Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Significados y sentidos presentes en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales por medio de tareas de modelización matemática

Tesis que presenta:

Fredy Peña Acuña

Para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Directores de la tesis:

Dra. María Teresa Rojano Ceballos

Dr. Armando Solares Rojas

Ciudad de México Abril, 2021

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo financiero que he recibí durante los cuatro años de duración del doctorado por medio de la beca otorgada con número de registro 614160.

Esta tesis se desarrolló en el marco del proyecto “Construcción de significados en procesos de modelación matemática. Una aproximación basada en el uso de herramientas de simulación computacional desde una perspectiva semiótica" (Conacyt A1-S-33505).

Agradecimientos

A la Doctora Tere y al Doctor Armando por la confianza que depositaron en mí, por sus enseñanzas y por ser un ejemplo a seguir, no tengo palabras para expresar la admiración que les tengo.

Al equipo sinodal, Dra. Aurora Gallardo, Dr. Hugo Mejía, Dr. Luis Puig y Dr. Paulino Preciado, así como a todos los expertos con quienes en algún momento establecí dialogo. Su lectura y valiosa retroalimentación han hecho de esta tesis su mejor versión.

A mi esposa por acompañarme en esta travesía y no soltar mi mano jamás, el amor que me ha dado ha sido el motor que me ha impulsado en todo momento.

A mi madre por contener sus lágrimas cuando partí en busca de mis sueños y sustituirlas por una sonrisa que me decía "todo va a estar bien".

A Cristian, Alejandra B, Alejandra C, Daniela, Luis Carlos, Remedios y el resto de mi familia y amigos pues siempre han estado dispuestos a apoyarme en todo, me es imposible nombrarlos a todos, así como me es imposible expresar cuánto les agradezco por simplemente estar ahí.

A Oli, Adriana, Alan, Israel, Luis, Maricarmen y todo el personal de Cinvestav y de la UPN que con pequeños grandes detalles aligeraron algunos de los trámites más dispendiosos durante estos años.

A la Doctora Ivonne y a la Maestra Edda por brindarme su amistad sincera, por siempre estar al pendiente mío y de mi esposa y por todo el apoyo que he tenido de su parte durante estos años en México.

A la Doctora Leonor Camargo quien fue la primera en permitir que este sueño se hiciera realidad.

Y sobre todo a Dios por poner en mi camino a todas las maravillosas personas que he mencionado y a aquellas que, aunque no menciono, también estuvieron presentes.

Dedicatoria

A Sarita y Domitila, los dos extremos generacionales de mi familia que a su manera llenan mi vida de alegría.

Resumen:

Tomando como referente los Modelos Teóricos Locales, en este estudio se diseña y aplica un Modelo de Enseñanza que hace uso de tareas de modelización matemática para introducir la sintáxis algebraica propia del planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por medio del método de igualación.

Se presenta un Modelo de Procesos Cognitivos que se usa como marco analítico para las acciones que realizan los estudiantes al momento de solucionar la secuencia de trabajo que propone el Modelo de Enseñanza. Además, se ofrece un Modelo de Competencia Formal que delimita los aspectos matemáticos involucrados con el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Se propone como estrategia de trabajo para los estudiantes el uso de hoja de cálculo como referente intermedio entre el tratamiento aritmético de las relaciones de los problemas y el referente algebraico que se introduce al avanzar en la secuencia. Se analiza el efecto que las tareas de modelización tienen sobre el aprendizaje de la sintaxis algebraica y cómo el uso de las herramientas sintácticas del álgebra afecta a los procesos de modelización matemática.

Algunas consideraciones respecto del aporte de este estudio al estado del arte en el que se enmarca se presentan al cierre del documento, así como reflexiones en torno a la practica educativa de maestros en ejercicio con interés en replicar el Modelo de Enseñanza aquí propuesto.

Abstract:

Taking the *Local Theoretical Models* as a reference, in this study a *Teaching Model* is designed and applied using mathematical modeling tasks to introduce the algebraic syntax of the approach and solution of systems of linear equations with two unknowns by the method of equalization.

A Cognitive Process Model is presented, this is used as an analytical framework for the actions carried out by students when they solving the sequence proposed by the Teaching Model. In addition, a Model of Formal Competence is offered to delimit the mathematical aspects involved with the expression and solution of systems of linear equations with two unknowns.

The use of a spreadsheet as an intermediate reference between the arithmetic treatment of the problem relationships and the algebraic references is introduced as a work strategy, when the students advance in the work sequence that is proposed. The effect that the modeling tasks have on the learning of algebraic syntax and how the use of the syntactic tools of algebra affects the mathematical modeling processes is analyzed.

Some considerations regarding the contribution of this study to the state of the art in which it is framed are presented at the end of this document, as well as reflections on the educational practice of teachers with an interest in replicating the Teaching Model proposed here.

Contenido

1. Introducción 1

2. Antecedentes, propósito y problemática del estudio 2

2.1 La investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra 2

2.1.1 Propuestas para abordar el álgebra escolar 4

2.2 Modelización matemática en contextos educativos 10

2.3 Sintaxis Algebraica 23

2.4 Problemática y propósito del estudio 31

3. Marco teórico analítico 34

3.1 Sobre los MTL 34

3.1.1 Semiótica y Sistemas matemáticos de signos. 34

3.1.2 Modelos de Competencia Formal. 39

3.1.3 Modelos de Enseñanza 54

3.1.4 Modelo de procesos cognitivos. 66

4. Metodología del estudio 71

4.1 Diseño de la experimentación 72

4.1.1 Construcción de la problemática 73

4.1.2 Análisis previo de problemas 73

4.1.3 Diseño del modelo teórico local 74

4.1.4 Diseño del desarrollo de la experimentación 75

4.1.5 Planeación de la experimentación 77

4.2 Desarrollo empírico 78

4.2.1 Caracterización de la población 79

4.2.2 Toma y análisis de los datos 81

5. La implementación de la secuencia 83

5.1 Significados y sentidos iniciales, la hoja de cálculo para cristalizar relaciones y dependencias 83

5.1.1 Lectura inicial del problema 84

5.1.2 Primeras anticipaciones de respuesta 87

5.1.3 La hoja de cálculo para cristalizar el método de ensayo y refinamiento 90

5.2 La necesidad de un método algebraico provisto de sentido 94

5.2.1 La transferencia de estrategias de un problema a otros 96

5.2.2 Segundo momento: sobre el planteamiento del sistema. 101

5.2.3 Tercer momento: sobre la solución del sistema. 105

5.3 Hoja de trabajo 3: Interpretar resultados 110

5.3.1 Matematización y trabajo matemático, el caso de la pareja de desempeño alto. 111

5.3.2 La interpretación de resultados, el caso de la pareja de desempeño medio. 116

6. Conclusiones y discusión 122

6.1 La modelización para la sintaxis y la sintaxis para la modelización: Respuestas a las preguntas de investigación. 122

6.2 Alcances, limitaciones y discusión con la literatura previa: un vistazo a posibles líneas de investigación futura 125

6.3 El Modelo de Enseñanza en la escuela 127

7. Bibliografía 130

Anexo 1: GUÍA PARA EL MAESTRO .... - 1 -

Anexo 2: Hojas de trabajo usadas en el estudio .... - 6 -

Anexo 3: Problemas diseñados, pero no aplicados en este estudio .... - 19 -

Anexo 4: Resultados de la evaluación diagnóstica.. - 26 -

Anexo 5: ¿Qué ocurrió con los demás estudiantes? .... - 28 -

Índice de figuras

Figura 2-1 (Alsina, 2007, p.36) ……………….……………...……………………..…..13

Figura 2-2 (Confrey y Maloney, 2007, p.67) ………….....…………………………..…..13

Figura 2 3 (Eames, Brady y Lesh 2016, p.17) 14

Figura 2-4 (Lesh y Yoon, 2007, p.167) 14

Figura 2-5 (Carreira, Amado, y Lecoq, 2011, p.203) 15

Figura 2-6 (Kaiser y Stender, 2013, p.279) 15

Figura 2-7 (Teague, Levy, y Fowler, 2016, p.258) 16

Figura 2-8 (Rodríguez, 2009, p.20) 16

Figura 2-9 (Stillman, et al., 2007, p.690) 17

Figura 2-10 (Blomhøj y Hoff, 2011, p.387) 17

Figura 2-11 (Girnat y Eichler, 2011, p.77) 18

Figura 2-12 (Blum y Leiß, 2007, p. 225) 18

Figura 2-13 ciclo de modelización Pollak (Pollak, 1979, p.233) 19

Figura 2-14 ciclo de modelización de Lange (De Lange, 1987, p.72) 19

Figura 2-15 Tipologías de validación en el ciclo de modelización matemática (p. 145) 21

Figura 3-1 (Blum y Leiß, 2007) 56

Figura 3-2 Fragmento de la hoja de trabajo 1 para la construcción de la hoja de cálculo ...62

Figura 3-3 Fragmento de la hoja de trabajo 1 para la búsqueda de la respuesta al problema 62

Figura 3-4 Fragmento de la hoja de trabajo 2 para la incorporación de simbología algebraica 64

Figura 3-5 Fragmento de la hoja de trabajo 2 para la interpretación del sistema en lenguaje algebraico 64

Figura 4-1 Esquema del diseño de la experimentación 72

Figura 4-1 Esquema del desarrollo de la experimentación 79

Figura 5-1 primera aproximación a la respuesta, pareja de estudiantes de desempeño medio …………………………………………………………………………………..….89

Figura 5-2 hoja de cálculo construida por la pareja de estudiantes de desempeño alto ……………………………………………………………………………………….…..91

Figura 5-3 hoja de cálculo construida por la pareja de estudiantes de desempeño medio ....……93

Figura 5-4 Etiquetas usadas en los problemas de la hoja de trabajo 2 (pareja de desempeño alto) ……………………………….………………………………………………96

Figura 5-5 primeros valores ingresados por la pareja de desempeño medio. Hoja de trabajo 2 ……………………………………………………………………………………...98

Figura 5-6 Etiquetas usadas en los problemas de la hoja de trabajo 2 (pareja de desempeño medio) .....………………………………………………………………..……100

Figura 5-7 Fórmulas con X e Y, pareja de estudiantes de desempeño alto…..…………..102

Figura 5-8 Fórmulas con X y Y, pareja de estudiantes de desempeño medio ...…………102

Figura 5-9 explicación de las ecuaciones del sistema, pareja de estudiantes de desempeño alto 103

Figura 5-10 explicación de las ecuaciones del sistema, pareja de estudiantes de desempeño medio 104

Figura 5-11 despeje de la incógnita Y, pareja de desempeño alto 106

Figura 5-12 despeje de la incógnita Y, pareja de desempeño medio 106

Figura 5-13 solución del sistema, pareja de estudiantes de desempeño alto 107

Figura 5-14 solución del sistema, pareja de estudiantes de desempeño medio 108

Figura 5-15 Respuesta al problema, pareja de desempeño alto 109

Figura 5-16 Respuesta al problema, pareja de desempeño medio 109

Figura 5-17 solución a los primeros problemas de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño alto 111

Figura 5-18 solución a los problemas 3 y 4 de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño alto 113

Figura 5-19 solución a los problemas 5 y 6 de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño alto 115

Figura 5-20 solución a los dos primeros problemas de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño medio 117

Figura 5-21 solución a los problemas 3 y 4 de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño medio 119

Figura A5 hoja de cálculo construida por otra pareja de estudiantes XXIX

1. Introducción

Estudios llevados a cabo desde la década de los ochenta han puesto de manifiesto cortes didácticos en el estudio del álgebra a nivel escolar, particularmente en lo que tiene que ver con los usos de las literales, del signo igual y con la solución de ecuaciones. De igual manera, la literatura ha aportado diversas estrategias para introducir el álgebra y su sintaxis que, de una u otra manera, tratan de solventar las dificultades que comúnmente presentan los estudiantes y otorgar sentido a la manipulación sintáctica de los objetos algebraicos.

En esta tesis interesa retomar las investigaciones realizadas respecto a las dificultades que presentan los estudiantes al iniciar su trabajo con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Específicamente, Filloy, Rojano y Solares (2010) reportaron la presencia de un corte didáctico en cuanto al uso de incógnitas con un *segundo nivel de representación*, esto es, incógnitas que requieren ser expresadas en términos de otra como, por ejemplo, al resolver problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales. Este corte didáctico demanda la reconceptualización de conceptos como incógnita e igualdad, así como de su sintaxis. En esta tesis se propone y explora una estrategia de introducción al estudio de sistemas de ecuaciones que permita a los estudiantes enfrentar las dificultades que implica este corte didáctico.

Con esta finalidad, se recurre a la perspectiva educativa de la modelización matemática (Kaiser y Sriraman, 2006) para diseñar un Modelo de Enseñanza que provea de referentes concretos que los estudiantes pueden usar para construir significados sobre las ideas con las que matematizan los problemas y para producir sentido sobre los métodos que usan en su solución. De esta manera y a partir del referente teórico los Modelos Teóricos Locales (Filloy, Rojano, Puig y Rubio 1999, Filloy, Rojano y Puig 2008), los resultados encontrados por Filloy, Rojano y Solares (2010) y la perspectiva de modelización matemática propuesta por Blum y Borromeo (2016), este trabajo plantea un Modelo de Enseñanza para sistemas de ecuaciones lineales, diseñado haciendo uso de tareas de modelización matemática con el objetivo de analizar el papel de la modelización matemática en la construcción de significados y producción de sentido en el aprendizaje del método de igualación para sistemas de ecuaciones lineales, y el rol que cumple la sintaxis algebraica para dar cierre al proceso de modelización.

2. Antecedentes, propósito y problemática del estudio

Con el ánimo de ofrecer un contexto de la investigación en educación matemática que permita contextualizar este estudio, se decidió realizar una inspección de al menos la última década de publicaciones en algunas de las revistas más influyentes en el campo a nivel regional e internacional; así como de libros que se han convertido en referencias clásicas en el ámbito de la investigación en didáctica del álgebra.

Concierne para esta revisión abordar tres focos de atención, a saber, la didáctica del álgebra, la modelización matemática y la sintaxis algebraica. Por ello, la primera sección de este capítulo ofrece un panorama general de investigaciones que han caracterizado las dificultades en el aprendizaje del álgebra y las propuestas para su enseñanza. La segunda sección se centra en describir estudios relacionados con la modelización de la enseñanza de las matemáticas y en particular del álgebra. Estas dos primeras secciones presentan algunos de los conceptos con los que se configura el capítulo "Marco teórico analítico". La tercera sección de este capítulo concluye con la revisión de documentos, presenta una descripción de escritos que conciernen al estudio de la sintaxis propia de las representaciones matemáticas, en particular del álgebra. El objetivo de presentar estas investigaciones obedece a que es específicamente en el estudio del aprendizaje y la enseñanza de la sintaxis algebraica en donde se centra el aporte de esta investigación.

2.1 La investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra

No es un interés particular de este estudio abordar un panorama global de la investigación didáctica del álgebra; sin embargo, se hace pertinente retomar algunas ideas que han sido relevantes y que pueden orientar parte de este estudio.

La historia del álgebra como rama de las matemáticas reporta una evolución desde lo concreto (referentes geométricos y lenguaje no simbólico) a lo abstracto (estudio de estructuras y simbolismo absoluto). No obstante, la enseñanza tradicional del álgebra a nivel escolar pareciera ir en una dirección opuesta a la de la historia pues, generalmente, se inicia con el estudio de las propiedades de los conjuntos numéricos y la introducción de un lenguaje algebraico sin referentes. Según Kaput (1987), un enfoque de enseñanza que se centre inicialmente en el trabajo en lo abstracto produce dificultades por el manejo de un sistema simbólico formal que está aislado de todo "contexto estabilizador".

Desde la década de 1980, algunos estudios como los llevados a cabo por Kieran (1981), Herscovicks y Linchevsky (1991), Sfard y Linchevsky (1994), Filloy y Rojano (1989), Gallardo (2002) y Stacey y MacGregor (1997) complementan las afirmaciones de Kaput, manifestando, además, que los procesos de aprendizaje del álgebra involucran cambios profundos en el pensamiento matemático de los estudiantes, principalmente en la interpretación de las literales y del signo igual.

Stacey, Chick y Kendal (2006) señalan que entre los principales retos de la investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra está el comprender a mayor profundidad los obstáculos cognitivos que los estudiantes enfrentan, así como el diseño de secuencias de enseñanza que los ayuden a remontar estos obstáculos en la escuela. Es por esto por lo que algunos de estos estudios, como los de Matz (1980), Küchemann, (1981), Booth (1984), Usiskin (1988), se han convertido en clásicos de la literatura ya que realizan una descripción de las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando se introduce el álgebra en su formación. En la actualidad existen otros autores que estudian estas problemáticas de manera más focalizada, tal es el caso de Peck y Matassa (2016) quienes proponen que algunas de las dificultades en álgebra se deben a que, al trabajar en aritmética, a los estudiantes no se les dirige a reconocer las fracciones como un cociente, esto provoca serias dificultades al momento de trabajar con fracciones algebraicas. Otro ejemplo es el trabajo de Escalante y Cuesta (2012) quienes caracterizan las dificultades de estudiantes universitarios para comprender el concepto de variable.

Aun cuando el estudio de dificultades es un eje central de la investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra, también existe un número considerable de investigaciones que buscan caracterizar cómo se gesta y desarrolla el pensamiento algebraico en los estudiantes. Ejemplo de ello es la aproximación semiótica y cultural de Radford (2013) que ha sido usada ampliamente en trabajos de investigación a nivel latinoamericano (Santos y Castañeda, 2008; Gómez y Mojica, 2013; Miranda, Radford y Guzmán, 2013 y Hernández, Peña y Marttá, 2015).

Un enfoque semiótico también relevante en la investigación es la teoría de Filloy (Filloy et al., 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Filloy, Puig y Rojano, 2008, Filloy, Rojano y Solares, 2010) quien propone estudiar los distintos niveles desde los cuales se interpretan y producen mensajes en un proceso de enseñanza y aprendizaje, él introduce la noción de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) como una herramienta que permite analizar los sistemas de signos intermedios producidos por el estudiante mientras se va haciendo más competente en el uso de algún conocimiento matemático, en particular del álgebra.

Existen estudios que proponen otros referentes teóricos para la caracterización del desarrollo de saberes en álgebra Lozano, 2015; Paz y Leron, 2009, por mencionar algunos) y otros que presentan sugerencias metodológicas para su enseñanza (Ursini, Escareño y Trigueros, 2005; Ursini y Trigueros, 2006, Ochoviet y Oktaç, 2011; Escalante y Cuesta, 2012 y Oller y Meavilla, 2014. No obstante, conviene realizar un recuento de las propuestas basadas en la forma de entender los objetos algebraicos, en particular la variable y la igualdad, para abordar el álgebra escolar.

2.1.1 Propuestas para abordar el álgebra escolar

En este apartado se resumen y unifican las propuestas para abordar el álgebra escolar presentadas por Bednarz, Kieran y Lee (1996), Mason, Graham, Pimm, y Gowar (trad. 1999) y Kieran (1997), ellos, de manera independiente, han planteado un conjunto de posturas que pueden usarse para dar significado a los objetos algebraicos, en particular a las literales y al signo igual. Las propuestas recién mencionadas pueden resumirse en tres formas de introducir el álgebra escolar, éstas son por medio de la *generalización*, las *ecuaciones* y las *funciones*.

- **Generalización:** esta propuesta se entiende como la introducción al álgebra por medio del reconocimiento y escritura de las leyes que gobiernan patrones numéricos o figurales, así como el entendimiento y justificación de las normas que rigen los números (aritmética generalizada).

  Aquí se incluyen entonces las perspectivas de *generalización* mencionada por Kieran (1997) y por Bednarz et al. (1996), así como las raíces *Expresión de la generalidad (Raíz 1A)* y *Aritmética Generalizada* propuestas por Mason et al. (trad. 1999).

- **Ecuaciones:** Esta propuesta es entendida como la introducción al álgebra mediante el trabajo del estudiante al establecer y solucionar ecuaciones que pueden ser dadas o extraídas de una situación problema.

  Se incluyen en esta perspectiva la de *Solución de problemas y de Ecuaciones* mencionada por Bednarz et al. (1996), la raíz de *Reordenamiento y manipulación* de Mason et al. (Trad. 1999) y la que Kieran (1997) denomina *Uso de incógnitas para llegar a la solución de problemas*.
- **Funciones:** En esta perspectiva se entiende el estudio del álgebra a partir del establecimiento y trabajo con variables incluidas en relaciones de dependencia funcional que pueden o no ser extraídas de contextos reales.

  Esta propuesta enmarca las perspectivas tanto de Kieran (1997) como de Bednarz et al. (1996) sobre *Funciones*, así como la raíz de *Posibilidades y restricciones* propuesta por Mason et al. (Trad. 1999)

Además de las anteriores propuestas para el estudio del álgebra a nivel escolar, Bednarz et al. (1996) mencionan a la *Modelización de fenómenos tanto físicos como matemáticos,* no obstante, en este estudio se entiende la modelización matemática como una vía de trabajo que, particularmente, puede derivar en cualquiera de las posturas recién mencionadas. Particularmente en este estudio se usa la modelización matemática como medio para el abordaje del álgebra desde el trabajo con relaciones de tipo funcional.

A continuación, se presenta una descripción breve de los artículos encontrados en la revisión de la literatura y que se pueden incluir en alguno de los grupos mencionados, ya que abordan experimentos de enseñanza del álgebra con estas perspectivas.

2.1.1.1 Generalización.

Como ya se mencionó, esta perspectiva de introducción al estudio del álgebra consiste en el desarrollo de tareas en las que el estudiante debe identificar las leyes que gobiernan patrones numéricos o geométricos, así como el uso del álgebra para describir las leyes que gobiernan los números (aritmética generalizada). Esta propuesta de enseñanza aparece comúnmente en la literatura, hecho que no es sorprendente pues varios autores, como Radford (2010) y Sessa (2005), afirman que el poder concebir la generalidad es la base del pensamiento algebraico, es decir, es el poder pensar de manera general (que no necesariamente implica el uso de letras) lo que permite pensar algebraicamente.

Existe una gran cantidad de estudios que han usado tareas de generalización para el desarrollo del pensamiento algebraico (por ejemplo: Cooper y Warren, 2008; Tabach, Arcavi y Hershkowitz, 2008; Amit y Neria, 2008; Carraher, Martinez y Schliemann, 2008; Hernández, Peña y Marttá, 2015; Wilkie 2016; Palatnik, Koichu, 2017 y Demonty, Vlassis y Fagnant, 2018), algunos de ellos concluyen que esta ruta de enseñanza ayuda a los estudiantes a interpretar las literales como variables, tal es el caso de Ferrara y Sinclair (2016) quienes, además, afirman que el vínculo entre el reconocimiento de un patrón horizontal y uno vertical desemboca en un discurso algebraico en el que se relata la relación de dependencia de una variable respecto de la otra.

No obstante, algunos autores que han profundizado en el estudio de esta perspectiva también advierten las dificultades que puede presentar. Tal es el caso de Radford (2008) quien concluye que uno de los problemas centrales que plantea la generalización algebraica es el hecho de que impone una economía de acciones particulares que crea una distancia entre el contexto original y el plano de generalidad matemática en el que se incluyen los signos.

Existen otros estudios que han utilizado como base para la enseñanza del álgebra el trabajo en aritmética. Este tipo de estudios parte de la premisa que la aritmética proporciona un *feedback* instantáneo que posibilita la interpretación de las ideas que se simbolizan con el lenguaje algebraico, dentro de estos estudios vale la pena mencionar a Carraher (2006), Murray y Kathryn (2008), Banerjee, y Subramaniam (2012) y Hitt, Saboya y Cortés (2016) quienes, con diferentes experimentos de enseñanza, concluyen que existen grandes ventajas en un enfoque de aritmética generalizada pues evita la aparición de errores comunes derivados de la falta de estructuración por parte de los estudiantes en álgebra.

Los trabajos recién mencionados son sólo una muestra de un amplio número de estudios que buscan el desarrollo del razonamiento algebraico por medio de la generalización de patrones; la revisión de antecedentes realizada para este estudio develó que esta perspectiva es la más usada en investigación en enseñanza del álgebra, por lo menos durante la última década.

2.1.1.2 Ecuaciones.

Este enfoque de enseñanza del álgebra escolar incluye principalmente el trabajo en resolución de problemas y de ecuaciones, es por ello que su principal característica es dotar a los estudiantes de habilidades en la manipulación de estructuras algebraicas que les posibilite hallar el valor desconocido de la(s) incógnita(s).

La importancia de una perspectiva de enseñanza y aprendizaje del álgebra que se base en la resolución de problemas cobra importancia por dos razones fundamentales mencionadas por Bednarz y Janvier (1996). La primera, porque la solución de problemas ha jugado un papel protagónico en el desarrollo histórico del álgebra, tal como se puede observar por ejemplo en el trabajo de Diofanto o en los avances desarrollados por los árabes; y la segunda porque también ha jugado un papel protagónico en la enseñanza del álgebra a nivel escolar.

La resolución de problemas es una actividad que, si bien los estudios muestran que no necesariamente repercute de manera directa en un trabajo de índole algebraico, es generalmente en este campo donde encuentra los procedimientos más sucintos y confiables para los estudiantes (resolución de ecuaciones). Muestra de ello son los trabajos realizados por Lee, et al. (2010), Csíkos, Szitányi y Kelemen (2011) y Senk y Thompson (2006) que develan además un gran potencial del uso de distintas estrategias y representaciones para la solución de problemas en experimentos llevados a cabo con estudiantes de 9 años en adelante.

Una serie de antecedentes de importancia para esta investigación son los estudios llevados a cabo por Filloy y Rojano (1984), Rojano (1985), Solares (2007) y Filloy, Rojano y Solares (2010). En estos estudios se han encontrado *cortes didácticos*[1] en el desarrollo del lenguaje algebraico cuando los estudiantes poseen referentes aritméticos.

Filloy y Rojano (1984), Rojano (1985), reportan que, cuando los estudiantes se enfrentan, por primera vez con ecuaciones que involucran la manipulación de la incógnita, los referentes aritméticos que traen arraigados generan obstáculos en la adquisición de los

[1] Un corte didáctico es un punto en específico del currículo de matemáticas en el cual, lo que se ha aprendido no es suficiente para que los nuevos tópicos se aprendan de manera espontánea sin intervención de enseñanza (Filloy, Rojano y Puig, 2008).

nuevos significados. Estas dificultades se describirán con más detalle en la sección 3.1.4.2 pues se consideran elementos de relevancia para el marco teórico de esta investigación.

En el trabajo realizado por Solares (2007) y Filloy, Rojano y Solares (2010) se describen los SMS que los estudiantes utilizan cuando inician en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Ellos concluyen que los significados que ya tenían previamente en el trabajo con una sola variable no evolucionan naturalmente al trabajo con dos variables. Con el objetivo de dar continuidad a dichos estudios, esta investigación tiene como propósito el diseño y análisis de un Modelo de Enseñanza que busque dotar de significado a los objetos propios de un sistema de ecuaciones 2×2 y de sentido a los métodos sintácticos para su solución.

2.1.1.3 Funciones.

Como ya se mencionó, en esta perspectiva se incluye la Raíz de posibilidades y restricciones que menciona Mason et al. (Trad. 1999) así como la de funciones mencionadas tanto por Bednarz et al. (1996) como por Kieran (1997).

En esta alternativa, el trabajo principal de los estudiantes está en el reconocimiento de las relaciones de dependencia entre distintas variables. Dichas relaciones pueden ser formuladas de diferentes maneras, una de ellas es la escritura de una expresión algebraica, aunque también se reconocen la representación gráfica y la tabular (por lo menos).

Gracias a la diversidad de representaciones que se pueden dar de una función, esta perspectiva posee un potencial para la enseñanza del álgebra que reconocen diversos autores, pues posibilita un tránsito flexible entre distintas miradas del mismo objeto, lo que permite al estudiante entender la relación de dependencia desde diferentes enfoques. Un ejemplo de este hecho es reportado por Falcade, Laborde y Mariotti (2007) quienes usan la herramienta Cabri para el aprendizaje de las funciones y valoran el potencial gráfico que el software ofrece para el entendimiento de la función y su expresión algebraica.

Algunos autores reconocen que la posibilidad de tránsito entre diferentes registros de representación es una característica clave para hacer uso de las funciones en un enfoque de enseñanza basado en la resolución de problemas. En esta línea de trabajo vale la pena mencionar un documento que presentan Senk y Thomson (2006) en el que relatan algunas de las ventajas del uso de diferentes representaciones de las funciones en la solución de problemas y el estudio de Warner, Schorr y Davis (2009) quienes además muestran cómo evolucionan las representaciones dadas por los estudiantes al resolver un problema.

Otra ventaja que los estudios reportan al hacer uso de una perspectiva centrada en el trabajo con funciones para el aprendizaje del álgebra escolar, es el hecho de que este trabajo posibilita un tránsito flexible entre, por lo menos, dos interpretaciones de las literales, pues permite en principio trabajar con las literales como variables presentes en relaciones de dependencia, pero además, cuando se fijan valores específicos a todas las literales involucradas a excepción de una de ellas, la expresión se convierte en una ecuación que ha de resolverse por algún método en el que la literal no asignada, se entenderá como una incógnita.

Kieran (1997) afirma además que al trabajar con familias de funciones las letras que se usan para representar los parámetros de la función evocan en los estudiantes una interpretación de la literal como número generalizado, esta afirmación, complementa el trabajo desde una perspectiva funcional como una vía de abordaje del álgebra en la que se considerarían los tres principales usos de la variable reportados por Ursini et al. (2005).

Algunos documentos presentan consecuencias directas de que los estudiantes trabajen con diferentes interpretaciones de las literales. Tal es el caso de Malisani y Spagnolo (2009) quienes realizan un reporte de las implicaciones que, para los estudiantes, tiene el entendimiento de las literales como incógnitas, concluyen que aun cuando la relación establecida en un problema fuese funcional, los estudiantes evocan la literal entendida como incógnita para solucionar la situación y hacen uso generalmente de métodos aritméticos para determinar su valor.

Paz y Leron (2009) por su parte también trabajan sobre las implicaciones que tiene en los estudiantes el trabajo con funciones, centran su análisis en la descripción de las dificultades que pueden aparecer en esta perspectiva, entre ellas está, por ejemplo, el considerar que al aplicar un valor específico a la literal “X” en una función, el resultado de esa función (en algunos casos representado como “Y”) será el nuevo valor para la variable “X”.

Ellis, Ely, Singleton y Tasova (2020) llevaron a cabo un estudio con estudiantes de 12 años en el que, desde una perspectiva de trabajo con funciones, definen un modo de razonamiento variacional y co-variacional al que llaman "scaling-continuous reasoning", el cual implica imaginar una variable que toma todos los valores en el continuo en cualquier escala; entender que no existe escala en el continuo que no se vuelva discreta y re-escalar para cualquier incremento pequeño para la variable X y coordinar esa escala con los valores asociados para la variable Y. Argumentan que este tipo de razonamiento puede ayudar a los estudiantes a la comprensión del concepto de función y de tasas de cambio.

Las dos perspectivas recién mencionadas, es decir, la de ecuaciones y la de funciones, son centrales en el presente estudio, pues los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser interpretados como dos ecuaciones simultáneas o como dos funciones lineales que tienen un punto en común (en el caso de los sistemas consistentes). En este estudio se propone la modelización matemática como una vía que posibilita el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2, dando una interpretación funcional a las relaciones entre las incógnitas, es por ello que es conveniente realizar un recuento de la literatura respecto de modelización matemática.

2.2 Modelización matemática en contextos educativos

La investigación en modelización matemática ha sido un tema de interés durante ya más de cinco décadas (Niss, Blum and Galbright, 2007). Es de suponerse que durante este tiempo se hayan gestado distintas posturas respecto de la modelización matemática, por esta razón, conviene caracterizar algunos estudios que han usado la modelización matemática con propósitos similares a los que se proponen para este documento.

Kaiser y Sriraman (2006) identifican seis diferentes posturas en las que investigadores han trabajado con la modelización matemática, una de ellas y que cobra particular importancia para la presente investigación es la postura Educativa. Si bien la clasificación de Kaiser y Sriraman es aún vigente, trabajos como el de Preciado et al. (2018) ponen en consideración la necesidad de puntualizar detalles sobre cada postura de manera que las investigaciones con temas emergentes en modelización matemática puedan ser clasificadas. Las posturas mencionadas por Kaisser y Sriraman (2006) son:

- La *realista* en la cual la modelización matemática se usa en situaciones "reales" (una discusión sobre el concepto también se encuentra en Paulino et al. 2018) que son completamente ajenos a las matemáticas como disciplina. Ejemplo de esta postura es el trabajo de Lingefjärd y Meier (2011) quienes proponen como tarea a sus estudiantes la elaboración de un modelo para calcular la hora de la puesta y salida de sol en diferentes ciudades y teniendo en cuenta la época del año.
- La *epistemológica* que, en contraste con la anterior, se enfoca en el desarrollo de teoría matemática, no es importante si el contexto es o no real, de hecho, aparece la Modelización Intra-matemática como estrategia de trabajo. Un ejemplo de esta perspectiva se puede observar en el trabajo de Sinclair y Jackiw (2010) quienes usan un software para observar polígonos que se amplían y modelizar las relaciones entre el polígono inicial y el final por medio de la semejanza.
- La *educativa* que se basa en una aproximación de intereses científicos, matemáticos y pragmáticos que convergen. Ejemplo de esta postura es el trabajo de Saeki, A y Matsuzaki (2013) quienes presentan a los estudiantes el reto de aproximar la longitud de una escalera que bordea un tanque de petróleo sin poder acceder a la toma de datos reales, aunque pueden llevar a cabo construcciones físicas que simulan la real y, a partir de éstas, logran realizar el proceso de Modelización.
- La *contextual,* que también ha sido denominada *model-eliciting aproach,* se centra en solucionar problemas con principios de diseño instruccional específicos en los que se busca que el estudiante dé sentido a la actividad de modelado y él mismo vaya perfeccionando sus producciones. Un ejemplo de esta postura es el trabajo de Schukajlow y Krug (2013) quienes plantean una situación de aproximar el trayecto total de un paracaidista luego de que salta del avión, los estudiantes van poco a poco refinando su proceso para considerar más aspectos del problema e ir sofisticando su solución, aun cuando no sea posible encontrar un resultado exacto.
- La *sociocrítica* que se centra en el trabajo con problemáticas sociales reales y en la cual los estudiantes pueden aportar al mejoramiento de algún ámbito de su entorno. Un ejemplo de esta postura es el trabajo de Geiger, Goos, y Dole (2013) quienes plantean a los estudiantes el reto de hacer un mapa para la visita de los

padres de familia al colegio que tuviera presente una remodelación que estaba ocurría por esos días en las instalaciones. El mapa construido por los estudiantes fue, en su momento, entregado a los padres y usado con los propósitos que en la tarea se habían planteado.

- La *cognitiva* que se centra en el estudio de los procesos mentales que se siguen al trabajar con tareas de modelización matemática y las habilidades que se desarrollan: procesos argumentativos, de razonamiento, la lectura de representaciones, entre otras. Esta perspectiva se plantea como trasversal a las otras 5 ya que no particulariza sobre el tipo de tareas que deben usarse. Los ciclos de modelización que se muestran más adelante en este texto son un ejemplo de investigaciones que han tratado de describir en términos cognitivos el proceso que siguen los estudiantes para solucionar tareas de modelización matemática.

En este estudio se hace uso de la postura educativa para la modelización matemática y de la postura cognitiva como parte del marco con el que se analizan las producciones de los estudiantes.

Al hablar sobre modelización matemática desde un punto de vista escolar, existen por lo menos dos corrientes diferentes que son reportadas en el libro *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* publicado en 2016 por la NCTM. Este libro realiza una diferenciación entre las ideas de Modelización Matemática (*Mathematical Modeling*) y Modelado de las Matemáticas (*Modeling Mathematics*).

Al hablar de Modelado de las Matemáticas se hace referencia al uso de representaciones de las matemáticas para comunicar conceptos o ideas matemáticas, es un proceso en el que el punto de inicio es las matemáticas y no el mundo real, como por ejemplo al manipular fichas plásticas para representar la adición en los números naturales (Cirillo, Pelesko, Mathew, y Rubel, 2016, p.4).

De acuerdo con algunos autores, la modelización matemática es un proceso diferente en el que el punto de partida es el mundo extra-matemático, al que se vinculan preguntas auténticas y en el que se establecen conexiones entre las matemáticas y otras ciencias (Cirillo et al., 2016, p.4). Este proceso ha sido representado por diferentes autores a lo largo de más de 50 años, a continuación, algunos esquemas presentes en la literatura para ilustrar el proceso.

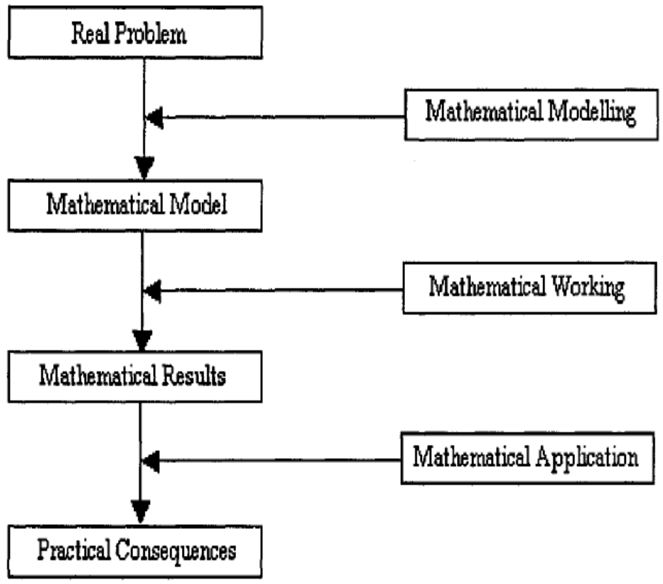


Figura 2-1 (Alsina, 2007, p.36)

La Figura 2-1 muestra un esquema que marca énfasis en acciones de tipo matemático (modelización matemática, trabajo matemático y aplicación matemática) para obtener “consecuencias prácticas” de un “problema real”.

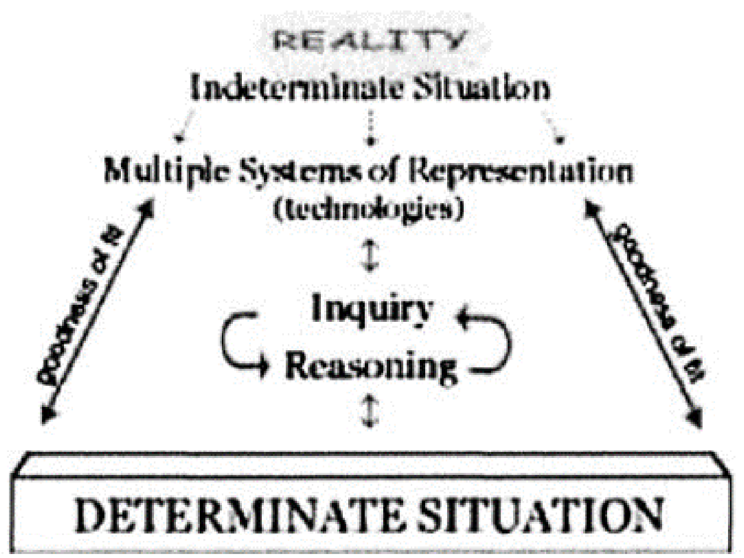


Figura 2-2 (Confrey y Maloney, 2007, p.67)

La Figura 2-2 pone énfasis en el tránsito de “situaciones indeterminadas” que provienen de la realidad a situaciones determinadas, gracias al uso de múltiples representaciones (que pueden ser matemáticas) y de procesos de razonamiento.

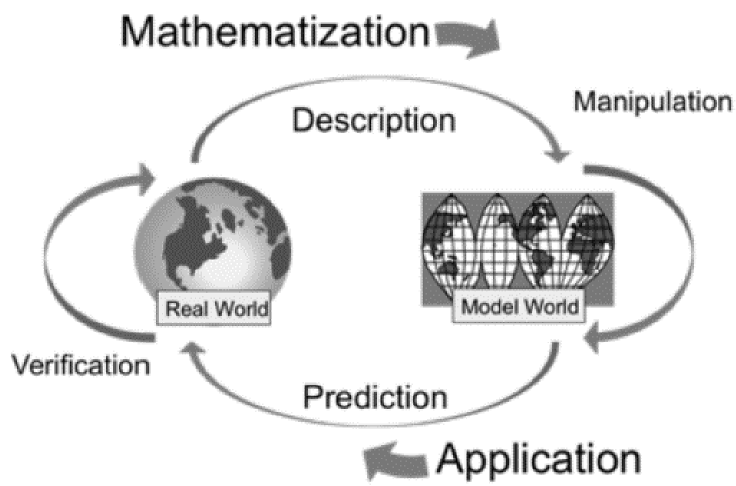


Figura 2-3 (Eames, Brady y Lesh 2016, p.17)

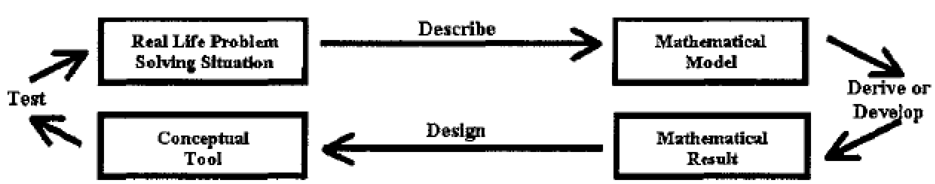


Figura 2-4 (Lesh y Yoon, 2007, p.167)

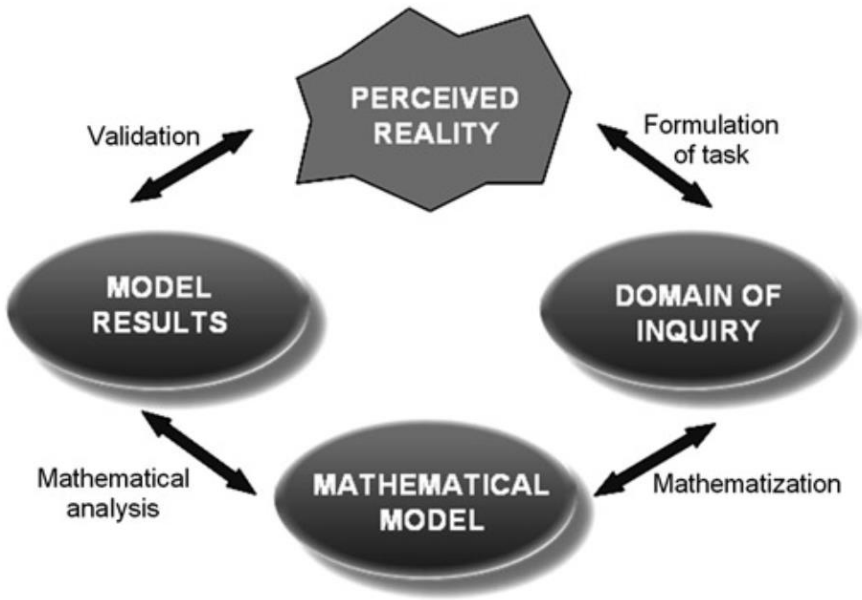


Figura 2-5 (Carreira, Amado, y Lecoq, 2011, p.203)

Las Figuras 2-3, 2-4 y 2-5 muestran esquemas simples para el proceso de modelización y ponen énfasis en el carácter cíclico de éste, partiendo de problemas de la realidad y regresando a ellos al final del ciclo.

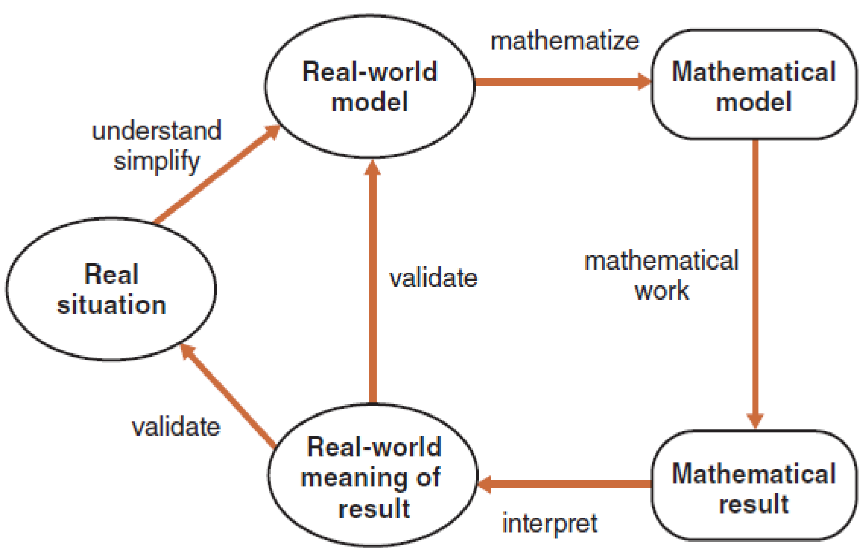


Figura 2-6 (Kaiser y Stender, 2013, p.279)

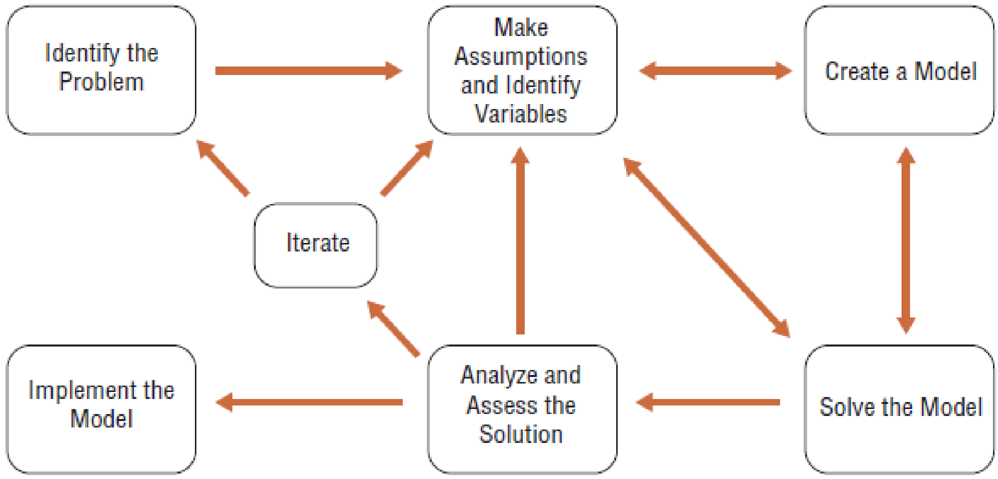


Figura 2-7 (Teague, Levy, y Fowler, 2016, p.258)

Las Figuras 2-6 y 2-7 muestran esquemas que, aunque mantienen el carácter cíclico de los anteriores, también marcan que este proceso puede no ocurrir de manera secuencial.

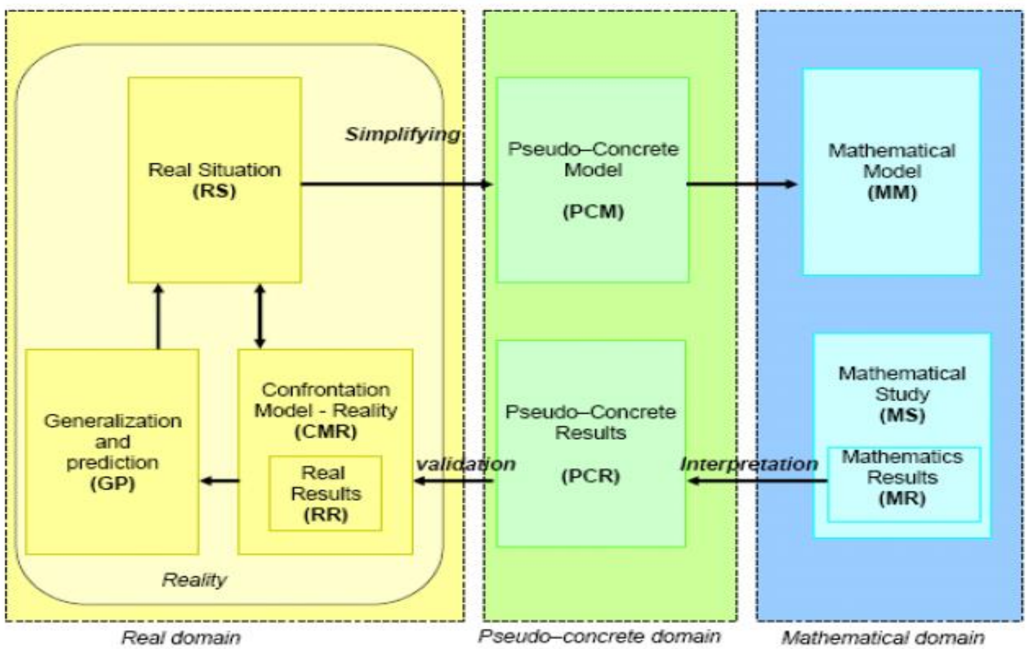


Figura 2-8 (Rodríguez, 2009, p.20)

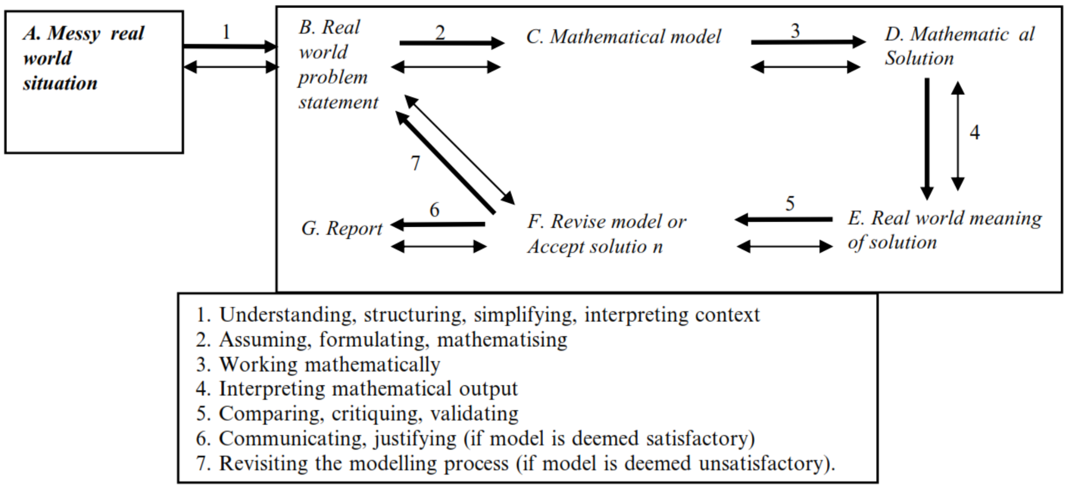


Figura 2-9 (Stillman, et al., 2007, p.690)

Otros esquemas como los de las Figuras 2-8 y 2-9 han sido desarrollados para describir el trabajo de estudiantes en contextos específicos, por lo tanto son idiosincráticos y desarrollados en el marco de estudios que usan la modelización matemática en una perspectiva cognitiva.

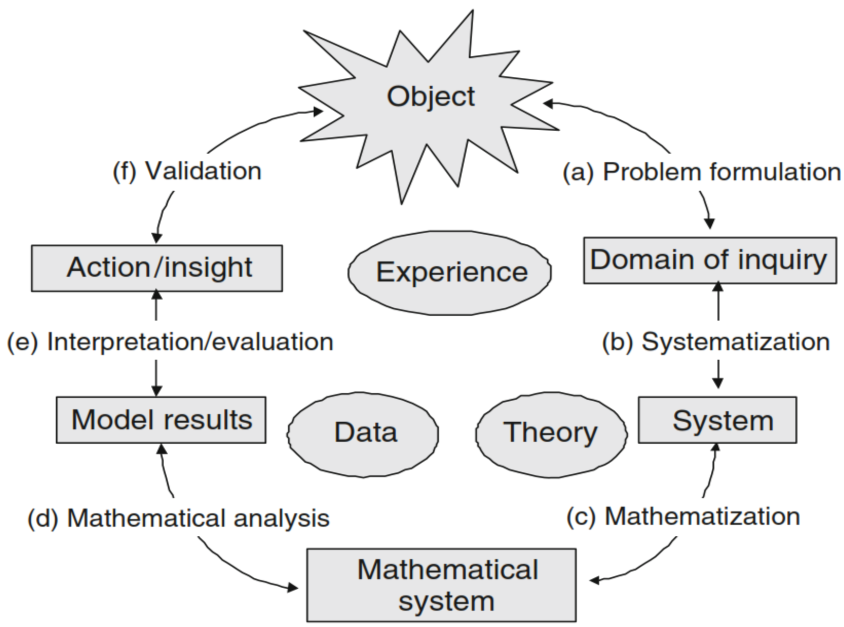


Figura 2-10 (Blomhøj y Hoff, 2011, p.387)

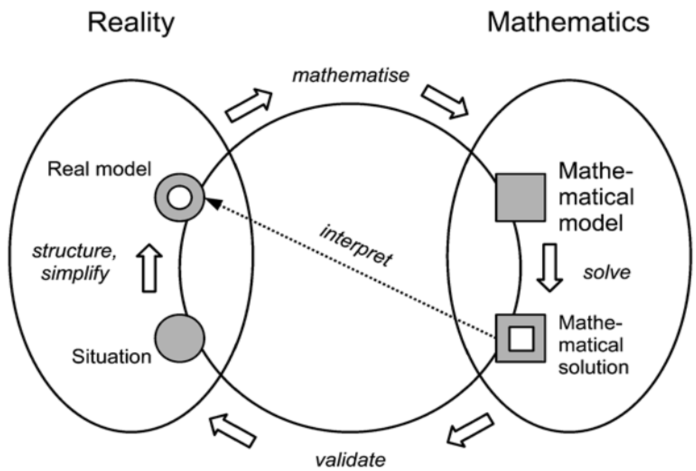


Figura 2-11 (Girnat y Eichler, 2011, p.77)

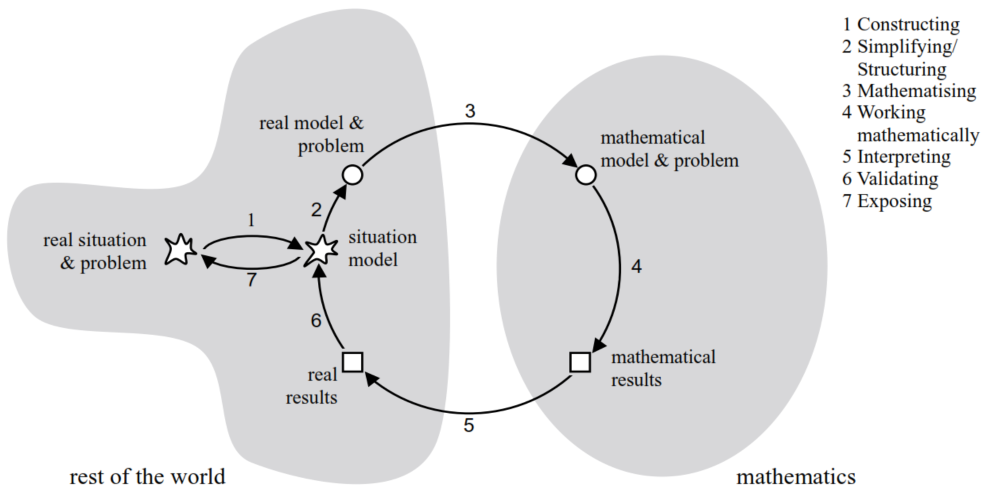


Figura 2-12 (Blum y Leiß, 2007, p. 225)

Las Figuras de 2-11 a la 2-12 son los esquemas que se encontraron con mayor presencia en la literatura que fue revisada y ponen énfasis tanto en el carácter cíclico del proceso de modelización como en el aporte de las matemáticas como herramienta de validación. De esta manera las etapas de matematizar, obtener resultados matemáticos e interpretar esos resultados son parte fundamental del proceso.

Las Figuras de 2-1 a la 2-12 dan cuenta de una amplia variedad de formas para entender el proceso de modelización durante la última década. Sin embargo, la representación gráfica del ciclo de modelización y la discusión al respecto no son tan recientes, de hecho, se pueden rastrear en la literatura esquemas para el ciclo de modelización tales como el presentado por Pollak en 1979 o el de de Lange propuesto en 1987 (ver Figura 2-13 y 2-14).

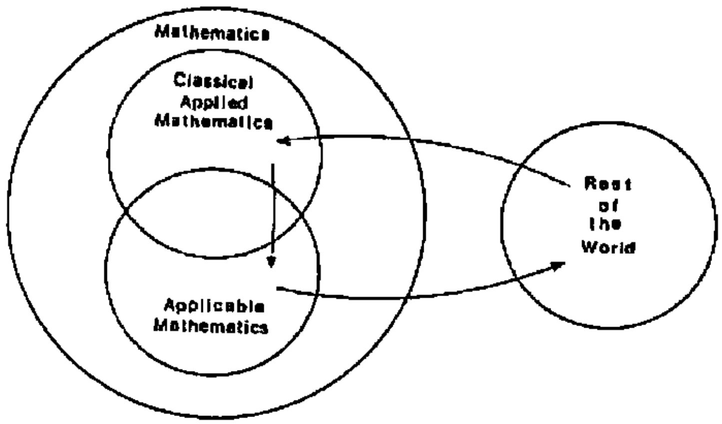


Figura 2-13 ciclo de modelización Pollak (Pollak, 1979, p.233)

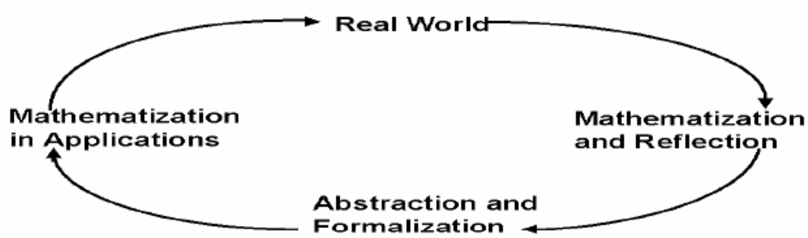


Figura 2-14 ciclo de modelización de Lange (De Lange, 1987, p.72)

Para este trabajo conviene hacer uso de la postura de Blum y Borromeo (2016) presentada en la Figura 2-12 (Blum y Leiß, 2007, p. 225), esta decisión obedece a que las ideas de Blum son quizá las más representativas de la postura educativa. Además, el hecho de que divida el proceso de modelización en 7 fases resulta útil para el análisis, pues permite focalizar las acciones de los estudiantes. Finalmente, el carácter cíclico del esquema y las ideas que presenta Blum y Borromeo (2016) para el diseño de tareas resultan un complemento adecuado para el diseño del Modelo de Enseñanza en el marco de los Modelos Teóricos Locales (Filloy et al., 1999) que es la teoría que se seleccionó para este estudio.

A continuación, se realiza una descripción de algunos de los artículos que se encontraron y que hacen uso de la modelización para la enseñanza y aprendizaje de ideas matemáticas.

En primer lugar, algunos artículos relatan las ventajas de índole curricular que posee un enfoque de enseñanza basado en actividades de modelización matemática, tal es el caso de los documentos de Lingefjärd (2006) y Michelsen (2006). En el primero de ellos se muestra un punto de vista sobre cómo enseñar modelos matemáticos, también se discute la gran variedad de aproximaciones teóricas que existen sobre la modelización y cómo esta diversidad permite profundizar en el diseño de secuencias de enseñanza; concluye que no todos los métodos o formas de los modelos matemáticos son aplicables a todos los problemas, pero cada modelo validado da una idea de cómo funciona el sistema en estudio, además indica que la importancia de la modelización radica en la capacidad de mostrar que existen matemáticas en la vida cotidiana.

En el trabajo de Michelsen (2006) se presenta un enfoque de modelado para el concepto de función en la escuela secundaria superior (15-16 años), además se discuten las cuestiones pedagógicas y didácticas relativas a la interacción entre las matemáticas y la ciencia. El modelo es considerado como un movimiento repetitivo con dos fases: (1) la vinculación horizontal de los temas, de las matemáticas para diferentes disciplinas (2) la estructuración vertical en los temas referida a la evolución en contenidos de aprendizaje de las matemáticas.

Otros autores como Lesh, Middleton, Caylor y Gupta (2008) muestran ejemplos de diseño de tareas (bajo la perspectiva del *model eliciting activities*) que permiten a los estudiantes generar y probar modelos; además atienden algunas preguntas ¿Cómo desarrollar pensamiento matemático? ¿Cuál es el significado de aprender? ¿Cómo se desarrollan competencias de modelización? entre otras. Este ejemplo, si bien pertenece a la postura contextual y no a la educativa, vale la pena mencionarlo ya que procura insertar en el plan curricular de matemáticas a la modelización matemática como tema de interés.

Diversos autores relatan las múltiples ventajas para la enseñanza de un enfoque centrado en la modelización, por mencionar algunos ejemplos se tiene el trabajo de Zbiek y Conner (2006), quienes describen la complejidad que existe al abordar tareas de modelado en contextos en los que la modelización es usada para desarrollar contenido matemático más que para conocer información sobre situaciones reales. Los resultados de este estudio muestran que tal estrategia de enseñanza de contenido matemático implica una concepción más profunda de las ideas matemáticas puestas en juego.

Otro ejemplo es el trabajo de English (2006 y 2012) quien muestra los resultados de la implementación de actividades de modelado de datos estadísticos en problemáticas actuales y la elaboración por estudiantes de primaria de una guía para el consumidor; presenta como resultados que los niveles de motivación aumentan en este contexto y que los estudiantes generan diferentes formas de representar los datos suministrados, concluye también que este tipo de experimentos potencia habilidades de argumentación al desarrollar buena comunicación matemática.

Czocher (2018) caracteriza y resalta la actividad de validación que poseen las tareas de modelización matemática, para ello utiliza el ciclo de Blum, marcando sobre éste las relaciones entre las fases que demarcan las tipologías de validación (ver Figura 2-15). Encuentra 5 distintos tipos de validación que pueden ocurrir durante un proceso de modelización, sólo una de ellas (V4) estaba presente en el ciclo original.

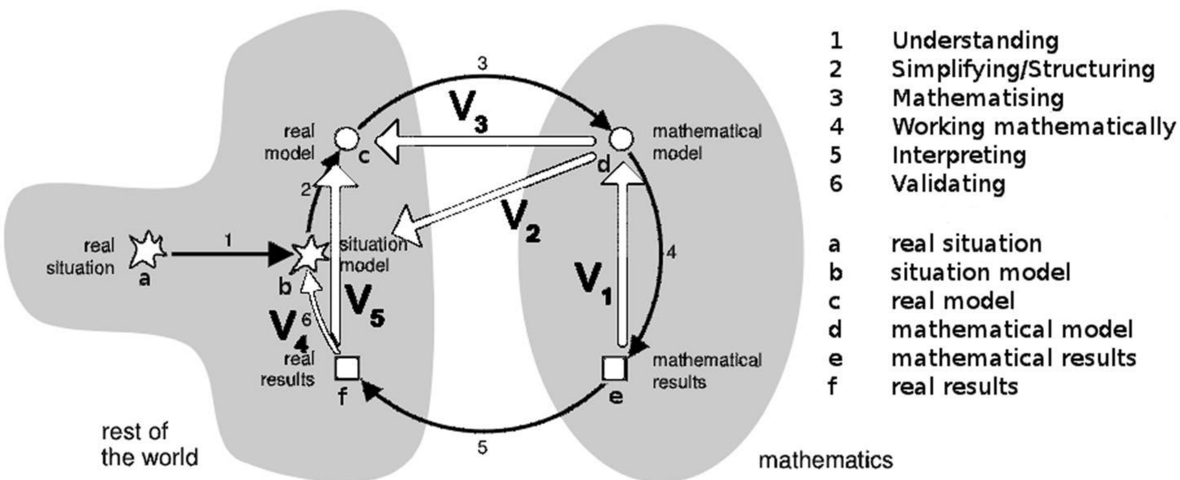


Figura 2-15 Tipologías de validación en el ciclo de modelización matemática (p. 145)

Una de las ventajas que más reporta la investigación en modelización matemática tiene que ver con las potencialidades para el entendimiento de los conceptos involucrados en una tarea de modelado. Esto se logra al abordar una variedad de representaciones, matemáticas o propias de los estudiantes (dibujos), que se pueden generar por el fenómeno al modelar. Estudios como los de Schukajlow, Krug y Rakoczy (2015), Csíkos; Szitányi y Kelemen (2011); Flores, Koontz, Inan y Alagic (2015) y Rellensmann, Schukajlow y Leopold (2016) son muestra de este hecho.

De particular interés para este estudio es el trabajo de Chimoni, Pitta-Pantazi y Christou (2018) quienes llevaron a cabo una investigación con estudiantes de 4° a 7° grado en el que analizaron su desempeño en tareas de aritmética generalizada, pensamiento funcional y modelización. Los resultados de este estudio sugieren que los alumnos podrían realizar primero tareas de aritmética generalizada y luego de pensamiento funcional, solamente después de que sean capaces de lidiar con estas tareas serían capaces de abordar satisfactoriamente las tareas de modelización. El resultado es relevante para los fines de esta investigación ya que pone de manifiesto algunos prerrequisitos necesarios para que los estudiantes puedan abordar tareas de modelización en álgebra.

Así como el trabajo de Chimoni, Pitta-Pantazi y Christou (2018), es importante mencionar las investigaciones desarrolladas por Puig y Monzó (2013), Infante (2016) y Ortega (2018) pues hacen uso de contextos de modelización matemática y para el trabajo con familias de funciones.

Puig y Monzó (2013) llevaron a cabo un Modelo de Enseñanza en el que estudiantes levantaron datos reales de fenómenos físicos mediante sensores y, por medio de técnicas de regresión, estudiaron las funciones asociadas a cada experimento. De esta manera, los estudiantes reflexionaban sobre familias de funciones reconociendo los parámetros que las componen y las formas canónicas de éstas. Los autores describen el comportamiento de los alumnos al trabajar en la secuencia y encuentran, entre otras cosas, que existe cierta dificultad para identificar la pertenencia de algunas funciones como parte de una familia, particularmente en funciones “especiales” tal como la “función de proporcionalidad inversa” $\left(y = \frac{a}{x}\right)$ que es difícilmente relacionada con la familia de funciones exponenciales.

Infante (2006) presenta una secuencia de actividades sobre funciones lineales, cuadráticas y exponenciales que para el cierre hace uso de contextos reales tales como la amortización de deudas financieras o la subalimentación de países en desarrollo. Esto en el contexto de un primer curso de ciencias administrativas. Al final de la secuencia los estudiantes reflexionan sobre las curvas de ajuste que mejor se adaptan a los grupos de datos que les proporcionan, estableciendo de esta manera modelos algebraicos de comportamiento para distintos fenómenos.

Ortega (2018) trabaja con estudiantes entre los 16 y 17 años del primer curso de bachillerato en la especialidad en ciencias de un centro Público en Valencia. Hace uso de fenómenos físicos tales como el bote de una pelota, el alargamiento de un muelle y el enfriamiento de líquidos y de iPads para representar estos fenómenos con el objetivo de trabajar con familias de funciones algebraicas e identificar tendencias cognitivas en el marco de los Modelos Teóricos Locales.

La anterior descripción, aunque breve, deja en claro que la modelización matemática es un campo de investigación abundante y del que se pueden obtener resultados valiosos, sin embargo, tal como afirma Galbraith (2007, p.79) la investigación en modelización matemática no puede conformarse con la "fruta dulce de las ramas más bajas", por el contrario, debe seguirse explorando en "las ramas más altas" de este campo, es decir en líneas de investigación *emergentes* (Preciado et. al. 2018), para poder consolidar una propuesta curricular sólida de enseñanza de las matemáticas por medio de la modelización. Parte del aporte de la presente investigación pretende otorgar a maestros de secundaria un Modelo de Enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales por medio de actividades de modelización matemática.

2.3 Sintaxis Algebraica

Dado que este estudio pretende particularizar las relaciones entre procesos de modelización y el desarrollo de una parte de la sintaxis algebraica (la del planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2), conviene también realizar un recuento de lo que se encontró en la literatura respecto de la enseñanza del álgebra en su carácter simbólico.

Para el historiador Nesselmann, la historia de la evolución del lenguaje algebraico puede dividirse en tres etapas: retórica, sincopada y simbólica. En la etapa retórica los cálculos se expresan completa y detalladamente mediante palabras del lenguaje ordinario; en la etapa sincopada el lenguaje algebraico tiene un carácter retórico, no obstante, algunos conceptos y operaciones, al ser constantemente usados, se sustituyen por abreviaturas. Finalmente, en la etapa simbólica el lenguaje algebraico permite realizar cálculos a nivel sintáctico y hallar la solución a un problema verbal sin tener que referirse al nivel semántico del planteamiento del problema (Puig y Rojano, 2004).

Katz (2007) por su parte señala que si en lugar de observar el desarrollo del lenguaje algebraico se hace lo propio con el ámbito conceptual que el álgebra aborda se obtienen cuatro etapas en lugar de tres, estas son geométrica (estudio de ideas de la geometría), estática (estudio de las ecuaciones), dinámica (estudio de las funciones) y abstracta (estudio de las estructuras).

Bien sea relatando la evolución del álgebra desde un sentido pragmático, es decir en cuanto al porqué de la actividad o desde el punto de su desarrollo simbólico, un hecho que siempre ha estado presente es el establecimiento de relaciones entre los objetos que pone en uso, así como un conjunto de normas para su manipulación, es decir, una sintaxis propia.

Desde el punto de vista de la enseñanza de la sintaxis del álgebra, es común encontrar una organización que se corresponde con una o ambas de las evoluciones que se presentaron líneas atrás. No obstante, autores como Sessa (2005) se oponen a este tipo de organizaciones, puesto que consideran que las exigencias y necesidades de la actualidad no tienen relación con las que se fueron presentando a lo largo de la historia para que el álgebra evolucionara de la forma en que lo hizo. Además, consideran que la escuela es la responsable de la enseñanza de los objetos algebraicos, de los mecanismos de solución y por ende de su forma de escritura.

Kaput (1987), menciona que las principales dificultades que se presentan al momento de estudiar el álgebra se deben, precisamente, a que se realiza un trabajo que se centra en la sintaxis abstracta sin dotarla de sentidos o de un contexto que proporcione retroalimentación sobre las acciones que los estudiantes realizan.

Mientras que Sessa y Kaput plantean que las dificultades en el estudio del álgebra dependen de la forma en la que se enseñan, otros autores más clásicos manifestaron que éstos se deben a la naturaleza del pensamiento algebraico y a lo arraigado de algunas ideas de la aritmética.

Matz (1980) presenta un documento que menciona cómo surgen algunos de los errores más comunes de los estudiantes al iniciar sus estudios en el álgebra escolar. La uniformidad de los errores que la autora encontró, le permitió desarrollar un listado de la forma de éstos, así como proponer tres diferentes razones por las que surgen. Estas razones son:

1. Una adaptación incorrecta de las reglas conocidas para tratar de dar solución a un nuevo problema (extrapolación).
2. Cambios conceptuales entre la aritmética y el álgebra.
3. Problemas en la ejecución de algoritmos con la sintaxis propia del álgebra.

En lo que tiene que ver con la extrapolación, Matz (1980) afirma que el conocimiento base que el estudiante tiene puede ser adaptado y aplicado a nuevas situaciones desconocidas, lo que puede o no, conducir a una respuesta adecuada. Dado un problema desconocido, si se extrapola la regla adecuada, el estudiante puede tener un mecanismo de solución que le funcione. Sin embargo, la falta de experiencia de los estudiantes les puede conducir a realizar errores al tratar de aplicar reglas de manera iterada en los casos en los que no se puede.

Otro tipo de errores muy comunes reportados por Matz (1980) tienen que ver con los cambios conceptuales que presume el tránsito entre el trabajo en aritmética al trabajo en álgebra. El primero de estos errores es el de la interpretación de la letra, pues existen a lo menos tres diferentes interpretaciones de ella, que generan distintos procesos de solución de actividades. Si la letra se entiende como una incógnita, entonces los procesos del estudiante deben de estar dirigidos a encontrar su valor numérico, si en cambio se interpretan como variables entonces los estudiantes estarán inmersos en procesos de reescritura de expresiones y, si la letra se entiende como una unidad de medida (ejemplo m como metros), entonces debe tratarse como una etiqueta que acompaña a un valor numérico.

La forma en la que se introduce, desde el inicio, la escritura de las variables operando con números genera confusión en los estudiantes, pues la concatenación por ejemplo de la expresión $3X$ no necesariamente se interpreta como un producto sino como la formulación de un número de dos dígitos (ejemplo reemplazando X por 2 y obteniendo 32) o como una suma de 3 con X (que puede ser ocasionado por la forma en la que se escriben números mixtos).

Otro cambio conceptual fuerte que se genera en el tránsito al álgebra tiene que ver con la interpretación del signo igual, pues en aritmética se usa para indicar el lugar en el que debe colocarse la respuesta, mientras que en álgebra puede indicar tanto una equivalencia entre dos expresiones (tautología) como una condición en una ecuación (que indica que se debe encontrar el valor desconocido). Así pues, expresiones de formas similares pueden significar asuntos diferentes como, por ejemplo, la expresión $4X+12=4(X+3)$ que es una tautología y $4X + 12 = 3(X + 3)$ que es una ecuación.

En cuanto a problemas con los procedimientos, éstos son de dos tipos: en la planeación y en la ejecución. Los problemas en la planeación surgen gracias a que en aritmética el proceso para obtener la respuesta a un ejercicio está claramente definido y es único (operar la expresión respetando el orden de las operaciones y los paréntesis); mientras que en álgebra los procesos no se interpretan tan fácilmente, esto debido a que las instrucciones pueden ser variadas (simplificar, factorizar, demostrar o resolver), y los pasos de solución de cualquiera de estas instrucciones en ocasiones no se reconocen hasta tanto no se inicie y se avance en el proceso.

Finalmente, los errores en el proceso tienen que ver con acciones que los estudiantes realizan en las que, por descuido, ignoran parte de la escritura de la expresión al no haberla utilizado en los pasos previos y centrales de la solución.

Así como el de Matz, otro estudio importante sobre errores es el presentado por Booth (1984). En esta investigación la autora menciona que indiferentemente de la edad o del nivel de experiencia en álgebra de los estudiantes, se encuentran, en general, los mismos tipos de dificultades, éstos se relacionan a cuatro aspectos del álgebra:

1. El trabajo algebraico y la naturaleza de las respuestas
2. Los tipos de relaciones y métodos usados en la aritmética
3. El significado de las letras y variables
4. Las notaciones y convenciones del álgebra

En cuanto al trabajo algebraico y la naturaleza de las respuestas, Booth (1984) menciona que los estudiantes tienen dificultades para entender como posible respuesta una expresión algebraica que involucre una o varias cantidades indeterminadas. Por esta razón, en ocasiones usan estrategias para encontrar el valor de la(s) literal(es), como asumir una correspondencia con los números naturales ($a = 1, b = 2, ...$) o sencillamente manifiestan que no es posible dar la respuesta aun cuando tengan claridad en la forma de dar solución al problema. En algunos casos es posible que los estudiantes den una respuesta adecuada en términos de la expresión algebraica, pero, aun así, no asuman ésta como la respuesta para el problema que se les plantea.

Otra dificultad que también se reporta es que, aunque los estudiantes puedan asumir como respuesta una expresión algebraica, consideren que la forma más adecuada de presentarla es usando un solo término. Por lo que pueden usar nuevas letras para escribir su respuesta como, por ejemplo, asumir, para $X + Y$ como respuesta, la literal Z u, operar la expresión ignorando las reglas del álgebra, por ejemplo, operar $2a + 5b$ para obtener $7ab$.

En lo que tiene que ver con el segundo aspecto, la autora manifiesta que el trabajo en aritmética de los estudiantes y la forma en la que se les enseñó, los llevan a mantener ciertas interpretaciones de los símbolos matemáticos. Por ejemplo, en el trabajo en aritmética el estudiante puede interpretar el símbolo + como una instrucción y el símbolo = como el indicador para dar la respuesta a la instrucción establecida, mientras que en álgebra estas interpretaciones varían según la expresión que se trabaje.

En lo que respecta al uso de las letras en álgebra, Booth (1984) menciona que el reconocimiento de éstas en un contexto específico genera dificultades. Por ejemplo, el área de un rectángulo se suele escribir como $a = b \times h$ asumiendo las iniciales de las palabras área, base y altura (high) como una estrategia de mnemotecnia. De este tipo de hechos se deriva que los estudiantes asuman que siempre debe existir una relación entre las letras y un contexto en específico, aun cuando esto no siempre ocurre.

Otra dificultad que se encuentra tiene que ver con el uso que en aritmética se da a las letras como unidades de medida, por ejemplo, en aritmética 3m representa generalmente 3 metros, mientras que en álgebra la letra m puede no representar una unidad de medida si no por el contrario un valor desconocido.

Booth (1984) menciona que otra de las dificultades en cuanto al uso de las literales es el hecho de que los estudiantes consideren que diferentes letras necesariamente representan distintos valores, de esta manera, expresiones como $x + y + z = x + p + z$ para ellos son siempre falsas dado que y y p deben ser diferentes.

Finalmente, en cuanto a la notación del álgebra la autora menciona que un asunto que genera dificultades tiene que ver con la concatenación de letras y números. En álgebra la ausencia de un símbolo entre letras o entre letras y números indica un producto, este hecho desemboca en errores tales como, por ejemplo, si se tiene la expresión $5y$ y el estudiante asume el valor de y como 4 puede obtener como resultado el número 54.

Otros estudios que complementan los de Matz (1980) y Booth (1984), son presentados por Gallardo y Rojano (1987, 1988) en los que analizan casos de alumnos con bajo nivel de habilidades pre algebraicas (según estratificación hecha por Filloy y Rojano, 1984) en relación con la identificación de áreas de dificultades comunes en el aprendizaje del álgebra. Notaron que los números negativos son una zona problemática extrema y común a este tipo de estudiantes en el ámbito de la solución de ecuaciones lineales. Este resultado se debe al hecho de que el progreso hacia el estudio del algebra implica no sólo un cambio de significado de conceptos de la aritmética, sino una ampliación de los dominios numéricos con los que el estudiante trabaja.

A diferencia de las posturas Kaput y Sessa en las que señalan que las dificultades del álgebra radican en su enseñanza, y de las posturas de Matz y Booth quienes las encuentran en los cambios que implica el paso desde la aritmética. Autores como Pimm (1987); Duval (trad. 1999); Brown (2001) y Tabach y Friedlander (2017) han preferido estudiar al álgebra como un lenguaje, y buscar explicaciones a las dificultades tanto en los aspectos semánticos como los sintácticos de las expresiones algebraicas.

Cañadas, Molina y del Rio (2018) analizaron los significados que estudiantes (con promedio de edad de 21 años) dieron a expresiones algebraicas, ello por medio de actividades de *problema posing*, las cuales consisten en que sean los estudiantes quienes propongan un problema que pueda representarse con una expresión algebraica preestablecida. Los autores realizaron un análisis en el que relacionaron los aspectos semánticos y sintácticos de los problemas propuestos por los estudiantes. Encontraron que, mayoritariamente, los estudiantes plantearon problemas con estructuras sintácticas que diferían de las expresiones dadas, no obstante, presentaron una mayor facilidad para plantear problemas con una estructura (semántica) aditiva.

El trabajo de Cañadas, Molina y del Rio (2018) también menciona que, aparentemente, en lo que a estructura multiplicativa se refiere, no existe mucha diferencia entre el planteamiento de un problema que posea una única ecuación que aquellos que impliquen un sistema de ecuaciones. Este resultado es de particular interés en este estudio ya que pone de manifiesto que las estructuras multiplicativas, que se encuentran inmersas en sistemas de ecuaciones lineales, parecen tener el mismo tratamiento que las que se encuentran en ecuaciones aisladas. Esta idea se complementa con los hallazgos previos de Filloy, Rojano y Solares (2010) quienes manifiestan que las dificultades que presentan los estudiantes en el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales se deben a la aparición de un *segundo nivel de representación*. El trabajo de Filloy, Rojano y Solares (2010) se retoma al cierre de esta sección.

Pimm (1987) realizó un estudio tomando como marco teórico conceptos lingüísticos, bajo este enfoque analizó el lenguaje de los estudiantes y de los profesores en el contexto de las discusiones en clase de matemáticas. Al abordar el tema del lenguaje escrito y su formalismo Pimm hace alusión al álgebra simbólica, ya que constituye un sistema de símbolos en matemáticas, con una sintaxis y gramática propias.

Filloy y Rojano (1984, 1985a, 1985b) llevaron a cabo estudios con tres generaciones de estudiantes de 12 a 13 años en los que se ocupaban de caracterizar dificultades en la adquisición del lenguaje algebraico y de proponer Modelos de Enseñanza, en particular para lo que tiene que ver con solución de ecuaciones "no aritméticas", es decir, ecuaciones en las que la incógnita aparece 2 veces. De las diversas conclusiones a las que llegaron vale la pena resaltar la identificación de un *corte didáctico* al momento en que los estudiantes requieren operar la incógnita, reportan que la manipulación de la incógnita no es espontánea en los estudiantes, aunque es necesaria pues constituye una de las primeras acciones indispensables para el estudio del álgebra. De allí el interés en el diseño de Modelos de Enseñanza que permitan a los estudiantes superar la necesidad de permanencia o anclaje en un nivel aritmético que se puede convertir en un obstáculo en el proceso de construcción de un nuevo lenguaje, el algebraico.

Duval (trad. 1995) estudió el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva semiótica, que se basa en la relación entre *semiosis* y *noesis*. La primera, referida a los actos de aprehensión o producción de una representación semiótica, como por ejemplo la escritura de una expresión algebraica. La segunda en cuanto a los actos cognitivos del individuo como aprehensión del concepto que estudia, comprensión de inferencias y relaciones o discriminación de diferencias entre conceptos.

Brown (2001) analiza la influencia del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas, concluye que, en el marco de una situación dada, el aprendizaje puede ser entendido basándose en la evolución entre las formas convencionales y las posibles en las que se puede describir esa situación.

Los estudios recién mencionados fueron parte de los antecedentes reportados en el libro *Educational Algebra* de Filloy, Puig y Rojano (2008) en el que desarrollan la noción de *Sistema Matemático de Signos* (SMS) que toma algunos referentes de la semiótica de Peirce para entender el signo por medio de la triada *signo*, *objeto* e *interpretante*; los SMS son el conjunto de signos, sus significados y las formas en las que interactúan. Para Filloy, Rojano y Puig (2008) el SMS del álgebra, por ejemplo, incluye no sólo el conjunto de los signos que usa, también los aspectos semánticos y sintácticos presentes en un texto; de esta manera el sistema en su totalidad es el que se considera matemático mas no sólo los signos de los que hace uso. La noción de Sistema Matemático de Signos se abordará en detalle en el capítulo del marco teórico.

El trabajo de Steinbring (2006) también vale la pena mencionarlo pues refleja los diferentes roles que toma el signo en la educación matemática, estos son como: medio de comunicación, indicador y elemento de escritura. Steinbring relata cómo signos y símbolos matemáticos tienen un papel decisivo para la codificación, construcción y comunicación del conocimiento matemático; sin embargo, afirma que estos signos no incluyen el significado de las ideas matemáticas.

La literatura reporta que la sintaxis algebraica juega un papel importante en la construcción de significado de los objetos matemáticos, aunque por sí sola no aporta más que un conjunto abstracto de simbología y normas para representar las ideas conceptuales, es por ello por lo que algunos autores han centrado sus investigaciones en describir cómo los estudiantes dan significado a los objetos matemáticos que ponen en juego. Tal es el caso de Radford (2009) quien presenta cómo estudiantes de octavo grado intentan dar significado a objetos matemáticos, describiendo el proceso discursivo y semiótico que se pone en juego. Concluye que, a través de la acción y la reflexión, los estudiantes poco a poco se dan cuenta de las diferencias conceptuales y los enlaces incorporados en los significados matemáticos.

Presmeg (2006) describe la forma en la que los estudiantes, guiados por su profesor, realizan conexiones entre las matemáticas y otras áreas, teniendo en cuenta la necesidad de significado y de interpretación de las decisiones tomadas, en cada paso de las secuencias implicadas en las conexiones que realizan. La autora evalúa, además, el papel que juegan los modelos semióticos en este proceso.

Trabajos como el de Radford, Bardini y Sabena (2007) han hecho esfuerzos por desarrollar paulatinamente, pero con sentido, el lenguaje algebraico. Esto por medio del trabajo en generalización de patrones numérico-geométricos. No obstante, los resultados muestran una construcción del lenguaje que en principio dista mucho del socialmente establecido para el álgebra. Además, no se reporta un trabajo en cuanto a la manipulación sintáctica de los elementos construidos.

Otras investigaciones describen de manera explícita la evolución de la sintaxis algebraica a nivel escolar y las dificultades que los estudiantes pueden presentar en este proceso. Tal es el caso de Filloy, Rojano y Solares (2010) quienes analizan el proceso de evolución de la sintaxis algebraica al trabajar con sistemas de ecuaciones que involucran dos incógnitas, concluyen que la sintaxis previa, es decir, la que se manejaba en ecuaciones con una sola incógnita, no evoluciona ni se extiende de manera natural al trabajo con dos incógnitas, por lo que se requiere de una reconceptualización profunda de las ideas de ecuación e incógnita. El estudio de Filloy, Rojano y Solares (2010) presenta elementos que se trabajarán en la presente investigación por lo que será retomado en la sección3 3. Marco teórico analítico.

La importancia de la adquisición de los significados de los objetos algebraicos es, en particular, el asunto de mayor interés en el presente estudio. Así, considerando las investigaciones que anteceden, a continuación, se expone la problemática en la que se enmarca este estudio y las preguntas de investigación que lo impulsan.

2.4 Problemática y propósito del estudio

La revisión de antecedentes que se acaba de presentar devela una problemática global en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar que, si bien no es posible que se aborde en su totalidad, puede ser acotada para esta investigación. Con este panorama, el interés específico es proveer de significados a los elementos y métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales por medio de la modelización matemática; pero también interesa analizar el desarrollo de las competencias de modelización matemática dado por el uso de la sintaxis algebraica que permite resolver los sistemas de ecuaciones. Así, el objetivo principal de esta investigación va en dos direcciones:

Por una parte, *analizar los procesos de producción de sentido y construcción de significados en el aprendizaje de la sintaxis algebraica mediada por actividades de modelización matemática*; y, por otra parte, *observar el valor que para las actividades de modelización matemática tiene el uso competente de la sintaxis algebraica*.

Si se entiende la modelización matemática como un proceso en el que intervienen diferentes formas de presentar la información como el lenguaje natural, los diagramas y las tablas, entre otros, la noción de Sistemas Matemáticos de Signos (Filloy, Rojano y Puig 2008) constituye en un elemento apropiado para el análisis en este estudio, pues permite caracterizar las producciones intermedias de los estudiantes cuando realizan procesos de lectura-transformación de los textos que tienen lugar al momento de dar solución a un problema.

En el presente estudio se parte de una concepción del álgebra como herramienta que posibilita la construcción de modelos matemáticos de situaciones y fenómenos, que permiten conjeturar propiedades de los fenómenos estudiados, validar soluciones, interactuar y confrontar resultados y técnicas. En este sentido, el álgebra es una herramienta de modelización que permite sintetizar las relaciones entre las variables con las que se modela un fenómeno y realizar deducciones sobre éste por medio de una serie de transformaciones de orden sintáctico (Rojano, 2014; Sadovsky, 2005).

Si bien la potencia de representación y las posibilidades de manipulación sintácticas son aspectos característicos del álgebra, existe una considerable cantidad de resultados de investigación que señalan que un enfoque meramente operatorio, como el que tradicionalmente se ha dado a la enseñanza del álgebra, conduce a grandes fracasos en su aprendizaje. Kieran (1997) y Mason et al. (trad. 1999) coinciden en señalar que una de las razones de este fracaso escolar es la exigencia a los estudiantes de que apliquen reglas sintácticas definidas sobre objetos de los que no tienen una comprensión siquiera superficial. Sin embargo, como el propio Manson y sus colaboradores señalan, permitir que el álgebra se origine en las necesidades de representación de situaciones posibilita que los estudiantes extraigan ideas del mundo que los rodea, a fin de modelarlo matemáticamente y de esta manera entenderlo mejor e incluso realizar predicciones sobre su comportamiento futuro (Mason et al., 1999).

Por lo anterior, la modelización matemática constituye una vía de trabajo que puede posibilitar el dotar a los objetos algebraicos de significados ligados a objetos o relaciones que se extraen del fenómeno que se está modelando. Esto gracias a su naturaleza de trabajar partiendo de hechos y referentes del mundo real (Cirillo et al., 2016).

Esta investigación propone entonces que el trabajo en modelización matemática y el aprendizaje de la sintaxis algebraica pueden realizarse de manera simultánea en los primeros años de secundaria, en lugar de que sean estudiados por separado, dejando la modelización matemática hacia los años finales de la escuela que es lo que comúnmente se hace. Por lo descrito anteriormente puede definirse como problemática para este estudio el conocer los procesos semióticos que tienen lugar en los estudiantes cuando están inmersos en tareas de modelización matemática en las que el SMS del álgebra se construye y usa al final de la secuencia como un instrumento para abordar los problemas. Así pues, las preguntas de investigación que orientan este estudio son:

- *¿Cuál es el rol de la actividad de modelización matemática en la construcción de significados y producción de sentidos para el aprendizaje de la sintaxis algebraica? Específicamente en la solución de sistemas de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas.*
- *¿Cuál es el rol del uso de la sintaxis algebraica en los procesos de modelización matemática, específicamente, en el caso del planteamiento y solución de sistemas de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas?*

Teniendo en cuenta que la problemática de este estudio gira en torno a dos ejes concretos, a saber, por una parte, los procesos de construcción de significados y producción de sentidos en el estudio del álgebra, y, por otra parte, la modelización como vía al desarrollo de saberes matemáticos, es pertinente realizar una descripción de los referentes teóricos que delimitan estos ejes y sirven como base para el análisis de los resultados. Por ello, en el siguiente capítulo se describe el marco de los Modelos Teóricos Locales y, dentro de éste, el concepto de Sistemas Matemáticos de Signos Filloy, Rojano y Puig (2008); y la perspectiva de Blum y Borromeo (2016) sobre modelización matemática.

3. Marco teórico analítico

Dado que el interés de esta investigación se centra en el rol de la modelización matemática para el aprendizaje del álgebra, los MTL (Filloy, Rojano y Puig. 2008) son un marco teórico apropiado pues brindan las herramientas necesarias para estudiar el proceso de apropiación de conocimiento matemático por parte de los estudiantes.

3.1 Sobre los MTL

Estudios de carácter empírico llevados a cabo durante la década de los ochenta fueron la base para la construcción de un marco teórico que permitiera el análisis de los fenómenos que ocurren durante la transición del pensamiento aritmético al algebraico. Para la época, las teorías existentes generadas en el campo de la educación matemática o en otras disciplinas como la psicología, pedagogía, sociología, historia, epistemología o lingüística no brindaban herramientas suficientes para anticipar los hallazgos encontrados en los estudios mencionados. Es así como surge la propuesta teórica y metodológica de los Modelos Teóricos Locales (MTL) desarrollada por el profesor Eugenio Filloy (Filloy et al., 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008).

Los MTL surgen como una alternativa teórica que permite el estudio del actuar de los estudiantes en Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) a medida que se van acercando a un uso competente de los mismos. Los SMS se convierten en la principal herramienta de análisis de este estudio, por lo que conviene dedicarles una sección del capítulo para caracterizarlos.

3.1.1 Semiótica y Sistemas matemáticos de signos.

Diversos autores desde hace ya más de 30 años han estudiado la relación entre las matemáticas y el lenguaje en niveles equivalentes de primacía. No se puede negar que la escritura matemática ha sido, a lo largo de la historia, una de las huellas que el desarrollo de la humanidad ha dejado a su paso por el mundo. Desde las marcas iniciales de los sistemas de numeración más primitivos, las representaciones en arena de ideas geométricas, hasta el constructo gigantesco de simbología que muestran hoy las matemáticas, se puede rastrear una evolución en las formas por las cuales los sujetos que hacen uso de las matemáticas para presentar las ideas con las que trabajan.

La Real Academia de la Lengua Española define la palabra Semiótica (o semiología) como la "*teoría general de los signos*". No obstante, Peirce (a quien se considera padre de la semiótica) la distingue en un sentido más amplio, en el que el objeto de estudio se amplía al análisis y la descripción de las condiciones que son necesarias para que las acciones, hechos u objetos funcionen como signos. De esta manera, la semiótica se involucra en el campo de la significación contradiciendo el enfoque de Saussure (primero en hablar de semiología) quien manifiesta que cada texto tiene un único sistema de significación que depende del contexto social.

El trabajo de Peirce introduce los conceptos de "interpretante" y de "semiosis", de manera que el proceso comunicativo se entiende como un proceso de significación que es diferente según el interpretante e involucra no sólo los elementos propios del discurso sino, además, la relación con otros discursos en los que haya sido participe el sujeto.

Teniendo en cuenta la pluralidad de signos presentes en las matemáticas (letras, términos, operadores, gráficos, entre otros) y la infinidad de combinaciones posibles de estos con los signos de la lengua vernácula, conviene centrar el estudio de la semiótica de las matemáticas no en los signos individuales (que además carecen de un significado propio) sino en los textos producidos en un Sistema que debe considerarse matemático, pues es el que otorga significado y establece las relaciones y formas de combinar los signos.

La noción de Sistema Matemático de Signos introducida por Filloy aparece por primera vez en el documento de Kieran y Filloy (1989) como una herramienta de análisis de los textos que producen los estudiantes a medida que se van haciendo competentes en matemáticas. Esta noción debía ser lo suficientemente amplia como para incorporar los sistemas de signos intermedios producidos por el estudiante en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las ideas matemáticas. No obstante, "al ser tan idiosincráticos, algunos de estos sistemas de signos intermediarios no podrán ser considerados SMS, fundamentalmente por el carácter personal de los códigos inventados por el aprendiz" (Kieran y Filloy 1989, p. 236), por lo que la función del investigador consiste en:

> Estudiar estos sistemas de signos con el fin de intentar interpretar los códigos personales del aprendiz. Esto es necesario para desvelar los obstáculos que produce la tensión de tratar con los SMS diferentes que el usuario tiene disponibles mientras

> está tratando de crear un nuevo SMS y de esa manera llegar a ser un "buen ejecutor" en los términos del significado pragmático socialmente determinado (Kieran y Filloy, 1989, p. 237).

Filloy et al. (1999) pone de manifiesto que hay que hablar de SMS cuando existen convenciones socialmente establecidas de asignar funciones sígnicas, aun cuando éstas sean establecidas en situaciones de enseñanza de manera pasajera. También considera la necesidad de tomar en cuenta las producciones idiosincráticas del estudiante, aunque surjan por correspondencias que no pertenecen al constructo social que se ha construido en el aula.

La noción de SMS permite entonces caracterizar las acciones de los estudiantes e interpretar los procesos de producción de sentido y construcción de significados que atraviesan durante el desarrollo de una secuencia de tareas. Por esta razón se hace necesario considerar algunas ideas sobre la significación y la producción de sentido.

3.1.1.1 Sobre la construcción de significados

Una concepción amplia de los SMS debe permitir unificar en una misma noción de signo el significado formal que les otorgan las matemáticas, así como el significado pragmático que se construye en su uso. Filloy et al. (1999) considera cuatro tipos de fuentes de significado:

1. "De transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS" (p. 73).
   Por ejemplo: transformaciones de orden sintáctico realizadas dentro del SMS del álgebra con el objetivo de resolver una ecuación.
2. "De traducciones a través de SMS distintos" (p. 73).
   Por ejemplo: traducir una función lineal, escrita en lenguaje algebraico, al gráfico de una recta en el plano cartesiano.
3. "De traducciones entre SMS y sistemas de signos no matemáticos" (p. 73).
   Por ejemplo: la matematización de gráficos y lengua natural presentados en una tarea, por medio de escritura algebraica, así como la interpretación de resultados matemáticos en un contexto real.
4. "Con la consolidación, simplificación, generalización y rectificación de acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermedios creados durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza/aprendizaje" (p. 74).

> Por ejemplo: si se propone un Modelo de Enseñanza para la solución de ecuaciones lineales, los SMS usados por los estudiantes deberán ir evolucionando para ser cada vez más abstractos, esto con el objetivo de consolidar un SMS que les permita finalmente dar solución a cualquier ecuación del estilo que se les presente.

Para objetos de este estudio se usan las fuentes de significado recién descritas para categorizar las acciones de los estudiantes en el desarrollo de las tareas propuestas.

3.1.1.2 Sobre la producción de Sentido.

Si bien las ideas respecto de producción de sentido han ido evolucionando a medida que se ha profundizado en el estudio de los MTL, conviene clarificar que, para este estudio, se asume la producción de sentido desde el punto de vista de la construcción de un método. Esta postura sobre la producción de sentido es clarificada por Filloy et al. (1999) quien plantea, sobre el sentido de una sucesión de textos T_n:

> El *sentido*[2] es conferido, en el nuevo SMS, por la utilización de *nuevos signos* de las maneras que los requieren cada uno de los pasos del proceso de análisis y resolución, visto todo el sistema de signos ligado por la *concatenación de acciones* desencadenadas por el proceso de solución de las diversas situaciones problemáticas que, con anterioridad, se consideraban irreductibles unas a las otras y que, ahora, gracias al uso del nuevo SMS, se resuelven con procesos que se establecen como los mismos, esto es, se *transfieren* de la resolución de un problema a otro, convirtiendo lo que antes era una diversidad de problemas en lo que, ahora, se puede llamar una familia de problemas cuyos miembros todos se pueden resolver con el mismo proceso. (p. 77)

En este estudio se analiza el sentido de uso que los estudiantes asignan a los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, el cual se identifica con tres procesos específicos:

1. En el uso de *nuevos signos* los cuales no necesariamente serán nuevos en cuanto a grafía, pero sí en cuanto a uso; es decir, se observarán los momentos en que los

[2] Se marcan énfasis en los elementos que más interesan para este estudio.

estudiantes hacen uso de nuevos símbolos de las maneras que los requiere cada uno de los pasos del proceso de análisis y síntesis de las tareas que se les presentan. Es importante recordar que los sistemas de ecuaciones lineales establecen para las incógnitas un *segundo nivel de representación* (Filloy, Rojano y Solares, 2010) nuevo para los estudiantes.

2. En la *concatenación de acciones* enmarcadas en un proceso cuyo objetivo es el análisis y solución de una situación particular por medio de herramientas matemáticas. Esta concatenación de acciones debe realizarse en situaciones que con anterioridad se consideraban irreductibles unas a las otras, de allí que la aparición de un nuevo SMS surja también de la necesidad de simbolización de la relaciones y estructuración de un método para manipularlas.
3. En la *transferencia de procesos* de una situación a la otra, lo que ratifica que los estudiantes reconocen y dan sentido a los métodos como estrategias aplicables a cualquier problema con estructura similar; es decir, que reconozcan como una "familia de problemas", lo que antes verían como una diversidad de problemas.

Esta postura sobre producción de sentido permite el análisis de los procesos que tienen lugar cuando los estudiantes se apropian de un método algebraico socialmente establecido, en este caso el método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Los procesos recién mencionados se convierten en evidencia de la apropiación, por parte de los estudiantes, del método que el Modelo de Enseñanza tiene por objetivo desarrollar.

Los sentidos de uso que el estudiante gesta durante el desarrollo del modelo de enseñanza le permiten trabajar en SMS más abstractos con los que puede decodificar un texto en términos de otro. Si no es posible realizar esta decodificación por medio del SMS que el estudiante se encuentra usando en ese momento es porque ese SMS aún no es lo suficientemente abstracto y porque los textos correspondientes son transversales entre ellos (Filloy et al., 1999). En este estudio se rastrean los momentos de producción de sentido que los estudiantes logran cuando se enfrentan a las tareas de modelización matemática propuestas.

En el caso específico de la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales vía tareas de modelización matemática conviene estudiar el SMS propio de los métodos de solución establecidos socialmente, para ello se hace necesario abordar los componentes propuestos por Filloy et al., (1999) y Filloy, Rojano y Puig (2008) para enfocar el objeto de estudio. Estos componentes son los siguientes.

- *Modelos de Competencia Formal*
- *Modelos de Enseñanza*
- *Modelos de Procesos Cognitivos*
- *Modelos de Comunicación*

Es importante mencionar que el énfasis de este estudio recae principalmente en el diseño de la secuencia didáctica (Modelo de Enseñanza) y, a partir de esta secuencia, en el análisis de los procesos de producción de sentido y construcción de significados que se desencadenan (basados en el Modelo de Procesos Cognitivos), teniendo en cuenta que el componente formal brinda las herramientas matemáticas que posibilitan la decodificación de las producciones idiosincráticas de los estudiantes durante el desarrollo de la secuencia. En este estudio los procesos de comunicación se incluyen en las otras componentes.

3.1.2 Modelos de Competencia Formal.

Para esta investigación, el componente del modelo formal se define como el conocimiento matemático formal y socialmente establecido que es el motivo de estudio en la investigación[3]. Lo anterior resulta conveniente pues se espera que el investigador posea un

---

[3] En general, desde la perspectiva de los Modelos Teóricos Locales, el componente del Modelo Formal se define mediante un análisis fenomenológico puro (Freudenthal, 1983). Al respecto, Filloy y colaboradores subrayan la importancia de la definición del Modelo Formal (correspondiente a la "pure phenomenology" de Freudenthal) en la realización del análisis fenomenológico de la siguiente manera "The order in which the various kinds of phenomenological analysis must be developed begins with pure phenomenology (the component of formal competence), for which what is of prime importance is knowledge of mathematics and its applications" (Filloy Rojano y Puig, 2008, p. 36). Debido a sus alcances e intereses, el Modelo Formal de esta tesis se restingió al análisis del conocimiento

conocimiento suficientemente amplio como para interpretar en un SMS más abstracto, las acciones que los estudiantes realizan en un SMS más concreto.

Para este estudio en particular se hace necesario definir un Modelo de Competencia Formal para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, partiendo desde un acercamiento por medio de las funciones. A continuación, se presenta una descripción matemática de lo que se entiende por funciones y sistemas de ecuaciones lineales, así como de las formas de solución para estos sistemas. Esta descripción se irá acotando específicamente a los sistemas de ecuaciones lineales 2×2, los cuales son el objeto matemático de este estudio.

Conviene resaltar también que la descripción que se ofrece a continuación sobre los aspectos de la sintaxis algebraica atañe a las reglas de construcción y manipulación socialmente aceptadas. Sin embargo, para efectos del análisis de las producciones de los estudiantes, conviene tener una postura en la que también se reconocen los aspectos semánticos que ofrecen los problemas del modelo de enseñanza, de esta manera, tal como Filloy (1999) señala:

> Pondremos mayor atención en el punto de vista pragmático consistente en remarcar el significado dado por su uso, en vez de poner mayor énfasis en el significado abstracto. Este enfoque desvía la observación en matemática educativa de la 'competencia' hacia la 'actuación' de los usuarios de los sistemas matemático de signos. (p.4)

Por lo anterior, en este estudio tomamos una postura sobre el aprendizaje del lenguaje algebraico en la que consideramos que los aspectos semánticos y sintácticos se encuentran estrechamente relacionados. Tal como presentan Filloy, Rojano y Puig (2008)

> In the same way that, in the learning of syntax, one can see an intricate relationship between syntax and semantics (understood as a relationship between the operations performed on the purely syntactic level and the meanings that those operations have in the context of the concrete model), in the application of that syntax in the solution

---

matemático "formal" de la solución de sistemas de ecuaciones lineales y que corresponde al conocimiento escolar de la educación secundaria en México.

> of problems one can also perceive a tension between the semantics that belongs to the context of the problem and the symbolic manipulation of the algebraic expressions that represent the situation of the problem. (p. 161).

En este sentido, consideramos el aprendizaje de la sintaxis algebraica enmarcando tanto los aspectos puramente sintácticos como los semánticos provenientes de los contextos que se otorgan en los problemas del modelo de enseñanza.

A continuación, se describen los referentes matemáticos que sustentan este trabajo, con la finalidad de establecer las definiciones y las reglas básicas que permitan hablar de los objetos matemáticos con los que se trabaja, pero sin entrar a un análisis fenomenológico de ellos. Las fuentes de consulta que se usaron para la construcción de esta sección son los libros *Algebra Intermedia* (Angel, 2008); *Algebra Lineal y Geometría para la Ingeniería* (García, 2011), Linear Algebra (Petersen, 2012) y *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Freudenthal, 1983); el análisis, la organización, la reescritura y la presentación de estas ideas es trabajo propio del autor.

La organización que se escogió para esta sección se encuentra alineada con las intencionalidades del estudio. Por tanto, primero se describen las ideas matemáticas que se consideran prerrequisitos para que los estudiantes aborden el Modelo de Enseñanza (ecuaciones lineales); en seguida, las ideas que pueden enmarcar las producciones matemáticas de los estudiantes en el transcurso del desarrollo de la propuesta (pensamiento funcional); los asuntos matemáticos que podría alcanzar un usuario ideal al finalizar la secuencia (planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2); y, finalmente, la descripción de los métodos clásicos de solución de problemas verbales el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS), Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES), y el Método Cartesiano (MC) (Filloy et al., 1999).

3.1.2.1 Ecuaciones lineales

Definición 1: Sea $\mathcal{R}$ un conjunto no vacío y $*$ una relación binaria definida en $\mathcal{R}$, se dice que $*$ es una *relación de equivalencia* en un conjunto $\mathcal{R}$ si cumple:

1. $\forall a \in \mathcal{R}\ \ a * a$ (propiedad reflexiva)
2. $\forall a, b \in \mathcal{R}\ \ si\ a * b \rightarrow b * a$ (propiedad simétrica)

3. $\forall a, b, c \in \mathcal{R} \;\; si \; a * b \wedge b * c \rightarrow a * c$ (propiedad transitiva)

Nos interesa en particular hacer uso del conjunto de los reales ($\mathbb{R}$) con la relación de igualdad convencional ($=$).

Definición 2: Dados tres conjuntos A, B y C una operación binaria ($\circ$) es una aplicación que asigna a cada par de valores a de A y b de B un solo valor c de C, esto es:

$$\forall (a, b) \in A \times B \; \exists \; c \in C \;\; / \;\; a \circ b = c$$

En este estudio trabajaremos con las operaciones de suma ($+$) y producto ($\times$) convencionales de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Propiedades de la suma

- $Si \; a, b \in \mathbb{R} \;\rightarrow a + b \in \mathbb{R}$ (cerradura)
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \; a + b = b + a$ (conmutatividad)
- $\forall a \in \mathbb{R} \; a + 0 = 0 + a = a$ (existencia del elemento neutro)
- $\forall a \in \mathbb{R} \; \exists (-a) \; / \; a + (-a) = (-a) + a = 0$ (existencia opuesto aditivo)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \; (a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativa)

Propiedades del producto

- $Si \; a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a \times b \in \mathbb{R}$ (cerradura)
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \; a \times b = b \times a$ (conmutatividad)
- $\forall a \in \mathbb{R} \; a \times 1 = 1 \times a = a$ (existencia del elemento neutro)
- $\forall a \in \mathbb{R} \; \exists \left(\frac{1}{a}\right) \; / \; a \times \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \times a = 1$ (existencia del opuesto multiplicativo)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \; (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (asociativa)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \; a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (distributiva respecto de la suma)

Propiedades de suma y multiplicación con la igualdad:

- Si $a = b$ entonces $c + a = c + b$, para cualquier a, b, c ∈ $\mathbb{R}$.
- Si $a = b$ entonces $c \cdot a = c \cdot b$, para cualquier a, b, c ∈ $\mathbb{R}$

Definición 3: Se define *polinomio aritmético* a una expresión que combina las operaciones básicas de la aritmética (en nuestro caso: suma y multiplicación).

Jerarquía de las operaciones: Para dar solución a un polinomio aritmético es necesario respetar una jerarquía en las operaciones a realizar:

1. Las operaciones agrupadas por paréntesis u otro signo de agrupación

2. Las multiplicaciones (que incluyen las divisiones)
3. Las sumas (que incluyen las restas)

En el caso concreto de expresiones que incluyen literales, es necesario conocer, además de estas reglas, cómo se realiza una simplificación de términos semejantes.

Simplificación de términos semejantes: Dos términos son semejantes si tienen la misma parte literal, esto es que sus literales y exponentes correspondientes coincidan, si esto se cumple, la simplificación de términos semejantes ocurre cuando los términos se suman entre sí, sumando sus coeficientes reales y conservando la parte literal; respetando la jerarquía en las operaciones y paréntesis de la expresión.

Definición 4: Para esta investigación entenderemos *ecuación* como una proposición matemática de igualdad donde aparece como mínimo una incógnita (valor desconocido). Una ecuación debe contener un signo igual y una expresión matemática de cada lado del signo, si la ecuación tiene solución en $\mathbb{R}$, entonces existe uno o más elementos de $\mathbb{R}$ que al ser sustituidos por la(s) incógnitas correspondientes, hacen verdadera la proposición de igualdad.

Definición 5: Una ecuación lineal es aquella que puede escribirse en la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$. En este caso se llamará coeficiente de x a a y b será llamado término independiente.

Al resolver ecuaciones lineales, se puede aplicar las propiedades de suma y multiplicación de la igualdad para aislar la variable en un lado del signo igual.

Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$3x + 2 = 0$$

Sumamos -2 en cada lado de la igualdad, seguido a ellos multiplicamos por $1/3$ ambos lados y obtenemos así el valor que debe tomar x para que la igualdad se cumpla:

$$3x + 2 - 2 = 0 - 2 \quad \text{Propiedad de la suma}$$

$$3x\left(\frac{1}{3}\right) = -2\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{Propiedad de la multiplicación}$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{Solución de la ecuación}$$

Cuando una ecuación lineal no está escrita en la forma $ax + b = 0$, se puede aplicar las propiedades y simplificar términos semejantes para reescribirla en la forma deseada.

Para corroborar el resultado de una ecuación, basta con sustituir, en la expresión inicial, la incógnita por el resultado hallado y resolver el polinomio aritmético que se genera respetando la jerarquía de las operaciones.

3.1.2.2 Funciones

Dado que, para este estudio, se optó por introducir los sistemas de ecuaciones lineales por medio del trabajo con funciones, a continuación, se describen algunos asuntos específicos de este concepto y de los modos de uso elegidos para el presente estudio.

Definición 6: se llamará *variable* a una cantidad que es susceptible de tomar distintos valores (*variar*) de un conjunto numérico específico.

El concepto de variable involucra de manera implícita dos interpretaciones: como marcador de posición y como posibilidad de evocar a otros objetos (Freudenthal, 1983). Cuando se entiende como un marcador de posición para un conjunto numérico, la variable se convierte en sí misma en un objeto: el representante del conjunto. Sin embargo, la variable también puede interpretarse como el indicador de la posibilidad de evocar otros objetos (cantidades en este caso) lo que le convierte en una “caja vacía”. Es pertinente hacer alusión a estas dos interpretaciones del concepto de variable, ya que el trabajo que se propone sobre la hoja de cálculo sugiere que los estudiantes empleen ambas.

Dos variables pueden encontrarse relacionadas por medio de una relación de *dependencia*, la cual establece un vínculo entre ellas que se hace explícito y posibilita calcular el valor numérico de una de las variables (*dependiente*) al conocer el valor numérico de la otra (*independiente*) o reconocer si dos cantidades en conjunto cumplen o no esta relación.

Definición 6: Una *función* es una relación especial de dependencia entre una variable dependiente y una variable independiente.

Tomando la concepción de variable como representante de un conjunto, una *función* establece entonces una relación entre dos conjuntos *A* y *B* de manera que para cada elemento *a* de *A*, existe un único elemento *b* de *B* que satisface la regla de dependencia entre los elementos.

Definición 7: Una *función lineal* es una función que relaciona dos variables (x e y) por medio de una expresión que puede escribirse como[4]:

$$ax + by = c$$

Con a, b y c números reales y $ab \neq 0$.

Es importante señalar que al asignar un valor numérico a una de las variables (x o y) la función lineal se convierte en una ecuación lineal. Esta relación es de suma importancia pues permite el acercamiento a los sistemas de ecuaciones lineales por medio del trabajo con funciones lineales.

3.1.2.3 Planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección se presenta una descripción de las ideas a las que accedería un estudiante ideal luego de que abordara de manera competente todo el *Modelo de Enseñanza* propuesto para este estudio.

Definición 8: Un sistema de ecuaciones lineales 2×2 es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\}$$

Los números a_1, a_2, b_1 y b_2 se denominan coeficientes, x e y incógnitas (o números a determinar) y los c_1 y c_2 términos independientes.

Para el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales que permita modelizar un problema, se hace necesario que se identifiquen los datos, valores desconocidos y relaciones de dependencia que ofrece el contexto del problema; esto permite establecer dos condiciones que se deben cumplir de manera simultánea, cada una de ellas constituye en una ecuación del sistema.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar los valores de las incógnitas de manera que se cumplan todas las igualdades del sistema de manera simultánea.

---

[4] En algunos casos suele llamarse función lineal únicamente a las funciones que pueden escribirse de la forma $ax + by = 0$ y a las funciones de la forma $ax + by = c$ con $c \neq 0$ se les llama función afín, no obstante, esta distinción no es relevante para los propósitos de este estudio.

Para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales es conveniente hablar de la *independencia lineal* de sus ecuaciones.

Definición 9: Un vector $\vec{v}$ conformado por los coeficientes de una ecuación A es una combinación lineal de otro vector $\vec{w}$ conformado por los coeficientes de una ecuación $B,$ si existe un escalar $\alpha,$ tal que:

$$\vec{v} = \alpha\vec{w}$$

En ese caso se dirá que A es linealmente dependiente de B.

Ejemplo:

La ecuación $10x - 8y = 5$ es linealmente dependiente de la ecuación $-5x + 4y = 6$; ya que existe el escalar -2 tal que:

$$\langle 10, -8 \rangle = -2\langle -5, 4 \rangle$$

Un sistema de ecuaciones es linealmente independiente si sus ecuaciones no son linealmente dependientes. En este caso el sistema tendrá una única solución y será denominado *consistente*.

Definición 10: Un sistema de ecuaciones lineales se denominará *dependiente* si posee infinitas soluciones. Para que esto ocurra, las ecuaciones del sistema tendrán que ser linealmente dependientes y los términos independientes verificarán la misma relación que los coeficientes. Esto es:

Si $\vec{v} = \alpha\vec{w}$ entonces el término independiente de la ecuación A, es decir c_1 y el término independiente de la ecuación B, es decir c_2 satisfacen la igualdad

$$c_1 = \alpha c_2$$

En caso de que la igualdad $\vec{v} = \alpha\vec{w}$ se cumpla, pero no satisfaga que $c_1 = \alpha c_2$ el sistema se denominará inconsistente.

El uso de las propiedades de la igualdad y de las reglas de manipulación de expresiones algebraicas permite transformar sistemáticamente un sistema de ecuaciones 2×2 en una ecuación con una sola incógnita. En educación secundaria, según los aprendizajes esperados formulados por la Secretaría de Educación Pública (2017), se introduce el estudio de los *métodos de reducción*, los cuales permiten realizar estas transformaciones. A continuación, se ofrece una descripción breve de los tres métodos de reducción que se estudia en la escuela secundaria -sustitución, igualación y eliminación-

Sustitución: El método de sustitución consiste en realizar un despeje de una de las incógnitas en una de las ecuaciones de manera que la expresión resultante pueda ser sustituida por la incógnita correspondiente en la ecuación restante, de esta manera cualquier sistema 2×2 se reducirá a una ecuación lineal, por ejemplo:

Se tiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = -2 \\ -x + 4y = 45 \end{array}\right\}$$

Si se desea reducir por medio del método de sustitución habrá que escoger una incógnita y una ecuación específicas para despejar, en este caso escogemos x de la primera ecuación, por lo que al despejar obtenemos:

$$x = \frac{-2 - 3y}{2}$$

Con este resultado x puede ser sustituido en la ecuación 2 para obtener una ecuación lineal que sería:

$$-\left(\frac{-2 - 3y}{2}\right) + 4y = 45$$

$$1 + \frac{11}{2}y = 45$$

Que es una ecuación lineal con una sola incógnita, por lo que su solución es $y = 8$. Este valor de y se sustituye en alguna de las ecuaciones iniciales (por ejemplo, la primera ya despejada), para obtener:

$$x = \frac{-2 - 3(8)}{2}$$

$$x = -13$$

De manera que se encuentran los valores para ambas incógnitas que solucionan el sistema.

Eliminación: El método de eliminación, propone la búsqueda de un escalar que permita eliminar una de las incógnitas en la ecuación. Ejemplo, para solucionar el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -5x + 3y = -11 \\ 2x - 4y = 10 \end{array}\right\}$$

Si se desea eliminar, por ejemplo, la incógnita y, se usa el escalar $\frac{4}{3}$ para multiplicarlo con la primera ecuación y sumar el resultado a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rrrl} + & -\frac{20}{3}x & +4y & = -\frac{44}{3} \\ & 2x & -4y & = 10 \\ \hline & -\frac{14}{3}x & & = -\frac{14}{3} \end{array}$$

De esta manera se obtiene una ecuación lineal cuya solución es $x = 1$, valor que puede sustituirse en cualquiera de las ecuaciones (por ejemplo, en la segunda) para encontrar el valor de y y con ello la solución del sistema:

$$2(1) - 4y = 10$$

$$y = -2$$

Igualación: Partiendo de la propiedad de transitividad de las relaciones de equivalencia, este método consiste en despejar la misma incógnita de las ecuaciones del sistema para poder igualarlas y construir una ecuación lineal con una sola incógnita, por ejemplo, si se tiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 7x - 2y = -14 \\ -3x - y = 6 \end{array}\right\}$$

Puede despejarse la incógnita y de ambas ecuaciones así:

$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{-14 - 7x}{2} \\ y = -6 - 3x \end{array}\right\}$$

Ambas ecuaciones pueden igualarse haciendo uso de la propiedad transitiva de la igualdad.

$$\frac{-14 - 7x}{2} = -6 - 3x$$

$$-14 - 7x = -12 - 6x$$

Así, obtenemos una ecuación de una sola incógnita cuya solución es $x = -2$, este valor se sustituye en alguna de las ecuaciones iniciales para obtener la solución para la segunda incógnita del sistema:

$$y = -6 - 3(-2)$$

$$y = 0$$

Es importante mencionar que las ecuaciones que constituyen los sistemas pueden ser manipuladas individual o grupalmente haciendo uso de herramientas algebraicas gracias a las propiedades que cumplen las relaciones de equivalencia. De esta manera, una ecuación puede ser *simplificada* al multiplicarse por un escalar o modificada haciendo uso de la sustitución algebraica. Por ejemplo:

Se tiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{c} 5x + 2y = 192 \\ x - y = -12 \end{array}\right\}$$

El sistema puede transformarse en otro equivalente, por ejemplo, multiplicando ambas ecuaciones por el escalar $\frac{1}{12}$ así:

$$\left.\begin{array}{c} 5\dfrac{x}{12} + 2\dfrac{y}{12} = \dfrac{192}{12} \\ \dfrac{x}{12} - \dfrac{y}{12} = -\dfrac{12}{12} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 5\dfrac{x}{12} + 2\dfrac{y}{12} = 16 \\ \dfrac{x}{12} - \dfrac{y}{12} = -1 \end{array}\right\}$$

Ahora puede hacerse uso de una sustitución algebraica como $u = \frac{x}{12}$ y $v = \frac{y}{12}$, de esta manera el sistema se reescribiría como:

$$\left.\begin{array}{c} 5u + 2v = 16 \\ u - v = -1 \end{array}\right\}$$

Cuya solución (aplicando cualquiera de los métodos) sería $u = 2$ y $v = 3$, lo que implica que la solución del sistema original sea $x = 24$ y $y = 36$.

En educación secundaria, los métodos de reducción se enseñan para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, están muy documentadas por la investigación las numerosas estrategias idiosincráticas de los estudiantes usan al acercarse a la solución de sistemas de ecuaciones, como el uso de procedimientos aritméticos y pruebas de ensayo y error (Filloy et al., 1999; Solares, 2007; Filloy, Rojano y Solares, 2010, entre muchos otros). La presentación de estos métodos cobra importancia en este estudio ya que, como se verá en el Capítulo 5, permiten analizar las producciones idiosincráticas de los estudiantes cuando buscan apropiarse del SMS algebraico con el que modelar los problemas.

3.1.2.4 Métodos clásicos de resolución de problemas

Teniendo en cuenta el diseño del Modelo de Enseñanza para este estudio, conviene precisar algunos asuntos propios del Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS), el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) y el Método Cartesiano (MC) (Filloy et al., 1999).

3.1.2.4.1 Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS)

Para dar solución a un problema que relaciona aritméticamente cantidades conocidas y valores desconocidos, en el MIAS los estudiantes reconocen tales relaciones como "posibles estados del mundo" y realizan transformaciones a esos estados mediante oraciones analíticas, esto haciendo uso de hechos que consideran validos en "todo mundo posible" (Filloy et al. 1999). Dicho de otra manera, en el MIAS los estudiantes realizan transformaciones aritméticas "posibles" del enunciado que encadenan analíticamente hasta que obtienen la "situación posible" que se puede considerar como la respuesta del problema:.

Filloy et al. (1999) hace uso del siguiente ejemplo para ilustrar cómo se puede resolver un problema con el MIAS:

> Está una educadora repartiendo crayones; la estamos viendo desde lejos y sólo oímos, a través del sistema de sonido de la escuela, los resultados de las acciones que allí se llevan a cabo. Después de haber repartido todos los crayones (#C) dos niños son llamados a la Dirección, la educadora reparte entre los demás los crayones que dejan esos 2 niños y les toca dos más a cada uno de los restantes. Los dos niños que se fueron regresan, rápidamente, con dos niños más, la educadora vuelve a repartir todos los crayones (#C) entre todos los niños que ahora hay en la clase y les tocan un crayón menos de los que les había tocado al principio a cada niño ¿cuántos niños había al principio? (p. 130)

Para resolver este problema podemos llamar #N al número de niños que había al principio y #c a la cantidad de crayones que a cada niño corresponde en la primer repartición, cuando dos niños son llamados a la Dirección #N se ve reducido en 2, y al reconocer que los crayones que le correspondían a cada uno se repartieron tocándole a cada niño ahora dos crayones de más podemos establecer la relación:

$$\#N - 2 = \#c$$

O dicho de otra manera, el número de niños equivale al número de crayones que le correspondieron a cada niño en principio aumentado en 2:

$$\#N = \#c + 2$$

El problema relata que los dos niños llamados a la Dirección regresan y otros dos se incorporan al salón, con lo que la maestra toma un crayón de cada caja ($\#c - 1$) y los usa para completar las cajas de los niños recién incorporados, es decir que el número de niños se corresponde con el número de crayones que hay en dos cajas con $\#c - 1$ crayón cada una:

$$\#N = 2(\#c - 1)$$

Al tomar amas relaciones y restarlas obtenemos:

$$\#N = \#c + 2$$

$$\underline{\#N = 2(\#c - 1)}$$

$$0 = \#c - 4$$

Que indica que en principio se repartieron 4 crayones por cada niño, con lo que habían 6 niños y 24 crayones.

Nótese que aun cuando se han simbolizado las cantidades desconocidas por medio de literales, el tratamiento que se da a ellas y a las relaciones que las gobiernan es de naturaleza aritmético, y que las transformaciones que se realizaron no son más que la interpretación numérica de los hechos que el problema remarca, junto con un proceso de análisis de éstos.

3.1.2.4.2 Método analítico de exploraciones sucesivas

Con el objetivo de dar solución a un problema, en este método los estudiantes “usan exploraciones con datos particulares para desencadenar el análisis del problema” (Filloy et al., 1999, p. 37). Este proceso de análisis por medio de datos concretos se aprovecha en la propuesta del Modelo de Enseñanza al incluir a la hoja de cálculo como una herramienta en la que estas exploraciones se hacen explícitas y se estructuran. Filloy, Rojano y Puig (2008) denominan *Spreadsheets Method* (SM) al trabajo de explorar con datos concretos en una hoja de cálculo.

Una de las particularidades específicas del SM es la carencia de una formulación algebraica explícita que represente las relaciones entre los datos. Esta característica cobra importancia en este estudio debido a que el interés inicial de la secuencia de actividades recae sobre la interpretación de las relaciones entre los datos del problema, dejando la escritura algebraica para el trabajo posterior.

El trabajo de Arnau (2010) ofrece una amplia descripción del actuar de los estudiantes al aplicar el SM a problemas sobre los que ya habían trabajado usando herramientas algebraicas. Concluye que, tras la enseñanza, los estudiantes son capaces de utilizar el SM para resolver problemas de manera algebraica en la hoja de cálculo. Sin embargo, enlista una serie de dificultades que pueden presentarse si los estudiantes han trabajado previamente en el SMS del álgebra. En nuestro caso, el uso de la hoja de cálculo es previo al trabajo simbólico, es por ello por lo que vale la pena resaltar algunas particularidades del uso del SM como precursor del trabajo algebraico.

Filloy, Rojano y Puig (2008) indican que cuando se aplica el SM, y una vez que se ha usado el SMS de la hoja de cálculo para expresar el problema, los estudiantes tienen a su disposición un medio para explorar las posibles estrategias de resolución, ellos resaltan, además, algunas características propias de la aplicación del SM.

> 1) La mayoría de los estudiantes no piensan espontáneamente en términos de una experiencia algebraica cuando trabajan por primera vez en un entorno como el proporcionado por el SM.
>
> 2) El SM estimula a los estudiantes a dejar de enfocarse en un ejemplo específico y empezar a considerar una relación general.
>
> 3) El SM también estimula a los estudiantes a aceptar trabajar con lo desconocido. Se establece el uso de una celda en la hoja de cálculo para representar lo desconocido, y al usar la herramienta pueden expresar las

diversas relaciones establecidas en el problema en términos de la celda utilizada en primer lugar.

4) Después de usar el SM hay una mayor conciencia de las relaciones entre las incógnitas y, entre las incógnitas y los datos del problema.

5) Antes de una secuencia de sesiones en el uso del SM, se puede observar una evolución hacia un método algebraico más general que consiste en proceder de lo desconocido a lo dado.

6) En el SM se puede ver una integración de varias estrategias de resolución, como el refinamiento de la estrategia total y parcial y prueba y error. (p. 240)

Son de particular importancia para este estudio las características 2, 3 y 4 del anterior listado, pues remarcan la intencionalidad, ya mencionada, de propiciar el reconocimiento de relaciones entre los datos y las incógnitas; así como una reinterpretación de las incógnitas como celdas vacías de la hoja de cálculo.

3.1.2.4.3 El Método cartesiano

En el MC el estudiante traduce el texto del problema y los elementos desconocidos del mismo a una serie de relaciones expresadas en un SMS más abstracto, estas relaciones conducen a un conjunto de textos cuya descodificación otorga la solución del problema.

El MC es el método comúnmente usado en contextos escolares, esto gracias a que aplica el lenguaje algebraico para traducir los enunciados de los problemas a ecuaciones que involucran los datos que el problema otorga y los valores desconocidos que suponen la solución del problema.

Al aplicar el MC los estudiantes deben, en principio, realizar un proceso de traducción del problema al SMS del álgebra, luego, realizar una serie de transformaciones de orden sintáctico que posibiliten encontrar el o los valores desconocidos, estos finalmente se leen como datos pertenecientes al contexto que el problema plantea, de esta manera no son números aislados si no que pertenecen a una "realidad" que puede, en ocasiones, brindar a los estudiantes una estrategia de validación de los resultados, por ejemplo en aquellos problemas en los que el dato desconocido es el tiempo y los estudiantes pueden reconocer algún error algebraico si este resultado llega a ser un número negativo.

Filloy, Rojano y Puig (2008) resaltan que los Modelos de Enseñanza basados en el MAES y el SM "sirven como puente para unir el desarrollo sintáctico y semántico a través de la construcción de significados para operaciones aritmético-algebraicas en la transición del uso de la noción de variable a la de desconocido" (p. 249). El trabajo particular que se propone en la hoja de cálculo permitirá a los estudiantes construir significado sobre las incógnitas de los sistemas de ecuaciones lineales, partiendo de una noción de variable que propicia el uso de celdas vacías sobre las que pueden introducirse distintos valores.

Los autores también sugieren que los significados de las operaciones aritméticas, sus propiedades y sus resultados, como son usados en el MAES y el SM, "sirven como precursores para crear los significados de las relaciones algebraicas establecidas en el uso de expresiones con incógnitas y datos" (p. 249). Sólo si se tiene un dominio competente en estos métodos.

3.1.3 Modelos de Enseñanza

Un Modelo de Enseñanza es definido por Filloy (1999, p.78) como:

> Un conjunto de secuencias de textos matemáticos T_{an} cuya elaboración y decodificación por el aprendiz le permite al fin interpretar todos los textos T_n en un SMS más abstracto cuyo código hace posible descodificar los textos T_n como mensajes con un código matemático socialmente bien establecido.

Tomando en cuenta lo anterior, ha de entenderse que la definición del Modelo de Enseñanza posibilita la puesta en aula de las tareas que permiten al estudiante volverse cada vez más competente en un SMS; o, dicho de otra manera, en una investigación la construcción del Modelo de Enseñanza permitirá la implementación de una secuencia que busca estudiar las formas en que los estudiantes pueden apropiarse de un SMS escolarmente bien establecido y que ha sido propuesto como meta educativa.

En este estudio se concibe y desarrolla el Modelo de Enseñanza tomando como punto de partida la perspectiva de la modelización matemática propuesta por Blum y Leiß (2007), Schukajlow, Kolter, y Blum (2011) y Blum y Borromeo (2016), teniendo como hipótesis que el trabajo en este tipo de tareas puede apoyar procesos de construcción de *significados* sobre los conceptos matemáticos involucrados en la apropiación del nuevo SMS y producir *sentido* sobre el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas. A continuación, se presenta esta propuesta de modelización matemática.

3.1.3.1 Sobre la modelización matemática

La modelización matemática en ámbitos escolares ha sido un tema relevante para la investigación durante las últimas décadas, de allí que en la actualidad existan un número considerable de posturas teóricas sobre qué es, para qué sirve y cómo se caracteriza el proceso que se sigue en ella. Kaisser y Sriraman (2006) manifiestan que uno de los principales referentes para la modelización matemática desde una perspectiva educativa es el trabajo que ha desarrollado Werner Blum y colegas, postura que se asume para esta investigación.

Para Blum y Borromeo (2016) la modelización matemática denota el proceso de transitar, entre el mundo extra-matemático y el matemático, y viceversa. El mundo extra-matemático incluye la naturaleza, cultura, sociedad o vida cotidiana. En otras palabras, la modelización matemática implica la totalidad del proceso de resolver problemas del mundo real por medio de las matemáticas.

El esquema propuesto por Blum y Leiß (2007) presenta siete pasos que constituyen el ciclo ideal de modelización (ver Figura 3-1).

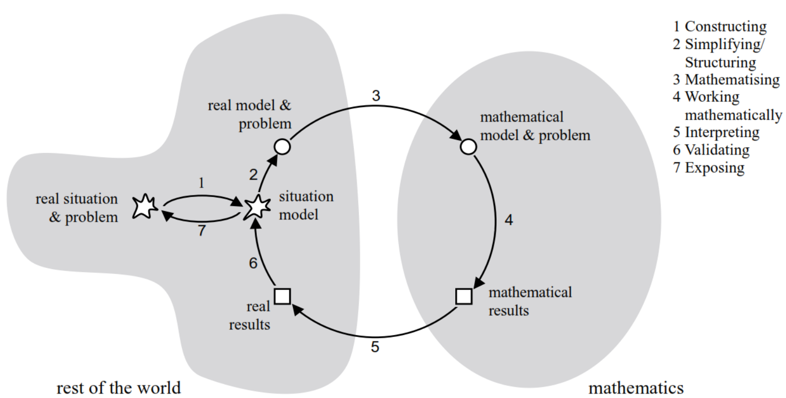


Figura 3-1 (Blum y Leiß, 2007)

De esta manera, para resolver un problema de modelización matemática el modelador (en nuestro caso el estudiante) deberá en un primer momento entender el problema, por lo que debe construir una *situación modelo* en la que involucre los aspectos que se presentan en la situación e identifique un objetivo al que debe llegar; esto implica que el modelador identifica la información dada y reconoce aquella que debe buscar. El segundo paso del proceso implica la construcción de un *modelo real*, en este momento el modelador reconoce una forma de estructurar las variables que se encuentran en juego, es decir que puede simplificar su *situación modelo* al descartar la información que considere irrelevante y establecer las formas en las que las variables y los datos interactúan. En este momento es posible que el modelador realice bosquejos de uno o varios casos particulares de la situación; por ejemplo, gráficos que muestren una posible disposición de los elementos del problema.

En un tercer paso denominado *matematización* el modelador transforma el *modelo real* en un *modelo matemático*, aquí busca y reconoce una forma de representar matemáticamente las relaciones y variables que encontró en el *modelo real*, además puede realizar suposiciones sobre información que considere relevante pero que el problema no le otorga. Una vez definidas estas ideas matemáticas se da inicio el cuarto paso, el trabajo matemático, en el que el modelador realiza los pasos propios de las matemáticas que permiten los datos relacionados; por ejemplo, puede desarrollar operaciones, simplificar expresiones o graficar funciones, todo ello con el objetivo de encontrar nuevos datos que se denominan *resultados matemáticos.*

La interpretación de los *resultados matemáticos* obtenidos es el quinto paso, allí se transforman en *resultados reales* que deberían incluir una solución al problema dado. No obstante, estos *resultados reales* deben ser validados a la luz del problema original (paso 6), de esta manera el modelador puede percatarse si la respuesta es coherente con la naturaleza del problema o si es necesario repetir uno, algunos o todos los pasos previos. Es importante mencionar, en este momento, que la validación de los resultados no necesariamente se realiza de manera individual; por lo que una estrategia de aula que implique la puesta en común de los resultados de los estudiantes es relevante para fines metodológicos (Schukajlow, Kolter, y Blum, 2011). El séptimo paso, que es el paso final, implica la presentación de los resultados obtenidos.

En esta investigación, los 7 pasos del ciclo de modelización constituyen una vía para el diseño del Modelo de Enseñanza (ver sección 3.1.5.1) y también permitirán caracterizar los momentos en los que se encuentren los estudiantes durante el trabajo en la secuencia. No obstante, ninguno de estos pasos será objeto de análisis, puesto que interesan los procesos de adquisición de “la porción de sintaxis” algebraica propia del método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Se han asumido las ideas de Blum para entender la modelización matemática puesto que ofrecen considerables ventajas para su implementación en el presente estudio. El detallar el esquema en 7 pasos posibilita diseñar un Modelo de enseñanza para acercar a los estudiantes al uso del álgebra simbólica a través de sus métodos de solución de sistemas de ecuaciones que modelizan problemas.

3.1.3.2 La secuencia diseñada: características generales

La secuencia de actividades que se plantea como Modelo de Enseñanza en este estudio fue diseñada tomando como referente los criterios para la elaboración de “buenas tareas” de modelización matemática para los grados de secundaria, propuestos por Blum y Borromeo (2016, p.72), quienes plantean que este tipo de tareas deben ser:

- *abiertas*, esto es que den cabida a diferentes soluciones de acuerdo con los supuestos con los que el estudiante inicie el proceso de modelización.
- suficientemente *complejas* como para que la respuesta no sea obvia, es decir, estas tareas deben representar un reto para el estudiante.
- *realistas* o de ser posible *auténticas*, una de las características más importantes de las tareas es que presenten un contexto que sea real o por lo menos posible y que los datos relacionados allí sean coherentes con esa realidad.
- *problemáticas* que permitan que los estudiantes tengan curiosidad por encontrar una solución, en ese sentido las tareas que piden a los estudiantes tomar una decisión u optimizar son las más problemáticas per se.
- *accesibles* para los estudiantes, es importante que los estudiantes tengan las herramientas matemáticas necesarias para enfrentar el problema.

Además, Blum y Borromeo (2016) señalan que estas tareas de modelización matemática deben requerir que el estudiante transite por todas las fases del ciclo de modelización matemática.

Es importante resaltar que el modelo de enseñanza que se diseñó para este estudio no retoma al pie de la letra los criterios propuestos por Blum y Borromeo (2016), sino que los reelabora desde la perspectiva teórica de los MTL (Filloy, 1999) para cumplir con el objetivo de promover que los estudiantes se apropien de un nuevo SMS y que se enfrenten a actividades de modelización con las que han tenido poca o nula experiencia. Por lo anterior, no es posible que durante la secuencia los estudiantes transiten por "todas las fases" del ciclo de modelización, por el contrario, se planteó una secuencia que pone distintos énfasis en el ciclo de modelización a lo largo de su desarrollo (ver sección 1.1.5.1 La secuencia de actividades "grano a grano").

El contexto que se escogió para el diseño de la secuencia es la mezcla de productos. durante la secuencia, cada problema presenta una estructura similar, se ofrecen a los estudiantes los precios unitarios de dos productos diferentes y se les solicita encontrar una proporción para la mezcla que aproxime de mejor manera una cantidad y precio requerido. La información necesaria para resolver este tipo de problemas puede resumirse en la Tabla 3.1

Tabla 3.1

Resumen de información para los problemas de la secuencia

	Dado en el problema	Nomenclatura
Costo unitario del producto 1	Sí	A
Costo unitario del producto 2	Sí	B
Cantidad requerida	Sí	C
Costo unitario requerido	Sí	D
Cantidad por mezclar del producto 1	No	x
Cantidad por mezclar del producto 2	No	y
Sistema de ecuaciones a solucionar	No	$\left.\begin{array}{r} x+y=C \\ Ax+By=CD \end{array}\right\}$

El manejo de la información que se plantea a lo largo de la secuencia es progresivo. Al principio se permite que los estudiantes exploren el problema y acudan a una estrategia de ensayo y refinamiento (Método analítico de exploraciones sucesivas <MAES>, el cual se describirá en la siguiente sección); posteriormente, se introducen la nomenclatura algebraica para plantear el sistema de ecuaciones y el método de igualación para solucionarlo.

Estas tareas son *abiertas* en la medida en que es válido que los estudiantes propongan soluciones aproximadas para la repartición de productos. Son, además, *suficientemente complejas* para los estudiantes pues este tipo de tareas es nuevo para los ellos, pero su solución no requiere de un conocimiento matemático avanzado; en todo caso se espera que los estudiantes echen a andar saberes previos, tales como elaboración y manipulación de expresiones algebraicas, procedimientos aritméticos y manejo de tablas, para hallar sus propias aproximaciones. De manera que también son tareas *accesibles*.

Respecto del *realismo* de las tareas, es importante aclarar que los datos numéricos para los problemas planteados son verídicos en el contexto mexicano, exceptuando los últimos cuya intencionalidad requería que fuesen imaginarios. No obstante, en lo referente a si las tareas son o no *problemáticas* es importante reconocer que para este estudio se considera la posición de Carreira y Baioa (2017) quienes aluden al concepto de "credibilidad" manifestando que no necesariamente los contextos reales son los más atractivos para los estudiantes, si no que la relevancia que puede tener una tarea depende del individuo a quien se le plantea.

Finalmente, en cuanto a la sugerencia de que los problemas permitan a los estudiantes *transitar por todas las fases del ciclo de modelización*, en este estudio se reconoce que el hecho de que los estudiantes no tengan experticia en este tipo de problemas impide que el ciclo de modelización sea aplicado plenamente desde el trabajo con el primer problema. No obstante, el diseño de la secuencia pretende también que los estudiantes centren sus acciones en distintas fases del ciclo a medida que construyen el SMS que les permite abordar los problemas. Los problemas del Modelo de Enseñanza que fue diseñado para este estudio no pretenden abordar todas las fases del ciclo de modelización a la vez, por el contrario, en cada hoja de trabajo se abordan distintas etapas de éste.

A continuación, se presenta una descripción de la secuencia diseñada y de las intencionalidades de cada hoja de trabajo.

3.1.3.3 La secuencia de actividades "grano a grano"

Se consideró pertinente dividir la secuencia de actividades en tres hojas de trabajo con intereses concretos. La primera tiene como propósito presentar, por primera vez para los estudiantes[5], un problema que involucra el trabajo con dos incógnitas que interactúan en relación con dos condiciones específicas. La segunda tiene por objetivo la introducción del método de igualación para solucionar sistemas de ecuaciones lineales y la tercera busca que los estudiantes apliquen el método de igualación y reflexionen sobre éste. A continuación, se presenta una descripción más detallada de las hojas de trabajo que componen la secuencia. En el Anexo 2 se presentan las hojas de trabajo completas.

Hoja de trabajo 1: constituye el acercamiento inicial de los estudiantes a problemas que involucran un sistema de ecuaciones lineales; es decir, problemas que establecen dos incógnitas a encontrar y dos "condiciones" que estos valores deben cumplir de manera simultánea. Por tal razón, era necesario proporcionar un contexto en el que las dos incógnitas y las dos condiciones fueran suficientemente explícitas. El contexto que se utilizó fue el de mezcla de productos, considerando que, en estos casos, las incógnitas corresponden a las cantidades de cada producto que se deben mezclar y que las condiciones de cantidad de producto y costo por kilogramo determinan las formas en las que los datos y las incógnitas interactúan. Como ya se presentó en la Tabla 3.1, esta información se encuentra explícita en la escritura del problema.

Se espera que, para el desarrollo de esta hoja de trabajo, los estudiantes reconozcan las dos incógnitas del problema, así como las formas en las que éstas se relacionan, y con ello puedan abordar el problema usando una hoja de cálculo como herramienta de trabajo.

---

[5] Como se discute en el capítulo siguiente, la población de estudiantes elegida para esta investigación ha estudiado el álgebra correspondiente a la solución de ecuaciones lineales de una incógnita, así como problemas que se pueden modelar con este tipo de ecuaciones.

Las instrucciones de la hoja de trabajo se pueden dividir en dos grupos, las primeras tienen por objetivo que los estudiantes anticipen una respuesta y construyan un mecanismo de verificación de ésta; las siguientes instrucciones buscan que los estudiantes exploren con más valores y se aproximen lo mejor que puedan a la respuesta concreta del problema.

El problema que se plantea es el siguiente:

> Cacahuates y nuez: El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $40 mientras que la nuez Wichita tiene un valor de $120 el kilo, un empresario desea crear 25 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $60 por kilo.

Seguido al problema, la hoja de trabajo plantea una serie de instrucciones que busca que los estudiantes plasmen en una hoja de cálculo prediseñada (únicamente con rótulos para las columnas) las relaciones que encuentran entre los datos del problema. Las instrucciones que se establecen se presentan en forma de globos como se muestra en la Figura 3-2. El objetivo de estos globos es que los estudiantes reflexionen, celda a celda, sobre las fórmulas que pueden usar para relacionar los datos.

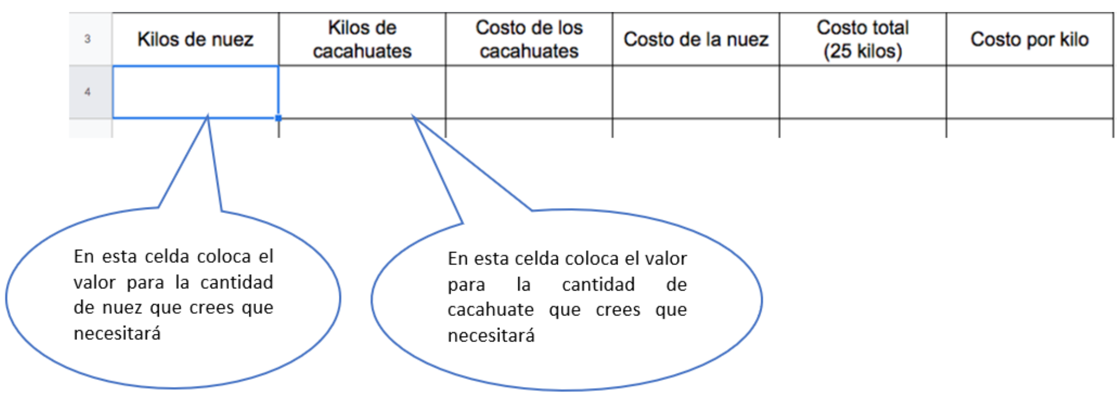
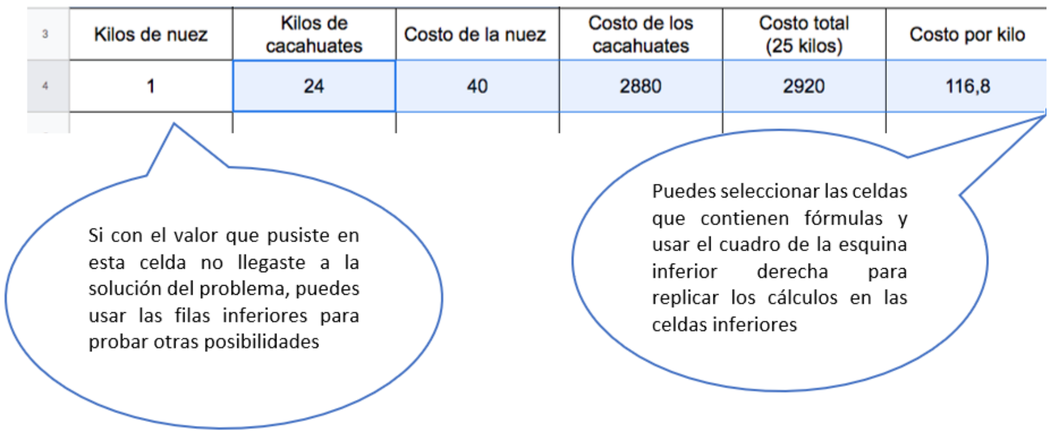


Figura 3-2 Fragmento de la hoja de trabajo 1 para la construcción de la hoja de cálculo

Las instrucciones posteriores a la elaboración de la hoja de cálculo pretenden que los estudiantes reflexionen sobre las fórmulas que hayan usado, que eventualmente las perfeccionen (incluyendo una fórmula para los kilos de cacahuate dada la cantidad de kilos de nuez) y, finalmente, que exploren más valores (ver Figura 3-3), esto con el objetivo de que se decidan por una respuesta concreta y lo más acertada que puedan para el problema.



3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4	1	24	40	2880	2920	116,8

Figura 3-3 Fragmento de la hoja de trabajo 1 para la búsqueda de la respuesta al problema

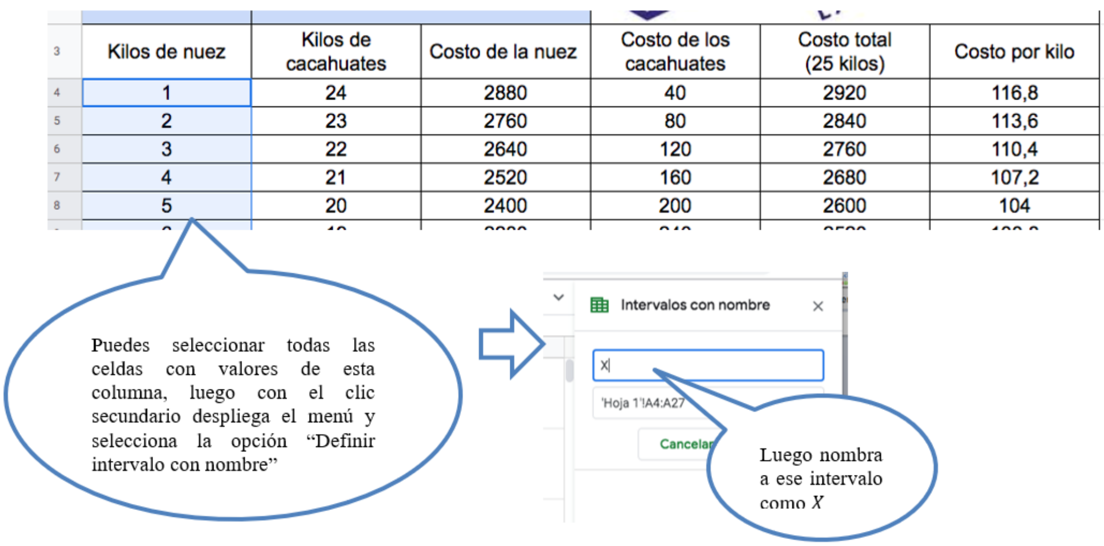
Esta primera hoja de trabajo plantea uso de nueva simbología matemática, la correspondiente al SMS de la hoja de cálculo, y tiene énfasis en la consolidación del método analítico de exploraciones sucesivas como estrategia para abordar problemas de los que no se reconoce aún un método algebraico particular.

Hoja de trabajo 2: tiene como principal objetivo introducir el método algebraico de igualación para la solución de los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, se propone una primera sección de trabajo en la que los estudiantes resuelven, también con hoja de cálculo, dos situaciones nuevas que poseen la misma estructura que el problema de la hoja de trabajo 1. Esto con el objetivo de hacer evidente que, con una estrategia de exploraciones sucesivas, no hay exactitud en las respuestas y que el proceso se torna poco eficiente. Los problemas que se plantean son los siguientes:

1. Arándanos y cacahuates: El costo de un kilo de arándanos al mayoreo es de \$150 mientras que el cacahuate tiene un valor de \$40 el kilo, un empresario desea crear 40 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de \$80 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?
2. Almendras y arándanos: El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de \$205 mientras que los arándanos tienen un valor de \$150 el kilo, un empresario desea crear 30 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de \$160 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

En ambos problemas la respuesta exacta implica expresiones decimales periódicas (ver Anexo 1: Guía para el maestro), por ello, el trabajo en la hoja de cálculo sólo permite que los estudiantes encuentren aproximaciones a la respuesta, aun cuando los valores puedan ser redondeados y aparentar exactitud dada la configuración del programa.

En la siguiente sección de esta hoja de trabajo se retoma el problema inicial y se hace uso de las ideas de Rojano y Sutherland (2001) para la introducción de las literales *x* e *y*. Haciendo uso de las herramientas de la hoja de cálculo se propone nombrar el conjunto de valores que fueron asignados a una de las incógnitas con la literal *x* y al otro la literal *y* (ver Figura 3-4). Esta estrategia permite introducir las expresiones algebraicas y, además, trabajar con la idea de incógnita desde las dos posturas que menciona Freudenthal (1983), como "caja vacía" en relación con las celdas de la hoja de cálculo y como "representante del conjunto" cuando se le asigna un nombre al conjunto de valores.



3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4	1	24	2880	40	2920	116,8
5	2	23	2760	80	2840	113,6
6	3	22	2640	120	2760	110,4
7	4	21	2520	160	2680	107,2
8	5	20	2400	200	2600	104

Figura 3-4 Fragmento de la hoja de trabajo 2 para la incorporación de simbología algebraica

La asignación de las literales *x* e *y* para representar toda una columna de datos permite que los estudiantes transiten de un sistema de signos a otro, en el cual el planteamiento del sistema se hace explícito al recuperar las fórmulas que se usaron para construir la hoja de cálculo. Por ello, se propone que los estudiantes expliquen en sus propias palabras las ecuaciones que modelan el problema (ver Figura 3-5)

Tomando en cuenta el trabajo que has realizado hasta el momento, explica qué representan las siguientes ecuaciones:

$$Y = 25 - X$$

$$120X + 40Y = 1500$$

Figura 3-5 Fragmento de la hoja de trabajo 2 para la interpretación del sistema en lenguaje algebraico

La sección final de la hoja de trabajo 2 busca orientar a los estudiantes en la manipulación de las dos ecuaciones que constituyen el sistema, a fin de que se aplique el método de igualación y, finalmente, se encuentre la solución exacta del problema. Sin embargo, es importante reconocer que las instrucciones en la hoja de trabajo no pretenden ser una estrategia que supla la necesidad de una intervención de enseñanza concreta, ya que se reconoce que el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales implica un *corte didáctico* en el que se hace necesario reconceptualizar los conceptos de incógnita y de igualdad (Filloy, Rojano y Solares, 2010).

A manera de síntesis, la hoja de trabajo 2 pone énfasis en i) que los estudiantes reconozcan la necesidad de un método algebraico manipulativo para la solución de este tipo de problemas, ii) el proceso con el que los estudiantes pueden plantear en, lenguaje algebraico, el sistema de ecuaciones que modela el problema inicial y iii) la introducción del método de igualación para manipular el sistema de ecuaciones lineales y encontrar su solución.

Hoja de trabajo 3: es la última de las hojas que se plantearon y se compone de 6 problemas para abordar con las herramientas algebraicas que se introdujeron al final de la hoja de trabajo 2; con ellos se pretende consolidar el método de igualación y darle *sentido* al ser aplicado en problemas con estructura similar.

Los dos primeros problemas que se plantean en la hoja de trabajo 3 son los mismos que los que se presentan en la hoja de trabajo 2. Los siguientes cuatro problemas son situaciones *irreales* que se diseñaron con el objetivo de que los estudiantes reflexionaran sobre los resultados matemáticos que arroja el método y que interpretaran las implicaciones de éstos en el contexto *real* en que se plantean los problemas. Los problemas a los que se hace referencia son los siguientes:

3. Maní y cacahuate: El costo de un kilo de maní al mayoreo es de $70 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 23 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $40 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?
4. Almendras y cacahuates: El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $140 el kilo, un empresario desea crear 10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $140 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?
5. Almendras y cacahuates: El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $90 el kilo, un empresario desea crear 10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $30 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?
6. Cacahuates y arándanos: El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $50 mientras que los arándanos tienen un valor de $80 el kilo, un empresario desea crear 35 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $150 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Si bien una lectura rápida de los problemas muestra que todos tienen la misma estructura, sus soluciones no son “posibles” en el contexto en que se plantean los problemas. El problema 3 propone un costo para le mezcla que es igual que el costo unitario de uno de los productos, por lo que la respuesta implica que una de las incógnitas sea cero y la otra tome el valor de la cantidad de kilos a mezclar, cosa que en un escenario real no se considera una “mezcla”.

Para el problema 4 se presentan los valores unitarios de cada producto iguales al valor esperado para el kilogramo de la mezcla, esto implica un sistema de ecuaciones dependiente.

Nuevamente, en el contexto real no tendría valor práctico realizar cálculos para una mezcla bajo estas condiciones.

Los problemas 5 y 6 solicitan un valor para la mezcla que se encuentra fuera del rango que definirían los valores unitarios de los productos, ello implica que alguna de las incógnitas del sistema tenga una respuesta negativa y la otra un valor superior que la cantidad que el problema solicita como total para la mezcla; por ello tampoco es una situación que se pueda dar en un contexto real.

El énfasis de la hoja de trabajo 3 recae sobre i) dar sentido al método de igualación como herramienta para abordar cualquier problema con una estructura similar a los aquí trabajados y ii) el proceso de interpretación de resultados en el contexto del problema, esto con el fin de dar respuesta a la segunda pregunta de investigación al observar y analizar el rol que juega el uso de la sintaxis algebraica en procesos de modelización matemática.

3.1.4 Modelo de procesos cognitivos.

Filloy et al. (1999) plantea que la componente de procesos cognitivos hace referencia a las formas en las que el estudiante actúa internamente para procesar y comunicar su conocimiento, en este sentido se incluyen como procesos cognoscitivos la percepción, el direccionamiento de la atención y sus relaciones con los procesos de comprensión, el uso de la memoria, el desencadenamiento de procesos de análisis y síntesis, la resolución de problemas, la generalización, la abstracción, entre otros.

Para el presente estudio, el Modelo de procesos cognitivos considera los procesos cognoscitivos que los estudiantes ejercen al enfrentar la solución de problemas de dos incógnitas. Por ello se recurre a las Tendencias cognitivas que Filloy ha identificado se presentan en las actuaciones de los estudiantes cuando se están tratando de pasar de un estrato de un SMS más concreto a uno más abstracto (Filloy et al., 1999). Además, se recurre a resultados de investigaciones sobre las estrategias y formas de interpretación de los estudiantes con relación a la transición entre diferentes niveles de representación de las incógnitas. A continuación, se presentan estos elementos que conforman el Modelo de procesos cognitivos del presente estudio.

3.1.4.1 Tendencias cognitivas

Conviene resaltar que los procesos cognitivos que tienen lugar en la apropiación de un SMS más abstracto que permita la aplicación competente del MC pueden ser categorizados usando como referente las tendencias cognitivas que reporta Filloy et al. (1999), pues éstas se hacen presentes cuando en una situación de enseñanza se está tratando de pasar de un estrato de un SMS más concreto (el de la hoja de cálculo, por ejemplo) a uno más abstracto. Dichas tendencias son:

1. La presencia de un proceso de abreviación de los textos para poder producir reglas sintácticas nuevas.
2. La dotación de sentidos intermedios.
3. El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.
4. La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.
5. Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirían resolver la situación problemática.
6. La articulación de generalizaciones erróneas.
7. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.
8. La presencia de mecanismos inhibitorios.
9. La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.
10. La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias.
11. La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

Para los objetivos de este estudio las tendencias cognitivas recién mencionadas ofrecen un conjunto de hechos con los que se pueden dar explicaciones a las acciones de los estudiantes en el desarrollo de las tareas propuestas.

Filloy, Rojano y Puig (2008) reportan tres tipos de situaciones que pueden ocurrir cuando los estudiantes inician el estudio del álgebra en secundaria: *The reverse of multiplication síndrome, the phenomenon of contextual ambiguity* y dificultades para traducir del lenguaje natural al álgebra y viceversa, éste en particular constituye en una de las mayores dificultades que los estudiantes presentan al iniciar su estudio en álgebra, pues como manifiestan Filloy, Rojano y Puig (2008) existe una tensión que manifiestan los estudiantes mientras luchan entre usar el SMS aritmético para leer y expresarse y su necesidad de otorgar significados a los signos matemáticos nuevos dentro del contexto del SMS algebraico.

Filloy, Rojano y Puig (2008) reconocen, además, que para los estudiantes la escritura de expresiones algebraicas es un asunto complicado puesto que las interpretaciones que se hacen de éstas pueden diferir según el contexto en el que se produzcan. Un ejemplo de ello son las expresiones $A = b \times h$ y $y = ax$, pues si bien ambas expresiones son sintácticamente equivalentes, sus interpretaciones son diferentes; la primera se relaciona, generalmente, con una fórmula que permite hallar el área de un rectángulo en el que conocen los valores de la base y de la altura; mientras que la segunda podría corresponder a una familia de funciones lineales de x con parámetro a. Así, la interpretación que se realiza de la primera expresión recae sobre un SMS aritmético-geométrico, mientras que la segunda puede tener una lectura proveniente del SMS del álgebra.

3.1.4.2 Cortes didácticos y diferentes niveles de representación de la incógnita

Filloy y Rojano (1984), Rojano (1985), Filloy et al. (1999), Filloy, Rojano y Puig (2008) y Filloy, Rojano y Solares (2010) presentan los que denominan *cortes didácticos* en la transición del pensamiento aritmético al algebraico. Dichos cortes ocurren cuando los estudiantes enfrentan por primera vez una tarea algebraica en la que los significados de los objetos que manejaban de la aritmética deben ser reconstruidos para incluir características especiales extra (Filloy, Rojano y Solares, 2010). Un ejemplo de estos cortes es la denominada *polisemia de la* x, que corresponde a una interpretación de distintos valores para la incógnita en la misma ecuación; por ejemplo en la expresión $x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$, los estudiantes indican que el valor de una de las equis (la primera de izquierda a derecha) es seis, mientras que la otra equis puede tomar cualquier valor; ello indica que al interior de la misma ecuación la literal se está interpretando de dos maneras diferentes como incógnita y número generalizado.

Un corte didáctico que es particularmente importante para este estudio es planteado en el trabajo de Filloy, Rojano y Solares (2010), y tiene que ver con la necesidad de reconceptualizar ideas algebraicas al momento de trabajar con variables en un segundo nivel de abstracción. Filloy, Rojano y Solares (2010) dirigieron un estudio centrado en observar el proceso mediante el cual los estudiantes adquieren la sintaxis propia de los sistemas de ecuaciones lineales 2×2. En este estudio se proponen problemas de palabras de dos tipos, primero los problemas de tipo P(1,2) para los cuales el valor de una de las incógnitas puede obtenerse en una de las ecuaciones sin depender de la otra, por ejemplo: *"la diferencia entre dos números es 10. Si se adiciona al menor 17, el resultado es 100. ¿Cuáles son los dos números?* $(x - y = 10;\ y + 17 = 100)$*"*

El segundo tipo de problemas denominado del tipo $P(2{,}2)$ se caracteriza por la presencia de ambas incógnitas en las dos ecuaciones, por lo tanto, es necesario la escritura de una de las incógnitas en función de la otra, a lo que los autores denominan un *segundo nivel de representación,* que presume además un corte didáctico, pues se requiere de la construcción de un nuevo nivel de representación de incógnitas y de nuevas maneras de operar en ellas.

Los resultados del estudio de Filloy, Rojano y Solares (2010) muestran además que todos los estudiantes entrevistados reconocían la presencia de dos incógnitas en el problema, así como de las relaciones existentes entre ellas. Para lo concerniente a la simbolización de estas relaciones, en los problemas de tipo $P(1{,}2)$ algunos estudiantes no requirieron de la escritura de las expresiones correspondientes para solucionar el problema, puesto que encontraban la solución analizando las relaciones numéricas dadas. En los problemas de tipo $P(2{,}2)$ se reporta que los estudiantes no tuvieron dificultades en cuanto a la simbolización de las relaciones dadas, aunque, en algunos problemas, no identificaban que las expresiones eran dos representaciones equivalentes de la misma incógnita. Por ejemplo, en el problema: "*El perímetro de un rectángulo es 5 veces más que su ancho mientras que su largo es 12 metros"* se reporta que los estudiantes entrevistados no tuvieron dificultades para identificar las incógnitas del problema: ancho y perímetro además de que usaron la fórmula del perímetro de un rectángulo y la aplicaron en las relaciones específicas del problema para obtener un sistema en la siguiente forma: $P = 5a$ y $P = 24 + 2a$, sin embargo no reconocían que las expresiones correspondían a dos formas equivalentes de escribir el perímetro en función de su ancho.

Los resultados del estudio llevado a cabo por Filloy, Rojano y Solares (2010) ponen de manifiesto la necesidad de proporcionar contextos reales y cercanos a los estudiantes, de manera que las relaciones encontradas entre las variables permitan la elaboración de expresiones algebraicas acordes al problema, sin que se pierdan de vista los contextos de los que se generan. Esto además permitirá que se realice un proceso de modelización matemática en el que el contexto, problema en cuestión, siempre sea un referente directo y que permita dotar de sentido y significado a los elementos propios del planteamiento y solución de los sistemas.

4. Metodología del estudio

En el Capítulo 2 (Antecedentes, propósito y problemática del estudio) se definió que el centro de atención de esta investigación radica en el conocer los procesos de producción de sentido que tienen lugar en los estudiantes cuando están inmersos en tareas de modelización matemática en las que el álgebra, al final de la secuencia, adquiere un carácter instrumental; particularmente al introducir el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para cumplir con este propósito fue necesaria la elección de un marco teórico con el que se pudiera caracterizar el actuar de los estudiantes y los diferentes SMS que usan a medida que se vuelven competentes en la solución de los sistemas de ecuaciones lineales 2×2.

El marco de los MTL proporciona las herramientas de diseño y de análisis para esta investigación. Además, el carácter local y recursivo de este marco lo convierten en un referente metodológico para el diseño y aplicación de un experimento de enseñanza que permite abordar la problemática planteada en este documento.

La metodología de trabajo para este estudio está principalmente enfocada en el diseño y aplicación de un Modelo de Enseñanza presentado en la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y el análisis de éste en función del Modelo de procesos cognitivos descrito en la sección 3.1.4. Todo esto bajo el referente de Competencia Formal presentado en la sección 3.1.2.

El capítulo que se encuentra a continuación se divide en dos. En un primer momento se presenta las características del diseño de la experimentación, constituyen la planeación que se realizó antes del levantamiento definitivo de los datos. Mientras que en un segundo momento se presentan las particularidades del desarrollo de la experimentación, que se refiere a la etapa de levantamiento y análisis de los datos.

Tanto para la etapa de diseño como para la de desarrollo de la experimentación, las fases propuestas por Filloy et al. (1999) sirvieron como referente para la construcción de los esquemas que se muestran en las figuras 4-1 y 4-2, estos esquemas son adaptaciones para el presente estudio de los originales propuestos por Filloy et al. (1999).

4.1 Diseño de la experimentación

La fase de diseño de la experimentación se realizó siguiendo las etapas propuestas en la Figura 4-1. Específicamente, se trabajó en i) la construcción de una problemática, ii) el análisis previo de problemas, iii) el diseño de la secuencia de actividades, iv) el desarrollo empírico, v) La planeación de la experimentación y vi) el análisis de la información. A continuación, se describe el trabajo específico realizado en cada una de dichas etapas.

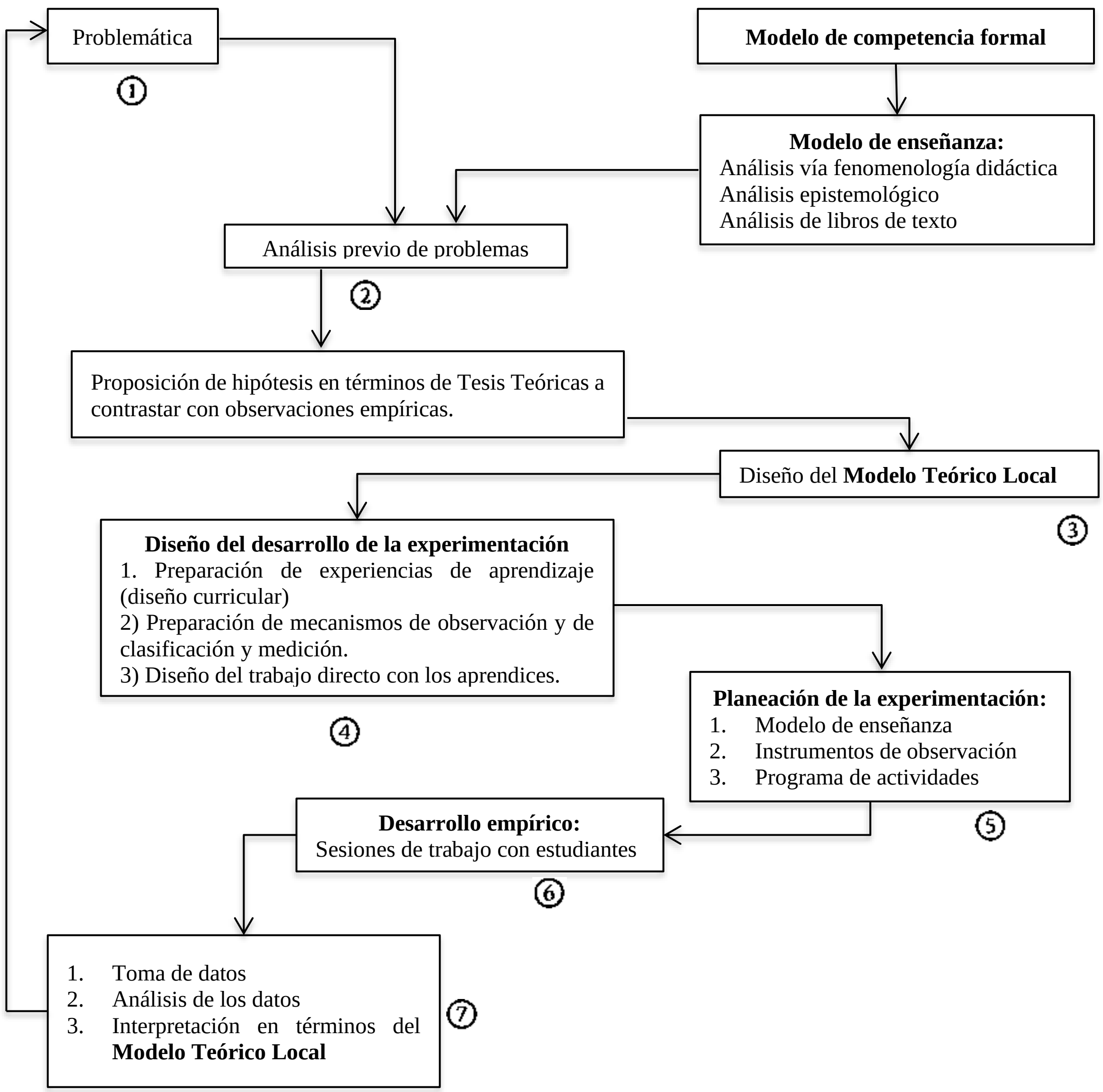


Figura 4-1 Esquema del diseño de la experimentación

4.1.1 Construcción de la problemática

Debido a la motivación inicial, cuya finalidad es el estudio de los procesos de adquisición del pensamiento algebraico y la modelización matemática como estrategia de adquisición de contenido matemático, surgió la necesidad de realizar una revisión de literatura reciente que pusiera de manifiesto el estado del arte en estos ámbitos para situar este estudio en el contexto de la investigación actual.

La revisión de la literatura permitió identificar la necesidad de un estudio que permitiera analizar el proceso mediante el cual los estudiantes se apropian de la sintaxis algebraica propia de los métodos de reducción de sistemas de ecuaciones lineales 2×2, y de los significados y sentidos que, en ese proceso de apropiación, son extraídos del proceso de modelización matemática.

El identificar el aporte que esta investigación realizaría en el campo de estudio de la enseñanza del álgebra implicó la definición de los aspectos teóricos que lo fundamentarían, por ello se optó por los MTL, como marco teórico y de análisis, y la propuesta de Blum sobre modelización matemática como base para el diseño del Modelo de Enseñanza. Una segunda fase consistió en el análisis previo de los detalles de índole teórico que esta problemática implica.

4.1.2 Análisis previo de problemas

Una vez identificado que el interés general de esta investigación recae sobre los procesos de aprendizaje de la sintaxis algebraica, se hizo necesario el reconocimiento de antecedentes directos que permitieran detallar los aspectos específicos de los MTL que serían necesarios para el análisis. Así como las posibles explicaciones que se tuviesen para los resultados que se obtuviesen de la aplicación de un Modelo de Enseñanza adecuado a los propósitos del estudio.

Los resultados obtenidos en el estudio de Filloy, Rojano y Solares (2010) marcaron pautas importantes para comprender el corte didáctico en el que se sitúa este estudio. Con esto, fue posible no solo el diseño de un Modelo de Enseñanza que pusiera sobre la mesa una vía de reconceptualización de las ideas de incógnita e igualdad, sino también que la investigación se perfilara al análisis de los procesos de producción de sentido y construcción de significados descritos en la sección 3.1.1.

Finalmente, las ideas de Rojano y Sutherland (2001) sobre las implicaciones del uso de la hoja de cálculo para la incorporación de la sintaxis algebraica, así como las tendencias cognitivas reportadas por Filloy et al. (1999) se convirtieron en los referentes en los que se buscan explicaciones para los resultados de la implementación del Modelo de Enseñanza.

4.1.3 Diseño del modelo teórico local

Para la elaboración del Modelo Teórico Local, fue necesaria la construcción de un Modelo de Competencia Formal, que presentara las ideas matemáticas principales alrededor de los sistemas de ecuaciones lineales 2×2, esto revisando distintas fuentes de textos matemáticos.

El Modelo de Procesos Cognitivos fue construido articulando las ideas sobre modelización matemática planteadas por Blum; los resultados de Filloy y colaboradores en torno al aprendizaje del álgebra; y los resultados que presentan los antecedentes más directos del presente estudio (Filloy, Rojano y Solares, 2010 y Rojano y Sutherland, 2001).

Para el Modelo de Enseñanza, los componentes Formal y Cognitivo guiaron la elección de un conjunto de problemas que podía adecuarse a las particularidades de esta investigación. Se revisaron algunas propuestas de problemas recuperados de diferentes fuentes y se modificaron gracias a las sugerencias de algunos investigadores y estudiantes con los que se tuvo contacto académico.

La principal herramienta para la adecuación de los problemas fue el listado presentado en la sección Modelos de Enseñanza, para la elaboración de "buenas tareas de modelización matemática". No obstante, también se realizaron adecuaciones en función de los conocimientos previos de los estudiantes y del objetivo de introducir la sintaxis algebraica como una herramienta para apoyar el trabajo de los aprendices.

Una vez construidos los problemas, se realizó un análisis previo de los mismos que presenta una descripción de posibles errores en que los estudiantes pueden incurrir, la respuesta esperada de un usuario competente en el SMS y algunas sugerencias de implementación en el aula; lo que se presenta como Anexo 1 en este estudio.

Es importante resaltar que la propuesta inicialmente se componía de cuatro problemas, entre ellos el de “cacahuates y nuez” que fue el aplicado a los estudiantes junto a las variaciones que se describieron en el Modelo de Enseñanza. Los tres problemas restantes no fueron aplicados en el aula por motivos administrativos, por lo que se decidió estructurar una secuencia de actividades con un único tipo de problemas pero que permitiera observar el proceso completo de adquisición de las herramientas sintácticas del método de igualación. Los tres problemas restantes que fueron diseñados se pueden observar en el Anexo 3 de este documento.

El diseño de los problemas, la problemática planteada y el proceso de estructuración del Modelo de Procesos Cognitivos permitieron suponer como hipótesis del estudio que el trabajo con problemas de modelización matemática enfocado a la enseñanza del método de igualación para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 posibilita que los estudiantes den sentido al método y significado a las ideas matemáticas que ponen en juego.

La construcción del Modelo Teórico Local finalizó con el refinamiento y la articulación de los componentes del Modelo de Competencia Formal, del Modelo de Enseñanza y del Modelo de Procesos Cognitivos; tomando en cuenta para estos dos últimos los aspectos teóricos planteados por Blum, en lo referente a la modelización matemática.

4.1.4 Diseño del desarrollo de la experimentación

El diseño de la experimentación supuso la preparación de una secuencia de actividades que incluye una prueba diagnóstica y los problemas que constituyen el Modelo de Enseñanza, elementos que se muestran en las hojas de trabajo (ver Anexo 2: Hojas de trabajo usadas en el estudio) que son el primer punto de encuentro de los estudiantes con los problemas.

A continuación, se presenta el diseño del diagnóstico y las intencionalidades de los ejercicios que lo componen.

4.1.4.1 Prueba diagnóstica

Con el objetivo de verificar que los estudiantes ya habían superado el *corte didáctico* de la incógnita en la línea de evolución de la aritmética al álgebra reportado en los estudios de Filloy y Rojano (1984, 1985a, 1985b) y las *dificultades para traducir del lenguaje natural* *al álgebra y viceversa* que reportan Filloy, Rojano y Puig (2008), se diseñó una prueba diagnóstica (ver Anexo 2: Hojas de trabajo usadas en el estudio) que permite realizar una valoración de los estudiantes en torno a tres competencias específicas:

- *Simbólica*: Dirigida a observar las habilidades de manipulación sintáctica sobre expresiones algebraicas, principalmente ecuaciones lineales, a fin de encontrar el valor para la incógnita que satisfaga la igualdad.
- *Analítica*: Dirigida a observar las habilidades para la resolución de problemas de palabras, esto es, la simbolización de relaciones entre datos y/o la búsqueda de estrategias de solución sin una componente simbólica.
- *Gráfica*: Dirigida a observar el desempeño de los estudiantes en el manejo del plano cartesiano, es decir, ubicación de objetos geométricos como puntos y rectas y su simbolización matemática convencional.

Concretamente, los ítems que se elaboraron solicitan lo siguiente:

1. *Indicar las coordenadas de un conjunto de puntos a partir de su representación en el plano cartesiano:* Este ítem pretende evaluar la *competencia gráfica* en cuanto a la identificación de puntos en el plano cartesiano y su escritura simbólica convencional.
2. *Ubicar puntos en el plano cartesiano para construir rectas crecientes, decrecientes, horizontales y verticales, para posteriormente dibujarlas:* Este ítem nuevamente evalúa la *competencia gráfica,* dando libertad al estudiante de escoger puntos en el plano cartesiano que formen una recta con las características que se solicitan.
3. *Solucionar una ecuación lineal mediante manipulación algebraica:* Este ítem evalúa la competencia simbólica para la solución de ecuaciones lineales por medio de la transposición de términos.
4. *Solucionar dos problemas de palabras que implican una ecuación lineal:* Con este ítem se evalúa la *competencia analítica* a medida que requieren la búsqueda de una estrategia que permita hallar la solución del problema. También se evalúa, eventualmente, la competencia simbólica ya que una de estas estrategias puede ser el planteamiento y solución de una ecuación lineal.

4.1.5 Planeación de la experimentación

Para este estudio, el investigador asume el rol de enseñante, por lo que no es necesario un diseño para el trabajo con maestros; sin embargo, se presenta una guía de trabajo para el maestro (ver Anexo 1) en el caso de que se quiera replicar la secuencia en otra ocasión. La secuencia de actividades que se presentó en el Modelo de Enseñanza se implementó según el siguiente cronograma:

Tabla 4.1

Cronograma de actividades

Actividad	Sesiones	Material
Aplicación prueba diagnostica	1	Hoja blanca con prueba diagnóstica
Hoja de trabajo 1	2	Hoja de trabajo y equipo de cómputo (hoja de cálculo).
Hoja de trabajo 2	2	Hoja de trabajo y equipo de cómputo (hoja de cálculo).
Hoja de trabajo 3	2	Hoja de trabajo

Debido a que este estudio es de corte cualitativo, las fuentes de datos son de distinta naturaleza: se capturaron las producciones escritas de los estudiantes en sus hojas de trabajo, se obtuvo un registro en audio y video de las interacciones entre pares que se realizaron para solucionar las tareas, así como de las interacciones que los estudiantes tuvieron con el maestro.

Dado que el interés de este estudio recae sobre el análisis del proceso de adquisición de una parte del álgebra manipulativa fue necesario clasificar la población y escoger un subgrupo para llevar a cabo un estudio de casos (ver Anexo 4: Resultados de la evaluación diagnóstica).

Para el levantamiento de los datos (etapa de desarrollo empírico) se propusieron dos fases: el estudio piloto y el levantamiento de datos definitivo.

4.2 Desarrollo empírico

De igual manera que con el diseño de la experimentación (sección 4.1), las fases del desarrollo empírico se muestran en la Figura 4-1. En los esquemas propuestos, se evidencia el carácter recursivo de los MTL mencionado por Filloy et al. (1999), ello implica que sea necesario, con el fin de perfeccionar el instrumento, la toma de datos o incluso el diseño de las componentes del MTL para que en los experimentos puedan realizarse iteraciones de las fases.

Para este estudio en particular se realizaron dos iteraciones de la fase de desarrollo empírico. La primera de ellas, denominada levantamiento piloto, fue realizada poniendo a prueba sólo una de las actividades de la secuencia (que corresponde a la primera de las hojas de trabajo). La segunda fase fue desarrollada incluyendo la secuencia en su totalidad y la prueba diagnóstica que permitió clasificar la población. A continuación, se presenta una descripción de la población escogida para el levantamiento de datos definitivo.

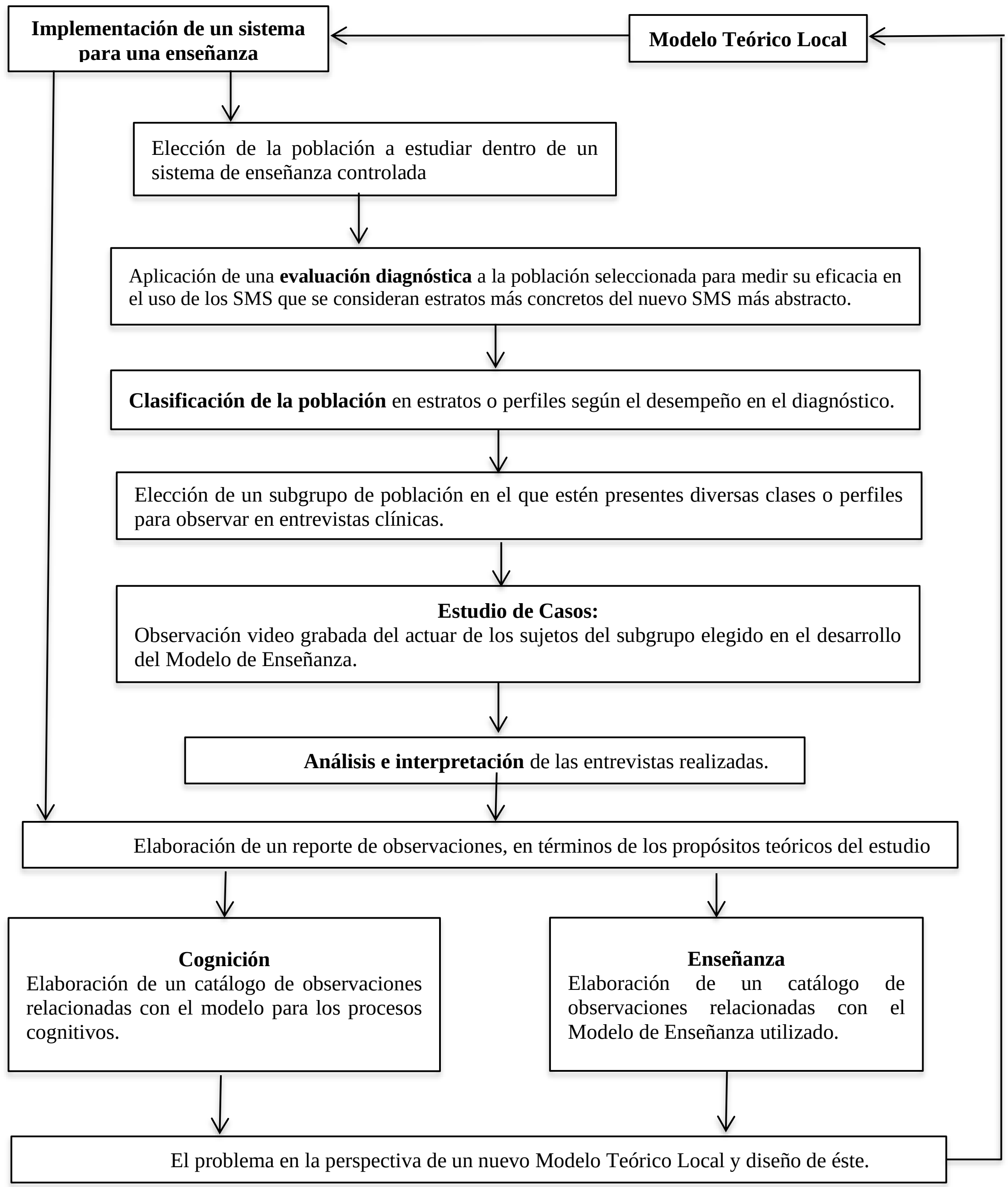


Figura 4-1 Esquema del desarrollo de la experimentación

4.2.1 Caracterización de la población

Una de las premisas fundamentales que se requería para la selección de la población era que los estudiantes no hubiesen trabajado previamente con problemas que involucraran dos incógnitas, por tal razón, el grupo ideal para la aplicación de la secuencia eran estudiantes de segundo grado de secundaria. Sin embargo, la institución que brindó la oportunidad de la implementación forma a sus estudiantes en el tema de sistemas de ecuaciones lineales al finalizar primero de secundaria, de manera que fue necesario trabajar con estudiantes de dicho nivel a inicio del ciclo escolar.

El levantamiento definitivo de los datos se realizó en el Colegio Banting, que se caracteriza por ser una escuela de referencia en el uso de tecnologías aplicadas a la educación, debido a un convenio con la compañía Google que otorgó un equipo de cómputo para cada estudiante.

El grupo elegido para el estudio fue el 02 de primero de secundaria, se contó con la participación de 25 estudiantes con edades entre los 12 y 13 años de los que no existe evidencia de que hayan recibido previamente formación respecto de sistemas de ecuaciones lineales, ni de solución de problemas de modelización matemática. Cada estudiante tenía a su disposición un equipo de cómputo con sistema operativo Chrome, por lo que se disponía de la aplicación Google Sheets en reemplazo de la herramienta de Excel.

Las sesiones de trabajo tuvieron una duración de 45 minutos cada una. Se llevaron a cabo un total de seis sesiones, una para el diagnóstico, dos para la primera hoja de trabajo, dos más para la segunda hoja de trabajo y una para la tercera hoja de trabajo.

Si bien el Modelo de Enseñanza fue aplicado a todo el grupo, previo a su implementación fue necesario clasificar a la población haciendo uso de la prueba diagnóstica descrita en la sección 4.1.4.1. Los resultados de esta evaluación permitieron clasificar los sujetos en estratos de desempeño (bajo, medio y alto) en las tres competencias (ver Anexo 4: Resultados de la evaluación diagnóstica).

De la clasificación que se obtuvo gracias a la prueba diagnóstica se seleccionaron dos parejas de estudiantes, una de desempeño medio en las tres componentes y otra de desempeño alto en estas tres componentes. Se presenta análisis de estos sujetos debido a que el desempeño promedio del grupo en general es muy cercano a los resultados de la pareja de desempeño medio. Además, la pareja de desempeño alto se seleccionó con el objetivo de especular sobre cuál es el actuar de estudiantes que alcancen un dominio competente en el uso del nuevo SMS.

4.2.2 Toma y análisis de los datos

Para el levantamiento de datos definitivo se contó con dos cámaras de video y dos grabadoras de sonido, de esta manera fue posible capturar en audio y video las acciones de los estudiantes y sus diálogos. También se capturaron las producciones escritas de todos los estudiantes del grupo, así como los archivos digitales que construyeron en hoja de cálculo.

Una triangulación de las fuentes de datos (audio y video, hojas de trabajo y hojas de cálculo) permitió la realización del análisis. Los "momentos interesantes" que se identificaron al revisar los archivos de audio y video se registraron en un archivo digital para posteriormente cotejarlos con los registros escritos, las hojas de cálculo y dar explicaciones en términos teóricos de las categorías que se usaron para el análisis de los datos se describen a continuación.

4.2.2.1 Categorías de análisis

Teniendo en consideración las preguntas de investigación que orientan el presente estudio, resulta pertinente observar el actuar de los estudiantes en torno a tres categorías descritas en el capítulo 3, *construcción de significados*, *producción de sentido* y *proceso de modelización*. Así, para procesos de construcción de significados se observan los momentos en los que los estudiantes:

- Realizan transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS**.**
- Realizan traducciones a través de SMS distintos.
- Realizan traducciones entre SMS y sistemas de signos no matemáticos.
- Consolidan, simplifican, generalizan y/o rectifican acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermedios que crean durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza.

En torno a la producción de sentido se tomaron en cuenta los momentos en que los estudiantes:

- Hacen uso de *nuevos signos* conforme lo requiere cada uno de los pasos del proceso de análisis y síntesis de las tareas que se les presentan.
- *Concatenan acciones* en situaciones que, con anterioridad, se consideraban irreductibles unas a las otras con el objetivo de analizar y solucionar una situación particular.

- *Transfieren* procesos de una situación a la otra, al reconocer y concebir como una "familia de problemas" lo que anteriormente consideraban una diversidad de problemas.

Las acciones recién mencionadas se relacionaron con las fases del ciclo de modelización en las que los estudiantes se encontraban, de esta manera las fases del ciclo de modelización matemática constituyen también categorías de análisis para este estudio:

- Construcción de la situación modelo
- Simplificación/estructuración
- Matematización
- Trabajo matemático
- Interpretación de resultados matemáticos
- Validación de resultados reales
- Presentación de resultados

Si bien, el análisis de este estudio no constituye una clasificación de los momentos de trabajo de los estudiantes en función de las categorías ya mencionadas, estas categorías sí delimitan dónde se centró la atención cuando se observó el proceder de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia establecida en el Modelo de Enseñanza.

Los aspectos metodológicos recién descritos permiten la realización de un análisis sobre el actuar de las parejas de estudiantes seleccionadas y con ello la generación de conclusiones de estos hechos en términos teóricos sobre producción de sentido y construcción de significados. De este análisis se ocupa la siguiente sección de este escrito.

5. La implementación de la secuencia

A continuación, se presenta una descripción de los resultados obtenidos por las dos parejas de estudiantes en cada una de las tres hojas de trabajo diseñadas para el Modelo de Enseñanza. La organización del capítulo obedece a las intencionalidades didácticas de las hojas de trabajo. Por tal razón, en un primer momento, se aborda el análisis de las acciones que los estudiantes llevaron a cabo y que constituyen el primer acercamiento a situaciones que involucran dos ecuaciones con dos incógnitas. La segunda parte del análisis se enmarca en los momentos de introducción de la competencia algebraica para plantear y solucionar el sistema. Finalmente se presenta el análisis correspondiente a la aplicación libre del método a situaciones similares.

5.1 Significados y sentidos iniciales, la hoja de cálculo para cristalizar relaciones y dependencias

Como se mencionó en la sección 3.1.3.3, la hoja de trabajo 1 pretendía involucrar a los estudiantes, por primera vez, en una situación de modelización que pudiera resolverse por medio de un sistema de ecuaciones lineales. Primando el MAES como la estrategia para abordar el problema y la *hoja de cálculo* como una herramienta para facilitar la exploración sistemática de aproximaciones a la respuesta.

El análisis que se muestra pretende poner de manifiesto que:

1. Los procesos de *construcción del problema* y *simplificación/estructuración de la situación modelo*, es decir, las dos primeras acciones en el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007), posibilitan el acercamiento a los significados de *variación y dependencia* que son fundamentales para el entendimiento de los sistemas de ecuaciones lineales.
2. Los procesos de *construcción del problema* y *simplificación/estructuración de la situación modelo* permiten a los estudiantes trabajar, de manera coherente con el contexto, con *significados* tales como *relaciones de equivalencia*, *variable continua* y *redondeo*.
3. Las fases iniciales del ciclo de modelización permiten el entendimiento de interacciones entre datos que pueden ser traducidas (matematizadas) al SMS de

la hoja de cálculo, en el que el MAES se materializa y cobra *sentido* para los estudiantes.

4. La *simplificación/estructuración de la situación modelo* permite a los estudiantes realizar “recortes” de la información a fin de que puedan reducir el problema a situaciones más concretas, con interacciones más simples entre los datos, pero cuyas ecuaciones (no explícitas) son equivalentes con las del sistema original. Es decir, se da *sentido* a la simplificación de ecuaciones en el sistema.
5. Las interacciones entre los individuos y la hoja de cálculo ponen de manifiesto relaciones provenientes del contexto del problema, con las cuales se reconoce el rol que cumplen los valores fijos que más adelante se convertirán en los coeficientes de las ecuaciones. Por lo que también se empieza a dar *sentido* al planteamiento simbólico de un sistema de ecuaciones lineales.

La presentación del análisis se divide en tres partes. En la primera parte se describen las acciones que llevaron a cabo los estudiantes una vez que dieron una primera lectura al problema e intentaron entenderlo; en la segunda se observan las respuestas iniciales que dieron al problema sin uso de la hoja de cálculo; finalmente, se presenta el estudio de las acciones que se llevaron a cabo una vez que se introdujo el uso de la hoja de cálculo como herramienta de verificación de las respuestas. En cada caso, el análisis se realiza en paralelo con las dos parejas de estudiantes seleccionadas.

Un caso particular de otra pareja de estudiantes que no fue seleccionada para este estudio, pero cuyo trabajo en esta parte es atípico se presenta en el Anexo 5 de este documento.

5.1.1 Lectura inicial del problema

La lectura inicial del problema suscitó, en ambas parejas de estudiantes, acciones que ponen de manifiesto el reconocimiento de al menos una de las condiciones que el problema impone para los datos. Con ello, los acercamientos iniciales de los estudiantes implicaron el reconocimiento de *reglas de dependencia* de los datos desconocidos en relación con la información proporcionada.

En el Fragmento 1 se muestra parte de la conversación que la pareja de estudiantes, de desempeño alto, tiene al terminar de leer el problema:

1. ED: yo creo que a fuerzas tenemos que usar ecuaciones
2. IA: ¿25 kilos?, [pausa] porque 25 no tiene mitad
3. ED: bueno, yo creo que ahorita olvídate de los 25 kilos y veamos qué tenemos que hacer de un kilo 40 y un kilo 120 para que el kilo de eso nos salga a 60

Fragmento 1

La primera declaración de ED indica que se requiere del uso de ecuaciones, lo que pone de manifiesto que reconoce la posibilidad de relacionar matemáticamente los valores fijos y desconocidos del problema. Este hecho se ratifica posteriormente al indicarle a IA que se olvide por el momento del dato de los 25 kilos y que se concentren en encontrar cómo usar los valores del costo de cada producto (40 y 120) para cumplir con lo que el problema solicita. Es decir, ED reconoce que las cantidades desconocidas *dependen* de los datos que son fijos en el problema (el costo de cada producto por separado) y del valor que se desea lograr con la mezcla.

La sugerencia de "olvidar" momentáneamente el dato de los 25 kilos permite intuir que, en este caso, ED está realizando una *simplificación* del problema, le interesa construir sólo un kilo de producto que cumpla la regla de dependencia para el costo y no 25 como el problema indica. Este hecho supone un *consecutivo de acciones* en los que se comienza a dar *sentido* al planteamiento de una de las ecuaciones del sistema, la que relaciona los costos de los productos.

En los primeros momentos de trabajo de los estudiantes, se hace evidente que ellos i) *Identifican los datos y el objetivo del problema y* ii) *Reconocen interacciones entre los datos y descartan información.* Estas acciones, que son características de las dos primeras fases del ciclo de modelización, posibilitan traducciones del sistema de signos no matemáticos, en el que se presenta el problema, a un SMS aritmético que permite hacer manipulables matemáticamente las relaciones numéricas entre las magnitudes. Estas traducciones son categorizadas por Filloy et al. (1999) como fuentes de *significado*.

El reconocimiento de las interacciones entre los datos desencadena otras acciones en las que los estudiantes exploran valores numéricos concretos para las incógnitas (tratadas ahora como variables) que les permiten producir *sentido*, al *método de ensayo y refinamiento* y al *planteamiento del sistema de ecuaciones*.

Al observar las acciones llevadas a cabo por la pareja de estudiantes de desempeño medio, es posible reconocer procesos de construcción de *significados* y producción de *sentido* inmediatamente después de la lectura inicial del problema. El Fragmento 2 ejemplifica esta afirmación.

1. LL: Estamos hablando de que las tendría que combinar para que saliera cada una a \$60, entonces tendría que haber más parte de los cacahuates, porque si estamos hablando de que la nuez Wichita nada más va a agregar sus \$20
2. KV: [Balbucea leyendo el problema] un costo aproximado de 60 el kilo, ok

Fragmento 2

En este caso, LL reconoce que se debe realizar una repartición particular entre los productos que permita cumplir con la condición para el costo. Menciona, además, que debe haber una mayor parte de cacahuates pues, para completar \$60 por kilo, el cacahuate aportaría \$40 y la nuez "nada más va a agregar sus \$20". Aun cuando esta afirmación refleja un error en la medida que no se respeta la condición de cantidad (asumiendo que el cacahuate va completo), es importante notar que LL reconoce un rol para los coeficientes en relación con sus magnitudes y la diferencia con el valor deseado.

La lectura rápida que KV realiza del problema refleja que, en ese momento, el dato que más le interesaba era el costo al que se quería llegar (\$60), por ello, sus acciones posteriores van orientadas a conseguir esa cantidad, al menos de manera aproximada.

El fragmento de conversación que se acaba de presentar refleja que los estudiantes reconocen el valor \$60 como un elemento del que *dependen* los valores desconocidos del problema. Además, la mención de LL de que deba haber más de una cantidad que de la otra, permite sospechar que se reconocen esos valores desconocidos como cantidades que pueden *variar* en función de una *regla de dependencia* dada por los costos de los productos. Así, nuevamente la traducción del sistema de signos no matemáticos del problema a un SMS aritmético posibilitó que se iniciara un proceso de construcción de *significados* alrededor de la *variación* y la *dependencia.*

En cuanto a producción de *sentido*, este fragmento también muestra las primeras acciones de un proceso de ensayo y refinamiento en el que, además, se exploran parte de las características de las cantidades en función del objetivo deseado. Es decir, los estudiantes reconocen el *rol* que juegan los valores fijos del problema (costos por producto), los cuales, más adelante, se convertirán en los *coeficientes* de las incógnitas con los que se planteará una de las ecuaciones del sistema.

5.1.2 Primeras anticipaciones de respuesta

Luego de que se realizara la primera lectura del problema, ambas parejas tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre una posible respuesta. En el caso de la pareja de estudiantes con nivel de desempeño alto, realizaron una repartición de cantidades que cumplía con las especificaciones que el problema planteaba para costo, el Fragmento 3 muestra ese resultado.

1. IA: Si tenemos la mitad de este [refiriéndose a la nuez] y la mitad de este [refiriéndose al cacahuate] nos va a salir en $80, y debe ser un costo aproximado, o sea, si se puede menos mejor. Entonces tenemos que ver que esto pueda reducir el costo, y más de la nuez Wichita porque es la más cara
2. ED: Esto lo podemos transformar a octavos [refiriéndose al costo de la nuez]
3. IA: O a cuartos, porque un cuarto de 120
4. ED: 30
5. IA: 30 más 20 [refiriéndose a la mitad del costo del cacahuate] $50, pero traería más Wichita que cacahuate
6. ED: Tiene que ser lo mismo ¿no?
7. IA: Ajá, porque la mitad de 60 sería mucho
8. ED: Pero creo que no importa, lo que quiere es que tenga de los dos
9. IA: Igual
10. ED: Yo creo que ¿si esto lo dejamos así [refiriéndose al costo de los cacahuates] y le sacamos a esto sexta [refiriéndose al costo de la nuez]? [pausa para hacer el cálculo] 60, jeje y ya […]
11. IA: Exacto, pero sabes la cuestión es que mientras menos el costo, es menos la cantidad, entonces $20, o sea, compara un puñito de nuez con un kilo de cacahuate, o sea, para el costo está super bien, pero para que sea igualdad, ahí está como fallando

Fragmento 3

En el fragmento se puede observar que la primera aproximación a la respuesta es una repartición equitativa de las cantidades, pensada en este caso como medio kilo de cada producto, ya que los estudiantes, como se hizo evidente en el Fragmento 1, están trabajando sobre unas relaciones de cantidad simplificadas. No obstante, dicha respuesta es descartada luego de realizar una comprobación numérica en relación con los precios:

$$\frac{1}{2}(120) + \frac{1}{2}(40) = 80$$

Por esta razón deciden observar otras posibles formas de partir la unidad que sí se ajusten al precio ($60). Pese a que estas reparticiones no conservan la condición de la cantidad, es decir, al sumarlas no se obtiene la unidad. Finalmente optan por brindar como respuesta para su repartición 1 kilo de cacahuate con 1/6 de nuez, comprobando que se cumple la igualdad:

$$40(1) + 120\left(\frac{1}{6}\right) = 60$$

En el fragmento también se puede observar que los estudiantes están teniendo una discusión sobre si la repartición debe conservar o no la equidad en las cantidades. ED dice "creo que no importa, lo que se quiere es que tenga de las dos", mientras que IA manifiesta que la repartición debe ser equitativa, "para el costo está super bien, pero para que sea igualdad, ahí está como fallando". Esta discusión refleja que IA identifica una relación inexistente entre los datos que le impide aceptar la respuesta de ED como válida, aun cuando ambos reconocen que la condición del costo se cumple.

Es necesario notar que, en este momento del trabajo, los estudiantes estaban considerando principalmente la *dependencia* que tienen los valores desconocidos en relación con el costo. Ello les permite explorar diferentes valores *variando* las formas en las que dividían la unidad, pero no les permite mantener conciencia sobre la otra condición que extrajeron del problema la conservación del kilogramo como cantidad.

De las acciones de los estudiantes, para este momento del trabajo, puede ratificarse que la construcción de los *significados* de *variación* y *dependencia* está presente y que se origina de traducciones entre el sistema de signos no matemáticos del problema y el SMS aritmético que los estudiantes usan, así como de transformaciones dentro de ese mismo SMS al realizar modificaciones de los datos y operar matemáticamente con las cantidades para verificar los resultados.

Respecto de los procesos de producción de *sentido*, es posible notar que los estudiantes están trabajando sobre un sistema que, aunque no está escrito simbólicamente, corresponde a una simplificación del que emplearía un usuario competente para modelar el problema. Esta cadena de acciones, que los estudiantes empiezan a explorar, da sentido al *planteamiento del sistema* y al *método de ensayo y refinamiento* con el que intentan solucionarlo.

En el caso de la pareja de estudiantes de desempeño medio, la aproximación que dieron a la respuesta del problema fue una repartición equitativa de las cantidades, es decir 12.5 kilogramos de cada producto. Ellos hacen uso de la hoja de cálculo para introducir esta aproximación e ir llenando las columnas posteriores con la información proveniente de los datos que identificaron en el problema. No obstante, realizan las operaciones matemáticas en la hoja de papel y no en la hoja de cálculo. La tabla que construyeron se muestra en la Figura 5-1.

Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
12,5	12,5	120	40	1500	172

Figura 5-1 primera aproximación a la respuesta, pareja de estudiantes de desempeño medio[6]

La Figura 5-1 refleja que los estudiantes reconocen los valores fijos del problema, pese a que aún no relacionan los valores supuestos (12.5 y 12.5) para operar con ellos en las celdas posteriores. Los estudiantes identifican que el costo total de 25 kilos con un costo unitario de \$60 es de \$1500, al realizar una multiplicación directa. Sin embargo, en la columna final los estudiantes decidieron plantear una regla de tres que relaciona los valores 1500, 25 y 1. No obstante, la plantean o solucionan (no es posible verificarlo) cometiendo un error que produce 72 como respuesta.

[6] En adelante se usará la coma "," para separar los decimales, esto pues en el experimento se usó la hoja de cálculo de Google que por defecto usa este grafema para separar los valores decimales.

De las acciones de estos estudiantes se puede deducir que tienen cierto grado de certeza sobre las formas en las que se interrelacionan los datos y el objetivo a lograr, aunque, en este momento, aún no se manifiestan acciones que den cuenta de construcción de *significados* como *variación* y *dependencia*, ya que los valores que anticiparon como respuesta no los someten a un proceso completo de verificación en función de las relaciones extraídas del problema.

El hecho de que se realice una repartición que involucra el uso de una posición decimal puede asociarse con que el problema posibilita una traducción al SMS aritmético en el que el *significado* de *variable continua* se hace presente. Hecho que se ratificará en las acciones posteriores. No hay evidencia suficiente hasta ese momento para hablar sobre producción de *sentido* pues aún no se hacen presentes acciones que consoliden un método de solución, o que permitan posteriormente un planteamiento adecuado del sistema de ecuaciones. Sin embargo, las acciones de esta pareja de estudiantes se convierten en una síntesis de la información que el problema otorga, por lo que el trabajo que realizan posteriormente en la hoja de cálculo proviene de la lectura que dan a esa información y allí sí se evidencian procesos de producción de sentido.

5.1.3 La hoja de cálculo para cristalizar el método de ensayo y refinamiento

El cierre que ambas parejas de estudiantes dieron a la primera de las hojas de trabajo se caracterizó, principalmente, por el uso de la hoja de cálculo como una herramienta de verificación de las aproximaciones que iban dando a la respuesta. Así, la hoja de cálculo adquirió un papel protagónico en el trabajo de los estudiantes; al ser construida por ellos mismos, en un proceso en el que plasmaron en un lenguaje matemático las interacciones que gobernaban el problema y porque les brindaba una comprobación inmediata de sus resultados, lo que les ahorraba tiempo y cálculos.

Es importante resaltar que ninguno de los estudiantes que participaron en este estudio tenía suficiente experticia en el uso de la hoja de cálculo, ellos introducían manualmente la información en las celdas e identificaban una celda particular a partir de conocer la columna y la fila correspondiente. Sin embargo, no conocían la nomenclatura para introducir una fórmula que involucrara datos provenientes de otras celdas. Es por ello que, con todos los grupos de trabajo, el investigador tuvo que dedicar unos instantes para apoyar en la elaboración de la primera de las filas de las hojas de cálculo, indicando a los estudiantes la nomenclatura básica para introducir las fórmulas y cómo replicarlas en las celdas inferiores.

La hoja de cálculo que construyó la pareja de estudiantes con nivel de desempeño alto se muestra en la Figura 5-2.

Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
20	5	2400	200	2600	104
12	5	1440	200	1640	65,6
11	5	1320	200	1520	60,8
11	14	1320	560	1880	75,2
12	13	1440	520	1960	78,4
5	20	600	800	1400	56
6	19	720	760	1480	59,2
7	18	840	720	1560	62,4
6,5	18,5	780	740	1520	60,8
6	19	720	760	1480	59,2
6,5	18,5	780	740	1520	60,8

Figura 5-2 hoja de cálculo construida por la pareja de estudiantes de desempeño alto

En la Figura 5-2 se aprecia una primera fila que fue construida con el apoyo del investigador, en ella se ubican las cantidades 20 y 5 (para los kilos de cacahuate y de nuez respectivamente), las celdas siguientes contienen las operaciones que relacionan dichas cantidades con los datos del problema. Es decir, la celda “Costo de la nuez” contiene una fórmula que multiplica la cantidad de kilos de nuez por 120; la celda “Costo de los cacahuates” hace lo propio con los kilos de cacahuates y 40; la celda “Costo total” suma los valores de las celdas “Costo de la nuez” y “Costo de los cacahuates”; finalmente la celda “Costo por kilo” toma el valor de la celda “Costo total” y lo divide en 25.

Todas las fórmulas que la hoja de cálculo contenía fueron resultado de la interpretación que realizaron los estudiantes de los datos del problema. En ninguna de ellas el investigador intervino más que para introducirlas, ejemplificando el uso de la nomenclatura de la hoja de cálculo.

Las fórmulas que se usaron en la primera fila fueron replicadas en las siguientes por medio del “arrastre” que permite la hoja de cálculo, ello les permitía a los estudiantes una exploración rápida de los resultados sin necesidad de reescribir las fórmulas. Así, en las dos primeras filas los estudiantes exploraron con los valores 12 y 5, y, 11 y 5, esto para disminuir el costo final de 65,6 a 60,8, con lo que obtuvieron una primera respuesta que aproxima el valor esperado (60).

Las primeras exploraciones que realizó la pareja de estudiantes de desempeño alto no consideraban la condición del total de la mezcla, es decir, el que ambos productos totalizaran 25 kilos. La pareja de estudiantes se percató de su error al inicio de la segunda sesión, ya que el investigador inició mostrando los resultados obtenidos por el grupo en general e hizo énfasis en que, en algunos casos, no se estaba respetando la condición de que la cantidad fuera en total 25 kilos.

Las cuatro exploraciones posteriores de la pareja de estudiantes de desempeño alto sí respetan la condición de la cantidad e inician con una repartición casi equitativa de las cantidades (12 y 13), no obstante, los estudiantes reconocen que, con esta repartición, el costo es muy elevado y lo atribuyen a que en la repartición hay demasiada nuez. Por tal razón en la siguiente exploración reducen significativamente el valor para los kilos de nuez (de 12 a 5) y con ello reducen el costo a 56, al ser este valor un poco inferior al 60 que esperaban, deciden explorar tomando uno y dos kilos más de nuez, llegando de esta manera a "descubrir" que el valor de los kilos de nuez debe estar entre 6 y 7, y el de los cacahuates entre 19 y 18.

La siguiente exploración emplean una posición decimal, asumen para la cantidad de kilos de nuez un valor de 6,5 y 18,5 para el cacahuate, de esta manera logran 60.8 como resultado del costo por kilo. Posteriormente comparan este resultado con el más aproximado al que habían llegado con exploraciones enteras (6 y 19 que producen 59,2 como costo por kilo). Si bien, ambas aproximaciones se encontraban separadas 8 décimos del valor esperado, los estudiantes deciden presentar como respuesta final la repartición 6,5 y 18,5 quizá por mostrar en su parte entera el 60 que era el valor esperado.

La hoja de cálculo que construyó la pareja de estudiantes de nivel de desempeño medio se muestra en la Figura 5-3 en ella se observa una primera fila que los estudiantes usaron para introducir los datos del problema, esta fila no tiene fórmulas y constituye el primer acercamiento de los estudiantes a la hoja de cálculo, esto sin intervención del investigador.

Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
12,5	12,5	120	40	1500	72
12,5	12,5	1500	500	2000	80
10	15	1200	600	1800	72
24	1	2880	40	2920	116,8
23	2	2760	80	2840	113,6
14	11	1680	440	2120	84,8
13	12	1560	480	2040	81,6
12	13	1440	520	1960	78,4
15	10	1800	400	2200	88
11	14	1320	560	1880	75,2
2	23	240	920	1160	46,4
4	21	480	840	1320	52,8
8	17	960	680	1640	65,6
7	18	840	720	1560	62,4
6	19	720	760	1480	59,2
5,5	19,5	660	780	1440	57,6
6,5	18,5	780	740	1520	60,8
6,25	18,75	750	750	1500	60

Figura 5-3 hoja de cálculo construida por la pareja de estudiantes de desempeño medio

En la elaboración de la segunda fila de la hoja de cálculo, el investigador sí intervino, pero, de la misma manera que con los demás estudiantes, la manipulación que realizó sobre el software fue meramente explicativa, las relaciones y fórmulas que gobiernan los datos fueron expresados en su totalidad por los estudiantes. Al parecer, esta pareja de estudiantes tenía mayor facilidad en el manejo de la hoja de cálculo, ya que pudieron terminar de introducir las fórmulas sin la intervención del investigador y, además, determinar el valor de los valores para la segunda columna basados en los de la primera (introduciendo la fórmula B3=25-A3). De esta manera, la hoja de cálculo construida por los estudiantes de la pareja de nivel de desempeño medio era "más potente" que la de la pareja de desempeño alto en la medida que obligaba a que se cumpliera la condición de la cantidad, lo que permitía verificar la condición del costo sin errores. Las siguientes filas de la hoja de cálculo las usaron de manera análoga a los estudiantes de la otra pareja, es decir, se usó la función de arrastre de las fórmulas para, en este caso, solo introducir un valor (el de los kilos de nuez) y que la hoja de cálculo se encargara del resto.

La primera de las exploraciones después de introducir las fórmulas (es decir con 10 kilos de nuez) considera una cantidad menor de nuez, esto es consistente con la afirmación que los estudiantes habían hecho al inicio de la actividad (ver Fragmento 2). No obstante, al no obtener el resultado, aparentemente, recurren a una estrategia sistemática en la que van reduciendo paulatinamente el valor de la nuez iniciando con 24 kilos, luego bajando una unidad y probando con 23.

Se especula que, al obtener valores muy elevados para el costo por kilo (116,8 y 113,6), luego de explorar con 24 y 23 kilos de nuez, optaron por bajar la cantidad de nuez considerablemente (a 14, luego 13 y 12), Sin embargo, la exploración siguiente (con 15 kilos de nuez) pareciera romper con la regularidad, es posible que esta exploración se haya realizado con el objetivo de verificar si al aumentar la cantidad de nuez aumentaba también el costo total por kilo. Esta suposición cobra más fuerza si se observa que en las siguientes exploraciones los estudiantes bajan y suben la cantidad de nuez en función de si el resultado se encuentra por debajo o por encima del 60.

En las tres últimas exploraciones que los estudiantes realizan usan una y dos posiciones decimales para lograr, finalmente, dar con una respuesta exacta para el problema, 6,25 kilos de nuez y 18,75 de cacahuate.

El trabajo de ambas parejas de estudiantes revela cómo el uso competente de la hoja de cálculo permite cristalizar el método de ensayo y refinamiento, y construir *significados* sobre las relaciones de variación y dependencia presentes en el problema; al realizar transformaciones del sistema de signos no matemáticos del problema al SMS propio de la hoja de cálculo.

Respecto de la producción de *sentido*, si bien ya se hizo mención de que la hoja de cálculo cristaliza un método de acercamiento por exploraciones sucesivas a la respuesta del problema, también podemos hablar de producción de *sentido* en la medida en que se introducen nuevos signos, propios de la hoja de cálculo, que se usan para matematizar las relaciones del problema y dan una base sólida para que, posteriormente, se introduzca la sintaxis algebraica convencional.

5.2 La necesidad de un método algebraico provisto de sentido

La segunda parte de la secuencia de actividades fue diseñada con el objetivo de introducir el método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2.

Para ello, la hoja de trabajo número dos solicita a los estudiantes i) solucionar, con hoja de cálculo, dos problemas similares al de la primera hoja de trabajo, ii) seguir unas instrucciones con las que pudieran plantear, en lenguaje algebraico, el sistema de ecuaciones asociado al problema inicial y iii) seguir indicaciones para solucionar el sistema planteado haciendo uso del método de igualación.

Los resultados obtenidos del desarrollo de la hoja de trabajo número dos permiten concluir que:

1. Tanto las relaciones entre los datos que encontraron en el primer problema, como el MAES con el que lo habían solucionado, pueden ser transferidas a problemas con estructura similar. Esto es evidencia de procesos de producción de *sentido* en cuanto al planteamiento del sistema de ecuaciones (en la identificación de relaciones) y en cuanto a la consolidación del MAES para encontrar las soluciones a estos problemas.
2. El *sentido* que los estudiantes habían producido sobre las interacciones que gobiernan el problema, permite traducir las relaciones de la hoja de cálculo al planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales escrito en el lenguaje algebraico socialmente aceptado.
3. Al ser la notación algebraica de los sistemas de ecuaciones lineales una herramienta nueva para los estudiantes se generaron errores de transcripción que podían ser superados al regresar a la lectura del problema; es decir, cuando se recuperaba el contexto del problema como fuente de *significados*.
4. La manipulación del sistema no es trivial para los estudiantes, se hizo necesaria una intervención de enseñanza que permitiera usar el método sintáctico de igualación.

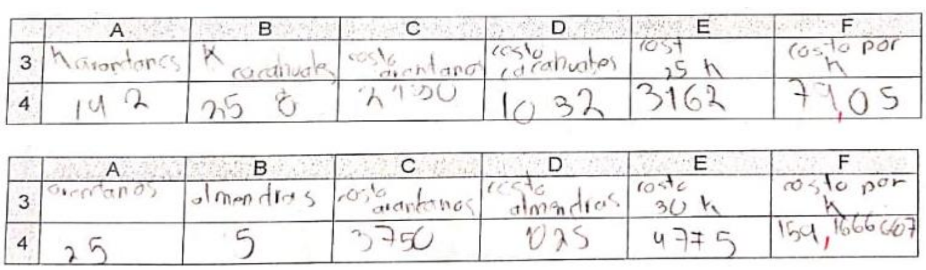
Para dar una explicación a las anteriores afirmaciones, el análisis de los resultados de esta segunda hoja de trabajo se divide en tres partes. Primero se describen y analizan las acciones que realizaron los estudiantes al abordar los nuevos problemas. Segundo, se presenta el análisis de lo ocurrido al momento en que se introduce la escritura algebraica para el planteamiento del sistema de ecuaciones que modela el problema original. Finalmente, se observa lo que ocurrió al momento de guiar a los estudiantes en la manipulación del sistema para solucionarlo.

5.2.1 La transferencia de estrategias de un problema a otros

La hoja de trabajo número 2 inicia con el planteamiento de dos problemas cuya estructura es idéntica a la del problema propuesto en la primera hoja de trabajo, es decir, nuevamente se plantea una situación en la que se solicita elaborar una mezcla entre dos productos con cantidades y costo específicos. Con ello, se esperaba que los estudiantes pudieran consolidar la estrategia de ensayo y refinamiento como un mecanismo para hallar una aproximación a la respuesta de este tipo de problemas.

Tanto la pareja de estudiantes de desempeño alto como la de desempeño medio no tardaron en identificar que ambos problemas poseían una estructura idéntica a la del que habían trabajado previamente. Esta relación que realizan entre el nuevo problema y el anterior da cuenta de producción de sentido pues identifican ahora estos problemas como una "familia" que pueden trabajarse de manera similar. Con ello, les fue fácil estructurar sus hojas de cálculo replicando las que ya tenían y cambiando las etiquetas de las columnas. La Figura 5-4 muestra las etiquetas que los estudiantes de desempeño alto usaron para los dos nuevos problemas.

Es importante señalar que, si bien la celda E3 de la primera tabla muestra como etiqueta "Costo 25 K", las fórmulas que usaron los estudiantes fueron ajustadas a un total de producto de 40 kilos, sin que el valor "25" (que proviene del primer problema) interfiriese en la estrategia que se estaba configurando en ese momento. Este error en la escritura no se presentó en las etiquetas del segundo problema, allí sí se escribió "Costo 30k" que hace referencia a la cantidad de producto que el problema solicitaba.



	A	B	C	D	E	F
3	k arandanos	K cacahuates	costo arandano	costo cacahuates	cost 25 k	costo por k
4	14 2	25 8	2130	10 32	3162	79,05

	A	B	C	D	E	F
3	arandanos	almendras	costo arandanos	costo almendras	costo 30 k	costo por k
4	25	5	3750	1025	4775	159,1666667

Figura 5-4 Etiquetas usadas en los problemas de la hoja de trabajo 2 (pareja de desempeño alto)

Si bien los registros que se muestran en la Figura 5-4 corresponden sólo a una exploración de cantidades (la más cercana a la solución de cada problema), hay que mencionar que esta pareja de estudiantes realizó varias exploraciones antes de obtener dichos resultados. Para ello, aplicaron las mismas fórmulas que usaron para solucionar el problema de la primera hoja de trabajo, pero sustituyendo los "valores fijos" (costos por kilo y kilos totales) por los que los nuevos problemas les proporcionaban.

Otro elemento que también recuperaron durante el proceso de ensayo y refinamiento fue la comparación entre los coeficientes (costos por kilo) para asumir el rol que éstos deberían jugar en función de aproximarse más a respuesta. El Fragmento 4 que ocurrió al inicio del trabajo ejemplifica esta afirmación.

1. ED: Ok, no cambia la nuez ¿no?
2. IA: Ajá, ponle kilos de arándanos y ya dejas el de los cacahuates
3. ED: Ok, ¿Cuánto cuestan los arándanos?
4. IA: Ese $150
5. ED: Ok, 150 [mientras lo usa en la hoja de cálculo]
6. IA: Ajá, y el cacahuate tiene un valor de $40, entonces podemos usar 15 y 25 ¿no? [refiriéndose a la primera exploración de datos]
7. ED: Ok, ¿cuánto debe costar cada kilo?
8. IA: 80, pero debemos de crear 40 kilos
9. ED: Veamos primero con 20 y 20 y de ahí le vamos modificando
10. IA: Siento que va a salir caro [pausa mientras hacen los cálculos]
11. IA: Por eso siempre hay que quitarle más al más caro, que son los arándanos, a los cacahuates le podemos restar, pero siempre a los más caro le debemos de quitar [esto lo dice al ver el resultado que obtuvieron con una repartición 20, 20]

Fragmento 4

Las líneas de la 1 a la 5 del Fragmento 4 muestran el diálogo de los estudiantes a medida que iban modificando la hoja de cálculo en función de los datos del nuevo problema; puede notarse cómo se preocupan exclusivamente por los datos numéricos y los nombres de los productos, ello, mientras manipulan la hoja de cálculo para iniciar el proceso de ensayo y refinamiento. En la línea 6 del Fragmento 4 se observa que IA sugiere iniciar con una repartición en la que la cantidad de arándanos (15) es menor que la de cacahuate (25), este hecho obedece a que recuerda que en el problema inicial se debía usar menos del producto más caro. No obstante, el primer ensayo que realizan es con una repartición por mitades del producto ("veamos primero con 20, 20"), pues prefieren iniciar así e ir modificando paulatinamente los valores sobre esa base ("de ahí le vamos modificando"). Las líneas 10 y

11 ratifican el hecho de que IA reconoce el rol que en este caso juega el valor del costo de los arándanos, el cual al ser mayor que el de los cacahuates implica que la respuesta al final tendrá menos de ese producto que del otro.

El proceso que siguieron los estudiantes en adelante fue el mismo que se usó en el primer problema, es decir, se introducían cantidades para las celdas iniciales, respetando que se cumplieran las condiciones de cantidad, y verificaban, con las fórmulas de la hoja de cálculo, si el costo por kilo era cercano al que cada problema solicitaba.

Aun cuando los estudiantes de la pareja de desempeño alto exploraron con varias cantidades e incluyeron números decimales en sus ensayos, no lograron obtener resultados exactos para ninguno de los problemas. Finalmente optaron por registrar como respuestas más aproximadas (ver Figura 5-4) 14.2 y 25.8 para el primer problema (con lo que obtenían 79,05 para el costo por kilo en lugar del 80 que se solicitaba) y 25 y 5 para el segundo problema (con lo que obtenían 159,16 para el costo por kilo en lugar del 160 que se solicitaba).

El trabajo de la pareja de estudiantes de nivel de desempeño medio fue similar al de la pareja de desempeño alto; sin embargo, es necesario mencionar que tuvieron algunas dificultades al inicio para introducir las fórmulas en la hoja de cálculo. Si bien, reconocieron las similitudes entre los problemas de la hoja de trabajo 2 y el que se les planteó en la primera hoja de trabajo, no parecían recordar las fórmulas con las que relacionar los datos; en cambio, en principio ubicaron los datos del problema en la hoja de cálculo sin uso de fórmulas, la Figura 5-5 muestra lo realizado por ellos.

Kilos de arándanos	Kilos de cacahuates	Costo de arándanos	Costo de cacahuate	Kilos totales	Costo
10	30	150	40	40	80

Figura 5-5 primeros valores ingresados por la pareja de desempeño medio. Hoja de trabajo 2

La Figura 5-5 muestra que la pareja de estudiantes de desempeño medio decidió, en principio, registrar en la hoja de cálculo los datos que el problema arándanos y cacahuate planteaba, pero no relacionó las celdas para, por ejemplo, calcular el costo de 10 kilos de arándanos por medio de una multiplicación. Es de notar también que las dos primeras celdas (Kilos de arándanos y Kilos de cacahuates) fueron diligenciadas incluyendo dos valores como primera anticipación a la respuesta, estos dos valores cumplen con la condición de cantidad del problema (40 kilos en total) y muestran un valor inferior para el producto más caro; por lo que es de suponerse que se reconoce el rol que el costo individual juega.

El correcto diligenciamiento de la hoja de cálculo, es decir, con las fórmulas que relacionan cantidades y costos, sólo se logró luego de la intervención del investigador, quien solicitó que se revisara el trabajo realizado previamente y se reescribieran las fórmulas para el nuevo problema, esto teniendo en cuenta que los datos que cambiaron. Esta intervención fue suficiente para que los estudiantes reelaboraran las hojas de cálculo e iniciaran con el proceso de ensayo y refinamiento.

El conjunto de exploraciones que la pareja de estudiantes de desempeño medio realizó finalizó cuando lograron $81.25 de costo por kilo (de 15 kilos de arándanos y 25 de cacahuate). El siguiente problema no lo realizaron por cuestiones de tiempo, decidieron avanzar a la siguiente parte del trabajo (el planteamiento del sistema) de la que se hablará en la siguiente sección. No obstante, sí realizaron registro en la hoja de trabajo para ambos problemas, pero sin recurrir al trabajo realizado en la hoja de cálculo.

La Figura 5-6 muestra las etiquetas que los estudiantes registraron para cada problema y los valores que les asociaron. Es posible comprobar que los valores para las columnas B, C, D, E y F fueron calculados (manualmente) siguiendo las restricciones que el problema impone, pero con algunos errores particularmente en el problema 2 (que fue el que no exploraron en la hoja de cálculo). En particular se tiene:

1. Los valores para las columnas C y D de la primera tabla corresponden a la multiplicación de las cantidades y el costo unitario de cada producto (20 por 150 y 20 por 40); mientras que en la segunda tabla corresponden a la multiplicación de las cantidades de un producto y el costo del otro, (16 por 205 cuando el arándano cuesta 150 y 24 por 150 cuando las almendras cuestan 205)
2. El valor para la columna E de ambas tablas muestra valores que no corresponden con los que el problema solicitaba ($80 para el primero y $160 para el segundo), se esperaba que allí se registrara la suma de los valores de las columnas C y D.
3. El valor de la columna F en ambas tablas corresponde a la división entre la suma de los valores en C, D y 40. Este cálculo es correcto sólo en la primera tabla, pues el

problema sí solicitaba que se formaran 40 kilos. En el segundo la división debería ser entre 30, sin embargo, desde el principio parece que los estudiantes confundieron las cantidades, pues se puede notar que en la segunda tabla las columnas A y B suman 40.

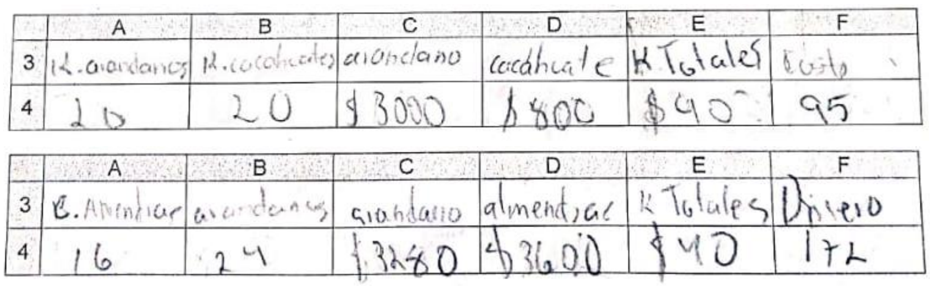


Figura 5-6 Etiquetas usadas en los problemas de la hoja de trabajo 2 (pareja de desempeño medio)

El contraste entre la hoja de cálculo y los registros en la hoja de trabajo para la pareja de estudiantes de desempeño medio permite suponer que, en este caso, los estudiantes no tienen la misma habilidad al manejar el software y el papel y lápiz. Es muy probable que la versatilidad y precisión aritmética del software les ofrezca un entorno de trabajo en el que se hayan sentido más confiados; por ello, al momento de retirarles dicha herramienta pudieron haber cometido errores de cálculo o de planteamiento de las operaciones que no realizaron en la hoja de cálculo.

Con los resultados que se acaban de mostrar, se hace evidente que la construcción de una hoja de cálculo, que se ajuste a los nuevos datos, no representó mayor dificultad para los estudiantes; al parecer, el SMS propio de la hoja de cálculo se consolidó aún más cuando los estudiantes pudieron traducir en él, las mismas relaciones que habían explorado en el primer problema, pero respetando las modificaciones en los datos que tenían los nuevos enunciados.

Los *significados* de *variación* y *dependencia* parecen consolidarse aún más al trabajar en nuevos problemas. Todos los grupos lograron introducir valores numéricos que cumplieran con una de las condiciones del sistema (la de cantidad) y explorar sistemáticamente distintas parejas de números para que se lograra cumplir la segunda condición. En términos teóricos, en el trabajo de los estudiantes hay construcción de *significados*, ya que se realizan traducciones entre el sistema de signos no matemáticos del enunciado del problema, al SMS aritmético de la hoja de cálculo (cuando las cantidades se ubicaron respetando una de las condiciones que el problema impone), y transformaciones en el mismo SMS cuando manipulan dichas cantidades para construir la hoja de cálculo y verificar la segunda condición del problema.

En cuanto a la producción de *sentido* es importante mencionar que el método de ensayo y refinamiento también se consolidó con la solución de los dos nuevos problemas, logrando realizar una *transferencia* del trabajo del primer problema. Además, es claro que el uso de la simbología de la hoja de cálculo (nueva para ellos) produce *sentido* en los estudiantes al permitirles reconocer estructuras similares para modelizar los problemas. Se verá en la siguiente sección cómo esta notación evoluciona a la algebraica usual.

Para finalizar este apartado vale la pena mencionar que, en este caso, las acciones de *construcción, simplificación y matematización* del problema, propias del ciclo de modelización, se realizaron de manera más fluida que en la primera hoja de trabajo. Ello constituye una evidencia de que, efectivamente, los estudiantes se encontraban inmersos en un conjunto de tareas en el que uno de los objetivos es la construcción de un *modelo* que pueda ser aplicado a situaciones con características similares.

5.2.2 Segundo momento: sobre el planteamiento del sistema.

Luego de que los estudiantes abordaran los problemas que se presentaban en la hoja de trabajo 2, se les plantearon una serie de instrucciones y preguntas cuyo objetivo era, primero, plantear en lenguaje algebraico el sistema que modela el problema inicial y, posteriormente, solucionarlo por el método de igualación. En esta sección se analizan los resultados obtenidos durante el planteamiento del sistema.

La instrucción inicial, respecto del planteamiento del sistema, consistía en que los estudiantes definieran nombres para las dos primeras columnas de sus hojas de cálculo. De esta manera, se asignó el nombre “X”[7] a todo el conjunto de valores en la columna etiquetada como “Kilos de nuez” y “Y” para el conjunto de valores en la columna etiquetada como

---

[7] En adelante se hará uso de mayúsculas para las literales *x* y *y*, esto dado que en la hoja de cálculo era necesaria esta tipografía para las etiquetas de los conjuntos y en lo sucesivo, los estudiantes hacen uso de mayúsculas y minúsculas indistintamente.

"Kilos de cacahuates". Este paso resultó fundamental para que, posteriormente, los estudiantes pudieran reescribir, en la hoja de trabajo, las fórmulas (relaciones) que habían usado en la construcción de la hoja de cálculo incorporando las literales tradicionalmente usadas en sistemas de ecuaciones lineales. La Figura 5-7 y la Figura 5-8 muestran la reescritura de las fórmulas que realizaron las parejas de estudiantes seleccionadas para este estudio.

Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
x	y = 25 - x	= 40 x x	= 40 y + 120 x	$\frac{40y \quad 120x}{25}$

Figura 5-7 Fórmulas con X e Y, pareja de estudiantes de desempeño alto

Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
x	y = 25 - x	= 40 x x	= 120 x y = 40 x + 120 y	$\frac{40x \; 100y}{25 \quad 60}$

Figura 5-8 Fórmulas con X y Y, pareja de estudiantes de desempeño medio

Es importante señalar el hecho de que en las tablas que muestran las figuras no aparece la columna inicial (Kilos de nuez), la intencionalidad que se tenía, para este hecho, obedecía a que las celdas de esa columna no tenían una fórmula que la hiciera depender de otras. No obstante, su ausencia generó un pequeño desfase en el llenado de la información por parte de los estudiantes. De esta manera, en la celda etiquetada como "Costo de la nuez" aparece la fórmula con la que los estudiantes encontrarían la cantidad de cacahuates "25-X". Luego, la celda etiquetada como "Costo de los cacahuates" en ambos casos sí relaciona correctamente la variable X y el costo por kilo de cacahuate (40). En la celda etiquetada como "Costo total" ambas parejas registraron la suma de los costos de los dos productos, es decir 40X+120Y. No obstante, la pareja de desempeño medio registró además en ese espacio, la fórmula que no se había escrito hasta ese momento, la del costo de la nuez (120X). Finalmente, para la celda etiquetada como "Costo por kilo" ambas parejas de estudiantes anotaron la división entre el costo total y 25. Sin embargo, aparecen un par de errores de escritura, ya que en ninguno de los dos casos se registra el símbolo "+" y en el caso de los estudiantes de desempeño medio el valor "120" fue reemplazado por un "100".

Se resalta el hecho de que la pareja de estudiantes de desempeño medio registró, en la última celda, también el valor "60", que corresponde al que buscaban lograr mediante de las exploraciones sucesivas de valores. Este hecho resulta valioso ya que logran establecer, aunque no de manera explícita, la relación de igualdad entre la expresión $\frac{40X+120Y}{25}$ y el "60", completando de esta manera una de las ecuaciones del sistema. Además, ambas parejas de estudiantes también registraron la relación $Y = 25 - X$ que sería la otra ecuación, por lo que el sistema de ecuaciones lineales, a este punto, ya se encontraba escrito con la simbología algebraica usual.

Al momento que, se les solicitó en la hoja de trabajo a los estudiantes reflexionar sobre las ecuaciones $Y = 25 - X$ y $120Y + 40X = 1500$ se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura 5-9 y la Figura 5-10.

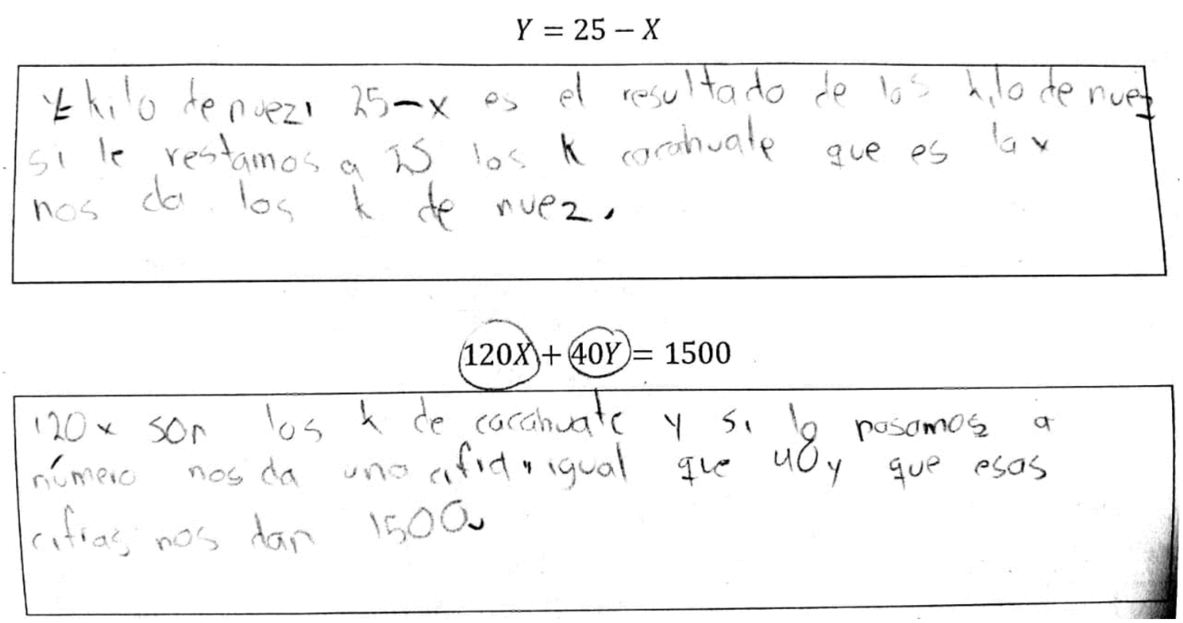


Figura 5-9 explicación de las ecuaciones del sistema, pareja de estudiantes de desempeño alto

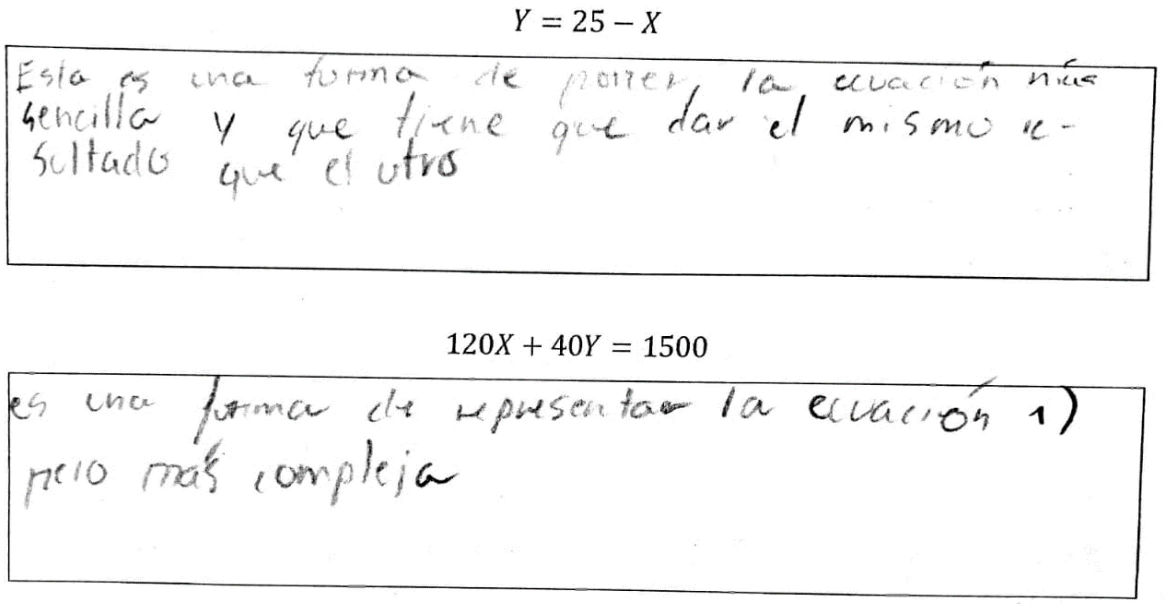


Figura 5-10 explicación de las ecuaciones del sistema, pareja de estudiantes de desempeño medio

En el caso de la pareja de desempeño alto, la Figura 5-9 muestra que para la ecuación $Y = 25 - X$ los estudiantes indican que corresponde a una fórmula que les permite encontrar la cantidad de un producto (los kilos de nuez) partiendo del otro (los kilos de cacahuate). Es decir que sí relacionaron la ecuación con una condición que los valores deben cumplir en relación con las cantidades. En cambio, para el caso de la ecuación $120Y + 40X = 1500$, la descripción que realizan se refiere a las operaciones que la componen, pero sin hacer alusión a lo que tales operaciones y cantidades, con las que se realizan, representan en el contexto del problema.

En el caso de la pareja de estudiantes de desempeño medio, las explicaciones de ambas ecuaciones presentan alusiones a lo "fáciles" o "complejas" que son, ello en términos de la extensión de éstas. Sin embargo, también mencionan que las ecuaciones deben dar el mismo resultado, con esta afirmación, podemos suponer que los estudiantes estaban reconociendo a las dos ecuaciones como partes de un sistema que requiere que ambas condiciones se cumplan de manera simultánea. Es decir que en los dos casos los valores para las literales "X" y "Y" deben ser los mismos.

Es importante señalar que las respuestas de ambas parejas de estudiantes reflejan una inclinación a los referentes intermedios que les ofrece la hoja de cálculo, la cual no es netamente simbólica, ni tampoco netamente contextual. De esta manera, se observa que los estudiantes mencionan los resultados que se obtienen después de asignar valores específicos a las incógnitas "X" y "Y", tratando estas literales aún como números concretos que deben someterse a procesos de verificación. Esta idea cobrará particular relevancia al analizar los resultados de la tercera hoja de trabajo.

Tanto los resultados de la pareja de estudiantes de desempeño alto como los de desempeño medio reflejan una asociación entre el enunciado del problema y la escritura algebraica con la que se estaba modelando. Por una parte, la pareja de desempeño alto logró reconocer que una de las ecuaciones permitía calcular una cantidad en función de la otra gracias a la condición para las cantidades que el problema impone; por otra, la pareja de desempeño medio reconoció que las ecuaciones no son entes aislados, sino que componen un todo con el que el problema se modela. De esta manera, ambas parejas de estudiantes estaban dando *significado* a la idea de "sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas" como una herramienta algebraica que *traduce* las relaciones del problema y las condiciones que se deben cumplir, en un SMS que puede ser manipulado con el objetivo de hallar los valores para las incógnitas.

Este proceso de elaboración del sistema también introduce simbología nueva para los estudiantes, con dos ecuaciones y dos incógnitas que no pueden resolverse por separado. Es decir, en un *segundo nivel de representación de la incógnita*. Con esta nueva simbología y el proceso llevado a cabo para introducirla se puede afirmar que el planteamiento del sistema tiene *sentido* para los estudiantes.

En la siguiente sección se describen y analizan las acciones que los estudiantes realizaron al ser introducido el método de igualación para la manipulación de las ecuaciones del sistema que modela el problema.

5.2.3 Tercer momento: sobre la solución del sistema.

Las instrucciones finales de la segunda hoja de trabajo pretendían orientar a los estudiantes en la manipulación del sistema con el objetivo de hallar su solución exacta, ello por medio del método de igualación. Sin embargo, reconociendo los resultados del estudio de Filloy, Rojano y Solares (2010), gran parte del trabajo tuvo que ser orientado por el investigador ya que los estudiantes tenían un dominio muy básico en la solución de ecuaciones lineales con una incógnita.

El conjunto de ecuaciones a las que se había llegado hasta ese momento y que constituían el sistema era el siguiente:

$$\begin{aligned} &1) \quad Y = 25 - X \\ &2) \quad 120X + 40Y = 1500 \end{aligned}$$

Dado que en la ecuación 1 la incógnita "Y" se encontraba explícita en términos de "X", la instrucción que se dio a los estudiantes fue despejar de ambas ecuaciones la variable "Y". La Figura 5-11 y Figura 5-12 muestran los resultados de ambas parejas de estudiantes.

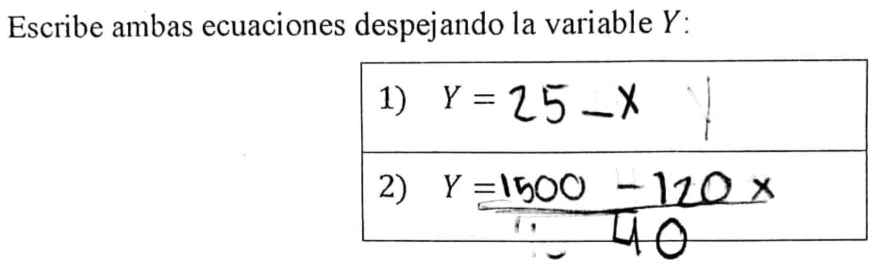


Figura 5-11 despeje de la incógnita Y, pareja de desempeño alto

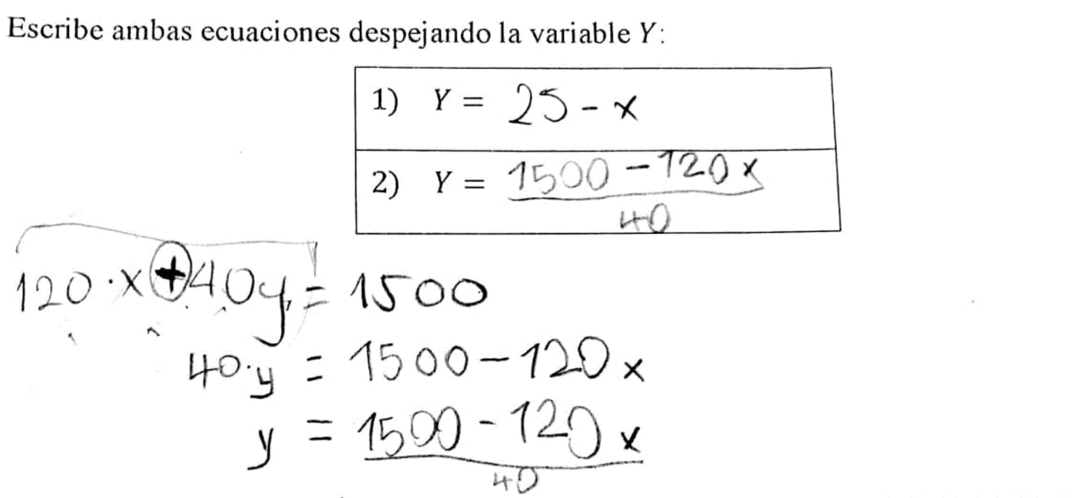
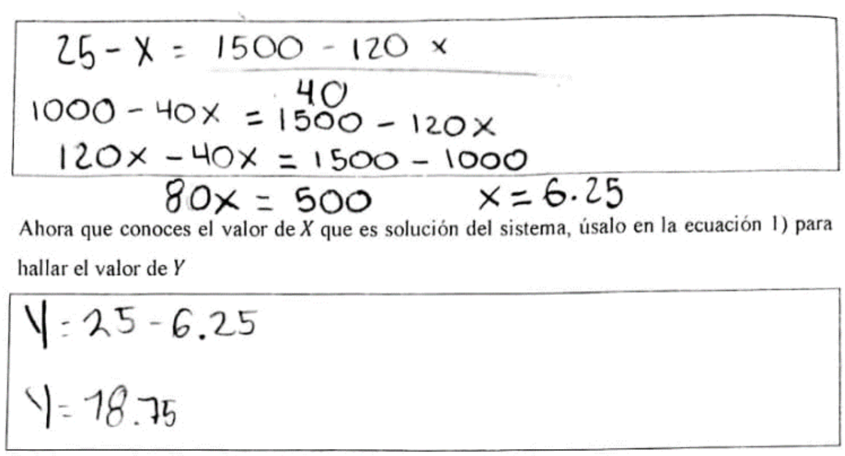


Figura 5-12 despeje de la incógnita Y, pareja de desempeño medio

Si bien, la pareja de estudiantes de desempeño alto no registró el proceso mediante el cual despejaron la incógnita en la segunda ecuación; ambas parejas realizaron de manera acertada el despeje logrando reescribir el sistema de manera conveniente para aplicar el método de igualación. Es importante resaltar que este primer momento de manipulación del sistema no generó mayores dificultades en la mayoría de los estudiantes del grupo, debido a que todos eran suficientemente competentes en la transposición de términos para solucionar ecuaciones lineales. Existe entonces un proceso de *transferencia* de las acciones que realizaban con ecuaciones de una incógnita al trabajo en este nuevo SMS, se supone entonces que las acciones manipulativas al sistema de ecuaciones tienen *sentido* para ellos. Otro asunto que vale la pena mencionar es que la totalidad del grupo reconoció que la ecuación 1 ya presentaba a la incógnita "Y" despejada, por lo que no hubo dificultades en cuanto a su registro.

Para la aplicación del método de igualación fue necesaria la intervención general del investigador, una vez que los estudiantes recibieron la instrucción de igualar las ecuaciones se les orientó en el proceso de despeje de la ecuación resultante. Los registros del procedimiento y la finalización del proceso (hallar el valor para la segunda incógnita) se muestran en la Figura 5-13 y la Figura 5-14.


$25 - X = \frac{1500 - 120x}{40}$

$1000 - 40x = 1500 - 120x$

$120x - 40x = 1500 - 1000$

$80x = 500 \qquad x = 6.25$

Ahora que conoces el valor de *X* que es solución del sistema, úsalo en la ecuación 1) para hallar el valor de *Y*

$Y = 25 - 6.25$

$Y = 18.75$

Figura 5-13 solución del sistema, pareja de estudiantes de desempeño alto

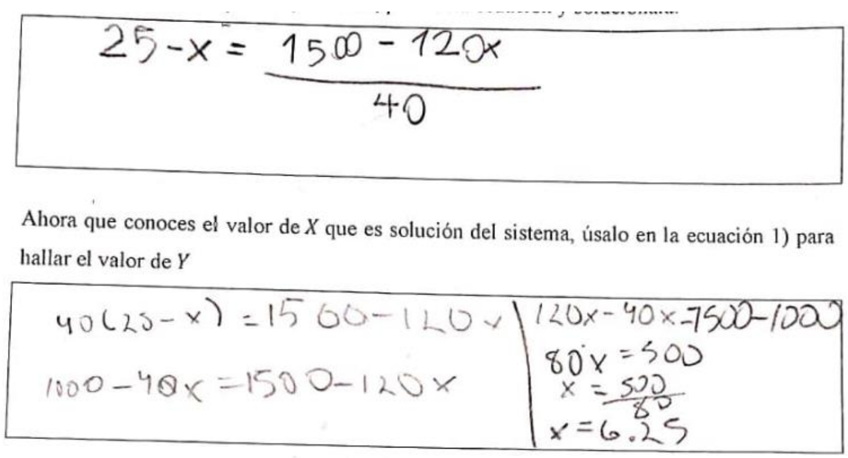


Figura 5-14 solución del sistema, pareja de estudiantes de desempeño medio

Si bien la solución del sistema fue orientada por el investigador realizando preguntas al grupo en general, los registros de estas dos parejas de estudiantes no son equivalentes. La pareja de estudiantes de desempeño alto, al parecer, no necesitaban hacer explícitos algunos pasos del procedimiento, por lo que sólo requirieron de 4 líneas para hallar el valor de la incógnita “X”. En cambio, la pareja de estudiantes de desempeño medio tuvo que plantear más pasos intermedios para hacer explícitas las operaciones antes de su ejecución, usaron 6 líneas para encontrar el valor de “X”.

Para la segunda parte de la solución, es decir para hallar el valor de la incógnita “Y”, ambas parejas de estudiantes requirieron únicamente de dos líneas, en la primera plantearon la igualdad $Y = 25 - 6.25$ y en la segunda solucionaron la operación. Si bien, la sugerencia del uso de la ecuación 1 estaba dada de antemano en la hoja de trabajo, es importante reconocer que la *transformación* que los estudiantes realizan a esta ecuación es evidencia de construcción de *significado* sobre la idea de *sustitución algebraica*, herramienta que es particularmente necesaria en la mayor parte de trabajo matemático manipulativo.

Es importante mencionar también que la pareja de estudiantes de desempeño medio no diligenció correctamente los recuadros asignados para la solución del sistema, ya que en el primero de ellos debían plantear y solucionar la ecuación resultante al igualar las dos ecuaciones del sistema, pero en ese recuadro únicamente realizaron el planteamiento; lo que implicó que en el segundo recuadro solucionaran la ecuación cuando debían solucionar el sistema para “Y”. Así el recuadro final lo tuvieron que dividir en dos, una parte para solucionar el sistema en “Y” y otra para escribir la respuesta al problema (ver Figura 5-16).

Finalmente, vale la pena reflexionar sobre las respuestas que ambas parejas dieron al problema, la Figura 5-15 y Figura 5-16 muestran lo que los estudiantes escribieron en el cierre de la hoja de trabajo 2.

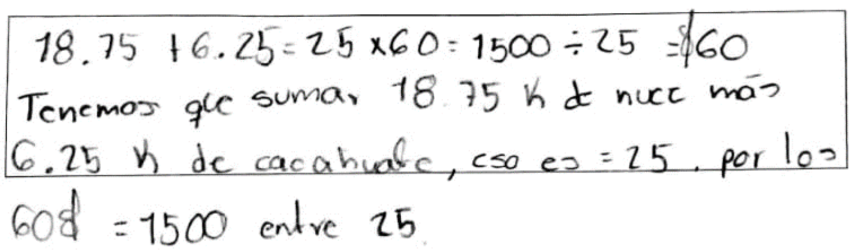


Figura 5-15 Respuesta al problema, pareja de desempeño alto

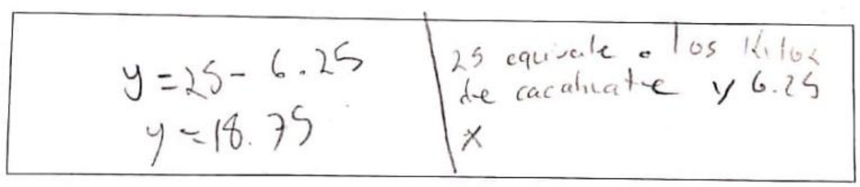


Figura 5-16 Respuesta al problema, pareja de desempeño medio

Puede observarse cómo la respuesta dada por la pareja de estudiantes de desempeño alto se constituye por una "narración" de cómo, numéricamente, los resultados 18.75 y 6.25 se ajustan a las condiciones del problema. Para ello verifican en principio que la suma de estos dos valores sea 25, luego este valor lo multiplican por 60 y dividen por 25 en una aparente comprobación numérica para el costo por kilo individual. Si bien, este tipo de respuesta no es la que se esperaba, es importante señalar que los estudiantes reconocieron que los valores "18.75" y "6.25" corresponden a los kilogramos de nuez y cacahuate respectivamente. No obstante, esto es un error ya que los valores estaban intercambiados.

En el caso de la pareja de estudiantes de desempeño medio parece que también existió una confusión, incluso mayor que la de la otra pareja, ya que afirman que son 25 los kilos de cacahuate, aparentemente sin reconocer que los valores para "X" y "Y" juntos constituyen el valor "25". Además, también mencionan que 6.25 es el valor para "X" (lo cual es correcto) pero no relacionan esa cantidad con un dato para el problema.

Con estos resultados es prematuro afirmar si los estudiantes dotaron o no de sentido al proceso de solución del sistema, ni particularizar cómo realizaron acciones de *interpretación de resultados matemáticos* según el ciclo de Blum y Leiß (2007). Pero, sí es posible suponer que la sustitución algebraica es un *significado* que se fue construyendo, así como que se le fue otorgando *sentido* al método de igualación para solucionar el sistema.

En la siguiente sección se analizan las acciones en la hoja de trabajo 3, en ella, se les solicitó a los estudiantes que aplicaran el método de igualación para solucionar una serie de problemas nuevos (con la misma estructura) pero esta vez sin intervención del investigador.

5.3 Hoja de trabajo 3: Interpretar resultados

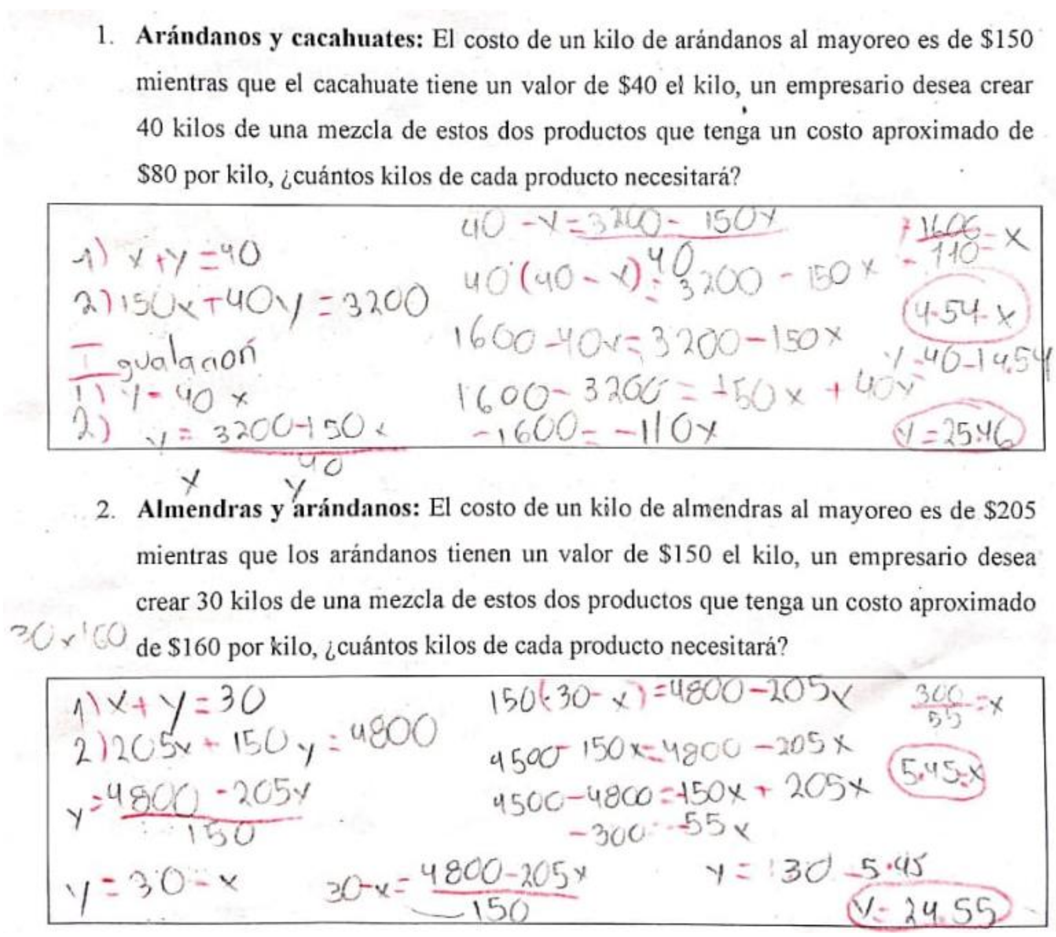
La tercera hoja de trabajo presentaba a los estudiantes 6 problemas con estructuras idénticas a la del problema original, de ellos, los dos primeros eran exactamente los mismos que se habían abordado con hoja de cálculo en la segunda hoja de trabajo. Los otros cuatro se caracterizaban porque planteaban situaciones atípicas en los datos de costo, lo que generaba que los estudiantes se vieran en la necesidad de dar explicaciones a sus resultados partiendo de la relectura del contexto de los enunciados.

Hasta el desarrollo de la segunda hoja de trabajo, las acciones de las parejas de estudiantes de desempeño alto y desempeño medio habían guardado similitudes que permitían presentar su análisis de manera simultánea. No obstante, para la tercera hoja de trabajo, la pareja de estudiantes de desempeño alto mostró un dominio superior en la manipulación de las expresiones algebraicas, en comparación con la pareja de estudiantes de desempeño medio. Por ello es pertinente realizar el análisis de los resultados en la tercera hoja de trabajo por separado.

Es importante resaltar en este momento, que el análisis que se muestra a continuación no sólo es distinto al de las anteriores hojas de trabajo, por la diferencia en las actuaciones de las dos parejas de estudiantes, sino por los intereses particulares de este estudio. Mientras que el análisis que se presentó, para las acciones de los estudiantes en el desarrollo de las dos primeras hojas de trabajo, muestra el rol de la modelización matemática en el proceso de adquisición de la sintaxis algebraica, con la que plantear y solucionar sistemas de ecuaciones lineales, lo que contribuye a dar una respuesta fundamentada a la primera pregunta de investigación; las acciones de los estudiantes en el desarrollo de la tercera hoja de trabajo reflejan el uso que, en el proceso de modelización matemática, dan a la sintaxis algebraica una vez que ya la conocen. De esta manera, la tercera sección del análisis contribuye a dar respuesta a la segunda pregunta de investigación.

5.3.1 Matematización y trabajo matemático, el caso de la pareja de desempeño alto.

El trabajo desarrollado por la pareja de desempeño alto reflejó un dominio elevado en el planteamiento y la solución, por el método de igualación, de los sistemas de ecuaciones lineales que modelaban los problemas planteados en la hoja de trabajo 3. La Figura 5-17 muestra el procedimiento llevado a cabo por esta pareja en los dos primeros problemas de la hoja.


1. **Arándanos y cacahuates:** El costo de un kilo de arándanos al mayoreo es de $150 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 40 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $80 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

1) x + y = 40
2) 150x + 40y = 3200
Igualación
1) y = 40 − x
2) y = (3200 − 150x)/40
40(40 − x) = 3200 − 150x
1600 − 40x = 3200 − 150x
1600 − 3200 = −150x + 40x
−1600 = −110x
1600/110 = x
4.54 = x
y = 40 − 14.54
y = 25.46

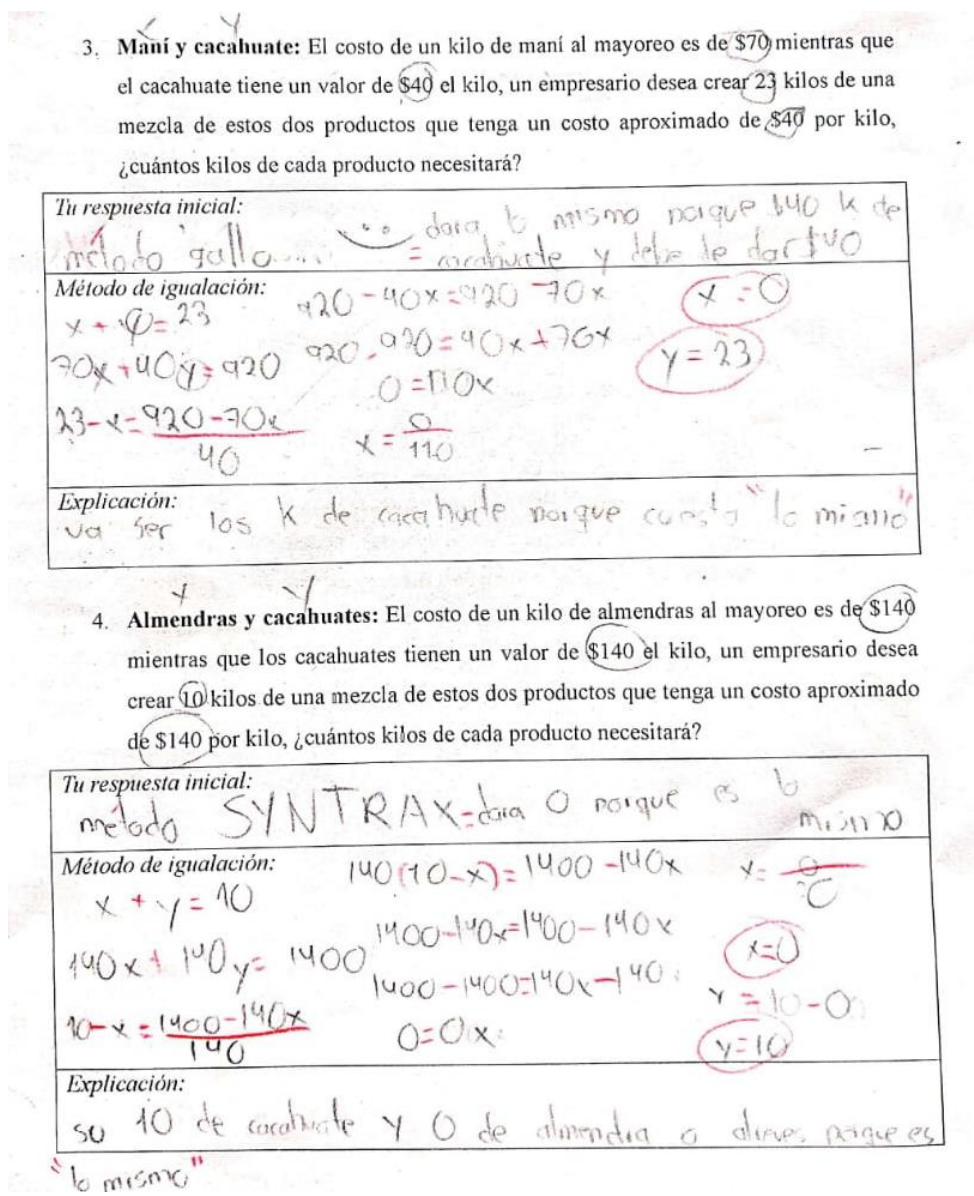
2. **Almendras y arándanos:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $205 mientras que los arándanos tienen un valor de $150 el kilo, un empresario desea crear 30 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $160 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

1) x + y = 30
2) 205x + 150y = 4800
y = (4800 − 205x)/150
y = 30 − x
30 − x = (4800 − 205x)/150
150(30 − x) = 4800 − 205x
4500 − 150x = 4800 − 205x
4500 − 4800 = −150x + 205x
−300 = −55x
300/55 = x
5.45 = x
y = 30 − 5.45
y = 24.55

Figura 5-17 solución a los primeros problemas de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño alto

En la Figura 5-17 se observa que los estudiantes plantearon, en ambos casos, un sistema de ecuaciones lineales que se obtiene de las condiciones para cantidad (ecuación 1) y para costo (ecuación 2). Estas ecuaciones son manipuladas despejando la incógnita “Y” en ambos casos y empleando a continuación el método de igualación. Además, el consecutivo de pasos que siguen para obtener el valor para la incógnita "X", es una réplica del procedimiento que se había socializado con todo el grupo para el problema inicial. Por esta razón es posible concluir que los estudiantes realizaron un proceso de transferencia del método de manera satisfactoria con lo que le dotaron de *sentido* al método como herramienta de solución para este tipo de problemas. Sin embargo, es posible suponer que el *sentido* de uso que dieron al método no es completo en cuanto a que, como se verá con los siguientes problemas, no se usa como herramienta inmediata para la solución, si no por el contrario como herramienta de validación de respuestas previamente aceptadas.

Con los problemas que continuaban en la hoja de trabajo los estudiantes no tuvieron mayor dificultad, pero resulta interesante analizar las respuestas que daban antes y después de plantear el sistema y aplicar el método. La Figura 5-18 muestra los resultados en los problemas 3 y 4 de la hoja de trabajo.



3. **Maní y cacahuate:** El costo de un kilo de maní al mayoreo es de $70 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 23 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $40 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial: método gallo.... dara lo mismo porque $40 k de cacahuate y debe de dar $40
Método de igualación: $x + y = 23$; $70x + 40y = 920$; $23 - x = \frac{920 - 70x}{40}$; $920 - 40x = 920 - 70x$; $920 - 920 = 40x + 70x$; $0 = 110x$; $x = \frac{0}{110}$; $x = 0$; $y = 23$
Explicación: va ser los k de cacahuate porque cuesta "lo mismo"

4. **Almendras y cacahuates:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $140 el kilo, un empresario desea crear 10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $140 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial: método SYNTRAX = dara 0 porque es lo mismo
Método de igualación: $x + y = 10$; $140x + 140y = 1400$; $10 - x = \frac{1400 - 140x}{140}$; $140(10 - x) = 1400 - 140x$; $1400 - 140x = 1400 - 140x$; $1400 - 1400 = 140x - 140x$; $0 = 0x$; $x = \frac{0}{0}$; $x = 0$; $y = 10 - 0$; $y = 10$
Explicación: son 10 de cacahuate y 0 de almendra o alreves porque es "lo mismo"

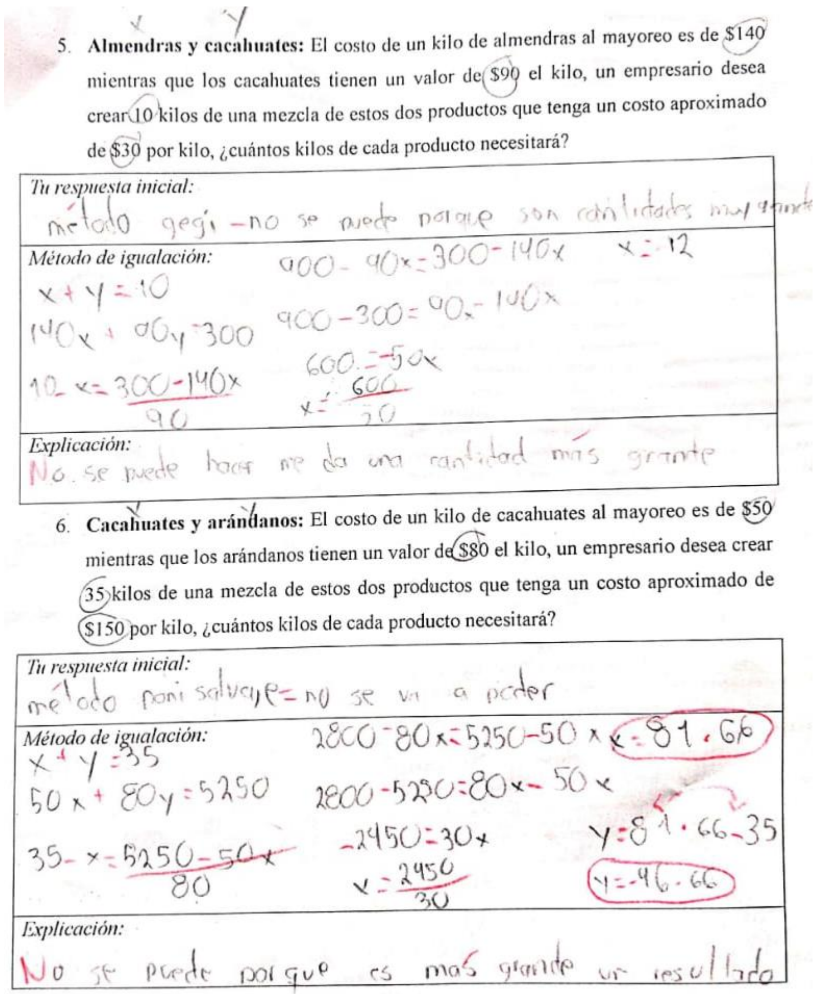
Figura 5-18 solución a los problemas 3 y 4 de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño alto

Para el problema 3, la indicación de los estudiantes de "dará lo mismo porque $40k de cacahuate y debe dar $40" es una evidencia de que ellos reconocen la igualdad entre el costo del kilo de cacahuate y el costo que el problema solicita, lo que implica que el resultado sea "lo mismo" haciendo referencia a que la respuesta consiste en el uso de los 23 kilos de cacahuate.

Luego que los estudiantes aplicaran el método de igualación (con un pequeño error en los signos al transponer términos) brindan como explicación: "va a ser los k de cacahuate porque cuesta lo mismo". De esta afirmación y del resultado que obtuvieron al aplicar el método se deduce que los estudiantes usan el procedimiento algebraico como forma de ratificar la respuesta inicial: que la mezcla solo tendrá de uno de los productos, en este caso del cacahuate.

Para el problema 4 la respuesta inicial de los estudiantes fue: “dará 0”, quizá haciendo referencia a que no habrá presencia de uno de los productos. Sin embargo, cuando aplican el método y obtienen los resultados numéricos, los estudiantes se percataron de, al menos, dos respuestas para el problema “10 de cacahuate y 0 de almendra, o al revés” lo que claramente brinda una oportunidad de enseñanza sobre sistemas dependientes, los cuales tienen infinitas soluciones posibles.

Es importante señalar que, al aplicar el método en el problema 4, los estudiantes llegan a la expresión $X = \frac{0}{0}$ la cual, matemáticamente, corresponde a una indeterminación, con lo que el valor para la incógnita “X” puede ser cualquiera, generando de esta manera la infinidad de soluciones propia de los sistemas dependientes. No obstante, los estudiantes asumen como resultado para esa fracción el “0”, de manera tal que obtienen una respuesta única para el sistema. Al momento en que los estudiantes indican que la respuesta puede ser “10 de cacahuate y 0 de almendra, o al revés” es posible suponer que a lo que hacían referencia es al método, el cual, si se realizaba despejando “X” al inicio, en lugar de “Y” (y asumiendo nuevamente que $\frac{0}{0} = 0$) daría una repartición de 10 kilos de almendra y 0 de cacahuate.



5. **Almendras y cacahuates:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $90 el kilo, un empresario desea crear 10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $30 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial:
método gegi – no se puede porque son cantidades muy grande

Método de igualación:
$x + y = 10$
$140x + 90y = 300$
$10 - x = \frac{300 - 140x}{90}$
$900 - 90x = 300 - 140x$ $x = 12$
$900 - 300 = 90x - 140x$
$600 = -50x$
$x = \frac{600}{50}$

Explicación:
No se puede hacer me da una cantidad más grante

6. **Cacahuates y arándanos:** El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $50 mientras que los arándanos tienen un valor de $80 el kilo, un empresario desea crear 35 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $150 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial:
método poni salvaye = no se va a poder

Método de igualación:
$x + y = 35$
$50x + 80y = 5250$
$35 - x = \frac{5250 - 50x}{80}$
$2800 - 80x = 5250 - 50x$ $x = 81.66$
$2800 - 5250 = 80x - 50x$
$-2450 = 30x$
$x = \frac{2450}{30}$
$y = 81.66 - 35$
$y = -46.66$

Explicación:
No se puede porque es más grande un resultado

Figura 5-19 solución a los problemas 5 y 6 de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño alto

Resultados similares se obtuvieron cuando los estudiantes desarrollaron los problemas 5 y 6, la

Figura 5-19 Figura 5-19 muestra las producciones de los estudiantes en estos dos problemas. En ambos casos el problema planteaba costos para la mezcla que no estaban dentro del rango posible con los costos de los productos a mezclar. Por una parte, se solicitaba un costo menor que el más económico de los productos (problema 5) y por otra un costo mayor que el más caro de los productos (problema 6). Estas distribuciones para los costos implicaban que, en el resultado, una de las incógnitas fuera mayor al total que se solicitaba para la mezcla y la otra un valor negativo.

Al revisar las respuestas que dan los estudiantes se hace evidente que reconocen que el problema tiene solución, no obstante, luego de que aplican el método de igualación sobre los sistemas correspondientes dan como argumento que no pueden obtener una respuesta para el problema, pues obtienen cantidades más grandes a las que se piden. Este resultado es curioso ya que es sobre el número positivo (que es mayor que la cantidad solicitada) sobre el que basan el argumento de su respuesta, sin hacer referencia al resultado para la otra incógnita, que en ambos casos resultó ser un número negativo.

Otro asunto que vale la pena mencionar es que, en ambos procedimientos, existe un error en la transposición de términos al despejar finalmente la incógnita "X", aparentemente, es un asunto recurrente (sucedió en 3 de los 6 problemas que solucionaron) que si bien, no afecta en estos casos el razonamiento de los estudiantes, no deja de ser un error que debería considerarse en situaciones de enseñanza convencional.

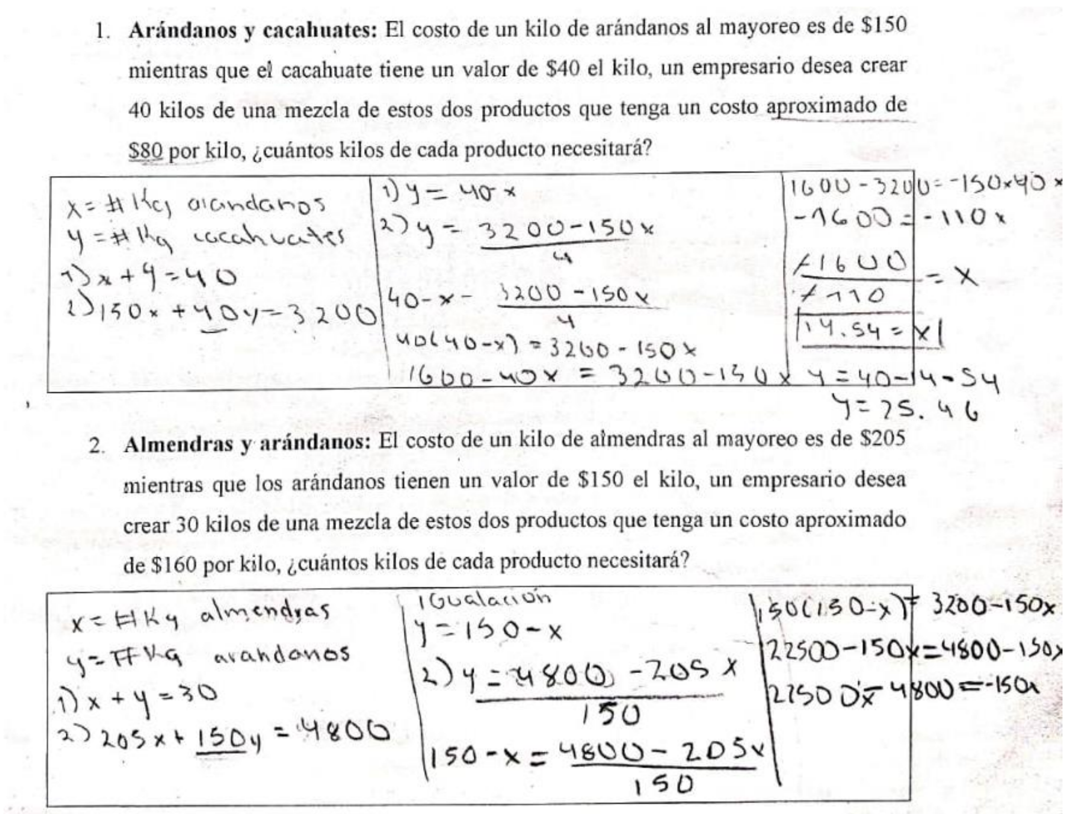
Finalmente, es importante aclarar que los estudiantes decidieron asignar nombres a cada uno de los problemas del 3 al 6, las etiquetas "método gallo", "método SYNTRAX", "método gegi" y "método pony salvaje" no son más que nombres que los estudiantes decidieron poner a cada problema pero que no tienen repercusión alguna en su desarrollo.

Los resultados de esta pareja de estudiantes reflejan una producción de *sentido,* sobre el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de igualación, al menos para problemas con estructura similar a los planteados. Sin embargo, gracias a la versatilidad que demostraron en el desarrollo de los seis problemas, es posible suponer también que podrían transferir estos conocimientos a problemas con otra estructura, pero en los que puedan identificarse dos cantidades desconocidas y dos condiciones que deban cumplir de manera simultánea.

A continuación, se presentan los resultados de la pareja de estudiantes de desempeño medio, para la cual, el planteamiento del sistema y uso del método de igualación no pudo realizarse de manera satisfactoria. Posibles razones para estas dificultades se presentan en base a la evidencia y el sustento teórico.

5.3.2 La interpretación de resultados, el caso de la pareja de desempeño medio.

Como ya se mencionó, la pareja de estudiantes de desempeño medio no adquirió un desempeño suficientemente alto en el planteamiento y solución de los sistemas de ecuaciones lineales que modelaban los problemas. Para los dos primeros problemas de la hoja, los estudiantes lograron plantear los sistemas de manera satisfactoria y realizaron transformaciones de orden sintáctico con el objetivo de darles solución (ver Figura 5-20), no obstante, sólo lograron llegar a la solución en el primero de ellos.



1. **Arándanos y cacahuates:** El costo de un kilo de arándanos al mayoreo es de $150 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 40 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $80 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

x = # Kg arandanos
y = # Kg cacahuates
1) $x + y = 40$
2) $150x + 40y = 3200$

1) $y = 40 - x$
2) $y = \frac{3200 - 150x}{4}$
$40 - x = \frac{3200 - 150x}{4}$
$40(40 - x) = 3200 - 150x$
$1600 - 40x = 3200 - 150x$

$1600 - 3200 = -150x + 40x$
$-1600 = -110x$
$\frac{-1600}{-110} = x$
$14.54 = x$
$y = 40 - 14.54$
$y = 25.46$

2. **Almendras y arándanos:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $205 mientras que los arándanos tienen un valor de $150 el kilo, un empresario desea crear 30 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $160 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

x = # Kg almendras
y = # Kg arandonos
1) $x + y = 30$
2) $205x + 150y = 4800$

Igualación
$y = 150 - x$
2) $y = \frac{4800 - 205x}{150}$
$150 - x = \frac{4800 - 205x}{150}$

$150(150 - x) = 3200 - 150x$
$22500 - 150x = 4800 - 150x$
$22500x - 4800 = -150x$

Figura 5-20 solución a los dos primeros problemas de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño medio

Para el primer problema que se muestra en la Figura 5-20, los estudiantes plantearon el sistema de ecuaciones expresando, de manera adecuada, las condiciones para costo y para cantidad que el enunciado establecía. Luego, aplicaron el método de igualación y lograron encontrar la solución correcta para el sistema.

En el segundo problema, en cambio, los estudiantes plantearon el sistema asociado de manera satisfactoria, pero tuvieron problemas a la hora de solucionarlo, realizaron el procedimiento de igualación de manera correcta (despejando la incógnita "Y" e igualando) pero no lograron ubicar en un mismo lado de la igualdad los dos términos con "X" para operarlos y poder hallar el valor de la incógnita; además, durante el proceso, confundieron el valor "4800" con el "3200" del problema anterior, lo cual refleja que estaban tratando de replicar el procedimiento.

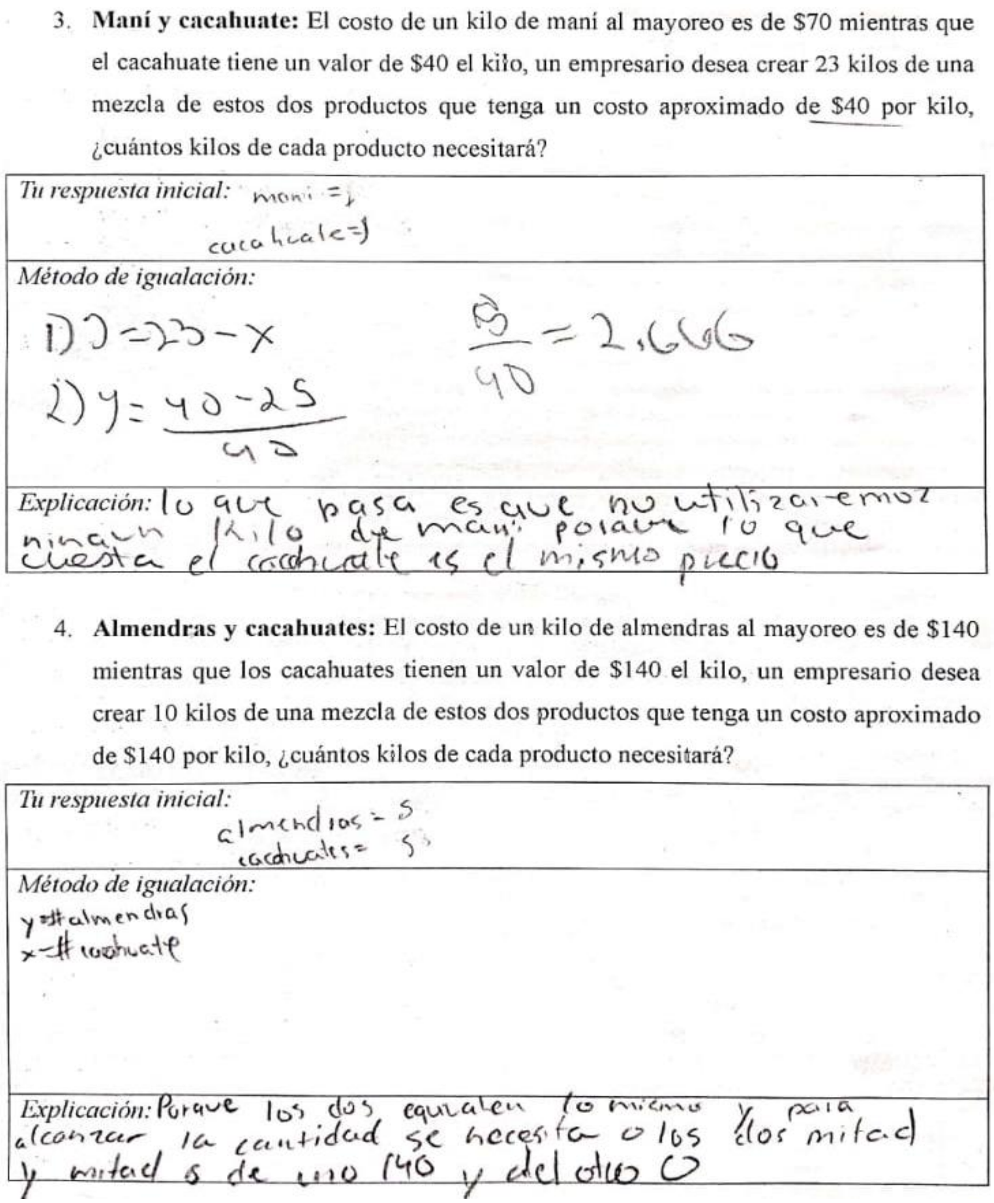
Si bien, es claro que existe *transferencia* del método de igualación de un problema a los otros, es decir, el método tiene *sentido* para los estudiantes, la falta de dominio sobre la solución de ecuaciones lineales se convirtió en un impedimento para que encontraran la respuesta del segundo problema. Este hecho se considera como *tendencia cognitiva* reportada por Filloy et al. (1999): la *imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes*, quizá debido al hecho de que el grupo en general tuvo solo un par de clases de ecuaciones lineales y la mayoría no eran expertos en este tópico.

Filloy et al. (1999) también manifiesta que:

> Los sujetos todavía no competentes en el uso del nuevo SMS podrán realizar el encadenamiento de los diversos pasos requeridos por la resolución, porque recuerdan la secuencia que propone el Modelo de Enseñanza; pero, la mayoría de las veces lo hacen sin sentido y, ante cualquier obstrucción o variación de la situación problemática, vuelven a utilizar proposiciones que ya habían reconocido como erróneas (p.77)

El hecho de que los estudiantes puedan aplicar satisfactoriamente el método al primer problema, pero no al segundo, es entonces una prueba de que aún no son suficientemente competentes en el SMS y el sentido que han producido sobre el método, aún no es completo

De los cuatro problemas posteriores, la pareja de estudiantes de desempeño medio solo abordó dos, la Figura 5-21 muestra sus producciones.



3. **Maní y cacahuate:** El costo de un kilo de maní al mayoreo es de $70 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 23 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $40 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial: maní =j cacahuate=j
Método de igualación: 1) J=23-x 2) y = $\frac{40-25}{40}$ $\frac{15}{40}$ = 2.666
Explicación: lo que pasa es que no utilizaremos ningún kilo de maní porque lo que cuesta el cacahuate es el mismo precio

4. **Almendras y cacahuates:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $140 el kilo, un empresario desea crear 10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $140 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial: almendras = 5 cacahuates = 5
Método de igualación: y=# almendras x=# cacahuate
Explicación: Porque los dos equivalen lo mismo y para alcanzar la cantidad se necesita o los dos mitad y mitad 5 de uno 140 y del otro 0

Figura 5-21 solución a los problemas 3 y 4 de la tercera hoja de trabajo, pareja de desempeño medio

Para el problema 3 "Maní y cacahuate" es posible suponer que los estudiantes quisieron plantear el sistema con la incógnita "Y" despejada en ambas ecuaciones y con ello agilizar el proceso. No obstante, el planteamiento que realizaron para la ecuación 2 tenía dos errores con los que el proceso en adelante se tornó diferente. El primer error es que, el denominador de la fracción debió ser "70" en lugar de "40", quizá esto se deba a una confusión entre el costo del maní con el del cacahuate. No obstante, el error que generó un cambio en las acciones posteriores fue el no agregar la incógnita "X" al término correspondiente, dejando su coeficiente (40) asilado, lo que produjo que se tratase como un término independiente, y se solucionara la expresión $\frac{14-25}{40}$ de la que obtuvieron el valor "2.66" al cual no pudieron darle una interpretación en el problema.

La ausencia de la incógnita "X" en el planteamiento del sistema y la manipulación aritmética de la expresión pueden ser evidencia de la tendencia cognitiva: *presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis* (Filloy et al., 1999), que, para este caso, podría ser entendida en relación con el papel que juega la hoja de cálculo en el desarrollo de la secuencia.

Conviene resaltar además que existe, en los cuatro problemas, un "abandono progresivo del método": una aplicación total y satisfactoria en el primer problema, un uso parcial de la sintaxis en el segundo, un intento de planteamiento en el tercero y una falta casi completa de simbolización en el cuarto. Este hecho resulta interesante ya que muestra que el regreso a los referentes más concretos no necesariamente es inmediato, como en este caso puede ser progresivo el tránsito entre un SMS y otro.

Dado que los estudiantes habían trabajado con la hoja de cálculo como un referente intermedio (entre el contexto y la sintaxis), es posible suponer que sea este referente el que produce obstructores en las acciones de planteamiento y solución del sistema. Así se podría suponer que la expresión $Y = \frac{14-25}{40}$ haya sido entendida como un "fórmula" para hallar el valor de "Y" sin requerir conocer el valor de "X".

A pesar de lo anterior, es interesante observar cómo, la explicación que los estudiantes ofrecen para el problema refleja un correcto entendimiento de las particularidades que el enunciado plantea sobre los precios. Los estudiantes indican "lo que pasa es que no utilizaremos ningún kilo de maní porque lo que cuesta el cacahuate es el mismo precio". En esta afirmación están planteando la respuesta al problema sin recurrir a herramientas algebraicas. Al indicar "no utilizaremos ningún kilo de maní" reflejan que reconocen que la respuesta para la incógnita asociada a los kilos de maní será cero, por lo que también podemos suponer que reconocen que la respuesta para la incógnita asociada a los kilos de cacahuate sería 23.

En el problema 4 no se realizó el planteamiento del sistema, los registros de audio y video muestran que el tiempo de la sesión estaba por terminar, por ello los estudiantes prefirieron únicamente anticipar una respuesta y luego dar explicación a sus resultados. Los estudiantes plantearon como respuesta al problema una repartición equitativa de las cantidades (5 kilogramos de cada producto). Posteriormente, al reconocer que los costos por kilo de cada producto y el costo solicitado eran iguales (lo que genera un sistema dependiente) manifestaron que podían existir, al menos tres reparticiones "los dos mitad, o de uno 140 y del otro 0", esto asumiendo que nuevamente confundieron los valores, en este caso 10 y 140, de manera similar que ocurrió con el planteamiento que hicieron en el tercer ejercicio.

La ausencia del método algebraico, en este caso, no solamente es atribuible al tiempo, ya que el planteamiento del sistema pudo haberse realizado rápidamente. Es posible suponer que, frente al resultado numérico al que llegaron en el problema anterior luego de plantear el sistema, los estudiantes hayan desistido del recurso algebraico como herramienta para abordar estos problemas y hayan preferido *retornar a la situación más concreta* (Filloy et al., 1999) para realizar un análisis que les permitiera, al menos, dar explicaciones en contexto a sus resultados.

En estos dos ejemplos es interesante ver que, aun cuando el planteamiento del sistema y su solución fueron prácticamente elementos ausentes, los estudiantes lograron regresar al contexto del problema y reflexionar sobre las cantidades para dar respuestas que fueron acompañadas de argumentos válidos provenientes de un proceso de lectura e interpretación de los enunciados. Podría concluirse entonces que, al menos en este caso, las fases iniciales del ciclo de modelización dan herramientas que, para los estudiantes, son suficientemente coherentes como para dar respuestas a problemas particulares aun cuando no se disponga del recurso matemático que modela el problema. Además, también es posible concluir que, ese retorno a situaciones más concretas (la hoja de cálculo o el contexto del problema) genera obstrucciones para la correcta apropiación del método algebraico, por su nivel más abstracto de representación.

En el Anexo 5 se presenta un recuento del trabajo realizado por el resto de los estudiantes del salón.

6. Conclusiones y discusión

Tomando en cuenta la variedad de frentes sobre los cuales pueden extraerse conclusiones para este estudio, este capítulo se encuentra dividido en cuatro secciones que atañen explícitamente a:

1. Las respuestas a las preguntas de investigación: esto al observar el desempeño de los estudiantes y las acciones que realizaron durante el trabajo en el Modelo de Enseñanza.
2. Los alcances y limitaciones de este estudio: los cuales aportan ideas para el desarrollo de investigaciones posteriores, por ejemplo, la aplicación de un Modelo de Enseñanza más amplio para abordar estrategias de trabajo diferentes al uso de la hoja de cálculo.
3. Reflexiones sobre la implementación de esta propuesta en contextos escolares convencionales: pues el Modelo de Enseñanza que se diseñó para este estudio contiene algunos elementos que pueden servir como insumo a maestros en ejercicio que deseen adecuarlo al contexto de sus clases.

6.1 La modelización para la sintaxis y la sintaxis para la modelización: Respuestas a las preguntas de investigación

La observación del actuar de los estudiantes durante el desarrollo del Modelo de Enseñanza se realizó teniendo en consideración las siguientes preguntas de investigación:

- *¿Cuál es el rol de la actividad de modelización matemática en la construcción de significados y producción de sentidos para el aprendizaje de la sintaxis algebraica? Específicamente en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.*
- *¿Cuál es el rol del uso de la sintaxis algebraica en los procesos de modelización matemática, específicamente, en el caso del planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas?*

El análisis de los datos se realizó en dos direcciones, primero se observó cómo la modelización matemática aporta en la adquisición de la sintaxis algebraica y segundo, se identificó el rol que cumple esta sintaxis para dar cierre a los procesos de modelización.

Sobre la primera pregunta de investigación se obtuvieron resultados con los cuales es posible asegurar que los problemas de modelización son una herramienta para construir *significados* matemáticos y dar *sentido* a los métodos. Con base en estos resultados, para este estudio se puede sostener que la modelización matemática y el uso de la hoja de cálculo, permiten la introducción del lenguaje algebraico propio del planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Para la segunda pregunta de investigación, el análisis de los datos mostró que cuando los estudiantes logran adquirir un uso competente del método de igualación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, la sintaxis algebraica se convierte en una herramienta de validación que ofrece seguridad sobre los resultados obtenidos y permite a los estudiantes entender más a fondo las relaciones que existen entre los datos con los que se plantean los problemas.

Específicamente respecto a esta pregunta de investigación, en este estudio se recabó evidencia empírica que permite afirmar que:

1. Las fases iniciales del ciclo de modelización -es decir, la *construcción de la situación modelo* y la *simplificación/estructuración* de los problemas-posibilitaron que los estudiantes construyeran significados sobre ideas matemáticas específicas (variación y dependencia para este estudio). En particular, se puede resaltar que las ideas de *variación* y *dependencia* se hicieron presentes cuando los estudiantes analizaron las relaciones entre las incógnitas y las restricciones del problema, por medio de tablas de variación.
2. El proceso de *matematización* en la hoja de cálculo permitió a los estudiantes hacer explícitas en el SMS de la hoja de cálculo las relaciones entre los datos; además, ofreció una estrategia con la que los estudiantes abordaron los problemas y exploraron valores numéricos para las incógnitas del problema usando estrategias tales como el redondeo y el uso de cada vez más posiciones decimales, lo cual permite ir construyendo significado sobre la idea variable continua.
3. El proceso de *matematización* en el SMS de la hoja de cálculo sirvió como un puente entre la interpretación concreta de las relaciones y la simbolización algebraica convencional de las mismas. Así, por ejemplo, expresiones como

=A3*120 expresada en la hoja de cálculo, podía traducirse a un $120x$ en el lenguaje algebraico convencional.

En síntesis, se considera que los resultados de este estudio proveen de evidencia empírica para sostener que las fases iniciales del proceso de modelización (interpretación, estructuración y matematización) pueden promover la construcción de significados (como la variación y dependencia) y producción de sentido (sobre el planteamiento del sistema y su solución con el método de igualación), con lo que pueden apoyar la adquisición de un nuevo SMS.

Respecto a la segunda pregunta de investigación, el análisis de los datos mostró que cuando los estudiantes logran adquirir un uso competente del método de igualación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, la sintaxis algebraica se puede convertir en una herramienta alternativa de solución, pero también de validación de los resultados obtenidos.

La evidencia empírica acá recabada respecto a esta pregunta permite concluir que:

1. Una vez que los estudiantes se apropiaron de las herramientas sintácticas estas herramientas se conviertieron en una alternativa a la que recurrieron los estudiantes para matematizar y obtener los resultados que los problemas les demandaba. Así, la exploración numérica en hoja de cálculo fue puesta de lado para trabajar con el método de igualación, que suponía una estrategia más directa de solución.
2. Los estudiantes usaron las herramientas proporcionadas por la sintaxis algebraica como una forma de probar la validez de los resultados obtenidos. Particularmente, las herramientas manipulativas fueron usadas para comprobar resultados que los estudiantes obtuvieron únicamente con la lectura del enunciado (lo cual era posible en los últimos problemas que se les plantearon).

Las conclusiones recién mencionadas son resultado de la observación del actuar de un grupo particular de estudiantes con un modelo de enseñanza específico. No obstante, el marco de los MTL ofreció las herramientas analíticas suficientes como para suponer que resultados similares pueden obtenerse con una nueva aplicación del modelo de enseñanza.

6.2 Alcances, limitaciones y discusión con la literatura previa: un vistazo a posibles líneas de investigación futura

Se puede decir que la principal fortaleza de esta investigación radica en el diseño del modelo de enseñanza, el cual incorpora la modelización matemática como una manera para promover la construcción de sentidos y significados. Sin embargo, quedan pendientes algunas discusiones y profundizaciones, tanto de carácter teórico como experimental, que podrían ser abordadas en futuras investigaciones. A continuación, se discuten, primero, las aportaciones que el presente estudio hace a la investigación en del desarrollo del lenguaje algebraico; más adelante, se discuten las limitaciones y posibles líneas de investigación derivadas.

El presente estudio responde a una de las problemáticas planteadas por Filloy, Rojano y Solares (2010) que consiste en la necesidad de diseñar modelos de enseñanza que ofrezcan alternativas para progresar en las ideas de incógnita e igualdad, una vez que se han adquirido las primeras competencias algebraicas. Se contribuye a la investigación en este tema con el diseño de un modelo de enseñanza para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, en el que se vinculan los significados de incógnita e igualdad a las ideas de variación y dependencia en el marco de actividades de modelización matemática.

Además, se corroboran algunos de los hallazgos de Rojano y Sutherland (2001) respecto de la versatilidad de la hoja de cálculo como herramienta para apoyar la introducción del lenguaje algebraico. En la presente investigación, el trabajo con la hoja de cálculo sirvió como un puente entre los referentes concretos que ofrecía el contexto del problema y el SMS del álgebra para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. La manipulación en hoja de cálculo, de las relaciones entre los datos e incógnitas del problema, posibilitó que los estudiantes plantearan los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes, haciendo uso de la escritura algebraica convencional.

Es importante señalar que, aun cuando la hoja de cálculo posibilitó la introducción de la sintaxis algebraica, la hoja de cálculo también puede convertirse en un obstructor para la apropiación del SMS del álgebra; en particular, en lo que tiene que ver con la manipulación de los sistemas de ecuaciones lineales, la hoja de cálculo está ligada a referentes más concretos (semánticos) y posibilita que se haga presente la tendencia cognitiva “presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis” reportada por Filloy et al. (1999).

También en relación con las tendencias cognitivas (Filloy et al., 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008), los resultados de la presente investigación ponen de manifiesto la necesidad de ofrecer descripciones más detalladas de las formas en las que éstas se hacen presentes; particularmente, hallamos evidencia empírica que muestra que la tendencia cognitiva “retorno a la situación más concreta” puede presentarse de manera gradual y observarse por medio de un abandono progresivo de las herramientas sintácticas.

Uno de los pendientes teóricos a abordar en futuras investigaciones consiste en abordar a mayor profundidad el análisis de la articulación epistemológica entre la postura de *modelización de Blum* (Blum y Borromeo, 2016; Blum, y Leiβ, 2007; Blum, 2011) y el marco *teórico-metodológico de Filloy* (Filloy, 1999; Filloy, Rojano y Puig. 2008). Este análisis podría proporcionar elementos para comprender las (inter-)relaciones entre la apropiación de elementos semánticos y sintácticos de los objetos algebraicos, en el caso específico de la actividad de modelización matemática.

Además, respecto a los aspectos metodológicos y experimentales, quedan pendientes algunas líneas de análisis de los datos recolectados. Por ejemplo, este estudio recabó evidencia empírica de discusiones de los estudiantes en torno a la relación de los objetos matemáticos que estaban modelando con los contextos socioculturales de compra y venta. Afirmaciones tales como “y si compro al por mayor debe salir más económico”, “se puede pedir descuento”, o “si sale menor precio, mucho mejor”, dan cuanta de la posible influencia de criterios provenientes de las prácticas sociales de compraventa en la elección de estrategias y técnicas de solución de los estudiantes. Las relaciones entre los procedimientos de solución y los contextos quedaron fuera de los alcances de esta investigación. No obstante, los datos podrían ser revisitados usando un marco teórico que ponga énfasis en los asuntos de índole social que se movilizan (los *aspectos pragmáticos* de la construcción del SMS nuevo); así como posturas de modelización que pongan énfasis en la relación con la realidad (postura *realista*) o en problemáticas sociales (postura *sociocrítica*) (Kaiser y Sriraman 2006).

Finalmente, la metodología de trabajo que se usó en este estudio tiene un carácter cíclico, tal como se propone en los MTL (Filloy et al., 1999). Este hecho pone de manifiesto que otra posible línea de trabajo futura radica en el rediseño del modelo de enseñanza para promover la apropiación de otros significados; por ejemplo, la sustitución algebraica, las propiedades de las relaciones de equivalencia o la noción de función lineal. Una nueva fase de diseño podría usarse para apoyar la producción de sentido sobre otros métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales (sustitución y eliminación cuando menos).

6.3 El Modelo de Enseñanza en la escuela

Al reconocer que cada aula de clases es una realidad única e irrepetible es posible mostrarse de acuerdo con que ninguna propuesta de enseñanza es completamente acertada ni tampoco totalmente inapropiada. A continuación, se reflexiona sobre algunas ventajas y desafíos que implicaría la réplica del Modelo de Enseñanza acá propuesto en un contexto convencional de aula.

Es importante señalar que el Modelo de Enseñanza que se planteó para este estudio no pretendía ser una herramienta para maestros que se encuentren en la búsqueda de secuencias de enseñanza. Los intereses de este estudio recaen sobre el análisis de los procesos cognitivos que tienen lugar cuando a estudiantes, sin previa capacitación en el manejo de sistemas de ecuaciones lineales, se les solicita el desarrollo de tareas de modelización matemática cuya solución implica el reconocimiento y manipulación de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. No obstante, se reconoce que el Modelo de Enseñanza aquí plasmado propicia, cuando menos, que los estudiantes planteen simbólicamente un sistema de ecuaciones lineales, gracias al trabajo que desarrollan en la hoja de cálculo.

Para comenzar, es importante resaltar las ventajas que presume el uso de la hoja de cálculo en términos del puente que permite construir entre los contextos concretos y los abstractos (la sintaxis algebraica) y, también, en lo que concierne a las características que ofrece como herramienta tecnológica.

Hacer uso de problemas de modelización que ofrezcan contextos cercanos y accesibles para los estudiantes posibilita que el trabajo algebraico tenga un referente concreto del que se pueden extraer significados y dar sentido a los procedimientos. Esto supone una ventaja significativa para la aplicación del Modelo de Enseñanza en contextos de aula convencionales. El modelo brinda al profesor la posibilidad de centrar sus esfuerzos en que los estudiantes adquieran las competencias manipulativas sabiendo que los asuntos de corte interpretativo los puede facilitar el contexto mismo de las situaciones. En esta investigación, el Modelo de Enseñanza apuesta a la hoja de cálculo como una forma para que el profesor construya puentes entre la sintaxis y la semántica algebraica.

Como herramienta tecnológica, la hoja de cálculo se caracteriza por su accesibilidad en prácticamente cualquier equipo de cómputo (generalmente con la licencia de Microsoft o, como en el caso de este estudio, con hojas de cálculo en línea); además, ofrece herramientas de graficación que pueden apoyar el trabajo de los estudiantes, brindando representaciones bi- o tridimensionales de los datos; finalmente, se puede resaltar la gran velocidad para la realización de cálculos y la réplica de fórmulas que ofrece.

Es necesario enfatizar que el trabajo del docente es primordial y su rol no queda desplazado por el uso de la tecnología ni, mucho menos, por el Modelo de Enseñanza propuesto. Es el profesor quien debe evaluar la pertinencia de la propuesta general y también de cada elemento que la compone. De esta manera, puede apropiarse del potencial del Modelo de Enseñanza y ajustarlo a sus propios intereses y a las necesidades de su grupo de estudiantes.

Uno de los asuntos que el maestro debe considerar es el cómo y cuándo aplicar esta secuencia en su salón de clases. Dados los objetivos de esta investigación, la introducción del método de igualación fue realizada una vez que los estudiantes ya habían trabajado con varios problemas. No obstante, en un contexto convencional, es el docente quien debe tomar decisiones sobre si, por ejemplo, introduce el método previo al trabajo con los problemas de modelización y usa la hoja de cálculo como herramienta de validación. Depende entonces de las intenciones del docente e incluso de los tiempos de los que disponga.

Finalmente, conviene resaltar que la elección de los problemas, el uso de la hoja de cálculo y la introducción del método de igualación fueron realizadas en función de los propósitos de esta investigación. Si el interés es la enseñanza, es importante considerar otros métodos de solución de los sistemas (eliminación, sustitución, o métodos por matrices), otras formas de representación (tablas de variación y rectas en el plano cartesiano cuando menos) y, eventualmente, otras aplicaciones de estos tópicos (ajuste de datos o circuitos eléctricos, por ejemplo).

La gama de trabajo es amplia y es posible considerar que esta propuesta sea ajustada por los profesores a una secuencia de enseñanza acorde con las características de sus grupos y condiciones de trabajo, incluyendo los aspectos aquí señalados, pero también todas las adecuaciones y transformaciones que considere necesarias. Esperamos que así sea.

7. Bibliografía

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14 ICMI study* (págs. 35-44). New York. Springer.

Angel, A. R. (2008). *Algebra intermedia*. (Séptima edición). (Traductor Ibarra, V). México: Pearson Educación.

Amit, M., y Neria, D. (2008). “Rising to the challenge” using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Arnau, D. (2010). La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo Tesis de doctorado. España: Valencia, Universitat de València.

Banerjee, R., y Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational studies in mathematics, 80*, 351-367.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (págs. 3-14). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bednarz, N., y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (págs. 115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Blomhøj, M., y Hoff, T. (2011). Students’ Reflections in Mathematical Modelling Projects. En G. B. Kaiser (Ed.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (Vol. 1). Heidelberg, Germany: Springer.

Blum, W., y Borromeo, R. (2016). Advancing the Teaching of Mathematical Modeling: Research-Based Concepts and Examples. En C. Hirsch, y A. McDuffie (Eds.), *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pág. 65-76). Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., y Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. New York: Springer.

Blum, W., y Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems?. En C. Haines, P. W. Galbraith, Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics - ICTMA 12*, (págs 222-231). Chichester, UK: Elsevier.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, y R. Borromeo (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (Vol. 1, págs. 15-30). Heidelberg, Germany: Springer.

Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Winstor: NFER-Nelson.

Brown, T. (2001). *Mathematics Education and Language Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism* (segunda ed.). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Cañadas, M. C., Molina, M., y del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 19-37.

Carraher, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal of Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Carreira, S., Amado, N., y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modelling of daily life in adult education: focusing on the notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, y R. Borromeo (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (Vol. 1, págs. 199-209). Heidelberg, Germany: Springer.

Carreira, S., y Baioa, A. M. (2017). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: On the student's sense of credibility. *ZDM* Mathematics Education, *50*(1-2), 201-215.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 57-76.

Cirillo, M., Pelesko, J., Mathew, N., y Rubel, L. (2016). Perspectives on modeling in school mathematics. En C. Hirsch (Ed.), *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (págs. 3-16). Kalamazoo, Michigan: National Council of Teachers of Mathematics.

Confrey, J., y Maloney, A. (2007). A theory of Mathematical Modelling in technological settings. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14 ICMI study* (págs. 57-68). New York: Springer.

Cooper, T., y Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM*, *40*, 23–37.

Csíkos, C., Szitányi, J., y Kelemen, R. (2011). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational studies in mathematics*, *81*, 47-65.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process?. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(2), 137-159.

De Lange, Jan. (1987). Mathematics, Insight and Meaning. Utrecht: OW & OC

Demonty, I., Vlassis, J., y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(1), 1-19.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales* (Myran Vega, trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía (Original en inglés publicado en 1995).

Eames, C., Brady, C., y Lesh, R. (2016). Formative self-assessment: A critical component of Mathematical Modeling. En C. Hirsch (Ed.), *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. Kalamazoo, Michigan: NCTM.

Ellis, A., Ely, R., Singleton, B., y Tasova, H. (2020). Scaling-continuous variation: supporting students' algebraic reasoning. *Educational studies in mathematics*, *104*(1), 87-103.

English, L. (2006). Mathematical Modeling in the primary school children's construction of a consumer guide. *Educational studies in mathematics, 63*, 303–323.

English, L. (2012). Data modelling with first-grade students. *Educational studies in mathematics, 81*, 15-30.

Escalante Vega, J. E., y Cuesta Borges, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática, 24*(1), 107-132.

Falcade, R., Laborde, C., y Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational studies in mathematics, 66*, 317-333.

Ferrara, F., y Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalization: Actualizing the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational studies in mathematics, 92*, 1-19.

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. y Rubio, G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica

Filloy, E., Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought. En J. Moser (Ed.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematic Education* (págs. 51-56). Madison Wisconsin, USA.

Filloy, E., y Rojano, T. (1985a). Operating the unknown and models of teaching (A clinical study with 12–13 year olds with high proficiency in pre–algebra). En S. Damarin, y M. Shelton (Eds.) *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (págs 75-88). Columbus, Ohio.

Filloy, E., y Rojano, T. (1985b). Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies. En J. Bergeron, y otros (Eds.) *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 154-158). State University of Utrecht, The Netherlands.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 327-342.

Filloy, E., Rojano, T., y Puig, L. (2008). *Educational Algebra A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2010). Problems Dealing with Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 52-80.

Flores, R., Koontz, E., Inan, F., y Alagic, M. (2015). Multiple representation instruction first versus traditional algorithmic instruction first Impact in middle school mathematics classrooms. *Educational studies in mathematics, 89*, 267–281.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordretcht, The Netherlands: Mathematics Education Library.

Galbraith, P. (2007). Beyond the low hanging fruit. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14 ICMI study* (págs. 79-88). New York. Springer.

Gallardo, A., y Rojano, T. (1987). Common difficulties in the learning of algebra among children displaying low and medium pre-algebraic proficiency levels. En J Bergeron, N. Hersovics y C. Kieran (Eds.) *Proceedings of PME*, 11, (Vol. 1, págs 301-307).

Gallardo, A., y Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en didatique des mathematiques, 9*(2), 155-188.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 171-192.

García. M. (2011). *Algebra Lineal y Geometría para la Ingeniería*. (Primera Edición). Barcelona: Maria Isabel Garcia Planas.

Geiger, V., Goos, M., y Dole, S. (2013). Taking advantage of incidental school events to engage with the applications of mathematics: The case of surviving the reconstruction. En G. A. Stillman, G. Kaiser, y W. B. Blum (Eds.) *Teaching*

Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice (págs. 175-184). Netherlands: Springer.

Girnat, B., y Eichler, A. (2011). Secondary Teachers' Beliefs on Modelling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, R. Borromeo, W. Blum, y G. Stillman (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (Vol. 1, págs. 75-84). Heidelberg, Germany: Springer.

Gómez, J., y Mojica, J. (2013). Una mirada sociocultural del pensamiento algebraico desde la teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 81-99.

Hernández, K., Peña, F y Marttá, J. (2015). *Procesos de argumentación y generalización en una tarea de patrones lineales y cuadráticos.* Tesis de Maestría. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Herscovicks, R. y Linchevsky, L. (1991). Crossing the didactic cut in algebra: grouping like terms in an equation. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1. (pp. 196-202). Blacksburg, Virginia, USA: Division of Curriculum y Instruction, VPI y SU.

Hirsch, C. R., y McDuffie, A. R. (Eds.). (2016). *Mathematical modeling and modeling mathematics*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

Hitt, F., Saboya, M., y Cortés, C. (2016). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking triangular numbers. *ZDM, 48*, 775-791.

Infante, F. (2016). La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de Geogebra en un primer curso de ciencias administrativas y económicas en Colombia. Tesis de doctorado. España: Valencia, Universitat de València.

Kaiser, G., y Sriraman, H. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 302-310.

Kaiser, G., y Stender, P. (2013). Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-Directed Learning Environments International Perspectives on the Teaching and

Learning of Mathematical Modelling. En G. A. Stillman, G. Kaiser, y W. B. Blum (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (págs. 277-293). Netherlands: Springer.

Kaput, J. (1987). A representational framework. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Ed.), *Proceedings of the eleventh Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Montreal.

Katz, V. J. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational studies in mathematics*, *66*(2), 185-201.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C. (1997). Mathematical Concepts at the Secondary School Level: The Learning of Algebra and Functions. En T. Nunez, y P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics An International Perspective* (págs. 133-158). East Sussex, UK: Psychology Press. East Sussex, UK: Psychology Press.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica (Traductor Puig, L.). *Enseñanza de las Ciencias, 7* (3), 229-240.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics*. Londres: Murray.

Lee, K., Fong, S., Yeong, S., Graham, S., Venkatraman, V., y Chee, M. (2010). Computing solutions to algebraic problems using a symbolic versus a schematic strategy. *ZDM*, *42*, 591-605.

Lesh, R., y Yoon, C. (2007). What Is Distinctive In (Our Views Aout) Models y Modelling Perspectives On Mathematics Problem Solving, Learning, And Teaching? En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14 ICMI study* (págs. 162-170). New York: Springer.

Lesh, R., Middleton, J. A., Caylor, E., y Gupta, S. (2008). A science need Designing tasks to engage students in modeling complex data. *Educational studies in mathematics, 68*, 113-130.

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *ZDM, 38*(2), 96-112.

Lingefjärd, T., y Meier, S. (2011). The Sun hour project. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo, G. Stillman (Eds.) *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (págs. 97-106). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Lozano, M. (2015). Using enactivism as a methodology to characterise algebraic learning. *ZDM*, *47*, 223-234.

Malisani, E., y Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought The role of the "variable". *Educational studies in mathematics, 71*, 19-41.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/ Rutas hacia el álgebra.* (Cecilia Agudelo, trad.). Boyacá, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (original en inglés publicado en 1985).

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior, 3*, 93-166.

Michelsen, C. (2006). Functions a modelling tool in mathematics and science. *ZDM*, *38*(3), 269-280.

Miranda, I., Radford, L., y Guzmán, J. (2013). Un Origen Matemático vs Dos Orígenes Fenomenológicos: la Significación del Movimiento de Objetos Respecto del Punto (0,0). *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, *2*(2), 183-208.

Murray, B., y Kathryn, I. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation a three-year longitudinal study. *ZDM, 40*, 39-53.

Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss. (Eds.) (2007), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 3-32). New York, NY: Springer.

Ochoviet, C., y Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. *Educación Matemática, 23*(3), 91-121.

Oller, A., y Meavilla, V. (2014). Entre la aritmética y el álgebra. Un análisis histórico de los "problemas de grifos". *Educación Matemática, 26*(1), 103-126.

Ortega, M. (2018). Un Modelo de Enseñanza de la modelización para trabajar familias de funciones elementales usando datos reales y iPads. Tesis de doctorado. España: Valencia, Universitat de València.

Palatnik, A., y Koichu, B. (2017). Sense making in the context of algebraic activities. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(3), 245-262.

Paz, T., y Leron, U. (2009). The Slippery Road From Actions on Objects to Functions and Variables. *Journal for Research in Mathematic Education*, *40*(1), 18-39.

Peck, F., y Matassa, M. (2016). Reinventing fractions and division as they are used in algebra the power of preformal productions. *Educational studies in mathematics*, *92*, 245-278.

Petersen, P. (2012). *Linear Algebra.* New York: Springer.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically. Comunication in Mathematics Classrooms.* London: Routledge.

Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En H. G. Steiner y B. Cristiansen (Eds.), *New trends in mathematics teaching IV*, 232-248. Poitiers: UNESCO.

Preciado, P., Solares, A., Peña, F., Ortiz, A., Sandoval, M., Soriano, R., Carrión., V. y Farrugia, M. (2018). Exploring perspectives on Mathematical Modelling: A literature survey. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.) *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4 págs. 3-10) Umeå, Sweden: PME.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "Connections" Standard Significance of Semiotics for Teachers of Mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1),163-182.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (págs. 9-35) México: Trillas.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, and M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (págs. 189-224). London: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*, 83-96.

Radford, L. (2009). "No! He starts walking backwards!" interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM, 41*, 467-480.

Radford, L. (2010). Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. *PNA, 4* (2), 37-62.

Radford, L. (2013). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7-44.

Radford, L., Bardini, C., y Sabena, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for research in Mathematics Education*, *38*(5) 507-530.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., y Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 53-78.

Rodriguez, R. (2009). Differential equations as a tool for mathematical modeling in physics and mathematics courses: a study of high school textbooks and the modeling processes of senior high students. En M. Blomhøj, y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (págs. 19-34). Roskilde: Roskilde University.

Rojano, T. (1985). De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad). Tesis de doctorado. México: Ciudad de México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática. Prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, *26*(1)11-30.

Rojano, T., Filloy, E., y Puig, L. (2014). Intertextuality and sense production in the learning of algebraic methods. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(3), 389-407.

Rojano, T., y Sutherland, R. (2001). Arithmetic world-algebraic world. En K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Eds.) *Proceedings of the Twelfth ICME Study Conference: The Future of the Teaching of Algebra and Learning of Algebra*, (págs. 515-522). Dordrecht, The Netherlands: Springer..

Sadovsky, P. (2005). La actividad matemática como "asunto" de la enseñanza. En P. Sadovsky, *Enseñar matemáticas hoy/ Miradas, sentidos y desafíos* (págs. 21-59). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Saeki, A., y Matsuzaki, A. (2013). Dual modelling cycle framework for responding to the diversities of modellers. En En G. A. Stillman, G. Kaiser, y W. B. Blum (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 89-99). Netherlands: Springer.

Santos, D. y Castañeda, S. (2008). Objetivación de información en aprendizaje matemático autorregulado. *Revista Mexicana de Investigación educativa*, *13*(38), 713-736.

Schukajlow, S., Kolter, J., y Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM, 47*(7), 1241-1254.

Schukajlow, S., Krug, A., y Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational studies in mathematics, 89*, 393–417.

Schukajlow, S., y Krug, A. (2013). Considering multiple solutions for modelling problems–design and first results from the MultiMa-Project. En G. A. Stillman, G. Kaiser, y W. B. Blum (Eds.) *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (págs. 207-216). Netherlands: Springer.

Senk, S., y Thompson, D. (2006). Strategies Used by Second-Year Algebra Students to Solve Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 116-128.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* México: Ciudad de México.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra: Origenes y perspectivas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sfard, A., y Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sinclair, N., y Jackiw, N. (2010). Modeling practices with the geometer's sketchpad. En R, Lesh, P. Galbraith, C. Haines, A. Hurford (Eds.) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 541-554). Boston, MA: Springer.

Solares, A. (2007). Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incognita. Tesis de doctorado. México: Ciudad de México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Stacey, K., Chick, H., y Kendal, M. (Eds.). (2006). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study*. Netherlands: Springer.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the twenty first conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. IV, pp. 190-197). Lahti, Finland: PME.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? - An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational studies in mathematics*, *61*, 133-162.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., y Edwards, I. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. En J. Watson, y K. Beswick (Eds.) *30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (págs. 688-697). Australia: MERGA Inc.

Tabach, M., Arcavi, A., y Hershkowitz, R. (2008). Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 53-71.

Tabach, M., y Friedlander, A. (2017). Algebraic procedures and creative thinking. *ZDM, 49*(1), 53-63.

Teague, D., Levy, R., y Fowler, K. (2016). The GAIMME Report: Mathematical Modeling in the K–16 Curriculum. En C. Hirsch (Ed.), *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. Kalamazoo, Michigan: NCTM.

Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?. *Educación Matemática, 18*(3), 5-38.

Ursini, S., Escareño, F., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental.* México: Trillas.

Usiskin, Z. (1988) Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.) *The ideas of Algebra, K -12, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics,* (pp. 8- 19). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Warner, L., Schorr, R., y Davis, G. (2009). Flexible use of symbolic tools for problem solving, generalization, and explanation. *ZDM*, *41*, 663-679.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 333-361.

Zbiek, R., y Conner, A. (2006). Beyond Motivation Exploring Mathematical Modeling as A Context for Deepening Students' Understandings of Curricular Mathematics. *Educational studies in mathematics, 63*, 89-112.

Anexo 1: GUÍA PARA EL MAESTRO

A continuación, se presenta una descripción de la secuencia de actividades junto con algunas recomendaciones para su puesta en práctica.

Primera Sesión

Cacahuates y Nuez: El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $40 mientras que la nuez Wichita tiene un valor de $120 el kilo, un empresario desea crear 25 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $60 por kilo ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Objetivo de la actividad	Proporcionar a los estudiantes un primer acercamiento a problemas que involucran dos incógnitas y dos ecuaciones.
Recursos	Computadoras con hoja de cálculo (preferiblemente Excel). Hojas de trabajo
Disposición	Trabajo en parejas.
Duración	Una hora clase.

La lectura del problema y la reflexión sobre la forma en la que interactúan los datos debería ser suficiente para que los estudiantes encuentren las fórmulas que deberían usar en la hoja de cálculo preestablecida. Las fórmulas que se espera que usen son las siguientes:

	A	B	C	D	E	F
1	Nombres:			(Espacio reservado para el logotipo de la institución)		
2	Fecha:					
3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4	#	=25-A4	=A4*120	=B4*40	=C4+D4	=E4/25

Una vez que los estudiantes construyan la hoja de cálculo es recomendable sugerirles una exploración de datos concretos (copiando las fórmulas en las filas posteriores), de esta manera pueden construir una tabla como la siguiente:

Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de los cacahuates	Costo de la nuez	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
25	0	0	3000	3000	120
24	1	40	2880	2920	116.8

(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)
7	18	720	840	1560	62.4
6	19	760	720	1480	59.2
(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)
0	25	1000	0	1000	40

Al explorar las 26 combinaciones con números naturales los estudiantes podrán percatarse de que la respuesta que buscan corresponde a un número entre 18 y 19 kilos de cacahuates y 6 y 7 kilos de nuez.

El manejo de la hoja de cálculo, así como la presencia de dos condiciones para las variables del problema supondría que se presenten errores al momento del llenado de la tabla, sin embargo, la presencia del docente puede ayudar a reconocer estos fallos y corregirlos.

Segunda Sesión.

Objetivo de la sesión	Proporcionar a los estudiantes un método analítico para la solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas.
Recursos	Proyector y computadora con hoja de cálculo.
Disposición	Trabajo individual.
Duración	Una hora clase.

Se recomienda iniciar la sesión recapitulando el problema trabajado en la sesión previa, solicitar a los estudiantes que expliquen qué entendieron del problema y cómo lo solucionaron. Luego de algunas intervenciones (3 al menos) pueden plantearse los problemas de la segunda hoja de trabajo, los cuales, al tener una estructura similar que el problema inicial, pueden solucionarse haciendo leves modificaciones a su hoja de cálculo. Los problemas que se plantean y sus respuestas exactas son:

1. **Arándanos y cacahuates:** El costo de un kilo de arándanos al mayoreo es de $150 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 40 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $80 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

   Respuesta: $14.\overline{54}$ kilos de arándano y $25.\overline{45}$ kilos de cacahuate

2. **Almendras y arándanos:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $205 mientras que los arándanos tienen un valor de $150 el kilo, un empresario desea crear 30 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $160 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

   Respuesta: $5.\overline{45}$ kilos de almendra y $24.\overline{54}$ kilos de arándano

La naturaleza decimal de las respuestas impedirá que los estudiantes encuentren una solución exacta al problema, se recomienda hacer uso de este hecho para introducir la necesidad de la aplicación de un método algebraico que proporcione una respuesta exacta y de manera directa.

La hoja de trabajo plantea las instrucciones por medio de las cuales los estudiantes asignarán las etiquetas X e Y a los conjuntos de valores que exploraron. Se recomienda enfatizar en este cambio de nomenclatura para poder, de esta manera, plantear en lenguaje algebraico convencional las fórmulas que se usaron en el desarrollo de la hoja de cálculo.

Kilos de cacahuates	Kilos de nuez	Costo de los cacahuates	Costo de la nuez	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
X	Y	$40 * X$	$120 * Y$	$(40 * X) + (120 * Y)$	$\frac{(40 * X) + (120 * Y)}{25}$

Dado que la fórmula para el costo por kilo divide el valor del costo total en 25, se espera que los estudiantes reconozcan que la operación $(40 * X) + (120 * Y)$ debe dar como resultado 1500. De esta manera será relativamente asociar esta fórmula con la ecuación:

$$1)\ 40x + 120y = 1500$$

Una vez se tenga esa ecuación se podrá preguntar sobre si esta condición (de costo) es la única que deben cumplir las incógnitas, se espera que los estudiantes recuerden que la mezcla de productos debe totalizar 25 kilos, de ser así, puede solicitárseles que planteen la ecuación que corresponde:

$$2)\ x + y = 25$$

Donde las variables x y y corresponden respectivamente al número de kilogramos de cacahuates y de nuez Wichita que son necesarios para elaborar la mezcla.

Para este momento es recomendable introducir el método de igualación para la solución del sistema, de esta manera al despejar x de las ecuaciones 1) y 2) se obtiene:

$$1)\ x = \frac{1500 - 120y}{40}$$

$$2)\quad x = 25 - y$$

Que al igualar y solucionar genera:

$$25 - y = \frac{1500 - 120y}{40}$$

$$1000 - 40y = 1500 - 120y$$

$$80y = 500$$

$$y = 6.25$$

De tal manera que el valor para x es:

$$x = 25 - 6.25$$

$$x = 18.75$$

Así que se necesitan 6.25 kilos de nuez Wichita y 18.75 kilos de cacahuate.

Es posible que la mayoría de los estudiantes no se familiaricen de inmediato con el método de solución o con el planteamiento de las ecuaciones, es por ello por lo que se planea una tercera sesión en la que se refuerza el trabajo.

Tercera Sesión.

Objetivo de la sesión	Permitir que los estudiantes se familiaricen con el método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas
Recursos	Hojas de trabajo
Disposición	Trabajo en parejas.
Duración	Una hora clase.

Para esta sesión se presentan 6 distintas variaciones del problema, los dos primeros corresponden con los de la segunda hoja de trabajo, los 4 siguientes presentan casos "atípicos" de la siguiente manera:

- Costo deseado igual al costo de uno de los productos (valor de una de las incógnitas igual a cero)
- Costos de los productos iguales al deseado (sistema dependiente)
- Costos de los productos ambos mayores o ambos menores al deseado (incoherencia con el contexto)

Se espera que con esta sesión los estudiantes no solo adquieran un nivel de competencia mayor en la solución de este tipo de problemas si no que además puedan discutir y profundizar en la relación que tienen sus respuestas con el contexto mismo de la situación.

Los problemas que se plantean y sus respuestas numéricas son los siguientes:

3. **Maní y cacahuate:** El costo de un kilo de maní al mayoreo es de $70 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 23 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $40 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

   Respuesta: 23 kilos de cacahuate y 0 kilos de maní.
4. **Almendras y cacahuates:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $140 el kilo, un empresario desea crear 10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $140 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

   Respuesta: cualquier combinación de valores que sumen 10.
5. **Almendras y cacahuates:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $90 el kilo, un empresario desea crear 10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $30 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

   Respuesta: -12 kilos de almendras y 22 kilos de cacahuate.
6. **Cacahuates y arándanos:** El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $50 mientras que los arándanos tienen un valor de $80 el kilo, un empresario desea crear 35 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $150 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

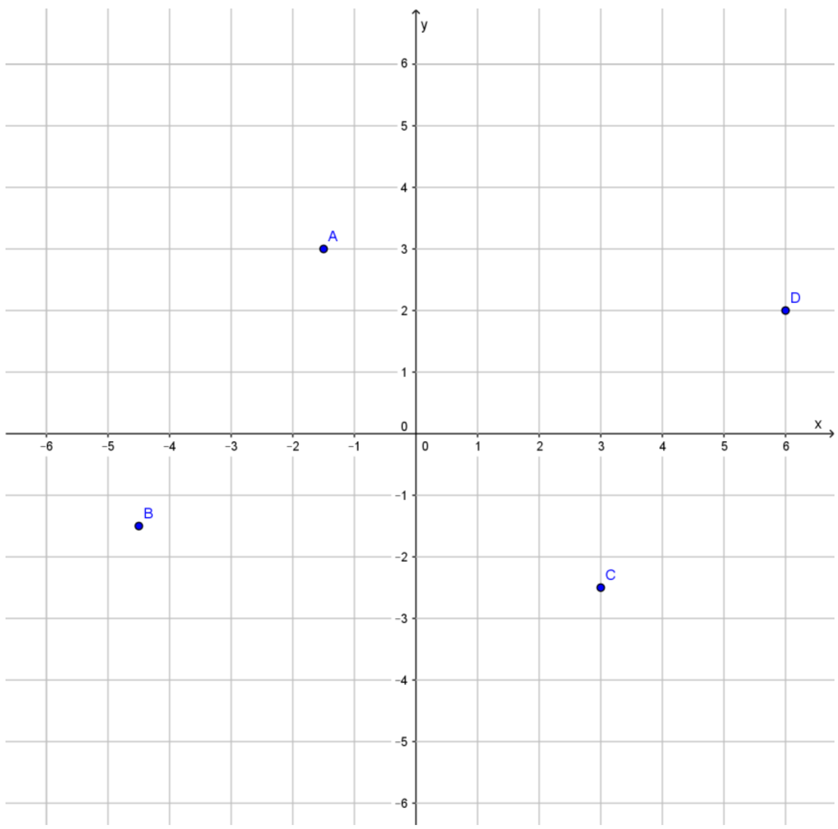
   Respuesta: $-81.\overline{6}$ kilos de cacahuate y $116.\overline{6}$ kilos de arándano.

Anexo 2: Hojas de trabajo usadas en el estudio

Nombre					
Grupo		Fecha	DD	MM	AA
Sesión Diagnóstica					

Lee y resuelve cada uno de los ejercicios que se plantean a continuación.

1. En el plano cartesiano se han ubicado los puntos A, B, C y D.



Indica a continuación las coordenadas para cada punto.

$A = (-1.5\,, 3)$	$C =$
$B =$	$D =$

2. Si deseas dibujar una recta $\overleftrightarrow{AE}$ que sea creciente, una recta $\overleftrightarrow{BF}$ que sea decreciente, una recta $\overleftrightarrow{CG}$ que sea horizontal y una recta $\overleftrightarrow{DH}$ que sea vertical, ¿dónde podrías ubicar los puntos E, F, G y H? Dibuja las rectas.

$E = (1\,,4)$ (por ejemplo)	$F =$
$G =$	$H =$

3. En cada caso, encuentra el valor de x que permite resolver cada ecuación:

$4x - 8 = 12$
$3x - 5 = x + 9$

4. Para los siguientes problemas, encuentra una ecuación que permita resolverlo. Luego, resuelve la ecuación. Al final, verifica que hayas encontrado la solución del problema.

   a) Si al triple de un número le restamos 10 el resultado será ese número más 2.

b) A Camila y a Juan les regalaron bolsitas con dulces. Camila recibió tres bolsitas, y quiso regalarle 4 dulces a Juan porque él solo recibió dos bolsitas. Con esta repartición los dos quedaron al final con la misma cantidad de dulces. Si todas las bolsitas traían la misma cantidad de dulces, ¿cuántos dulces venían en cada bolsita?

Nombre					
Grupo		Fecha	DD	MM	AA
Sesión 1: Solución de problemas con 2 incógnitas					

Lee la información que se muestra a continuación y úsala para resolver el problema.

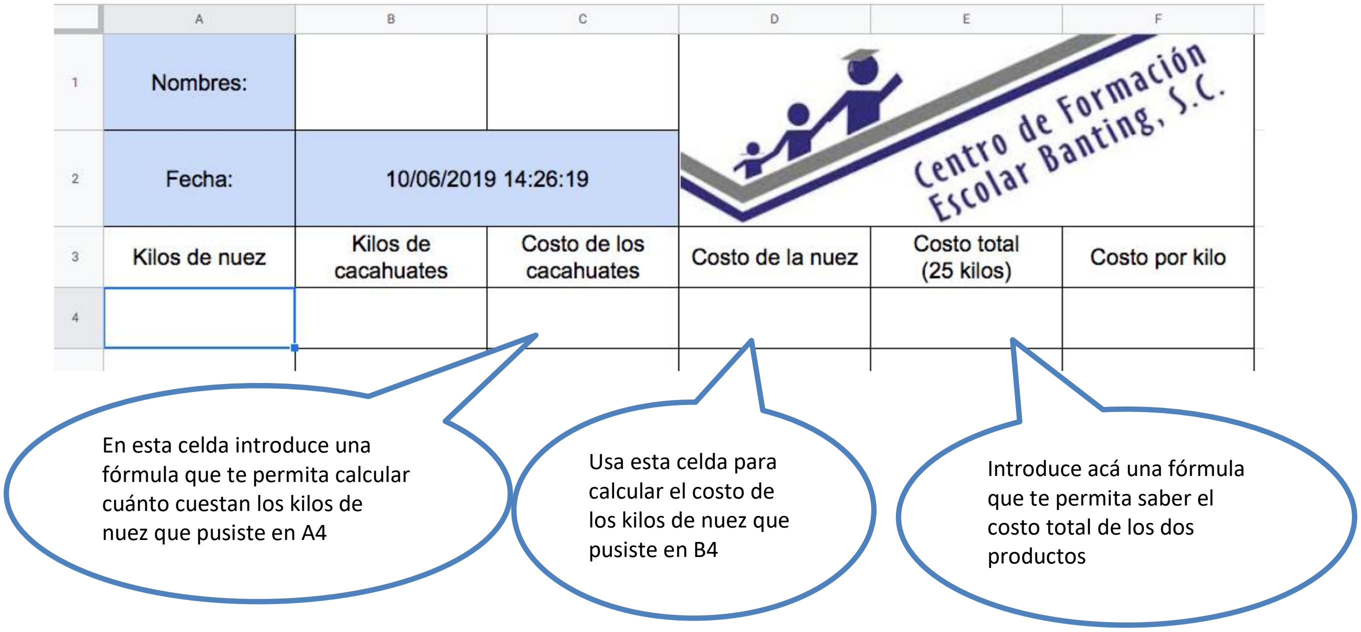
Cacahuates y Nuez: El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $40 mientras que la nuez Wichita tiene un valor de $120 el kilo, un empresario desea crear 25 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $60 por kilo. Utilizando la Hoja de cálculo que se te proporcionó averigua ¿cuántos kilos de cada producto necesitará? Sigue las siguientes indicaciones y responde las preguntas.

	A	B	C	D	E	F
1	Nombres:					
2	Fecha:	10/06/2019 14:26:19				
3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de los cacahuates	Costo de la nuez	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4						

En esta celda coloca el valor para la cantidad de nuez que crees que necesitará

En esta celda coloca el valor para la cantidad de cacahuate que crees que necesitará

Ahora que tienes una posible respuesta, vamos a verificar si corresponde a la solución del problema.



	A	B	C	D	E	F
1	Nombres:			Centro de Formación Escolar Banting, S.C.		
2	Fecha:	10/06/2019 14:26:19				
3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de los cacahuates	Costo de la nuez	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4						

Usa ahora la celda F4 para calcular el costo de cada kilo de la mezcla. Recuerda que el problema pide que el costo aproximado del kilo sea de $60 ¿fue ese el resultado? Explica qué ocurrió.

Escribe las fórmulas has usado hasta el momento:

Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo

¿Es posible usar también una fórmula para calcular los kilos de cacahuates usando la cantidad de kilos de nuez?, dicho de otro modo, ¿puedes encontrar el valor para B4 partiendo de A4?, si es así, escribe la fórmula a continuación y úsala en la hoja de cálculo.

Kilos de cacahuates

Vamos a explorar ahora otras posibilidades:

	A	B	C	D	E	F
1	Nombres:			Centro de Formación Escolar Banting, S.C.		
2	Fecha:	12/06/2019 14:07:25				
3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4	1	24	40	2880	2920	116,8

Si con el valor que pusiste en esta celda no llegaste a la solución del problema, puedes usar las filas inferiores para probar otras posibilidades

Puedes seleccionar las celdas que contienen fórmulas y usar el cuadro de la esquina inferior derecha para replicar los cálculos en las celdas inferiores

Luego de revisar otras opciones, ¿qué respuesta darías al problema?

Nombre					
Grupo		Fecha	DD	MM	AA
Sesión 2: Solución de problemas con 2 incógnitas					

Lee y soluciona cada uno de los siguientes problemas haciendo uso de la hoja de cálculo que construiste en la sesión pasada. Indica qué modificaciones tuviste que realizar.

1. **Arándanos y cacahuates:** El costo de un kilo de arándanos al mayoreo es de $150 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 40 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $80 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

   Respuesta:

   Indica en la tabla las etiquetas y fórmulas que usaste

	A	B	C	D	E	F
3						
4						

2. **Almendras y arándanos:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $205 mientras que los arándanos tienen un valor de $150 el kilo, un empresario desea crear 30 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $160 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

   Respuesta:

   Indica en la tabla las etiquetas y fórmulas que usaste

	A	B	C	D	E	F
3						
4						

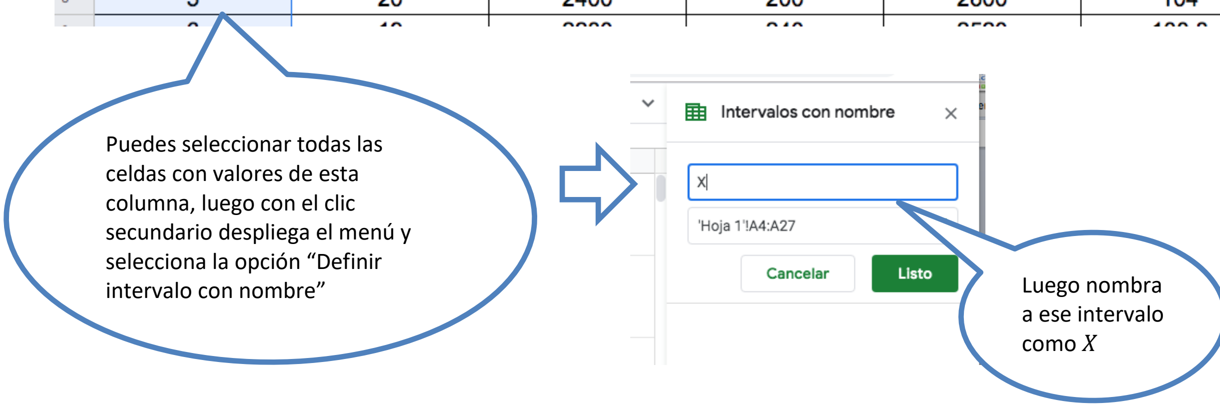
Ya habrás notado el potencial de la hoja de cálculo para resolver este tipo de problemas, sin embargo es posible que te estés preguntando sobre alguna forma para encontrar resultados con mayor precisión y que se puedan encontrar de manera directa (por medio de operaciones matemáticas). Sigue las instrucciones que se te dan a continuación y encontrarás una forma de solución precisa y directa.

1. Planteamiento del sistema

Recordemos el problema original:

> El costo de un kilo de cacahuates es de \$40 mientras que la nuez Wichita tiene un valor de \$120 el kilo, se desean crear 25 kilos de una mezcla de estos productos que tenga un costo de \$60 por kilo ¿cuántos kilos de cada producto se necesitan?

3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4	1	24	2880	40	2920	116,8
5	2	23	2760	80	2840	113,6
6	3	22	2640	120	2760	110,4
7	4	21	2520	160	2680	107,2
8	5	20	2400	200	2600	104



Repite el mismo procedimiento para nombrar la columna de los kilos de cacahuates como Y. Nota que ningún valor en la tabla cambia, sin embargo, puedes actualizar las fórmulas reemplazando la nomenclatura de la celda (por ejemplo, A4) por el nombre del intervalo en el que se encuentra esa celda (X o Y) ¿cómo quedan ahora las fórmulas?

Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo

Tomando en cuenta el trabajo que has realizado hasta el momento, explica qué representan las siguientes ecuaciones:

$$Y = 25 - X$$

$$120X + 40Y = 1500$$

Estas dos ecuaciones en simultaneo constituyen lo que denominaremos un ***sistema de ecuaciones lineales*** y debemos usarlo para conocer la solución exacta del problema.

2. Solución del sistema

El sistema de ecuaciones que modela el problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} &1) \quad & Y = 25 - X \\ &2) \quad & 120X + 40Y = 1500 \end{aligned}$$

Se constituye de dos ecuaciones lineales, cada una de ellas con dos incógnitas, para solucionar el sistema debemos ***reducirlo*** a una ecuación con una sola incógnita, ello lo haremos por medio de un método denominado ***igualación***.

Escribe ambas ecuaciones despejando la variable Y:

1) $Y =$
2) $Y =$

Ahora que tienes dos formas distintas de expresar el valor de Y, puedes igualarlos formando una ecuación cuya única incógnita es X, plantea la ecuación y soluciónala.

Ahora que conoces el valor de X que es solución del sistema, úsalo en la ecuación 1) para hallar el valor de Y

Escribe cuál es la solución exacta del problema.

Nombre					
Grupo		Fecha	DD	MM	AA
Sesión 3: Solución de problemas con 2 incógnitas					

Lee y soluciona los siguientes problemas haciendo uso del método de igualación.

1. **Arándanos y cacahuates:** El costo de un kilo de arándanos al mayoreo es de $150 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 40 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $80 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

2. **Almendras y arándanos:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $205 mientras que los arándanos tienen un valor de $150 el kilo, un empresario desea crear 30 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $160 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Lee y reflexiona sobre la respuesta a los siguientes problemas (los datos no son reales), luego, haciendo uso del método de igualación intenta resolverlos. Trata de explicar qué sucede en cada situación.

3. **Maní y cacahuate:** El costo de un kilo de maní al mayoreo es de $70 mientras que el cacahuate tiene un valor de $40 el kilo, un empresario desea crear 23 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $40 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial:
Método de igualación:
Explicación:

4. **Almendras y cacahuates:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $140 el kilo, un empresario desea crear 10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $140 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial:
Método de igualación:
Explicación:

5. **Almendras y cacahuates:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de $140 mientras que los cacahuates tienen un valor de $90 el kilo, un empresario desea crear

10 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $30 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial:
Método de igualación:
Explicación:

6. **Cacahuates y arándanos:** El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $50 mientras que los arándanos tienen un valor de $80 el kilo, un empresario desea crear 35 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $150 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Tu respuesta inicial:
Método de igualación:
Explicación:

Anexo 3: Problemas diseñados, pero no aplicados en este estudio

TAREA 2:

Disposición: para trabajo en parejas.

Lugar: Sala de cómputo.

Objetivo: Analizar modelos gráficos para la solución de problemas en contexto real.

La liebre y el Halcón: La velocidad es fundamental para la supervivencia de las liebres, una liebre común puede correr a 18 metros por segundo. Por su parte, el halcón peregrino ostenta el título del ave voladora más rápida del reino animal. Con una técnica de caza de caída en picado, esta ave rapaz es capaz de ver a sus presas hasta a 3 kilómetros de distancia y atacarlas a una velocidad de hasta 88 metros por segundo.

Si una liebre se percata de que un halcón peregrino viene en su ataque justo cuando este ya se encuentra a una distancia de 1000 metros y emprende la huida hacia su madriguera logrando salvarse justo a tiempo, ¿podrías estimar la distancia a la que se encontraba la liebre de su madriguera? Realiza un gráfico de la situación y compáralo con el que encontrarás en la siguiente liga: https://ggbm.at/wdvmqayh

Cuaresma. L (2012) Azor atacando a una liebre [acuarela] Recuperado de http://cuaresmapinturanaturaleza.blogspot.com/2012/02/cetreria-ii-bajo-vuelo.html

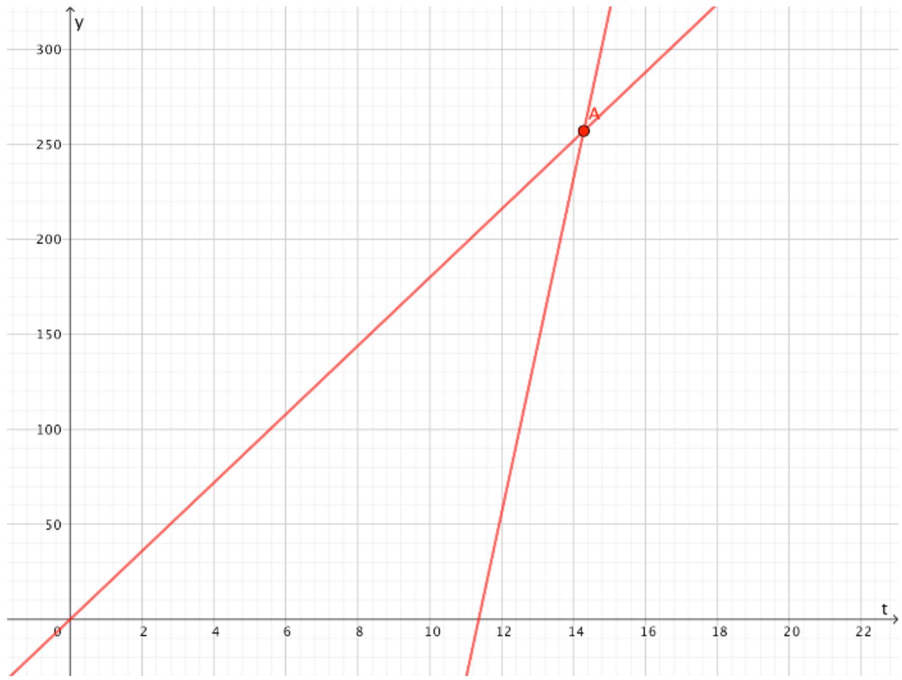
Para la solución de este problema se sugiere solicitar a los estudiantes realizar bosquejos gráficos de la situación en Geogebra y compartirlos vía internet para ser proyectados discutidos y posteriormente comparados con la construcción alojada en la liga (se sugiere previamente descargar la construcción en el equipo del docente pues la liga puede tardar en cargar).

Para la solución del problema se escogerá de entre las producciones de los estudiantes y la presente en la liga, aquella que en consenso se considere que es la que mejor modela la situación, en cualquiera de los casos la solución del problema consistirá en el establecimiento de dos funciones lineales que modelen los desplazamientos de la liebre y el halcón en función del tiempo; si el modelo escogido es el presente en la liga además se sugiere hacer notar a los estudiantes que la longitud de la trayectoria del halcón puede aproximarse como la suma de la distancia inicial a la liebre con la distancia de la liebre a su madriguera, de esta manera las ecuaciones que modelarían el problema serían:

$$\begin{Bmatrix} (1) & y = 18t \\ (2) & 1000 + y = 88t \end{Bmatrix}$$

Donde la incógnita y corresponde a la distancia en metros de la liebre a su madriguera y t al tiempo en segundos que tarda en llegar a ella.

Se sugiere realizar el gráfico de ambas funciones en Geogebra para guiar la discusión con los estudiantes al reconocimiento del punto de intersección entre ambas como un representante de la solución del problema.



Para la determinación de las coordenadas del punto se sugiere hacer uso de la opción "punto en intersección" de Geogebra, no obstante, es recomendable hacer uso del método de sustitución para encontrar la solución exacta del problema.

Al sustituir 1) en 2) se obtiene la ecuación:

$$1000 + 18t = 88t$$

Cuya solución sería:

$$t = \frac{100}{7} \approx 14.286$$

De manera que al sustituir ahora el valor de t en 1) obtenemos:

$$y = 257.143$$

De manera que la madriguera debe estar aproximadamente a 257.143 metros de la liebre.

Errores que se pueden presentar:

- Cualquier error asociado al manejo del software.

- Confundir las gráficas de las ecuaciones con los desplazamientos que realizarían la liebre y el halcón.
- Errores asociados a la manipulación algebraica del sistema (si se hace uso de algún método sintáctico).

TAREA 3:

Disposición para trabajo en parejas.

Lugar: Salón de clase.

Objetivo: Resolver problemas de modelización matemática que involucren el levantamiento de datos reales para el planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Cambio de recipiente: Observa con detenimiento los recipientes que el docente ha llevado al salón. Debes predecir cuánto tiempo tardará el nivel del agua en igualarse en ambos recipientes luego de que la llave sea abierta, para ello puedes tomar las medidas que sean necesarias, pero no podrás abrir la llave del agua. Registra además el tiempo y los cambios ocurridos cuando el docente abra la llave.

El docente llevará al salón dos recipientes con forma de prisma y preferiblemente de bases de distinta superficie, uno de los recipientes estará lleno de agua y tendrá un grifo en la parte inferior que permitirá que el agua salga con el objetivo de llenar el otro recipiente. De esta manera se tendrán dos depósitos de agua para los que el nivel de ésta irá cambiando conforme pase el tiempo en el que el grifo se encuentre abierto como lo muestra la ilustración.

Los estudiantes podrán tomar medidas de los recipientes y durante un lapso de 5 segundos (valor que puede cambiar según el flujo de agua) el docente abrirá el grifo permitiendo que el agua de un recipiente pase al otro, así los estudiantes tendrán una medida de tiempo y una variación en los niveles del agua para que puedan plantear un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{Bmatrix} (1) \quad h_1(t) = H_1 - at \\ (2) \quad h_2(t) = H_2 + bt \end{Bmatrix}$$

Donde h_1 y h_2 son los niveles del agua de ambos recipientes en función del tiempo, H_1 y H_2 los niveles iniciales de ambos recipientes y a y b la razón de cambio del nivel del agua en función del tiempo.

Se plantea el método de eliminación como sugerencia para el trabajo con este sistema.

Errores que se pueden presentar:

- Cualquier error asociado al levantamiento de datos (toma de medidas de superficie, tiempo y volumen).
- Errores en la identificación de las incógnitas o en el planteamiento del sistema.
- Errores asociados a la manipulación algebraica del sistema.

TAREA 4:

Disposición: para trabajo individual.

Lugar: Sala de cómputo.

Objetivo: Resolver problemas de modelización matemática que involucren el planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Pañales: El señor Vicente y su esposa Karla están esperando un bebé; una de las discusiones que han tendido últimamente tiene que ver con la posibilidad de usar pañales lavables o desechables, el señor Vicente se inclina por la opción de pañales lavables de tela, los cuales cuestan en promedio $470 MXN cada uno, duran de por vida y su lavado cuesta aproximadamente 50 centavos; la señora Karla prefiere comprar pañales desechables pues son más económicos y no necesita lavarlos, el precio del pañal desechable más económico del mercado es de $1.33 MNX y el del más costoso es de $5.36 MNX (puedes ingresar a la siguiente liga para conocer más sobre los precios http://www.profeco.gob.mx/encuesta/brujula/bruj_2011/bol200_panales.asp). Si tienes en cuenta únicamente el factor monetario ¿cuál de las dos opciones recomendarías a la pareja? ¿por qué?

Se espera que, en un primer momento, los estudiantes asuman valores concretos para las variables puestas en juego: el valor de un pañal desechable, el número de pañales que usa a diario un niño, el número de pañales de tela que se necesitan y el tiempo que se espera que el niño use pañales. De esta manera, un cálculo aritmético con los valores en concreto puede llevarlos a tomar una decisión a favor de alguna de las dos opciones, por ejemplo, si se asume un costo por pañal desechable de $3, una cantidad de 5 pañales diarios durante 2 años y medio, la necesidad de 10 pañales de tela lavando a diario se tiene:

$$I_{desechable} = 3 \times 5 \times 365 \times 2.5 = 13687.5$$

$$I_{tela} = 470 \times 10 + 365 \times 2.5 \times 0.5 = 5156.25$$

Evidentemente al asumir estos valores el uso de pañales desechables es más costoso, no obstante asumiendo otros datos los resultados pueden variar, es por ello que se recomienda guiar a los estudiantes al establecimiento de expresiones funcionales tales como por ejemplo el valor de la inversión en función del tiempo que el niño usa pañales, de esta manera puede llegarse al establecimiento de un sistema de ecuaciones cuya solución implique una conclusión en relación con el tiempo en el que una opción es mejor que otra, por ejemplo:

Se asumen los mismos datos anteriores salvo por el tiempo de uso de pañales, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} &1) \quad I = 15t \\ &2) \quad I = 4700 + 0.5t \end{aligned}$$

Donde t corresponde al número de días que el niño usará pañales e I a la inversión monetaria correspondiente.

Al solucionar el sistema se obtendría $t = 324.13$ e $I = 4862.07$ de manera que se podría concluir que la inversión de pañales desechables es mayor a partir de 325 días de uso; conclusión que puede variar si se realizan otros supuestos iniciales.

Errores que se pueden presentar:

- Errores en el planteamiento del sistema de ecuaciones asociado.
- Errores en la manipulación sintáctica del sistema
- Errores asociados al mecanismo de aproximación que los estudiantes escojan (gráfico o tabular)

Anexo 4: Resultados de la evaluación diagnóstica

#	Pseudónimo	Competencia gráfica	Competencia simbólica	Competencia analítica
1	AC	NP	NP	NP
2	AH	2	2	1
3	CR	NP	NP	NP
4	CG	3	3	1
5	DM	1	1	1
6	DO	3	1	1
7	EM	2	3	2
8	EMn	2	1	2
9	EG	1	2	1
10	ED	3	3	3
11	GG	3	3	2
12	IA	3	3	3
13	JC	3	3	2
14	JE	2	1	2
15	KV	2	2	2
16	LB	3	3	3
17	LL	2	2	2
18	LG	3	2	1
19	MS	2	1	1
20	MA	1	1	1
21	RR	2	1	1
22	SM	2	3	3
23	SB	2	1	2
24	YC	3	2	2
25	YL	2	3	2
	Promedios	**2.26**	**2.04**	**1.78**

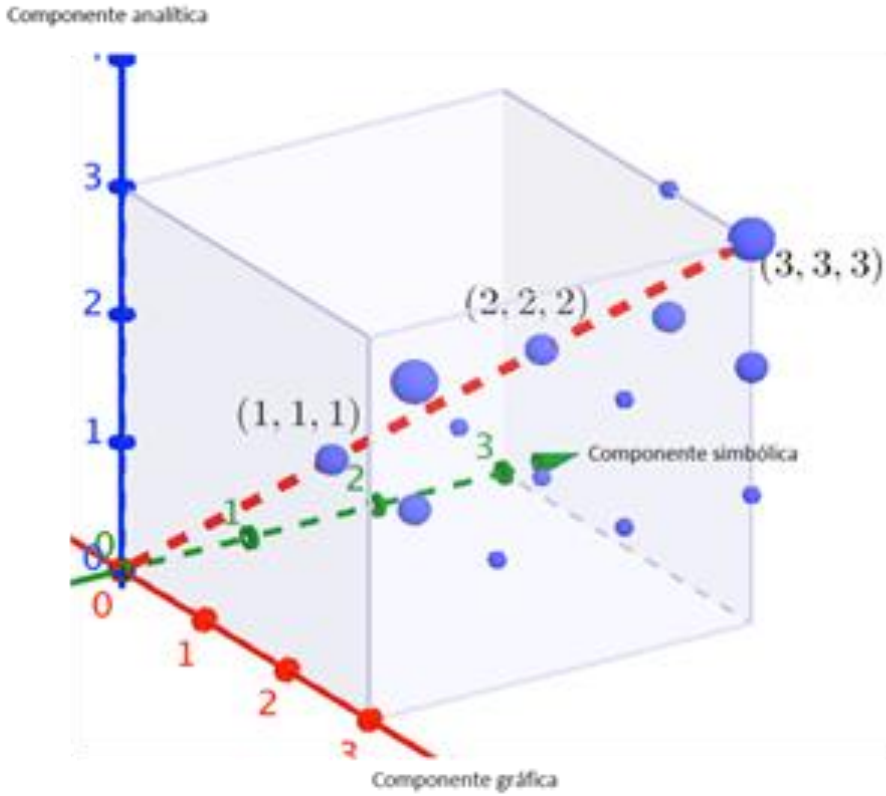
1: Desempeño bajo; 2: Desempeño medio; 3: Desempeño alto

Las filas resaltadas corresponden a los estudiantes seleccionados para el estudio de casos:

Verde: pareja de estudiantes de desempeño alto

Azul: pareja de estudiantes de desempeño medio

La siguiente gráfica muestra la distribución de los resultados en la prueba diagnóstica:



Anexo 5: ¿Qué ocurrió con los demás estudiantes?

Aun cuando el análisis de los resultados se enfocó en las acciones desarrolladas por dos parejas de estudiantes que tenían desempeños similares en las tres competencias que se evaluaron en el diagnóstico, vale la pena mencionar que el grupo en general mostró un desempeño muy similar en las hojas de trabajo. A continuación, se muestra un listado de las acciones que pueden describir el comportamiento general del grupo, para realizar esta descripción se observaron las hojas de trabajo y de cálculo que elaboraron todos los estudiantes y las intervenciones que tuvieron con el investigador.

En general, se puede decir que todos los estudiantes del grupo:

1. Lograron interpretar las relaciones que el problema inicial planteaba y desarrollar con ellas una hoja de cálculo que les permitió aproximar una respuesta al problema.
2. Lograron transferir las acciones con las que desarrollaron la hoja de cálculo para el primer problema, a los problemas que se les plantearon en la segunda hoja de trabajo.
3. Dieron *sentido* a la MAES como un mecanismo para aproximar la respuesta de los problemas por medio de una exploración sistemática de los valores.
4. Dieron uso a los *significados* de *variación* y *dependencia* al asignar valores distintos a las incógnitas de los problemas y explorar las relaciones que los gobernaban en cuanto a cantidad y precio.
5. Construyeron *significado* de la idea de *sistemas de ecuaciones lineales* como un conjunto de dos ecuaciones (condiciones) que modelan un problema y que deben cumplirse de manera simultánea para los mismos valores (incógnitas).

Ahora bien, luego de que se introdujera el método de igualación como una herramienta de manipulación sintáctica con la que los estudiantes podían resolver los problemas, los estudiantes del grupo en general:

1. Reconocieron la posibilidad de abordar todos los problemas con el mismo método.
2. Identificaron que, para la construcción del sistema, las ecuaciones en cada caso tenían estructura similar al del sistema que modela el problema original.
3. Tuvieron dificultades en la manipulación de las expresiones algebraicas al momento de transponer términos, esto aun cuando intentaron replicar el proceso que se tenía como ejemplo y con el que se solucionó el primer problema.

Con lo anterior, se podría concluir que las acciones de la pareja de estudiantes de desempeño medio fueron las que más se adecuaron al desempeño general del curso, mientras que las acciones de la pareja de estudiantes de desempeño alto sólo son representativas de lo que realizaron algunos estudiantes que habían sido catalogados con desempeño alto en manipulación sintáctica en la prueba diagnóstica.

Un caso que vale la pena mencionar

Aun cuando el análisis principal de este documento se centra en las producciones de las dos parejas de estudiantes ya mencionadas, es pertinente presentar la estrategia construida por otra pareja de la que sólo se tienen sus registros escritos y el archivo que construyeron en la hoja de cálculo. La Figura 6-1 muestra el trabajo de los estudiantes, quienes optaron por una estrategia en la que primero hallaron la repartición de un kilogramo del producto que costara $60.

Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
0.10	0.9	12	36	1200	48
0.2	0.8	24	32	1400	56
0.3	0.7	36	28	1600	64
0.4	0.6	48	24	1800	72
0.5	0.5	60	20	2000	80
0.6	0.4	72	16	2200	88
0.7	0.3	84	12	2400	96
0.8	0.2	96	8	2600	104
0.9	0.1	108	4	2800	112
1	0	120	0	3000	120
	Kilos de cahute =1-Kilos de nuez	0			0
0.25	0.75	30	30	1500	60
x25	x25				
6.25	18.75				
10	15	1200	600	1800	72
6.25	18.75	750	750	1500	60

Figura A5 hoja de cálculo construida por otra pareja de estudiantes

Es fácil observar que los estudiantes exploraron primero, y de manera sistemática, todas las posibles reparticiones de la unidad usando un solo decimal (salvo 0 kilogramos de nuez y 1 de cacahuate), de esta manera recorren 10 posibles casos y posteriormente señalan (cambiando el color de fuente a rojo) los valores de costo por kilo más cercanos por exceso y por defecto (56 y 64). El paso posterior que se puede observar es que los estudiantes realizan una media entre los valores de nuez y cacahuate con los que más se acercaron al precio por kilo deseado, con estos valores obtienen la respuesta exacta de lo que buscaban, un kilo de producto con un valor de $60, suponemos que por esto resaltan toda la fila cambiando el color de la fuente a rojo.

En las últimas filas de la hoja de cálculo los estudiantes retoman la condición original de la cantidad, para ello multiplican las cantidades que hallaron como respuesta por 25 y obtienen la solución definitiva para el problema. Nuevamente lo señalan cambiando el color de la fuente a rojo. No obstante, también hay una fila en la que suponemos realizan una nueva comprobación con los valores 10 y 15, quizá con el objetivo de validar sus fórmulas con las de alguna otra pareja. Esto dado que, hasta el momento, las fórmulas que habían usado diferían sustancialmente de las que usaron el resto de los grupos.

En la hoja de cálculo de estos estudiantes se manifiestan claramente procesos de producción de *sentido* y construcción de *significado* similares a los presentados por las parejas seleccionadas para el análisis; sin embargo, resulta importante el hecho de que la simplificación del sistema en este caso, permite la producción de *sentido* sobre el planteamiento del sistema en la medida en que se reconocen las interacciones entre los datos con o sin la presencia explícita de la condición de la cantidad que el problema impone.

Los resultados del grupo en general fueron similares, todos los estudiantes abordaron el problema por ensayo y refinamiento y, con la intervención del investigador, pudieron construir una hoja de cálculo que les facilitó el proceso de verificación de la condición para el costo que el problema impone. Varios de los estudiantes, también, tuvieron dificultad para coordinar las dos condiciones en simultaneo del problema, es decir, podían verificar la condición del precio con la hoja de cálculo, pero cometían el error de introducir cantidades que sumadas no totalizaban 25.

Con estos resultados se hace notorio que las etapas iniciales del ciclo de modelización permitieron construcción de *significados* en torno a las ideas de *variación y dependencia, relaciones de equivalencia* y *variable continua*; apoyaron la producción de *sentido* del *método de ensayo y refinamiento*, la *simplificación de ecuaciones* y brindaron una oportunidad para la posterior introducción del planteamiento del sistema en el que la sintaxis algebraica materializa y permite la manipulación de las interacciones entre los datos. Vale la pena ahora observar cómo se realizó esta incorporación de las herramientas sintácticas.