CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

CONSTRUCCIÓN DE CONCEPCIONES DINÁMICAS Y ESTÁTICAS DEL INFINITO MATEMÁTICO EN CONTEXTOS PARADÓJICOS, DEL CÁLCULO DIFERENCIAL Y DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Tesis que presenta:

M. en C. Diana Paola Villabona Millán

Para optar al grado de Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Directoras de la tesis:

Dra. Asuman Oktaç

Dra. Solange Roa Fuentes

México, Ciudad de México. Julio 2020

Especial agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de doctorado.
Diana Paola Villabona Millán
Becario No. 614123

DEDICATORIA

A Anita, mi todo, quien supo esperar
con la perseverancia y la paciencia
de quien ama de verdad.

A tu memoria, Pelusita.

AGRADECIMIENTOS

A la Dra. Asuman Oktaç, directora de esta tesis, por ser ejemplo de inteligencia, trabajo incansable, liderazgo y asertividad. Gracias por la confianza depositada en mis capacidades, por las múltiples jornadas de reflexión durante estos años. Todo mi cariño y admiración.

A la Dra. Solange Roa Fuentes, también directora de esta tesis, gracias por su amistad, por las enseñanzas brindadas desde el comienzo de mi formación como investigadora, por animarme a emprender este desafío personal y profesional. Mi cariño siempre.

A los sinodales: Dr. Francisco Cordero, Dra. María Trigueros, Dr. Alain Kuzniak y Dra. Ana Isabel Sacristán. Gracias porque con sus lecturas y aportes hicieron de este un mejor trabajo.

A Anita y Poli (mi amada Pelusita (Q.E.P.D)), gracias porque todas sus enseñanzas las llevaré siempre a donde vaya. Son ustedes los grandes amores de mi vida.

A mi familia, gracias por su apoyo y por hacerme sentir motivo de orgullo. A Tábata y Pelucci, porque, aunque no lo saben, recargan mi alma de amor.

A Jahir, Luisa, los de siempre, los de entonces, los que permanecen. Gracias por anhelar mis llegadas y animarme en mis partidas. Los amo.

A Laura Rangel, gracias por acompañarme siempre, por tu amistad incondicional durante todos estos años, por tus llamadas de apoyo. Te quiero, nos veremos pronto.

A mis queridos mexicanos, especialmente a Sergio Chalé y a Yessica Méndez. Viviré anhelando un reencuentro, es de ustedes un pedacito de mi corazón.

A mis colombianos en México, a Javi mi argentino, los que están y los que ya se han ido, todos y cada uno de ustedes fueron familia, apoyo y motivo de felicidad. Gracias porque con su calor y alegría pude sentirme más cerca de la tierrita.

Al personal administrativo del departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, especialmente a Adriana Parra, gracias por su cariño, don de gente y eficiencia.

Al seminario, especialmente a mi querida Gisela, gracias por sus aportes, reflexiones y apoyo.

A México, país hermoso, por recibirme, cobijarme y mostrarme una mejor versión de mí.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN 11

ABSTRACT 12

INTRODUCCIÓN 13

CAPÍTULO I. ACCIONES, OBJETOS, PROCESOS Y ESQUEMAS: LA TEORÍA APOE 17

CAPÍTULO II. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 26

2.1. El infinito matemático a través de la historia 27

2.2. El infinito matemático a través de la Matemática Educativa 32

2.2.1. El infinito matemático y la Matemática Educativa 32

2.2.2. Intuiciones del infinito 35

2.2.3. MBI: La Metáfora Básica del Infinito 40

2.3. El infinito matemático a través de la teoría APOE 43

2.4. Planteamiento del Problema 54

CAPÍTULO III. PARADIGMA DE INVESTIGACIÓN 56

3.1. Paradigma de Investigación de la Teoría APOE 57

3.2. Adaptación del Ciclo de Investigación desde Nuestro Estudio 59

3.3. Análisis Teórico 60

3.3.1. Descomposición genética genérica de infinito 61

3.3.2. Acercamiento matemático y descomposición genética de la paradoja de Aquiles y la tortuga 67

3.3.3. Acercamiento matemático y descomposición genética del problema de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto 74

3.3.4. Acercamiento matemático y descomposición genética del problema de unión infinita de conjuntos 82

3.4. Población de estudio..89

3.5. Análisis de Instrumentos..90

3.5.1. Análisis del Instrumento tipo I..90

3.5.2. Instrumento tipo II..97

3.6. Análisis de evidencias empíricas de la paradoja de Aquiles y la tortuga..........................100

3.6.1. Concepciones primarias..100

3.6.2. Evidencias de la estructura Acción..107

3.6.3. Evidencias de la estructura Proceso..109

3.6.4. Evidencia de la estructura Totalidad..116

3.6.5. Evidencias de la estructura Objeto trascendente..120

3.7. Análisis de las evidencias empíricas del problema de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto..123

3.7.1. Concepciones primarias..124

3.7.2. Evidencias de la estructura Acción..125

3.7.3. Evidencias de la estructura Proceso..125

3.7.4. Evidencias de la estructura Totalidad..131

3.7.5. Evidencias de la estructura Objeto trascendente..138

3.8. Análisis de las evidencias empíricas del problema de unión infinita de conjuntos..........147

3.8.1. Concepciones primarias..147

3.8.2. Evidencias de la estructura Acción..149

3.8.3. Evidencias de la estructura Proceso..150

3.8.4. Evidencias de la estructura Totalidad..155

3.8.4. Evidencias de la estructura Objeto trascendente..157

CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES..166

4.1. Reflexiones generales sobre las Descomposiciones Genéticas..167

4.1.1. Sobre la descomposición genética genérica de infinito 168

4.1.2. Sobre la descomposición genética de la paradoja de Aquiles y la tortuga.................169

4.1.3. Sobre la descomposición genética del problema de la recta tangente a una curva en un punto...170

4.1.4. Sobre la descomposición genética del problema de la unión infinita de conjuntos potencia 171

4.2. Los contextos del infinito y el diseño de instrumentos 172

4.3. Totalidades y Objetos trascendentes: estructuras en la construcción cognitiva del infinito matemático 175

4.3.1. Totalidades y Tipos de Acciones: Reflexiones desde la teoría Piagetiana 181

4.4. APTOE: Implicaciones teóricas de la Totalidad como una estructura en la construcción de conocimiento matemático 182

4.5. Futuras investigaciones 184

REFERENCIAS 186

ANEXOS...190

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Adaptada de Arnon et al., 2014, p. 18) ____ *20*

Figura 2. Coordinación de los procesos PA y PB (Arnon et al., 2014, p. 24) ____ *23*

Figura 3. Metáfora Básica del Infinito. (Lakoff & Núñez, 2000, p.159) ____ *42*

Figura 4. Construcción del triángulo de Sierpiński (Villabona & Roa-Fuentes, 2016, p. 127) ____ *47*

Figura 5. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014, p. 94) ____ *58*

Figura 6. Ciclo de investigación en nuestro estudio ____ *59*

Figura 7. Descomposición genética genérica preliminar del infinito ____ *64*

Figura 8. Movimientos de Aquiles y la tortuga en las primeras iteraciones ____ *69*

Figura 9. Distancias que separan a Aquiles de la tortuga en las primeras iteraciones ____ *70*

Figura 10. Descomposición genética preliminar de la paradoja de Aquiles y la Tortuga para la solución matemática a través de las distancias totales recorridas ____ *72*

Figura 11. Representación gráfica planteada en el instrumento 1, contexto recta tangente 1 ____ *75*

Figura 12. Representación gráfica del problema 2 del contexto 2 ____ *77*

Figura 13. Construcción de $P12$ y $TOT12$ ____ *79*

Figura 14. Descomposición genética preliminar del problema de la recta tangente ____ *80*

Figura 15. Construcción de $P123$ y $TOT123$ ____ *81*

Figura 16. Descomposición genética del problema de unión infinita de conjuntos ____ *86*

Figura 17. Primeras posiciones de Aquiles y la tortuga ____ *93*

Figura 18. Representación gráfica, problema de la recta tangente, contexto 2, problema 1 ____ *96*

Figura 19. Representación gráfica, contexto 2, problema 2 ____ *97*

Figura 20. Entrevista de Ana María: distancia recorrida por Aquiles y la tortuga ____ *101*

Figura 21. Entrevista de Ivón: relación entre velocidad, distancia y tiempo para Aquiles y la tortuga en $t = 1\ h$ _ *105*

Figura 22. Entrevista de Edward: construcción de Acciones relacionadas con las distancias totales entre Aquiles y la tortuga ____ *108*

Figura 23. Entrevista de Ivón: construcción del proceso de distancias entre Aquiles y la Tortuga ____ *109*

Figura 24. Entrevista de Ana María: solución situación 1 ____ *110*

Figura 25. Entrevista de Ana María: estrategia para determinar la igualdad entre 13 y $0.333\ldots$ ____ *110*

Figura 26. Entrevista de Ana María: demostración de la igualdad $0.999\ldots = 1$ ____ *111*

Figura 27. Entrevista de Ana María: los números $0.1999\ldots$ y 0.2 en la recta real ____ *111*

Figura 28. Entrevista de Ivón: demostración de la igualdad $0.999\ldots = 1$ ____ *114*

Figura 29. Entrevista de Sandy: distancia total recorrida por Aquiles y la tortuga ____ *120*

Figura 30. Entrevista de Edward: distancias totales entre Aquiles y la tortuga ____ *121*

Figura 31. Entrevista de Edward: ecuación para determinar la distancia entre el punto de alcance de Aquiles y la tortuga y la meta 122
Figura 32. Entrevista de Sandy: solución de situación 1 123
Figura 33. Entrevista de Sandy: relación entre la meta y el punto de alcance de Aquiles y la tortuga 123
Figura 34. Construcción de la recta PQ *por parte de Ana María* 126
Figura 35. Entrevista de Ana María: pendiente de la recta secante PQ 126
Figura 36. Entrevista de Ana María: explicación sobre cómo llegar a la tangente a partir de los puntos P *y* Q 126
Figura 37. Entrevista de Ana María: pendiente de la recta tangente 126
Figura 38. Entrevista de Miguel: construcción de la recta PQ 130
Figura 39. Entrevista de Miguel: pendiente de la recta secante 130
Figura 40. Entrevista de Miguel: pendiente de la recta tangente 131
Figura 41. Entrevista de Miguel: comportamiento del ángulo D *cuando* $Q \rightarrow P$ 134
Figura 42. Entrevista de Miguel: comportamiento de los ángulos cuando $Q \rightarrow P$ 134
Figura 43. Entrevista de Miguel: relación entre los ángulos 135
Figura 44. Entrevista de Sandy: construcción de la recta secante y la pendiente de la recta tangente 142
Figura 45. Entrevista de Sandy: acciones para construir el proceso $P123$ 143
Figura 46. Entrevista de Sandy: medidas y comportamiento de los ángulos en la situación límite cuando $Q \rightarrow P$ 144
Figura 47. Entrevista de Jerónimo: construcción de la recta secante y pendiente de la recta tangente 145
Figura 48. Entrevista de Jerónimo: comportamiento de los ángulos en el proceso y situación límite cuando $Q \rightarrow P$ 146
Figura 49. Entrevista de Ivón: conjunto P *de partes del conjunto* P' 147
Figura 50. Entrevista de Ivón: desarrollo del ítem de apoyo de unión iterativa finita 148
Figura 51. Entrevista de Ivón: ítem de apoyo de unión iterativa de $k = 1, \ldots, 5$ 149
Figura 52. Entrevista de Marian: conjuntos potencia para los primeros valores de k 149
Figura 53. Entrevista de Marian: subconjunto de los números pares generados por la unión 151
Figura 54. Entrevista de Miguel: conjunto dado por la unión infinita de conjuntos potencia 152
Figura 55. Entrevista de Miguel: conjunto dado por la unión infinita de conjuntos potencia incluyendo a $\mathbb{N}$ 152
Figura 56. Entrevista de Ivón: propiedad de la unión infinita 154
Figura 57. Entrevista de Ivón: unión iterativa finita para generar el conjunto $1{,}3{,}10$ 155
Figura 58. Entrevista de Kevin: caracterización de la unión por comprensión 156
Figura 59. Entrevista de Kevin: conjunto finito generado en algún k 157
Figura 60. Entrevista de Ivón: conjuntos generados en la tercera iteración 159
Figura 61. Entrevista de Kevin: argumento para rechazar la igualdad $\cup\, k = 1 \infty P1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k = P\mathbb{N}$ 164
Figura 62. Teoría APOE tomando en cuenta la posible estructura Totalidad (Villabona, Roa-Fuentes y Oktaç, enviado para su publicación) 177

Figura 63. Construcción de la concepción objeto $O1$ (Villabona, Oktaç & Roa-Fuentes, 2019) ________________ *183*

RESUMEN

El infinito matemático ha sido estudiado desde diferentes perspectivas teóricas en la Matemática Educativa. El interés principal de la comunidad en esta noción se debe a la complejidad conceptual evidenciada en su desarrollo epistemológico. La naturaleza dual del infinito juega un papel importante en la comprensión de conceptos y técnicas en las matemáticas universitarias (análisis, teoría de conjuntos, álgebra lineal y álgebra abstracta, geometría analítica y proyectiva, entre otras).

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es un enfoque teórico y metodológico que analiza las estructuras y mecanismos mentales (*interiorización, encapsulación, des-encapsulación, coordinación, reversión, tematización,* entre otros) que un individuo construye cuando aprende conceptos y nociones matemáticas.

El estudio del infinito utilizando los constructos de la teoría APOE ha permitido determinar que su naturaleza dual, potencial y actual, puede ser construida cognitivamente a través de dos concepciones diferentes, Proceso (dinámica) y Objeto (estática), respectivamente. Además, se ha establecido que los Objetos asociados con entidades del infinito trascienden el Proceso que los origina, lo que significa que no conservan las propiedades del Proceso (Brown, McDonald & Weller, 2010).

Algunas investigaciones empíricas recientes del infinito a través de la teoría APOE han permitido identificar posibles elementos que la teoría no tomaba en cuenta previamente: una etapa de construcción de conocimiento denominada *Totalidad* (Dubinsky, Weller & Arnon, 2013) y la caracterización de un mecanismo mental llamado *Completez* (Roa-Fuentes, 2012).

En este documento, ofrecemos los resultados de nuestra investigación doctoral que tuvo como objetivo principal analizar y caracterizar la construcción cognitiva del infinito matemático en términos de los elementos, nuevos y tradicionales, propuestos por la teoría APOE. Se reporta nueva evidencia de la posible estructura Totalidad en contextos del infinito diferentes al estudiado por Dubinsky et al. (2013). Además, se analiza la posible relación entre los niveles de desarrollo del Esquema y la realización de distintos tipos de Acciones sobre una misma Totalidad. También, se plantea por primera vez una *Descomposición Genética Genérica del infinito* que permite la conceptualización de entidades que surgen de procesos infinitos iterativos y continuos.

ABSTRACT

Mathematical infinity has been studied from different theoretical perspectives in Mathematics Education. The main interest of the community in this notion is due to the conceptual complexity evidenced in its epistemological development. The dual nature of infinity plays an important role in the understanding of concepts and techniques in university mathematics (analysis, set theory, linear algebra and abstract algebra, analytical and projective geometry, among others).

APOS theory (Action, Process, Object, Schema) is a theoretical and methodological approach that analyzes the structures and mental mechanisms (*interiorization, encapsulation, de-encapsulation, coordination, reversal, thematization,* among others) which an individual builds when learning mathematics concepts and notions.

The study of infinity using the constructs of the APOS theory has allowed determining that its dual nature, potential and actual, can be cognitively constructed through two different conceptions of this notion, Process (dynamic) and Object (static), respectively. Furthermore, it has been established that the Objects associated with entities of infinity transcend the Process from which they originate, that is, they do not preserve the properties of the Process (Brown, McDonald & Weller, 2010).

Some recent empirical research studies of infinity through the lens of APOS theory have allowed the identification of possible elements that the theory did not previously take into account: a stage of knowledge construction called Totality (Dubinsky, Weller & Arnon, 2013) and the characterization of a mental mechanism called *Completez* (Roa-Fuentes, 2012).

In this document, we offer the results of our doctoral research that had as its main objective to analyze and characterize the cognitive construction of mathematical infinity in terms of the elements, both new and traditional, proposed by the APOS theory. New evidence for the possible structure Totality in contexts of infinity different from the studied by Dubinsky et al. (2013) is reported. Besides, the possible relation between the levels of development of the Schema and the application of different types of Actions on the same Totality is analyzed. Also, a *Generic Genetic Decomposition of infinity* is proposed for the first time, which allows the conceptualization of entities that arise from infinite iterative and continuous processes.

INTRODUCCIÓN

El infinito en lo cotidiano es una forma de hablar, de expresar cantidad, de referirse a Dios, de exagerar, y, desde las matemáticas, un proceso inacabado que permite definir entidades (potencia y acto). Esta noción ha llenado de fascinación, dudas e incluso temores la mente de grandes eruditos a lo largo de la historia. Borges (1952) apasionado por esta noción, manifiesta que es más universal y terrible que el concepto del mal, ya que corrompe y desatina a otros conceptos. De alguna manera esta mirada resalta la importancia y la complejidad del infinito en relación con diversos campos del intelecto humano. Lo anterior se hace explícito al manifestar:

> Sospecho que la palabra infinito fue alguna vez una insípida equivalencia de inacabado; ahora es una de las perfecciones de Dios en la teología y un discutidero en la metafísica y un énfasis popularizado en las letras y una finísima concepción renovada en las matemáticas −Russell explica la adición y multiplicación y potenciación de números cardinales infinitos y el porqué de sus dinastías casi terribles− y una verdadera intuición al mirar al cielo. (Borges, 1928, p. 56)

Borges (1928) hace referencia con desagrado, a las concepciones potenciales con las que los griegos abordaron el infinito. Sin embargo, parece admirar la evolución que se ha dado a esta noción a través de las matemáticas. Bolzano (1781 – 1848) y Cantor (1845 – 1918), contradiciendo lo propuesto por Aristóteles (383 – 322 a.C) sobre la incapacidad que tienen los individuos de ver procesos infinitos terminados, lograron demostrar que la mente humana puede imaginar lo que ocurre si un proceso infinito se realiza en su totalidad, concebir el infinito actual. Aunque el origen del infinito es inminentemente filosófico (Belmonte, 2009), ha sido la matemática la que ha logrado su conceptualización, permitiendo solucionar distintas paradojas que lo relacionan, además de usarlo como soporte en el desarrollo de distintas áreas de las matemáticas modernas.

A pesar de su importancia y complejidad, el infinito no aparece de forma explícita en el currículo en matemáticas en ningún nivel escolar. Es poco lo que se sabe sobre cómo enseñarlo e incluso no se ofrece una definición formal a lo largo de las matemáticas escolares. Sin embargo, se enseñan un sinfín de conceptos y nociones trascendentales que lo involucran directamente a lo largo de nuestro aprendizaje de las matemáticas en la educación básica y media superior (decimales infinitos periódicos, números irracionales, construcción de conjuntos infinitos como los naturales, los enteros y los reales, el concepto de límite, entre otros).

En la educación superior, los estudiantes de ingeniería, ciencias e incluso todos aquellos que toman cursos de estadística y probabilidad, deben lidiar con conceptos relacionados con esta noción. A falta de un tratamiento adecuado en sus primeros años de formación, los estudiantes enfrentan la construcción de conceptos relacionados con el infinito usando como principal herramienta sus intuiciones. Para Fischbein (2001) los seres humanos estamos inmersos en un contexto de características finitas, lo que percibimos como espacio y tiempo está limitado por nuestro entorno y nuestra existencia, y por tanto el único infinito que podemos aceptar de forma intuitiva es uno potencial. De esta manera, nuestras intuiciones pueden ser un obstáculo a la hora de construir conceptos que se relacionan con la naturaleza dual del infinito.

Como presentamos en capítulo II, el infinito ha sido estudiado ampliamente desde distintas miradas teóricas a través de la Matemática Educativa. Estos estudios buscan responder preguntas sobre: su construcción cognitiva, su epistemología, sus intuiciones, el impacto de las creencias de los docentes a la hora de enseñarlo, el impacto de las representaciones, su semántica, el impacto de los contextos, etc.; esto ha permitido obtener resultados diversos que nos han acercado a una mayor comprensión del infinito como objeto de estudio en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), ha sido usada para estudiar la construcción cognitiva de diversos conceptos y nociones en las matemáticas; gracias a esto se han planteado modelos cognitivos para su construcción (*descomposiciones genéticas*). Estos modelos se escriben en términos de estructuras y mecanismos mentales. El estudio del infinito a través de esta teoría ha permitido establecer que su naturaleza dual puede ser aceptada cognitivamente sin dar lugar a contradicciones, determinando que la construcción del infinito potencial y actual se lleva a cabo a partir de estructuras cognitivas distintas (dinámicas y estáticas respectivamente) de la misma noción (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005a; 2005b).

La investigación del infinito matemático en términos de la teoría APOE ha permitido el planteamiento de posibles nuevos constructos a partir del análisis de evidencias empíricas. En Villabona y Roa-Fuentes (2016) tomando como referente genérico el trabajo de Roa-Fuentes y Oktaç (2014), por ejemplo, se realiza un análisis de las estructuras y mecanismos mentales que un grupo de individuos con conocimientos avanzados de las matemáticas desarrolla al enfrentar la paradoja de Aquiles y la tortuga, y la construcción del triángulo de Sierpiński. Los resultados muestran que algunos estudiantes logran pasar de una estructura dinámica a una estática, gracias a su capacidad de construir procesos iterativos infinitos y de analizar su situación límite. Esto se relaciona, según Roa-Fuentes (2012), con un nuevo mecanismo (denominado *Completez*) que permite vincular el proceso iterativo infinito (proceso que puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales) y el objeto que trasciende de él.

Por su parte, Dubinsky et al., (2013) encontraron evidencias de una posible estructura entre el Proceso y el Objeto a la hora de estudiar una situación relacionada con el infinito (la igualdad $0.999 \ldots = 1$). La existencia de esta nueva estructura diferencia dos características que tradicionalmente se le atribuían a la concepción Objeto: (i) la capacidad de construir un Proceso como un todo y (ii) la capacidad de realizar Acciones sobre ese todo. Estas características al parecer corresponden a estructuras diferentes.

Con base en una etapa de análisis teórico, en la presente investigación hemos planteado descomposiciones genéticas preliminares del infinito en distintos contextos. Estos contextos han sido adaptados con el fin de determinar si los nuevos constructos planteados a partir de la investigación con la teoría APOE, se evidencian en el razonamiento de individuos con amplia experiencia en matemáticas (estudiantes de maestría y doctorado en matemáticas y matemática educativa; además, de profesores con experiencia en la enseñanza de matemáticas universitarias básicas y avanzadas).

En este documento damos cuenta de los resultados de nuestra investigación doctoral, llevada a cabo como un estudio exploratorio para analizar la construcción cognitiva del infinito en contextos variados a través de los datos obtenidos en las distintas aplicaciones del ciclo metodológico. Se han encontrado evidencias de la estructura Totalidad en dos nuevos contextos del infinito; además, se analiza la posible construcción de concepciones Objeto diferentes a partir de la realización de distintos tipos de Acciones sobre la misma Totalidad. También se plantean descomposiciones genéticas refinadas para los contextos usados y una descomposición genética genérica de infinito que toma en cuenta la construcción del infinito numerable y del infinito del continuo.

Esta tesis se encuentra estructurada en cuatro capítulos. En el Capítulo I se proponen aspectos generales de la teoría que sustenta nuestro trabajo de investigación: La Teoría APOE. En el Capítulo II, se plantea la problemática del infinito a partir de una síntesis histórica, pasando por algunos de los más importantes antecedentes desde la Matemática Educativa, especialmente desde la teoría APOE. En el Capítulo III se detallan los aspectos relacionados con el ciclo de investigación, se ofrecen los análisis teóricos y las evidencias empíricas. Y finalmente, en el Capítulo IV, se plantean las conclusiones y los aspectos a tomar en cuenta en futuras investigaciones.

CAPÍTULO I

ACCIONES, OBJETOS, PROCESOS Y ESQUEMAS: LA TEORÍA APOE

En este capítulo se plantea de forma general los constructos que postula la teoría APOE, estos fundamentan el acercamiento teórico y metodológico que guían el desarrollo de la investigación. La teoría APOE ha permitido el estudio de la construcción cognitiva de diversos conceptos y nociones en distintas ramas de la matemática tales como la aritmética, el análisis, la estadística, el álgebra elemental, lineal y abstracta, la teoría de conjuntos, entre otras; desde esta perspectiva se han planteado modelos cognitivos validados que muestran cómo los individuos pueden estructurar su pensamiento matemático. Dichos modelos representan un insumo para los profesores de matemáticas ya que pueden guiar el diseño de clase y de evaluación, así como ser usados para el desarrollo de políticas educativas más actuales que atiendan los requerimientos cognitivos en la construcción del conocimiento matemático.

La teoría APOE (Acrónimo de *Acción, Proceso, Objeto, Esquema*) (en adelante se hará referencia a las estructuras de la teoría APOE al escribir su primera letra en mayúscula) es una teoría constructivista propuesta por Ed Dubinsky y miembros de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC, por sus siglas en inglés) que ha sido ampliamente usada para plantear modelos cognitivos de construcción de conceptos y nociones matemáticas. Dichos modelos describen las estructuras que un individuo construye a partir de mecanismos (casos particulares de *Abstracción Reflexiva*) en la construcción de su conocimiento matemático (Arnon, Dubinsky, Cottrill, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014). En adelante entenderemos el conocimiento matemático según plantean Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996):

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones problemáticas en matemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos organizándolos en esquemas con el fin de tratar con dichas situaciones. (p.7)

La teoría APOE ha sido desarrollada a partir del concepto de *Abstracción Reflexiva* planteado y usado por Piaget para describir las estructuras lógico-matemáticas que un individuo construye en su desarrollo cognitivo. Para Piaget (1975/1985, visto en Arnon et al., 2014, p.110) este tipo de abstracción tiene un papel crucial en la construcción de conocimiento, ya que es la encargada del desarrollo de las estructuras cognitivas. A diferencia de lo que se puede entender como abstracción, la abstracción reflexiva es un modo de pensamiento que se deriva de las acciones que un individuo pueda realizar sobre objetos (ya sean físicos o cognitivos) y no de las características comunes de dichos objetos. La abstracción reflexiva requiere tanto del objeto sobre el cual se realiza la acción como del sujeto que la realiza (Piaget, 1968/1970, visto en Arnon et al., 2014, p.7). Piaget (1985) propone que un buen ejemplo de dicho proceso de abstracción es la evolución de las matemáticas desde la antigüedad hasta nuestros días.

Mientras Piaget centra su trabajo en el estudio del desarrollo del conocimiento matemático en edades tempranas y adolescencia, Dubinsky (1991) realiza una interpretación de dicha idea de abstracción y la extiende para la construcción de conceptos matemáticos más avanzados. Esto no implica que la teoría APOE no pueda usarse en el estudio de conceptos elementales; hasta la fecha se han desarrollado investigaciones sobre temas como: fracciones como equivalencias (Arnon, 1998; Arnon, Nesher & Nirenburg, 1999; 2001), el triángulo de Sierpiński en la educación básica y secundaria (Gutiérrez-Figueroa & Parraguez, 2017), entre otros. En estas investigaciones en particular se propone la construcción de los conceptos a partir de acciones realizadas sobre objetos concretos como punto de partida en la construcción de Objetos abstractos (Arnon et al., 2014).

Para la teoría APOE el desarrollo del conocimiento matemático puede describirse en términos de *Estructuras* (que dan nombre a la teoría) y de *Mecanismos* (*Interiorización*, *Encapsulación*, *Coordinación*, *Des-encapsulación*, *Tematización*, entre otros) que permiten la evolución de las estructuras. Estos constructos son usados para llevar a cabo una detallada descripción cognitiva de la construcción de conceptos y nociones matemáticas. Por estructura y mecanismo mental entendemos lo que Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidakovic (2008) proponen:

> Una estructura mental es cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina.
>
> Un mecanismo mental es el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o un grupo de individuos. (p. 98)

Para Arnon et al. (2014) un concepto es lo que acepta una comunidad relacionado con un tema específico. En cambio, una concepción es una idea más íntima de dicho concepto, algo que surge de una reflexión personal y que está asociado al tipo de experiencias que cada individuo tiene la oportunidad de experimentar.

Las estructuras se desarrollan y se relacionan por medio de mecanismos, de manera que pueden ser ordenadas en marcos coherentes denominados *Esquemas* (Weller, Brown, Dubinsky, McDonald & Stenger, 2004). En la Figura 1, se presenta un diagrama elemental en el que se muestra la progresión $A \rightarrow P \rightarrow O \rightarrow E$ como una forma de relacionar las estructuras a partir de algunos mecanismos.

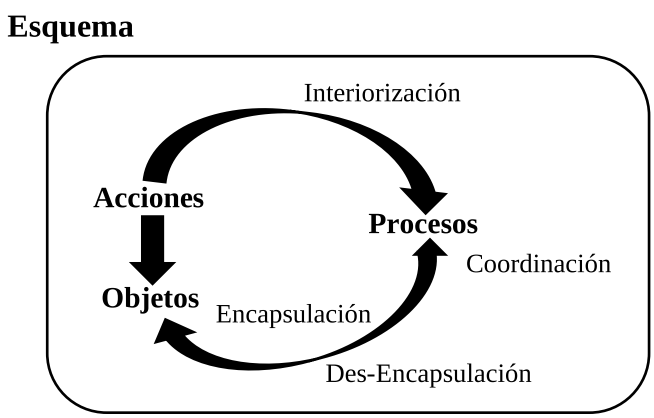


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Adaptada de Arnon et al., 2014, p. 18)

La interacción entre estos constructos es caracterizada por Dubinsky (1991) como un "sistema de retroalimentación circular" (p.106), aunque no se presenta en forma lineal, ya que la construcción del conocimiento no lo es, sí de manera jerárquica (Arnon et al., 2014). Lo anterior se relaciona con la concepción inicial de un concepto como una Acción que luego se interioriza en un Proceso que a su vez puede ser encapsulado en un Objeto sobre el cual se pueden realizar nuevas Acciones. La complejidad de la construcción de estas concepciones va en aumento en el sentido que describe la progresión $A \rightarrow P \rightarrow O \rightarrow E$. A pesar de que pueda pensarse que las Acciones representan la más básica de las estructuras, lo cierto es que su realización es la base de la construcción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014).

Las Acciones son transformaciones que se realizan sobre un Objeto u Objetos previamente construidos por el individuo. Se caracterizan por ser el resultado de una instrucción directa y por la necesidad de ser llevadas a cabo explícitamente. Las Acciones, además, son secuenciadas, es decir, no se puede realizar una Acción sin haber realizado la Acción inmediatamente anterior. A pesar de que esta sea la más primitiva de las estructuras, en ocasiones, es la única en que se enfatiza la enseñanza tradicional (Arnon et al., 2014). Por ejemplo, una concepción Acción es la que le permite a un individuo transformar específicamente uno o más elementos del dominio de una función haciendo uso de una expresión específica $y = f(x)$ (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992). En el contexto de las transformaciones lineales un individuo necesita de una función explícita T (o de su matriz asociada) para encontrar algunas imágenes de vectores específicos dados, que pertenecen al espacio vectorial dominio de la transformación.

Las Acciones no son necesariamente elementales: en ocasiones y dependiendo del Objeto sobre el cual deban actuar, pueden llegar a ser bastante complejas y muy difíciles de caracterizar. Un ejemplo de esto son las Acciones que debe realizar un individuo sobre Objetos construidos a partir de Procesos infinitos asociados a fractales o a entidades del infinito en general.

La construcción de la estructura Proceso depende del nivel de reflexión que alcance el individuo durante la realización de las Acciones. Dicha reflexión propicia el mecanismo de interiorización con el cual tiene control interno de las Acciones que antes realizaba de forma externa, es decir, en una concepción Proceso, una transformación actúa sobre un Objeto (u Objetos) de forma exclusivamente mental. Dado que el individuo imagina cómo se lleva a cabo la Acción sin llegar a realizarla explícitamente, puede obtener una transformación dada sin realizar una secuencia de transformaciones previas. Por lo tanto, podrá efectuar Acciones no consecutivas e incluso invertirlas. En el caso de las funciones, el cálculo específico de las imágenes de algunos elementos del dominio y la reflexión que el individuo haga de la realización de estas acciones, le permitirá construir una concepción Proceso. Con esta concepción puede determinar características generales del dominio y pensar cómo actúa la función sobre todos los elementos de dicho conjunto, llegando a establecer y caracterizar el recorrido de la función. Además, el individuo podrá reflexionar sobre la continuidad, raíces, máximos y mínimos, zonas de crecimiento y decrecimiento, etc. Para el caso de la transformación lineal, el individuo podrá establecer si una transformación es lineal verificando las propiedades de suma y producto por escalar en vectores genéricos del dominio evidenciando un pensamiento generalizado. Además, podrá imaginar cómo actúa la transformación sobre todo el espacio vectorial del dominio, determinar el contra-dominio y la imagen de la transformación.

Cuando un individuo ha construido un Proceso, es posible que bajo cierta actividad cognitiva pueda estructurarlo como un todo y, además, pueda realizar Acciones sobre ese todo; esto se logra gracias al mecanismo de encapsulación donde el Proceso, como una estructura dinámica, es transformado en un Objeto. Un individuo con una concepción Objeto de función, por ejemplo, puede construir conjuntos de funciones y analizarlas como vectores de un espacio vectorial. Además, puede realizar operaciones entre funciones como sumarlas o componerlas, clasificarlas a partir de sus características, etc. En el caso de la transformación lineal, la concepción Objeto le permite al individuo pensar en el espacio vectorial de todas las transformaciones lineales, realizar operaciones entre ellas o pensar en qué condiciones una transformación lineal es invertible; además, puede proponer transformaciones lineales que cumplan con características particulares dadas (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

Si un Proceso ha sido encapsulado en un Objeto, el individuo puede volver al Proceso a partir del mecanismo de des-encapsulación. Este mecanismo podría necesitarse, por ejemplo, cuando el individuo, una vez que ha construido el Objeto, requiere tener acceso en un mismo momento tanto al Proceso como al Objeto. Además, cuando requiera de construir un Objeto a partir de otros, en ese momento el individuo des-encapsula los Objetos determinando los Procesos subyacentes para coordinarlos (este mecanismo se explica a continuación) en un único Proceso que pueda ser encapsulado en un nuevo Objeto.

Otras formas de construir Procesos surgen a partir de los mecanismos de coordinación y de reversión. En el caso del mecanismo de coordinación, el individuo necesita de dos o más Procesos que coordinados dan paso a la construcción de uno nuevo. La coordinación de Procesos puede hacerse tan compleja como la naturaleza misma de los Procesos involucrados; sin embargo, es poco lo que se conoce de este mecanismo y sobre cómo puede motivarse. Esto lo convierte en un tema interesante de investigación en el marco de la teoría. En cuanto al mecanismo de reversión, este permite que el individuo construya el Proceso inverso de un Proceso que ha sido construido con antelación. La composición de funciones y la función inversa de una función dada ejemplifican cómo actúan estos dos mecanismos.

En particular el mecanismo de coordinación es necesario para realizar la composición de funciones. En este caso el individuo debe haber construido previamente los Objetos f y g que debe des-encapsular en los Procesos que los originaron. Posteriormente se busca que se construya el nuevo

Proceso asociado a la composición, que corresponde a la función $f \circ g$. La coordinación en este caso consiste en la aplicación de la función f a los objetos obtenidos al aplicar la función g (Arnon et al., 2014, p. 23). Una adecuada coordinación puede permitir a los individuos discernir sobre cómo afectan las restricciones de los dominios y las imágenes de las funciones f y g, al dominio y la imagen de la función composición. Otro ejemplo de coordinación se encuentra en el caso de las transformaciones lineales, donde es posible coordinar el Proceso asociado a la suma vectorial con el Proceso relacionado con el producto por un escalar para dar lugar a uno único; éste define la estructura Proceso asociada a la transformación lineal como una función que preserva combinaciones lineales al poner las dos operaciones juntas. La coordinación en este caso está dada por el operador lógico "$\wedge$" que hace referencia a la aplicación de una Acción cognitiva que involucra los dos Procesos al mismo tiempo (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

Existen diferentes maneras en las que los Procesos pueden coordinarse. Un par de explicaciones teóricas de cómo podría actuar el mecanismo de coordinación se plantean en Arnon et al. (2014). Estas explicaciones toman en cuenta los mecanismos de encapsulación, acomodación y asimilación; y básicamente requieren que el individuo primero encapsule uno de los Procesos en un Objeto para que el otro pueda actuar sobre él. Las formas en la que puede actuar el Proceso sobre el Objeto se proponen en la Figura 2.

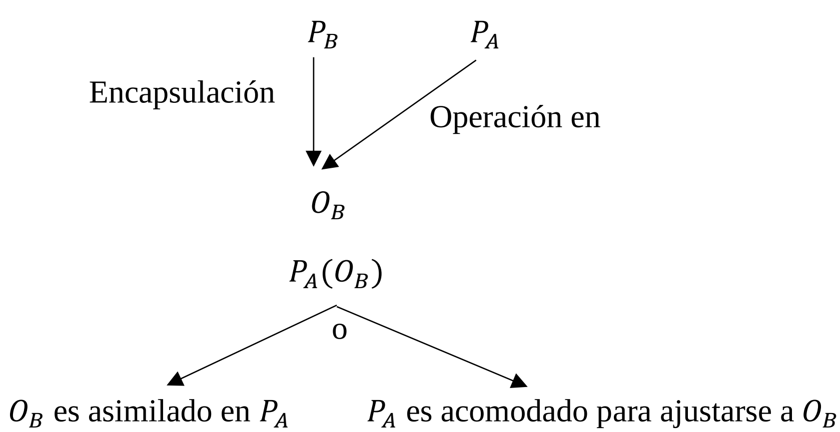


Figura 1. Coordinación de los procesos P_A y P_B (Arnon et al., 2014, p. 24)

Una vez el individuo encapsula el Proceso P_B en el Objeto O_B, el Proceso P_A puede actuar sobre él ya sea: (i) asimilándolo o (ii) acomodándose para ajustarse a O_B. Este planteamiento es solo una propuesta teórica y requiere de respaldo empírico (Arnon et al., 2014).

El mecanismo de reversión permite la construcción de la función inversa a partir de la función original, dando sentido a los conceptos de *función sobre* y *función uno a uno*, necesarios en la tarea de determinar si una función es invertible (Dubinsky, 1991). La idea de función biyectiva se desarrolla en la mente del individuo y da paso al concepto de función inversa, una vez que se aplica el mecanismo de reversión.

Como mencionamos anteriormente, un Esquema es la organización coherente de *estructuras* y *mecanismos* que un individuo usa para resolver una situación matemática y que hace referencia a un concepto o noción (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010). La coherencia de un Esquema está relacionada con la capacidad que tenga un individuo de reconocer las relaciones en el Esquema y medir su alcance en la resolución de una situación (Arnon et al., 2014). Es decir, la coherencia de un Esquema se pone a prueba cuando un individuo enfrenta una situación en la que no se hace explícito qué conceptos o nociones le ayudarán a solucionarla.

Entre las estructuras que un Esquema puede guardar dentro de sí están otros esquemas, esto se relaciona con los mecanismos de *tematización* y *asimilación* que hacen que un Esquema se convierta en una estructura similar al Objeto que puede ser asimilada por otros Esquemas. Un ejemplo de esto sería la construcción del Esquema de transformación lineal que puede ser tematizado y posteriormente asimilado por un Esquema de función, haciendo que el individuo enriquezca su Esquema de función y logre entender las transformaciones lineales como casos particulares de funciones.

Los niveles *Intra-*, *Inter-* y *Trans-* hacen referencia a la evolución que puede llegar a tener un Esquema (luego del guion debe ir el nombre del Esquema, por ejemplo, los niveles de desarrollo del Esquema de función son: Intra-función, Inter-función y Trans-función). Los niveles se relacionan con la experiencia que cada individuo pueda llegar a tener gracias a las situaciones matemáticas que enfrenta. A continuación, caracterizamos brevemente estos niveles según proponen Arnon et al. (2014):

- **Nivel Intra-:** Se caracteriza por un enfoque en las Acciones, Procesos y Objetos de forma individual, aislados de otros elementos cognitivos. En este nivel el individuo se centra en acciones u operaciones repetibles llegando a reconocer algunas relaciones o transformaciones entre Acciones en diferentes componentes del esquema (p. 114).

- **Nivel Inter-:** Se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre Procesos y Objetos que componen el esquema. En esta etapa una persona puede llegar a agrupar elementos e incluso llamarlos por el mismo nombre, determinando propiedades y características de dichos elementos (p. 116).

- **Nivel Trans-:** A medida que un individuo reflexiona sobre las relaciones y coordinaciones que desarrolló en el nivel inter, surgen nuevas estructuras. A través de la síntesis de esas relaciones el individuo toma consciencia de las transformaciones y construye una estructura subyacente. En esta etapa un factor crítico es la coherencia del esquema (p. 118).

Estos niveles describen la construcción de relaciones del concepto o noción asociado al Esquema con otros Esquemas de conceptos que se pueden relacionar con el original. Esto lleva a crear Esquemas mucho más robustos que permiten que un individuo tenga a su disposición diversas formas de abordar una misma situación matemática, haciendo uso de conceptos afines, diversas aplicaciones o cambiando de modos de representación.

En algunas investigaciones sobre el infinito matemático que usan como modelo teórico el planteado por APOE se han propuesto nuevos elementos teóricos como posibles constructos que deben ser tomados en cuenta en la teoría. La viabilidad de estos constructos debe respaldarse empíricamente en distintas poblaciones, con distintos conceptos y nociones de las matemáticas, antes de poder aceptarse como nuevas etapas de construcción de conocimiento o como nuevos mecanismos. En el siguiente capítulo haremos un acercamiento a la forma en la que se ha investigado el infinito a través de la matemática educativa, en general, y también haciendo uso de las estructuras y mecanismos de la teoría APOE.

CAPÍTULO II

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo planteamos algunos aspectos que prueban la influencia determinante que ha tenido el infinito en la evolución de conocimiento matemático. Iniciamos con una síntesis histórica que busca evidenciar el desarrollo conceptual de esta noción a partir de los aportes de algunos de los más grandes matemáticos, desde la antigua Grecia hasta su formalización con la teoría de conjuntos propuesta por Georg Cantor (1845 – 1918). Posteriormente, se proponen algunas miradas a la problemática del infinito en términos de la Matemática Educativa, enfocándonos en las intuiciones y la construcción cognitiva.

2.1. El infinito matemático a través de la historia

El desarrollo conceptual del infinito a través de la historia de las matemáticas muestra la complejidad con la que ha tenido que lidiar el intelecto humano para teorizar una noción tanto anti-intuitiva como cotidiana. Infinito es aquello que no podemos determinar, que no podemos contar o dimensionar. El infinito se ha romantizado, se ha plasmado en obras, se ha utilizado para hiperbolizar temas o sujetos al hablar, se ha usado como herramienta en técnicas matemáticas y se ha formalizado para permitir la evolución de lo que conocemos hoy como las matemáticas modernas.

No es desconocido que los griegos realizaron fascinantes intentos por racionalizar la naturaleza y en general, el universo; llegando a plantear teorías y técnicas que han fundamentado, por lo menos inicialmente, todo el desarrollo científico. Para Moreno y Waldegg (1991) los roles gramaticales que jugó la palabra “infinito” en la antigua Grecia fueron:

1. **Como sustantivo**, sólo aparece en relatos de tipo mitológico, teológico o metafísico: El “infinito” pertenece al reino de los dioses.

2. **Como un adjetivo** que describe un sustantivo, sólo se usa cuando éste tiene las características de un absoluto, como el Universo, el Ser, Espacio o Tiempo. Aristóteles sólo usa esta forma cuando niega su existencia real (física), ya que el concepto abarca un infinito actual que la filosofía realista aristoteliana no permite.

3. **Como adverbio** de modo, se usa para calificar las acciones (mentales) como, por ejemplo, extender, subdividir, continuar, sumar, aproximar, etc. Este uso del infinito tiene que ver con lo que llamamos infinito potencial, es decir, cuando el proceso en cuestión **podía** continuar indefinidamente. (p. 212)

En el infinito como adverbio yace la idea de transformar un objeto un número infinito de veces. Por ejemplo, Anaxágoras (500-428 a.C.) quien se dedicó a estudiar la composición de la materia, planteó la existencia de partículas elementales que podían ser divididas un número ilimitado de veces (Bernabé, 1988), negando la existencia de átomos indivisibles. Según Moreno y Waldegg (1991) en las matemáticas griegas, el infinito sólo existió en forma de adverbio, ya que pensar en el infinito como sustantivo o como adjetivo requería pensar en "objetos infinitos" y esto representaba una imposibilidad filosófica. Es probable que por esta razón la palabra designada para hacer referencia al infinito (ilimitado) en la antigua Grecia, "apeiron" (ἄπειρον), tuviera connotaciones no muy favorables, incluso negativas.

Que los pensadores griegos vieran el infinito en forma de adverbio, los llevó a reflexionar sobre procesos que se llevan a cabo ilimitadamente. Para Castro y Pérez (2007) la escuela pitagórica fue la primera en manejar con cierto rigor el infinito potencial. A través de secuencias de números figurados lograron caracterizar distintos tipos de relaciones, por ejemplo, la suma de los primeros n naturales. Estas secuencias se caracterizaban porque tenían un inicio y una regla clara y explícita que les permitía pasar de un estado dado al siguiente, propiedades que caracterizan al infinito potencial. El método de agotamiento creado por Eudoxo (390 –337 a.C), también guarda la idea de transformación iterativa e infinita de un objeto inicial y se convirtió en el primer método lógicamente satisfactorio para calcular áreas y volúmenes. Estas formas de pensar en términos del infinito potencial han establecido un núcleo operatorio que permitió el desarrollo del cálculo estándar (Moreno & Waldegg, 1991).

Los planteamientos de Zenón de Elea (490 – 425 a.C) pusieron en evidencia la razón entre lo discreto y lo continuo, cuestionando las concepciones que los griegos tenían sobre el espacio y el tiempo. En la época existían dos concepciones distintas: (i) el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles por lo tanto el movimiento es continuo y (ii) el espacio y el tiempo están formados por pequeños intervalos indivisibles, por lo cual el movimiento se compone de la suma de pequeñas unidades estacionarias (Castro & Pérez, 2007).

Aristóteles consideraba el infinito de manera inagotable como todo aquello que no se deja recorrer y que carece de límite, aunque distinguió dos clases de infinito: el infinito potencial y el infinito actual. El infinito potencial está en proceso de construcción, no existe realmente, pero existiría si lográramos agotar todo el tiempo, todas las iteraciones. El infinito actual, por ejemplo, un segmento de recta que está conformado por infinitos puntos, era para Aristóteles incognoscible e inexistente. Para evitar la cuestión relacionada con la posibilidad de que un segmento contuviera el infinito de alguna manera, Aristóteles propuso que el segmento de recta es un objeto infinitamente divisible, haciendo que prevalezca una idea potencial de subdivisión en la que en cada intento se obtenían nuevos segmentos y no puntos. Para Aristóteles el segmento no podía estar conformado por puntos y lo continuo no podía estar constituido por lo discreto, aunque admitía que los puntos estaban sobre las rectas (Belmonte, 2009). En contraste, para Demócrito (460 – 360 a.C) y Arquímedes (287 – 212 a.C.) las líneas están conformadas por segmentos de longitud infinitamente pequeña. Esta idea es un precedente para lo que luego se conocería como los indivisibles.

A pesar de la visión potencial de los griegos, la naturaleza dual del infinito siempre estuvo presente. Arquímedes usó el método de agotamiento de Eudoxo en varios procedimientos geométricos llegando a incluir una mirada estática del infinito en sus cálculos. Por ejemplo, concibió el círculo como un polígono de infinitos lados infinitamente pequeños (infinito actual). Según Castro y Pérez (2007) son dos los motivos por los cuales las matemáticas griegas no pudieron aceptar el infinito actual:

- Los argumentos aristotélicos en contra del infinito actual.
- El principio euclidiano de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes. (p. 16)

El pensamiento aristotélico se mantuvo inamovible hasta la edad media, donde el dogma cristiano se adueñó del desarrollo científico. La ciencia para los hombres medievales tenía absoluta legitimidad en cuanto no contradijera el dogma cristiano. La lógica formal (fundamentada exclusivamente en los aportes de Aristóteles) y la teología, constituyeron el estudio básico de la época. En el siglo XII, gracias a las traducciones árabes al latín, la creación de las primeras universidades y la necesidad de la difusión de técnicas para calcular, fueron conociéndose las obras de geómetras griegos como Euclides y Arquímedes y de algunos matemáticos árabes como Al-Khwarizmi (780 – 850). Todo esto constituyó una revolución aritmética (Castro & Pérez, 2007) que desembocó en álgebra y sentó los inicios de la geométrica analítica.

Fundamentándose en las teorías atomistas griegas y en el principio propuesto por Arquímedes que dicta: “Cada figura, según el caso, se puede descomponer en infinitas figuras del mismo tipo y de orden inferior. Por ejemplo, un círculo es la unión de todas sus cuerdas paralelas a una cuerda dada”

(Castro & Pérez, 2007, p. 23), Cavalieri (1578 – 1647) propone su geometría a partir de infinitesimales. El método de Cavalieri ofrece por primera vez una rigurosa construcción geométrica de la idea intuitiva que consideraba que las magnitudes están formadas por componentes infinitamente pequeños (Malet, 1996).

El trabajo de Cavalieri ejerció gran influencia en la obra de Galileo (1564 – 1642). Galileo (1638) plantea que no es acertado aplicar a cantidades infinitas conceptos que se aplican a cantidades finitas (como por ejemplo las relaciones de orden “mayor que” y “menor que”). Esto surge para explicar por qué un segmento mayor que otro no tiene una cantidad infinita de puntos mayor que la del segmento menor. También muestra que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los números cuadrados y los números naturales y por tal motivo ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Galileo piensa que la existencia de este tipo de correspondencias es paradójica y absurda (Belmonte, 2009; Salat, 2011). Los planteamientos de Galileo refutan la idea intuitiva euclidiana de que el todo es mayor que la parte y sientan una base necesaria que posteriormente Bolzano (1781 – 1848) desarrolla más formalmente eliminando el tinte paradójico. Esta característica se convierte en una de las más importantes propiedades de la Teoría de Conjuntos de Cantor.

El desarrollo del cálculo por parte de Leibniz (1646-1716) y Newton (1642-1727) permitió la extensión de la acción matemática a límites prácticos, llegando a solucionar problemas que se pensaban imposibles haciendo uso de la noción de infinitesimal (lo infinitamente pequeño), a pesar de que no se había alcanzado la madurez matemática necesaria para definir de forma rigurosa lo que se entiende por dicha noción. Para Leibniz, los infinitesimales eran cantidades positivas como los números mayores que cero, pero menores que todos los reales positivos. Además, los consideraba incomparables con cantidades finitas (Castro & Pérez, 2007). La concepción de Newton sobre el infinito actual puede considerarse “actualista potencial” (Sierpinska, 1987), en vista de que pensaba en los resultados de procesos infinitos en términos del “último elemento” generado por el proceso (Medina, 2001).

Con la necesidad de surtir de rigor al análisis infinitesimal se plantearon definiciones para algunos de sus conceptos y nociones fundamentales que más adelante fueron perfeccionadas por Weierstrass (1815 – 1897) en lo que se conoce como la *Aritmetización del Análisis*. Cauchy (1789 – 1857) propone una definición formal para el concepto de límite y con ella define la noción de infinitesimal o cantidad infinitamente pequeña: un infinitesimal es una variable que tiene límite cero.

Para que se diera la evolución del infinito hacia la forma que tiene en las matemáticas de nuestros días, fueron necesarias las concepciones de los griegos y un cambio de enfoque. Hubo la necesidad de empezar a pensar en el infinito como adjetivo y para esto se requería del desarrollo de nuevos objetos matemáticos que pudieran ser calificados como infinitos. Estos objetos fueron los conjuntos (Moreno & Waldegg, 1991). Bolzano propone un campo de investigación matemática desde un punto de vista conjuntista, íntimamente ligado al infinito. Este campo se convirtió en la base de todas las teorías matemáticas permitiendo que se aborde el infinito con los medios más apropiados que hasta la época se conocían (Castro & Pérez, 2007).

Bolzano abrió la puerta para que la comunidad empezara a pensar en los conjuntos como una totalidad y no a partir de su proceso de construcción, lo que se relaciona con el infinito actual cuando el conjunto tiene infinitos elementos. Además, se interesó en la comparación entre conjuntos infinitos proponiendo dos criterios distintos: (i) a partir de la correspondencia uno a uno y (ii) mediante establecimiento de relaciones entre la parte y el todo. Sin embargo, para Bolzano, establecer una correspondencia uno a uno no era argumento suficiente que le permitiera concluir que dos conjuntos fueran equinumerables; por lo cual, seleccionó las relaciones parte-todo como su criterio de comparación (Moreno & Waldegg, 1991). Bolzano planteaba que era posible encontrarse el infinito actual en la realidad ya que incluso el más pequeño intervalo de tiempo estaba compuesto por infinitos instantes (Castro & Pérez, 2007).

Weierstrass, padre del formalismo, logró fundamentar el análisis con el máximo rigor posible, prescindiendo de la intuición geométrica. Planteó la definición de límite en términos de ε y δ y con ella fundamentó el cálculo sin recurrir a los infinitesimales. Según Belmonte (2009) el lenguaje formal buscaba darle un tinte estático al infinito y eliminar el devenir temporal del análisis. Con la definición de conjunto infinito dada por Bolzano y posteriormente por Dedekind (1831 – 1916) (*Un sistema S se dice infinito cuando es similar (existe una correspondencia* $1-1$*) a una parte propia de sí mismo…, en caso contrario S se dice que es un sistema finito…* (Cañon, 1993)); Cantor demuestra que no todos los conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal y establece el método de las biyecciones para determinar si dos conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño (son equipotentes).

Cantor comprobó que existen conjuntos infinitos que son numerables y conjuntos infinitos que no lo son. Determinó, con el método de la diagonal, que el cardinal de $\mathbb{N}$ es estrictamente menor que el cardinal del conjunto $P(\mathbb{N})$ (conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$) y que $P(\mathbb{N})$ tiene el mismo cardinal de $\mathbb{R}$, siendo ambos no numerables. Lo anterior le permitió establecer que los conjuntos infinitos pueden ordenarse de acuerdo con su tamaño, de manera que introdujo el concepto de número cardinal y estableció la aritmética de números cardinales. Además, se interesó por el orden en los conjuntos infinitos, llegando a plantear el concepto de número ordinal transfinito, su aritmética y propiedades.

La síntesis presentada hasta el momento busca evidenciar brevemente el largo camino que ha acompañado la evolución conceptual del infinito a través de la historia de las matemáticas. Hemos resaltado las concepciones sobre dicha noción de algunos de los más importantes matemáticos, sus contribuciones y cómo se llegó a consolidar una teoría de conjuntos infinitos, base de las matemáticas modernas. En la siguiente sección se exponen algunos trabajos importantes que respaldan esta investigación y evidencian la importancia que ha tenido la noción de infinito en la Matemática Educativa. Se presenta especial atención en los trabajos llevados a cabo en dicha disciplina para analizar las intuiciones y la construcción cognitiva del infinito en matemáticas.

2.2. El infinito matemático a través de la Matemática Educativa

El infinito matemático ha sido abordado desde distintas miradas a través de la Matemática Educativa, ya sea usando su desarrollo conceptual como una forma de entender las distintas concepciones que los individuos estructuran sobre esta noción a lo largo de su desarrollo intelectual; en el diseño e implementación de actividades que faciliten la conceptualización del infinito en potencia y en acto, a través de sus intuiciones, a través de su construcción cognitiva, entre otras. En esta sección se exponen algunas de las referencias más importantes que sustentan esta investigación y que permiten plantear la problemática de la comprensión del infinito desde la perspectiva de la Matemática Educativa.

2.2.1. El infinito matemático y la Matemática Educativa

El análisis del desarrollo histórico de un concepto puede arrojar luces sobre su construcción cognitiva y sobre los mecanismos que permiten dicha construcción. Las contribuciones hechas por los científicos que hayan logrado establecer estructuras del conocimiento general (sujetos epistémicos), permiten dar una visión general de la evolución de un concepto. Además, la naturaleza dual del infinito puede ser vista como un obstáculo de corte epistemológico (Artigue, 1995; Waldegg, 1996; Sierpinska, 1985; Mena-Lorca, Mena-Lorca, Montoya-Delgadillo, Morales & Parraguez, 2015), persistente y resistente a la formación matemática.

En el caso del infinito se puede evidenciar que los esquemas de respuesta de los estudiantes en distintos grados de formación son comparables con las respuestas de los sujetos epistémicos desde la antigua Grecia hasta Bolzano (nivel intra-objetal) (Moreno & Waldegg, 1991). Recordemos que, aunque los aportes de Bolzano fueron el inicio evidente de la conceptualización del infinito en las matemáticas, él no pudo establecer un dominio operativo sobre dicha noción. Por tanto, no logró darle un estatus completo de objeto sobre el cual se pudieran aplicar operaciones que permitieran la construcción de otros objetos. En el caso de Cantor, su concepción sobre conjuntos infinitos corresponde a un nivel inter-objetal, ya que pudo establecer un criterio externo (relación biyectiva) para comparar conjuntos que requerían ser concebidos por separado. Este criterio le permitió identificar propiedades reflexivas, transitivas y simétricas asociadas a esta relación (Moreno & Waldegg, 1991) y establecer una aritmética de números transfinitos.

En situaciones de comparación entre un conjunto infinito y uno de sus subconjuntos propios a partir de una biyección dada, Moreno y Waldegg (1991) identifican que la mayoría de los individuos, iniciando su formación matemática universitaria, alcanzan una concepción intra-objetal (concepción de Bolzano). Para Waldegg (2005), el enfoque de Bolzano es más intuitivo que el de Cantor y por eso, bajo algunas condiciones, es posible que individuos sin formación sobre conjuntos infinitos puedan alcanzar este nivel conceptual. Sin embargo, a pesar de que la biyección sea dada explícitamente, muchos individuos no creen que pueda darse este tipo de relación entre dos conjuntos infinitos (concepción evidenciada por Galileo). Sin embargo, la visión potencial del infinito (visión griega) es la que más frecuentemente se encuentra en individuos con o sin formación matemática, debido a que esta forma de infinito es la más intuitiva. Profundizaremos sobre esta idea en el siguiente apartado.

En los procesos de abstracción entran en juego elementos particulares del contexto, tal es el caso del infinito (Dreyfus & Tsamir, 2004). Los contextos geométricos del infinito pueden ocasionar que los individuos apelen a factores externos (Sacristán, 1991) o a sus intuiciones, planteando que las características geométricas de las figuras determinan el tamaño de los conjuntos correspondientes o que es imposible que un conjunto infinito se asocie a una figura de dimensiones finitas. En contraste, un contexto algebraico parece beneficiar el paso a una etapa inter-objetal. Para Moreno y Waldegg (1991) alcanzar una concepción inter-objetal del infinito solo es posible cuando el individuo tiene la capacidad de ver un conjunto infinito como un todo. Lo anterior está relacionado con una posible nueva etapa de construcción del conocimiento propuesta empíricamente en términos de la teoría APOE (Dubinsky et al., 2013). Esta posible etapa denominada *Totalidad* es independiente y precede a la etapa *Objeto*. Además, los diferentes elementos particulares de los contextos del infinito que puedan influir en la forma en la que se construye son tomados en cuenta por Roa-Fuentes (2012) y han permitido el planteamiento de descomposiciones genéticas particulares, así como una descomposición genética genérica. Sobre estos aspectos se profundiza en la sección 2.3.

Además de los conjuntos infinitos como una entidad, el infinito puede aparecer en su forma dinámica a partir de la realización ilimitada de acciones sobre objetos iniciales (infinito como adverbio). El infinito potencial se conceptualiza a través de procesos iterativos infinitos que pueden repetirse sin fin. Sin embargo, el infinito actual no puede ser conceptualizado únicamente a través de procesos potencialmente infinitos. Es necesario imaginarse "el punto final" del proceso infinito (Hannula, Pehkonnen, Maijala & Soro, 2006). Por tanto, la construcción de objetos a partir de procesos infinitos guarda la naturaleza paradójica dual del infinito. De esta manera, la construcción del infinito actual a partir de su forma dinámica está supeditada a la capacidad que tenga el individuo de construir procesos infinitos y verlos como finalizados (Manfreda & Hodnik, 2012; Lakoff & Nuñez, 2000; Dubinsky et al., 2005a; 2005b; Weller et al., 2004; Brown et al., 2010, entre otras).

Diversas investigaciones han propuesto actividades para ayudar a los individuos en la construcción de procesos infinitos y su posterior conceptualización. Algunas usando tecnología en forma de tareas virtuales para la construcción de modelos representativos (simbólicos, visuales y numéricos) de objetos que se relacionan con el infinito, como: sucesiones infinitas (Sacristán, 2003; Sacristán & Noss, 2008; Kahn, Sendova, Sacristán & Noss, 2011), límites de sucesiones de funciones (Kidron & Tall, 2015) y otras diseñando experimentos de enseñanza en el que se incorporan distintas tareas de construcción de procesos iterativos infinitos (Radu & Weber, 2011). Según estos últimos autores, las estrategias de razonamiento que un individuo usa en un tipo de tarea pueden ayudarle a dar sentido y resolver una tarea distinta.

2.2.2. Intuiciones del infinito

Existe una marcada diferencia entre lo que significa un concepto en matemáticas y lo que psicológicamente entendemos por dicho concepto. Para Fischbein, Tirosh y Hess (1979), el resultado final de una construcción matemática arroja una estructura incuestionable para la comunidad matemática. Sin embargo, la realidad psicológica (relacionada con los procesos mentales, sensaciones, percepciones, etc.) de un individuo sobre dicha construcción puede tornarse un tanto compleja y contradictoria, fuertemente relacionada con dificultades intuitivas. El trabajo de Fischbein (1987) estudia el pensamiento intuitivo, cuyas características se pueden resumir de la siguiente manera:

- Autoevidente: Es la más importante característica de las intuiciones, se siente que esta intuición en forma de afirmación no necesita una justificación, que es verdadera por sí misma.
- Certeza Intrínseca: Las intuiciones son aceptadas como ciertas.
- Perseverancia: Las intuiciones, una vez que se encuentran establecidas, se arraigan firmemente en el estudiante. La instrucción formal tiene poco impacto sobre el conocimiento intuitivo.
- Carácter Coercitivo: Las intuiciones generan un efecto coercitivo en el razonamiento del individuo, imponiéndose como absolutas y únicas.
- Estatus de Teoría: Toda intuición es una teoría o mini-teoría pero nunca solo una percepción de un hecho dado.

Las intuiciones y, en general, nuestros esquemas mentales, se construyen a partir de nuestra interacción con el mundo real, un mundo limitado en espacio y tiempo. Estamos preparados para aceptar un infinito en forma de proceso inacabado y este tipo de concepciones han sido potenciadas en los primeros años de escolaridad e incluso en niveles más avanzados. Es por esto que el conocimiento intuitivo no parece funcionar adecuadamente cuando se trata del infinito en forma estática (Fischbein et al., 1979; Fischbein, 2001) e incluso llega a convertirse en un obstáculo. El desarrollo formal que Cantor dio al infinito matemático (potencial y actual) ha permitido dotarlo de propiedades, que pueden resultar en contra de la intuición. La necesidad de aplicar estas propiedades para enfrentar diversos contextos que involucran el infinito puede generar en los individuos un choque entre el conocimiento matemático que busca construir y sus intuiciones. Por ejemplo, Waldegg (1996) plantea que el establecimiento de una biyección entre un conjunto infinito y uno de sus subconjuntos propios, es uno de los obstáculos más difíciles de superar a la hora de comprender la noción de conjunto infinito. La idea de que el todo debe ser mayor que una de sus partes está arraigada en nuestras mentes, gracias a que en nuestro entorno real no se pueden encontrar ejemplos que la refuten.

La persistencia de las intuiciones hace que a pesar de la formación matemática que tenga un individuo, en ocasiones rechace su conocimiento formal y se quede con lo que intuitivamente siente como verdadero. Esta idea nos permite identificar conocimiento intuitivo en personas con alta formación matemática y muchas veces este conocimiento llega a obstaculizar la construcción cognitiva de un concepto o noción. Pero entonces ¿cómo dialoga la construcción de conocimiento formal y el conocimiento intuitivo? Para Belmonte (2009) la oposición entre la construcción de conocimiento formal y el conocimiento intuitivo es una dicotomía falsa. De alguna manera existe una influencia de los modelos mentales sobre la construcción de conceptos y nociones. Esta influencia inconsciente y tácita sobre la construcción del infinito actual fue caracterizada por Fischbein (2001). Según este autor un modelo mental puede explicarse como lo siguiente:

Considerando dos sistemas, A y B, B es definido como un modelo de A si es posible trasladar propiedades de A a B de modo que se produzcan descripciones coherentes de A en términos de B, o para resolver problemas –originalmente formulados en términos de A– recurriendo a una traducción en términos de B. “El concepto de modelo mental se refiere a las representaciones mentales que sustituyen, en el proceso de razonamiento, las entidades originales, por lo general con el fin de estimular y facilitar la solución de problemas” (p. 312).

Como se explica anteriormente los modelos mentales no necesariamente van en contra vía de la construcción de conocimiento; su principal objetivo es facilitarlo. Los conceptos matemáticos, debido a su naturaleza abstracta, requieren de la creación de modelos mentales que estén más acordes con nuestra capacidad de comprensión. Algunos de los procesos de razonamiento son influenciados por los modelos mentales de manera inconsciente, y estos pueden continuar actuando de forma tácita sin que el individuo tenga consciencia de sus causas y efectos, es a esto a lo que se conoce como *modelos tácitos* (Fischbein, 2001). Belmonte (2009; 2011) identifica algunos modelos tácitos del infinito que se encuentran presentes como obstáculos para la construcción del infinito actual; a continuación se resumen como:

> **Modelo infinito = infinito:** Dos conjuntos infinitos siempre tienen la misma cardinalidad.
>
> **Modelo de inagotabilidad:** El infinito es sinónimo de inagotable (visión netamente potencial).
>
> **Modelo de divergencia:** Suma de una cantidad infinita de números sin identificar su posible convergencia.
>
> **Modelo de indefinición:** Predisposición natural a evitar el tratamiento de procesos o cantidades infinitas.

Algunos de estos modelos ya habían sido identificados en investigaciones previas, otros fueron caracterizados por Belmonte (2009) en el desempeño de más de 2000 estudiantes en un amplio rango de edades (desde el último curso de primaria hasta el primer curso de matemáticas universitarias). Existen otros modelos que han sido identificados en la literatura, por ejemplo, el *modelo de inclusión* (Fischbein et al., 1979; Fischbein, 1987; Falk, 1994) que hace referencia a la idea de que el todo es mayor que la parte; esta idea es propia de conjuntos finitos. La extensión de esta propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos hará que el individuo enfrente un obstáculo a la hora de comparar, por ejemplo, el conjunto de los números naturales con subconjuntos propios infinitos de él, como el de los impares. Otro es el *modelo de punto-marca* (Fischbein, 1987), este hace que el individuo le atribuya dimensiones o naturaleza material a un punto geométrico. Este modelo puede generar que el individuo no logre establecer biyecciones que le permitan comparar conjuntos infinitos continuos o geométricos (como segmentos de recta o rectas).

Tall (2001) plantea que no existe un único concepto contradictorio del infinito, sino que existen conceptos naturales y formales que, aunque pueden ser contradictorios entre ellos, son coherentes en sí mismos, dentro de sus propios contextos. Por ejemplo, el análisis *"no estándar"* tiene una aritmética completamente definida que contempla a los infinitesimales como los inversos de cantidades infinitas; esto no sucede en la teoría de cardinales infinitos (Tall & Tirosh, 2002). Los conceptos naturales surgen de la extensión de reflexiones hechas sobre lo finito y los conceptos formales se construyen a partir de definiciones formales y deducciones (enfoque axiomático). La construcción cognitiva de conceptos formales se presenta cuando el individuo ya ha construido concepciones naturales y esto puede generar "ideas conflictivas". Una buena forma de solucionar este tipo de conflictos es reconstruyendo conocimiento que actualice experiencias antiguas a partir de nuevas evidencias. En el caso de la mencionada concepción natural que se tiene de que "el todo siempre es mayor que la parte"; se necesitará de una evolución de lo que el individuo entiende como el *cardinal de un conjunto* que le permita superar esta idea en un contexto de conjuntos infinitos (Tall, 2001). En un sentido más amplio, el individuo puede dejar de pensar en contar los elementos de un conjunto infinito debido a la imposibilidad de hacerlo; ahora puede establecer biyecciones que más que contar le permiten comparar los elementos que hacen parte de un conjunto.

Todo aquello que no está sujeto a un razonamiento matemático y que sentimos como verdadero cuando nos enfrentamos a situaciones que involucran al infinito es denominado por Fischbein (2001) como *intuiciones primarias del infinito*. Roa-Fuentes (2012) caracteriza las concepciones que se originan a partir de ideas intuitivas y que un individuo usa para enfrentar la complejidad de situaciones que involucran el infinito potencial y actual. Estas concepciones, como *concepciones primarias* (Roa-Fuentes, 2012), anteceden a la construcción de conocimiento matemático del nivel de formación esperado para un individuo. Están determinadas por las experiencias cotidianas del individuo con el infinito (especialmente el infinito potencial) y con las concepciones que surgen a partir de la reflexión llevada al infinito sobre experiencias finitas (Tall, 2001).

La construcción de estructuras cognitivas del infinito a partir de las concepciones primarias requiere de un tratamiento instruccional que le permita al individuo utilizar técnicas o teorías matemáticas para dar manejo, al menos inicialmente, a estas situaciones. Las concepciones primarias del infinito están relacionadas con la construcción de procesos dinámicos (concepciones primarias de tipo dinámico) y procesos estáticos (concepciones primarias de tipo estático), que no se relacionan con la construcción de procesos iterativos infinitos (procesos que se coordinan con el conjunto de los números naturales). Estas concepciones, aunque pueden llegar a ser contradictorias, son usadas por el individuo para tratar con la complejidad que le representan los problemas relacionados con el infinito matemático (Roa-Fuentes, 2012). A continuación, se ofrece una caracterización de las concepciones primarias según Roa-Fuentes (2012):

- *Concepción estática primaria*: Con esta concepción los individuos extienden propiedades de procesos finitos a procesos infinitos. Aunque se expresen sobre el proceso como infinito, lo caracterizan por un estado "final", como la aplicación de una determinada transformación al último número natural. Éste es representado en algunos casos por el símbolo ∞ al cual se asigna una categoría completa de número (idea relacionada con la Metáfora Básica del Infinito MBI, para ∞, Lakoff & Núñez, 2000). Por otra parte, esta concepción puede presentarse mediante representaciones pictóricas a partir de la construcción de un proceso que se visualiza como terminado en "alguna cosa".

- *Concepción dinámica primaria*: Los individuos que manifiestan este tipo de construcción se refieren a los procesos que identifican en una situación, como procesos que siguen sin fin. Estos procesos son atemporales y están determinados por las características generales de sus elementos. Esta concepción dinámica no considera un estado final, resultante del proceso, sino la posibilidad de aplicar en un tiempo no definido un proceso, un número no definido de veces. Luego, pueden concluir que, dadas nuestras características humanas finitas, no es posible contemplar "el final del proceso". (p. 197)

Dependiendo del contexto, un individuo con concepciones primarias dinámicas o estáticas puede plantear un tratamiento donde construye procesos infinitos atemporales que se desarrollan sin fin (concepciones dinámicas) o hacer referencia a un "último elemento" de dichos procesos (concepciones estáticas). Las concepciones primarias que individuos usan para descalificar contextos que presentan explícitamente el infinito de forma estática (contextos estáticos) están relacionadas con argumentos dinámicos o de la vida real. Un ejemplo de esto es presentado por Villabona (2015) cuando un individuo con alta formación matemática enfrenta la paradoja del hotel de Hilbert y concluye que "Si (el hotel) tiene infinitas habitaciones, no puede estar lleno".

Si un problema o paradoja asociada al infinito muestra explícitamente un proceso dinámico, entonces de alguna forma ofrece al individuo posibilidades de enfrentarlo, incluso si carece de conocimiento matemático formal sobre tratamiento de procesos infinitos. Lo anterior se puede interpretar como un favorecimiento del contexto a la capacidad intuitiva de los sujetos, ya que intuitivamente el infinito solo existe como un proceso inacabado. Además, en este tipo de contextos puede suceder que no exista diferencia resaltable en la forma en la que individuos con avanzada formación matemática enfrentan el problema. En contextos estáticos, el requerimiento de concepciones formales del infinito que le permitan al individuo aceptar el infinito actual, se hace necesario. Lo anterior fue evidenciado por Mamolo y Zazkis (2008) cuando analizaron las construcciones “ingenuas” o “emergentes” de estudiantes de Artes Liberales y Ciencias Sociales, así como de maestría en Educación Matemática al enfrentarse a un contexto dinámico (paradoja de las pelotas de tenis) y a un contexto estático (paradoja del Hotel de Hilbert). En este estudio también se encontraron evidencias sobre cómo los individuos tienden a rechazar soluciones normativas (soluciones que involucran rigor o teorías matemáticas; por ejemplo, la teoría de conjuntos desarrollada por Cantor), prefiriendo razonamientos de tipo no matemático, por ejemplo, de tipo realista.

A continuación, se propone otro acercamiento al infinito matemático desde la perspectiva de la Matemática Educativa, conocido como la Metáfora Básica del Infinito (MBI) (Lakoff & Núñez, 2000). La MBI es un mecanismo que permite establecer relaciones cognitivas entre los diferentes conceptos que involucran el infinito y obtener una idea matemática general de estos conceptos.

2.2.3. MBI: La Metáfora Básica del Infinito

Lakoff y Núñez (2000) consideran que algunos de los mecanismos que permiten caracterizar ideas cotidianas como: relaciones espaciales básicas, agrupaciones, pequeñas cantidades, objetos distribuidos en el espacio, cambio, orientaciones corporales, manipulaciones básicas de objetos (por ejemplo, rotación y estiramiento), movimiento, acciones iterativas, etc., son también los mecanismos que permiten la construcción de ideas matemáticas sofisticadas. Esto tiene sentido ya que muchas ideas matemáticas surgen como una forma de *matematizar* ideas ordinarias, por ejemplo, el concepto de derivada matematiza la idea ordinaria de cambio en un instante (Lakoff & Núñez, 2000).

Algunos de los mecanismos conceptuales cotidianos que Lakoff y Núñez (2000) plantean como de principal importancia para la construcción de pensamiento matemático avanzado son: (i) esquemas imagen, (ii) esquemas aspectuales, (iii) metáfora conceptual, y (iv) combinaciones conceptuales. La metáfora conceptual es el mecanismo central que permite extender la aritmética básica a aplicaciones más sofisticadas; además, proporciona fundamentos teóricos para las matemáticas y permite la comprensión de la teoría de conjuntos en sí misma. Es por esto que este mecanismo mental se relaciona con la comprensión del infinito matemático y en general, es el mecanismo básico por el cual es posible la construcción de conceptos abstractos a partir de conceptos relativamente concretos. Un análisis de las metáforas conceptuales (mapeo conceptual) requiere de esclarecer las entidades que conforman lo que se denomina el *dominio origen* y sus correspondientes entidades en el *dominio destino*, en este caso ambos dominios son conceptuales y se componen sistemáticamente.

En lo cotidiano, un proceso es infinito si continúa (o itera) indefinidamente sin detenerse. A un proceso conceptualizado que no logra "perfeccionarse", es decir, que no logra completarse, que no tiene un fin, se le denomina *proceso imperfecto*. Existen dos tipos de procesos imperfectos, los continuos y los iterativos (estos procesos se repiten, tienen puntos y estados intermedios). Lingüísticamente, los procesos continuos se conceptualizan como procesos iterativos, esto puede caracterizarse cognitivamente como la metáfora: "los procesos continuos indefinidos son procesos iterativos" (Lakoff & Núñez, 2000). Esta metáfora permite conceptualizar el infinito potencial.

Así como la idea de proceso infinito continuo es metafórica, Lakoff y Núñez (2000) proponen que la idea de infinito actual también lo es. La metáfora que se asocia a la construcción de un infinito estático es la que recibe el nombre de Metáfora Básica del Infinito (MBI): "los procesos que no tienen fin se analizan en términos de un "último elemento" y son conceptualizados a partir del análisis de procesos finitos".

El efecto de la MBI es que asigna una completez metafórica a los procesos en curso, es decir, el proceso puede ser visto como completo al obtener un resultado final (Lakoff & Núñez, 2000). El dominio destino de la metáfora básica del infinito son los procesos imperfectos, es decir, los procesos sin final. El dominio origen son procesos iterativos ordinarios finitos, pero con un número indefinido de iteraciones. Los dominios origen y destino son similares entre sí ya que ambos tienen un estado inicial, ambos tienen un proceso iterativo con un número no especifico de iteraciones y ambos tienen un estado resultante después de cada iteración (ver Figura 3).

Metáfora Básica del Infinito		
Dominio Origen ***Procesos Iterativos Completados***		***Dominio Destino*** ***Procesos Iterativos que Continúan***
Estado inicial	→	Estado inicial
Estado resultante del estado inicial del proceso	→	Estado resultante del estado inicial del proceso
El proceso: desde un estado intermedio produce el siguiente estado.	→	El proceso: desde un estado intermedio produce el siguiente estado.
Resultado intermedio después de la iteración del proceso.	→	Resultado intermedio después de la iteración del proceso.
Estado final resultante.	→	**"Estado final resultante" (Infinito actual).**
Condición: El estado final resultante es único y sigue de todo estado no final.	→	**Condición: El estado final resultante es único y sigue de todo estado no final.**

Figura 2. Metáfora Básica del Infinito. (Lakoff & Núñez, 2000, p.159)

En la Figura 3 se muestra un mapeo conceptual que vincula entidades de un proceso iterativo completado (finito) (dominio origen) con entidades relacionadas con un proceso iterativo que continúa sin fin (dominio destino). Desde el estado resultante del estado inicial hasta un estado resultante intermedio después de la iteración del proceso, estas entidades son las mismas en ambos casos. Sin embargo, a partir de estados finales resultantes, el mapeo impone metafóricamente un estado final resultante único a un proceso que se realiza sin fin (entidades que aparecen en negrita). Aunque en el mapeo en ambas columnas aparezcan las mismas entradas, se debe recordar que una corresponde al estado final resultante de un proceso finito y la otra a un proceso que se realiza sin fin. En esto consiste la MBI y es la forma en la que según Lakoff y Núñez (2000) se conceptualiza el infinito actual. Para estos autores el estado final resultante de un proceso iterativo que continúa se caracteriza como sigue a continuación:

- No hay un estado anterior al final; es decir, no hay un estado anterior distinto dentro del proceso que siga la etapa de finalización del proceso y, sin embargo, precede al estado final del proceso.
- Del mismo modo, no hay un estado final posterior del proceso; es decir, no hay otro estado del proceso que resulte de la finalización del proceso y siga el estado final del proceso. Cualquier estado putativo tendría que estar "fuera del proceso". (p. 160)

La MBI mapea la propiedad de unicidad para estados resultantes de procesos llevados al infinito actual. La existencia de grados del infinito en distintos contextos puede requerir de múltiples aplicaciones de MBI. Esta caracterización del infinito actual se relaciona con algunos elementos que han sido propuestos a través de la investigación del infinito en términos de la teoría APOE: modelos de construcción del infinito matemático en diferentes contextos, un modelo de construcción genérico, construcción de procesos iterativos infinitos y sus objetos trascendentes, así como la conceptualización de dichos procesos en términos del infinito estático. Estos elementos serán estudiados a profundidad más adelante.

2.3. El infinito matemático a través de la teoría APOE

En esta sección abordamos de forma reflexiva los trabajos que han servido como fundamento teórico para nuestra investigación. Todos han sido desarrollados bajo la mirada de la teoría APOE, de manera parcial o total. Estos estudios no solo constituyen un antecedente en la investigación de tipo cognitivo del infinito matemático y en Matemática Educativa en general, sino que además permiten postular o refinar constructos teóricos que pueden ser de interés para quienes investigan en el marco de la teoría.

El primer acercamiento que se realizó sobre el infinito matemático desde la perspectiva de la teoría APOE fue desarrollado por Dubinsky et al. (2005a; 2005b). En esta investigación se plantea de forma teórica cómo las estructuras y mecanismos mentales propuestos por APOE pueden explicar la construcción cognitiva del infinito potencial y actual. Se analizan, además, diferentes situaciones históricas o clásicas como paradojas, dicotomías y problemas matemáticos que están relacionados con la dualidad del infinito. La solución a estas situaciones en términos cognitivos se presenta al relacionar el infinito potencial con una estructura dinámica como el Proceso y el infinito en acto con una estructura estática como el Objeto. Lo anterior implica que, según la teoría APOE, el infinito potencial y actual corresponde simplemente a dos estructuras cognitivas diferentes de la misma noción, Proceso y Objeto, respectivamente.

Según Dubinsky et al. (2005a) es importante preguntarse, por ejemplo, ¿qué hace que un individuo acepte que el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ tiene infinitos elementos y que el conjunto $S = \{-3, -2, -1, 0, \{1, 2, 3, \dots\}\}$ tiene solo cinco? ¿Qué tipo de mecanismos mentales están involucrados? Para responder a estas preguntas Dubinsky et al. (2013) plantean una conjetura teórica: debe ocurrir un cambio en la forma de pensar que permita al individuo, a partir de una estructura dinámica Proceso (que debe poseer para poder construir cognitivamente procesos infinitos), construir una estructura estática, Objeto con la que pueda aceptar como finalizado el proceso de construcción del conjunto infinito $\mathbb{N}$ y, además, usar la totalidad del proceso como un elemento más de un conjunto finito S, es decir, realizar Acciones sobre la Totalidad asociada. Los mecanismos que se proponen, hasta el momento en que se desarrolló dicha investigación, que están relacionados con la construcción del infinito potencial y actual son el de interiorización y encapsulación, respectivamente (Dubinsky et al., 2005b).

Aristóteles consideraba que un proceso infinito no podía ser aceptado como un todo, su pensamiento se relaciona con la dificultad de desarrollar el mecanismo cognitivo que le permita, al individuo, aceptar un proceso infinito como terminado. Alcanzar una concepción Objeto, en general, no es una tarea fácil (Arnon et al., 2014), aún más complejo es enfrentar una situación que requiera que el individuo posea a la vez una concepción Proceso y una concepción Objeto del mismo concepto o noción (Alcock & Simpson, 2009). Esto sucede en las situaciones que involucran el infinito y que, por la potencialidad de sus procesos, pareciera que carecen de una posible encapsulación. Lo anterior de alguna forma justifica la creencia de Aristóteles y de otros matemáticos sobre la imposibilidad de pensar procesos infinitos en acto.

Según Brown et al. (2008), la construcción de una concepción Proceso de infinito está íntimamente relacionada con el conjunto de los números naturales. En esta investigación se proponen evidencias empíricas de individuos pensando en el infinito matemático de forma dinámica y estática en el contexto de la siguiente situación:

Pruebe o refute: $\bigcup_{\boldsymbol{k=1}}^{\infty} \boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \dots, \boldsymbol{k}\}) = \boldsymbol{P}(\mathbb{N})$

> donde $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales y $\boldsymbol{P}(\mathbb{N})$ representa el "conjunto potencia", esto es, el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. (Brown et al., 2010, p. 116)

El individuo debe construir un proceso iterativo infinito con el cual pueda determinar el conjunto inicialmente por extensión (con la realización de las acciones) y luego, también, por comprensión (cuando logra construir la totalidad del proceso). Para Brown et al. (2008) "un proceso iterativo infinito es la aplicación infinita de una transformación sobre un objeto, ya sea cognitivo o físico, que envuelve uno a más parámetros que cambian con cada repetición" (p. 116). De esta manera vemos que los procesos iterativos infinitos que se construyen para afrontar una situación que involucra el infinito matemático usan como parámetro el conjunto de los números naturales.

Aunque una situación no plantee explícitamente la construcción de procesos infinitos como iterativos, el individuo buscará construir este tipo de procesos para alcanzar la comprensión general de un proceso infinito. De esta manera, se espera que aplique una transformación sucesiva a través del conjunto de los números naturales obteniendo términos en cada iteración. Estos términos se desprenden directamente de la aplicación del proceso sobre cada número natural.

Brown et al., (2008) plantean que la concepción proceso de infinito se alcanza una vez que el individuo puede construir un proceso iterativo infinito completo. Es decir, se da cuenta de que todo número natural n puede ser transformado. Los términos que se obtienen directamente del proceso guardan propiedades y características comunes. La concepción Objeto, evidenciada por la capacidad de estructurar la Totalidad del Proceso y de realizar Acciones sobre dicha Totalidad, se logra cuando el individuo puede aplicar una transformación sobre todo el conjunto de los números naturales (Brown et al., 2008). De esta manera obtiene como resultado un Objeto que trasciende del Proceso, que no conserva las características o propiedades de los términos generados directamente por su aplicación. Como es de esperarse, se requiere de una concepción objeto del conjunto de los números naturales para que el individuo pueda aplicar la transformación del proceso sobre todo el conjunto.

La construcción de una concepción proceso de infinito puede requerir de la construcción de varios procesos iterativos y su posterior coordinación. Dubinsky et al. (2008) analizan una situación paradójica propuesta en dos versiones diferentes (una que no toma en cuenta el paso del tiempo y que ellos denominan "versión finita"; y otra que propone que toda la tarea se lleva a cabo a través de la subdivisión infinita e iterativa de medio minuto, "versión infinita"). A continuación, planteamos la versión infinita:

> Suponga que se tiene tres recipientes con una capacidad ilimitada, etiquetados como recipiente contenedor, recipiente A y recipiente T, con un botón dispensador que cuando se presiona, mueve pelotas del recipiente contenedor al recipiente A. El recipiente contenedor tiene una cantidad infinita de pelotas de tenis, numeradas, 1, 2, 3, … Medio minuto antes del mediodía, el dispensador es presionado y las pelotas número 1 y 2 pasan al recipiente A e instantáneamente la pelota número 1 pasa de A a T. Un cuarto de minuto antes del mediodía el dispensador es presionado nuevamente y las pelotas número 3 y 4 caen al recipiente A y automáticamente la pelota de menor denominación pasa al recipiente T. En el siguiente paso, $\frac{1}{8}$ de minuto antes del medio día el dispensador es presionado y las pelotas número 5 y número 6 pasan del recipiente contenedor al recipiente A e inmediatamente la pelota de menor denominación pasa al recipiente T. Si el modelo señalado continúa, ¿cuál es el contenido del recipiente A y el recipiente T al mediodía? (Dubinsky et al., 2008, p. 100)

En el contexto de esta paradoja pueden identificarse dos procesos que necesitan ser construidos como procesos iterativos infinitos y posteriormente coordinados en uno único, lo que Dubinsky et al. (2008) denominan coordinaciones *bi-dimensionales de procesos iterativos infinitos*. Cada uno de los procesos identificados tiene naturaleza diferente: el proceso de tiempo que es decreciente y converge; y el proceso del movimiento de las pelotas que crece y diverge. Como mencionamos en el capítulo anterior, la coordinación de procesos es un mecanismo muy interesante del que se tiene poca información. Al parecer es particularmente difícil cuando se intentan coordinar procesos infinitos de distinta naturaleza, ya que el individuo deberá determinar la naturaleza que hereda el proceso iterativo infinito que surge de la coordinación. La coordinación se logra cuando el individuo ve los procesos como uno solo, sin que su naturaleza sea contradictoria.

Para Villabona (2015), investigadora principal de este estudio, la incapacidad de coordinar procesos iterativos infinitos impide la construcción de una concepción Proceso de infinito que permita al individuo solucionar situaciones particulares. Puede ocurrir que a pesar de que un individuo escriba dos procesos iterativos "uno al lado del otro", no pueda verlos como uno y termine generando Objetos cognitivos individuales que matemáticamente lo lleven a expresiones del tipo: "$\infty.0$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{0}{0}$", etc.; con las cuales no podrá dar sentido al contexto de la situación o dará un sentido erróneo. Uno de los contextos estudiados por Villabona (2015) proponía determinar el perímetro del triángulo de Sierpiński construido a partir de la transformación iterativa de un triángulo equilátero. Esta situación se presenta de la siguiente manera:

Se tiene inicialmente un triángulo equilátero relleno de lado a, se unen los puntos medios de los lados que forman el triángulo de modo que el triángulo inicial queda dividido en cuatro triángulos equiláteros y congruentes, de los cuales se elimina el triángulo central, de esta forma quedan 3 triángulos cada uno de lado $\frac{a}{2}$. Se repite el mismo procedimiento en cada uno de los triángulos resultantes y así sucesivamente al infinito. ¿Cuál es el perímetro del triángulo de Sierpiński? (Ver Figura 4) (Villabona & Roa-Fuentes, 2016, p. 127).

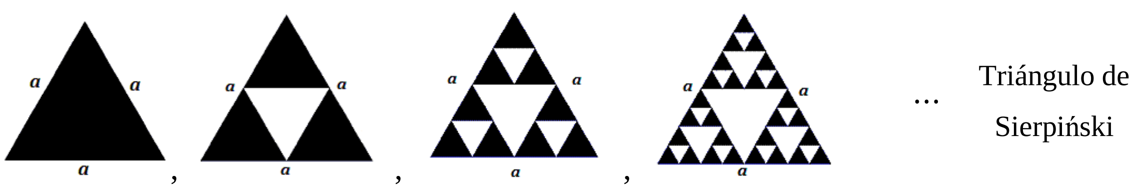


Figura 3. Construcción del triángulo de Sierpiński (Villabona & Roa-Fuentes, 2016, p. 127)

Determinar el perímetro del triángulo de Sierpiński requiere de la coordinación de dos procesos de naturaleza distinta: número de segmentos (o número de triángulos) y longitud de segmentos. Mariana, una de las participantes de este estudio, inicialmente enfrenta el contexto sin llevar a cabo la realización de acciones que le permitan construir procesos iterativos infinitos. Intenta visualizar qué es el triángulo de Sierpiński:

> Mariana: Pero, aquí le quité este, me quedan estos, aquí le quité esto, me quedan estos… No, no creo que eso forme una figura como tal, creo que termina siendo casi como… Como puntos. Sí, porque todo esto se va quitando, entonces lo que va quedando, cada vez se vuelve más pequeño, más pequeño, más pequeño… Sí, entonces terminaría siendo como punticos, y pues perímetros de puntos… No, es cero. (Villabona, 2015, p. 91)

Su razonamiento la lleva a concluir que el perímetro del triángulo de Sierpiński es cero. Ella toma en cuenta los procesos involucrados: mientras el número de segmentos aumenta, su longitud se hace más pequeña y el análisis en el límite la lleva a concluir que la suma infinita de ceros, es cero. Cuando la entrevistadora la motiva para que verifique matemáticamente su resultado, Mariana empieza a realizar acciones de tipo gráfico y aritmético que le permiten determinar expresiones generales para cada uno de los procesos. Multiplicando dichas expresiones construye la expresión general de una sucesión que permite calcular la longitud de cualquier triángulo que precede al triángulo de Sierpiński en una iteración n. Sin embargo, cuando intenta analizar la Totalidad del Proceso, con la aplicación del concepto de límite sobre el término general de la sucesión, Mariana toma en cuenta los procesos que debió coordinar por separado. Lo anterior la lleva a obtener Objetos cognitivos distintos: uno relacionado con la infinidad de lados y otro relacionado con la longitud cero de cada lado, llegando a la expresión $\infty.0$ con lo que concluye que no se puede determinar el perímetro del triángulo de Sierpiński.

Mariana inicialmente se enfrentó de forma intuitiva a la complejidad del fractal y de lo que significa el perímetro de una figura con tales características. La conclusión que obtiene de su análisis matemático, aunque no es la misma que su conclusión inicial, es para ella convincente. A pesar de que construyó procesos iterativos infinitos por separado, la coordinación falla dado que no comprende la naturaleza del nuevo proceso a construir.

La construcción cognitiva del triángulo de Sierpiński requiere, además, de la coordinación de los Procesos asociados al perímetro y al área de los triángulos precedentes, que en el estado al infinito generan una característica paradójica de este fractal: “es un triángulo con perímetro infinito y área cero”. Según Apkarian, Tabach, Dreyfus y Rasmussen (2019) existen diversos matices en los razonamientos de los individuos con los que buscan dar sentido a la situación, sin embargo, la mayoría tiende a desarrollar concepciones separadas de estos Procesos o a realizar mezclas conceptuales que no son necesariamente congruentes.

Una vez que se tiene una concepción Proceso de infinito cabe preguntarse: ¿Cómo sucede la evolución de una estructura dinámica a una estructura estática? ¿Qué se requiere para que dicha evolución se dé? El mecanismo *completez* fue caracterizado a partir de los razonamientos que niños y jóvenes talento en matemáticas de México y Colombia lograron evidenciar cuando analizaron las paradojas de las pelotas de tenis y del Hotel de Hilbert, así como la construcción de la curva de Koch. Sobre este posible mecanismo Roa-Fuentes (2012) propone lo siguiente:

> ***Completez***: Este es un mecanismo mental que permite ver las características del objeto que trasciende de un proceso iterativo infinito. El establecimiento de este mecanismo requiere de una construcción consciente por parte de un individuo de elementos fundamentales relacionados con la teoría de conjuntos: la relación entre un conjunto infinito y sus subconjuntos propios, los conceptos de cardinal y ordinal y, la construcción de conjuntos infinitos con diferentes cardinalidades. Estos elementos permiten la construcción de objetos que no se desprende de manera directa de un proceso. Este mecanismo le permite a un individuo considerar la construcción de un objeto que no se parece a los estados del proceso iterativo asociado (Roa-Fuentes, 2012, p. 210).

La forma en la que fue caracterizado este mecanismo a través del desarrollo y análisis de entrevistas ha permitido que se le relacione directamente con la construcción de conjuntos infinitos, particularmente el conjunto de los números naturales, como entidades en sí mismas y no a través de sus elementos. De esta manera completez permite ver como terminados procesos iterativos infinitos (como sucesiones y series) a través de conceptos relacionados como el límite y la idea de convergencia, donde es necesario pensar en un conjunto infinito como un todo para poder llevar a cabo completamente el proceso de acercamiento infinito que se relaciona con estos conceptos.

La importancia que toma el concepto de límite en el desarrollo de algunas situaciones que involucran el infinito, está dada por la atadura existente entre este concepto del cálculo y el infinito actual. Por lo tanto, la relación que existe entre el infinito dinámico y estático se debe analizar en términos del movimiento de un proceso infinito hacia su límite (Hauchart & Rouche, 1987).

A pesar de que un individuo pueda construir procesos iterativos infinitos, concepciones dinámicas del concepto de límite o del concepto de convergencia, pueden convertirse en un obstáculo que le impida estructurar la Totalidad de los Procesos y, por tanto, no lograr la construcción del Objeto trascendente. En términos generales, las concepciones que desarrollan los individuos en relación con la idea de convergencia de sucesiones, de series o de sucesiones de funciones $(f_n(x))$ son dinámicas, es decir, están asociadas a una estructura Proceso (Caglayan, 2017; Codes & González, 2017), esto se convierte en un obstáculo a la hora de construir entidades del infinito.

En este sentido, Villabona y Roa-Fuentes (2016) aporta algunas evidencias empíricas en el contexto de la paradoja de Aquiles y la tortuga que se muestra a continuación en su versión general:

> Aquiles, hijo de la diosa Tesis, héroe de la guerra de Troya; apodado “el de los pies ligeros” gracias a su gran velocidad, decide enfrentarse a una tortuga en una carrera que se llevará a cabo en una pista recta, a velocidad constante. Para que la disputa sea un poco más justa, Aquiles da a la tortuga cierta ventaja. Al iniciar la carrera puede verse que cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. Nuevamente, Aquiles va tras la tortuga, pero al llegar a donde ésta se encontraba descubre que ya ha avanzado otro pequeño tramo. Así, decide seguir tras ella, pero en cada intento, la tortuga ha recorrido una pequeña distancia; de esta manera, ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga? (p. 134)

Villabona y Roa-Fuentes (2016) presentan evidencia empírica donde muestran que a pesar de que dos individuos abordan matemáticamente la paradoja de forma adecuada (esto es construir correctamente series o sucesiones asociadas al contexto y analizarlas en su estado al infinito a través del concepto del límite) uno de ellos concluye que Aquiles no logra alcanzar a la tortuga y el otro afirma que sí. En esta investigación se puede encontrar que el individuo que afirma que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga no muestra evidencias de haber construido la totalidad del proceso ya que veía el límite como un proceso de acercamiento infinito que no puede alcanzarse (concepción dinámica del límite). En contraste, el individuo que creía que Aquiles alcanzaba a la tortuga, evidenciaba haber construido la Totalidad del Proceso al aceptar que el límite de la sucesión implica que el proceso se completa en un estado al infinito (concepción estática del límite). Lo anterior describe dos concepciones distintas, Proceso y Objeto, del mismo concepto.

Como hemos mencionado anteriormente, se han atribuido dos características principales a la concepción Objeto en la teoría APOE: (i) el individuo ve el proceso como una totalidad y, por tanto, (ii) puede realizar acciones sobre dicha totalidad. Sin embargo, Dubinsky et al. (2013) encontraron evidencias de individuos que estructuran procesos como totalidades, pero no pueden efectuar acciones sobre dichas totalidades. Esto puede implicar que las dos características corresponden a estructuras diferentes. De esta manera surge una nueva estructura entre las estructuras Proceso y Objeto, la cual ha sido denominada Totalidad. En esta investigación también se proponen algunos niveles entre estructuras para el contexto particular dado por la comprensión de la igualdad $0.999\ldots = 1$. La necesidad del análisis de niveles entre estructuras fue inicialmente propuesta, dentro de la teoría APOE, en la investigación sobre fracciones llevada a cabo por Arnon (1998).

Los niveles, según Arnon (1998), son "distinciones más sutiles" que pueden percibirse en el tránsito de una estructura a otra. La caracterización de los niveles puede dar cuenta de cómo debe actuar el mecanismo que permita la evolución de una etapa a la siguiente. Mientras la caracterización de los niveles es propia del contexto en que se presente (Arnon y otros, 2014), las características de las etapas son de alguna manera "estables" sin importar el concepto o noción que se estudie.

Totalidad fue identificada en los razonamientos de futuros profesores al enfrentarse a la igualdad $0.999 ... = 1$ (Dubinsky et al., 2013). Muchos de ellos aceptaron que dicha igualdad era cierta, pero cuando se les propuso solucionar la ecuación $0.999 ... + x = 1$ (lo que supone realizar acciones sobre la totalidad del proceso dado por $0.999 ...$), no lograron hacerlo ya que no pudieron determinar si x es un número decimal infinito o no.

La existencia de una nueva estructura debe ser respaldada por diversos estudios que muestren empíricamente la necesidad de la misma a la hora de analizar los razonamientos que individuos llevan a cabo, cuando enfrentan diferentes contextos relacionados con distintos conceptos y nociones.

La importancia de las Acciones que se realizan sobre Objetos cognitivos se hace evidente en nuestro estudio. La naturaleza del Objeto restringe el tipo de Acciones que puedan ser aplicadas y de ahí surge la idea de *acciones naturalmente admisibles* (Para profundizar en los tipos de Acciones que se pueden aplicar a un Objeto cognitivo revisar Mamolo, 2014). La totalidad de procesos infinitos son entidades estáticas complejas que nacen de un pensamiento, a todas luces, contra intuitivo. Esta totalidad no hereda las propiedades de los objetos generados directamente por el proceso; debe ocurrir un cambio en la mente del individuo para que pueda imaginar cuál será la naturaleza y características del proceso totalizado.

Wijeratne y Zazkis (2016) como parte de un proyecto más amplio, en el que se proponía estudiar el impacto de los contextos cuando un individuo enfrenta situaciones paradójicas haciendo uso de diferentes enfoques teóricos, analizan una "súper-tarea" conocida como la paradoja de la lámpara de Thomson:

> Piense en una lámpara con un botón de encendido/apagado. Suponga que el botón puede ser presionado en un instante de tiempo. Suponga que inicialmente la lámpara está apagada. Después de un minuto el botón es presionado y la lámpara se prende. Después de ½ minuto el botón es presionado y la lámpara se apaga. ¼ de minuto después se presiona nuevamente el botón y la lámpara se prende, así sucesivamente. Esto es, se presiona el botón de encendido/apagado de la lámpara cuando transcurre exactamente la mitad del intervalo de tiempo anterior. Al final de los dos minutos ¿la lámpara está encendida o apagada? (Wijeratne & Zazkis, 2016, p. 128)

Según Laraudogoitia (2009) una súper-tarea es una secuencia infinita de acciones u operaciones que deben llevarse a cabo en un intervalo finito de tiempo. Hay dos procesos que se desarrollan en esta paradoja, uno dado por la adición infinita de intervalos finitos de tiempo y otro por la acción binaria de apagar y prender la lámpara. Para Wijeratne y Zazkis (2016) solucionar la situación requiere de analizar lo que sucede en el intervalo de tiempo $[2-\varepsilon, 2]$ para cualquier $0<\varepsilon<2$, para lo cual es suficiente la etapa de Totalidad. Además, consideran que la "encapsulación" es *no esencial* dado que no existe un objeto que resulte del proceso de prender y apagar la lámpara.

Las evidencias empíricas expuestas en este documento muestran que algunos individuos se enfrentaron a lo que Wijeratne y Zazkis (2016) denominan inconsistencias. Por ejemplo, considerar por un lado que no se pueden alcanzar los dos minutos y por el otro, pensar en el estado de la lámpara en ese instante de tiempo. Estas inconsistencias surgen porque los individuos no han podido construir la Totalidad del Proceso y por tanto no pueden realizar acciones sobre él. Preguntarse ¿qué sucede en el intervalo de tiempo $[2-\varepsilon, 2]$ para cualquier $0<\varepsilon<2$? es realizar una acción sobre la totalidad del proceso dado por $[2-\varepsilon, 2]$ para cualquier $0<\varepsilon<2$. Consideramos que esta situación se puede resolver análogamente sin pensar en términos del límite de una serie por definición sino de una forma más práctica. Alcanzar la totalidad del proceso de adición infinita de intervalos finitos de tiempo sería encontrar el límite de esta serie, aceptando que los dos minutos pueden alcanzarse. La Acción que actúa sobre la Totalidad del Proceso sería preguntarse si la lámpara está prendida o apagada en el minuto 2. Esto nos lleva a pensar en el estado de la lámpara en el instante inmediatamente anterior a los 2 minutos, llegando a que no puede determinarse ese instante de tiempo y, por tanto, no se puede concluir si la lámpara estará prendida o apagada.

El ejemplo anterior ilustra un tipo de acción que puede ser aplicada sobre la Totalidad de un proceso infinito. Las acciones pensadas matemáticamente pueden ser vistas a través de operaciones en las que se involucra al objeto (sumarlo, multiplicarlo, componerlo, considerarlo como elemento de un conjunto, etc). Sin embargo, una Acción cognitiva muy interesante es preguntarnos sobre las propiedades de dicho Objeto y cómo usar esas propiedades para solucionar un problema específico. La determinación de contextos donde sea viable estudiar Procesos infinitos, sus totalidades y las acciones que puedan actuar sobre esas totalidades es el mayor desafío que hemos enfrentado en nuestra investigación. Las acciones naturalmente admisibles a totalidades pueden poseer diferentes grados de complejidad. Sobre el particular Alcock y Simpson (2009) realizan un análisis de las dificultades que pueden enfrentar los individuos cuando deben lidiar con distintas concepciones de un mismo concepto o noción en una misma situación.

Los contextos que involucran el infinito potencial y actual requieren que el individuo entienda y acepte, a lo menos, dos concepciones distintas del infinito; y en ocasiones además debe actuar sobre ellas. En situaciones más complicadas pueden tenerse un elevado número de procesos y objetos involucrados bajo un mismo escenario, así como distintos tipos de infinito. Un ejemplo de esto es planteado por Alcock y Simpson (2009):

> Encuentre la razón de convergencia de la serie de potencias dada por: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n+1}$.
> (p. 25)

Para solucionar esta situación se debe hacer uso del criterio de d'Alembert que según Alcock y Simpson (2009) es entendido por profesores como un proceso sencillo pero que los estudiantes encuentran sumamente difícil, dada la complejidad de la serie de potencias. Esta serie es una función de x que para cada valor de x asigna una serie infinita. Por lo tanto, deben tenerse en consideración infinitas series infinitas, aumentando aún más la dificultad del hecho de que el infinito donde viven las x no es el mismo en el que viven las n (el infinito del continuo y el infinito numerable, respectivamente). Construir el proceso iterativo de la serie y encontrar la razón de convergencia dándole un significado adecuado, requiere de la realización de acciones complejas sobre objetos cuya naturaleza no es percibida por los individuos de manera directa.

En esta sección hemos planteado explícitamente la problemática de la construcción cognitiva del infinito en términos de la teoría APOE, a partir de las más relevantes investigaciones que se han desarrollado desde esta perspectiva. En la siguiente sección se exponen las preguntas que guían el desarrollo de esta investigación, así como los objetivos que llevan a darles respuesta.

2.4. Planteamiento del Problema

Las diferentes investigaciones que han sido expuestas en las secciones anteriores nos permiten plantear y delimitar una problemática que concierne a la Matemática Educativa: comprender cómo se construye el infinito matemático en la mente de un individuo. Algunas investigaciones que han abordado esta problemática desde diferentes miradas han determinado que las intuiciones juegan un papel importante en la forma como un individuo enfrenta contextos del infinito (Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Fischbein, 2001; Tirosh, 1991; entre otras). Además, se han logrado caracterizar diferentes concepciones que los individuos desarrollamos al enfrentar este tipo de contextos (Tsamir & Dreyfus, 2002; Dubinsky et al., 2005a; 2005b; Weller et al., 2004; Brown et al., 2008; Roa-Fuentes & Oktaç, 2014; Villabona & Roa-Fuentes, 2016; entre otras). En nuestra investigación abordamos esta problemática prestando especial atención a dos aspectos: Las intuiciones siendo caracterizadas como concepciones primarias (Roa-Fuentes, 2012) y la comprensión del infinito en términos de las estructuras y mecanismos mentales propuestos por la teoría APOE. Comprender la construcción cognitiva del infinito puede generar un impacto en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos de matemáticas avanzadas; específicamente en áreas como cálculo, álgebra lineal, álgebra abstracta, teoría de conjuntos, análisis, entre otras.

Por otro lado, Arnon et al. (2014) consideran que se deben llevar a cabo investigaciones que permitan aclarar un asunto que concierne principalmente a la teoría APOE: analizar si es necesario el planteamiento de una estructura diferente a las ya tomadas en cuenta por la teoría, a la hora de describir las construcciones cognitivas que desarrollan los individuos cuando enfrentan distintos conceptos y nociones matemáticas. En nuestro caso, ha sido de interés investigar la viabilidad de la estructura Totalidad en distintos contextos del infinito construidos específicamente para tal fin. Hemos determinado y adaptado contextos paradójicos, así como del cálculo diferencial y de la teoría de conjuntos, que permiten analizar la estructuración de procesos infinitos tanto iterativos como continuos y la construcción de entidades del infinito con naturaleza diversa.

En particular, abordarnos las siguientes preguntas que guiaron el desarrollo de nuestra investigación:

> ¿Cómo se construye el infinito actual a partir de un proceso infinito en la mente de un individuo en términos de estructuras y mecanismos mentales?
>
> ¿Cómo se construye el infinito en distintos contextos matemáticos y qué estructuras son identificadas en los razonamientos de individuos con avanzados conocimientos en matemáticas? ¿Cómo se da el paso entre estas etapas?
>
> ¿Qué tipo de contextos permiten diferenciar las concepciones Totalidad y Objeto de infinito? ¿Cómo se da la evolución descrita en la progresión Proceso – Totalidad – Objeto trascendente? ¿Qué implicaciones puede tener para la teoría APOE el establecimiento de la Totalidad como una estructura de construcción de conocimiento?

Para responder estas preguntas, ha sido de nuestro interés realizar un análisis sobre las construcciones mentales que desarrollan individuos con alta formación matemática (estudiantes de maestría y doctorado en matemáticas y matemática educativa, y profesores con experiencia en la enseñanza de las matemáticas universitarias) cuando se enfrentan a contextos que involucran el infinito actual. Para tal fin, buscamos construir o redefinir contextos específicos diseñados con el objetivo de determinar si la capacidad de ver procesos infinitos (iterativos y continuos) como totalidades y realizar acciones sobre esas totalidades, pertenecen a dos estructuras cognitivas diferentes.

Hemos determinado contextos y planteado descomposiciones genéticas del infinito matemático (una descomposición genética genérica, adaptada teóricamente de Villabona y Roa-Fuentes (2016) y descomposiciones genéticas particulares para los contextos estudiados, adaptados de la descomposición genética genérica). Estas descomposiciones genéticas, que han sido planteadas tomando en cuenta la estructura Totalidad entre las estructuras Proceso y Objeto, son novedosas y han requerido de la adaptación del paradigma de investigación de la teoría APOE. Se han llevado a cabo ciclos iterativos de diseño, recolección y análisis de datos que han permitido el refinamiento de los instrumentos y de las descomposiciones genéticas planteadas inicialmente. Los aspectos metodológicos particulares se detallarán en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III

PARADIGMA DE INVESTIGACIÓN

Los elementos metodológicos seguidos en el desarrollo de este estudio corresponden a una adaptación del paradigma de investigación propuesto por la teoría APOE (Asiala et al., 1996; Arnon et al., 2014). El ciclo de investigación ligado a este paradigma está conformado por tres etapas: Análisis Teórico, Diseño e Implementación de la Enseñanza y Recolección y Análisis de Datos. Las formas en que pueden interactuar estas etapas en términos generales se exponen en la siguiente sección. Posteriormente detallaremos las adaptaciones que se han hecho a la hora de aplicar este ciclo para nuestros fines.

3.1. Paradigma de Investigación de la Teoría APOE

Según la RAE (Real Academia Española de la Lengua) un paradigma es: "una teoría o conjunto de teorías cuyo núcleo central se acepta sin cuestionar y que suministra la base y el modelo para resolver problemas y avanzar en el conocimiento". Para Kuhn (1970), un paradigma es un conjunto de acuerdos sobre los tipos de cosas que se llevan a cabo al hacer investigación en un determinado campo: los tipos de preguntas que se plantean, los tipos de respuestas que se esperan, y los métodos que se emplean en la búsqueda de estas respuestas. Pueden ser explícitos o implícitos y son aceptados por un individuo o un grupo de individuos (Asiala et al., 1996). Existen dos características que poseen los paradigmas de investigación: (1) tienen la capacidad de atraer a un grupo duradero de investigadores y (2) los resultados de las investigaciones permiten plantearse nuevas preguntas de interés (Kuhn, 1970). Arnon et al. (2014) consideran que en este sentido la teoría APOE es un paradigma ya que:

> (1) Difiere de la mayoría de las investigaciones en Matemática Educativa en su enfoque teórico, metodológico y los tipos de resultados que ofrece; (2) contiene componentes teóricos, metodológicos y pedagógicos que están estrechamente relacionados entre sí; (3) continúa atrayendo a investigadores que encuentran útil responder preguntas relacionadas con el aprendizaje de numerosos conceptos matemáticos, y (4) continúa proporcionando preguntas abiertas para que sean resueltas por la comunidad investigadora (p. 93).

Aunque según la RAE un paradigma se acepta sin ser cuestionado, esto no implica que el paradigma propuesto por la teoría APOE no pueda ser adaptado según el caso de estudio. Dependiendo de los objetivos de cada investigación y de las limitaciones prácticas de tiempo y/o espacio, se pueden tomar o descartar algunos elementos de su propuesta metodológica. Como se mencionó, son tres las componentes que integran el ciclo de investigación de la teoría APOE: (i) Análisis teórico, (ii) diseño e implementación de la enseñanza y (iii) recolección y análisis de datos (ver Figura 5). Estas componentes se llevan a cabo de forma iterativa pero no necesariamente secuencial y se busca que la aplicación de cada una de ellas permita nutrir y fortalecer a las demás.

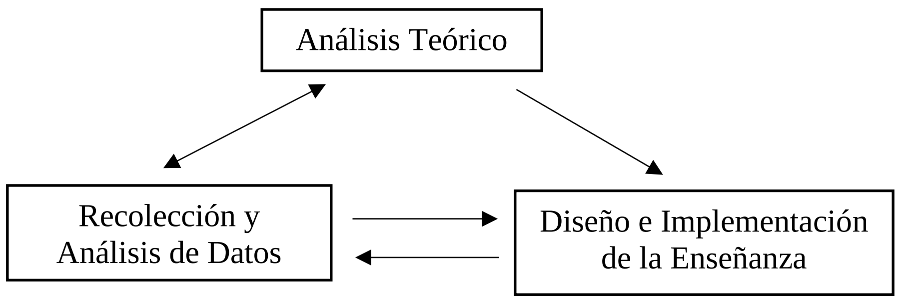


Figura 5. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014, p. 94)

La primera componente denominada Análisis Teórico tiene como objetivo el planteamiento de una *Descomposición Genética Preliminar*. Esta descomposición genética es un modelo cognitivo hipotético que relaciona todas las estructuras y mecanismos mentales que un individuo genérico puede llegar a desarrollar al comprender un concepto o noción. Este modelo hipotético se plantea a partir de diferentes elementos como el análisis del desarrollo histórico del concepto o noción de interés, de su epistemología, de la experiencia de los investigadores e incluso del análisis de libros de texto.

El diseño y la implementación de la enseñanza surge a partir de la descomposición genética preliminar. Las actividades que componen la enseñanza deben favorecer el desarrollo de los mecanismos (*Abstracción Reflexiva*) que permiten la evolución de las estructuras necesarias para la construcción del concepto a tratar (Arnon, et al., 2014). Existen diversas estrategias pedagógicas que pueden ser llevadas a cabo en esta componente; una ampliamente usada en investigaciones con la teoría APOE es la conocida como el ciclo de enseñanza ACE (Actividades – discusión en Clase – Ejercicios, por sus siglas en inglés). En este ciclo el estudiante trabaja en pequeños grupos de forma colaborativa en la realización de las tareas propuestas en el diseño de clase. Posteriormente, se realiza una actividad de discusión en clase donde los estudiantes discuten con el grupo y con el instructor, reflexionando sobre el trabajo que llevaron a cabo. Finalmente, se proponen ejercicios que buscan reforzar la actividad y la discusión en clase. La aplicación del ciclo ACE pretende validar o reconsiderar los elementos cognitivos propuestos en el análisis teórico que pueden ser llevados a cabo como actividades en clase o en laboratorios de cómputo, donde el manejo de software es la principal herramienta para dar solución a las situaciones propuestas (Asiala et al., 1996). Una vez que el tratamiento instruccional se lleva a cabo se debe evaluar su alcance. Es decir, determinar si permitió el tipo de construcciones mentales que se describieron en la descomposición genética preliminar. Para tal fin se debe aplicar la componente final del ciclo de investigación.

Según Arnon et al. (2014) la Recolección y Análisis de Datos busca principalmente responder dos preguntas:

> (1) ¿Los estudiantes parecen desarrollar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética?
>
> (2) ¿Qué tan bien los estudiantes aprenden el concepto en cuestión? (p. 94)

Si la pregunta (1) se responde de forma negativa se debe replantear la componente de diseño y aplicación de la enseñanza. Si (1) es positiva y (2) negativa, se debe reconsiderar el análisis teórico. El ciclo se repite hasta que las respuestas a las dos preguntas sean positivas y los datos empiricos respalden la descomposición genética que en ese momento deja de ser preliminar y pasa a ser refinada (Arnon et al., 2014).

En las siguientes secciones se expondrán las adaptaciones realizadas al ciclo de investigación, así como las descomposiciones genéticas y las evidencias empíricas que ha dejado la realización de las diferentes interacciones de las componentes del ciclo en nuestro estudio.

3.2. Adaptación del Ciclo de Investigación desde Nuestro Estudio

Para los fines de nuestro estudio se han adoptado dos de las tres componentes propuestas en el ciclo de investigación de la teoría APOE: Análisis Teórico y Recolección y Análisis de datos (ver Figura 6).

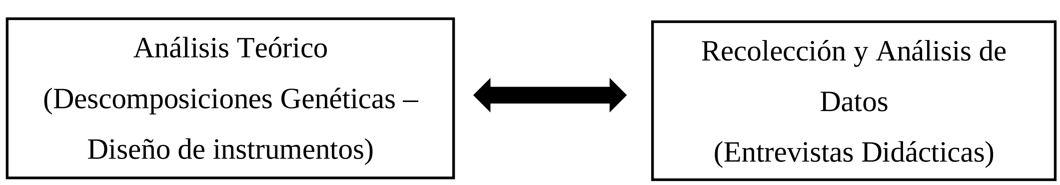


Figura 6. Ciclo de investigación en nuestro estudio

La doble implicación en la Figura 6, señala una interacción continua entre las componentes Análisis teórico y Recolección y análisis de datos; en total se llevaron a cabo cinco iteraciones completas de nuestro ciclo de investigación. En nuestro caso, el Diseño de los instrumentos se considera como parte del Análisis teórico ya que, como mencionamos en el capítulo II, el contexto está íntimamente relacionado con la manera en la que se construye el infinito matemático. La totalidad de los datos fueron analizados en todas las instancias de la componente de Recolección y análisis de datos y se usaron para mantener un proceso de refinamiento constante de las descomposiciones genéticas y los instrumentos de toma de datos considerados en la componente de Análisis teórico.

Con el objetivo de plantear un modelo cognitivo que tomara en cuenta la construcción de procesos infinitos iterativos y continuos, y a Totalidad como una etapa más en la construcción de conocimiento, se adecuó teóricamente la descomposición genética genérica propuesta por Villabona y Roa-Fuentes (2016). Esta nueva descomposición genética genérica se usó de base en el diseño de las descomposiciones genéticas particulares para cada contexto. Un *contexto*, en nuestra investigación, es el conjunto de circunstancias que rodean y dan sentido a determinada situación relacionada con el infinito (dinámico o estático).

El diseño de los instrumentos tuvo un protagonismo especial en nuestra componente de Análisis teórico. Las tareas que componen los instrumentos fueron diseñadas a partir de las descomposiciones genéticas preliminares particulares y tenían el objetivo de permitir la obtención de evidencias de la posible estructura Totalidad. Esto se logró haciendo que los instrumentos pusieran a prueba la capacidad del individuo de estructurar procesos infinitos como Totalidades y de realizar Acciones sobre dichas totalidades. Tanto descomposiciones genéticas como instrumentos fueron puestos a prueba en la componente de Recolección y análisis de datos, siendo refinados a partir de los resultados del análisis.

3.3. Análisis Teórico

En la primera aplicación de esta componente del ciclo de investigación, además de una etapa de fundamentación teórica sintetizada en el capítulo II de este documento, se buscó determinar contextos viables para la construcción del infinito matemático. Se plantearon descomposiciones genéticas particulares para cada contexto y a partir de estas, se diseñaron instrumentos de toma de datos. Los instrumentos debían permitir la realización de un análisis fino en el que se pudiera caracterizar cualquier tipo de estructura cognitiva que esté relacionada con la construcción de dicha noción. La adecuación de los contextos y, en general, el diseño de los instrumentos, así como las descomposiciones genéticas preliminares, sufrieron un proceso de refinamiento de múltiples instancias, en el que fueron puestos a prueba con la realización de distintos ciclos de entrevistas y su posterior análisis. De esta manera se obtuvieron las descomposiciones genéticas refinadas y los dos instrumentos de toma de datos que a nuestro criterio fueron adecuados para alcanzar el objetivo de investigación. Los contextos seleccionados fueron: en el instrumento tipo I, la paradoja de Aquiles y la tortuga y el problema de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto; y en el instrumento tipo II, un problema de unión infinita de conjuntos.

En las siguientes secciones se expondrán las descomposiciones genéticas particulares y genérica, que se obtuvieron justo antes de la última aplicación de la componente de Recolección y Análisis de datos. En la última aplicación de esta componente metodológica se realizó un nuevo análisis de toda la evidencia recolectada durante las distintas aplicaciones del ciclo de investigación; gracias al proceso de refinamiento previo que sufrieron las descomposiciones genéticas, las evidencias aquí presentadas nos permiten responder positivamente a la pregunta planteada por Arnon et al. (2014): ¿los entrevistados parecen desarrollar las construcciones mentales propuestas en las descomposiciones genéticas?

3.3.1. Descomposición genética genérica de infinito

La construcción de la noción de infinito matemático depende de las características del contexto en el cual se presenta. Roa-Fuentes (2012) identifica dos tipos de contextos del infinito, el contexto dinámico y el contexto estático. En el primero se hace explícito uno o más procesos que el individuo puede identificar, con los cuales realizará las primeras acciones y buscará construir procesos iterativos infinitos. En el segundo, no es posible identificar procesos; el contexto muestra el infinito de forma actual. Por lo tanto, el individuo debe haber construido una estructura Objeto de infinito que le permita comprender el contexto y que pueda ser des-encapsulada para obtener procesos con los que afronte y de solución a la situación. Aunque dos contextos sean dinámicos, no necesariamente la construcción del infinito se hará exactamente de la misma forma; dependerá del número de procesos que puedan ser identificados y cómo sean coordinados.

Roa-Fuentes y Oktaç (2014) proponen una primera descomposición genética genérica preliminar del infinito matemático que puede ser adaptada para analizar la construcción del infinito numerable en cualquier tipo de contexto. Este modelo agrupa las características similares que fueron identificadas en la construcción del infinito matemático en distintos contextos, donde los procesos inmersos debían ser coordinados con el conjunto de los números naturales (procesos iterativos infinitos). Roa-Fuentes (2012) y Villabona y Roa-Fuentes (2016) ofrecen evidencia empírica que respalda esta descomposición genética. En estos trabajos se resalta la importancia del mecanismo denominado completez, que permite ver procesos iterativos infinitos como un todo. La aplicación de este mecanismo requiere de una estructura Objeto del conjunto de los números naturales sobre la cual debe actuar el Proceso. Como hemos mencionado, Brown et al. (2010) diferencian la construcción de un Proceso completo de la estructuración de la Totalidad de un Proceso; en adelante para no crear confusiones, diremos que el Proceso ha sido Totalizado al hacer referencia a la aplicación del mecanismo de completez.

Tener la capacidad de pensar en el Proceso infinito como una transformación única que puede ser aplicada sobre todo $\mathbb{N}$ requiere de una concepción Totalidad del infinito numerable. La entidad que se genera al aplicar el Proceso sobre $\mathbb{N}$ es lo que se conoce como el Objeto trascendente. La descomposición genética propuesta por Roa-Fuentes y Oktaç (2014) describe un modelo cognitivo de construcción del infinito numerable, que permite analizar cómo se relaciona esta noción con conceptos como series, sucesiones y sus límites.

La mayoría de las técnicas del cálculo infinitesimal están determinadas por la construcción y posterior conceptualización de procesos continuos que se llevan a cabo sobre intervalos de números reales o sobre todo este conjunto numérico. Un ejemplo está dado por aquellas situaciones que pueden abordarse a partir del planteamiento de funciones reales y sus estados al límite. Aunque muchos de los contextos del infinito matemático, que incluyen su naturaleza potencial y actual, surgen en este tipo de situaciones, hasta ahora no se había propuesto una descomposición genética de la noción de infinito que tome en cuenta la construcción de Procesos asociados a procesos infinitos continuos y sus Totalidades.

La adaptación teórica de la descomposición genética genérica surgió como una necesidad cuando se pretendía estudiar la viabilidad de la estructura Totalidad en la construcción cognitiva del problema de la pendiente de la recta tangente a una curva. Para describir un posible modelo cognitivo de construcción del infinito en este contexto fue necesario plantear una descomposición genética genérica y preliminar que tomara en cuenta cómo se construyen, en términos generales, los Procesos asociados a procesos continuos, sus Totalidades, y qué tipos de Acciones pueden actuar sobre ellas para motivar su encapsulación. El análisis teórico inicial y los distintos análisis de datos nos permitieron establecer que en este caso no se requiere del Objeto asociado al conjunto de los números naturales sino del Objeto asociado al conjunto de números reales o a un intervalo continuo contenido en $\mathbb{R}$, sobre el cual debe aplicarse un Proceso. En el siguiente apartado planteamos la versión actualizada y refinada de la descomposición genética genérica de infinito que permite la construcción de procesos infinitos tanto iterativos como continuos.

Las intuiciones cobran suma importancia cuando un individuo enfrenta situaciones que involucran el infinito potencial y actual. Estas situaciones a menudo son naturalmente contra-intuitivas y generan argumentos que surgen de concepciones que no se desprenden de un razonamiento matemático formal o de las matemáticas correspondientes al nivel de escolaridad del individuo. Dichas concepciones, denominadas *concepciones primarias* (llamadas así por Roa-Fuentes (2012) a partir de las ideas intuitivas del infinito propuestas por Fischbein (1979; 2001)) determinan, por lo menos inicialmente, la forma en la que el individuo enfrenta el contexto a partir de la construcción de procesos dinámicos o estáticos (*concepciones primarias dinámicas* y *concepciones primarias estáticas*, respectivamente).

El inicio de la construcción del conocimiento requiere de un tratamiento instruccional que le permita al individuo identificar los elementos del contexto con los que podrá iniciar la construcción de estructuras cognitivas. Este tratamiento requiere del diseño y aplicación de un modelo de enseñanza que lleve al estudiante a relacionarse con los conceptos de cardinal y ordinal de conjuntos infinitos y con la construcción de procesos infinitos iterativos o continuos.

Si el contexto es estático, el individuo deberá construir una concepción Objeto del infinito que le permita aceptar las condiciones del contexto. Posteriormente deberá aplicar el mecanismo de des-encapsulación al Objeto, relacionando el contexto con un conjunto infinito, $\mathbb{N}$ para asociar el contexto con un proceso iterativo infinito o $\mathbb{R}$ (o un subconjunto de $\mathbb{R}$) para relacionar el contexto con un proceso infinito continuo. Los procesos infinitos asociados al contexto le permitirán abordar el problema o situación como si fuera un contexto dinámico. Si el contexto es dinámico, deberá identificar los procesos inmersos en él y empezar la construcción de procesos infinitos iterativos o continuos a través de la realización de acciones sobre números naturales o reales, respectivamente (ver Figura 7).

Las Acciones $(f(1), f(2), f(3), ...)$ que buscan la construcción de un proceso iterativo infinito se llevan a cabo sobre el conjunto de los números naturales. La aplicación explícita de las Acciones sobre un subconjunto finito de números naturales permitirá que el individuo determine el elemento que le corresponde a cada uno de los naturales en dicho subconjunto (ver Figura 7).

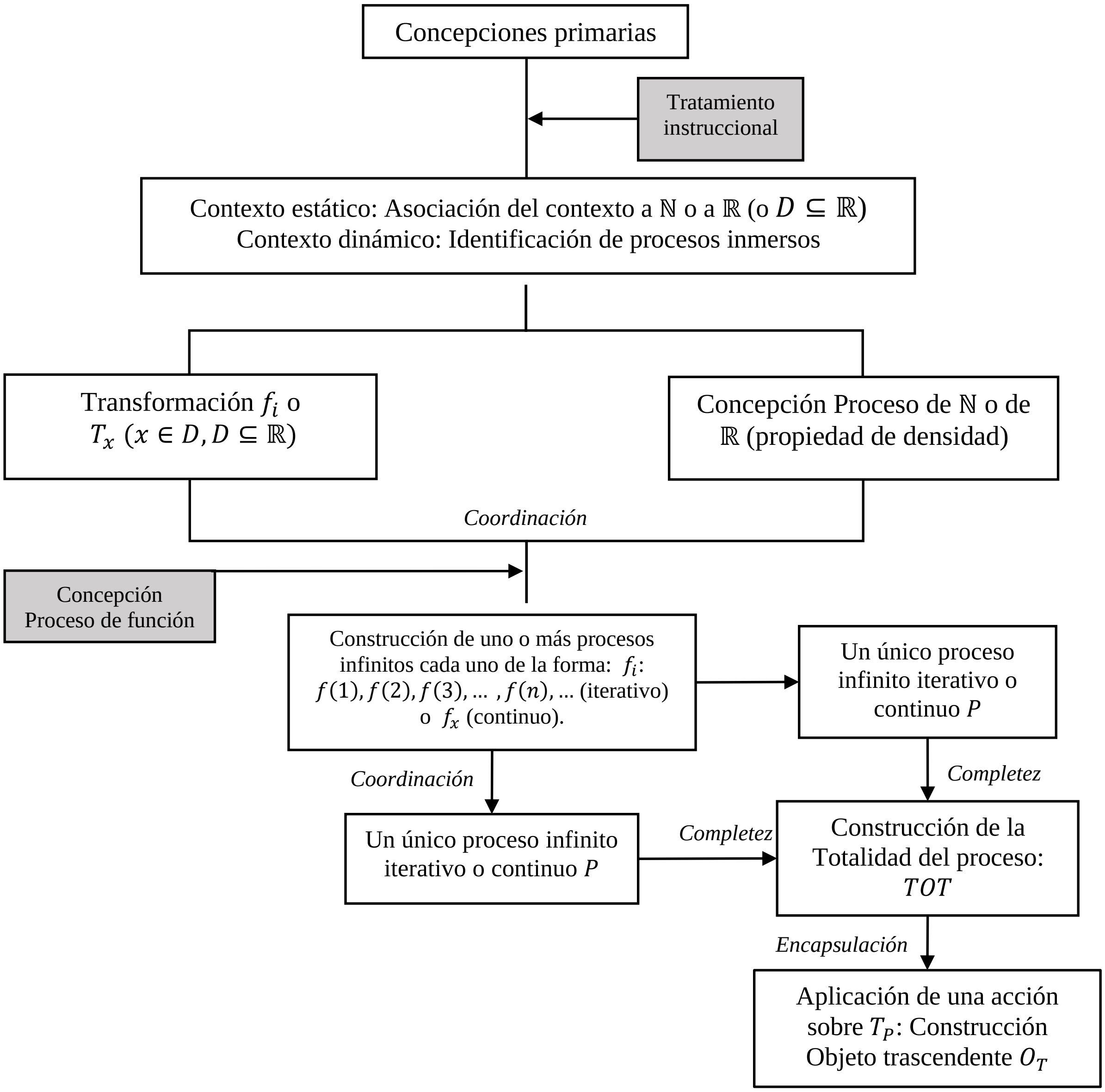


Figura 7. Descomposición genética genérica preliminar del infinito

La comprensión de la relación de cada natural con su imagen será representada ya sea de forma verbal o escrita. Cuando el individuo comprenda cómo actúa la transformación sobre cada número natural, diremos que interiorizó las Acciones en un Proceso, el cual, como ya mencionamos, es un proceso iterativo infinito. Dichos procesos se caracterizan por tener un primer elemento$(f(1))$, dado cualquier elemento del proceso siempre es posible determinar su antecesor (exceptuando el caso del primer elemento) y su sucesor, por ser ordenados, lo cual es heredado del orden de los naturales (Roa-Fuentes, 2012). Estos procesos pueden ser representados a través de funciones biyectivas.

Algunos de los modelos de enseñanza acercan al individuo a la construcción de Procesos continuos a partir de la realización de Acciones iterativas. Por ejemplo, el profesor enseña a calcular límites haciendo aproximaciones iterativas al punto de tendencia y analizando qué sucede con la función en cada una de las iteraciones. Aunque puede ser consciente de que, entre una Acción y otra, hay infinidad de posibles estados intermedios, reflexionar sobre estas Acciones le permitirá construir una idea general del comportamiento de la función en un vecindario que contiene al punto de tendencia.

Lakoff y Núñez (2000) consideran que los procesos continuos se conceptualizan en un sentido lingüístico como procesos iterativos. La idea de una Acción continua se expresa en términos de Acciones iterativas llegando a generar una metáfora cognitiva que plantea que los procesos continuos indefinidos son procesos iterativos. Consideramos que la construcción de Procesos continuos puede darse a través de la realización de acciones iterativas T_x, llevadas a cabo sobre algunos elementos $x \in D$ $(D \subseteq \mathbb{R})$, siendo D el intervalo de continuidad sobre el cual quiere construirse el proceso (ver Figura 7).

A diferencia de las Acciones que se realizan para construir procesos iterativos, las Acciones en la construcción de procesos continuos no pueden ser consecutivas. Entre una Acción y otra siempre habrá infinitas Acciones posibles, esto se debe a la propiedad de densidad de los números reales. Cuando el individuo comprenda cómo actúa la trasformación en términos generales sobre cada $x \in D$, es decir, cuando pueda imaginar lo que ocurre cuando la transformación es aplicada sobre los infinitos números reales, sin tener la necesidad de actuar explícitamente sobre cada uno de ellos (lo cual sería imposible), diremos que ha construido la estructura de Proceso de infinito. Esto le permitirá imaginar cómo actúa un proceso (función $f(x)$) continuo sobre cada uno de los elementos en un intervalo real D (o en $\mathbb{R}$), asignando una transformación T_x a cada $x \in D$ $(f(x) = T_x)$.

En un mismo contexto pueden identificarse y construirse varios Procesos infinitos iterativos o continuos con diferente naturaleza (divergente, convergente) que deben ser coordinados en un único Proceso infinito con naturaleza propia que pueda ser visto como una Totalidad. La construcción de la estructura Totalidad de infinito (*TOT* en Figura 7) está relacionada con la aplicación del mecanismo de completez. Aunque como mencionamos anteriormente este mecanismo fue inicialmente identificado en la construcción de procesos iterativos infinitos, en esta investigación hemos logrado redefinirlo tomando en cuenta la estructuración de procesos infinitos continuos como totalidades:

> ***Completez:*** Es un mecanismo mental que le permite al individuo imaginar las características que tiene la Totalidad de un Proceso infinito. El establecimiento de este mecanismo requiere de una construcción consciente de elementos fundamentales relacionados con la teoría de conjuntos: la relación entre un conjunto infinito y sus subconjuntos propios, los conceptos de cardinal y ordinal y la construcción de conjuntos infinitos con diferentes cardinalidades, específicamente, la construcción de concepciones Objeto del conjunto de los números naturales (para las totalidades de procesos iterativos infinitos) y del conjunto de los números reales (para las totalidades de procesos continuos). Estos elementos permiten la aplicación de un proceso infinito como una única transformación sobre todo $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ (o subconjunto de $\mathbb{R}$).

En algunos casos la aplicación del mecanismo de completez está supeditada a las concepciones que un individuo tenga del concepto de límite. Villabona y Roa-Fuentes (2016) determinan la importancia de este concepto en la actualización de procesos iterativos infinitos en distintos contextos. Un individuo con concepciones dinámicas del límite no podrá aplicar el mecanismo de completez, ya que ve el proceso iterativo infinito inmerso en el límite como un proceso que no puede agotarse y, por tanto, el límite nunca será alcanzado. En contraste, un individuo que posee concepciones estáticas del límite puede pensar que este es alcanzado por el proceso, aunque no pueda determinar una iteración en la cual esto suceda. En la construcción de procesos continuos, consideramos la idea del límite de funciones reales como fundamental. Las concepciones relacionadas con este concepto siguen jugando un papel clave, ya sea como obstáculo o, por el contrario, propiciando el desarrollo de completez.

La construcción del Objeto dependerá de si el individuo puede o no realizar Acciones sobre la Totalidad del Proceso. El mecanismo que le permite al individuo imaginar cómo actúa una transformación sobre la totalidad de un proceso infinito es el de encapsulación. El desarrollo de este mecanismo está relacionado con la experiencia matemática del individuo en cursos de matemáticas avanzadas donde se enseña a lidiar con este tipo de entidades. La posibilidad de llevar a cabo diferentes tipos de Acciones sobre una misma Totalidad podría permitir la construcción de distintos Objetos asociados a un mismo concepto. Esta sería una de las implicaciones que tendría el aceptar a la Totalidad como estructura cognitiva dentro de la teoría APOE, sobre este aspecto profundizaremos en la sección 4.4.

3.3.2. Acercamiento matemático y descomposición genética de la paradoja de Aquiles y la tortuga

A continuación, proponemos la versión de la paradoja de Aquiles y la tortuga que se usó en esta investigación:

> Aquiles, hijo de la diosa Tetis, héroe de la guerra de Troya; apodado "el de los pies ligeros" gracias a su gran velocidad, decide enfrentarse a una tortuga en una carrera que se llevará a cabo en una pista recta, a velocidad constante. Para que la disputa sea un poco más justa, Aquiles da a la tortuga una ventaja de $\frac{3}{10}$ de kilómetro. Al iniciar la carrera puede verse que cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. Nuevamente, Aquiles va tras la tortuga, pero al llegar a donde ésta se encontraba descubre que ya ha avanzado otro pequeño tramo. Así, decide seguir tras ella, pero en cada intento, la tortuga ha recorrido una pequeña distancia; de esta manera, ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga? Suponga que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga.

Esta versión es una adaptación de la versión propuesta por Villabona y Roa-Fuentes (2016) y con ella buscamos poner en contexto la igualdad $0.333\ldots = \frac{1}{3}$. Consideramos que el planteamiento de esta situación en un contexto paradójico nos permite desentrañar las concepciones dinámicas que los individuos tienen alrededor de $0.333\ldots$ haciendo que se aparten de una demostración matemática memorizada y llevándolos a construir la sucesión o serie relacionada con este número decimal.

Una extensión de este problema fue diseñada con la intensión de determinar si el individuo está en capacidad de realizar acciones sobre la totalidad del proceso que construya en este contexto.

Suponga que se establece una meta a una distancia de $0.333\ldots$ (o $\frac{1}{3}$ según corresponda) kilómetros del punto de partida de Aquiles. ¿A qué distancia de la meta Aquiles alcanza a la tortuga (llame x a la distancia entre la meta y el punto en el que Aquiles alcanza a la tortuga)?

Solucionar esta situación puede requerir del planteamiento explícito o implícito de una ecuación de la forma $0.333\ldots + x = \frac{1}{3}$. Las concepciones dinámicas y estáticas de $0.333\ldots$ involucradas en la ecuación jugarán un papel importante a la hora de determinar la naturaleza de x.

A continuación, describiremos un acercamiento matemático a la versión de la paradoja que usamos en nuestra investigación.

Acercamiento matemático a la paradoja de Aquiles y la tortuga

Tomaremos en cuenta dos formas diferentes de dar solución a la paradoja; la primera de ellas es construyendo la sucesión de distancias que separan a Aquiles de la tortuga en cada iteración y verificando que esta sucesión converge a cero. La otra nos permite no solo determinar si Aquiles alcanza a la tortuga sino también encontrar la distancia en que lo hace. Para esto se debe tomar en cuenta la serie de las distancias totales recorridas por Aquiles y la serie de las distancias totales recorridas por la tortuga y se deberá verificar que la suma de las distancias recorridas por Aquiles es igual a la suma de las distancias recorridas por la tortuga más la ventaja inicial. La distancia de alcance será la suma de la serie de las distancias recorridas por Aquiles.

- Solución a través de las distancias que separan a Aquiles de la tortuga en un momento i

Sea l_i la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en la $i-ésima$ iteración. Como es de esperarse l_i se define como:

$$l_i = T_i - A_i$$

donde A_i y T_i son las distancias totales recorridas por Aquiles y por la tortuga desde el punto de partida de Aquiles, en la iteración i, respectivamente (ver Figura 8). Debemos mostrar que la sucesión de distancias l_i converge a cero y por tal motivo, Aquiles alcanza a la tortuga.

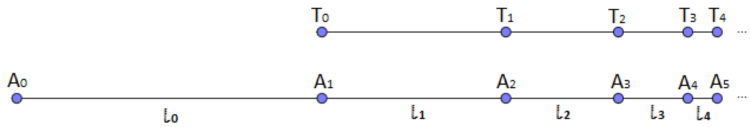


Figura 8. Movimientos de Aquiles y la tortuga en las primeras iteraciones

Veamos que la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en un momento cero está dada por la ventaja inicial:

$$l_0 = T_0 - A_0 = \frac{3}{10} - 0 = \frac{3}{10} = 0.3$$

Como Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga, en lo que Aquiles recorre los $\frac{3}{10}$, la tortuga recorrerá la décima parte de esta distancia, es decir $\frac{3}{100}$. Si continuamos con este razonamiento podemos obtener uno a uno los términos de la sucesión de distancias:

$$l_1 = \frac{l_0}{10} = \frac{3/10}{10} = \frac{3}{100} = 0.03$$

$$l_2 = \frac{l_1}{10} = \frac{3/100}{10} = \frac{3}{1000} = 0.003$$

$$l_3 = \frac{l_2}{10} = \frac{3/1000}{10} = \frac{3}{10000} = 0.0003$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$l_n = \frac{l_{n-1}}{10} = \frac{3/(10)^n}{10} = \frac{3}{10^{n+1}}$$

La anterior expresión nos permite determinar la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en un momento n. l_n es una sucesión que converge a cero ya que 10^{n+1} puede hacerse tan grande como se quiera; con lo anterior queremos decir que:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10^{n+1}}\right) = 3(0) = 0$$

En la situación límite la distancia que separa a Aquiles de la tortuga es cero; por tal motivo podemos asegurar que Aquiles alcanza a la tortuga cuando haya realizado un número infinito de iteraciones. Este razonamiento requiere que aceptemos que realizar un número infinito de intentos en un intervalo de longitud finita (*súper-tarea*) es posible, lo que implicará un razonamiento relacionado con la noción de infinito en acto.

- Solución a través de la distancia total recorrida por Aquiles en un momento i

Como hemos definido anteriormente, A_i y T_i son las distancias totales recorridas desde el punto de partida de Aquiles, por Aquiles y la tortuga en la $i - ésima$ iteración, respectivamente (ver Figura 9).

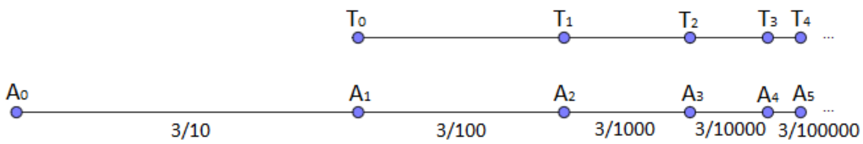


Figura 9. Distancias que separan a Aquiles de la tortuga en las primeras iteraciones

Notemos que $\mathrm{A}_0 = 0$ mientras que $\mathrm{T}_0 = \frac{3}{10}$, esto gracias a la ventaja inicial que Aquiles da a la tortuga. Como Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga y la primera distancia que debe recorrer es de $\frac{3}{10}$, se obtienen las distancias totales recorridas por Aquiles y por la tortuga como se muestra a continuación:

$$\mathrm{A}_1 = \frac{3}{10} = \mathrm{T}_0$$

$$\mathrm{A}_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100} = 0.33 = \mathrm{T}_1$$

$$\mathrm{A}_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{333}{1000} = 0.333 = \mathrm{T}_2$$

$$\mathrm{A}_4 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{3333}{10000} = 0.3333 = \mathrm{T}_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mathrm{A}_n = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \mathrm{T}_{n-1}$$

$$\mathrm{A}_n = \frac{3}{10}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k} = \mathrm{T}_{n-1}$$

Veamos que la serie geométrica dada por el término general $\frac{1}{10^k}$ converge y la suma de sus primeros n términos está dada por:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k} = \frac{10}{9} - \frac{10}{9(10^n)}$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida por Aquiles a la altura de una iteración n y la distancia recorrida por la tortuga en la iteración $n-1$, es:

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(10^n)} = \mathrm{T}_{n-1}$$

Si queremos saber si Aquiles alcanza a la tortuga debemos analizar la situación límite de la serie A_n, verificando que efectivamente la distancia total recorrida por Aquiles y por la tortuga es la misma.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3(10^n)}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{3}$$

Como $\mathrm{A}_{n\to\infty} = \mathrm{T}_{n-1\to\infty}$, las dos series de distancias convergen al mismo valor, permitiéndonos determinar que Aquiles alcanza a la tortuga a una distancia de $\frac{1}{3}$ de kilómetro del punto de partida de Aquiles.

A continuación, se propone la descomposición genética preliminar de la paradoja de Aquiles y la tortuga.

Descomposición genética de la Paradoja de Aquiles y la tortuga

A continuación, propondremos la descomposición genética preliminar de la paradoja de Aquiles y la tortuga para la solución que toma en cuenta las distancias totales recorridas. Como hemos mencionado, esta descomposición genética se basa en la propuesta por Villabona y Roa-Fuentes (2016) y ha sido modificada tomando en cuenta la descomposición genética genérica preliminar planteada anteriormente.

En la paradoja de Aquiles y la tortuga pueden determinarse dos procesos distintos, pero de igual naturaleza: el proceso de movimientos de Aquiles y el proceso generado por los movimientos de la tortuga. Las primeras reacciones al contexto o el planteamiento de posibles “soluciones” pueden corresponder a concepciones primarias de tipo estático o dinámico.

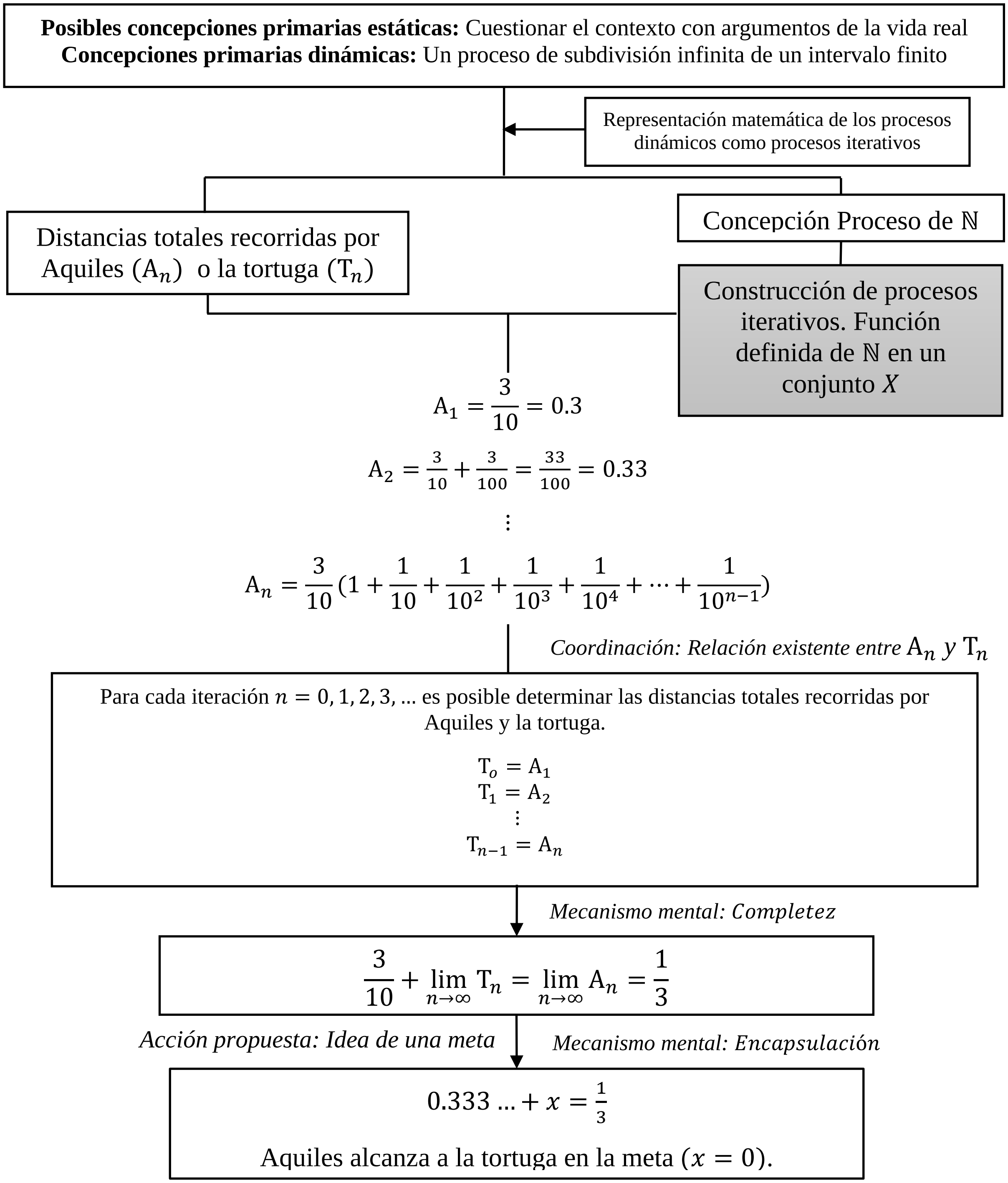


Figura 4. Descomposición genética preliminar de la paradoja de Aquiles y la Tortuga para la solución matemática a través de las distancias totales recorridas

Las concepciones primarias estáticas se caracterizan porque el individuo puede cuestionar el contexto usando argumentos de la vida real como que “es evidente que Aquiles alcanza a la tortuga ya que es más rápido, las tortugas son muy lentas”. Las concepciones primarias dinámicas pueden asociarse a que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga porque es un proceso que se extiende ilimitadamente.

La construcción de la estructura Acción iniciará con la identificación por parte del individuo de los procesos propuestos por la situación, en este caso: distancia total recorrida por Aquiles (A_n) o distancia total recorrida por la tortuga (T_n) (ver Figura 10).

Las primeras Acciones estarán enfocadas en determinar las distancias totales recorridas en las primeras iteraciones. Esperamos que el individuo realice las Acciones para cada uno de los procesos de distancias (A_n y T_n) y luego los coordine en un único Proceso que tome en cuenta tanto las distancias totales recorridas por Aquiles como las distancias totales recorridas por la tortuga, esto se logra a través de la relación existente entre las dos series en términos generales. Sin embargo, también podemos esperar que el individuo establezca inicialmente la relación de las Acciones a la par, determinando las distancias totales recorridas por ambos en cada iteración. La coordinación de los dos Procesos se logrará en la medida en que el individuo establezca que $\mathrm{A}_n = \mathrm{T}_{n-1}$.

La convergencia de la serie A_n implica la convergencia de la serie T_n, por lo cual el individuo podrá determinar que Aquiles recorre la misma distancia que recorrió la tortuga más la ventaja inicial y concluir que la alcanza, lo que implica que puede ver la totalidad del proceso iterativo infinito.

La construcción de la estructura Totalidad queda resumida en la concepción que el individuo tenga del concepto de límite, es decir, en la capacidad que tenga de ver el proceso infinito, inmerso en el concepto de límite, como un todo.

$$\frac{3}{10} + \lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{A}_n = 0.333\ldots = \frac{1}{3}$$

O lo que es análogo:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} [\mathrm{A}_n - \mathrm{T}_n] = 0$$

Por lo tanto, un individuo que ha construido la estructura Totalidad de infinito, al plantear la anterior expresión, concluirá que Aquiles efectivamente alcanza a la tortuga.

Al preguntarle al individuo ¿a qué distancia x de una meta que se encuentra a $0.333\ldots$ (o $\frac{1}{3}$ según sea el caso) kilómetros del punto de partida de Aquiles, Aquiles alcanza a la tortuga?, se espera que relacione el Proceso infinito asociado a $0.333\ldots$ con su Totalidad. Esta relación puede surgir en forma de ecuación como $0.333\ldots + x = \frac{1}{3}$. Esperamos que un individuo que ve el Proceso de forma estática pueda determinar que $x = 0$ ya que se tiene que $0.333\ldots = \frac{1}{3}$. De ser así podremos decir que pudo realizar esta Acción particular sobre la Totalidad del Proceso y, por tal motivo, construye el Objeto de infinito para este contexto. El mecanismo de encapsulación permite al individuo entender la naturaleza del Objeto que surge de $0.333\ldots$ haciendo que pueda ver este número infinito periódico como una entidad sobre la cual puede aplicar operaciones.

En el siguiente apartado presentamos el análisis preliminar del problema de la recta tangente.

3.3.3. Acercamiento matemático y descomposición genética del problema de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto

En este apartado planteamos dos problemas que se relacionan entre sí y que juntos conforman el contexto 2 del instrumento tipo I. Este contexto permite estudiar las posibles concepciones asociadas a la construcción del infinito matemático, incluida la concepción Totalidad. El problema 1 es un problema clásico del cálculo diferencial conocido como el problema de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. El problema 2 es un problema inédito, diseñado como una extensión del problema 1 con el cual se busca determinar la capacidad de un individuo de realizar acciones sobre la totalidad del proceso construido en el problema 1.

1. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva f en el punto P (este es un problema muy conocido en cálculo de una variable; se denomina problema de la recta tangente). Suponga que f es continua en un intervalo que contiene a x (ver Figura 11).

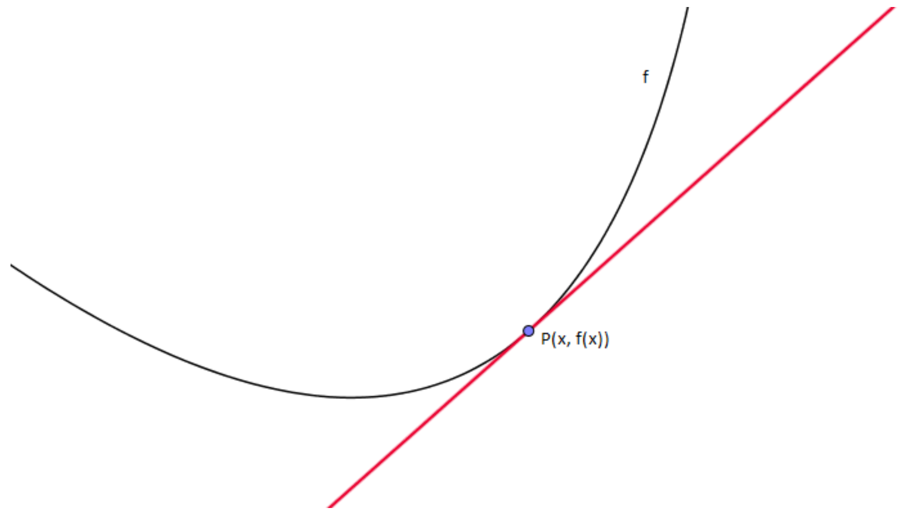


Figura 5. Representación gráfica planteada en el instrumento 1, contexto recta tangente 1

Este problema nos permite poner en contexto la idea de acercamiento infinito y continuo envuelta en el concepto de límite. La solución matemática consiste en aproximar la pendiente de la recta tangente a partir de una "sucesión" de pendientes de rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$ generadas al acercar un punto cualquiera Q sobre f al punto P.

Acercamiento matemático al problema de la recta tangente

En esta situación esperamos que el individuo aproxime la pendiente de la recta tangente a través de rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$. Para ello propondrá un punto Q de coordenadas $(x+h, f(x+h))$ sobre la curva f (f es continua sobre un intervalo que contiene a x y a $x+h$) y construirá la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ (recta secante a la curva f). Como Q es un punto cualquiera sobre la curva f, podrá acercarse tanto como se quiera al punto P. Las acciones que el individuo realice podrán estar caracterizadas por el movimiento discreto del punto Q sobre la curva f; en cada paso podrá dibujar un punto Q cada vez más cercano a P y construir en cada momento la correspondiente recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$. La interiorización de estas acciones se da cuando el individuo comprenda que puede acercar el punto Q a P tanto como desee generando siempre una única recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ cada vez más parecida a la recta tangente. Es decir, siempre existirá una recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ (sin importar qué tan pequeña sea la distancia entre los puntos P y Q) cuya pendiente (m_{PQ}) se aproxime cada vez más a la pendiente de la recta tangente (m_{tan}). Esta situación puede modelarse usando el concepto de límite:

$$m_{tan} = \lim_{Q \to P} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donde h es la distancia entre las coordenadas x y $x + h$ de los puntos P y Q, respectivamente. $f(x)$ es la imagen bajo f de la coordenada x del punto P y $f(x + h)$ es la imagen bajo f de la coordenada $x + h$ del punto Q. Lo anterior es la definición de la derivada de la función f en el punto P. Si el individuo puede ver la totalidad del proceso infinito $Q \to P$ y además entiende el límite como un proceso que se alcanza, podrá ver la tendencia total del proceso relacionado, esto se resume en que la pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ en un estado al infinito, es la pendiente de la recta tangente a f en el punto P. Lo anterior podría ayudarnos a analizar si el individuo puede ver la totalidad del proceso generador de rectas que son secantes a f, lo cual puede relacionarse con la concepción que el individuo tenga del concepto de límite.

Si pensamos en utilizar la pendiente de la recta tangente como el proceso totalizado y nos olvidamos momentáneamente del proceso que la generó, podríamos pensar que una acción que actúe sobre esa totalidad sería usar dicha pendiente para encontrar la ecuación de la recta tangente a f en P. Sin embargo, en el capítulo anterior mencionamos la dificultad de las acciones que actúan a la vez sobre el proceso totalizado y sobre el proceso infinito expuesto de forma dinámica. Buscamos que nuestro contexto permita evidenciar que un individuo a pesar de que pueda ver procesos como un todo no necesariamente puede realizar algún tipo de acción matemática sobre ese todo. Esto de alguna manera permite categorizar las Acciones; buscamos Acciones que sean complejas y naturalmente admisibles a la Totalidad de Procesos infinitos. A continuación, describiremos una posible construcción que nos permitirá realizar Acciones sobre la Totalidad del Proceso asociado a la solución del problema 1.

2. En la siguiente construcción, determine la relación y si es posible la medida de los ángulos A, B, C y D en la situación límite cuando $Q \to P$. Las rectas g y h son paralelas entre sí y tangentes a la circunferencia τ (la recta h es tangente a τ en el punto P y Q es un punto cualquiera sobre la circunferencia τ) (ver Figura 12).

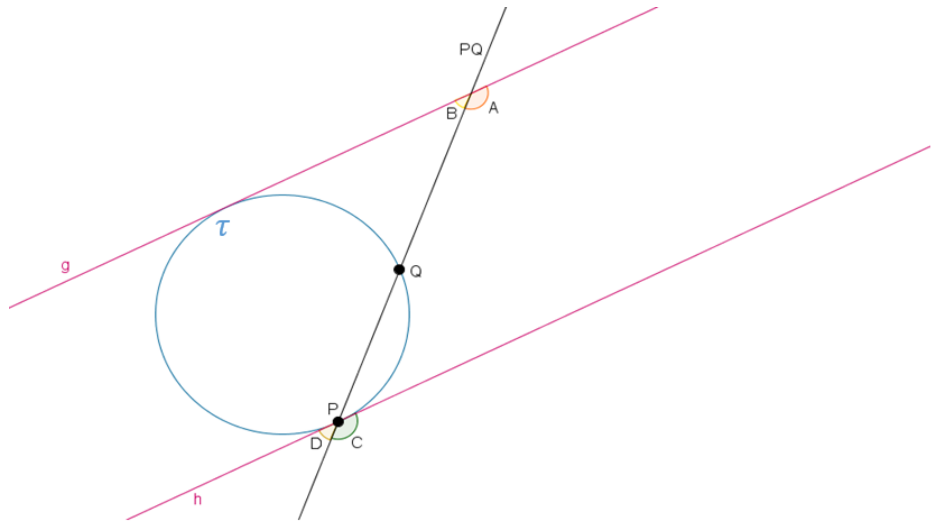


Figura 6. Representación gráfica del problema 2 del contexto 2

Se necesita que el individuo resuelva esta situación haciendo uso de la Totalidad construida o usada en el inciso anterior por lo cual se estaría buscando que realice Acciones sobre dicha totalidad. La relación de los ángulos $A, B, C\ y\ D$ puede determinarse, durante el proceso de acercamiento de Q a P, usando dos teoremas básicos de la geometría euclidiana sobre la congruencia de ángulos: ángulos alternos internos y ángulos opuestos por el vértice. De esta manera podremos decir que:

$$\angle A \cong \angle C$$

$$\angle B \cong \angle D$$

Un individuo podría determinar que cuando $Q \to P$, la medida de $\angle A$ y $\angle C$ tiende a ser 180° y la medida de $\angle B$ y $\angle D$ tiende a ser 0°. Incluso podría afirmar que $\angle A \cong \angle C = 180°$ y que $\angle B \cong \angle D = 0°$. Si el individuo puede usar la totalidad implicada en el inciso anterior en esta situación, entenderá que los teoremas de la geometría euclidiana no podrán ser aplicados en la situación al límite porque la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ pasará a ser la misma recta h y por tanto será paralela a la recta g, haciendo que en esa situación los ángulos $A\ y\ B$ no existan, el ángulo C tenga una medida de 180° y el ángulo D tenga una medida de 0°.

Descomposición genética del contexto de la recta tangente

A continuación, proponemos cómo pueden llegar a evidenciarse las construcciones mentales que desarrolla un individuo al enfrentar los problemas que conforman el contexto de la recta tangente.

Las concepciones primarias evidenciadas en este contexto están relacionadas con la imposibilidad de dar solución al problema, dado que el individuo considera que no tiene datos suficientes, esto puede deberse a que no ha construido el Proceso de derivada que puede asociarse al problema particular. Por lo tanto, considera que para calcular la pendiente de una recta se deben conocer dos puntos de la recta, y en el caso de la recta tangente solo se conoce el punto P. Es decir, el individuo no posee los elementos matemáticos previos que le permitan afrontar el problema eficientemente. La instrucción matemática que lo lleva a superar esta situación está relacionada con la definición de la recta tangente a una curva como la recta que mejor se aproxima a la curva en un intervalo I que contiene a la ordenada x del punto de tangencia P (I es un intervalo del dominio sobre el cual f es continua). Además, deberá conocer técnicas de aproximación de la recta tangente a partir de rectas secantes usando la continuidad de la curva. En este caso aproximará la recta tangente a partir de los puntos de la función f en un vecindario que contenga a P; las Acciones estarán encaminadas a la construcción de procesos relacionados con las técnicas descritas.

Como se ha mencionado anteriormente, una posible forma de resolver este problema es construir un proceso infinito y continuo de generación de rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$, determinadas a partir de un punto cualquiera Q sobre f, que en el estado al límite cuando $Q \to P$ converge a la recta tangente a f en P. El Proceso cognitivo asociado a este acercamiento infinito se denomina P_{12}. Veamos que P_{12} surge de la coordinación de dos Procesos, un Proceso P_1 relacionado con la elección de puntos Q sobre f y un Proceso P_2 asociado a la construcción de rectas secantes a una curva. Podemos notar que las rectas secantes pueden definirse a partir de los puntos P y Q, esto hace que P_1 y P_2 se coordinen dando paso al Proceso P_{12} a través de la implicación: "una posición particular para el punto $Q \Longrightarrow$ una única recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$". El proceso asociado a P_{12} tiene una naturaleza convergente que surge de la intención de acercar Q a P tanto como sea posible, esto se logra a través del concepto de límite, generando una función continua de rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$ que converge a la recta tangente a f en P. Esto está relacionado con la construcción de la Totalidad del Proceso P_{12} (TOT_{12}) (ver Figura 13).

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_2} \end{matrix}\right] \xrightarrow{\text{Coordinación: “}\Rightarrow\text{”}} \boldsymbol{P_{12}} \xrightarrow{\text{Completez: “}Límite\text{”}} \boldsymbol{TOT_{12}}$$

Figura 13. Construcción de P_{12} y TOT_{12}

Esta no es la única forma con la que se puede afrontar el problema de la pendiente de la recta tangente. Sin embargo, es el método más comúnmente enseñado en cursos de cálculo diferencial. La construcción de la estructura Acción en el contexto del problema puede estar dada porque el individuo elije un punto Q sobre f para construir una recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ (ver Figura 14). Aprovechando la continuidad de la curva, puede ir acercando Q a P y en cada intento comprueba que la nueva recta $\overleftrightarrow{PQ}$ se parece cada vez más a la recta tangente. Estas Acciones envuelven una idea de “iteratividad” sin que esto quiera decir que se está construyendo un proceso iterativo infinito. Las acciones son aplicadas sobre algunos elementos en un intervalo continuo I de números reales (o puntos en una recta real) y buscan la construcción de un proceso infinito y continuo P_{12}. Como ya hemos mencionado, Lakoff y Núñez (2000) consideran que los procesos continuos se conceptualizan como procesos iterativos, al menos lingüísticamente. Esto quiere decir que la idea de Acción iterada se usa de varias formas sintácticas para expresar la idea de Acción continua (Lakoff & Núñez, 2000).

La reflexión que el individuo alcance sobre la realización de las Acciones puede permitir su interiorización construyendo un Proceso de infinito para este contexto. Este Proceso se caracteriza porque el individuo construye a P_{12} y lo evidencia cuando puede determinar que para cada posición de Q (que depende de un valor $x + h$ en el intervalo I) existe una única recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ y que, además, esta recta se parece cada vez más a la recta tangente que pasa por el punto P (toda vez que Q se acerque a P) y, por tanto, sus pendientes también. Puede suceder que este Proceso haya sido construido con antelación debido a la formación académica de la población de estudio. En este caso el individuo evidencia haber construido el Proceso P_{12} sin realizar las Acciones iterativas.

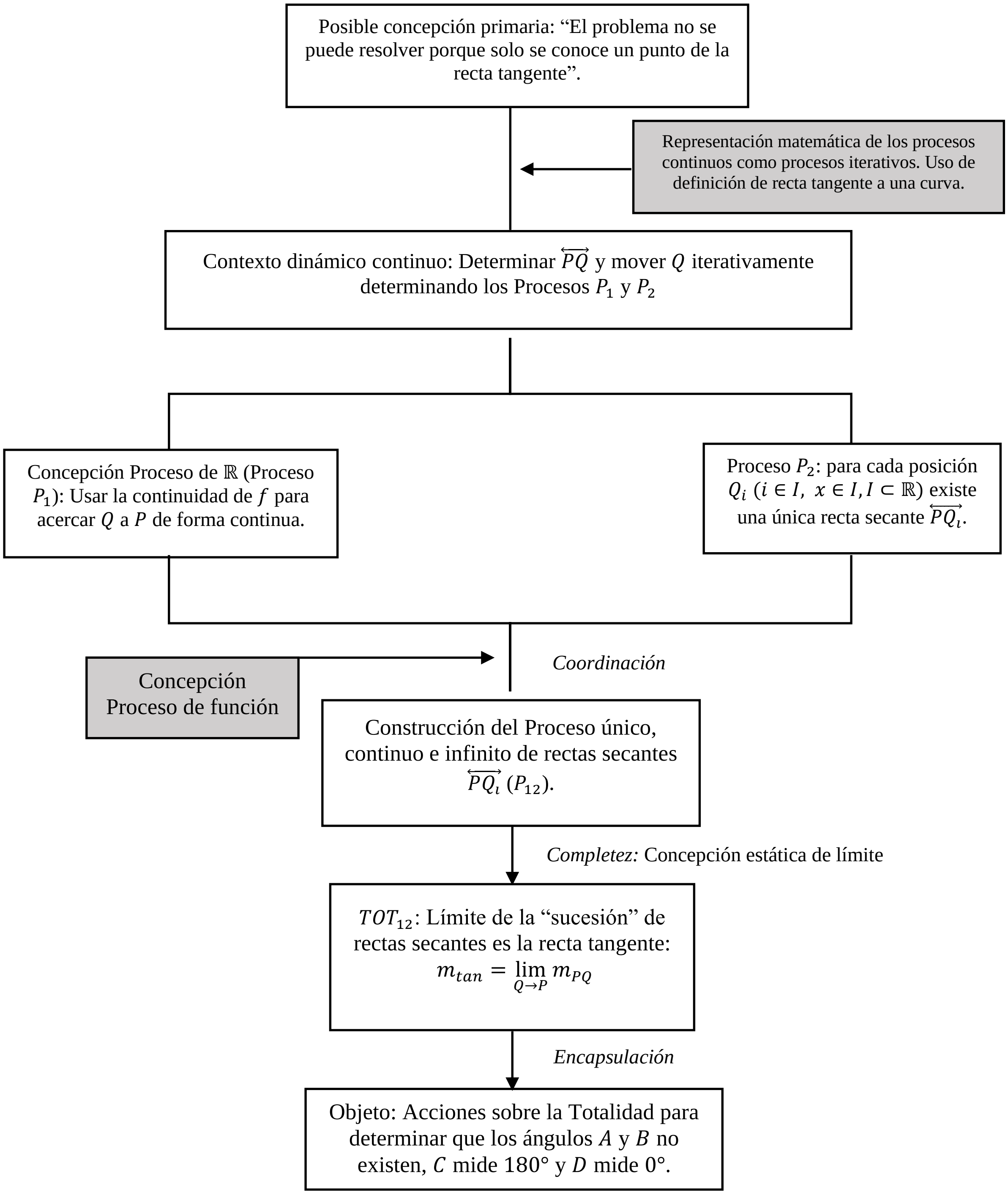


Figura 14. Descomposición genética preliminar del problema de la recta tangente

La estructura Totalidad de infinito se construye a partir de P_{12} y queda evidenciada cuando el individuo puede entender que en la situación al límite cuando $Q \to P$, la recta secante se convierte en la recta tangente y, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es igual al límite de las pendientes de las rectas secantes.

El desarrollo del mecanismo de completez queda supeditado a la concepción que el individuo tenga del concepto de límite—si piensa que el límite puede ser alcanzado o no—. Si el individuo ve el proceso de acercamiento infinito inmerso en el límite como terminado en un estado al infinito, puede aceptar que la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ es la misma recta tangente. Una evidencia matemática de esto es que acepta que la expresión:

$$m_{tan} = \lim_{Q \to P} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

es la pendiente de la recta tangente a f en el punto P y no una "buena" aproximación.

Para determinar si el individuo ha construido el Objeto de infinito para este contexto, es decir, si puede realizar Acciones sobre TOT_{12}, se diseñó una extensión del problema 1 que denominamos el problema 2.

Resolver el problema 2 requiere de la realización de Acciones sobre la Totalidad TOT_{12} construida en el problema 1. Estas Acciones consisten en determinar propiedades del Objeto trascendente que surge de TOT_{12}, pero ahora definida en una nueva situación. El Proceso P_1 asociado al acercamiento de Q a P define un Proceso P_{12} asociado al proceso de generación de rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$ que se da cuando $Q \to P$.

Estas rectas secantes intersecan a las rectas paralelas g y h generando un Proceso P_{123} asociado al proceso de medidas de los ángulos A, B, C y D cuando $Q \to P$. Solucionar este problema requiere de la construcción de P_{123} que surge de la coordinación de P_{12} y un Proceso P_3 relacionado con la medida de los ángulos. Estos Procesos se coordinan a partir de dos implicaciones: "una posición dada para el punto $Q \Longrightarrow$ una única recta secante $\overleftrightarrow{PQ} \Longrightarrow$ unas medidas particulares para los ángulos A, B, C y D" (ver Figura 15).

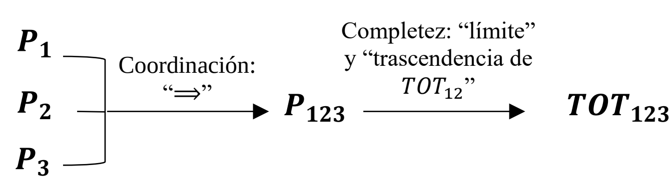


Figura 15. Construcción de P_{123} y TOT_{123}

TOT_{12} permite ver el nuevo Proceso que surge de la triple coordinación (P_{123}) como un todo (TOT_{123}), determinando lo que pasa en la situación límite cuando $Q \to P$ con los ángulos A, B, C y D. La recta del estado al límite (recta tangente a τ en P) no interseca a la recta g, ya que es paralela a ella, y, por tanto, los ángulos A y B no están definidos y los ángulos C y D miden 180° y 0°, respectivamente.

3.3.4. Acercamiento matemático y descomposición genética del problema de unión infinita de conjuntos

A continuación, proponemos el problema de unión infinita de conjuntos en el que se fundamenta el tercer y último contexto que hemos abordado en nuestra investigación y que conforma el instrumento tipo II. Este problema ha sido adaptado de Brown et al. (2008) buscando determinar todas las posibles concepciones asociadas a la construcción cognitiva de una familia infinita de conjuntos finitos a partir de un proceso iterativo infinito. La versión usada en nuestro estudio fue la siguiente:

> ¿Cuáles y cómo son los elementos generados por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})$? P denota el “conjunto potencia” que es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado.

Este problema plantea la construcción de un conjunto infinito a partir de la unión iterativa de conjuntos potencia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Comprender cómo son los elementos que componen este conjunto infinito requiere de la construcción de un proceso iterativo infinito. Este problema por sí solo permite analizar la construcción de las estructuras Acción, Proceso y Totalidad en la construcción de procesos iterativos infinitos y su posterior conceptualización. El estudio de una concepción Objeto de infinito en este contexto depende de si el individuo puede realizar dos tipos de Acciones que se deben aplicar a la Totalidad del proceso iterativo, por ejemplo, determinar el cardinal de conjuntos donde la totalidad del proceso da lugar a un elemento más. Véanse los siguientes conjuntos:

$$A = \{-3,\ 1,\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{j},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})\}$$

$$C = \{\mathbb{N},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})\}$$

Otro tipo de acción puede ser determinar si el conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ es igual al conjunto $P(\mathbb{N})$ (Brown et al., 2008). Estas acciones poseen niveles de complejidad distintos, la capacidad de realización de estas acciones puede hacer posible que existan diferentes tipos de Objetos que surgen de un mismo Proceso asociado a un proceso infinito. Partimos del supuesto de que la realización de Acciones más complejas puede requerir de una concepción Objeto "más robusta".

Acercamiento matemático al problema de unión infinita de conjuntos

Como hemos mencionado anteriormente, responder la pregunta: ¿cuáles y cómo son los elementos generados por la unión infinita? Requiere de la construcción de un proceso iterativo infinito y su totalidad. En la aplicación de las primeras iteraciones de este proceso podemos conocer algunos elementos que pertenecen a este conjunto infinito y de alguna manera llegar a caracterizarlo.

$$P(\{1\}) = \big\{\emptyset, \{1\}\big\}$$

$$P(\{1,2\}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$$

$$P(\{1,2,3\}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

$$\vdots$$

Haciendo un análisis de los elementos que se están generando en la aplicación de las primeras iteraciones del proceso podemos percatarnos de que los elementos generados en una iteración anterior se encuentran contenidos en la iteración siguiente, por lo tanto, se tiene que:

$$P(\{1\}) \subset P(\{1,2\}) \subset P(\{1,2,3\}) \subset \cdots$$

Lo anterior nos lleva a concluir que en términos generales se cumple que:

$$\cup_{k=1}^{n} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}) = P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\})$$

Como k puede hacerse tan grande como se quiera, pero siempre tomando un valor finito, es posible realizar la unión infinita de conjuntos potencia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Cuando k ha tomado todos los posibles valores naturales, es decir, cuando el proceso de iteración a través de $\mathbb{N}$ se completa, vamos a obtener una familia infinita cuyos elementos son conjuntos finitos.

Regresando a las preguntas sobre cardinalidades, el cardinal del conjunto $A = \{-3,\ 1,\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$ es 3, pues está conformado por los elementos -3, 1 y el elemento $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$. De la misma manera el cardinal del conjunto $B = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ \text{j},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$ es $j + 1$ y el cardinal de $C = \{\mathbb{N},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$ es 2, pues tiene dos elementos, el conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$.

Con respecto a la pregunta si $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ es igual que $P(\mathbb{N})$, se debe averiguar si ambos conjuntos tienen los mismos elementos, es decir, de alguna manera se debe verificar la doble contención. Como mostramos anteriormente, para valores finitos de k se cumple la propiedad:

$$\cup_{k=1}^{n} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}) = P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\})$$

El individuo debe reconocer que, a pesar de esta propiedad, no es cierto que $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$, ya que cuando el proceso iterativo infinito acaba existen elementos que están en $P(\mathbb{N})$ que no pueden ser generados en ninguna iteración de la unión infinita. Como sabemos, $P(\mathbb{N})$ está compuesto por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, esto incluye subconjuntos finitos e infinitos (por ejemplo, los pares o impares e incluso el mismo conjunto $\mathbb{N}$). Pero como se ha podido verificar a través de la construcción de $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$, este conjunto está compuesto exclusivamente por conjuntos finitos, por lo tanto, no es cierto que $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$. Otra forma de determinar que estos dos conjuntos no son iguales es a través de su cardinal. $P(\mathbb{N})$ tiene el cardinal del continuo mientras que $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ es numerable, ya que ha sido construido a través de un proceso iterativo infinito, esto requiere de un conocimiento muy específico de la teoría de conjuntos. A continuación, propondremos un modelo de construcción del infinito matemático a partir de estructuras y mecanismos mentales para este contexto.

Descomposición genética del problema de unión infinita de conjuntos

En este apartado analizaremos cómo pueden ser evidenciadas las construcciones mentales que un individuo desarrolla cuando enfrenta este contexto. En las distintas iteraciones del ciclo de investigación que hemos llevado a cabo en nuestro estudio, hemos evidenciado que una de las dificultades iniciales que enfrentan los individuos a la hora de desenmarañar el conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$, está relacionada con la comprensión de la notación en la que se presenta el problema. Iterar realizando uniones de conjuntos potencia al parecer no es una labor que se lleve a cabo frecuentemente en los cursos de teoría de conjuntos. Superar dicha dificultad depende de la capacidad que tengan los individuos de iniciar la realización de algunas Acciones a través de la unión de conjuntos potencia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, que los lleven a construir procesos iterativos infinitos. Esto implica que el individuo debe contar con concepciones previas de conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos como una concepción Objeto de conjunto potencia, concepción Proceso de la unión infinita de conjuntos, concepción Proceso de contención de conjuntos, etc. La necesidad de caracterizar los elementos generados por la unión iterativa hará que el individuo intente construir un proceso iterativo infinito que le permita determinar cuáles y cómo son los elementos generados en cada iteración.

Las primeras Acciones estarán enfocadas en determinar los elementos que componen el conjunto para los primeros valores de k. Con $k = 1$, se tiene que el conjunto estará dado por $P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Luego para $k = 2$, se tiene el conjunto $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Posteriormente para $k = 3$, el conjunto potencia correspondiente será $P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; y así sucesivamente.

Si el individuo reflexiona en la realización de estas Acciones puede notar que todos los elementos que obtuvo en la primera iteración estarán contenidos en el conjunto que se generó en la segunda iteración y de la misma manera, todos los elementos generados en la segunda iteración estarán contenidos en la tercera y así sucesivamente (ver Figura 16).

De esta manera se llega a la conclusión de que los conjuntos que se generan en cada iteración se encajan como se muestra a continuación:

$$P(\{1\}) \subset P(\{1,2\}) \subset P(\{1,2,3\}) \subset \cdots$$

Percatarse de esta propiedad está íntimamente relacionado con el mecanismo de interiorización y nos permite encontrar una expresión para determinar el conjunto generado por la unión de conjuntos potencia para cualquier valor de k, iniciando la construcción del Proceso de infinito para este contexto.

Supongamos que $k = n$, el conjunto generado en la $n - ésima$ iteración estará dado por:

$$\cup_{k=1}^{n} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}) = P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\})$$

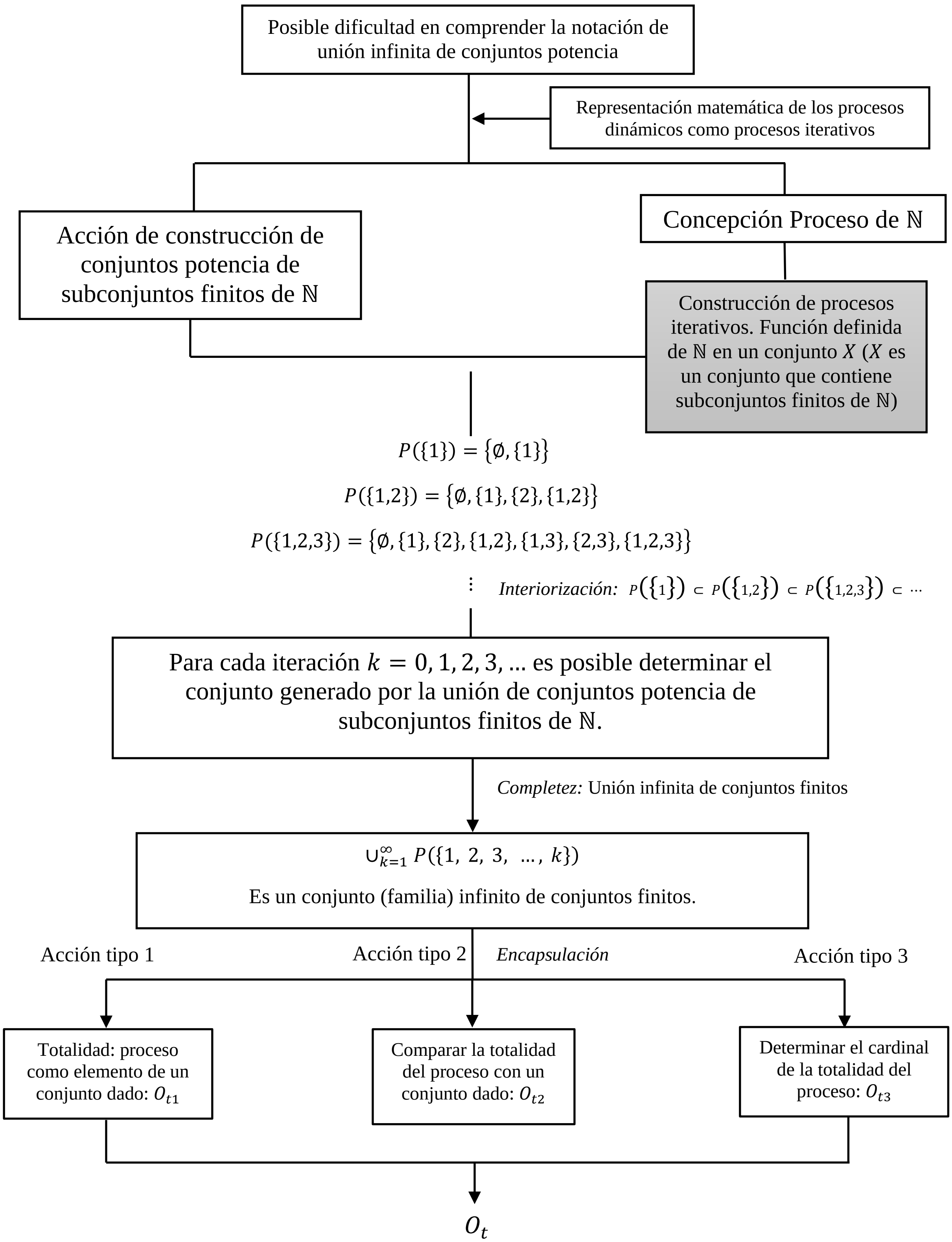


Figura 16. Descomposición genética del problema de unión infinita de conjuntos

El planteamiento de esta expresión ya sea explícita o implícitamente, puede implicar una comprensión completa del proceso iterativo infinito, es decir, que el individuo construyó el Proceso de infinito.

Para que el mecanismo de completez actúe llevando a la construcción de la Totalidad debe ocurrir un cambio en la forma de pensar del individuo que le permita imaginar el Proceso terminado y no a través de su dinamismo, percatándose de que a pesar de que se unan infinidad de conjuntos, este Proceso permite definir una entidad en sí misma que contiene infinitos conjuntos finitos. Que el individuo piense en la Totalidad del Proceso, puede evidenciarse si se refiere a él con expresiones como "el conjunto" o "la familia", en vez de pensar en un proceso iterativo inacabado.

Una Acción que el individuo deberá realizar sobre la Totalidad del Proceso está caracterizada porque puede pensar en él como un conjunto terminado que puede llegar a formar parte de otros conjuntos, es decir, piensa en la Totalidad del Proceso como una entidad en sí misma. A este tipo de Acción la denominaremos *Acción tipo 1*. Determinar los cardinales de los conjuntos:

$$A = \{-3,\ 1,\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$$

$$B = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ \mathrm{j},\ \ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$$

$$C = \{\mathbb{N},\ \ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$$

implica que los individuos piensan en el proceso dado por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ o en $\mathbb{N}$ como elementos de un conjunto. Esto implica que construyó la estructura Objeto de infinito.

Determinar si la siguiente igualdad se cumple:

$$\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\}) = P(\mathbb{N}),$$

implica realizar Acciones que requieren un nivel de comprensión del Objeto un poco más profundo. El individuo deberá pensar en algunas propiedades del conjunto dado por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$.

Una Acción posible para establecer que la igualdad entre estos conjuntos no se cumple en un estado al infinito, es determinar que la unión infinita no puede generar conjuntos infinitos y, por tanto, existen conjuntos en $P(\mathbb{N})$ que no están en $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$. Es decir, el conjunto que se obtiene al realizar todo el proceso de iteración $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$ no cumplen la doble contención. A este tipo de Acción la denominaremos *Acción tipo 2*. Llevar a cabo la acción tipo 2 evidencia la construcción de un Objeto trascendente asociado a $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$; el individuo no solo ve el Proceso como una Totalidad, sino que puede determinar algunas propiedades de dicha entidad percatándose de que las propiedades que eran ciertas para el Proceso subyacente pueden no cumplirse para el Objeto generado y determinar así la trascendencia del Objeto.

Otra posible Acción (*Acción tipo 3*) para determinar que $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$ no son iguales, se lleva a cabo al establecer el cardinal de cada conjunto. Mientras que $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ tiene el cardinal de los conjuntos infinitos numerables ($\aleph_0$), $P(\mathbb{N})$ tiene el cardinal del continuo ($\aleph_1$) y, por tanto, no pueden ser iguales. Comparar el conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ con otro conjunto, es realizar Acciones sobre el Objeto cognitivo que lo representa. En este caso, determinar los cardinales de estos conjuntos infinitos puede requerir un conocimiento específico de la teoría de conjuntos de Cantor; el individuo debe aceptar que dos conjuntos infinitos pueden no tener el mismo número de elementos y debe conocer métodos para determinar dicho cardinal.

Notemos que un individuo puede determinar que $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$ no son iguales porque puede llevar a cabo la Acción tipo 2; sin embargo, esto no implica que pueda determinar el cardinal de estos conjuntos (Acción tipo 3). Los requerimientos para la encapsulación de la Totalidad, al llevar a cabo las Acciones tipo 2 y tipo 3 son diferentes, a pesar de que se busque establecer el valor de verdad de una misma proposición.

Como hemos mencionado anteriormente, es posible que el individuo pueda realizar las Acciones tipo 1 sobre la Totalidad del proceso iterativo infinito y no las Acciones tipo 2 o 3, en ese caso diremos que ha construido el Objeto Trascendente Tipo 1 (O_{t1}). Si no puede realizar las Acciones tipo 1 o 3, pero sí las Acciones tipo 2, diremos que ha construido el Objeto Trascendente Tipo 2 (O_{t2}). De igual manera si puede llevar a cabo la Acción tipo 3 y no puede llevar a cabo las Acciones tipo 1 y 2, diremos que ha construido el Objeto Trascendente Tipo 3 (O_{t3}). Si puede realizar los tres tipos de Acciones, diremos que construyó el Objeto Trascendente (O_t). Estas distinciones pueden hacer referencia a un nivel de maduración de la concepción Objeto determinada por el tipo de Acciones que el individuo pueda realizar sobre el Objeto que construyó. Podríamos pensar que O_{t2} y O_{t3} son Objetos más robustos que O_{t1}, ya que las Acciones que se aplican sobre ellos requieren que sean vistos no solo como entidades en sí mismas, sino que se tenga plena consciencia de algunas propiedades del Objeto más complejas. Es decir, el individuo puede reflexionar sobre el número y las características de los elementos que componen al conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\})$, o bien, puede establecer su cardinal. Las Acciones que se aplican sobre O_{t1} requieren que el individuo pueda ver la totalidad del proceso iterativo como una entidad en sí misma llegando a reflexionar sobre algunas propiedades o características del conjunto, por ejemplo, podrá identificar la totalidad del proceso como un elemento más en un conjunto finito, dándole estatus de Objeto.

En los siguientes apartados realizaremos un análisis de la población de estudio, instrumentos de toma de datos y algunos datos empíricos que han sido recolectados a través de las iteraciones de nuestro ciclo de investigación.

3.4. Población de estudio

La elección de nuestra población de estudio ha dependido del tratamiento instruccional y de las concepciones previas necesarias que se han identificado en cada una de las descomposiciones genéticas particulares. Se requería de una población con experiencia en la construcción de procesos iterativos infinitos como series y sucesiones. Además, se necesitaba que tuvieran conocimientos de algunos conceptos de la teoría de conjuntos (cardinalidad, conjuntos potencia, unión infinita de conjuntos, entre otros) y del cálculo diferencial (límites, convergencia, aproximación de rectas tangentes a partir de rectas secantes, continuidad, entre otros).

Hemos diseñado dos instrumentos de recolección de datos; el primero incluye el contexto de la paradoja de Aquiles y la tortuga, así como el problema de la recta tangente y su extensión. El segundo, toma en cuenta el problema de la unión infinita de conjuntos potencia. Responder adecuadamente cada uno de estos instrumentos supone un dominio avanzado de las matemáticas, por lo tanto, la población de estudio que hemos seleccionado está conformada por estudiantes de maestría y doctorado en Matemática Educativa (8 individuos), estudiantes de maestría y doctorado en Matemáticas (3 individuos) y por profesores con experiencia en la enseñanza de la matemática universitaria básica y avanzada (3 individuos) (14 individuos en total). El grupo de entrevistados tenían a la fecha de la aplicación del instrumento edades entre los 24 y 37 años. En el análisis de datos, usaremos pseudónimos para referirnos a los entrevistados.

La toma de datos se llevó a cabo en México y Colombia a través de cinco diferentes ciclos de entrevistas didácticas semiestructuradas, llevadas a cabo entre enero del 2017 y enero del 2020. Por entrevistas didácticas hacemos referencia a un tipo de entrevista donde se motiva la reflexión y posiblemente la construcción de estructuras a partir de conocimientos guiados que le permitan al individuo identificar aquello de lo que no se había percatado. Es decir, son entrevistas que favorecen la construcción del conocimiento durante su realización (Oktaç, 2019). La estructuración de las entrevistas se ha llevado a cabo a partir de las descomposiciones genéticas impactando el diseño de los instrumentos y sus mejoras. A continuación, proponemos un análisis de la última versión de los instrumentos; esta versión ha surgido del refinamiento a partir de la aplicación de cuatro ciclos de investigación de las versiones anteriores.

3.5. Análisis de Instrumentos

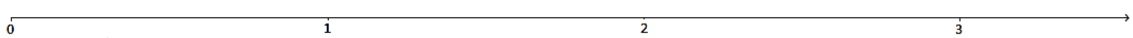
Con los ítems que conforman los instrumentos se busca propiciar o evidenciar la construcción de las diferentes estructuras cognitivas que han sido tomadas en cuenta en nuestras descomposiciones genéticas. Algunos de estos ítems pueden llevar al individuo a un estado de confrontación generando momentos de conflicto. Para esto, como parte de la metodología, se le plantea una mirada diferente a la suya relacionada con otro tipo de estructura distinta a la que él evidencia. Estas situaciones ponen al individuo en un estado de cuestionamiento que puede llevarlo a superar una dificultad que obstaculiza su construcción del conocimiento o evidenciar la solidez de sus estructuras. Los instrumentos están conformados por problemas o situaciones que se presentan dependiendo de las respuestas que ofrece el individuo. Las actividades propuestas en los dos instrumentos contienen preguntas relacionadas con los contextos, preguntas abiertas, representaciones gráficas y establecimiento de relaciones de orden, entre otras. A continuación, se propone el análisis para cada uno de los instrumentos en su versión final.

3.5.1. Análisis del Instrumento tipo I

En este apartado explicaremos cada una de las situaciones que componen el primer instrumento. Recordemos que en nuestra investigación un contexto es el conjunto de circunstancias que rodean y dan sentido a determinada situación que se relaciona con el infinito. El instrumento I está conformado por dos contextos, la paradoja de Aquiles y la tortuga y el problema de la pendiente de la recta tangente y su extensión. Además, hemos incluido situaciones que involucran el concepto de número real, especialmente números racionales, con la finalidad de explorar las posibles concepciones que los individuos tengan sobre este conjunto numérico.

1. Represente los siguientes números en la recta real:

- 0.55
- $\frac{1}{3}$
- $0.999\ldots$
- $\frac{3}{2}$
- $0.333\ldots$
- $\frac{7}{4}$
- $\sqrt{2}$



En esta primera situación nos proponemos explorar las concepciones iniciales que tienen los individuos sobre los números reales, especialmente, números racionales e irracionales y su relación biyectiva con los puntos de la recta real. Además, se busca determinar si logran aceptar la igualdad de números como $0.999\ldots$ y 1 o $0.333\ldots$ y $\frac{1}{3}$. Estas concepciones iniciales y los argumentos planteados permiten analizar e incluso confrontar sus estructuras dinámicas o estáticas del infinito en contextos de números reales.

En la situación 2 se busca que los individuos establezcan relaciones de orden entre pares específicos de números reales.

2. Establezca una relación de orden $(<, =, >)$ entre los números:

$0.3999\ldots$ ____ 0.34

$0.1999\ldots$ ___ 0.2

Estas relaciones permiten evidenciar si un individuo puede ver la totalidad de un proceso infinito. Este proceso está dado por un número racional de infinitas cifras decimales y la totalidad está asociada al número racional de finitas cifras decimales equivalente al proceso. En la primera relación, 0.34 no surge de ver al proceso dado por 0.3999 ... sino de la totalidad del proceso dado por 0.33999 ... En la segunda relación, se muestra el proceso dado por el número 0.1999 ... que es igual a 0.2.

El contexto 1 es la famosa paradoja de Zenón de Elea denominada "la paradoja de Aquiles y la tortuga" en una versión particular (con una relación de velocidad entre Aquiles y la tortuga de 10 a 1 y con una ventaja inicial de $\frac{3}{10}$ de kilometro) que se muestra a continuación:

Contexto 1: Paradoja de Aquiles y la tortuga

> Aquiles, hijo de la diosa Tetis, héroe de la guerra de Troya; apodado "el de los pies ligeros" gracias a su gran velocidad, decide enfrentarse a una tortuga en una carrera que se llevará a cabo en una pista recta, a velocidad constante. Para que la disputa sea un poco más justa, Aquiles da a la tortuga una ventaja de $\frac{3}{10}$ de kilómetro. Al iniciar la carrera puede verse que cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. En un nuevo intento, Aquiles va tras la tortuga, pero al llegar a donde ésta se encontraba descubre que ya ha avanzado otro pequeño tramo. Así, decide seguir tras ella, pero en cada intento, la tortuga ha recorrido una pequeña distancia; de esta manera, ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga? Asuma que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga.

Con esta paradoja se busca que el individuo construya la totalidad de procesos infinitos a partir de acciones específicas sobre los números naturales (construcción de procesos iterativos infinitos). El individuo puede construir una sucesión o serie y analizarla en un estado límite; esto nos permitirá determinar si las estructuras cognitivas asociadas al proceso iterativo infinito que construyó son de carácter dinámico o estático. Posteriormente se le presenta la solución que denominamos "solución de Lucía":

Sean A_i y T_i las posiciones que ocupan Aquiles y la tortuga en la iteración i, respectivamente. Las l_i son las distancias que separan a Aquiles de la tortuga en cada iteración (ver Figura 17).

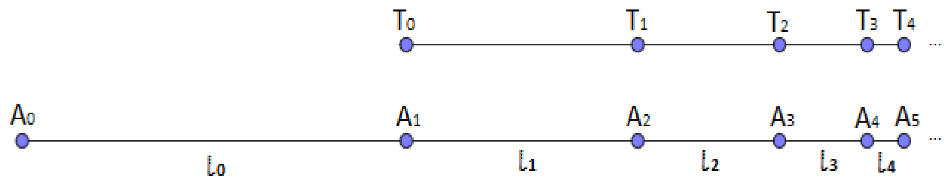


Figura 17. Primeras posiciones de Aquiles y la tortuga

Como Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga y la ventaja inicial es de $\frac{3}{10}$, es decir $l_0 = \frac{3}{10}$, se puede determinar la sucesión l_n de la siguiente manera:

$$l_1 = \frac{l_0}{10} = \frac{3/10}{10} = \frac{3}{100}$$

$$l_2 = \frac{l_1}{10} = \frac{3/100}{10} = \frac{3}{1000}$$

$$l_3 = \frac{l_2}{10} = \frac{3/1000}{10} = \frac{3}{10000}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$l_n = \frac{l_{n-1}}{10} = \frac{3/(10)^n}{10} = \frac{3}{10^{n+1}}$$

La anterior expresión permite determinar la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en un momento n. l_n es una sucesión que converge a cero ya que 10^{n+1} puede hacerse tan grande como se quiera, con lo anterior queremos decir que:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10^{n+1}}\right) = 3(0) = 0$$

Esta solución puede ser presentada a todos los entrevistados ya que como hemos mencionado en el capítulo anterior, un mismo razonamiento matemático de la paradoja puede tener dos interpretaciones distintas dependiendo de si las concepciones que tiene el individuo son dinámicas o estáticas (Villabona, 2015). De esta manera la solución de Lucía puede ser interpretada por un individuo con concepciones dinámicas sobre el concepto de límite como que Aquiles no alcanza a la tortuga ya que la distancia que separa a Aquiles de la tortuga nunca llega a ser cero. Un individuo con concepciones estáticas del límite puede decir que Aquiles logra alcanzar a la tortuga ya que el límite es cero, lo que para él significa que una vez que se realicen todas las iteraciones, Aquiles y la tortuga tendrán la misma posición, evidenciando un pensamiento actual.

El entrevistador da significado a la solución de Lucía dependiendo de las concepciones evidenciadas por el entrevistado. Si al enfrentar la paradoja de Aquiles y la tortuga un individuo evidencia poseer estructuras dinámicas, la interpretación que el entrevistador le da a la solución de Lucía es estática. Es, decir si el entrevistado dice que Aquiles no logra alcanzar a la tortuga, se le muestra la solución de Lucía y se le dice que ella, luego de ese razonamiento matemático, concluye que Aquiles sí logra alcanzarla y a continuación se le pregunta qué opinión le merece dicha solución. Si el entrevistado dice que Aquiles alcanza a la tortuga, la interpretación que Lucía da al límite será dinámica y, por lo tanto, ella concluye que Aquiles no logra alcanzar a la tortuga. Esta situación espera poner a los estudiantes en momentos de conflicto. Si parece que el individuo construyó una estructura Totalidad, nos permitirá poner a prueba la solidez de dicha estructura. Si por el contrario no puede ver el proceso infinito que construyó de forma estática, se espera que el contraste de la solución de Lucía lo lleve a continuar con la construcción del conocimiento o nos permita definitivamente aceptar que posee concepciones dinámicas del infinito para este contexto. Las concepciones dinámicas o estáticas del infinito en esta situación, tal y como se plantean en la descomposición genética, pueden estar contenidas en las concepciones que el individuo tiene del concepto de límite.

Si el entrevistado luego de enfrentar la solución de Lucía continúa evidenciando concepciones dinámicas del infinito se le plantea la siguiente pregunta:

¿Es cierta la igualdad 0.999…=1?

Esta es una pregunta clásica que gracias a la formación matemática de los individuos de nuestra población muchos pueden aceptar como cierta e incluso plantear una demostración. Esto puede poner en conflicto su concepción dinámica evidenciada previamente ya que aceptar la igualdad implica un pensamiento actual.

Si el entrevistado da evidencias de haber construido la totalidad del proceso, se le plantean las siguientes preguntas:

¿En cuál iteración n Aquiles logra alcanzar a la tortuga?

> ¿A qué distancia del punto de partida de Aquiles, Aquiles logra alcanzar a la tortuga?

Estas preguntas permiten verificar la solidez de la concepción Totalidad. La segunda pregunta, además, prepara al individuo para la realización de las Acciones que debe aplicar sobre la Totalidad. Si la respuesta a la segunda pregunta se da usando fracciones se le presenta la siguiente situación:

> Suponga que se establece una meta a una distancia de $0.333\ldots$ kilómetro del punto de partida de Aquiles. ¿A qué distancia de la meta Aquiles alcanza a la tortuga (llame x a la distancia entre la meta y el punto en el que Aquiles alcanza a la tortuga)?

Si su respuesta se da usando decimales se le presenta la siguiente:

> Suponga que se establece una meta a una distancia de $\frac{1}{3}$ kilómetro del punto de partida de Aquiles. A qué distancia de la meta Aquiles alcanza a la tortuga (llame x a la distancia entre la meta y el punto en el que Aquiles alcanza a la tortuga).

Estas situaciones buscan que el individuo use la totalidad del proceso infinito para construir lo que puede ser una ecuación o expresión que surge como una relación entre el Proceso y su Totalidad, y que le permita determinar a qué distancia de la meta Aquiles alcanza a la tortuga. Hacer uso de la Totalidad de esta manera implica la realización de Acciones sobre dicha Totalidad ya que es una forma de transformarla para solucionar una situación relacionada. Si el individuo no puede plantear ninguna ecuación o expresión que le permita solucionar la situación, se le plantea de forma explícita la ecuación, para observar si puede, determinar que $x = 0$.

$$0.333\ldots + x = \frac{1}{3}$$

Para esto deberá aceptar que el proceso infinito que se encuentra en el número $0.333\ldots$ y su totalidad, en acto, son la misma cosa.

El desarrollo del instrumento en cada contexto es reflexivo entre sí y puede confrontar al entrevistado con sus respuestas anteriores. Incluso puede ocurrir que reflexione o use lo hecho en un contexto con lo que enfrenta en otro; esto nos dará información sobre cómo influyen los contextos a la hora de construir cognitivamente el infinito matemático.

El contexto 2 del instrumento tipo I está conformado por un problema clásico del cálculo de una variable y su extensión. Este contexto se presenta al estudiante con la intención de desenmarañar sus concepciones sobre procesos infinitos que se llevan a cabo sobre un intervalo real y su capacidad de realizar acciones sobre estos procesos totalizados.

Contexto 2. Problema de la pendiente de la recta tangente a una curva

> Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva f en el punto P (este es un problema muy conocido en cálculo de una variable, se denomina problema de la recta tangente). Suponga que f es continua en un intervalo que contiene a x (ver Figura 18).

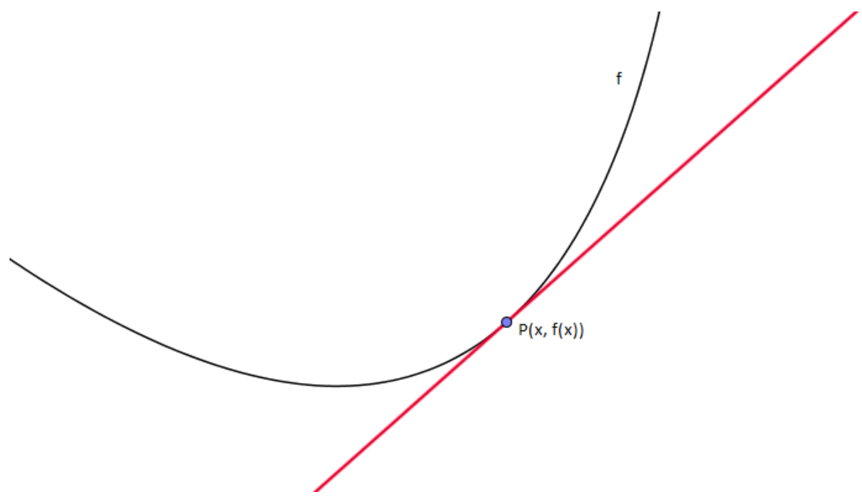


Figura 18. Representación gráfica, problema de la recta tangente, contexto 2, problema 1

Con este problema se busca que los individuos construyan un proceso infinito de rectas secantes (o pendientes de rectas secantes) para aproximar la pendiente de la recta tangente a la curva f en el punto P. Esta situación permite estudiar las estructuras Acción, Proceso y Totalidad. Si un individuo evidencia haber construido la Totalidad del Proceso mostrando concepciones estáticas del límite, entonces se le propondrá la siguiente situación con la que se espera que realice Acciones sobre dicha Totalidad.

Contexto 2: Extensión

En la siguiente construcción, determine la relación y si es posible la medida de los ángulos A, B, C y D en la situación límite cuando $Q \rightarrow P$. Las rectas g y h son paralelas entre sí y tangentes a la circunferencia τ (la recta h es tangente a τ en el punto P y Q es un punto cualquiera sobre la circunferencia τ) (ver Figura 19).

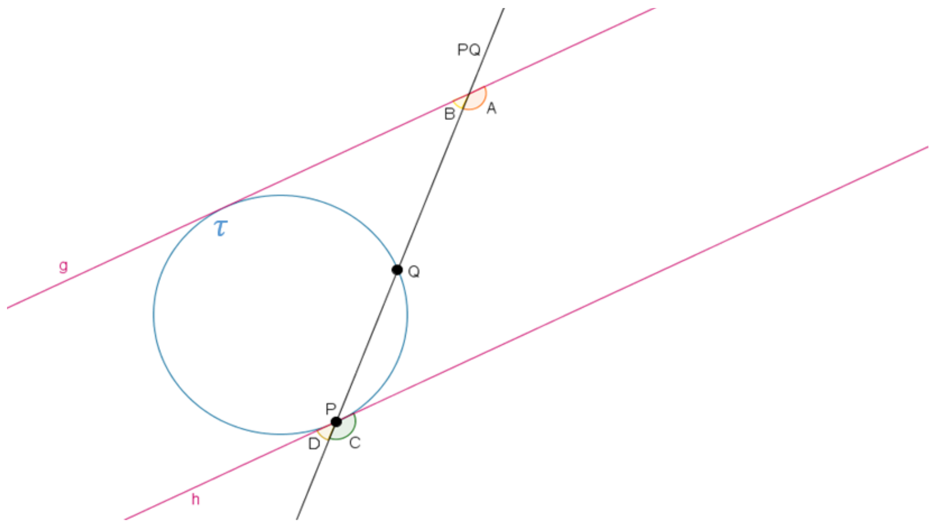


Figura 197. Representación gráfica, contexto 2, problema 2

Se espera que el individuo use la Totalidad que construyó en el problema 1 para dar solución a esta situación. Para esto, debe aceptar la trascendencia del Proceso asociado al acercamiento de Q a P analizando los procesos de generación de rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$ y de medida de los ángulos A, B, C y D solo en la situación límite cuando la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ se convierte en la recta h. El desarrollo de la entrevista depende de las respuestas y argumentos que ofrecen los entrevistados y por tanto no existe una estructura definida previamente de la misma.

A continuación, se ofrece un análisis del instrumento tipo II, con el cual se busca estudiar la construcción de distintas concepciones del infinito en un contexto de la teoría de conjuntos.

3.5.2. Instrumento tipo II

Este instrumento gira alrededor de un problema de unión infinita de conjuntos. Este problema permite la construcción de procesos iterativos infinitos a partir de acciones específicas que consisten en la unión finita de conjuntos finitos. Las posibles concepciones que pueden ser analizadas en la primera situación del instrumento van desde Acción hasta Totalidad.

Contexto 1: Unión infinita de conjuntos

> ¿Cuáles y cómo son los elementos generados por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$? P denota el "conjunto potencia" que es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado.

Algunos problemas pueden surgir a la hora de enfrentar este contexto: problemas con la notación de unión iterativa de conjuntos o con la idea de conjunto potencia de un conjunto dado. Si un individuo no puede realizar las primeras acciones se le plantean los siguientes ítems de apoyo:

Dados los conjuntos:

$A = \{-1,\ 3,\ 5\}$
$B = \{1,\ 5,\ 10,\ 11\}$
$C = \{-4,\ 3\}$

Encuentre:

a. $P(A)$

b. $A \cup B$

c. $B \cup C$

d. $\cup_{k=1}^{5} \{1,\ 2,\ \dots,\ k\}$

Con estos nos proponemos recordar a los entrevistados, cuestiones elementales de la teoría de conjuntos para que puedan realizar las primeras iteraciones que les permitan solucionar el contexto 1. Si el estudiante a pesar de afrontar estas situaciones no puede iniciar con la construcción del conjunto, se le ofrece una explicación sobre cómo se llevan a cabo las primeras iteraciones a través de la unión de conjuntos potencia.

Si el entrevistado logra construir la totalidad del conjunto podrá determinar que el conjunto tiene infinitos conjuntos finitos. Hemos preparado dos posibles tipos de Acción que se pueden llevar a cabo sobre dicha Totalidad. Las Acciones tipo 1 se pueden analizar en el siguiente ítem:

Determine el cardinal de los siguientes conjuntos:

a. $A = \{-3,\ 1,\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$

b. $B = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \text{j},\ \ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})\}$

c. $C = \{\mathbb{N},\ \ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})\}$

Estas Acciones requieren que el individuo vea el proceso de iteración sobre la unión infinita de conjuntos como una entidad en sí misma que puede formar parte de otros conjuntos dándole un estatus de "elemento". Si el individuo no logra determinar el número de elementos de los conjuntos se le propone el siguiente ítem con el cual se espera que reflexione sobre el concepto de cardinal para conjuntos finitos e infinitos.

Sean los conjuntos:

$A = \{1,\ 4,\ 6\}$

$B = \{2,\ 5,\ 9\}$

$C = A \cup B$

$D = \left\{B,\ 4,\ \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}\right\}$

$E = \left\{\{1,\ 4,\ 6\},\ \ 3,\ \ \mathbb{N}\right\}$

Determine:

a. El cardinal del conjunto C

b. El cardinal del conjunto D

c. El cardinal del conjunto E

Este ítem también permite analizar las posibles diferencias existentes entre las formas de denotar un conjunto cuando se pone a formar parte de otro. Por ejemplo, qué sucede si se hace referencia al conjunto de los números naturales como "$\mathbb{N}$" o como "$\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$".

Las acciones tipo 2 y 3 requieren que el individuo analice y compare las propiedades y características de dos conjuntos infinitos para determinar si son iguales o no:

1. Determine el cardinal de los siguientes conjuntos:

   a. $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$

b. $P(\mathbb{N})$

2. ¿Es cierta la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$?

El entrevistado debe pensar en el cardinal de los conjuntos $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$. Si logra determinar adecuadamente los cardinales de los conjuntos podrá darse cuenta de que no pueden ser iguales ya que no tienen el mismo número de elementos. Otro tipo de acción que permite solucionar la situación surge de volver al proceso dado por: $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$, determinando que existen conjuntos que están en $P(\mathbb{N})$ que no pueden ser generados por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$.

En el siguiente apartado planteamos el análisis de algunas evidencias empíricas recogidas en las distintas iteraciones del ciclo de investigación para los distintos contextos usados en nuestra investigación.

3.6. Análisis de evidencias empíricas de la paradoja de Aquiles y la tortuga

A continuación, se exponen algunas evidencias que validan la descomposición genética particular del contexto 1 en el primer instrumento: Paradoja de Aquiles y la tortuga. El análisis se desprende directamente del trabajo de los entrevistados cuando afrontan dicho contexto, sin embargo, pueden llegar a tomarse en cuenta las concepciones asociadas al concepto de número racional que han sido evidenciadas en las situaciones 1 y 2 (ver en la sección 3.5.1).

3.6.1. Concepciones primarias

Ana María: "¡él la alcanza rápido, la pasa!"

Ana María es profesora con varios años de experiencia en la enseñanza del cálculo y la estadística. Ella concluye que Aquiles debe alcanzar a la tortuga dado que él es más rápido, esto evidencia una concepción primaria estática del infinito. A pesar de que Ana María manifiesta que ya ha estado relacionada con la solución de la paradoja, sus argumentos matemáticos no giran en torno a la construcción de un proceso iterativo infinito, sino en la relación de velocidad entre Aquiles y la tortuga propuesta en la versión de la paradoja.

> Ana María: [Silencio prolongado] Sí la alcanza [Silencio prolongado]. ¿Cómo lo explico? [Risas] A ver… Si Aquiles recorre una cantidad, la tortuga recorre la décima parte de lo que recorre Aquiles. Supongamos que Aquiles recorre… Es que

¿cómo lo explico? ¡él la alcanza rápido, la pasa! A ver… ¿Cómo lo explico? ¿Se lo puedo decir verbalmente?

Ana María determina que si en un intento Aquiles recorre 10 km de distancia, la tortuga solo podrá recorrer la décima parte. Por tanto, concluye que Aquiles no solo logra alcanzar la tortuga, sino que, además, la sobrepasa. Su razonamiento está condicionado por los aspectos “reales” con los que cuenta la paradoja y no toma en cuenta los procesos explícitos en ella (ver Figura 20).

Ana María: Mire, supongamos que de aquí sale la tortuga [dibuja una semirrecta y divide un segmento en 10 partes, escribiendo $\frac{3}{10}$ en la tercera división], esa es la ventaja que le dio Aquiles. Ella está recorriendo una décima parte de lo que recorre Aquiles en cada intento, digámoslo así. Entonces digamos que yo voy a suponer que, en el intento, él recorre 10 km. Quiere decir que si la tortuga sale de aquí [señalando $\frac{3}{10}$] en ese intento ella va a llegar aquí [señalando el punto correspondiente a $\frac{4}{10}$ en la recta y escribiendo “tortuga”] pero Aquiles ya llegó acá [escribiendo 10 km y “Aquiles” en su recta] lo que quiere decir que ya la pasó [Risas]. Sí, ella [refiriéndose a la tortuga] recorre una distancia, pero con la velocidad que lleva Aquiles la sobrepasa, aunque ella siempre recorra una distancia, no van a estar siempre separados.

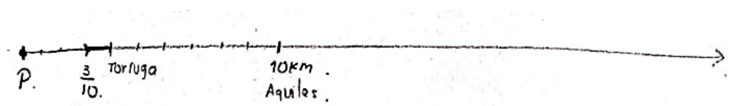


Figura 20. Entrevista de Ana María: distancia recorrida por Aquiles y la tortuga

Como Ana María no identifica los procesos inmersos en el contexto de la paradoja y las concepciones primarias que evidencia son de tipo estático, se le presenta la solución de Lucía como una interpretación dinámica de la situación. Con esto se espera poner en conflicto la solución estática que Ana María ofrece, haciendo que requiera de realizar las primeras Acciones para la construcción de un proceso iterativo infinito que atienda los procesos involucrados en la paradoja.

E: Ok. Bueno, tú dices que la alcanza, que la pasa, incluso. Vamos a analizar una solución que planteó una persona que se entrevistó, quiero que la revises. La conclusión, al final, luego de que esta persona hace este desarrollo matemático [señalando la hoja de Lucía], es que Aquiles no la alcanza. Si quieres échale una mirada a esto.

Ana María: [Lee en murmullos] Pero acá… [Silencio] ¿La tortuga? [Silencio prolongado]… Es que hay algo que no me cuadra en el análisis que ella hace [Silencio prolongado].

E: Dime ¿qué es?

Ana María: O sea como por qué van disminuyendo estas distancias o estas posiciones [señalando las distancias que separan a Aquiles de la tortuga en cada iteración].

La entrevistadora ofrece una explicación del proceso que construye Lucía a partir de lo que se plantea en el contexto de la paradoja. A diferencia de lo que se esperaba, Ana María rechaza el proceso iterativo infinito que se muestra en la solución de Lucía, pues considera que se plantea teniendo como hipótesis que Aquiles siempre se encuentra detrás de la tortuga, lo cual determina desde el comienzo que no podrá alcanzarla.

Ana María: O sea, bueno. Yo lo que veo aquí, que es diferente a mi planteamiento, es que ella siempre está analizando a Aquiles en función de la posición de la tortuga o de la distancia que recorre la tortuga, pero resulta que Aquiles [risas] corre más rápido que la tortuga. Allí es donde ella, pienso yo, llega a eso. Que sí, hay un momento en el que siempre va a haber esa distancia, por pequeña que sea, siempre va a haber esa distancia, pero porque no está mirando a Aquiles como el corredor que es… O sea, ella tiene en cuenta que él es 10 veces más rápido que la tortuga, pero siempre está mirando la posición de él en función de la posición de la tortuga. O sea, ella mira primero lo que recorre la tortuga y luego dice: “Aquiles debe quedar atrás” y así siempre va a quedar atrás. Pero si uno mirara a Aquiles y a la tortuga, independientes, diría yo, entonces uno se daría cuenta que Aquiles sale corriendo y la tortuga también y llega un punto en el que se van a alcanzar. El análisis de ella pone la posición de Aquiles como una función de la posición de la tortuga y de entrada el análisis ya está suponiendo que Aquiles va a estar siempre detrás.

Ana María considera que el planteamiento de Lucía es errado porque predetermina la posición de Aquiles haciendo que la tortuga esté siempre por delante de él; además, establece que, en la solución de Lucía, se obtiene la posición de Aquiles en referencia a la posición de la tortuga. La entrevistadora le pide a Ana María que revise el contexto nuevamente, sin embargo, ella considera que seguir el razonamiento planteado en la paradoja, lleva a una solución equivocada.

E: Si repasas la paradoja ¿cómo la están planteando?

Ana María: [Lee nuevamente la paradoja] O sea, eso es cierto. Pienso yo que ahí es donde está la paradoja. Si yo… ¿cómo lo digo?, si siempre veo a Aquiles como alguien que está detrás de la tortuga, independiente de la velocidad que tenga, porque no interesaría si yo digo que tiene una velocidad mayor que la tortuga, siempre lo voy a poner detrás de la tortuga que es como la idea del planteamiento que ella [Lucía] hace. Pero es que… Para mí no siempre tiene que estar detrás de la tortuga […].

E: Entonces ¿en qué piensas que falló del planteamiento de Lucía? ¿Crees que esta parte [señalando el planteamiento matemático de Lucía] está mal o ella atendió a lo que propone la paradoja?

Ana María: Pues yo lo que pienso es eso, que es poner a Aquiles siempre en una posición detrás de la tortuga. O sea, como que de entrada la hipótesis es esa y eso no va a cambiar: "Aquiles siempre va a estar detrás de la tortuga".

E: ¿Siempre?

Ana María: En la forma como plantea la solución, sí.

Consideramos que Ana María rechaza la solución de Lucía porque va en contra de la solución que conoce de la paradoja y de su experiencia con el mundo real, ella sabe que Aquiles debe alcanzar a la tortuga, porque él es más rápido, y considera que el planteamiento de un proceso iterativo la lleva a una solución contraria. Lo anterior puede evidenciar que Ana María posee concepciones dinámicas del límite de una sucesión: sobre este aspecto ahondaremos más adelante, en el apartado 3.6.3.

Edward: "si yo considero que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga, en algún momento la tiene que alcanzar"

Edward es estudiante de último semestre de maestría en Educación Matemática y ha dictado algunos cursos de cálculo diferencial a nivel universitario. Él inicialmente identifica los procesos inmersos en la paradoja determinando que la tortuga siempre estará un poco más delante de Aquiles. Sin embargo, al recordar la relación de velocidad, establece que Aquiles debe alcanzarla.

> Edward: Bueno $\frac{3}{10}$ es la ventaja que le dio Aquiles a la tortuga. Entonces, claro según como se plantee la situación yo diría que no, que no la va a alcanzar. Porque siempre, como dice el problema, cuando ya la tortuga llevaba $\frac{3}{10}$ de la distancia, entonces Aquiles partió. Cuando llegó ahí, la tortuga ya iba un poquito más adelante, no sé qué tanto, no sé si lo pueda sacar, y ya cuando la tortuga iba en ese momento y Aquiles llegó a ese, ya la tortuga iba un poquito más adelante. Siempre, siempre como que va a suceder eso. Pero si yo considero que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga, en algún momento la tiene que alcanzar [risas], entonces yo diría que sí la va a alcanzar [silencio prolongado]. No sé si lo pueda calcular.

Edward no construye un proceso iterativo infinito, pero puede identificar el proceso inmerso en el contexto de la paradoja, aunque es consciente de la naturaleza dinámica de este proceso, considera que Aquiles debe alcanzar a la tortuga porque es más rápido que ella. Este tipo de argumentos corresponden a concepciones primarias de tipo estático.

Ivón: "Si tomamos esta idea de aquí… Entonces no, no la alcanza"

Ivón es estudiante de último semestre de maestría en Matemática Educativa. Ella enfrenta la paradoja identificando los procesos inmersos en el contexto y concluye que, Aquiles no podrá alcanzar la tortuga.

> Ivón: [Lee en voz alta] [Silencio prolongado] Pues si tomamos la idea de aquí: "cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. En un nuevo intento, Aquiles va tras la tortuga, pero al llegar a donde ésta se encontraba, descubre que ya ha avanzado otro pequeño tramo". En este orden de ideas pues Aquiles no la va a alcanzar porque cada vez que él avance, ella ya ha avanzado ¿sí? Avanza, ella ya ha avanzado. Avanza, ella ya ha avanzado [haciendo el movimiento con sus manos]. O sea, nunca la va a alcanzar. Nunca la va a alcanzar. Entonces no, no la alcanza.

La visión netamente potencial de Ivón de los procesos que identifica en la paradoja evidencia una concepción primaria de tipo dinámico. Cuando la entrevistadora la anima a plantear un desarrollo matemático de la situación, con la intención de que inicie la construcción de procesos iterativos infinitos, Ivón utiliza la fórmula para el movimiento rectilíneo uniforme que relaciona la velocidad, el tiempo y la distancia, con la intención de determinar cuánto recorren Aquiles y la tortuga en un tiempo determinado (ver Figura 21).

Ivón: Bueno, pero y la velocidad de la… Ah, es 10 veces mayor. Bueno, supongamos que en un tiempo $t = 1\ s$. Bueno pongamos horas mejor, $t = 1\ h$. Entonces la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo. Bueno, voy a mirar a ver qué puedo hacer [risas]. Yo sé que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo, entonces voy a mirar para $t = 1\ h$, en dónde estaría la tortuga y dónde estaría Aquiles ¿sí? Bueno partiendo, la distancia cero sería $\frac{3}{10}$ de kilómetro, y ahí estaría la tortuga. Bueno, entonces vamos a ver, cuando pasa una hora ¿qué ha pasado con la distancia que recorre Aquiles y la distancia que recorre la tortuga? Voy a hacerlo.

E: ¿Cuánto recorre Aquiles y cuánto la tortuga?

Ivón: Sí es lo que voy a verificar. Bueno v_0 es la velocidad de la tortuga y la velocidad de Aquiles es $10v_0$. Entonces yo dije que para cuando $t = 1\ h$. Si es así, entonces $d = v_0$ y $d = 10v_0$. Aquí me da que la magnitud de la distancia es igual a la magnitud de la velocidad. Es que [risas] aquí pareciera que digo que la distancia es igual a la velocidad, pero no, solo hablo de la magnitud. Es que aquí [señalando $d = v_0$] me da esto porque $t = 1$. Y me da aquí que es 10 [señalando el $d = 10v_0$].

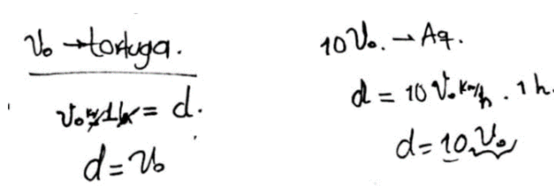


Figura 21. Entrevista de Ivón: relación entre velocidad, distancia y tiempo para Aquiles y la tortuga en $t = 1\ h$

E: Ambas distancias van a depender de la velocidad de la tortuga.

Ivón: Exacto, así es, de la velocidad de la tortuga. Pero como la velocidad de ella es… O sea, [risas] yo puedo decir que la velocidad de ella está entre 0 y 1. Entonces, por ejemplo, como es una tortuga su velocidad es muy mínima, yo diría que la velocidad está entre 0 y 1, y como yo estoy aquí multiplicando 10 por un número muy pequeño [refiriéndose a v_0], luego esto [señalando $10v_0$] va a ser más pequeño que v_0 [silencio prolongado]. ¿O sea que no la alcanza?

Para poder darle mayor desarrollo a su enfoque, Ivón establece que la velocidad de la tortuga debe estar entre 0 km/h y 1 km/h, este argumento está sustentado exclusivamente en las capacidades físicas que ella considera que tiene la tortuga. Además, considera erróneamente que al establecer que v_0 es un número en el intervalo $[0,1]$, $10v_0$ será menor que v_0. Creemos que esto puede surgir porque extiende un resultado que se cumple cuando se multiplica un número negativo x por una cantidad positiva $n > 1$, en este caso el número dado por nx es menor que x. Estas asunciones tampoco le permiten avanzar en su intento por comprobar que Aquiles no la alcanza.

> E: ¿Me repites tu argumento? ¿Dices que puedes establecer que la velocidad de la tortuga está entre 0 y 1?
>
> Ivón: Sí, la velocidad es muy pequeña, es un número… Sí, es muy pequeña comparada con la velocidad de Aquiles.
>
> E: Aquiles corre 10 veces más rápido.
>
> Ivón: Mmm, bueno, pero yo puedo decir que la velocidad de ella estaría entre 0 y 1. ¿Sí? O sea, 0.5 k/h y eso es mucho, mejor 0.1 k/h. Entonces, aquí estoy multiplicando 10 por un número entre 0 y 1, y ese producto me va a dar un número menor que v_0.
>
> E: ¿Menor que 10?
>
> Ivón: Sí, menor que 10, por supuesto, y menor que v_0 [silencio prolongado] Mmm, habría que establecerlo.
>
> E: Ya lo estableciste ¿no? Dijiste que era un número entre 0 y 1.
>
> Ivón: [Silencio prolongado].

El argumento que permite a Ivón establecer la velocidad de la tortuga no es matemático, está centrado en su propia percepción de las capacidades físicas que puede llegar a tener una tortuga, correspondiendo a concepciones de tipo primario. Luego de algunos momentos de reflexión, Ivón descarta su enfoque inicial debido a que no conoce un valor numérico para la velocidad de la tortuga que le permita determinar las distancias recorridas por Aquiles y la tortuga en $t = 1\ h$. La entrevistadora le plantea la sucesión usada en la solución de Lucía, con la intensión de motivar la realización de las primeras Acciones que la lleven a construir algún proceso iterativo infinito con el que pueda afrontar la paradoja, como veremos más adelante.

3.6.2. Evidencias de la estructura Acción

Edward: "O sea que la tortuga recorre lo contrario a 10 *veces que sería* $\frac{1}{10}$ *de lo que recorre Aquiles"*

Para motivar la construcción de los procesos iterativos la entrevistadora alienta a Edward a elaborar un tipo de argumentación matemática. En su intento, él busca establecer una relación entre las distancias totales recorridas por Aquiles y por la tortuga en cada iteración. A pesar de que sufre algunas dificultades, con la ayuda de la entrevistadora, se percata de que puede usar la relación de velocidades para establecer dichas distancias.

Edward: [Lee la paradoja nuevamente] Pues sí, yo digo que en el tiempo 0, Aquiles lleva cero de distancia y la tortuga ya lleva $\frac{3}{10}$ de distancia. No sé si pueda decir que en el tiempo 1, Aquiles va a llevar $\frac{3}{10}$ y la tortuga va a llevar $\frac{3}{10}$ más algo.

E: ¿Cuánto es ese algo?

Edward: [Silencio prolongado]

E: Recuerda que ese algo que recorre la tortuga lo hace en lo que Aquiles recorre $\frac{3}{10}$.

Edward: O sea que la tortuga recorre lo contrario a 10 veces que sería $\frac{1}{10}$ de lo que recorre Aquiles.

Al establecer esta relación entre la distancia recorrida por Aquiles y la distancia recorrida por la tortuga en cada iteración, puede llevar a cabo las primeras Acciones para determinar las distancias totales recorridas por Aquiles y la tortuga en cada intento (ver Figura 22).

Edward: Es decir… [Escribe en silencio]

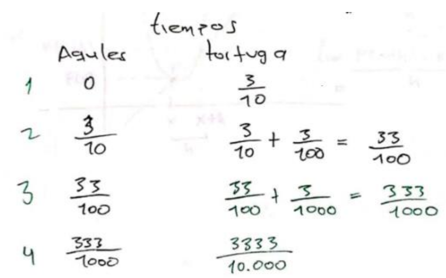


Figura 22. Entrevista de Edward: construcción de Acciones relacionadas con las distancias totales entre Aquiles y la tortuga

Como se muestra en la Figura 22, en la cuarta iteración Edward ya no necesita realizar la suma de la distancia total recorrida por la tortuga hasta la iteración anterior y de la nueva distancia recorrida. A pesar de que sus acciones están enfocadas en la construcción de la serie de distancias totales recorridas, se da cuenta de que la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en cada iteración se va haciendo más pequeña; la construcción de esta sucesión por parte de Edward será analizada en el siguiente apartado.

Ivón: "O sea, él recorrió $\frac{3}{10}$. Luego, ella recorre $\frac{3}{100}$"

Ivón evidencia concepciones primarias de tipo dinámico; después de analizar la sucesión propuesta por Lucía, decide iniciar con la aplicación de Acciones para determinar, por sus propios medios, la sucesión de distancias que separan a Aquiles de la tortuga en cada iteración (ver Figura 23).

Ivón: Sí. Bueno l_0 es $\frac{3}{10}$. Él avanza y llega a donde ella estaba [silencio]. ¿Acá seria $\frac{3}{100}$ la distancia? Espérame [silencio prolongado]. No se me ocurre nada [silencio].

E: Recuerda que él es 10 veces más rápido, eso quiere decir que en lo que él recorre una distancia, ella recorre la décima parte.

Ivón: La décima, sí [silencio]. O sea, él recorrió l_0, $\frac{3}{10}$. Luego, ella recorre $\frac{3}{100}$. [Risas] Entonces, sí, es que no estaba tan segura. Bueno, ahora si él recorre $\frac{3}{100}$, ella recorre $\frac{3}{1000}$, ¿sí? Sí. Y ahora, si él recorre esta distancia, o sea, $\frac{3}{1000}$, ella recorre $\frac{3}{10000}$.

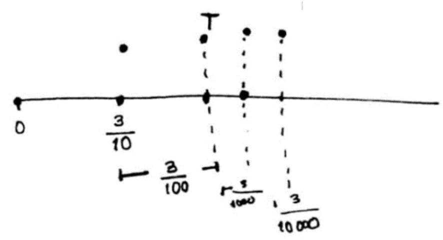


Figura 23. Entrevista de Ivón: construcción del proceso de distancias entre Aquiles y la Tortuga

Luego de determinar las distancias l_0, l_1, l_2, Ivón parece comprender la naturaleza convergente de la sucesión. Los detalles de su construcción de la estructura Proceso de infinito para este contexto serán expuestos en el siguiente apartado.

3.6.3. Evidencias de la estructura Proceso

Ana María: "Si asumo que él siempre va tras la tortuga no podrá alcanzarla en ninguna iteración"

Como se mostró en el apartado 3.6.1., Ana María conocía previamente la paradoja y sabía que Aquiles debe alcanzar a la tortuga. Sus concepciones dinámicas de la convergencia de una sucesión a un valor real hacen que rechace la construcción de un proceso iterativo infinito pues esto la llevaría a concluir que la posición de Aquiles siempre va a estar detrás de la posición de la tortuga, haciendo que Aquiles nunca llegue a alcanzarla. Sin embargo, a pesar de que no construye un proceso iterativo, es posible analizar su interpretación de la solución de Lucía y la forma en la que afronta las situaciones 1 y 2 del instrumento, evidenciando sus verdaderas concepciones del infinito para este contexto. La entrevistadora pide a Ana María que explique la interpretación que Lucía hace del límite en su solución.

Ana María: Para ella ese cero no representa el cero de que ya no haya distancia entre los dos, sino de una distancia que se hace cada vez más pequeña pero que en el análisis de ella significa que siempre va a haber algo más pequeño.

E: ¿Y en el tuyo? ¿Qué significa ese cero en ese límite?

Ana María: ¿En ese límite qué significaría para mí el cero? [silencio] Mmm, podría pensar que también tiene que ver con la idea de ella. Estaría de acuerdo con ella, que es una distancia que se hace cada vez más pequeña.

E: ¿Pero nunca llega a ser cero?

Ana María: No significando que llegue a ser cero.

Ana María evidencia concepciones dinámicas del límite, donde el límite es un proceso de acercamiento que nunca se llega a completar. En la solución de las situaciones 1 y 2, Ana María también había evidenciado concepciones dinámicas del proceso que sigue un número decimal infinito. Por ejemplo, a la hora de etiquetar puntos de la recta real con los números $0.999\ldots$ y 1, ella etiqueta puntos diferentes (ver Figura 24).

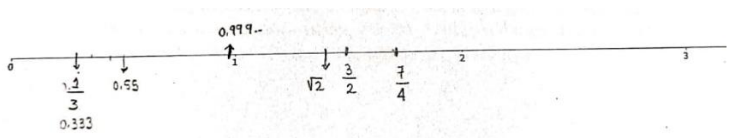


Figura 24. Entrevista de Ana María: solución situación 1

En la Figura 24, también puede verse que ubica los números $\frac{1}{3}$ y 0.333 en la misma posición. Con la intención de determinar sus concepciones sobre el proceso que siguen estos números racionales se le pide que determine si $0.333\ldots$ es igual a $\frac{1}{3}$ (ver Figura 25).

Ana María: [Silencio prolongado][Risas] O sea, si yo hiciera la división… [Escribe]

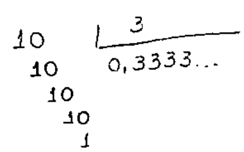


Figura 25. Entrevista de Ana María: estrategia para determinar la igualdad entre $\frac{1}{3}$ y $0.333\ldots$

¿Uno diría que es lo mismo? [Risas] pero es que no sé…

Ana María evidencia conflictos para aceptar la igualdad entre un número decimal infinito periódico y su correspondiente fracción. Con la intención de profundizar en su razonamiento, se le pregunta sobre la veracidad de la igualdad: $0.999\ldots = 1$ (ver Figura 26).

Ana María: [Lee en voz alta] Mmm… Uno lo puede demostrar.

E: ¿Que son iguales?

Ana María: Que son iguales, sí. Es como convertir a un decimal en fracción [Escribe].

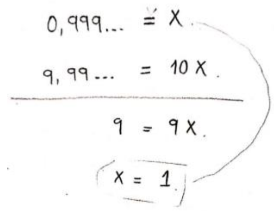


Figura 26. Entrevista de Ana María: demostración de la igualdad $0.999\ldots = 1$

Y ahora me vas a preguntar "¿Qué piensas?" [Risas].

A pesar de que Ana María conoce una demostración de la igualdad $0.999\ldots = 1$, ella rechaza esta demostración y hace una interpretación personal con la que evidencia sus concepciones, relacionando esta situación con el concepto de límite.

Ana María: Sí, sigo pensando lo mismo aun teniendo acá esta demostración o el hecho de que son iguales. Cuando uno analiza también el límite, puede suceder muchas veces que el límite sea 1 pero la función no esté definida en 1. Yo me aproximo a esa imagen tanto como puedo, sin embargo, esa imagen nunca será 1. Yo en el límite doy un valor numérico donde digo es 1, no digo es $0.999\ldots$, es 1. Pero con eso no estoy diciendo que sean lo mismo como en naturaleza como el elemento. No estoy diciendo que ese 1 sea el punto al que llega, sino que me estoy aproximando cada vez más.

Ana María ve el proceso de agregar "nueves" en la cifra decimal $0.999\ldots$ como un proceso de aproximación infinita que no termina y que realmente no llega a ser 1. Cuando se le pregunta si en la recta real este tipo de números llegan a ocupar la misma posición ella dice que no e incluso ofrece un ejemplo dado por los números $1.999\ldots$ y 2 de la situación 2 del instrumento (ver Figura 27).

E: Si yo ubico esos números en la recta numérica ¿no ocuparían la misma posición?

Ana María: Exactamente [escribe]

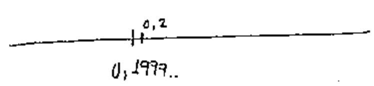


Figura 27. Entrevista de Ana María: los números $0.1999\ldots$ y 0.2 en la recta real

El $0.1999\ldots$ va a estar muy cerca, bueno aquí hay una distancia grande [señalando la distancia entre el $0.1999\ldots$ y el 0.2 en la recta que dibujó] pero siempre diría que puede existir esa distancia.

E: ¿Siempre existe esa distancia?

Ana María: Siempre.

Volviendo al contexto de la paradoja, cuando se pregunta a Ana María en qué iteración Aquiles logra alcanzar a la tortuga, ella responde:

Ana María: En ninguna. Si asumo que él siempre va tras la tortuga no podrá alcanzarla en ninguna iteración, estoy de acuerdo con Lucía en el análisis.

El análisis presentado evidencia una concepción Proceso de infinito en el contexto de la paradoja. Las concepciones dinámicas de Ana María son tan fuertes que incluso puede llegar a rechazar la demostración que ella misma propone. En la sección 3.7.3. se exponen las concepciones de Ana María asociadas a la construcción de un proceso infinito continuo en el contexto 2 del instrumento.

Edward: "$0.3; 0.03; 0.003; \ldots$ *Luego por allá, en cierto momento, será* 0.000003*, y eso tiende a cero"*

Edward estructura inicialmente cuatro iteraciones para determinar las distancias totales recorridas por Aquiles y la tortuga. Con base en esto establece que las distancias que separan a Aquiles de la tortuga van disminuyendo, siguiendo una sucesión cuya naturaleza ahora es evidente para él.

Edward: Sí, es que estoy dividiendo a 3 entre un número cada vez más grande. Este sería 0.3 [señalando a la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en el momento 0]. Este sería 0.03 [señalando la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en el momento 1]. Este sería 0.003 [señalando la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en el momento 3]. ¿Sí? Se va haciendo más pequeña, más pequeña esa fracción, $0.3; 0.03; 0.003; \ldots$ Luego por allá en cierto momento será 0.000003, y eso tiende a cero.

Lo anterior evidencia que Edward ha construido una concepción Proceso de infinito para este contexto. Su análisis de la paradoja dependerá de su capacidad de construir el Proceso asociado a las distancias que separan a Aquiles de la tortuga como un todo. La interpretación que Edward logre sobre la convergencia de la serie será determinante.

Edward: Las distancias que los separan son siempre $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}$, luego $\frac{3}{1000}$ y luego será $\frac{3}{10000}$, quizá. Se va haciendo cada vez más pequeña esa distancia, pero nunca va a ser cero… Aunque tiende a cero. Matemáticamente no sé si pueda decir que es cero esa distancia en algún momento. Pero según esto, siempre va a haber una distancia, así sea muy pequeña, entre Aquiles y la tortuga. Respondiendo a la pregunta diría que Aquiles no logra alcanzar a la tortuga [silencio prolongado].

Edward hace un análisis dinámico de la situación, establece que siempre habrá una distancia entre Aquiles y la tortuga, pequeña pero distinta de cero. Con base en este análisis concluye inicialmente que Aquiles no podrá alcanzarla. Esto sugiere una dificultad de aceptar que el proceso iterativo infinito al final es diferente a lo que se podía percibir durante su aplicación. El mecanismo que permite construir el Objeto trascendente debe permitirle a Edward aceptar que una vez que se lleve a cabo todo el proceso de acercamiento, la distancia entre Aquiles y la tortuga es cero. Edward continúa reflexionando alrededor de lo que significa la convergencia. En la siguiente sección se analizan sus conclusiones.

Ivón: "¡No, no la alcanza porque es que esa distancia siempre está ahí presente, por más pequeña que sea, está ahí!"

En la realización de cada una de las iteraciones para establecer las distancias que separan a Aquiles de la tortuga, Ivón establece que la sucesión permite determinar distancias que se hacen cada vez más pequeñas. Sin embargo, concluye que Aquiles no podrá alcanzar la tortuga porque siempre existirá una distancia que los separa; esto permite evidenciar una concepción dinámica del infinito para este contexto.

Ivón: O sea, no la alcanza.

E: Ahí van avanzando y ¿qué va sucediendo?

Ivón: Claro, se van achicando las distancias, pero llegarán momentos donde él, es como si no caminara, porque como son tan pequeñas es como si no avanzara, entonces no la va a alcanzar.

E: ¿No la alcanza?

Ivón: No, no la alcanza.

Aunque Ivón comprende la naturaleza convergente de la sucesión que construyó, mantiene una visión dinámica del proceso asociado a las distancias que en cada iteración separan a Aquiles de la tortuga. Para confrontar sus concepciones, se plantea la interpretación estática de la solución de Lucía.

E: Bueno, la conclusión a la que llegó Lucía fue que como las distancias entre ellos se hacían cada vez más pequeñas convergiendo a cero, esa convergencia, según ella, significa que Aquiles alcanza a la tortuga. ¿Qué opinas de eso?

Ivón: ¿Qué opino? Pues es que siempre va a haber una distancia así sea muy pequeña. Siempre la va a haber, siempre la va a haber, siempre la va a haber, entonces no la va a alcanzar. No es como si se parara encima, no sé. Siempre va a haber una distancia, siempre la va a haber… ¡No, no la alcanza porque es que esa distancia siempre está ahí presente, por más pequeña que sea, está ahí!

Ivón no estructura el proceso como una totalidad ni evidencia concepciones estáticas de la idea de convergencia de una sucesión; sabe que en cada iteración siempre existirá una distancia que separe a Aquiles de la tortuga, por pequeña que sea. Otro recurso que permite confrontar sus concepciones dinámicas es a través de la igualdad $0.999\ldots = 1$. Con esto se espera que su experiencia con conceptos como límite y convergencia se pongan en conflicto con sus argumentos y por tanto den paso a la evolución de su comprensión sobre el infinito.

E: Ok. Bueno a ver, miremos esta situación. Aquí te preguntan si es cierta o no, esta igualdad [señalando . $0.999\ldots = 1$].

Ivón: [Silencio prolongado] ¿Sí es cierta? A ver, ¿puedo hacer algo matemático para mirar?

E: Claro.

Ivón: Bueno entonces voy a decir que $x = 0.999\ldots$ [escribiendo] (ver Figura 28), listo. Ahora voy a restar... Bueno, voy a ver qué puedo hacer acá [silencio prolongado]. Voy a multiplicar por 10 y a restar las dos expresiones.

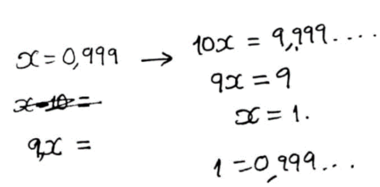


Figura 28. Entrevista de Ivón: demostración de la igualdad $0.999\ldots = 1$

Me quedó $1 = 0.999 \ldots$

E: Entonces ¿son iguales?

Ivón: Sí.

La entrevistadora confronta los razonamientos de Ivón, haciendo explicita la relación entre el número decimal infinito $0.999 \ldots$ y la sucesión de distancias. Sin embargo, Ivón rechaza la idea de la convergencia como un proceso que puede completarse.

E: Por ejemplo, si yo quiero saber cuánto recorrió la tortuga en total, debo sumar los términos de la sucesión de distancias, así sean infinitos.

Ivón: Ujum, sí, así es.

E: Y eso me va a dar un valor, de la misma forma que aquí te dio esto [señalando la igualdad $0.999 \ldots = 1$]. Te planteo esta situación para que confrontes lo que pensabas acá [señalando la sucesión] con lo que sabes de matemáticas, ya que hiciste una demostración de esa igualdad. Entonces ¿hay alguna diferencia entre estas situaciones?

Ivón: [Silencio prolongado] Yo creo que sí hay algo diferente porque aquí [señalando la sucesión de distancias] la distancia se está haciendo más pequeña, va a ser una distancia que converge a cero.

E: Y en $0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$ ¿hay alguna convergencia?

Ivón: Sí [risas] pues eso converge a 1 y… Esto [señalando la sucesión de distancias] lo puedo escribir como una suma. ¿O sea que yo podría decir que esa distancia es cero y la alcanza?

E: No sé, ¿qué piensas de esa idea de convergencia?

Ivón: ¡Es que eso pasa, pero en el infinito! ¡Cuando está en el infinito, eso es cero [señalando la sucesión], no antes! Igual aquí, $0.999 \ldots$ es igual a 1 pero en el infinito… Entonces, no, no la alcanza porque esa distancia siempre va a estar ahí, ahí, ahí.

A pesar de los diferentes momentos de conflicto, Ivón evidencia que sus concepciones dinámicas sobre el infinito son muy fuertes. Ella considera que siempre habrá una distancia entre Aquiles y la tortuga, aunque la sucesión converja a cero. Ivón estructura los estados al infinito como estados ideales que no pueden ser realmente alcanzados, esto puede estar fuertemente relacionado con las características reales de los elementos inmersos en el contexto, por ejemplo, usando como argumentos las capacidades físicas de la Tortuga o la imposibilidad de que Aquiles avance dado que las distancias que debe recorrer se hacen cada vez más pequeñas o que se requiere de un tiempo infinito para que Aquiles pueda alcanzar a la tortuga. Este último argumento está relacionado con la imposibilidad de Ivón de liberar al proceso de una idea de temporalidad.

3.6.4. Evidencia de la estructura Totalidad

Edward: "¡Eso va a ser cero, pues!"

Luego de ofrecer una solución dinámica que no le convence del todo, Edward continúa reflexionando sobre lo que significa la tendencia de la sucesión de distancias que separan a Aquiles de la tortuga.

> Edward: Eso tiende a cero, pero ¿yo puedo decir que en algún momento es cero? [Silencio prolongado] Yo lo estaba mirando como por el lado matemático, por el lado matemático siempre va a haber una distancia así sea muy pequeña. O sea, según lo que estaba haciendo. Pero si yo lo pienso… ¡Eso de algún modo se va a aproximar a cero! [silencio] ¡Eso va a ser cero, pues!

Edward empieza a estructurar un sentido estático del proceso que construyó. A pesar de sus dudas iniciales, comienza a convencerse de que la convergencia a cero de la sucesión implica que en algún momento no habrá distancia que separe a Aquiles de la tortuga. Edward establece una analogía entre una situación matemática que ya conoce y la sucesión.

> Edward: Entonces sí la va a alcanzar, sí la alcanza. Ahora se me viene a la mente cuando uno dice que $0.999\ldots$ es igual a 1. Entonces yo puedo decir que cero, punto, cero, cero, cero, y así en esas cifras decimales, es igual a cero. Pues, lo estoy haciendo como algo análogo. Entonces sí llega a ser cero y sí la va a alcanzar.

Para poner a prueba la solidez de la concepción estática que Edward parece evidenciar, la entrevistadora le pregunta en cuál iteración Aquiles logra alcanzar a la tortuga. Esta pregunta permite determinar si la concepción estática puede ser alcanzada porque ve el proceso como finito o si realmente ha construido un proceso infinito de tendencia.

> Edward: Estoy mirando a ver si puedo decir que hay un n [silencio]. Pero es que en cualquier n yo voy a tener más ceros. Por ejemplo, el 0.00003 ese es en el $n = 4$, pero eso

no es cero. Si lo tomo en el $n = 5$, es 0.000003 pero ese tampoco es cero. Si lo tomo en el $n = 7$, tampoco es cero, pero se está aproximando. Entonces me mantengo en que si n tiende a infinito, porque si n se hace muy grande, ese número de veces en que Aquiles recorre esa cierta distancia, la tortuga ha avanzado otro poco.

En la última aseveración Edward evidencia que no considera que n tome un valor finito sin importar qué tan grande sea; para estar totalmente seguros de que ha construido un proceso infinito de tendencia, la entrevistadora le pregunta:

E: ¿Cuándo estás diciendo que n tiende a infinito estás refiriéndote a que n es un valor muy grande, por ejemplo, un millón?

Edward: No sé si un millón porque ¿un millón es grande o no es grande? ¿Tres millones? Tres millones es más grande que un millón, pero con infinito me estoy refiriendo a que no voy a terminar, bueno aparentemente. Siempre voy a encontrar uno más grande y otro más grande y así… [Silencio] Entonces, pues no tanto como un número muy grande porque tendría que saber ¿qué es un número muy grande? ¿Según quién? Un millón para un niño puede ser un número muy grande, pero para otra persona puede que no. n tiende a infinito es como seguir haciendo ese proceso, que no voy a terminar, siempre puedo hacer otro, y otro, y otro más; siempre puedo encontrar uno siguiente hasta que yo pueda hallar ese valor de la distancia entre Aquiles y la tortuga.

Según Dubinsky et al. (2013) construir la Totalidad de un Proceso requiere de liberar el Proceso de la idea de temporalidad, esto es necesario para que el Proceso pueda llegar a pensarse como una transformación completa que se lleva a cabo en una única aplicación. Ver un proceso infinito a través de la aplicación de sus iteraciones, subordina el proceso al paso del tiempo. En este caso, si se quiere construir la Totalidad del Proceso asociado a las distancias entre Aquiles y la tortuga, se requiere dejar de pensar a través de las iteraciones, aceptando la convergencia de la sucesión como algo que puede ser realmente alcanzado. Lo anterior se evidencia en los razonamientos de Edward, como se muestra a continuación:

E: O sea que estableciendo los n no vas a terminar, pero la distancia [entre Aquiles y la tortuga] ¿sí se alcanza?

Edward: Sí, exactamente. La distancia entre ellos sí es cero. O sea, en algún momento sí puede ser cero, pero estableciendo paso a paso no lo terminaría porque siempre, como dije antes, voy a poder agregar otro cero y otro cero y otro cero. En cada paso yo voy a encontrar uno más. Entonces ¿en cuál iteración n? No puedo dar un valor fijo para el cual yo pueda decir que eso es cero, que es cuando Aquiles alcanza a la tortuga, pero sí la alcanza.

Edward ha podido superar diferentes momentos de conflicto evidenciando concepciones estáticas fuertes de un proceso iterativo infinito; específicamente logra construir la totalidad de dicho proceso para este contexto. En el siguiente apartado veremos si puede realizar la Acción propuesta sobre la totalidad construida.

Sandy: "En algún momento, la distancia entre ellos dos va a ser cero, o sea, la va a alcanzar"

Sandy es estudiante de último semestre de maestría en Educación Matemática y ha sido profesora universitaria con experiencia en cursos de cálculo diferencial e integral, así como de álgebra lineal. Ella ha evidenciado concepciones primarias de tipo estático al manifestar que Aquiles en algún momento debe alcanzar a la tortuga porque las distancias entre ellos se van haciendo más cortas. La entrevistadora busca confrontar sus concepciones estáticas al plantearle una visión potencial de la solución de Lucía.

E: Aquí te voy a proponer una solución que planteó una estudiante con un respaldo matemático. Si quieres puedes mirar y me dices qué opinas de esta solución. La solución a la que ella llega es que Aquiles no logra alcanzar la tortuga, entonces por favor revisa su planteamiento y me dices qué piensas.

Sandy: [Lee en voz alta] Ok sí, cuando Aquiles llega a acá, la tortuga ya va acá. Ajá, cada vez la distancia es más pequeñita. [Continúa leyendo en voz alta] [Silencio Prolongado]. ¿Y ella dice, con esto, que nunca la va a alcanzar?

E: Sí. Ella dice que como el límite de la sucesión de distancias es cero, Aquiles no va a alcanzar a la tortuga [interpretación dinámica del límite como un proceso que nunca se alcanza]. ¿Qué piensas de esto?

Sandy considera que la interpretación que Lucía hace del concepto de límite es equivocada y eso la lleva a una conclusión errónea. En estos momentos las concepciones estáticas de Sandy sobre el infinito prevalecen y lo hacen a través de una interpretación estática del proceso de convergencia de la sucesión de distancias.

> Sandy: Sí, pero yo creo que la conclusión que ella [Lucía] está sacando es errónea porque a lo que ella debe llegar es a que la distancia final va a ser cero.
>
> E: ¿Cuál es la distancia final?
>
> Sandy: Bueno, la l_n. Esa n… Yo digo que, en el infinito, la distancia es cero. En algún momento, la distancia entre ellos dos va a ser cero, o sea, la va a alcanzar en el infinito. Yo pienso que el hecho de que converja a cero, no quiere decir que no la alcance. Es que en algún momento [señalando la n] cuando llegue a infinito, no sabemos cuándo, por allá en el infinito, la va a alcanzar porque esa distancia va a ser cero.

Sandy rechaza la solución de Lucía usando argumentos estáticos de la idea de convergencia de una sucesión. Podemos notar que, para Sandy, el infinito es un estado que puede ser alcanzado lo que evidencia concepciones estáticas del infinito en este contexto. Cuando se le pregunta qué puede estar motivando los razonamientos de Lucía, Sandy ofrece una explicación considerando que Lucía no puede imaginar los procesos infinitos como acabados.

> Sandy: Lo que pasa es que de pronto, ella no ve que eso se pueda ver en la práctica porque tampoco se lo imagina en el infinito. O sea, ella no piensa que se pueda llegar en algún momento a alcanzar, como es en el infinito entonces no va a pasar nunca… Pero aquí en el límite, la distancia que hay entre ellos ¡es cero! Entonces, sí la va a alcanzar.

En relación con la pregunta ¿en cuál iteración n, Aquiles logra alcanzar a la tortuga? Sandy establece que para cualquier n finito siempre existirá una distancia entre Aquiles y la tortuga, por lo tanto n debe “ser infinito”. Lo anterior evidencia que Sandy ha construido concepciones estáticas de un proceso infinito.

> Sandy: O sea, cuando n es infinito, esto [señalando el límite] es cero. Si yo escojo una n finita pues yo voy a poder calcular ese valor que va a ser cero, coma, cero, cero, cero, …, algo. Si yo le doy un valor a n siempre voy a poder determinar un valor con una cierta cantidad de ceros y algo al final, un valor numérico. […] Entonces,

yo podría tomar otro valor que esté más cerca de cero y cada vez voy a encontrar uno que esté más cerca de cero y así.

E: ¿Entonces hay una n?

Sandy: No, siempre puedo establecer uno que esté más cerca, con más iteraciones, y voy a necesitar más y más. Entonces, en lo matemático no puedo dar una n.

E: ¿Aquiles alcanza a la tortuga?

Sandy: Sí, pero en una n finita, no.

Cuando se le pregunta a Sandy ¿a qué distancia del punto de partida de Aquiles, Aquiles logra alcanzar a la tortuga? Sandy construye una serie a partir de la sucesión l_n, propuesta en la solución de Lucía (ver Figura 29).

Sandy: Pues tendría que hacer la suma infinita, $0.3 + 0.03 + 0.003$ y así, eso es 0.333 ... [Escribe]:

$$0{,}3+0{,}03+\dots = 0{,}333\dots$$

Figura 29. Entrevista de Sandy: distancia total recorrida por Aquiles y la tortuga

E: Y ¿ahí la va a alcanzar?

Sandy: Sí.

Las concepciones de Sandy asociadas al infinito en el contexto particular de la paradoja de Aquiles y la tortuga quedan evidenciadas cuando supera con éxito los distintos momentos de conflicto. Estos conflictos diseñados a priori, muestran que Sandy logra estructurar procesos iterativos infinitos como Totalidades, evidenciando sus concepciones estáticas sobre el infinito en este contexto particular.

3.6.5. Evidencias de la estructura Objeto trascendente

Edward: "¡O sea que la alcanzó en la meta!"

Como se vio en el apartado anterior, Edward establece finalmente que Aquiles alcanza a la tortuga. Esto lo hace a través de la construcción de un proceso iterativo infinito de distancias que separan a Aquiles de la tortuga en cada iteración, posteriormente estructura dicho Proceso como una Totalidad con base en sus concepciones estáticas de número racional infinito periódico. Ahora debe determinar a qué distancia de una meta establecida a $\frac{1}{3}$ de kilómetro del punto de partida de Aquiles, Aquiles alcanza a la tortuga. Para poder solucionar esta pregunta, Edward debe determinar la distancia a la que Aquiles alcanza a la tortuga. Para esto busca una expresión matemática (una serie en este caso) que pueda ser analizada en el estado límite; sin embargo, tiene dificultades para encontrar la expresión general.

Edward: No puede ser ni este [señalando la distancia recorrida por la tortuga hasta $n = 3$], ni este [señalando la distancia recorrida por la tortuga hasta $n = 4$], ni el que sigue [silencio] (ver Figura 30). ¿El límite? Bueno, la expresión de abajo [refiriéndose al denominador en las distancias totales recorridas por la tortuga] me suena como un 10^n pero arriba no sé [silencio prolongado]. Como yo no sé el n, estoy tratando de encontrar esa expresión. El n no puede ser fijo según lo que ya dije, lo único que yo veo es un límite cuando n tiende a infinito, pero me falta saber el límite de qué, de algo sobre 10^n, creo yo. Es que no sé cómo expresarlo.

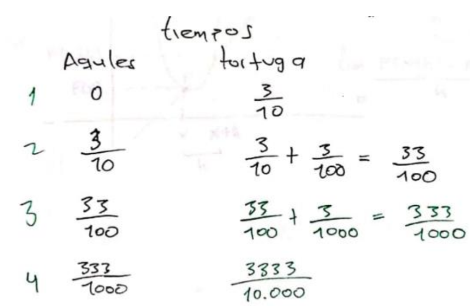


Figura 30. Entrevista de Edward: distancias totales entre Aquiles y la tortuga

Dada la dificultad de Edward para encontrar una expresión general, por sugerencia de la entrevistadora empieza a escribir en forma de decimal las distancias totales recorridas por la tortuga en cada iteración, determinando que Aquiles deberá alcanzarla en $0.333\ldots$ que es equivalente, para Edward, a $\frac{1}{3}$. Nuevamente sus concepciones estáticas sobre números decimales infinitos periódicos le ayudan a solucionar la situación.

Edward: Lo estaba pensando. Este es 0.3 [señalando la primera distancia], este es 0.33 [señalando la segunda distancia total], este 0.333 [señalando la tercera distancia total][silencio].

E: Puedes decirme sin calcular cuánto sería la quinta.

Edward: Sí, sería 0 y cinco veces 3. En el n sería 0 y n veces 3 [silencio prolongado]. ¡Eso es 1 dividido entre 3! [silencio prolongado]. Estaba recordando que 1 dividido entre 3 es 0.333 ... [silencio prolongado]… Si yo igualo esto sería $\frac{1}{3} - x = \frac{1}{3}$. ¡O sea que la alcanzó en la meta! [Silencio prolongado].

E: ¿Me estás diciendo que esto [señalando 0.3333] es igual a $\frac{1}{3}$?

Edward: Si yo sigo. Yo sé que $\frac{1}{3}$ es 0.333 ...

E: Ah, ok. Y ¿ahí fue donde la alcanzó?

Edward: Sí.

Las concepciones dinámicas y estáticas del infinito que evidencia Edward se ven reflejadas en su capacidad de construir un proceso iterativo infinito que le permite hallar la distancia en la que Aquiles alcanza a la tortuga. Además, dado que Edward ha estructurado que 0.333 ... es igual a $\frac{1}{3}$, puede reemplazar una expresión por otra en la ecuación y determinar el valor de x (distancia entre el punto de alcance de Aquiles y la tortuga y la meta) (ver Figura 31), llevando a cabo la acción propuesta sobre la totalidad de la serie de distancias totales; esto le permite establecer que Aquiles alcanza a la tortuga en la meta.

$$\frac{1}{3} - x = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Figura 31. Entrevista de Edward: ecuación para determinar la distancia entre el punto de alcance de Aquiles y la tortuga y la meta

A pesar de que Edward tuvo algunas dificultades en el planteamiento de las series y sucesiones relacionadas con la paradoja, sus concepciones sobre número decimal infinito y el concepto de límite, así como sus conocimientos matemáticos previos le permitieron desarrollar los mecanismos cognitivos asociados al tránsito a través de la progresión $A \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow O$ involucrada en el desarrollo de este contexto.

Sandy: "Si la meta es $\frac{1}{3}$ pues la va a alcanzar en la meta"

Sandy había evidenciado concepciones estáticas sobre el proceso que siguen los números decimales infinitos periódicos en las situaciones 1 y 2 del instrumento. Por ejemplo, etiquetó el mismo punto de la recta real con el par de números $0.999\ldots$ y 1, de la misma manera, con los números $0.333\ldots$ y $\frac{1}{3}$ (ver Figura 32). También afirmó que el número $0.3999\ldots$ es igual a 0.4 y el número $0.0999\ldots$ es igual a 0.1.

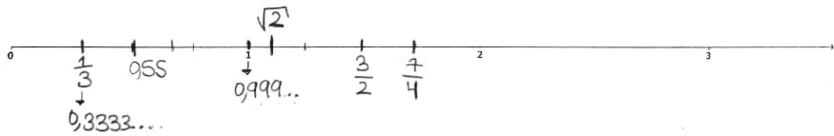


Figura 32. Entrevista de Sandy: solución de situación 1

Una vez Sandy establece que la distancia a la que Aquiles alcanza a la tortuga está a $0.333\ldots km$ del punto de partida de Aquiles, determinar que el punto de alcance se encontraba precisamente en la meta fue sencillo para ella (ver Figura 33).

> Sandy: [Lee en silencio] Si la meta está a $\frac{1}{3}$ pues la va a alcanzar en la meta. Pues porque…
>
> [escribiendo]

Figura 33. Entrevista de Sandy: relación entre la meta y el punto de alcance de Aquiles y la tortuga

> Entonces, la alcanza en la meta.

Las concepciones estáticas del Proceso asociado al número decimal infinito periódico dado por $0.333\ldots$, permiten que Sandy use de manera coherente la relación que conoce entre este número y el número $\frac{1}{3}$, para solucionar el problema.

3.7. Análisis de las evidencias empíricas del problema de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto

En este apartado se presentan algunas evidencias que se obtuvieron a través de la realización de cinco iteraciones del ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE en el contexto 2 del instrumento I. Estos datos son expuestos siguiendo la progresión $A \rightarrow P \rightarrow TOT \rightarrow O$, incluyendo una evidencia de concepción primaria para esta situación. Este análisis se ofrece como el fundamento empírico que ha permitido refinar la descomposición genética propuesta en este documento para este contexto particular.

3.7.1. Concepciones primarias

David: "Para calcular la pendiente de una recta necesito de dos puntos"

David es estudiante de tercer semestre de maestría en Educación Matemática; cuando se le plantea el problema 1, manifiesta que no puede resolver la situación dado que no se ofrecen los datos suficientes para hacerlo.

> David: [Silencio prolongado] Bueno, pero si necesito hallar la pendiente, necesitaría otro punto ¿no? [Silencio]. Sí, necesitaría otro punto. O… bueno, teniendo una gráfica milimetrada y decir que el cero pasa… Teniendo la abscisa y la ordenada pues uno calcularía el eje y tendría otro punto, pero en últimas necesitaría otro punto para hallar la pendiente.

Podemos ver que David no ha construido elementos matemáticos que le permitan abordar el problema sin necesidad de contar con otro punto sobre la recta tangente. Estos elementos están relacionados con la construcción de procesos de aproximación de rectas tangentes a partir de "sucesiones" de rectas secantes donde la recta tangente que se desea aproximar es la situación límite del proceso.

> E: ¿Entonces no se puede resolver el problema?

> David: Pues… Uno podría decir características de la pendiente, como que es positiva, pero calcularla… Necesitaría otro punto porque se puede… [Silencio] Es como por ejemplo… No, sí necesitaría otro punto o podría hacerlo por… [Silencio prolongado]. Pensaría en otro punto para solucionarlo.

Cuando David intenta encontrar un método de solución manifiesta que podría pensar en otro punto. Sin embargo, declara nuevamente que ese punto que le hace falta al problema para poder darle un tratamiento matemático debe estar sobre la recta tangente.

> E: ¿En qué punto podrías pensar?

> David: No. O sea… Necesitaría otro punto.

Vemos que a pesar de que David ha estado relacionado con técnicas del cálculo diferencial, gracias a su formación, no pudo proponer un método que le permitiera aproximar la pendiente de la recta tangente. Sin duda este resultado puede impactar el diseño del instrumento, haciendo que se tome en cuenta a individuos que, como David, carecen de herramientas para abordar el problema. Se puede pensar en ofrecer una gráfica que cuente con un punto explícito Q sobre f o con una primera recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$, buscando guiar al individuo en la realización de las primeras acciones encaminadas a construir un proceso continuo.

3.7.2. Evidencias de la estructura Acción

Como planteamos en la descomposición genética para este contexto, es altamente probable que individuos con avanzados conocimientos en matemáticas, no tengan la necesidad de realizar las Acciones que consisten en establecer iterativamente puntos Q sobre f cada vez más cercanos a P para construir los Procesos continuos necesarios para solucionar el problema 1. La formación matemática de la mayoría de entrevistados y su relación con este problema tradicional del cálculo diferencial, les permitió determinar un punto Q genérico sobre f cuyas coordenadas puede ser definidas a partir de las coordenadas del punto P; estas evidencias se exponen en el siguiente inciso.

Sin embargo, la construcción de Procesos continuos a partir de un pensamiento iterativo que hemos planteado teóricamente en la descomposición genética genérica queda evidenciada con las Acciones iterativas que los individuos entrevistados realizan a la hora de construir el proceso continuo, asociado al Proceso P_{123} en el problema 2 (ver apartado 3.7.5.).

3.7.3. Evidencias de la estructura Proceso

Ana María: "A través de la secante, aproximo la recta tangente"

Ana María afronta el problema de la recta tangente estableciendo un punto Q, cercano al punto P, de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y determinando la pendiente de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$; esto se asocia al Proceso P_{12} (ver Figura 34).

Ana María: Ujum… [Dibuja un punto cercano al punto P de coordenadas $(x_0, f(x_0))$].

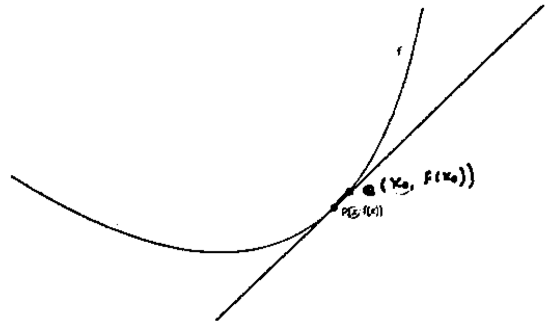


Figura 348. Construcción de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ por parte de Ana María

Entonces… La idea es que encontraría primero la pendiente de esta recta que es secante [señalando la recta que contiene a los puntos P y Q], entonces… Eh, la pendiente de la recta secante es igual… Entonces a qué va a ser… A [Escribe] (ver Figura 35):

$$m_{\sec \overline{PQ}} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Figura 35. Entrevista de Ana María: pendiente de la recta secante PQ

Ana María plantea que la clave para solucionar el problema está en que se debe hacer cada vez más pequeña la distancia entre los puntos P y Q, haciendo que surja la idea del límite (ver Figura 36).

La idea para llegar a la tangente es hacer la distancia del punto P y Q lo más pequeña posible, es decir cercana a cero, y esto se logra haciendo la distancia entre x_0 y x cercana a cero.

$x_0 - x \to 0$ pero $h = x_0 - x$ entonces $h \to 0$

Figura 36. Entrevista de Ana María: explicación sobre cómo llegar a la tangente a partir de los puntos P y Q

Ana María: De allí entonces yo diría que viene la idea de límite. Entonces ¿cuál es la idea del límite? Yo puedo decir que [escribe] (ver Figura 37):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m_{\text{Tangente}}$$

Figura 37. Entrevista de Ana María: pendiente de la recta tangente

Esa sería mi solución.

Ana María evidencia haber construido el Proceso P_{12} asociado a la generación de rectas secantes a partir del proceso de tendencia de Q a P. Además, busca aproximar la pendiente de la recta tangente a partir del límite de la función que genera pendientes de rectas secantes. En el contexto 1 (paradoja de Aquiles y la tortuga), Ana María había evidenciado concepciones débiles y contradictorias del concepto de límite. En algunos casos consideraba que el límite no se podía alcanzar y en otros, sí. Por tal motivo, la entrevistadora busca contrastar las concepciones que tiene sobre dicho concepto en los dos contextos y así generar momentos de conflicto o de reflexión.

> E: ¿Esa es la solución? Ok. Entonces ¿lo que quieres decir con la idea del límite acá [señalando el límite de la pendiente de la recta tangente] es que voy a aproximar la pendiente de la recta tangente? ¿Es una buena aproximación?
>
> Ana María: Ujum, a través de la secante aproximo a la recta tangente. Entonces, a partir de la pendiente de la recta secante pues voy a aproximar a la pendiente de la recta tangente.
>
> E: Sin embargo, lo que yo obtenga acá ¿es solo una aproximación? [Señalando el límite]
>
> Ana María: Es una aproximación… [Silencio].
>
> E: ¿No es exactamente la pendiente de la recta tangente?
>
> Ana María: No. Uno lo define en matemáticas y en cálculo como igual…

Debido a que el problema de la pendiente de la recta tangente es muy conocido en el cálculo de una variable, es de esperarse que un profesor de cálculo conozca su solución. Sin embargo, desentrañar las concepciones asociadas a los conceptos que relaciona el problema, puede llevarlo a momentos de conflicto donde estas concepciones pueden ir en contra de la teoría matemática que conoce. La idea contradictoria que Ana María había evidenciado en el contexto 1 (el límite es un proceso de acercamiento infinito que puede o no agotarse), en este contexto, va en contra de las matemáticas que aprendió en niveles superiores.

> Ana María: ¿En este contexto no sería igual? [Susurros] [Silencio]. Bueno allí viene esa idea de la derivada que la hace tan interesante [silencio]. Bueno ¿por qué es interesante allí la derivada? Porque es la idea de definir o de hacer con una operación, que aparentemente nada tiene que ver, llegar a un número y además que se relaciona con esa pendiente; es como lo sorprendente del proceso de la

derivada. Mmm… Sin embargo [silencio]… Ahí encuentra uno que probablemente me estoy enfrentando a una situación que no se me había ocurrido analizar y es el hecho de pensar que si lo que me da la derivada es exactamente el valor de la pendiente de la recta tangente o es una aproximación de ese valor. Me estás haciendo dudar de mis fundamentos de cálculo [risas]. Sí, pues en lo que a uno le enseñan es esa [refiriéndose a la pendiente de la recta tangente que encontró].

Algunos conflictos empiezan a generarse entre sus concepciones del concepto de límite y el concepto de derivada.

E: ¿Es esa? [refiriéndose a la pendiente de la recta tangente]

Ana María: Es esa sí. La derivada o bueno, este límite, sería la pendiente de la recta tangente [Risas]. No sé [silencio]. Nunca lo había pensado profundamente, sí podría decir que es ese valor, pues al final es un límite y como límite tendría que ser ese valor. No sé, estoy pensando muchas cosas y no sé cómo verbalizarlas. Déjame ver si ahora se me ocurre…

E: Listo.

Ana María: Pero sí me pones a pensar profundamente en cosas que de pronto siempre había asumido como que así eran y ya… Que así me dijeron que eran. No sé si quieras hacerme otra pregunta, a ver si eso me ayuda a verbalizar lo que estoy pensando [risas].

Cuando Ana María manifiesta que la pendiente de la recta tangente “al final es un límite y como límite tendría que dar ese valor”, la entrevistadora busca enfrentar esta concepción, que parece ser estática, con las concepciones con las que Ana María había enfrentado el contexto 1 y con la idea de que la pendiente solo sería una aproximación.

E: [Risas] Eh… En las situaciones que hemos estado trabajando hoy ha surgido el concepto de límite; a pesar de que explícitamente no se plantea en el problema, ha surgido. Y ha surgido también como una forma de interpretar el límite, una forma del desarrollo histórico del límite, cómo como docentes lo hemos estado enseñando y cómo lo entendemos de una forma más íntima. Entonces no sé si te ayude volver a mirar cómo interpretaste el límite en las situaciones anteriores y pues saber ¿cuál es la diferencia?

> ¿Por qué allá funciona de esta manera y aquí no tan así? Allá me decías [refiriéndose al contexto 1 de Aquiles y la tortuga], en la solución de Lucía que era cero porque…
>
> Ana María: Porque se acercaba…

La entrevistadora busca que Ana María explique si para ella en este contexto el límite funciona de forma diferente al contexto anterior.

> Ana María: Claro es lo que te estoy diciendo. En este momento es como si empezara a hacerme consciente de algo que he pensado pero que no era consciente de que lo pensaba así. Y es que a mí me enseñaron que esa aproximación era la tangente y la pendiente de la recta tangente era ese número, punto final. Nunca me di a la tarea de decir bueno ¿y esto qué significa para mí? Simplemente lo asumí. En este momento estoy como haciendo el ejercicio de pensarlo en función de lo que he hecho anteriormente y entonces me estoy dando cuenta que no sé si ese número es el número o al final es una aproximación que yo también estoy haciendo a la pendiente de la recta tangente. Es como en ese punto en el que estoy en ese momento y eso es lo que está pasando allá en mi cabeza.

Las concepciones dinámicas que Ana María evidencia del concepto de límite, contrastan con el conocimiento que ella adquirió en sus años de formación e impiden el desarrollo del mecanismo que le permita construir la totalidad del proceso infinito. Tal y como manifiesta Fischbein (1978) las intuiciones son sumamente persistentes sin importar la formación escolar. Las intuiciones dinámicas que tiene Ana María sobre el infinito hacen que cuestione su conocimiento matemático y se quede con lo que ella percibe como verdadero.

> Ana María: Si soy coherente con lo que he dicho anteriormente entonces esta pendiente es una aproximación a la pendiente de la recta tangente porque al final estoy haciendo un proceso de límite que es al infinito que es una aproximación cada vez más cercana, porque no lo estoy haciendo exactamente sobre el punto P. Eso diría yo en este momento.

Una concepción dinámica de límite impide que Ana María pueda construir TOT_{12}. Para ella el proceso de acercamiento del punto Q al punto P no termina y el límite no logra alcanzarse, por tanto, la expresión que obtiene es solo una buena aproximación a la pendiente de la recta tangente a la curva f en el punto P. Por lo anterior Ana María evidencia una concepción Proceso de infinito.

A continuación, veremos el caso de Miguel, quien da evidencias de ver la totalidad del Proceso P_{12} a pesar de que no estructura el Proceso P_1 como una Totalidad.

Miguel: "Una cantidad que no es cero, pero tampoco mayor que cero"

Miguel es maestro en Educación Matemática y profesor universitario con experiencia en la enseñanza de la geometría y el cálculo diferencial. Miguel evidencia una concepción Proceso de infinito para el contexto de este problema; inicia eligiendo un punto cualquiera sobre la curva al cual denota como Q, construye la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y determina la pendiente de dicha recta.

Miguel: [Lee el problema en voz alta] Ok. Si… Si yo tomo otro punto de la curva, lo voy a llamar Q. La distancia que… Llamemos a esta distancia a [distancia que separa a los puntos P y Q en el eje de las x] [Construye la recta que contiene los puntos P y Q] (Ver Figura 38).

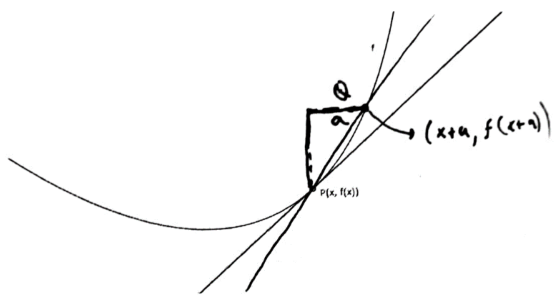


Figura 389. Entrevista de Miguel: construcción de la recta PQ

Entonces la pendiente de esta recta será esta longitud [señalando la distancia $f(x+a) - f(x)$] dividida en esta longitud [señalando la distancia a]. Esto sería… Este punto [señalando el punto Q] tiene coordenadas $(x+a, f(x+a))$, entonces aquí la pendiente de esto será (ver Figura 39):

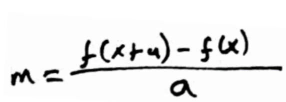


Figura 39. Entrevista de Miguel: pendiente de la recta secante

Miguel, al igual que Ana María, no realiza explícitamente las Acciones que consisten en ir dibujando iterativamente puntos Q cada vez más cercanos a P. Él sabe que si a se va haciendo más pequeña, esto implica que el punto Q se acerca más y más al punto P. Lo anterior evidencia que ha construido previamente el proceso que relaciona la sucesión generada por las pendientes de las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$. La concepción Proceso surge de la coordinación de otros procesos caracterizados por la tendencia de Q a P y por la generación de rectas secantes.

> Miguel: Y… Y si a se hace más pequeño entonces este punto [señalando a Q] se vuelve más cercano a P. Entonces esta recta [señalando la recta formada por los puntos P y Q] se parece más a esta [señalando la recta tangente a la curva f en P].

Con lo anterior Miguel evidencia una concepción Proceso de infinito. Muestra haber construido un Proceso continuo, a partir de rectas secantes generadas por un punto Q movible a lo largo de f. Estas rectas le permiten acercarse a la recta tangente tanto como desee.

3.7.4. Evidencias de la estructura Totalidad

Miguel: "cuando haya terminado de acercarme totalmente, serán la misma"

Miguel evidencia una concepción Proceso que lo lleva a plantear un proceso continuo de rectas secantes generadas por un punto Q movible a lo largo de f (Proceso P_{12}); estas rectas le permiten acercarse a la recta tangente tanto como quiera haciendo uso del concepto de límite. Veamos que puede ver este proceso como una totalidad:

> Miguel: Eh… Cuando haya terminado de acercarme totalmente, serán la misma [refiriéndose a la recta pendiente y a la recta secante]. Pero me voy a acercar al estilo de Aquiles, reflexionando [risas] para que no llegue a dejar de ser recta jamás. En el límite cuando $a \to 0$, $f(x+a)$ menos $f(x)$ sobre a, esta es la pendiente y la voy a llamar p, p minúscula [escribe] (ver Figura 40):

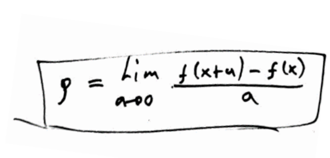


Figura 40. Entrevista de Miguel: pendiente de la recta tangente

Miguel evidencia que puede ver a P_{12} como un todo (construcción de TOT_{12}) al manifestar: "cuando haya terminado de acercarme totalmente, serán la misma". El instrumento toma en cuenta diferentes formas de poner a prueba la concepción que Miguel parece haber estructurado, por lo cual se le pregunta qué pasa cuando $a = 0$.

> E: Bueno mi pregunta más exactamente es: cuando a sea cero ¿Q estará sobre P?
>
> Miguel: Sí.
>
> E: Y entonces ahí se generaría un “inconveniente” con lo que escribiste.
>
> Miguel: Es que hay un detalle y es que decir que a tiende a cero no es lo mismo que decir que a es cero [silencio]. Sin embargo, no es una cantidad tampoco [silencio]… No es un número mayor que cero en ese momento porque si lo fuera hay distancias más pequeñas ahí.

Miguel manifiesta que a no puede ser igual a cero porque de serlo así la expresión que escribió, y que permite calcular la pendiente de la recta tangente, se indeterminaría. Pero además plantea que a tampoco puede ser una cantidad mayor que cero porque si así fuera siempre podría escoger un a más pequeño. Para saber si está asumiendo realmente al acercamiento de Q a P como un proceso infinito o si en cambio le atribuye características de un proceso finito, se le pregunta si a es el valor antes que cero.

> E: ¿No es el último… Antes?
>
> Miguel: No porque no hay último. Si hubiese uno entonces el punto medio entre esos dos está más cerca todavía, pero tampoco es cero porque en este caso el punto y el otro serían los mismos…

Podemos ver que el proceso que Miguel ha construido es infinito y que guarda la propiedad de densidad del conjunto de los reales. Ha lidiado con diversos momentos de conflicto que han buscado cuestionar sus concepciones sobre la generación de puntos Q sobre f (P_1) que se acercan al punto P tanto como se quiera, evidenciando poseer concepciones dinámicas de lo que significa que una variable tienda a un valor real ($a \to 0$). En este momento parece ser que para Miguel el proceso de tendencia carece de totalidad. Ahora queremos saber qué pasa con el proceso que genera rectas tangentes en el límite (P_{12}) y si puede ver su totalidad (TOT_{12}). Por tanto, se le pregunta si la expresión que encontró corresponde a la pendiente de la recta tangente o es una muy buena aproximación; a lo anterior responde:

Miguel: No, es exactamente la pendiente. Lo que pasa es que mientras a no sea cero, no será la pendiente. Sin embargo, cuando calculo el límite, a no es una cantidad mayor que cero, a la vez que no es cero. Es raro… [Silencio prolongado] Ummm… Realmente este número [señalando el límite] no va a existir cuando a sea cero, no es cero, pero tampoco es una cantidad mayor que cero.

Nuevamente Miguel entrega una respuesta que indica la construcción de TOT_{12}. A pesar de que determina la pendiente a partir del estado al límite de un proceso infinito, sabe que el valor del límite es exactamente la pendiente de la recta tangente a f en el punto P; esto evidencia que puede ver el proceso del límite de forma actual. Para Miguel, el límite puede ser alcanzado a pesar de que la tendencia de a a cero no implica que a sea cero "realmente". Vemos que Miguel posee una concepción Totalidad TOT_{12} aunque no ve a P_1 como totalizado. Creemos que las concepciones estáticas del límite que posee Miguel son un elemento importante que se relaciona con el mecanismo que le permite ver procesos infinitos como un todo. El proceso de tendencia de una variable a un valor real, aunque es un proceso necesario para la construcción del proceso del límite, puede no necesariamente estar totalizado. Sin embargo, esto puede generar concepciones conflictivas; en los casos en los que existen discontinuidades, la idea de totalizar estos Procesos, aunque sea en un sentido metafórico cuya única intención es facilitar la construcción de entidades cognitivas, puede ser obstaculizada por los problemas generados por la discontinuidad. Por ejemplo, en este caso, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ no está definida si se asume la distancia entre Q y P como cero.

Ahora necesitamos ver si Miguel puede realizar la acción que diseñamos para su aplicación sobre la totalidad del proceso continuo de generación de rectas secantes cuando $Q \to P$ (TOT_{12}). Como hemos mencionado anteriormente, la solución del problema de la pendiente de la recta tangente (problema 1) solo requiere de la capacidad de ver el proceso infinito del límite como una totalidad. En términos cognitivos, no es necesario realizar ninguna Acción sobre TOT_{12} para solucionar el problema y, por tanto, no podremos estar seguros si posee una concepción Objeto. Por tal motivo se diseñó una situación (problema 2) en la que el individuo tuviera que utilizar TOT_{12} (construida en el problema 1), adaptándola y usándola para solucionar una nueva situación.

Miguel supera diferentes momentos de conflicto permitiéndonos identificar la naturaleza de sus concepciones. Ha evidenciado una concepción Totalidad de un Proceso asociado a la idea de acercamiento infinito que supone el límite (TOT_{12}); esto le permite determinar que la pendiente de la recta tangente es un estado al límite de un proceso continuo e infinito que genera rectas secantes. Posteriormente, se plantea a Miguel el problema 2 del contexto 2, en donde se quiere ver si puede realizar una Acción específica sobre TOT_{12}.

> Miguel: Entonces, el punto… A medida que Q se acerca, este ángulo decrece [señalando el ángulo D] y entre más cerca esté de P más cerca a cero estará este [señalando el ángulo D]. Entonces, en efecto, cuando Q esté en P, cuando tienda a P, que no es que esté en P, D tiende a cero. Entonces [concluye escribiendo] (ver Figura 41):

Figura 41. Entrevista de Miguel: comportamiento del ángulo D cuando $Q \to P$

En el fragmento presentado, puede verse que a pesar de que en el problema 1 Miguel había concluido que en la situación al límite cuando $Q \to P$, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ sería la recta tangente (TOT_{12}), ahora de alguna manera ignora la trascendencia de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ en el estado al límite. La entrevistadora pregunta de forma explícita si la medida del ángulo D tiende a ser cero o es cero, a lo que Miguel responde:

> Miguel: Tiende… Bueno, vuelvo al dilema de ahorita. Esto es una cantidad infinitamente… Digamos la distancia que hay entre Q y P es una cantidad infinitamente pequeña y ésta también [señalando D]. Podríamos filosofar sobre si es cero o no es cero, lo que sí sé es que no es una cantidad mayor que cero, no es una cantidad finita que pueda dividir, es indivisible. Al poderla dividir estoy diciendo que puedo estar más cerca… Entonces [termina de escribir] (ver Figura 42):

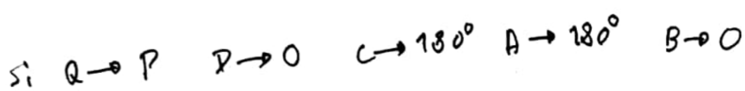


Figura 42. Entrevista de Miguel: comportamiento de los ángulos cuando $Q \to P$

Aunque el problema pide determinar la medida de los ángulos en la situación al límite cuando $Q \to P$, el proceso dado por los ángulos se define gracias al proceso que genera rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$. Podemos ver que Miguel parece coordinar el Proceso P_1 relacionado con la tendencia de Q a P con el Proceso P_3 que se asocia a la medida de los ángulos, pero no coordina el proceso de generación de rectas secantes P_2 con los otros procesos, al parecer ni siquiera lo toma en cuenta. De esta manera, sin pensar en las rectas secantes, define la naturaleza de un nuevo Proceso P_{13} asociado a la medida de los ángulos cuando $Q \to P$. Este Proceso parece heredar la naturaleza dinámica del proceso dado por $Q \to P$; recordemos que para Miguel la distancia entre Q y P en el estado límite, no es cero ni mayor que cero, es una cantidad que tiende a cero y por tanto está relacionado con un pensamiento netamente potencial, ya que trae una idea de acercamiento infinito e inacabado de una variable que tiende a un valor real. A continuación, la entrevistadora solicita a Miguel que explique su solución.

> Miguel: Ehhh… Este ángulo B es congruente con este ángulo acá [señalando el ángulo opuesto al ángulo D] y estos dos [señalando el ángulo D y su opuesto] son opuestos por el vértice y por lo tanto B y D son congruentes. El ángulo A y el ángulo C son correspondientes porque estas rectas son paralelas [señalando las rectas g y h] y por lo tanto puedo decir que [escribe] (ver Figura 43):

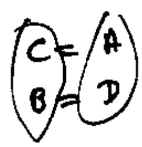


Figura 43. Entrevista de Miguel: relación entre los ángulos

> Entonces con estos dos [resaltando a los ángulos C y B] puedo encontrar la magnitud de estos dos [resaltando a los ángulos A y D]. Y haciendo que Q se acerque… Que tienda a P, que no es lo mismo decir que se acerque, D tiende a cero y C tiende a ciento ochenta. Esa es una forma, la otra forma es imaginar esta recta [señalando la recta PQ] que va cortando cada vez más allá [señalando con su dedo los puntos sobre la recta g a la derecha de la hoja]; entonces este ángulo [señalando el ángulo C] va a ser $180°$ y este [señalando el ángulo D] va a ser $0°$. Quedarían paralelas.

Recordemos que una solución adecuada para este problema puede corresponder a la coordinación de tres procesos distintos: P_1 asociado a la elección de puntos Q, P_2 asociado a la construcción de rectas secantes a una curva y P_3 relacionado con las medidas de los ángulos A, B, C y D, en un Proceso único (P_{123}) y su Totalidad (TOT_{123}). Estos Procesos se relacionan de una manera particular: P_{12} surge de la implicación de los elementos de P_1 sobre los elementos de P_2, y P_{123} se define gracias a P_{12}. Como hemos mencionado los elementos de los tres Procesos se coordinan así:

“una posición dada para el punto $Q \Longrightarrow$ una única recta secante $\overleftrightarrow{PQ} \Rightarrow$ unas medidas particulares para los ángulos A, B, C y D”.

Miguel ofrece dos posibles soluciones contradictorias al problema. En la primera (solución dinámica) explica su postura inicial en la que no toma en cuenta el proceso de generación de rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ que se da cuando Q tiende a P (asociado a P_{12}). De alguna manera piensa en los ángulos sin pensar en las rectas que los definen, ni en lo que pasa con esas rectas en la situación límite. Aquí nuevamente consideramos que Miguel coordina a P_1 con un Proceso P_3, sin usar P_{12}. Para Miguel, el proceso de acercamiento de Q a P no se completa, es un proceso dinámico; el punto Q jamás llegará a estar sobre P y esto hace que el proceso de los ángulos (P_{13}) se convierta también en un proceso netamente dinámico que tampoco llega a completarse.

En la segunda (solución estática), toma en cuenta el proceso de generación de rectas secantes, pero no lo relaciona explícitamente con el proceso de acercamiento de Q a P (por lo cual no llega al Proceso P_{12}) sino con un proceso dado por el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ con la recta g y cómo este punto se extiende infinitamente a lo largo de g. De la solución del problema 1, él sabe que el proceso de rectas secantes trasciende convirtiéndose en la recta tangente gracias al límite y, por tanto, lo mismo ocurrirá con la medida de los ángulos (solución 2). Creemos que esta solución estática solo es posible porque deja de lado el proceso de acercamiento de Q a P (Proceso P_1).

> E: ¿O sea que la secante llega a ser tangente, pero a (distancia entre Q y P) no llega a ser cero?
>
> Miguel: Eh… Sí. La secante sería tangente cuando a tiende a cero. Es decir, cuando a sea ese número que no es cero pero que tampoco es una cantidad finita, digamos. Es una cantidad infinitamente pequeña (risas).

Estas dos soluciones corresponden cognitivamente a dos coordinaciones separadas de los tres Procesos que debía coordinar. La primera coordinación genera un proceso netamente dinámico de tendencia de los ángulos a un valor real y la segunda, genera un proceso que logra totalizar pero que no surge como una implicación de la Totalidad del problema 1. A pesar de que en esta solución llega a la respuesta, vemos que ignora el proceso de acercamiento de $Q \rightarrow P$ (P_1), proceso que define los demás procesos vinculados en el problema y que al ser tomado en cuenta le genera un pensamiento contradictorio. Para ayudarlo a continuar con el desarrollo de las estructuras la entrevistadora le pregunta sobre su solución del problema 1, buscando que relacione TOT_{12} con la nueva situación:

> E: Creo que íbamos en que yo te preguntaba que en el límite me habías dicho que ese límite no era una buena aproximación, sino que era la pendiente…
>
> Miguel: Es la pendiente.

Con su respuesta Miguel evidencia que realmente cuenta con la estructura Totalidad que construyó en el problema 1; la entrevistadora busca que relacione dicha Totalidad con el nuevo problema:

> E: Y te lo dije también porque cuando uno enseña cálculo y aprende cálculo uno dice: "el límite cuando a tiende a cero es…" y no "tiende". Y acá es una situación que digamos…
>
> Miguel: No, es que una cosa es el número que resulta de esto [señalando la pendiente de la recta secante del ítem (i)] y otra cosa es… Eh… El hacer un proceso.

Miguel defiende su solución dinámica al problema 2 porque parece entender que el proceso de los ángulos está relacionado exclusivamente con el proceso de acercamiento de Q a P, sin percatarse que el proceso de ángulos está definido gracias al proceso de las rectas secantes cuyo límite cuando Q tiende a P, es la recta tangente. Plantea una distinción explícita entre lo que para él significa el límite de una función y lo que es el proceso de acercamiento de una variable a un valor real.

Los Procesos que surgen de la coordinación de P_1 con P_3 y de P_2 con P_3, por separado, generan dos soluciones contradictorias e inconsistentes. P_1 no es un Proceso que por sí solo haya sido totalizado; el Proceso que ha sido totalizado es el que se asocia al proceso que involucra la idea de límite, es decir el Proceso P_{12}. Esto hace que Miguel proponga una solución dinámica a la situación, haciendo que vea el movimiento de los ángulos como un proceso que no se completa. Por otro lado, el proceso de generación de rectas secantes que Miguel está usando no toma en cuenta de forma explícita el proceso de acercamiento de Q a P (proceso que permite definir todos los procesos que se llevan a cabo en los dos problemas del contexto 2) sino que elige pensar en el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ y g. Esto nuevamente nos hace creer que la naturaleza de proceso de tendencia de Q a P le resulta problemática. El dinamismo asociado a P_1, lo lleva a proponer dos soluciones alternas y contradictorias de una misma situación, coexistiendo sin que esto le genere algún tipo de ruido. Es por esto, que consideramos que Miguel no puede solucionar satisfactoriamente el problema 2 del instrumento, ya que no logra pensar totalmente en términos actuales y, por tanto, no puede realizar la acción propuesta para que actúe sobre T_{12}. Podemos concluir que no ha construido el Objeto que surge de este Proceso y, por tanto, tiene una concepción Totalidad de infinito para este contexto.

3.7.5. Evidencias de la estructura Objeto trascendente

Miguel: "Sí, parece que el proceso tiene una naturaleza distinta a su final, a su última instancia"

Miguel fue entrevistado nuevamente un año y medio después de la realización de la primera entrevista. En esta ocasión buscamos enfrentar a Miguel una vez más con el problema 2 del contexto 2 del instrumento y con los argumentos que expuso durante la realización de la primera entrevista. Con esto esperábamos llegar a caracterizar con más detalle los elementos relacionados con la construcción de las estructuras Totalidad y/o Objeto de infinito asociadas a este contexto.

Se le muestra a Miguel el problema 2 y posteriormente la solución estática que él ofreció en la primera entrevista.

E: Esto fue lo que dijiste en aquel momento. ¿Qué opinas de la respuesta que diste? (mostrando el fragmento de transcripción con la solución estática)

Miguel: (Lee la transcripción) Eh… Eh… Que sigo con la misma idea.

A pesar de que manifiesta seguir con la misma idea, cuando la entrevistadora le pide que explique su respuesta, él cambia su argumento hacia la respuesta de tipo potencial, evidenciando nuevamente un conflicto.

E: Sigues con la misma idea… ¿Me puedes explicar lo que querías decir en ese momento?

Miguel: Que cuando $Q \to P$, por la derecha en este caso, el ángulo $C \to 180^{\circ}$ y el ángulo $D \to 0^{\circ}$. Eso es lo que entiendo que dije en ese momento.

Al darle una nueva mirada al problema, Miguel parece centrar su atención en el Proceso P_1 asociado a la tendencia de Q a P (Proceso que en la primera entrevista no había totalizado) y esto lo lleva de vuelta a la solución dinámica, a pesar de que el punto de partida establecido para la segunda entrevista fue la solución estática. Cuando la entrevistadora le cuestiona si lo que aparece en el fragmento se corresponde con la explicación que está ofreciendo, sus argumentos buscan relacionar las dos soluciones llevándolo a través de distintos momentos de conflicto. Estos momentos de conflicto son generados tanto por sus concepciones dinámicas como por sus concepciones estáticas del infinito, llevándole a plantear respuestas contradictorias. En algunas ocasiones propone soluciones estáticas como la siguiente:

> Miguel: El detalle está en que, geométricamente, cuando yo termino todo el proceso Q estaría en P y la recta deja, deja de existir… Pero yo puedo pensar que cuando Q tiende a P, es decir cuando el punto de intersección (de las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ y g) tiende al infinito, las rectas quedan paralelas y los ángulos acá, 0° y 180° respectivamente.
>
> E: ¿Y el ángulo A qué valor tendría?
>
> Miguel: 180°, también.

Y en otras ocasiones plantea soluciones dinámicas:

> E: Y en este caso (refiriéndose al proceso límite cuando $Q \to P$) ¿qué pasa con los ángulos D y C?
>
> Miguel: D tiende a cero, y C a 180, así es… Porque… (silencio prolongado)

Notemos que en la respuesta dinámica Miguel evidencia que puede pensar actualmente el Proceso P_1 asociado a $Q \to P$ pero descarta que este proceso se complete ya que esto ocasiona que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ desaparezca. Además, aunque Miguel busca coordinar el Proceso de tendencia de Q a P, el Proceso dado por el punto de intersección entre las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ y g (relacionado con el Proceso de las rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$) y el Proceso dado por las medidas de los ángulos A, B, C y $D,$ lo cierto es que los múltiples momentos de conflicto surgen dependiendo del Proceso sobre el cual Miguel centre su mirada. Si por ejemplo inicia pensando en el proceso de tendencia de Q a P, la solución planteada termina siendo del tipo dinámico. En contraste, si centra su atención en el proceso dado por el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y la recta g, su solución termina siendo estática. Esto es una evidencia de que no coordina los procesos anteriormente descritos. La entrevistadora busca motivar la coordinación de estos Procesos mostrándole que cuando su respuesta es de tipo dinámico, él no toma en cuenta el proceso que siguen las rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$.

> E: Pero mira que la recta no aparecía como un argumento acá (señalando la solución dinámica).

Miguel: Es porque fijaba la atención en otro objeto, pero si yo hiciera la analogía aquí, imaginar la recta que se va cortando más allá es imaginar el punto Q tendiendo al punto P. Y cuando ese proceso termine, lo que estoy diciendo es que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ va a ser paralela a la recta h, esa es la idea que está acá más o menos (señalando la solución estática), el ángulo es 0°(señalando al ángulo D) y el otro es 180°(refiriéndose al ángulo C), si ya el corte va a infinito.

E: Pero esto que está pasando acá ¿también está pasando cuando $Q \to P$?

Miguel: Sí exacto. Si me imagino cuando Q ya está en P, es decir cuando el proceso terminó, el ángulo va a ser 0° y el otro 180°. Pero hay un problema geométrico ahí que es que cuando Q está en P, ya la recta no existe o no estaría definida porque los dos puntos coincidirían… Pero mientras el punto Q no sea P, todo funciona bien. Pero en el límite cuando $Q \to P$, no estoy diciendo que Q sea exactamente P sino que la distancia entre Q y P es infinitamente pequeña.

Podemos ver que Miguel puede coordinar los Procesos asociados a la tendencia de los puntos, a las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ y a las medidas de los ángulos, cuando plantea: "imaginar la recta que se va cortando más allá es imaginar el punto Q tendiendo al punto P". Además, puede pensar procesos infinitos como totalidades al expresar: "cuando ese proceso termine, lo que estoy diciendo es que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ va a ser paralela a la recta h". Sin embargo, en su último comentario evidencia el origen del pensamiento dinámico que lo ha mantenido en conflicto. Miguel quiere evitar que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ deje de estar definida, sabe que el proceso de tendencia de Q a P, si llega a completarse, genera este inconveniente geométrico. Miguel evidencia una serie de reparos que tiene a la forma como se comportan los procesos infinitos tanto geométricos como algebraicos en su estado actual.

Miguel: Para efectos de cálculo me lo imagino en potencia porque no es posible hacer los cálculos cuando el proceso termina (silencio prolongado). Es que con cero (distancia entre P y Q), no es posible hacer los cálculos.

Cuando la entrevistadora le cuestiona sobre los tipos de dudas que le generan las instancias que surgen del infinito y cómo afecta esto la solución del problema, él manifiesta:

Miguel: Estaba dudando de que fuera cero o no (la distancia entre P y Q) y todavía lo dudo porque no sé explicar el hecho de que para efectos de los cálculos no es cero y a la vez es cero, y tanto para efecto de los cálculos como para efecto del análisis. Si yo me voy a lo geométrico, imaginar el punto Q sobre el punto P hace que haya problemas para concebir la recta y para concebir los puntos de corte. Si es distinto de cero puedo imaginar los cortes, los ángulos, puedo imaginar un acercamiento hacia el punto P e ir imaginado los valores de los ángulos progresivamente, pero si me lo imagino ya terminado, pues ya sé que el punto Q estaría en P y los ángulos serían 180° y 0°, independientemente si puedo concebirlos en ese momento o no.

Vemos que en la parte final del fragmento Miguel parece haber totalizado el proceso de tendencia de Q a P a la vez que plantea una única solución en términos estáticos. Aunque parece no sentirse totalmente cómodo, puede imaginar el estado actual de los ángulos y sus medidas al final del proceso límite. La incomodidad de Miguel a la hora de resolver el problema surge porque espera que las propiedades que tiene el proceso se mantengan en el infinito.

Miguel: Aquí la distancia entre Q y P tiende a cero, entonces no puedo concebir esto sin haber pensado antes en que fue distinta de cero porque siempre fue distinta de cero, excepto cuando terminó.

E: O sea que, si pensamos de alguna manera, acá en el proceso se cumplen unas propiedades que acá en el acto…

Miguel: Pareciera que no, pero están ahí.

Luego de reflexionar sobre algunas propiedades que puede identificar en el proceso y que al parecer no se cumplen en el infinito actual como por ejemplo la definición de los ángulos A y B, concluye:

Miguel: Sí, ahí ya se pierde. Es que no puedo pensar en la intersección en el infinito sin imaginarme antes una cantidad real muy grande y cada vez más grande. Sí, pero imaginarlo a través del proceso es distinto a imaginarlo terminado, sin duda… Es decir, si yo digo que cuando el punto de intersección tiende a infinito, las rectas no se cortan, estoy… Estoy cometiendo, creo yo, un error. O un error no, estoy pensando el proceso terminado como una cosa distinta a lo que fue el proceso.

E: ¿Y eso no pasa?

Miguel: Parece que sí, pero… pero es una diferencia muy sutil o ¿cómo lo diría yo?, inexplicable. Sí. Sí, parece que el proceso tiene una naturaleza distinta a su final, a su última instancia. La última instancia genera tanto problemas perceptivos ahí en la cuestión gráfica, como numéricos aquí a la hora de hacer cálculos.

El caso de Miguel es especial, su capacidad reflexiva y su sólido conocimiento de la geometría y de las matemáticas en general, lo llevan tanto a cuestionar como a comprender la naturaleza contraintuitiva de los objetos del infinito. Ahora está en la capacidad de aceptar que las propiedades del proceso pueden no ser heredadas por el objeto, convenciéndose a partir de sus propios argumentos. Esto le permite plantear la solución estática como única solución del problema 2, evidenciando que construyó el Objeto trascendente para este contexto particular.

Sandy: "Cuando Q tiende a P, en algún momento $\overleftrightarrow{PQ}$ terminará siendo paralela"

Sandy muestra haber construido una concepción totalidad de infinito determinando la pendiente de la recta tangente a la curva f en el punto P a partir de la variación entre dos puntos de la curva (ver Figura 44).

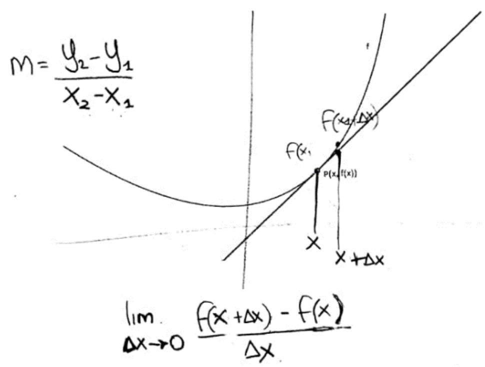


Figura 44. Entrevista de Sandy: construcción de la recta secante y la pendiente de la recta tangente

Sandy evidencia concepciones estáticas del concepto de límite en el contexto 1. Este tipo de concepciones facilitaron el desarrollo del mecanismo que le permitió dar paso a una estructura Totalidad del Proceso P_{12} (construcción de T_{12}) en el problema 1 del contexto 2. En la Figura 45 puede verse que Sandy realiza algunas acciones con la intención de iniciar la construcción de los procesos que le permitan solucionar el problema. Estas acciones consisten en acercar iterativamente el punto Q al punto P analizando en cada intento lo que pasa con la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ en esta nueva situación.

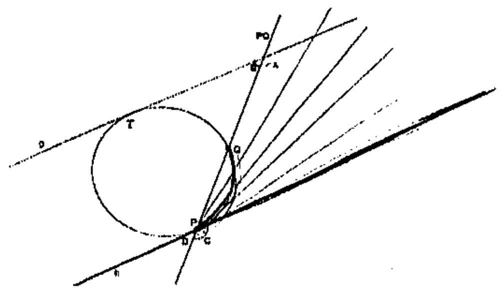


Figura 4510. Entrevista de Sandy: acciones para construir el proceso P_{123}

Sandy: $\overleftrightarrow{PQ}$ va a terminar siendo paralela a h y ahí es donde debo determinar los ángulos. Si es paralela… Si esa recta termina estando por acá [señalando la recta h], el ángulo A, formado por esta recta, ya no va… Esa recta ya no va a cortar, o sea… Si queda el punto A ¿el punto A queda?

La realización de las acciones le permite a Sandy reconstruir el proceso P_{12} en esta nueva situación. Como ella ha construido TOT_{12}, usa esta concepción estática para cuestionarse en términos actuales el estado de los ángulos una vez que la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ se ha convertido en tangente. Pensar en términos actuales lleva a Sandy a darse cuenta de que la pregunta se hace en el estado al límite y no a través del proceso subyacente. Sin embargo, al igual que Miguel, Sandy piensa en el proceso dado por el punto de intersección entre la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y la recta g y se cuestiona la existencia del punto de intersección en términos actuales.

E: ¿A qué te refieres con el punto A?

Sandy: O sea… Bueno. Se supone que aquí hay un punto ¿cierto? [Señalando el punto de intercepción entre la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y la recta g] ¿O no? ¿O se desaparece? En algún momento esta recta, como Q tiende a P, me imagino que la recta se traslada ¿no?... Entonces cuando tiende a P, en algún momento va a terminar siendo paralela, o sea va a estar sobre h, entonces ya no va a haber… O sea, aquí, esta recta [señalando la recta $\overleftrightarrow{PQ}$] se va a volver paralela y ya no va a cortar la que está aquí arriba [señalando la recta g] porque si es paralela a h y g es paralela a h, pues ya no hay ni ángulo A ni ángulo B ¿sí? Eh… Ángulo C, el ángulo C va a terminar siendo de 180° y el ángulo D, 0° (ver Figura 46).

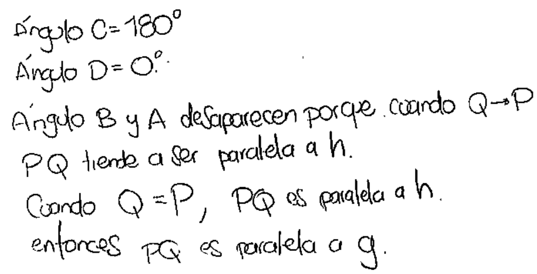


Figura 46. Entrevista de Sandy: medidas y comportamiento de los ángulos en la situación límite cuando $Q \to P$

Que Sandy tome en cuenta el proceso dado por el punto de intersección entre la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y la recta g durante el desarrollo del proceso P_{12} es una evidencia de que ella ha coordinado el Proceso P_1 asociado a la tendencia de Q a P, el proceso P_2 relacionado con la generación de rectas secantes y el proceso que siguen los ángulos a través del proceso dado por el punto de intersección en un Proceso P_{123}. Sin embargo, como la pregunta del problema surge en el estado al límite, ella no presta mucha atención al comportamiento de los ángulos a lo largo de la realización del proceso. La totalidad TOT_{12} fue una herramienta que usó para construir la Totalidad TOT_{123}, determinando que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ sería igual a h y paralela a g haciendo que los ángulos A y B dejen de existir.

En contraste con lo realizado por Sandy, Jerónimo analiza el comportamiento de los ángulos en el proceso de acercamiento de Q a P y en el estado al límite.

> *Jerónimo: "Pero en el límite la recta PQ es la recta h que no intersecta a g y por lo tanto los ángulos A y B no están definidos"*

Jerónimo es estudiante de doctorado en Matemática Educativa; él evidencia una concepción totalidad de infinito para el contexto de la recta tangente, ya que puede aceptar que el límite de una "sucesión" de rectas secantes es la recta tangente a f en el punto P y de esta manera encuentra la pendiente de la recta tangente (ver Figura 47).

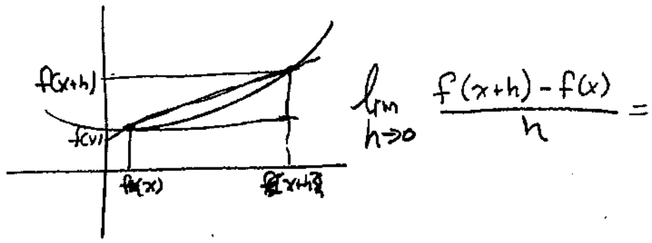


Figura 47. Entrevista de Jerónimo: construcción de la recta secante y pendiente de la recta tangente

E: Para que la tangente y la secante sean la misma, h tendría que ser cero.

Jerónimo: Así es, pero si h es cero, la división se indetermina. Entonces por eso es que usamos el proceso del límite.

E: ¿Qué es lo que permite ese proceso del límite que mencionas?

Jerónimo: El proceso del límite permite verificar cómo es el comportamiento de esta expresión cuando la h está cerca de cero.

E: ¿Pero no es cero?

Jerónimo: No es cero.

E: Entonces lo que estás haciendo es analizar la pendiente de una secante que está cercana a la tangente pero que no es la tangente.

Jerónimo: Así es, pero cuando tomas el límite entonces es la pendiente de la tangente. Lo haces a través de acercarte más a la tangente y el proceso de límite es el que genera ese salto de ser pendientes de secantes a ser la pendiente de la tangente.

Las concepciones que Jerónimo evidencia del concepto de límite le permiten explicar claramente la solución que plantea, evadiendo momentos de conflicto. Entiende que a pesar de que exista una discontinuidad de la función en el punto de tendencia, el límite puede ayudar a determinar el comportamiento alrededor de dicho punto a partir de un proceso de acercamiento infinito. Dicho proceso es totalizado al aceptar que la expresión que encuentra es exactamente el valor de la pendiente de la recta tangente. Al enfrentar el problema 2 del contexto manifiesta:

Jerónimo: Cuando Q tiende a P, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ tiende a ser h ¿no?

E: ¿Va a tender a ser h?

Jerónimo: Bueno, el límite cuando Q tiende a P, el límite de las rectas, de la sucesión de rectas va a ser h ¿no? Eso es lo que yo creo, entonces lo que va a suceder va a ser que el ángulo A y el ángulo B van a quedar como indefinidos. Yo creo que aquí hay que pensar un poco cómo se están interpretando los ángulos porque… Bueno, el ángulo C, el ángulo D se va a hacer cero… Bueno lo voy a escribir. Es que no me gusta mucho la idea porque… El punto de intercepción en estos [señalando el punto de intercepción de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ con la recta g] cuando Q se acerque a P, se va alejando, alejando, alejando, alejando, … B va a estar cercana a cero y A va a estar cercana a 180°, D se va a acercar a cero y C a 180°. Ujum… Hasta ahí es lo que creo que va a suceder, pero el proceso de límite ya no sé porque en el límite este punto [señalando el punto de intercepción de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ con la recta g] ya no va a tener significado porque la recta que sea límite de ese proceso no va a interceptar a la recta g. Entonces esos ángulos ya no tendrían sentido, aunque sin lugar a duda, uno se acerca a cero y el otro se acerca a 180 [escribe] (ver Figura 48).

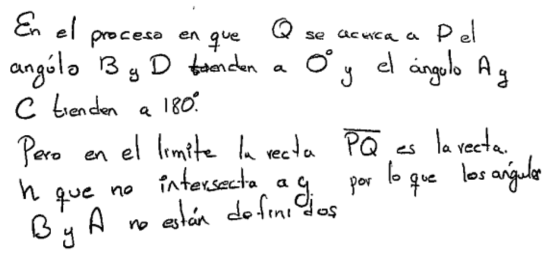

En el proceso en que Q se acerca a P el
angúlo B y D ~~tienden~~ tienden a 0° y el ángulo A y
C tienden a 180°.
Pero en el limite la recta $\overline{PQ}$ es la recta
h que no intersecta a g por lo que los angulos
B y A no están definidos

Figura 48. Entrevista de Jerónimo: comportamiento de los ángulos en el proceso y situación límite cuando $Q \to P$

Jerónimo coordina el proceso de tendencia de $Q \to P$, el proceso de generación de rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$ y el proceso dado por la medida de los ángulos construyendo el Proceso P_{123}. Esto le permite analizar el comportamiento de los ángulos en el proceso de acercamiento de Q a P y se percata que la medida de los ángulos A y C tiende cada vez más a 180° y la medida de los ángulos B y D tiende cada vez más a 0°. Sin embargo, él sabe que el límite de la “sucesión” de rectas va a ser la recta h que es paralela a g y, por tanto, el punto de intersección que permite definir los ángulos A y B, no va a existir. Aunque pensar en el comportamiento de los ángulos a lo largo del proceso le genera algo de dudas, las concepciones estáticas del infinito que evidenció al construir la Totalidad TOT_{12} en el problema 1, le ayudan a resolver el problema eficientemente, aceptando que aunque en la aplicación del proceso los ángulos parecen comportarse de cierta manera, en el límite puede que este comportamiento no se mantenga, lo que quiere decir es que ha construido una concepción Objeto de infinito para este contexto.

En este apartado se presentó un análisis detallado de evidencias que han respaldado el proceso de refinamiento de la descomposición genética presentada en la sección 3.3.3 del presente capítulo.

3.8. Análisis de las evidencias empíricas del problema de unión infinita de conjuntos

En este apartado se expondrán algunas de las evidencias recolectadas a través del instrumento 2, cuyo contexto principal está relacionado con la unión infinita de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ dada por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$. Solucionar adecuadamente este contexto, requiere de la construcción de un conjunto infinito de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, a través del planteamiento de un proceso iterativo infinito. Tres tipos de acciones distintas fueron diseñadas para ser aplicadas sobre la totalidad del proceso iterativo infinito, posibilitando la construcción de tres diferentes Objetos trascendentes para este contexto. A continuación, se expondrán las evidencias que han permitido refinar la descomposición genética particular propuesta en la sección 3.3.4 del presente documento.

3.8.1. Concepciones primarias

Ivón: "No recuerdo muy bien la unión"

Ivón tiene algunas dificultades para determinar cómo funciona el operador de unión iterativa que toma en cuenta el contexto del problema. De alguna manera, busca plantear un conjunto de potencia sin llegar a realizar las acciones a través de las uniones para los primeros valores de k.

> Ivón: Mmm ¿Qué elementos son generados? Bueno ¿Qué elementos… Eh…? ¿Interpreté bien? La unión de $k = 1$ hasta… ¿Generará el mismo conjunto? [Silencio prolongado]. No, no genera el mismo conjunto. Eso es como, por ejemplo, tener… No recuerdo muy bien la unión. Bueno, si yo digo este conjunto, el conjunto de partes, voy a tomar P', el conjunto de partes es el conjunto {1}, el {2}, el {3}, ... , todos los posibles, ¡ah! Vacío también debe estar ahí. Los tres… ¿Todos los posibles? (Ver Figura 49)

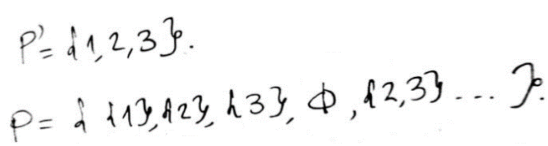


Figura 49. Entrevista de Ivón: conjunto P de partes del conjunto P'

Ok, entonces… ¿Qué elementos son generados por P de ese conjunto [refiriéndose al conjunto $\{1,2,3, \dots k\}$]? Pues es que no sé cómo decirlo. Pues acá generaría… Él va de 1 hasta k ¿no? y k va hasta infinito ¿sí? Entonces acá… Eh… Estos los puedo tener, estos los genera [subrayando los conjuntos $\{1\}, \{2\}$ y $\{3\}$ en P] [Silencio prolongado].

Ivón no construye el conjunto potencia de forma iterativa a través del operador k, por lo tanto, se le plantean los ítems de apoyo con los que buscamos ofrecer herramientas que le permitan recordar algunos conceptos específicos de la teoría de conjuntos elemental, necesarios para que pueda llevar a cabo las acciones encaminadas a la construcción de la unión infinita como un Proceso.

Dados los conjuntos $A = \{-1,\ 3,\ 5\}$, $B = \{1,\ 5,\ 10,\ 11\}$ y $C = \{-4,\ 3\}$, ella puede determinar con relativa facilidad el conjunto potencia $P(A)$, así como las uniones $A \cup B$ y $B \cup C$. Sin embargo, en la unión finita dada por $\cup_{k=1}^{5} \{1,\ 2,\ \dots,\ k\}$, nuevamente no une iterativamente los conjuntos determinados por los distintos valores del operador k (ver Figura 50)

Ivón: ¿Unión? ¿Desde $k = 1$ hasta 5? ¡¿Unión?! [Silencio prolongado] De esto [escribe]:

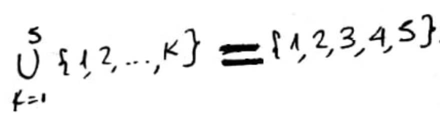


Figura 50. Entrevista de Ivón: desarrollo del ítem de apoyo de unión iterativa finita

E: ¿Cómo fue?

Ivón: ¿Sí? Es que no… [Silencio prolongado]

E: Si te das cuenta esto [señalando a $k = 1$] está estableciendo que k primero vale 1. Cuando k vale 1, es el conjunto $\{1\}$ y luego cuando k vale 2… Y así va generando los conjuntos que debes unir.

Ivón: Ah, ok. O sea, sería… Esto no [tachando la igualdad en la Figura 50]. Entonces sería, cuando k vale 1, es $\{1\}$. Cuando k vale 2, es $\{1,2\}$. Cuando k vale 3, sería $\{1,2,3\}$. Y cuando… Bueno $\{1,2,3,4\}$, cuando k vale 4. Y cuando k vale 5, … ¿Sí?

E: Pero ¿y las uniones?

Ivón: O sea, sería $\{1\}$ unido… Bueno, lo estoy haciendo en notación para no confundirme [escribe] (ver Figura 51).

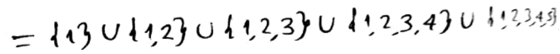


Figura 51. Entrevista de Ivón: ítem de apoyo de unión iterativa de $k = 1, \ldots, 5$

> Y ahora sí los uno, eso me da este mismo [señalando el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$] [Risas]. ¡Qué confuso!

Una vez que Ivón ha comprendido la notación de la unión iterativa al enfrentar los ítems de apoyo, da muestras de poseer un pensamiento general de la unión infinita de conjuntos potencia cuando sin realizar las acciones específicas para los primeros valores de k, establece que la unión cumple que $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$. Ivón deduce esta igualdad porque en la unión iterativa finita propuesta en los ítems de apoyo, obtuvo que $\cup_{k=1}^{5} \{1,\ 2, \ldots, k\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sobre su concepción proceso de infinito para este contexto profundizaremos en el apartado 3.8.3.

3.8.2. Evidencias de la estructura Acción

Marian: "$P(\{1\})$ está contenido en $P(\{1,2\})$"

Marian es estudiante de último semestre de maestría en matemáticas puras. Sin cuestionar el contexto y sin ningún tipo de dificultad, inicia la realización de las primeras acciones (escritas y verbales) a través del cálculo de los conjuntos potencia generados para los primeros valores de k (ver Figura 52).

> Marian: [Lee en silencio] Bueno, $P(\{1\})$ [escribiendo] entonces sabemos que sería $\emptyset$ y el mismo conjunto que es $\{1\}$. $P(\{1,2\})$, se van haciendo consecutivos ¿sí?, entonces sería $\emptyset$, el $\{1\}$, el $\{2\}$ y el $\{1,2\}$. Bueno, ahora te digo cuáles y cómo son.

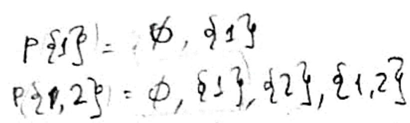


Figura 52. Entrevista de Marian: conjuntos potencia para los primeros valores de k

> [Verbalmente] $P(\{1,2,3\})$ estaría conformado por $\emptyset$, $\{1\}, \{2\}, \{3\}$, las combinaciones de esos $\{1,2\}, \{1,3\}$, $\{2,3\}$ y por él mismo, $\{1,2,3\}$. Bueno, el cardinal de $P(\{1\})$ sería pues 2. El cardinal de $P(\{1,2\})$ sería 2^2.

A pesar de que Marian no escribe explícitamente la unión iterativa, ella determina que las distintas uniones de los conjuntos de partes cumplen lo siguiente:

Marian: Notemos que este [señalando a $P(\{1\})$], está acá [señalando $P(\{1,2\})$], entonces uno sabe que $P(\{1\}) \subset P(\{1,2\})$ y así sucesivamente.

El planteamiento de esta propiedad de la unión finita es una evidencia de que Marian está interiorizando las acciones, ya que empieza a mostrar un pensamiento más general del comportamiento de los conjuntos potencia generados por la unión.

3.8.3. Evidencias de la estructura Proceso

Marian: "es un conjunto infinito y está formado por finitos e infinitos"

Marian ha determinado con éxito los conjuntos potencia para los valores $k = 1, 2, 3$; llegando a evidenciar un pensamiento más general, al establecer que dichos conjuntos "se encajan" cumpliendo la propiedad dada por $P(\{1\}) \subset P(\{1,2\}) \subset \cdots$. La construcción de una concepción Proceso de infinito para este contexto queda totalmente evidenciada cuando puede plantear, en términos generales, cuál será el conjunto potencia generado para la unión iterativa de los primeros k valores.

Marian: Bueno, entonces si seguimos pues naturalmente sería $P(\{1,2,3, \dots, k\})$. El cardinal de ese conjunto sería 2^k. Y sus elementos ¿cuáles son? Bueno pues sería $\emptyset$, todos los subconjuntos formados por un elemento, todos los subconjuntos formados por dos elementos, por tres, … hasta k.

Posteriormente, Marian se propone determinar cuáles y cómo son los elementos generados por la unión infinita, estableciendo que el cardial del conjunto de partes de la unión infinita debe ser $2^{\aleph_0}$.

E: Este cardinal [señalando $2^{\aleph_0}$] ¿de cuál conjunto de partes es?

Marian: De la unión, es que como la unión es lo mismo que el conjunto de partes de 1 hasta infinito, pero es lo mismo, como están encajados. Es la unión de todo eso, pero a la larga termina siendo el conjunto grande.

E: O sea que al final terminas sacando…

Marian: $P(\mathbb{N})$.

Marian no se percata de que la propiedad: $\cup_{k=1}^{n} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}) = P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\})$ que estableció para valores finitos de k, no se cumple cuando el proceso se completa, ya que siempre estará uniendo conjuntos de partes de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Marian: Es que como se están anidando, $P(\{1, \ldots, k\})$ está contenido en $P(\{1, \ldots, k+1\})$ y así sucesivamente. Entonces, como es hasta infinito y esos son los naturales entonces sería $\aleph_0$. Es un conjunto infinito y está formado por finitos e infinitos.

A la hora de construir la totalidad de $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\})$, Marian considera que en algún momento los valores de k no solo permitirán definir subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, sino también subconjuntos infinitos, por ejemplo, el conjunto de los números pares (ver Figura 53).

E: Entonces tu respuesta a cómo y cuáles son es...

Marian: Un conjunto infinito de subconjuntos finitos e infinitos numerables. Bueno, es que yo estaba pensando ¿por qué finitos? Pues ya sabemos el porqué, por como los voy generando. Y ¿por qué infinitos también? Pues porque sabemos que dentro de esto [señalando $P(\{1, \ldots, k\})$], se van a encontrar los infinitos también, por ejemplo, el conjunto de los números pares y esos son infinitos.

E: ¿Cómo usarías la unión para generar el conjunto de los números pares?

Marian: Agrupando los pares, entonces todos los de la forma: [escribe]

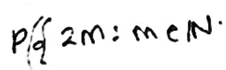


Figura 53. Entrevista de Marian: subconjunto de los números pares generados por la unión

Cuando yo haga los subconjuntos, por ejemplo, los subconjuntos de k, va a haber ese subconjunto de $\{2, 4, \ldots\}$ ¿sí? Porque son todas las combinaciones.

E: Pero ¿siempre estás uniendo finitos?

Marian: No, porque cuando yo haga aquí el de infinito [señalando el infinito en la unión] dentro de ese me van a salir los infinitos, los pares, los impares, los primos, no sé.

En su última aseveración, Marian parece darle un estatus de número natural al infinito, al establecer que cuando haga la iteración "de infinito", podrá generar los subconjuntos infinitos de los números naturales. Ella considera, a la hora de ver el proceso como un todo, que el paso "infinito" hace parte del proceso iterativo infinito que construyó, generando de esta manera los subconjuntos infinitos de los números naturales. A pesar de que Marian ha evidenciado una concepción Proceso de infinito al poder establecer de forma general qué conjuntos son generados por las uniones dadas por valores naturales que toma el índice k, no logra establecer qué sucede cuando la unión se hace infinita, evidenciando que no puede estructurar el proceso iterativo infinito que construyó como una totalidad.

Miguel: "$P(\mathbb{N})$ los voy a obtener cuando k haya recorrido todos los naturales"

Miguel realiza las acciones que le permiten construir un proceso iterativo infinito llegando a caracterizar, en términos generales, el conjunto dado por la unión infinita de conjuntos potencia (ver Figura 54).

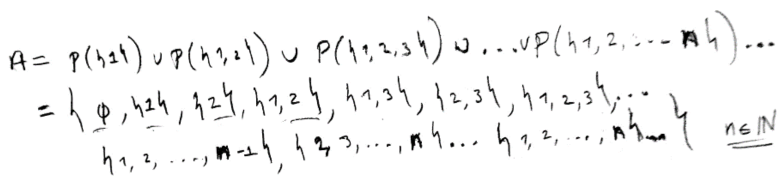


Figura 54. Entrevista de Miguel: conjunto dado por la unión infinita de conjuntos potencia

Aunque inicialmente determina que el conjunto, al final, está conformado por infinitos conjuntos finitos; luego de algunos momentos de reflexión sobre lo que para él significa que el operador k tome valores naturales de uno hasta infinito, cambia de idea y decide incluir al conjunto $P(\mathbb{N})$ como un conjunto que se genera cuando se realizan todas las iteraciones de la unión infinita (ver Figura 55).

Miguel: [Silencio prolongado] Yo creo que $\mathbb{N}$ debe estar aquí [señalando el conjunto dado por la unión infinita] porque k tiende a infinito [Escribe $\mathbb{N}$ al final de los conjuntos generador por la unión].

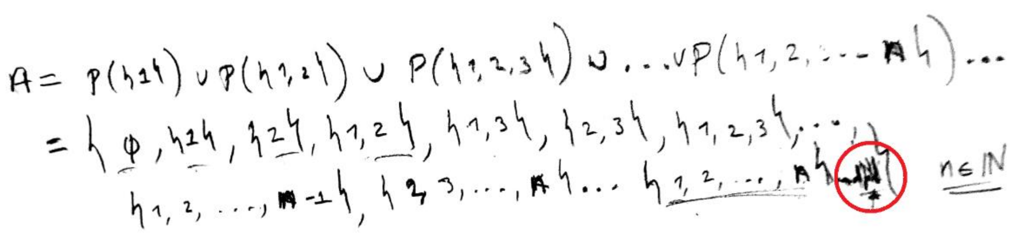


Figura 55. Entrevista de Miguel: conjunto dado por la unión infinita de conjuntos potencia incluyendo a $\mathbb{N}$

E: ¿$\mathbb{N}$ es el último conjunto que se genera?

Miguel: No, no es el último conjunto porque no puedo determinar un último, pero va a estar ahí.

Miguel considera que el operador k no solo llega a tomar valores naturales arbitrarios, sino que cuando el proceso "finaliza", es decir, cuando k haya recorrido todos los números naturales, debe generar también conjuntos infinitos, a pesar de que no pueda establecer un k para el cual esto suceda.

> E: Entonces ¿hay conjuntos ahí que son infinitos?
>
> Miguel: Es que, si yo lo veo todo al final, si k ha recorrido todos los naturales, entonces no todos tienen cantidad finita de elementos. Pero si yo digo eso tú me vas a preguntar [risas] ¿cuál de ellos no tiene cantidad finita de elementos? Y ese es el problema que no lo puedo decir porque no hay un último conjunto allí. [...] Si k recorre todos los naturales, entonces no puedo decir que todos los conjuntos tengan cantidad finita de elementos. [...] Si quisiera generar a los impares no puedo pensar en un k natural, porque los impares son infinitos y si pienso en un k natural tengo finitos elementos. Entonces, $P(\mathbb{N})$ los voy a obtener cuando k haya recorrido todos los naturales. Sí, los impares están ahí porque los impares están en partes de los naturales [risas].

Miguel considera que la totalidad del proceso iterativo infinito debe ser generada directamente por el proceso mismo, aunque no pueda determinar un k particular para el cual esto ocurra. Creemos que la naturaleza de los elementos involucrados en este contexto pueden ser determinantes a la hora de generar esta situación. Miguel había evidenciado su capacidad de estructurar totalidades de procesos tanto iterativos como continuos, en los contextos tomados en cuenta en el instrumento I. Sin embargo, la entidad que se genera para este contexto es particularmente distinta a las entidades que se generaban en los contextos anteriores; una vez que se actualiza el proceso iterativo infinito dado por la unión de conjuntos potencia, se obtiene un conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos generados por la aplicación directa del proceso, un número infinito de conjuntos finitos. En este caso, el Objeto trascendente no abandona los objetos generados durante el proceso, los captura. Esto no ocurre de forma tan explícita en las situaciones al límite estudiadas previamente, donde alcanzar la totalidad del proceso se lograba aceptando que el límite es un proceso que puede ser completado, sin que esto implique que el valor límite sea uno de los valores generados por la sucesión o serie.

Ivón: "Me generaría el conjunto de partes de todo ese conjunto $[\{1, 2, 3, 4, \dots, k\}]$*"*

Sin realizar las acciones para los primeros valores de k y luego de haber requerido de los ítems de apoyo, Ivón plantea que la unión infinita genera el conjunto de partes de los naturales (ver Figura 56):

> Ivón: ¡Listo! Entonces… ¿Qué elementos son generados por… conjunto de partes? Pues él me generaría ese mismo conjunto, el conjunto de partes. O sea, me generaría esta unión… Bueno vamos a mirar. Esto es un conjunto [señalando $P(\{1,2,3,4,\ldots,k\})$] que ya me acordé bien cómo es. Pero entonces si los estamos uniendo yo voy a generar ese mismo conjunto ¿no? Voy a generar… Bueno, pero cómo lo denotaría porque aquí [silencio]… Es que esto… k va hasta el infinito. Me generaría el conjunto de partes de todo ese conjunto [señalando $\{1,2,3,4,\ldots,k\}$]. ¡Ayyy sí! Claro me genera los naturales.

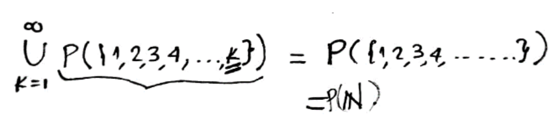


Figura 56. Entrevista de Ivón: propiedad de la unión infinita

> E: ¿El conjunto de partes de los naturales?

> Ivón: Sí, el conjunto de partes de los naturales.

El planteamiento de esta igualdad responde a una concepción Proceso de infinito, donde equivocadamente se extiende una propiedad que se cumple solo para valores finitos de k (propiedad exclusiva del Proceso), a la totalidad del proceso de unión infinita de conjuntos potencia. Otra evidencia de que Ivón comprende en términos generales cómo funciona el proceso de unión de conjuntos potencia, surge cuando puede establecer una unión iterativa particular que contenga a un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ dado. Por ejemplo, la entrevistadora le pide determinar una iteración que permita generar el conjunto $\{1,3,10\}$ (Ver Figura 57).

> Ivón: Lo tomé en 10 porque es el mayor, aquí debo decir hasta dónde k debe ir ¿sí? […] Sí, ese elemento está aquí en esta unión [escribiendo $\cup_{k=1}^{10} P(\{1,\ 2,\ 3,4,5,6,7,8,9,10\})$]. Si yo lo hago desde $k=1,\ldots,10$, ese elemento va a ser generado por las partes de este conjunto. Sí, porque acá son todas las posibles. Este [señalando el 1] con este [señalando el 3] con este [señalando el 10].

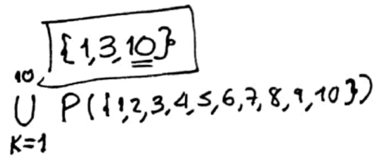


Figura 57. Entrevista de Ivón: unión iterativa finita para generar el conjunto $\{1,3,10\}$

Ivón evidencia una concepción proceso de infinito para este contexto, ya que comprende, en términos generales, la naturaleza del proceso iterativo infinito que envuelve la unión infinita de conjuntos potencia.

3.8.4. Evidencias de la estructura Totalidad

Ivón: "él me genera un conjunto infinito pero ese conjunto infinito tiene elementos finitos"

Ivón ha logrado evidenciar la construcción de una concepción Proceso de infinito para este contexto particular. Luego de distintos momentos de reflexión alrededor del proceso iterativo infinito y del tipo de conjuntos que genera, Ivón establece que, al final, la unión es un conjunto infinito de elementos (conjuntos) finitos.

E: ¿Cómo son los elementos que se generan de esta unión infinita?

Ivón: Infinitos, son infinitos… Y tiene conjuntos finitos y conjuntos infinitos.

E: ¿En qué momento vas a tener un conjunto infinito?

Ivón: Espérame a ver [silencio prolongado].

E: Hasta ahora los que has obtenido ¿cómo son?

Ivón: ¡Finitos! [silencio prolongado] No, sí. Los elementos de ese conjunto son finitos. O sea, los conjuntos que están en ese conjunto son finitos pero el conjunto es infinito.

A pesar de que Ivón considera que la unión infinita es un conjunto infinito de conjuntos finitos, evidenciando de esta manera que puede ver el proceso iterativo infinito como una totalidad, ella sigue considerando que la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$, es cierta. Esto le genera momentos de conflicto como, por ejemplo, considerar que todos los subconjuntos de ℕ son finitos.

Ivón: Bueno, él me genera un conjunto infinito pero ese conjunto infinito tiene elementos finitos. Pues para mí genera conjuntos finitos porque además son los elementos que están dentro de $P(\mathbb{N})$ [señalando $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$].

E: ¿En el conjunto $P(\mathbb{N})$ solo hay conjuntos finitos?

Ivón: Sí, yo creo que sí.

E: Recuerda que el conjunto $P(\mathbb{N})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Ivón: Sí.

E: ¿Todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ son finitos o también hay infinitos?

Ivón: [Silencio] No, todos son finitos.

Cuando se le pregunta qué subconjuntos de $\mathbb{N}$ conoce, Ivón inmediatamente recuerda algunos subconjuntos infinitos como los pares y los impares.

Ivón: Subconjuntos de los naturales… ¡Ah, ya! [risas] Los números pares, los impares, …, así [risas]. Claro, ya [risas].

Aceptar que el conjunto $P(\mathbb{N})$ contiene conjuntos infinitos y seguir considerando cierta la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \dots, k\}) = P(\mathbb{N})$, va en contra de la concepción Totalidad que Ivón ha evidenciado. En el siguiente apartado, mostraremos cómo ella usa la Totalidad del proceso para determinar que la igualdad que planteó inicialmente no puede ser cierta.

Kevin: "aquí están todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$*"*

Kevin es profesor con experiencia en la enseñanza de materias como Análisis matemático y Topología. Él evidencia desde el primer momento concepciones estáticas del proceso iterativo infinito de la unión de conjuntos potencia, ya que caracteriza los elementos que genera esa unión definiendo el conjunto por comprensión (ver Figura 58).

Kevin: Hay una cantidad infinita de conjuntos con esta característica. Bueno, yo pensaría en poner así [escribe]:

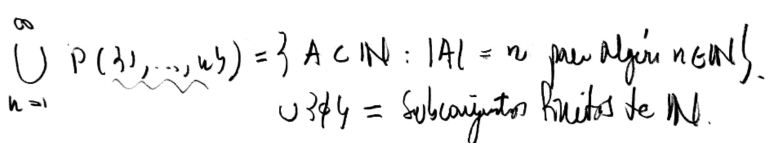


Figura 58. Entrevista de Kevin: caracterización de la unión por comprensión

Agregué el vacío también. O sea, mejor dicho, aquí están todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Bueno, es que digamos, aquí las partes de este conjunto [señalando el conjunto potencia dentro de la unión], yo lo que creo es que, si tomamos un subconjunto finito cualquiera, por ejemplo, tome [escribe] (ver Figura 59)

$\{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$ conjunto finito.

Figura 59. Entrevista de Kevin: conjunto finito generado en algún k

Entonces yo digo que uno puede encontrar un k tal que esto [señalando la unión] contenga este elemento de aquí [señalando el conjunto finito de la Figura 59]. Eso quiere decir que ese conjunto va a ser un elemento de aquí [señalando la unión]. Entonces todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ están ahí.

Kevin hace una descripción completa del tipo de conjuntos que van a estar al final de la unión infinita de conjuntos potencia, determinando que este conjunto estará conformado por conjuntos finitos $A \subset \mathbb{N}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}$, uniendo, además, el conjunto vacío. Podemos ver que Kevin no realiza acciones iterativas para construir el proceso iterativo infinito que estructura como una totalidad, sin embargo, puede pensar la unión como un proceso al determinar que, para cualquier conjunto finito de números naturales, existe un k para el cual la unión contiene a dicho conjunto. Cuando se le pregunta si la unión puede generar conjuntos infinitos, él responde:

Kevin: Bueno, yo pensaría que no porque dado cualquier A, ese A pertenece a este conjunto [señalando la unión], a alguno de esos. Con el simple hecho de pertenecer ahí, implica que A es un subconjunto de un conjunto finito [señalando el conjunto potencia dentro de la unión], entonces no puede ser infinito. Van a ser finitos de cualquier cardinalidad.

E: De alguna manera cuando la unión contempla aquí [señalando el infinito de la unión] que va hasta infinito ¿no implica que puede generar un conjunto infinito?

Kevin: No, no. Ese infinito ahí hace referencia a que el k puede estar tomando un valor arbitrario de los naturales. No se refiere a que esté tomando un conjunto infinito, ya ahí.

Kevin comprende el papel que juega el operador k a la hora de establecer los conjuntos potencia que van a ser unidos iterativamente; esto le permite establecer que el conjunto dado por la unión infinita no va a contener subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

3.8.4. Evidencias de la estructura Objeto trascendente

Ivón: "él me genera un conjunto infinito pero ese conjunto infinito tiene elementos finitos"

Ivón evidencia que puede ver la unión infinita de conjuntos potencia de los naturales como una totalidad cuando se refiere a ella como un conjunto infinito de conjuntos finitos. Posteriormente recuerda que los subconjuntos de los números naturales pueden ser tanto finitos como infinitos. Ahora, verificaremos si puede usar la totalidad para determinar si es cierta la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$.

E: ¿Tú crees que la unión puede generar el conjunto de los pares, por ejemplo?

Ivón: Sí, me los puede generar.

E: ¿Cómo podrías hacer para que los genere?

Ivón: ¿Los pares? [silencio prolongado]

E: ¿Puedes hacer que en la unión haya un conjunto con todos los números pares?

Ivón: A ver, ¿me puedes repetir por favor?

E: Sí, es que me dijiste que la unión y el conjunto potencia son iguales. Luego me dijiste que el conjunto de los pares hace parte del conjunto potencia de $\mathbb{N}$. Entonces pregunto si el conjunto de los pares también hace parte de la unión, si la unión puede generar al conjunto de los pares.

Ivón: Sí ¿y cómo los generaría? [silencio prolongado]

Luego de múltiples intentos Ivón no puede determinar una iteración que le permita obtener el conjunto de los números pares.

E: Tú sabes cómo funciona ese proceso de unión, me planteaste, por ejemplo, que un conjunto siempre está contenido en el siguiente. ¿Cómo podrías hacer para generar los pares? ¿Puede generarlos?

Ivón: [Silencio prolongado] No se puede, no los puede generar, ni a los pares, ni a los impares.

Ivón, al no poder encontrar una forma en la que la unión infinita genere el conjunto de los pares, empieza a cuestionarse si en realidad la unión genera exclusivamente conjuntos finitos. Por un momento, piensa en que es posible obtener conjuntos de partes de conjuntos infinitos porque k toma valores de 1 hasta infinito.

> Ivón: [Respira profundo] [Silencio prolongado] ¿Puede generar un conjunto infinito? Sí, si puede generarlo, k va de 1 hasta infinito y voy a seguir siempre ese proceso [señalando los conjuntos encajados] y nunca voy a poder tener el conjunto mayor, por así decirlo. Siempre va a continuar, a continuar y a continuar [silencio prolongado].

Su nuevo planteamiento no parece convencerla del todo. Para analizar si bajo su nueva asunción ahora puede determinar un conjunto infinito como el de los impares a través de la unión iterativa, la entrevistadora le hace notar que entre los conjuntos generados en la tercera iteración hay uno conformado únicamente por números impares (ver Figura 60).

> E: Quiero mostrarte algo, en los conjuntos que generaste en las iteraciones de uno a tres, aquí obtuviste este conjunto que solo tiene números impares, por ejemplo.

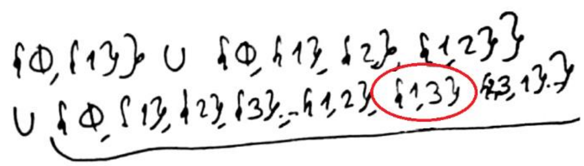


Figura 60. Entrevista de Ivón: conjuntos generados en la tercera iteración

> Ivón: ¡Pero es finito! [silencio prolongado] […] Bueno, mi idea es que este conjunto aquí [señalando el conjunto de partes dentro de la unión] es infinito. No, no, no, no es infinito. El conjunto de partes al final de la unión, el del resultado, es infinito, pero tiene elementos finitos.

Luego de reflexionar y de intentar determinar la forma en la que la unión iterativa pudiera generar conjuntos infinitos, tales como el conjunto de los pares o de los impares, Ivón establece que dicha unión infinita no puede generar conjuntos infinitos. Para determinar qué pasa con la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$, que ella misma planteó al inicio de la entrevista, la entrevistadora le pregunta nuevamente si el conjunto $P(\mathbb{N})$ tiene solamente conjuntos finitos.

> Ivón: ¡Oh, Dios! ¿Eso será igual? [señalando $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$] [Silencio] ¿Eso será igual? Yo creo que es eso… [Silencio prolongado]

E: ¿Cómo haces para saber si los dos conjuntos son iguales?

Ivón: La doble contención. Y yo diría que el conjunto de los pares no está en la unión ¿no? Porque es que acá yo siempre voy a tener elementos finitos [señalando la unión]. Siempre van a ser elementos finitos, siempre.

E: ¿Siempre?

Ivón: Sí, siempre.

E: Antes tenías la duda, ¿ahora estás segura?

Ivón: Sí, estoy segura.

Ivón finalmente establece que la causa de sus razonamientos contradictorios surge al aceptar como cierta la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$. Ha sido la fortaleza de su estructura Totalidad la que le ha permitido rechazar la igualdad que ella misma planteó inicialmente. Lo anterior muestra que Ivón lleva a cabo la acción tipo 2 sobre la totalidad del proceso iterativo infinito, alcanzando la construcción del Objeto trascendente O_{t2}.

Veamos ahora que, aunque Ivón pudo llevar a cabo la acción tipo 2, no puede llevar a cabo la acción tipo 3, por lo tanto, no puede construir el Objeto trascendente O_{t3}. La entrevistadora le pide a Ivón que determine el cardinal del conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$.

Ivón: Infinito.

E: Infinito ¿de cuál?

Ivón: [Silencio prolongado] Es que como ese proceso continúa pues dentro voy a tener infinitos. Entonces ese es un conjunto infinito, cardinal es infinito, no sé si se pueda decir así.

Ivón parece no recordar muy bien algunos elementos fundamentales de la teoría de conjuntos de Cantor. La entrevistadora le recuerda que existen infinitos de diferente tamaño, por ejemplo, el infinito de los conjuntos que pueden numerarse y el infinito de los números reales.

Ivón: Pues yo sé que hay un infinito en potencia y uno en acto, pero pues alrededor de eso no tengo mucha claridad, en estos momentos no recuerdo mucho sobre eso.

E: ¿Sabes que el infinito del conjunto de los números naturales es diferente al infinito del conjunto de los números reales? De alguna forma porque el infinito de los números naturales se puede numerar y …

Ivón: El de los reales es denso, así es.

La entrevistadora busca la manera de recordarle a Ivón cómo establecer si un conjunto es numerable a través del planteamiento de una biyección entre dicho conjunto y el conjunto de los números naturales, con la intención de que pueda determinar que el proceso de iteración sobre el cual se construyó el conjunto dado por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})$ permite numerar sus elementos. Sin embargo, Ivón busca sin éxito establecer una biyección diferente, determinando que no puede establecerse dicha biyección, y, por lo tanto, el conjunto dado por la unión no es numerable.

Ivón: Si yo al 1 lo mando a $\emptyset$, el 2 al $\{1\}$, el 3 al $\{2\}$ y así. Pero esos no tienen final porque como te dije son infinitos y puedo seguir así, pero me faltan todavía los… No puedo decir que el $100.000.000$ se vaya al $\{1,2\}$ porque no he terminado con estos [señalando los conjuntos de un elemento]. [Silencio prolongado]. No, ese infinito no es como el de los naturales [silencio prolongado].

Ivón no logra reconocer que el proceso iterativo que ella siguió para generar el conjunto dado por la unión infinita es una forma de numerar los elementos de dicho conjunto a través del operador k. De esta manera, no puede llevar a cabo la acción tipo 3 sobre la totalidad del proceso iterativo infinito y, por tanto, no puede construir el Objeto trascendente O_{t3}.

La acción tipo 1 requiere que el individuo vea la totalidad del proceso iterativo infinito como una entidad en sí misma que puede formar parte de otros conjuntos, dándole un estatus de elemento. Ivón sin ningún tipo de problema puede determinar los cardinales de los conjuntos dados por:

$$A = \{-3,\ 1,\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{j},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})\}$$

$$C = \{\mathbb{N},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})\}$$

E: ¿Cuál es el cardinal de este conjunto? [Mostrando el conjunto $A = \{-3,\ 1,\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \ldots, k\})\}$]

Ivón: ¿$-3, 1$ unido con…?

E: No, si te das cuenta este es un conjunto y esos son sus elementos.

Ivón: Ah, ok. Entonces el -3, el 1 y ese elemento [señalando la unión infinita]. A tiene cardinal tres. Sí, tiene tres elementos. El cardinal es el número de elementos del conjunto, entonces sí tiene tres elementos.

E: Bueno, y ahora este conjunto [mostrando el conjunto $B = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots,$ j, $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$]

Ivón: Ese tiene $j+1$ elementos.

E: Y este [$C = \{\mathbb{N},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})\}$]

Ivón: Dos. Los naturales y la unión, dos elementos.

Esta es una evidencia de que Ivón puede aplicar la Acción tipo 1 sobre la Totalidad del Proceso iterativo infinito construida previamente, alcanzando la concepción Objeto de infinito caracterizada por la construcción del Objeto trascendente O_{t1}. Ivón posee una concepción Objeto para este contexto, que le permite aplicar ciertos tipos de Acciones donde se requiere dar un manejo específico a la Totalidad del Proceso como una Objeto que puede formar parte de otros Objetos construidos previamente. El mecanismo que le permite aplicar la Acción tipo 1, tiene como prerequisito el conocimiento consciente de algunos conceptos básicos de la teoría de conjuntos elemental como es el concepto de conjunto y de cardinal de un conjunto finito. De esta manera, Ivón, quien ya ha evidenciado concepciones estáticas del proceso iterativo infinito dado por la unión infinita de conjuntos potencia, puede identificar la Totalidad del Proceso como un elemento que pertenece a otra entidad y que puede ser enumerado.

El mecanismo que le permite construir a Ivón el Objeto trascendente O_{t2}, requiere de su capacidad de comparar dos entidades distintas, en este caso los conjuntos $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$. Para esto, es necesario que vuelva al Proceso asociado a $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$ y determine si alguna iteración particular le permite construir un conjunto infinito. Esto depende de cómo concibe el funcionamiento del operador k; ella es consciente de que a pesar de que k puede tomar cualquier valor natural, en cada iteración solo permite definir conjuntos finitos. A pesar de que el objeto matemático asociado a los Objetos trascendentes O_{t1} y O_{t2}, es el mismo (una familia infinita que contiene todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ generados durante la aplicación del proceso de unión infinita del conjunto de partes), la construcción del Objeto trascendente O_{t2} requiere que el individuo esté consciente de las propiedades del Proceso que subyace a O_{t2}, del tipo de entidades que se generan durante su aplicación. En contraste, la construcción del Objeto trascendente O_{t1}, puede requerir únicamente que el individuo entienda al Proceso subyacente como una entidad terminada que puede formar parte de otras entidades, sin llegar a cuestionar la naturaleza de los objetos que se generan en cada una de las iteraciones del Proceso subyacente.

El mecanismo que permite llevar a cabo la Acción tipo 3 requiere que el individuo posea un Esquema de conjuntos que incluya el Esquema de cardinal de conjuntos infinitos. Las relaciones en dicho Esquema deben posibilitar la definición de una aritmética que puede ser llevada a cabo sobre la Totalidad del proceso iterativo infinito. Estas relaciones permiten la realización de Acciones sobre la Totalidad como, por ejemplo, determinar el cardinal de un conjunto infinito a partir del establecimiento de biyecciones. El individuo determina los cardinales de los conjuntos $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$ estableciendo que uno es más grande que otro. Esto sin duda hace referencia a una concepción Objeto donde el individuo ha determinado propiedades más sofisticadas que requieren de un tipo de conocimiento avanzado y específico, es por esto, que consideramos que determinar los niveles de desarrollo del Esquema puede ser útil en el establecimiento de dichas propiedades del Objeto y de las Acciones que el individuo puede llevar a cabo sobre él. Ivón, a pesar de haber tomado un curso de teoría de conjuntos, no ha estado muy relacionada con estos conocimientos y no se ha familiarizado con la aplicación de este tipo de Acciones que pueden estar asociadas a relaciones que el nivel del desarrollo de su Esquema no le han permitido construir o que aún se encuentran débiles.

Kevin: "No, porque todos los elementos de $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ *son conjuntos finitos"*

Kevin logra construir el Objeto trascendente O_T al poder llevar a cabo los tipos de Acciones 1, 2 y 3 sobre la Totalidad asociada a la unión iterativa infinita de conjuntos potencia. Cuando se le plantea determinar los cardinales de los conjuntos:

$$A = \{-3,\ 1,\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})\}$$

$$B = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \mathrm{j},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})\}$$

$$C = \{\mathbb{N},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})\}$$

Kevin identifica al conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ como una entidad terminada que puede formar parte, tomando un estatus de elemento, de los conjuntos A, B y C; esto le permite construir el Objeto trascendente O_{t1}. De igual forma, ve al conjunto $\mathbb{N}$ como un elemento del conjunto C. Esto lo lleva a determinar sin problemas el cardinal para cada uno de los conjuntos propuestos.

> Kevin: Bueno, el conjunto este [señalando el conjunto A] tiene tres elementos. El conjunto B tiene $j+1$ y el conjunto C tiene dos. Listo.

Cuando se le pide determinar el cardinal de los conjuntos $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$, él establece que la unión es un conjunto numerable y por tanto tiene cardinal $\aleph_0$.

> Kevin: Bueno el cardinal de la unión es $\aleph_0$, ¿lo puedo poner así o pongo que es infinito nada más? Él tiene el cardinal de los naturales, es numerable. El cardinal de $P(\mathbb{N})$ es $\aleph_1$.

Kevin ha estado familiarizado, gracias a su formación matemática, con conceptos de la teoría de conjuntos de Cantor que le permiten aceptar sin mucha dificultad que dos conjuntos infinitos pueden tener distinta cardinalidad. Aquí evidencia que puede aplicar Acciones específicas de un dominio matemático avanzado (teoría de conjuntos de Cantor) sobre su estructura Objeto de infinito para este contexto (esto puede hacer referencia al desarrollo de su Esquema de conjuntos). El mecanismo mental que permite la construcción del Objeto trascendente O_{t3}, requiere de este tipo de conocimiento.

La encapsulación del Objeto trascendente O_{t2} requiere que el individuo vuelva al Proceso que subyace a la unión iterativa infinita, determinando que este Proceso no permite generar conjuntos infinitos. Como se evidenció en el apartado anterior, Kevin conoce la naturaleza del Proceso asociado a la unión y, de esta manera, puede comparar los conjuntos $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$, determinando que la igualdad entre ellos no se cumple (ver Figura 61).

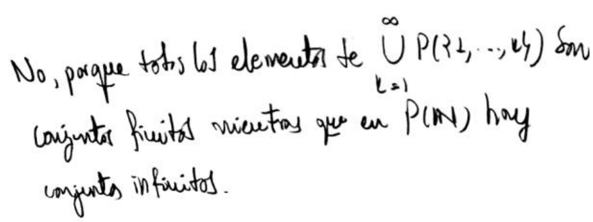


Figura 61. Entrevista de Kevin: argumento para rechazar la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$

La concepción Objeto de infinito que posee Kevin está caracterizada por la construcción del Objeto trascendente O_T, permitiéndole aplicar distintos tipos de Acciones sobre la misma Totalidad. Esta concepción le permite no solo concebir la Totalidad como una entidad terminada que puede llegar a formar parte de otras entidades, sino que también puede determinar distintas propiedades de dicha entidad, algunas asociadas al Proceso subyacente y otras relacionadas con conceptos de un dominio más avanzado (cardinal de conjuntos infinitos). Esto puede estar relacionado con la posibilidad de que los niveles de maduración de un Objeto cognitivo (propuestos teóricamente en nuestra investigación) estén íntimamente relacionados con el nivel de desarrollo del Esquema que los contiene. De esta manera, el individuo puede aplicar Acciones con requerimientos cognitivos más avanzados sobre un Objeto, en la medida en que su Esquema sea desarrollado.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

En este estudio hemos determinado contextos viables que permiten analizar la estructuración de Procesos como Totalidades y la aplicación de Acciones sobre estas. Además, hemos propuesto una primera descomposición genética genérica que toma en cuenta la construcción del infinito numerable, así como del continuo, la cual fue usada para plantear descomposiciones genéticas particulares para cada uno de los contextos elegidos. Los instrumentos y las descomposiciones genéticas que fueron presentadas en el capítulo III, son el resultado de un proceso de refinamiento continuo que surge de las distintas iteraciones entre las dos componentes metodológicas, hasta antes de la última aplicación de la componente de Recolección y Análisis de Resultados. En esta última aplicación se realizó un nuevo análisis de todas las evidencias recolectadas durante el desarrollo de nuestro estudio, determinando que, en términos generales, las construcciones mentales evidenciadas por los entrevistados son tomadas en cuenta en nuestras descomposiciones genéticas, es decir, los datos validan las descomposiciones genéticas propuestas en este documento.

En las siguientes secciones, retomaremos los aspectos más importantes que son considerados en las descomposiciones genéticas particulares y la genérica, abordaremos explícitamente algunos asuntos relacionados con el papel que juegan los contextos a la hora de construir cognitivamente el infinito matemático, los elementos involucrados en la construcción de la posible estructura Totalidad y de la estructura Objeto trascendente, así como los mecanismos relacionados. Además, reflexionaremos sobre la posibilidad de un estadio de conocimiento asociado a la Totalidad a partir de la relación propuesta por Piaget y García (1983) entre la psicogénesis y la historia de la ciencia. Posteriormente, analizaremos de forma teórica las implicaciones que tendría para la teoría APOE el establecimiento de la Totalidad como una estructura en la construcción de conocimiento matemático. Finalizaremos con algunas cuestiones que pueden ser tomadas en cuenta en futuras investigaciones.

4.1. Reflexiones generales sobre las Descomposiciones Genéticas

El análisis de las evidencias empíricas expuestas en este documento nos permite validar las descomposiciones genéticas planteadas como genuinos modelos cognitivos de construcción del infinito matemático. A continuación, resaltamos algunos de los elementos más importantes en cada una de ellas para posteriormente explicitar cómo estos se relacionan, en general, con la estructuración de Totalidades y Objetos trascendentes, y con la realización de distintos tipos de Acciones.

4.1.1. Sobre la descomposición genética genérica de infinito

Distintas investigaciones han analizado el papel de los contextos en la construcción cognitiva del infinito (Dreyfus & Tsamir, 2004; Roa-Fuentes & Oktaç, 2014; Villabona & Roa-Fuentes, 2016; entre otros), estableciendo que los procesos de abstracción son determinados por los elementos particulares que envuelve cada contexto (Dreyfus & Tsamir, 2004). En la sección 4.2. analizaremos las características propias de los contextos usados en nuestra investigación y cómo estas determinan la construcción de las estructuras mentales asociadas al infinito en potencia y en acto. La variedad de los contextos en los que puede surgir la noción de infinito hace necesario el planteamiento de una descomposición genética de esta noción que sea independiente del contexto y que pueda ser adaptada a cada situación particular. La descomposición genética genérica que proponemos en la sección 3.3.1. permite la construcción de entidades del infinito que surgen a partir de procesos infinitos iterativos y continuos.

Hemos evidenciado que las concepciones primarias relacionadas con el infinito matemático son de tipo dinámico y estático. Las concepciones primarias dinámicas se dan porque el individuo identifica los procesos involucrados en el contexto, interpretándolos como procesos que se llevan a cabo indefinidamente. Las concepciones primarias estáticas se evidencian porque el individuo extiende propiedades de procesos finitos a los procesos infinitos que identifica en el contexto. En ambos casos pueden surgir argumentos de tipo realista, especialmente en los contextos paradójicos; también puede suceder que el individuo no posea las construcciones mentales previas necesarias para enfrentar los contextos, por ejemplo, el caso de David quien considera que no puede encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado porque solo conoce un punto sobre dicha recta. Superar este tipo de concepciones que corresponden a un conocimiento intuitivo o a un nivel de formación diferente al del individuo, requiere de un modelo de enseñanza que favorezca la construcción de procesos infinitos iterativos y continuos y de estructuras Objeto asociadas a conjuntos numéricos como $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$.

Las Acciones que permiten la construcción de un proceso iterativo infinito se aplican explícitamente sobre números naturales, obteniendo sus primeras transformaciones. Estas Acciones son consecutivas y ordenadas, es decir, no puede aplicarse la acción n, sin haberse aplicado la acción $n-1$ previamente. En contraste, las Acciones para construir procesos continuos se llevan a cabo sobre representantes numéricos asociados a $\mathbb{R}$ (o a subconjuntos de $\mathbb{R}$) o gráficos asociados a una recta real (o segmento de recta real), elegidos por el individuo, en ocasiones, de manera arbitraria. Estas Acciones no pueden ser consecutivas, pero sí ordenadas, esto se debe a las propiedades de densidad y orden de los números reales.

En un mismo contexto pueden construirse diferentes Procesos, cada uno con naturaleza diversa (convergentes, divergentes). Es aquí cuando toma suma importancia el mecanismo de coordinación que deber usado para construir un Proceso único con naturaleza propia que pueda ser totalizado. La coordinación de Procesos con naturaleza diferente puede hacerse muy compleja debido a que el individuo puede no identificar la naturaleza que heredará el Proceso que surge de la coordinación (Roa-Fuentes, 2012; Villabona, 2015; Villabona & Roa-Fuentes, 2016). Una vez que el individuo ha construido un Proceso único, podrá aplicar el mecanismo de completez para estructurar el Proceso como una Totalidad. Hemos obtenido evidencias de que este mecanismo requiere de concepciones estáticas del concepto de límite o de la idea de convergencia (Totalidad y/o Objeto), lo que puede requerir también concepciones Objeto de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, según corresponda; también hemos evidenciado que es posible estructurar como una Totalidad a un Proceso que provenga de la coordinación de Procesos donde alguno no ha sido Totalizado (ver el caso de Miguel en el contexto 2). Una adaptación a la caracterización de completez que fue tomada en cuenta en capítulo III surgió como resultado del último análisis de datos, esta quedará explícita en el apartado 4.3 del presente capítulo.

La construcción del Objeto trascendente se da cuando el individuo puede aplicar algún tipo de Acción sobre la Totalidad. El mecanismo de encapsulación debe proveer la capacidad de determinar algunas propiedades del Objeto necesarias para poder llevar a cabo la Acción particular. Sobre aspectos relacionados con la posibilidad de estructurar Totalidades y distintas concepciones Objeto de un mismo concepto se profundizará más adelante en este capítulo.

4.1.2. Sobre la descomposición genética de la paradoja de Aquiles y la tortuga

Hemos evidenciado que los contextos paradójicos pueden motivar argumentos de tipo realista, los cuales suelen ser usados para reforzar argumentos matemáticos que en ocasiones no están relacionados con la construcción de procesos iterativos infinitos. Un individuo puede rechazar el proceso explícito en la paradoja al considerarlo erróneo porque va en contravía de la realidad que él percibe como cierta (ver el caso de Ana María en la sección 3.6.1.).

Las Acciones para construir los procesos iterativos infinitos involucrados en esta paradoja, son tanto graficas como aritméticas y son aplicadas sobre los primeros números naturales a través de una idea iterativa. Los individuos suelen construir un Proceso asociado a una serie o sucesión que toma en cuenta tanto los movimientos de Aquiles como los de la tortuga; la coordinación de estos Procesos queda evidenciada con el planteamiento de la relación: $\mathrm{A}_n = \mathrm{T}_{n-1}$.

La estructuración del Proceso iterativo infinito como un todo está supeditada al análisis que se haga de la situación límite de la serie o sucesión. Completez puede actuar cuando el individuo posee concepciones estáticas del límite o de la idea de convergencia, que le permiten imaginar que, aunque el Proceso es infinito porque debe ser aplicado infinitas veces, puede ser liberado de la idea de temporalidad y pensarse en términos de una sola aplicación para obtener el valor numérico de la distancia que separa a Aquiles de la tortuga (o distancias totales recorridas por ambos) cuando se construye la Totalidad. La realización de la Acción propuesta a través de la idea de la meta se lleva a cabo cuando el individuo aplica el mecanismo de encapsulación que le permite tener acceso tanto al Proceso, a la Totalidad, como al Objeto trascendente en un mismo momento, llegando a manipularlos de forma indistinta; esto queda evidenciado porque plantea y resuelve la ecuación dada por $0.333 \ldots + x = \frac{1}{3}$.

4.1.3. Sobre la descomposición genética del problema de la recta tangente a una curva en un punto

El problema de la pendiente de la recta tangente al ser un problema muy conocido de cálculo diferencial permite confrontar las concepciones que tienen los individuos sobre el infinito (particularmente sobre el concepto de límite) con los conocimientos matemáticos construidos en sus años de formación, por ejemplo, con el concepto de derivada y de razón de cambio instantánea.

La construcción del Proceso continuo relacionado con la función que permite definir rectas secantes que convergen a la recta tangente, no pudo ser evidenciada; esto se debe a que este problema hace parte del currículo de formación de la población de estudio, por lo cual, su Proceso asociado ya había sido construido con anterioridad por la mayoría de los entrevistados. Sin embargo, la idea de Acción iterativa aplicada sobre un intervalo continuo de números reales se evidenció a la hora de construir los Procesos continuos involucrados en el problema extensión;

pudimos notar que los individuos dibujaron representantes de rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ haciendo que Q estuviera cada vez más cerca de P y analizando las medidas de los ángulos A, B, C y D en cada "iteración".

Los Procesos que toman en cuenta la tendencia de Q a P y la generación de rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$, se construyen y coordinan a partir de una implicación: "una posición particular para el punto $Q \Longrightarrow$ una única recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$". Completez actúa cuando el individuo imagina el Proceso dado por el límite como terminado, es decir, cuando tiene concepciones estáticas del límite, en un contexto geométrico y analítico, que le permiten aceptar que el proceso que genera rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$ se completa, obteniendo la recta tangente a f en P; para esto es necesario que el individuo deje de pensar en el proceso que está actuando explícitamente sobre los infinitos números reales (puntos) en el intervalo de continuidad (segmento).

La Acción propuesta en el problema extensión es analizada usando los constructos de la teoría APOE. La realización de esta Acción puede involucrar los mecanismos de des-encapsulación, coordinación, completez y encapsulación, con los cuales el individuo vuelve al Proceso que subyace a la Totalidad construida en el problema 1, lo coordina con el Proceso asociado a las medidas de los ángulos A, B, C y D a través de la doble implicación: "una posición dada para el punto $Q \Longrightarrow$ una única recta secante $\overleftrightarrow{PQ} \Longrightarrow$ unas medidas particulares para los ángulos A, B, C y D", construyendo así un nuevo Proceso que podrá pensar como una Totalidad y, posteriormente, gracias al mecanismo de encapsulación, determinará las propiedades del Objeto trascendente.

Los elementos geométricos involucrados en este contexto pueden jugar un papel clave a la hora de construir las Totalidades y los Objetos trascendentes. La necesidad de mantener definidos los objetos geométricos conservando su naturaleza en la situación límite, puede hacer que los individuos se apeguen a una visión potencial de los procesos evitando la construcción de concepciones estáticas (ver el caso de Miguel en la segunda entrevista en la sección 3.7.5).

4.1.4. Sobre la descomposición genética del problema de la unión infinita de conjuntos potencia

En nuestra investigación identificamos que una dificultad mayor que se presenta a la hora de iniciar la construcción del proceso iterativo infinito de unión infinita de conjuntos potencia está relacionada con la comprensión de la notación de la unión iterativa. Esto muestra que este tipo de problemas, al parecer, no forman parte habitual de los cursos universitarios de teoría de conjuntos.

Para que un individuo supere esta dificultad e inicie con la realización de las acciones para los primeros valores de k, necesita enfrentar situaciones que requieran de la unión iterativa finita y, posteriormente, infinita de distintos tipos de conjuntos, en este caso particular, del conjunto potencia de los naturales. Además, también requiere del conocimiento de conceptos como contención de conjuntos, entre otros.

Las Acciones están encaminadas en determinar los conjuntos generados por la unión de conjuntos potencia en las primeras iteraciones. La interiorización de las Acciones lleva al individuo a establecer las propiedades del Proceso, percibiendo que los conjuntos generados en cada iteración se encajan haciendo que se cumpla lo siguiente:

$$P(\{1\}) \subset P(\{1,2\}) \subset P(\{1,2,3\}) \subset \cdots$$

En términos generales, la construcción del Proceso le permite al individuo determinar que para cualquier valor n de k, se cumple la igualdad dada por:

$$\cup_{k=1}^{n} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}) = P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\})$$

Cuando el individuo acepta que el Proceso define una familia infinita conformada por todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, se dice que ha construido la estructura Totalidad. Completez en este caso está íntimamente relacionado con las concepciones estáticas que el individuo posea del proceso descrito por k; para esto se hace necesaria una concepción Objeto del conjunto de los números naturales con la cual pueda imaginar que el Proceso es llevado a cabo a través de una única aplicación sin que dependa de cada uno de los infinitos valores de k. Además, es importante que el individuo entienda que ninguna iteración particular de la unión le permite definir conjuntos infinitos. Las Acciones que fueron diseñadas para ser aplicadas sobre la Totalidad permiten caracterizar diferentes requerimientos del mecanismo de encapsulación en cada caso; esto podría estar relacionado con la construcción de distintas concepciones Objeto a partir de una misma Totalidad. En las siguientes secciones se profundizará al respecto.

4.2. Los contextos del infinito y el diseño de instrumentos

La diversidad de los contextos elegidos nos llevó a analizar la construcción del infinito a través de la construcción de Procesos infinitos tanto iterativos como continuos, el tipo de entidades que se generan cuando estos Procesos son actualizados y algunas de las posibles Acciones que pueden ser aplicadas sobre dichas entidades.

Las Totalidades de Procesos infinitos son estructuras estáticas complejas debido a que surgen de la actualización de un infinito en potencia; las Acciones que actúan sobre dichas Totalidades deben ser naturalmente admisibles a ellas y el diseño de situaciones que involucran tales Acciones ha representado un reto en nuestra investigación. Los contextos elegidos, por sí solos, permiten el análisis de la construcción de la Totalidad asociada a procesos infinitos (iterativos y continuos), sin embargo, no plantean la realización de algún tipo de Acción. Por lo tanto, fue necesario ampliar dichos contextos, proponiendo situaciones relacionadas que hicieran que el individuo tuviera la necesidad de llevar a cabo Acciones sobre la Totalidad construida en cada situación. Aquiles ya no solo alcanza a la tortuga, sino que también existe la idea de una meta; las rectas secantes ahora intersecan otras rectas generando ángulos que cambian de medida cada vez que el punto Q se acerca al punto P; el conjunto de los infinitos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ puede ser un elemento más de otros conjuntos; entre otros.

El contexto dado por la paradoja de Aquiles y la tortuga nos permitió analizar la construcción de procesos iterativos infinitos en forma de series o sucesiones que, al ser actualizadas, no generan una entidad en sí misma, sino una situación límite que debe ser interpretada dentro del contexto para darle solución a la paradoja. Hemos evidenciado que, a pesar del nivel de formación de los entrevistados, en algunos casos, los elementos realistas aportados por el contexto pueden ser incorporados en la lógica argumentativa del individuo. Por ejemplo, Ivón considera que la velocidad de la tortuga puede estimarse entre 0 y 1 km, ya que la tortuga es "muy lenta". También, Ana María, plantea que desarrollar el proceso propuesto en la paradoja es un error, porque no se considera a Aquiles como "el corredor que es" sino que se toma como hipótesis que él siempre estará detrás de la tortuga haciendo que nunca llegue a alcanzarla. Estos argumentos no corresponden a ideas matemáticas formales o del nivel de escolaridad del individuo, pero están determinando la forma en la que se construye el infinito dentro del contexto.

El nivel de formación de nuestra población de estudio hizo que en su mayoría los entrevistados pudieran encontrar una forma de afrontar el problema de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. La solución de este problema a partir del planteamiento de una función de rectas secantes requiere de la conceptualización de un proceso infinito definido sobre un intervalo continuo de números reales (proceso infinito continuo), a través de su situación límite, todo esto bajo un fuerte enfoque geométrico.

A pesar de que la paradoja de Aquiles y la tortuga y el problema de la pendiente de la recta tangente requieren de la construcción y coordinación de procesos infinitos definidos sobre infinitos diferentes, iterativos ($\mathbb{N}$) y continuos ($\mathbb{R}$), respectivamente; las concepciones del infinito evidenciadas para ambos contextos fueron análogas. Por ejemplo, Ana María quien había evidenciado concepciones dinámicas del infinito asociadas al límite de una sucesión, mantuvo sus concepciones dinámicas en el caso del límite de la función para el problema de la pendiente de la recta tangente, generando momentos de conflicto entre sus concepciones del límite y las matemáticas que aprendió a través de su formación. En contraste, Sandy mantuvo sus concepciones estáticas del límite llegando a solucionar ambas situaciones de manera satisfactoria.

El contexto relacionado con el problema de la unión infinita e iterativa de conjuntos potencia requiere de la construcción de un proceso iterativo infinito de uniones que en cada iteración permiten definir finitos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. La conceptualización de dicho Proceso toma en cuenta los objetos generados por la aplicación del Proceso mismo en cada una de las iteraciones, permitiendo la construcción de un conjunto infinito de conjuntos finitos. Además, las concepciones asociadas al operador k, que permite definir el tamaño del conjunto potencia en cada iteración, fueron cruciales en la estructuración del proceso iterativo infinito como una Totalidad. Los individuos como Kevin e Ivón que aceptaron a k como un valor natural arbitrario pudieron construir la Totalidad asociada al proceso iterativo infinito de la unión. En cambio, individuos como Ana María o Miguel, que pensaron que el proceso seguido por k permite obtener todo el conjunto de los naturales en una iteración particular, no pudieron construir la Totalidad de dicho proceso. Algunos elementos de este contexto fueron diseñados para que fueran esencialmente distintos a los elementos en los contextos anteriores. Por ejemplo, la posibilidad de realizar distintos tipos de Acciones sobre la misma Totalidad, algunas específicas de un dominio operacional avanzado como la teoría de conjuntos de Cantor. El desempeño de los estudiantes que enfrentaron los dos instrumentos no fue el mismo para cada contexto; Miguel quien había evidenciado concepciones estáticas del infinito para los contextos 1 y 2 (Objeto y Totalidad, respectivamente), en este contexto solo pudo alcanzar concepciones de tipo dinámico (Proceso). En contraste, Ivón quien había evidenciado concepciones dinámicas en los contextos del instrumento I (Proceso), para este contexto pudo construir la Totalidad del Proceso y dos de los tres Objetos trascendentes posibles.

Cada uno de los contextos seleccionados permite analizar aspectos distintos en la construcción del infinito matemático. El contexto paradójico brinda elementos realistas que pueden llegar a dificultar la construcción de los Procesos involucrados. El contexto del problema de la pendiente de la recta tangente a una curva, al ser un contexto conocido, permite confrontar las concepciones que tienen los individuos sobre el infinito con las matemáticas que conocen gracias a su nivel de formación. Hemos podido evidenciar en estos dos contextos que, en algunos casos, sus concepciones los llevan a rechazar sus propios conocimientos matemáticos y, en otros, son estos conocimientos los que les permiten la evolución de sus concepciones (ver el caso de Edward en el contexto de la paradoja de Aquiles y la tortuga, sección 3.6.4.). En el contexto de la unión infinita de conjuntos potencia, hemos analizado las concepciones asociadas al infinito tanto en la teoría de conjuntos elemental como en la teoría de conjuntos de Cantor, identificando Acciones que corresponden a estos dos dominios de las matemáticas.

Los contextos con sus respectivas adecuaciones y el diseño de los dos instrumentos fueron novedosos y han sido construidos con la intención de realizar un análisis detallado de las estructuras que pueden estar relacionadas con la construcción del infinito en situaciones variadas. Además, la forma en la que se plantean las preguntas a lo largo de la entrevista no solo permite determinar las posibles concepciones del individuo, sino que también pone a prueba su solidez. De esta manera, hemos buscado garantizar que las evidencias recolectadas y el análisis llevado a cabo en el capítulo III, son fiables y permiten determinar un modelo cognitivo de construcción del infinito matemático en los diferentes contextos.

4.3. Totalidades y Objetos trascendentes: estructuras en la construcción cognitiva del infinito matemático

La contribución principal de este estudio consiste en evidenciar por primera vez en dos contextos diferentes al usado por Dubinsky et al. (2013), a saber, (i) el problema de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto y su extensión y (ii) el problema de la unión infinita de conjuntos potencia, el siguiente fenómeno: a pesar de que un individuo pueda construir la Totalidad asociada a un proceso infinito, esto no implica necesariamente que pueda realizar Acciones sobre dicha Totalidad. Además, se ha analizado la construcción cognitiva de distintas entidades del infinito, caracterizando en cada caso lo que se conoce como el Objeto trascendente (Brown et al., 2010; Roa-Fuentes, 2012; Villabona, 2015; Villabona & Roa-Fuentes, 2016). Con nuestro planteamiento teórico hemos buscado evidencias de la solidez de estas estructuras a través de los instrumentos de toma de datos; de igual forma hemos logrado caracterizar los mecanismos involucrados en la progresión: $P \to T \to O$.

Al enfrentar el instrumento 1, Miguel evidencia que puede construir como Totalidades, Procesos infinitos asociados a la idea del límite. Sin embargo, a la hora de afrontar la extensión del problema de la pendiente de la recta tangente, su idea dinámica del proceso de tendencia de una variable a un valor real, que surge como respuesta a su necesidad de mantener definidos algunos elementos geométricos del proceso en la situación límite, le impide llevar a cabo la Acción propuesta. Consideramos que su capacidad de estructurar Procesos iterativos infinitos como Totalidades, está fuertemente influenciada por sus concepciones estáticas del concepto de límite. Por su parte, la construcción del Objeto trascendente requiere de un cambio en la forma de pensar del individuo que le permita aceptar que la naturaleza del Objeto no es necesariamente heredada del Proceso. Miguel en la segunda entrevista, evidencia conflictos entre sus concepciones dinámicas y estáticas de los procesos infinitos asociados al problema extensión; estos conflictos son superados cuando acepta que la naturaleza del Objeto no es la misma del Proceso. El mecanismo que permite aplicar Acciones sobre Objetos debe proveer en el individuo la capacidad de determinar cuáles propiedades evidenciadas durante la aplicación del Proceso se mantienen y cuáles cambian cuando se construye la Totalidad del Proceso. Consideramos que este mecanismo está fuertemente relacionado con la experiencia matemática del individuo en cursos de matemáticas avanzadas, donde aprende a lidiar con entidades del infinito cuya naturaleza es diversa y contraintuitiva.

Ivón, quien determinó que el proceso iterativo infinito dado por la unión infinita de conjuntos potencia es un conjunto infinito de conjuntos finitos, pudo identificar la unión iterativa como un elemento más de otros conjuntos; además, pudo establecer que la igualdad dada por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \dots, k\}) = P(\mathbb{N})$ no es cierta, debido a que existen elementos en $P(\mathbb{N})$ que no pueden ser generados por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \dots, k\})$. A pesar de que Ivón estructuró la Totalidad del proceso iterativo infinito que construyó en este contexto, no puede determinar el cardinal del conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1, 2, 3, \dots, k\})$. Esto es una evidencia de que el mecanismo que permite construir procesos iterativos infinitos como totalidades no requiere del conocimiento consciente del concepto de cardinal de un conjunto infinito, como se había establecido inicialmente. Al parecer, el concepto de cardinal y el establecimiento de biyecciones entre conjuntos infinitos, están más asociados al mecanismo que permite llevar a cabo la acción tipo 3 para la construcción del Objeto trascendente O_{t3}. En el apartado 4.4. ahondaremos sobre los distintos tipos de Acciones que pueden ser aplicadas sobre la Totalidad de un Proceso.

Consideramos que *Completez* es el mecanismo que permite el paso de la estructura Proceso a la estructura Totalidad y el mecanismo de *Encapsulación*, el que permite la construcción del Objeto (ver Figura 62).

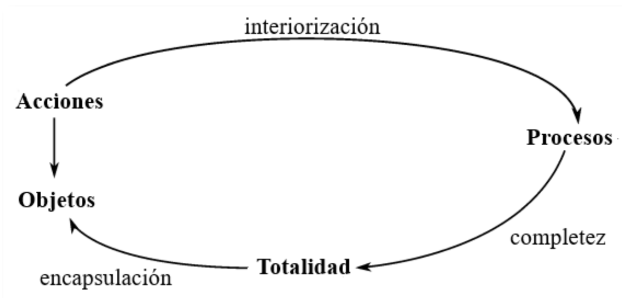


Figura 62. Teoría APOE tomando en cuenta la posible estructura Totalidad (Villabona, Roa-Fuentes y Oktaç, enviado para su publicación)

Las evidencias empíricas presentadas en el capítulo III, nos han permitido respaldar el planteamiento propuesto en la Figura 62. Hemos podido redefinir el mecanismo de completez para que tome en cuenta no solo la construcción de las Totalidades asociadas a procesos iterativos infinitos sino también las Totalidades de procesos continuos (sobre intervalos reales). Además, el análisis de la evidencia empírica en la última aplicación del ciclo metodológico nos lleva a considerar que el mecanismo de completez, en contextos del infinito, se puede describir como se muestra a continuación:

> ***Completez:*** Es un mecanismo mental que le permite al individuo estructurar los Procesos infinitos como Totalidades. El establecimiento de este mecanismo puede requerir de la construcción de elementos fundamentales relacionados con la teoría de conjuntos: la construcción de conjuntos infinitos con diferentes cardinalidades, específicamente, concepciones Objeto del conjunto de los números naturales (para las Totalidades asociadas a procesos iterativos infinitos) y del conjunto de los números reales (para las Totalidades asociadas a procesos continuos). Estos

elementos permiten librar al proceso infinito de cualquier idea de temporalidad, haciendo que pueda ser visto como una única transformación que es llevada a cabo sobre todo ℕ o ℝ (o subconjunto de ℝ).

Esta descripción del mecanismo de completez se obtuvo en el estudio del infinito matemático, llegando a ser susceptible de modificaciones en la construcción de Totalidades asociadas a otros conceptos y nociones. El mecanismo de encapsulación es el medio por el cual un individuo puede aplicar Acciones sobre un Objeto asociado a una entidad del infinito; consideramos que está directamente relacionado con la experiencia en dominios de las matemáticas donde se aprende a lidiar con dichas entidades. Los requerimientos de este mecanismo para cada uno de los contextos abordados en nuestro estudio son diversos, ya que las Acciones que deben actuar sobre las entidades construidas en cada situación lo son.

Como hemos mencionado anteriormente, solucionar la paradoja de Aquiles y la tortuga requiere de la construcción y coordinación de procesos iterativos infinitos que posteriormente serán analizados en su situación límite. Una sucesión o serie de valores de distancias surge a través de la interpretación matemática de la situación, y el límite, que corresponde a un valor numérico, que no es ningún término de la serie o sucesión, permite concluir si Aquiles alcanza a la tortuga. En la sucesión de distancias, el límite es la "entidad" que trasciende del proceso ya que todas las distancias entre Aquiles y la tortuga en cada una de las infinitas iteraciones, son diferentes a la distancia obtenida cuando el proceso se completa. Usar el Objeto asociado al límite del proceso para solucionar una situación relacionada, requiere de la realización de Acciones sobre dicho Objeto, lo que permite evidenciar la construcción del Objeto Trascendente. La idea de una meta lleva al individuo a establecer una ecuación, ya sea explícita o implícita, que toma en cuenta al mismo tiempo, al Proceso (dado por el decimal infinito periódico $0.333\ldots$), a la Totalidad del Proceso y al Objeto (dado por $\frac{1}{3}$). Esto puede requerir de los mecanismos de completez, encapsulación, des-encapsulación y completez inverso, con los cuales puede tener acceso al Proceso, a la Totalidad y al Objeto en un mismo momento llegando a manipularlos, por ejemplo, al aplicar las operaciones matemáticas requeridas para resolver la ecuación.

La recta tangente a f en P es la entidad que surge del proceso infinito de generación de rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ secantes a f. Nuevamente, la actualización de este Proceso está íntimamente relacionada con el concepto de límite, pero ahora tomando en cuenta una función de dominio real. La Acción propuesta para la construcción de una concepción Objeto de infinito para este contexto, requiere que el individuo vuelva al Proceso asociado a la generación de rectas secantes cuando $Q \rightarrow P$, lo coordine con el Proceso dado por las medidas de los ángulos A, B, C y D, y, posteriormente, analice el nuevo Proceso en la situación límite determinando cuáles ángulos están definidos y sus respectivas medidas. Para esto, el individuo debe establecer cuáles propiedades se mantienen cuando el Proceso se completa y cuáles cambian, aceptando que la naturaleza del Proceso no es heredada por la Totalidad ni por el Objeto y construyendo así el Objeto trascendente. Suponer que el Objeto conserva las propiedades del Proceso, se convierte en un obstáculo que impide al individuo desarrollar el mecanismo de encapsulación.

Otra importante contribución de este estudio se logra a través del contexto de la unión infinita de conjuntos potencia que fue adaptado para que permitiera analizar la posibilidad de llevar a cabo distintos tipos de Acciones sobre la Totalidad del Proceso asociado a $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$. En este caso se definieron tres tipos de Acciones distintas que daban paso a tres concepciones Objeto diferentes. Los mecanismos de encapsulación asociados a la aplicación de cada una de las Acciones tienen requerimientos distintos. Por ejemplo, la concepción O_{t1}, se evidencia porque el individuo tiene la capacidad de ver a $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ como una entidad en sí misma, identificándola como un elemento más de otros conjuntos. Cuando construye la concepción O_{t2}, el individuo puede comparar los conjuntos $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ y $P(\mathbb{N})$, determinando que no son iguales porque no se cumple la doble contención; en este caso, debe volver al Proceso y establecer que existen elementos en $P(\mathbb{N})$ que no son generados por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$. La concepción Objeto O_{t3}, se relaciona con la capacidad del individuo de determinar el cardinal del conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$.

La construcción de la concepción Objeto O_{t3} requiere del conocimiento de algunos conceptos de la teoría de conjuntos de Cantor, donde el individuo acepta que existen conjuntos infinitos con diferentes cardinalidades e identifica el proceso iterativo infinito dado por la unión infinita como una forma de numerar sus elementos, estableciendo que el conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ tiene cardinal $\aleph_0$. Este tipo de Acción se define gracias a un conocimiento específico de las matemáticas avanzadas, que tiene como requisito que el Esquema de conjuntos infinitos alcance un nivel de desarrollo que le permita al individuo construir relaciones entre los Objetos del Esquema, haciendo que se establezca cierto dominio operacional sobre los conjuntos infinitos. La coherencia de este

Esquema puede determinarse porque el individuo, por ejemplo, usa la Acción tipo 3 para establecer que la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$ no es cierta, porque el conjunto $P(\mathbb{N})$ tiene cardinal mayor que el conjunto $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$, a pesar de que ambos son conjuntos infinitos. En contraste, la realización de las Acciones tipo 1 y 2 (construcción de los Objetos O_{t1} y O_{t2}), requiere de analizar algunas propiedades del Proceso y el Objeto construidos, y no del establecimiento de relaciones entre los Objetos de un Esquema.

Como hemos mostrado anteriormente, los contextos seleccionados nos han permitido analizar la construcción de Objetos trascendentes de diferente naturaleza, caracterizando distintos requerimientos que puede llegar a tener el mecanismo de encapsulación en cada caso; dependiendo de la Acción que deba actuar sobre el Objeto, existirá un requerimiento particular para que el mecanismo de encapsulación pueda desarrollarse. También hemos evidenciado que sobre una misma Totalidad pueden actuar distintos tipos de Acciones; si un individuo cumple los requerimientos para poder aplicar una Acción, pero otra no, esto podría llevarnos a pensar en la posibilidad de que existan concepciones Objeto parciales; esto se convierte en otro importante aporte de nuestra investigación.

El caso de Ivón nos permite ejemplificar estas ideas, reflexionando alrededor de lo que podría ser una concepción Objeto parcial para el contexto de la unión infinita de conjuntos potencia. Ella pudo realizar las Acciones para construir los Objetos O_{t1} y O_{t2}; su concepción Objeto le permite llevar a cabo ciertos tipos de Acciones relacionadas con la teoría de conjuntos donde debe identificar el objeto asociado a O_{t1} como un elemento de otro conjunto finito, determinar el cardinal de conjuntos finitos y comparar dos conjuntos infinitos distintos verificando que se cumpla la doble contención. Sin embargo, aunque establece que el conjunto dado por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$ está conformado por infinitos conjuntos finitos, no puede determinar su cardinal, ya que no logra plantear una biyección entre dicho conjunto y el conjunto de los números naturales, ni identifica el proceso iterativo infinito de construcción como un proceso de numeración sobre los elementos del conjunto. Es por lo que consideramos que es posible que las diferentes concepciones Objeto que un individuo podría llegar a construir sobre el mismo concepto (esto surge como una explicación teórica a algunas evidencias empíricas planteadas en esta investigación), pueden estar íntimamente relacionadas con el nivel de desarrollo del Esquema sobre dicho concepto. Podría pensarse que es posible que a los Objetos que hacen parte de un Esquema con un nivel *inter-* de desarrollo, se les pueden aplicar Acciones más complejas que a los Objetos que hacen parte de un Esquema con un nivel *intra-*.

4.3.1. Totalidades y Tipos de Acciones: Reflexiones desde la teoría Piagetiana

El análisis del desarrollo histórico del infinito nos lleva a resaltar dos momentos cruciales que fundamentan, sin duda, la conceptualización del infinito en matemáticas y, por tanto, el desarrollo de un campo operacional asociado: (i) los aportes de Bolzano que toman en cuenta al infinito como un atributo de un conjunto y (ii) su establecimiento como un objeto dentro de las matemáticas sobre el cual Cantor define una aritmética (de cardinales y de ordinales). La relación existente entre la génesis del conocimiento de un concepto (psicogénesis) y el desarrollo histórico y conceptual del mismo (epistemología), nos permite develar que la teoría piagetiana puede considerar como viable un estadio de conocimiento relacionado con una estructura Totalidad.

Moreno y Waldegg (1991) determinan etapas bien definidas del desarrollo histórico del infinito y las relacionan con el desarrollo cognitivo de los individuos. Los aportes de Bolzano, como sujeto epistémico, definen una de estas etapas ya que concibe los conjuntos infinitos como entidades terminadas, lo cual está directamente relacionado con la estructura Totalidad propuesta desde la teoría APOE.

> La idea principal que apoya el nuevo nivel de representación yace en el hecho de que se abandona la concepción de un conjunto que resulta de un proceso constructivo, por agregación de elementos. En lugar de eso, Bolzano adoptó un concepto sintético de conjunto; esto es, un conjunto es concebido como una totalidad, sin la necesidad de pensar separadamente en cada elemento (p. 214-215).

A pesar de que Bolzano conceptualiza conjuntos infinitos como Totalidades, no puede desarrollar un dominio aritmético asociado, aunque esto no quiere decir que no pueda llevar a cabo algunas Acciones sobre la Totalidad que construyó. Según Moreno y Waldegg (1991) Bolzano pudo definir operaciones entre conjuntos infinitos gracias al criterio de comparación por inclusión que él eligió, pero este criterio centraba su atención en cada uno de los conjuntos infinitos, lo cual limitaba su campo de acción al Objeto y no a las relaciones que podían definirse sobre él, lo que hace referencia a una etapa intra-objetal. En contraste, el criterio de comparación de Cantor se enfoca en el establecimiento de relaciones biyectivas entre conjuntos, esto le permite determinar propiedades reflexivas, transitivas y simétricas asociadas a la relación (no al objeto), caracterizando una etapa inter-objetal (Piaget & García, 1983; Moreno & Waldegg, 1991). Las operaciones definidas por Cantor permiten el establecimiento de relaciones entre los elementos de conjuntos infinitos que podían ser disyuntos y la construcción de nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados (Moreno & Waldegg, 1991). Estas cuestiones nos permiten referirnos desde un marco teórico cognitivo diferente pero cercano, a la posibilidad de la existencia de un estadio de conocimiento asociado a la estructura Totalidad y a la realización de Acciones determinadas por las relaciones entre Objetos que pueden llegar a establecerse dependiendo de los distintos niveles de desarrollo del Esquema.

En el siguiente apartado profundizaremos en estas ideas de forma más general y teórica, analizando la viabilidad de estos fenómenos que se desprenden directamente de la posible existencia de Totalidad como una estructura más en la teoría APOE.

4.4. APTOE: Implicaciones teóricas de la Totalidad como una estructura en la construcción de conocimiento matemático

La consolidación de la Totalidad con un estatus de estructura dentro de la teoría APOE y el estudio de las Acciones que pueden o no actuar sobre las Totalidades, abre una puerta a la reflexión considerando posibles concepciones Objeto que pueden construirse sobre un mismo concepto o noción. Si un individuo evidencia una concepción Totalidad de un concepto dado, a la vez que no muestra una concepción Objeto, es porque no pudo realizar una o más Acciones sobre dicha Totalidad. Tradicionalmente la teoría APOE plantea que si un individuo construye un Objeto puede realizar Acciones sobre él. Sin embargo, algo que no se había tomado en cuenta hasta ahora, es la posible existencia de distintos tipos de Acciones que pueden ser aplicadas sobre el mismo Objeto, algunas más complejas que otras, y que un individuo puede no necesariamente estar en capacidad de realizarlas todas. La existencia de la Totalidad nos lleva a reflexionar sobre los tipos de Acciones y su relación con el mecanismo de encapsulación.

Supongamos que un individuo construye la Totalidad T sobre un concepto cualquiera y puede realizar la Acción A_1 pero no la Acción A_2; entonces diremos que ha construido la concepción Objeto O_1 relacionada con la Acción A_1 (ver Figura 63).

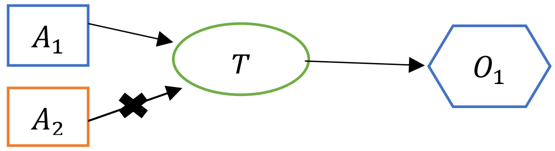


Figura 63. Construcción de la concepción objeto O_1 (Villabona, Oktaç & Roa-Fuentes, 2019)

La concepción Objeto O_1 no es una concepción completa del concepto que el individuo intenta construir ya que no pudo realizar la Acción A_2 sino que es una concepción "parcial" porque puede realizar, al menos, la Acción A_1. La capacidad de realizar Acciones está dada por el mecanismo de encapsulación; si el individuo puede realizar la Acción A_1 pero no la Acción A_2, quiere decir que el mecanismo de encapsulación tiene requerimientos distintos para desarrollarse en cada caso. A partir del análisis de estos requerimientos podríamos pensar en una forma de jerarquizar las Acciones por niveles de complejidad o pensar en Objetos cognitivos débiles o robustos de un mismo concepto. Estos aspectos brindan nuevas maneras de concebir los constructos de la teoría APOE, haciendo que se puedan analizar a fondo sus características y permitiendo una descripción más detallada de la forma como se lleva a cabo la construcción del conocimiento matemático.

Supongamos que el individuo considerado anteriormente pudo realizar la Acción A_2 pero no la Acción A_1, construyendo la concepción Objeto O_2. Podemos preguntarnos cómo se relacionan los Objetos O_1 y O_2. ¿Son Objetos esencialmente diferentes? ¿Son solo facetas distintas de un mismo Objeto? ¿Es un único Objeto que se encuentra en construcción? Una forma de establecer qué tipo de relación tienen las concepciones Objeto de un mismo concepto construidas a partir de la realización de Acciones diferentes sobre la misma Totalidad, podría ser determinando y analizando los requerimientos del mecanismo de encapsulación que permite el desarrollo de cada una como hicimos en el contexto 3.

Como ya hemos mencionado, algunas Acciones requieren que el individuo entienda la Totalidad del Proceso como una entidad que puede formar parte de otras entidades, otras requieren que se definan y apliquen operaciones sobre dicha Totalidad; otras, que se establezcan propiedades, algunas de las cuales solo tienen sentido a medida que el Esquema se amplía. Por ejemplo, en el contexto de la unión infinita de conjuntos potencia, el cardinal de un conjunto con un número infinito de elementos es infinito, a menos que el nivel de desarrollo de nuestro Esquema de conjuntos infinitos nos permita determinar si corresponde a un infinito numerable ($\aleph_0$) o a otros infinitos más grandes. El mecanismo de encapsulación está relacionado con la experiencia matemática del individuo y, al parecer, con el nivel de desarrollo de los Esquemas, donde nuevas relaciones se establecen haciendo que se amplíe el campo operativo definido sobre los Objetos dentro del Esquema.

En la siguiente sección propondremos algunas cuestiones que se desprenden directamente de los resultados de nuestro estudio y que consideramos pueden ser tomadas en cuenta en las futuras investigaciones desde la teoría APOE.

4.5. Futuras investigaciones

El estudio de la Totalidad como una estructura de la teoría APOE, requiere de la determinación de contextos y el diseño de instrumentos donde se posibilite el análisis por separado de la capacidad de construir Procesos como Totalidades y la capacidad de realizar Acciones sobre dichas Totalidades. Las investigaciones que busquen evidencias de Totalidad deberán establecer acciones matemáticas naturalmente admisibles a procesos totalizados (entidades); se espera que estas acciones sean novedosas y que el diseño del instrumento esté adaptado para poner a prueba las concepciones evidenciadas por el individuo.

El establecimiento de la Totalidad como estructura dentro del marco de la teoría APOE requiere de evidencias empíricas que la sitúen como una etapa de construcción de conocimiento para distintos conceptos y nociones en matemáticas. Por tal motivo se debe analizar teóricamente, con el planteamiento de descomposiciones genéticas preliminares que tomen en cuenta a la Totalidad, y empíricamente, con la validación de dichas descomposiciones genéticas, su viabilidad en la conceptualización de procesos no necesariamente infinitos, sino también finitos o finitos de gran tamaño asociados a otros conceptos, es decir, se debe estudiar el sentido del mecanismo de completez a la hora de construir la Totalidad de Procesos en general. Esto puede requerir del establecimiento de niveles entre las estructuras Proceso – Totalidad – Objeto, como fue llevado a cabo por Dubinsky et al. (2013).

Es poco lo que se sabe sobre la construcción de Procesos infinitos a partir de la coordinación de Procesos con naturaleza distinta (convergente y divergente). Se requieren estudios en este sentido donde sea posible analizar los elementos relacionados a la hora de establecer la naturaleza de un Proceso que surge de procesos con naturaleza contraria, para responder a la pregunta: ¿qué elementos determinan la naturaleza que hereda el nuevo proceso? Además, en este estudio hemos encontrado evidencias de que existen Procesos que se construyen y coordinan a la par, es decir, desde la realización de las Acciones, estos Procesos se crean y se coordinan simultáneamente. Tradicionalmente la teoría APOE considera que solo se pueden coordinar Procesos que ya han sido construidos, esclarecer estos asuntos es tema importante de investigación.

La posibilidad de realizar distintos tipos de Acciones sobre Totalidades que desencadenan la construcción de concepciones Objeto sobre el mismo concepto que pueden ser diferentes, representa otro importante tema de estudio en el marco de la teoría APOE. Estas Acciones pueden estar relacionadas con el nivel de desarrollo del Esquema (*inter*-, *intra*- y *trans*-), referenciando la maduración del Objeto situado en él; esto es solo un planteamiento que ha surgido en el desarrollo de nuestra investigación y requiere de estudios exploratorios que permitan determinar el papel del Esquema a la hora de actuar sobre los Objetos que contiene. En el caso del infinito, consideramos que realizar un estudio histórico-epistemológico basado en el desarrollo conceptual alcanzado por sujetos epistémicos como Bolzano y Cantor, puede arrojar luces sobre la posible existencia de Acciones que pueden llevarse a cabo gracias a un nivel de comprensión intra-objetal y otras, en un campo operacional, que requieren de un nivel de desarrollo inter-objetal.

REFERENCIAS

Alcock, L. & Simpson, A. (2009). *Ideas from mathematics education: an introduction for mathematicians*. Loughborough: MSOR Network.

Apkarian, N., Tabach, M., Dreyfus, T. & Rasmussen, C. (2019). The Sierpinski smoothie: blending area and perimeter, *Educational Studies in Mathematics*, 101, 19–34.

Arnon, I. (1998). *In the mind's eye: How children develop mathematical concepts—Extending Piaget's theory*. Unpublished doctoral dissertation, School of Education, Haifa University.

Arnon, I., Nesher, P. & Nirenburg, R. (1999). What can be learnt about fractions only with computers. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 33–40). Haifa, Israel.

Arnon, I., Nesher, P. & Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 167–214.

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97–140). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1–32.

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*. Tesis de doctorado no publicada. España: Universidad de Salamanca.

Belmonte, J. & Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 139–171.

Bernabé, A. (1988). *De Tales a Demócrito. Fragmentos presocráticos*. Madrid: Alianza Editorial.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23 (3), 247–285.

Borges, J. (1928). *El idioma de los argentinos*, Madrid: Alianza Editorial.

Borges, J. (1952). *Otras inquisiciones*, Buenos Aires: Ediciones Sur.

Brown, A., McDonald, M. & Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 115–141.

Caglayan, G. (2017). Real analysis students' understanding of pointwise convergence of function sequences in a DGS assisted learning environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 49,

61–81.
Castro, I. & Pérez, J. (2007). *Un paseo finito por lo infinito. El infinito en Matemáticas.* Bogotá: Editorial Pontificia Universidad Javeriana.
Cañón, C. (1993). *La Matemática creación y descubrimiento*. Madrid: UPCO.
Codes, M. & González-Martín, A. S. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(1), 89–110.
Dreyfus, T. & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 271–300.
Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.
Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359.
Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266.
Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, K. & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(1), 99–121.
Dubinsky, E., Weller, K. & Arnon, I. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The Case of 0.999... and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*. 13(3), 232–258
Falk, R. (1994). Infinity: A Cognitive Challenge. *Theory & Psychology*, 4(1), 35–60.
Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. *Osnabrücker Schriften zür Mathematik*, 1, 148–176.
Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10 (1), 491–512.
Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel Publ.
Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 23(48), 309–329.
Galilei, G. (1638). *Dialogues Concerning Two New Sciences*. New York: Dover Publications.
Gutierrez-Figueroa, X. & Parraguez, M. (2017). *El triángulo de Sierpinsky*. Medellín: Universidad de Medellín.
Hannula, S. Pehkonnen, E., Maijal, H. & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 42(2), 317–337.
Hauchart, C. & Rouche, N. (1987). Apprivoiser L'infini: Un Enseignement des Débuts de L'analyse. CIACO, Lovaine.
Kahn, K., Sendova, E., Sacristán, A.I. & Noss, R. (2011). Young Students Exploring Cardinality by Constructing Infinite Processes. *Technology, Knowledge and Learning* 16(1), 3–34.

Kidron, I. & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 183–199.

Kuhn, T. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions* (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.

Radu, I. & Weber, K. (2011). Refinements in mathematics undergraduate students' reasoning on completed infinite iterative processes. *Educational Studies in Mathematics*, 78(2), 165–180.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Laraudogoitia, J. P. (2009, Noviembre 11). Supertasks. Recuperado de https://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/spacetime-supertasks/

Manfreda, V. & Hodnik, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(2), 389–412.

Malet, A. (1996). *From Indivisibles to Infinitesimals*. España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 167–182.

Medina, A. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecné, episteme y didaxis: revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, 9, 45–59.

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A. & Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18 (3), 329–358.

Moreno, L. & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211–231.

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM Mathematics Education*, 51(7), 1043–1054.

Piaget, J. & García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures* Cambridge, MA: Harvard University Press. (Obra original publicada en 1975).

Roa-Fuentes, S. (2012). *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV - IPN. México.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89–112.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática*, 26(1), 73–101.

Sacristán, A. I. (1991). Los obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. *Educación Matemática*, 3(1), 5–18.

Sacristán, A. I. (2003). Dificultades y paradojas del infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 262–279). México: Fondo de Cultura Económica.

Sacristán, A. I. & Noss, R. (2008). Computational Construction as a Means to Coordinate Representations of Infinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(1), 47–70.

Salat, R. (2011). El infinito en matemáticas. *Números*, 77, 75–83.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371–397.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E. & Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 93–125.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2), 199–238.

Tall, D. & Tirosh, D. (2001). Infinity – the never-ending struggle. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2/3), 129–136.

Tirosh D. (2002) The Role of Students' Intuitions of Infinity in Teaching the Cantorian Theory. In Tall D. (eds), *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library* (pp. 199–214). Springer, Dordrecht.

Tsamir, P. & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets - a process of abstraction: the case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1) 1–23.

Villabona, D. (2015). *Construcciones dinámicas y estáticas del infinito: Un análisis teórico en un contexto de paradojas.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Villabona, D. y Roa-Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación Matemática*, 28(2), 119–150.

Villabona, D., Oktaç, A. & Roa-Fuentes, S. (2019). Implicaciones teóricas de la Totalidad como una nueva estructura en la teoría APOE. En Ojeda, A., Moreno, L., Gómez, A., López, L., Morgado, C., Orozco, J., Romero, F. y Salinas, G. (Eds.), Actas y Contenido Temático. 5º Coloquio de Doctorado en Matemática Educativa, 1, 155–162. México: Cinvestav-IPN.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1(1), 107–122.

Waldegg, G. (2005). Bolzano's Approach to the Paradoxes of Infinity: Implications for Teaching. *Science & Education*, 14, 559–577.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the AMS*, 51(7), 741–750.

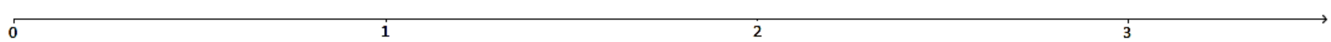
Wijeratne, C. & Zazkis, R. (2016). Exploring conceptions of infinity via super-tasks: A case of Thomson's Lamp and Green Alien. *Journal of Mathematical Behavior*, 42, 127–134.

ANEXOS

INSTRUMENTO FINAL TIPO I

NOMBRE: ______________________________________ Página 1: Núm. Reales

1. Represente los siguientes números en la recta real:
   - 0.55
   - $\frac{1}{3}$
   - $0.999\ldots$
   - $\frac{3}{2}$
   - $0.333\ldots$
   - $\frac{7}{4}$
   - $\sqrt{2}$



2. Establezca una relación de orden $(<, =, >)$ entre los números:

$$0.3999\ldots \;\_\_\_\_\_\; 0.34$$

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ____________________________________ Página 2: Aq-Tor

Contexto 1. Paradoja de Aquiles y la tortuga

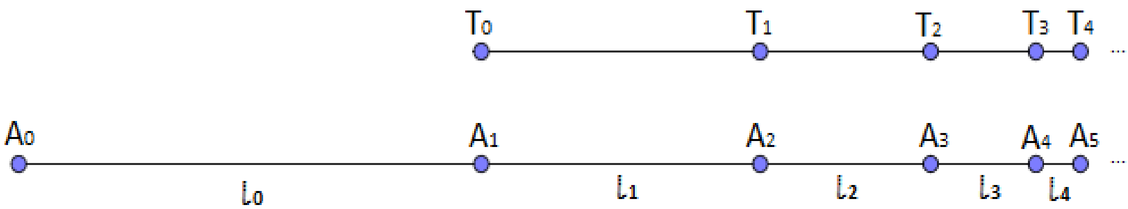
Aquiles, hijo de la diosa Tetis, héroe de la guerra de Troya; apodado “el de los pies ligeros” gracias a su gran velocidad, decide enfrentarse a una tortuga en una carrera que se llevará a cabo en una pista recta, a velocidad constante. Para que la disputa sea un poco más justa, Aquiles da a la tortuga una ventaja de $\frac{3}{10}$ de kilómetro. Al iniciar la carrera puede verse que cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. En un nuevo intento, Aquiles va tras la tortuga, pero al llegar a donde ésta se encontraba descubre que ya ha avanzado otro pequeño tramo. Así, decide seguir tras ella, pero en cada intento, la tortuga ha recorrido una pequeña distancia; de esta manera, ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga? Asuma que Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga.

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ____________________________________ Página 3: Sol. Luc.

Solución de Lucía:

Sean A_i y T_i son las posiciones que ocupan Aquiles y la tortuga en la iteración i, respectivamente. Las l_i son las distancias que separan a Aquiles de la tortuga en dada iteración.



Como Aquiles es 10 veces más rápido que la tortuga y la ventaja inicial es de $\frac{3}{10}$, es decir $l_0 = \frac{3}{10}$. Se puede determinar la sucesión l_n de la siguiente manera:

$$l_1 = \frac{l_0}{10} = \frac{3/10}{10} = \frac{3}{100}$$

$$l_2 = \frac{l_1}{10} = \frac{3/100}{10} = \frac{3}{1000}$$

$$l_3 = \frac{l_2}{10} = \frac{3/1000}{10} = \frac{3}{10000}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$l_n = \frac{l_{n-1}}{10} = \frac{3/(10)^n}{10} = \frac{3}{10^{n+1}}$$

La anterior expresión nos permite determinar la distancia que separa a Aquiles de la tortuga en un momento n. l_n es una sucesión que converge a cero ya que 10^{n+1} puede hacerse tan grande como se quiera, con lo anterior queremos decir que:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^{n+1}}\right) = 3(0) = 0$$

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ____ Página 4: igual 0.33

¿Es cierta la igualdad $0.333\ldots = \frac{1}{3}$?

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ____ Página 5: Igual. 0,9

¿Es cierta la igualdad 0.999…=1?

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ______________________________________ Página 6: n

¿En cuál iteración n Aquiles logra alcanzar a la tortuga?

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ______________________________________ Página 7: Distanc.

¿A qué distancia del punto de partida de Aquiles, Aquiles logra alcanzar a la tortuga?

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ___________________________________ Página 8: Met.Frac

Suponga que se establece una meta a una distancia de $\frac{1}{3}$ kilómetro del punto de partida de Aquiles. A qué distancia de la meta Aquiles alcanza a la tortuga (llame x a la distancia entre la meta y el punto en el que Aquiles alcanza a la tortuga).

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ______________________________________ Página 9: Met.Dec

Suponga que se establece una meta a una distancia de $0{,}333\ldots$ kilómetro del punto de partida de Aquiles. A qué distancia de la meta Aquiles alcanza a la tortuga (llame x a la distancia entre la meta y el punto en el que Aquiles alcanza a la tortuga).

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ______________________________________ Página 10: Ecuac.

Resuelva la siguiente ecuación:

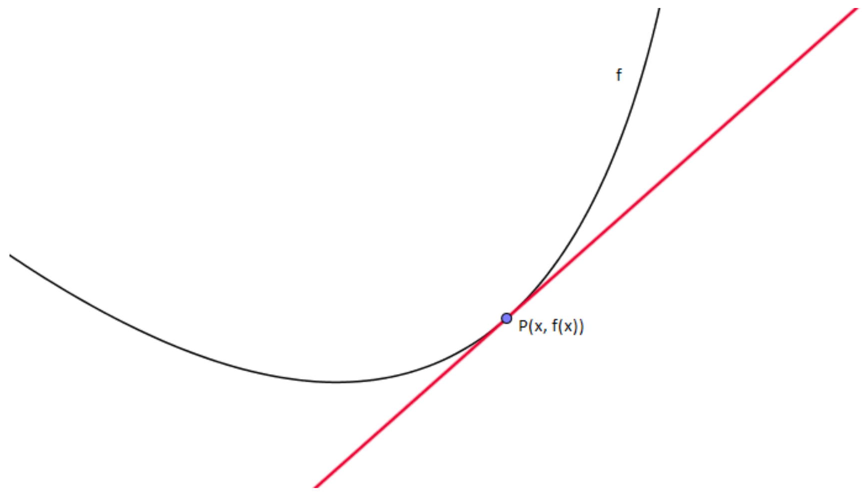
$$0.333\ldots + x = \frac{1}{3}$$

INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ____________________________________ Página 11: Tang.

Contexto 2. Problema de la recta tangente.

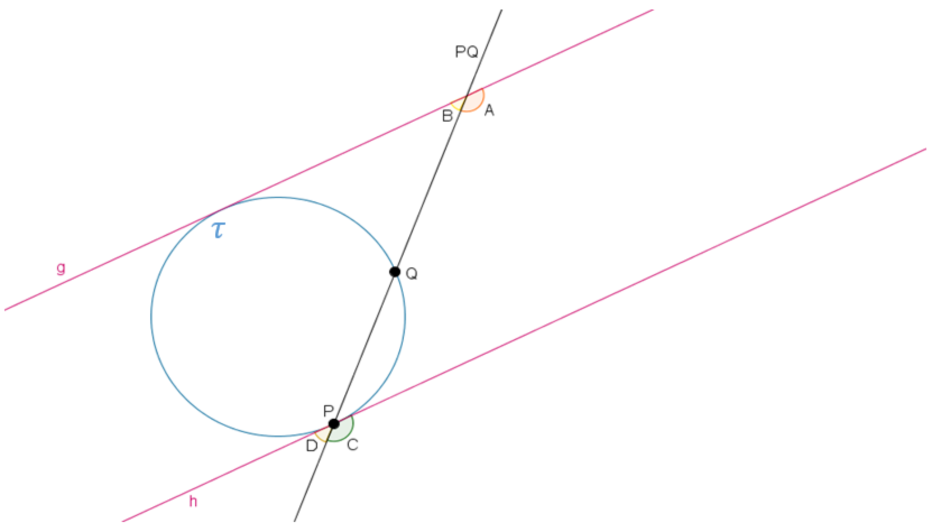
Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva f en el punto P (este es un problema muy conocido en cálculo de una variable, se denomina problema de la recta tangente). Suponga que f es continua en un intervalo que contiene a x.



INSTRUMENTO TIPO I

NOMBRE: ______________________________________ Página 12: Tang.Ang

En la siguiente construcción, determine la relación y si es posible la medida de los ángulos A, B, C y D en la situación límite cuando $Q \rightarrow P$. Las rectas g y h son paralelas entre sí y tangentes a la circunferencia τ (la recta h es tangente a τ en el punto P y Q es un punto cualquiera sobre la circunferencia τ).



INSTRUMENTO FINAL TIPO II

NOMBRE: ______________________________________ Página 1: Unión

Contexto 1: Unión infinita de conjuntos.

¿Cuáles y cómo son los elementos generados por $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$? P denota el "conjunto potencia" que es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado.

INSTRUMENTO TIPO II

NOMBRE: ____ Página 2: Probl. Un.

Dados los conjuntos:

$A = \{-1,\ 3,\ 5\}$

$B = \{1,\ 5,\ 10,\ 11\}$

$C = \{-4,\ 3\}$

Encuentre:

e. $P(A)$
f. $A \cup B$
g. $B \cup C$
h. $\cup_{k=1}^{5} \{1,\ 2,\ \dots,\ k\}$

INSTRUMENTO TIPO II

NOMBRE: ______________________________________ Página 3: Card

Determine el cardinal de los siguientes conjuntos:

d. $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})$
e. $A = \{-3,\ 1,\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})\}$
f. $B = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \mathrm{j},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})\}$
g. $C = \{\mathbb{N},\ \cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k\})\}$

INSTRUMENTO TIPO II

NOMBRE: ____ Página 4: Pro.Card

Sean los conjuntos:

$A = \{1,\ 4,\ 6\}$

$B = \{2,\ 5,\ 9\}$

$C = A \cup B$

$D = \big\{B,\ 4,\ \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}\big\}$

$E = \big\{\{1,\ 4,\ 6\},\ 3,\ \mathbb{N}\big\}$

Determine:

d. El cardinal del conjunto C

e. El cardinal del conjunto D

f. El cardinal del conjunto E

INSTRUMENTO TIPO II

NOMBRE: ______________________________________ Página 5: Acc.fin

3. Determine el cardinal de los siguientes conjuntos:

   c. $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\})$
   d. $P(\mathbb{N})$

4. ¿Es cierta la igualdad $\cup_{k=1}^{\infty} P(\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ k\}) = P(\mathbb{N})$?