CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

RESIGNIFICACIÓN DE LOS USOS DE LA DERIVADA EN UN DISEÑO ESCOLAR CON PERSPECTIVA DE DIALÉCTICA EXCLUSIÓN-INCLUSIÓN: PREDICCIÓN, COMPORTAMIENTO TENDENCIAL Y ANALITICIDAD

Tesis que presenta:

José Luis Morales Reyes

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias
Especialidad en Matemática Educativa

Director de la tesis:
Dr. Francisco Cordero Osorio

Ciudad de México
Septiembre de 2020

RESIGNIFICACIÓN DE LOS USOS DE LA DERIVADA EN UN DISEÑO ESCOLAR CON PERSPECTIVA DE DIALÉCTICA EXCLUSIÓN-INCLUSIÓN: PREDICCIÓN, COMPORTAMIENTO TENDENCIAL Y ANALITICIDAD

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Cordero Osorio

COMITÉ EVALUADOR

Dr. Milton Rosa

Universidade Federal de Ouro Preto

Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav)

Unidad Zacatenco, Ciudad de México.

Dr. Francisco Cordero Osorio

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav)

Unidad Zacatenco, Ciudad de México.

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría.

José Luis Morales Reyes

Becario No. 941960

Esta investigación fue financiada por CONACYT, con el proyecto "Una categoría de modelación matemática. La pluralidad epistemológica y la transversalidad de saberes: los aprendizajes de los significados de la matemática en las ingenierías y en los diferentes niveles educativos". Clave 0284259.

Para mis padres

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios y a mis padres, por su amor hacia mí y por su apoyo incondicional en todos los momentos de este sueño, el cual empezó desde hace varios años. Un sueño que me llevó hasta otro país y que me permitió adquirir grandes experiencias, personales y académicas.

También agradezco a las personas que me motivaron a iniciar mis estudios de maestría. Dentro de ellos el Dr. William Ugalde, quien desde que lo conocí sembró en mí la espinita de ver qué es lo que se hacía fuera de Costa Rica, además la M. Sc. Marianela Alpízar con quien di mis primeros pasos en el campo de la investigación y por quien conocí un poco sobre el Cinvestav. No puedo olvidar a la Dra. Mariel Gavarrete, gracias a ella supe lo que significa realizar un postgrado en nuestra disciplina y acerca de Relme, donde de cierta forma empecé esta meta.

En esta experiencia tuve la oportunidad de tener excelentes compañeros y colegas mexicanos, colombianos y hondureños: Jimy, Antonio, Luis Carlos, Sindi, Elena, Carlos, Sofi y Viri, mil gracias por todos los cumpleaños, paseos y discusiones académicas. En especial recalco a Antonio, Luis Carlos y Eleany, mi familia mexicana, con quienes constantemente tenía buenos debates sobre la disciplina ¡A todos, gracias por su amistad y por siempre estar ahí en los momentos difíciles que se presentan en este tipo de aventuras!

Asimismo tuve el privilegio de ser estudiante de investigadores muy destacados, de quienes obtuve grandes aprendizajes: Dr. Francisco Cordero, Dr. Ricardo Cantoral, Dra. Rosa María Farfán, Dra. Gisela Montiel, Dra. Claudia Acuña y Dr. Armando Cuevas ¡Gracias por hacerme ver la disciplina con profundidad, pasión y entusiasmo!

No puedo omitir agradecerle enormemente a mi asesor, Dr. Francisco Cordero, gracias por brindarme esta oportunidad, por confiar en mí y por mostrarme la complejidad e importancia de nuestra disciplina.

También le doy gracias a mis compañeros del Seminario de Doctorado Soltsa: Irene, Diana, Sindi, Falconery, Claudio, Henry y Eleany, por todo el crecimiento académico que teníamos en cada sesión de los viernes.

Además, agradezco a mis amigos de Costa Rica, que no dudaron en apoyarme desde que supieron de esta decisión y de quienes sentí constantemente su compañía en cada mensaje: Rocío (teacher), Laura, Wendy, Steven y Gerardo. De igual manera, agradezco a mis exestudiantes por su cariño y por siempre estar apoyándome: Pani, Diego, los MATEM 2016 y Mora.

Finalizo agradeciendo a los estudiantes, de Ingeniería Química de la Universidad de Costa Rica y de Química Industrial de la Universidad Nacional, que colaboraron en el desarrollo de esta investigación.

"Lo único que se interpone entre ti y tu sueño, es la voluntad de intentarlo y la creencia de que en realidad es posible"
Joel Brown

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO IV
RESULTADOS Y DISCUSIONES

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PROSPECTIVAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

En esta investigación se parte de reconocer que ciertos *usos* de la derivada, en el cotidiano profesional de la ingeniería, habitualmente, están excluidos en la matemática escolar. Por lo que, es primordial crear una relación en la que no solo la matemática escolar afecte la matemática de la realidad sino que también la matemática de la realidad permee la matemática escolar, y que además se considere ambos saberes con el mismo valor epistemológico.

Con este fin se elabora un *diseño de situación escolar de socialización* con perspectiva de *dialéctica exclusión-inclusión*. Este tipo de diseños se basan en una epistemología que favorece los *usos* del conocimiento matemático y en una perspectiva teórica que orienta el enfoque del diseño, contrarresta el fenómeno de exclusión y permite analizar el proceso de resignificación de los participantes. La epistemología utilizada proviene de la consideración de una categoría de modelación, la cual es una práctica plasmada específicamente como la argumentación de una situación en cuestión, compuesta de significaciones y resignificaciones con sus respectivos procedimientos, que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los participantes son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente

Para la articulación de estos elementos se recurrió a los *usos* de la derivada que emergen en una comunidad de ingenieros químicos en el análisis gráfico de los compuestos químicos de transformadores eléctricos. En este contexto, surgen usos de la derivada que no forman parte del cálculo escolar: *predicción*, *comportamiento tendencial* y *analiticidad*. Basados en estos elementos se elaboró un diseño escolar para socializarlo con estudiantes de ingeniería química. La pregunta de investigación que se propuso en este trabajo es *¿cuáles son los procesos de valoración de los usos de la derivada, que surgen en el estudiantado, en el tránsito entre significarla como pendiente de una recta tangente a resignificarla como una predicción, como un comportamiento tendencial y como una analiticidad?*

Los resultados muestran que el tránsito entre las tres etapas que componen el diseño lleva a los participantes a confrontar el conocimiento de la matemática escolar: deben determinar rectas tangentes pero sin conocer la expresión algebraica de la función y el punto de tangencia, y además deben determinar comportamientos de los gráficos y estados posteriores recurriendo para esto al trazo de rectas tangentes. Estos son aspectos que permiten valorar en su cotidiano disciplinar el uso del conocimiento matemático; no obstante, no constituyen, actualmente, ningún eje didáctico ni para los textos escolares ni para el currículum escolar.

ABSTRACT

This investigation begins by recognizing that certain uses of the derivative used by everyday professional engineers are, by way of practice, excluded from school mathematics. Therefore, it is essential to create a relationship in which not only mathematical school affects the mathematics of reality but also the mathematics of reality permeates mathematical school, and in which both are considered to have the same epistemological value.

Consequently, a design of school socialization situation with an exclusion-inclusion dialectic perspective is developed. These designs are based on an epistemology that favors the uses of mathematical knowledge and on a theoretical perspective, which on the one hand guides the focus of the design, counteracts the phenomenon of exclusion, caused by the mathematical school discourse, and allows the analysis of the process of resignification of the participants. The epistemology that is applied is a *category of modelling*, which is a practice specifically made up of the argumentation of the situation in question, which consists of significations and resignifications with their respective procedures that are constructed according to the operations that the participants can carry out, with the conditions that can be captured and transformed and with the concepts they build progressively.

For the articulation of these elements, the uses of the derivative that emerge in a community of chemical engineers in the graphic analysis of the chemical compounds of electrical transformers are used. In this context, uses of the derivative that are not part of the school calculus arise: prediction, trend behavior and approach. Based on these elements, a school design was developed to interact with chemical engineering students. The research question proposed in this work is what are the valorization processes of the uses of the derivative that arise in the student in the transition between signifying it as a slope of a tangent straight line and resignifying it as a prediction, as a trend behavior and as an analyticity?

The results show that the transition between the three stages that make up the design leads the participants to confront their knowledge of mathematical school: they must determine tangent straight lines but without knowing the algebraic expression of the function and the tangent point, but they also must determine the behavior of the graphs and subsequent states by resorting to the drawing of tangent lines. These are aspects that make it possible to value the uses of the mathematical knowledge in their daily lives. Currently, these elements do not comprise a didactic axis for school texts, nor for the school curricula.

INTRODUCCIÓN

En general, las investigaciones en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo se han centrado en las dificultades de los estudiantes, el análisis de los planes de estudio, las prácticas escolares de los profesores, el uso de la tecnología y el diseño de tareas (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces y Törner, 2016). Sin embargo, nunca o pocas veces la preocupación ha sido cómo utiliza el conocimiento matemático el estudiantado (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

En este sentido, el planteamiento que se hace en esta investigación parte de la construcción social del conocimiento matemático y consiste en reflexionar sobre la necesidad de un marco de referencia que permita crear una relación horizontal y recíproca entre la matemática escolar y la realidad. De esta manera, el trabajo se enmarca en un enfoque que concibe el conocimiento generándose a la par de la experiencia del humano, lo que permite considerar que el conocimiento se construye cuando es utilizado y tiene un funcionamiento específico situacional (Cordero, 2016b).

Con este fin se considera una variedad de categoría de modelación propuesta dentro del programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (Cordero, 2017), cuyo objetivo consiste en revelar los *usos* del conocimiento matemático en el trabajo, la escuela y la ciudad, y a raíz de esto crear un impacto educativo al buscar cómo llevar la realidad a la matemática escolar.

Estos aspectos resaltan la necesidad del rediseño del discurso matemático escolar, el cual trastoca aspectos ontológicos y epistemológicos del conocimiento matemático, y además ha provocado fenómenos como la adherencia, la exclusión y la opacidad (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Específicamente, en esta investigación, se reconoce la exclusión (Soto, 2014) de ciertos usos de la derivada en la matemática escolar. Con el propósito de incluirlos se recurre a la resignificación de usos de la derivada que emergen en una comunidad de ingenieros químicos (Pérez-Oxté y Cordero, 2020). Para lo cual, se elabora un *diseño de* *situación escolar de socialización*, el cual se basa en una epistemología que favorece el aprendizaje de los usos del conocimiento matemático, en contraparte de los diseños que promueven la emulación de conceptos (Cordero, 2017; Morales y Cordero, 2020). Su elaboración es orientada por la perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión (Soto y Cantoral, 2014) y es puesto en juego con estudiantes de Ingeniería Química de la Universidad de Costa Rica. Este diseño permite que la derivada como pendiente de una recta tangente se resignifique a través de la predicción, la generación de comportamientos tendenciales y la analiticidad.

De manera general, en este documento, estructurado en cinco capítulos, se reporta el desarrollo completo de esta investigación. En el capítulo uno se presenta con detalle la problemática de la investigación, la justificación, la revisión bibliográfica, la pregunta de investigación y los objetivos que orientaron el trabajo. Posteriormente, se describen los fundamentos teóricos, a saber: programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes, cobrando especial importancia los diseños de situación escolar de socialización, el constructo de usos del conocimiento matemático y la dialéctica exclusión-inclusión.

En el tercer capítulo se detalla el método de investigación, que corresponde a una investigación cualitativa basada en el estudio de caso instrumental. Además, se describen los elementos etnográficos utilizados, las actividades que componen el diseño escolar y la unidad de análisis.

Seguidamente, se discuten los resultados encontrados, recurriendo para esto a las leyes de la dialéctica exclusión-inclusión: confrontación, unidad y cambio. En la última parte, se presentan las conclusiones, limitaciones y prospectivas de investigación.

Finalmente, es importante destacar que este trabajo tuvo retroalimentaciones externas gracias a que, durante su desarrollo, se realizaron presentaciones en RELME, EIME y en “Summer School on Mathematics Education”. Además, se obtuvo la publicación de un escrito en ALME y una ponencia aceptada en ICME (ver anexo 1).

CAPÍTULO I
CONSIDERACIONES INICIALES

CAPÍTULO I
CONSIDERACIONES INICIALES

En este capítulo se presenta un acercamiento a la problemática que se aborda en esta investigación, la cual parte de reconocer que la matemática escolar ha soslayado los usos del conocimiento matemático de la gente, en particular los usos de la derivada. Además, se recopilan los resultados de estudios previos relacionados con la derivada y en la última parte se presentan las preguntas y objetivos que orientaron este trabajo.

1.1. Justificación y problemática

El profesorado de matemáticas vive en una realidad en la que es constantemente cuestionado por sus estudiantes sobre el para qué de los conocimientos matemáticos. Ante esta pregunta no tienen un referente para responder cabalmente, solo cuentan con información curricular; es decir, se valen de un listado explícito y secuenciado de conceptos matemáticos de los programas de estudio (Buendía y Cordero, 2005; Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015; Cordero, 2016b).

En consecuencia, ante ese tipo de interrogantes es usual escuchar respuestas como las siguientes: la matemática sirve para desarrollar el pensamiento lógico; estudiamos este tema porque será de mucha utilidad cuando estén en la universidad; este tema es muy usado en distintas disciplinas científicas, entre otras. Aunque no se niega la veracidad de esas afirmaciones, son respuestas que no satisfacen la pregunta planteada. En el mejor de los casos el profesorado trata de dar respuestas con problemas aplicados a la "matemática de la realidad".

Debido a esto, en el ámbito educativo, en distintos países, se han planteado reformas curriculares con nuevas formas de enseñar, con consignas como la incorporación de problemas asociados al entorno del estudiante o todavía más impactante la creación de ambientes de la matemática de todos los días (Cordero et al., 2015). Aunque este tipo de propuestas parecen coherentes con la necesidad de una matemática funcional, la cuestión es ¿cuál es el marco de referencia para que el personal docente realice esa labor? Sino se tiene respuestas a esta pregunta se seguirán planteando problemas llamados reales, con un contexto incrustado, en el que el estudiantado continuará aplicando únicamente definiciones y algoritmos; problemas como determinar la medida de la altura de un árbol dada la longitud de su sombra y un ángulo de elevación, o como calcular el ingreso máximo de una empresa a partir de una función dada.

Lo anterior vislumbra que el conocimiento matemático ha sido la preocupación principal en la educación de la matemática, es decir; qué conoce el estudiantado y el profesorado de un tema matemático en cuestión; pero, nunca o pocas veces la preocupación ha sido cómo usan ese conocimiento matemático (Cordero et al., 2015). Por ende, solo a la matemática escolar se le ha dado un gran peso y como consecuencia se busca (nada obvio) cómo llevar esa matemática a la realidad, pero no se considera cómo llevar la matemática de la realidad al aula (ver Figura 1).

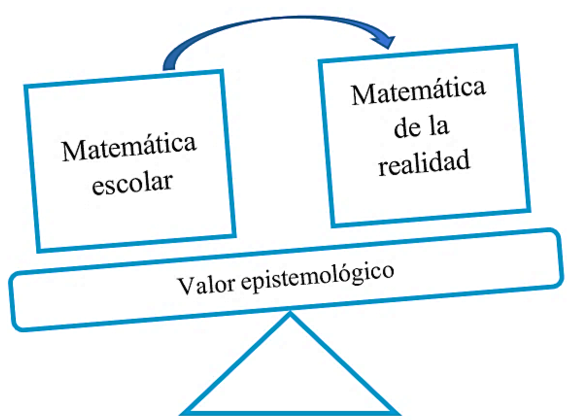


Figura 1. Hegemonía de la matemática escolar.

Sin embargo, en los últimos años han surgido preocupaciones relacionadas con la consideración de que las matemáticas deben responder también a los problemas de otras disciplinas. En este sentido, algunos autores han abierto el campo de investigación para considerar cómo las matemáticas viven en las llamadas “client disciplines” [disciplinas clientes], como la ingeniería, la economía, la medicina, etc.

Por ejemplo, Rasmussen, Marrongelle y Borba (2014) hacen un llamado a que la investigación examine de cerca las formas en que las ideas de cálculo se aprovechan en las disciplinas clientes, cómo se conceptualizan y representan estas ideas en ellas, y qué podrían significar para la enseñanza del cálculo.

De manera similar, Hitt y González-Martín (2016) subrayan que existe la "need to investigate the relationships between calculus and client disciplines in terms of practices, what should be taught, and what students are learning" [necesidad de investigar las relaciones entre el cálculo y las disciplinas clientes en cuanto a las prácticas, lo que se debe enseñar y lo que los estudiantes están aprendiendo] (p. 29).

Además, existen enfoques teóricos, como la socioepistemología y la etnomatemática, que se han preocupado por la consideración y valoración de las matemáticas no escolares. Rosa y Orey (2015) afirman que esto puede corresponder a una insubordinación creativa, en Educación Matemática, debido a la perturbación del orden existente en las matemáticas académicas, al desarrollar el estudio de ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que se encuentran en diversos y específicos contextos culturales fuera de la corriente principal de la ciencia y la academia. Por lo que, establecen que cada grupo cultural desarrolla formas únicas de organizar, analizar, comprender y resolver problemas específicos situados en el contexto de su situación real (Rosa y Orey, 2012).

En esa misma línea se encuentran las investigaciones que se realizan dentro del programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA) cuyo objetivo principal es buscar la creación de una relación horizontal y recíproca entre la matemática escolar y la matemática de la realidad (ver Figura 2).

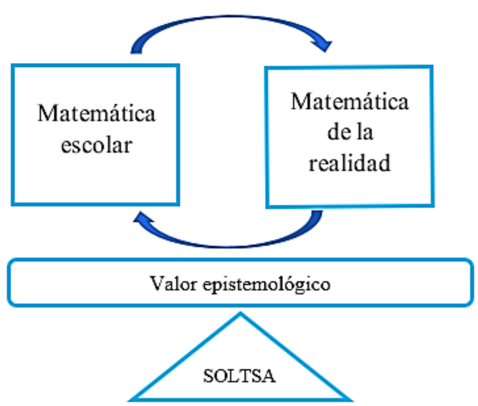


Figura 2. Relación horizontal y recíproca entre la matemática escolar y la realidad.

Un caso particular, dentro del programa SOLTSA, son investigaciones con la ingeniería. Estas han revelado que el uso del conocimiento matemático de la ingeniería no está relacionado con los cursos de matemáticas que normalmente componen el curriculum de su formación universitaria (Mendoza y Cordero, 2018; Mendoza, Cordero, Solís y Gómez, 2018). Este hecho marca un punto crucial que exhorta a la reflexión sobre la formación matemática que se le está dando a estos profesionales.

Por lo que, en esta investigación se elabora un diseño escolar para resignificar los usos de la derivada, recurriendo para esto a los usos que emergen de una situación relacionada con el diagnóstico de transformadores eléctricos en una comunidad de ingenieros químicos (Pérez-Oxté y Cordero, 2020). El diseño es puesto en juego con estudiantes de ingeniería química y pretende dar señales de cómo podría orientarse la enseñanza de la derivada, para que se cree una relación recíproca y horizontal entre la matemática escolar y el cotidiano de su profesión.

En las siguientes secciones se ofrece una descripción general de los elementos que han fortalecido la poca relación entre el cálculo escolar y las disciplinas clientes: discurso matemático escolar, fenómeno de exclusión y la enseñanza y aprendizaje de la derivada centrada en los objetos. Estos elementos son abordados con mayor amplitud en el marco teórico.

1.1.1. Discurso matemático escolar

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se identifica al discurso matemático escolar (dME) como la problemática fundamental de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. El dME es la función de la matemática escolar, la cual ha soslayado los usos y significados del conocimiento matemático, por lo que es necesario un rediseño del dME, el cual deberá responder a los fenómenos provocados por él, a saber: adherencia, exclusión y opacidad (Cordero, 2017).

Cordero (2017) describe esos fenómenos de la siguiente manera:

> Se denomina fenómeno de adherencia el no cuestionar ni trastocar la matemática escolar, produciendo una especie de fidelidad absoluta que resulta nociva para reconocer la pluralidad epistemológica que permite generar prácticas y usos del conocimiento matemático. Los fenómenos de exclusión y opacidad consisten, por una parte, que al no cuestionar la utilidad del conocimiento matemático se generan sentimientos de autoexclusión de la construcción social de ese conocimiento y, por otra, en los modelos educativos, con el afán de ganar homogeneidad del aprendizaje de la matemática se soslaya y opaca la pluralidad del pensamiento matemático. (p. 9)

Cabe destacar que en esta investigación se atenderá al fenómeno de exclusión, recurriendo para ello a la *dialéctica exclusión-inclusión*, la cual se aborda en el marco teórico de este trabajo.

Por otro lado, Soto (2010) en su tesis de maestría caracteriza al discurso matemático escolar como un sistema de razón, afirmando que presenta las siguientes características:

- Carácter utilitario: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. En contraparte del carácter funcional, el cual integra el conocimiento a la vida para transformarla (Buendía y Cordero, 2005).
- Atomización en los conceptos: no considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.
- Carácter hegemónico: Supremacía de argumentaciones y significados frente a otros.
- Conocimiento acabado y continuo: Lo que ha generado que la enseñanza de la matemática sea reducida a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.
- Falta de marcos de referencia para la resignificación: Se ha soslayado que la matemática responde a otras prácticas de referencia y por tanto es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

1.1.2. Fenómeno de exclusión

El fenómeno de exclusión fue ampliamente estudiado por Soto (2010, 2014), quien afirma que Bourdieu en la década de los setenta caracterizó un tipo de exclusión a partir de la imposición de significados arbitrarios legitimados socialmente, a lo que denominó violencia simbólica, y menciona que en la matemática escolar existe un fenómeno que se comporta de manera análoga: un dME que ha olvidado los contextos, las comunidades y las situaciones específicas donde emerge el conocimiento matemático.

Este dME considera solo una argumentación del conocimiento matemático, dejando por fuera un conjunto de argumentaciones del conocimiento que son usados por los sujetos al momento de construir conocimiento matemático en un contexto y una situación específica (Cordero et al., 2015).

De esta manera, Soto y Cantoral (2014) reconocen al dME como un sistema de razón (S.R.) que norma las prácticas y las representaciones sociales de los agentes del sistema educativo, rompiendo con la naturaleza del humano con la construcción intrínseca del conocimiento matemático en la actividad humana, y por tanto produce una violencia simbólica (V.S.). En el siguiente esquema se muestra el modelo de exclusión y las implicaciones de él.

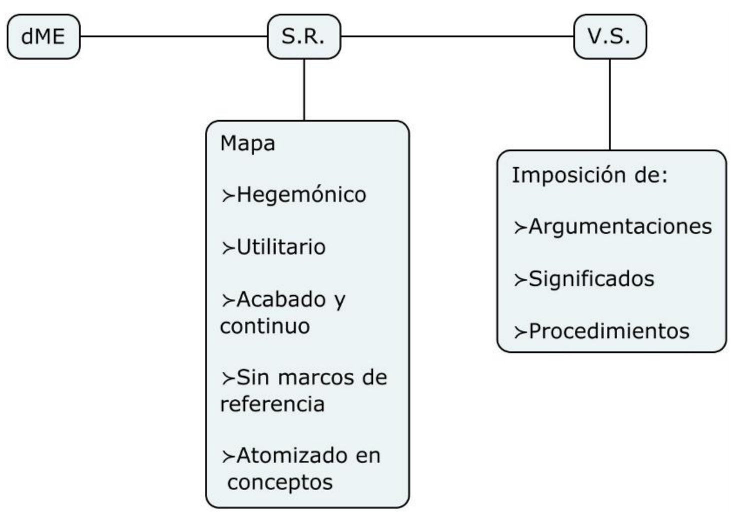


Figura 3. Modelo de exclusión (Soto y Cantoral, 2014).

1.1.3. Enseñanza de la derivada

En concordancia con Cantoral (2016), dada la importancia que tiene en los currículos el tema de derivada y sus indiscutidas aplicaciones dentro y fuera de las Matemáticas, es que se considera que su enseñanza no puede solo consistir en que los estudiantes repitan su definición o apliquen ciertas reglas para derivar una función dada.

No obstante, los programas de estudio en los que se involucra la derivada tienen por objetivo principal, de la enseñanza de este tema, realizar correctamente el estudio analítico y la representación gráfica de una función, en donde de forma mecánica se determinan la primera y segunda derivada (Cantoral, 2016).

A manera de ejemplo, en la Tabla 1, se presenta la forma en que dos de las principales universidades públicas costarricenses establecen la enseñanza de la derivada para carreras no matemáticas. Cabe resaltar que, en Costa Rica, en general, los estudiantes de las carreras Enseñanza de la Matemática y Matemática Pura reciben un curso de cálculo enfocado más en aspectos demostrativos (matemática deductiva) que en aspectos prácticos (matemática inductiva), mientras que los estudiantes de Ingeniería, Administración, Economía, entre otros, reciben el mismo curso de cálculo; en el cual se privilegian aspectos procedimentales.

Tabla 1
La derivada en los cursos universitarios de cálculo costarricense

	Universidad Nacional (UNA)	**Universidad de Costa Rica (UCR)**
Curso	MAT002 Cálculo I	MA1001 Cálculo I
Contenidos	Definición de la primera derivada de una función en un punto. Interpretación de la primera derivada como razón de cambio instantáneo. Interpretación geométrica de la primera derivada en un punto. Cálculo de rectas tangentes y de	Definición de derivada. Reglas de derivación. Derivación implícita. Derivación logarítmica. Derivada de la inversa de una función. Derivadas de orden superior. Recta tangente y normal a una curva. Razón de cambio instantánea. Teorema de Rolle. Teorema del valor

	rectas normales a una curva. Función derivada. Teoremas sobre derivación de funciones: derivada de una suma, resta, producto, cociente. Regla de la cadena. Teorema del valor medio y Teorema de Rolle. Derivadas de orden superior. Derivación implícita. Derivación logarítmica. Problemas de razones de cambio. Extremos absolutos de una función continua. Extremos relativos a una función. Aplicación de la primera derivada al estudio del crecimiento de una función. Aplicación de la segunda derivada al estudio de la concavidad de una función. Criterios de primera, segunda y n-ésima derivada. Construcción de gráficas de funciones mediante su cuadro de variación (incluyendo asíntotas verticales, horizontales y oblicuas). Aplicación de la teoría de derivadas en resolución de problemas de optimización. Regla de L'Hopital.	medio. Regla de L' Hopital. Máximos y mínimos (absolutos y relativos). Teorema del valor extremo. Intervalos de monotonía y concavidad de una función. Criterio de la primera derivada y de la segunda derivada. Trazado de curvas. Problemas de optimización.

Fuente: Elaboración propia con base en documentos de Escuela de Matemática UNA (2019) y Escuela de Matemática UCR (2019).

En ambos cursos de cálculo se puede apreciar que los contenidos relacionados con la derivada corresponden a aspectos procedimentales, y aunque abordan diversos teoremas como el Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio, criterios de n-ésimas derivadas, el objetivo final es aplicarlos en la resolución de ejercicios centrados en el objeto matemático. Es decir, la enseñanza de la derivada se reduce a la emulación de aspectos procedimentales.

Consecuentemente, en concordancia con las secciones 1.1.1, 1.1.2 y 1.1.3, esta investigación pretende resignificar la derivada a través de sus usos en comunidades de conocimiento matemático. Con el fin de conocer cómo y cuáles han sido las contribuciones que se han hecho en la disciplina Matemática Educativa en relación con la enseñanza y aprendizaje de la derivada en la siguiente sección se presenta una revisión al respecto.

1.2. Revisión bibliográfica

En esta sección se recopilan los resultados de estudios previos relacionados con la derivada, para su realización se definieron algunos límites. El interés principal versó sobre dos elementos. Por un lado, sobre cuáles son los principales temas de investigación en relación con la derivada; y, por otro lado, sobre cuáles son los fundamentos teóricos utilizados en la elaboración de situaciones escolares para la enseñanza y aprendizaje de este tópico.

Para iniciar, se debe destacar que la construcción de esta sección comenzó con la revisión del documento "Teaching and Learning of Calculus", del ICME 13 Topical Surveys, de Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces y Törner (2016), el cual corresponde a un estudio sobre el estado del arte de la enseñanza y aprendizaje del cálculo.

Concretamente, Bressoud et al. (2016) dan una visión de algunas de las principales evoluciones de la investigación en el campo del aprendizaje y la enseñanza del cálculo, con un enfoque particular en los temas de investigación asociados al límite, derivada e integral. Así como un resumen de las problemáticas abordadas y de los nuevos temas que han surgido.

En relación con lo anterior, estos autores señalan que las investigaciones en este campo se han enfocado en las dificultades del estudiantado, análisis del currículo, prácticas escolares de los profesores, uso de tecnología y el diseño de tareas. Para abordar estas investigaciones se ha recurrido a una diversidad de marcos teóricos, entre ellos: Teoría de la Formación de Conceptos de Vinner y Hershkowitz (1980), Teoría de la Representación Semiótica de Duval (1995), Teoría de Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOS) de Dubinsky (1991), Three Worlds of Mathematics de Tall (2004), Teoría de la Situación Didáctica de Brousseau (1997), Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1985) y Commognitive Framework de Sfard (2008).

A continuación, se presenta un resumen de cada uno de los campos en los que se han enfocado las investigaciones, dando un mayor énfasis a la sección orientada al diseño de tareas, debido a que tiene una relación más directa con esta investigación.

- Dificultades del estudiantado. Específicamente en el caso de la derivada, Orton (1983) proporciona una de las primeras descripciones de las dificultades de los estudiantes. A pesar de que los estudiantes con los que realizó su estudio eran generalmente competentes en el cálculo de las derivadas, encontró importantes malentendidos de esta como tasa de cambio y sobre su representación gráfica, los cuales estaban frecuentemente ligados a una pobre o inadecuada comprensión de los límites, así como de la proporción y la proporcionalidad.

  Otro de los estudios citados y que permite resumir los principales hallazgos en esta línea, es el de Zandieh (2000) quien ofreció un marco para comprender las dificultades de los estudiantes con el concepto de derivada, haciendo hincapié en la necesidad de representaciones o contextos múltiples. Un aspecto importante de este trabajo es el reconocimiento de que los estudiantes suelen emplear seudo-objetos, un objeto que no va acompañado de una comprensión estructural de un proceso subyacente. De tal manera que, un estudiante podría saber que la derivada puede ser utilizada para encontrar la velocidad sin entender el proceso límite que explica por qué esto es así. Sin embargo, esta falta de comprensión puede llevar a una aplicación errónea de la derivada o a una interpretación inapropiada de su resultado. Zandieh (2000) también señaló la dificultad de pasar de la noción de derivada en un punto a la derivada como función.

- Análisis del currículo. En el caso particular de Alemania se menciona que la introducción del cálculo, en los planes de estudio, se dio desde principios del siglo XX. Además, con la influencia de los elementos de Bourbaki hubo algunos intentos de hacer, en la secundaria, cálculos tan rigurosos como a nivel universitario (cálculo épsilon-delta-infinitesimal), que no tuvieron éxito. Por otro lado, en los últimos veinte años el software y las nuevas herramientas llevaron a un replanteamiento parcial de los elementos que deben ser enseñados; sin embargo, todavía hay un fuerte lobby dentro de las comunidades de profesores y los editores de libros de texto para no cambiar demasiado (Bressoud et al., 2016).

  Estos autores también señalan que, a nivel latinoamericano, se puede mencionar el caso de Uruguay, donde la enseñanza del cálculo empieza en la educación secundaria con los límites y derivadas. Hace unas décadas, era habitual incluir otros temas como integrales, sucesiones, series y polinomios de Taylor, que hoy en día se trasladaron a los cursos de primer año universitario. Además, en las últimas décadas del siglo XX, a nivel universitario, los exámenes de Cálculo I solían estar divididos en dos partes: una dedicada a ejercicios prácticos de rutina y otra que debía evaluar los aspectos teóricos del curso.

  Específicamente la parte teórica en varias facultades eran sólo ejercicios de memoria que consistía en recordar las demostraciones de los principales teoremas. En algunos casos, esa parte del examen era muy exigente ya que se esperaba que los estudiantes utilizaran las ideas desarrolladas en clase para demostrar propiedades o mostrar contraejemplos. Sin embargo, actualmente esta parte ha prácticamente desaparecido.

- Prácticas en el aula. Los estudios que investigan las prácticas de los profesores en materia de cálculo suelen fundamentar su análisis en los resultados de cuestionarios y entrevistas. Estos instrumentos se construyen de acuerdo con la complejidad de los conceptos de cálculo subyacentes y las posibles dificultades de los estudiantes. El objetivo común es examinar la flexibilidad de las prácticas de los profesores tradicionales y la forma en que esto podría afectar el aprendizaje de los conceptos de cálculo por parte del estudiantado.

  Adicionalmente, se menciona que, basándose en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y Three Worlds of Mathematics, Smida y Ghedamsi (2006) estudiaron las prácticas de enseñanza del análisis real en el primer año de los cursos de matemáticas en las universidades de Túnez. Distinguieron dos tipos de proyectos de enseñanza: (1) los proyectos donde los axiomas, las estructuras y el formalismo son el discurso que justifica y genera el conocimiento esperado; (2) los proyectos donde la variedad de opciones para probar, ilustrar, aplicar o profundizar los resultados matemáticos ponen de manifiesto una intención de inscribirse en un entorno constructivista; este proyecto combina la lógica de las matemáticas y las demandas cognitivas.

  En una sección complementaria de un cuestionario, de estas autoras, aplicado al profesorado de cuatro universidades se pone de relieve tres grupos de profesores: 1) los profesores con un perfil lógico-teórico, que no tienen en cuenta las demandas cognitivas; 2) los profesores con un perfil lógico-constructivista, que tienen alguna preocupación cognitiva; 3) casi una cuarta parte de los profesores tienen en cuenta las demandas cognitivas (Bressoud et al., 2016).

- Uso de tecnología: una manera de mejorar la visualización. De todas las áreas de las matemáticas, el cálculo es la que más interés e inversión ha recibido en el uso de la tecnología. La mayoría de las investigaciones destacan el poder de la tecnología para mejorar las habilidades de visualización. Por lo que, el papel de la tecnología ha sido el tema principal discutido en el grupo de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo en las últimas tres ediciones del Congreso Internacional de Educación Matemática (International Congress on Mathematical Education [ICME]).

En ICME las contribuciones investigaron la potencia de la tecnología mediante perspectivas empíricas. En general se centraron en la interrelación entre el pensamiento intuitivo y analítico en la enseñanza y el aprendizaje de las ideas básicas del cálculo con software matemático, incluidas las calculadoras gráficas. Estas ideas están particularmente relacionadas con las expansiones decimales de los números reales y su vínculo con la noción de límite, la relación entre derivada e integral, multivariable, etc. Algunas de estas contribuciones destacaron las dificultades de traducir estas ideas a un modelo digital de manera que se maximice la coherencia de las interpretaciones de los estudiantes (Bressoud et al., 2016).

- Diseño de tareas. Alrededor del diseño de tareas, en el campo del cálculo y el análisis, existe una variedad de marcos teóricos. Sin embargo, independientemente de los marcos que se seleccionen, la elaboración de estas tareas ha estado condicionada por los requisitos de aprendizaje de los estudiantes.

  Por ejemplo, Gyöngyösi et al. (2011) utilizaron la Teoría Antropológica de lo Didáctico como marco, y describieron un experimento destinado a utilizar el trabajo basado en el Sistema Algebraico Computacional (CAS, por sus siglas en inglés) para superar las dificultades de la transición del cálculo al análisis real. En este estudio, se diseñaron y analizaron un conjunto de praxeologías de cálculo según su valor pragmático (eficiencia de las tareas de resolución) y su valor epistémico (perspicacia que proporcionan a los objetos y teorías matemáticas a estudiar).

Por su parte, Job y Schneider (2014) se basaron en el obstáculo epistemológico llamado positivismo empírico para interpretar las reacciones de los estudiantes a las tareas que implican límites. Estas tareas están relacionadas con dos tipos de praxeologías: pragmáticas y deductivas. Sostuvieron que un nivel praxeológico pragmático de racionalidad debería ser un paso preliminar de desarrollo que permita a los estudiantes percibir varios lados del concepto de límite.

Basándose en el análisis de APOS del concepto de infinito, Voskoglou (2013) sugirió un enfoque didáctico para enseñar los números reales a nivel elemental. Este enfoque está diseñado de acuerdo con las múltiples representaciones del número real y a las conexiones entre ellas. Kouropatov y Dreyfus (2013) han utilizado estos conocimientos para construir y analizar un plan de estudios para estudiantes de secundaria israelíes que les ha ayudado a construir "la integración como un agregado conceptual de elementos de conocimiento desde la aproximación a través de la acumulación hasta el teorema fundamental del cálculo".

Para estos investigadores, la idea de la acumulación es un concepto básico para un plan de estudios de cálculo integral en la escuela secundaria. Más recientemente (Kouropatov y Dreyfus 2014), se centraron particularmente en los episodios de enseñanza en los que los estudiantes tratan, por primera vez y de forma intuitiva con las nociones antes mencionadas.

Oehrtman (2014) ha demostrado cómo el estímulo y el desarrollo de la metáfora de aproximación puede utilizarse para ayudar a los estudiantes a descubrir por sí mismos una definición matemáticamente correcta del límite. Bressoud et al. (2016) finalizan esta sección destacando que casi todos estos estudios y otros argumentaron que los cursos clásicos de cálculo exterminaron las raíces naturales de las ideas de cálculo. Las tareas

> utilizadas en estos diseños se basan frecuentemente en situaciones históricas incorporando las ideas originales que permiten a los matemáticos desarrollar sus concepciones de Cálculo. Hoy en día, las intuiciones podrían modificarse en relación con el nuevo entorno simbólico, pero la investigación muestra que las concepciones de los estudiantes y las ideas históricas sobre el cálculo están todavía firmemente entrelazadas.

De manera complementaria se realizó una búsqueda de estudios relacionados con la derivada en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, trabajos dentro de la Teoría Socioepistemológica, entre otros. Como resultado, este apartado está dividido en tres partes, a saber: estudios basados en el conocimiento del profesor, estudios basados en aspectos cognitivos y estudios relacionados con diseño de tareas. A continuación, se detallan cada uno de ellos.

La derivada es uno de los conceptos fundamentales del cálculo (Rosado y Cordero, 2006; Sánchez, García y Llinares, 2008); sin embargo, como señala Cordero (2001), un fenómeno didáctico con relación a la derivada consiste en que el estudiante no incorpora significados a la misma, aunque sabe que la derivada es la pendiente de una recta. En muchos de los casos, se considera solo como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación (Rosado y Cordero, 2006).

Sánchez et al. (2008) sostienen que el fondo de la cuestión radica en que los alumnos no han construido un significado adecuado de la derivada, y esa construcción parcial que se realiza durante los primeros años puede generarles dificultades en los cursos de cálculo. Aunque, es importante destacar, que estos autores mencionan que los significados que se deseen desarrollar sobre la derivada dependerán de las perspectivas teóricas que asuman los investigadores que se propongan estas tareas.

En ese sentido, en la literatura de la disciplina Matemática Educativa se pueden encontrar diversas investigaciones relacionadas con la derivada. Entre ellas, podemos identificar algunas enfocadas en errores y dificultades que tienen los estudiantes en su aprendizaje. Sánchez et al. (2008) afirman que ese fue el objetivo de las primeras investigaciones realizadas en este tema. Entre ellas, se pueden mencionar las siguientes:

Badillo (2003) identifica algunas limitaciones de aprendizaje en la comprensión gráfica de $f(x)$, $f'(x)$ y $f'(a)$ como: a) confusión entre la derivada en un punto y la función derivada, b) la reducción de la expresión de $f'(x)$ a la ecuación de la recta tangente y c) la gráfica de $f'(x)$ a la de la recta tangente. Además, destaca que comprender la idea de función derivada en un punto no necesariamente repercute en comprender la idea de función derivada, aunque menciona que aquellos sujetos que comprendían la idea de función derivada parecía que entendían la de derivada de la función en un punto.

Un estudio relacionado propiamente con la comprensión de la derivada de una función en un punto es el de Bouguerra (2019), donde se intenta determinar cuáles son las dificultades que impiden a los estudiantes de educación secundaria y de nivel superior aprehender y visualizar la derivada. Para esto utiliza como marco teórico la Imagen Conceptual y la Definición Conceptual (Tall y Vinner, 1981), y aplica un cuestionario a 60 estudiantes de secundaria y 20 de educación superior. Los resultados muestran que los participantes aprendieron de memoria la definición de una derivada en un punto y, por lo tanto, dan la representación simbólica sin saber que la derivada en un punto es una tasa de cambio instantánea.

Además, Bouguerra (2019) señala que esa introducción de la derivada, a través de una definición, no ayuda al estudiantado a comprender la derivada en un punto dado, porque en las ciencias físicas no han aprendido que la velocidad instantánea es una tasa de cambio instantánea y en matemáticas no pueden encontrar el término "tasa de cambio" en la definición formal. Entonces, destaca que las dificultades de los alumnos también radican en la articulación de los conocimientos de las ciencias físicas y de las matemáticas.

Otro estudio en la línea de las dificultades y errores es el de Orton (1983), mencionado por Sánchez et al. (2008), quien detectó los errores que comenten los estudiantes en tareas de diferenciación, y los clasificó en:

- Estructurales: relativo a los conceptos involucrados.
- Arbitrarios: cuando el estudiante se comporta arbitrariamente sin tomar en cuenta los datos del problema.
- Manipulación: aunque los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

Adicionalmente, también se encuentran estudios relacionados con el conocimiento matemático que tiene los profesores sobre la derivada. Entre ellos Garrido (2014), quien exploró la compresión acerca del concepto de derivada de una función, con once profesores de cálculo de nivel medio superior. Su intención era determinar la articulación entre la parte conceptual (comprensión de la definición, de la interpretación geométrica, de la derivada como razón de cambio) y algorítmica (reglas de derivación y regla de la cadena) por parte de los profesores en la resolución de problemas.

Garrido (2014) concluye destacando que los profesores conciben el proceso de derivación "como la obtención de una fórmula a partir de otra mediante la aplicación formal de las reglas de derivación y no como el proceso para obtener la función derivada apoyado en un análisis previo sobre la derivabilidad" (p. 93).

Otro tipo de estudios que se pueden encontrar sobre la derivada son aquellos relacionados con las concepciones que tienen acerca de esta. Entre ellos, se puede mencionar el realizado por Bingolbali, Monaghan y Roper (2007), quienes analizan las concepciones que tienen sobre la derivada los estudiantes de las carreras Ingeniería Mecánica y Matemática. Los datos de ese estudio provienen de pruebas previas y posteriores, entrevistas con estudiantes y un análisis de los cursos de cálculo.

Bingolbali et al. (2007) muestran que las concepciones de los estudiantes de Ingeniería Mecánica y sus preferencias por la derivada se desarrollan en dirección de los aspectos de la tasa de cambio mientras que las de los estudiantes de Matemáticas se desarrollan en dirección de los aspectos de la tangente, además, señalan que los estudiantes de Ingeniería Mecánica ven las matemáticas como una herramienta y requieren los aspectos de aplicación en su curso.

Finalmente, se pueden mencionar investigaciones que analizan libros de texto, como Park (2016), quien estudia cómo tres libros de texto de cálculo, ampliamente utilizados en los EE.UU., permiten la comprensión de la derivada como un objeto de punto específico y como una función, basada para esto en el enfoque comunicacional de Sfard (2008). Dentro de sus conclusiones menciona que las realizaciones tanto de la derivada en un punto como de la derivada de una función son mediadas con símbolos casi idénticos, lo que sugiere una posible dificultad para comprender la diferencia entre ellas.

Se puede notar que las investigaciones mencionadas destacan la poca significación que tienen sobre la derivada tanto docentes como estudiantes. Entendiendo significación, en estos casos, como el manejo de una expresión analítica, del límite del cociente incremental, o de la interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente. Por ello, dichas investigaciones señalan la necesidad de articular entre las distintas definiciones de derivada, sus sistemas de representación y entre la derivada de una función en un punto y la función derivada.

Por otro lado, los trabajos enmarcados en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, de acuerdo con Montiel (2005), “abandonan el acercamiento a la derivada a partir de la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene tangente” (p. 668).

Dentro de estos estudios, se puede citar a Rosado y Cordero (2006), quienes plantean como problemática la ausencia, en la matemática escolar, de marcos de referencia que permitieran resignificar la derivada. Por lo que, su contribución consistió en formular dicho marco, a través del diseño de la situación de la linealidad del polinomio, basados en la socioepistemología y utilizando como método la teoría APOE.

Cabe mencionar que, la linealidad del polinomio es una propiedad que establece que dado un polinomio de grado n, la ecuación de su recta tangente en el punto x=0 corresponde a la parte lineal del polinomio. Aunque, esta también consiste en formular una función con comportamiento tendencial; es decir, establecer relaciones entre una función polinómica y la ecuación de su parte lineal, a través de determinar que el comportamiento de la gráfica del polinomio tiende al comportamiento de la gráfica de la recta cuando x toma valores en un intervalo de cero (ver Figura 4).

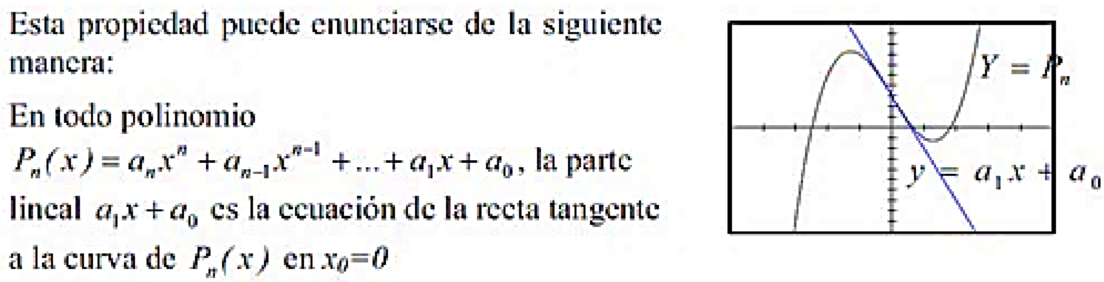


Figura 4. Linealidad del polinomio (Rosado y Cordero, 2006)

De esta manera, Rosado y Cordero (2006) concluyen que la linealidad tiene como rol determinar un comportamiento propio del polinomio cuando esta cruza al eje de las ordenadas. El polinomio, en ese punto, se comporta como su parte lineal. Este hecho permite identificarle una forma a la gráfica del polinomio, de ahí la construcción del argumento gráfico. La funcionalidad y la forma de la linealidad se mantienen y se desarrolla a través del argumento comportamiento tendencial de las funciones.

Otro estudio fundamentado en la socioepistemología es el de Cantoral, Molina y Sánchez (2005), ellos señalan la predicción como una práctica social para ahondar en la derivada, entendiendo predicción como una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que lo producen. Desde esta perspectiva destaca el papel que fungen el pensamiento y el lenguaje variacional para estudiar la derivada.

Dentro de este tipo de perspectivas se puede mencionar el trabajo de Caballero (2012), quien analiza las causas que originan que los profesores de bachillerato experimenten dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional. Para llevar a cabo esa investigación, utiliza el diseño de un conjunto de actividades para analizar las estrategias de respuesta a las que recurrían los profesores. Dicho análisis se llevó a cabo con base en un modelo derivado de una caracterización realizada a los elementos que conforman el Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Las actividades diseñadas se caracterizaban, en general, por no especificar el tipo de función de las gráficas, y por no proporcionar una expresión analítica con la cual trabajar. Como parte de los resultados encontrados se puede mencionar que los profesores recurrían a asumir una función conocida, incluso asumían datos extras que les permitían justificar o usar expresiones analíticas, sin detenerse a analizar los cambios en los puntos de la gráfica o de los datos proporcionados para verificar si realmente corresponde a la función que asume. Así, Caballero (2012) establece que las causas de estas dificultades son la centración en utilizar de forma mecánica o forzada algún conocimiento matemático cuyo uso garantiza dar respuesta a las situaciones planteadas, sin detenerse a realizar un análisis del cambio y la variación que experimentan.

De manera similar, Cantoral (2016) reporta una serie de actividades propuestas por Cantoral y Farfán (1998). Estas actividades consistían en una colección de cuatro gráficas idénticas (ver Figura 5) y se solicitaba que utilizaran una gráfica para cada inciso, de modo que debían marcar sobre cada una de ellas la porción en que se cumple solo uno de los siguientes casos: $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ y $f'''(x) > 0$.

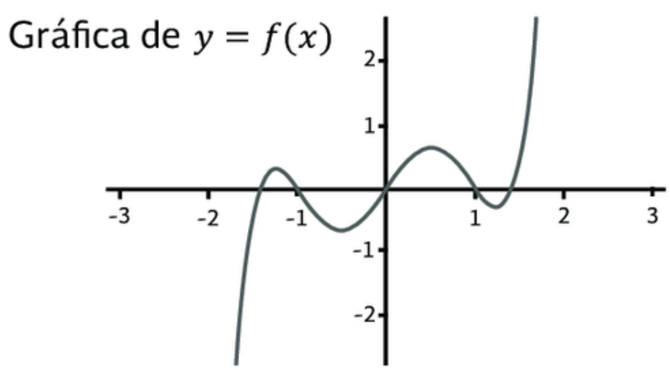


Figura 5. Regiones sobre la gráfica f (Cantoral y Farfán, 1998).

Los resultados mostraron que en el caso del signo de la función contestaban con relativa facilidad al recordar los signos dependiendo de los cuadrantes. En cuanto al signo de la primera derivada solían confundirlo con el signo de la función, o en otro caso, recordaban que las pendientes de las rectas tangentes a la curva determinan el signo de la derivada. Además, para determinar el signo de la segunda derivada recurrían a la memoria, puesto que solían recordar que el signo positivo corresponde a la concavidad hacia arriba, aunque no disponían de explicación alguna para confirmar su razonamiento. Finalmente, en cuanto al signo de la tercera derivada era un reto especial, pues, aunque entendían el enunciado del problema, no podían construir una respuesta convincente (Cantoral, 2016), dado que se carecen de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. En general, esta tarea se resume en la Tabla 2.

Tabla 2

Relaciones de correspondencia, ¿y la tercera?

Cálculo	Física	Geometría analítica	Práctica cotidiana
$f(x) > 0$	Posición	Ordenada	Estatura
$f'(x) > 0$	Velocidad	Pendiente	Crecimiento
$f''(x) > 0$	Aceleración	Concavidad	Cantidad de crecimiento
$f'''(x) > 0$	?	?	?

Fuente: Recuperada de Cantoral (2019b)

En este sentido, Cordero (2008) menciona que en Cálculo podemos distinguir dos escenarios, a saber: el Cálculo como un saber de la Obra Matemática y Cálculo Escolar (ver Figura 6). Y afirma que de no apreciarse la diferencia entre esos saberes se pueden concebir planteamientos ingenuos de la problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

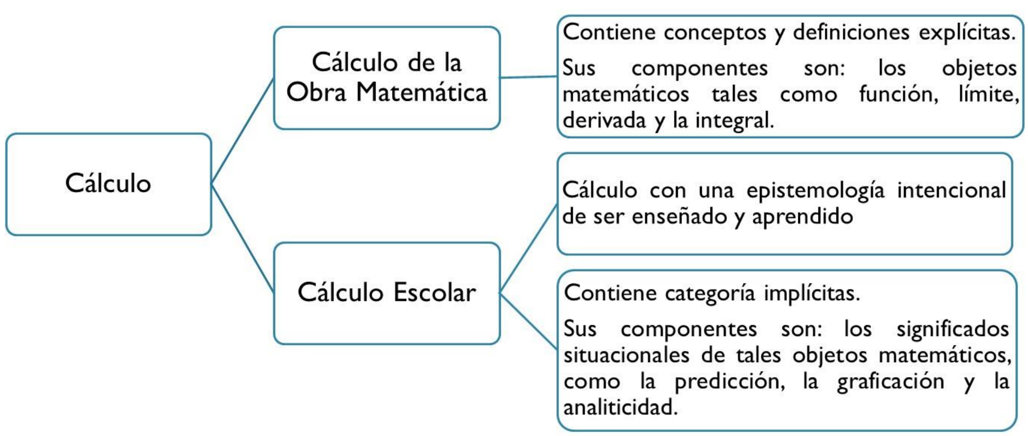


Figura 6. Escenarios en Cálculo (Morales y Cordero, 2020).

En cuanto a fundamentos teóricos orientados a la elaboración de diseños de intervención educativa en matemáticas se pueden señalar una diversidad de teorías. En general, Kieran, Doorman y Ohtani (2015) los clasifican en tres tipos, de acuerdo a su alcance o nivel de detalle, a saber: a) grandes marcos–grandes teorías que se deben adaptar e interpretar para cubrir las necesidades de la investigación de diseño, por ejemplo, el socioconstructivismo como teoría de aprendizaje, b) marcos de nivel intermedio, son más específicos que los grandes marcos y se pueden aplicar a una gran variedad de áreas de las matemáticas, c) marcos de dominio específico, a diferencia de los marcos de nivel intermedio, estos abordan conceptos, procedimientos o procesos particulares y d) marcos relacionados con características particulares del entorno de aprendizaje.

En contraparte, Medina (2019) plantea una investigación cuya problemática fundamental parte de reconocer la inexistencia de la relación recíproca entre la matemática escolar y la realidad del que aprende. Esta investigación se fundamenta en el programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (Cordero, 2017), y atiende al fenómeno de exclusión provocado por el discurso matemático escolar (Soto, 2014). El objetivo general fue evidenciar el proceso de transformación del docente dado por la resignificación del conocimiento matemático media aritmética.

De manera general, la investigación de esta autora consistió en dos fases. En la primera de ellas, realiza un análisis documental de una investigación relacionada con la cosecha de algodón, reportada por administradores agropecuarios, donde emerge una resignificación para la media aritmética a través de la compensación (ver Figura 7). Compensar “es neutralizar efectos negativos de una cosa con los de otra; igualar en opuesto sentido el efecto de una cosa con la de otra” (Medina, 2019, p. 42).

Es indispensable destacar que la situación de ponderación es una articulación entre las situaciones de transformación y selección, debido a que:

> el administrador agropecuario a partir de los distintos elementos que entran en juego (pacas por hectáreas y precio por libra de algodón) y las cualidades de ellos en la cosecha, debe seleccionar el indicado u óptimo, para lograr el punto de equilibrio (costo=utilidad). Y por el otro, el administrador agropecuario se encuentra en una situación de transformación, en

> tanto que, parte de un resultado con pérdidas en la inversión de la cosecha dado por utilidad= -5,949.91 MX y a partir de éste, debe reproducir un nuevo comportamiento dado por utilidad= 0; bajo el instrumento punto de equilibrio (utilidad=costo); donde se varían los parámetros que entraron en juego para dicho trabajo. (Medina, 2019, p. 52)

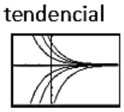
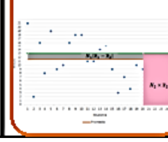
	SITUACIONES				
CONSTRUCCIÓN DE LO MATEMÁTICO	**VARIACIÓN**	**TRANSFORMACIÓN**	**APROXIMACIÓN**	**SELECCIÓN**	**PONDERACIÓN**
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación	Distribución de comportamiento
Procedimientos	Comparación de dos Estados	Variación de parámetros	Operaciones lógico formales (cociente)	Distinción de cualidades	Equiparar
Instrumentos	Cantidad de variación continua $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Instrucción que organiza comportamientos $y = Af(Bx+C)+D$	Formas analíticas $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$	Lo estable	Punto de equilibrio $\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$
Argumentación/ Resignificaciones	Predicción $E_0 + Variación = E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \ldots$	Optimación 	Compensación 

Figura 7. Aporte a la epistemología de lo matemático: la ponderación (Medina, 2019)

Por otro lado, la segunda fase de esa investigación consistió en el diseño de la situación escolar de socialización utilizando la dialéctica exclusión-inclusión y la situación de ponderación, la cual busca el uso de la compensación y expresa la resignificación del conocimiento matemático media aritmética. El diseño consta de tres episodios (ver Figura 8) los cuales expresan la negociación del objeto matemático con la emergencia de la compensación y son los facilitadores en el proceso de transformación del docente.

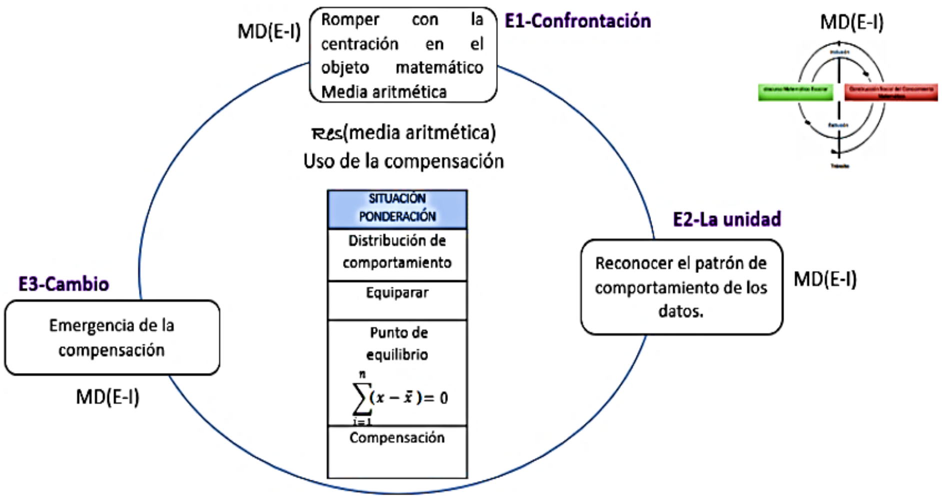


Figura 8. Negociación del objeto matemático media aritmética
con la emergencia de la compensación (Medina, 2019)

A grandes rasgos las actividades que conformaban ese diseño consistían en obtener el promedio de las edades de un grupo de estudiantes, pero solo se contaba con información gráfica; en el eje horizontal se mostraban los estudiantes y en el eje vertical sus edades, sin embargo, se desconocían los datos del eje vertical (ver Figura 9).

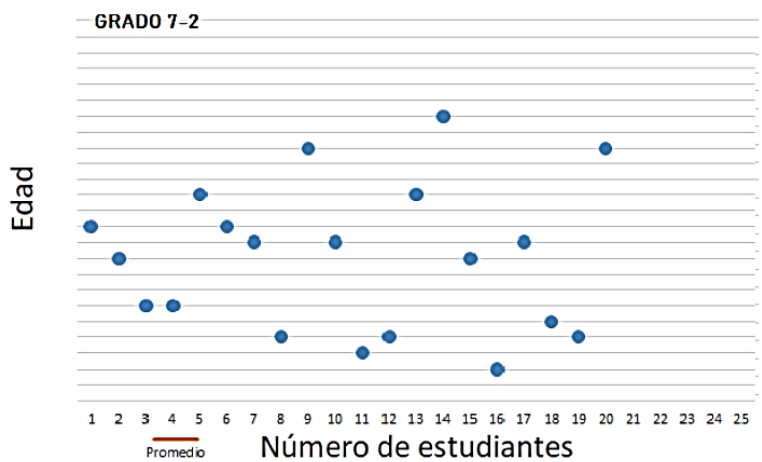


Figura 9. Cálculo de la media aritmética (Medina, 2019)

El diseño permitió la emergencia de significados, instrumentos y procedimientos a través de los momentos de confrontación e interacción (momento 1 y momento 2) logrando la descentración del objeto matemático media aritmética. Esto repercutió en una nueva argumentación/resignificación, la compensación, dada por el instrumento punto de equilibrio, el procedimiento equiparación y la significación de la distribución del comportamiento de los datos.

La investigación de Medina (2019) es un referente para este trabajo, básicamente, por dos razones: primero, su diseño propicia la resignificación de los usos de un objeto matemático y además se basa en la perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión. Ampliando así el trabajo de Soto (2014) al aportar elementos que permiten la elaboración de diseños de situación escolar de socialización bajo esa perspectiva.

En resumen, la revisión bibliográfica muestra que generalmente las investigaciones en el campo de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo se han centrado en las dificultades de los estudiantes, en el análisis de los planes de estudio, las prácticas escolares de los profesores, el uso de la tecnología y el diseño de tareas, lo que evidencia una clara preocupación por lo que se sabe, es decir, qué sabe el estudiantado y el profesorado sobre la derivada; pero, nunca o pocas veces la preocupación ha sido cómo se usa ese conocimiento matemático. Por el contrario, dentro de la Teoría Socioepistemológica el interés ha estado sobre las prácticas que acompañan la derivada.

Debido a lo anterior, en esta investigación se plantea la elaboración de un diseño escolar que promueve la autonomía de usos de la derivada, recurriendo para esto a los usos que emergen en una comunidad de ingenieros químicos (Pérez-Oxté y Cordero, 2020).

Las situaciones que componen el diseño permiten que la derivada como pendiente de una recta tangente se resignifique a través de la predicción, la graficación y la analiticidad: la derivada y la recta tangente debaten contra la comparación de dos estados, la variación de parámetros y el comportamiento tendencial. Lo cual no compone, en la actualidad, ningún eje didáctico ni para los textos escolares ni para el currículo escolar.

La importancia de esta investigación radica en que los estudios socioepistemológicos con evidencias empíricas ha determinado que el uso del conocimiento matemático de los ingenieros no está relacionado con las matemáticas habituales que aprenden (Mendoza et al., 2018). La intención es dar señales de cómo, considerando los usos del conocimiento matemático, específicos de las comunidades de ingenieros, se puede fortalecer el aprendizaje de la derivada.

Por lo que, el establecimiento de marcos de referencia permitiría resignificar, en este caso, la derivada; poniendo en juego la dualidad de la matemática escolar: las justificaciones racionales y funcionales (Cordero, 2016b). En consecuencia, se vuelve de interés conocer el proceso de valoración de los usos de la derivada que emergen con la puesta en escena de un diseño de situación escolar basado en un marco de referencia.

1.3. Planteamiento del problema

En esta sección se presenta la pregunta y objetivos en los cuales se enmarca esta investigación. Para esto se han establecido un objetivo general y dos objetivos específicos.

1.3.1. Pregunta de investigación

¿Cuáles son los procesos de valoración de los usos de la derivada, que surgen en el estudiantado, en el tránsito entre significarla como pendiente de una recta tangente a resignificarla como una predicción, como un comportamiento tendencial y como una analiticidad?

Con la intención de dar respuesta a esta pregunta, se planteó un objetivo general y dos objetivos específicos que permitieran realizar ese análisis.

1.3.2. Objetivo general

Evidenciar el proceso de valoración de usos que viven los estudiantes de Ingeniería Química en la resignificación de la derivada.

1.3.3. Objetivos específicos

1.3.3.1. Construir un diseño de situación escolar de socialización, con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión, basado en situaciones de variación, aproximación y transformación que permitan la emergencia de resignificaciones de la derivada.

1.3.3.2. Analizar las transversalidades y valoraciones de usos de la derivada de los estudiantes de Ingeniería Química al enfrentarse al diseño de situación escolar de socialización.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se agrupan y resumen los fundamentos teóricos en los cuales se enmarca esta investigación, a saber: discurso matemático escolar, el programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes, y la dialéctica exclusión-inclusión.

2.1. Discurso matemático escolar desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa es un enfoque teórico latinoamericano interesado en los procesos de construcción social del conocimiento matemático. Cantoral (2016, 2019a) menciona que este enfoque asume la legitimidad de toda forma de saber; sea este popular, técnico o culto, pues considera que ellas, en su conjunto, constituyen la sabiduría humana. Esto permite diferenciarla de otros enfoques contemporáneos que solo examinan una forma del saber (Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez, 2018).

Desde este enfoque teórico se reconoce que el conocimiento matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y que su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le ha obligado a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento (Cantoral, 2016), lo que se ha denominado discurso matemático escolar (dME). El cual ha impuesto argumentaciones, significados y procedimientos en el intento por una matemática para todos (Cordero et al., 2015).

Además, Cordero et al. (2015) señalan que la socioepistemología legitima una epistemología diferente a la del conocimiento matemático centrado en el objeto, la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), la cual ha permitido criticar al dME que ha fundamentado la matemática que se enseña en las aulas.

El dME no se reduce a la organización temática de los contenidos ni a su función declarativa en el aula a fin de lograr una instrucción que sea recordada por el estudiantado, sino que es justamente lo que lleva al profesorado a repetir las clases aun con escasos logros en el aprendizaje (Cantoral, 2016). En palabras de Cordero et al. (2015) este fenómeno es por un lado la imposibilidad de participar en la construcción del conocimiento matemático y por el otro, la negación de la pluralidad epistemológica.

De esta manera se reconoce como problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática al discurso matemático escolar (dME) (Cordero et al., 2015; Cantoral et al., 2018); el cual, por sus características, soslaya al docente de la construcción del conocimiento matemático, imponiendo significados, procedimientos y argumentaciones que delinean lo que está bien o mal dentro de la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Cordero et al., 2015).

Por lo que se requiere el rediseño del dME, es decir, la descentralización del objeto. Sin embargo, una aclaración indispensable es que esto no significa el abandono del estudio del objeto (Cantoral, 2019a), sino que es necesario conocer, revelar y valorar el uso del conocimiento matemático de la obra, de la escuela, del trabajo y de la gente, todo ello en una relación horizontal y recíproca, tal como lo menciona Cordero (2017), quien además afirma que "eso será el marco de referencia del rediseño del dME, o sea, el cambio educativo de la matemática, acompañado siempre del Programa Académico Permanente, el cual valorará los procesos de transformación del dME". (p. 16)

Adicionalmente, Cordero (2016a) menciona que dichos procesos serán concretamente lo que se denominará diseños de situación escolar de socialización, donde sucederán los aprendizajes de las resignificaciones de la matemática, plasmadas en procesos permanentes (usos y significados) en contraparte de objetos terminales (conceptos y definiciones).

A manera de síntesis, se puede mencionar que la Teoría Socioepistemológica "promueve la descentración de los objetos matemáticos y prioriza la forma en que la gente usa la matemática desde su cotidiano en una situación específica” (Cordero, Del Valle y Morales, 2019, p. 190). Con este fin, se ha formulado el programa socioepistemológico dentro del cual se enmarca esta investigación.

2.2. Programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes

Cordero (2017) propone el programa socioepistemológico denominado *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)*, cuyo objetivo principal consiste en revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo o la profesión, y en las vidas cotidianas.

El fin general es crear una relación horizontal y recíproca entre la matemática y la realidad. Dicho de otro modo, la matemática escolar y la matemática de la vida deben conservar el mismo estatus y valor epistemológico, pero además deben afectarse mutuamente (Mendoza y Cordero, 2018).

Además, en el contexto de este programa, se convino entender como realidad, en términos generales, la relación del conocimiento entre la escuela, el trabajo y la ciudad (Mendoza y Cordero, 2018). Esta acepción de realidad ha llevado a generar constructos que valoran los usos y significados de los objetos matemáticos (Cordero, 2017), lo que permitirá recuperar el sujeto olvidado, a saber: el cotidiano, los usos del conocimiento y, en términos más genéricos, la gente.

Como consecuencia este programa trabaja en dos líneas simultáneas: resignificación del conocimiento matemático e impacto educativo (ver Figura 10). En la primera de estas, se busca determinar cuáles son los usos del conocimiento matemático en distintas comunidades; y en la segunda, se busca intervenir en el proceso educativo a través del diseño de situaciones en las que se resignifique el conocimiento matemático.

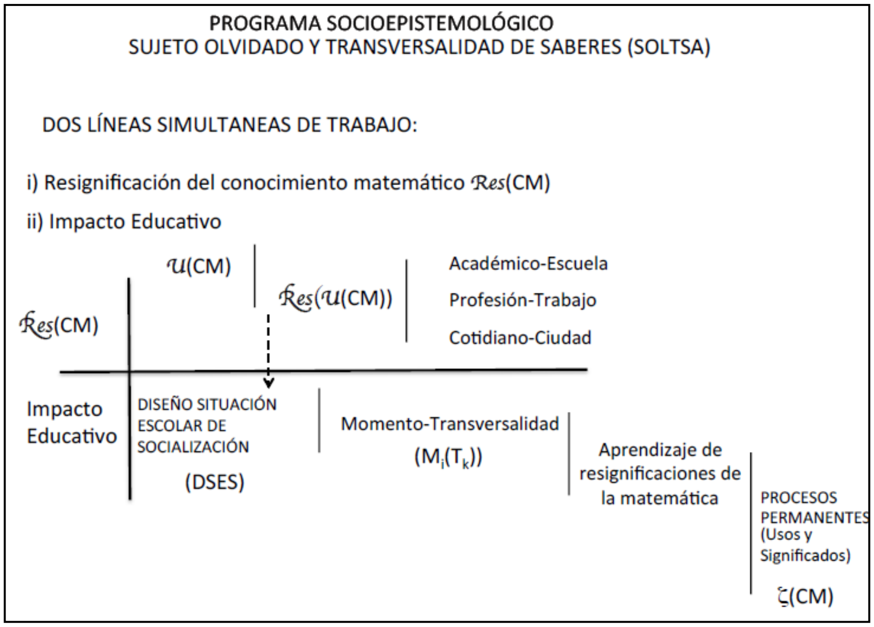


Figura 10. Líneas de trabajo del programa socioepistemológico SOLTSA (Cordero, 2017).

Seguidamente se especifican algunos constructos que se utilizan dentro del programa SOLTSA, así como la categoría de modelación en la que se rige.

2.2.1. Una categoría de conocimiento matemático: Categoría de modelación

La categoría de modelación (ζ(Mod)) del programa SOLTSA "es algo más robusto que una representación (de la realidad) o una aplicación matemática (a una situación real)" (Mendoza y Cordero, 2018, p. 41). Es una práctica plasmada específicamente como la argumentación de una situación en cuestión, la cual está compuesta de significaciones y resignificaciones con sus respectivos procedimientos, que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los participantes son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente (Cordero, 2011).

Es decir, es una construcción social que no asume la preexistencia de la modelación, sino que se construye en las "acciones" que se efectúan con las relaciones recíprocas y horizontales entre los conocimientos de la matemática y de la vida, en los escenarios: escuela-académico; el trabajo-profesión; y la ciudad-cotidiano (Cordero, 2016a, 2017;

Mendoza y Cordero, 2018). Este principio de la ζ(Mod) permite distinguirla de la modelación matemática habitual.

A partir de esa diferenciación, Cordero (2017) formula la variedad de la ζ(Mod) de la siguiente manera: Dado un principio (P) de la modelación matemática, donde P es el ciclo que conecta el mundo real y la matemática. Entonces, la variedad en la ζ(Mod) está basada en un principio P' de P. Sin embargo, P' es lo funcional de la relación recíproca entre la matemática y el cotidiano. Este P' genera la categoría de modelación ζ(Mod), es decir, los usos del conocimiento matemático de la gente.

A manera de contraste, se presenta, *grosso modo*, cómo se configura la modelación matemática de acuerdo con Cordero (2017):

a. El principio *P* asume la existencia de un conocimiento matemático (*M*) y de una realidad (*R*). Dado *R* existe un conocimiento matemático específico *M'* que "matematiza" *R: M'(R)=R'*, donde *R'* es una interpretación de *R*.
b. *M'*(*R*) es un objeto matemático: es el conocimiento que genera la modelación matemática.

Por otro lado, Cordero (2017) establece que la variedad de la ζ(Mod) es formulada de la siguiente manera:

1. Ahora, *P'* es funcional; entonces, no preexisten *R* ni *M*.
2. Lo funcional es el uso de la matemática de la gente, U(CM).
3. La gente vive entre situaciones diversas, S_k
4. En el tránsito entre S_k, suceden epistemologías E_j (pluralidad) y transversalidades T_n (resignificaciones).
5. Las S_k podrían estar sobre dominios de conocimiento D_m y en las alternancias entre los D_m.
6. La categoría de modelación es la resignificación de usos, Res(U(CM), cuando sucede un tránsito entre S_k y S_m, incluso en alternancia de dominios. Este es el conocimiento que genera ζ(Mod).

Además, la categoría ζ(Mod) se compone de dos ejes: la institucionalización y la transversalidad de saberes, donde suceden situaciones S_{ij}, dominios D_j y alternancias de escenarios (Cordero, 2017).

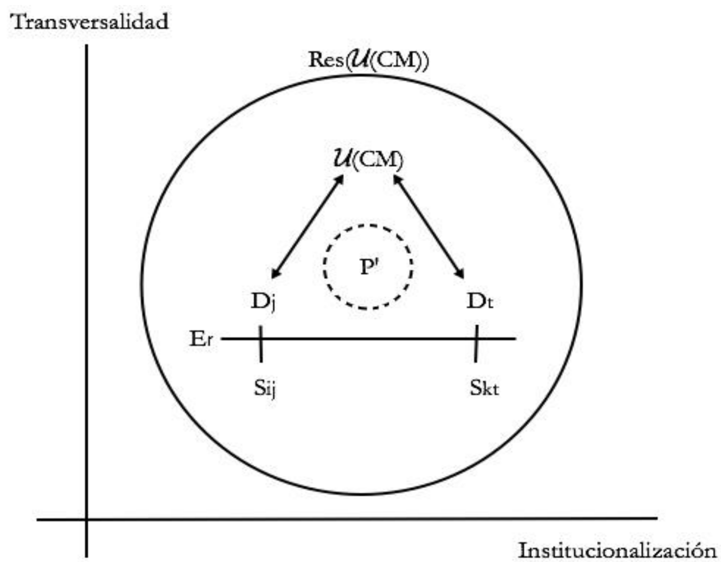


Figura 11. Marco del saber matemático de la ζ(Mod) (Cordero, 2017).

2.2.2. Marco de referencia

El marco de referencia es una estructura de relaciones que reconoce la funcionalidad del conocimiento matemático de las comunidades en cuestión. Es decir, este permitirá crear la relación recíproca entre la matemática de la escuela y el cotidiano de las realidades (Mendoza y Cordero, 2018).

Por lo que, ambos conocimientos se mezclan o se transforman en una unidad de saberes, de conocimientos en uso de la gente. La transformación descentraliza al objeto y los usos son resignificados entre situaciones y entre escenarios (Cordero, 2016a).

2.2.3. Usos del conocimiento matemático

Cordero y Flores (2007) mencionan que el uso del conocimiento matemático "es la función orgánica de la situación (funcionamientos), que se manifiestan por las 'tareas' que componen la situación, y la forma del uso será la clase de esas `tareas`" (p. 13). Además, afirman que las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios propios del organismo de la situación. Es decir, el funcionamiento es la función-utilidad que tiene el conocimiento matemático en una situación específica y la forma es la generalización del tipo de acciones que se realizan dentro de esta (ver Figura 12).

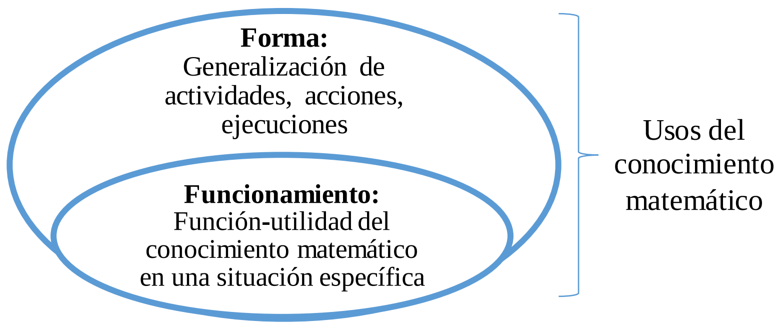


Figura 12. Usos a través de funcionamientos y formas.

2.2.4. Resignificaciones

Cuando la alternancia de tareas sucede, se genera una nueva función orgánica que debate con las formas de los usos. Este "acto de uso" es la resignificación de usos del conocimiento matemático (Res(U(CM)) (Cordero y Flores, 2007). Las Res(U(CM) suceden en situaciones específicas (Se). Las Se son parte de ese entorno (relaciones recíprocas) en cada uno de los escenarios. Y cada Se_i se conforma por elementos secuenciales que construyen lo matemático: significación, procedimiento e instrumento, que derivan la argumentación de la situación (Arg (CM)). $Arg(CM)_i$ es una $Res(U(CM))_i$ construida en la Se_i (Cordero, 2016a).

2.2.5. Transversalidad de usos

Las transversalidades son las resignificaciones de los usos del conocimiento entre escenarios o dominios de conocimiento (por ejemplo, entre la escuela y el trabajo; o entre la matemática y la ingeniería). Las transversalidades suceden en momentos, los cuales son fases en el proceso situacional (Mendoza y Cordero, 2018).

2.2.6. Modelo de comunidad de conocimiento matemático

En el programa socioepistemológico SOLTSA se asume que no cualquier conjunto de personas juntas componen una comunidad. Sino que son quienes participan en una situación específica; es decir, en la construcción del conocimiento matemático subyace la consideración de *ser con otro*: lo que emana elementos como organización de grupos y función de las sociedades. Esto conllevó a formular un constructo de participante que está cercano a comunidad con relación al conocimiento. En otras palabras, si hay conocimiento entonces existe una comunidad que lo construye (Mendoza et al., 2018).

Por tanto, se debe distinguir a la comunidad de la individualidad, de lo público y de la universalidad o de lo cosmopolita y para esto se recurre a la triada: *reciprocidad*, *intimidad* y *localidad* (Cordero, 2011, 2016a), la cual caracteriza lo propio de esa comunidad. Mendoza y Cordero (2018) definen esos elementos de la siguiente manera:

> i) Reciprocidad es el conocimiento que se genera por la existencia de un compromiso mutuo; ii) Intimidad es el uso de conocimiento propio y privado que no es público; iii)Localidad es el conocimiento local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, lo regional, entre otros. (p. 47)

Además, Giacoleti-Castillo (2020), al hacer inmersión en una comunidad, identifica en la *localidad* la problemática que atienden y, en *la intimidad*, la categoría de conocimiento matemático que emerge en dicha comunidad.

2.2.7. Diseños de situación escolar de socialización

Se denominan diseños de situación escolar de socialización (DSES) a aquellos diseños que se basan en una epistemología que favorece los usos del conocimiento matemático, en contraparte de aquellos que promueven la emulación de un concepto. Estos diseños requieren de una perspectiva, que por una parte oriente el planteamiento del diseño y por otra permita analizar cómo fue el proceso de resignificación de los participantes (Morales y Cordero, 2020); en el caso de esta investigación dicha perspectiva es la dialéctica exclusión-inclusión (ver sección 2.3).

Cabe destacar que, una característica esencial de este tipo de diseños es que con su planteamiento se pretende contrarrestar alguno de los fenómenos provocados por el discurso matemático escolar, a saber: exclusión, adherencia u opacidad. Por lo que, desde su génesis se concibe con una clara intención de propiciar el rediseño del discurso matemático escolar.

Para su construcción, se recurre a las categorías de conocimiento matemático, las cuales en palabras de Cordero (2011) son un proceso que acompaña a la pluralidad epistemológica y a la transversalidad de saberes que definen la funcionalidad matemática de las comunidades de conocimiento matemático, la cual responde a lo que es de utilidad al humano en una situación específica (Cordero, 2017).

La situación está compuesta de significaciones o resignificaciones con sus respectivos procedimientos: ambas se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los participantes son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente (Cordero, 2011).

De manera específica, la epistemología que se toma en este tipo de diseños es lo que se ha denominado Socioepistemología del Cálculo: construcción de lo matemático (ver Figura 13), cabe mencionar que para efectos de la resignificación de la derivada se tomarán las situaciones: variación, transformación y aproximación.

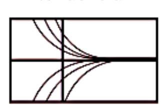
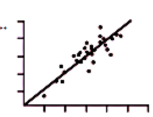
	Situaciones			
Construcción de lo matemático	*Variación*	*Transformación*	*Aproximación*	*Selección*
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación / Resignificación	Predicción $E0+variación=Ef$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots$	Optimización 

Figura 13. Socioepistemología del Cálculo y Análisis (Cordero et al., 2019).

La cuestión es diseñar situaciones basadas en una epistemología que favorezca los usos y significados de la derivada. En ese sentido, Cordero (2001) menciona que el concepto de derivada consiste en varios significados: el límite de una función, la variación continua de cierta cantidad que fluye y la variación de parámetros de una función para organizar comportamientos. Y las resignificaciones de la derivada suceden cuando se ponen en juego los instrumentos que subyacen en las significaciones de la derivada, donde los funcionamientos y las formas de los instrumentos se confrontan para generar nuevos usos y resignificaciones de la derivada: cantidades de variación continua, instrucción que organiza comportamientos y función analítica (función de clase C infinito).

2.3. El modelo dialéctico y la resignificación del conocimiento matemático escolar

Dentro del modelo dialéctico exclusión-inclusión juega un rol indispensable el tránsito entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático (CSCM). En este punto conviene distinguir que la CSCM no se restringe solo a la interacción entre las personas, sino que, como se menciona en Cordero et al. (2015):

> consideramos las interacciones entre individuos (nos importa qué individuos y sus procesos historiales), los procesos de debates y negociaciones que vive la comunidad para institucionalizar un conocimiento (proceso institucional) y la funcionalidad de éste en un contexto y una situación específica (proceso funcional), característica propia de una práctica social. (p. 69)

Desde esta perspectiva, se centra la atención en cinco categorías contrarias a las del dME (ver Tabla 3), que representan en este trabajo la noción de CSCM (Soto, 2014).

Tabla 3
Categorías del dME y de la CSCM

dME	CSCM
Hegemonía	Pluralidad epistemológica
Utilidad	Funcionalidad
Centración en los objetos matemáticos	Centración en prácticas sociales
Sin marcos de referencia	Transversalidad
Continuidad y linealidad del conocimiento matemático	Desarrollo de usos del conocimiento matemático

Fuente: Recuperada de Cordero et al. (2015)

Para dar cuenta de las valoraciones que realicen, los participantes en la resolución del diseño, sobre la resignificación de la derivada, se recurrirá a la dialéctica exclusión –

inclusión (ver Figura 14). Así, al entender los procesos de exclusión e inclusión como una relación dialéctica, se señala que uno no vive sin el otro, además que la exclusión será caracterizada por los elementos del dME y la inclusión por la CSCM. Adicionalmente, este modelo muestra un camino para la resignificación del conocimiento matemático a partir de la confrontación entre las dos epistemologías contrarias: dME y CSCM (Soto, 2014).

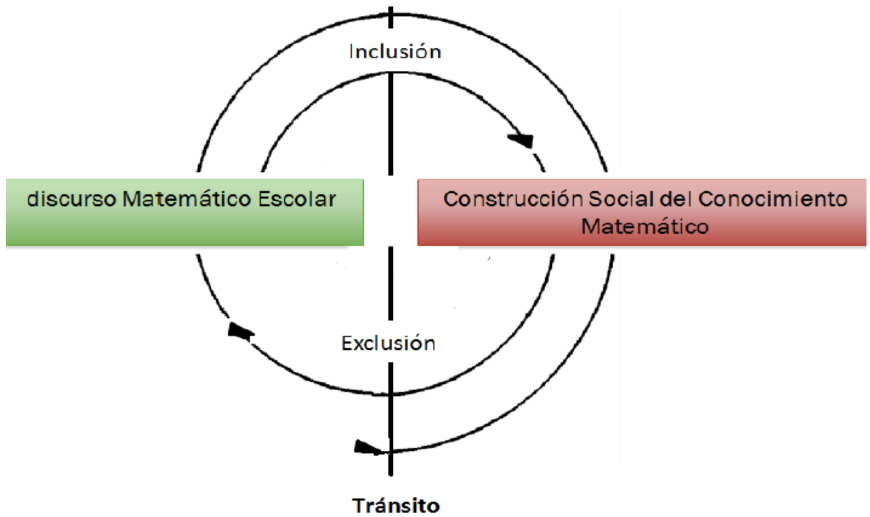


Figura 14. Modelo de la dialéctica exclusión – inclusión (Soto, 2014).

2.3.1. Ejes que modelan el proceso de transformación

En el proceso dialéctico se consideran tres leyes, a saber: confrontación de contrarios, unidad y cambio (Soto, 2014). La dialéctica es una dualidad *que confronta dos categorías contrarias* (dME y CSCM), las cuales no podrían vivir una sin la otra, pero viven en permanente lucha lo que produce una unidad.

Soto (2014) afirma que la *unidad* se expresa cuando una epistemología se sobrepone a la otra; es decir, la unidad puede ser el dME o la CSCM, pero lo interesante del proceso dialéctico es la observación del *cambio o resignificación*, resultado de la unidad cuando se sobreponen las argumentaciones de la CSCM. Esto evidencia el proceso de transformación del docente de matemáticas.

Adicionalmente, para lograr el tránsito dialéctico anterior, se requiere de tres condiciones del discurso matemático escolar y de la construcción social del conocimiento matemático, lo que permitirá la transformación (Soto, 2014). A continuación, se describen cada uno de estos.

1. Confrontación: permite observar la continua confrontación entre los argumentos de los fenómenos estudiados y los argumentos que provienen del dME. Donde en general se vuelve al dME, demostrando su hegemonía y la consideración de la pluralidad epistemológica sólo en momentos que coincidan con los argumentos, significaciones y procedimiento impuestos por el sistema de razón dominante.

2. Interacción de argumentaciones, significaciones y procedimientos: Se señala que se debe cuidar de estas tres componentes ya que, si una se aloja en el dME, probablemente no se desarrollará la CSCM.

3. La institucionalización como mecanismo de la dialéctica: es un mecanismo que se debe controlar, en el sentido que puede o no estar centrado en un objeto o en una práctica. Desde esta perspectiva nos direccionaríamos hacia las prácticas. De esta forma podríamos manipular el tránsito de la exclusión a la inclusión a la CSCM.

Medina (2019) menciona que la identificación de estos seis ejes que modelan el proceso de transformación que vive el docente de matemáticas, en el modelo dialéctico exclusión – inclusión, se dividen en dos grupos. Por un lado, están los que se refieren a las condiciones del dME y la CSCM que permiten la transformación, y por otro los que harán referencia a la condición del docente de matemáticas que permiten este proceso de transformación.

A manera de cierre, en la Figura 15 se presenta la articulación de los elementos teóricos en los cuales se fundamenta esta investigación.

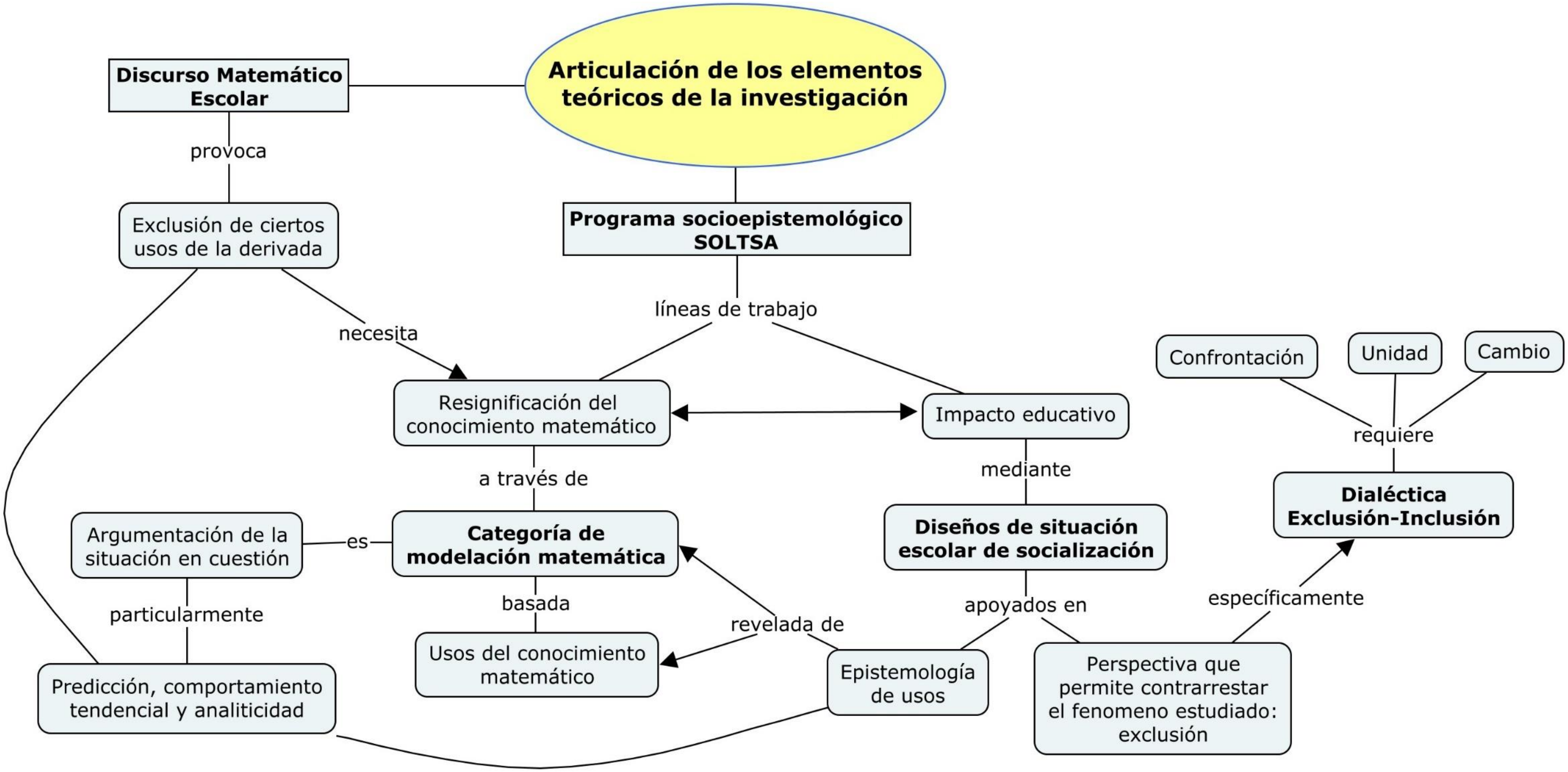


Figura 15. Articulación de los elementos teóricos de la investigación
(Elaboración propia)

CAPÍTULO III
MÉTODO

CAPÍTULO III
MÉTODO

En este capítulo se presentan los lineamientos y procedimientos que guiaron esta investigación, con el fin de asegurar el logro de los objetivos planteados. Primero se expone el enfoque del estudio, luego las etapas de la investigación así como las técnicas e instrumentos de recolección de datos. Por último, se explica cómo se analizó la información recolectada.

3.1. Tipo de investigación

Esta investigación es de naturaleza cualitativa. Este enfoque se basa en la idea fundamental de que la realidad es subjetiva, es decir, cada ser humano construye una visión individual y personal del mundo sobre la base de sus interacciones específicas con el mundo exterior (Cropley, 2019). Particularmente, este trabajo se enmarca en el estudio de caso instrumental, el cual se presenta con más detalle en la sección 3.8.2.

En el caso concreto de la matemática, en este trabajo, se considera que el conocimiento matemático es una construcción social que depende de las situaciones específicas que afronta cada comunidad; por lo que, se considera que cada comunidad de conocimiento matemático construye y usa su propio conocimiento dependiendo de sus necesidades.

3.2. Ruta metodológica de la investigación

En esta investigación se parte de reconocer que ciertos usos de la derivada, en el cotidiano profesional de la ingeniería, habitualmente, están excluidos en la matemática escolar. Por lo cual, desde el programa SOLTSA se elaboran *diseños de situaciones escolares de socialización*, con el fin de revelar la emergencia y valoración de las resignificaciones de los usos del conocimiento matemático.

Particularmente, se considera que las resignificaciones de los usos de la derivada suceden cuando se ponen en juego los instrumentos que subyacen en las significaciones de la derivada, donde los funcionamientos y las formas de los instrumentos se confrontan para generar nuevos usos y resignificaciones de la derivada: cantidades de variación continua, instrucción que organiza comportamientos y función analítica (función de clase C infinito) (Cordero, 2001; Morales y Cordero, 2020).

Para la articulación de esos instrumentos se retoma lo reportado por Pérez-Oxté (2015) y Pérez-Oxté y Cordero (2020) como elemento inicial para la construcción del diseño de situación escolar. Estos autores reportan la resignificación de usos del conocimiento matemático que emergen en una comunidad de ingenieros químicos industriales en formación quienes anticipan fallas en los transformadores eléctricos a través del análisis de comportamientos gráficos.

Estos ingenieros diagnostican transformadores eléctricos con el fin de evitar que se produzcan fallas graves en los equipos a través de su detección temprana, evitando así que estos se dañen. De ahí que analizan las concentraciones de los gases para ver incrementos o comportamientos anormales que pueden ser indicios de posibles fallas en el transformador eléctrico (Pérez-Oxté, 2015).

Para esto construyen gráficas con el historial de las concentraciones de ocho elementos químicos registrados a lo largo del tiempo. De manera que, estos ingenieros deben buscar generar cierto comportamiento ideal para garantizar que el transformador se encuentra en buen estado. Además de anticipar el comportamiento del transformador, con el fin de tomar acciones que les permita un buen funcionamiento. Torres (2013) afirma que estos ingenieros lejos de considerar a las gráficas como representaciones de funciones son consideradas como herramientas que permiten leer, interpretar e inferir información sobre las tendencias de las concentraciones de los gases que tiene el transformador y con base en ello, se toman decisiones.

Por lo que, en esta investigación se desea conocer cuál es el proceso de valoración de usos de la derivada que se presenta al transitar entre significar la derivada como la pendiente de una recta tangente a resignificarla como generadora de comportamientos tendenciales, predictora de estados posteriores y analiticidad de las funciones. A manera de resumen, en la Figura 16 se muestra el recorrido general que se siguió en esta investigación y se describe con más detalle en las siguientes secciones.

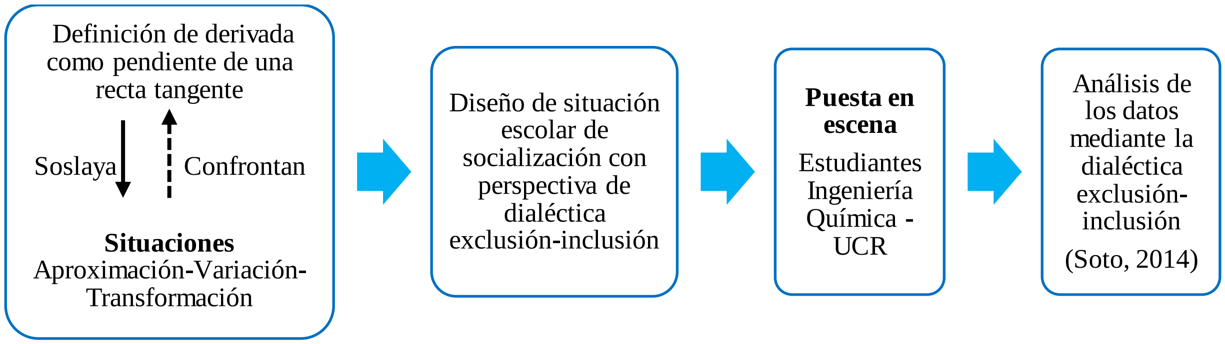


Figura 16. Recorrido general de la investigación.

3.3. Epistemología del diseño de situación escolar de socialización

En el diseño de situación escolar de socialización, que se elaboró para esta investigación, se da una alternancia entre dos dominios de conocimiento. Por un lado, está la matemática escolar, lo que se estudia en los cursos de cálculo sobre la derivada, y por otro lado está la matemática que se pone en juego en el cotidiano del ingeniero (matemática funcional), específicamente en el diagnóstico de transformadores eléctricos (ver Figura 17). El tránsito entre estos dos dominios permite valorar la pluralidad del conocimiento matemático.

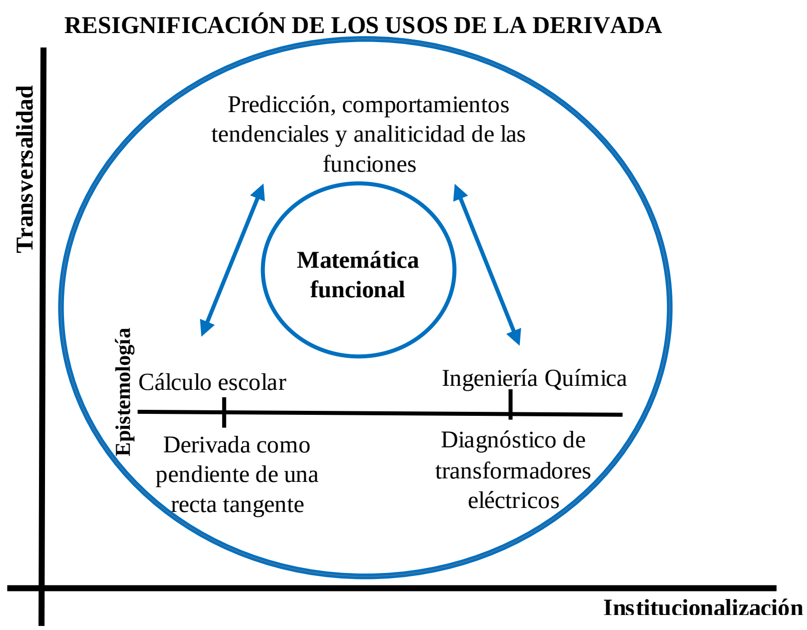
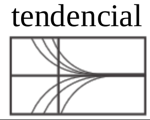


Figura 17. Resignificación de los usos de la derivada.

El cotidiano de la ingeniería expresa los usos del conocimiento matemático propios de la comunidad de ingenieros. Es decir, es el conocimiento útil de una comunidad compuesto de usos y significados que se resignifican en las situaciones específicas (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez y Cordero, 2014).

Concretamente, la epistemología que se toma en este tipo de diseños es lo que se ha denominado Socioepistemología del Cálculo: construcción de lo matemático. Cabe mencionar que para efectos de la resignificación de la derivada se tomarán las situaciones: variación, transformación y aproximación (ver Tabla 4). La cuestión es diseñar situaciones basadas en una epistemología que favorezca los usos y significados de la derivada.

Tabla 4
Epistemología del diseño de situación escolar de socialización

		Situaciones	
Construcción de lo matemático	**Variación**	**Transformación**	**Aproximación**
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado permanente	Patrones de comportamientos gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Variación de parámetros $y = Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico-formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=f'(x)$
Instrumento	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas
Argumentación/ Resignificación	Predicción $E_0 + \text{variation} = E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+...$

Fuente: Adaptada de Cordero (2017)

3.4. Perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión en la construcción del diseño de situación escolar de socialización.

El fenómeno que se pretende contrarrestar en esta investigación es la exclusión (Soto, 2014); por lo que, la perspectiva que se utiliza en la fundamentación del DSES es la dialéctica exclusión-inclusión (Soto y Cantoral, 2014; Medina, 2019). La inclusión es el proceso de transformación que parte de “argumentaciones que inician en las características del dME y terminan con nuevas argumentaciones que emergen con las actividades del DSES y que expresan la funcionalidad del conocimiento matemático. Es decir, argumentaciones propias de las características de la CSCM” (Medina, 2019, p. 69).

En la Tabla 5 se muestra cómo se articulan las leyes de la dialéctica y los elementos que componen la situación específica en la construcción del diseño.

Tabla 5

Perspectiva del diseño de situación escolar de socialización

Leyes de la dialéctica exclusión-inclusión	Articulación de las leyes de la dialéctica en la construcción del Diseño de Situación Escolar de Socialización
Confrontación de contrarios	Se elaboran actividades en las cuales las argumentaciones que surgen de la situación específica se anteponen a las estipuladas en el discurso matemático escolar. Se busca romper con la aplicación usual que se le da al objeto matemático.
Unidad	La situación está compuesta de cuatro elementos: significaciones, procedimientos, instrumentos y argumentaciones. Estos elementos no actúan, necesariamente, en un orden lineal. Por lo que, puede suceder primero cualquiera de estos y de ahí desprenderse los demás. Una característica particular de esta interacción es que cuando el participante se centre en la definición de derivada no transitará hacia la CSCM, mientras que cuando valore los entornos de uso y significados habrá hecho el tránsito propuesto.
Cambio	Se presentará cuando quienes participen en la resolución del diseño consideren en una relación horizontal las argumentaciones/resignificaciones que emergen de las

	situaciones específicas.

Fuente: Elaboración propia basada en Soto (2014) y Medina (2019).

La interacción entre el discurso matemático escolar (dME) y la CSCM será el punto de inflexión que promoverá las leyes de la dialéctica exclusión-inclusión: confrontación de contrarios, la unidad entre ellos y el cambio (Medina, 2019).

3.5. Diseño de situación escolar de socialización

El diseño de situación escolar de socialización (DSES, ver anexo 2), permite pasar de la centración en el objeto matemático a la valoración de usos del conocimiento matemático. Se considera la descentración del objeto como una condición *sine qua non* para propiciar la interacción entre dos categorías contrarias: el dME y la CSCM.

En particular, el DSES de esta investigación se basa en tres situaciones: aproximación, variación y transformación, y en la perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión, tal como puede apreciarse en el esquema general de la Figura 18.

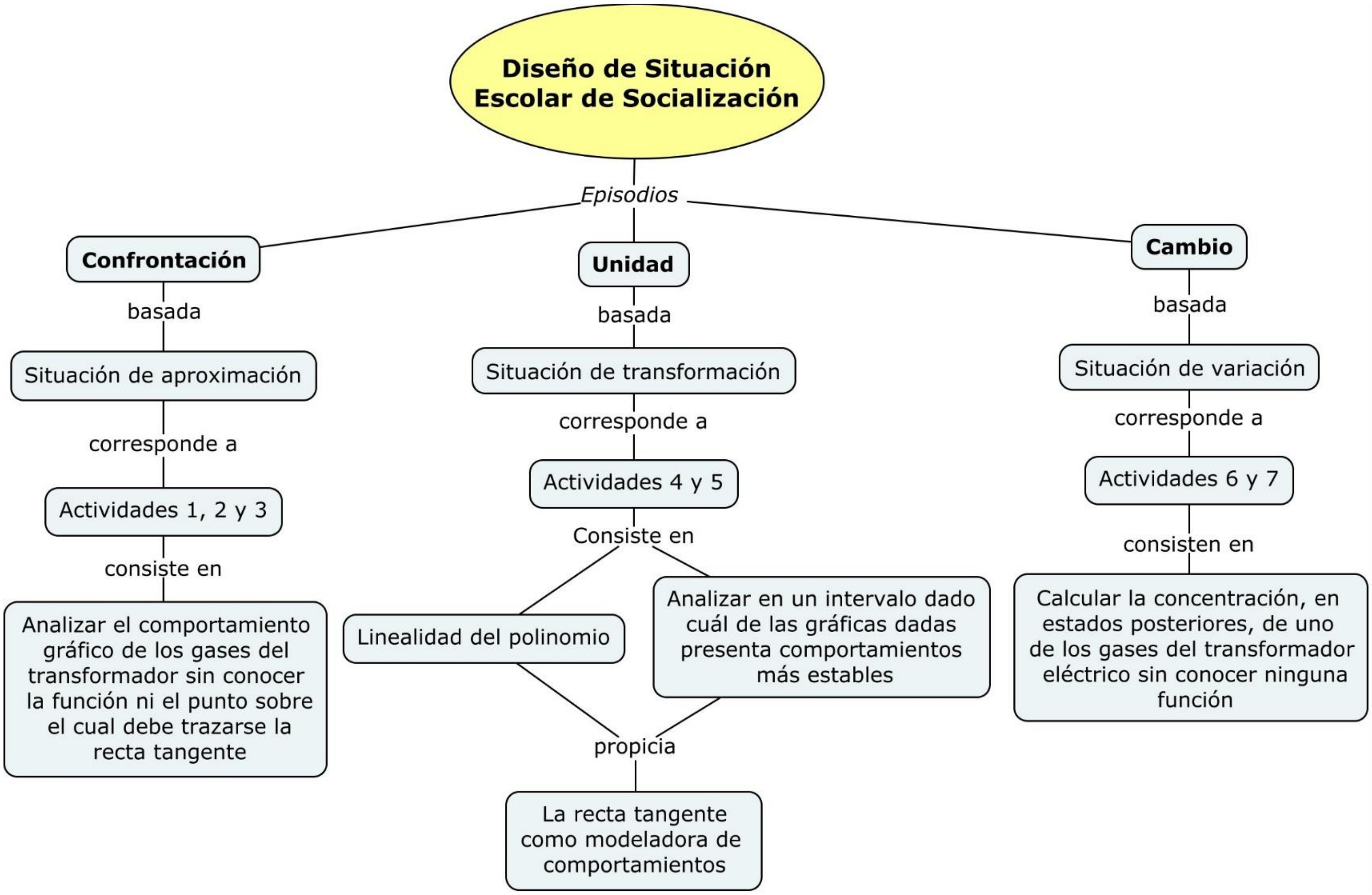


Figura 18. Esquema general del diseño escolar.

A continuación, se presentan las actividades que conforman el diseño, recurriendo para esto a las leyes de la dialéctica: confrontación, unidad y cambio.

3.5.1. Confrontación de contrarios

La primera actividad está basada en la situación de aproximación. En esta se muestra una gráfica que representa el estado de uno de los gases del transformador eléctrico y lo que se debe hacer es trazar una recta tangente que evidencie un comportamiento estable. A diferencia del dME no se indica sobre qué punto debe trazarse la recta tangente ni el criterio de la función, sino que deben basarse en argumentos funcionales de la situación para determinar cuál debe ser esa recta.

Además, en la segunda parte de la actividad se da la representación gráfica de una recta y sobre esta se debe trazar una curva de tal manera que la recta sea tangente. Esto representa un problema inverso a los estipulados usualmente en el dME, en el que se da una curva, se señala un punto sobre esta y se debe buscar la recta tangente.

Contexto: Cierta comunidad de ingenieros químicos anticipa fallas en los transformadores eléctricos a través del análisis de comportamientos gráficos. Para esto construyen gráficas con el historial de las concentraciones de ocho elementos químicos registrados a lo largo del tiempo. En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento del etileno en partes por millón.

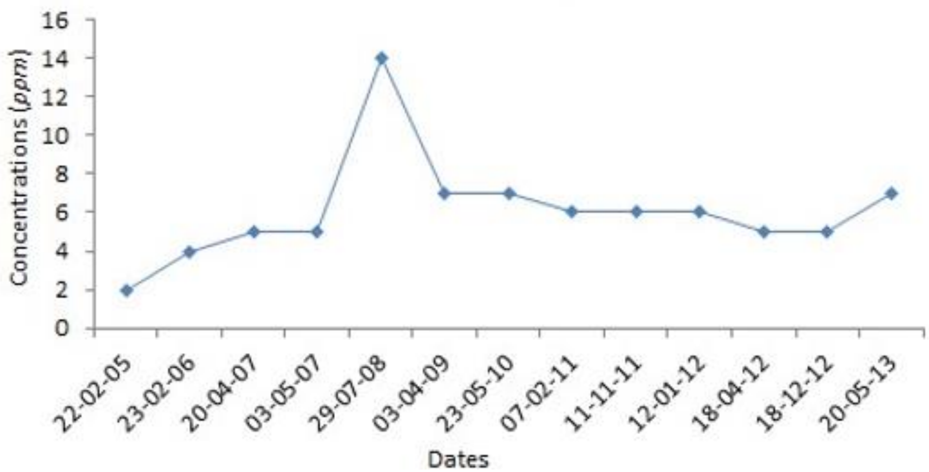
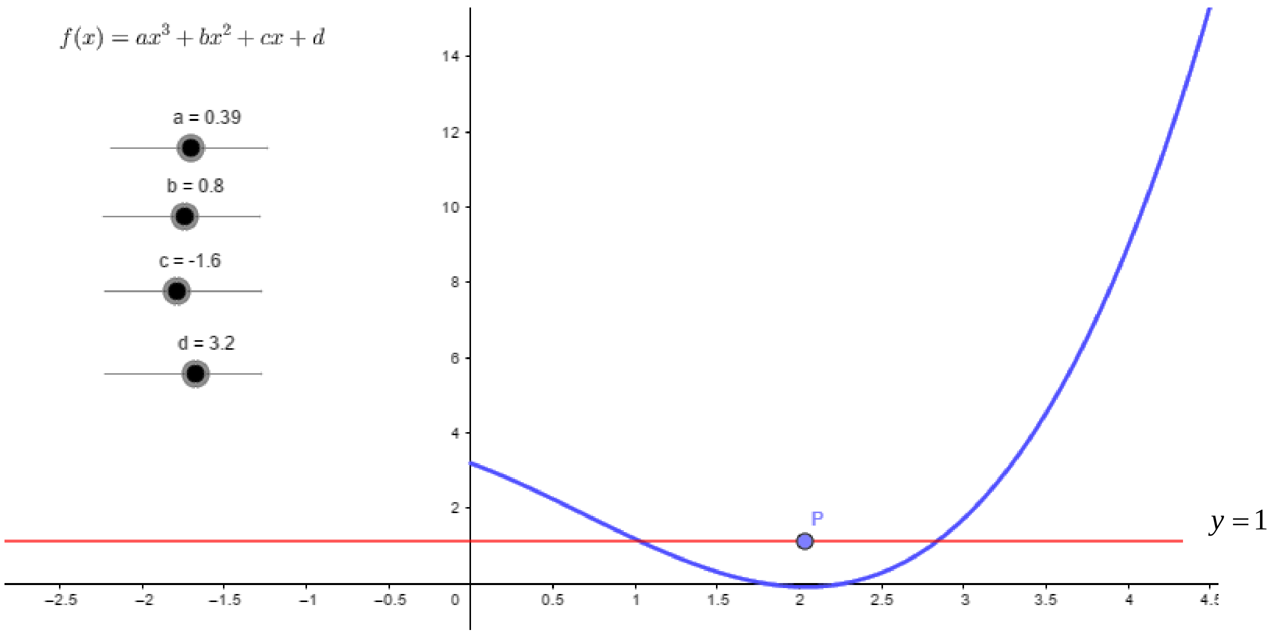


Figura. Comportamiento gráfico del etileno (Pérez-Oxté y Cordero, 2020)

1) Considerando que un comportamiento que da cierta garantía de un buen estado del transformador es cuando no se presentan fluctuaciones extremas, bajo esas condiciones cómo describiría el estado del transformador basado en la gráfica del etileno presentada en el contexto inicial.

2) Trace una recta que muestre un comportamiento estable en la gráfica dada en el contexto inicial, de tal manera que sea tangente localmente en algún punto de la gráfica dada.

3) En una toma de datos se obtuvo la siguiente gráfica para el comportamiento del etileno, el cual se modela por la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, si se sabe que esta representa un comportamiento estable cuando se “acuesta” sobre una recta que es tangente a ella localmente, cuáles son los parámetro de a, b, c y d que mejor representarían dicha situación.



El debate entre funcionamiento y forma de esta actividad permiten la emergencia del uso de la derivada: analiticidad de las funciones (ver Tabla 6).

Tabla 6
Uso de la derivada. Analiticidad de las funciones

Uso: Analiticidad de las funciones	
Forma	**Funcionamiento**
Indagación de una representación gráfica en la que la recta dada sea tangente a esta.	Determinación del tipo de comportamiento de la gráfica de uno de los gases presentes en el transformador eléctrico.

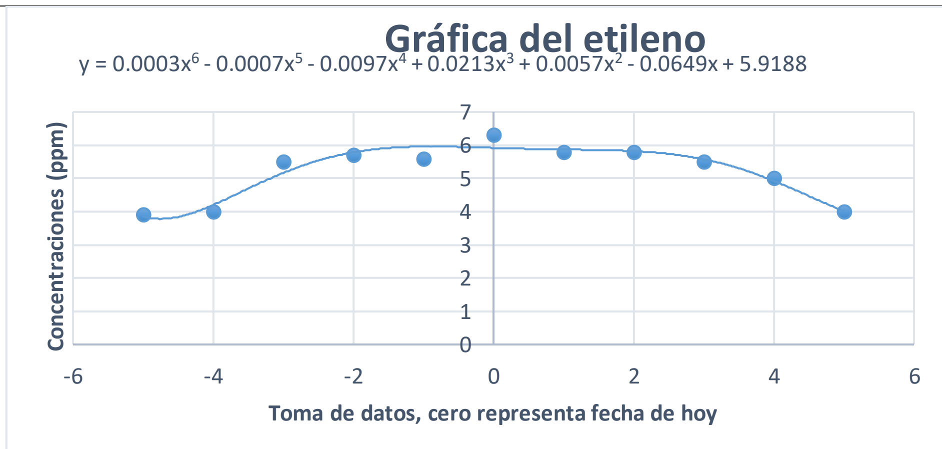
3.5.2. Unidad

La segunda actividad se divide en dos partes y se basa en la situación de transformación, específicamente en la linealidad del polinomio (Rosado y Cordero, 2006). La primera parte consiste en analizar en un intervalo cercano a cero cuál de las gráficas dadas presenta comportamientos más estables. Se busca la emergencia de la generación de comportamientos a través del análisis de la parte lineal del polinomio.

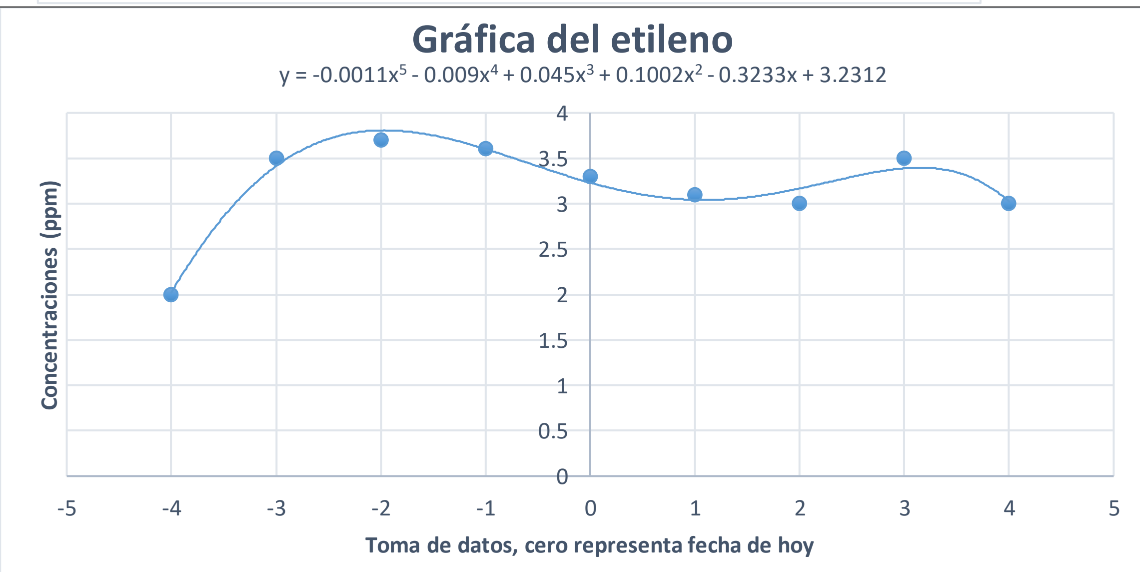
Adicionalmente, la segunda parte busca conocer si el papel de la recta tangente en la generación de comportamientos se sobrepone a la búsqueda algorítmica de su ecuación, para esto se da una función y su respectiva gráfica, y se solicita la graficación de otras funciones en las que se varió la parte lineal de la función dada inicialmente.

A. Las siguientes gráficas representan el comportamiento del etileno. Los valores negativos en el eje de las abscisas representan los datos tomados anterior a una fecha específica y los valores positivos fechas posteriores a esta.

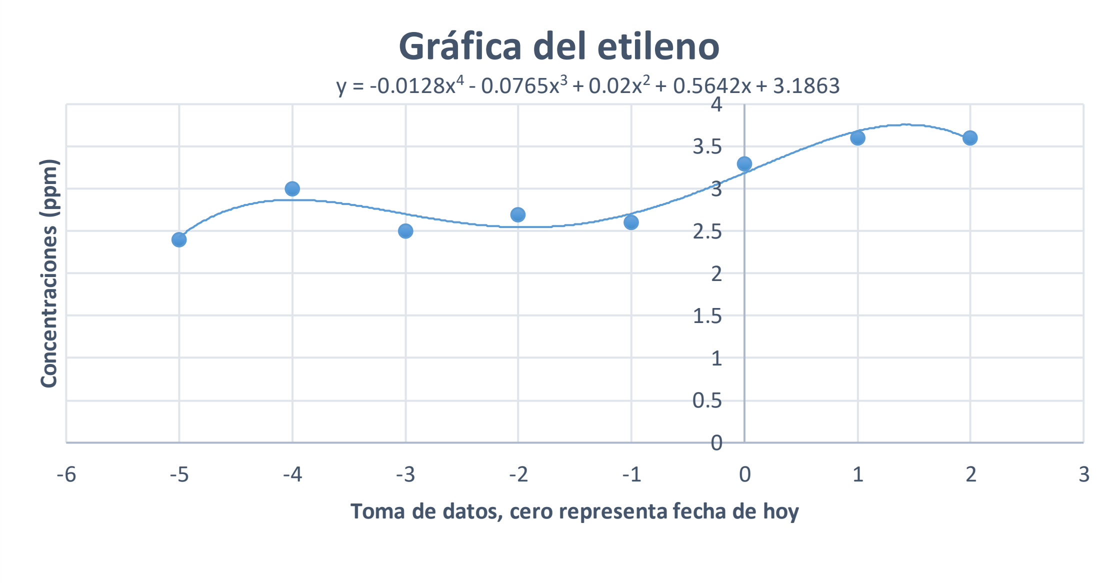
A



B



C

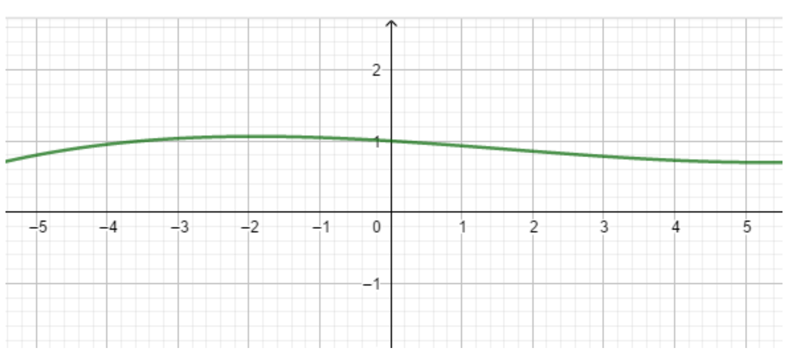


1. Determine para cada una de estas la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ y trácela sobre el mismo plano cartesiano de las gráficas dadas.

2. ¿Cuál de las rectas tangentes representa el comportamiento más extraordinario del etileno?

3. En relación con la pregunta anterior establezca un criterio que generalice la relación que existe entre un polinomio y la ecuación de su recta tangente en el punto donde interseca al eje de las ordenadas.

B. Sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 - 0.06x + 1$ adjunta modela el comportamiento de otro de los elementos químicos que componen el transformador trace la representación que se obtendría al realizarse las siguientes modificaciones



a. $f(x)=0.002x^3-0.01x^2+0.06x+1$

b. $f(x)=0.002x^3-0.01x^2-0.06x-1$

c. $f(x)=0.002x^3-0.01x^2+0.06x-1$

El debate entre funcionamiento y forma de esta actividad permiten la emergencia del uso de la derivada: búsqueda de comportamientos estables (ver Tabla 7).

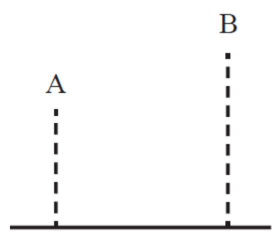
Tabla 7
Uso de la derivada. Búsqueda de comportamientos estables.

Uso: Búsqueda de comportamientos estables	
Forma	**Funcionamiento**
Variación de parámetros que modifican el comportamiento de la gráfica.	Generación de un comportamiento estable para los gases presentes en el transformador eléctrico.

3.5.3. Cambio

La tercera actividad se divide en tres partes y se basa en la situación de variación. En esta no se conoce ninguna función y sin embargo se espera calcular la concentración, en estados posteriores, de uno de los gases del transformador eléctrico. En esta situación se espera la emergencia de un nuevo uso (ver tabla 8) en el que se considera la resignificación de los usos anteriores.

1) En la siguiente figura, A y B representan el comportamiento del etileno en distintos momentos. Se supone que usted sólo conoce A y el cambio de A a B (pero no B). Construya un modelo que le permita predecir B a partir de esos datos.



2) Suponga que ahora se desconoce el comportamiento gráfico del etileno. Sabiendo que los datos se tomaron cada seis meses, que una de las concentraciones fue de 6.02ppm y que la derivada en ese dato es de 2.7, entonces prediga qué concentración se tendría tres meses después.

3) ¿Sucedería lo mismo si la pendiente de la recta tangente es -2.7? Si la respuesta es negativa, ¿qué pasaría entonces?

Tabla 8
Uso de la derivada. Predicción de estados posteriores.

Uso: Predicción de estados posteriores	
Forma	**Funcionamiento**
Trazo de la recta tangente, utilizando la derivada como pendiente de esta, para la comparación de estados.	Determinación de comportamientos posteriores de los gases presentes en el transformador con el fin de tomar acciones.

Estas situaciones permiten que la definición de derivada se resignifique a través de la predicción, la graficación y la analiticidad: la derivada y la recta tangente debaten contra la comparación de dos estados y la sucesión simultánea de las derivadas, pero también debaten contra la variación de parámetros y el comportamiento tendencial. Lo cual no compone, en la actualidad, ningún eje didáctico ni para los textos escolares ni para el currículo escolar.

3.6. Prueba piloto

Con motivo de validar el diseño escolar se llevó a cabo una prueba piloto. Esta consistió en aplicar el diseño a tres estudiantes y dos profesores de matemática (ver Tabla 9) con el objetivo de conocer cómo se enfrentaban a cada una de las actividades. La elección de los participantes se debió a su anuencia y a que tres de ellos tienen el mismo perfil académico que se buscaba para la investigación.

Después de la prueba piloto se conoció que la aplicación del diseño requería de al menos cuatro horas, y se modificó la redacción de algunas de las actividades, así como el orden en que se presentaban.

Tabla 9

Descripción de los participantes de la prueba piloto

<table>
<tr><th>Participante</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Estudiante de Ingeniería Química (III semestre)
Universidad de Costa Rica.
Aprobó tres cursos de cálculo (dos en una variable y uno en varias variables).</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2">Estudiantes de Química Industrial (VI semestre).
Universidad Nacional, Costa Rica.
Aprobó tres cursos de cálculo (dos en una variable y uno en varias variables).</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">Profesores de cálculo universitario, con 2 años de experiencia.</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
</table>

3.7. Comunidad de conocimiento matemático

La comunidad con la que se trabajó en esta investigación se denomina, desde la postura teórica asumida, *comunidad de conocimiento matemático de ingenieros químicos en formación* (CCM(IQ_F)). La muestra está conformada por cinco estudiantes de la Licenciatura en Ingeniería Química de la Universidad de Costa Rica, Sede Rodrigo Facio (ver Tabla 10).

Tabla 10

Descripción de los participantes de la investigación

Participante	Sexo	Carrera que cursa	Semestre que cursa	Cursos de matemática aprobados
1	Femenino	Licenciatura en Ingeniería Química (11 semestres)	XI	• Cálculo I • Cálculo II • Cálculo III • Álgebra lineal • Ecuaciones diferenciales.
2	Masculino		X	
3	Femenino		Dedicada solo a trabajo de tesis	
4	Masculino		XI	
5	Masculino		IX	

La Licenciatura en Ingeniería Química de la UCR es una carrera que consta de un total de once semestres (ver anexo 3). Esta carrera forma profesionales preparados teórico y prácticamente para el desempeño de funciones en la industria y su esfera de influencia, ejerciendo funciones administrativas, de investigación y desarrollo, diseño, ventas y consultorías (Escuela de Química UCR, 2012).

Dentro de las actividades que realizan estos ingenieros químicos está el analizar los procesos físicos, controlar las variables físicas y químicas de los equipos, y su relación con la calidad de los materiales y los programas de producción. Además, dentro de sus tareas típicas se encuentra la elaboración de modelos o sistemas que resuelvan problemas planteados, utilizando el lenguaje escrito, oral, gráfico, y matemático (Escuela de Química UCR, 2012). Por lo que, el análisis gráfico de los elementos químicos presentes en un dispositivo corresponde a labores cotidianas de su profesión.

Cordero (2016a) afirma que considerar una comunidad de conocimiento matemático es entender que existe un cotidiano propio. Por lo que, se debe diferenciar a la comunidad de la individualidad, de lo público y de la universalidad. Además, este autor menciona que con esa premisa la *reciprocidad, intimidad y localidad* son los elementos que definen a una comunidad. En la Figura 19 se identifican los elementos que caracterizan a la CCM(IQ_F) basado para esto en Pérez-Oxté y Cordero (2020).

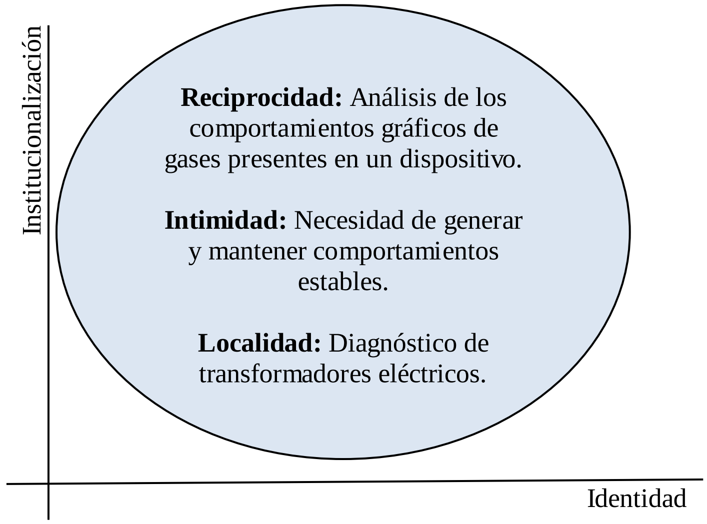


Figura 19. Modelo de comunidad de conocimiento matemático de ingenieros químicos en formación.

3.8. Recolección de datos

Es indispensable resaltar que debido a la pandemia causada por el virus SARS-CoV-2, que provocó el COVID-19 y que afectó al mundo en 2020, las universidades tuvieron que suspender las clases presenciales y en su lugar recurrir a clases en línea. Por lo que, no era posible recolectar datos de manera presencial, al menos durante 2020. Aunado a esto, debido al tiempo disponible para finiquitar esta investigación no se podía posponer la recolección de datos hasta que se retomaran las clases presenciales, ya que su fecha real de reinicio es incierta.

Como consecuencia, se recurrió a solicitar, vía correo electrónico, la colaboración del director de la Escuela de Química de la Universidad de Costa Rica, con el fin de que pudiera contactar estudiantes, de la Licenciatura en Ingeniería Química, que estuvieran anuentes a participar en el estudio, de manera sincrónica, utilizando la plataforma Zoom. Se obtuvo como resultado el correo electrónico de cinco estudiantes interesados en participar en la investigación.

Para la recolección de datos se recurrió a elementos etnográficos (Guber, 2011) y al estudio de casos. A continuación, se describen cada uno de estos.

3.8.1. Elementos etnográficos: entrevista no dirigida

En esta investigación se recurre al método etnográfico entrevistas no dirigidas. Una aclaración indispensable es que, como señala Moschkovich (2019), un estudio puede utilizar un conjunto de herramientas mixtas que incluya algunos métodos etnográficos sin ser una etnografía completa. Este autor afirma que la etnografía es una metodología que está intrínsecamente relacionada con los principios teóricos de la antropología, como centralidad de la cultura; por lo que, conlleva mucho más que solo la utilización de métodos etnográficos. Por esta razón, en esta investigación se habla de elementos etnográficos y no de etnografía.

Hay muchas formas diferentes de recolectar datos cuando se utilizan métodos etnográficos, uno de estos corresponde a las entrevistas no dirigidas (Moschkovich, 2019).

Previo a la aplicación del DSES se realizó una inmersión inicial, en la que se estudió el programa de estudios que se utiliza en la Licenciatura en Ingeniería Química de la Universidad de Costa Rica, con el fin de conocer el perfil del estudiantado y los contenidos de los cursos de matemática que habían aprobado.

Posteriormente, se realizó una entrevista semiestructurada con los participantes seleccionados, con la intención de conocer cómo habían sido desarrollados sus cursos de matemática, qué libros utilizaban, cómo definían la derivada y qué significados le asociaban.

Para la recolección de los datos, los participantes fueron grabados en audio y video, a través de Zoom. Durante la aplicación del diseño se les solicitó a los participantes realizar las anotaciones a través de la pizarra ofrecida por la aplicación.

Simultáneo a las realizaciones de los participantes se recurrió a una entrevista no dirigida, esta es más que un conjunto de intercambios discursivos acerca de un tema de interés entre alguien que interroga y otro que responde. La entrevista no dirigida se caracteriza por ser reflexiva, natural y no estructurada. Su valor no reside en su carácter referencial de solo informar cómo son las cosas, sino que el investigador hace de la entrevista una reflexividad, tanto para el informante como para él (Guber, 2011). La pertinencia de este tipo de entrevista radicaba en no solo observar cómo los participantes se enfrentaban a las actividades, sino conocer cuál era su razonamiento y el propósito de sus acciones.

3.8.2. Estudio de caso instrumental

Stake (2005) establece que los estudios de caso se caracterizan por trabajar de forma intensiva la unidad, entendiendo esa unidad como solo una persona, una familia, un grupo de personas, una organización o institución. Además, menciona que se puede estudiar un caso por dos razones: por el caso en sí mismo (estudio de caso intrínseco) o para someter a prueba una teoría (estudio de caso instrumental).

En el estudio de caso instrumental el caso se examina para profundizar en un tema o afinar una teoría, de tal modo que el caso juega un papel secundario, de apoyo, para llegar a la formulación de afirmaciones sobre el objeto de estudio (Stake, 2005).

De manera particular, en esta investigación se sometió a prueba que la descentración de la derivada, como pendiente de una recta tangente en los ingenieros en formación, llevaría a la emergencia de nuevas argumentaciones a partir de problematizar el saber matemático puesto en juego, dando como resultado la resignificación de los usos de la derivada.

3.9. Unidad de análisis

Una vez que se ha establecido la definición general del caso, es importante la clarificación de la unidad de análisis. Yin (2009) menciona que, si la unidad de análisis es un grupo pequeño, hay que distinguir las personas que se incluyen en el grupo de las que están fuera de él.

De esta manera, dado que en esta investigación se analiza la emergencia de nuevas argumentaciones que expresen la resignificación de los usos de la derivada, en un grupo de ingenieros en formación, se toma como unidad de análisis el modelo de comunidad de conocimiento matemático (ver Figura 20).

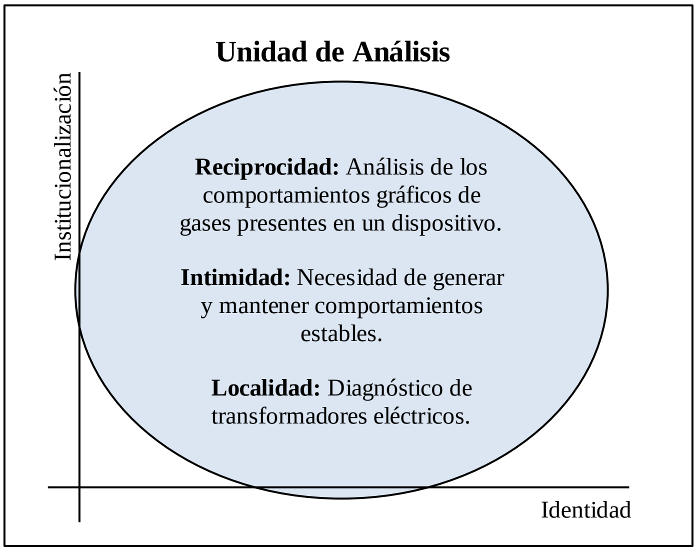


Figura 20. Modelo de comunidad de conocimiento como unidad de análisis.

3.10. Resumen de aspectos metodológicos de la investigación

A manera de cierre de este capítulo se presenta la pregunta de investigación, las hipótesis establecidas, los datos y la manera de realizar el análisis (ver Tabla 11).

Tabla 11

Conexión entre pregunta de investigación, hipótesis, datos y análisis.

Pregunta de investigación	Hipótesis	Datos	Análisis
¿Cuáles son los procesos de valoración de los usos de la derivada, que surgen en el estudiantado, en el tránsito entre significarla como pendiente de una recta tangente a resignificarla como una predicción, como un comportamiento tendencial y como una analiticidad?	La transversalidad entre las situaciones, puesta en juego en el diseño escolar, hará emerger las resignificaciones de los usos de la derivada.	Producciones en la resolución del diseño escolar y entrevista	Dialéctica exclusión-inclusión y estudio de caso instrumental
	La sobreposición de las argumentaciones de la CSCM sobre las del dME permitirá una valoración horizontal de los saberes.		

CAPÍTULO IV
RESULTADOS Y DISCUSIONES

CAPÍTULO IV
RESULTADOS Y DISCUSIONES

En este capítulo se presentan los principales resultados del análisis de la aplicación del diseño de situación escolar. Para tales efectos se recurrió a la dialéctica exclusión-inclusión; por lo que, el análisis se estructura en tres secciones, a saber: confrontación de contrarios, unidad y cambio.

4.1. Entrevista preliminar

Los cinco estudiantes que conformaron la muestra de esta investigación fueron consultados sobre cómo fueron sus cursos de cálculo, cómo definen la derivada y qué significado le asignan.

En las respuestas hubo coincidencia de que, en general, se trabajaba con ejercicios asignados por el profesorado y que la derivada se abordada bajo la definición de límite. Dentro de los significados asignados, los participantes mencionaron que:

a. "Solo me dijeron que la derivada de la función es un límite"
b. "De la integral sí sé que es un área bajo la curva, pero la derivada no sé qué significado tiene"
c. "Es un límite y geométricamente una recta tangente"
d. "Son reglas para obtener expresiones"
e. "La derivada puede ser una velocidad, una aceleración, pero usualmente nos vamos directo a ver las reglas"

Estos comentarios permiten inferir ciertos errores conceptuales acerca de la derivada de una función *f*, al considerarla como una recta tangente, cuando en realidad es la pendiente de la recta en el punto de tangencia con la gráfica de *f*. Además, se puede observar que ninguno de los participantes asigna un significado en términos del cotidiano de su disciplina, la ingeniería. Y se confirma cuando dos de ellos afirman que usualmente los cursos de matemática los llevan porque están en el plan de estudios, pero que no ven aplicaciones en la carrera.

Uno de los participantes brindó una representación gráfica (ver Figura 21) y una explicación intuitiva de qué es la derivada “Para una función como la que se muestra, la derivada irá creciendo al igual que la función, pero cuando la función tiene una caída drástica, la derivada velocidad de crecimiento también cambiará, ya que el crecimiento se frenó”.

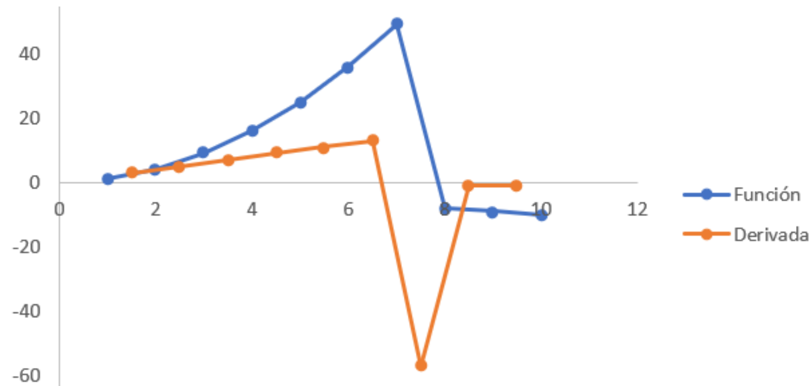


Figura 21. Representación gráfica de una función y su derivada

En esta explicación subyace una interpretación en términos de velocidad sobre la derivada, sin embargo, como se puede notar el estudiante recurre a un contexto de funciones para expresar su pensamiento, no utiliza ningún marco de referencia en el cual pueda dar significados funcionales.

Adicionalmente, se le solicitó a uno de los participantes facilitar los apuntes que tenía en su cuaderno de cálculo, para conocer con más detalle cómo se había abordado el tema. En las figuras 20, 21 y 22 se puede observar que se inicia con una representación gráfica a través de una recta tangente en un punto, luego se deduce una fórmula algebraica para el cálculo de su ecuación y finalmente se define la derivada a través de un límite.

Un aspecto importante de destacar es que en la primera parte de la deducción de la ecuación de la recta tangente se subraya la localidad de esta, es decir, la concepción leibniziana (Canul, Dolores y Martínez-Sierra, 2011), y se señala que el problema consiste en determinar la ecuación de la recta tangente. Posteriormente, se establece la concepción de recta tangente en términos del límite de rectas secantes.

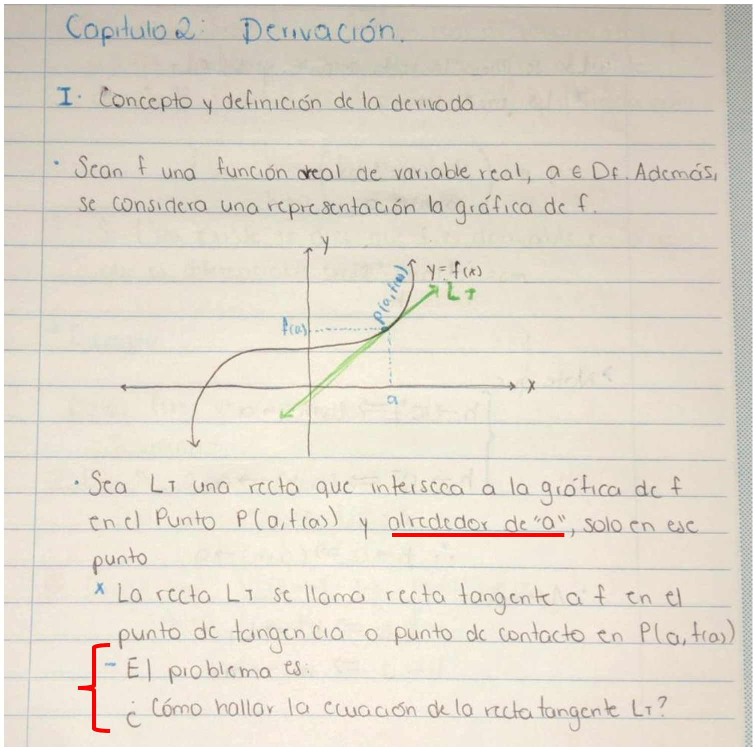


Figura 22. Introducción de la derivada en los cursos de cálculo para ingeniería.

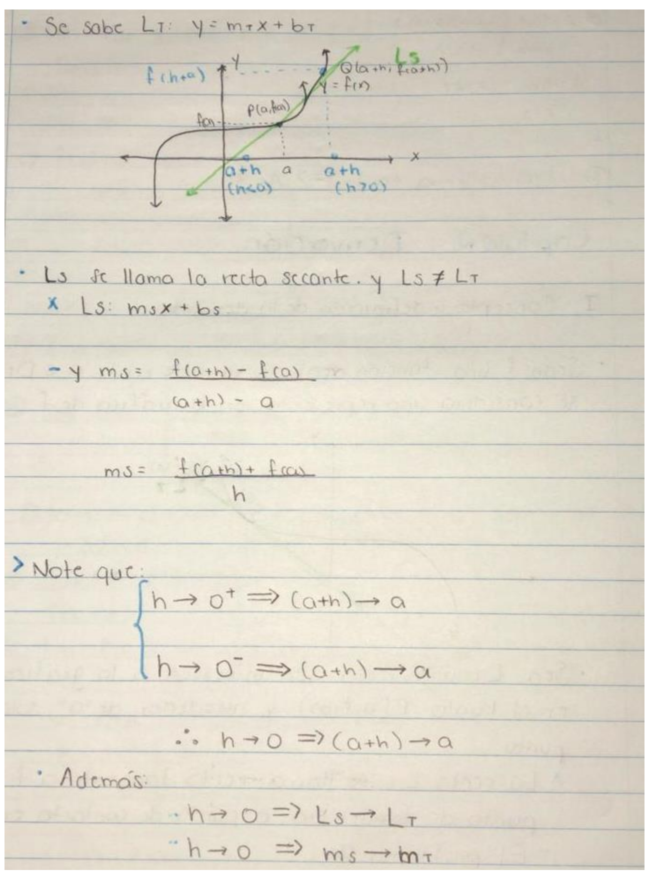


Figura 23. Deducción de la pendiente de una recta tangente.

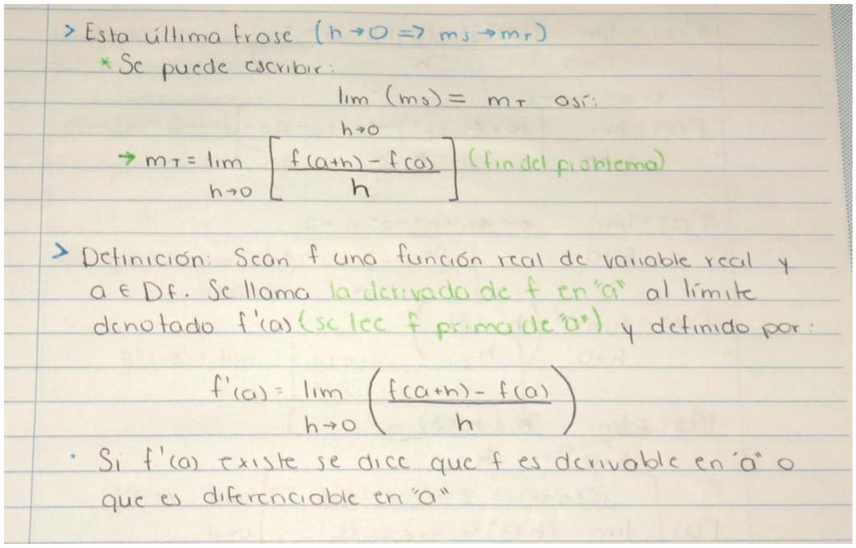


Figura 24. Definición de derivada.

Los apuntes de los estudiantes confirman sus afirmaciones, se propicia la búsqueda algorítmica de la ecuación de la recta tangente. A pesar de que se muestra una deducción de la definición de derivada a través del límite de una función.

En las siguientes secciones se muestra cómo fue el proceso de resignificación de la derivada.

4.2. Puesta en escena del diseño de situación escolar de socialización y entrevista no dirigida.

En esta sección se presenta la resolución de los tres episodios que conforman el DSES: confrontación, unidad y cambio (ver Tabla 12). Debido a que en los cinco estudiantes que conforman la muestra se logra la emergencia de nuevas argumentaciones solo se exhibirán las resoluciones de uno de ellos.

Para efectos de las transcripciones se denotó con *A* los comentarios/razonamientos/justificaciones del estudiante, con *E* las intervenciones del entrevistador y entre corchetes [] las aclaraciones del entrevistador sobre el proceder de los estudiantes.

Tabla 12
Episodios que conforman el DSES

Confrontación		Unidad		Cambio
Actividades				
1-2	3	4	5	6-7
Traza rectas tangentes como orientación para determinar comportamientos estables del gas.		Reconoce la recta tangente como generadora de comportamientos tendenciales.		Predicción de estados posteriores del comportamiento del gas.

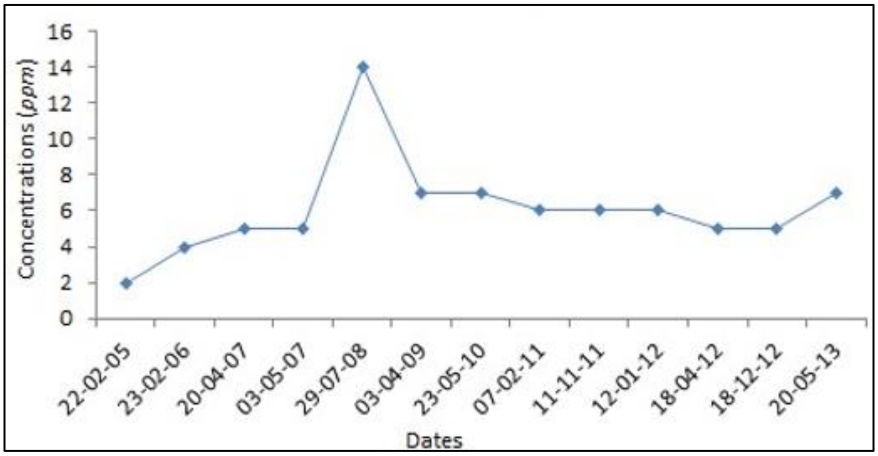
4.2.1. Confrontación

La primera de las situaciones que se presentan en el DSES es la aproximación. Bajo esta situación se pretende confrontar la matemática escolar, en la cual se da una función, se señala un punto y posteriormente se pide determinar y graficar su recta tangente.

En la primera parte de la actividad, la recta tangente permite evidenciar si el transformador eléctrico presenta un comportamiento estable o extraordinario. Es decir, el trazo de la recta tangente no responde solo al hecho de seguir una instrucción, sino que tiene una funcionalidad intrínseca en la situación que se presenta.

Además, la segunda parte de la actividad es una combinación entre las situaciones de aproximación y transformación. Por una parte, se presenta el problema inverso del discurso matemático escolar, es decir, se da una recta y se debe trazar sobre esta una curva para la cual la recta dada sea su tangente, y para la consecución de esa curva se recurre a la variación de parámetros y a sus conocimientos disciplinares sobre cómo es un comportamiento estable.

1. Considerando que un comportamiento que da cierta garantía de un buen estado del transformador es cuando no se presentan fluctuaciones extremas, bajo esas condiciones cómo describiría el estado del transformador basado en la gráfica del etileno presentada en el contexto inicial.



A: De primera entrada lo que uno ve es eso, datos anómalos [refriéndose al 29-07-08].

E: ¿Por qué logra ver eso?

A: Uno trata de ver tendencia en los datos y ese se sale de la media

E: ¿Cuál es la tendencia que logra ver?

A: Entre constante a ligeramente lineal con crecimiento, al inicio me parece que hay una etapa de estabilización.

A: Si la dependencia del dispositivo al gas es débil ese punto se podría obviar, pero si me dices que es fuerte no sabría decir si fue un fallo, pero sí que habría que revisar el trasformador. Ese dato de 14ppm se desvía tanto de los datos. Los demás se mantienen como en 2ppm como hasta 6ppm más o menos, en cambio ese pico se va hasta 14 que es más del doble de lo que uno esperaría, lo más probable es que sí sea una falla, pero estoy de acuerdo en que habría que obtener más información, pero definitivamente alarma tener un dato tan inestable.

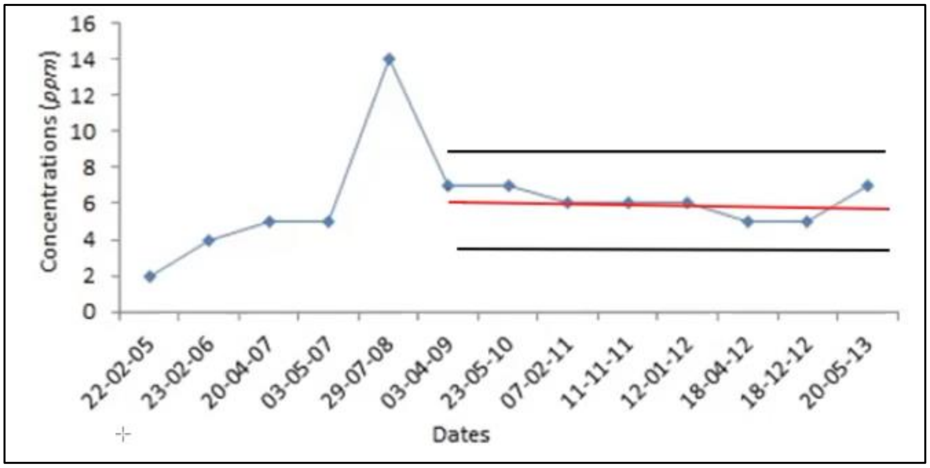
2. Trace una recta que muestre un comportamiento estable en la gráfica dada en el contexto inicial, de tal manera que sea tangente localmente en algún punto de la gráfica dada.

A: ¿Y cuál sería la ecuación de esa gráfica? [queda en silencio durante unos segundos]. Lo único que se me ocurre es hacer las tendencias por partes, antes del pico y después del pico.

E: ¿Y entonces cómo trazaría una recta que muestre un comportamiento estable en la gráfica?

A: Yo lo pensaría mucho como un gráfico de control, en el cual hay una línea que es básicamente el promedio, en los que hay un límite superior y uno inferior.

E: ¿Cómo representaría eso? [Posteriormente empieza a trazar rectas sobre la gráfica dada]



E: ¿Cuál sería la ecuación de la recta roja?

A: Sería igual a y=6

E: ¿Esa recta roja es tangente a la gráfica? [En este momento el estudiante guarda silencio y se muestra inseguro].

A: Una recta tangente representa la derivada de una función. Bueno, la pendiente.

E: ¿Entonces la recta roja lo sería?

B: No porque la toca en más de un punto.

A: No, solo puede ser en uno.

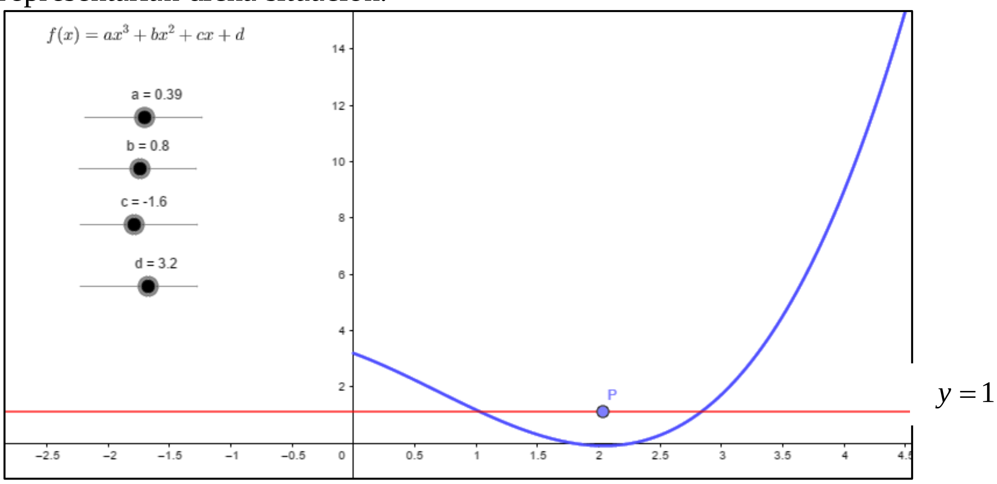
4.2.1.1. Análisis de la primera parte de la actividad

En esta actividad se puede observar cómo la recta tangente tiene un papel primordial en la determinación de un comportamiento estable. Los estudiantes trazan rectas que les permitan analizar qué tanta variación hay respecto a esta para determinar el tipo de comportamiento.

En el inicio de la actividad se puede ver cómo el privilegio de aspectos procedimentales juega un rol esencial en el trazo de la recta tangente, ya que el estudiante consulta sobre la ecuación de la gráfica dada, posiblemente buscaba aplicar algún algoritmo para determinarla. Esto representa una confrontación con el dME, en el que siempre se conoce la ecuación de la gráfica y el punto sobre el cual debe trazarse la recta tangente.

En la parte final, a pesar de que traza una recta que muestra un comportamiento estable, que es cuando la gráfica tiende a esta, indica que no es tangente porque la interseca en más de un punto, aunque se puede observar que la recta es tangente localmente en la parte constante. En otras palabras, el concepto de tangencia global y local no representa nada para él en términos de su definición, a pesar de que en las notas del curso está implícita esta noción.

3. En una toma de datos se obtuvo la siguiente gráfica para el comportamiento del etileno, el cual se modela por la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, si se sabe que esta representa un comportamiento estable cuando se "acuesta" sobre una recta que es tangente a ella localmente, cuáles son los parámetro de *a*, *b*, *c* y *d* que mejor representarían dicha situación.



A: Si queremos que sea igual a la recta roja coloco todos los parámetros en cero y el d=0.8.

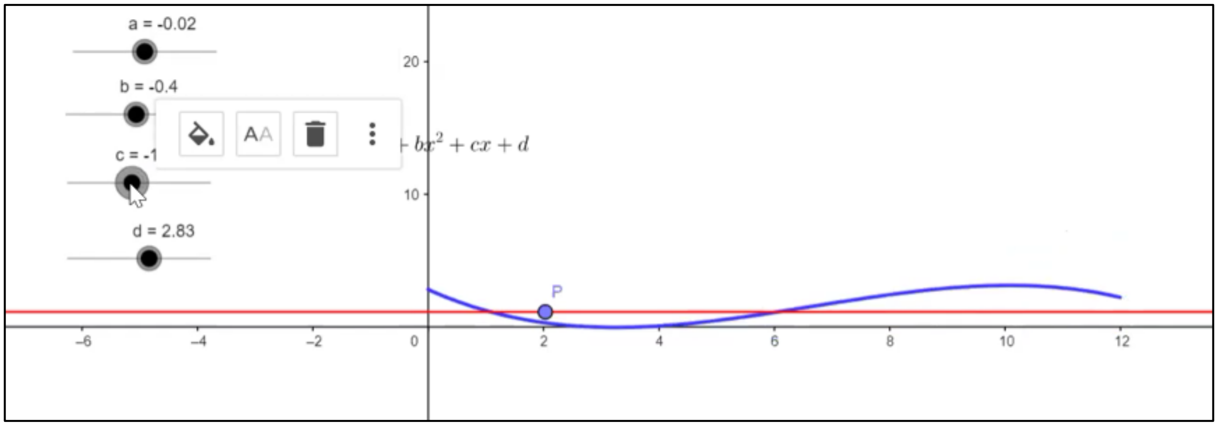
E: ¿Y el comportamiento de un gas podría ser exactamente como la recta roja?

A: Bueno no, solo el gas ideal.

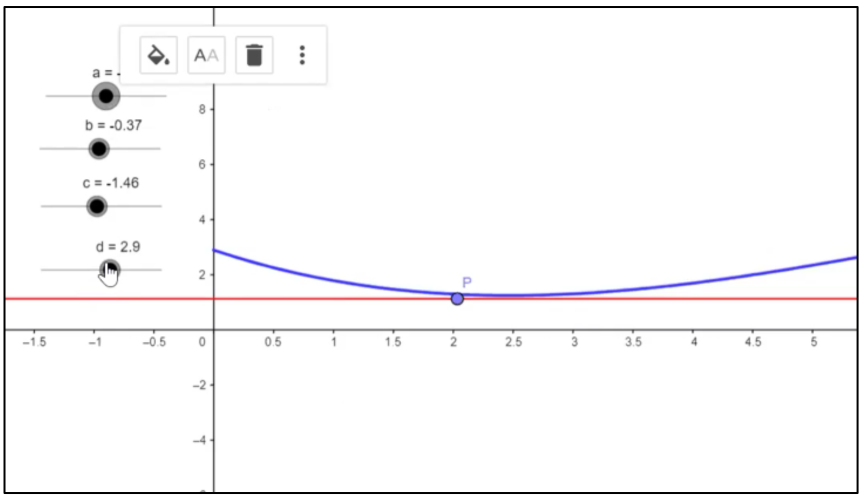
E: ¿Entonces cómo podría obtener una con un comportamiento no perfecto pero sí estable?

A: Bueno, voy a intentar conseguir una [en ese momento empieza a mover los parámetros de la función. Después de un tiempo indica que lo que está haciendo es "al tanteo", refiriéndose a variar los valores de los parámetros]

E: Recuerde que lo que buscamos es como un gráfico de control, utilizando para eso la recta roja.



A: Creo que ya lo voy logrando. Es que hay que ir tanteando mucho



A: No sé, creería que esto es lo que más puedo lograr.

4.2.1.2. Análisis de la segunda parte de la actividad

La segunda parte confronta la definición de derivada como pendiente de una recta tangente, debido a que de manera inversa a lo que se propone en el discurso matemático escolar se presenta una recta y sobre esta debe trazarse una curva, de tal manera que la recta sea tangente. El estudiante evidencia no poder aplicar ninguno de los procedimientos conocidos, incluso afirma que lo que está haciendo es tantear cómo determinar la curva.

En ese momento cobra importancia la variación de parámetros como una instrucción que organiza comportamientos, pero también se vuelven esenciales sus argumentos sobre cómo debe ser un comportamiento estable, por lo que la combinación de estos dos elementos son los que permiten la consecución de la actividad.

4.2.2. Unidad

En esta etapa se presenta una actividad que retoma elementos relacionados con la linealidad del polinomio (Rosado y Cordero, 2006). Para esto, se muestran tres gráficas sobre el comportamiento del etileno y se debe analizar cuál de estas tiene un comportamiento más estable en un intervalo cercano a cero. La intención es propiciar la emergencia de la generación de comportamientos tendenciales a través de la recta tangente, lo que posteriormente permitirá predecir el comportamiento del gas en estados posteriores.

4. Las siguientes gráficas representan el comportamiento del etileno. Los valores negativos en el eje de las abscisas representan los datos tomados anterior a una fecha específica y los valores positivos fechas posteriores a esta.

E: ¿Recuerda cuál es la ecuación de una recta?

A: Es $y = mx + b$ *si estamos hablando de una línea recta.*

E: ¿Y cómo podría determinar el valor de m?

A: Derivando "y" en términos de "x" y luego evaluando en cero.

A: La derivada sería -0.0649. Porque a la hora de derivar la constante se va, todo lo demás se va porque está multiplicado por "x", y el que queda es 0.0649 porque esa x también se va.

E: ¿Y cómo podríamos hallar "b"?

A: Si ya tengo la pendiente y sé que $x = 0$. *Además tengo que el valor de* $y = 6$

E: ¿A seis exacto? ¿Cómo puedo asegurarme?

A: Di evaluando la función en $x = 0$. *De hecho sí, el valor es 5.9188*

E: Ok, entonces ¿cuál sería el valor de b?

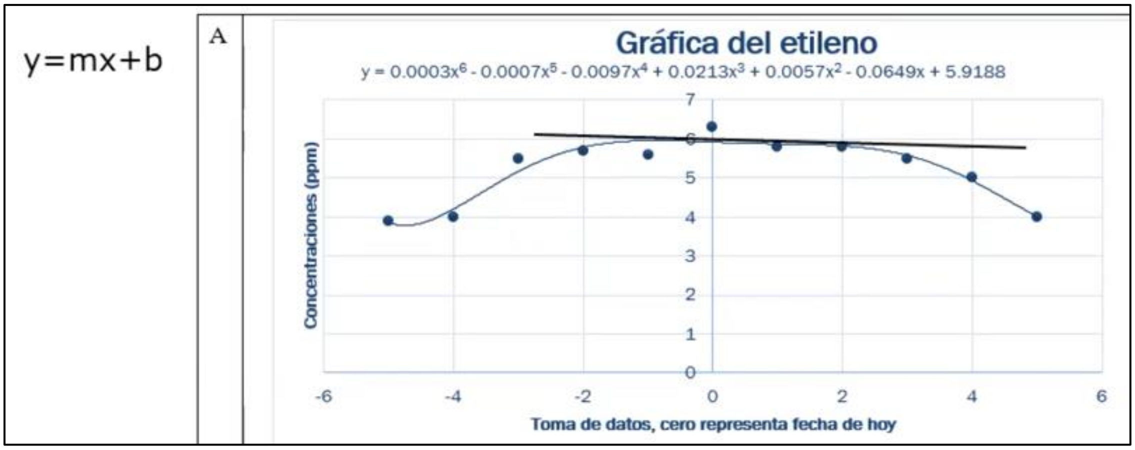
A: Voy a sustituir los valores [Se da un tiempo de espera]. Me dio 5.9188

E: Cuénteme qué hizo

A: Como $m = -0.0649$ *y como* $y = mx + b$, *así* $b = y - mx$ *y solo se sustituye.*

E: ¿Podría trazar esa recta tangente en el mismo plano cartesiano de la curva? ¿Cómo quedaría?

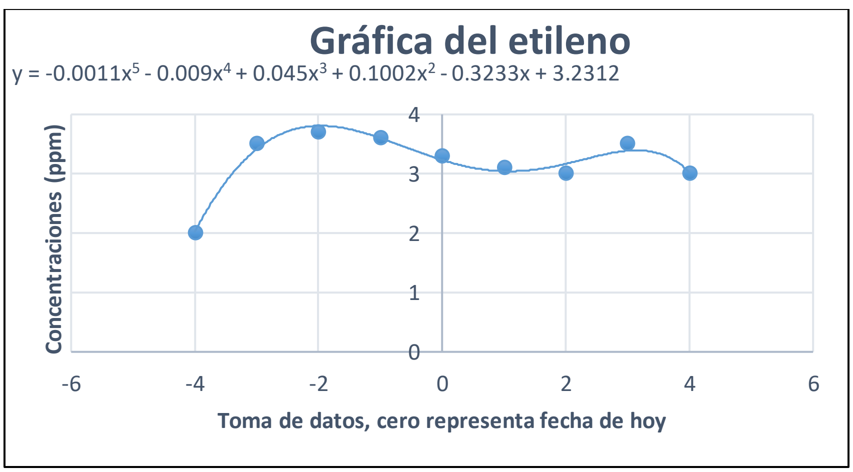
A: Sería algo así



E: ¿Qué relación logran ver entre ambas gráficas? ¿En qué se parece la tangente y la gráfica?

A: Al menos en el dominio de -3 a 3 sirve para mostrar un comportamiento, o sea, modela entre comillas, el comportamiento en ese rango. Al menos en un intervalo tienen un comportamiento similar.

E: Ok, vamos a hacer lo mismo pero con estas otras dos gráficas.



E: Sería entonces igual determinar la ecuación de la recta tangente y luego graficarla.

A: La ecuación la voy a escribir

E: Si quisiera escribirla en la pantalla con el botón anotar podría hacerlo

A: Ok, sería esta [anotó en la pantalla $y = -0.3233 + 3.2313$*]*

E: ¿Por qué sabe qué es esa?

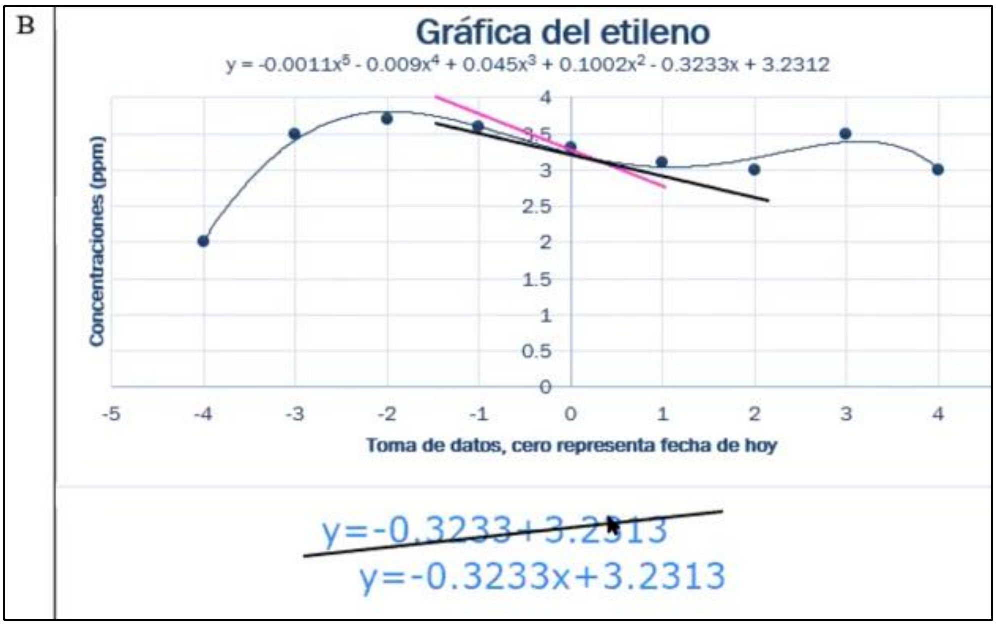
A: Porque apliqué el mismo procedimiento pasado, derivé y evalué en cero. El único valor que queda es -0.3233. ¡Ah perdón acá hay un error! [en ese momento se dio cuenta que había omitido la variable dependiente de la ecuación y luego anotó $y = -0.3233x + 3.2313$*]*

E: ¿Cómo quedaría si la graficamos en el mismo plano cartesiano?

A: Sería decreciente porque la pendiente es negativa [y traza la recta rosada]

E: ¿Y así como está sería tangente?

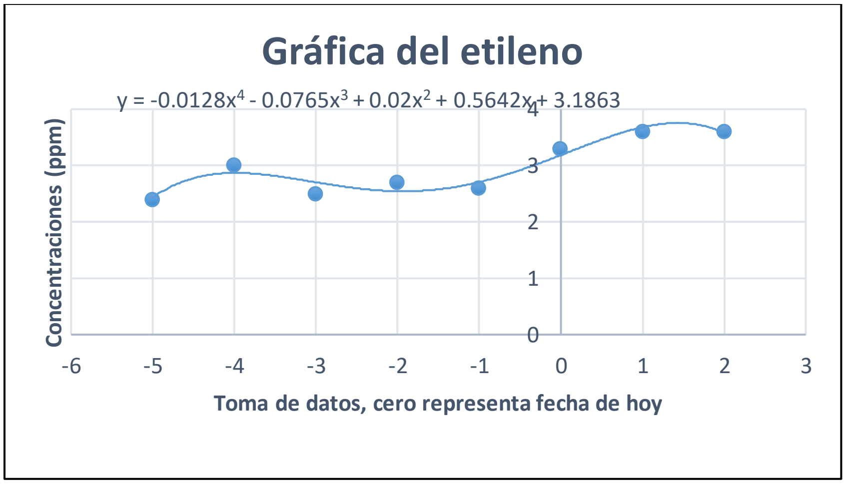
A: Diría que hay una tangencia local, es que difícil dibujar así, pero podría mejorarla [traza la recta negra]



E: ¿Qué relación logran ver entre ambas gráficas?

A: En ambos ejemplos, en el centro de la curva, la curva agarra la tendencia de la derivada. En un intervalo que uno pueda definir se comportan igual.

E: Vamos ahora hacer lo mismo con esta última gráfica.



A: La ecuación sería esta [anota en rosado $y = 0.5642x + 3.1863$*]. Son los últimos términos del polinomio.*

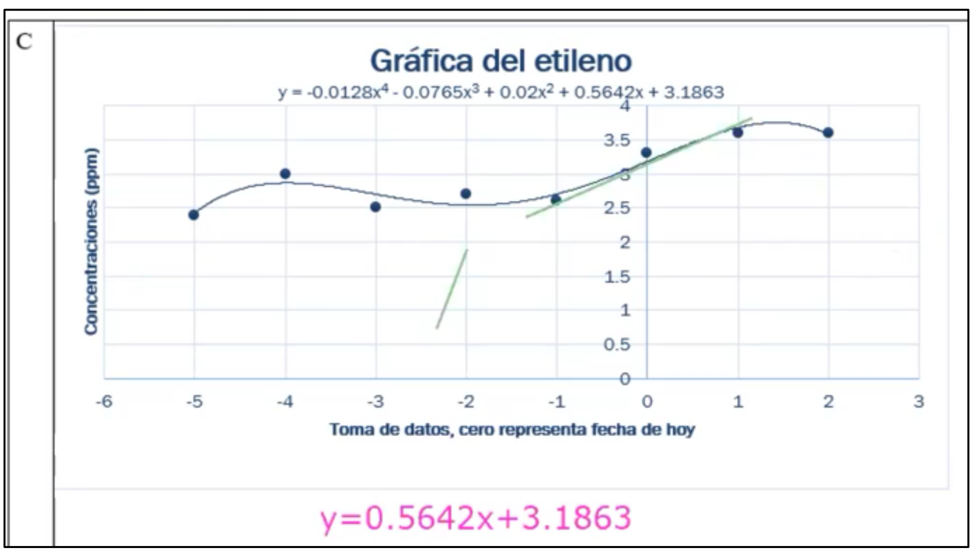
E: ¿Cómo sería su gráfica?

A: Esta está un poco más difícil, porque no hay una curvatura tan marcada. [Hace un intento de trazo, pero dista del punto de tangencia]

A: Esa de ahí puede ser, la última que dibujé.

E: ¿Cómo sabríamos que tiene esa forma?

A: Porque la pendiente es positiva e intercepción en 3.18



E: ¿Se cumple la característica que venían señalando?

A: En menor medida que las anteriores. Aunque la ecuación sí vuelve a ser los términos lineales.

E: ¿Por qué?

A: El rango es más corto, solo de -1 a 1 [refiriéndose al intervalo del dominio en el que la recta tangente se parece a la gráfica]. En intervalos cercanos al cero la recta tangente modela la misma tendencia. Es decir, la recta tangente se adapta, en un intervalo determinado, a la tendencia de la curva. Además, la que presenta un comportamiento más estable es la que tiene pendiente más cercana a cero, porque sería casi constante.

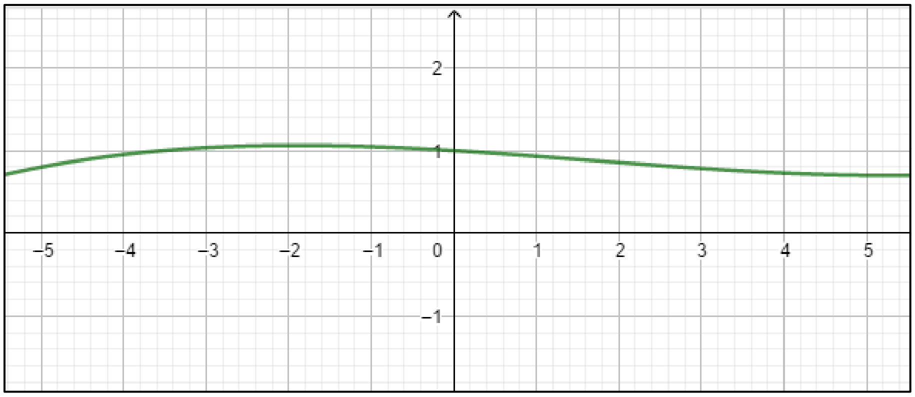
4.2.2.1. Análisis de la primera parte de la actividad

En esta primera parte de la actividad el estudiante logra reconocer que en $x = 0$ la ecuación de la recta tangente corresponde a la parte lineal del polinomio, aunque no lo percibe en la primera de las gráficas.

Conforme se le empiezan a realizar preguntas sobre la relación que observa entre la gráfica dada y la de la recta tangente comienza a notar que ambas tienen el mismo comportamiento en una vecindad centrada en el punto de tangencia. El estudiante empieza a afirmar que la gráfica de la recta tangente permite modelar el comportamiento gráfico del gas.

Lo anterior, se corresponde al preámbulo de la segunda parte de la actividad, la cual tiene la intención de ver la unidad, en este sentido, se pretende conocer si utilizan la recta tangente como generadora del comportamiento de una curva en una vecindad alrededor de cero. Para esto, se proporciona la gráfica de un polinomio y se modifican los signos de la parte lineal, posteriormente se les solicita determinar cómo sería la gráfica que se obtendría producto de ese cambio.

5. Sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 - 0.06x + 1$ adjunta modela el comportamiento de otro de los elementos químicos que componen el transformador trace la representación que se obtendría al realizarse las siguientes modificaciones



a. $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 + 0.06x + 1$

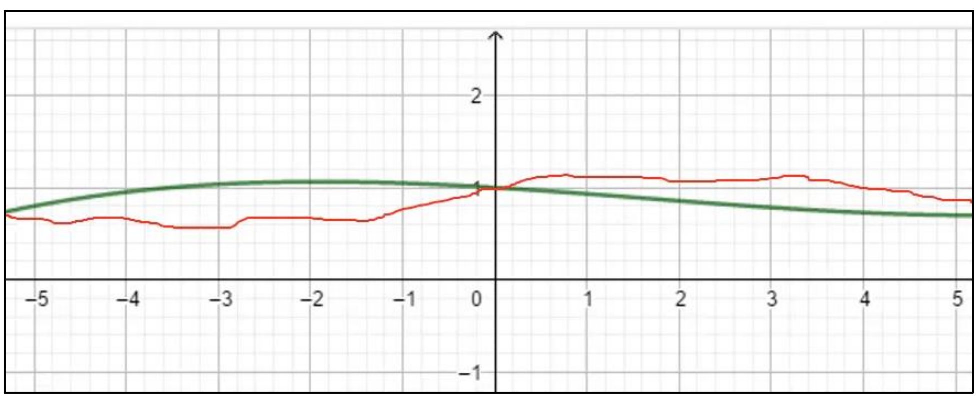
E: ¿Qué significaría ese cambio para efectos de la gráfica?

A: Vamos a ver [espera un momento] se invertirían, lo que está arriba en el lado negativo, digamos en la parte negativa de x, la gráfica sería cóncava hacia abajo y en la parte positiva hacia arriba. Cambiaría la orientación.

E: ¿Y por qué sabe eso?

A: Porque, por la pendiente de la recta. O sea, para que concuerde que sea decreciente debe ser así la recta tangente.

E: ¿Podría graficar para ver cómo está pensándolo?



A: Sería algo así, es que lo estoy haciendo con el "Touchpad"[panel táctil de las computadoras que permite controlar el cursor] de la laptop, por eso queda así. Pero digamos ese es como mi razonamiento

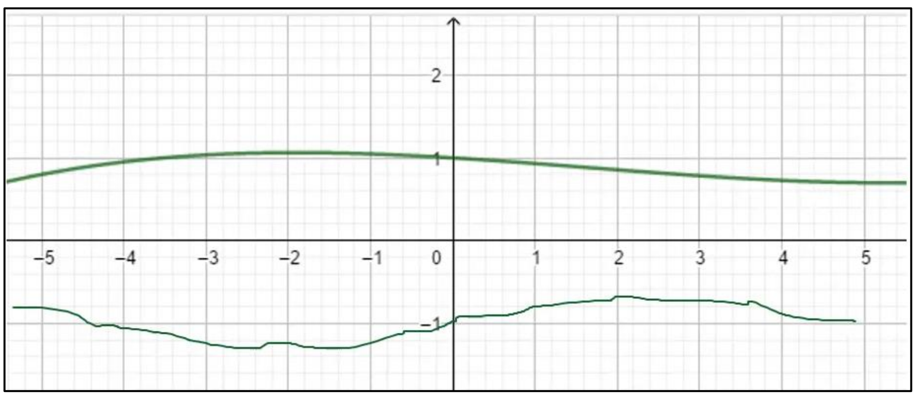
E: ¿Qué fue lo que le orientó para que la gráfica fuera así?

A: La pendiente de la recta tangente básicamente, porque ahora es positiva. Como ahora es 0.6 positivo entonces sería así la recta tangente en cero [realiza la gráfica de la recta verde que se ve en la figura]

b. $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 - 0.06x - 1$

E: ¿Cómo sería en este caso?

A: [Hay un momento de espera, mientras está analizando] Sería algo así [realizó la gráfica adjunta]

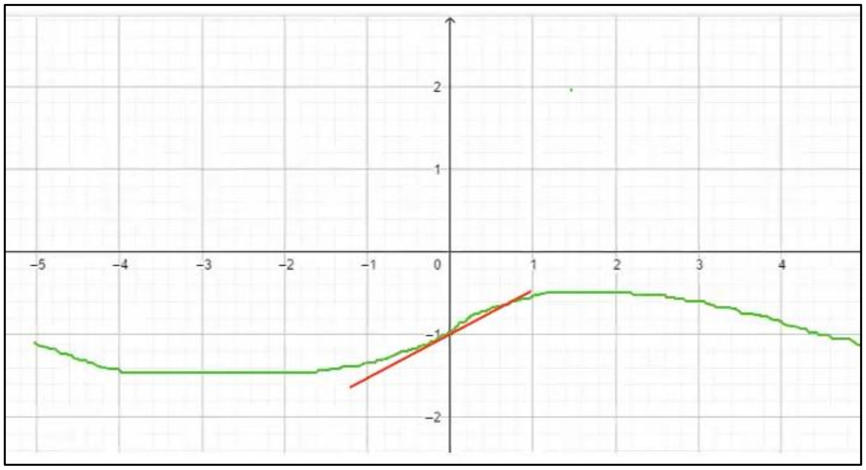


E: ¿Por qué sería así?

A: De nuevo por el 0.6.

E: ¿Y qué indica eso?

A: Ah pero ok, los dos son negativos, más bien entonces sería igual a la original solo que se trasladaría para intersecar en $(0,-1)$*. La gráfica que hice sería la del inciso c, es decir, sería la de* $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 + 0.06x - 1$



4.2.2.2. Análisis de la segunda parte de la actividad

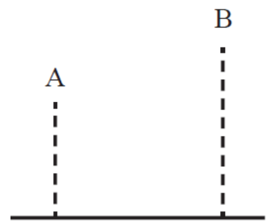
En esta sección se buscaba la emergencia de argumentos funcionales, en este caso el comportamiento tendencial. Como se puede notar, si bien el estudiante podía recurrir a aspectos procedimentales, como el cálculo de derivadas para determinar intervalos de monotonía y de concavidad para posteriormente realizar las gráficas de las funciones dadas, en su lugar recurre primero al trazo de la parte lineal del polinomio y basado en esta realiza posteriormente la gráfica solicitada. En sus justificaciones menciona que la gráfica solicitada y la parte lineal del polinomio tienen el mismo comportamiento, por lo que utiliza la parte lineal como guía en la determinación de la gráfica.

De esta manera se logra evidenciar como los argumentos funcionales se anteponen al discurso matemático escolar, lo que desde las leyes de la dialéctica se conoce como unidad.

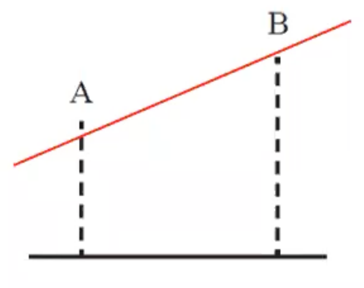
4.2.3. Cambio

El episodio de cambio es el último de la dialéctica exclusión-inclusión, en este se espera que se recurra solo a argumentos funcionales de la derivada. La actividad consiste en hacer una predicción del estado posterior del transformador, conociendo únicamente el comportamiento en un momento dado y la variación que se sucede en este.

6. En la siguiente figura, A y B representan el comportamiento del etileno en distintos momentos. Se supone que usted sólo conoce A y el cambio de A a B (pero no B). Construya un modelo que le permita predecir B a partir de esos datos.

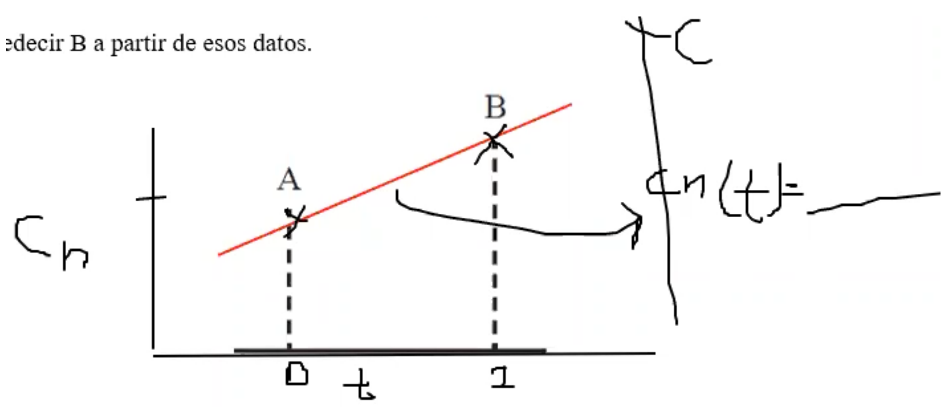


A: A mí se me ocurre eso [traza la recta roja], simplemente ver la tendencia de A y B, y sacar una regresión lineal, que en palabras muy ingenieriles es una regla de tres.



E: ¿cómo lo haría?

A: Lo que haría es tratar de asociar la altura de A a un valor [traza un eje vertical y uno horizontal]. Y como es en diferentes momentos es dependiente del tiempo [etiqueta el eje horizontal con t] y el comportamiento de etileno es concentración [etiqueta el eje vertical con C] entonces así tendría pares ordenados, y si nombro A tiempo cero y B tiempo uno, con eso podría sacar la concentración en función tiempo



7. Suponga que ahora se desconoce el comportamiento gráfico del etileno. Sabiendo que los datos se tomaron cada seis meses, que una de las concentraciones fue de 6.02ppm y

que la variación de ese punto a otro es de 2.7, entonces prediga qué concentración se tendría tres meses después.

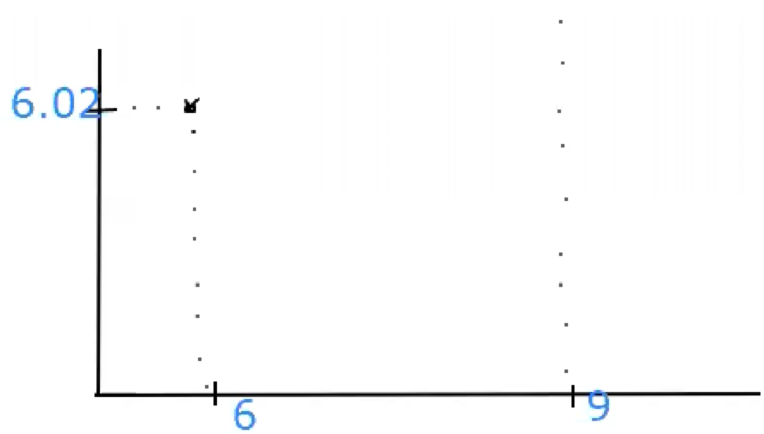
A: Bueno, lo primero es que como uno solo tiene un dato tendría que asumir una tendencia.

E: ¿y cómo a qué se refiere?

A: Como por ejemplo ahorita, en el ejemplo anterior, asumimos una tendencia lineal. Porque si tuviera varios datos sabría cómo se comporta esa concentración a lo largo de esos seis meses, pero sino tendría que asumir una.

E: ¿Y entonces qué se podría hacer?

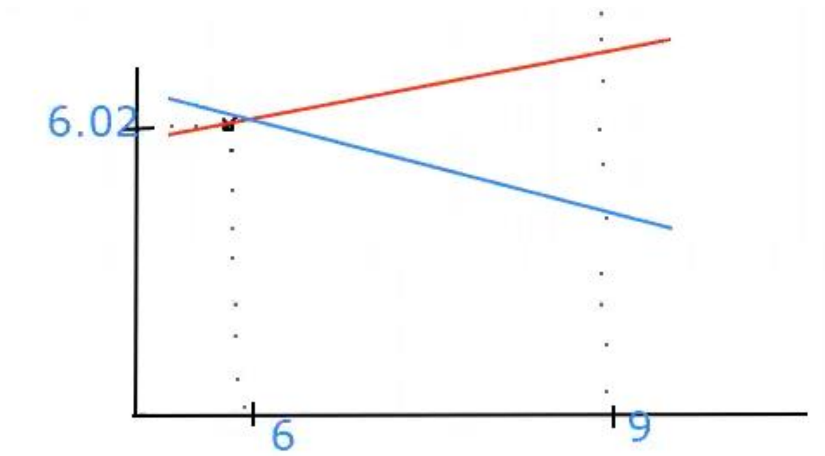
A: De momento lo que se ocurre es tratar de verlo gráficamente [realiza una gráfica]. Este punto es de los seis meses [y realiza el asterisco de la figura] y el de los nueves meses está acá, ya sea que suba o baje.



A:Lo que aun no entiendo es cómo interpretar el valor de 2.7, me imagino que debe ser como lo que estábamos haciendo ahora, sabiendo la orientación de la recta tangente tal vez podría intuir algo.

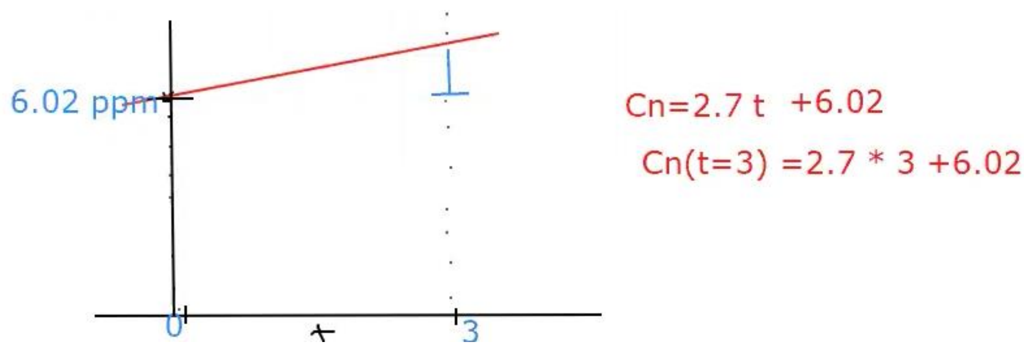
E: Ok, entonces está claro de que no se sabe que pasará a los nueves meses, si habrá una concentración de más de 6.02ppm o de menos de 6.02ppm. ¿Qué pasaría si supiera la pendiente de la tangente que pasaría?

A: Sabría el signo de la pendiente y ya con eso trazo una recta. Ya sea algo así ... o así [traza dos rectas]



E: ¿Y cómo se obtiene la pendiente de una recta tangente?

A: Voy a volver a construir la gráfica más bonita, pero iniciando en cero. La pendiente de la recta tangente es la derivada, entonces sé que sería creciente [realiza otra gráfica]

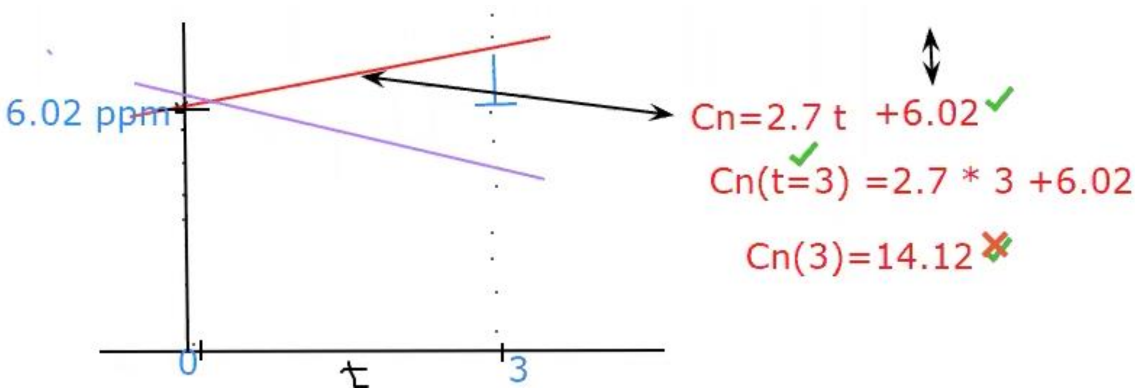


E: ¿Podría explicarme un poco qué fue lo que hizo?

A: Lo que hice fue expresar la ecuación de esa recta tangente. Antes había puesto medidas seis y nueve, pero era más engorroso, entonces era más fácil poner la medida en cero. Como sabemos que en el tiempo cero tengo una concentración de 6.02, entonces ese 6.02 va a ser el intercepto de la ecuación de la recta tangente y el 2.07 es el cambio, es decir, va a ser la pendiente, entonces fue como hice esa ecuación [marca con un "check" color verde la ecuación $C_n = 2.7t + 6.02$ *]. Y ya después como dicen que evalúe la concentración tres meses después, simplemente fue evaluar en t=3 [realiza otro "check" verde, esta vez sobre* $C_n(t=3)$ *]*

E: ¿Qué pasaría si la pendiente es -2.7?

A: Montaría la misma ecuación solo que con pendiente negativa. Y en ese caso habría una menor concentración después de tres meses.



4.2.3.1. Análisis de la actividad

Esta sección corresponde a la última parte del diseño, es decir, a mostrar el cambio. Desde el inicio el estudiante pone en juego resignificaciones de la recta tangente y lo hace recurriendo, para la resolución de la actividad, a aproximación lineal.

Además, a pesar de que ya en sus cursos de cálculo habían estudiado el polinomio de Taylor $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots$ y que podían recurrir a este utilizando el hecho de que h corresponde a los tres meses que han transcurrido desde la toma dada, haciendo una aproximación lineal y tomando el primer dato como tiempo cero, con lo que se tendría que $f(0+3) = f(0) + 2.7 \cdot 3 = 6.02 + 8.1 = 14.12$, este no es el recurso utilizado.

El estudiante desde el inicio recurre al trazo de una recta tangente para predecir el comportamiento del gas en el estado posterior solicitado, así como a la fórmula de la pendiente para construir una ecuación que le permita realizar la predicción. En otros términos, sabiendo que la toma de datos es cada seis meses y que la predicción es tres meses después, el estudiante está utilizando el hecho de que la recta tangente se comporta de manera similar a la gráfica que modelaría el comportamiento real del gas.

Lo anterior permite mostrar cómo la transversalidad entre las situaciones permite la emergencia de las resignificaciones de la derivada. En este último caso como predictora de comportamientos posteriores del gas.

4.3. Cierre de la puesta en escena del DSES

En la parte final de la aplicación del diseño se les consultó a los estudiantes sobre qué podrían decir ahora sobre el concepto de derivada de una función, esto con el fin de conocer cuál es la concepción que se había logrado posterior a la puesta en escena del diseño.

Los estudiantes expresaron que consideran la derivada es muy útil para obtener información rápida del sistema, si se consume el etileno o se genera más, dependiendo de la pendiente.

Además, añaden que en la actividad de las curvas, en las similitudes de la curva y la recta tangente, entendieron mejor la concepción de derivada como límite, "*porque tiene que ser en una porción de la gráfica muy pequeña, es decir que se aproximará de ambos lados de x a ese punto, entonces ahí es donde más la gráfica se parecía a la recta*".

Finalmente, aunque el interés del diseño era propiciar la emergencia de resignificaciones de los participantes, uno de los estudiantes comentó que: *"esta forma de ver la derivada es más intuitiva, más didáctica y al menos para mí es mucho más claro".*

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PROSPECTIVAS

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PROSPECTIVAS

En este capítulo se muestran las conclusiones más relevantes de esta investigación. Para lo cual, se ha estructurado este apartado entorno a la pregunta y a los objetivos de investigación; resaltando las principales contribuciones del trabajo. Finalmente, se mencionan las limitaciones del estudio y las prospectivas de investigación.

5.1. Conclusiones

La pregunta de investigación que se estableció en este trabajo es *¿cuáles son los procesos de valoración de los usos de la derivada, que surgen en el estudiantado, en el tránsito entre significarla como pendiente de una recta tangente a resignificarla como una predicción, como un comportamiento tendencial y como una analiticidad?* Para dar respuesta a esta pregunta se establecieron un objetivo general y dos objetivos específicos.

En el primero de los objetivos específicos se propuso la construcción de un diseño de situación escolar de socialización basado en situaciones de variación, aproximación y transformación que permitan la resignificación de la derivada. Como consecuencia, se obtuvo un total de siete actividades relacionadas con el análisis del comportamiento gráfico de gases presentes en un transformador eléctrico.

El diseño estaba permeado por dos momentos de transversalidad, por un lado está el dominio del cálculo escolar con la derivada como pendiente de una recta tangente y por otro lado está la Ingeniería Química con las resignificaciones de los usos de la derivada en situaciones de variación, transformación y aproximación.

Además, dos elementos indispensables en la elaboración del diseño fueron las categorías de conocimiento matemático y la perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión. Debido a que las categorías son las que permiten determinar el tipo de procedimientos, significados e instrumentos que se requieren en las actividades para provocar la emergencia de nuevas argumentaciones, pero es la dialéctica, a través de sus leyes, la que permite la valoración de los usos del conocimiento matemático.

De esta manera, la intención del diseño de provocar la emergencia de nuevas argumentaciones se logra mostrar a través del segundo objetivo en el cual se establecía analizar las transversalidades y valoraciones de usos de la derivada de los estudiantes de Ingeniería Química al enfrentarse al diseño de situación escolar de socialización.

En relación con este objetivo, como se pudo mostrar con las leyes de la dialéctica exclusión-inclusión el tránsito entre estas, que a su vez era un tránsito entre las situaciones de aproximación, transformación y variación, permitió el debate entre funcionamientos y formas de los usos de la derivada. En la confrontación se vislumbró la necesidad del trazo de rectas tangentes que permitieran determinar el tipo de comportamiento de los gases presentes en el transformador eléctrico, mientras que en la unidad la recta tangente permitía que pudieran organizar ese comportamiento y finalmente, en el cambio, se percibe como se hace una valoración de los elementos funcionales de la recta tangente al considerarla como el elemento principal para realizar una predicción, a través de una aproximación lineal, del estado futuro del transformador.

La consecución de estos objetivos específicos permitió el logro del objetivo general de evidenciar el proceso de valoración de usos que viven los estudiantes de Ingeniería Química en la resignificación de la derivada y además, permite corroborar las hipótesis establecidas al evidenciar cómo la transversalidad entre las situaciones, puesta en juego en el diseño escolar, hicieron emerger las resignificaciones de la derivada y en la parte final del diseño, en el cambio, se muestra la sobreposición de las argumentaciones de la CSCM sobre las del dME permitiendo una valoración horizontal de los saberes.

A manera de síntesis de la investigación, en la Tabla 13 se muestran, *grosso modo*, distintas partes que componen este informe de investigación, a saber: pregunta de investigación, hipótesis, datos recolectados, análisis, principales resultados e implicaciones del estudio.

Tabla 13

Síntesis de las partes que componen el informe de investigación.

Pregunta de investigación	Hipótesis	Datos	Análisis	Resultados
¿Cuáles son los procesos de valoración de los usos de la derivada, que surgen en el estudiantado, en el tránsito entre significarla como pendiente de una recta tangente a resignificarla como una predicción, como un comportamiento tendencial y como una analiticidad?	La transversalidad entre las situaciones (categorías de conocimiento), puesta en juego en el diseño escolar, hará emerger las resignificaciones de los usos de la derivada.	Producciones en la resolución del diseño escolar y entrevista	Dialéctica exclusión-inclusión y estudio de caso instrumental	La transversalidad de la recta tangente entre las tres situaciones permite la emergencia de las resignificaciones de los usos de la derivada
	La sobreposición de las argumentaciones de la CSCM sobre las del dME permitirá una valoración horizontal de los saberes.			La articulación entre las categorías de conocimiento matemático y la dialéctica exclusión-inclusión permite la sobreposición de la CSCM sobre el dME

De la Tabla 13 se debe mencionar que las hipótesis se basan, respectivamente, en las categorías de conocimiento matemático y en la perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión. La articulación de estos elementos permitió la valoración de los usos de la derivada que conllevan a los elementos establecidos en la columna denominada "Resultados". De esta manera, los procesos de valoración están directamente relacionados con las leyes de la dialéctica y cada una de estas está compuesta de las categorías de conocimiento matemático. Estas categorías son las que provocan la emergencia de nuevas argumentaciones, pero es la perspectiva del diseño la que permite la valoración de ellas.

Por lo que, se puede concluir que la valoración de usos está conformada por tres procesos: una confrontación de contrarios, una unidad y en última instancia el cambio, el cual permite el tránsito entre el discurso Matemático escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático, dándose en este punto una consideración de elementos que no forman parte de la matemática escolar.

A manera de cierre, se puede mencionar que una de las contribuciones del trabajo corresponde a la construcción de un diseño escolar, basado en un marco de referencia que actualmente no poseen los docentes, el cual permite la emergencia de resignificaciones de usos de la derivada. Esto conlleva a la consideración de una relación recíproca entre la matemática escolar y la realidad. Además, en este trabajo se logran fortalecer los elementos teóricos en cuanto a la construcción de un diseño escolar basado en la perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión, trabajo que había sido iniciado por Medina (2019).

5.2. Limitaciones

El estudio tiene varias limitaciones. Los datos fueron recolectados con cinco estudiantes que estaban finalizando la carrera de Ingeniería Química, en otras condiciones, se podría haber aplicado en un salón real de clases, con más estudiantes, lo que también hubiera permitido hacer inferencias sobre el funcionamiento del diseño en un ambiente escolar, así como analizar la interacción entre estudiantes y entre los estudiantes y el docente. De esta manera, también se tendría elementos que sostengan afirmaciones sobre el papel del docente. Aunque se debe resaltar que estas problemáticas no eran el objeto de atención en esta investigación.

5.3. Prospectivas de la investigación

Como prospectivas de esta investigación se tiene que, en estudios posteriores, el diseño de situación escolar puede ser puesto en juego en un curso de cálculo universitario, después del abordaje usual de la derivada, y analizar entonces sus fortalezas y debilidades (ver Figura *25*). En este caso concreto, se podría hacer una alianza docente e investigador para la puesta en escena y análisis del diseño.

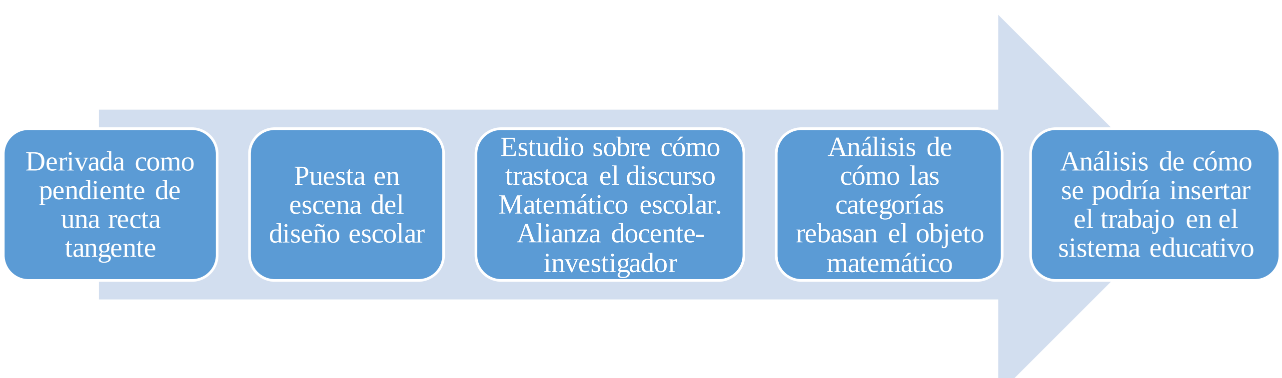


Figura 25. Prospectiva de inmersión en el aula.

Adicionalmente, desde el programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA) se considera que las categorías de conocimiento matemático pueden ser llevadas a cualquier nivel educativo. En este caso, no se afirma que la derivada como pendiente de una recta tangente pueda aprenderse en educación primaria, pero sí la generación de comportamientos tendenciales o la predicción de estados posteriores. De esta manera, una de las prospectivas más relevantes de este trabajo es llevar estas resignificaciones de los usos de la derivada a otros niveles educativos, así como determinar cuál sería el rol del docente en estos casos y cómo debería ser su formación inicial y permanente para *valorar* estos elementos epistemológicos que no forman parte del discurso matemático escolar.

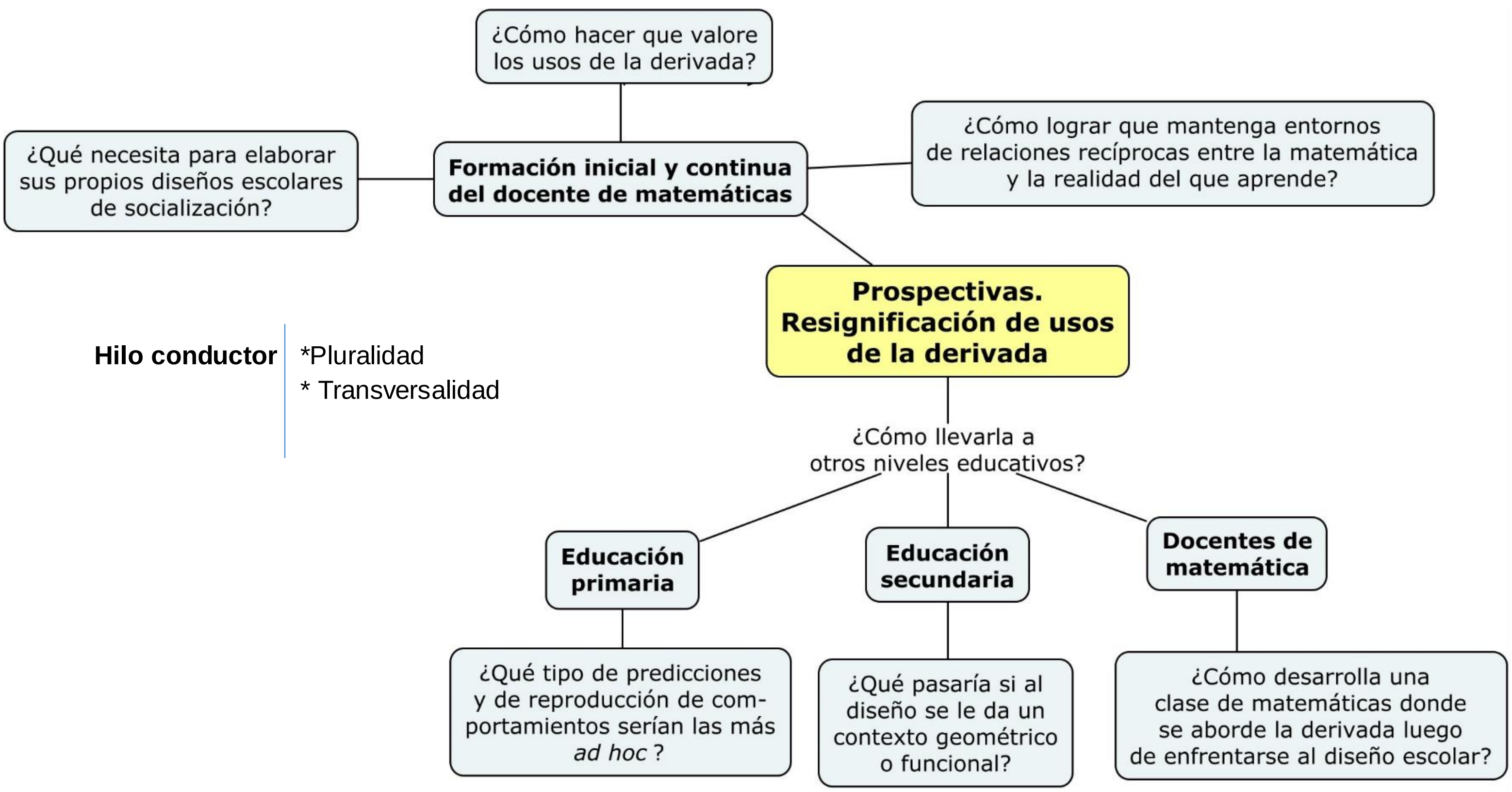


Figura 26. Prospectiva: los usos de la derivada en distintos niveles educativos y la formación inicial y continua del docente de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Referencias bibliográficas

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. (Tesis doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona). Tesis Doctorals en Xarxa.

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(6), 763–777. https://doi.org/10.1080/00207390701453579

Bouguerra, R. (2019). Students' difficulties to learn derivatives in the Tunisian context. In U. Thomas, M. Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2450 – 2452). Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martínez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. ICME-13 Topical Surveys. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8_1

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspects as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 299-333. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2295-5

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. (2ª. ed.). Barcelona, Gedisa.

Cantoral, R. (2019a). Socioepistemology in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1-7). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100041-1

Cantoral, R. (2019b). *Caminos del saber: pensamiento y lenguaje variacional*. Barcelona, Gedisa.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, pp. 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A., & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 77-89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, Díaz de Santos – Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F**.** (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. Hernández (Eds.), *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. Repensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377-399). España-México, Gedisa-Cinvestav.

Cordero, F. (2016a). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena-Lorca, J. Mena-Lorca, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez y D. Zakaryan, (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F. (2016b). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: El eslabón de la matemática y el cotidiano. En. J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación: Matemática Educativa* (pp. 59-88). Barcelona, Gedina.

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38

Cordero, F., Del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(2), 185-212. https://doi.org/10.12802/relime.19.2223

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona, Gedisa.

Cordero, F., Mendoza, J., Pérez-Oxté, I., Mena-Lorca, J., & Huincahue, J. (2019). *A category of modelling: the uses of mathematical knowledge in different scenarios and the learning of mathematics*. Manuscript submitted for publication.

Cropley, A. J. (2019). *Qualitative research methods: A practice-oriented introduction for students of psychology and education*. (2ª. ed.). Riga, Latvia: Zinātne. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/285471178_Introduction_to_Qualitative_Research_Methods

Escuela de Matemática UNA (2019). *Carta al estudiante MAT002 Cálculo I.* Heredia, Costa Rica: autor. Recuperado de http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/4-cursos-de-servicio

Escuela de Matemática UCR (2019). *Carta al estudiante MA1001 Cálculo I.* Departamento de Matemática Aplicada. San José, Costa Rica: autor. Recuperado de http://www.emate.ucr.ac.cr/sites/default/files/ma1001_final.pdf

Escuela de Química UCR (2012). *Plan de estudios de la Licenciatura en Ingeniería Química*. San José, Costa Rica: autor. Recuperado de http://eiq.ucr.ac.cr/documentos/Plan-de-estudios-2003.pdf

Garrido, V. (2014). *La derivada: de lo conceptual a lo algorítmico. Un estudio de caso con profesores de bachillerato*. (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav –IPN.

Giacoleti-Castillo, F. (2020). *La temporalización y la tendencia como factores funcionales de la reproducción de un comportamiento continuo a partir de discontinuos. Una resignificación de la Transformada de Laplace en un sistema de control*. (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav –IPN.

Hitt, F. & González-Martín, A. S. (2016). Generalization, covariation, functions, and Calculus. In A. Gutiérrez, G. L. Leder & P. Boero (Eds.), *Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (pp. 3-38). Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_1

Kieran, C., Doorman, M. y Ohtani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. En A. Watson y M. Ohtani (eds.). *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (pp. 19-81). Nueva York: Springer

Medina, D. (2019). *Transformación educativa del docente de matemáticas. Un episodio: El uso de la compensación como una resignificación de la media aritmética*. (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Medina, D., Cordero, F. y Soto, D. (2018). Función del docente de matemáticas y la inclusión en la construcción social del conocimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 662-670. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/13548/

Mendoza, J. y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 36-61. Recuperado de http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/501

Mendoza, J., Cordero, F., Solís, M. y Gómez, K. (2018). El Uso del Conocimiento Matemático en las Comunidades de Ingenieros. Del Objeto a la Funcionalidad

Matemática. *Bolema - Boletim de Educação matemática*, *32*(62), 1219-1243. http://doi.org/ 10.1590/1980-4415v32n62a23

Montiel, G. (2005). Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*, 667-672. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Morales, J. L. y Cordero, F. (2020). Resignificación de la derivada en una situación escolar con perspectiva de dialéctica exclusión - inclusión: un estudio socioepistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 453-461. Recuperado de https://www.clame.org.mx/documentos/alme33_1.pdf

Moschkovich, J. (2019). A Naturalistic Paradigm: An Introduction to Using Ethnographic Methods for Research in Mathematics Education. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 59-79). ICME-13 Monographs. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 624–640. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.795248

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *91*, 395–421. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9655-6

Pérez-Oxté, I. (2015). *Los usos de la gráfica en una Comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en Formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje.* (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.

Pérez-Oxté, I. & Cordero, F. (2020). *Modeling and anticipation of graphical behaviors in Industrial Chemical Engineering. The role of transversality of knowledge in learning mathematics*. Manuscript submitted for publication.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M.C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*, 507–515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Rosa, M. & Orey, D. C. (2012). Ethnomodeling: The Pedagogical Action of Ethnomathematics as a Program. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *10*, 205-218. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/10570/10007

Rosa, M. & Orey, D. C. (2015). A trivium curriculum for mathematics based on literacy, matheracy, and technoracy: An ethnomathematics perspective. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 587–598. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0688-1

Rosado, M. y Cordero, F. (2006). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. En G. Martínez (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*, 793-799. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296.

Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático*. (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema - Boletim de Educação matemática*, *28*(50), 1525-1544. http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos* (3ª ed.). Madrid, Morata.

Torres, L. (2013). *Usos del Conocimiento Matemático. La Simultaneidad y Estabilidad en una Comunidad de Conocimiento de la Ingeniería Química en un Escenario de Trabajo*. (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Yin, R. (2009). *Case Study Research: Design and Methods* (4th ed.). United States of America: Sage

Zaldívar, D., Cen, C., Briceño, E., Méndez, M. y Cordero, F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4), 191-210. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.17421

Anexos

ANEXO 1
DIVULGACIÓN CIENTÍFICA DE ESTA INVESTIGACIÓN

1. Presentación en eventos académicos

- **Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa** (RELME 33)**,** 2019.
  La Habana, Cuba: Universidad de las Ciencias Informáticas.
  Ponente en modalidad comunidad breve

  Diseño de situación escolar, bajo la dialéctica exclusión-inclusión, para resignificar la derivada: un estudio socioepistemológico.

- **Escuela de Invierno en Matemática Educativa** (EIME 22)**,** 2019.
  Baja California-Mexicali, México: Universidad Autónoma de Baja California.
  Ponente de avance de investigación.

  Resignificación de la derivada a través de un diseño escolar: un estudio socioepistemológico con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión.

- **Summer School on Mathematics Education**, 2020.
  Utrecht, Netherlands: Utrecht University
  Ponencia virtual

  Resignification of the uses of the derivative in a school design: prediction, trend, and approach (https://youtu.be/UghiuviWQHk)

- **International Congress on Mathematical Education** (ICME 14), 2020.
  Pospuesto para 2021. Shanghái, China.
  Aceptado en modalidad de ponencia.

  Resignification of the derivative in a school situation with a perspective of an exclusion - inclusion dialectic: from emulation of the concept to autonomy of uses

2. Artículos de investigación:

Morales, J. L. y Cordero, F. (2020). Resignificación de la derivada en una situación escolar con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión: un estudio socioepistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 453-461. Recuperado de https://www.clame.org.mx/documentos/alme33_1.pdf

ANEXO 2

DISEÑO DE SITUACIÓN ESCOLAR DE SOCIALIZACIÓN

RESIGNIFICANDO LOS USOS DE LA DERIVADA

Estimado(a) participante:
Respetuosamente se le solicita contestar las preguntas que se le formulan en este documento, el cual forma parte de la tesis de maestría denominada "*Resignificación de los usos de la derivada en un diseño escolar con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión: predicción, comportamiento tendencial y analiticidad".* La información que se brinde será confidencial y no se expondrán casos individuales. Se le agradece su colaboración.

I Parte. Generalidad

Datos personales	
Nombre completo	
Edad	
Carrera que cursa	
Semestre que se encuentra cursando actualmente	
Universidad de procedencia	
Cursos de matemática que ha aprobado	
Cursos de su carrera en los que hayan abordado análisis de gráficas del comportamiento de gases	

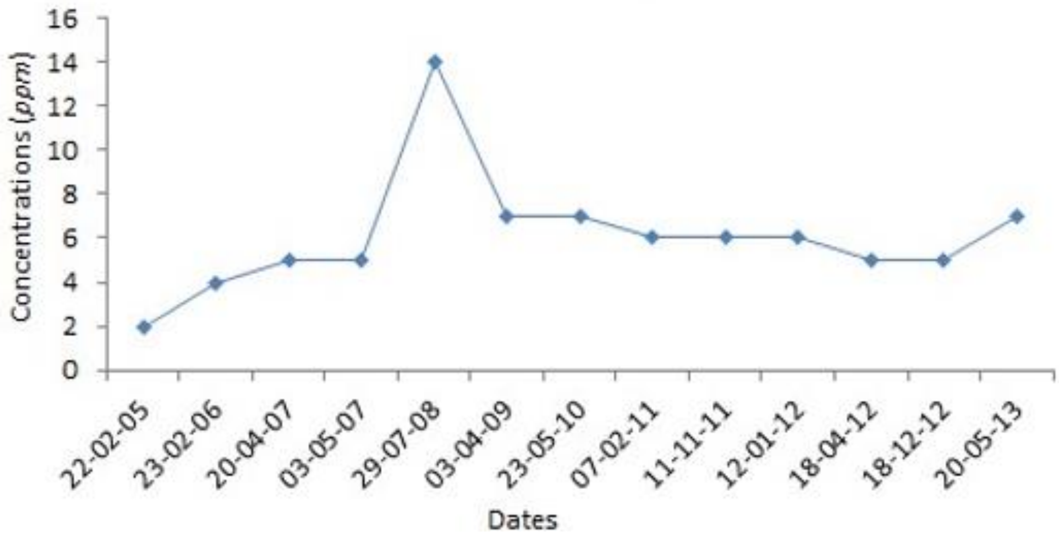
II Parte. Preguntas iniciales

1. ¿Cómo se abordó la derivada en sus cursos de cálculo? ¿Recuerda qué libro utilizaba?

2. ¿Cuál piensa que es el significado del concepto de derivada? ¿Podría realizar una representación gráfica de ello?

3. En su carrera, ¿cómo y en qué situaciones se aplica la derivada?

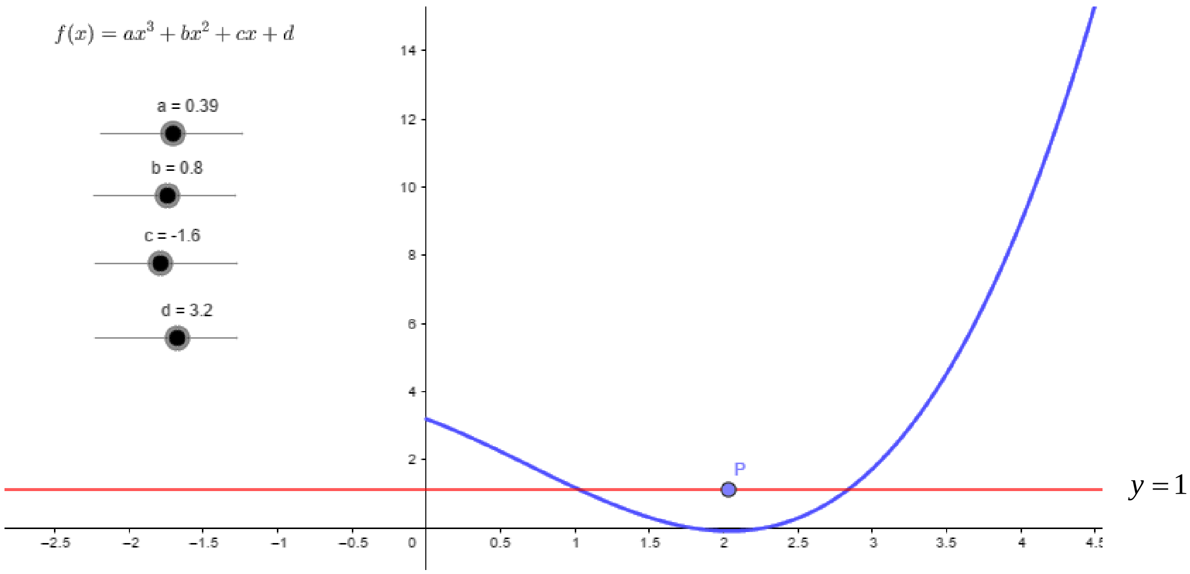
II Parte. Contexto: Cierta comunidad de Ingenieros Químicos Industriales anticipa fallas en los transformadores eléctricos a través del análisis de comportamientos gráficos. Para esto construyen gráficas con el historial de las concentraciones de ocho elementos químicos registrados a lo largo del tiempo. En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento del etileno en partes por millón.



1) Considerando que un comportamiento que da cierta garantía de un buen estado del transformador es cuando no se presentan fluctuaciones extremas, bajo esas condiciones cómo describiría el estado del transformador basado en la gráfica del etileno presentada en el contexto inicial.

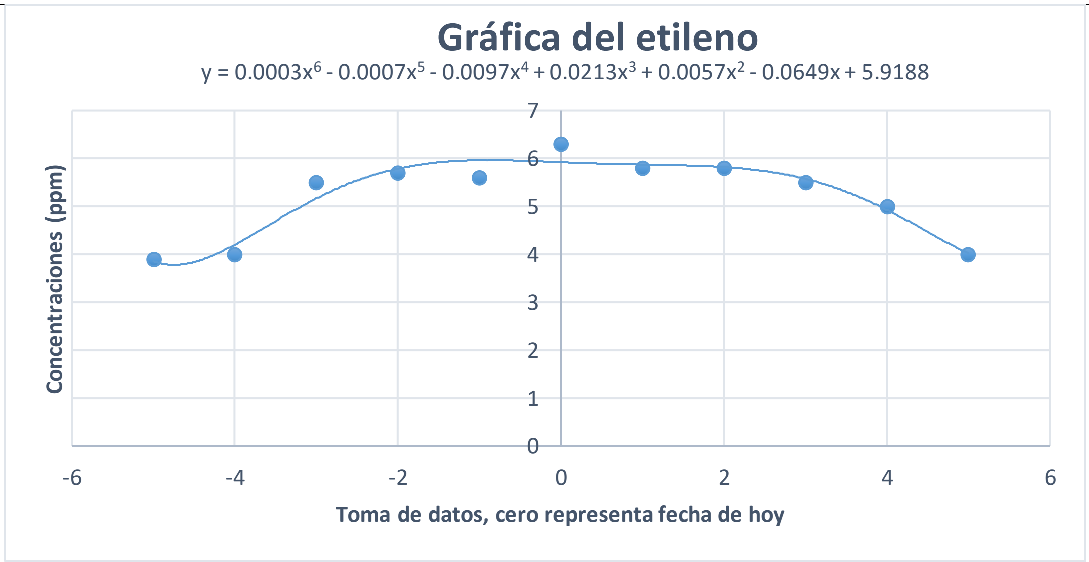
2) Trace una recta que muestre un comportamiento estable en la gráfica dada en el contexto inicial, de tal manera que sea tangente localmente en algún punto de la gráfica dada. Asuma que un comportamiento estable es cuando la mayor parte de la curva tiende a una recta.

3) En una toma de datos se obtuvo la siguiente gráfica para el comportamiento del etileno, el cual se modela por la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, si se sabe que esta representa un comportamiento estable cuando se "acuesta" sobre una recta que es tangente a ella localmente, cuáles son los parámetro de a, b, c y d que mejor representarían dicha situación.

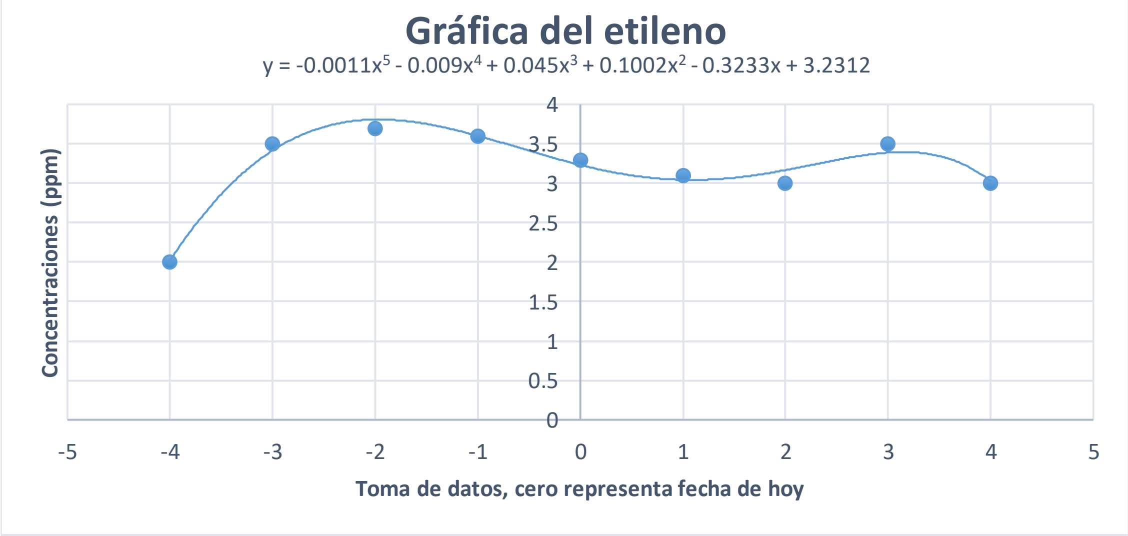


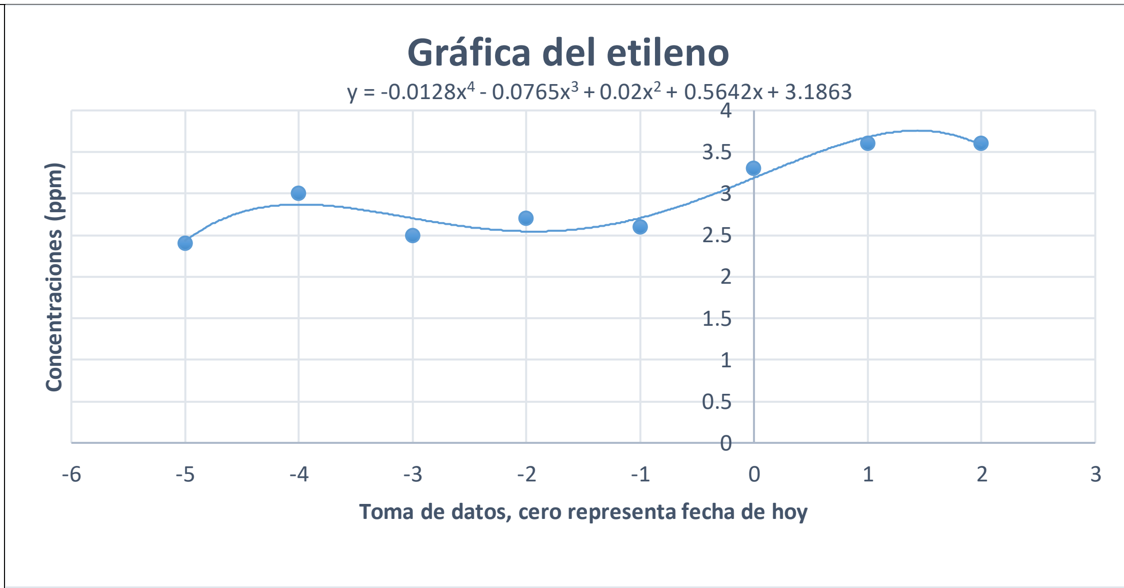
4) Las siguientes gráficas representan el comportamiento del etileno. Los valores negativos en el eje de las abscisas representan los datos tomados anterior a una fecha específica y los valores positivos fechas posteriores a esta.

A



B



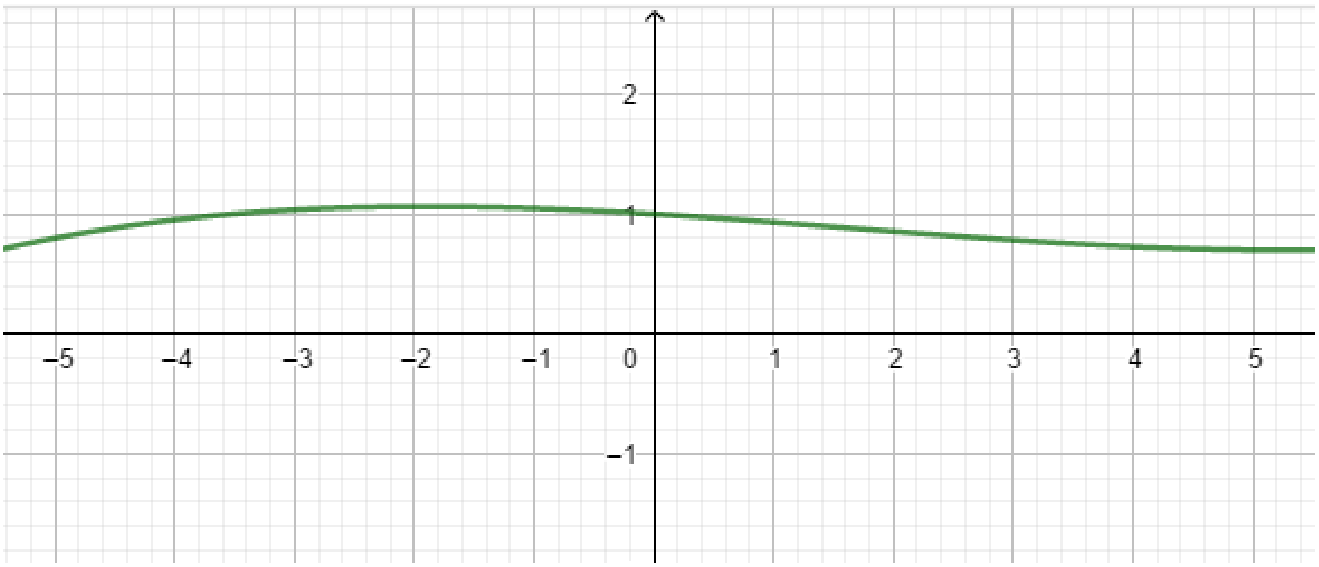
C	

4.1) Determine para cada una de estas la ecuación de la recta tangente en x=0 y trácela sobre el mismo plano cartesiano de las gráficas dadas.

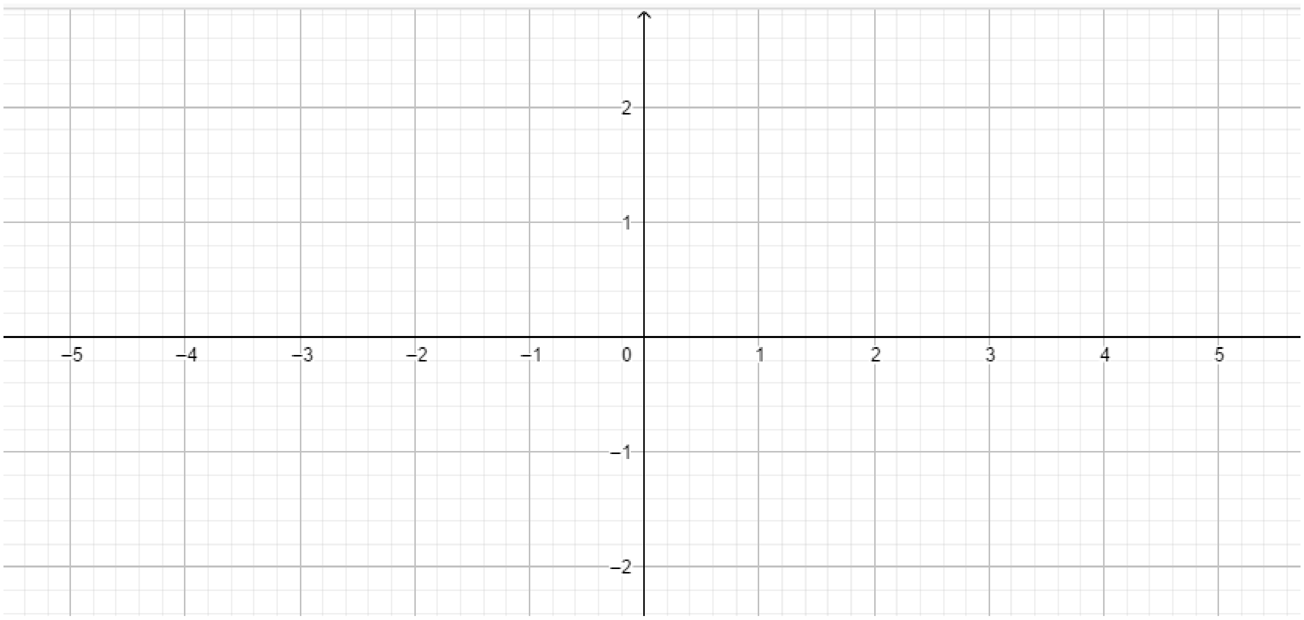
4.2) ¿Cuál de las rectas tangentes representa el comportamiento más extraordinario del etileno?

4.3) En relación con la pregunta anterior establezca un criterio que generalice la relación que existe entre un polinomio y la ecuación de su recta tangente en el punto donde interseca al eje de las ordenadas.

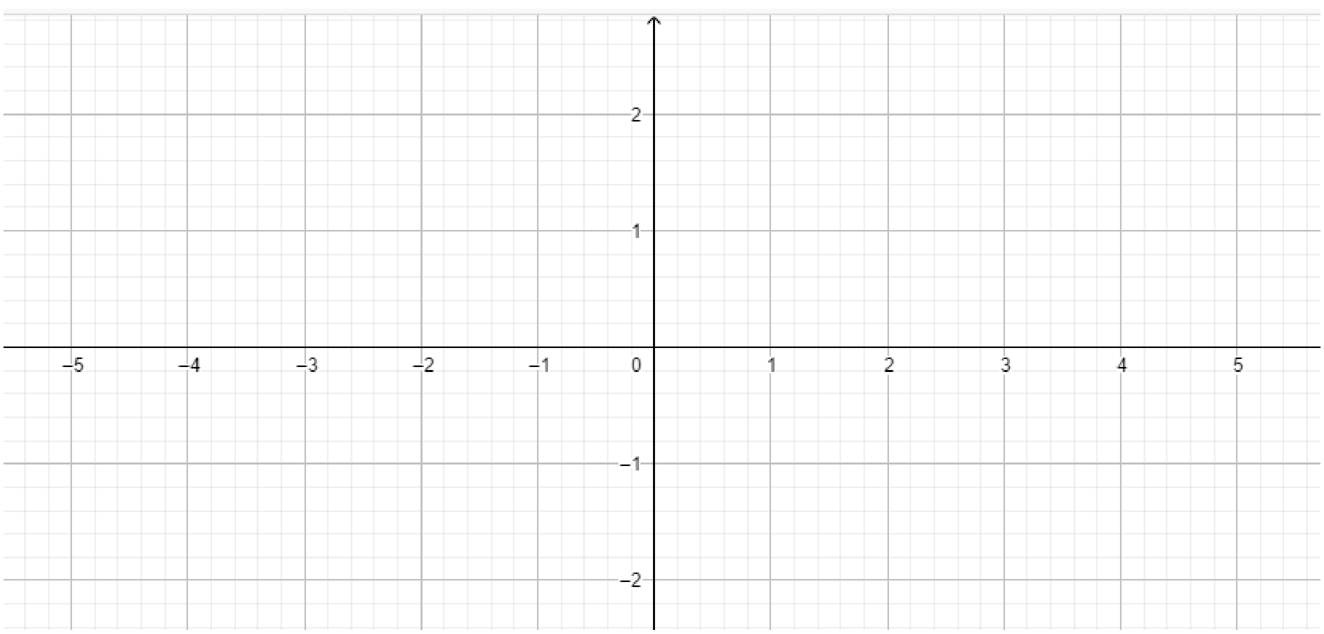
5) Sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 - 0.06x + 1$ adjunta modela el comportamiento de otro de los elementos químicos que componen el transformador trace la representación que se obtendría al realizarse las siguientes modificaciones



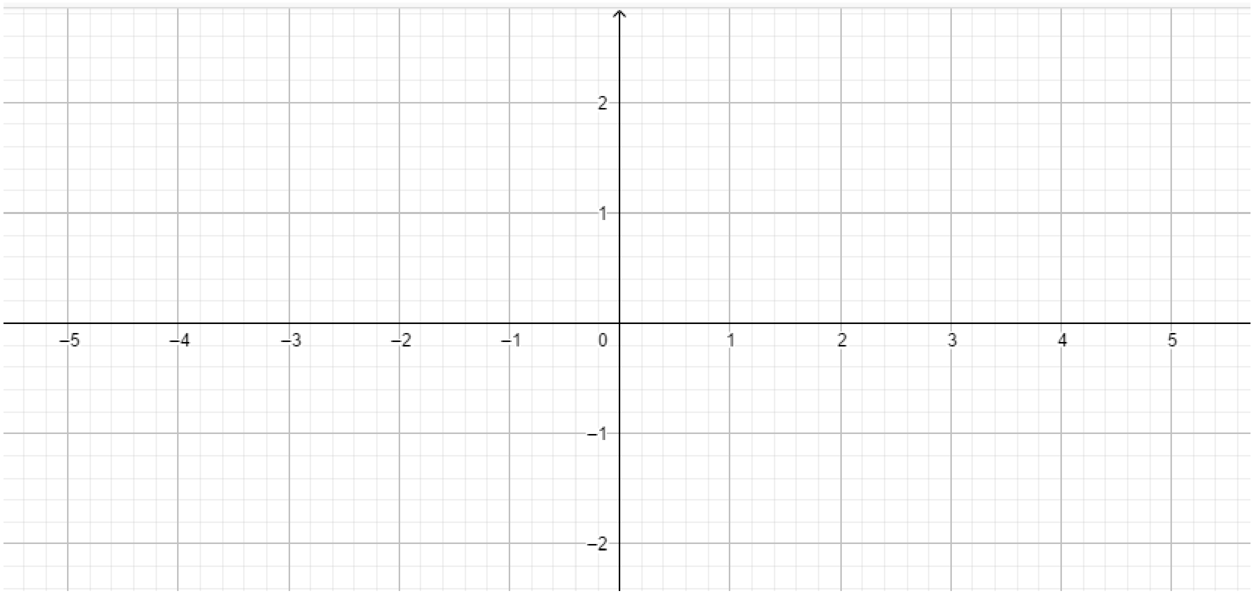
a. $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 + 0.06x + 1$



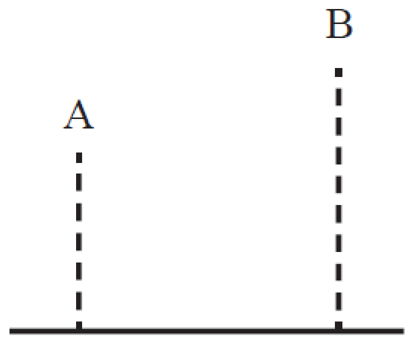
b. $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 - 0.06x - 1$



c. $f(x) = 0.002x^3 - 0.01x^2 + 0.06x - 1$



6) En la siguiente figura, A y B representan el comportamiento del etileno en distintos momentos. Se supone que usted sólo conoce A y el cambio de A a B (pero no B). Construya un modelo que le permita predecir B a partir de esos datos.



7) Suponga que ahora se desconoce el comportamiento gráfico del etileno. Sabiendo que los datos se tomaron cada seis meses, que una de las concentraciones fue de 6.02ppm y que la derivada en ese dato es de 2.7, entonces prediga qué concentración se tendría tres meses después.

7.1. ¿Sucedería lo mismo si la pendiente de la recta tangente es -2.7? Si la respuesta es negativa, ¿qué pasaría entonces?