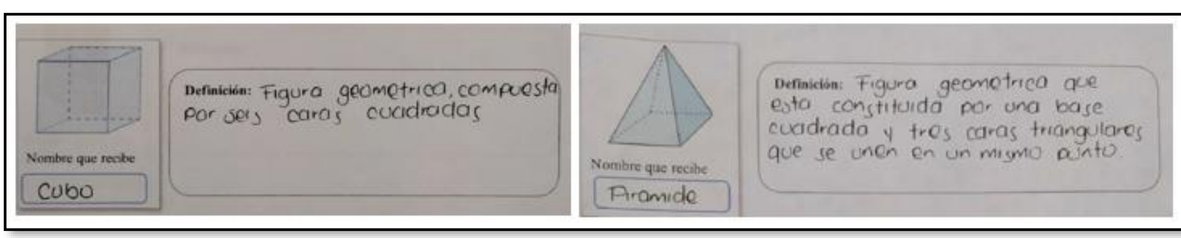
Poliedros cóncavos	Poliedros convexos

Observaciones: Con estos ítems buscábamos identificar si los participantes conocen la familia de poliedros cóncavos y convexos, los diferencian y conocen su definición. Ante esto, encontramos que los participantes no identifican lo que caracteriza a un poliedro como convexo o cóncavo; ya que cuatro de los seis estudiantes manifestaron no saber cómo resolver estos puntos y los otros dos dieron respuestas incorrectas.

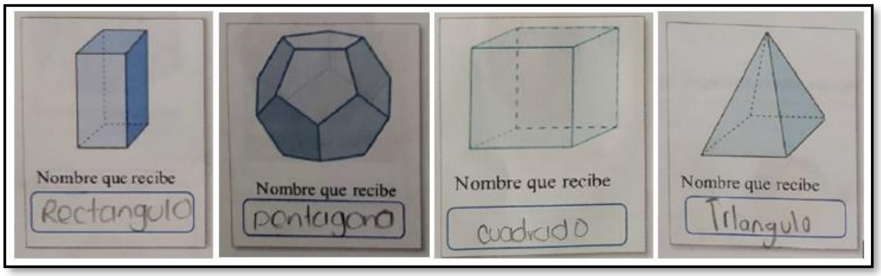
Ítem 6. Identificación de algunos sólidos geométricos

Observaciones: En este ítem presentamos una lista de figuras geométricas tridimensionales para evidenciar cuáles de estas los participantes logran reconocer y definir, entre las que están: prismas, pirámides, antiprismas y algunos sólidos platónicos. Ante esto, identificamos varios hechos importantes.

Primero, los únicos sólidos que logran reconocer la mayoría de los participantes son el cubo y la pirámide, pues cinco de los seis estudiantes logran identificarlas y solo dos de ellos dan una definición, caracterizándolas de acuerdo con la forma y número de sus caras (ver la siguiente imagen). El resto de las figuras no logran identificarlas, a excepción de uno de los estudiantes quien también identifica el prisma, el dodecaedro y el icosaedro.



Segundo, es de resaltar que algunos de los participantes usan un vocabulario característico de figuras geométricas planas para nombrar algunos sólidos geométricos. Por ejemplo, en la siguiente imagen se ilustra cómo algunos de los participantes identifican un prisma, el dodecaedro, el cubo y la pirámide como rectángulo, pentágono, cuadrado y triángulo, respectivamente.



Teniendo en cuenta los resultados mencionados en la Tabla 6, identificamos tres familias de sólidos geométricos que los participantes no lograron reconocer: la familia de poliedros, los poliedros cóncavos y convexos y algunos sólidos platónicos; conjuntos de familias a definir en cada una de las actividades propuestas en las dos sesiones implementadas y que se analizan a continuación.

4.2. Etapa 1 de Análisis: Descripción, Caracterización y Desarrollo de la Práctica Matemática de Definir

Los procedimientos de análisis que realizamos y describimos en el apartado 3.4.3 del anterior capítulo nos permitieron caracterizar cada uno de los *aspectos de la práctica matemática de definir* en términos de las herramientas teóricas, con el fin de describir y detallar que, durante el desarrollo de cada una de las actividades, los estudiantes participan en diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir* que dan cuenta de cómo se desarrolla está práctica y cómo se caracteriza en nuestra población de estudio.

El análisis que nos lleva a la identificación, descripción y caracterización del desarrollo de la *práctica matemática de definir* la realizamos para cada una de las tres actividades propuestas, y la sistematización de cada una de las tres fases de análisis realizadas: (1) identificación de *aspectos de las práctica matemática de definir* con ayuda de los indicadores de la Tabla 3 del capítulo anterior, (2) análisis del *discurso* de los participantes para caracterizar dichos aspectos a partir de las herramientas teóricas y (3) un análisis descriptivo/interpretativo a raíz de las dos fases de análisis anteriores, se hacen utilizando el instrumento de análisis de la Tabla 4 expuesta en el capítulo anterior.

Vale la pena mencionar que este proceso de análisis se realiza varias veces, en diferentes momentos del desarrollo de cada actividad, pues en cada una de las actividades identificamos varios *aspectos de la práctica matemática de definir* y para cada uno de ellos realizamos el proceso de análisis mencionado.

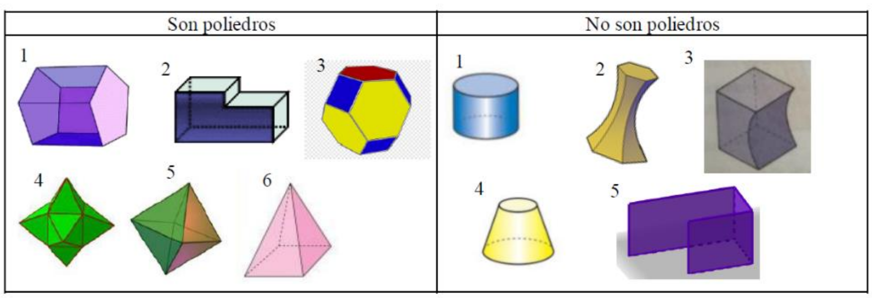
4.2.1. Primera Actividad: ¿Qué es un Poliedro?

Recordemos que esta actividad se realizó por subgrupos de trabajo, se formaron tres subgrupos, a cada uno de ellos se les entregó la hoja de trabajo 1 (ver anexo 4) con el fin de que definieran la familia de poliedros. El análisis lo realizamos para cada uno de los subgrupos; sin embargo, en el análisis que describimos a continuación solo mencionamos las discusiones de uno de los grupos (no siempre el mismo) para ilustrar, como evidencia empírica, los hallazgos encontrados. El análisis de los otros subgrupos se encuentra en los anexos.

Tabla 7. Análisis uno de la primera actividad

ACTIVIDAD 1 - IDENTIFICANDO SIMILITUDES Y DIFERENCIAS

Descripción: Como ya mencionamos, la actividad uno tiene como fin que los participantes definan y caractericen la familia de poliedros a partir de la observación de los siguientes ejemplos y no-ejemplos de poliedros, identificando similitudes y diferencias entre estos.



Al inicio de la actividad surgen discusiones entre los integrantes de cada subgrupo, como las que se transcriben a continuación.

***Transcripción*:**

Grupo 1: E1 y E2

[103] **E1:** Yo digo que aquí ((señala algunas de las caras de las figuras que representan los que son poliedros)) las **figuras son como planas**

[104] **E2:** Ah… sí, pero eso es una similitud.

[105] **E1:** Por eso

[106] **E2:** Pero mira es que yo también estaba pensando, que era (2') es que mira **las caras** son de la misma **figura** ((señalando las figuras cuatro y cinco de las que sí son poliedros)) ¿sí? pero si ve que acá esta

cara ((señala la cara frontal de la segunda figura mostrada como ejemplo de poliedros)) no es **igual** a esta ((señala la cara superior de la misma figura)) <**E1:** no> pero entonces no se (3'')

[107] **E1:** Pues coloquémosla ¿no?

[108] **E2:** Pero ¿Qué pongo? […] la similitud es que todas tienen **caras** ((risas))

[109] **E1:** Pues sí ((ponen una primera similitud))

[110] **E1:** Pon que son **figuras tridimensionales** ((ponen una segunda similitud)) […]

[111] **E2:** ¿Y las diferencias? (4") ((se quedan observando las figuras)), ah… sí mira, la diferencia es que esto **es curvo** ((señala la figura dos de lo que no son poliedros)) y estas no ((haciendo referencia a las figuras que son poliedros))

[112] **E1:** Pero y acá ((señala la figura cinco de los que no son poliedros)) también no son **curvas** (3'') ah… ya sé, la diferencia es que… o no sé / que **están encerradas**, ósea esta no **está encerrada** ((señala la figura cinco de los que no son poliedros))

[113] **E2:** Que forman una... no porque estas ((señala el resto de figuras que no son poliedros)) sí **están encerradas** ósea forman una **figura…** mm… no sé […] O mirar **las aristas**, es que yo también estaba diciendo que no todas las **figuras** tiene las mismas **figuras iguales**, las **caras iguales**, pero / no sé porque si ve que acá / no, no sé, ósea como que sí, pero digamos que en esta **figura** ((señala la figura seis de los que sí son poliedros)) **la base es cuadrada** y la… y las estas son **triangulares**_entonces no, pero digamos en esta sí y en esta igual ((señala las figuras cuatro y cinco de los que sí son poliedros)) porque los **triángulos** forman una **figura** y en esta igual, todos sus **triángulos** forman una **figura** entonces no sé.

<table>
<tr><th colspan="4">Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir</th></tr>
<tr><td>Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado</td><td colspan="3">- Describir propiedades
- Construir explicaciones o argumentos</td></tr>
<tr><th colspan="4">Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Uso de palabras</td><td>¿qué palabras matemáticas se utilizan?</td><td>¿cómo las usan?</td><td>¿para qué las usan?</td></tr>
<tr><td>- Figuras tridimensionales
- Figuras planas
- Figuras encerradas
- Igual
- Curvas
- Caras
- Aristas
- Base cuadrada
- Triángulos</td><td>Se usan de manera correcta; sin embargo, algunas palabras se usan con un significado distinto, por ejemplo, el uso de la palabra "figuras" se usa tanto para mencionar en un sentido holístico sobre las figuras tridimensionales como para mencionar sus caras.</td><td>- Para caracterizar los ejemplos y no-ejemplos de poliedros de acuerdo con las características de sus elementos (caras y aristas)

- Para comparar los elementos (caras y aristas) de cada figura dada en la hoja de trabajo</td></tr>
<tr><td>Narrativas</td><td colspan="2">Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos</td><td>Sobre las actividades o procesos que se hacen con o por los objetos geométricos</td></tr>
</table>

	Surgen las siguientes afirmaciones de las propiedades tanto de los ejemplos como no-ejemplos: - Tanto los poliedros como los no poliedros son figuras tridimensionales - Las figuras, haciendo referencia a las caras de los que sí son poliedros, son planas - En algunos casos las caras son de la misma figura - Las caras de los no poliedros son curvas - Algunas figuras están encerradas	Sí surgen afirmaciones sobre la actividad que se está haciendo con los objetos geométricos (identificando similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos). En este caso los participantes consideran que una propiedad observada en los no-ejemplos se debe cumplir en todos los no-ejemplos.
Mediadores visuales	Los *mediadores visuales* utilizados e identificados en el *discurso* de los participantes son las figuras geométricas dadas como ejemplos y no-ejemplos de poliedros en la hoja de trabajo, centrando su atención a elementos específicos de los mismos	
Rutinas	Sí se evidencia una *rutina* en el *discurso* de los estudiantes relacionado con el proceso de identificar propiedades relevantes de los ejemplos y no-ejemplos dados. Esta *rutina* consiste en realizar las siguientes acciones: - Mirar las figuras dadas en la hoja de trabajo - Identificar una característica relevante en una de las figuras - Y comparar si otras figuras comparten esta característica. Estas acciones se hacen para determinar similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos dados de la familia de poliedros y por tanto *describir propiedades* de estos.	

Fase 3 de análisis

En la Tabla 7 identificamos dos *aspectos de la práctica matemática de definir* que nuestros participantes están desarrollando los cuales caracterizamos y analizamos a partir de las herramientas teóricas: *uso de palabras*, *las narrativas* que surgieron, los *mediadores visuales* utilizados y las *rutinas*; los cuales explicamos a continuación.

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

En el protocolo de transcripción, ilustrado en la tabla anterior, particularmente en las líneas 103, 106, 108 y 110-112, se evidencia que el primer *aspecto de la práctica matemática de definir* que los participantes desarrollan al enfrentarse a la actividad planteada es el que se refiere a la *descripción de propiedades*; ya que los estudiantes mencionan algunas características que ellos consideran relevantes de la familia de poliedros: son figuras planas, haciendo referencias a las caras de los poliedros; sus aristas son rectas; son figuras tridimensionales y, en algunos poliedros, las formas de sus caras son iguales. Además, en la línea 113 de la transcripción, también se puede evidenciar que los estudiantes *describen propiedades*, particularmente las de la figura seis dada como ejemplo de poliedro, pues mencionan propiedades como: tiene una base cuadrada y sus otras caras son triangulares.

El desarrollo de este *aspecto de la práctica matemática de definir —describir propiedades*— también se identificó en el *discurso* de los otros dos grupos, los cuales se analizan en el anexo 8.

Por último, identificamos, particularmente en las líneas de transcripción 111-113, que los estudiantes desarrollan el aspecto *construir explicaciones o argumentos* particularmente para justificar la relevancia de una relación o características observada, pues E2 justifica el porqué del rechazo de aceptar como característica relevante que los poliedros no tienen caras curvas o están encerrados, ya que en los no-ejemplos E2 identifica que hay sólidos que, o bien están encerrados, o bien no tienen caras curvas. Este aspecto se desarrolló al tiempo que los estudiantes *describen propiedades.*

En cuanto a las herramientas teóricas

Mediadores visuales

En el capítulo dos mencionamos que los *mediadores visuales* son considerados como lo medios por los cuales los participantes del *discurso* identifican los objetos de los que se está hablando y coordinan su comunicación. En este caso las figuras dadas como ejemplos y no-ejemplos en la hoja de trabajo son el principal *mediador visual* que utilizan los participantes para identificar la familia de poliedros y poder así hacer declaraciones sobre dicha familia, pues constantemente en su *discurso* hacen alusión a las figuras dadas para coordinar lo que mencionan de cada una de las figuras, ver por ejemplo líneas 103, 106, 111, 112 y 113 de la transcripción, donde constantemente señalan las figuras al tiempo que discuten sobre las características de cada una de ellas.

Uso de palabras

En la Tabla 7 listamos diferentes palabras que resaltamos durante la transcripción de la discusión de los estudiantes, palabras que identificamos se usan para dos fines y que se encuentran fuertemente relacionadas con el desarrollo de uno de los *aspectos de la práctica matemática de definir* que identificamos —*describir propiedades*—; pues uno de los objetivos del *uso de palabras* es caracterizar tanto los ejemplos como los no-ejemplos de poliedros *describiendo algunas propiedades*, por ejemplo, cuando E1 y E2 usan la palabra "figura encerrada" para caracterizar a los poliedros, o cuando los estudiantes utilizan las palabras "planas" y "curvas" para caracterizar un elemento particular de los poliedros, en este caso las caras o las aristas.

Otro de los objetivos del *uso de palabras* es comparar elementos como caras y aristas entre las diferentes figuras geométricas dadas, por ejemplo, en la línea de transcripción 111 se usa la palabra "curvo" para mencionar que algunos no-ejemplos de poliedros tienen caras curvas en comparación con las figuras que representan los que sí son poliedros, esto también lo hacen los estudiantes para *describir propiedades.*

También identificamos que algunos *usos de las palabras* se utilizan con significados distintos, como lo es el caso de la palabra "figura" que como se evidencia en las líneas de transcripción 103 y 106 se hace referencia a la forma de las caras, mientras que en las líneas 110 y 113 se usa la palabra "figura" para referirse a todo el sólido geométrico como tal. Otra palabra que encontramos se usa con significados distintos es la palabra "lados" que en el análisis del resto de los subgrupos (ver anexo 8) se usa para referirse tanto a las caras de los poliedros como a sus aristas, así como se evidencia en el siguiente protocolo.

[153] **P:** Y de diferencias ¿qué han visto?

[154] **E3:** Que los que no son poliedros ((señala una de las aristas de la figura dos de los que nos son poliedros)) tiene como **lados** con curvas y los que sí son ((señala las figuras que sí son poliedros)) no tienen

[…]

[160] **E3:** Que los poliedros tienen caras rectas ¿no?

[161] **E4:** No, que…digamos que… no todos los **lados** ((haciendo referencia a las caras)) son iguales, eso es una similitud ¿no?

[162] **E3:** Mm… ((acentúa con la cabeza que sí))

[163] **E4:** Osea, acá no es un cuadrado ((señala una de las caras triangulares de la figura seis de los que son poliedros)) (1'') las caras no tienen la misma…

[164] **E3:** Osea, no todas las caras no son iguales, no todas las caras son iguales

Narrativas

Era de esperarse que, una vez identificado el aspecto *describir propiedades*, sí surgieran *narrativas* en el *discurso* de los participantes en las que se hicieran afirmaciones sobre propiedades, características o relaciones de la familia de poliedros, *narrativas* que describimos en la Tabla 7 y que fueron constantemente evaluadas por los estudiantes para decidir si aceptar o no una afirmación dada, como lo que se ilustra en las líneas de transcripción 111-113 en las que se evalúan la aceptación o el rechazo de considerar los poliedros como figuras encerradas y sin caras curvas.

Sin embargo, las *narrativas* que surgieron en relación con la actividad que se estaba realizando en el momento con los objetos geométricos—identificar similitudes y diferencias entre ejemplos y no-ejemplos de poliedros— llaman nuestra atención, pues E1 y E2 consideran que una característica observada en los no-ejemplos, para diferenciarlos de los ejemplos, debe ser común a todos los no-ejemplos, tal y como ocurre en la discusión presentada en las líneas 111-113 cuando E1 menciona que una diferencia es que los no-ejemplos tienen caras curvas y no están encerrados, pero E2 rechaza su afirmación al mencionar que la figura cinco de los no-ejemplos no tiene caras curvas y el resto de los no-ejemplos sí están encerrados. Esta *narrativa* también se identificó en otro subgrupo de trabajo integrado por E3 y E4, tal y como se ilustra en el siguiente protocolo:

[200] **P:** Acá ((señalando las figuras de las que son poliedros)) ¿las aristas cómo son?
[201] **E3:** Rectas
[202] **P:** Aja, ¡exacto!
[…]
[205] **E3:** No porque aquí digamos, aquí tiene aristas rectas ((señala las aristas rectas de la figura dos de los que no son poliedros))
[206] **P:** Sí, pero entonces puede tener aristas rectas, pero mira que esta tiene por lo menos una, tiene dos, no todas las tiene rectas
[207] **E3:** Pero ésta ((señala la figura cinco de los que no son poliedros)) no tiene ninguna arista curva
[208] **P:** No, pero entonces qué es lo que hace que esta figura no sea poliedro
[209] **E3:** Ah… que no esté completa / pero creo que esa ya la habíamos dicho

Las líneas 205 y 207 ponen en manifiesto el hecho de que los estudiantes consideran que todos los no-ejemplos de poliedros deben compartir una característica en común o que los no-ejemplos no deben compartir ninguna característica con los ejemplos que representan a los poliedros.

<u>*Rutinas*</u>

Al analizar el *uso de palabras* cómo las usan y para qué las usan, *las narrativas y los mediadores visuales* identificamos una secuencia de acciones repetitivas que realizan los estudiantes para desarrollar el *aspecto de la práctica matemática de definir: describir propiedades*. Esta secuencia de acciones se percibe en el *discurso* de E1 y E2 varias veces, lo que nos lleva a identificarlas como una *rutina* de los estudiantes que consiste en realizar lo siguiente: mirar las figuras; identificar características relevantes en sus elementos: caras y aristas curvas, caras iguales, caras planas y figuras encerradas, y evaluar si otras figuras comparten la característica relevante observada, comparando constantemente las figuras dadas. Este conjunto de acciones se hace para determinar las similitudes y diferencias de los ejemplos y no-ejemplos de poliedros.

Esta *rutina* también se identificó en el *discurso* de los otros dos grupos, los cuales se analizan en el anexo 8.

Hasta aquí hemos caracterizado dos principales *aspectos de la práctica matemática de definir* que desarrollaron los participantes: *describir propiedades* y *construir explicaciones o argumentos*, este último refleja algunas de las justificaciones de los estudiantes para argumentar la relevancia de una propiedad observada. Sin embargo, en el transcurso de la actividad, los estudiantes participaron y desarrollaron más aspectos, como los que se analizan a continuación.

Tabla 8. Análisis dos de la primera actividad

ACTIVIDAD 1 – DANDO UNA DEFINICIÓN DE POLIEDROS

***Descripción*:** Una vez que los estudiantes identificaron algunas similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos de poliedros, proceden a discutir cómo caracterizar y definir la familia de poliedros, un ejemplo de las discusiones presentadas para este momento se transcribe en las líneas 135-145.
***Transcripción*:** [135] **E1:** ¡Listo! dejamos así, ahora la definición [136] **E2:** Yo ya había pensado en una definición de que es una **figura** (2'') lo que estábamos diciendo <**E1:** Donde sus **caras**> sus **caras son planas** y **encierran una figura** [137] **E1:** Uish… tremenda definición ((empiezan a discutir cómo escribir la definición correspondiente))

[138] **E1:** Digamos aquí que <**E2:** Es una **figura geométrica tridimensional**> **sí**, sí ((escriben una primera parte de la definición)) […]

[139] **E1:** Y es aquella en donde todas sus **caras son planas y encierran una figura**

[140] **E2:** ((el estudiante dos repite lo que ha escrito en la definición hasta el momento)) **Una figura geométrica tridimensional**, es aquella en donde todas **sus caras son planas y encierran una figura**… mm… como tal

[141] **E1:** Y encierran una **figura**… <**E2:** Encierran…su figura> una **figura tridimensional**

[142] **E2:** No porque estaríamos diciendo lo mismo, si ves que acá ((señala la figura cinco de los que no son poliedros)) dijimos que esta no estaba encerrada, entonces ¿cómo decimos que forman una f**igura encerrada**? Que ¿**encierran una figura**, la dejamos así?

[143] **E1:** Eh… sí (2’’) que forman una figura ¿no?

[144] **E2:** No, que encierran porque… <**E1:** Ah… sí, sí, sí> esta, ésta es una **figura** ((señala la figura cinco de los que no son **poliedros)**) pero no está **cerrada**

[145] **E1:** Bueno sí ((empiezan a terminar de escribir la definición))

Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir

Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado	- Describir propiedades - Hacer preguntas de definición - Construir explicaciones o argumentos - Negociar criterios para juzgar la adecuación o aceptabilidad de la definición

Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso

	¿qué palabras matemáticas se utilizan?	**¿cómo las usan?**	**¿para qué las usan?**
Uso de palabras	- Figura geométrica tridimensional - Poliedros - Caras planas - Figura cerrada o encerrada	Las palabras las usan de manera correcta	- Se usan para caracterizar la familia de poliedros y algunos de sus elementos - Para referirse a un conjunto de figuras geométricas particular, por ejemplo: los que sí son **poliedros** o los que no son **poliedros**

	Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir	**Sobre las actividades que se hacen con o por los objetos geométricos**
Narrativas	Surgen *narrativas* relacionadas con algunas características de los poliedros, características como: - Son figuras tridimensionales - Tienen caras planas - Son figuras que están encerradas o forman una figura como tal.	Sí surgen afirmaciones sobre la actividad que se está haciendo con los objetos geométricos (definirlos). En este caso los participantes consideran que para definir deben listar todas las propiedades relevantes identificadas previamente

Mediadores visuales	Nuevamente los *mediadores visuales* utilizados e identificados en el *discurso* de los participantes son las figuras geométricas dadas como ejemplos y no-ejemplos de poliedros en la hoja de trabajo.
Rutinas	No se identifica un conjunto de acciones repetitivas en el hacer de los participantes que nos lleve a establecer una *rutina*

Fase 3 de análisis

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

En la primera fase de análisis descrita en la Tabla 8 identificamos en el *discurso* de los participantes cuatro *aspectos de la práctica matemática de definir* que se están desarrollando: (1) *describiendo propiedades,* (2) *hacer preguntas de definición,* (3) *construir explicaciones o argumentos y* (4) *negociar criterios para juzgar la adecuación de una definición*. El primero de ellos era de esperarse que se manifestara debido a que E1 y E2 están discutiendo como plantear una definición para la familia de poliedros y por tanto deben *describir algunas propiedades* de los mismos.

Los últimos tres aspectos se encuentran relacionados en la medida en que cuando los estudiantes se cuestionan sobre cómo escribir que los poliedros, en palabras de los estudiantes, son figuras que están cerradas para referirse a que encierran un volumen finito, lleva a una discusión entre E1 y E2 en el que realizan un proceso de *negociación* donde dan *explicaciones y argumentos* para determinar la manera correcta de escribir e incluir una característica en la definición de la familia de poliedros, en este caso el cómo escribir que los poliedros deben ser figuras tridimensionales que encierran un volumen finito. La manifestación de estos tres *aspectos de la práctica matemática de definir* se evidencia en las líneas de transcripción 140-144.

Al respecto, el desarrollo de los aspectos *hacer preguntas de definición* y *construir explicaciones o argumentos* también se manifiesta en diferentes momentos de la realización de la actividad, como se evidencia en el siguiente protocolo, en el que se presenta una discusión entre todos los estudiantes cuando socializamos lo que habían realizado en la hoja de trabajo 1.

[333] **E2:** Pero ¿también existen poliedros que no tienen caras curvas o sí / o no?
[334] **E1:** No…

[335] **E2:** O ¿los que no son poliedros tienen que tener una cara curva para que no sean poliedros?
[334] **E5:** No, porque si no digamos la una no está curva
[335] **E4:** No porque esa ((señala la figura cinco de los que no son poliedros))
[336] **E3:** La cinco no tiene ninguna curva
[337] **P:** La uno sí tiene curva
[338] **E2:** Sí, la uno sí

En las líneas 333 y 335 se evidencia el aspecto *hacer preguntas de definición* pues E2 cuestiona sobre las características que pueden tener los sólidos que no son poliedros. El hecho que se manifieste este aspecto lleva consigo el desarrollo del aspecto *construir explicaciones o argumentos* pues por lo general una pregunta puede llevar a una justificación, así como ocurre en las líneas 334 y 335 en las que E5 y E4 justifican, teniendo en cuenta como *mediador visual* las figuras dadas como no-ejemplos, por qué no puede considerarse que todo no-ejemplo obligatoriamente deba tener una cara curva para considerarse como un no-ejemplo de poliedro, pues la figura 5 dada como no-ejemplo no tiene ninguna cara curva.

Esto nos lleva a reflexionar sobre que posiblemente el desarrollo de algunos *aspectos de la práctica matemática de definir* conduce al desarrollo de otros aspectos; tal y como ocurrió en este caso, el desarrollo del aspecto *hacer preguntas de definición* conduce al desarrollo de aspectos como *construir explicaciones o argumentos* y *negociar criterios para juzgar la adecuación de una definición.*

En cuanto a las herramientas teóricas

Debido a que el *uso de palabras, los mediadores visuales y la narrativas* que corresponden a las afirmaciones que se hacen de las características de la familia de poliedros son las mismas que analizamos en la Tabla 7 y que describimos a más detalle en la fase 3 de análisis de la misma, entonces solo mencionaremos lo que respecta a las *narrativas* que surgieron en cuanto a la actividad que se realizaba en el momento: definir los poliedros, que fue un resultado distinto identificado en el análisis del *discurso* de los estudiantes.

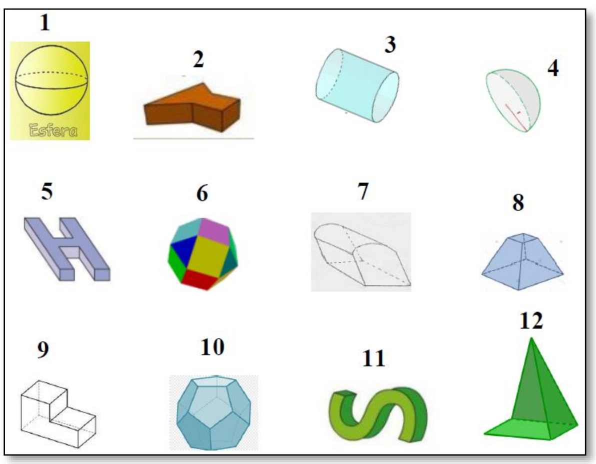
En un primero momento, tal y como lo mencionamos en el primer análisis de la actividad ilustrada en la Tabla 7, los estudiantes identificaron varias similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos de poliedros que los llevó a desarrollar el aspecto *describiendo* *propiedades*. Este conjunto de propiedades que identificaron los estudiantes previamente los lleva a considerar que para definir la familia de poliedros deben incluir todas las características identificadas, por tanto ellos consideran que definir es dar una lista de propiedades del objeto que se está definiendo, tal y como se evidencia en el protocolo de transcripción de la Tabla 8, pues los estudiantes listan las propiedades: figura tridimensional, tiene caras planas y está encerrada, para caracterizar a los poliedros.

Hasta aquí hemos discutido los diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir* que desarrollaron los participantes mientras observaban ejemplos y no-ejemplos de la familia de poliedros, identificaban similitudes y diferencias para establecer las características de los poliedros y así proponer una definición. Una vez que realizaron estas tareas se procedió a socializar lo que habían realizado cada subgrupo para luego evaluar algunos ejemplos y no-ejemplos de poliedros. Esto no llevó a la manifestación de los siguientes *aspectos de la práctica matemática de definir*.

Tabla 9. Análisis tres de la primera actividad

ACTIVIDAD 1 - EVALUANDO EJEMPLOS Y NO-EJEMPLOS

***Descripción*:** Los estudiantes se encuentran evaluando las siguientes figuras geométricas para decidir si pertenecen o no a la familia de poliedros.



Surge así la siguiente discusión entre los estudiantes.

***Transcripción*:**

[377] **P:** Listo, ¿la dos? Ustedes ((señala a los integrantes del grupo 2)) ¿es poliedro o no es poliedro))
[378] **E4:** No
[379] **E3:** Sí, sí es **poliedro**

[380] **E4:** No **es poliedro** […] ((Se presenta una confusión ya que el estudiante cuatro pensaba que se le estaba preguntando por la figura tres, por lo que una vez aclarado esto se continua con el siguiente fragmento))
[381] **E4:** Ah… pensé que hablaban de las tres, sí, sí es un **poliedro**
[382] **P:** ¿por qué?
[383] **E4:** Pues porque tiene… **es tridimensional** y pues… sí y no tiene **curvas las caras** ni nada
[384] **P:** ok, listo / ¿la tres? Estudiante dos y estudiante uno
[385] **E1:** Pues… no <**E2:** No es un **poliedro**>
[386] **P:** No es ¿por qué?
[387] **E1:** Porque… porque sus **aristas son curvas**
[388] **E2:** Aja, sí
[389] **P:** porque ¿qué?
[390] **E1:** Porque **sus aristas son curvas**
[391] **E2:** Porque tiene **cara curva**
[392] **P:** O en este caso la cara, que es una sola, la que encierra todo el cilindro no es <**E2: No es plana**> no es plana
[393] **E1: Es curva**
[…]
[401] **P:** Listo, ¿la cinco? / ¿sería poliedro?
[402] **Todos:** Sí
[403] **E5:** Porque **está encerrada** eh… y <**E3:** Tiene todas las **aristas rectas, es tridimensional**> <**E1:** Y… sus **caras son rectas, son planas son plana**s> no todos sus **lados son iguales**, pero… es poliedro
[…]
[406] **P:** ¿la siete? Estudiante cuatro
[407] **E4:** No, porque la parte de arriba es **curva**
[408] **P:** Y la parte de arriba ¿qué es? (3’’)
[409] **E1: El techo** ((todos se ríen))
[410] **P:** Pero a esto ((señala la cara superior de la figura siete a evaluar)) ¿cómo se le nombra?
[411] **E6:** Es una **cara** <**E2: Una cara** sí>
[412] **P:** Es una cara ¡exacto!
[…]
[418] **P:** ¿La once?
[419] **Todos:** No
[420] **E5:** No es **poliedro**
[421] **P:** No es un **poliedro** ¿por qué?
[422] **E3:** Porque tiene **aristas curvas**
[423] **E5:** Porque **está encorvado**, no tiene…< **E4:** ¿encorvado? > sus **lados rectos**
[424] **P:** ¿Sus lados?
[425] **E5:** Sus… <**E2 y E1:** Sus caras> sus caras, sus caras […] en la 12 sí, pues… parece un **cuadrado** si lo completamos todo.
[426] **E4:** No, no
[427] **E3:** ¿En la 12? No, ahí sería como **una pirámide**
[428] **E5:** Pero si, pero si lo miramos hacia arriba
[430] **P:** Pero entonces para ti ¿sería poliedro o no sería poliedro?
[431] **E5:** No, no sería **poliedro**
[432] **P: ¿**Por qué?
[433] **E5:** Porque no **está completada** eh… <**E3:** Y ya> **sus lados no son curvos** y …
[434] **E4:** Ya solo es por eso
[435] **E3:** No, porque solo es por eso, porque no **está completa**

<table>
<tr><th colspan="5">Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir</th></tr>
<tr><td>Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado</td><td colspan="4">- Evaluar ejemplos y no-ejemplos
- Describir propiedades
- Construir explicaciones o argumentos</td></tr>
<tr><th colspan="5">Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Uso de palabras</td><td>¿qué palabras matemáticas se utilizan?</td><td colspan="2">¿cómo las usan?</td><td>¿para qué las usan?</td></tr>
<tr><td>- Figura tridimensional
- Poliedro
- Caras curvas o planas
- Aristas curvas o rectas
- Lados encorvados, iguales o rectos
- Figura encerrada o completa
- Techo, para referirse a una cara
- Cuadrado y pirámide</td><td colspan="2">En su gran mayoría el uso de las palabras es correcta, sin embargo, algunas palabras como la palabra “techo” se usan de manera coloquial para referirse a las caras de los poliedros o el uso de la palabra “encorvado” para caracterizar la forma de las caras. El uso de la palabra “figura completa” también la podemos caracterizar como un uso coloquial para referirse específicamente a que los poliedros encierran un volumen finito.

Nuevamente el uso de la palabra lados se usa con dos significados distintos para referirse ya sea a las caras o las aristas de una figura particular.</td><td>- Para describir las propiedades que tiene un poliedro y determinar si una figura geométrica dada es o no un poliedro

- Para clasificar las figuras como un ejemplo particular de una familia de figuras geométricas. Por ejemplo, dentro de la familia de pirámides o poliedros

- Para nombras algunos elementos de los poliedros (caras y aristas)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Narrativas</td><td colspan="2">Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir</td><td colspan="2">Sobre las actividades que se hacen con o por los objetos geométricos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Surgen narrativas relacionadas con algunas características de los poliedros, características como:

- Son figuras tridimensionales
- Sus caras son planas
. Sus aristas son rectas
- Son figuras que están encerradas o completas</td><td colspan="2">No surgen afirmaciones sobre las actividades que se hacen con los objetos a definir</td></tr>
<tr><td>Mediadores visuales</td><td colspan="4">Los mediadores visuales utilizados e identificados en el discurso de los participantes son las figuras geométricas dadas para evaluarlas si son o no poliedros. Centrando la atención a las propiedades específicas de cada uno de sus elementos.</td></tr>
</table>

Rutinas	Sí se evidencia una *rutina* en el *discurso* de los estudiantes cuando evalúan ejemplos y no-ejemplos de poliedros. Esta *rutina* consiste en realizar las siguientes acciones: - Mirar el ejemplo o no-ejemplo - Identificar la o las características que lo hacen o no poliedro - Justificar a raíz de las características identificadas el por qué la figura observada es o no un poliedro Estas acciones se hacen para desarrollar el *aspecto de la práctica matemática de definir* referente a la *construcción y evaluación de ejemplo y no-ejemplos*.

Fase 3 de análisis

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

Tal y como describimos en la Tabla 9, se identificaron tres *aspectos de la práctica matemática de definir* que los participantes están desarrollando: (1) *evaluando ejemplos y no-ejemplos*, (2) *describiendo propiedades* y (3) *construir explicaciones o argumentos*. Los tres aspectos se encuentran fuertemente relacionados ya que los participantes al estar evaluando las figuras dadas para identificar si son o no poliedros, argumentan su decisión a partir de comparar las características que las figuras tienen en relación con las propiedades que definen a los poliedros. Esto lleva a los estudiantes a *describir propiedades* de los poliedros para *construir argumentos* sobre la *evaluación que hacen de los ejemplos y no-ejemplos*. Por ejemplo, en las líneas de transcripción 402 y 403 los estudiantes evalúan la figura cinco y determinan que sí es un poliedro a partir de una descripción de las características que hacen que la figura cinco sea un poliedro: porque es una figura tridimensional, está encerrada, sus aristas son rectas y sus caras son planas.

Es de mencionar que quizás otro *aspecto de la práctica matemática de definir* que los estudiantes están desarrollando es el que se relaciona con el proceso de *negociación de criterios para juzgar la adecuación de una definición*; sin embargo, no lo pusimos en la Tabla 9 porque la discusión que llevan los estudiantes, particularmente en las líneas 425-435, es de una índole distinta porque, si bien no se están negociando los criterios para juzgar una definición, sí se evidencia un proceso de negociación en el que se discute sobre los argumentos necesarios para justificar por qué una figura geométrica es un poliedro o por qué una figura puede clasificarse como un elemento de una clase de familia particular. Por ejemplo, en las líneas 431-435 E5 menciona que la figura doce no es poliedro a partir de la *descripción de las propiedades* que se deben cumplir: porque no está encerrada y porque no tiene caras curvas, mientras que E4 y E3 mencionan que basta con decir que la figura doce no es poliedro porque no está encerrada, sin necesidad de hacer una lista de todas las propiedades que cumple o no la figura doce para ser considerada como poliedro.

En cuanto a las herramientas teóricas

Mediadores visuales

El *mediador visual* identificado en el *discurso* de los participantes es en general las figuras dadas para evaluar como ejemplos y no-ejemplos, pues es a partir de la observación de las mismas que los estudiantes coordinan su *discurso* para determinar si son o no ejemplos de poliedros a partir de la identificación de las propiedades que cumplen.

Uso de palabras y narrativas

Juntamos estas dos herramientas teóricas porque determinamos que están relacionadas, pues el *uso de palabras*, tal y como lo mencionamos en la segunda fase de análisis de la Tabla 9, se usan para *describir propiedades* de los poliedros, que vienen siendo las *narrativas* que los estudiantes establecieron de las características que cumplen el objeto geométrico que ese está definiendo: la familia de poliedros. Por ejemplo, el *uso de palabras* como figura cerrada, caras planas y aristas curvas, los estudiantes las utilizan para enunciar *narrativas* de algunas de las características que tienen los poliedros y que enunciamos en la Tabla 9.

Por otro lado, se evidenció, nuevamente, que algunos *usos de palabras* se hacen con significados distintos y con usos coloquiales, como lo es el caso de la palabra "techo" utilizada por E1 en la línea de transcripción 409 para referirse a la cara superior de la figura siete dada como no-ejemplo, o como lo es el caso de del *uso de la palabra* "lado" usada por E5 en las líneas 403 y 423 para referirse constantemente a las aristas o caras de las figuras usadas como *mediador visual*. También llama la atención el uso de la expresión "figura completa" que nos indica un uso coloquial característico del discurso de los participantes para referirse a lo que formalmente conocemos como que los poliedros encierran un volumen finito.

<u>*Rutinas*</u>

Al analizar particularmente el *uso de palabras* cómo las usan y para qué las usan *y los mediadores visuales* identificamos una secuencia de acciones repetitivas que realizan los estudiantes para desarrollar los *aspectos de la práctica matemática de definir: evaluar ejemplos y no-ejemplos, describir propiedades y construir explicaciones y argumentos*. Esta secuencia de acciones se percibe varias veces en el *discurso* de los participantes, lo que nos permite identificarlas como una *rutina*. Esta *rutina* consiste en realizar las siguientes acciones: mirar las figuras, identificar la o las características que la hacen o no poliedro y a raíz de esta característica identificada justificar por qué la figura observada puede o no pertenecer a la familia de poliedros.

La *rutina* identificada se puede evidenciar en el *discurso* de la mayoría de los estudiantes, por ejemplo, en las líneas 401-403 los estudiantes identifican que la figura cinco es poliedro verificando que cumple con todas las condiciones que caracterizan a la familia de poliedros: es tridimensional, está encerrada y tiene sus aristas rectas, mientras que en las líneas 418-422 los estudiantes reconocen que la figura once no es poliedro porque no cumple la condición de que sus aristas deben ser rectas. Es decir, los estudiantes observan la figura cinco y once, identifican las características que las hacen o no poliedro y justifican por qué se su evaluación a raíz de las características que identificaron en dichas figuras geométricas.

La identificación de esta *rutina* pone de manifiesto que hay *aspectos de la práctica matemática de definir* que se manifiestan conjuntamente ya que el desarrollo de uno de los aspectos conlleva al otro, como lo es el caso de que la *evaluación de ejemplos y no-ejemplos* conlleva al desarrollo de los aspectos *describir propiedades* y *construir explicaciones y argumentos*.

4.2.1.1. Síntesis de la Caracterización y el Desarrollo de la Práctica Matemática de Definir en la Primera Actividad.

En los análisis que realizamos en las Tabla 7, Tabla 8 y Tabla 9 se analizan tres momentos distintos e importantes que reconocimos de esta primera actividad, en los cuales identificamos varios *aspectos de la práctica matemática de definir* que los participantes desarrollaron y los cuales caracterizamos con las herramientas teóricas de Sfard. Este análisis nos llevó a varios resultados que destacamos a continuación.

Se identificaron cinco *aspectos de la práctica matemática de definir*: (1) *describir propiedades*, (2) *construir explicaciones y argumentos*¸ (3) *hacer preguntas de definición*, (4) *evaluar ejemplos y no-ejemplos* y (5) *negociar criterios para juzgar la adecuación o aceptabilidad de la definición*, siendo los dos primeros aspectos lo que prevalecieron en toda la actividad, pues se manifestaron en los tres análisis descritos anteriormente. Vale la pena resaltar que el último aspecto al que hacemos mención se identificó en dos de los análisis, aunque en el análisis realizado a partir de la Tabla 9 no se relaciona directamente con la negociación de criterios para aceptar una definición como adecuada o no, sino que se presentó un proceso de negociación para determinar los criterios necesarios y suficientes para justificar por qué un no-ejemplo de poliedro es considerado como tal.

También es de resaltar que el desarrollo del aspecto *construir explicaciones o argumentos* se manifiesta de dos maneras distintas: una relacionada con argumentar sobre la aceptación o rechazo de un ejemplo, y la otra se relaciona con el proceso de argumentación de la relevancia de una propiedad o relación de la familia de poliedros.

En cuanto a la caracterización de estos aspectos a partir de las herramientas teóricas de Sfard resaltamos varios hechos importantes:

- Los *mediadores visuales* utilizados por los participantes para coordinar su *discurso* fueron las figuras dadas en la hoja de trabajo uno (ver anexo 4) y las figuras geométricas dadas para evaluar si eran ejemplos o no-ejemplos de poliedros (ver anexo 5) pues constantemente los participantes hacían mención de ellas para aludir a sus propiedades. Además, jugaron un papel importante para la creación de *narrativas*.
- El principal objetivo del *uso de palabras* se relaciona con el aspecto *describir propiedades*, pues las palabras se usaban con el fin de describir, enunciar o caracterizar la familia de poliedros; ya sea para identificar, en un principio, similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos mostrados en las hojas de trabajo 1 como para definir la familia de poliedros y justificar por qué una figura geométrica particular era o no un poliedro. Esta finalidad del *uso de palabras* también se destacó en la investigación de Gavilán-Izquierdo et al. (2019) con

maestros en formación, pues los autores identifican que el *uso de palabras* de los maestros se usa para describir propiedades de cuerpos geométricos o sus elementos.

- El *uso de palabras* más destacadas fue: figuras tridimensionales, figuras encerradas, caras planas o curvas y aristas rectas o curvas, estas palabras llevaron a los estudiantes a la creación de un conjunto de *narrativas* que recogen afirmaciones sobre las propiedades que cumple la familia de poliedros.
- Se identificaron algunos *usos de palabras* con un significado distinto, como lo es la palabra "lado" que los participantes usualmente usaban para referirse tanto a las aristas como a las caras de las figuras geométricas de las que se estaba discutiendo. También se manifestaron usos coloquiales de algunas palabras como "techo" y "figura completa" para referirse a un elemento de los sólidos geométricos o a una característica particular de los mismos.
- Surgieron *narrativas* de las actividades que se hacen con o por lo objetos; una de ellas es que los estudiantes consideran que definir es dar una lista de todas las características que identificaron en las similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos de poliedros.
- Durante la realización de la actividad se identificaron varios patrones discursivos en las acciones que los estudiantes realizaban al momento de identificar similitudes y diferencias y de avaluar ejemplos y no-ejemplos. Este conjunto de acciones repetitivas nos llevó a establecer dos *rutinas* en el quehacer de los estudiantes: una *rutina* en la que se identifican características relevantes y otra con el objetivo de desarrollar el *aspecto de la práctica matemática de definir* referente a *evaluar ejemplos*. Al respecto de la primera *rutina*, esta también se manifestó en la investigación con maestros en formación de Fernández-León et al. (2019) y Escudero et al. (2014) pues los autores mencionan que los maestros en formación llevan a cabo diferentes *rutinas* al momento de definir diferentes prismas, en las que identifican la *rutina* referente a la identificación de diferentes características de los prismas.

4.2.2. Segunda Actividad: Definiendo los Poliedros Cóncavos

Inicialmente esta actividad se realizó por subgrupos de trabajo, se formaron tres subgrupos, a cada uno de ellos se les entregó la hoja de trabajo 2 (ver anexo 6) y una laptop para tener acceso a los applets de GeoGebra donde se encontraban los ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos, con el fin de que los estudiantes propusieran una definición para la familia de poliedros cóncavos. En cada una de las discusiones que se presentaron se manifestaron algunos hechos importantes, como los que se mencionan a continuación.

Tabla 10. Análisis uno de la segunda actividad

ACTIVIDAD 2 - IDENTIFICANDO SIMILITUDES Y DIFERENCIAS

***Descripción*:**

Cada subgrupo se encuentra observando los ejemplos (https://www.geogebra.org/m/w55cwaj2) y no-ejemplos (https://www.geogebra.org/m/pkjwqkqg) de poliedros cóncavos en GeoGebra, identificando algunas similitudes y diferencias entre ellas. Al inicio de la actividad surgen discusiones entre los integrantes de cada subgrupo, como las que se transcriben a continuación.

***Transcripción*:**

<u>Grupo 2: E3 y E4</u>

[515] **E3:** Mira que estos no tienen **lados curvos** ((haciendo referencias a los poliedros convexos))

[516] **E4:** Entonces vamos a ver (2'')

[517] **E3:** Pues ahí sí que todas sus… **aristas**, que todas sus **aristas son rectas** ahí ((señala los poliedros convexos)) porque mira que aquí son **rectas** ((le muestra el applet donde se muestran los poliedros convexos)) <**E4:** Ah… sí que todas sus **aristas**> y aquí también ((le muestra el applet de los poliedros cóncavos))

((El estudiante cuatro empieza a escribir una primera similitud mientras que el estudiante tres observa las figuras))

[542] **E4:** Y también que todos los **lados** son diferentes ¿no?

[543] **E3:** Sí, pero espera, porque… porque no miramos esa por el otro lado (3'') ((rota los ejemplos dados de poliedros cóncavos)) ¡eso! (2'') no, no todos son **iguales**

[544] **E4:** No, porque digamos esta **mide diferente** a esta ((señala diferentes aristas del segundo poliedro dado como ejemplo de poliedro cóncavo))

[555] **E3:** Ah… sí

[556] **E4:** Y todas son así, vea, y esta también **mide diferente** a esta y está también creo

[557] **E3:** Sí, que todas las **aristas** son / <**E4:** De diferente> no porque vea, estas son **iguales** ((refiriéndose a las aristas de la pirámide cóncava))

[558] **E4:** Eso estaba pensando, pero estas de abajo no

[559] **E3:** Pero entonces no se puede decir todas

[560] **E4:** Mm…

[561] **E3:** ¿será que eso es otra similitud? ((se acerca la profesora))

[562] **E4:** ¿Cómo era la similitud? De la que nosotros habíamos dicho

[…]

[569] **E3:** Que tenía varias **figuras** en una **figura** sola

[570] **P:** Osea, que sus caras qué, porque estos son caras ¿no?
[571] **E4:** Que sus **caras** tienen diferentes… diferentes…
[572] **E3:** No, porque mira que estas sí tiene **caras iguales** ((señala la pirámide cóncava))
[573] **E4:** Pero la de abajo no ((Referenciando la base de la pirámide cóncava))
[574] **E3:** Pero la gracia es una similitud, osea que todas
[575] **E4:** Por eso, la cara de abajo no
[576] **E3:** Por eso, no, si usted dice que todas las **caras son diferentes** osea no puede haber ninguna **igual** ¿cierto? Y acá ((haciendo referencia la pirámide cóncava)) hay varias **iguales**, estas son **iguales** ¿si me entiende? / porque digamos esta de este lado con esta de este lado también son **iguales**

<u>Grupo 3 (E5 y E6)</u>

[585] **E6:** La primera es que los… por ejemplo los **cóncavos** como esta tienen como **entradas** ((señala el prisma hexagonal cóncavo indicando las "entradas" que ven)) y los **no cóncavos** no, osea ¿si me entiende?
[586] **E5:** Todos tienen entradas
[587] **E6:** Todos tienen **entradas**, estos, **los cóncavos**, y los **convexos no tienen entradas**, eso sería una, una / una diferencia (2'') no, pero espere, ¿cómo así? ¿cómo lo explicamos acá? Sería…
[588] **E5:** Que los cóncavos tienen dife, tienen… (5'')
[589] **E6:** Diferencias serían que ((va escribiendo la primera diferencia)) los **convexos** <**E5:** No tienen **entradas**> ((termina de escribir la diferencia))
[590] **E6:** En similitud podemos poner que todos son **poliedros** ((escribe la primera similitud)).

Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir	
Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado	- Describir propiedades - Construir explicaciones o argumentos - Establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas

Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso			
	¿qué palabras matemáticas se utilizan?	**¿cómo las usan?**	**¿para qué las usan?**
Uso de palabras	- Lados - Curvos - Aristas - Rectas - Igual - Medir - Caras - Figuras - Poliedros - Entradas - Cóncavos y convexos	La mayoría de las palabras se usan de manera correcta. Una de ellas, la palabra "entradas", se usa en un sentido coloquial para referirse a una características particular de los poliedros cóncavos	- Para caracterizar algunos elementos (caras y aristas) de los ejemplos y no-ejemplos dados. - Para comparar los elementos que componen a los ejemplos y no-ejemplos - Para caracterizar tanto a los poliedros cóncavos como a los convexos

Narrativas	**Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir**	**Sobre las actividades que se hacen con o por los objetos geométricos**

	Surgen las siguientes *narrativas* que recogen información sobre algunas propiedades de los poliedros cóncavos - Tiene entradas - Son poliedros - Todas sus caras son diferentes - Sus aristas son rectas	No surgen afirmaciones sobre las actividades que se hacen con o por los objetos que se esperan definir
Mediadores visuales	En general, los *mediadores visuales* utilizados e identificados en el *discurso* de los participantes son las figuras geométricas dadas como ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos en la hoja de trabajo. Centrando la atención en algunos elementos de los mismos.	
Rutinas	Nuevamente se identificó una *rutina* en las acciones que realizan los estudiantes para identificar similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos. Esta *rutina* consiste en realizar las siguientes acciones: - Mirar las figuras dadas en la hoja de trabajo - Identificar una característica relevante en una de las figuras centrando la atención en uno de sus elementos (caras, aristas, diagonales) - Y, evaluar y comparar si otras figuras comparten esta característica.	

Fase 3 de análisis

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

Al analizar el *discurso* de los estudiantes en el protocolo de transcripción que ilustramos en la anterior tabla identificamos tres *aspectos de la práctica matemática de definir* que los estudiantes están desarrollando: (1) *describiendo propiedades*, (2) *construir explicaciones o argumentos* y (3) *establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas*; los mismos aspectos que identificamos en el primer análisis realizado de la primera actividad cuando los estudiantes determinan similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos. La manifestación del primer aspecto conduce al segundo, ya que al estar los estudiantes *describiendo propiedades* tanto de los ejemplos como de los no-ejemplos los lleva a una continua discusión en el que se *construyen argumentos* para justificar la relevancia de una propiedad observada. Esto se puede evidenciar en el *discurso* de E3 y E4, particularmente en las líneas 542-544 y 569-576, cuando E4 argumenta por qué aceptar como característica que las aristas de los poliedros cóncavos no miden lo mismo, o cuando E3 argumenta el por qué rechazar como similitud que todas las caras, tanto de poliedros cóncavos como los convexos, son distintas.

El tercer aspecto lo identificamos en el *discurso* de E5 y E6 cuando caracterizan y clasifican tanto a los ejemplos y no-ejemplos como parte de la familia de poliedros, en palabras de los estudiantes "en similitud podemos poner que todos son poliedros". Este aspecto no se manifiesta en el *discurso* de los demás estudiantes, por eso decidimos, entre varias razones, ilustrar los dos protocolos de los diferentes grupos para contrastar el desarrollo del tercer aspecto identificado, pues se puede evidenciar al inicio del protocolo de E3 y E4 que los estudiantes enuncian nuevamente algunas características de la familia de poliedros para caracterizar a los poliedros cóncavos. Al igual ocurrió con E1 y E2 (ver transcripción del anexo 9) que listan propiedades como: tienen aristas rectas o caras planas para caracterizar a los poliedros cóncavos y convexos.

Por otro lado, nuevamente identificamos, tal y como lo mencionamos en el análisis de la primera actividad realizado a raíz de la Tabla 9, el desarrollo de un aspecto que se encuentra relacionado con el proceso de *negociación*, no precisamente sobre la adecuación o aceptabilidad de una definición, sino de las características relevantes que se deben tener en cuenta para caracterizar a los poliedros cóncavos. Tal y como ocurre en las líneas de transcripción 569-576 donde E4 menciona que una característica es que todas sus caras son diferentes, pero E4 rechaza la afirmación al mencionar que hay poliedros cóncavos que tiene varias caras iguales.

Esto nos lleva a reflexionar que el desarrollo del aspecto *construir explicaciones o argumentos* relacionados con la aceptación o el rechazo de una propiedad observada como relevante, conlleva a un proceso de negociación para decidir si aceptar o rechazar una característica como una propiedad de los poliedros cóncavos.

En cuanto a las herramientas teóricas

Mediadores visuales

El principal *mediador visual* que los participantes utilizan en su *discurso* son los ejemplos y no-ejemplos representados en cada uno de los dos applets, pues constantemente hacen mención de los poliedros representados para hablar sobre ellos, para mencionar características específicas de sus elementos; sin embargo, se manifestaron otros *mediadores visuales* que coordinaban el *discurso* de los estudiantes en esta primera parte de la actividad, tal y como ocurrió con E1 y E2 en el siguiente protocolo.

[471] **E1:** No tienen diagonales
[472] **E2:** No, sí porque uno la puede hacer la diagonal, osea adentro mira
[473] **E1:** No, porque aquí uno como le haría una diagonal ((señala la pirámide cóncava)) (4'')
[474] **E2:** Sí claro
((la profesora se acerca para ver cómo han avanzado en la actividad))
[475] **P:** ¿cómo van?
[476] **E2:** Cierto que a todas estas figuras se les puede hacer diagonales
[477] **P:** Sí, claro
[478] **E1:** Y acá ((señala la pirámide de las figuras que son cóncavas)) uno cómo se la pone si esto está… / si esto está tan encerrado, mira
[…]
[488] **P:** Listo, trázame otra diagonal de esa o de cualquier otra figura
[489] **E1:** ¿yo?
[490] **E2:** De esta figura que dices que no ((señala la pirámide de las figuras que sí son cóncavas)) <**P:** Que no puedes, a ver trázala>
[491] **E1:** Pero si no se puede cómo la voy a trazar
[492] **E2:** Pues inténtalo <**P:** Sí se puede, inténtalo> de acá, aquí en esta ((señala la herramienta de GeoGebra que permite trazar segmentos>
[493] **E1:** A ver, digamos que se puede… / uish… no sé / ah… sí ((intenta trazar una diagonal en la base de la pirámide, tal y como se muestra en la siguiente figura))

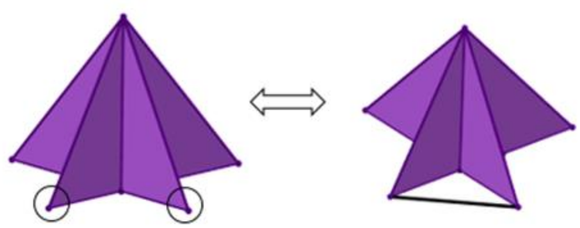


Figura 12. Diagonal trazada por E1 a la pirámide cóncava

[499] **E1:** Uish… pero es que quedaría una diagonal re… <**E2:** ¿Cómo así?>
[500] **P:** ¿re qué? / mira, esto sería una diagonal ¿no?
[501] **E2:** ¿enserio?
[502] **P:** Claro, porque mira que cumple con nuestra definición […]
[503] **E1:** No, porque se supone <**E2:** Osea que…> que debe estar adentro
[504] **P:** ¿será? Que tal eso sea una … <**E1:** Sí> ¿todas?, mira que en este no necesariamente

[505] **E2:** Osea que una diagonal no necesariamente tienes que estar en diagonal, osea como así ((realiza un movimiento con sus manos, representando una diagonal prototípica))

En el anterior protocolo podemos evidenciar una discusión en torno a las características de las diagonales de los diferentes poliedros cóncavos, discusión en la que E1 y E2 utilizan un *mediador visual*, distinto al mediador que mencionamos en la Tabla 10, para coordinar su *discurso*, un *mediador visual* regido por las ideas que ellos tienen de cómo debería verse una diagonal en un poliedro: debe estar adentro del poliedro y debe estar en “diagonal”.

Este *mediador visual* que utilizan los estudiantes se relaciona con las ideas de Vinner (1983) sobre las imágenes mentales que tienen los estudiantes de un concepto, que en la mayoría de los casos no es acorde a la definición del concepto, pues en este caso E1 y E2 se dejan llevar por el *mediador visual* prototípico que tienen de una diagonal hasta el punto de rechazar una diagonal como la que se ilustra en la Figura 12. Esta idea que tenían E1 y E2 de las diagonales fueron un obstáculo para que los estudiantes pudieran identificar, por ejemplo, que en los poliedros cóncavos algunas de sus diagonales pueden quedar por fuera de la figura, ya que tenían la idea de que en cualquier poliedro sus diagonales deben quedar por dentro.

Uso de palabras

En el protocolo de transcripción que ilustramos en Tabla 10 resaltamos varias palabras que se usaron con fines específicos. El *uso de palabras* como “curvo” o “recto” se usaron con el fin de caracterizar elementos de los poliedros representados en los applets de GeoGebra particularmente para mencionar características observadas en sus caras o aristas. Por otro lado, palabras como “medir” e “iguales” se usan para comparar las aristas y caras en términos de si miden los mismo o tienen la misma forma, respectivamente.

Al respecto, estos fines específicos de los *usos de palabras* convergen a un fin en sí mismo: desarrollar el aspecto *describir propiedades* para caracterizar a los poliedros cóncavos. En el proceso del desarrollo de dicho aspecto surgieron palabras como “entradas” y “poliedros” para mencionar las propiedades que los estudiantes consideraban relevantes para los poliedros cóncavos, particularmente llama la atención el *uso de la palabra* “entradas” pues es un uso coloquial para referirse quizás a la propiedades de que los poliedros cóncavos tienen ángulos diedros mayores a ciento ochenta grados.

Nuevamente se identifica en el *discurso* de los estudiantes el uso reiterado de la palabra "lados" para referiste tanto a las aristas como a las caras de los poliedros.

Narrativas

Como ya hemos estado mencionando en los análisis anteriores, el hecho de que se manifieste el aspecto *describir propiedades* hace que sí surjan *narrativas* sobre las propiedades o las características de los objetos geométricos que se están definiendo, *narrativas* que describimos en la fase dos del análisis. Es de mencionar que, bajo la naturaleza que caracteriza a las *narrativas* sobre que son proposiciones que están sujetas a aceptación o rechazo, se evidenció que en la creación de las *narrativas* hay un proceso en donde los estudiantes evalúan si las afirmaciones que están realizando son o no ciertas, esto se logra usando como *mediadores visuales* cada uno de los ejemplos y no-ejemplos dados y comparándolos entre ellos. Por ejemplo, una de las *narrativas* que da E4 es que todas las caras de cada uno de los ejemplos y no-ejemplos son diferentes, sin embargo, E3 rechaza esta afirmación cuestionado la palabra "todas" mencionando que no se puede decir que todas cumplen con esta condición ya que hay figuras que tienen algunas caras iguales, como el caso de la pirámide cóncava.

Rutinas

Teniendo en cuenta que una de las primeras tareas que están desarrollando los estudiantes es identificar similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos que los lleva al desarrollo del aspecto *describir propiedades*, se evidencia la misma *rutina* que identificamos en el análisis realizado en la Tabla 7, pues en su momento se estaba realizando la misma tarea. Esta *rutina* consiste en realizar una serie de acciones que describimos tanto en la Tabla 7 como en la Tabla 10, acciones que consideramos importantes para que nuestros participantes desarrollen los aspectos *describir propiedades* y *construir explicaciones o argumentos.*

Vale la pena mencionar que en el transcurso de esta primera tarea propuesta cada subgrupo de trabajo manifestó no encontrar diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos, por lo que se decidió realizar una discusión conjunta entre la profesora y los estudiantes para discutir las ideas que se habían manifestado hasta el momento. Esta discusión condujo al desarrollo de los siguientes *aspectos de la práctica matemática de definir.*

Tabla 11. Segundo análisis de la actividad dos

ACTIVIDAD 2 - ENCONTRANDO CARACTERISTICAS DE LOS POLIEDROS CÓNCAVOS

***Descripción*:** En la discusión los estudiantes proponen diferentes ideas para determinar alguna característica relevante para los poliedros cóncavos, ideas relacionadas con determinar alguna regularidad respecto al grado de cada uno de los vértices o al número de sus caras. Cada una de las ideas se exploraron y no se evidenció ninguna característica relevante, por lo que la profesora orienta la discusión llevando al siguiente fragmento de conversación.

***Transcripción*:**

[628] **P:** […] ¿Qué otro elemento podemos ver? (4’’) <**E2:** ya están todas> ¿qué más elementos tiene un poliedro?

[629] **E2:** No, que están **encerradas**

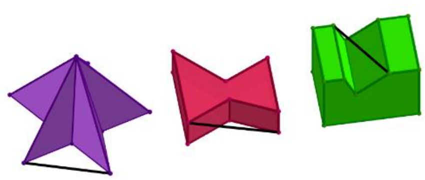
[630] **P:** Sí, pero me refiero a sus elementos / las aristas, las caras, los vértices ¿qué otro elemento hay?

[631] **E1: Diagonales**

[632] **P:** Las diagonales / entonces miremos qué características tienen las diagonales por ejemplo / tracemos una diagonal acá ((construye una diagonal en la base de la pirámide cóncava))

[…]

[660] **P:** Por ejemplo, yo tracé esta diagonal ((haciendo referencia a la diagonal construida en la pirámide cóncava)) si yo trazó otra diagonal, por ejemplo, acá <**E3:** Osea que...> si yo trazo, por ejemplo, esta diagonal de acá ((construye dos diagonales más en los otros poliedros cóncavos, ilustradas en la siguiente imagen))



[661] **E2:** Y ¿cómo se le llama a eso?

[662] **P:** **¿**Eso? ¿cómo así?

[663] **E2:** Sí, osea, lo que decía que se puede trazar (1’’) **afuera** de la **figura**

[664] **E3:** Osea que sería como que / en… lo que…, los… ¿cómo se dice?

[665] **P:** Cóncavos

[666] **E3:** Eso, los que son **cóncavos** se puede trazar **diagonales** como por **fuera de la figura** <**E2:** Aja, eso> en cambio en los **convexos** no

[…]

[673] **E1:** Pero, pero ¿se pueden trazar también **por dentro**?

[674] **P:** Exacto, pero también se pueden trazar por dentro, si yo trazo por ejemplo esta diagonal de acá ((traza una diagonal del prisma hexagonal cóncavo de tal manera que dicha diagonal quedará por dentro del poliedro)) <**E3:** Ah… sí, queda por dentro> esta quedo ¿dónde?

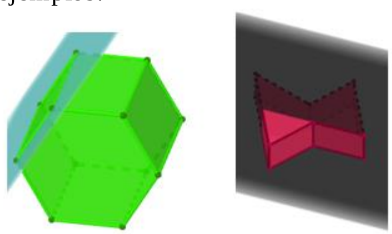
[675] **E2:** Por dentro

[676] **E1:** Pero, en la primera ((haciendo referencia a la pirámide cóncava)) no se puede

[677] **P:** Sí, osea que no necesariamente todas sus diagonales quedan por fuera, pero por lo menos una […] por lo menos una diagonal queda por fuera, a diferencia de los convexos donde todas sus diagonales van a quedar <**E2:** Por dentro>

[678] **E2:** Y ninguna se puede trazar por fuera
[…]
[688] **E2:** ¿Esa es la única diferencia que tienen?
[689] **P:** Hay varias / por ejemplo […]
[690] **E1:** ¿Cuántas diferencias hay?
[691] **P:** Yo les puedo decir por lo menos tres
[692] **E6:** ¿tres?
[693] **P:** Pero son equivalentes, si tú pones una no quiere decir que / que las otras dos tengas que ponerlas, con que se cumpla una de las cosas ya se puede caracterizar como un poliedro cóncavo

Descripción: aquí la profesora les muestra otra característica de los poliedros cóncavos, construyendo algunos planos que contienen las caras de algunos poliedros tanto cóncavos como convexos. La profesora les ilustra a los estudiantes que cuando se construyen estos planos, en los poliedros cóncavos, el sólido queda dividido en dos semiespacios distintos, mientras que en los convexos el sólido queda en el mismo semiespacio del plano construido. Se ilustraron los siguientes ejemplos:



Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir	
Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado	- Hacer preguntas de definición - Describir propiedades

Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso			
	¿qué palabras matemáticas se utilizan?	**¿cómo las usan?**	**¿para qué las usan?**
Uso de palabras	- Diagonales adentro - Diagonales por fuera - Figuras encerradas	El *uso de palabras* se hace de manera correcta	Para mencionar algunas propiedades que tienen los elementos de los poliedros cóncavos, particularmente las diagonales.

	Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir	**Sobre las actividades que se hacen con o por los objetos geométricos**
Narrativas	Surgen las siguientes *narrativas* sobre las propiedades de los poliedros convexos y los poliedros cóncavos: - En los poliedros cóncavos se pueden trazar diagonales por fuera del poliedro	No surgen afirmaciones sobre las actividades que se hacen con los objetos geométricos que se están definiendo

	- En los poliedros convexos todas sus diagonales quedan por dentro del poliedro - Tanto los poliedros cóncavos como los convexos son figuras cerradas	
Mediadores visuales	los *mediadores visuales* utilizados e identificados en el *discurso* de los participantes son las figuras geométricas dadas como ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos en la hoja de trabajo. Centrando la atención en algunos elementos de los mismos.	
Rutinas	No se evidencia un conjunto de acciones repetitivas en el quehacer de los estudiantes que nos permita identificar una *rutina*.	

Fase 3 de análisis

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir y las herramientas teóricas

Tal y como se puede evidenciar en las dos primeras fases de análisis realizadas en la Tabla 11 no hay una presencia fuerte de diferentes *usos de palabras*, de diferentes *narrativas*, no identificamos una *rutina* en las acciones realizadas por los estudiantes, ni tampoco identificamos un *mediador visual* distinto al que ya habíamos descrito en el primer análisis de esta actividad. Sin embargo, decidimos ilustrar la discusión que se presentó en este momento pues se manifestó fuertemente un *aspecto de la práctica matemática de definir* que no se había desarrollado de la manera como se desarrolló en la discusión llevada a cabo.

El aspecto al que hacemos referencia es el que corresponde al desarrollo de *hacer preguntas definición* tuvo un papel importante para que los estudiantes llevaran a cabo el aspecto *describir propiedades*, pues la manifestación de este aspecto condujo a que los estudiantes, a partir de diferentes cuestionamientos, reconocieran algunas propiedades que caracterizan tanto a los poliedros cóncavos como a los convexos.

La manifestación de este aspecto se evidencia en tres momentos. Un primer momento se evidencia en la línea de transcripción 661 cuando E2, al reconocer una característica de las diagonales de los poliedros cóncavos, pregunta cómo podría decir lo que acababa de identificar, lo que llevó a E3 a reconocer y mencionar una característica relevante de los poliedros cóncavos y convexos (ver líneas de transcripción 664-666). Un segundo momento se evidencia en la línea

673 cuando E2 se cuestiona sobre si también hay poliedros cóncavos en los que al trazar sus diagonales estas queden por dentro del poliedro, lo que conduce a una discusión en la que los estudiantes reconocen que en los poliedros cóncavos sus diagonales también pueden quedar dentro del poliedro, pero, al menos una de sus diagonales debe quedar por fuera. Un último momento en el que se desarrolló el aspecto *hacer preguntas de definición* se evidencia en la línea 688 cuando uno de los estudiantes pregunta si los poliedros cóncavos cumplen con más propiedades además de las ya mencionadas, lo que condujo a que los estudiantes reconocieran otra propiedad equivalente relacionada con si un determinado poliedro cóncavo queda dividido en dos semiespacios distintos al trazar un plano sobre una de sus caras.

Una vez que los estudiantes identificaran las características de los poliedros cóncavos se procedió a la segunda parte de la actividad propuesta en la segunda hoja de trabajo (ver anexo 6) que llevó al desarrollo y la caracterización de los siguientes *aspectos de la práctica matemática de definir*.

Tabla 12. Tercer análisis realizado para la actividad 2

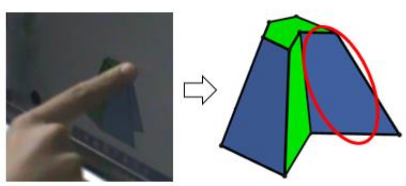
ACTIVIDAD 2 - EVALUANDO EJEMPLOS Y NO-EJEMPLOS

***Descripción*:** Cada uno de los tres subgrupos formados se encuentra observando algunos ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos que se encuentran representados en un applet de GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/mzt3fuam). La evaluación de los poliedros lleva a que se presenten las siguientes discusiones entre los diferentes subgrupos.
***Transcripción*:** Grupo 1: E1 y E2 [712] **E1:** Entonces ¿es un **poliedro**? / sí ((mientras observan el poliedro uno del applet)) [713] **E2:** Pero ¿es cóncavo? No es **cóncavo**, porque no tiene las **entradas** […] [716] **E2:** Entonces, ¿ponemos que no? [717] **E1:** ¿Por qué? (2'') ¿porque no hay **diagonal**? [718] **E2:** porque no se pueden trazar **diagonales** por fuera de la **figura** (4'') […] [740] **E1:** Pero la dos no es [741] **E2:** Sí es porque tiene así **entradas** ((señala una de las "entradas" que tiene el poliedro dos dado en el applet, ilustrado en la siguiente imagen)) […]

[742] **E2:** Mira, si vez que esta no tiene **entrada**, entonces no es ((haciendo referencia al primer poliedro dado en el applet))

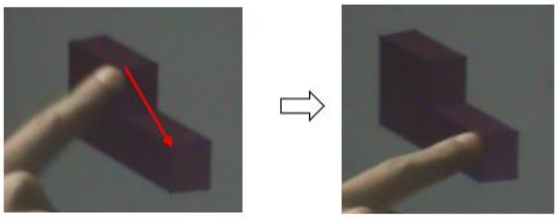
<u>Grupo 2: E3 y E4</u>

[765] **E3:** En esta sí se pueden trazar las **diagonales** por fuera ((observan el poliedro dos representado en el applet))
[766] **E4:** No, porque entonces en todas vamos a poner sí porque sí se puede
[767] **E3:** Pues sí (1'') porque por qué más si solo tenemos esa idea (3'')
[768] **E4:** No sé, porque la profe dijo lo de poner / <**E4:** Pero es como lo mismo> lo de…
[769] **E3:** Lo del **plano** […]
[772] **E4:** Sí, por eso, entonces escribamos mejor eso
[773] **E3:** Que se puede trazar **un plano** (5'')
[774] **E4:** Al trazar **un plano** se corta por la **mitad** ((haciendo referencia a que el poliedro dos es el que queda dividido por la mitad))
[775] **E3:** porque se puede trazar **un plano por la mitad** de la **figura**
[776] **E4:** No, porque en todas se puede (3'')
[777] **E3:** Mm… no sé
[778] **E4:** No, porque en todas se puede trazar **un plano por la mitad**
[779] **E3:** No <**E4:** Sí, porque la profe dijo que si ella quiere trazarlo por la **mitad** en todas pues las traza por la **mitad**>No, porque vea / en esta no se puede ((le muestra a la estudiante cuatro el poliedro uno del applet)) porque es por una **cara** (4'') vea
[780] **E4:** Sí…
[781] **E3:** En cambio en esta, por ejemplo ((le muestra al estudiante cuatro el poliedro dos)) si usted lo pasa por **esta cara**, por esta azul ((ver en la siguiente imagen la cara del poliedro dos que señala)), lo va a cortar, en cambio en la otra no ((haciendo referencia al poliedro uno del applet))



[782] **E4:** Sí…
[783] **E3:** No… vea ((le muestra de nuevo el poliedro uno del applet)) porque si usted lo traza por esta **cara** ((ver en la siguiente imagen la cara que señala en el poliedro uno)) pues no va / a partir nada

[…]
[796] **E3:** La cinco
[797] **E4:** No / sí es
[798] **E3:** Sí, sí, sí ((rota el poliedro cinco)) porque la podemos trazar por acá, vea ((ver la siguiente imagen que ilustra de donde a donde señala el estudiante se puede trazar la diagonal que queda por fuera de la figura))
[799] **E4:** Sí, sí, sí



[800] **E3:** Sí, porque se puede trazar acá
[801] **E4:** Listo, entonces sí porqué se puede <**E3:** Porque se pueden trazar **diagonales** por fuera de la **figur**a> sí, por eso.

Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir	
Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado	- Evaluar ejemplos y no-ejemplos - Describir propiedades - Construir explicaciones y argumentos

Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso			
	¿qué palabras matemáticas se utilizan?	**¿cómo las usan?**	**¿para qué las usan?**
Uso de palabras	- Poliedros cóncavos - Entradas - Diagonales - Caras - Planos - Figura - Mitad	Las palabras se usan de manera correcta, algunas de ellas se usan de manera coloquial para referirse a una propiedades específica de los poliedros cóncavos. El uso de la palabra "mitad" se realiza en un sentido ambiguo.	- Para describir las propiedades que tiene un poliedro cóncavo y determinar si una figura dada es o no un poliedro cóncavo. - Para referirse a la figuras de las que se está hablando (poliedros cóncavos y figuras) - Para nombras algunos elementos de los poliedros (caras, diagonales, planos que contiene una cara)

Narrativas	**Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir**	**Sobre las actividades que se hacen con o por los objetos geométricos**

	Surgen las siguientes *narrativas* sobre algunas de las propiedades de los poliedros cóncavos - Los poliedros cóncavos tienen entradas. - Si se traza un plano que contenga una de las caras de los poliedros cóncavos este divide al poliedro	No surgen *narrativas* relacionadas con las actividades que se están haciendo con los objetos geométricos, particularmente con los ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos
Mediadores visuales	El principal *mediador* visual que usan los estudiantes para coordinar su *discurso* son las figuras representadas en el applet de GeoGebra, centrando su atención en algunos elementos importantes de los mismos, como sus caras y diagonales	
Rutinas	Nuevamente evidenciamos una *rutina* en el *discurso* de los estudiantes cuando evalúan ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos. Esta *rutina* consiste en realizar las siguientes acciones: - Mirar el ejemplo o no-ejemplo - Identificar la o las características que lo hacen o no poliedro cóncavo - Justificar a partir de las características identificadas el por qué la figura observada es o no un poliedro cóncavo Estas acciones se hacen para desarrollar el *aspecto de la práctica matemática de definir* referente a la *construcción y evaluación de ejemplo y no-ejemplos*	

Fase 3 de análisis

En las transcripción que ilustramos en la anterior tabla se encuentran las discusiones de dos subgrupos distintos debido a que en ambos encontramos diferentes *usos de palabras* y por tanto diferentes *narrativas* sobre las propiedades de los poliedros cóncavos y además cada uno de los grupos se centra en *diferentes mediadores visuales* para *describir propiedades* de los poliedros cóncavos. Estas son algunas de las diferencias que recalcamos a continuación.

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

Tal y como ocurrió en el análisis realizado de la primera actividad en la Tabla 9, se identificaron tres *aspectos de la práctica matemática de definir* que los estudiantes desarrollan conjuntamente cuando evalúan ejemplos y no-ejemplos de una familia de sólidos geométricos: el aspecto *evaluar ejemplos y no-ejemplos* lleva a los estudiantes a *construir argumentos* sobre la aceptación o el rechazo de un ejemplo a partir de la *descripción de las propiedades* que caracterizan a los poliedros cóncavos. Algunos ejemplos de la manifestación de estos tres aspectos se ilustran en las líneas de transcripción 796-801 del grupo 1 y en las líneas 740-742 del grupo dos; ya que al estar *evaluando los poliedros* dos y cinco, respectivamente, los estudiantes *construyen argumentos* que indican que los poliedros son cóncavos, justificando su evaluación *describiendo propiedades* como “tienen entradas” y “se puede trazar una diagonal por fuera de la figura”.

También es de resaltar que el desarrollo del aspecto *construir explicaciones o argumentos* se manifiesta de dos maneras distintas: una, que ya lo mencionamos en el párrafo anterior, relacionado con argumentar sobre la aceptación o rechazo de un ejemplo, y la otra, relacionada con argumentar la relevancia de una propiedad o relación de los poliedros cóncavos, tal y como se evidencia en las líneas 766-783 cuando E3 le hace ver a E4 que el plano que se construye para evaluar si un ejemplo es poliedro cóncavo no puede ser cualquiera, sino que debe construirse sobre una cara ejemplificando con los poliedros uno y dos dados en los applets (ver la segunda y tercera imagen mostrada en la anterior tabla).

En cuanto a las herramientas teóricas

Mediadores visuales

Los estudiantes utilizan, generalmente, los ejemplos y no-ejemplos representados en los applets como *mediador visual* para evaluarlos y *describir algunas propiedades* de los mismos; sin embargo, cada uno de los grupos centra su atención en diferentes elementos (diagonales, caras) como *mediadores visuales* más específicos. Por ejemplo, el grupo uno centra su atención en la posición del *mediador visual* diagonales para coordinar su *discurso* en torno a la justificación del por qué un ejemplo es o no un poliedro cóncavo, mientras que el grupo dos centra su atención en los planos que se pueden construir sobre una cara de los poliedros para evidenciar si este los corta o no.

Uso de palabras y narrativas

Debido a que se desarrolla el aspecto *describir propiedades*, el *uso de palabras* se utiliza principalmente para mencionar algunas propiedades tanto de los poliedros como de sus elementos, por eso se *usan palabras* como entradas y diagonales para la creación de *narrativas* sobre las características de la familia de poliedros cóncavos, *narrativas* que describimos en la Tabla 12.

Identificamos nuevamente uno uso coloquial en las palabras matemáticas que surgieron en el *discurso* de los estudiantes, la palabra "entradas" que un sentido formal, quizás pueda referirse a que en esas "entradas" los poliedros cóncavos tienen ángulos diedros mayores a ciento ochenta grados. Este uso coloquial de la palabra entradas se identifica en el *discurso* del grupo uno, particularmente en las líneas 740-742, pero también lo identificamos en el grupo tres cuando justifican el por qué el poliedro dos del applet es cóncavo, así como se ilustra en el siguiente protocolo.

<u>Grupo 3: E5 y E6</u>

[819] **E6:** Este sí es porque tiene **entradas** ((observan el poliedros dos representado en el applet))

[820] **E5:** No, no tienen **entrada**s, perdón, pero no tiene **entrada**s (3'')

[821] **E6:** Sí, mire, si usted ve esto es **una entrada** y de acá a acá se puede trazar una diagonal, si ve ((le muestra las "entradas" que tiene el segundo poliedro dado en el applet, como la que se ilustra en la primera imagen))

Además, se puede evidenciar un uso ambiguo de la palabra "mitad" en el *discurso* de los participantes, pues el uso de esta palabra se puede interpretar de distintas formas al no tener certeza sobre qué entienden los estudiantes cuando mencionan la expresión "trazar un plano por la mitad".

<u>Rutinas</u>

Nuevamente identificamos un conjunto de acciones que realizan los estudiantes cuando de evaluar ejemplos y no-ejemplos se trata. Las mismas acciones que realizaron los estudiantes en el análisis ilustrado en la Tabla 11: mirar el ejemplo o no-ejemplo, identificar la o las características que lo hacen o no poliedro cóncavo y justificar a raíz de las características identificadas el por qué la figura observada es o no un poliedro.

El hecho de que se manifiesten de nuevo estas acciones en el quehacer de los estudiantes le da más fuerza el que caractericemos estas acciones como una *rutina*, ya que se ha identificado tanto en la primera actividad como en la segunda.

4.2.2.1. Síntesis de la Caracterización y el Desarrollo de la Práctica Matemática de Definir en la Segunda Actividad.

En las Tablas 10, 11 y 12 destacamos el análisis realizado de tres momentos importantes que se presentaron durante la realización de la segunda actividad, momentos en los que identificamos diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir* y los cuales caracterizamos a partir de las características del *discurso* de los participantes. Este análisis nos llevó a los siguientes hechos importantes.

Se identificaron un total de cinco *aspectos de la práctica matemática de definir*: (1) *describir propiedades,* (2) *construir explicaciones y argumentos,* (3) *establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas,* (4) *hacer preguntas de definición* y (5) *evaluar ejemplos y no-ejemplos.* El primer aspecto al que hacemos mención fue el que prevaleció en los tres análisis realizados para la actividad dos, pues los estudiantes constantemente mencionan algunas propiedades tanto para cuando se encuentran identificando similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos como para cuando los estudiantes aceptan o rechazan un ejemplo de poliedro cóncavo mencionando las propiedades que cumplen o no.

Es de resaltar que el segundo aspecto se manifestó de dos maneras distintas: tanto para *construir argumentos* sobre la aceptación o el rechazo de una propiedad como a la hora de evaluar un ejemplo como poliedro cóncavo.

El desarrollo de uno de los aspectos que llamó nuestra atención es el que corresponde a *hacer pregunta de definición* que fue importante para que los estudiantes reconocieran las características propias de los poliedros cóncavos, tal y como lo describimos en la fase tres del análisis realizado en la Tabla 11.

El aspecto que corresponde a *establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas* se desarrolló en menor medida, pues solo lo identificamos en uno de los subgrupos de trabajo que reconoció que los poliedros cóncavos forman parte de la familia de poliedros, mientras que los otros dos subgrupos listan de nuevo todas las propiedades de la familia de poliedros para caracterizar a los cóncavos.

En cuanto al análisis realizado en torno a las herramientas teóricas de Sfard, reconocimos lo siguiente:

- El principal *mediador visual* que utilizan los estudiantes son las figuras geométricas representadas en los applets de GeoGebra que consideramos tuvieron un papel importante en el desarrollo de los aspectos *evaluar ejemplos y no-ejemplos* y *describir propiedades*, pues así como lo mencionan Dogruer y Akyuz (2020), las representaciones de sólidos geométricos en GeoGebra les permite a los estudiantes verlos desde diferentes puntos de vista y reconocer las propiedades de los mismos, tal y como ocurrió con nuestros estudiantes, la rotación de las diferentes figuras les permitió identificar algunas propiedades para determinar si un ejemplo podía considerarse como poliedro cóncavo.
- Algunos *mediadores visuales* más específicos que utilizan los estudiantes cuando se centran en un elemento particular de las figuras representadas (caras o diagonales) resultaron ser una obstáculo en el desarrollo de las actividades planteadas, tal como ocurrió con el subgrupo uno en el primer análisis realizado de esta actividad, que al considerar que toda diagonal de un poliedro debe estar por dentro de la figura y que además debe estar en diagonal no les permitió explorar características de las diagonales para caracterizar a los poliedros cóncavos.
- El desarrollo de aspectos como *describir propiedades* y *construir explicaciones y argumentos* conlleva a la creación de nuevas *narrativas* sobre las características de los poliedros cóncavos con algunos *usos de palabras* de manera coloquial, como la palabra "entradas", para caracterizar a los poliedros cóncavos como aquellos que tienen entradas.
- Nuevamente se identificaron acciones discursivas repetitivas en el que hacer de los estudiantes cuando se encuentran evaluando y hallando similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos. Este conjunto de acciones es el mismo que identificamos en las tablas de análisis 7 y 9 de la primera actividad; por lo que nos permite validar más el hecho de que podamos identificar los conjuntos de acciones como una *rutina*.

4.2.3. Tercera Actividad: En Busca de las Características de los Sólidos Platónicos

Recordemos que en esta actividad se usó material concreto (ver Figura 9) y se basa en una de las estrategias que propone Guillen (2005) para clasificar y caracterizar a una familia de sólidos —clasificación por construcción—. En este caso se les presentó a los estudiantes dos ejemplos de sólidos platónicos (ver Figura 10a) y tres no-ejemplos (ver Figura 10b) para que a partir de la evaluación de estos se conjeturará sobre propiedades de los sólidos platónicos y construir, con el material concreto, posibles candidatos hasta descubrir los otros tres sólidos platónicos: el icosaedro, el octaedro y el dodecaedro. Este proceso de construcción llevó al desarrollo de los siguientes *aspectos de la práctica matemática de definir.*

Tabla 13. Primer análisis de la actividad tres

ACTIVIDAD 3 - IDENTIFICANDO SIMILUTES Y DIFERENCIAS

***Descripción*:** Se les mostró a los estudiantes el cubo y tetraedro como ejemplos de sólidos platónicos y en cuanto a los no-ejemplos se les iba mostrando uno por uno para que los estudiantes los compararán e identificaran algunas similitudes y diferencias. La discusión que surgió a partir de esto se ilustra a continuación

***Transcripción*:**

[853] **P:** Entonces, por ahora, por ejemplo ¿qué ven? ¿qué observan de diferencias entre estos? ((señala el cubo, tetraedro y el prisma hexagonal))

[854] **E5:** Sus **formas** son **diferentes**

[855] **P:** ¿sus formas qué?

[856] **E5:** Las **formas de las cara**s son **diferentes**

[857] **P:** Aja, entonces esa podría ser una primera característica, que las formas de sus caras son diferentes mientras que en los ejemplos sus caras son iguales. […]

[871] **P:** Entonces ya tienen una idea para empezar a construir sólidos ¿listo? […] Ahora este, ((les muestra a los estudiantes la bipirámide pentagonal ilustrada en la Figura 10b)) por ejemplo, este es un no sólido platónico ¿qué observan en este por ejemplo?

[872] **E3:** Que no tiene **base** ((la profesora empieza a escribir las características que han surgido hasta el momento y las proyecta en el televisor)) […]

[877] **P:** ¿Qué otras características ven en este, ((señala de nuevo la bipirámide pentagonal)) por ejemplo? (3’’)

[878] **E3:** Que ese tiene **más caras** y pues esas ((señala el cubo y el tetraedro)) pues no ((risas))

[879] **P:** Bueno, pongamos esa. […]

[881] **P:** Listo, les voy a mostrar otro (3’’) este ((les muestra el tetraedro estrellado ilustrado en la Figura 10b)) es un no-ejemplo ¿qué ven en este? […]

[884] **E4:** Ese, yo veo que ese es **cóncavo** y los otros ((señala el cubo y el tetraedro)) son **convexos**

[885] **P:** Esa podría ser otra opción, que los que no son<**E5:** Porque tienen **entradas**> platónicos son cóncavos […]

[890] **E2:** Pero en este no ((señala el prisma hexagonal ilustrado en la Figura 10b))

[891] **P:** Pero este ((muestra el tetraedro estrellado)) es un no-ejemplo. Se acuerdan por ejemplo ayer cuando les mostré los poliedros que solo había uno que era abierto / que ustedes decían que entonces la característica indicaba que deberían estar completos, que tenía que estar cerrado, pero las demás era cerradas. Entonces este ((muestra el tetraedro estrellado ilustrado en la Figura 9a)) es un no-ejemplo y qué lo hace no-ejemplo, el estudiante tres dice que puede ser que sea cóncavo. Entonces otra propiedad que están observando es que en los poliedros, los sólidos platónicos deben ser ¿qué?

[892] **E4 y E6: Convexos**

<table>
<tr><th colspan="4">Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir</th></tr>
<tr><td>Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado</td><td colspan="3">- Describir propiedades
- Establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas</td></tr>
<tr><th colspan="4">Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Uso de palabras</td><td>¿qué palabras matemáticas se utilizan?</td><td>¿cómo las usan?</td><td>¿para qué las usan?</td></tr>
<tr><td>- Formas de las caras
- Cóncavos
- Convexos
- Entradas
- Diferentes
- Más caras
- Base</td><td>Las palabras matemáticas identificadas en el discurso de los estudiantes se usan de manera correcta. La palabra entradas se usa en un sentido coloquial para referirse a los sólidos cóncavos.</td><td>- Para caracterizas los ejemplos y no-ejemplos a partir de algunas características evidenciadas en sus elementos

- Para comparar algunos elementos de lo sólidos en términos de su forma y cantidad</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Narrativas</td><td>Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir</td><td colspan="2">Sobre las actividades que se hacen con o por los objetos geométricos</td></tr>
<tr><td>Al observar los ejemplos y no-ejemplos surgieron las siguientes propiedades y relaciones:

- En los sólidos platónicos las formas de las caras es la misma, mientras que en algunos no-ejemplos son distintas
- Los sólidos platónicos son convexos
- Los que no son ejemplos tienes más caras en comparación a los sólidos platónicos
- Los sólidos platónicos tienen base</td><td colspan="2">En este caso sí se evidencio una narrativa en relación con las actividades que se están haciendo con los objetos geométricos (identificar similitudes y diferencias entre ejemplos y no-ejemplos) la cual es: afirmar que una propiedad observada en los no-ejemplos se debe cumplir en todos los no-ejemplos o los no-ejemplos no puede compartir ninguna características con los ejemplos</td></tr>
<tr><td>Mediadores visuales</td><td colspan="3">El principal mediador visual utilizado por los participantes son lo ejemplos y no-ejemplos dados de los sólidos platónicos; sin embargo, centran su atención en sus elemento como mediadores visuales más específicos para coordinar sus discurso.</td></tr>
</table>

Rutinas	Se identifica el siguiente conjunto de acciones repetitivas que realizan los estudiantes con el fin de determinar similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos. - Mirar las figuras dadas en la hoja de trabajo - Identificar una característica relevante en una de las figuras - Y, evaluar y comparar si otras figuras comparten esta característica.

Fase 3 de análisis

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

Al analizar el *discurso* de los participantes en el fragmento de conversación que ilustramos en la anterior tabla identificamos nuevamente, como lo hemos mencionado en los diferentes análisis realizados en las otras dos actividades, el desarrollo de un aspecto que se manifiesta cuando los estudiantes están reconociendo algunas similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos, este aspecto es el que corresponde a la *descripción de propiedades*. En las líneas de transcripción 854, 856, 872, 878 y 884 podemos evidenciar la manifestación del aspecto mencionado.

Además, identificamos que los estudiantes reconocieron que los sólidos platónicos son convexos en comparación con algunos no-ejemplos, lo que nos permitió identificar que los participantes *establecen y razonan sobre relaciones sistemáticas*, pues identifican los sólidos platónicos como un subconjunto de la familia de sólidos convexos.

En cuanto a las herramientas teóricas

Mediadores visuales y uso de palabras

Es a partir de los *mediadores visuales* que utilizan los estudiantes en su *discurso* que los participantes pueden mencionar palabras matemáticas con el fin de crear *narrativas* sobre propiedades de los ejemplos y no-ejemplos de sólidos platónicos. Centrarse en *mediadores visuales* como las caras de los sólidos les permitió a los estudiantes identificar, por ejemplo, que las formas de las caras de los sólidos platónicos son iguales en comparación con los no-ejemplos.

Además, los diferentes objetivos del *uso de palabras* se centran en comparar constantemente lo *mediadores visuales* utilizados para lograr caracterizarlos. Por ejemplo, palabras como “caras diferentes”, “tienen más caras”, “no tienen base”, se usan para comparar en términos de la cantidad y forma de los diferentes elementos de los ejemplos y no-ejemplos y así lograr desarrollar el aspecto *describir propiedades*.

Narrativas

Tal y como hemos venido mencionado los diferentes *usos de palabras* y el desarrollo del aspecto *describir propiedades* conducen a la creación de diferentes *narrativas* sobre características de los objetos geométricos que se están definiendo, en este caso los sólidos platónicos, *narrativas* que describimos en la anterior tabla.

Además, identificamos *narrativas* respecto a las actividades que se hacen con los objetos, *narrativas* que no han estado tan presentes en los análisis que hemos estado haciendo, pues solo surgen *narrativas* sobre las propiedades de los objetos geométricos más no de las actividades que se hacen con estos. En este caso surgió, tal y como identificamos en el primer análisis de la primera actividad (ver análisis de la Tabla 7), una *narrativa* en la que los estudiantes afirman que todas las características evidenciadas en los no-ejemplos de los sólidos platónicos deben ser comunes en todos los no-ejemplos o que los no-ejemplos no pueden compartir ninguna característica con los ejemplos. Esto se puede evidenciar en las líneas 881-891 cuando E1 rechaza como propiedad que los sólidos platónicos son convexos o algunos no-ejemplos son cóncavos, pues E1 identifica que el prisma hexagonal dado como no-ejemplo es convexo.

El hecho de que se manifieste por segunda vez esta *narrativa,* nos permite identificarla quizás como una *rutina* en el *discurso* de los estudiantes cuando se encuentran comparando ejemplos y no-ejemplos de una familia particular de sólidos geométricos.

Rutinas

El conjunto de acciones que describimos en la anterior tabla lo hemos identificado en el análisis realizado en las tres actividades, lo que valida aún más el hecho de caracterizar este conjunto de acciones como una *rutina* en los estudiantes con el fin de identificar similitudes y diferencias y por tanto desarrollar el aspecto *describir propiedades*.

Una vez que los estudiantes identificaron algunas propiedades, la terea a seguir era construir diferentes sólidos geométricos en busca de los tres sólidos platónicos faltantes, en base a las propiedades identificadas. Este proceso de construcción condujo al desarrollo de los siguientes *aspectos de la práctica matemática de definir*.

Tabla 14. Segundo análisis de la tercera actividad

ACTIVIDAD 3: CONSTRUYENDO Y EVALUANDO CANDIDATOS DE SÓLIDOS PLATÓNICOS

Descripción: Uno de los grupos propone el primer candidato que se muestra en la siguiente imagen a la izquierda, ya que por ahora cumple con las características de que es convexo y según los estudiantes tiene base. Al evaluarlo, los estudiantes se convencen de que en los sólidos platónicos obligatoriamente sus caras deben ser iguales.

Una vez identificado esto E3 y E4 organizan el material dado clasificando las formas de los polígonos, tal y como se muestra en la siguiente imagen a la derecha, con el fin de construir candidatos en base a estas clasificaciones.

La evaluación y construcción de otros candidatos relevantes que permitieron identificar las características necesarias para definir a los sólidos platónicos se ilustran a continuación.

***Transcripción*:**

((el segundo candidato que proponen los tres grupos es el dodecaedro, al evaluarlo surge la siguiente discusión))

[920] **P:** Esperemos que el grupo del estudiante uno termine, y discutimos este ((mostrando los dodecaedros construidos)) porque que tal sea un no-ejemplo

[921] **E4:** ((risas)) no creo […]

[924] **E2:** Sí es

[925] **E5:** Pues por ahora sus **caras son planas** y sus **caras** y… son **iguales** (1’’) yo diría que sí

[926] **E6:** Pero luego no fue que dijimos que no tenían tantas **caras**

[927] **E5:** Yo no creo que sea una cuestión de que tengan tantas **caras**

[928] **P:** ¿Listo? Entonces, este que construyeron ((muestra uno de los dodecaedros construidos)) ¿ustedes creen que es sólido platónico o no?

[929] **E5:** Sí <**E2:** Sí señora>

[930] **P:** ¿Por qué? (2’’)

[931] **E2:** Porque sus **caras son iguales**

[932] **E5:** Sus **caras son iguales, son planas**

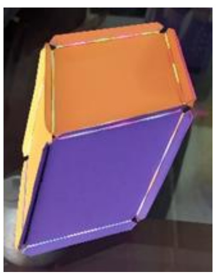
[932] **E3:** Son **convexos**, tienen **base** <**E2: Tienen base**> […]

[936] **P:** Listo, entonces, ya encontraron otro sólido platónico, entonces ya van tres, faltan otros dos.

((un tercer candidato que surge es una pirámide cuyas caras son triángulos isósceles, tal y cómo se muestra en la siguiente imagen, lo que conlleva a la siguiente discusión))

[938] **P:** Listo, miren este […] este lo construyeron ellos ((señala a los estudiantes cinco y seis)) (1''), ¿todas sus caras son iguales?
[939] **E6 y E4:** No
[940] **P: ¿**Por qué? Este es un triángulo, este también es un triángulo ((señala cada una de las caras compuestas por el triángulo equilátero y los triángulos isósceles))
[941] **E6:** Pero son más **largas** <**E4:** Pero es **más larguito**>
[942] **P:** ¿son más largas qué? < **E3:** osea tiene **aristas más largas** >
[943] **E6: Las aristas**
[944] **P:** Entonces obligatoriamente ¿qué les diría eso? Que en el sólido platónico sus aristas deben ser ¿qué?
[945] **E4:** Todas **iguales** <**E5 y E6:** Iguales>
[946] **P:** Entonces ya tenemos otra: que las aristas deber ser **todas iguales**

((en este momento dos de los grupos descartan los triángulos isósceles y los rectángulos para construir los posibles candidatos y empiezan a construir diferentes sólidos, generando el candidato ilustrado a la izquierda))



[960] **P:** Pongan atención primero a este (2''). Este, todas sus caras son iguales ¿cierto?
[961] **E5:** Sí
[962] **P:** ¿Sus aristas?
[963] **E2, E3 y E5:** Son **iguales**
[964] **P:** Pero resulta que este es un no sólido platonico
[965] **E3:** Aish…
[965] **E2:** Porque **no tiene base**
[967] **P:** Sí la tiene <**E3:** Sí la tiene>
[968] **E5:** Y también si trazamos un **linea** de acá a acá queda por dentro <**E2:** Entonces ¿por qué no es?>
[970] **P:** Eso, y sigue siendo cónvexo […] entonces es cónvexo, tiene todas sus caras iguales y sus aristas son iguales; quiere decir que estas caracteristicas no son suficientes, entonces hace falta encontrar otra <**E3:** Quizá es que debe ser **derecho**>. ¿dime?
[971] **E3:** Tiene que ser **derecho** ((risas))
[972] **P:** ¿a qué te refieres con derecho?
[973] **E3:** Osea que no esté **torcido** ((risas))
[974] **P:** Pero este ((muestra el tetraedro)) sus caras están torcidas, si lo quieren ver de esa manera
[975] **E3:** Es que no sé como explicarlo, es que parece que fuera a caer
[976] **P:** A eso se le dice que es <**E6:** Que está **inclinado**> aja, se le dice que está inclinado o que es oblicuo

Descripción: En este momento los estudiantes no identifican la propiedad que hace que el hexaedro propuesto no sea sólido platónico, por lo que se decide no discutir más, por ahora, sobre este candidato y construir otros sólidos.

Los siguientes candidatos fueron el octaedro y una bipirámide triangular, al evaluarlas y compararlas los estudiantes identifican que los grados de cada vértice en los sólidos platónicos deber ser iguales. Sin embargo, una vez que surgieron estas nuevas características, los estudiantes se cuestionaron nuevamente por el hexaedro cuyas caras son rombos pues en este también los grados de los vértices son iguales, por lo que la profesora les pide que comparen particularmente las figuras que son cuadrados y los rombos para que lograran identificar que los ángulos de cada una de las caras deben también ser iguales.

Faltando el último sólido platónico dos de los grupos intentan construirlo con cuadrados y pentágonos, pero se dan cuenta que si usan cuadrados el sólido resultante o es un cubo o es un sólido en el que una de sus caras es un rectángulo. Debido a estos intentos fallidos, los estudiantes se dieron cuenta que las caras del último sólido debían ser triángulos equiláteros. A partir de las características que se han mencionado hasta el momento surgen diferentes estrategias de construcción, tal y como la que se discute a continuación.

[1093] **E3:** Ay no… ese ya lo hicieron, entonces hagámoslo con más **triángulos**, con cinco […] ((empiezan a construir un sólido)) pero espera que no porque acá ((señala uno de los vértices del sólido que intentan construir)) van a ser cuatro y acá cinco ((haciendo referencia al número de triángulos que convergen en cada vértice)) […]

[1094] **E4:** Pero podemos quitarle uno a este ((señala el vértice donde convergen cinco triángulos))

[1095] **E3:** No porque va a quedar de cuatro y ese ya lo hicieron ((el octaedro)) […]

[1096] **P:** Déjame ver cómo van (4’’) ((la profesora observa el sólido que está construyendo el grupo dos y cuenta el grado de cada vértice)) cuatro, cuatro, cinco

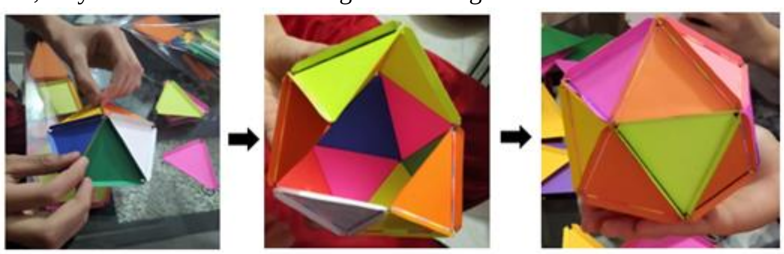
[1097] **E3:** Entonces no se puede

[1098] **P:** Entonces tienen que irlo cambiando, acuérdate que los grados deben ser <**E3:** Es que… sí queda, osea tiene que quedar todos cinco> aja, todos cinco

[1099] **E3:** porque el de todo cuatro ya lo hicieron ((el octaedro))

[1100] **P:** ¡Exacto! Muy bien

El usar como propiedad que en cada vértice convergieran el mismo número de triángulos, llevó a dos de los grupos a construir el icosaedro, tal y como se ilustra en la siguiente imagen.



Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir	
Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado	- Construir y evaluar ejemplos y no-ejemplos - Describir propiedades - Construir explicaciones y argumentos

Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso			
	¿qué palabras matemáticas se utilizan?	**¿cómo las usan?**	**¿para qué las usan?**
Uso de palabras	- Caras planas - Caras iguales - Convexo - Base - Aristas largas - Aristas iguales - Línea - Derecho - Torcido - Inclinado - Triángulos	La mayoría de las palabras usadas se usan de manera correcta, sin embargo, algunas palabras como “línea” “torcido” inclinado” se usan de manera coloquial para referirse a diferentes características o elementos de los sólidos.	- Para caracterizar los sólidos que van surgiendo como ejemplos y no-ejemplos. - Para comparar constantemente algunos de los elementos de lo sólidos y así describir propiedades de estas.

	Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir	**Sobre las actividades que se hacen con o por los objetos geométricos**
Narrativas	Surgen las siguientes *narrativas* referentes a las propiedades y relaciones de los sólidos platónicos - Son sólidos cuyas caras son planas e iguales - Son sólidos cuyas aristas son iguales - Tienen base. - Son convexos - El grado de cada de uno sus vértices deben ser igual.	No surgen afirmaciones sobre las actividades que se hacen con o por los objetos que se esperan definir.
Mediadores visuales	Los principales *mediadores visuales* que coordinaron el *discurso* de los estudiantes fueron cada uno de los candidatos que iban surgiendo como sólidos platónicos, centrándose en los elementos que los componen	
Rutinas	En este proceso de construcción de ejemplos y no-ejemplos reconocimos un conjunto de acciones repetitivas que realizan los estudiantes para construir los tres sólidos platónicos faltantes. Estas acciones son - Observar y evaluar los candidatos propuestos - Reconocer una propiedad relevante para caracterizar los sólidos platónicos - Considerar la nueva información que les da esta propiedad para eliminar algunos de los polígonos o las formas de usarlos e ir acotando la forma de construir los candidatos	

Fase 3 de análisis

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

Debido al objetivo mismo de la actividad y la forma en la que se realizó, sin duda alguna un *aspecto de la práctica matemática de definir* que debía desarrollarse es el de *construir y evaluar ejemplos y no-ejemplos*, pues contantemente los estudiantes construyen con el material concreto dado posibles candidatos de sólidos geométricos y van evaluando las características que se van descubriendo en cada uno de ellos.

Tal y como hemos identificado en los análisis realizados anteriormente el desarrollo del aspecto *construir y evaluar ejemplos y no-ejemplos* conduce al desarrollo de otros dos aspectos referentes a la *descripción de propiedades* y la *construcción de explicaciones o argumentos*, pues en el proceso de esa evaluación se es necesario argumentar el porqué del rechazo o la aceptación de un ejemplo, y esta argumentación se hace a partir de la *descripción de propiedades* de lo sólidos platónicos.

Es de resaltar que aunque si bien en el protocolo de transcripción que describimos en la tabla anterior se evidencia en menor medida que los estudiantes *construyen explicaciones o argumentos* y *evalúan ejemplos y no-ejemplos* para determinar si pertenecen o no a la familia de sólidos platónicos, pues la única evidencia es la que se ilustra en las líneas 925-932, durante este proceso de construcción de candidatos sí se manifestó en diferentes momentos este aspecto en el que los estudiantes evalúan y argumentan el rechazo de un no-ejemplo (ver los protocolos de transcripción del anexo 10) pues surgieron más candidatos que los descritos en la anterior tabla, solo que queríamos ilustrar aquellos candidatos que fueron claves para determinar las propiedades específicas de los sólidos platónicos.

En cuanto a las herramientas teóricas

Consideramos que la herramienta teórica que tomó más peso en esta actividad fueron los *mediadores visuales*, no queremos dar a entender que en las otras actividades no fueran importantes, solo que en esta se puede ilustrar más el papel relevante que tuvieron los ejemplos y no-ejemplos que se iban construyendo, pues fueron a partir de estos que los estudiantes pudieron especificar las propiedades de los sólidos platónicos e ir eliminado características no relevantes que iban surgiendo. Por ejemplo, cuando se construyeron y evaluaron simultáneamente el octaedro y la bipirámide triangular, lo estudiantes identificaron la necesidad de que el grado de cada uno de los vértices de los sólidos platónicos fuera el mismo, o cuando se evaluó el dodecaedro los estudiantes identificaron que no era necesaria la propiedad de que los sólidos platónicos no tuvieran tantas caras (ver líneas 925-927).

Este papel relevante que tuvieron los *mediadores visuales* llevó a los estudiantes a mencionar diferentes palabras matemáticas con el fin de comparar y caracterizar constantemente los ejemplos y no-ejemplos y así crear las diferentes *narrativas* que describimos en la anterior tabla y desarrollar el aspecto *describir propiedades*. Sin embargo, algunos *usos de palabras* no fueron del todo matemáticas: palabras como "torcido", "inclinado", "no está derecho", "parece que se fuera a caer", fueron utilizadas para caracterizar el hexaedro cuyas caras eran rombos, desconociendo totalmente la palabra oblicuo; o el *uso de la palabra* "línea" para referirse a una diagonal.

Ahora, de acuerdo con Sfard (2008), los patrones repetitivos podemos identificarlos a partir del análisis del *uso de palabras*, *narrativas* y *mediadores visuales*, en este caso identificamos un conjunto de acciones repetitivas relacionadas con los *mediadores visuales* utilizados en esta actividad que nos permitieron reconocer una *rutina* en el que hacer de los estudiantes cuando se encuentran construyendo ejemplos y no-ejemplos de una familia de sólidos. Este conjunto de acciones se evidencia, por ejemplo, cuando los estudiantes evalúan el dodecaedro reconocen como propiedad relevante que en los sólidos platónicos sus caras deben ser iguales, lo que llevó a E3 y E4 a organizar el material dado clasificando las formas de los polígonos con el fin de construir candidatos en base a estas clasificaciones; o cuando los estudiantes reconocen como propiedad relevante que las aristas también deben ser iguales, esto llevó a que los estudiantes descartaran el uso de triángulos isósceles y rectángulos para construir candidatos de los sólidos platónicos.

4.2.3.1. Síntesis de la Caracterización y el Desarrollo de la Práctica Matemática de Definir en la Tercera Actividad.

Los análisis realizados de esta actividad ilustraron el desarrollo de diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir:* (1) *describir propiedades,* (2) *establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas,* (3) *construir y evaluar ejemplos y no-ejemplos* y (4) *construir explicaciones o argumentos*; siendo nuevamente el primer aspecto el que toma más relevancia durante la realización de la actividad, pues se evidenció en los dos análisis realizados; sin embargo, el tercer aspecto tomó un papel importante para que los estudiantes lograrán construir los cinco sólidos platónicos al tiempo que iban evaluando los diferentes candidatos que se iban proponiendo.

En cuanto a las herramientas teóricas es de resaltar lo siguiente:

- Los candidatos que iban surgiendo como ejemplos y no-ejemplos fueron los principales *mediadores visuales* y además destacaron en esta actividad, pues fueron a partir de estos que los estudiantes lograron establecer diferentes *narrativas* sobre las propiedades de los sólidos platónicos con diferentes *usos de palabras* matemáticas, algunas de ellas en un sentido coloquial. Esto refirma la idea de varios autores (Alvarado y González, 2016; Kobiela y Lehrer, 2015; Okazaki, 2013; Tanguay y Grenier, 2010) de que el uso de ejemplos y no-ejemplo es importante en el proceso de construcción y compresión de las definiciones en la medida que ayuda a extraer las características propias de los objetos a definir.

- Las palabras matemáticas se usaban principalmente para caracterizar algunos ejemplos y no-ejemplos de sólidos platónicos, comparando constantemente, en términos de forma, cantidad y longitud, las características de sus elementos (caras y aristas) y así lograr desarrollar aspectos como *describir propiedades*.
- Nuevamente identificamos en el *discurso* de los estudiantes una *narrativa* que se relaciona no con las afirmaciones que se pueden hacer sobre las propiedades de los sólidos platónicos, sino con las actividades que se estaban haciendo con ellos (determinar similitudes y diferencias), pues los estudiantes afirman que todos los no-ejemplos deben tener una característica en común o que los no-ejemplos no deben compartir una característica con los ejemplos. El hecho de que esta *narrativa* se manifieste en dos de las actividades nos puede llevar a caracterizarla como una *rutina*.
- Se identificaron dos *rutinas* en el que hacer de los estudiantes: una de ellas, y la cual también identificamos en la actividad uno y dos, se caracteriza por un conjunto de acciones que les permite a los estudiantes determinar similitudes y diferencias y por tanto desarrollar el aspecto *describir propiedades*, acciones que describimos en la Tabla 13, y la otra se caracteriza por un grupo de acciones (ver descripción en la Tabla 14) que les permitió a los estudiantes construir los cinco sólidos platónicos.

4.3. Etapa 2 de Análisis: Caracterización de las Definiciones

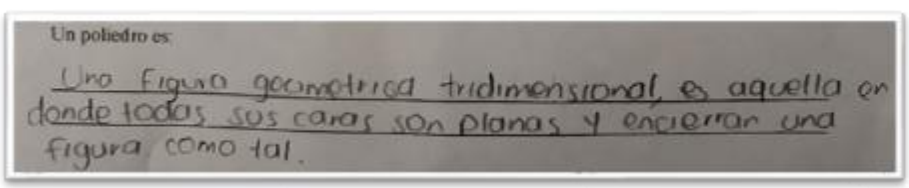
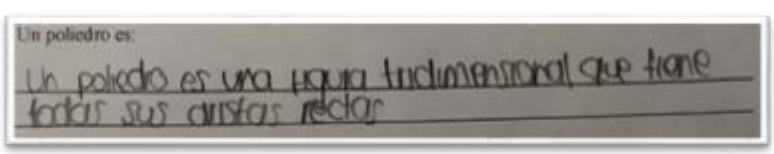
Una vez que describimos y caracterizamos todo lo ocurrido durante el proceso de construcción de definiciones es necesario caracterizar su producto final: las definiciones consensuadas para cada una de las familias de sólidos que se lograron definir. Para esto se toman en cuenta las respuestas dadas en las hojas de trabajo uno y dos y el cuestionario final.

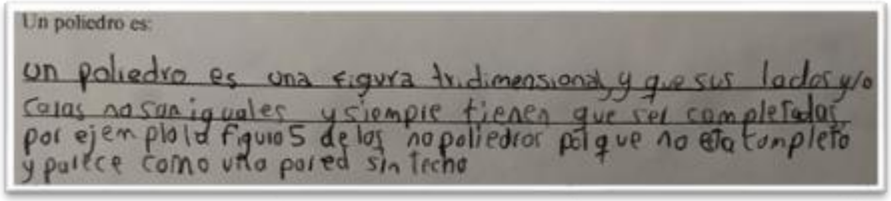
El análisis que se realiza a continuación se basa en lo expuesto en el apartado 2.1.2 del segundo capítulo para caracterizar las definiciones en términos de si son jerárquicas, contradictorias, ambiguas, no circulares y si tienen las condiciones necesarias y suficientes. Además, el análisis de las definiciones también se realiza para caracterizar el *aspecto de la práctica matemática de definir* referente a *proponer una definición* pues quizás podemos identificar diferentes *narrativas* y *rutinas* en el *discurso* escrito de los estudiantes sobre qué y cómo conciben ellos el establecimiento de una definición.

4.3.1. Definiciones Propuestas por los Participantes

En las Tabla 15 y Tabla 16 se ilustran las definiciones tanto para la familia de poliedros como para los poliedros cóncavos, dadas por cada uno de los tres grupos que se formaron, después de haber desarrollado los *aspectos de la práctica matemática de definir* que caracterizamos en la sección 4.2.

Tabla 15. Definiciones propuestas de la familia de poliedros

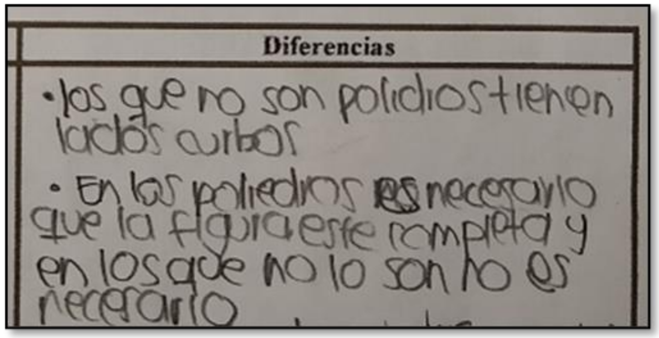
La familia de poliedros	
Grupo 1: E1 y E2	 Un poliedro es: Una figura geometrica tridimensional, es aquella en donde todas sus caras son planas y encierran una figura como tal.
Grupo 2: E3 y E4	 Un poliedro es: Un poliedo es una figura tridimensional que tiene todas sus aristas rectas
Grupo 3: E5 y E6	

	 Un poliedro es: un poliedro es una figura tridimensional y que sus lados y/o caras no son iguales y siempre tienen que ser completadas por ejemplo la figura 5 de los no poliedros porque no esta completo y parece como una pared sin techo

De acuerdo con Zaslavsky y Shir (2005), las tres definiciones propuestas para la familia de poliedros ilustradas en la tabla anterior se pueden caracterizar como: no ambiguas, ya que contienen *usos de palabras* que se interpretan de manera única; no contradictorias en el sentido de que las características de los poliedros que se contemplan en cada una de las definiciones no son contradictorias; y son no circulares debido a que en ellas no se hace mención al propio concepto que se está definiendo, pues en ninguna de las definiciones se identificaron cosas como “un poliedro es un poliedro”.

En cuanto a las condiciones necesarias y suficientes que debe tener una definición se puede identificar en cada una de las definiciones lo siguiente:

- La definición propuesta por el grupo uno se puede considerar como una definición con las condiciones necesarias y suficientes, pues el grupo incluye en su definición tanto la necesidad de que las caras de los poliedros deben ser planas como que encierran un volumen finito, esta última condición el grupo uno la identifica como que debe encerrar una figura como tal.
- En cuanto a la definición propuesta por el grupos 2 se puede evidenciar que la definición contiene condiciones necesarias pero no suficientes, pues a pesar de que incluyen la condición de que las aristas en un poliedro deben ser rectas, no se considera una condición que se relacione con que el poliedro debe encerrar un volumen finito. Esto a pesar de que el mismo grupo identificó como diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos mostrados en la hoja de trabajo 1 (ver anexo 4) que era necesario que los poliedros fueran una figura encerrada, tal y como se ilustra en la Figura 13.



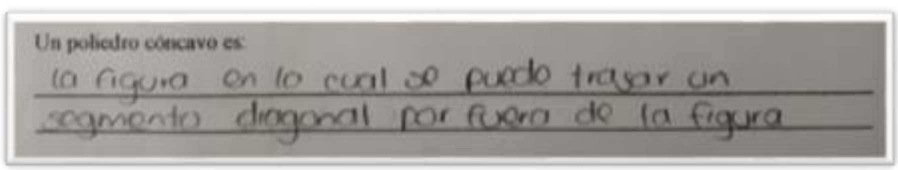
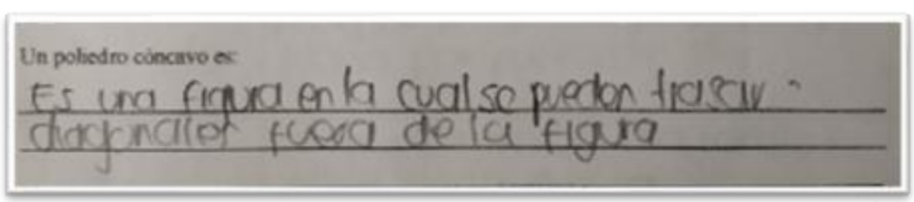
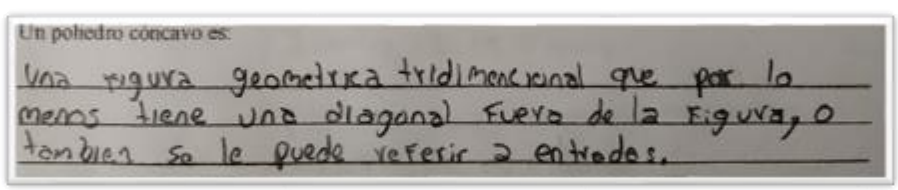
Diferencias

- los que no son polidios tienen lados curbos
- En los poliedros es necesario que la figura este completa y en los que no lo son no es necesario

Figura 13. Condiciones necesarias propuestas por el grupo 2 para caracterizar la familia de poliedros.

- La definición propuesta por el grupos 3 se puede caracterizar como una definición con condiciones innecesarias, ya que el grupo 3 incluye características que restringe a cierto tipo de poliedros por el hecho de considerar que tienen caras distintas, por lo que bajo esta condición algunos sólidos como el cubo o una pirámide triangular no serían considerados como poliedros.

Tabla 16. Definiciones propuestas para los poliedros cóncavos

La familia de poliedros cóncavos	
Grupo 1: E1 y E2	 Un poliedro cóncavo es: la figura en lo cual se puedo trazar un segmento diagonal por fuera de la figura
Grupo 2: E3 y E4	 Un poliedro cóncavo es: Es una figura en la cual se pueden trasar diagonales por fuera de la figura
Grupo 3: E5 y E6	 Un poliedro cóncavo es: Una figura geometrica tridimencional que por lo menos tiene una diagonal fuera de la figura, o tambien se le puede referir a entrados.

Al analizar las definiciones ilustradas en la anterior tabla podemos evidenciar lo siguiente:

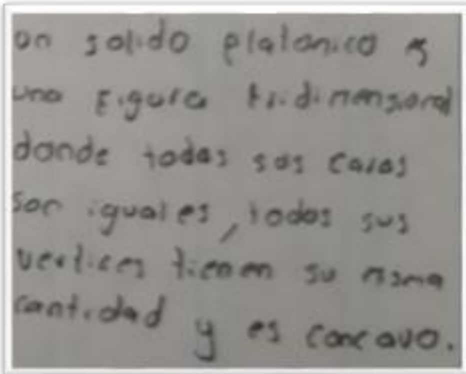
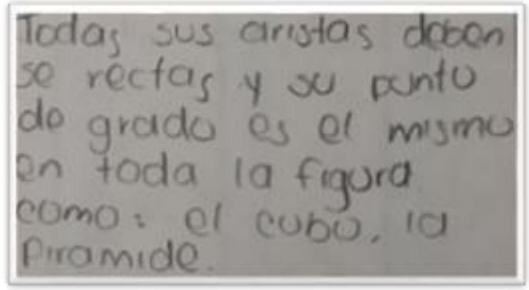
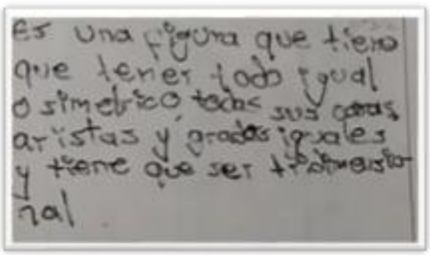
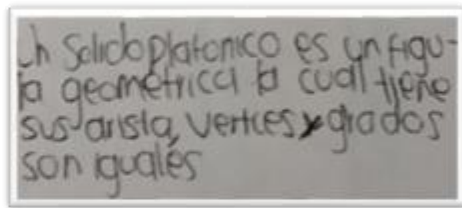
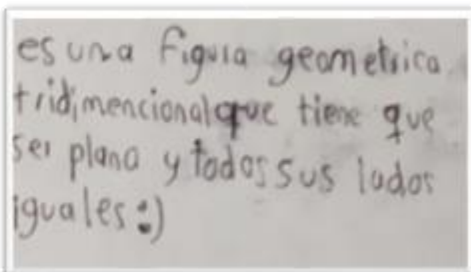
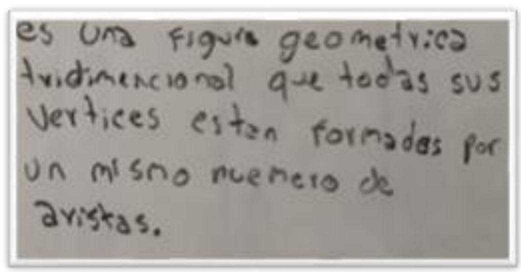
- Las definiciones propuestas por el grupo 1 y 2 se pueden considerar, desde el punto de vista de Zaslavsky y Shir (2005), como definiciones ambiguas, pues el significado del *uso de palabras* como “figura” o “segmento diagonal” no se pueden interpretar de manera única, lo que lleva también a que estas definiciones no tengan las condiciones necesarias y suficientes para definir la familia de poliedros cóncavos, ya que, ignorando el significado del *uso de la palabra* “figura” y “diagonales”, bajo la definición que proponen los estudiantes del grupo 1 y 2, un polígono cóncavo podría ser considerado como un poliedro cóncavo al no darles el carácter de figura geométrica tridimensional.
- A diferencia del grupos 1 y 2, la primera parte de la definición propuesta por el grupo 3 se puede considerar una definición no ambigua; sin embargo, es una definición que contiene condiciones necesarias como que sea una figura geométrica tridimensional que tiene al menos una de sus diagonales por fuera de la figura, pero no son condiciones suficientes, pues un sólido geométrico como el que se muestra en la Figura 14 puede considerarse un poliedro cóncavo, bajo la definición que propone el grupo 3. Esto nos lleva a caracterizar esta definición como una definición no jerárquica, pues los estudiantes no *establecen relaciones sistemáticas* al no considerar los poliedros cóncavos como parte de la familia poliedros, a pesar de que la familia de poliedros fue previamente definida.

Figura 14. Sólido geométrico considerado como poliedro cóncavo bajo la definición propuesta por el grupo 3

Ahora, las definiciones propuestas para la familia de sólidos platónicos se realizaron individualmente, estas definiciones se ilustran en la siguiente tabla.

Tabla 17. Definiciones propuestas para los sólidos platónicos

Los sólidos platónicos	
E1	**E2**

	
E3	**E4**
	
E5	**E6**
	

De acuerdo con las definiciones propuestas para los sólidos platónicos por cada uno de los estudiantes se puede evidenciar lo siguiente.

Primero, cinco de las seis definiciones, excepto la propuesta por E6, se pueden considerar como definiciones ambiguas pues el *uso de palabras* utilizadas se puede interpretar de maneras distintas; por ejemplo, en la definición propuesta por E5 se menciona la expresión "lados iguales" que puede interpretarse como que se hace mención o a las aristas o a las caras, por lo que el uso de esta palabra no puede interpretarse de manera única. Las otras cuatro definiciones en las que se usan expresiones como "todos sus vértices tiene su misma cantidad", "el punto de grado es la misma en toda la figura", " tiene grados iguales", "vértices y grados iguales" para referirse a que todos los vértices de un sólido platónico tienen el mismo grado, tampoco pueden interpretarse de manera única, seguramente una persona que desconozca completamente la definición de sólidos platónicos al leer estas expresiones no interpretaría a lo que se hace referencia con estas.

Segundo, las seis definiciones no son contradictorias ni circulares, pues en ninguna de ellas se incluye propiedades contradictorias o se hace referencia al propio concepto.

Tercero, ninguna de las definiciones es jerárquica pues no consideran a los sólidos platónicos como parte de la familia de poliedros, a pesar de que previamente esta familia fue definida.

Y por último, ignorando el *uso de palabras* ambiguas, las seis definiciones no tienen las condiciones necesarias y suficientes para definir los sólidos platónicos ya que:

- E1 propone una definición en la que no se tiene en cuenta que las aristas de un sólido platónico también deben ser iguales y que los ángulos de cada una de las caras deben ser iguales, pues una pirámide triangular cuyas caras sean triángulos isósceles o un hexaedro cuyas caras son rombos, pueden considerarse como un sólido platónico. Es de mencionar que creemos que E1 se confundió con el uso de la palabra cóncavo pues quería referirse a que los sólidos platónicos deben ser convexos.
- E2 propone una definición en la que no se tiene en cuenta condiciones como que en un sólido platónico sus caras y aristas deben ser iguales, los ángulos de cada una de las caras deben ser iguales, y además debe ser convexo; pues cualquier prisma, solo por dar un ejemplo, sea convexo o no puede considerarse un sólido platónico bajos las condiciones en las que E2 define los sólidos platónicos. Además en esta definición no se especifica qué es un sólido platónico, no se encuentran expresiones como "es una figura geométrica" o "es un poliedro".
- La definición de E3 no tiene la condición de que el sólido platónico debe ser convexo y que el ángulo de cada una de las caras debe ser igual.
- E4 propone una definición en la que no se considera el hecho de que las caras de los sólidos platónicos deben ser iguales y además deben ser convexos, pues

considerando esta definición lo sólidos arquimedianos puede ser considerados como sólidos platónicos.

- En la definición de E5 no se mencionan condiciones relacionadas con la convexidad y la igualdad del grado de cada vértice de los sólidos platónicos ni de la igualdad de los ángulos de cada una de las caras.
- Y en la definición propuesta por E6 no se mencionan propiedades relacionadas con que las caras y los ángulos de cada una de ellas deban ser iguales, que las aristas también deben ser iguales, o que un sólido platónico deba ser convexo, pues cualquier prisma podría ser considerado un sólido platónico bajo estas condiciones.

Es de resaltar que las definiciones que se propusieron en subgrupos son más formales, desde el punto de vista matemático, en comparación con las definiciones que se propusieron individualmente, quizás a que el proceso de discusión de construcción de definiciones con varios es más efectivo y rico que cuando se realiza de manera individual.

4.3.2. Características del Discurso Cuando se Desarrolla el Aspecto Proponer una Definición

Teniendo en cuenta las definiciones propuestas por los participantes ilustradas en las tres últimas tablas pudimos evidenciar algunas características relacionadas con posibles *narrativas* y *rutinas* que surgieron cuando los estudiantes desarrollan el *aspecto de la práctica matemática de definir* relacionada con *proponer una definición*.

Una de las primeras características que evidenciamos en el desarrollo del *aspecto de proponer una definición* es que surge de nuevo una *narrativa* que describimos e ilustramos en el análisis de la Tabla 8 de la primera actividad, *narrativa* que se relaciona con las actividades que se hacen con los objetos geométricos, en este caso definirlos. Esta *narrativa* se relaciona con el hecho de que algunos de los participantes consideran que definir es dar una lista larga de características, tal y como se evidencia en la definición dada para la familia de poliedros por el grupo tres (ver Tabla 15), pues mencionan todas las similitudes y diferencias que identificaron en los ejemplos y no-ejemplos de los poliedros, sin identificar cuáles de ellas eran necesarias y suficientes para definirlos. El hecho de que esta *narrativa* la identifiquemos en diferentes momentos del análisis del *discurso* de los participantes podríamos considerar entonces esta *narrativa* como una *rutina*.

También identificamos una acción repetitiva en el quehacer de los estudiantes cuando *proponen definiciones*, esta acción consiste en mencionar o representar gráficamente un ejemplo o un no-ejemplo de la familia de sólidos que se define. Esto se evidencia en la definición propuesta por el grupo 3 para la familia de poliedros (ver Tabla 15) y en la definición de E2 cuando define los sólidos platónicos (ver Tabla 17), pues el grupo tres mencionan que los poliedros deben ser figuras completas y agregan que no pueden ser como uno de los no-ejemplos que es una figura que no está completa, o E2 que menciona en su definición al cubo como un sólido platónico.

Este carácter repetitivo nos permite identificar la acción realizada por los estudiantes como una *rutina*, además, también identificamos esta acción en el cuestionario final, tal y como se ilustra en la Figura 15, donde dos estudiantes agregan una representación gráfica para ejemplificar la definición que dan de poliedro cóncavo, indicando que al trazar una de sus diagonales esta queda por fuera.

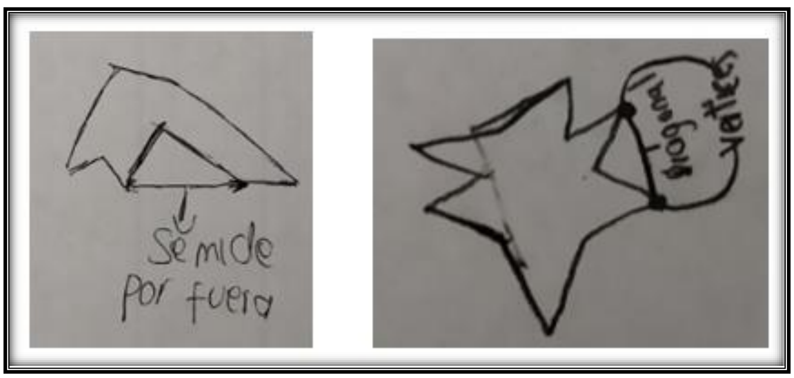


Figura 15. Representaciones gráficas propuestas para ejemplifica un poliedro cóncavo.

Capítulo 5.
Discusión de Resultados y Conclusiones

En el capítulo anterior detallamos el análisis realizado para lo datos recogidos de esta investigación en el que identificamos y caracterizamos diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir* que se manifiestan cuando estudiantes de secundaria participan en la construcción de definiciones de algunas familias de sólidos geométricos con lo que ellos no se encontraban familiarizados. Esto nos permitió evidenciar diferentes elementos importantes que discutimos a continuación y que contrastamos con los resultados de algunas investigaciones reportadas en nuestra revisión bibliográfica, y que además exhiben cómo se caracteriza la *práctica matemática de definir* en nuestra población de estudio.

Por tanto, en este capítulo discutimos estos hechos importantes, en un primer momento para dar respuestas a nuestras preguntas de investigación, y en un segundo momento para mencionar y rescatar algunos resultados adicionales.

5.1. Discusión En torno a las Preguntas de Investigación

Recordemos que en nuestra revisión bibliográfica se resalta la importancia de que los estudiantes de diferentes niveles educativos participen en la formación y construcción de definiciones; sin embargo, en la delimitación del problema manifestamos el hecho de que gran parte de las investigaciones que centran su atención en lo mencionado trabajan con maestros en formación, desconociendo mucho y no teniendo un panorama general sobre cómo se desarrolla lo que identificamos como la *práctica matemática de definir* en estudiantes de secundaria. Esto nos llevó a proponer un estudio exploratorio que nos permitiera identificar, caracterizar y describir todo lo ocurrido cuando estudiantes de secundaria participan en la *práctica matemática de definir*, y así establecer como pregunta general y orientadora de nuestro trabajo: ¿Cómo se caracteriza y se desarrolla la *práctica matemática de definir* llevada a cabo por estudiantes de secundaria cuando definen conceptos propios de la geometría sólida y cuando no están familiarizados con los conceptos a definir?

Para dar respuesta a esta pregunta orientadora establecimos tres preguntas auxiliares y específicas relacionadas con los elementos conceptuales y teóricos en los que centramos nuestra atención para realizar el análisis: ¿Qué *aspectos de la práctica matemática de definir* se manifiestan cuando estudiantes de secundaria participan en el proceso de construcción de definiciones de conceptos de la geometría sólida?; ¿Qué elementos de la teoría de Sfard pueden evidenciarse para caracterizar el *discurso* de estudiantes de secundaria cuando participan en diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir*?, y, si se evidencian algunos elementos, ¿cómo se caracterizan?, y ¿Qué características tienen la definiciones propuestas por estudiantes de secundaria cuando definen conceptos propios de la geometría sólida y cuando no están familiarizados con estos?

La discusión en torno a las respuestas de cada una de estas preguntas la describimos a continuación.

5.1.1. Sobre los Aspectos de la Práctica Matemática de Definir

Identificamos que los estudiantes de secundaria con quienes realizamos nuestra experimentación participan y desarrollan diferentes *aspectos de la práctica matemática definir*, tales como: (1) *construir y evaluar ejemplos y no-ejemplos,* (2) *describir propiedades,* (3) *construir explicaciones o argumentos,* (4) *establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas,* (5) *hacer preguntas de definición,* (6) *negociar criterios para juzgar la adecuación o aceptabilidad de la definición* y por supuesto (7) *proponer una definición.* Cada uno de estos aspectos se manifiestan en diferentes momentos del proceso de definir y algunos de ellos se relacionan entre sí.

Los tres primeros aspectos son los que más prevalecieron en las tres actividades implementadas e identificamos que son aspectos que se relacionan y se manifiestan conjuntamente, pues cuando los participantes en un primer momento *evalúan ejemplos y no-ejemplos* para identificar similitudes y diferencias de una familia de sólidos geométricos particular se es necesario *construir explicaciones o argumentos* para justificar el porqué de la importancia o la relevancia de una propiedades observada y así lograr *describir propiedades* de cada una de las familia de sólidos que se esperaba definir. También se puede evidenciar la relación existente entre estos tres aspectos cuando los estudiantes *evalúan ejemplos y no-ejemplos* para determinar si pertenecen a una familia particular de sólidos, pues esta evaluación conduce a que los participantes *construyan argumentos y explicaciones* a partir de la *descripción de propiedades* para justificar la aceptación o el rechazo del ejemplo o no-ejemplo que se esté evaluando.

Es de resaltar que la existencia de esta relación entre estos tres aspectos implica que el desarrollo del aspecto *construir explicaciones o argumentos* se manifieste únicamente en dos sentidos: para justificar la relevancia de una propiedad observada y para justificar la aceptación o el rechazo de un ejemplo como parte de una familia de sólidos; sin embargo, no se desarrolla el aspecto *construir explicaciones y argumentos* para discutir sobre la aceptación o el rechazo de una definición, pues no se presentaron discusiones en torno a si las condiciones en las que estaban establecidas las definiciones propuestas eran o no las adecuadas.

Lo mencionado en el párrafo anterior nos lleva a afirmar que por tanto el aspecto *negociar criterios para juzgar la adecuación o la aceptabilidad de una definición* se desarrolla en menor medida, pues solo lo identificamos en uno de los subgrupos de trabajo y solo para la primera actividad. Sin embargo, durante todo el proceso de construcción de definiciones que llevaron a cabo nuestros participantes evidenciamos que este aspecto se manifiesta en diferentes momentos y en una índole distinta a la que proponen Kobiela y Lehrer (2015), pues aunque no se desarrolla este aspecto cuando se *propone una definición* para negociar criterios sobre la condiciones necesarias y suficientes para establecer una definición, sí se desarrolla cuando aspectos como *describir propiedades* o *construir explicaciones y argumentos* para *evaluar ejemplos y no-ejemplos* se manifiestan. Es decir, algunos *aspectos de la práctica matemática de definir*, no solo el de *proponer una definición*, llevan consigo un proceso de negociación.

Lo que hemos mencionado hasta el momento sobre el hecho de que no se presenten discusiones sobre la adecuación de una definición nos permite también afirmar que los estudiantes de secundaria que participaron no desarrollan el aspecto que respecta a la *revisión de definiciones*, ya que al no presentarse discusiones en torno a las condiciones que deben tener una definición no hay un proceso de retroalimentación en el que los estudiantes se vean en la obligación de revisar las definiciones que propusieron.

Esto pone a discusión de que a pesar de que Zandieh y Rasmussenb (2010) consideran que actividades como formular una definición, negociar lo que se quiere que sea una definición y refinar o revisar la definición son actividades que también hacen parte del proceso de definir, en nuestra población de estudio son actividades que no se manifiestan, quizás porque los estudiantes no tienen experiencias previas en la participación de construcciones de definiciones o discusiones en torno al desarrollo de estas actividades, tal y como sí ocurre en las poblaciones de estudio en investigaciones como las de Escudero et al. (2014), Gavilán-Izquierdo et al. (2019) y Martín-Molina et al. (2018) en donde maestros en formación sí *negocian criterios* y *construyen argumentos y explicaciones* para juzgar las definiciones y por tanto revisarlas, sí existe una preocupación por evaluar la adecuación de una definición.

Esto también lo podemos validar por la manera en la que se manifestó el aspecto *hacer preguntas de definición*, pues aunque los estudiantes sí hacen preguntas, estas preguntas se relacionan más sobre la manera de cómo describir un característica en una definición o preguntas relacionadas con características que cumplen cada una de las familias definidas, pero no se manifiestan preguntas en relación con las condiciones necesarias y suficientes que debe tener una definición, si la definición es adecuada o no desde punto de vista formal de las matemáticas, etc. Sin embargo, es de resaltar el papel importante que jugó el aspecto *hacer preguntas* cuando los estudiantes no identificaban ninguna propiedad relevante para definir una familia de sólidos, como lo fue el caso de la actividad de poliedros cóncavos, que a partir de los diferentes cuestionamientos que planteaban los estudiantes se logró identificar algunas características importantes para la familia de poliedros cóncavos.

En cuanto al desarrollo del aspecto *establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas* es de mencionar que solo lo identificamos en uno de los subgrupos de la segunda actividad implementada en la que dos estudiantes logran caracterizar los poliedros cóncavos como parte de la familia de poliedros, mientras que los demás estudiantes nombraban nuevamente todas las características de la familia de poliedros; no obstante, cuando los estudiantes *propusieron una* *definición* no se evidenció el aspecto *establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas,* pues ninguna de las definiciones propuestas eran jerárquicas.

Vale la pena mencionar que este trabajo nos permitió validar la idea de Kobiela y Lehrer (2015) sobre que este marco de los ochos *aspectos de la práctica matemática de definir* es un marco práctico y favorable para investigar la participación de estudiantes en la *práctica matemática de definir,* pues a partir de la identificación de estos pudimos dar cuenta de cómo nuestros estudiantes participan y llevan a cabo el proceso de construcción de definiciones.

Cada uno de los *aspectos de la práctica matemática de definir* que identificamos se desarrollaron y se manifestaron bajo el contexto de nuestra población de estudio, pues la caracterización que realizamos para cada uno de estos aspectos dependió del *discurso* particular que tienen nuestros participantes. Estas características del *discurso* las mencionamos a continuación.

5.1.2. Sobre las Características del Discurso de los Participantes Cuando Desarrollan Aspectos de la Práctica matemática de Definir

Con el fin de aportar más resultados para responder nuestra pregunta de investigación general y específicamente la pregunta relacionada con los elementos de la teoría de Sfard que pudimos evidenciar y caracterizar en el *discurso* de los estudiantes cuando participan en diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir,* podemos resaltar varios hechos importantes.

En el análisis del *discurso* se lograron identificar diferentes *usos de palabras, narrativas, mediadores visuales* y *rutinas* que se encuentran mutuamente relacionadas, pues durante el proceso de construcción de definiciones se logró evidenciar que se requiere de una interrelación entre estas herramientas teóricas para la creación de definiciones pues, en diferentes momentos del proceso, los estudiantes debieron centrarse en los distintos *mediadores visuales* para crear *narrativas* y *usos de palabras* matemáticas, y así lograr desarrollar aspectos como *describir propiedades, construir explicaciones o argumentos* y *construir y evaluar ejemplos y no-ejemplos.* Esto apoya la idea de Mariotti y Fischbein (1996) sobre que el proceso de definir demanda a la par la intervención de un nivel figural y un nivel conceptual, pues hay un constante ir y venir entre observar, identificar las características principales, plantear las características observadas, volver a observar y comprobar la definición planteada.

En cuanto a la caracterización del *uso de palabras* resaltamos que algunas de ellas se usan en sentidos distintos como lo fue el *uso de las palabras* "lado" para referirse tanto a las aristas como a las caras de un determinado sólido geométrico. También identificamos *usos de palabras* coloquiales y algo ambiguas como "entradas", "torcido", "derecho", "techo", "línea" "figura completa" etc., para referirse a características de algunos sólidos geométricos o para referirse a algunos de sus elementos (caras, diagonales, aristas).

El objetivo principal de los *usos de las palabras* se encuentra relacionado con el aspecto o los *aspectos de la práctica matemática de definir* que se encontraban desarrollando los participantes en un determinado momento, por ejemplo, si los estudiantes se encontraban *describiendo propiedades*, pues el fin mismo del *uso de palabras* era caracterizar una familia particular de sólidos geométricos.

Respecto al análisis de las *narrativas* que corresponden a la descripción de las características de los sólidos geométricos que se estaban definiendo, es de mencionar que la naturaleza misma de estas *narrativas* de que son proposiciones que están sujetas a aceptación o rechazo validan la afirmación que describimos anteriormente sobre que algunos *aspectos de la práctica matemática de definir* se relacionan y manifiestan conjuntamente, particularmente el de *describir propiedades y construir argumentos o explicaciones*; pues la creación de una *narrativa* que se cree verdadera lleva consigo un proceso de argumentación para decidir si aceptar o no una propiedad observada como relevante y propia para definir una familia de sólidos geométricos específica. Esto nos lleva a afirmar que la creación de *narrativas* conduce al desarrollo de varios *aspectos de la práctica matemática de definir.*

En cuanto a los *mediadores visuales* ya mencionamos que jugaron un papel importante para la creación de *narrativas* que permitían caracterizar cada una de las familias de sólidos geométricos definidas, sin embargo, algunos de los *mediadores visuales* identificados y que coordinaron el *discurso* de los participantes fueron un obstáculo para el desarrollo del aspecto *describir propiedades*, tal y como ocurrió en la segunda actividad en donde los estudiantes al centrarse en el *mediador visual* que tenían de una diagonal como que debe quedar adentro de la figura geométrica y debe estar en diagonal, no permitió que los estudiantes lograran identificar algunas características de las diagonales entre los poliedros cóncavos y convexos. Esto se debe a que, como lo mencionan Mantica y Freyre (2019), en la escuela la gran mayoría de los ejemplos presentados para un concepto en específico suelen ser prototípicos.

Una vez caracterizados y analizados *el uso de palabras, las narrativas* y los *mediadores visuales* no queda más que darle espacio a las *rutinas* que identificamos en el quehacer de los estudiantes.

Identificamos patrones discursivos en el *uso de palabras, narrativas* y *mediadores visuales* que nos permitieron establecer un conjunto de *rutinas* en las acciones de los participantes y que caracterizan el *discurso* de los estudiantes cuando construyen definiciones y cuando desarrollan diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir*, aspectos como *describir propiedades* y *construir y evaluar ejemplos y no-ejemplos*. Estas *rutinas* las describimos en la siguiente tabla.

Tabla 18. Rutinas identificadas en el quehacer de los estudiantes cuando participan en la práctica matemática de definirta

Rutinas	
En el uso de palabras	Ya que el *uso de palabras* como "entradas", "lados" y "figuras completas", solo por dar algunos ejemplos, se repiten varias veces en el *discurso* de los estudiantes se puede identificar como una *rutina* de los estudiantes: usar palabras coloquiales y ambiguas para referirse a un elemento o una característica de los sólidos geométricos que se estaban definiendo.

En las narrativas que respectan a las actividades que se hacen con los objetos geométricos	Cuando al inicio de cada una de las actividades propuestas los participantes se encontraban determinando similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos se manifestó repetidamente una *narrativa* en la que los estudiantes afirmaban que un no-ejemplo para ser considerado como tal no debía tener ninguna característica en común con los ejemplos, o que todos los no-ejemplos debían tener una característica en común
Para determinar similitudes y diferencias y desarrollar el aspecto describir propiedades	Para *describir propiedades* los estudiantes realizan una serie de acciones que les permite identificar similitudes y diferencias para determinar las características de una familia de sólidos en particular. Esta serie de acciones consiste en: - Mirar las figuras geométricas dadas como ejemplos y no-ejemplos - Identificar una característica relevante en uno de los sólidos geométricos - Evaluar y comparar si otros sólidos cumplen con estas características - Y plantear la similitud o diferencia observada
Para evaluar ejemplos y no-ejemplos	En el proceso de evaluación de ejemplos y no-ejemplos identificamos el siguiente conjunto de acciones en el quehacer de los participantes: - Mirar el ejemplo o no-ejemplo - Identificar la o las características que lo hacen o no parte de la familia de sólidos geométricos que se esté evaluando - Justificar a partir de las características identificadas el por qué la figura observada hace parte o no de la familia de sólidos evaluada

Para construir ejemplos y no-ejemplos	Particularmente en la tercera actividad en la que los estudiantes construían constantemente ejemplos y no-ejemplos de la familia de sólidos platónicos, identificamos el siguiente conjunto de acciones en este procesos de construcción: - Observar y evaluar los ejemplos y no-ejemplos propuestos - Reconocer una propiedad relevante para caracterizar a los sólidos platónicos - Considerar la nueva información que les brinda esta propiedad para eliminar algunos de los polígonos o las formas de usarlos con el fin de ir acotando la forma de construir los posibles candidatos a sólidos platónicos

Es de mencionar que la *rutina* que realizan los participantes para identificar similitudes y diferencias y desarrollar el aspecto *describir propiedades* no solamente es característica de nuestra población de estudio con estudiantes de secundaria, pues en las investigaciones de Escudero et al. (2014) y Fernández-León et al. (2019), con maestros en formación, se identificaron acciones relacionadas con las que describimos en la tercera fila de la anterior tabla en el quehacer de los maestros en formación cuando caracterizaban diferentes cuadriláteros o prismas, respectivamente.

Vale la pena resaltar que la identificación y caracterización de las herramientas teóricas de Sfard nos permitieron, tal y como lo mencionan Escudero et al. (2014) y Wang y Kinzel (2014), tener una visión detallada del proceso de construcción de definiciones. Además, desde nuestro punto de vista, identificar por sí solo la manifestación de los *aspectos de la práctica matemática de* definir, sin caracterizar cada uno de los aspectos en términos de las herramientas teóricas de Sfard como el *uso de palabras, narrativas, mediadores visuales* y *rutinas*, no hubiera sido suficiente para caracterizar la participación de nuestra población de estudio en la *práctica matemática de definir*

5.1.3. Sobre las Características de las Definiciones Propuestas por los Participantes

Todas las características que hemos mencionado del *discurso* de los participantes en cuanto a *uso de palabras*, las *narrativas* que surgieron, los *mediadores visuales* utilizados y las acciones repetitivas que realizaban los estudiantes cuando participan en la *práctica matemática de definir* los llevó a la consolidación de definiciones con características propias. Algunas de las características que identificamos son:

- La mayoría de la definiciones propuestas por los estudiantes de secundaria que participaron en nuestra investigación no tenían las condiciones necesarias ni suficientes para definir una familia de sólidos geométricos particular, además, algunas de las definiciones fueron ambiguas; lo que nos lleva a afirmar que las definiciones propuestas no se pueden considerar formales, desde el punto de vista de la formalidad matemática, y desde lo que mencionan Zaslavsky y Shir (2005). Esto se relaciona con lo que ya hemos estado mencionando sobre que el desarrollo de aspectos como *hacer preguntas de definición*, *construir argumentos y explicaciones*, *negociar criterios para la adecuación o aceptabilidad de las definiciones* y *revisar definiciones* no se manifiestan en el *discurso* de los participantes ya que no se presentaron discusiones relacionadas con las aceptabilidad o el rechazo de las definiciones propuestas.
- Ninguna de las definiciones propuestas era jerárquica, pues los estudiantes no *establecen o razonan sobre relaciones sistemáticas* para identificar si una familia particular de sólidos pertenece a una familia más general, en nuestro caso, los estudiantes no identificaron los sólidos platónicos como parte de la familia de poliedros o más específicamente como parte de la familia de poliedros convexos, a pesar de que cada una de estas familias fue previamente definida.
- Identificamos también dos acciones repetitivas que llevaban a cabo los estudiantes cuando *proponen una definición*: considerar que definir es dar una lista larga de características sin considerar las condiciones suficientes para lograr caracterizar cada una de las familias de sólidos propuestas, y mencionar o representar gráficamente un ejemplo o un no-ejemplo en las definiciones.

Esta caracterización de las definiciones se debe quizás a la poca oportunidad que se les brinda a los estudiantes en su contexto escolar a que participen en la *práctica matemática de definir*, pues así como lo menciona De Villiers en su artículo "*To teach definitions in geometry or teach to define?"* el enseñar a los estudiantes a definir y el hacerlos partícipes en la construcción de las definiciones de los objetos geométricos que estudian puede conllevar a un aumento en su comprensión de las definiciones y de los conceptos con los que se relacionan.

Hasta aquí hemos descrito y caracterizado el *discurso* de los estudiantes cuando participan en diferentes *aspectos de la práctica matemática de definir*, esta caracterización del *discurso* da cuenta de cómo se caracteriza y se desarrolla el proceso de construcción de definiciones cuando estudiantes de secundaria participan en este proceso y cuando no están familiarizados con los conceptos a definir.

Además, estos resultados ponen de manifiesto la complejidad existente que lleva consigo el hacer partícipes a los estudiantes en prácticas discursivas, más aún cuando eventualmente no se les da la oportunidad de participar en ellas. Por eso la importancia de continuar realizando trabajos de este tipo para lograr obtener información detallada y profunda de cómo estudiantes de diferentes edades participan en prácticas discursivas. Esto para tomar las decisiones pedagógicas y didácticas adecuadas que permitan mejorar la participación de los estudiantes en el desarrollo de diferente prácticas matemáticas en el aula.

Por otro lado, es de resaltar el potencial explicativo y descriptivo que nos brindaron las diferentes herramientas teóricas de la teoría de Sfard que usamos como lente de análisis, pues a partir de ellas pudimos explicitar cómo los estudiantes participaron en el proceso de construcción de definiciones: desde la caracterización de lo que pudieron decir los estudiantes de los objetos que definieron, el vocabulario que usaron, cómo utilizaron e interpretaron los diferentes *mediadores visuale*s, y las *rutinas* que realizaron en diferentes momentos de su participación en la *práctica matemática de definir*.

5.2. Reflexiones Adicionales

Si bien nuestro interés se encontraba en realizar una descripción detallada del desarrollo de la *práctica matemática de definir* en estudiantes de secundaria, durante este proceso de investigación se manifestaron otros resultados que consideramos importantes y que nos llevaron a una reflexión, algunas de ellas son:

- Nuestra investigación pone nuevamente de manifiesto lo que varias investigaciones han mencionado sobre la importancia del uso de ejemplos y no-ejemplos como un elemento relevante para el diseño de actividades que tienen que ver con la construcción de definiciones, pues en nuestra investigación jugaron un papel relevante para que los estudiantes reconocieran las propiedades o características propias de la familia de sólidos geométricos que se estaban definiendo. Fue a partir de la *evaluación y construcción de ejemplos y no-ejemplos* que lograron los estudiantes desarrollar aspectos como *describir propiedades y* quizás *construir y argumentar sobre características relevantes*. Por lo que respaldamos la idea de que incentivar el desarrollo del aspecto *construir y evaluar ejemplos y no-ejemplos* sea un elemento importante para el diseño de tareas relacionadas con construcción de definiciones.
- Es importante saber elegir los ejemplos y no-ejemplos como evaluación para que los estudiantes logren identificar las condiciones necesarias para definir un objeto geométrico en particular; pues tal y como nos ocurrió con la actividad relacionada con los poliedros cóncavos, quizás el haber propuesto la evaluación de un no-ejemplo como el que se ilustra en la Figura 14 hubieran permitido, por un lado, que los estudiantes identificaran los poliedros cóncavos como parte de la familia de poliedros, y por el otro, que se dieran cuenta de las condiciones necesarias para definirlos.
- Por otro lado, la implementación de la actividad diagnostica nos lleva a reflexionar sobre las posibles desventajas o dificultades que se pueden presentar si no se hace un buen uso de las representaciones bidimensionales que se utilizan para representar figuras geométricas tridimensionales pues, tal y como lo menciona Gutiérrez (1998), algunas representaciones bidimensionales que usualmente se usan para representar objetos tridimensionales no corresponden por completo a la realidad, y, además, algunas ocultan información importante para identificar y caracterizar la figura tridimensional que se está representando, y en ocasiones estas representaciones puede agregar información no relevante de las figuras, tal y como ocurrió con algunas de las representaciones que usamos en la actividad diagnostica.

Capítulo 6. Prospectivas

En el capítulo anterior describimos los resultados más relevantes que rescatamos del estudio exploratorio/descriptivo que propusimos y que dan cuenta de cómo estudiantes del nivel de secundaría construyen definiciones para diferentes conceptos propios de la geometría espacial y cómo se caracteriza y se desarrolla este proceso cuando los estudiantes son quienes participan en la *práctica matemática de definir*. A partir de estos resultados identificamos la gran complejidad que lleva el hacer partícipes a los estudiantes en diferentes prácticas matemáticas, por lo que se es necesario más contribuciones investigativas en relación con la participación de los estudiantes en distintas prácticas matemáticas, particularmente la *práctica matemática de definir.* A partir de estos resultados identificamos una posible línea de trabajo para darle continuidad a esta investigación

Debido a que el tipo de investigación que llevamos a cabo se puede considerar desde el punto de vista de Steffe y Thompson (2000) como una enseñanza exploratoria para incentivar la participación en la *práctica matemática de definir,* pues concordamos con lo que mencionan Steffe y Thompson (2000) sobre la importancia de primero hacer un estudio exploratorio para identificar las maneras de actuar, los modos y las formas de operar de los estudiantes en una determinada actividad matemática, esto con el fin de que influya en nuestras decisiones a la hora de tener en cuenta diferentes elementos de un diseño para llevar a cabo un experimento de enseñanza que incentive la participación en la *práctica matemática de definir*.

Por esta razón se propone como línea de trabajo para darle continuidad a esta investigación, una investigación basada en un experimento de diseño en el que estudiantes, ya sea de primaria o secundaria, sean participes en la construcción de definiciones. Algunos elementos del diseño para tener en cuenta en este experimento se resaltan a continuación y se basan en los resultados encontrados de nuestro estudio exploratorio/descriptivo.

Primero, ya que nuestros resultados arrojan información respecto a que los estudiantes de secundaria no desarrollan *aspectos de la práctica matemática de definir* en el que *revisen las definiciones* para determinar si son adecuadas o no o si cumplen con las condiciones necesarias y suficientes, ni tampoco se *negocian criterios para juzgar la aceptabilidad de una definición;* es importante entonces en el experimento de diseño incentivar el desarrollo de cada uno de los ocho *aspectos de la práctica matemática de definir*, particularmente los mencionados. Esto para que los estudiantes discutan y evalúen constantemente las definiciones propuestas y se logren construir definiciones formales.

Segundo, resaltamos la importancia, como un elemento crucial para el diseño de las actividades, la evaluación de ejemplos y no-ejemplos para que los estudiantes logren reconocer las características propias del concepto que se esté definiendo y así desarrollen el aspecto *describir propiedades*.

Tercero, si los conceptos a definir son propios de la geometría espacial es importante utilizar como *mediadores visuales* algunos software de geometría dinámica o el uso de material concreto, para así evitar posibles dificultades que se pueden presentar con el uso de representaciones bidimensionales, tal y como nos ocurrió con la actividad diagnostica.

Cuarto, el trabajo en grupo puede llegar a ser un elemento valioso en la construcción de definiciones pues consideramos que la discusión con otros puede llevar a que la definiciones sean más formales, ya que en nuestra investigación las definiciones que se propusieron en grupo eran más precisas y formales en comparación con las que se propusieron individualmente.

Por último, resaltamos la importancia de que en el proceso de construcción de definiciones se comparen constantemente las características de las nuevas familias de figuras geométricas con las que quizás previamente fueron definidas, para que los estudiantes reconozcan características compartidas y logren así *establecer y razonar sobre relaciones sistemáticas* y así lograr que las definiciones propuestas sean jerárquicas.

En resumen, una vez que nuestro estudio brinda una panorama detallado sobre cómo construyen definiciones estudiantes de secundaria, este puede ser la base para llevar a cabo una investigación basada en el diseño en el que se pongan en juego algunos elementos del diseño, como los que describimos anteriormente, con el fin de promover y acercar a los estudiantes a la participación en un *discurso* más elaborado en cuanto a la *práctica matemática de definir* lo exige.

Referencias

Alvarado, A., y González, T. (2016). Construcción Social de los procesos de definir y demostrar. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(2), 527-549.

Ambrose, R., & Kenehan, G. (2009). Children's evolving understanding of polyhedra in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 158–176. https://doi.org/10.1080/10986060903016484

Ambrose, R. (2019). Inclusively responsive instruction to advance spatial reasoning and number sense. In S. Otten, A.G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 439-440). St Louis, MO: University of Missouri.

Bock, C., & Dimmel, J. (2017). Explorations of volume in a gesture based virtual mathematics laboratory. In E. Galindo & J. Newton, (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 371-374). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Contreras, J.M., Díaz, C., Batanero, C., y Cañadas, G. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 237-245). Bilbao: SEIEM.

De Villiers, M. (1998).To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248–255). Stellenbosch, South África: PME.

Dogruer, S.S., & Akyuz, D.(2020). Mathematical Practices of Eighth Graders about 3D Shapes in an Argumentation, Technology, and Design-Based Classroom Environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(8), 1485–1505. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10028-x

Ertekin, E., Yazici, E., & Delice, A. (2014). Investigation of primary mathematics student teachers' concept images: cylinder and cone. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(4), 566-588. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.868537

Escudero, I., Gavilán-Izquierdo, J.M., & Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generado en los procesos de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 7-32. http://doi.org/10.12802/relime.13.1711

Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Avanzando en la caracterización de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 283-292). Valladolid: SEIEM.

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., González-Regaña, A., Martín-Molina, V., & Toscano, R. (2019). Identifying routines in the discourse of undergraduate students when defining. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00301-1

Fielding-Wells, J., & Makar, K. (2015). "If it doesn't have an apex it's not a pyramid": argumentation as a bridge to mathematical reasoning. In K. Beswick, T. Muir & J. Fielding-Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297-304). Hobart, Australia: PME.

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Fernández-León, A**.** (2019). Cómo construyen definiciones matemáticas los estudiantes para maestro: Una aproximación sociocultural. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Prácticas sobre el aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 135-156). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Godino, J., y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. [Anexo al artículo, "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3), 325-355]. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Identificando conflictos comognitivos en el discurso de estudiantes universitarios cuando definen. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 373-382). Valladolid: SEIEM.

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A., y Gavilán-Izquierdo, J.M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81-97. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039

Güçler, B. (2016). Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 375-393. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9636-9

Guillen, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. (Tesis doctoral). Universitat de València, València. Recuperada de https://roderic.uv.es/handle/10550/38013

Guillen, G.(2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(1), 35-53. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4055

Guillen, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de magisterio. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 415-431. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3992

Guillen, G.(2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, *16*(3), 103-125.

Guillen, G.(2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, *17* (2), 117-152.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de al Geometría espacial. *Revista Ema*,*3* (3), 193-220. Recuperado de: https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut98a.pdf

Hernandez, R., Fernadez, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta edición. México: McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. Recuperado de: https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Heyd-Metzyuyanim, E., Morgan, C., Tang, S., Nachlieli, T., Sfard, A., Sinclair, N., & Tabach, M. (2013). Development of mathematical discourse: Insights from "strong" discursive research. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 155-179). Kiel, Germany: PME

Huang, H-M. (2012). An exploration of computer-based curricula for teaching children volume measurement concepts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 315-322). Taipei, Taiwan: PME.

Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: prototypicality and inclusion. *ZDM Mathematics Education*, *47*(3), 407–420. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0658-z

Kobiela, M., & Lehrer, R. (2015). The codevelopment of mathematical concepts and the practice of defining. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(4), 423-454. http://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.4.0423

Lehrer, R., & Curtis, C. (2000). Why are some solid perfect? Conjetures and experiments by third graders. *Teaching Children Mathematics*, 323 – 329. https://doi.org/10.5951/TCM.6.5.0324

Mantica, A., y Freyre, M. (2019). Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular. *Educación Matemática*, 31(1), 204-234. https://doi.org/10.24844/EM3101.08

Mariotti, M., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248. https://doi.org/10.1023/A:1002985109323

Martín-Molina, V., González-Regaña, A., & Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Researching how professional mathematicians build new mathematical definitions: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(7), 1069-1082. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1426795

Martín-Molina, V., Toscano, R., González-Regaña, A. J., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Analysis of the mathematical discourse of university students when describing and defining geometrical figures. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 355-362). Umeå: PME.

Megías, A.I., Gea, M.M., y Batanero, C. (2018). Definición y ejemplos de dependencia e independencia de sucesos por estudiantes de bachillerato. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en educación matemática XXII* (pp. 338-346). Guijón: SEIEM

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de competencia matemática.* Bogotá, Colombia: MEN

Nardi, E., Ryve, A., Stabdler, E., & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 182-198. http://doi.org/10.1080/14794802.2014.918338

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Authors. Recuperado de:
http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Ng, O., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education, 47*(3), 421–434. http://doi.org/10.1007/s11858-014-0660-5

Okazaki, M. (2013). Identifying situations for fifth graders to construct definitions as conditions for determining geometric figures. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 409–416). Kiel, Germany: PME.

Panorkou, N. (2019). Exploring dynamic measurement for volume. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 177 -184). Pretoria, South África: PME.

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 423-430. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9676-1

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: a practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73. http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_4

Resetero, S. (2017). Construye poliedros con gomas y cartulina. Recuperado de https://reseteomatematico.com/plantillas-construir-poliedros-cartulina-gomas/

Samper, C., y Vargas, C. (2019). La negación: Un aporte a la construcción de definiciones en el aula escolar de geometría. *Educación Matemática*, *31*(3), 39-60. https://doi.org/10.24844/em3103.02

Seah, R., & Horne, M. (2018). Middle school students' reasoning about volume and surface area. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 131-138). Umeå, Sweden: PME.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2020). *Desafíos matemáticos, sexto grado*. México: Ciudad de México.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 13-57. https://doi.org/10.1023/A:1014097416157

Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. In J. Maab & W. Shöglmann (Eds), *New Mathematics Education Research and practice* (pp. 153-170). Rotterdam, Paises Bajos: Sense Publishers BV. https://doi.org/10.1163/9789087903510_015

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*,1-9. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013

Sfard, A. (2020a). Commognition. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 95-101). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100031

Sfard, A. (2020b). Discursive approaches to learning mathematics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 186-190). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_52

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Mind, Culture, and Activity*, *8(*1), 42–76. http://doi,org/10.1207/s15327884mca0801_04

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M.G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 691-719. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_18

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more_it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 28-44. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.009

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behaviour, 30*(2), *93–114*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.01.001

Tabach, M., & Nachlieli, T (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 163–187. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0

Tanguay, D., & Grenier, D. (2010). Experimentation and proof in a solid geometry teaching situation. *For the Learning of Mathematics, 30*(3), 36-42. https://doi.org/10.2307/41319538

Torres-Corrales, D., López-Acosta, L. y Montiel. G. (2020). Experiencias formativas de investigadores en el desarrollo de proyectos doctorales de Matemática Educativa. En Sánchez-Luján, B. e Hinojosa-Luján, R. (Coords.), *Trazas de la investigación educativa en la experiencia de sus Quijotes: Reflexiones y aportes* (pp. 103-119). Red de Investigadores Educativos Chihuahua. https://www.rediech.org/omp/index.php/editorial/catalog/book/14

Tsamir, P., Tirosh, L., & Levenson, E. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definition: Triangles, circles, and cylindres. *ZDM Mathematics Education*, *47* (3), 497– 504. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0641-8

Ulusoy, F. (2020). Prospective Early Childhood and Elementary School Mathematics Teachers' Concept Images and Concept Definitions of Triangles. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10105-6

Van Darmolen, J. & Zaslavasky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 91.106. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00006-3

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305. http://dx.doi.org/10.1080/0020739830140305

Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D, Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Wang, S., & Kinzel, M. (2014). How do they know it is a parallelogram? Analysing geometric discourse at van Hiele Level 3. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 288–305. http://doi.org/10.1080/14794802.2014.933711

Wongkamalasai, M., & Lehrer, R. (2018). Constructing and defining 3-D polyhedra: A design study fostering early mathematical practice and visualization. In M. Cukurova, J. Hunter, W. Holmes & V. Dimitrova (Eds.), *Practitioner and Industrial Track Proceedings of the 13th International Conference of the Learning Science*. London, UK: ICLS.

Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 29* (2), 57–75. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.01.001

Zaskis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69* (2), 131-148. http://doi.org/ 10.1007/s10649-008-9131-7

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317–346. https://doi.org/10.2307/30035043

Anexos

Anexo 1. Actividad propuesta por SEP (2020)

Bloque II

2. El siguiente cuerpo geométrico se forma al desplazar sobre un eje vertical un hexágono que se va reduciendo proporcionalmente en tamaño hasta convertirse en un punto.

a) ¿Cuántas caras laterales tiene?

¿Qué forma tienen las caras y cómo son entre sí?

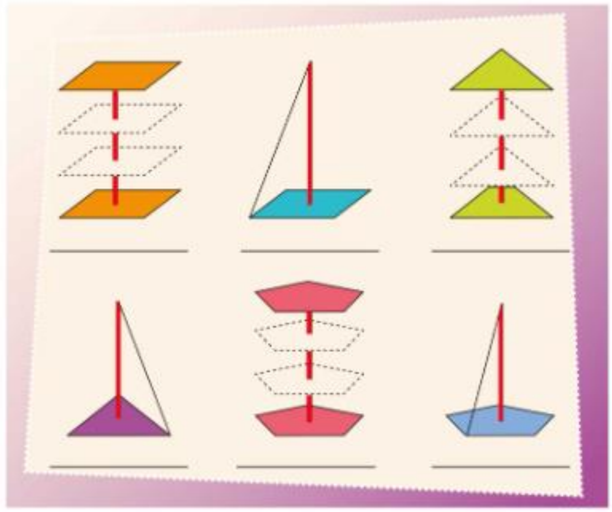
b) ¿Cuántas bases tiene?

c) ¿Qué nombre recibe el cuerpo geométrico formado?

d) ¿Qué representa la longitud del eje de desplazamiento del hexágono?

La actividad continua en la siguiente página

3. Utilicen una regla o escuadra para terminar de dibujar los siguientes prismas y pirámides. Escriban su nombre completo de acuerdo con la forma de sus bases.



4. Escriban las características que diferencian a los prismas de las pirámides.

La actividad finaliza con la siguiente página

5. De acuerdo con lo anterior, escriban las definiciones de:

a) Prisma:

b) Pirámide:

c) Altura de un prisma:

d) Altura de una pirámide:

Anexo 2. Carta de autorización dirigida a los padres de familia

AUTORIZACIÓN

Bogotá, Colombia
Abril /2021

Yo____ padre/madre del niño ____ acepto que mi hijo participe de las actividades propuestas “definiendo poliedros”. Dichas actividades se desarrollan bajo la responsabilidad del Dr. Gonzalo Zubieta y la Lic. Daniela Alexandra Ropero Quintero, y se llevan a cabo como marco del proyecto de investigación de tesis de la Lic. Daniela Alexandra Ropero en el programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México.

Asimismo, autorizo que los registros escritos, fotográficos y de video, tomados en la actividad mencionada, así como los productos derivados, se utilicen exclusivamente con fines académicos bajo las normas éticas del manejo de datos personales en la investigación científica.

______________________________________	________________________
Nombre	**Firma**

Anexo 3. Actividad diagnostica

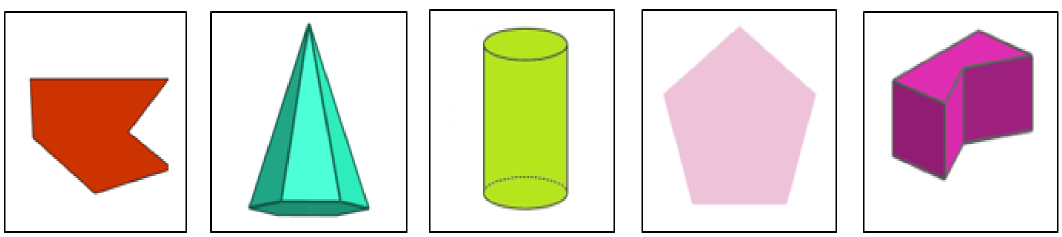
Nombre ____ **Edad** ____________

Resuelve cada una de las preguntas que se proponen a continuación, por favor no borres ni taches nada. Es importante que contestes únicamente con lo que sabes, no busques información extra en libros, internet o en alguna otra fuente.

---

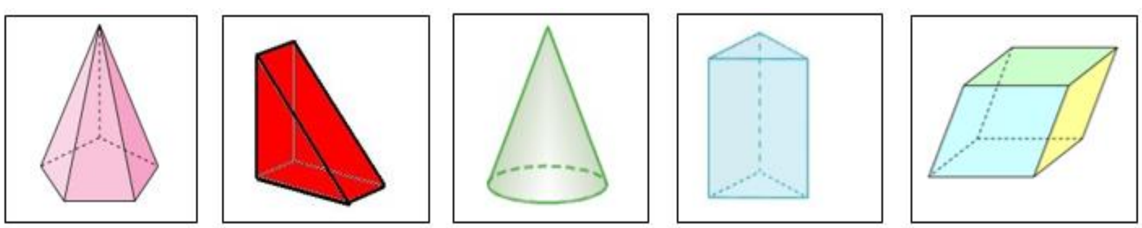
1. Marca con una X las figuras geométricas que corresponden a cada afirmación. Si no sabes la respuesta marca la opción no sé.

a) ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras son figuras tridimensionales?



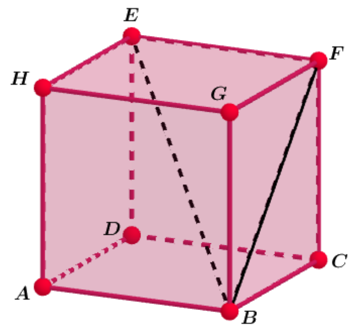
1. ☐ 2. ☐ 3. ☐ 4. ☐ 5. ☐ 6. No sé

b) ¿Cuál o cuáles de las siguiente figuras geométricas tienen por lo menos una cara triangular? En las opciones que marques, señala la cara triangular que identificaste.



1. ☐ 2. ☐ 3. ☐ 4. ☐ 5. ☐ 6. No sé

2. Responde los siguientes incisos marcando con una X la respuesta correcta teniendo en cuenta la siguiente figura geométrica. Si no sabes la respuesta marca la opción no sé.



a) Los puntos A, B, C, D, E, F, G, H son:

☐ Aristas ☐ Vértices ☐ Caras ☐ Diagonales ☐ No sé

b) Los segmentos HG, ED, AB, FC son:

☐ Aristas ☐ Vértices ☐ Caras ☐ Diagonales ☐ No sé

c) El segmento EB es:

☐ Aristas ☐ Vértices ☐ Caras ☐ Diagonales ☐ No sé

3. Al final de este cuestionario encontraras un recuadro con algunas figuras tridimensionales, recorta cada una de ellas y pégalas en la siguiente tabla según corresponda. Luego explica y escribe qué es un poliedro.

Son poliedros	No son poliedros

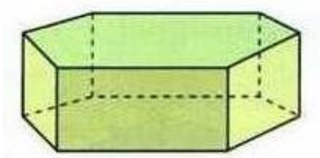
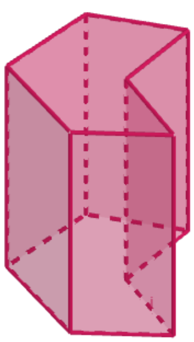
Un poliedro es:

____

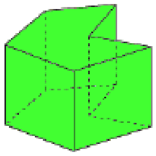
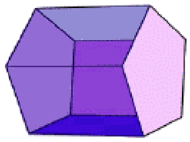
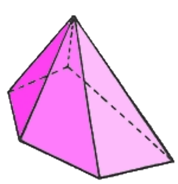
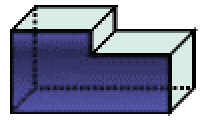
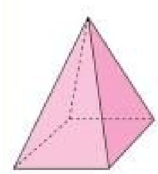
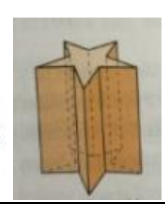
____

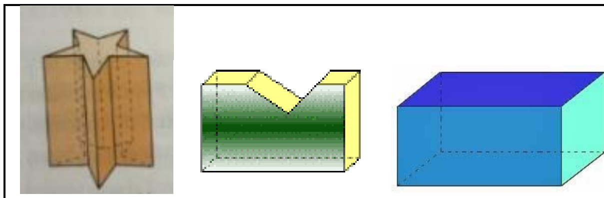
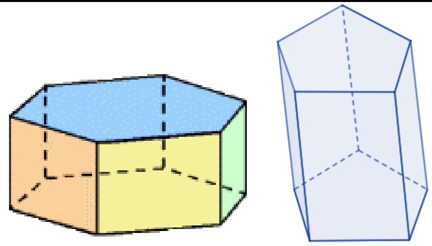
____

4. En la siguiente tabla completa con "es" o "no es" la frase "esta figura geométrica …. un poliedro convexo" dependiendo de la figura geométrica que se muestra a la derecha. Justifica tu respuesta.

	Esta figura geométrica ____________ un poliedro convexo porque
	Esta figura geométrica ____________ un poliedro convexo porque

5. Observa cada conjunto de figuras geométricas y encierra la figura o las figuras que pertenecen a cada grupo teniendo en cuenta las características de cada conjunto (Poliedros cóncavos, poliedros convexos). Luego contesta las preguntas.

Poliedros cóncavos	**Poliedros convexos**
  	  

¿Cómo identificaste las figuras que pertenecen al conjunto de poliedros cóncavos? ¿Para ti qué es un poliedro cóncavo?

____

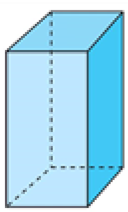
____

____

____

6. De las siguientes figuras geométricas ¿cuáles conoces? Nombra las figuras que conoces y escribe una definición para estas. Si no conoces las figuras deja los espacios en blanco.

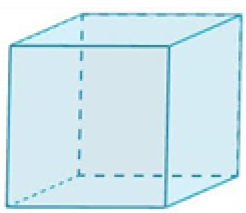
a)



Nombre que recibe

Definición:

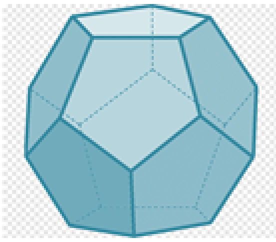
b)



Nombre que recibe

Definición:

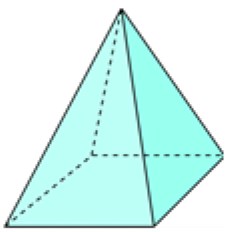
c)



Nombre que recibe

Definición:

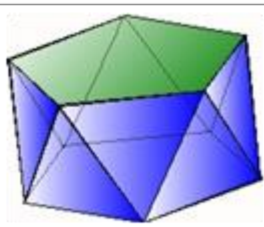
d)



Nombre que recibe

Definición:

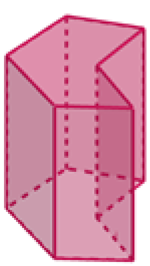
e)



Nombre que recibe

Definición:

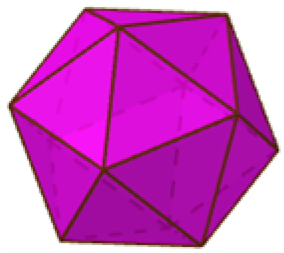
f)



Nombre que recibe

Definición:

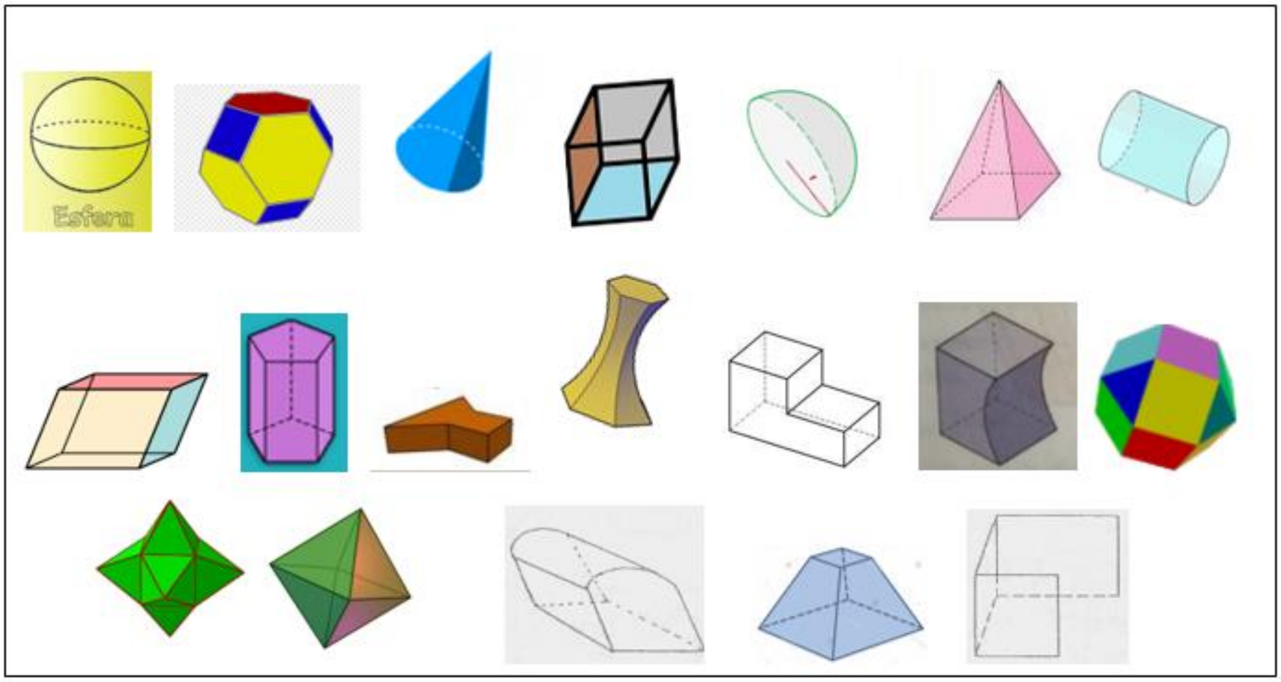
g)



Nombre que recibe

Definición:

Figuras para recortar y pegar en el tercer punto



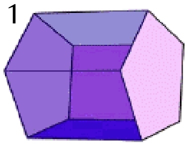
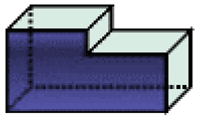
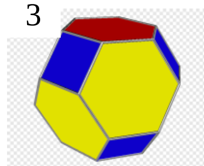
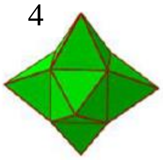
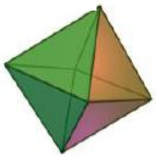
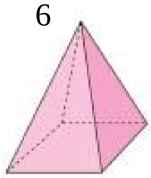
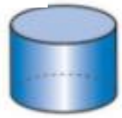
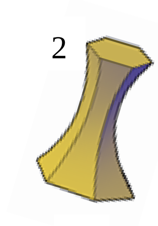
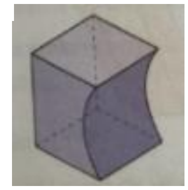
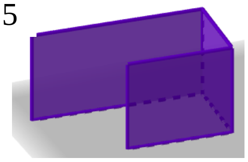
Anexo 4. Hoja de trabajo 1

Nombres:

____**Edad** _____________

____**Edad** _____________

Actividad 1 ¿Qué es un poliedro?

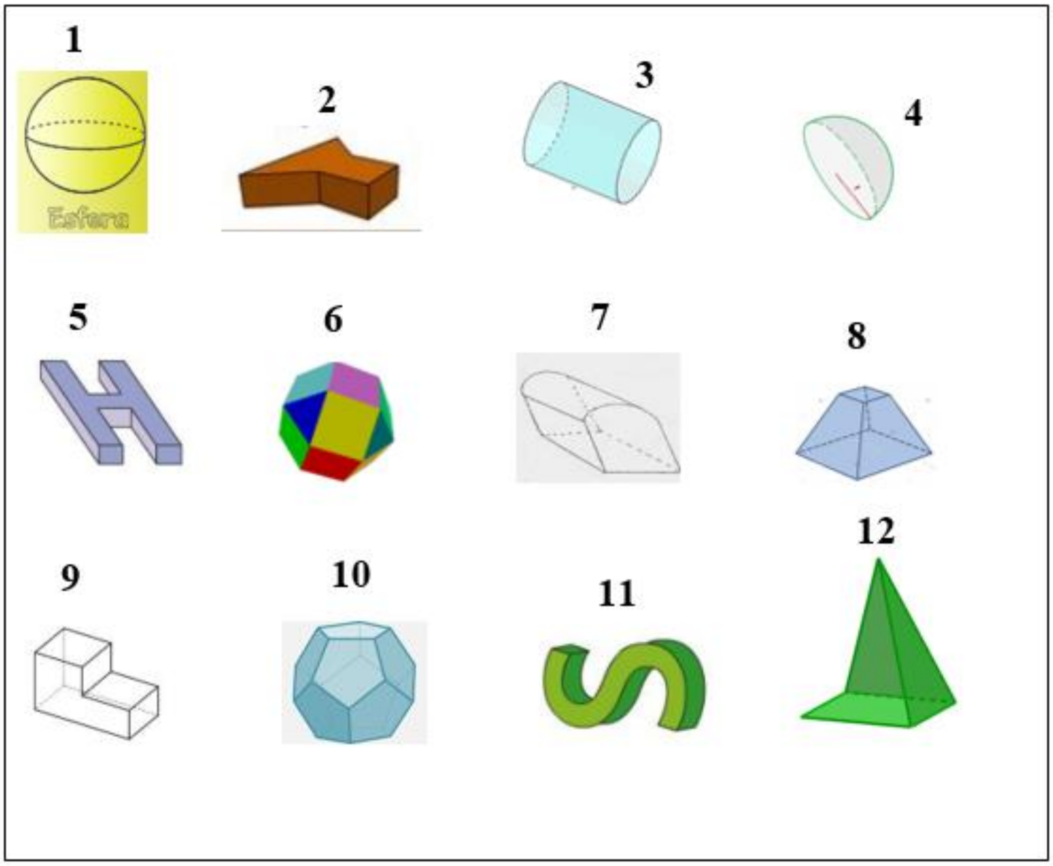
Son poliedros	No son poliedros
1  2  3  4  5  6 	1  2  3  4  5 

Observen cada conjunto de figuras geométricas (poliedros y NO poliedros) dado en el recuadro anterior ¿qué propiedades o características observan en cada conjunto de figuras? Completen la siguiente tabla describiendo las similitudes y diferencias entre cada conjunto de figuras. Finalmente escriban una posible definición de poliedro.

Similitudes	**Diferencias**

Un poliedro es:

Anexo 5. Ejemplos y no-ejemplos a evaluar para la familia de poliedros



Anexo 6. Hoja de trabajo 2

Nombres:

____**Edad** ______________

____**Edad** ______________

Actividad 2

1. En los grupos de trabajo, observen las figuras geométricas: los poliedros cóncavos (https://www.geogebra.org/m/w55cwaj2) y los poliedros NO cóncavos (https://www.geogebra.org/m/pkjwqkqg) ¿qué propiedades o características observan en cada una de las figuras? Completen la siguiente tabla describiendo las similitudes y diferencias entre estos dos tipos de figuras. Finalmente escriban una posible definición de poliedro cóncavo.

Similitudes	Diferencias

Un poliedro cóncavo es:

____

____

____

____

2. Ahora, observen las figuras geométricas (https://www.geogebra.org/m/mzt3fuam) de la 1 a la 8 y determinen si son o no poliedros cóncavos. Justifiquen su respuesta

Figura	¿Es un poliedro cóncavo?	¿Por qué?
1		
2		
3		

4		
5		
6		
7		
8		

Anexo 7. Cuestionario final

Nombre ____ **Edad** ______________

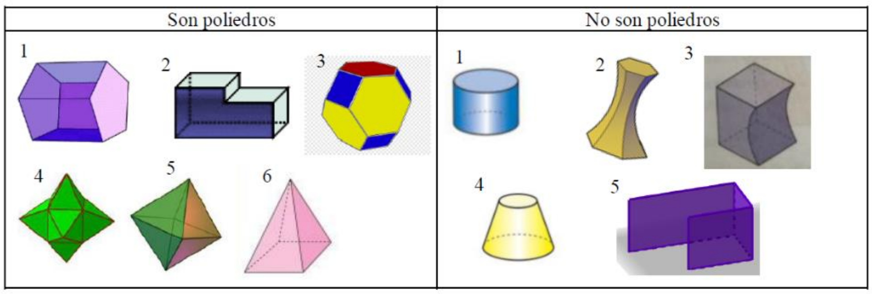
¿Qué es un poliedros?	¿Qué es un poliedro cóncavo?	¿Qué es un sólido platónico?

Anexo 8. Análisis de la primera actividad para los otros dos subgrupos de trabajo

Análisis del grupo 2: E3 y E4

ACTIVIDAD 1 – IDENTIFICANDO SIMILITUDES Y DIFERENCIAS

***Descripción*:** Los estudiantes tres y cuatro se encuentran observando los siguientes ejemplos y no-ejemplos de poliedros, identificando similitudes y diferencias entre estos.



Al inicio de la actividad surgen discusiones entre los integrantes del subgrupo, como las que transcriben a continuación.

***Transcripción*:**

[147] **E3:** Yo veo como algo diferente (3'') <**E4:** Yo veo que todas son **tridimensionales**> sí y ósea las diferencias es que los que no son **poliedros** tienen **lados** ((haciendo referencia a las aristas)) como con **curvas** y estas no ((señala las figuras que representan los que sí son poliedros))

[148] **E4:** Bueno entonces en similitudes ¿qué? Ee… que (1'') <**E3:** Que todas son **tridimensionales**> sí ((empiezan a escribir la primera similitud y diferencias que evidenciaron))

[149] **P:** ¿Cómo van?

[150] **E3:** Bien

[151] **P:** En similitudes ¿qué pusieron?

[152] **E3:** Que todas son **tridimensionales**

[153] **P:** Ajam, y de diferencias ¿qué han visto?

[154] **E3:** Que los que no son **poliedros** ((señala la figura dos de los que nos son poliedros)) tiene como **lados con curvas** y los que sí son ((señala las figuras que sí son poliedros)) no tienen

[…]

((se quedan observando las figuras))

[160] **E3:** Que los **poliedros** tienen **caras rectas** ¿no?

[161] **E4:** No, que…digamos que… no todos los **lados** ((haciendo referencia a las caras)) son **iguales**, eso es una similitud ¿no?

[162] **E3:** Mm… ((acentúa con la cabeza que sí))

[163] **E4:** Osea, acá no es un **cuadrado** ((señala una de las caras triangulares de la figura seis de los que son poliedros)) (1'') las **caras** no tienen la misma…

[164] **E3:** Osea, no todas las **caras no son iguales**, no todas las **caras** son **iguales**

[165] **E4:** Aja ((empiezan a escribir una segunda similitud))

[166] **E3:** ¿Habrá más diferencias?

((se quedan observando las figuras))

[167] **E3:** Por ejemplo < **E4:** Que ésta ((señala la figura cinco de los que no son poliedros)) no está **encerrada**> que los **poliedros** tienen varias **caras** (2’’) en cambio estas no ((señala las figuras que no son poliedros)) (2’’) o bueno sí también.

((se quedan observando las figuras))

[168] **E4:** Mira que esta **figura** ((señala la figura cinco de los que no son poliedros)) no está **cerrada**

[169] **E3:** Ah pues sí

[170] **E4:** Pero cómo decimos que no está **cerrada**

[171] **E3:** Que en algunas **figuras** no son **cerradas**

[172] **E4:** No, que hay **figuras** donde no tienen… (2’’) que hay **figuras** donde no tienen… **caras** (3’’)

[173] **E3:** Osea que estas no son una **figura completa** ¿si me entiendes?

[174] **E4:** Sí, porque no tienen, osea / no tiene un nombre / porque ¿cómo se llama eso? (3’’)

[175] **E3:** ¿Le preguntamos a la profe? ((levanta la mano y llaman a la profesora))

[…]

[185] **E4:** Es que esta ((señala la figura cinco de los que no son poliedros)) no está **cerrada** <**E3:** Osea no es como completa> sí, entonces decimos

[186] **E3:** Osea que en diferencias se podría decir que, aquí ((señala las figuras que no son poliedros)) no es necesario que este **completa** la **cara** y aquí sí.

[187] **P:** Aja, puede ser / ¿Completa la cara?

[188] **E3: Completa la figura**

[189] **E4:** Ah… es **completa**

Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir	
Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado	- Describir propiedades - Construir explicaciones o argumentos - Hacer preguntas de definición

Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso			
	¿qué palabras matemáticas se utilizan?	**¿cómo las usan?**	**¿para qué las usan?**
Uso de palabras	- Figuras - Tridimensional - Caras - Lados curvos - Figura completa o encerrada - Caras rectas - Cuadrado - Poliedros - Igual	La mayoría de las palabras matemáticas mencionadas se usan de manera correcta. El *uso de la palabra* “lado” se utiliza con dos significados distintos: para nombrar tanto a las aristas como a las caras de un determinado sólido geométrico. . El uso de palabras como “figura completa” se usa en un sentido coloquial para referirse a que los poliedros encierran un volumen finito	- Para caracterizar los ejemplos y no-ejemplos de poliedros de acuerdo con las características de sus elementos (caras y aristas). - Para comparar los elementos (caras y aristas) de cada figura dada en la hoja de trabajo 1. - Para identificar el conjunto de figuras o las figuras de las que se está hablando.

Narrativas	**Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir**	**Sobre las actividades o procesos que se hacen con o por los objetos geométricos**

	En el *discurso* del subgrupo de trabajo se puede identificar las siguientes *narrativas* relacionadas con las propiedades y relaciones entre los ejemplos y no-ejemplos mostrados: - Todas las figuras dadas son tridimensionales - Los que no son poliedros tienen lados curvos - Los poliedros tienen caras rectas - En los no poliedros no es necesarios que la figura esté completa - Tanto en los ejemplos y no-ejemplos no todas sus caras son iguales.	No surgen afirmaciones sobre las actividades que se hacen con los objetos a definir
Mediadores visuales	Los *mediadores visuales* utilizados e identificados en el *discurso* de los participantes son las figuras geométricas dadas como ejemplos y no-ejemplos de poliedros en la hoja de trabajo, centrando su atención a elementos específicos de los mismos	
Rutinas	Identificamos un conjunto de acciones repetitivas que realizan los estudiantes cuando se encuentran identificando similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos de la familia de poliedros. Este conjunto de acciones consiste en: - Mirar las figuras dadas en la hoja de trabajo - Identificar una característica relevante en una de las figuras - Y comparar si otras figuras comparten esta característica.	

Fase 3 de análisis

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

En la primera fase de análisis que ilustramos en la tabla anterior identificamos que los integrantes de este grupo están desarrollando tres *aspectos de la práctica matemática de definir*, a saber: (1) *describir propiedades,* (2) *construir explicaciones o argumentos* y (3) *hacer preguntas de definición*. El primer aspecto se manifiesta y evidencia particularmente en las líneas de transcripción 147, 154, 161, 164 y 167 en donde los estudiantes mencionan algunas características relevantes que identificaron a partir de la observación de los ejemplos y no-ejemplos de la familia de poliedros: son figuras tridimensionales, los que no son poliedros tienen como lados con curvas, no todas las caras son iguales y en los no-ejemplos algunas figuran no están cerradas.

El segundo aspecto se manifiesta y se relaciona con el proceso de argumentar por qué las características que evidencian los estudiantes son relevantes, tal y como ocurre la línea de transcripción 163 donde E4 identifica como característica relevante que no todas las caras de las figuras son iguales, ya que observa en la figura cinco de los que sí son poliedros que no todas sus caras son iguales, pues la base de la pirámide es cuadrada.

El tercer aspecto se manifiesta cuando los estudiantes en las líneas de transcripción 160-189 se cuestionan sobre cómo se podría expresar el hecho de que en los poliedros las figuras, en palabras de los estudiantes, “son completas” para referirse a que en los poliedros se es necesario que encierren un volumen finito.

El desarrollo de cada uno de estos aspectos se caracteriza con diferentes *usos de palabras*, *narrativas* y un conjunto de acciones repetitivas que realizan los estudiantes cuando se trata de identificar similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos de poliedros. Cada una de estas características las describimos a continuación.

En cuanto a las herramientas teóricas

El hecho de que los estudiantes usen los ejemplos y no-ejemplos como el principal *mediador visual* para coordinar *su discurso*, les permitió desarrollar el aspecto *describir propiedades* y así crear las *narrativas* que ilustramos en la anterior tabla y que respectan a algunas propiedades o relaciones que crearon los estudiantes de la familia de poliedros.

Las *narrativas* que crearon los estudiantes se caracterizan por diferentes *usos de palabras*, llama la atención nuevamente el *uso de la palabra* “lado” pues constantemente los estudiantes mencionan esta palabra en su *discurso* para referirse tanto a las aristas y las caras de las diferentes figuras tridimensionales representas en la hoja de trabajo.

También se pone de manifiesto el *uso de palabras* coloquiales por parte de los participantes para mencionar algunas características propias de los poliedros, como lo fue el uso de la expresión “figura completa” para referirse a lo que formalmente conocemos como que los poliedros encierran un volumen finito.

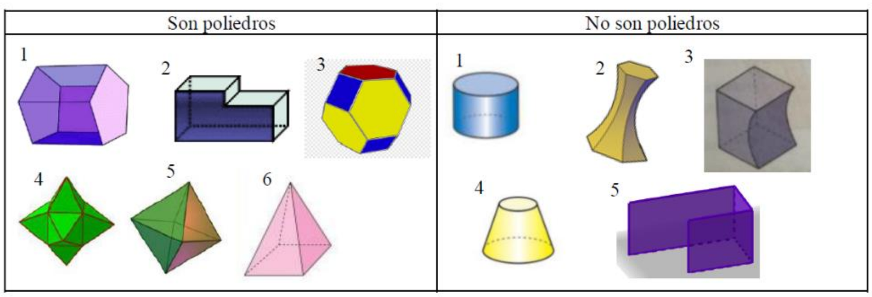
Algunos *usos de palabras* como “lados curvos” y “caras iguales” se utilizan con el fin de comparar las características de algunos elementos de las figuras tridimensionales representadas en las hojas de trabajo, tal y como ocurre en la línea de transcripción 147 en la E4 menciona que en los no-ejemplos algunas de sus caras son curvas y en cambio en los que sí son poliedros no se cumple esto.

En cuanto a las *rutinas* que identificamos se puede resaltar un conjunto de acciones que resaltan las relaciones entre los *mediadores visuales* utilizados y el *uso de palabras* y *narrativas* mencionadas. Este conjunto de acciones la realizan los estudiantes para desarrollar el aspecto *describir propiedades* a partir de la identificación de similitudes y diferencias y se evidencia varias veces en el *discurso* de los estudiantes, pues constantemente los estudiantes se centran en los *mediadores visuales* identificados para resaltar la característica relevante y así comparar entre la diferentes figuras si la característica identificada se cumple o no en las demás figuras.

Análisis del grupo 3: E5 y E6

ACTIVIDAD 1 – IDENTIFICANDO SIMILITUDES Y DIFERENCIAS

Descripción: Los estudiantes cinco y seis se encuentran observando los siguientes ejemplos y no-ejemplos de poliedros, identificando similitudes y diferencias entre estos.



Al inicio de la actividad surgen discusiones entre los integrantes del subgrupo, como las que transcriben a continuación

***Transcripción*:**

[225] **P:** Traten de ver similitudes y diferencias, por ejemplo ¿tú qué ves E5?
[226] **E5:** mm… <**P:** Algunas diferencias algunas similitudes> ((se queda observando las figuras))
[227] **E5: Tridimensionales** todas
[228] **P:** Que son tridimensionales ¡exacto! Entonces pueden marcarlo como una similitud que son figuras tridimensionales, esa puede ser una similitud, ¡exacto!
((empieza a escribir una primera similitud y luego empiezan observar nuevamente las figuras))
[229] **E5:** Que no todas tienen sus **lados** ((haciendo referencias a las caras)) **iguales**
[230] **E6:** ¿Qué?
[231] **E5:** Que… no todos sus **lados son iguales** (2’’) porque en este no son **iguales** a este

[…]

[239] **P:** Traten de mirar las formas de las caras y la forma de las aristas, mirar por ejemplo ésta que tiene de particular ((señala la figura cinco de los que no son poliedros)) (1') si se dan cuenta ¿qué lo diferencia de los demás esta figura? (4'') ¿cómo la ven?

[240] **E6:** Que **no está terminada**

[241] **E5:** Que **no está encerrada**

[242] **P:** Que no está encerrada ¡exacto! En cambio, miren que todas estas ((señala las figuras que sí son poliedros)) ¿son cómo?

[243] **E5: Son cerradas** como <**E6:** Son terminadas todas>

[244] **P:** Aja, entonces miren que puede ser otra característica

[…]

[262] **E6:** Porqué podría ser que las **caras** de estos ((señala los que no son poliedros)) algunas **caras son curvas** ¿no?

[263] **P:** Esa puede ser ¿no? porque mira que acá… por ejemplo, esta arista o esta cara ((señala la arista curva de la figura dos de los que son poliedros)) ¿cómo vienen siendo?

[264] **E6: Curva**

[265] **P:** En la parte de poliedros, ¿hay ese tipo de características?

[266] **E5 y E6:** No

[267] **P:** No, no cierto, entonces esa puede ser una diferencia (4'')

[268] **E5:** No, porque son parecidas ((hace referencia a qué esta característica debe ser escrita en la columna de similitudes))

[269] **E6:** Pero no ves que acá no hay ((señalando las figuras que son poliedros)) entonces es en diferencias (2'') entonces ¿cómo era que lo teníamos que copiar?

[270] **E5:** Mm…, sus **lados no son curvos** ((escriben una tercera diferencia y observan nuevamente las figuras))

[271] **E4:** Encontré otra (2'') si ves la amarilla con rojo y azul / mira, en estas no son **iguales,** pero en esta, en la cuatro ((haciendo mención a la figura cuatro de los que sí son poliedros)) sí, osea que… sus… **caras no son todas iguales**

[272] **E6:** Pero eso sería en similitud

[273] **E5:** No, porque no todas

[274] **E6:** No porque acá también ((señala una figura de las que no son poliedros)) no todas sus **caras** son **iguales** ((deciden escribirla como una similitud))

Fase 1 del análisis: Identificación de aspectos de la práctica matemática de definir	
Aspecto o aspectos de la práctica matemática identificado	- Describir propiedades - Construir explicaciones o argumentos

Fase 2 del análisis: Caracterización del discurso			
	¿qué palabras matemáticas se utilizan?	**¿cómo las usan?**	**¿para qué las usan?**
Uso de palabras	- Tridimensional - Lados - Igual - Figuras terminadas o no encerradas - Caras	La mayoría de las palabras matemáticas mencionadas se usan de manera correcta. El *uso de la palabra* "lado" se utiliza con dos significados distintos: para nombrar	- Para caracterizar los ejemplos y no-ejemplos de poliedros de acuerdo con las características de sus elementos (caras y aristas).

<table>
<tr><td></td><td>- Curvo</td><td>tanto a las aristas como a las caras de un determinado sólido geométrico.

El uso de palabras como “figura terminada” se usa en un sentido coloquial para referirse a que los poliedros encierran un volumen finito.</td><td>- Para comparar los elementos (caras y aristas) de cada figura dada en la hoja de trabajo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Narrativas</td><td>Sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos a definir</td><td colspan="2">Sobre las actividades o procesos que se hacen con o por los objetos geométricos</td></tr>
<tr><td>En el discurso de los integrantes de este grupo se pueden identificar las siguientes narrativas en las que se crean afirmaciones sobre las propiedades y relaciones entre los ejemplos y no-ejemplos observados:

- Todas las figuras son tridimensionales
- Tanto los ejemplos y no-ejemplos no tienen todos los lados iguales
- En los no-ejemplos algunas de sus caras son curvas
- En los poliedros su lados no son curvos
- En los no-ejemplos no todos son terminados</td><td colspan="2">No surgen afirmaciones sobre las actividades que se hacen con los objetos a definir</td></tr>
<tr><td>Mediadores visuales</td><td colspan="3">Los mediadores visuales utilizados e identificados en el discurso de los participantes son las figuras geométricas dadas como ejemplos y no-ejemplos de poliedros en la hoja de trabajo, centrando su atención a elementos específicos de los mismos</td></tr>
<tr><td>Rutinas</td><td colspan="3">Identificamos un conjunto de acciones repetitivas que realizan los estudiantes cuando se encuentran identificando similitudes y diferencias entre los ejemplos y no-ejemplos de la familia de poliedros. Este conjunto de acciones consiste en:

- Mirar las figuras dadas en la hoja de trabajo
- Identificar una característica relevante en una de las figuras
- Y comparar si otras figuras comparten esta característica.</td></tr>
</table>

Fase 3 de análisis

Es de resaltar primeramente que con este grupo en particular la profesora/investigadora vio la necesidad de guiar un poco más a los estudiantes en comparación con el trabajo que realizaban los otros grupos, dado que los integrantes de este grupo no discutían constantemente sobre las tareas que se propusieron; por lo que a través de preguntas orientadoras se logró que los estudiantes desarrollaran los siguientes aspectos de la práctica matemática de definir y con las características propias de su *discurso*.

En cuanto a los aspectos de la práctica matemática de definir

En el análisis del *discurso* de los integrantes de este grupo logramos incentivar el desarrollo de dos aspectos de la práctica matemática de definir: (1) *describir propiedades* y (2) *construir explicaciones o argumentos*, los mismos aspectos que identificamos en los demás grupos, pues para lograr identificar similitudes y diferencias se en necesario hacer una descripción de propiedades y justificar por qué una característica identificada es relevante o no para describir la familia de poliedros.

Es de resaltar que el desarrollo del aspecto *construir argumentos o explicaciones* se manifiesta no solo para justificar por qué la relevancia de una propiedad observada, sino también para justificar si la propiedad observada se puede considerar como una característica común entre los ejemplos y no-ejemplos, tal y como ocurre en las líneas de transcripción 267-269 y 272-274 donde E6 argumenta porqué características como "lados curvos" o "no todas las caras son iguales" deben ser consideradas como una diferencia y similitud, respectivamente.

En cuanto a las herramientas teóricas

Debido a que el *uso de palabras*, las *narrativas* que surgieron, y el conjunto de acciones que identificamos en los integrantes de este grupo son prácticamente el mismo que analizamos para el grupo 2, no haremos mención al respecto.

Anexo 9. Transcripción de la discusión de E1 y E2 cuando identifican similitudes y diferencias entre ejemplos y no-ejemplos de poliedros cóncavos

[455] **E2:** Ninguna es curva, ninguna arista […]

[463] **E2:** Entonces ¿qué ponemos?
[464] **E1:** Eh… <**E2:** Porque las características que estamos dando son de los poliedros, entonces no>
[465] **E1:** Sí claro, pero qué / mm…
[466] **E2:** Que todos sus vértices son planas, osea no hay curvas
[467] **E1:** Pero espera porque ya tenemos caras <**E2:** Vértices no… aristas> porque los vértices son vértices /
[468] **E2:** Anoto eso
[469] **E1:** Sí

Esta transcripción del *discurso* de los estudiantes pone de manifiesto nuevamente que los estudiantes no desarrollan el aspecto relacionado con el *establecer y razonar sobre relaciones* sistemáticas, dado que para describir a los poliedros cóncavos los estudiantes prefieren nombrar nuevamente las características de la familia de poliedros, características como que ninguna de sus aristas es curva o sus caras son planas, sin darse cuenta de que basta con decir que son poliedros. Esto a pesar de que en la línea de transcripción 464 E2 se da cuenta de que las características que mencionan son de los poliedros y que por tanto no puede ponerlas como características comunes de los poliedros cóncavos.

Anexo 10. Transcripción del discurso de los estudiantes cuando argumentan sobre la evaluación de ejemplos y no-ejemplos de los sólidos platónicos.

En los protocolos de transcripción que describimos en el análisis de la tercer actividad se evidenció en menor medida que los estudiantes *construyen explicaciones o argumentos* y *evalúan ejemplos y no-ejemplos* para determinar si los candidatos propuestos pertenecían o no a la familia de sólidos platónicos; sin embargo, durante el proceso de construcción de candidatos de los sólidos platónicos sí se manifestó en diferentes momentos este aspecto en el que los estudiantes evalúan y argumentan el rechazo de un no-ejemplo a medida de que iban identificando las características que eran relevantes en la familia de sólidos platónicos. Esto se puede evidenciar en el siguiente protocolo.

((el grupo 1 construye otro candidato que se ilustra en la siguiente imagen, sin embargo, ellos mismos identifican que es un no-ejemplo))

[947] **E2:** Este es un… de un no-ejemplo […]
[948] **P:** ¿por qué?
[949] **E2:** Porque todas sus caras no son iguales
[950] **E5:** No todas
[951] **E2:** Eso, no todas

((los estudiantes del grupo 3 construyen otro sólido, ilustrada en la siguiente imagen, pero ellos mismos identifican que es un no-ejemplo))

[953] **E6:** Nosotros ya encontramos uno. Nosotros para que seguimos armando si este no es
[954] **E5:** Este es un no-ejemplo porque no está completo
[955] **P:** ¡Exacto! Bueno, y ¿por qué más?
[956] **E5:** No todas sus caras son iguales, son planas, pero no son iguales, y no está completo

[…]

[1000] **E5:** y si intentamos hacer asi, mira ((toma una triángulo isoscéles y un pentágono))
[1001] **E6:** No, esto está re díficil
[1002] **E5:** Una piramide pero con un pentágono
[1003] **E6:** No, porque igual no, no, no todos, no todas sus aristas son iguales