Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

UN ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE CONOCIMIENTO EN VARIABLE COMPLEJA: EL CASO DEL TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

Tesis que presenta:

José Gerardo Piña Aguirre

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Directora de la tesis:

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Ciudad de México Agosto, 2021

A mi familia,

porque sé que siempre puedo contar con ustedes.

*Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt)
por el apoyo económico brindado para mis estudios de maestría.*
José Gerardo Piña Aguirre
CVU: 1009928

Agradecimientos

Resulta imperativo iniciar agradeciendo a la persona que me motivó a que continuara con mis estudios de posgrado en Matemática Educativa. Este trabajo de investigación no podría haber iniciado de no ser porque varios aspectos de mi vida giraron en torno a la profesora Rosa Alicia Gámez de la Garza. A lo largo de mis estudios de licenciatura logré conocerla primero como mi profesora, posteriormente como mi mentora en mi labor docente, escenario donde entablamos una buena amistad, y gracias a que compartimos diversas formas de pensar en torno al ámbito educativo, le estoy completamente agradecido por haberme guiado y animado a que continuara con mis estudios en Matemática Educativa. Profesora, de no ser por usted yo no me hubiera animado a estudiar este posgrado, usted es el motor que propició mi continuo desarrollo profesional, muchas gracias por todo.

En segunda instancia quiero agradecerle al Pana*,* a quien conocí primero como mi profesor de Variable Compleja, y gracias a su excelente labor como profesor mi concepción sobre la práctica docente se trastocó. Pana, lo dije una vez y lo seguiré diciendo, eres el mejor profesor de matemáticas que he tenido, tus clases hicieron que cambiara la forma de ver el contenido matemático al que somos expuestos en los cursos de licenciatura. La selección del objeto matemático que abordamos en esta investigación también se vio influenciada por la forma en que me motivaste a trabajar en tu curso de Variable Compleja; muchas gracias por tus enseñanzas, aquellas que me alegra seguir cultivando en estos años de amistad.

Continuando con este trayecto descriptivo quiero agradecerles a cuatro de mis mejores amistades que se formaron en mis estudios de licenciatura. Jon, VH, Ale y Peila, no solamente hicieron que estudiar matemáticas fuera divertido, ya sea que platiquemos de aspectos académicos o de la vida en general, me motivan constantemente a seguir viviendo una vida que vale la pena vivir.

Cambiar de ciudad para iniciar mis estudios de posgrado fue mucho más fácil gracias a la buena amistad que entablé con Juli, Maxi y Kike. Las pláticas académicas, el chisme, las comidas, las noches de Catan, así como las de películas y series, hicieron que el transito de mi formación académica en este nuevo escenario fuera mucho más divertido de llevar. Son amistades que espero conservar por mucho tiempo, muchas gracias por todo Roomies.

Mi inmersión en esta disciplina conllevó a que cambiara la forma en la que me aproximaba a tratar de entender nuevos conceptos, por lo cual quiero agradecerle a la doctora Montiel, al doctor Cordero, al doctor Cantoral y a la doctora Acuña por las diversas reflexiones que se suscitaron en sus seminarios, lo que me llevo de éstos no solamente son conceptos e ideas, son formas de ver la vida.

Cabe destacar que mi constante formación personal y académica también se suscitó en el grupo de investigación a cargo de la doctora Farfán. Particularmente quiero agradecerle a Fabián por el apoyo constante en muchos de los aspectos que giran alrededor de los estudios de posgrado, e indudablemente quiero agradecerle a la doctora Farfán, gracias a su incondicional apoyo, guía y paciencia se genera un ambiente abierto al diálogo, en donde la discusión de ideas se enriquece por su amplia experiencia. Doctora, es usted un ejemplo a seguir, estoy entusiasmado por lo que hemos logrado y por lo que viene, muchas gracias por guiarme y acompañarme en esta nueva trayectoria de mi vida.

Aimee gracias por ser quien eres, por siempre estar a mi lado aunque nos encontremos a la distancia. No importa que tan rota se encuentre la taza, sé que siempre estarás ahí para que juntos la enmendemos y/o superemos. Ilygroberta.

Quiero extender un agradecimiento especial a Adriana por su constante apoyo en los tramites administrativos que se suscitaron en estos dos años de estudio, los cuales siempre fueron acompañados por la característica amabilidad y eficiencia que la distinguen.

Indudablemente quiero agradecerle por igual a las personas que no he mencionado en estas líneas, pero que de alguna u otra manera formaron parte de mi constante formación académica y personal en el transcurso de estos dos años de estudio de posgrado.

Finalmente, pero no por ello menos importante, quiero agradecerle a mi familia. A ustedes les dedico este trabajo por ser el soporte constante en mi vida, sin ustedes yo no sería quien soy ahora, ni quien seré en un futuro.

CONTENIDO

Resumen

En esta investigación realizamos un análisis histórico-epistemológico, guiado por los principios de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, cuyo principal objetivo fue develar las circunstancias socioculturales y epistemológicas que aportaron insumos para la consolidación del Teorema Integral de Cauchy.

Debido a la plétora de corrientes de investigación de corte histórico-epistemológico, cada una de ellas solapadas por diversos marcos teóricos de la Matemática Educativa, consideramos pertinente recalcar que en esta investigación reconocemos que la construcción de conocimiento matemático es de carácter situacional, por lo que valoramos que el conocimiento esta completamente arraigado y conformado por los escenarios socioculturales particulares en donde éste se geste a través de la actividad humana, aceptando incluso el hecho de que la propia construcción de conocimiento posee herencia cultural. Derivado de lo anterior, y buscando lograr nuestro objetivo, recurrimos al estudio de una obra original de Cauchy que data de 1814, la cual lleva por título *Sur les Intégrales Définies.* Particularmente, la herramienta metodológica que nos permitió estudiar las dimensiones sociocultural y epistemológica –abonando así a la problematización del saber matemático, en su componente epistemológica, alrededor del Teorema Integral de Cauchy– fue el Análisis Cualitativo de Contenido.

Uno de los principales resultados del estudio es una hipótesis en tanto a cómo se construye conocimiento en Variable Compleja. Sucintamente, conjeturamos que el derrotero que propicia la construcción de conocimiento alrededor del Teorema Integral de Cauchy emerge a partir de la generalización de resultados de la Variable Real. Es a partir de esta hipótesis epistemológica que buscamos configurar, como trabajo posterior, una situación de aprendizaje que nos permita develar prácticas –en los niveles de acción y actividad del modelo de anidación de prácticas de la Socioepistemología– con el objetivo de caracterizar el tipo de pensamiento matemático que posibilita la construcción de conocimiento en Variable Compleja.

Abstract

Guided by the principles of the Socioepistemological Theory of Mathematics Education, in this study we conducted a historical-epistemological analysis whose main objective was to unveil the sociocultural and epistemological circumstances that contributed to the consolidation of Cauchy's Integral Theorem.

Due to the plethora of historical-epistemological research in the discipline, each of them supported by different theoretical frameworks of Mathematics Education, we consider it pertinent to emphasize that in this research we recognize that the construction of mathematical knowledge is situational in nature, in this way we acknowledge that knowledge is completely rooted and shaped by the particular sociocultural scenarios where it is generated throughout human activity, we even accept the fact that the construction of knowledge itself has a cultural inheritance. Derived from the above, and seeking to achieve our objective, we resorted to the study of an original work by Cauchy dating from 1814, entitled *Sur les Intégrales Définies*. In particular, the methodological tool that allowed us to study the sociocultural and epistemological dimensions –thus contributing to the problematization of mathematical knowledge, in its epistemological component, around Cauchy's Integral Theorem– was the Qualitative Content Analysis.

One of the main results of the study is a hypothesis relative to how knowledge is constructed in Complex Analysis. Succinctly, we conjecture that the conduit that propitiates the construction of knowledge around Cauchy's Integral Theorem arises from the generalization of results in Real Analysis. It is from this epistemological hypothesis that we seek to configure, as a subsequent work, a learning situation that will allow us to unveil practices –at the levels of action and activity of the nesting model of practices in Socioepistemology– with the purpose of characterizing the type of mathematical thinking that enables the construction of knowledge in Complex Analysis.

Introducción

En este trabajo se presenta el desarrollo de una investigación que hemos configurado a través de un estudio histórico-epistemológico, anclado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, sobre la construcción social de conocimiento en Variable Compleja. Debido a que se ha identificado a los orígenes de la Variable Compleja dentro del aparato matemático del siglo XVIII, al iniciar esta investigación nos propusimos como objetivo comprender cómo fue el desarrollo ulterior en la construcción de conocimiento dentro de este campo de la matemática, para posteriormente caracterizarlo y develar los puntos de incidencia o divergencia que tiene con la Variable Real. A continuación presentamos una breve descripción del material que estructuramos en un total de nueve capítulos.

En el primer capítulo, titulado Motivaciones, se expone una reflexión de mis estudios de licenciatura en matemáticas. Particularmente se exhibe mi interés por el tipo de conocimiento al que somos expuestos en un curso de Variable Compleja, y a raíz de pláticas subsecuentes con la doctora Farfán robustecimos esta reflexión y configuramos tres preguntas que nos hicimos al inicio del estudio. Con el objetivo de fortalecer nuestro análisis reflexivo procedimos a realizar una búsqueda de literatura que nos permitiera acercarnos a diversos estudios, desde la Matemática Educativa, que giraran en torno a la Variable Compleja. Los resultados de esta búsqueda de antecedentes se encuentran en el capítulo titulado Revisión de Literatura.

La lectura de las investigaciones que recopilamos de diversas bases de datos, revistas de investigación y la biblioteca Jerzy Plebanski del Cinvestav desembocó en una caracterización de éstas, lo cual nos permitió distinguir entre dos tipos de investigación que se han realizado al considerar objetos matemáticos de la Variable Compleja. Particularmente el articulo de Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo (1987), en donde se identifica a los orígenes de la Variable Compleja a través de un fenómeno de generalización, es el desencadenador de nuestra investigación. El desarrollo ulterior de conocimiento en esta área de la matemática es el motor que nos motivó a seleccionar un objeto particular de ella, con el objetivo de desentrañarlo a través de una visión que nos permita estudiar las circunstancias que permearon su construcción. El objeto matemático que decidimos estudiar es conocido en la literatura escolar como el Teorema Integral de Cauchy, por lo que en el capítulo titulado Delimitación del Objeto de Estudio presentamos las reflexiones de diversos autores de libros de texto escolares alrededor de este teorema, su descripción como 'fundamental' y/o 'central' a la Variable Compleja es lo que nos motivó a seleccionarlo; cerramos este capítulo con una línea del tiempo donde presentamos a los personajes que permitieron la consolidación y desarrollo del Teorema Integral de Cauchy.

La identificación de una memoria de Cauchy que data del año 1814 como el primer escrito que aporta insumos a la consolidación del teorema nos obligó a preguntarnos ¿cómo realizar un estudio que busca develar la forma en que se construyó este conocimiento?, una respuesta a esta pregunta la encontramos en el capítulo titulado La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en el cual presentamos los elementos que nos permitieron identificar a esta vertiente de la Matemática Educativa como un lente teórico que nos provee de una visión para entender y desentrañar la construcción del Teorema Integral de Cauchy desde una perspectiva social.

Con el objetivo de dar respuesta a las preguntas y el objetivo de investigación presentes en el capítulo cinco, en el capítulo subsecuente describimos al Análisis Cualitativo de Contenido como una herramienta metodológica que nos orientó y nos permitió organizar el análisis de la memoria de Cauchy de 1814. En el capítulo siete, titulado Análisis de la Obra, procedemos a realizar un Análisis Textual de la memoria de Cauchy a través de una caracterización que nos propicia Crespo (2005), y gracias a un Análisis Contextual de la obra, al mostrar las circunstancias socioculturales que permitieron su consolidación, develamos el escenario de construcción en donde se suscitan los orígenes del Teorema Integral de Cauchy.

En el capítulo ocho presentamos las conclusiones de nuestro Análisis Cualitativo de Contenido, y finalmente en el capítulo nueve se encuentran las prospectivas que se configuran a raíz de esta investigación.

Además de estos nueve capítulos presentamos tres anexos en los que describimos los acercamientos que fueron necesarios para la delimitación y comprensión de nuestro objeto de estudio en la memoria que analizamos. En el Anexo 1 se encuentra una traducción y transcripción del apartado que es nuestra fuente de datos principal, seguido por el Anexo 2 en donde, a través de comprender y complementar esta sección de la obra, describimos el proceder matemático de Cauchy. Finalmente, en el Anexo 3, explicamos el motivo por el cual se identifica al Teorema Integral de Cauchy en esta sección de la memoria.

Consideramos importante aclarar que las fuentes a las que hacemos referencia a lo largo de este escrito se encuentran en español, inglés y francés. La traducción de las citas de los textos en inglés es libre, mientras que las de francés fueron corroboradas con ayuda de https://www.deepl.com/translator. Debido a que las citas de la obra original de Cauchy de 1814 se encuentran en el francés de la época, si la longitud del texto traducido es menor o igual a cuarenta palabras su traducción al español se encuentra entre paréntesis posterior al texto original, en caso contrario la traducción se redactó en el párrafo siguiente.

Finalmente, debido a que estamos utilizando en conjunto las palabras 'variable' y 'compleja' para hacer alusión a dos ideas diferentes, nos limitamos a utilizar Variable Compleja para hacer referencia al área de la matemática que utiliza al campo de los números complejos como variables, a las cuales nos referimos como variable(s) compleja(s). Similarmente hacemos la distinción entre Variable Real y variable(s) real(es).

1. Motivaciones

Hacer una reflexión sobre mis estudios de licenciatura en matemáticas me permitió identificar a la unidad de aprendizaje de Variable Compleja como un punto de inflexión en mi concepción del rol de la demostración en los cursos de matemáticas. En esta unidad de aprendizaje la presentación del material se centró en la demostración de teoremas, así como conexiones e implicaciones entre éstos. En su momento observé que diversos resultados de esta unidad de aprendizaje estaban conectados, de una u otra forma, a resultados dentro de la Variable Real. Pese a esto, uno de los resultados que me impactó en su momento es el siguiente principio.

Principio de deformación de caminos:
Sean C_1 y C_2 contornos cerrados simples positivamente orientados, donde C_2 es interior a C_1. Si una función f es analítica en la región cerrada que forman esos contornos y los puntos situados entre ellos, entonces $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

Churchill y Brown (1992, p.132)

Churchill y Brown (1992) comentan que este principio "nos dice que si C_1 se deforma continuamente en C_2 pasando siempre por puntos en los que f es analítica, el valor de la integral de f sobre C_1 no cambia"(p.132). En mi experiencia la sorpresa de este resultado radicó en que *no podía creer* lo estipulado por el principio, es un resultado al cual no podía encontrarle homólogo en variable real, y la lectura reiterada de la demostración, entendiendo cada una de las implicaciones lógicas que conectan las hipótesis del teorema con la tesis de éste, no esclarecía la validez del resultado, lo que deviene en mi cuestionamiento sobre el rol de la demostración en el aula. La comunidad de profesionales en la matemática ha establecido a través de teoremas una comunicación efectiva de resultados, bajo el precepto de que sus respectivas demostraciones posibilitan el convencimiento de que lo estipulado por el teorema es cierto, sin embargo, en este caso, desde mi perspectiva, el resultado trascendió estos aspectos, se instauró en mi un gusto que no había experimentado en mis estudios previos de licenciatura.

Años más tarde, en este nuevo escenario de posgrado, en una plática con la doctora Rosa María Farfán Márquez nos percatamos de un punto de encuentro alusivo a mi experiencia, el *no poder creer* un resultado dentro de la Variable Compleja es algo que compartimos. La doctora se encuentra con este conflicto al enfrentarse al teorema que estipula que toda función compleja, diferenciable una vez en un punto del plano, es infinitamente diferenciable en ese punto –resultado que no es válido en la variable real– Sentimientos como este podrán variar de persona a persona, el conocimiento especializado de algún tópico de la matemática puede ser un factor que influya en reconocer el vínculo entre estos dos campos de conocimiento, la Variable Real y la Variable Compleja, a pesar de esto aceptamos que éstos se han originado y han tenido un desarrollo histórico que suele ser opacado, e incluso olvidado, por la presentación sistematizada del conocimiento dentro del sistema educativo, ya sea en libros de texto escolares o la presentación de los conceptos en el salón de clase. Derivado de lo anterior, las preguntas iniciales que nos formulamos al inicio de esta investigación fueron ¿de qué naturaleza es la Variable Compleja que no permite que creamos en algunos de los resultados que la conforman?, ¿será que estamos muy atados al razonamiento dentro de la Variable Real?, de ser así, ¿cuál es el razonamiento en Variable Real que no te hace plausibles resultados de la Variable Compleja?

Con el objetivo de robustecer nuestro análisis reflexivo decidimos indagar en investigaciones desde la Matemática Educativa que se han realizado alrededor de la Variable Compleja. Los resultados de esta búsqueda se encuentran en el siguiente apartado.

2. Revisión de literatura

Siebert (2019) alude al término revisión de literatura como el proceso de identificación, lectura y aprovechamiento de fuentes pertinentes que permiten planear, realizar y comunicar investigaciones en Matemática Educativa. Estipula que "la búsqueda de literatura juega un rol esencial en el diseño, desarrollo y publicación"(p.17) de investigaciones en la disciplina, por lo que sugiere considerar los siguientes aspectos para el desarrollo efectivo y exhaustivo de la búsqueda de bibliografía.

i. Identificación de fuentes prometedoras con el objetivo de elaborar una lista de lecturas prioritarias, previo a emprender una lectura exhaustiva.

ii. Utilizar y actualizar regularmente la lista de lecturas prioritarias para poder leer y extraer información importante de las fuentes más pertinentes.

iii. Dada la necesidad especifica de la investigación, extraer la información necesaria de la lista de lecturas prioritarias para abordarlas

Con base en estos aspectos procedimos a documentarnos en estudios realizados desde la Matemática Educativa alrededor de Variable Compleja. Para la recopilación de las investigaciones indagamos en diversas revistas, bases de datos y en la biblioteca de Física, Matemáticas y Matemática Educativa Jerzy Plebanski del Cinvestav-IPN, después de una primera lectura de éstas refinamos nuestra lista de lecturas prioritarias al descartar o ampliar la lista de estudios que abordan aspectos de la Variable Compleja desde la Matemática Educativa. Una vez refinada nuestra lista de lecturas prioritarias procedimos a aislar algunos elementos transversales en cada uno de los estudios, lo que nos permitió estructurar los resultados de nuestra revisión de literatura en dos apartados. En el apartado titulado 'Revistas, Bases de datos y Jerzy Plebanski' sintetizamos los estudios al describir el objeto, el objetivo, los recursos teóricos y metodológicos, y los respectivos resultados de cada investigación. La identificación de estos elementos nos permitió caracterizar a las investigaciones en dos tipos, los cuales presentamos en el apartado titulado 'Caracterización de las investigaciones en Variable Compleja'.

Dada esta caracterización de las investigaciones acotamos la naturaleza de nuestra investigación, cuyos resultados apuntan a que el desarrollo de conocimiento en Variable Compleja no necesariamente se desprende de la noción que le dio origen –un fenómeno de generalización– por la cual, después de mostrar esta caracterización, presentamos un breve resumen de algunos de los resultados del estudio de Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo (1987), un artículo que trabaja en torno a los orígenes de la Variable Compleja.

2.1. Revistas, Bases de datos y Jerzy Plebanski

La exploración en revistas y bases de datos nos develó un total de quince documentos. Después de una lectura inicial de éstos los filtramos dependiendo de si su contenido apuntaba a estudios dentro de la disciplina, además, gracias a las citas mencionadas en algunos de ellos obtuvimos siete artículos más que resultaron de interés. Particularmente identificamos a una investigadora que busca configurar un marco basado en evidencias empíricas sobre cómo especialistas en la matemática abordan conceptos de la Variable Compleja.

Por otro lado, la lectura de las investigaciones que encontramos en la biblioteca del Cinvestav propició la búsqueda y recolección de un articulo de investigación de 1987 relativo a la noción de logaritmo de números negativos, así como un artículo de Cantoral y Farfán publicado en 2008 que gira en torno a una situación de aprendizaje enmarcada en una ingeniería didáctica.

Con el objetivo de caracterizar estas investigaciones, las sintetizamos al presentar el objeto y objetivo del estudio, los recursos teóricos y metodológicos implementados, así como sus respectivos resultados. Para comunicar nuestros hallazgos decidimos estructurar esta sección en cuatro categorías. En la categoría titulada ‘Números Complejos’ resumimos las investigaciones cuyos resultados devienen al considerar como objeto matemático de estudio a los números complejos. Bajo el título ‘Variable Compleja’ describimos cinco artículos y una tesis doctoral en donde los objetos de estudio son funciones de variable compleja, su continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad. Después de esto, en la categoría ‘Uso de Tecnología Digital’, se encuentran las síntesis de los estudios que incorporaron tecnología digital con el objetivo de recopilar datos del estudio, o bien utilizan tecnología digital para un manejo dinámico de características particulares de los objetos tratados. Posterior a esta descripción, en la cuarta categoría, sintetizamos los estudios realizados en el departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, lo que nos da pie a presentar algunos aspectos del artículo de Cantoral, Farfán, Rigo y Hitt de 1987 donde se identifica a los orígenes de la Variable Compleja a través de un fenómeno de generalización. A continuación iniciamos con la categoría Números Complejos.

Números Complejos

Interesados en los procesos de convención y argumentación matemática, Martínez y Antonio (2009) presentan un estudio sobre construcción de conocimiento. La autora y el autor indagan cómo diversas alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de número complejo. Con el objetivo de propiciar la aceptación de los números complejos y la operatividad de la raíz cuadrada de números negativos en estudiantes de nivel medio superior, diseñan una secuencia de tareas dentro de un contexto de cálculo de raíces de polinomios. Los resultados muestran que a pesar de que los estudiantes externaban que las raíces cuadradas de números negativos no existen, la secuencia de tareas los indujo a operar con ellas para encontrar y comprobar las raíces de los polinomios dados.

Buscando identificar concepciones relativas al concepto de número complejo, Nordlander y Nordlander (2012) diseñan un cuestionario que busca categorizar las concepciones mentales de estudiantes suecos de ingeniería respecto a este concepto. La autora y el autor reportan que las respuestas obtenidas evidencian una variedad de imágenes conceptuales –en el sentido de Tall y Vinner (1981)– de cómo los estudiantes piensan este objeto. Señalan que una de las contribuciones del estudio se debe a la clasificación de las imágenes conceptuales, las cuales podrían ser utilizadas como una herramienta para identificar, describir y entender mejor el pensamiento y las concepciones de los estudiantes alrededor de los números complejos.

A diferencia de las dos investigaciones anteriores, un eje transversal de los siguientes estudios son las múltiples representaciones de un número complejo.

Danenhower (2000), con el lente teórico de la APOE, diseña una secuencia de tareas con el objetivo de caracterizar los niveles de comprensión de estudiantes universitarios al transitar entre cuatro representaciones de números complejos –la algebraica $z = x + iy$, la forma vectorial $z = (x, y)$, la forma exponencial e^{iz} y la representación simbólica, la cual consiste en reconocer a un número complejo por la letra z–. El autor reporta que los estudiantes entienden a nivel de objeto la forma algebraica y vectorial, mientras que hay una concepción proceso para la representación exponencial. Considerando otra comunidad de estudio, en Karakok et al. (2015) se entrevistaron a tres profesores de matemáticas de bachillerato después de que completaron un curso de desarrollo profesional relativo a números complejos. Con el objetivo de comprender las formas en que los profesores razonan y relacionan las múltiples representaciones de números complejos —algebraica, exponencial y simbólica— se incorporó al marco teórico el principio de dualidad de Sfard (1991), el cual describe dos tipos de concepción, el operacional y el estructural. Uno de los resultados principales del estudio afirma que los participantes no tenían una conceptualización dual de cada representación de los números complejos y, por tanto, no tenían una conceptualización dual de los números complejos. Por último, en Panaoura et al. (2006) se reportan los resultados de una investigación cuya población de estudio fueron estudiantes griegos de bachillerato, a los cuales se les presentaron una serie de tareas con la finalidad de analizar las representaciones involucradas en el trabajo con desigualdades que involucran el módulo de un número complejo. La secuencia de tareas que resolvieron involucra procesos de tránsito entre la representación algebraica y geométrica –entendiendo por representación algebraica la forma algebraica de un número complejo, y por representación geométrica los subconjuntos del plano que satisfacen alguna desigualdad– El estudio presenta datos porcentuales que permiten acentuar la solución correcta de las actividades, lo que les permitió concluir que los alumnos que optaron por la representación algebraica responden correctamente a las tareas, en contraste con los que utilizan la representación geométrica. Aunado a esto, los resultados de la investigación exhiben que los estudiantes interpretan ambas formas de representación de números complejos como dos objetos matemáticos autónomos.

Un segundo eje se ve reflejado en el estudio de la aritmética de los números complejos. En Nemirovsky et al. (2012) se investigan las representaciones geométricas que futuros profesores de matemáticas, a nivel de secundaria, poseen respecto a la suma y multiplicación de números complejos. En este estudio se proporcionó a los futuros profesores con cinta, puntos adhesivos y cuerda, desafiándolos a utilizar estos artículos en un piso de baldosas con la finalidad de que encontraran formas en las que pudieran sumar y multiplicar números complejos. Se reporta que los gestos de los participantes reflejan una concepción cada vez más generalizada de la aritmética involucrada, liberándose de la manipulación algebraica y permitiendo reconocer errores en dicha manipulación. En este mismo tenor, Soto-Johnson y Troup (2014) estudiaron el razonamiento esquemático, las inscripciones y los gestos que estudiantes de licenciatura expresaron al momento de resolver una serie de tareas que involucran la interpretación geométrica de operaciones con números complejos, las tareas se configuraron a partir del libro de Needham (2000) titulado Visual Complex Analysis. Los resultados del estudio indican que los participantes en un inicio razonan mediante inscripciones algebraicas, para luego pasar a razonar geométricamente. A su vez se reporta que la imposibilidad de verbalizar su proceder, derivado de su razonamiento geométrico, los remite a utilizar el pizarrón como medio de comunicación para sus respuestas, particularmente se percataron de que los gestos sirven como un enlace entre el empleo excesivo de palabras y las inscripciones en la pizarra.

Con esto concluimos nuestra descripción de las investigaciones que tienen por objeto de estudio a los números complejos. A continuación presentamos la síntesis de los estudios que encontramos en nuestra revisión de literatura que trabajan con diferentes objetos de la Variable Compleja, particularmente en esta categoría describimos los trabajos de Soto Johnson y colaboradores, los cuales buscan construir un marco basado en evidencias empíricas que les permita describir cómo especialistas en la matemática trabajan con diferentes conceptos solapados por la Variable Compleja.

Variable Compleja

A través de considerar la cognición corpórea el trabajo de Soto-Johnson et al. (2012) investiga el uso de metáforas al comunicar distintos conceptos de la Variable Compleja, como lo son la suma, el producto, el cociente, la potenciación de números complejos, las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y la continuidad, la diferenciación e integración de funciones complejas de variable compleja. Los participantes en el estudio, cinco doctores en matemáticas y un doctor en física, fueron grabados en video al resolver una serie de tareas. El análisis de los videos les permitió a las y los autores concluir que los participantes, al tener la necesidad de impartir un concepto, mostraban su sentido de comprensión a través de representaciones corpóreas dinámicas mezcladas con metáforas. Las metáforas eran inventadas o reinterpretadas basadas en experiencias personales, aludiendo a que estos elementos les permitirían trabajar a sus estudiantes con los conceptos abordados.

En la investigación de Soto-Johnson et al. (2012) se estipula que este estudio forma parte de una investigación más amplia que busca crear un marco, basado en evidencias empíricas, que describa cómo especialistas en la Variable Compleja perciben y razonan geométricamente conceptos centrales de esta rama de la matemática. En los párrafos siguientes sintetizamos algunos de los trabajos que inciden en la configuración de este marco.

Un primer ejemplo lo encontramos en Soto-Johnson et al. (2016). Con el objetivo de investigar el razonamiento de un grupo de matemáticos y físicos, relativo a la continuidad de funciones complejas, las autoras y autores adoptan las nociones de Schiralli y Sinclair de Conceptual Mathematics (CM) e Ideational Mathematics (IM). A través de la transcripción de una entrevista video grabada de 90 minutos, resaltando los gestos utilizados que acompañan a las inscripciones geométricas y algebraicas utilizadas por los participantes, se examinaron los mecanismos que utilizaron para comunicar sus ideas de continuidad. Los resultados indican que los especialistas tienden a utilizar íntegramente ambos dominios, las metáforas IM tienden a ser derivadas de la experiencia en respuesta a acciones pedagógicas, en preparación a acciones futuras, o para ayudar a sus propios razonamientos; y debido a que las metáforas IM no encapsulan completamente la estructura de la definición de continuidad épsilon-delta, utilizan la transición al lenguaje CM para hacer de sus declaraciones más rigurosas.

En el mismo orden de ideas, el estudio de Oehrtman, Soto-Johnson y Hancock (2019) explora el desarrollo de la construcción de significados matemáticos por un grupo de cinco doctores en matemática que realizan investigaciones en Variable Compleja. Con el objetivo de dilucidar las interpretaciones matemáticas relativa a la diferenciación e integración de funciones complejas de variable compleja se rescataron aspectos simbólicos, formales y corpóreos del razonamiento de los participantes al contestar una serie de tareas propuestas en una entrevista semi-estructurada. El análisis de las entrevistas centró la atención en lenguaje geométrico, las inscripciones geométricas y los gestos que utilizaron los involucrados en el estudio. La autora y los autores reportan que razonar geométricamente respecto a la diferenciación e integración compleja llevó a los matemáticos a hacer referencia a los objetos análogos en la variable real, observando que gran parte de las construcciones de los significados se manifestaron mediante una interacción entre el razonamiento concreto y el razonamiento formal, en lugar de un predominio de uno de ellos.

Siguiendo este hilo conductor, en Soto-Johnson et al. (2011) se describe la flexibilidad en el trabajo de un matemático, de nombre Ricardo, al operar con las múltiples representaciones de números complejos y al realizar distintas operaciones que involucran funciones de variable compleja. Esta descripción se logra al utilizar métodos fenomenológicos y microetnografía para analizar las respuestas de Ricardo al momento de enfrentarse a tareas que involucran los objetos matemáticos antes expuestos. En los resultados de la investigación se reporta que Ricardo utiliza diagramas, gestos y representaciones geométricas para describir lo que él entiende por función de variable compleja. Particularmente, las transformaciones lineales le resultaron fundamentales para vincular expresiones analíticas e interpretaciones geométricas, esto a través de caracterizar a las funciones lineales de variable compleja como transformaciones lineales en el plano real aunándole simetrías. Bajo este tenor, al considerar como objeto de estudio las funciones de variable compleja, en la investigación realizada por Villaraga et al. (2020) se presenta un modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas. Utilizando la teoría de la actividad de Leontiev, la autora y los autores construyen una metodología de carácter dinámico, en donde se utilizan tecnologías digitales, la historia de las matemáticas como recurso didáctico, la representación geométrica y procesos heurísticos, con el fin de propiciarle una herramienta a futuros docentes para ejercer su labor.

Finalmente, la tesis doctoral de Hancock (2018) –de la cual Soto-Johnson es asesora– considera como objeto de estudio la integral de funciones complejas. Utilizando como lente teórico y metodológico las ideas expuestas por David Tall (2013) y Toulmin (2003) se buscó revelar cómo estudiantes universitarios concilian sus encuentros con las idiosincrasias formales presentes en diversos teoremas de integración de funciones complejas. El estudio explora la argumentación colectiva que exhiben las y los estudiantes al trabajar con las hipótesis de diversos teoremas. Hancock concluye que ninguno de los participantes, al inicio del estudio, parecía confiado ni seguro sobre las premisas necesarias para emplear ciertos teoremas, reportando que posteriormente algunos de los participantes tienden a pensar en analogía con el caso real para abordar las tareas.

Con esto concluimos esta categoría en donde sintetizamos las investigaciones que abordan distintos objetos de la Variable Compleja. A continuación sintetizamos las investigaciones que han introducido tecnología digital como otra variable en sus estudios.

Uso de Tecnología Digital

La primera investigación que sintetizamos en este rubro es el trabajo de Wood y Bruch (1972). En este trabajo se presenta una forma en la que el software OLS, en existencia en la década de los 70's en la universidad de California en Santa Barbara, posibilita el trabajo con diferentes objetos de Variable Compleja, como lo son la integración y el mapeo de regiones en el plano complejo; afirmando que la contribución del software son los elementos visuales para una mejor ejecución al resolver tareas por parte de los estudiantes.

Los resultados de nuestra búsqueda ubican un segundo estudio que incorpora tecnología digital cuarenta y dos años después del trabajo de Wood y Bruch, en Regis (2013). En éste, al utilizar el teorema fundamental del álgebra, el teorema de Rouche's y el concepto del índice de Gamma alrededor de un numero complejo, se presenta un método descrito por Needham (2000) en donde se ilustra una forma en la que podemos encontrar las raíces de funciones polinomiales de variable compleja. Los elementos de soporte que permiten obtener información de estas raíces son los softwares CAS Maple y GeoGebra, con éstos se analizan los conjuntos de nivel, el índice de Gamma alrededor de un punto y las expresiones que determinan la parte real y parte imaginaria de funciones complejas.

Estos dos primeros estudios comparten la característica de orientar los trabajos en la dirección de una propuesta que busca hacer más accesibles objetos matemáticos particulares de la Variable Compleja. En los párrafos siguientes presentaremos cinco investigaciones que utilizan diversos marcos teóricos, junto con el uso de tecnología digital, para estudiar cómo profesores o alumnos trabajan con objetos específicos de la Variable Compleja.

La primera investigación de esta índole la encontramos en Soto-Johnson (2014). Bajo la premisa de que la visualización es un camino que desemboca en el rigor matemático a través de la intuición, la investigadora realiza un estudio en donde los participantes son estudiantes de bachillerato. Con ayuda de un software de geometría dinámico, Geometer's Sketchpad, se pretende rescatar la interpretación geométrica de la aritmética de los números complejos como transformaciones del plano complejo. A través de una serie de tareas que involucran el trabajo con la aritmética de los números complejos Soto-Johnson afirma que la geometría les permitió *ver* lo que está detrás de la aritmética; i.e la suma y resta de números complejos son traslaciones en el plano complejo, la multiplicación corresponde a una dilatación y rotación en el plano, y la división puede interpretarse como una reflexión y dilatación en el plano complejo.

En el mismo orden de ideas encontramos dos artículos cuyo objeto matemático son las funciones complejas de variable compleja.

Como primer ejemplo sintetizamos el trabajo de Dittman et al. (2016). En este estudio, al considerar el desarrollo de la creatividad a través del uso de software de geometría dinámica, se implementó un laboratorio con futuros profesores de secundaria en donde se les impartieron cursos sobre aritmética de números complejos y funciones de variable compleja. Con el objetivo de desarrollar la interpretación geométrica, relativa a las funciones de variable compleja, se les presentó el software Geometer's Sketchpad como un elemento que les permitió a los profesores una manipulación dinámica de las funciones. Como parte del trabajo final del laboratorio se les solicitó a los participantes que crearan un programa que contemplara a las funciones como mapeos. Los resultados advierten que el software de geometría dinámico les permitió contemplar a las funciones de variable compleja desde una perspectiva dinámica-geométrica, ampliando así la visión algebraica y estática del concepto. Como segundo ejemplo, bajo este tenor, encontramos a Ponce (2019). Ponce busca rescatar el espíritu del aprendizaje a través de la exploración, por lo que nos explica a través de una serie de ejemplos el método de dominio coloreado para el estudio de singularidades de funciones de variable compleja. Particularmente el autor enfatiza que se requiere pensamiento crítico de lo que se observa para poder identificar y clasificar los puntos aislados observados en las representaciones gráficas que el método utiliza, a su vez hace hincapié en que una correcta aplicabilidad e interpretación de éste posibilita que se genere una conexión significativa entre las representaciones visuales y los cálculos algebraicos en el estudio de singularidades.

Para concluir la descripción de las investigaciones solapadas en esta categoría, sintetizamos tres artículos cuyo objeto de estudio es la derivada de funciones complejas.

Iniciamos con el estudio de Troup et al. (2017), a través del enfoque teórico de cognición corpórea la investigación explora el desarrollo del razonamiento geométrico de un par de estudiantes de licenciatura en matemáticas al razonar la derivada de funciones complejas con ayuda del software Geometer's Sketchpad (GSP). Con la intención de interpretar el razonamiento de los estudiantes a través de los gestos y las acciones realizadas en el software de geometría dinámica, se video grabaron las sesiones y las pantallas de la computadora de cada participante al resolver un conjunto de tareas que involucraban este concepto. Los resultados indican que el software brindó a los participantes la capacidad de involucrarse directamente con el comportamiento de las funciones al construirlas, antes de jugar y arrastrar puntos y círculos, lo que les permitió describir a la derivada como la rotación y dilatación de una imagen con respecto a su pre imagen para funciones no lineales de valores complejos. Además, los comandos del software GSP, tales como hacer zoom y cambiar el tamaño de los círculos, sirvieron como recordatorio de que la derivada es una propiedad local. Utilizando el mismo Software de Geometría Dinámica (SGD), Troup (2018) nos presenta un estudio de carácter cognitivo. A través de una serie de tareas, aplicadas a dos estudiantes de licenciatura, se trabaja con el desarrollo del razonamiento geométrico relativo a la derivada de funciones de variable compleja. Una de las tareas requiere de la determinación del valor de la derivada de una función racional en un punto dado, bajo la premisa de que no se tiene la expresión algebraica de ésta, donde la única información proporcionada para efectuar la tarea es la brindada por el SGD. En las conclusiones se menciona que los participantes muestran refinamientos en su razonamiento alusivo a la geometría de los puntos en donde se puede obtener la derivada de la función y en los puntos en las que no es factible obtenerla. Por último, en el estudio de Soto-Johnson y Hancock (2019) se reporta la implementación y las respuestas de un laboratorio aplicado a estudiantes universitarios y estudiantes de posgrado. A través de una serie de tareas que involucran la derivación de funciones reales y complejas se busca desarrollar el concepto de 'aplitwist' (Needham, 2000) con ayuda de Geometer´s Sketchpad. La implementación del laboratorio consistió en la discusión de la solución de las tareas, las cuales fueron resueltas por los participantes de manera individual en su tiempo libre, lo que permitió una discusión rica en interpretaciones. Los resultados del estudio indican que algunos de los estudiantes dieron una interpretación geométrica de la derivada de una función real como un caso particular de la derivación de una función compleja a través del concepto de amplitwist.

A continuación describimos las investigaciones que encontramos en la biblioteca de Física, Matemáticas y Matemática Educativa Jerzy Plebanski del Cinvestav-IPN.

Trabajos del departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN

En esta sección sintetizamos cuatro trabajos de tesis de maestría encontradas en la sección de Matemática Educativa de la biblioteca Jerzy Plebanski del Cinvestav unidad Zacatenco. Tres de estos trabajos tiene la particularidad de recuperar elementos de la historia con la finalidad de configurar una secuencia de tareas que les permite abordar sus objetivos particulares. A raíz de estos tres trabajos consideramos pertinente describir la investigación de Cantoral y Farfán (2008), la cual también gira en torno al mismo fenómeno al que hacen alusión las investigaciones de maestría, lo cual nos abrió las puertas a la recopilación, lectura y síntesis de la investigación de Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo (1987). A continuación iniciamos la descripción de las investigaciones de maestría en orden cronológico.

Soto (1988) realiza un estudio situado dentro de un proceso de enseñanza-aprendizaje por descubrimiento al considerar que las y los alumnos logran comprender mejor un tema conforme establecen analogías y superan contradicciones. La autora rescata obstáculos epistemológicos en la controversia entre Leibniz y Bernoulli en 1712 y su continuación por Euler y Bernoulli en 1727, la cual se suscita por la noción de logaritmo de números negativos. En la investigación se diseña una experiencia de aprendizaje que posibilitó el ulterior esclarecimiento de la lógica empleada por estudiantes universitarios al confrontarla con la forma de descubrimiento que presentan los personajes en la historia. Se reporta que al aplicar la secuencia de aprendizaje a doce futuros profesores de matemáticas, once de ellos no aceptaron la extensión de las propiedades de logaritmos de números positivos a números negativos, a su vez se percibió que existe una resistencia a salir del campo real al no aceptar argumentaciones que definen el logaritmo de números negativos. La autora aclara que se observan relaciones entre los representantes de la historia y los alumnos, incluso al encontrarse en situaciones diferentes, algunas de las respuestas o argumentaciones fueron muy similares, si bien, no en forma, sí en la lógica detrás del razonamiento matemático. Finalmente la autora comunica que los contenidos de los programas de estudio promueven dos enfoques no complementarios del concepto logaritmo, uno aritmético para la simplificación de operaciones, otro como función susceptible a ser derivada e integrada. Ambas aproximaciones consideran el dominio de la función al conjunto de los números reales estrictamente positivos.

En otro orden de ideas, bajo la premisa que uno de los propósitos de la investigación en Matemática Educativa es la generación de propuestas para modernizar la enseñanza de las matemáticas, Pantoja (1989) presenta una colección de temas y contenidos, relativos a la Variable Compleja, que pueden dotar a los estudiantes de Ingeniería Eléctrica y Electrónica con los conocimientos necesarios para facilitar cálculos involucrados en el trabajo con circuitos. Particularmente, el estudio ejemplifica situaciones en donde el uso de la Carta de Smith –derivada de distintos elementos de la Geometría de Circuitos en el plano complejo y la transformación de Moebius– permite remplazar cálculos algebraicamente complicados por el cálculo aproximado de parámetros, como lo son el coeficiente de reflexión, las admitancias y las impedancias de entrada y de cargas, los cuales son utilizados en la teoría de circuitos. El desarrollo del escrito exhibe un bosquejo de la historia de la Variable Compleja, acompañado de una seriación de temas, en donde la Geometría de Circuitos posibilita un análisis de éstos en el plano complejo, que en conjunto con la Geometría de Inversión y la Razón Cruzada permiten la fundamentación de la transformación de Moebius, la cual desemboca en la construcción de la Carta de Smith. El objetivo de esta seriación radica en señalar que estos temas están ausentes en los planes de estudio de la época, exhortando a la investigación y a las instituciones a mantener un dialogo que permita una actualización constante de éstos.

Distando del paradigma que considera que los conocimientos matemáticos en el sistema de enseñanza están estructurados mediante una secuencia lógica –soslayando el panorama que hace posible el surgimiento de una teoría que los acoja– Trujillo (2005) presenta un estudio donde muestra qué fue lo que propició el surgimiento de la Variable Compleja. Siguiendo un marco de análisis de tres puestas en escena donde se observa la aceptación o rechazo por parte de los estudiantes y profesores de los números complejos, se reporta que la enseñanza de éstos en su forma tradicional, la algebraica, no brinda los elementos para abordar y mostrar la necesidad de una nueva teoría, la Variable Compleja. Lo que le permitió a Trujillo configurar el surgimiento de esta área de las matemáticas fue la indagación epistemológica de la correspondencia entre Euler y D'Alembert. En ésta se muestra la necesidad de considerar a los números complejos como solución al cálculo del logaritmo de números negativos, con la finalidad de poner orden a la matemática del momento. Además de develar los orígenes de la Variable Compleja, este estudio epistemológico permitió afirmar que esta área de las matemáticas no es una generalización de la Variable Real, lo que se ve reflejado en resultados que son aplicables en uno u otro de esos campos, pero no en ambos a la vez, como lo son: el teorema del valor medio para integrales y el teorema de Liouville, entre otros. Este estudio permite detectar problemas didácticos que posee la enseñanza de los números complejos y de la Variable Compleja en cuanto a la comprensión de conceptos, y por ende a la teoría de la Variable Compleja.

Doce años después de esta investigación que acabamos de sintetizar nos encontramos con el trabajo de Martínez (2017), el cual se sustenta en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. En este estudio, con la finalidad de introducir la teoría de Variable Compleja a una comunidad de ingenieros en electrónica y comunicaciones en formación, se aplica la situación de aprendizaje presente en Soto (1988) a un grupo de trece estudiantes de la escuela superior de ingeniería mecánica y eléctrica del IPN. Cabe destacar que la investigación está organizada con base en una ingeniería didáctica, la cual le permitió al investigador, entre otras cosas, modificar la situación de aprendizaje. El análisis de la situación de aprendizaje le permitió concluir a Martínez que los argumentos para responder a la interrogante del logaritmo de números negativos son muy similares a los reportados en Soto(1988), en donde se observa que la aceptación de un resultado en matemáticas no es únicamente producto de la lógica matemática que permite su derivación, ya que intervienen elementos adicionales de orden sociocultural. Como diferencia significativa se muestra que los estudiantes de ingeniería construyen conocimiento sin la necesidad de rigor matemático, destacándose el uso de la calculadora para dar respuesta a algunas preguntas, distando de la población presente en el estudio de Soto, en donde los futuros docentes en matemáticas, que refutaron algunas de las preguntas del estudio, no mostraron flexibilidad a lo que no es demostrable en lenguaje matemático.

A continuación presentamos un resumen de las ideas presentes en Cantoral y Farfán (2008), debido a que esta investigación permea y recapitula elementos de las investigaciones de Soto (1988), Trujillo (2005) y Martínez (2017).

En Cantoral y Farfán (2008) se desarrolla una investigación que parte del interés por entender el origen del conocimiento de la Variable Compleja como fruto de la interacción entre su epistemología y factores sociales. Con el objetivo de localizar y analizar las concepciones y los obstáculos epistemológicos alrededor de la construcción de los logaritmos de números negativos durante el siglo XVIII, la autora y el autor rescatan aspectos de construcción social del concepto de logaritmo en los debates, las justificaciones, las creencias y los criterios de validez expresados en la correspondencia entre Leibniz, Bernoulli J, Euler y D'Alembert, lo que les permitió exhibir que la actividad matemática es una acción plenamente humana y social. Lo anterior les abrió las puertas a la configuración un diseño de intervención, el cual fue puesto en funcionamiento en una ingeniería didáctica desarrollada con un grupo de estudiantes universitarios que no habían cursado la materia de variable compleja. En el análisis de las producciones de los participantes se distinguieron aspectos relativos a la búsqueda de coherencia interna en el aparato matemático, destacando el tipo de argumentaciones matemáticas derivadas del reto de trabajar bajo hipótesis que resultan dudosas, así como las formas en que construyeron significados de los conceptos matemáticos con los que estaban trabajando. Como uno de los resultados del estudio se presenta que las y los estudiantes clasificaron en dos clases las respuestas a las tareas del diseño, por un lado, los que sostuvieron la tesis de que el logaritmo de números negativos existe y es obtenido como el reflejo del logaritmo de números positivos advierten que de aceptarlos bajo esa conceptualización habría que reconstruir la teoría de las funciones exponenciales, por otro lado, se reporta que hubo participantes que se negaron sistemáticamente a la posibilidad de tratar con el logaritmo de números negativos, defendiendo su postura en los conceptos que habían visto en clase.

Con esto concluimos la descripción de los objetivos, los objetos matemáticos, los métodos utilizados y los resultados de las investigaciones que recopilamos en nuestra revisión de literatura.

2.2. Caracterización de las investigaciones en Variable Compleja

En este apartado presentamos las conclusiones derivadas de las síntesis de cada una de las investigaciones catalogadas en las categorías tituladas 'Números Complejos', 'Variable Compleja', 'Uso de Tecnología Digital' y 'Trabajos del departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN'

De los estudios sintetizados en 'Números Complejos', 'Variable Compleja' y 'Uso de Tecnología Digital', así como en Pantoja (1989), observamos que el trabajo relativo a la Variable Compleja desde la Matemática Educativa se centra en diversos objetos, desde números complejos, transitando por las ecuaciones de Cauchy Riemann, hasta la integral y la derivada de funciones complejas de variable compleja, entre otros. Los objetivos de las investigaciones son de carácter múltiple; se busca cómo abordarlos en el aula, revelar posibles formas en las que se están conceptualizando, se utilizan herramientas que los hagan más accesibles a ser objetos enseñables, o como vimos en los trabajos de Soto-Johnson, se busca crear un marco basado en evidencias empíricas que describa cómo individuos, interesados en el desarrollo de la matemática como disciplina, perciben ideas dentro de la Variable Compleja. Por otro lado, las investigaciones de Soto (1988), Trujillo (2005), Cantoral y Farfán (2008) y Martínez (2017) giran en torno a los orígenes de la Variable Compleja, por lo que se dirigen a la historia, centrándose en el debate epistolar entre Leibniz, Benoulli J, Euler y D'Alembert.

Lo anterior apunta a que el trabajo desde la Matemática Educativa con objetos de la Variable Compleja es muy diverso. En algunas investigaciones la presentación de estos objetos se remite a dotarlos de significados desde un contexto actual –entendiendo actual como el año en que el estudio se haya realizado– es decir, estas investigaciones consideran al conocimiento matemático como un objeto terminado, donde a estos objetos hay que convertirlos en objetos enseñables a través de diversos recursos, por ejemplo, con ayuda de la reflexión de especialistas en la matemática para entender cómo los comunican, con la introducción de tecnología digital para hacerlos más accesibles, se analizan las respuestas a tareas matemáticas por parte de estudiantes y profesores de distintos niveles educativos para ver como se están conceptualizando, entre otros. En segunda instancia, se exhiben trabajos en donde las investigaciones recurren a la historia, con el objetivo de recuperar elementos que posiblemente se hayan diluido o soslayado en la transposición del conocimiento al ámbito educativo, estudios de este corte, además de que permitieron diseñar tareas a aplicar con distintas poblaciones de estudio, abrieron las puertas a dotar de significados a los objetos desde el escenario en que éstos se gestaron.

Consideramos importante aclarar que no estamos afirmando que alguno de los dos tipos de estudio que acabamos de describir sea mejor que el otro. Lo que estamos afirmando es que nuestra revisión de literatura nos presentó un panorama de diversos tipos de investigación que se han realizado, desde la Matemática Educativa, al considerar objetos de la Variable Compleja. A partir de esta clasificación tomamos la siguiente postura, nuestra investigación se enmarcar en la indagación de carácter histórico con la finalidad de rescatar elementos que posiblemente hayan sido soslayados en la inserción del conocimiento matemático, relativo a la Variable Compleja, en el sistema educativo.

A continuación, previo a la delimitación de nuestro objeto de estudio y el marco teórico que lo solapa, presentamos las ideas expuestas en el artículo que identifica a los orígenes de la Variable Compleja en un fenómeno de generalización, estudio titulado 'Epistemología del Concepto de Función Logarítmica', del cual emergen los trabajos de Soto (1988), Trujillo (2005), Cantoral y Farfán (2008) y Martínez (2017).

2.3. Sobre los orígenes de la Variable Compleja

El estudio titulado Epistemología del Concepto de Función Logarítmica, realizado por Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo en 1987, evidencia que los objetos matemáticos siguen una evolución antes de concretarse como objetos propios de la matemática. Al considerar la función logaritmo se menciona que este concepto en los primeros cursos de matemáticas es presentado como un objeto terminado, resaltando que en la escuela se hace hincapié en las propiedades de los logaritmos aplicables en el dominio de los números reales, soslayando "el proceso vivo de la construcción del concepto"(p.11). En particular, el opacar esta construcción no permite evidenciar que los objetos matemáticos devienen de un largo proceso reflexivo en el que los seres humanos somos los actores principales para su construcción. Dentro de este proceso de evolución del concepto de logaritmo se configuró la pregunta ¿cuánto vale el logaritmo de un número negativo? su respuesta es el resultado de una controversia que perduró cuatro décadas del siglo XVIII en la que participaron Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Jean Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) y Jean le Rond D'Alembert (1717-1783).

A continuación, con el objetivo de mostrar que los orígenes de la Variable Compleja se encuentran atados a un fenómeno de generalización, esbozaremos el recorrido que siguió el estudio de Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo. Lo anterior nos permitió sensibilizarnos en dos vertientes, por un lado, reconocemos la importancia de evitar el presentismo al analizar producciones que no necesariamente se apegan a la visión que se forma a través de las experiencias adquiridas alrededor del aparato matemático que configuramos en la vida profesional de licenciatura, y además reconocemos que existen diferentes escenarios en donde se originan los objetos y/o campos pertenecientes a la matemática contemporánea. En este caso, el escenario que propicia el surgimiento de la Variable Compleja es uno que se gesta dentro del mismo aparato matemático del siglo XVIII.

Los actores principales al inicio de la controversia son Leibniz y Bernoulli. El 16 de marzo de 1712 inician un intercambio de correspondencias –el cual podemos encontrar en Cajori (1913)– donde buscan dar solución a la interrogante ¿cuánto vale el logaritmo de un número negativo? En este intercambio Bernoulli hace una extensión de la función logaritmo que posibilita la evaluación de números negativos al definir $log(-n) = log(n)$, lo que le permite generar reglas de operación de logaritmos de números negativos a través del logaritmo de números positivos. Leibniz se niega a aceptar la extensión propuesta por Bernoulli, no propone una aproximación diferente para trabajar el logaritmo de números negativos, y se limita a señalar las contradicciones generadas al aceptar su existencia.

Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo afirman que las diferencias en las argumentaciones de Leibniz y Bernoulli radican en las concepciones dominantes que imperaban en el siglo XVIII, las cuales resumimos en los siguientes puntos.

I. Había un acuerdo en cuanto a las reglas de operatividad entre números complejos y números negativos, sin embargo no existía una concepción única en cuanto a su interpretación.

II. La noción de función no trabajaba con una definición de dominio.

III. Los criterios de validez de la comunidad científica de la época descansaban en la confrontación de los modelos con la realidad, sin embargo el caso de logaritmo de cantidades negativas carecía en ese momento de referentes a fenómenos naturales.

La identificación de estas concepciones les permitió a las autoras y autores *ver con los ojos de la época* la correspondencia Leibniz-Bernoulli. Evidenciar que las diferencias en el orden de discusión entre estos dos personajes radican en la conceptualización de números y funciones, así como en la ausencia de métodos de validación que obstaculizan la valoración de si una nueva teoría matemática es válida o no, les permitió concluir que "el problema de extender los logaritmos a números negativos está dentro de la misma teoría matemática sin conexión aparente con el mundo físico"(p.14).

La postura de Leibniz y Bernoulli permanece inalterada en cuando al tratado de logaritmo de números negativos, un año, tres meses y trece días después de su inicio Leibniz culmina la discusión el 29 de julio de 1913. Años más tarde, el 5 de noviembre de 1727, se desencadena una segunda controversia entre Euler y Bernoulli. Euler tratando de dar consistencia interna a los hechos matemáticos que se desprendieron de la discusión entre Leibniz y Bernoulli señala una contradicción derivada de la suposición simultánea de la igualdad $log(-n) = log(n)$ y de ciertos resultados aceptados en la matemática de la época, esta contradicción lo conduce a la construcción de criterios de validez inherentes a la matemática; en palabras de Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo "la aparición de problemas de orden estrictamente teórico hace necesaria la construcción de herramientas de validación que garanticen la consistencia interna de la propia matemática"(p.14).

La respuesta que presenta Euler a la interrogante ¿cuánto vale el logaritmo de un número negativo? trasciende al cálculo de logaritmos de número negativos, su respuesta: *el logaritmo de todo número posee una infinidad de valores*. Particularmente el logaritmo de números reales estrictamente positivos da como resultado un número complejo con parte imaginaria cero, y una infinidad de valores complejos con parte imaginaria no nula. Esta respuesta es el fruto del manejo de los números complejos empleado por Euler, el establecimiento de la función exponencial y logaritmo como funciones inversas, y el deseo de "restablecer el orden y la armonía en un tema lleno de contradicciones"(Euler, 1749, citado por Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo, 1987, p.15). Esto nos muestra que además del dominio de resultados dentro de la matemática, la diferencia que le permitió a Euler configurar su respuesta radica en abordar el problema desde otra perspectiva.

Las y los autores del estudio concluyen que el surgimiento de la Variable Compleja descansa en el acercamiento metodológico para abordar el problema. Tratar de dotar de validez a una teoría a través de proveer consistencia interna a hechos puramente matemáticos, dejando de lado argumentos metafísicos y naturales, marca el inicio de los estudios de Euler alrededor de logaritmos de números negativos. Particularmente señalan que este acercamiento metodológico, guiado por el afán de "construir el análisis sobre bases firmes"(p.15), esta apegado a la época del rigor matemático del siglo XIX, por lo que no es de extrañar que la solución propuesta por Euler no haya sido aceptada por todos sus contemporáneos, por ejemplo, D'Alembert rechaza la propuesta por Euler debido a la naturaleza multivaluada de la solución, se niega a aceptar un marco conceptual que esta centrado en la noción de contención de conjuntos, y no acepta el operar con números complejos sin un modelo justificado, siendo estos tres elementos centrales para la solución planteada por Euler.

Las ideas hasta aquí presentes nos permiten configurar un punto de partida, los orígenes de la Variable Compleja se enmarcan en la búsqueda de consistencia dentro del aparato matemático del siglo XVIII, particularmente la búsqueda de bases firmes que permitan configurar una respuesta a un cuestionamiento plenamente teórico abre un camino hacia la construcción de conocimiento dentro de la Variable Compleja. Es decir, el estudio de Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo permite enmarcar a los orígenes de la Variable Compleja a través de la extensión del dominio de definición de la función logaritmo para incorporar números negativos, por lo que se afirma que la Variable Compleja nace a través de un fenómeno de generalización.

Previo a delimitar cómo podemos acercarnos a estudiar la construcción de conocimiento en Variable Compleja al indagar en la historia, presentamos las opiniones de diversos autores sobre un objeto particular de esta rama de la matemática. La selección de este objeto matemático nos permitió configurar una línea del tiempo en donde presentamos los personajes que trabajaron en su consolidación y desarrollo, lo que nos posibilitó analizar a profundidad un escrito de Cauchy que data de 1814. Consideramos importante recalcar que no hicimos un análisis crítico del contenido de los libros, en la lectura de éstos nos remitimos a la identificación de diversos objetos dentro de la Variable Compleja. El objeto que seleccionamos suele ser descrito como ‘fundamental’ y/o ‘central’ para el desarrollo de esta rama de la matemática, lo que nos motivó a seleccionarlo.

3. Delimitación del Objeto de Estudio

A raíz de lo reportado en el apartado titulado 'Sobre los orígenes de la Variable Compleja' nos preguntamos ¿cómo se construyó conocimiento en Variable Compleja?, el estudio Epistemología del Concepto de Función Logarítmica nos da indicativos de los orígenes de la Variable Compleja, cuestionarnos el desarrollo ulterior de conocimiento en esta área de la matemática es del mismo orden que muestra Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo en 1987.

Aunado a lo anterior, gracias a la revisión de literatura, configuramos las siguientes dos vertientes. Por un lado existen investigaciones desde la Matemática Educativa que a través de indagar en la historia muestran los orígenes de la Variable Compleja a partir de un fenómeno de generalización; el desarrollo ulterior de conocimiento de la Variable Compleja al seno de la actividad humana posibilitó la consolidación de diversos objetos, los cuales al convertirlos en objetos enseñables no necesariamente acarrean los elementos que propiciaron su consolidación. Esta conclusión nace a raíz de que dentro de la Matemática Educativa existen estudios que han abordado conceptos de la Variable Compleja al tratan de dotarlos de significados desde y para el contexto escolar. Como mencionamos con anterioridad, esta clasificación que mostramos de las investigaciones no tiene por objetivo criticar o enaltecer alguna de estas dos vertientes que han surgido al abordar distintos fenómenos que se suscitan en el sistema educativo. Nuestra elección de indagar en la historia es porque nos apegamos a la idea de que en la evolución de conceptos, que tienen su origen y desarrollo en el quehacer de los seres humanos, aceptamos que la construcción de conocimiento matemático es de carácter situacional, es decir, reconocemos que los seres humanos al enfrentarnos a diversas situaciones que nos demandan pensar matemáticamente respondemos en función de nuestra pertenencia a un tiempo y grupo social particular. A raíz de esto, en esta investigación rescatamos algunos de los elementos que posibilitaron la consolidación de una pieza de conocimiento de la Variable Compleja.

El apartado de 'Motivaciones' muestra el tipo de conocimiento al que fui expuesto en mi curso de Variable Compleja en mis estudios de licenciatura, el contenido de esta unidad de aprendizaje probablemente fue organizado con la finalidad de propiciar el acceso al conocimiento soslayando su construcción. En esta investigación decidimos embarcamos en la búsqueda de elementos que están presentes en los orígenes de la construcción de un concepto particular dentro de la Variable Compleja, los cuales creemos han sido diluidos en su inserción al sistema educativo. Debido a que actualmente esta rama de la matemática solapa una gran cantidad de objetos, nos remitimos a seleccionar uno con el objetivo de identificar el momento y las circunstancias –de orden social y epistemológicas– que permitieron su consolidación y desarrollo, indagar alrededor de éstas nos permitió configurar una forma en la que se construyó conocimiento en Variable Compleja.

3.1. Objeto matemático de estudio

Con el objetivo de develar cómo se construye conocimiento en Variable Compleja procedimos a seleccionar un objeto matemático de estudio que nos permitiera delimitar los actores que propiciaron insumos para su consolidación y desarrollo. El estudio de una de las producciones intelectuales de estos personajes nos permitió acercarnos a la forma en que se construye conocimiento en Variable Compleja. La delimitación la hicimos a través de una búsqueda de resultados típicamente expuestos en la literatura de textos escolares de Análisis Complejo/Variable Compleja. En esta búsqueda nos remitimos a la tarea de identificar resultados que los autores presentaran como centrales y/o fundamentales. Uno de estos es el siguiente:

Teorema Integral de Cauchy

Si una función $f(z)$ es analítica dentro y sobre un contorno cerrado simple C, entonces

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Titchmarsh(1939, p.75)

No todos los autores redactan este teorema como lo hace Titchmarsh en 1939, sin embargo, todos hacen alusión a este resultado al extenderlo de casos particulares del mismo, o lo establecen como equivalente a otro teorema de la Variable Compleja.

Titchmarsh describe el Teorema Integral de Cauchy como “la piedra angular de la teoría de funciones analíticas”(p.75). Igual de importante resulta para Knoppv (1945) al describirlo como un teorema “fundamental para toda la teoría de las funciones”(p.47). Con el objetivo de mostrar la importancia de este resultado en libros de texto escolares de la segunda mitad del siglo XX y principios del siglo XXI, presentamos la opinión de ocho autores al referirse a este teorema en su obra.

Marsden y Hoffman (1996) afirman que “una ventaja conveniente del análisis complejo es que está basado en unos cuantos, aunque poderosos, teoremas sencillos, de los cuales se sigue la mayoría de los resultados [...] uno de los principales es el Teorema de Cauchy”(p.109). En el mismo orden de ideas, Markushevich (1965) en el capítulo trece de su libro menciona “este capítulo está dedicado a la demostración del siguiente teorema, el cual es uno de los resultados más importantes en la teoría de funciones analíticas”(p.258).

Otros autores resaltan la importancia del resultado al vincularlo con otros teoremas de la Variable Compleja, por ejemplo, Ahlfors (1979) rescata una aplicación del teorema de Cauchy que “por sobre todas las cosas nos permite un estudio detallado de las propiedades locales de funciones analíticas”(p.114). Estas propiedades a las que hace alusión Ahlfors, Stein y Shakarchi (2003) las enuncian en la siguiente cadena de implicaciones. El aparato teórico que deviene del establecimiento del Teorema Integral de Cauchy inicia con la obtención de la fórmula integral de Cauchy, la cual permite concluir la existencia de la derivada de todos los ordenes de una función cuya primera derivada exista, subsecuentemente esto posibilita la representación en serie de Taylor de una función analítica, tal que al restringir su estudio a un subconjunto abierto del dominio de definición de la función nos propicia las bases para el desarrollo del concepto de continuidad analítica. Aunado a esto, los autores estipulan que la teoría que se va presentando a lo largo de estos resultados permite demostrar dos teoremas, el primero es el Teorema de Liouville, el cual da lugar a una demostración rápida del teorema fundamental del Álgebra; el segundo es el Teorema de Morera que permite “una caracterización integral simple de funciones holomorfas”(p.34).

Vincular la importancia del Teorema Integral de Cauchy a la obtención de otros resultados dentro de la Variable Compleja orilló a que Garcia y Ross (2017) reflexionaran sobre el rol que juegan los detalles técnicos y el rigor que se esperan de un curso universitario de Variable Compleja. A los autores se les presenta un escenario bifronte al momento de impartir un curso de Variable Compleja dirigido a dos tipos de estudiantes que suelen encontrarse en sus cursos. Particularmente comentan que algunos de sus estudiantes "no tienen la formación analítica necesaria para apreciar las sutilezas que hacen legítimos algunos de los argumentos en variables complejas [mientras que] otros dominan el análisis real y quieren apreciar los detalles finos" (p.759). Pese a esto, los autores enfatizan que no pueden dejar que la presentación de detalles técnicos y el rigor se interpongan en el camino de 'una buena idea'.

Las reflexiones de Garcia y Ross (2017), en tanto al rol de las 'buenas ideas' que solapan al Teorema Integral de Cauchy, nos hizo percatarnos de que existen autores de libros universitarios de Variable Compleja que comunican el teorema en términos de significados físicos. Por ejemplo, Polya y Latta (1974) además de presentar al Teorema Integral de Cauchy como un "teorema central en la teoría de funciones analíticas"(p.143), los autores lo significan a través de un contexto físico, descomponiéndolo en sus partes real e imaginaria, lo que les propicia introducirlo como la fuerza y el trabajo producido por el flujo total que cruza una determinada región delimitada por un contorno.

La identificación de este teorema como un resultado central de la Variable Compleja, a través de significarlo en un contexto físico o atribuirle su importancia derivada de la plétora de resultados que descansan en él, desembocó en que nos cuestionáramos los personajes en la historia que aportaron insumos para su consolidación. En los libros escolares de Variable Compleja el Teorema integral de Cauchy también es conocido como el Teorema de Cauchy-Goursat y como el Teorema de Cauchy, a raíz de esto nos preguntamos ¿fue Cauchy la primera persona que abordó este teorema?, ¿cuáles fueron las influencias de Goursat en este resultado? Hacer una revisión de la bibliografía alrededor del teorema (Bottazzini, 1986; Bottazzini y Gray, 2013; Bak y Popvassilev, 2017; Grey, 2000; Neuenschwander, 1981; Remmert, 1991; Scott, 1974; Smithies, 1997;

Watson, 1960) nos permitió configurar la línea del tiempo presente en la Figura 1, en la cual mostramos los diferentes momentos en la historia y las personas que propiciaron insumos y trabajaron en su consolidación y desarrollo.

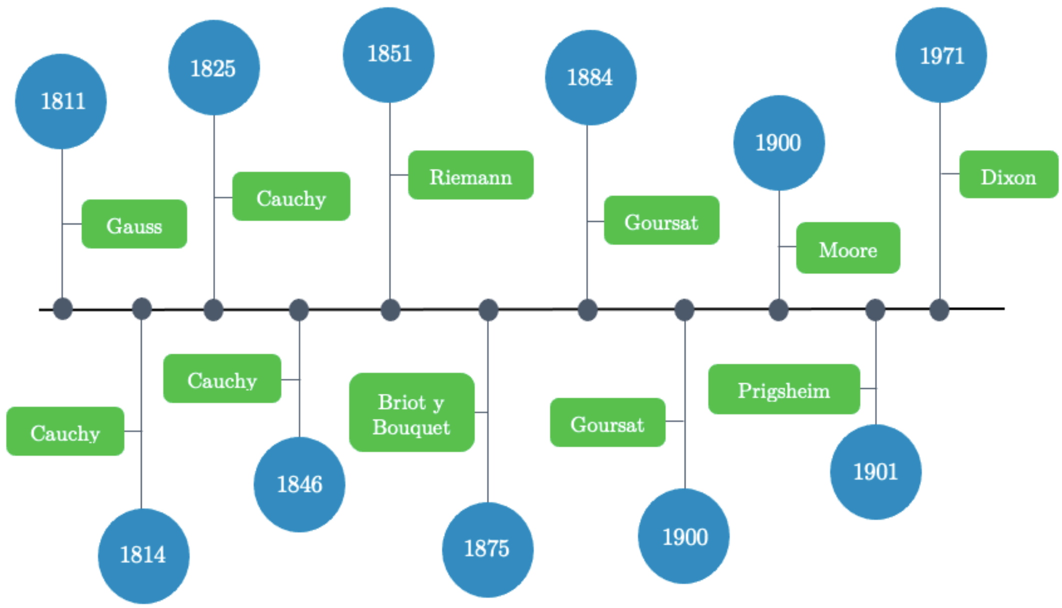

Figura 1. Línea del Tiempo.

Fuente: Elaboración propia.

La identificación del Teorema Integral de Cauchy como un resultado central en Variable Compleja, así como la configuración de la línea del tiempo de los personajes que aportaron insumos para su consolidación y desarrollo, hizo que nos cuestionáramos de qué forma podemos realizar un estudio que busque develar cómo se construyó conocimiento en Variable Compleja, particularmente nos preguntamos ¿Cuáles fueron las circunstancias de orden social y epistemológicas que incidieron en la consolidación del Teorema Integral de Cauchy? En el siguiente apartado describimos a grandes rasgos la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, esto con el fin de presentarla como una aproximación teórica que nos provee de una forma de pensar que propicia el estudio de la construcción social de conocimiento matemático.

4. La teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

En este apartado presentamos un resumen de los elementos del marco teórico de la Socioepistemología que nos permitieron identificar a esta teoría de la Matemática Educativa como una aproximación teórica pertinente para dar solución a la interrogante ¿Cómo realizar un estudio que busca develar la forma en que se construyó conocimiento en Variable Compleja?

Los trabajos fundacionales de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, conocida como la Socioepistemología, los encontramos en Cantoral (1990), Farfán (1993) y Cordero (1994). Hoy en día la Socioepistemología cuenta con cuatro principios sobre los que descansa el edificio teórico que hacen de esta vertiente de la Matemática Educativa una alternativa hacia un cambio educativo. A continuación presentamos un breve resumen de éstos.

El *Principio de racionalidad contextualizada* reconoce una dependencia del contexto en cuanto a la relación que tienen los sujetos con el saber. Distando de la postura que considera que un ser racional es aquel que piensa y actúa de acuerdo con reglas basadas en la lógica para deducir verdades aplicables a diferentes contextos, este principio expone que la racionalidad de los individuos depende del contexto en que se vean involucrados, vale decir que en la diversidad de contextos encontramos distintas racionalidades, distintas formas de pensar y usar el conocimiento. En palabras de Cantoral (2013) "la racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado"(p.159).

Al aceptar que los contextos influyen en la relación que los sujetos tienen con el conocimiento y su uso, indudablemente nace la pregunta ¿es mi punto de vista aplicable fuera del contexto en el que lo generé? Una respuesta a esta pregunta la encontramos en el *Principio del relativismo epistemológico*. Este principio admite que no existe validez universal. Como menciona Cruz-Márquez en su tesis de maestría en el 2018 "la validez de un conocimiento es juzgada en relación con los criterios de la comunidad en la que se gesta"(p. 33). Es así como la Socioepistemología, además de aceptar la diversidad de racionalidades, valida el conocimiento matemático construido por distintas comunidades (Cantoral, 2013).

El reconocimiento de la no existencia de significados universales nos permite hablar del *Principio de resignificación progresiva.* Este principio estipula que, a través del uso del conocimiento en un determinado contexto, éste adquiere un cierto significado. Podemos decir que una misma pieza de conocimiento, dependiendo del contexto en que se encuentre, fue configurada a partir de sus usos. Vale decir, en el desarrollo de la vida misma, al transitar por distintos contextos, al conocimiento se le significa progresivamente (Cruz-Márquez, 2018).

Buscando una coherencia global que permeé la construcción de conocimiento matemático, sin importar el tiempo y el ámbito en el que se haya gestado, la Socioepistemología establece como eslabón fundamental al *Principio normativo de la práctica social*. Este principio asume que las *prácticas sociales* son las generadoras de conocimiento matemático. Se hace alusión a la práctica social como isomorfa al juego, en tanto que se manifiesta a lo largo de la historia, en diferentes culturas, con diferentes reglas y con variantes de éste, sin embargo, los distintos juegos y formas de jugar poseen en común la característica de ser estructurados, y es el juego mismo, a su vez, el que estructura al jugador. Al existir una norma, que no se ve pero se infiere –la cual es transversal a los individuos y colectivos de distintas comunidades a lo largo de la historia– es como se hace referencia a una práctica social (Cantoral, 2013).

En resumen, la Socioepistemología considera que las prácticas sociales son las generadoras de conocimiento matemático –Principio normativo de la práctica social– el contexto configura la racionalidad con la que sus integrantes significan el conocimiento a través de su uso –Principio de racionalidad contextualizada– aceptando que este saber es validado al seno del grupo en el que se constituyó –Principio de relativismo epistemológico– y gracias al transcurrir del tiempo, en la evolución de los individuos y colectivos de una comunidad, en su incidir en distintos contextos se resignifican dichos saberes dependiendo del uso que se les de –Principio de resignificación progresiva– (Cantoral, Montiel, Reyes-Gasperini, 2015).

Estos cuatro principios nos permiten concebir la construcción de conocimiento matemático al seno de la actividad humana. La Socioepistemología, además de proporcionarnos estos lentes que nos permiten aproximarnos a entender una forma en que se construye conocimiento matemático, acepta que la inserción de este conocimiento al sistema educativo lo obliga a una serie de modificaciones que lo trastocan. Uno de los efectos de esta transposición de conocimiento matemático a la matemática escolar lo describen a través de la Centración en el Objeto. Podemos pensar en este fenómeno de Centración en el Objeto como la organización de estos objetos en objetos enseñables. Recordemos que este marco teórico acepta que los objetos matemáticos fueron construidos fuera del sistema educativo, cuando son llevados a éste implícitamente se asume que el objetivo de la clase de matemáticas es darles sentido a éstos desde y para la clase de matemáticas, despersonalizándolos y descontextualizándolos se les reduce a tratamientos didácticos secuenciados que suelen estar acompañados de procesos algorítmicos. Debido a esto, una de las consecuencias de la Centración en el Objeto es la idea que descansa en que saber matemáticas es saber de los objetos matemáticos y de como éstos se relacionan. (Cantoral, Montiel, Reyes-Gasperini, 2015).

Aunado a lo anterior, la Socioepistemología considera que la aprensión de objetos no necesariamente propicia la construcción de un cumulo de significados –alrededor de éstos– que permitan que los estudiantes afronten situaciones problema en el contexto extraescolar en que se desarrollen. Este enfoque le permite a la Socioepistemología pasar de estudiar el conocimiento estático, presentado como los objetos, a estudiar el conocimiento puesto en uso, es decir, estudiar la forma en que se esta poniendo en juego el conocimiento en un contexto determinado. Para estudiar al conocimiento puesto en uso –estudiar al saber– la teoría configuró el constructo teórico-metodológico conocido como la problematización del saber matemático. Problematizar el saber permite dotar de significados a los objetos, en su acepción teórica la problematización del saber se cuestiona al conocimiento en cuanto a su uso asumiendo que el pensamiento humano posee herencia cultural, vale decir que cada época en la historia de las matemáticas en donde se ha producido conocimiento debe algo a la herencia cultural del periodo en que se suscitó dicho conocimiento. Una de las vías que nos permite rescatar esta herencia cultural, y por lo tanto nos permite estudiar al saber, es a través de un estudio histórico-epistemológico en donde se analizan las producciones intelectuales de los personajes que construyeron conocimiento en el contexto que se desarrollaron, su confrontación ulterior con producciones académicas actuales nos posibilita configurar un camino que desemboque en diferentes formas de aproximarnos al conocimiento a través de significarlo mediante su uso (Cantoral, Reyes-Gasperini, Montiel, 2014).

Las ideas presentadas en los párrafos anteriores nos permiten reconocer a la Socioepistemología como una aproximación teórica de la Matemática Educativa que se encarga de estudiar la construcción social de conocimiento matemático. A la luz de estas ideas, en el siguiente apartado, presentamos los elementos particulares que nos permitieron identificar a esta vertiente de la Matemática Educativa como un marco teórico que apunta a perfilar un camino que desemboca en dilucidar cómo se construye conocimiento en Variable Compleja desde una perspectiva social.

4.1. La Socioepistemología como lente teórico

En la Delimitación del Estudio enfatizamos la existencia de dos aproximaciones que abordan elementos de la Variable Compleja desde la Matemática Educativa. Por un lado encontramos investigaciones que se desarrollaron a partir de reconocer al ser humano como actor principal en la construcción de conocimiento matemático, posteriormente este conocimiento es instaurado a través de conceptos puros en el sistema educativo. Por otro lado, existen investigaciones que estudian cómo distintos actores del sistema educativo trabajan, o pueden trabajar, con estos conceptos puros.

Los cuatro principios de la Socioepistemología, sintetizados en el apartado anterior, nos proporcionan una visión que recapitula diversos elementos que permean la construcción de conocimiento matemático al seno de la actividad humana. Particularmente la Socioepistemología configura un marco que permite cuestionarnos el conocimiento matemático que a llegado al sistema educativo. En este marco identificamos una posible respuesta a la pregunta ¿Cómo realizar un estudio que busca develar la forma en que se construyó conocimiento en Variable Compleja? La respuesta, a través de un estudio histórico-epistemológico. Un estudio histórico-epistemológico nos permite desprendernos de conceptualizar el Teorema Integral de Cauchy como un objeto terminado (Centración en el Objeto), posibilita que nos cuestionemos lo estipulado alrededor de éste en los libros de texto, permite que abordemos, desde la óptica del contexto en que se gestó, su configuración y desarrollo. Un estudio de este corte, anclado en los principios de la Socioepistemología, nos permitió aportar insumos que apuntan hacia la configuración de un camino que busca develar la forma en que se construye conocimiento en Variable Compleja.

Posicionarnos en un estudio de corte histórico-epistemológico, donde recurrimos a la historia con el objetivo de inferir como se construye conocimiento matemático, nos remite a que aclaremos que el estudio de las circunstancias de orden social y epistemológicas que posibilitaron la consolidación de una pieza de conocimiento –que después fue instaurado en el sistema educativo– son producto de una cultura, de un modo particular de generar conocimiento en una época determinada, debido a esto, en nuestra indagación histórica aceptamos que las producciones intelectuales a analizar representan un modo singular de pensar de la época en que éstas fueron configuradas, por lo que al estudiarlas no buscamos generalizar a que todo ser humano construye conocimiento de esa forma, nuestras conjeturas se perfilan a abstraer lo que se hizo en estas producciones, rescatando elementos que permitieron la consolidación de una pieza de conocimiento. Bajo estas premisas, en el siguiente apartado exponemos el objetivo y los cuestionamientos que buscamos responder en este estudio histórico-epistemológico del Teorema Integral de Cauchy.

5. Objetivo y preguntas de investigación

A través de la identificación del Teorema Integral de Cauchy como un teorema central en Variable Compleja, nuestro estudio histórico-epistemológico plantea develar una forma en que se construye conocimiento alrededor de este objeto. Particularmente nuestro objetivo es:

Develar las circunstancias de orden social y epistemológicas que incidieron en la consolidación del Teorema Integral de Cauchy

La búsqueda de indicativos a través de un análisis detallado de la epistemología alrededor del Teorema Integral de Cauchy se orienta a través de develar cómo se piensa/trabaja en Variable Compleja, lo que nos permite refinar el cuestionamiento ¿cómo se construye conocimiento en Variable Compleja? a través del cuestionamiento ¿Qué tipo de pensamiento matemático permea la construcción de conocimiento matemático alrededor del Teorema Integral de Cauchy?

En segunda instancia, debido a que el teorema 'no vive en abstracto' en tanto que depende de la época en que se gestó y/o desarrolló, y gracias a que Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo (1987) afirman que los orígenes de la Variable Compleja se encuentran más apegados a la época del rigor matemático del siglo XIX, siglo en que los actores principales que propiciaron insumos para la consolidación y desarrollo del Teorema Integral de Cauchy trabajaron con este objeto, nos preguntamos ¿Qué rol jugó el rigor matemático en el establecimiento del Teorema Integral de Cauchy?

El establecimiento de nuestro objetivo, aunado a la plétora de personajes que trabajaron alrededor del teorema –Figura 1– requirió de documentarnos en las particularidades que conlleva realizar un análisis histórico-epistemológico, por lo que en el siguiente apartado presentamos al Análisis Cualitativo de Contenido como una herramienta metodológica que nos propició de dos elementos que orientaron y organizaron esta investigación.

6. Aspectos Metodológicos

En esta sección se describen las decisiones metodológicas tomadas a lo largo de la investigación, haciendo hincapié en la herramienta metodológica que utilizamos a lo largo de nuestro estudio histórico-epistemológico del Teorema Integral de Cauchy.

Como hemos mencionado con anterioridad, a raíz de la revisión de literatura configuramos dos aproximaciones desde la Matemática Educativa que han tenido por objetivo tratar distintos elementos que giran en torno a la enseñanza-aprendizaje de la Variable Compleja. Particularmente las investigaciones que recurren a la historia, con el objetivo de analizar algún fenómeno u objeto particular de estudio, no se han orientado en la construcción de conocimiento que posibilitó el establecimiento de diversos objetos que actualmente se estructuran bajo el manto de la Variable Compleja. Debido a esto, en esta investigación, nos remitimos a la búsqueda de indicativos que nos permitan inferir cómo se piensa/trabaja en Variable Compleja a través de realizar un estudio histórico-epistemológico atado en los principios de la Socioepistemología. Centrar nuestra atención en el tipo de pensamiento matemático que posibilita la construcción de conocimiento en Variable Compleja nos condujo a develar aspectos epistemológicos del Teorema Integral de Cauchy, y gracias al principio de Racionalidad Contextualizada de la Socioepistemología requerimos de la configuración de unos lentes que nos permitan observar las obras desde la óptica de los personajes que aportaron insumos para su consolidación y desarrollo. Derivado de lo anterior, identificamos al Análisis Cualitativo de Contenido –en el sentido de Cruz-Márquez (2018)– como una herramienta metodológica que nos permite orientar y organizar nuestro estudio. Sucintamente entendemos al Análisis Cualitativo de Contenido como la herramienta metodológica que, con base en el fenómeno de interés a abordar, delimita la documentación alrededor de éste, donde el subsecuente análisis de un comunicado particular (Análisis Textual) no necesariamente soslaya las condiciones sociales, culturales e institucionales (Análisis Contextual) que hicieron posible la producción y difusión del conocimiento.

Describimos de manera general, con base en lo expuesto en Cruz-Márquez (2018), las seis etapas a considerar en el Análisis Cualitativo de Contenido.

1. *Objeto de análisis:* Esta primera etapa, como su nombre nos indica, consta de seleccionar un objeto de análisis, el cual puede ser un fenómeno o una comunicación concreta.
2. *Recolección de Fuentes:* Dado el objeto de análisis, se procede a recolectar todo tipo de comunicación que nos pueda servir como fuente de datos para nuestro propósito de análisis, discriminando fuentes a partir de éste.
3. *Pre análisis de los datos:* Esta etapa se caracteriza por ser un momento organizacional de la información, incluye procesos de selección y tratamiento de las fuentes de datos a analizar, como lo son traducciones y transcripciones de éstas.
4. *Análisis de los datos:* Este es el momento central de la herramienta metodológica. Aquí se busca la comprensión de las fuentes a través de un Análisis Textual y un Análisis Contextual.
5. *Interpretación e inferencia:* En esta etapa se concreta el esfuerzo reflexivo y crítico hasta aquí realizado.
6. *Conclusión:* Finalmente, en esta ultima etapa, se busca la comunicación clara y concisa de los resultados del análisis de contenido realizado.

En la tesis de maestría de Cruz-Márquez se describe una forma en la que se puede realizar el Análisis Contextual de los datos, para esto, se refieren a Espinoza (2009), quien afirma que para acercarnos al significado sociocultural de una obra, ésta debe verse al menos desde las siguientes perspectivas.

Como una producción con historia. La producción de la obra fue gracias a un ser humano que poseía una cosmovisión particular de la vida, sus ideas y las diferentes formas de significar el conocimiento están en función de la época en que vivió. Esto deviene en estudiar al autor en tanto a su vida personal y profesional, interesándonos en los problemas abordados por la ciencia de su época, así como el contexto social y político de producción y difusión de la obra.

Como un objeto de difusión. La publicación de una obra matemática, debido a que busca comunicar su contenido a alguien, acarrea una intencionalidad de difusión. Por ende es necesario considerar el tipo de obra, los destinatarios de ésta, así como el medio de difusión y la institución que la publica.

Como parte de una expresión intelectual más global. La obra intelectual que se desea analizar pertenece a una colección de ideas que evolucionan en la totalidad de las obras del autor, o bien, en el estudio ulterior de una comunidad científica, académica o culturar. Debido a esto, la obra se estudia con una mirada general de las obras relacionadas con ella.

Una mirada contextual a través de estas tres perspectivas nos permitió acercarnos a la racionalidad que propició la escritura de una obra de Cauchy de 1814 que hace alusión al teorema –Principio de racionalidad contextualizada–. A su vez nos posibilitó la configuración de un marco que nos presenta una resignificación de la conceptualización de cantidades complejas por parte del autor –Principio de resignificación progresiva–, la cual está solapada por los criterios de validación aceptados por la comunidad científica de la época –Principio de relativismo epistemológico–.

En cuanto al análisis de la matemática de la obra, Cruz-Márquez comenta que uno de los objetivos del Análisis Cualitativo de Contenido, en su acepción textual, “radica en la división del contenido en grandes secciones que –a criterio del investigador– pueden ser estudiados inicialmente de forma aislada” (p.49), por lo que posterior a la inmersión inicial (presente en el Anexo 2) de la obra que analizamos, seccionamos su contenido a través del establecimiento de ‘Teoremas y Corolarios’ que nos permitieron identificar la forma en que el autor justifica y explica la obtención de un par de ecuaciones sobre las que descansa su trabajo. Estos Teoremas y Corolarios devienen del Análisis Textual de la obra a través de la tipificación de las demostraciones que presenta Crespo (2005). Una explicación más detallada de nuestro Análisis Textual se encuentra en el apartado titulado ‘Análisis Textual: Sobre los procesos matemáticos en la obra de Cauchy’.

En resumen, el Análisis Cualitativo de Contenido como herramienta metodológica nos propició una forma para analizar la comunicación concreta –Análisis Textual– que se perfila a aportar insumos para la consolidación del Teorema Integral de Cauchy, sin soslayar la racionalidad que solapa su producción –Análisis Contextual–.

A continuación, gracias a las seis etapas que conforman al Análisis Cualitativo de Contenido, presentamos nuestro análisis de las circunstancias de orden social y epistemológicas que ultimadamente nos permitieron conjeturar una forma en la que se construye conocimiento en Variable Compleja.

6.1. Análisis Cualitativo de Contenido: el Teorema Integral de Cauchy

Primera etapa, el objeto de análisis.

La búsqueda de resultados centrales en Variable Compleja develó al Teorema Integral de Cauchy como un teorema esencial del Análisis Complejo. Un rastreo bibliográfico alrededor de este objeto nos permitió configurar la línea del tiempo presente en la Figura 1. Esta línea del tiempo muestra como primer personaje que aportó insumos para la consolidación del teorema a Gauss. Particularmente Bak y Popvassilev (2017), Bottazzini (1986) y Remmert (1991) hacen alusión a una carta de Gauss dirigida a Bessel que contiene el resultado del teorema. En este comunicado, fechado el 18 de diciembre de 1811, Gauss estipula lo siguiente.

> Now what should one think of $\int \phi x\, dx$ for $x = a + bi$?, Obviously if we want to begin from clear concepts, we must assume that x passes through infinitely small increments (each of the form $x = \alpha + \beta i$) from the value for which the integral is 0 to $x = a + bi$, and then sum all the $\phi x\ dx$. In this way the meaning is completely established. But the passage can occur in infinitely many ways: just as one can think of the entire domain of all real magnitudes as an infinite straight line, so one can make the entire domain of all magnitudes, real and imaginary, meaningful, as an infinite plane, wherein each point determined by abscissa $=a$ and ordinate $=b$ represents the magnitude of $a + bi$ as it were. The continuous passage from one value of x to another $a + bi$ accordingly occurs along a line and is consequently possible in infinitely many ways. I now assert that the integral $\int \phi x\, dx$ always maintains a single value after two different passages, if ϕx nowhere $= \infty$ within the region enclosed between the lines representing the two passages. This is a very beautiful theorem, for which I will give a not difficult proof at a suitable opportunity. (Gauss, 1811, citado por Bottazzini, 1986, p.156)

Su traducción al español versa de la siguiente forma:

> Ahora bien, ¿qué podría uno pensar de $\int \phi x\, dx$ para $x = a + bi$?, Obviamente si queremos partir de conceptos claros, debemos asumir que x pasa a través de una

> infinidad de incrementos (cada uno de la forma $x = \alpha + \beta i$) a partir del valor para el cual la integral es 0 hasta $x = a + bi$, para después sumar todos los valores $\phi x \ dx$. De esta forma el significado queda completamente establecido. Pero el pasaje puede ocurrir en una infinidad de formas: Así como uno puede pensar en el dominio de todas las magnitudes reales como una recta infinita, de la misma forma uno puede darle sentido al dominio de todas las magnitudes, reales o imaginarias, como un plano infinito, en donde cada punto determinado por la abscisa $= a$ y la ordenada $= b$ representa la magnitud $a + bi$. El pasaje continuo de un valor de x a otro valor $a + bi$ se produce a lo largo de una línea y en consecuencia se puede realizar en una infinidad de maneras. Afirmo ahora que la integral $\int \phi x \, dx$ siempre mantiene un mismo valor después de dos pasajes diferentes, si ϕx en ninguna parte $= \infty$ dentro de la región comprendida por estos dos pasajes. Este es un teorema muy bonito, para el cual daré una demostración no difícil en una oportunidad adecuada. (Traducción libre)

La identificación del Teorema Integral de Cauchy en esta carta se debe a la siguiente afirmación:

> [...]la integral $\int \phi x \, dx$ siempre mantiene un mismo valor después de dos pasajes diferentes, si ϕx en ninguna parte $= \infty$ dentro de la región comprendida por estos dos pasajes.

La versión que presentamos del Teorema Integral de Cauchy, en el apartado titulado 'Objeto matemático de estudio', estipula que el valor de la integral a lo largo una curva cerrada simple, que viva en un subconjunto del plano complejo en donde la función analítica a integrar esta definida, es cero. La identificación del Teorema Integral de Cauchy en esta carta se debe a que podemos pensar en la curva cerrada simple como dos caminos que conectan dos puntos fijos en el plano complejo. A manera de ilustración presentamos la Figura 2.

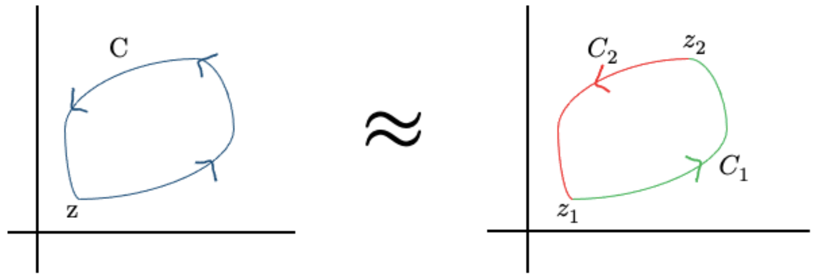

Figura 2. Representación gráfica del Teorema Integral de Cauchy.

Fuente: Elaboración propia.

En el plano de la izquierda de la Figura 2 se presenta la curva cerrada simple C. Esta curva es recorrida en sentido anti horario, tiene punto inicial y punto final z. Esta misma curva la podemos representar como la unión de dos curvas, llamadas C_1 y C_2 en el plano de la derecha. La curva C_1 es recorrida del punto z_1 al punto z_2, mientras que la curva C_2 es recorrida del punto z_2 al punto z_1. Gauss afirma que la integral $\int \phi x \, dx$ mantiene siempre el mismo valor después de dos pasajes diferentes, lo que nos permite interpretar que el valor de la integral a lo largo de la curva C_1 es el mismo valor de la integral a lo largo de la curva C_2; debido a que las curvas se recorren en sentidos opuesto, estos valores solo difieren en signo, por lo que la unión de las dos curvas, es decir, la suma de estos dos valores, da resultado cero.

Notamos que el comunicado de Gauss concluye con la oración "[...]este es un teorema muy bonito, para el cual daré una demostración no difícil en una oportunidad adecuada", sin embargo no existe registro de algún trabajo posterior por parte de Gauss donde se localice la demostración del teorema. En palabras de Bak y Popvassilev (2017) "desafortunadamente, así como la famosa nota al margen de Fermat, cualquiera sea la demostración que Gauss tenia en mente, nunca apareció"(p.218).

Con base en que estamos buscando analizar el tipo de pensamiento matemático y el rol del rigor en las producciones intelectuales de los personajes que aportaron insumos para la consolidación del Teorema Integral de Cauchy, no podemos remitirnos a analizar las producciones de Gauss alrededor de este resultado porque no existe evidencia escrita que nos permita lograr nuestro objetivo. Sin embargo, del comunicado de Gauss a Bessel rescatamos que Gauss describe a los números complejos a través de presentarlos como puntos en el plano, a su vez, este tipo de descripciones gráficas las encontramos cuando hace referencia a los caminos de integración entre dos puntos del plano complejo.

El segundo personaje que trabajó alrededor del Teorema Integral de Cauchy fue Augustin Louis Cauchy. El rastreo de la bibliografía ubicó en tres diferentes años, tres diferentes obras, que abonan a su consolidación. Watson (1960) y Neuenschwander (1981) comentan que la primera investigación de Cauchy alrededor del teorema se encuentra en la memoria titulada Sur les intégrales définies (Sobre las integrales definidas); Neuenschwander (1981) estipula que esta memoria es el primer trabajo de Cauchy que contribuye a la teoría de funciones, y cuyos elementos que la conforman culminaron en la memoria titulada Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaries (Sobre las integrales definidas comprendidas entre dos números imaginarios), trabajo en el que Cauchy establece un significado para las integrales cuyos limites de integración son números complejos, siendo además la segunda instancia que aporta insumos para la consolidación del teorema. Finalmente, Bottazzini (1987) comenta que en 1846 Cauchy presenta la primera formulación general del teorema en la obra titulada Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée (Sobre las integrales que se extienden a todos los puntos de una curva cerrada). En este estudio nos remitimos a analizar la primera obra, cuyos resultados datan del año 1814.

Segunda etapa, recolección de fuentes

Una vez identificados los títulos de las obras de Cauchy que propiciaron insumos para la consolidación del Teorema Integral de Cauchy, procedimos a delimitar nuestro análisis –Textual y Contextual– a la primera de éstas. Su obtención en formato digital fue a través de la plataforma https://gallica.bnf.fr, la cual es una biblioteca digital de acceso gratuito en internet. La obra se encuentra en formato pdf, el texto se presenta en forma de imagen y se encuentra en francés.

A la par de la obtención de este documento recopilamos publicaciones de carácter bibliográfico y obras donde se reinterpreta el trabajo de Cauchy, con la finalidad de configurar un marco que nos permitan contextualizar y entender la obra que analizamos.

Frank Ragland, en el prefacio de la biografía de Cauchy escrita por Belhoste (1991), describe el trabajo matemático de Cauchy como una actividad que busca clarificar, extender, aplicar y sostener en una base teórica firme a la matemática de la época. Este escrito de Belhoste nos permitió acercarnos al desarrollo histórico de los trabajos de Cauchy. A su vez, en este libro se presentan diversos extractos de cartas escritas de Cauchy a su familia, las cuales nos proveen de una racionalidad con la que Cauchy esta trabajando en sus investigaciones. La documentación de los hechos e ideas que desembocaron en la configuración de Cauchy de 1814 estuvo acompañada por la lectura de Ettlinger (1923), el cual nos permitió dilucidar el motivo por el cual esta obra provee insumos para la consolidación del Teorema Integral de Cauchy, específicamente, el trabajo de Ettlinger propicia un vínculo entre la memoria de Cauchy y el resultado que actualmente conocemos como el Teorema Integral de Cauchy. Aunado a estas lecturas, el trabajo de Smithies (1997, 2005) nos presentó un panorama general de la matemática presente en el escrito original, el cual tiene una extensión de aproximadamente 200 paginas, y a su vez nos permitió localizar el lugar en donde se exponen las ideas que desembocan en la configuración del Teorema. Particularmente, Smithies (1997) presenta los resultados matemáticos que anteceden a la configuración de la memoria de 1814, esta presentación de resultados resultó fructífera en tanto que uno de ellos está ligado al problema que Cauchy atiende en su escrito. Finalmente, Espinoza (2009) y Larivière (2017) nos permitieron robustecer este resultado de Smithies al presentarnos un análisis del Cours d'analyse de Cauchy, publicado en 1821, el cual recapitula ideas que se ven presentes en la memoria de 1814.

Tercera etapa, Pre análisis de los datos

La memoria de Cauchy que descargamos de la biblioteca digital Gallica (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33065/f607.item) es un escrito de 203 páginas. Para una lectura más fluida de su contenido transcribimos y tradujimos algunas secciones de ella con ayuda de https://www.deepl.com. La traducción de estas secciones es nuestra fuente principal de datos, su transcripción facilita las modificaciones y complementos que realizamos en ella con la finalidad de presentar nuestro Análisis Textual.

La delimitación de las secciones a transcribir y traducir nos la propició Smithies (2005) y Ettlinger (1923). Smithies (2005) estructura el contenido de la obra a través de la Tabla 1.

Tabla 1. Contenido de la memoria de 1814

	Descripción
	Introducción: Revisión de los resultados.
I	Sobre las ecuaciones que autorizan el pasaje de lo real a lo imaginario.
1	Exposición general del método: las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
2	Primera aplicación: Integrales que incluyen $e^{-x^{2k}}, x^n$ y z.
3	Segunda aplicación: Integrales que incluyen ax, xz, x^{n-1} y $e^{-x^2-\frac{m^2}{x^2}}$.
4	Tercera aplicación: Integrales que incluyen $e^x senz$ y $e^x cosz$.
5	Cuarta aplicación: ax^2 y xz.
6	Sobre la separación de la exponencial en otras dos funciones: un ejemplo.
II	Sobre las dificultades que puede ofrecer la integración de ecuaciones diferenciales.
1	Integrales dobles con una forma indeterminada debido a los valores infinitos del integrando.
2	Diferencia en los valores que toman las integrales repetidas asociadas a estos casos.
3	Convirtiendo integrales indefinidas en integrales definidas con integrandos infinitos
4	Sobre el valor, en términos finitos, en la sección 2 mencionada con anterioridad.
5	Primera aplicación a la parte 1, sección dos con indeterminaciones.
6	Segunda aplicación a la parte 1, sección 3.
7	Segunda aplicación a la parte 1, sección 6.
1er	Desarrollos de la segunda parte, discusión de dos grupos de evaluación.
2do	(Supuesta) reconciliación de una de sus integraciones con la de Legendre.

Fuente: Elaboración propia a partir Smithies (2005)

La primera columna de la Tabla 1 indica las partes de la obra en números romanos, las subsecciones en números arábigos, y en números ordinales los anexos de la obra.

En la introducción de la obra Cauchy explicita que “la solution d’un grand nombre de problèmes se réduit, en dernière analyse, à l’évaluation des intégrales définies: aussi les géomètres se sont-ils beaucoup occupés de leur détermination.”(p.611)(la solución de muchos problemas se reduce, en última instancia, a la evaluación de integrales definidas: por ello, los geómetras se han dedicado mucho a su determinación). Autores como Bottazzini y Gray (2013) comentan que esta obra de Cauchy es una obra cuyo contenido versa sobre la integración de funciones de variable real. El Análisis Contextual que realizamos alrededor de la obra nos permitió identificar uno de los objetivos de Cauchy al presentarla a la academia de ciencias. Inferimos que desde el punto de vista de Cauchy, justificar el cálculo de integrales a través del ‘pasaje de lo real a lo imaginario’ es un método que requiere ser precisado. En palabra de Cauchy “j’ai conçu l’espoir d’établir le passage du réel à l’imaginaire sur une analyse directe et rigoureuse; et mes recherches m’ont conduit à la méthode qui fait l’objet de ce Mémoire”(Cauchy, 1814, p.612) (concebí la esperanza de establecer el pasaje de lo real a lo imaginario sobre un análisis directo y riguroso; y mi investigación me llevó al método que es objeto de esta Memoria).

La obra que recuperamos de la biblioteca digital Gallica, además de estar estructurada como presentamos en la Tabla 1, previo a la introducción presenta un reporte de la obra escrito por Lacroix y Legendre en donde comunican de manera general el proceder de Cauchy en la memoria. La lectura de este reporte nos permite describir, a grandes rasgos, las dos partes de la obra. En la parte I se exhibe el método que configura Cauchy para no depender del pasaje de lo real a lo imaginario en el cálculo de integrales, y posterior a esto se presentan diversas aplicaciones del método a casos particulares, lo que le posibilitó evaluar una gran cantidad de integrales. En la obtención del valor de algunas integrales, Lacroix y Legendre comentan que

> En appliquant ses formules à divers exemples, M. Cauchy n’a pas tardé à reconnaître que, dans certains cas, ces formules étaient en défaut; c’est-à-dire, qu’on

> n'obtenait pas le même résultat en intégrant d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à z, ou en suivant une marche contraire (Cauchy, 1814, p.605)
>
> Cuya traducción al español versa de la siguiente forma.
>
> Al aplicar sus fórmulas a varios ejemplos, el Sr. Cauchy se apresuró a reconocer que, en ciertos casos, estas fórmulas eran defectuosas; es decir, que no se obtenía el mismo resultado integrando primero con respecto a x, luego con respecto a z, o siguiendo un curso opuesto

Por lo que en la parte II de la obra Cauchy configura una solución para el defecto del método. Desde una perspectiva actual este defecto descansa en el intercambio del orden de integración, en una integral doble, cuando se desea calcular una integral cuyo integrando no es continuo en el intervalo de integración. La solución al problema la configura Cauchy con lo que denominó Integrales Singulares.

Aunado a lo anterior, el trabajo de Ettlinger (1923) propicia un vínculo entre la memoria de Cauchy y el resultado que actualmente conocemos como el Teorema Integral de Cauchy. La conjugación de estos dos elementos nos permitió identificar las secciones de la obra que propiciaron insumos para la consolidación del Teorema Integral de Cauchy, los cuales están presentes de la página 599 a la página 622, abarcando hasta la subsección 1 de la parte I de la Tabla 1, previo a la primera aplicación descrita en la subsección 2 de la Tabla 1.

En el Anexo 1 de este escrito se encuentra la traducción del apartado titulado 'De las ecuaciones que autorizan el pasaje de lo real a lo imaginario: Exposición general del método', la fuente principal del Análisis Textual del escrito, delimitado gracias a la descripción del párrafo anterior. En el Anexo 2, con el objetivo de complementar este apartado de la obra, justificamos y comprendemos la matemática descrita a través de los comentarios de Lacroix y Legendre –presentes en el reporte de la obra– así como los comentarios de Cauchy en la introducción de la memoria. Finalmente, en el Anexo 3, a la luz de la lectura del trabajo de Ettlinger (1923) presentamos una interpretación del Teorema Integral de Cauchy a partir de la ecuación del Pie de Página de este apartado.

Debido a que en la cuarta etapa del Análisis Cualitativo de Contenido se busca la comprensión de las fuentes a través de un Análisis Textual y un Análisis Contextual –los cuales, en el desarrollo de la investigación no se realizaron como tareas aisladas, ya que la conjugación simultánea de ambos es la que nos permitió comprender la obra de Cauchy de 1814– procedemos a presentar el resultado de estos dos análisis por separado, esto con el objetivo de una mejor comunicación de lo que develamos en nuestro estudio. A continuación iniciamos con el Análisis Contextual.

7. Análisis de la Obra

7.1. Análisis Contextual de la obra de Cauchy de 1814

Una de las premisas que estamos considerando como verdaderas es que el trabajo matemático de Cauchy se ha integrado a la matemática contemporánea, donde al conocimiento se le ha despersonalizado y descontextualizado. Tener en cuenta que la construcción de conocimiento es el resultado del trabajo cumulativo de los seres humanos, en los escenarios específicos en que éste se gestó, nos conduce a exponer el contexto que permeó su consolidación. A continuación presentamos una relatoría de sucesos e ideas que desembocaron en la consolidación de la memoria de Cauchy de 1814, obra titulada 'Sur les intégrales définies', fuente principal de datos de este estudio. El objetivo de esta descripción es reconstruir, en medida de lo posible, el contexto que influyó y suscitó las ideas plasmadas en ella. La descripción contextual en donde enmarcamos esta memoria nos permite configurar una forma en que Cauchy ve la vida y al conocimiento científico de su época, por lo que consideramos importante destacar que más allá de describir los acontecimientos que anteceden a la obra, la configuración de este contexto nos provee de una racionalidad con la que ésta fue escrita. Por lo anterior, la descripción es guiada a través del contexto de significación descrito por Espinoza (2009), estos lentes nos permiten ver a la obra *como una producción con historia*, *como un objeto de difusión* y *como parte de una expresión intelectual más global de la época*.

La memoria de Cauchy de 1814 la entendemos *como una producción con historia* principalmente por el trabajo biográfico de Belhoste (1991), en éste, además de presentar una relatoría de hechos históricos que describen la vida de Cauchy, el autor presenta una colección de correspondencias entre Cauchy y su familia, así como extractos de reflexiones de Cauchy alrededor de la vida y ciencia parisina de inicios del siglo XIX, lo que nos permitió acercarnos a la cosmovisión de Cauchy que desemboco en las ideas de la obra que analizamos. En el prefacio de esta obra biográfica, Belhoste describe a Cauchy como "un hombre de convicciones apasionadas que, siempre que se le presentaban ocasiones para defender o explicar aquellas cosas que consideraba 'la verdad', se negaba sistemáticamente a dejarse influir por consideraciones de conveniencia personal o interés propio"(p.viii). Esta aseveración es el resultado de un estudio detallado de la vida de Cauchy, particularmente Grabiner (1994) afirma que este libro biográfico "esta ampliamente documentado, tanto en fuentes publicadas como manuscritos"(p.219), por lo que esta biografía se convirtió en la columna sobre la que se asientan los hechos que presentamos a continuación.

Augustin-Louis Cauchy nació el 21 de agosto de 1789, una época en la que su padre Louis-François, al poseer un cargo público a la par de la monarquía en la policía parisina, pierde su posición al desatarse la revolución francesa. Viendo su vida en riesgo ante las autoridades revolucionarias, la familia abandona París y no regresa hasta la caída de Robespierre en 1794. De estos primeros años se tiene poco registro escrito de la vida de Cauchy, sin embargo, Belhoste afirma que de vuelta en Paris, Louis-François se preocupó por la educación de sus hijos, instruyéndolos personalmente en gramática, historia, ética, religión, y el estudio de las ciencias. El autor relata que el nuevo trabajo de Louis-François le posibilitó la interacción con dos científicos de la época, Laplace y Lagrange. Incluso se hace alusión a un comentario en una reunión en la que se encontraban varios miembros del senado, donde Laplace, refiriéndose a Cauchy, afirma lo siguiente: "ven a ese hombrecito de ahí, ¿no? Bueno, un día nos reemplazará a todos nosotros simples geómetras" (Valson, 1868, citado por Belhoste, 1991, p.7)

Posterior a la educación propiciada por su padre, en 1804 Cauchy se prepara para la admisión al École Polytechnique en donde inicia sus estudios en ingeniería. La lectura de Faurcy (1828) le permite a Belhoste estipular que los estudios de los aceptados en el École dependían de la lectura de diversos textos en ciencias matemáticas, como lo son el curso de análisis algebraico de Gariner, el tratado elemental de cálculo diferencial e integral de Lacroix, la teoría mecánica de Prony, la geometría descriptiva de Monge, entre otros. Particularmente, se presentan datos porcentuales de los estudios de las ciencias matemáticas en el currículo del École, se comenta que en 1806 las disciplinas del primer y segundo año eran las siguientes: análisis ocupaba un 29% en el primer año y un 18% en el segundo; para mecánica, 17% y 22% respectivamente; en cuanto a geometría descriptiva un 26% y 3%. El dominio de la matemática que adquirió Cauchy en sus cuatro años de estudio en el École no soslaya la adquisición de un conjunto de convicciones políticas y religiosas que permearon su desarrollo posterior a su graduación, pese a ello, Belhoste afirma que no hay documentación escrita que posibilite transparentar los planes que tenia Cauchy para su futuro, por lo que se remite a presentar aquello que pueda justificar a través de evidencias tangibles.

Al terminar los estudios en el École, a finales de 1807, Cauchy procede a enrolarse en el Ecole des Ponts et Chaussees, lo que le permitió especializarse como ingeniero civil por un periodo de dos años. Belhoste afirma que no pasó mucho tiempo para que Cauchy formara parte de un equipo responsable de la construcción de un acueducto, del cual se tiene registro de su desempeño en ese proyecto, llegando a afirmarse que “los conocimientos teóricos y la comprensión que adquirió en la École le facilitaron [...] la realización de actividades”(Reporte de Girard a Count Molé, 1808, citado por Belhoste, 1991, p.13).

Belhoste estipula que en 1815 Cauchy obtiene una plaza como profesor en el École Polytechnique. Lo que mostramos a continuación es una colección de correspondencias entre Cauchy y su familia entre 1810 y 1814, años en los que Cauchy busca un cambio de escenario de su vida como ingeniero a su vida como profesor. Lo anterior con el objetivo de configurar un marco que nos permite esclarecer la forma en que Cauchy concebía a la vida y al conocimiento en los años previos a la publicación de su memoria de 1814.

Al concluir sus estudios de especialización en 1810 Cauchy es designado como aspirante a ingeniero en la excavación y construcción del puerto de Napoleón. Ser encargado de un puesto de excavación le abrió puertas de la alta sociedad Parisina, sin embargo, este nuevo escenario de su vida no sentó bien con las creencias religiosas de Cauchy, llegando a comentar lo siguiente

> Así que afirman que mi devoción me hace ser orgulloso, arrogante y enfadado. ¿Quiénes son exactamente los que hacen estas afirmaciones? No son personas que tengan mucha religión en sí mismas [...] hace unos días, cierta persona de la ...

> sociedad me dijo de forma amistosa que la religión a menudo hace que los jóvenes se encaprichen. Hablé con ella un rato sobre el tema y le demostré que yo no estaba encaprichado. Ahora, en cuanto a las personas que no tienen religión, he decidido no discutir nunca con ellas, y sólo les responderé cuando me ataquen sobre el tema (Carta de Cauchy a su familia, 1810, citado por Belhoste, 1991, p.22).

Belhoste, haciendo alusión a esta carta, afirma que “a bastantes personas les molestó el comportamiento austero de Cauchy y su fría exposición de sus sentimientos religiosos.”(p. 22). Este apego a sus convicciones religiosas no solamente lo alienaba de su vida fuera del ámbito profesional, si no que también, posteriormente, no le permitió generar buenas relaciones con sus pares en el ámbito académico. A modo de ejemplificación, Cauchy en 1824 es designado como evaluador de un estudio de uno de sus colegas donde se trataba la naturaleza de la luz. Belhoste comenta que en el reporte de la obra Cauchy afirma la superioridad de la religión cristiana al reprocharle al autor haber afirmado erróneamente que Newton dudara de la existencia del alma. El comentario es significativo en tanto que tuvo réplica en un ejemplar de un periódico, donde se afirmó lo siguiente

> Ahora bien, era ciertamente curioso ver a un académico que parecía cumplir las respetables funciones de un misionero predicando a los paganos. No es una novedad, salvo cuando ocurre en la Academia, oír a un geómetra que se afana en demostrar -no por medio de ecuaciones y argumentos sólidamente lógicos, sino por medio de declamaciones tan usadas [...] fuera de lugar en una época ilustrada- (Memorial Catholique, 1824, citado por Belhoste, 1991, p.139).

Esta sección del periódico nos hace ver que las ideas religiosas de Cauchy parecían no estar a la par de lo que ocurría en la vida parisina de la época, desencadenando puntos de fricción entre sus pares y contemporáneos.

Otro aspecto que destaca Belhoste, y que tiene un impacto en la concepción del conocimiento a inicios de la segunda década de 1800 en la vida de Cauchy, es su carácter inquisitivo sobre la naturaleza sensible del mundo. En una carta escrita a sus padres, fechada el 10 de noviembre de 1810, da una explicación analítica de cómo se comportan las olas, en lugar de presentar una representación estrictamente visual del movimiento. En palabras de Cauchy:

> Las imágenes de Vernet pueden dar una idea de su aspecto cuando está en calma, pero no pueden describirlo cuando está agitado. No pueden mostrar cómo la ola, después de haber chocado con las rocas, se retira con furia, retrocediendo sólo para volver al punto de donde había partido, más furiosa y terrible que antes. No pueden mostrar cómo, en el encuentro de las olas que han sido arrojadas por las rocas con las que llegan desde el mar abierto, cada ola particular se eleva y luego se estrella contra la orilla, donde deja una larga estela de espuma (Carta de Cauchy a sus padres, 1810, citado por Belhoste, 1991, p.24).

Este tipo de reflexiones, distando de ser investigaciones eruditas de los sucesos naturales, propician una mirada al tipo de pensamiento que permeó el quehacer de la vida de Cauchy en el inicio de sus investigaciones en las ciencias de la época. En ese mismo año, en otra carta de Cauchy a su familia, relata que en sus tiempos libres busca iniciar "un estudio coherente de todas las ramas de la matemática, empezando por la aritmética y siguiendo por la astronomía, aclarando los puntos oscuros lo mejor posible, trabajando en la simplificación de las pruebas y tratando de descubrir algunas proposiciones nuevas" (Carta de Cauchy a su familia, 1810, citado por Belhoste, 1991, p.25). Su interés resultó fructífero, uno de los primeros estudios que realizó versa sobre poliedros, este fue presentado al instituto de Francia el 11 de febrero de 1811 –dentro de los diversos resultados presentes en el escrito Cauchy generaliza la fórmula de poliedros de Euler ($C + V = A + 2$) al considerar una red de poliedros– Los responsables de evaluar el estudio fueron Malus y Legrendre. Malus haciendo alusión a las demostraciones presentes en el escrito afirma que éstas son "rigurosas y se desarrollan de una forma especialmente elegante"(Malus, 1811, citado por Belhoste, 1991, p.26)

Belhoste comenta que las investigaciones de Cauchy, desarrolladas a la par de su trabajo como ingeniero, versaron alrededor de diversos temas, como lo son sus trabajos sobre poliedros, sentó las bases de sus estudios posteriores en álgebra, escribió su primer escrito que contenía temas del análisis, entre otros. Su creciente interés por la investigación en distintas áreas de la matemática, aunado al hecho de que su salud se vio afectada por las condiciones de su trabajo en ingeniería, hacen que Cauchy busque establecerse como profesor para mejorar su salud y proseguir con sus intereses académicos. Este cambio de escenario, pasar de laborar como ingeniero a profesor, fue apoyado por su familia. En una carta de Louis-François a Cauchy, su padre le comenta lo siguiente: "Tu último trabajo sobre poliedros causó una profunda impresión en la Academia. Si demuestras uno de los teoremas de Fermat, se te abrirá el camino. El momento es favorable para ti. No lo dejes pasar."(Louis-François, sin fecha, citado en Belhoste, 1991, p.29). Comentarios como este le permiten a Belhoste inferir que las investigaciones de Cauchy sobre poliedros no solamente fueron bien recibidas por la comunidad científica de la época, a su vez le permiten afirmar que "la personalidad intelectual de Augustin-Louis, tan marcada en todos sus trabajos científicos se nutrió en un círculo familiar íntimo [...] donde desarrolló su excepcional capacidad de trabajo duro y su curiosidad e interés por aprender [...] la verdad"(p.8). Esta influencia familiar, a la que hace referencia el autor, gira en torno a la idea de que formalizar situaciones, manipular abstracciones y la necesidad de ser claros y precisos en la exposición de argumentos son cualidades, en la teoría y en la práctica del derecho, ambiente en el que su padre y hermanos se desenvuelven en sus vidas profesionales. Belhoste comenta que estos elementos pudieron formar parte de la forma en que Cauchy aborda sus investigaciones debido a que "durante toda su vida, Augustin-Louis conservó un profundo respeto filial por sus padres, especialmente por su padre. Cada semana, junto con sus hermanas y hermanos, acudía al Palacio de Luxemburgo para disfrutar de un almuerzo familiar" (Valson, 1868, citado por Belhoste, 1991, p.8). Afirmar que la influencia familiar, en particular la vida profesional de su padre y sus hermanos, jugó un papel en la forma que Cauchy realizaba sus investigaciones nos condujo a preguntarnos la naturaleza de las investigaciones científicas de la época. En este orden de ideas Belhoste considera pertinente aclarar una forma de pensar de Cauchy acerca de las ciencias exactas a través del siguiente extracto.

> ¿Qué puedo decir de las ciencias exactas? La mayor parte de ellas parecen haber sido ya llevadas a su más alto grado de desarrollo. La aritmética, la geometría, el álgebra y las matemáticas superiores son ciencias que pueden considerarse [...] como completadas [...] y no queda nada más por hacer con ellas, salvo encontrar nuevos campos de aplicaciones útiles. (Cauchy, 1811, citado por Belhoste, 1991, p.28)

Este tipo de reflexiones permiten una interpretación de la matemática atada a las explicaciones de fenómenos naturales, o bien, su aplicación a otras áreas del conocimiento. Describir a la matemática como 'completa' nos permite inferir que uno de los desarrollos ulteriores de los elementos que la conforman, y que posteriormente posibilitan la matematización de fenómenos naturales así como la aplicación de éstos en otras ciencias de la época, fue el esclarecimiento de métodos y procedimientos utilizados en ella. De aquí que Belhoste concluya que "uno de los principales proyectos de Cauchy consistió en asentar sobre bases firmes y rigurosas diversos métodos y procedimientos matemáticos que habían sido utilizados sin suficiente justificación teórica"(p.9).

El esclarecimiento de métodos y procedimientos matemáticos es el principal objetivo de la memoria de Cauchy titulada 'Sur les Intégrales définies'. Cauchy afirma que su intención principal con esta obra es presentar un análisis directo y riguroso de un método que carece de justificación, el cual es utilizado por sus contemporáneos para el cálculo de integrales. Las ideas que conforman esta memoria datan de 1814, sin embargo este escrito no es publicado hasta 1827 debido a la restauración de Louis XVIII en el poder, lo cual generó una "purga de científicos que habían estado demasiado cerca de la Revolución y de los regímenes bonapartistas"(Grabiner, 1994, p.216), lo que impidió que la obra fuera revisada. Cabe destacar que, previo a este escrito, matemáticos como Poisson y Laplace utilizaban un método conocido en la literatura como 'el pasaje de lo real a lo imaginario' para la evaluación de integrales, el cual esta enmarcado en un fenómeno denominado 'la generalidad del álgebra', descrito por Freudenthal (1971) de la siguiente manera:

> la generalidad del álgebra [...] asume que aquello que es verdadero para números reales, lo es para números complejos; lo que es válido para magnitudes finitas, lo

es para infinitesimales; lo que es verdadero para series convergentes, lo es para series divergentes (pp.135-136).

Con el objetivo de ilustrar este fenómeno nos referimos a Larivière (2017). En este estudio se presenta un resultado expuesto por Poisson en 1820 en donde utiliza el pasaje de lo real a lo imaginario para calcular el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

Poisson efectúa el cambio de variable $x = -(cosz + senz\sqrt{-1})$, lo que le permite concluir que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} &= \int_{0}^{(2n+1)\pi} \frac{-\sqrt{-1}(cosz + senz\sqrt{-1})}{-(cosz + senz\sqrt{-1})} dz \\
&= \int_{0}^{(2n+1)\pi} \sqrt{-1}\, dz \\
&= z\sqrt{-1}\Big|_{0}^{(2n+1)\pi} \\
&= (2n+1)\pi\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Observemos que el método consiste en que la variable x tome valores complejos. Es decir, la generalidad del simbolismo algebraico –la generalidad del álgebra– permitió atribuir un alcance indefinido a la variable involucrada (Larivière, 2017). El método es fructífero en tanto que posibilitó el cálculo de integrales indefinidas para las cuales el integrando no posee antiderivada. Por ejemplo, Smithies (1997) afirma lo siguiente

1.- En 1781 Euler obtiene el siguiente resultado

$$\int_{0}^{\infty} \frac{cosx}{\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{senx}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

derivado de utilizar un cambio de variable, que involucra cantidades complejas, a la siguiente integral

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

2.- Este método también es utilizado por Laplace en 1809, lo que le permite obtener el siguiente resultado

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} senx\, dx = \frac{k}{1-\alpha} sen\left(\frac{\pi}{2}1-\alpha\right);\ k,\alpha \in \mathbb{R}$$

al sustituir $x = it^{\frac{1}{1-\alpha}}$, donde $0 < \alpha < 1$, en la integral

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\, e^{ix} dx$$

Resultados como este son abundantes en la época circundante a la memoria de Cauchy de 1814. Cuestionarse cómo se estaban conceptualizando estos cambios de variable le permitió a Larivière (2017) enmarcar el trabajo de Laplace, alrededor del pasaje de lo real a lo imaginario, como un método que descansa en pensar en el álgebra como 'una aritmética universal' donde las cantidades utilizadas en ella poseen un lenguaje tan general que se podían utilizar 'expresiones sin sentido' (las variables mismas del álgebra) sobre 'cantidades imposibles' (las cantidades complejas) con el objetivo de descubrir verdades sobre cantidades reales. En palabra de Laplace "cuando los resultados están expresados en cantidades indeterminadas, la generalidad de la notación abarca todos los casos, sean estos reales o imaginarios" (Laplace, 1809, citado en Larivière, 2017, p.8). Es decir, esta concepción del álgebra implica la lectura de expresiones matemáticas como el establecimiento de relaciones generales entre cualesquiera objetos sin importar su naturaleza u origen. Larivière afirma que con el objetivo de establecer pautas definidas sobre lo que se podía y no se podía hacer con estas expresiones algebraicas, Cauchy se embarca en clarificar cuál es el alcance de las matemáticas, y en 1821, al publicar su libro titulado Cours d'anlayse (Curso de análisis), el cual posee ápices de esta clarificación. En la traducción del Curso de Análisis por parte de Bradley y Sandifer (2009) Cauchy estipula que en cuanto a los métodos ha "tratado de darles todo el rigor que se exige a la geometría, de modo que nunca haya que recurrir a argumentos extraídos de la generalidad del álgebra"(p.1), puntualizando que el alcance de las fórmulas algebraicas expuestas en su escrito son “validas solo bajo ciertas condiciones y para ciertos valores de las cantidades involucradas”(p.2).

Propiciar bases solidas sobre las que descanse el aparato matemático, dependiéndose de la generalidad del álgebra como recurso de validación, es el elemento central sobre el que gira la memoria de 1814. En palabras de Cauchy

> Mais parmi les diverses intégrales [...] plusieurs ont été découvertes pour la première fois à l’aide d’une espèce d’induction fondée sur le passage du réel à l’imaginaire. Les passages de cette nature conduisent souvent d’une manière très-prompte à des résultats dignes de remarque. Toutefois cette portion de la théorie est, ainsi que l’a observé M. Laplace, sujette à plusieurs difficultés. Aussi [...] l’auteur ajoute : On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découvertes semblables à l’induction dont les géomètres font depuis longtemps usage. Mais ces moyens quoique employés avec beaucoup de précaution et de réserve, laissent toujours à desirer des démonstrations de leurs résultats. Pour obvier à cet inconvénient, l’auteur a eu soin de confirmer par d’autres méthodes les valeurs des intégrales qu’il avait trouvées. (Cauchy, 1814, pp.611-612).

Cuya traducción versa de la siguiente forma.

> Pero entre las diversas integrales [...] varias fueron descubiertas por primera vez con la ayuda de una especie de inducción basada en el pasaje de lo real a lo imaginario. Pasajes de esta naturaleza conducen a menudo de manera muy rápida a resultados dignos de mención. Sin embargo, esta parte de la teoría está, como observó M. Laplace, sujeta a varias dificultades. Además [...] el autor [Laplace] añade: Se puede, pues, considerar estos pasajes como medios de descubrimiento similares a la inducción que los geómetras han utilizado desde hace mucho tiempo. Pero estos medios, aunque se utilicen con gran cuidado y reserva, siguen dejando mucho que desear en cuanto a la demostración de sus resultados. Para superar este inconveniente, el autor [Laplace] se preocupó de confirmar los valores de las integrales que había encontrado por otros métodos.

De esta forma entendemos la memoria que analizamos *como un objeto de difusión* en tanto que la configuración del método de Cauchy que le permitió sustentar la obtención de resultados, sin hacer alusión al pasaje de lo real a lo imaginario, tiene por intención principal la de presentar la actividad matemática de Cauchy alrededor de los tipos de argumentaciones que eran considerados como válidos en la comunidad académica de la época, esto con la finalidad de asegurar un puesto que le permita dejar sus actividades de ingeniería para proceder con sus investigaciones en las ciencias matemáticas de la época.

La búsqueda de métodos alternativos de validación, con el objetivo de dotar de consistencia interna al aparato matemático, nace por el cuestionamiento de recursos meramente matemáticos que justificaban la obtención de diversos resultados de la época. En esta búsqueda de métodos alternativos de validación Cauchy esta buscando, en palabras de Larivière (2017), clarificar el alcance de las matemáticas. Entendemos esta clarificación a través de las propuestas alternativas que presenta Cauchy para tratar con diferentes conceptos e ideas consolidadas en la comunidad científica de la época. Como ya hemos mencionado, en la introducción de la obra de 1814, Cauchy afirma que concibió "l'espoir d'établir le passage du réel à l'imaginaire sur une analyse directe et rigoureuse"(p.612) (la esperanza de establecer el pasaje de lo real a lo imaginario sobre un análisis directo y riguroso), de modo que con la finalidad de mostrar algunas de las conclusiones a las que llegó Cauchy en su búsqueda por clarificar el alcance de las matemáticas, presentamos dos interpretaciones sobre el rol que juega el rigor en su obra de 1821 titulada Cours d'analyse (Curso de Análisis).

El análisis del capítulo siete del Cours d'analyse de Cauchy, en donde se exhibe el trabajo con números complejos, le permite a Larivière (2017) configurar que la generalidad del álgebra es lo que condujo a matemáticos de la época –como Laplace, Poisson y Lagrange– a aplicar expresiones matemáticas que se obtuvieron en un determinado contexto, en otro. Cauchy, al no estar de acuerdo en extender el domino de aplicabilidad de ciertas expresiones, busca clarificar cual es el tema de las matemáticas, y en esta clarificación entra en juego el rigor. Un rigor desprendido de la idea que las matemáticas son rigurosas solamente porque son deductivas, e instaurado en el desarrollo mismo de la matemática, el cuestionamiento de ciertos procedimientos utilizados puede propiciar nuevas formas de justificación.

En particular Larivière afirma que Cauchy no confiaba en el pasaje de lo real a lo imaginario porque

> Al pasar de los reales a los imaginarios, uno podría suponer erróneamente que las propiedades algebraicas de las funciones reales se mantienen para las funciones imaginarias; y uno podría terminar con múltiples valores para la misma integral definida dependiendo de la función imaginaria que utilice para su sustitución.(p.66)

El autor estipula que el trabajo de Cauchy con números complejos se remite a que se puede interpretar a una variable en términos de imaginarios solo si se tiene "prueba de que las manipulaciones pertinentes se mantienen de los valores reales en imaginarios"(p.66). De esta forma, Cauchy propicia un punto de inflexión al dejar de lado la manipulación de cantidades complejas vistas solo como herramientas que permiten obtener resultados en el análisis real, propiciando el estudio de números complejos como un tema propio de investigación.

Por otro lado Grabiner (2012) asegura que el sustento de los argumentos del Curso de Análisis de Cauchy está anclado al rigor, el cual esta íntimamente relacionado con la necesidad de enseñar. En este orden de ideas, Espinoza (2009) estipula que este libro de Cauchy es una obra con intencionalidad didáctica donde la estructura de las ideas y las ideas mismas de la obra se presentan como una reorganización de los conocimientos matemáticos trabajados en la época, particularmente no presenta "indicios de aplicaciones a la geometría o a la mecánica, o a ninguna otra ciencia de la época; Cauchy rechaza relacionar la matemática con las aplicaciones a las ciencias de su tiempo"(p.77). El autor afirma que esta aproximación difiere del paradigma imperante en los libros de texto de cálculo de la época, en donde explícitamente se relacionaba la matemática con el conocimiento sensible del mundo. El hecho de que Cauchy no apoye su proceder en analogía a la naturaleza sensible desemboca en el desarrollo de un escrito cuyo punto de partida es la lógica. Esta nueva aproximación, desprendida de lo sensible, enmarca en una nueva racionalidad a la matemática, la cual se fundamenta en si misma. La institucionalización de esta nueva racionalidad, a través de la publicación de la obra, trajo dos cambios en la forma de ver y hacer matemáticas. Por un lado, permitió “llevar al análisis a otros niveles en cuestión de generalidad, fundamentación y estructura, además de permitir el nacimiento de nuevas áreas de estudio, como el álgebra lineal”(p.86). Por otro lado, los métodos lógicos utilizados se trastocaron, al grado de que “la inducción pierde relevancia epistémica sobre lo deductivo”(p.94). Para esclarecer este último punto Espinoza comenta que previo a Cauchy la descripción de fenómenos de la naturaleza tenía como punto de partida la toma de datos, los cuales posteriormente eran generalizados. Sin embargo, al desprenderse de la naturaleza sensible, la generalización fue suplantada por la abstracción, en el sentido que el pensamiento inductivo, proceder de lo particular a lo general, es remplazado por el pensamiento deductivo, en donde se procede en sentido opuesto, de lo general a lo particular. Es decir, “el cambio de racionalidad de lo sensible al desprendimiento de lo sensible trae un cambio metodológico, de la inducción a la deducción, de la generalización a la abstracción”(p.94). Espinoza cierra este capítulo de su investigación hablando del significado del Curso de Análisis, el cual asegura que “se debe atribuir a una construcción en donde el rigor [...] es parte de la misma estructura construida”(p.95).

A manera de resumen podemos afirmar que ambas investigaciones nos presentan al rigor como un elemento central en la obra de Cauchy de 1821. Espinoza (2009) describe a esta obra de intencionalidad didáctica como una organización de conocimiento en donde sus contenidos descansan en una nueva racionalidad de la matemática, y el rigor es el actor principal que permite distanciar el conocimiento de la naturaleza sensible que les dio origen. Mientras que, por otro lado, Larivière (2017) apunta a que el cuestionamiento de la generalidad del álgebra desembocó en la clarificación del alcance que tienen las matemáticas, y es en esta clarificación que el rigor juega un rol fundamental al estar desprendido de la idea que las matemáticas son rigurosas solamente porque son deductivas, e instaura el desarrollo mismo de la matemática a partir del cuestionamiento de ciertos procedimientos utilizados, los cuales propiciaron nuevas formas de justificación.

En vista de que la obra de Cauchy de 1814 busca dar solución al pasaje de lo real a lo imaginario, nuestra investigación propicia insumos hacia lo establecido por Larivière, en donde el cuestionamiento de la generalidad del álgebra es lo que da inicio a los estudios de Cauchy en torno a la construcción de conocimientos catalogados dentro de Variable Compleja. Debido a esto entendemos a la memoria de 1814 *como parte de una expresión intelectual más global de la época,* en tanto que las ideas que le permitieron a Cauchy desprenderse del pasaje de lo real a lo imaginario como método de validación formaron parte de las ideas que se resignificaron y le posibilitaron reestructurar el conocimiento matemático de la época, desencadenando una nueva racionalidad desprendida de la naturaleza sensible del mundo.

Los hechos e ideas que plasmamos en los párrafos anteriores nos presentan el desarrollo de la vida de Cauchy, así como las ideas que imperaban en la época circundante a su memoria de 1814. La relatoría de las primeras instancias de la vida de Cauchy nos permite configurar un marco sobre la forma en que Cauchy conceptualiza el conocimiento científico de la época, si bien, éste se encuentra atado a la explicación de fenómenos naturales y su posterior matematización a través de procedimientos y métodos matemáticos –independientemente de si la influencia familiar de Cauchy jugó un rol en la búsqueda de bases firmes para estos métodos y procedimientos– rescatamos que nuestra investigación se enmarca alrededor de los resultados de Larivière (2017). Particularmente, la clarificación del alcance de las matemáticas le propicio un escenario bifronte a los trabajos de Cauchy, por un lado, con el objetivo de pertenecer a la comunidad científica mostró sus intereses y habilidades en distintas áreas de la matemática de su época, lo que posteriormente le permitió, ya instaurado como profesor, abrir las puertas a diversas investigaciones que desembocaron en el desarrollo de la matemática como disciplina, como lo son el trabajo con cantidades complejas más allá de simples herramientas que permiten obtener verdades en la variable real.

En la siguiente sección de este escrito, en el Análisis Textual de la obra, a través de deconstruir el método alternativo de justificación que propone Cauchy para desprenderse de las justificaciones utilizadas por la comunidad científica de principios del siglo XIX, exponemos la forma en que Cauchy esta aplicando rigor en su obra de 1814. Develaremos que el método se desprende de la generalidad del álgebra y se instaura en que las afirmaciones estén ligadas a un punto de vista lógico.

7.2. Análisis Textual: Sobre los procesos matemáticos en la obra de Cauchy

A través de interpretar, complementar y justificar la matemática de la obra de Cauchy de 1814 describimos el proceder matemático que le permitió a Cauchy configurar el método que da respuesta al pasaje de lo real a lo imaginario. Este análisis, descrito en el Anexo 2, nos permitió identificar que la búsqueda de rigor es el motor que impulsa a Cauchy a establecer los resultados de su obra. En palabra de Cauchy "j'ai conçu l'espoir d'établir le passage du réel à l'imaginaire sur une analyse directe et rigoureuse ; et mes recherches m'ont conduit à la méthode qui fait l'objet de ce Mémoire"(Cauchy, 1814, p.612) (Concebí la esperanza de establecer el pasaje de lo real a lo imaginario sobre un análisis directo y riguroso; y mi investigación me llevó al método que es objeto de esta Memoria). El método al que hace referencia es el que analizamos, del cual concluimos lo siguiente:

Cauchy, en su obra de 1814, aporta insumos que giran en torno al establecimiento del Teorema Integral de Cauchy al afrontar un problema meramente matemático –dotar de rigor a un método utilizado pero no justificado– en donde la propuesta alternativa de validación, desprendida del pasaje de lo real a lo imaginario, descansa en un método que se fundamenta a través de generalizar un resultado de la Variable Real a la Variable Compleja, donde la validación de las afirmaciones en los complejos se propicia gracias a un trabajo por analogía en el campo real al descomponer las cantidades complejas en sus partes reales e imaginarias.

En el Anexo 2 describimos cómo Cauchy pasa de una ecuación a otra en su memoria de 1814, lo que presentaremos a continuación perfila a contestar ¿Qué proceso(s) se está(n) realizando al pasar de una ecuación a otra? Pensando en los procesos como procesos de demostración que lleva a cabo Cauchy con el objetivo de comunicar y explicar su método alternativo, desprendido del pasaje de lo real a lo imaginario, para el cálculo de integrales. Centrar nuestra atención en analizar los procesos de demostración –a los cuales decidimos llamar procesos matemáticos– que sustentan el proceder matemático, nos permite conceptualizar la forma en que Cauchy concibe esta aplicando rigor en su obra de 1814.

Uno de los procesos matemáticos que identificamos en el proceder matemático de Cauchy es el trabajo por analogía en variable real para sustentar resultados que involucren cantidades complejas. El trabajo por analogía es un proceso documentado por distintas disciplinas, por ejemplo, en el marco de la filosofía Bertha (2019) comenta lo siguiente:

> Una analogía es una comparación entre dos objetos, o sistemas de objetos, que destaca los aspectos en los que se piensa que son similares. El razonamiento analógico es cualquier tipo de pensamiento que se basa en una analogía. Un argumento analógico es una representación explícita de una forma de razonamiento analógico que cita similitudes aceptadas entre dos sistemas para apoyar la conclusión de que existe alguna otra similitud (p.1).

La búsqueda de investigaciones desde la Matemática Educativa donde se documenten los procesos de demostración –procesos que nos permiten describir cómo se está pasando de una ecuación a otra en el desarrollo del trabajo matemático de la obra de Cauchy– nos llevó al trabajo de Crespo (2005). En esta investigación la autora –en su búsqueda por comprender las argumentaciones por reducción al absurdo como un recurso de validación de resultados en matemática– extiende la tipificación del trabajo de Ibañes y Ortega (1997) relativo a las técnicas de demostración. A continuación presentamos un resumen de esta categorización.

1. Según la estructura lógica del enunciado:

   Esta clasificación corresponde al tipo de enunciado. Dado un enunciado, este posee una estructura lógica. Podemos decir que la estructura lógica de un enunciado involucra por lo menos una implicación. A su vez, es posible determinar si la propiedad es afirmada a todos los elementos del dominio, o bien, a alguno(s) de ellos.

   1.1. En cuanto a la implicación, el enunciado se puede clasificar como: Condición Necesaria, Condición Suficiente, o Condición Necesaria y Suficiente.

   - Si el enunciado se explicita a través de la implicación $A \Longrightarrow B$ decimos que B es condición necesaria para que se verifique A, o bien, que A es condición suficiente para que se verifique B.

- Si B es condición necesaria para que se verifique A, y simultáneamente A es condición necesaria para la verificación de B, entonces se dice que A es condición necesaria y suficiente de B.

1.2. Cuantificador Universal y Cuantificador Existencial.

- El Cuantificador Universal o de No Existencia no explicita si la propiedad del enunciado es aplicable a todos los objetos matemáticos del dominio en que se este trabajando.
- El cuantificador de existencia hace alusión a la existencia de algún objeto matemático que verifica la propiedad que se esta poniendo en juego.

2. Según los procedimientos lógicos utilizados en la demostración

Una vez que hemos identificado la estructura lógica del enunciado, podemos atender a los método y estilos utilizados para su demostración. Esta clasificación atiende a los procedimientos lógicos que se utilizan en la demostración del enunciado. En una demostración es posible utilizar diversos recursos lógicos para lograr la demostración de la tesis del enunciado, es decir, aquello que se desea demostrar.

2.1. Por Silogismo

- La demostración por silogismo es el esquema de razonamiento matemático ordinario. Su fundamento lógico es la aplicación reiterada de la ley de silogismo hipotético, el cual enuncia lo siguiente: Para demostrar un enunciado de la forma $P \Longrightarrow Q$, se demuestra $P \Longrightarrow M$ y $M \Longrightarrow Q$, siendo M una proposición intermedia que, frecuentemente, es una cadena de silogismos.

2.2. Por casos

- Este tipo de demostraciones requieren que los objetos que verifican la hipótesis puedan ser clasificados dentro de un número finito de casos mutuamente excluyentes, y a partir de cada uno de estos casos se verifique la tesis del enunciado. Esto es, para demostrar $P = P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n \Longrightarrow Q$, basta demostrar que $P_1 \Longrightarrow Q$, $P_2 \Longrightarrow Q$,..., $P_n \Longrightarrow Q$.

2.3. Por Reducción al Absurdo

- A partir de un conjunto de premisas P se pretende probar la validez de cierta conclusión Q. Se niega la conclusión Q y se acepta como parte de las premisas P, es decir se construye un nuevo conjunto de premisas $P' = P \cup \neg Q$. Al conjunto de premisas P' se aplican reglas de inferencia y se llega a una contradicción. De este se infiere que el conjunto de premisas P' es contradictorio, por lo que se acepta la validez de Q.

2.4. Por Inducción

- Este método es aplicable a conjuntos bien ordenados. Su fundamento se encuentra en la axiomática de Peano para los números naturales. Particularmente el quinto postulado enuncia lo siguiente:

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ *verifica que* $1 \in \mathbb{N}$*, y cada que* $n \in \mathbb{N}$ *se sigue que* $n + 1 \in \mathbb{N}$*, entonces* $A = \mathbb{N}$.

2.5. Constructivo

- Este tipo de método consiste en probar la existencia de un determinado objeto matemático por medio de la descripción de su construcción.

2.6. Por Analogía

- El razonamiento por analogía consiste en utilizar la semejanza en algunos aspectos entre dos teorías matemáticas, para poder extender la validez de algunas propiedades de una teoría a la otra. Este método suele considerarse como un recurso creativo, más que como un método para demostrar, ya que posibilita el descubrimiento de nuevas propiedades en teorías que tienen una estructura básica común.

2.7. Por Dualidad

- Este tipo de demostración descansa en el principio de dualidad de Poncelet, según el cual, si en un teorema ya demostrado en geometría proyectiva se intercambian los términos punto y recta, se obtiene otro teorema dentro de la teoría. Las demostraciones por dualidad se han aplicado fuera de la geometría proyectiva, un ejemplo es el tratamiento de las álgebras de Boole.

2.8. Por consideración de casos particulares de otro teorema

- Algunos enunciados particulares en matemáticas se pueden considerar como casos particulares de enunciados más generales, en donde el enunciado original se convierte en un corolario del teorema general.

2.9. Por aplicación del lema de Zorn

- Existen muchos enunciados, particularmente en topología, cuyo establecimiento es a través del Lema de Zorn, el cual estipula lo siguiente:

Todo conjunto inductivo admite un elemento maximal.

3. Según los procedimientos matemáticos utilizados en la demostración

Cada rama de la matemática ha desarrollado estilos propios de argumentación. Las demostraciones de los enunciados en cada una de ellas hacen que recurran a procedimientos particulares. Lo anterior no quiere decir que los estilos sean mutuamente excluyentes, pero el análisis de los recursos empleados por cada una de estas ramas permite una categorización de los estilos de argumentación que utilizan.

3.1. Geométrico

- Es el utilizado por el utilizado por los griegos, en particular por Euclides. Fue retomado y enriquecido a principios del siglo XIX con aportación de la Geometría proyectiva. Supone la utilización exclusiva de recursos de la geometría sintética, en donde se trabaja con figuras que sustentan los razonamientos.

3.2. Algebraico

- Se caracteriza por utilizar símbolos para representar objetos matemáticos. Una vez que se realiza la identificación entre los elementos que intervienen en el teorema con los símbolos correspondientes, la demostración se restringe a la aplicación de propiedades algebraicas entre los mismos.

3.3. Cartesiano

- Este procedimiento permite combinar los estilos geométrico y algebraico, aprovechando las ventajas de ambos. Posibilita afrontar y resolver problemas en los que se ponen en juego conceptos geométricos mediante la realización de cálculos algebraicos.

3.4. Del Análisis Matemático

- Se destaca por utilizar límites, la toma de diferenciales, técnicas de acotamiento y la utilización del método de exhaución.

4. Según los procedimientos de exposición de la demostración.

Al acceder a un resultado matemático ya establecido, su exposición no es permeable a conocer el proceso que hubo hasta su consolidación. El lector no accede, por lo general, a los caminos recorridos por el investigador, solamente llega al resultado. Podemos considerar dos modos en cuanto a la exposición de un resultado.

4.1. Sintético o directo

- Este modo es característico por la presentación formalizada del resultado, se ajusta a las exigencias del rigor lógico. Las demostraciones se realizan mediante una cadena de implicaciones y equivalencias en las que la hipótesis es el primer eslabón y la tesis es el último.

4.2. Analítico o indirecto

- También es conocido por el nombre de método reductivo. Este método consiste en un doble proceso. En su primera etapa se supone al teorema demostrado, justificándolo en otro teorema ya demostrado o no. Si este segundo teorema, en donde descansa el primero, ya esta demostrado, se concluye la primera etapa. En caso de que no esté demostrado, se reduce por igual camino a otro teorema, y así sucesivamente hasta llegar a un teorema demostrado. La segunda etapa se pasa por el camino inverso de teoremas encadenados de manera sintética.

5. Según la forma de Pensamiento Lógico

Una clasificación tradicionalmente aceptada de las demostraciones la distingue según el sentido en que se llega al conocimiento, la manera en que se encadenan las ideas hasta llegar a la conclusión.

5.1. Demostraciones deductivas

- Son aquellas en las que se procede de lo general a lo particular.

5.2. Demostraciones inductivas

- Contrario a las demostraciones deductivas, en las demostraciones inductivas se procede de lo particular a lo general.

La tipificación de Crespo(2005) podemos catalogarla, al estilo de Ibañes y Ortega (1997), en las siguientes tres instancias.

I. En cuanto al <u>tipo</u> de demostración: En relación con el enunciado.

II. En cuanto a los <u>métodos</u> y <u>estilos</u>: Referente a la propia demostración.

III. En cuanto al <u>modo</u> de demostración: Atañe a la exposición de la demostración.

Dada esta clasificación de las demostraciones que presentamos en los puntos del 1 al 5, podemos catalogar los <u>tipos</u> de demostraciones al referirnos al punto número 1, los <u>métodos</u> y <u>estilos</u> a los puntos 2 y 3 respectivamente, mientras que los <u>modos</u> de demostración a los puntos 4 y 5.

Bajo el precepto de que las justificaciones utilizadas en la obra de Cauchy evidencian la forma en que Cauchy conceptualiza el rigor, esta propuesta de clasificación de las demostraciones nos permitió responder a la pregunta ¿cómo Cauchy aplica rigor en su proceder matemático? Ultimadamente la respuesta a esta pregunta nos provee de insumos para responder a una de las preguntas de investigación ¿qué rol jugó el rigor matemático en la constitución del Teorema Integral de Cauchy?

El análisis que presentamos a continuación se apoya principalmente en lo estipulado por Cauchy, sin embargo, para poder analizar la obra con los lentes propiciados por Crespo, recurrimos a seccionarla a través de enunciar teoremas y su respectiva demostración. Al seccionar la obra estamos reestructurando el contenido, sin embargo, esta reestructuración es el fruto de la interpretación de las palabras empleadas por Cauchy. Recurrimos a esta reestructuración debido a que Cauchy procede de una manera muy similar en el resto de su escrito, la diferencia principal radica en que primero describe su proceder –argumenta la forma en la que esta obteniendo sus resultados– para después enunciar el resultado en forma de teorema. Es importante aclarar dos puntos, primero, la modificación de la presentación de los resultados nos ayuda a analizar, ya que en primera instancia nos permitió identificar el tipo de resultado, lo que propició que posteriormente identificáramos los métodos, estilos y modos de la demostración. En segundo lugar, no nos limitamos a observar los métodos, estilos y modos de demostración en la reestructuración que planteamos, debido a que estos son solo una síntesis de lo estipulado por Cauchy, por lo que en la siguiente sección de este escrito, en la 'Interpretación e inferencia del análisis de la obra', presentamos la interpretación e inferencia de nuestro esfuerzo inquisitivo derivado de la conjugación del análisis Textual y Contextual de la obra.

Con el objetivo de explicitar la reestructuración de la obra de 1814, en color negro se encuentra la transcripción y traducción de los contenidos originales del escrito. En color naranja presentamos la reestructuración a través de teoremas y corolarios, y en los casos en que sea factible, su respectiva demostración. La reestructuración esta acompañada por comentarios en color verde donde, entre otras cosas, señalamos el tipo, los métodos y estilos, y finalmente, los modos utilizados en el proceder matemático de Cauchy. A continuación iniciamos con el análisis de la obra.

Sobre las integrales definidas

Primera parte

De las ecuaciones que autorizan
el pasaje de lo real a lo imaginario

1.er

Exposición general del Método

Sea $f(y)$ cualquier función de la variable y, y supongamos que y es una función de las variables x y z: El coeficiente diferencial de la integral

$$\int f(y)dy$$

Tomado respecto a x será

$$f(y)\frac{dy}{dx}$$

y el coeficiente diferencial de la misma integral, relativo a z, será

$$f(y)\frac{dy}{dz}$$

En lo que respecta al coeficiente diferencial de segundo orden, relativo a las dos variables x y z, lo podemos designar por

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz}$$

O por

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}$$

Y tendremos

$$(1) \qquad \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz} = \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}$$

Esta ecuación se puede verificar directamente por diferenciación. De hecho, tenemos

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz} = f(y)\frac{d^2y}{dxdz} + f'(y)\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx} = f(y)\frac{d^2y}{dzdx} + f'(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz}:$$

De lo que se deduce la ecuación (1).

Teorema 1

Si $g(x,z) := \int f(y)dy$, donde $y = y(x,z)$, entonces $\frac{d^2g}{dxdz} = \frac{d^2g}{dzdx}$

Demostración del teorema 1.-

Como $g(x,z) = \int f(y)dy$, entonces

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int f(y)dy\right] = f(y)\frac{dy}{dx}$$

y

$$\frac{dg}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\int f(y)dy\right] = f(y)\frac{dy}{dz}$$

Luego

$$\frac{d^2g}{dzdx} = \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz} = f(y)\frac{d^2y}{dxdz} + f'(y)\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx};$$

Y a su vez

$$\frac{d^2g}{dxdz} = \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx} = f(y)\frac{d^2y}{dzdx} + f'(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz}$$

De lo cual se sigue lo deseado

$$\frac{d^2g}{dxdz} = \frac{d^2g}{dzdx}$$

La demostración del Teorema 1 sustenta resultados en Variable Real. Particularmente, esta reestructuración nos permite clasificar al Teorema 1 en cuanto al tipo de demostración como una implicación. Debido a que la demostración se restringe a la aplicación de propiedades algebraicas, el procedimiento matemático ligado al estilo de la demostración es algebraico. Las implicaciones que justifican la conexión de ideas permiten identificar a la aplicación reiterada de la ley de silogismo hipotético en tanto al método empleado como procedimiento lógico, lo que permite concluir que la exposición de la demostración es de forma directa.

Esta última ecuación subsiste, sin importar si las funciones de x y de z se asumen en parte real, en parte imaginaria. Por lo que, por ejemplo, si M y N denotan cualesquiera dos funciones de x y de z podemos hacer

$$y = M + N\sqrt{-1}$$

Por lo que, si suponemos

$$f(M + N\sqrt{-1}) = P' + P''\sqrt{-1},$$

$$P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx} = S, \qquad P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz} = U,$$

$$P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx} = T, \qquad P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz} = V,$$

La ecuación (1) se convierte en

$$\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}.$$

Al aceptar que la ecuación (1) subsiste sin importar la naturaleza de la variable, sea esta imaginaria o real, nos permite identificar que Cauchy está generalizando sus resultados de la Variable Real a la Variable Compleja. Lo que le permite establecer el siguiente resultado.

Teorema 2

Si $y = M + N\sqrt{-1}$, $f(M + N\sqrt{-1}) = P' + P''\sqrt{-1}$ y

$$P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx} = S, \qquad P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz} = U,$$

$$P'\frac{dN}{dx}+P''\frac{dM}{dx}=T, \qquad P'\frac{dN}{dz}+P''\frac{dM}{dz}=V,$$

entonces

$$\frac{dS}{dz}+\frac{dT}{dz}\sqrt{-1}=\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$$

Si, en lugar de asumir que $y=M+N\sqrt{-1}$, hubiéramos supuesto que $y=M-N\sqrt{-1}$, hubiéramos obtenido

$$\frac{dS}{dz}-\frac{dT}{dz}\sqrt{-1}=\frac{dU}{dx}-\frac{dV}{dx}\sqrt{-1}.$$

Corolario del Teorema 2

Si suponemos $y=M-N\sqrt{-1}$ y $f(M-N\sqrt{-1})=P'-P''\sqrt{-1}$, entonces

$$\frac{dS}{dz}-\frac{dT}{dz}\sqrt{-1}=\frac{dU}{dx}-\frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$$

Por lo que tendremos por separado

$$(2)\qquad \begin{cases}\dfrac{dS}{dz}=\dfrac{dU}{dx},\\ \dfrac{dT}{dz}=\dfrac{dV}{dx}.\end{cases}$$

Teorema 3

Si $\frac{dS}{dz}+\frac{dT}{dz}\sqrt{-1}=\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$ y $\frac{dS}{dz}-\frac{dT}{dz}\sqrt{-1}=\frac{dU}{dx}-\frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$, entonces

$$\frac{dS}{dz}=\frac{dU}{dx},$$
$$\frac{dT}{dz}=\frac{dV}{dx}.$$

Nota: no hay demostración respecto a lo afirmado en el Teorema 2, Corolario del Teorema 2 y el Teorema 3. Cauchy, al buscar dotar de rigor al pasaje de lo real a lo imaginario, utiliza cantidades complejas con la finalidad de obtener el sistema de ecuaciones (2), presentado como la tesis del Teorema 3.

Con ayuda de la reestructuración y las palabras utilizadas por Cauchy podemos inferir que la clasificación en cuanto al tipo de demostración es una implicación, identificamos la ley del silogismo hipotético en la conjugación del Teorema 2 y el Corolario del Teorema 2 para la obtención del Teorema 3, sin embargo, debido a que se limita a enunciar los resultados, no podemos identificar una exposición en cuanto a la demostración, lo que deviene en que tampoco identifiquemos métodos o estilos de demostración. Continuando con la lectura de la traducción de la obra, Cauchy afirma lo siguiente.

Las dos ecuaciones previas pueden ser verificadas inmediatamente al derivar las cuatro cantidades *S, T, U, V.* Estas dos ecuaciones contienen toda la teoría del pasaje de lo real a lo imaginario, y nos estamos quedando sin tiempo para indicar como utilizarlas.

Este párrafo nos permite concluir que el rigor de Cauchy está ligado a la aplicación de propiedades algebraicas sobre variables reales. Justificar un resultado en Variable Compleja está sujeto a descomponer en parte real y parte imaginaria las expresiones involucradas, en donde ambas expresiones en $\mathbb{R}$ se justifican a través de propiedades algebraicas.

Podemos inferir que el trabajo con cantidades complejas, particularmente el establecimiento de la ecuación

$$\frac{dS}{dz}+\frac{dT}{dz}\sqrt{-1}=\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dx}\sqrt{-1},$$

se da gracias a la generalización de un resultado en Variable Real. La validación de esta igualdad se da a través de descomponerla en partes real e imaginaria, sustentando su proceder en analogía a la Variable Real. Podemos pensar que Cauchy establece un isomorfismo operativo entre cantidades complejas y cantidades reales al restringir el trabajo con cantidades complejas al manejo simultaneo de dos cantidades reales, donde la introducción de cantidades complejas esta sujeta a la erradicación ulterior de $\sqrt{-1}$.

Supongamos que, después de multiplicar los dos miembros de cada una de las ecuaciones en (2) por $dxdz$, procedemos a integrarlos, respecto a x y a z, entre limites reales de estas dos variables. Denotemos por

$$S', S'', T', T'',$$

Los valores de S y de T relativo a los dos límites de z, y por

$$U', U'', V', V'',$$

Los valores de U y V relativo a los dos límites de x. Si, entre los límites en cuestión, las cuatro cantidades

$$S, T, U, V,$$

Siempre mantienen un valor determinado, uno obtendrá generalmente

$$(3) \quad \begin{cases} \int S''dx - \int S'dx = \int U''dz - \int U'dz^{*}, \\ \int T''dx - \int T''dx = \int V''dz - \int V' \ dz. \end{cases}$$

----

*La ecuación (3) puede ser remplazada por la fórmula imaginaria

$$(A) \qquad \int (S'' + T''\sqrt{-1})dx - \int (S' + T'\sqrt{-1})dx$$
$$= \int (U'' + V''\sqrt{-1})dz - \int (U' + V'\sqrt{-1})dz$$

La misma observación se aplica a la ecuación (4), y en general a todos los sistemas de ecuaciones que se establecerán en los siguientes párrafos, cada sistema de dos ecuaciones reales puede ser remplazado por una única fórmula imaginaria.

Supongamos, en aras de la simplicidad, que los límites para x son o y x, y que los límites para z son o y z; finalmente, designemos por

s y t los valores que adquieren S y T cuando $z = o$, y por u y v los valores que adquieren U y V cuando $x = o$.

Las dos expresiones previas se convertirán en

$$(4) \quad \begin{cases} \int S\ dx - \int s\ dx = \int U\ dz - \int u\ dz\,, \\ \int T\ dx - \int t\ dx = \int V\ dz - \int v\ dz, \end{cases}$$

Las integrales relativas a x tomadas entre los límites o y x, y las integrales relativas a z tomadas entre los límites o y z. Examinaremos, en la segunda parte de este escrito, el caso cuando los valores de S, T, U, V, se vuelven indeterminados entre los límites de integración. Por el momento, nos limitaremos a mostraren qué aplicaciones se utilizan las fórmulas que acabamos de encontrar.

Exceptuando el Pie de Página, delimitado por las líneas punteadas, lo anterior podemos resumirlo en el siguiente resultado.

Teorema 4

Si las funciones S, T, U y V están definidas en $[o, x] \times [o, z]$, $\frac{dS}{dz} = \frac{dU}{dx}$ y $\frac{dT}{dz} = \frac{dV}{dx}$, entonces

$$\int_o^x S\ dx - \int_o^x s\, dx = \int_o^z U\, dz - \int_o^z u\, dz$$

y

$$\int_o^x T\ dx - \int_o^x t\, dx = \int_o^z V\, dz - \int_o^z v\, dz$$

Demostración del Teorema 4

Notemos lo siguiente

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dS}{dz} dzdx = \frac{dU}{dx} dxdz$$

$$\iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dS}{dz} dzdx = \iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dU}{dx} dxdz$$

$$\int_o^x (S - s)\ dx = \int_o^z (U - u)\ dz$$

$$\int_o^x S\ dx - \int_o^x s\, dx = \int_o^z U\, dz - \int_o^z u\, dz$$

De manera similar

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{dT}{dz} dzdx = \frac{dV}{dx} dxdz$$

$$\iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dT}{dz} dzdx = \iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dV}{dx} dxdz$$

$$\int_o^x (T - t)\ dx = \int_o^z (V - v)\ dz$$

$$\int_o^x T\ dx - \int_o^x t\, dx = \int_o^z V\, dz - \int_o^z v\, dz$$

Teniendo lo deseado.

Observemos que se sustenta el proceder matemático a través de operar algebraicamente las ecuaciones en (2), por lo que el estilo de la demostración, en tanto a procedimiento matemático es de carácter algebraico. El procedimiento lógico por silogismo es el método que utiliza en su proceder algebraico. La clasificación en cuanto al tipo de demostración es una implicación, en donde la exposición de ideas es de manera directa. Como podemos observar, después de que descompone en parte real y parte imaginaria a la ecuación $\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$, procede a justificar a través de una manipulación algebraica a las cantidades en variable real.

Con esto concluimos el Análisis Textual de la obra. A continuación presentamos nuestro esfuerzo reflexivo y crítico de la reestructuración y análisis hasta aquí descritos, lo cual corresponde a la quinta etapa del Análisis Cualitativo de Contenido.

7.3. Interpretación e inferencia del Análisis de la Obra

La conjugación del Análisis Textual y Contextual nos permitió identificar que la configuración del método que analizamos se desprende de la generalidad del álgebra al no hacer alusión al pasaje de lo real a lo imaginario para justificar sus resultados. A raíz de este desprendimiento, conceptualizamos al método como una herramienta alternativa de validación que garantiza la consistencia interna de la propia matemática. Particularmente el método descansa en una doble integración de un par de ecuaciones diferenciales, cuyo establecimiento se da a través de la generalización de resultados en Variable Real, justificando su proceder en $\mathbb{C}$ por medio de un razonamiento por analogía en $\mathbb{R}$. A continuación describimos los insumos particulares de nuestro análisis que nos permitieron llegar a esta conclusión.

El Análisis Contextual nos permitió develar la concepción que tenia Cauchy de las ciencias de su época, en tanto que para él la mayoría de las ciencias exactas "parecen haber sido ya llevadas a su más alto grado de desarrollo [...] y no queda nada más por hacer con ellas, salvo encontrar nuevos campos de aplicaciones útiles"(Cauchy, 1811, citado por Belhoste, 1991, p.28). Esta es una de las conclusiones a las que llega Cauchy en un estudio que inició en 1810, en donde buscaba comprender "todas las ramas de las matemáticas, empezando por la aritmética y siguiendo por la astronomía, aclarando los puntos oscuros lo mejor posible, trabajando en la simplificación de las pruebas y tratando de descubrir algunas proposiciones nuevas" (Carta de Cauchy a su familia, 1810, citado por Belhoste, 1991, p.25). La intención principal de Cauchy, con su obra de 1814, es presentarse ante la sociedad académica de su época con la finalidad de asegurar un puesto que le permita dejar sus actividades de ingeniería para dedicarse exclusivamente a sus investigaciones. Particularmente, el contenido de esta obra es un ejemplo de la 'aclaración de puntos oscuros' que mencionamos con anterioridad. En esta investigación Cauchy no está atendiendo a un fenómeno natural, la búsqueda de rigor de un método utilizado, pero no justificado, es el motor que lo impulsa a establecer sus resultados. El método al que hacemos referencia es el pasaje de lo real a lo imaginario, el cual descansa en la generalidad del simbolismo algebraico para sustituir cantidades complejas en expresiones que consideran a sus variables en el campo de los reales, lo que propició la obtención de un sinfín de integrales por parte de los contemporáneos de Cauchy. Sin embargo, utilizarlo acarreo dudas en la comunidad científica, en palabra de Laplace:

> On peut donc demonstrat ces passages comme des moyens de découvertes semblables à l'induction don't les géomètres font depuis longtemps usage. Mais ces moyens quoique employés avec beaucoup de demonstrat et de demonst, laissent toujours à desirer des demonstrations de leurs résultats. (Laplace, sin fecha, citado por Cauchy, 1814, p.612). Cuya traducción al español versa de la siguiente forma:

> Se puede, pues, considerar estos pasajes como medios de descubrimiento similares a la inducción que los geómetras han utilizado desde hace mucho tiempo. Pero estos medios, aunque se utilicen con gran cuidado y reserva, siguen dejando mucho que desear en cuanto a la demostración de sus resultados.

Cauchy afirma que Laplace, para superar este inconveniente, se preocupó de "confirmer par d'autres méthodes les valeurs des intégrales qu'il avait trouvées" (Cauchy, 1814, p.612) (confirmar los valores de las integrales que había encontrado por otros métodos). Es decir, utilizar el pasaje de lo real a lo imaginario para el cálculo de integrales estaba sujeto a que éstos fueran verificados por otros medios.

Cauchy, en su búsqueda de justificaciones que se deprendan del pasaje de lo real a lo imaginario para la evaluación de integrales configura el método alternativo que reestructuramos en nuestro Análisis Textual. Como hemos mencionado reiteradamente, en palabras de Cauchy "j'ai conçu l'espoir d'établir le passage du réel à l'imaginaire sur une analyse directe et rigoureuse; et mes recherches m'ont conduit à la méthode qui fait l'objet de ce Mémoire"(Cauchy, 1814, p.612) (Concebí la esperanza de establecer el pasaje de lo real a lo imaginario sobre un análisis directo y riguroso; y mi investigación me llevó al método que es objeto de esta Memoria). Particularmente, la descripción del método se encuentra en la sección titulada 'De las ecuaciones que autorizan el pasaje de lo real a lo imaginario', en las secciones subsecuentes de la obra Cauchy se remite a aplicar este método a funciones particulares. Esta forma de presentar el conocimiento alude a una organización del contenido en donde se procede de lo general a lo particular, es decir, en esta obra se observan ápices del cambio metodológico que enuncia Espinoza (2009), al pasar de "la inducción a la deducción, de la generalización a la abstracción"(p.94), donde la abstracción la entendemos en el sentido de Larivière (2017) debido a que "el trabajo de Cauchy es abstracto en tanto que está divorciado de aplicaciones, no porque dependa de ideas abstractas"(p.46). Con base en que la configuración de este método propició insumos para la consolidación del Teorema Integral de Cauchy, realizamos un análisis Textual de éste al centrar nuestra atención en los procesos matemáticos que justifican el proceder matemático de Cauchy en la exposición del método.

Nuestro Análisis Textual nos permite interpretar las argumentaciones realizadas por Cauchy en la descripción del método que le permite distanciarse del pasaje de lo real a lo imaginario. Identificamos que el tipo de enunciados que posibilitan la comunicación del método, en tanto a su estructura, obedece el establecimiento de condiciones necesarias, o bien, condiciones suficientes que se deben de satisfacer para la obtención de los resultados. El modo en el que se conectan las ideas, desde las hipótesis con las que se está trabajando hasta los resultados, es a través de una cadena de implicaciones que están sustentadas en la ley del silogismo hipotético deductivo. El estilo que permea el proceder matemático, dentro del procedimiento lógico por silogismo, es el estilo algebraico, desprovisto de justificaciones visuales, numéricas, variacionales, etc.

Esta descripción que acabamos de relatar es la manera en que concebimos Cauchy justifica su proceder matemático. Es importante recalcar que este proceder matemático se reconoce solamente en el caso que se trabaje con objetos en Variable Real. La *generalización* de resultados de variable real, particularmente el establecimiento de la ecuación (1), le permite obtener esta ecuación para cantidades complejas. La justificación de que lo estipulado por la igualdad en términos de la variable compleja es válida es a través de *descomponer* en partes real e imaginaria, por lo que inferimos que el trabajo por *analogía* en $\mathbb{R}$ le posibilitó la justificación de resultados obtenidos por su proceder con cantidades pertenecientes a $\mathbb{C}$.

Es decir:

Inferimos que para trabajar con cantidades que involucren variables complejas es necesario un razonamiento por analogía que permita justificar el resultado a través del trabajo en variable real.

Examinar los apartados subsecuentes, descritos en la Tabla 1, previos a la parte II de la obra de 1814, permitió que nos percatarnos de la conceptualización que tiene Cauchy respecto a la evaluación de funciones en valores complejos. Por ejemplo, en la página 622 Cauchy escribe

$$P' \pm P''\sqrt{-1} = f(x \pm z\sqrt{-1})$$

$$f(x) = p$$

$$f(\pm z\sqrt{-1}) = p' \pm p''\sqrt{-1}$$

De lo cual rescatamos que, para Cauchy, funciones evaluadas en números complejos con parte imaginaria no nula tienen como resultado números complejos con parte imaginaria distinta de cero. Evaluar funciones en valores complejos con parte imaginaria nula da como resultado números reales. Además, evaluar una función en un número complejo, cuyo signo de la parte imaginaria es positivo, deviene en números complejos cuyo signo de la parte imaginaria es positivo. Similarmente, si el número complejo resultante de la evaluación de otro número complejo tiene signo negativo en su parte imaginaria, es porque el número evaluado tiene signo negativo en su parte imaginaria.

Aunado a lo anterior, Lacroix y Legendre en el reporte de la obra de 1814 –bajo la suposición de $y = M + N\sqrt{-1}$– comentan "l'équation de condition relative à la différentielle *Ydy* étant développée, se partagera en deux autres, comme cela a lieu dans toute équation qui contient à-la-fois des parties réelles er des parties imaginaires"(p.603) (la ecuación de condición para la diferencial *Ydy* que se está desarrollando, se dividirá en otras dos, como ocurre en cualquier ecuación que contenga partes reales e imaginarias a la vez). En el mismo orden de ideas, Cauchy en la introducción de la memoria se remite a comentar a favor de la ecuación $\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$, estipulando "Cette égalité

[...] se partage alors en deux équations nouvelles, dont chacune peut toujours être vérifiée directement par la seule différenciation"(p. 613) (Esta igualdad [...] se divide entonces en dos nuevas ecuaciones, cada una de las cuales puede verificarse siempre directamente por diferenciación). Los comentarios de estos personajes, el trabajo posterior de Cauchy en la aplicación de su método, y el resultado estipulado en el Teorema 3 nos permiten inferir que

Cauchy establece un isomorfismo entre cantidades complejas y cantidades reales al restringir el trabajo con cantidades complejas al manejo simultaneo de dos cantidades reales, donde la introducción de cantidades complejas está sujeto a la erradicación ulterior de $\sqrt{-1}$.

Por último, el Pie de Página añadido a la obra en 1825 nos permite interpretar que llegó un momento que Cauchy no requiere de separar en parte real y parte imaginaria para trabajar con cantidades complejas. Belhoste (1991) identifica un escrito de Cauchy en 1819 donde por primera vez no separa en parte real y parte imaginaria, y para 1821 Cauchy estipula "una ecuación imaginaria es solo la representación simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales"(Cauchy, 1821, citado en Larivière, 2017, p.4). Si bien, el trabajo posterior de Cauchy con cantidades imaginarias no está sujeto a la erradicación de $\sqrt{-1}$, la conceptualización de que una cantidad compleja permite el trabajo simultaneo de dos cantidades reales aún está presente. Esta evolución de ideas nos permite inferir que no verse en la necesidad de separar en parte real y parte imaginaria es un proceso complejo, en tanto que le llevó a Cauchy cinco años. Pese a lo anterior, a raíz de nuestro análisis Textual y Contextual, conjeturamos que

La construcción de conocimiento en Variable Compleja se propicia por medio de la generalización de resultados en Variable Real a través de la introducción de cantidades complejas, cuya manipulación requiere de conceptualizarlas como el trabajo simultaneo entre dos cantidades reales, recurriendo a la validación de los resultados establecidos en el campo de los complejos mediante un pensamiento por analogía en el campo real.

En el capítulo siete de la obra biográfica de Belhoste (1991), el autor clasifica el trabajo de Cauchy en torno a sus resultados en Variable Compleja en las siguientes tres categorías:

i. En 1814 comienza con sus estudios de integrales alrededor de curvas cerradas.
ii. Para 1831 sus investigaciones se enmarcan en funciones analíticas de una variable compleja.
iii. En 1846 comenzó a desarrollar las nociones fundamentales que regirían su teoría de funciones complejas.

La obra de 1814 recae en el punto número i. No afirmamos conocer en su totalidad la evolución de ideas de Cauchy en torno a los puntos ii y iii, sin embargo, bajo la premisa de que la Variable Compleja –actualmente vista como una disciplina autónoma de la matemática– no podemos reducirla al trabajo simultáneo de dos expresiones de la Variable Real, nos preguntamos ¿en que momento y bajo que circunstancias se empieza a trabajar con variables complejas sin la necesidad de representarlas en términos de sus partes reales e imaginarias? Debelar estas circunstancias puede propiciarnos de insumos para conceptualizar a la Variable Compleja como algo más que el trabajo simultaneo de variables reales.

En el siguiente (y último) apartado de nuestro Análisis Cualitativo de Contenido comunicamos los resultados del estudio. Particularmente damos respuesta a las preguntas de investigación, aterrizamos tres de los cuatro principios de la Socioepistemología al quehacer de Cauchy en el trabajo circundante a su memoria de 1814, y presentamos unos puntos de incidencia entre nuestra investigación y algunos resultados que encontramos a raíz de la revisión de literatura.

8. Conclusiones

La organización y exposición del contenido de la obra de Cauchy de 1814 obedece a una presentación orientada por un pensamiento deductivo. El método expuesto en la primera sección del escrito le posibilitó a Cauchy la subsecuente obtención de una plétora de resultados, conocidos por sus contemporáneos, que no requería de 'la generalidad del álgebra' para justificar sus resultados. Particularmente, el análisis de los procesos matemáticos en el proceder matemático de Cauchy nos permitió configurar una forma en la que se esta trabajando con cantidades complejas sin hacer alusión al 'pasaje de lo real a lo imaginario'. Si bien, la racionalidad que imperaba en la época en que el escrito fue redactado se apegaba a la matematización de la naturaleza, o a la búsqueda de nuevos campos de aplicación de las ciencias exactas, la clarificación del alcance de los recursos matemáticos utilizados para abordar problemas en las ciencias de la época condujo a Cauchy a desarrollar las ideas presentes en la memoria de 1814. Es decir, la configuración del método de Cauchy surge por una necesidad puramente matemática, en donde su solución ocasionó el surgimiento de nuevos problemas anclados en un carácter meramente matemático, como lo fue la posterior configuración de Integrales Singulares.

La validación de los resultados de Cauchy la vemos reflejada en los comentarios de Lacroix y Legendre en el reporte de la obra al afirmar que

> Nous n'examinerons pas si les nouvelles méthodes de M. Cauchy sont plus simples que celles qui étaient déjà connues, si leur application est plus facile, et si l'on peut trouver par leur moyen quelque résultant que ne pourraient donner les méthodes connues: car, quand même on répondrait négativement à ces différentes questions, il n'en resterait pas moins à l'auteur le mérite,
>
> 1.- D'avoir construit, par une marche uniforme, une suite d formules générales, propres à transformer les intégrales définies et à en faciliter la détermination.

2.- D'avoir remarqué le premier qu'une intégrale double, prise entre des limites données pour chaque variable, n'offre pas toujours le même résultat, dans les deux manières d'effectuer les intégrations;

3.- D'avoir déterminé la cause de cette différence et d'en avoir donné la mesure exacte, au moyen des *intégrales singulières*, dont l'idée appartient à l'auteur, et qui peuvent être regardées comme une découverte en analyse;

4.- Enfin d'avoir donné, par ses méthodes, de nouvelles formules intégrales fort remarquables, qui peuvent bien se déduire des méthodes connues, mais auxquelles personne n'était encore parvenu.

Il nous paraît, par tous ces motifs, que M. Cauchy a donné, dans ses recherches sur les intégrales définies, une nouvelle preuve de la sagacité qu'il a montrée dans plusieurs de ses autres productions; nous pensons dons que son Mémoire est digne de l'approbation de la Classe (Cauchy, 1814, pp.609-610).

Cuya traducción versa de la siguiente forma:

No examinaremos si los nuevos métodos de M. Cauchy son más sencillos que los ya conocidos, si su aplicación es más fácil, y si podemos encontrar por su medio algún resultado que los métodos conocidos no pudieran dar: pues, aunque respondiéramos negativamente a estas diversas cuestiones, el autor seguiría teniendo el mérito de

1.- Haber construido, mediante un procedimiento uniforme, una serie de fórmulas generales, adecuadas para transformar las integrales definidas y facilitar su determinación.

2.- Haber sido el primero en notar que una integral doble, tomada entre límites dados para cada variable, no siempre da el mismo resultado en las dos formas de realizar las integraciones;

3.- Por haber determinado la causa de esta diferencia, y por haber dado la medida exacta de la misma, por medio de *integrales singulares*, cuya idea

> pertenece al autor, y que puede considerarse como un descubrimiento en el análisis;
>
> 4.- Por último, por haber dado, mediante sus métodos, fórmulas integrales nuevas y muy notables, que se pueden deducir a partir de métodos conocidos, pero que nadie había conseguido hasta ahora.
>
> Nos parece, por todas estas razones, que M. Cauchy ha dado, en sus investigaciones sobre las integrales definidas, una nueva prueba de la sagacidad que ha mostrado en varias de sus otras producciones; creemos, pues, que su Memoria es digna de la aprobación de la Clase.

Particularmente el punto número 1 hace alusión a que Lacroix y Legendre reconocieron la importancia del método propuesto por Cauchy, debido a que este 'procedimiento uniforme' derivó en resultados tanto conocidos como desconocidos en las ciencias de la época, apuntando así a que la demostración –vista como la exposición y justificación del método alternativo de validación– es una forma en que la comunidad científica de la época valida el conocimiento desprendido de la naturaleza sensible del mundo. Aunado a esto, gracias a nuestro análisis, observamos que la manipulación de cantidades complejas se fue resignificando, en tanto que la evolución de ideas en los trabajos subsecuentes de Cauchy requiere de conceptualizar el trabajo con variables complejas como la manipulación simultánea de dos cantidades reales sin la necesidad de erradicar a la $\sqrt{-1}$.

En cuanto a las preguntas de investigación que nos planteamos en este estudio

- ¿Qué tipo de pensamiento matemático permea la construcción de conocimiento matemático alrededor del Teorema Integral de Cauchy?
- ¿Qué rol jugó el rigor matemático en el establecimiento del Teorema Integral de Cauchy?

Configuramos las siguientes respuestas. La búsqueda de rigor, entendiéndola como la búsqueda de métodos alternativos de justificación que se desprendan del pasaje de lo real a lo imaginario, con el objetivo de la validación de resultados, es lo que desencadena las ideas presentes en la obra de Cauchy de 1814. En este sentido el rigor juega un rol fundamental en el establecimiento del método que configura Cauchy; nos sentimos con la seguridad de afirmar que esta memoria fue una de las primeras obras que contribuyeron a que Cauchy buscase delimitar el alcance de aplicabilidad de métodos y fórmulas utilizadas por sus contemporáneos para la obtención de diversos resultados, los cuales estaban ligados a describir la naturaleza sensible del mundo, pero gracias al cuestionamiento ulterior de estos métodos y fórmulas utilizadas se logró construir conocimiento matemático. Por otro lado, como respuesta a la primera pregunta, inferimos que la generalización de resultados de la Variable Real –vista como un proceso de pensamiento matemático– es el motor que propicia el desarrollo de conocimiento en Variable Compleja, donde el razonamiento por analogía es el que posibilita la justificación de los resultados obtenidos gracias a la introducción de cantidades complejas. Particularmente el trabajo por analogía le posibilita a Cauchy descomponer las expresiones complejas en sus partes reales e imaginarias, validando sus resultados estipulados en variable compleja desde la variable real.

Recordemos que el estudio que desencadenó esta investigación fue el de Cantoral, Farfán, Rigo y Hitt (1987). En éste se enmarcan los orígenes de la Variable Compleja en un fenómeno de generalización. La respuesta a la interrogante ¿cuánto vale el logaritmo de un número negativo? desató una controversia que duró cuatro décadas del siglo XVIII. Particularmente las autoras y autores reportan que el problema de extender los logaritmos a números negativos está dentro de la misma teoría matemática, sin conexión aparente con algún fenómeno natural, lo que obligó a los personajes que afrontaron este problema a enfrentarse a un conflicto estrictamente teórico, donde la solución al cuestionamiento fue a través de la construcción de herramientas de validación que garantizaran la consistencia interna de la propia matemática. Afirmamos que estas herramientas de validación son equiparables con el método que desarrolla Cauchy con el objetivo de desprenderse del pasaje de lo real a lo imaginario. Este pasaje, fundamentado en la generalidad del álgebra, se convirtió en una heurística que les permitió a los contemporáneos de Cauchy obtener resultados en Variable Real. Pese a esto, debido a que la comunidad científica de la época no aceptaba completamente esta forma de justificación, Cauchy se propone a realizar un análisis 'directo y riguroso' para fundamentarlo. Desentrañar los procesos matemáticos, en el proceder matemático de Cauchy, nos permitió inferir el papel del razonamiento por analogía, así como la generalización de resultados, como los pilares que sustentan el rigor de esta obra de 1814.

La narrativa anterior nos permite concluir que el origen de la Variable Compleja y los inicios del Teorema Integral de Cauchy emergen dentro de la misma teoría matemática, donde no se atiende a problemas derivados de la naturaleza sensible del mundo. La solución a cada uno de estos problemas se da a través de proponer una herramienta alternativa de validación a las aceptadas por la comunidad científica de la época en que éstos se gestaron. Estos cambios en las herramientas de validación, trastocaron, de una u otra forma, la racionalidad en la que se enmarcaron los problemas que fueron abordados posteriormente. Por ejemplo, la extensión del dominio de definición de la función logaritmo propició la introducción de números complejos como la solución al problema, solución que resultó conflictiva debido a que estos objetos eran utilizados como herramientas para la solución de problemas, pero que en su momento no existía una concepción única de éstos. Por otro lado, Bottazzini y Gray (2013) comentan que las ideas que Cauchy plasma en su memoria de 1814 culminan en su obra de 1825, a la cual estos autores describen como 'su obra maestra', en donde busca dotar de un significado a las integrales comprendidas entre valores complejos.

Otro punto de encuentro entre esta investigación y la de Cantoral, Farfán, Rigo y Hitt (1987) gira en torno a la generalización. Las y los autores del artículo de 1987 configuran a la generalización como la raíz de donde emerge la Variable Compleja, mientras que desde nuestra investigación develamos que Cauchy generaliza un resultado, que obtiene en variable real, a la variable compleja. La diferencia entre estos dos tipos de generalización radica en que los orígenes de la Variable Compleja se encuentran en la generalización que deviene al extender el dominio de definición de la función logaritmo, mientras que la generalización a la que hacemos alusión en nuestro análisis forma parte de la alternativa que Cauchy propone con su método. Es decir, en uno, la generalización es el desencadenante del problema, mientras que en otro la generalización entra en juego a través de la propuesta que busca garantizar la consistencia interna de la propia matemática. Por consiguiente podemos afirmar que los orígenes de la Variable Compleja se enmarcan en un fenómeno de generalización, el desarrollo ulterior de una pieza de conocimiento solapada por este marco de generalización requirió de un razonamiento por analogía para su consolidación.

A modo de resumen, nuestra investigación nos permitió inferir que Cauchy establece un isomorfismo entre cantidades complejas y cantidades reales al restringir el trabajo con cantidades complejas al manejo simultaneo de dos cantidades reales, donde la introducción de cantidades complejas está sujeto a la erradicación ulterior de $\sqrt{-1}$. A su vez concluimos que la clarificación del alcance de aplicabilidad de expresiones matemáticas se sustenta en un razonamiento por analogía, el cual posibilitó la justificación de los resultados en términos de cantidades complejas a través del trabajo en variable real.

Para finalizar con este apartado de conclusiones presentamos un par de elementos que comparten nuestra investigación y algunas de las investigaciones que reportamos en nuestra revisión de literatura.

Iniciamos nuestros comentarios alrededor de los estudios en los que se ve involucrada Soto-Johnson. El objetivo de estos estudios, en palabras de Soto-Johnson et al. (2012), es investigar "el razonamiento geométrico de expertos en variables complejas en un esfuerzo por construir un marco basado en evidencias empíricas que describa cómo se perciben y razonan ideas centrales"(p.189) de la Variable Compleja. Algunos de los resultados alrededor de este marco giran en torno al análisis de los gestos que los participantes del estudio realizan al momento de comunicar un concepto particular. Es decir, los estudios de Soto-Johnson consideran las producciones de matemáticos contemporáneos para entender cómo especialistas en el área piensan y comunican, a través de un razonamiento geométrico, objetos de la Variable Compleja. En este orden de ideas, la carta de Gauss que presentamos en la sección titulada 'Análisis de contenido: el Teorema Integral de Cauchy. Primera etapa, el objeto de análisis', nos advierte que en la comunicación de los resultados el autor se refiere a los objetos involucrados a través de describirlos geométricamente. Nuestra investigación infiere la forma en que Cauchy pensó para configurar el método que aportó insumos a la consolidación del Teorema Integral de Cauchy, sin embargo, referirse a objetos geométricos a través de descripciones analíticas o algebraicas es algo que no encontramos en nuestro análisis del método que reporta Cauchy. La única referencia que se adscribe a representar geométricamente alguno de los objetos matemáticos tratados en el escrito la encontramos en las descripciones que hacen Lacroix y Legendre en el reporte de la obra, en el siguiente comentario vemos como conceptualizan a las integrales a través de describirlas geométricamente.

> On peut dont imaginer que chaque intégrale doublée dont il s'agit, $\iint v\,dxdz$, représente, sur une surface courbe donnée, la portion d'aire dont la projection sur le plan des x et z est un rectangle donné. Cette supposition d'une figure rectangulaire restreint, comme on voit, l'étendue des fonctions représentées par la formule $\iint v\,dxdz$, puisque cette formule, considérée dans toute sa généralité, représente l'aire qui pour projection, sur le plan des x et z, une figure terminée par un contour quelconque (Cauchy, 1814, p.602).

Cuya traducción al español versa de la siguiente manera:

> Por tanto, podemos imaginar que cada integral doble en cuestión, $\iint v\,dxdz$, representa, en una superficie curva dada, la porción de área cuya proyección en el plano de x y de z es un rectángulo dado. Esta suposición de una figura rectangular restringe, como podemos ver, la extensión de las funciones representadas por la fórmula $\iint v\,dxdz$, ya que esta fórmula, considerada en toda su generalidad, representa el área que, proyectada sobre el plano de x y de z, es una figura que termina con cualquier contorno.

Una inmersión inicial a la subsecuente obra de Cauchy, publicada en 1825 y donde se hace alusión al teorema, nos permitió identificar que el proceder de Cauchy se fundamenta a través de utilizar elementos de la variable real, lo cual apunta a que la generalización y el razonamiento por analogía pueden seguir jugando un papel en la configuración de resultados en Variable Compleja. Bottazzini y Gray (2013) comentan que en esta obra de 1825, Cauchy, al estar desarrollando su teoría de integrales singulares para el concepto de integral definida comprendida entre números complejos, "recurrió al lenguaje geométrico y replanteó sus resultados en términos geométricos al observar, en particular, que un camino puede estar formado por partes definidas por diferentes funciones"(p.137). Estos comentarios e inferencias nos orientan a pensar que razonar geométricamente puede ser un elemento que propicie la consolidación de objetos dentro de la Variable Compleja, y a su vez nos permite concluir que la descripción geométrica posibilita la comunicación de diversos objetos en esta rama de la matemática.

Por consiguiente, una profundización en las subsecuentes obras que trabajaron y consolidaron el Teorema Integral de Cauchy podrían develar características en los siguientes dos aspectos

1. El rol que juegan el razonar geométricamente en la construcción de conocimiento en la Variable Compleja.
2. En la sección titulada 'Interpretación e inferencia del Análisis de la Obra' nos preguntamos ¿en que momento y bajo que circunstancias se empieza a trabajar con variables complejas sin la necesidad de representarlas en términos de sus partes reales e imaginarias? Develar estas circunstancias puede propiciarnos de insumos para conceptualizar a la Variable Compleja como algo más que el trabajo simultaneo de variables reales, lo que podría desembocar en realizar un estudio que presente cómo se suscitan los cambios que permiten conceptualizar el rol de variable dentro de la Variable Compleja.

Como segundo punto de incidencia, entre esta investigación y las investigaciones que encontramos en la revisión de antecedentes, nos referimos al resultado denominado en la literatura como 'thinking real doing complex'. A modo de ejemplificación de este fenómeno Danenhower (2000) reporta que uno de los participantes de su estudio argumenta que la función $f(z) = (2z - x)^2$ –donde x es la parte real de z– es diferenciable en su domino porque las funciones polinómicas de variable real son diferenciables en $\mathbb{R}$, por ende inferimos que 'thinking real doing complex' hace alusión a que las justificaciones que los estudiantes utilizan para afirmar que un resultado en Variable Compleja es cierto es a través de extender el resultado análogo en Variable Real. Esta forma de justificación no siempre conduce a resultados verdaderos, por ejemplo, la función $f(z) = (2z - x)^2$ no es analítica en $\mathbb{C}$. Lo que queremos aclarar de este punto de incidencia es que el trabajo por analogía que rescatamos del fenómeno 'thinking real doing complex' no es el mismo tipo de justificación que utiliza Cauchy. En la obra de 1814 el trabajo por analogía se remite a la manipulación simultánea de dos cantidades reales, donde su veracidad está sustentada por el trabajo algebraico que posibilita su consolidación. Podemos decir que 'thinking real doing complex' es un fenómeno más apegado a la generalidad del álgebra, en tanto que utilizarlo como recurso de validación no permite discernir si la conclusión a la que se llega es verdadera.

Cerramos este capítulo a través de dar respuesta a las preguntas de investigación, la identificación de tres de los cuatro principios de la Socioepistemología en el quehacer de Cauchy en el trabajo circundante a su memoria de 1814, y finalmente con la presentación de estos puntos de incidencia entre nuestro estudio y algunos resultados que encontramos a raíz de la revisión de literatura.

En el siguiente apartado describimos un camino que configuramos con la finalidad de robustecer y confrontar nuestra hipótesis epistemológica derivada de este estudio. Consideramos importante esclarecer que esta hipótesis tiene carácter de conjetura, por lo que confrontarla con evidencia empírica nos posibilitará la configuración de una forma en la que se construye conocimiento en Variable Compleja a la luz de la Teoría Socioepistemológica.

9. Prospectivas

En el apartado titulado 'Caracterización de las investigaciones en Variable Compleja' presentamos las conclusiones de nuestra revisión de literatura, lo que nos permitió identificar que aquellas que recurren a la historia no se han orientado en la construcción de conocimiento que posibilitó el establecimiento de diversos objetos que actualmente se estructuran bajo el manto de la Variable Compleja.

Derivado de lo anterior, e interesados en la construcción social de conocimiento en Variable Compleja, realizamos un estudio enmarcado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Gracias a este marco teórico, por medio de un análisis histórico-epistemológico, nos acercamos a la racionalidad que le posibilitó a Cauchy escribir su obra titulada *Sur les Intégrales Définies,* en ella se encuentran insumos que posibilitaron la consolidación del Teorema Integral de Cauchy como un objeto instaurado en la Variable Compleja. La conjugación de esta racionalidad y de un análisis del contenido de la obra, el cual consistió en la búsqueda de los procesos matemáticos que sustentan el proceder matemático de Cauchy, nos permitió inferir la siguiente hipótesis epistemológica.

La construcción de conocimiento en Variable Compleja se propicia por medio de la generalización de resultados en Variable Real a través de la introducción de cantidades complejas, cuya manipulación requiere de conceptualizarlas como el trabajo simultaneo entre dos cantidades reales, recurriendo a la validación de los resultados establecidos en el campo de los complejos mediante un pensamiento por analogía en el campo real.

Aceptamos que el establecimiento de esta hipótesis epistemológica esta anclado a una investigación de carácter teórico. Con la finalidad de afianzar y confrontar esta conjetura nos dimos a la tarea de adaptar el Esquema Metodológico de Montiel y Buendía (2012) –Figura 3– el cual recapitula una forma en la que se realizan investigaciones en Socioepistemología.

Figura 3. Esquema Metodológico
Fuente: Montiel y Buendía (2012)

La adaptación del Esquema Metodológico lo presentamos en la Figura 4. Destacamos que la adaptación del esquema nos permite organizar los elementos que hemos desarrollado hasta el momento, y a su vez configura un camino para la investigación a futuro.

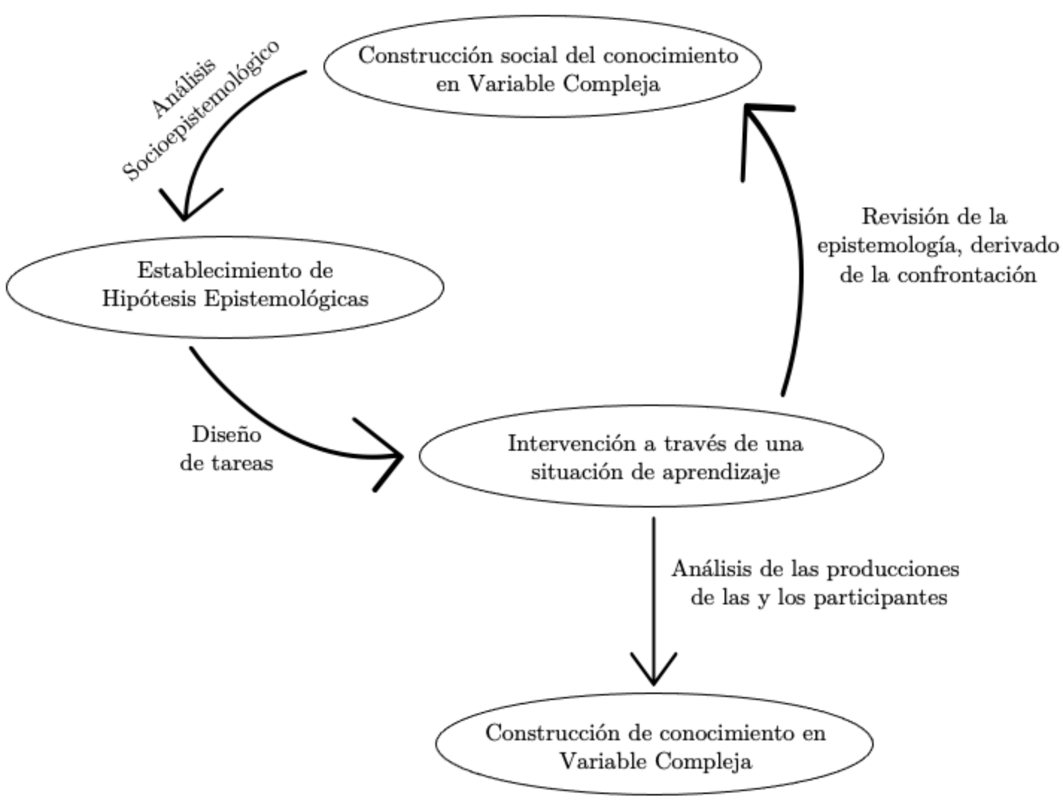

Figura 4. Adaptación del Esquema Metodológico.
Fuente: Elaboración propia a partir de Montiel y Buendía (2012).

A continuación detallamos algunos de los elementos que componen al esquema metodológico de la Figura 4, esto con la finalidad de precisar las actividades que proponemos a realizar en la investigación doctoral.

El establecimiento de nuestra hipótesis epistemológica derivada de esta investigación se da a través del análisis de una producción intelectual de Cauchy que data de 1814. La línea del tiempo de la Figura 1, presente en la sección titulada 'Objeto matemático de estudio', nos permite reconocer a los personajes que trabajaron alrededor de la consolidación y desarrollo del Teorema Integral de Cauchy antes de concretarse como un objeto enseñable, por consiguiente, con la finalidad de robustecer nuestro análisis histórico-epistemológico, y por ende afianzar nuestra hipótesis epistemológica, proponemos un análisis del siguiente comunicado que aportó insumos en la consolidación del teorema, el cual también es una producción de Cauchy en el estudio titulado *Sur les intégrales definies, prises entre des limites imaginaires*. El objetivo de afianzar la hipótesis epistemológica se debe a que buscamos robustecer nuestra conjetura al confrontar estos dos trabajos de Cauchy. La búsqueda de cambios e invariantes alrededor de estas dos producciones de Cauchy nos posibilitará la consolidación de hipótesis epistemológicas completas, las cuales, en conjunción con la identificación de las etapas en las que entran en juego los elementos que las componen –como la generalización y el razonamiento por analogía– nos permitirá sustentar una situación de aprendizaje que pondremos en funcionamiento en una comunidad de estudiantes universitarios. A través de analizar las respuestas de las y los estudiantes tendremos evidencia empírica que nos permitirá robustecer las hipótesis epistemológicas en términos de prácticas, perfilando a develar la construcción social de conocimiento en Variable Compleja desde el marco Socioepistemológico.

Para la configuración de la situación de aprendizaje, Hinojos-Ramos, Romero y Farfán (2020) nos presentan una serie de principios que utilizaron para justificar el diseño de un par de situaciones que no soslayan la construcción social de conocimiento. Específicamente la autora y los autores nos permiten distanciarnos de la premisa que busca dotar de sentido al conocimiento matemático a través de secuencias didácticas que suelen estar acompañadas por procesos algorítmicos, lo que nos permitirá configurar una situación de aprendizaje a partir de la idea de poner en *situación de aprender* a las personas que afronten las tareas que conforman dicha situación. De esta forma, en el análisis posterior de las producciones de los participantes buscamos desentrañar la coordinación activa de las *acciones* y *actividades* que los individuos realizan en la solución de las tareas, lo que nos permitirá propiciar insumos en la descripción del desarrollo del pensamiento matemático, necesario en la construcción de conocimiento en Variable Compleja, a través del esquema de anidación de prácticas de la Socioepistemología, el cual presentamos en la Figura 5.

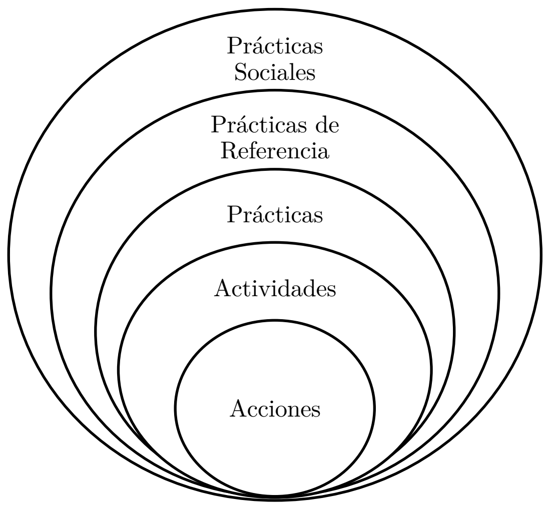

Figura 5. Modelo de anidación de prácticas.
Fuente: Cantoral (2013).

Debido a la contingencia sanitaria actual, no sabemos cuándo regresará la toma de clases presenciales en el nivel universitario, por lo que estamos considerando que la situación de aprendizaje que configuremos podemos aplicarla por medio de un taller en línea, en donde a las y los interesadas en formar parte del estudio les solicitaremos que sean informantes para posteriormente analizar sus producciones. Dependiendo de como continúe la contingencia sanitaria, y debido a que la situación de aprendizaje la configuraremos posterior al afianzamiento de las hipótesis-epistemológicas, estas ideas pueden trastocarse.

En la Tabla 2 presentamos un calendario de actividades que nos permite enmarcar, de manera general, el tiempo que suponemos nos tomará cada una de las actividades que acabamos de describir.

Tabla 2. Calendario de actividades.

Actividad por realizar	Tiempo estimado
Hipótesis epistemológicas completas, develando los diferentes momentos de evolución de los elementos que las componen.	6 meses
Diseño de la situación de aprendizaje y pruebas piloto.	6 meses
Examen pre-doctoral.	-
Intervención a través de la situación de aprendizaje. Selección, organización y transcripción de los datos a analizar.	12 meses
Análisis de los datos, confrontación con la epistemología y revisión final de la tesis.	12 meses
Presentación de la tesis.	-

Fuente: Elaboración propia.

Consideramos importante resaltar que las momentos que presentamos en el calendario de actividades están orientados en la descripción de los elementos que comprende el esquema metodológico de la Figura 4, por lo que, a priori, las actividades de la Tabla 2 y los tiempos estimados son secuenciados y disjuntos, de modo que al finalizar el primer año de estudios del doctorado –para la presentación del examen pre-doctoral– tendremos las hipótesis epistemológicas completas, al igual que la situación de aprendizaje con sus respectivos pilotajes. El tiempo restante que los lineamientos permiten para la culminación del doctorado, que no se ve reflejado en la Tabla 2, contempla la redacción constante de la tesis, la participación en congresos, la escritura de artículos, así como las idiosincrasias que emerjan en la comprensión y uso de los recursos teóricos y metodológicos que sustentarán las aportaciones y conclusiones que se desprendan de la investigación.

Para concluir este capítulo de prospectivas nos remitimos a comentar que en esta investigación de maestría hemos podido esclarecer que la Variable Compleja se construye dentro de la misma matemática como un intento de generalización de resultados de la Variable Real, en consecuencia afirmamos que nuestro apego por develar una forma en la que se construye conocimiento en Variable Compleja aún se encuentra en etapas iniciales. El objetivo que nos permitió adaptar el esquema metodológico de Montiel y Buendía se orienta por nuestro interés en la caracterización de las prácticas que se suscitan a través de una situación de aprendizaje –fundamentada en hipótesis epistemológicas– que gira en torno a la Variable Compleja. Estamos convencidos de que caracterizar el tipo de conocimiento matemático de la Variable Compleja, a través de develar su construcción, abre las puertas a contrastar este tipo de conocimiento con el de la Variable Real, lo que nos permitirá promover cómo abordar conceptos de esta rama de la matemática para que su conocimiento se signifique fuera del contexto escolar.

Referencias

Ahlfors, L. (1979). *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable.* New York: McGraw-Hill.

Bak, J., y Popvassilev, S. (2017). The Evolution of Cauchy's Closed Curve Theorem and Newman's Simple Proof. *The American Mathematical Monthly, 124*(3), 217-231.

Bartha, P. (2019). Analogy and Analogical Reasoning. The Stanford Encyclopedia of Philosophy [Versión electrónica]. Californa, EU: Enciclopedia de filosofía de Standford,https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/reasoning-analogy/

Belhoste, B. (1991). *Augustin-Louis Cauchy: A biography.* Nueva York: Springer-Verlag.

Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analyisis from Euler to Weierstrass.* New York: Spring-Verlag.

Bottazzini, U., y Grey, J. (2013). *Hidden Harmony – Geometric Fantasies – The Rise of Complex Function Theory.* New York: Springer.

Bradley, R., y Sandifer, C. (2009). *Cauchy's Cours d'analyse. An annotated translation.* New York: Springer.

Cajori, F. (1913). History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *The American Mathematical Monthly, 20*(2), 35-47.

Cantoral, R. (1900). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En Cantoral, Covián, Farfán, Lezama y Romo, *Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp.243-284). México: Diaz de Santos.

Cantoral, R., Farfán, R., Hitt, F., y Rigo, M. (1987). Epistemología del Concepto de Función Logarítmica. *Matemática Educativa, Revista del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, 1*(1), 11-17.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 5-17.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Cates, D. (2019). *Cauchy's Calcul Infinitésimal. An annotated English Translation*. Springer International Publishing.

Cauchy, A. L. (1814). Mémoire sur les intégrales définies. *Mém. Acad. Sci. Paris*, *1(82)*, 599-799.

Churchill, R., y Brown, J. (1992). *Variable Compleja y Aplicaciones.* Madrid: McGraw-Hill.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav.

Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo* [Tesis de Maestría, Cicata-IPN]. https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/crespo_2005.pdf

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* [Tesis de Maestría, Cinvestav]. https://www.researchgate.net/publication/323667681_De_Sirio_a_Ptolomeo_Una_Problematizacion_de_las_Nociones_Trigonometricas

Danenhower, P. (2000). *Teaching and learning complex analysis at two British Columbia Universities* [Tesis de doctorado, Simon Fraser University]. https://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape3/PQDD_0008/NQ61636.pdf

Dittman, M., Soto-Johnson, H., Dickson, S., y Harr, T. (2016). Game building with complex-valued functions. *PRIMUS, 27*(8), 1-11.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico* [Tesis de Maestría, Cinvestav]. https://www.researchgate.net/publication/275045220_Una_evolucion_de_la_analiticidad_de_las_funciones_en_el_siglo_XIX_Un_estudio_socioepistemologico_Cinvestav

Ettlinger, H. J. (1923). Cauchy's Paper of 1814 on Definite Integrals. *Annals of Mathematics, 23*(3), 255-270.

Farfán, R. M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav.

Fourcy, A. (1828). *Historie de l'Ecole Polytechnique.* Paris: École Polytechnique.

Freudenthal, H. (1971). A.-L. Cacuhy. In C. Gillispe, *Dictionary of Scientific Biography* (Vol. 3, pp. 131-148). New York: Charles Scribner's Sons.

Garcia, S. R., y Ross, W. (2017). Approaching Cauchy's Theorem. *PRIMUS, 27*(8-9), 758-765.

Goulden, K., Soto-Johnson, y Dyben, S. (2015). Secondary teachers' conception of various forms of complex numbers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(4), 327-351.

Grabiner, J. V. (1994). Augustin-Louis Cauchy: A Biography: By Bruno Belhoste. Translated by Frank Ragland. New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona (Springer-Verlag). 1991. $79.00. *Historia Mathematica, 21*(2), 215-220.

Grey, J. (2000). Goursat, Pringsheim, Walsh, andt he Cauchy Inteoral Theorem. *The Mathematical Intelligencer, 22*(4), 60-77.

Hancock, B. (2018). *Undergraduates' Collective Argumentation Regarding Integration of Complex Functions Within Three Worlds of Mathematics [Tesis de doctorado, University of Northern Colorado]. https://digscholarship.unco.edu/dissertations/492*

Hinojos Ramos, J. E., Romero Fonseca, F. W., y Farfán Márquez, R. M. (2020). Principios de diseño de tareas en socioepistemología. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, e708. doi: https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.708

Ibañes, M., y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática, 9*(2), 65-104.

Karakok, G., Soto Johnson, H., y Dyben, A. (2013). In-Service Secondary Teachers' Conceptualization of Complex Numbers. *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp.2-7). Denver, Colorado: SIGMAA.

Knopp, K. (1945). *Theory of Functions.* New York: Dover Publications.

Larivière, G. (2017). *On Cauchy's rigorization of complex analysis* [Tesis de Maestría, Simon Fraser University]. https://summit.sfu.ca/item/17300

Markushevich, A. (1965). *Theory of Functions of a Complex Variable.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Marsden, J., y Hoffman, M. (1996). *Análisis Básico de Variable Compleja.* México: Editorial Trillas.

Martínez, F. (2017). *Caracterización del pensamiento matemático de alumnos y alumnas de ingeniería, relativo al origen de la variable compleja. El caso de logaritmos de números negativos* [Tesis de maestría, Cinvestav]. https://www.researchgate.net/publication/324418984_Caracterizacion_del_pensamiento_matematico_de_alumnos_y_alumnas_de_ingenieria_relativo_al_origen_de_la_variable_compleja_El_caso_de_logaritmos_de_numeros_negativos

Martínez, G., y Antonio, R. (2009). Una construcción de significado del número complejo. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 4*(1), 1-9.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones* (pp. 61–88). D.F., México: Lectorum.

Needham, T. (2000). *Visual Complex Analyisis.* Oxford: Oxford University Press.

Nemirovsky, R., Rasmussen, C., Sweeny, G., y Wawro, M. (2012). When the classroom flor becomes the complex plane: addition and multiplication as ways of bodily navigation. *Journal of the learning sciences, 21*(2), 287-323.

Neuenschwander, E. (1981). Studies in the history of complex function theory II: interactions among the french school, Riemann and Weirestrass. *Bulletin of the American Mathematical Society, 5*(2), 87-105.

Nordlander, M., y Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 43*(5), 627-641.

Oehrtman, M., Soto-Johnson, H., y Hancock, B. (2019). Experts' Construction of Mathematical Meaning for Derivatives and Integrals of Complex-Valued Functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 5*(3), 394-423.

Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A., & Giatilis, G. (2006). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(6), 681-706.

Pantoja, R. (1989). *Usos de la variable compleja y su geometría en la electrónica (propuesta de modificaciones a los planes de estudio en la licenciatura en la ingeniería en electrónica)* [Tesis de maestría no publicada].Cinvestav.

Polya, G., y Latta, G. (1974). *Complex Variables.* New York: John Wiley & Sons.

Ponce, J. (2019). The use of phase portraits to visualize and investigate isolated singular points of complex functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(7), 999-1010.

Regis, F. (2013). Viewing the roots of polynomial funcions in complex variable: the use of GeoGebra and CAS Maple. *Acta Didactica Napocensia, 6*(4), 45-58.

Remmert, R. (1991). *Theory of Complex Functions.* New York: Springer.

Scott, A. E. (1974). *Cauchy Integral Theorem: a Historical Development of its Proof* [Tesis de Maestría, Oklahoma State University] https://hdl.handle.net/11244/18675

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Siebert, D. (2019). Conducting a Timely Literature Search. En K. Leatham, *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 17-30). Switzerland: Springer, Chem.

Smithies, F. (1997). *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory .* Cambridge: Cambridge University Press.

Smithies, F. (2005). A.-L. Cauchy, Two Memoirs on Complex-Variable Function Theory (1825, 1827). In I. Grattan-Guinness, *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* (pp. 377-390). The Netherlands: Elsevier.

Soto-Johnson, H. (2014). Visualizing the arithmetic of complex numbers. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 21*(3), 103-114.

Soto-Johnson, H., y Hancock, B. (2019). Research to practice: Developing the amplitwist concept. *PRIMUS, 29*(5), 421-440.

Soto-Johnson, H., y Troup, J. (2014). Reasoning on the complex plane via inscriptions and gesture. *The Jorunal of Mathematical Behavior, 36*, 109-125.

Soto-Johnson, H., Hancock, B., y Oehrtman, M. (2016). The interplay between mathematicians' conceptual and ideational mathematics about continuity of complex-valued functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(3), 362-389.

Soto-Johnson, H., Oehrtman, M., y Rozner, S. (2011). Dynamic visualization of complex variables: The case of Ricardo. En Brown, S., Larsen, L., Marronguelle, K., y Oehrtman, M. (Eds.), *Proceedings from the 14th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp.488-503).

Soto-Johnson, H., Oehrtman, M., Noblet, K., Roberson, L., y Rozner, S. (2012). Experts' reification of complex variables concepts: The role of metaphor. En Brown, S., Larsen, L., Marrongelle, K., y Oehrtman, M., *Proceedings of the 15th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp.189-195).

Soto, M. (1988). *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: acerca de los logaritmos de números negativos y los orígenes de la variable compleja* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav.

Stein, E., y Shakarchi, R. (2003). *Complex Analysis.* Princeton: Princeton University Press.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics.* Cambridge University Press.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Titchmarsh, C. (1939). *The Theory of Functions.* Oxford: Oxford University Press.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

Troup, J. (2019). Developing reasoning about the derivative of a complex-valued function with the aid of Geometer's Sketchpad. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 5*(1), 3-26.

Troup, J., Soto-Johnson, H., Karakok, G., y Díaz, R. (2017). Developing students' geometric reasoning about the derivative of complex valued functions. *Digital Experiences in Mathematics Education, 3*(3), 173-205.

Trujillo, E. (2005). *El surgimiento de la variable compleja y su conceptualización didáctica* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav.

Villaraga, B., Rojas, O., y Sigarreta, J. (2020). Metodología para la formación de conceptos asociados con las funciones de variable compleja. *Revista Espacios, 41*(6), 24-33.

Watson, G. (1960). *Complex Integration and Cauchy's Theorem.* New York: Hafner Publishing Company.

Wood, R., y Bruch, J. (1972). Teaching complex variables with an interactive computer system. *IEEE Transactions on Education, 15*(1), 73-80.

Anexos

Anexo 1

Traducción de la obra de Cauchy 1814

En este anexo presentamos la traducción de una sección de la obra de Cauchy de 1814. Esta traducción es fiel en tanto que no efectuamos cambios en la notación matemática ni en las expresiones utilizadas. En el escrito original, en la página 621, se encuentra un pie de página, el cual nosotros lo escribimos entre líneas punteadas. Esta traducción es nuestra fuente de datos principal, complementos y comentarios que permiten una lectura más explicita de su contenido se encuentran en el Anexo 2.

Sobre las integrales definidas

Primera parte

De las ecuaciones que autorizan
el pasaje de lo real a lo imaginario

1.$^{\text{er}}$

Exposición general del Método

Sea $f(y)$ cualquier función de la variable y, y supongamos que y es una función de las variables x y z: El coeficiente diferencial de la integral

$$\int f(y)dy$$

tomado respecto a x será

$$f(y)\frac{dy}{dx}$$

y el coeficiente diferencial de la misma integral, relativo a z, será

$$f(y)\frac{dy}{dz}$$

En lo que respecta al coeficiente diferencial de segundo orden, relativo a las dos variables x y z, lo podemos designar por

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz}$$

O por

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}$$

Y tendremos

$$(1) \qquad \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz} = \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}$$

Esta ecuación se puede verificar directamente por diferenciación. De hecho, tenemos

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz} = f(y)\frac{d^2y}{dxdz} + f'(y)\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx} = f(y)\frac{d^2y}{dzdx} + f'(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz}:$$

De lo que se deduce la ecuación (1). Esta última ecuación subsiste, sin importar si las funciones de x y de z se asumen en parte real, en parte imaginaria. Por lo que, por ejemplo, si M y N denotan cualesquiera dos funciones de, x y de z podemos hacer

$$y = M + N\sqrt{-1}$$

Por lo que, si suponemos

$$f(M + N\sqrt{-1}) = P' + P''\sqrt{-1},$$

$$P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx} = S, \qquad\qquad P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz} = U,$$

$$P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx} = T, \qquad P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz} = V,$$

La ecuación (1) se convierte en

$$\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}.$$

Si, en lugar de asumir que $y = M + N\sqrt{-1}$, hubiéramos supuesto que $y = M - N\sqrt{-1}$, hubiéramos obtenido

$$\frac{dS}{dz} - \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}.$$

Por lo que tendremos por separado

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dS}{dz} = \dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{dT}{dz} = \dfrac{dV}{dx}. \end{cases}$$

Las dos ecuaciones previas pueden ser verificadas inmediatamente al derivar las cuatro cantidades *S, T, U, V.* Estas dos ecuaciones contienen toda la teoría del pasaje de lo real a lo imaginario, y nos estamos quedando sin tiempo para indicar como utilizarlas.

Supongamos que, después de multiplicar los dos miembros de cada una de las ecuaciones en (2) por $dxdz$, procedemos a integrarlos, respecto a x y a z, entre limites reales de estas dos variables. Denotemos por

$$S', S'', T', T'',$$

Los valores de S y de T relativo a los dos límites de z, y por

$$U', U'', V', V'',$$

Los valores de U y V relativo a los dos límites de x. Si, entre los límites en cuestión, las cuatro cantidades

$$S, T, U, V,$$

Siempre mantienen un valor determinado, uno obtendrá generalmente

$$(3)\quad \begin{cases} \int S''dx - \int S'dx = \int U''dz - \int U'dz^*, \\ \int T''dx - \int T''dx = \int V''dz - \int V'\ dz. \end{cases}$$

----

*La ecuación (3) puede ser remplazada por la fórmula imaginaria

$$(A)\qquad \int (S'' + T''\sqrt{-1})dx - \int (S' + T'\sqrt{-1})dx$$
$$= \int (U'' + V''\sqrt{-1})dz - \int (U' + V'\sqrt{-1})dz$$

La misma observación se aplica a la ecuación (4), y en general a todos los sistemas de ecuaciones que se establecerán en los siguientes párrafos, cada sistema de dos ecuaciones reales puede ser remplazado por una única fórmula imaginaria.

Supongamos, en aras de la simplicidad, que los límites para x son o y x, y que los límites para z son o y z; finalmente, designemos por

s y t los valores que adquieren S y T cuando $z = o$,

y por u y v los valores que adquieren U y V cuando $x = o$.

Las dos expresiones previas se convertirán en

$$(4)\quad \begin{cases} \int S\ dx - \int s\ dx = \int U\ dz - \int u\ dz, \\ \int T\ dx - \int t\ dx = \int V\ dz - \int v\ dz, \end{cases}$$

Las integrales relativas a x tomadas entre los límites o y x, y las integrales relativas a z tomadas entre los límites o y z. Examinaremos, en la segunda parte de este escrito, el caso cuando los valores de $S, T, U, V,$ se vuelven indeterminados entre los límites de integración. Por el momento, nos limitaremos a mostraren qué aplicaciones se utilizan las fórmulas que acabamos de encontrar.

Anexo 2

El proceder matemático en la obra de Cauchy

Este anexo tiene la intención de presentar una descripción explícita del proceder matemático de la traducción del Anexo 1. Utilizamos un código de color que nos permite distinguir entre lo estipulado por Cauchy y nuestros complementos, los cuales son el resultado de la lectura del reporte escrito por Lacroix y Legendre al inicio de la obra y los comentarios de Cauchy en la introducción de la obra, lo que nos permite justificar y comprender el proceder matemático de Cauchy en el escrito.

A continuación el texto original de Cauchy se encuentra en color negro. En color azul hemos agregado complementos que, en conjugación con las interpretaciones y justificaciones de la matemática presentes en color verde, permiten, desde nuestra perspectiva, una lectura más fluida y profunda de la obra.

Sobre las integrales definidas

Primera parte

De las ecuaciones que autorizan
el pasaje de lo real a lo imaginario

1.er

Exposición general del Método

Sea $f(y)$ cualquier función de la variable y, y supongamos que y es una función de las variables x y z, i.e $y = y(x, z)$: El coeficiente diferencial, la derivada, de la integral

$$\int f(y)dy$$

tomado respecto a x será

$$f(y)\frac{dy}{dx}$$

y el coeficiente diferencial de la misma integral, relativo a z, será

$$f(y)\frac{dy}{dz}$$

En lo que respecta al coeficiente diferencial de segundo orden, relativo a las dos variables x y z, lo podemos designar por

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz}$$

O por

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}$$

Y tendremos

$$(1) \qquad \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz} = \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}$$

Esta ecuación se puede verificar directamente por diferenciación. De hecho, tenemos

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz} = f(y)\frac{d^2y}{dzdx} + \frac{df(y)}{dz}\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx} = f(y)\frac{d^2y}{dxdz} + f'(y)\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx} = f(y)\frac{d^2y}{dxdz} + \frac{df(y)}{dx}\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz} = f(y)\frac{d^2y}{dzdx} + f'(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz}:$$

De lo que se deduce la ecuación (1).

Mostraremos una interpretación de lo hasta aquí descrito a través de dos comentarios. El primero versa alrededor de la idea de diferencial exacto, concepto que abordan Lacroix y Legendre en el reporte que antecede a la introducción de la obra, el cual tiene la siguiente definición.

Definición:

Decimos que $pdx + qdz$ es un diferencial exacto si existe una función $g = g(x, z)$ tal que $d(g) := \frac{dg}{dx}dx + \frac{dg}{dz}dz = pdx + qdz$; i.e $\frac{dg}{dx} = p$ y $\frac{dg}{dz} = q$.

En donde, además, se tenia el siguiente resultado.

Resultado:

Si $pdx + qdz$ es un diferencial exacto, entonces $\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx}$

Lacroix y Legendre afirman que Cauchy esta considerando un diferencial exacto en la expresión $f(y)dy$ debido a que y es una función de las variables reales x y z. Esta afirmación podemos verificarla con ayuda de la definición anterior. Si $g(x,z) = \int f(y)dy$, entonces

$$d(g) = d\left(\int f(y)dy\right) = f(y)dy$$

Y a su vez, podemos obtener

$$d(g) := \frac{dg}{dx}dx + \frac{dg}{dz}dz = \frac{d}{dx}\left(\int f(y)dy\right) + \frac{d}{dz}\left(\int f(y)dy\right)$$

Cuando Cauchy establece la igualdad (1), a través de una verificación directa, se está comprobando el *Resultado* antes expuesto. Particularmente se esta verificando que

$$\frac{d^2g}{dzdx} = \frac{d^2g}{dxdz}$$

como era de esperarse.

Nuestro segundo comentario se configura a raíz de una afirmación de Cauchy en la introducción de la obra, al referirse a los coeficientes diferenciales de primer orden de la integral $\int f(y)dy$, comenta "représentent simplement deux nouvelles fonctions de x et de z. Mais ces deux fonctions ont entre elles une relation qui mérite d'être remarquée"(p.612) (son simplemente dos nuevas funciones de x y z. Pero estas dos funciones tienen una relación entre ellas que merece ser destacada). La relación a la que hace alusión es la igualdad (1). Observamos que los coeficientes diferenciales de primer orden son considerados solamente como dos funciones de las variables x y z, mientras que la igualdad (1) es la que pasa a primer plano al ser descrita como una relación que merece ser destacada.

La conjugación de estos dos comentarios nos permite justificar el motivo de que Cauchy inicie su escrito considerando la integral $\int f(y)dy$. Particularmente se justifica el hecho de que Cauchy derive dos veces a esta expresión, centrando su atención en obtener la igualdad (1). Continuamos con el análisis de la obra.

Esta última ecuación subsiste, sin importar si las funciones de x y de z se asumen en parte real, en parte imaginaria. Por lo que, por ejemplo, si M y N denotan cualesquiera dos funciones de, x y de z podemos hacer

$$y = M(x,z) + N(x,z)\sqrt{-1} = M + N\sqrt{-1}$$

Por lo que, si suponemos

$$f(M + N\sqrt{-1}) = P' + P''\sqrt{-1},$$

$$P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx} = S, \qquad P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz} = U,$$

$$P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx} = T, \qquad P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz} = V,$$

La ecuación (1) se convierte en

$$\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1} \ldots (\alpha)$$

Cauchy, hasta este punto, se limita a presentar una serie de afirmaciones. *Cómo* estaba pensando Cauchy y *qué* hizo para obtener la ecuación (α) no podemos argumentarlo de lo plasmado en la obra. Lo que presentamos a continuación, a través de nuestra interpretación, tiene la finalidad de justificar la obtención de (α) y las expresiones S, T, U y V.

Para obtener la ecuación (α), y las expresiones S, T, U y V, percatémonos de lo siguiente. La suposición de $y = M + N\sqrt{-1}$ y de $f(y) = f(M + N\sqrt{-1}) = P' + P''\sqrt{-1}$ permite que interpretemos:

1. La función f la podemos pensar como una función compleja de variable compleja.
2. La integral $\int f(y)dy$ podemos pensarla como una integral de una función compleja de variable compleja. Concepto abordado por Cauchy en 1825.

3. Las expresiones $f(y)\frac{dy}{dx}$ y $f(y)\frac{dy}{dz}$ son dos cantidades complejas. $f(y)\frac{dy}{dx} := S + T\sqrt{-1}$ y $f(y)\frac{dy}{dz} := U + V\sqrt{-1}$, en donde S, T, U, V son expresiones que dependen de $P', P'', \frac{dM}{dx}, \frac{dN}{dx}, \frac{dM}{dz}, \frac{dN}{dz}$, como veremos a continuación.

$$\begin{aligned} f(y)\frac{dy}{dz} &= (P' + P''\sqrt{-1})\frac{d}{dz}(M + N\sqrt{-1}) \\ &= (P' + P''\sqrt{-1})\left(\frac{dM}{dz} + \frac{dN}{dz}\sqrt{-1}\right) \\ &= \left(P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz}\right) + \sqrt{-1}\left(P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz}\right) \end{aligned}$$

Y a su vez

$$\begin{aligned} f(y)\frac{dy}{dx} &= (P' + P''\sqrt{-1})\frac{d}{dx}(M + N\sqrt{-1}) \\ &= (P' + P''\sqrt{-1})\left(\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx}\sqrt{-1}\right) \\ &= \left(P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx}\right) + \sqrt{-1}\left(P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx}\right) \end{aligned}$$

La obtención de estos resultados descansa en operar algebraicamente las expresiones $P' + P''\sqrt{-1}$, $\frac{d}{dx}(M + N\sqrt{-1})$ y $\frac{d}{dz}(M + N\sqrt{-1})$.

Gracias a la linealidad del operador diferencial sobre sumas tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right) &= \frac{d}{dx}\left[\left(P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz}\right) + \sqrt{-1}\left(P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz}\right)\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left(P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz}\right) + \sqrt{-1}\frac{d}{dx}\left(P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz}\right) \end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{dz}\left[\left(P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx}\right) + \sqrt{-1}\left(P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx}\right)\right] \\ &= \frac{d}{dz}\left(P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx}\right) + \sqrt{-1}\frac{d}{dx}\left(P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx}\right) \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir que $U = P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz}$, $V = P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz}$, $S = P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx}$ y $T = P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx}$. Y así

$$\frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right) = \frac{dU}{dx} + \sqrt{-1}\frac{dV}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dS}{dz} + \sqrt{-1}\frac{dT}{dz}$$

Suponer que la ecuación (1) es válida para expresiones complejas nos permite concluir (α). Sin embargo, si se busca remover toda incertidumbre de este hecho, basta derivar las expresiones S, T, U, V, utilizando las reglas de producto y suma, así como la linealidad de la derivada sobre sumas. Continuamos con el análisis de la obra

Si, en lugar de asumir que $y = M + N\sqrt{-1}$, hubiéramos supuesto que $y = M - N\sqrt{-1}$, hubiéramos obtenido

$$\frac{dS}{dz} - \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}\sqrt{-1} \ldots (\tilde{\alpha})$$

Bajo el supuesto de $y = M - N\sqrt{-1}$, Cauchy concluye que $f(M - N\sqrt{-1}) = P' - P''\sqrt{-1}$, luego, los coeficientes diferenciales de primer orden podemos escribirlos como

$$\begin{aligned} f(y)\frac{dy}{dz} &= (P' - \sqrt{-1})\frac{d}{dz}(M - N\sqrt{-1}) \\ &= (P' - P''\sqrt{-1})\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dz}\sqrt{-1}\right) \\ &= \left(P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz}\right) - \sqrt{-1}\left(P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz}\right) \end{aligned}$$

A su vez

$$\begin{aligned} f(y)\frac{dy}{dx} &= (P' - P''\sqrt{-1})\frac{d}{dx}(M - N\sqrt{-1}) \\ &= (P' - P''\sqrt{-1})\left(\frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dx}\sqrt{-1}\right) \\ &= \left(P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx}\right) - \sqrt{-1}\left(P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx}\right) \end{aligned}$$

Observemos que las expresiones para S, T, U y V se mantienen, afectando solamente la parte imaginaria de $f(y)\frac{dy}{dz}$ y $f(y)\frac{dy}{dx}$. De esta forma, podemos concluir que

$$\frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right) = \frac{dU}{dx} - \sqrt{-1}\frac{dV}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dS}{dz} - \sqrt{-1}\frac{dT}{dz}$$

Y gracias a la igualdad (1) obtenemos la ecuación ($\tilde{\alpha}$).

Por lo que tendremos por separado

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dS}{dz} = \dfrac{dU}{dx}\,, \\ \dfrac{dT}{dz} = \dfrac{dV}{dx}\,. \end{cases}$$

Cauchy, para proceder con su escrito, utiliza cantidades complejas sujeto a la erradicación ulterior de $\sqrt{-1}$. Es decir, se ve en la necesidad de obtener las igualdades $(\tilde{\alpha})$ y (α), para obtener el sistema de ecuaciones (2). El análisis refinado de la obra nos permitió inferir la forma en que Cauchy conceptualiza el trabajo con cantidades complejas, por lo que entendimos de una mejor manera su proceder en esta sección de la obra en la conjugación del Análisis Textual y Contextual que presentamos en el apartado titulado 'Interpretación e inferencia del Análisis de la Obra'.

Las dos ecuaciones previas, las ecuaciones en (2), pueden ser verificadas inmediatamente al derivar las cuatro cantidades *S, T, U, V.* Estas dos ecuaciones contienen toda la teoría del pasaje de lo real a lo imaginario, y nos estamos quedando sin tiempo para indicar como utilizarlas. Supongamos que, después de multiplicar los dos miembros de cada una de las ecuaciones en (2) por $dxdz$, procedemos a integrarlos, respecto a x y a z, entre limites reales de estas dos variables. Denotemos por

$$S', S'', T', T'',$$

Los valores de S y de T relativo a los dos límites de z, y por

$$U', U'', V', V'',$$

Los valores de U y V relativo a los dos límites de x. Si, entre los límites en cuestión, las cuatro cantidades

$$S, T, U, V,$$

Siempre mantienen un valor determinado, uno obtendrá generalmente

$$
(3) \qquad \begin{cases} \int S''dx - \int S'dx = \int U''dz - \int U'dz *, \\ \int T''dx - \int T''dx = \int V''dz - \int V' \, dz. \end{cases}
$$

Las ecuaciones integrales (3) son el resultado de integrar las ecuaciones que contienen el pasaje de lo real a lo imaginario –es decir, las ecuaciones en (2)– respecto a las variables x y z. Para su obtención, Cauchy parte de la hipótesis de que las funciones $S, T, U\ y\ V$ están definidas al variar x de o a x, y z de o a z. Estas ecuaciones integrales le permiten a Cauchy obtener las fórmulas de las siguientes secciones de la obra. En esta aplicación de las fórmulas se da cuenta de un conflicto que deviene del intercambio de integración. En palabras de Lacroix y Legendre

> En appliquant ses formules à divers exemples, M. Cauchy n'a pas tardé à reconnaître que, dans certains cas, ces formules étaient en défaut; c'est-à-dire, qu'on n'obtenait pas le même résultat en intégrant d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à z, ou en suivant une marche contraire. (p.605)

Cuya traducción versa de la siguiente manera:

> Aplicando sus fórmulas a varios ejemplos, el Sr. Cauchy reconoció que en algunos casos estas fórmulas eran defectuosas; es decir, no se obtenía el mismo resultado integrando primero respecto a x, luego respecto a z, o siguiendo un curso de acción opuesto.

Nuestro análisis de la obra no abarca este conflicto, lo mencionamos porque la configuración de una respuesta le permite a Cauchy integrar funciones que se indefinen a lo largo de la región de integración. La solución del conflicto, a través de concepto que denominó Integrales Singulares, le propició elementos que permearon sus investigaciones posteriores en Análisis. Particularmente, presentamos los siguientes dos ejemplos

1. El capítulo veinticinco de su libro titulado 'Résumé des leçons données a l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal', traducido por Cates (2019) y conocido en la literatura como Calcul Intinitésimal, esta dedicado a este concepto.

2. Su obra de 1825, titulada ‘Mémoire sur les intégrales definies, prises entre des límites imaginaires’ busca atribuir un significado a la integración de funciones cuyos límites de integración son números complejos. Si la función a integrar no esta definida en algún valor de la región de integración, utiliza Integrales Singulares para obtener su valor. En palabra de Cauchy:

   La théorie des intégrales singulières que j’avais exposée pour la première fois dans un Mémoire de 1814, suffisait pour établir une multitude de formules générales, à l’aide desquelles on pouvait évaluer ou du moins transformer les intégrales définies. Je me propose aujourd’hui d’appliquer les principes qui m’ont guidé dans ces recherches aux intégrales prises entre des limites imaginaires (Cauchy, 1825, p.265).

   Cuya traducción versa de la siguiente forma:

   La teoría de las integrales singulares que expuse por primera vez en una Memoria de 1814, fue suficiente para establecer una multitud de fórmulas generales, mediante las cuales las integrales definidas podían ser evaluadas o al menos transformadas. Hoy me propongo aplicar los principios que me guiaron en esta investigación a las integrales comprendidas entre límites imaginarios.

Continuando con el escrito, Cauchy presenta un pie de página en donde estipula que no es necesaria la separación, en partes real e imaginaria, que ha estado haciendo a lo largo del escrito. Este pie de página es agregado a la obra en 1825, posterior a éste explicita los límites de integración con los que trabajará.

---

*La ecuación (3) puede ser remplazada por la fórmula imaginaria

$$(A) \qquad \int (S'' + T''\sqrt{-1})dx - \int (S' + T'\sqrt{-1})dx$$

$$= \int (U'' + V''\sqrt{-1})dz - \int (U' + V^{\backprime}\sqrt{-1})dz$$

La misma observación se aplica a la ecuación (4), y en general a todos los sistemas de ecuaciones que se establecerán en los siguientes párrafos, cada sistema de dos ecuaciones reales puede ser remplazado por una única fórmula imaginaria.

Supongamos, en aras de la simplicidad, que los límites para x son o y x, y que los límites para z son o y z; finalmente, designemos por

s y t los valores que adquieren S y T cuando $z = o$,

y por u y v los valores que adquieren U y V cuando $x = o$.

Las dos expresiones previas, las ecuaciones en (3), se convertirán en

$$(4) \qquad \begin{cases} \int S\ dx - \int s\ dx = \int U\ dz - \int u\ dz\,, \\ \int T\ dx - \int t\ dx = \int V\ dz - \int v\ dz, \end{cases}$$

Las integrales relativas a x tomadas entre los límites o y x, y las integrales relativas a z tomadas entre los límites o y z. Examinaremos, en la segunda parte de este escrito, el caso cuando los valores de S, T, U, V, se vuelven indeterminados entre los límites de integración. Por el momento, nos limitaremos a mostraren qué aplicaciones se utilizan las fórmulas que acabamos de encontrar.

Con estas palabras Cauchy termina esta sección de la obra de 1814. Una mirada actual nos permite interpretar los límites de integración, así como la notación que esta utilizando, de la siguiente forma. Al suponer que x varía de o a x, y z de o a z, interpretamos que Cauchy está integrando en el plano xz a lo largo de la región rectangular $[o, x] \times [o, z]$. En notación actual, a partir de las ecuaciones que permiten el pasaje de lo real a lo imaginario, podemos escribir la forma en que obtiene el par de ecuaciones (4). Notemos lo siguiente:

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dS}{dz}dzdx = \frac{dU}{dx}dxdz$$

$$\iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dS}{dz}dzdx = \iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dU}{dx}dxdz$$

$$\int_o^x (S-s)\ dx = \int_o^z (U-u)\ dz$$

$$\int_o^x S\ dx - \int_o^x s\, dx = \int_o^z U\, dz - \int_o^z u\, dz$$

De manera similar

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{dT}{dz}dzdx = \frac{dV}{dx}dxdz$$

$$\iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dT}{dz}dzdx = \iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dV}{dx}dxdz$$

$$\int_o^x (T-t)\ dx = \int_o^z (V-v)\ dz$$

$$\int_o^x T\ dx - \int_o^x t\, dx = \int_o^z V\, dz - \int_o^z v\, dz$$

Donde S es la función S evaluada en z, s es la función S evaluada en o, U es la función U evaluada en x, u es la función U evaluada en o, T es la función T evaluada en z, t es la función T evaluada en o, V es la función V evaluada en x y v es la función V evaluada en o. $S, s, T\ y\ t$ son funciones de la variable x. $U, u, V\ y\ v$ son funciones de la variable z.

Por último, a partir de la ecuación (α), obtenemos la ecuación del Pie de Página. Siguiendo los pasos que acabamos de utilizar para obtener las ecuaciones en (4) tenemos lo siguiente.

$$\frac{dS}{dz} + \sqrt{-1}\frac{dT}{dz} = \frac{dU}{dx} + \sqrt{-1}\frac{dV}{dx}$$

$$\iint_{[o,x]\times[o,z]} \left[\frac{dS}{dz} + \sqrt{-1}\frac{dT}{dz}\right] dzdx = \iint_{[o,x]\times[o,z]} \left[\frac{dU}{dx} + \sqrt{-1}\frac{dV}{dx}\right] dxdz$$

$$\int_o^x [S + \sqrt{-1}T]_{z=o}^{z=z} dx = \int_o^z [U + \sqrt{-1}V]_{x=o}^{x=x} dz$$

$$\int_o^x [S + \sqrt{-1}T]dx - \int_o^x [s + \sqrt{-1}t]dx = \int_o^z [U + \sqrt{-1}V]dz - \int_o^z [u + \sqrt{-1}v]dz$$

Recordando que $S'' = S,\ S' = s,\ T'' = T,\ T' = t,\ U'' = U,\ U' = u, V'' = V$ y $V' = v$, tenemos lo deseado.

Con esto concluimos nuestra descripción del proceder matemático que sigue Cauchy en la descripción del método que se desprende del 'pasaje de lo real a lo imaginario' como método de justificación. Ettlinger (1923) identifica a la ecuación (α) como un punto de partida para develar el Teorema Integral de Cauchy, por lo tanto detenemos nuestro análisis en esta primera parte de la obra.

A manera de resumen, este análisis que acabamos de presentar se configuró a partir de comentar, justificar y comprender el proceder matemático de un apartado de la obra de Cauchy de 1814, los resultados de éste los sintetizamos en los siguientes puntos.

1. Previo a la introducción de cantidades complejas Cauchy se ve en la necesidad de justificar su trabajo desde el análogo en variable real. Esto se observa al inicio de la obra, empieza justificando algebraicamente la obtención de la ecuación (1) a través del concepto de diferencial exacto, luego afirma que esta ecuación es válida en el caso en que la variable pertenece al campo de los complejos, sin embargo no presenta una justificación de este hecho, ni de los subsecuentes resultados que involucran cantidades complejas.
2. Cauchy, buscando establecer un análisis directo y riguroso para el pasaje de lo real a lo imaginario configura el método que analizamos. Los comentarios de Lacroix y Legendre nos permiten identificar que, en su proceder, Cauchy se

percata de un problema que involucra el orden de integración de una función, un problema de naturaleza puramente matemática. La solución la presenta a través del concepto de Integrales Singulares, objeto que permea investigaciones posteriores de Cauchy.

Estos puntos nos permiten esbozar el proceder matemático de Cauchy presente en una sección de su obra de 1814, así como la construcción de conocimiento que se desprendió de afrontar un problema intrínseco al aparato matemático de la época. A raíz de robustecer esta primera inmersión en este apartado de la obra de Cauchy, a través de un análisis Textual y Contextual de la obra, podemos afirmamos que Cauchy fundamenta la introducción de cantidades complejas a través de generalizar un resultado en variable real, donde los resultados en el campo de los complejos son justificados a través de un trabajo por analogía que se fundamenta en la manipulación algebraica de expresiones en variable real. Particularmente develamos que para 1814 el establecimiento de ecuaciones que involucren cantidades complejas tiene por objetivo aislar dos ecuaciones en variable real, es decir, Cauchy utiliza cantidades complejas sujeto a la erradicación ulterior de $\sqrt{-1}$, y una vez que ha aislado el trabajo a un par de ecuaciones en variable real procede a la manipulación de expresiones puramente algebraicas. Finalmente, cuando aplica a diferentes funciones el método que configuró, se encuentra con un conflicto puramente matemático, propiciar una solución a éste le posibilitó desarrollar conocimiento dentro del aparato matemático de la época.

Anexo 3

El Teorema Integral de Cauchy en la obra de Cauchy 1814

En este anexo presentamos una interpretación del método expuesto en la obra de Cauchy de 1814 en donde se identifica el Teorema Integral de Cauchy. Ettlinger (1923) identifica una interpretación del teorema a partir de la ecuación del Pie de Página de la traducción que presentamos en el Anexo 1. La conjugación de mi experiencia matemática adquirida en mis estudios de licenciatura, el trabajo de Ettlinger, y los mapeos particulares que presenta Cauchy en la parte I de su obra (consultar la Tabla 1), nos permitió construir la siguiente interpretación.

Con el objetivo de una lectura más fluida de lo que presentamos a continuación recomendamos una lectura previa del Anexo 1 y/o el Anexo 2, de esta forma se busca que el lector este familiarizado con la terminología y las ecuaciones que aparecen en el texto original de Cauchy, ambos son elementos que no alteramos del texto original a nuestra interpretación en la presentación de los resultados expuestos en este anexo.

Al considerar $y = y(x,z) = M(x,z) + N(x,z)\sqrt{-1} = M + N\sqrt{-1}$, los coeficientes diferenciales de primer orden los escribimos como

$$f(y)\frac{dy}{dz} = f(M + N\sqrt{-1})\frac{d}{dz}(M + N\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1}$$

$$f(y)\frac{dy}{dx} = f(M + N\sqrt{-1})\frac{d}{dx}(M + N\sqrt{-1}) = S + T\sqrt{-1}$$

lo que permite reescribir a la ecuación

$$\int_o^x [S + \sqrt{-1}T]dx - \int_o^x [s + \sqrt{-1}t]dx = \int_o^z [U + \sqrt{-1}V]dz - \int_o^z [u + \sqrt{-1}v]dz$$

en términos de los coeficientes diferenciales, como vemos a continuación

$$\int_o^x f(y(x,z))\frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,z)} dx - \int_o^x f(y(x,o))\frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,o)} dx = \int_o^z f(y(x,z))\frac{dy}{dz}\bigg|_{(x,z)} dz - \int_o^z f(y(o,z))\frac{dy}{dx}\bigg|_{(o,z)} dz$$

Donde la z y la x en color naranja son los límites superiores de las integrales, por lo tanto, representan valores fijos de las variables x y z.

Si pensamos en $M(x,z)$ y $N(x,z)$ como mapeos del plano xz al plano MN, podemos atribuir una interpretación gráfica a la ecuación integral anterior. Recordemos que Cauchy considera que x varía de o a x, y z de o a z, entonces la región del plano xz que vamos a estar mapeando constantemente es el rectángulo $[o,x]\times[o,z]$. Cuya interpretación gráfica se encuentra en la Figura 6.

Plano xz

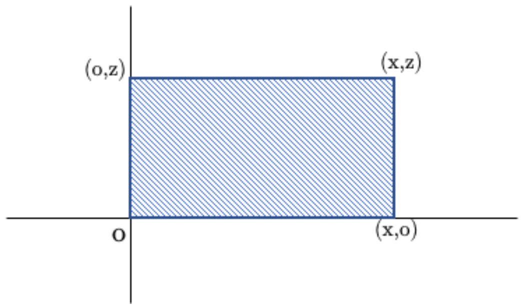

Figura 6.

Fuente: Elaboración propia.

A modo de ilustración supongamos que $y = x + z\sqrt{-1}$, es decir $M(x,z) = x$ y $N(x,z) = z$. Este mapeo envía segmentos de rectas horizontales del plano xz, en segmentos de rectas horizontales del plano MN. Por lo que la ecuación

$$\int_o^x f\big(y(x,z)\big)\frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,z)} dx - \int_o^x f\big(y(x,o)\big)\frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,o)} dx = \int_o^z f\big(y(x,z)\big)\frac{dy}{dz}\bigg|_{(x,z)} dz - \int_o^z f\big(y(o,z)\big)\frac{dy}{dx}\bigg|_{(o,z)} dz$$

podemos reescribirla como

$$\int_o^x f(x+z\sqrt{-1})\ 1\ dx - \int_o^x f(x+o\sqrt{-1})\ 1\ dx = \int_o^z f(x+z\sqrt{-1})\sqrt{-1}dz - \int_o^z f(o+z\sqrt{-1})\sqrt{-1}\,dz$$

simplificando y reescribiendo tenemos

$$\int_o^x f(x)\ dx + \sqrt{-1}\int_o^z f(x+z\sqrt{-1})dz - \int_o^x f(x+z\sqrt{-1})\ dx - \sqrt{-1}\int_o^z f(z\sqrt{-1})\,dz = 0$$

cuya interpretación gráfica se encuentra en la Figura 7.

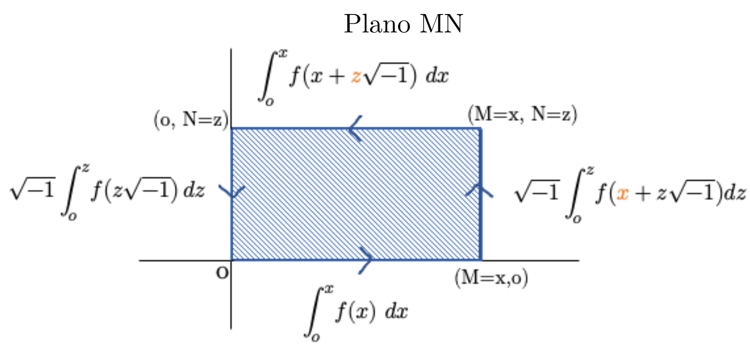

Figura 7.

Fuente: Elaboración propia.

En notación compacta podemos escribir

$$\oint_{[o,x]\times[o,z]} f(x+z\sqrt{-1})d(x+z\sqrt{-1}) = 0$$

esta igualdad nos permite identificar la tesis del Teorema Integral de Cauchy alrededor del rectángulo $[o,x]\times[o,z]$ en el plano MN.

Este primer mapeo que presentamos nos permite identificar nuestro objeto matemático, a su vez, es el primer mapeo propuesto por Cauchy para ejemplificar la diversidad de resultados que obtiene con el método de su obra de 1814. Lo que procedemos a presentar son las interpretaciones del Teorema Integral de Cauchy que devienen de los mapeos particulares que utiliza para obtener los resultados presentes en su escrito.

Como segunda función consideremos $y = ax + xz\sqrt{-1}$, donde a es una constante real. $M(x,z) = ax$ y $N(x,z) = xz$. A través de estos mapeos, la región rectangular $[o,x]\times[o,z]$ del plano xz es mapeada a la región de la Figura 8.

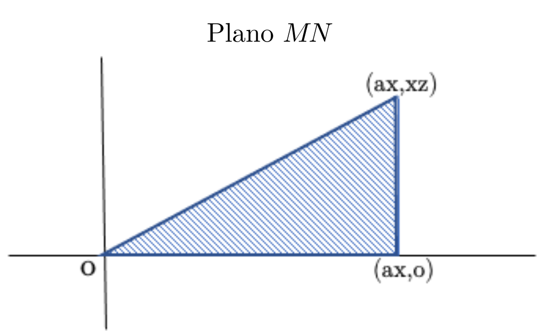

Figura 8.

Fuente: Elaboración propia.

Esto se debe a que $y = ax + xz\sqrt{-1}$ envía segmentos de recta horizontales del plano xz en segmentos de recta de la forma $N = \frac{1}{2}M$ en el plano MN. La ecuación

$$\int_o^x f(y(x,z)) \frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,z)} dx - \int_o^x f(y(x,o)) \frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,o)} dx = \int_o^z f(y(x,z)) \frac{dy}{dz}\bigg|_{(x,z)} dz - \int_o^z f(y(o,z)) \frac{dy}{dx}\bigg|_{(o,z)} dz$$

podemos reescribirla como

$$\int_o^x f(ax + xz\sqrt{-1})\big(a + z\sqrt{(-1)}\big)dx - \int_o^x f(ax + o\sqrt{-1})a\,dx$$
$$= \int_o^z f(ax + xz\sqrt{-1})x\,\sqrt{-1}dz - \int_o^z f(o + oz\sqrt{-1})o\,\sqrt{-1}dz$$

simplificando y reescribiendo tenemos

$$a\int_o^x f(ax)\,dx + x\sqrt{-1}\int_o^z f(ax + xz\sqrt{-1})\,dz \; - (a + z\sqrt{-1})\int_o^x f(ax + xz\sqrt{-1})dx = 0$$

Una interpretación gráfica de esta ecuación se muestra en la Figura 9.

Plano MN

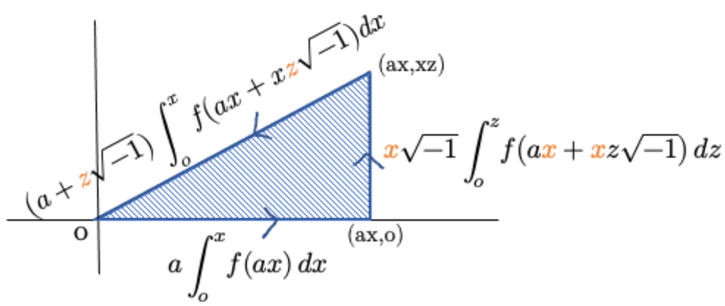

Figura 9.

Fuente: Elaboración propia.

Como tercera función consideremos $y = xcos(z) + xsen(z)\sqrt{-1}$, que envía la región rectangular del plano xz a la región del plano MN representada por la Figura 10.

Plano MN

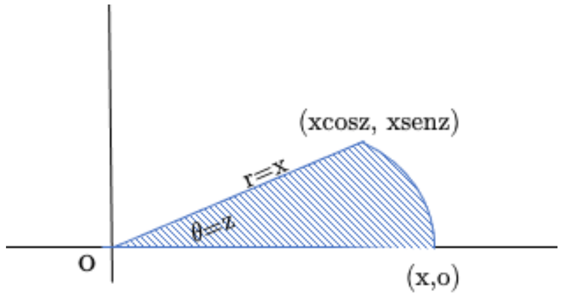

Figura 10.

Fuente: Elaboración propia.

$y = xcos(z) + xsen(z)\sqrt{-1}$ envía segmentos verticales de recta, $x = k$, en circunferencias de la forma $M^2 + N^2 = k^2$.

En este caso, la ecuación

$$\int_o^x f\big(y(x,z)\big)\frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,z)} dx - \int_o^x f\big(y(x,o)\big)\frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,o)} dx = \int_o^z f\big(y(x,z)\big)\frac{dy}{dz}\bigg|_{(x,z)} dz - \int_o^z f\big(y(o,z)\big)\frac{dy}{dx}\bigg|_{(o,z)} dz$$

podemos reescribirla como

$$\begin{aligned}\int_o^x f(xcosz + x\sqrt{-1}senz)(cosz + \sqrt{-1}senz)dx - \int_o^x f(xcos\ o + x\sqrt{-1}sen\ o)(cos\ o + \sqrt{-1}sen\ o)dx \\ = \int_o^z f(xcosz + x\sqrt{-1}senz)x\sqrt{-1}\,(cosz + \sqrt{-1}senz)dz \\ - \int_o^z f\left(ocos(z) + o\sqrt{-1}sen(z)\right)o\sqrt{-1}\,(cosz + \sqrt{-1}senz)dz\end{aligned}$$

Y al simplificar tenemos

$$\begin{aligned}\int_o^x f(x)dx + x\sqrt{-1}\int_o^z f(xcosz + x\sqrt{-1}senz)\,(cosz + \sqrt{-1}senz)dz \\ - \int_o^x f(xcosz + x\sqrt{-1}senz)(cosz + \sqrt{-1}senz)dx = 0\end{aligned}$$

Una interpretación gráfica de esta igualdad la encontramos en la Figura 11.

Plano MN

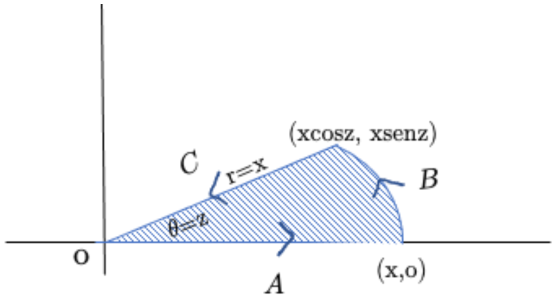

Figura 11.

Fuente: Elaboración propia.

Donde

$$A = \int_o^x f(x)dx,$$

$$B = \sqrt{-1}\int_o^z f(xcosz + x\sqrt{-1}senz)\,(cosz + \sqrt{-1}senz)dz,$$

$$C = \int_o^x f(xcosz + x\sqrt{-1}senz)(cosz + \sqrt{-1}senz)dx.$$

Finalmente, la función $y = ax^2 + xz\sqrt{-1}$, donde a es un número real, mapea la región rectangular en la región de la Figura 12.

Plano MN

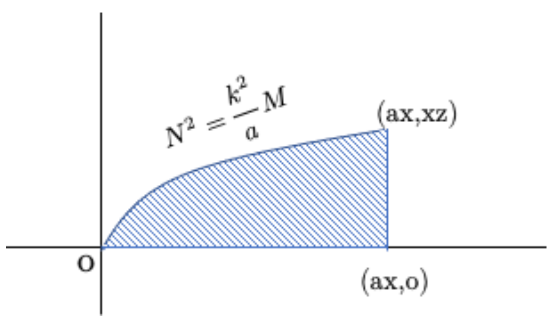

Figura 12.

Fuente: Elaboración propia.

debido a que $y = ax^2 + xz\sqrt{-1}$ envía segmentos horizontales de recta, $z = k$, en segmentos de parábolas de la forma $N^2 = \frac{k^2}{a}M$.

La ecuación

$$\int_o^x f(y(x,z))\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,z)}dx - \int_o^x f(y(x,o))\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,o)}dx = \int_o^z f(y(x,z))\frac{dy}{dz}\Big|_{(x,z)}dz - \int_o^z f(y(o,z))\frac{dy}{dx}\Big|_{(o,z)}dz$$

adquiere la siguiente expresión

$$\int_o^x f(ax^2 + xz\sqrt{-1})(2ax + z\sqrt{-1})dx - \int_o^x f(ax^2 + ox\sqrt{-1})(2ax + o\sqrt{-1})dx$$
$$= \int_o^z f(ax^2 + xz\sqrt{-1})x\sqrt{-1}dz - \int_o^z f(ao^2 + oz\sqrt{-1})o\sqrt{-1}\,dz$$

la cual podemos simplificar y reescribir como

$$\int_o^x f(ax^2)(2ax)dx + x\sqrt{-1}\int_o^z f(ax^2 + xz\sqrt{-1})dz - \int_o^x f(ax^2 + xz\sqrt{-1})(2ax + z\sqrt{-1})dx = 0$$

Cuya interpretación gráfica se encuentra en la figura 13.

Plano MN

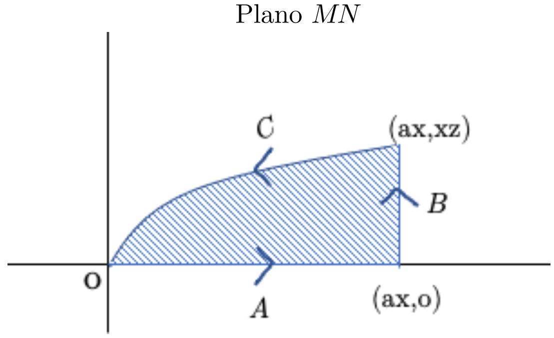

Figura 13.

Fuente: Elaboración propia.

Donde

$$A = \int_o^x f(ax^2)(2ax)dx,$$

$$B = x\sqrt{-1}\int_o^z f(ax^2 + xz\sqrt{-1})dz,$$

$$C = \int_o^x f(ax^2 + xz\sqrt{-1})(2ax + z\sqrt{-1})dx.$$

En los ejemplos anteriores, al interpretar geométricamente la ecuación

$$\int_o^x f\big(y(x,z)\big)\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,z)} dx - \int_o^x f\big(y(x,o)\big)\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,o)} dx = \int_o^z f\big(y(x,z)\big)\frac{dy}{dz}\Big|_{(x,z)} dz - \int_o^z f\big(y(o,z)\big)\frac{dy}{dx}\Big|_{(o,z)} dz$$

para mapeos particulares, podemos vislumbrar el Teorema Integral de Cauchy.

Por último, observamos que solamente el mapeo $y = x + z\sqrt{-1}$ permite verificar directamente las hipótesis, típicamente presentes en los textos escolares, del Teorema Integral de Cauchy. Bajo el supuesto $f(y) = f\big(M + N\sqrt{-1}\big) = f\big(x + z\sqrt{-1}\big) = P' + P''\sqrt{-1}$, podemos concluir que

$$U = P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz} = P' \cdot 0 - P'' \cdot 1 = -P''$$

$$V = P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz} = P' \cdot 1 + P'' \cdot 0 = P''$$

$$S = P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx} = P' \cdot 1 - P'' \cdot 0 = P'$$

$$T = P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx} = P' \cdot 0 + P'' \cdot 1 = P''$$

Por lo que las ecuaciones que contienen el pasaje de lo real a lo imaginario son

$$-\frac{dP''}{dx} = \frac{dP'}{dz} \quad \text{y} \quad \frac{dP'}{dx} = \frac{dP''}{dz}$$

las cuales identificamos como las ecuaciones de Cauchy-Riemann de la función f. Si suponemos que estas ecuaciones son continuas en la región rectangular del plano MN, concluimos que f es analítica en todos los puntos de esta región. Es decir, f es analítica en la periferia del rectángulo, una curva cerrada simple, y en su interior.

La interpretación que acabamos de mostrar descansa en la vinculación de tres elementos: los mapeos particulares que plantea Cauchy en la primera parte de su obra de 1814, lo expuesto por Ettlinger en 1923, y la experiencia matemática que adquirí en mis estudios de licenciatura, la cual sigue en desarrollo. Cualquier error matemático cometido yace en la mirada que conjugamos con estos tres elementos.