Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

# “Razonamiento y dificultades de los estudiantes sobre un problema no rutinario del Teorema Fundamental del Cálculo”

Tesis que presenta:

**Eduardo Bernabé López**

Para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de

**Matemática Educativa**

Directores de la tesis:

**Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez**

**Dr. Mario Aguilar Sánchez**

Ciudad de México Mayo, 2021

Agradecimientos

Agradezco a el CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de esta tesis.

Agradezco al CINVESTAV que me brindó todo el apoyo durante mi estancia.

Agradezco a mis asesores de tesis Dr. Ernesto Sánchez Sánchez y Dr. Mario Aguilar Sánchez por sus conocimientos que me permitieron llevar a cabo esta investigación.

Agradezco a los miembros del jurado Dra. Guadalupe Carrasco Licea y Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo por las sugerencias que contribuyeron al trabajo final.

Agradezco a mi familia y familiares que me acompañaron y me dieron ánimos en todo el proceso de trabajo de tesis.

# Índice

# Resumen

El presente trabajo de investigación se propone explorar la manera en que los estudiantes resuelven un problema no rutinario que implica el uso del primer Teorema Fundamental del Cálculo. Como resultado se definen e ilustran niveles de razonamiento de los estudiantes obtenidos a partir del análisis de las soluciones que proponen al problema. También se presentan las dificultades que los estudiantes tuvieron al resolver dicho problema. Se identifica en los resultados de los estudiantes el uso de modelos intuitivos sobre la derivada y la integral. Se considera como modelo intuitivo a una representación pictórica que les permite a los estudiantes propiciar su razonamiento acerca de algunos conceptos y sus relaciones. Los participantes son estudiantes universitarios de tercer semestre. El instrumento aplicado es un cuestionario con cuatro preguntas relativo al uso del TFC. Este trabajo es un estudio de caso en el que se usa los primeros pasos de la teoría fundamentada, esto implica la recopilación y el análisis exhaustiva de los datos. El principal hallazgo es que el modelo intuitivo de área bajo la curva no favorece el razonamiento de los estudiantes acerca del teorema fundamental del cálculo y les inhibe la utilización de un modelo de acumulación para la integral.

# Abstract

This research work aims to explore the way in which students solve a non-routine problem that involves the use of the first Fundamental Theorem of Calculus. As a result, levels of reasoning of the students obtained from the analysis of the solutions they propose to the problem are defined and illustrated. The difficulties that the students had in solving this problem are also presented. The use of intuitive models on the derivative and the integral is identified in the results of the students. An intuitive model is considered to be a pictorial representation that allows students to promote their reasoning about some concepts and their relationships. The participants are third semester college students. The instrument applied is a questionnaire with four questions related to the use of the FTC. This work is a case study in which the first steps of grounded theory are used, this involves the collection and exhaustive analysis of the data. The main finding is that the intuitive model of area under the curve does not favor students' reasoning about the fundamental theorem of calculus and inhibits them from using an accumulation model for the integral.

# Capítulo I. Planteamiento del Problema y Antecedentes

## Problema y preguntas de investigación

El primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es un resultado importante que relaciona la derivada con la integral (Spivak, 1992). Estos conceptos tienen sus interpretaciones como pendiente de recta tangente o razón de cambio y área bajo la curva, respectivamente (Apóstol, 1990). Sin embargo, en libros de texto se presenta la relación de los conceptos como antiderivadas o como funciones opuestas (Apóstol, 1990; Spivak, 1992; Zill, 2011). Algunos autores consideran que estos enfoques son insuficientes para la comprensión del teorema fundamental "Las dificultades provienen de conceptos empobrecidos de la tasa de cambio" (Carlson, 2003, p. 165). En el ámbito didáctico, se propone ver al TFC como un resultado que relaciona los conceptos de razón de cambio y acumulación (Carlson, 2003). Como ambos conceptos están formados a su vez por otros conceptos importantes (entre ellos destacan los conceptos de función y límite), se tiene que el TFC implica muchos conceptos y relaciones, que lo hace de especial interés en la investigación matemática (Thompson, 2013, 2008, 1994). Por ejemplo, el concepto de acumulación es fundamental para la idea de integración y es el núcleo de la comprensión de muchas ideas y aplicaciones en el cálculo (Thompson, 2008). Dilucidar pormenores sobre el entendimiento del TFC podría ofrecer al estudiante la oportunidad de comprender otros temas de análisis matemático, (Thompson, 2013).

Infortunadamente, se ha constatado que los alumnos tienen dificultades para entender y aplicar el TFC (Thompson, 2008). Estas pueden originarse de la complicación de captar de manera intuitiva una relación entre la derivada y la integral. En efecto, los modelos intuitivos que apoyan estos conceptos son geométricos; la derivada se asocia a la noción de tangente, mientras que la integral a la noción de área bajo la curva de la gráfica de una función. Pero una tangente no tiene ninguna relación evidente con el área bajo una curva. Dado que en la enseñanza se suelen introducir tales modelos para la derivada y la integral, puede ser útil explorar y documentar cómo y dónde dichos modelos dejan de guiar al estudiante y más bien lo desorientan. En este trabajo, mediante un problema sobre el TFC se pretende mostrar las dificultades de los estudiantes para resolverlo, cuando no se han desprendido de los modelos geométricos de la derivada e integral. El objetivo primordial es ofrecer evidencias de que este es el caso, el modelo intuitivo de la derivada y el modelo intuitivo de la integral no funcionan como instrumentos que propicien la comprensión del TFC e incluso la obstaculizan. La pregunta de investigación es: ¿Qué dificultades y niveles de razonamiento de los estudiantes se revelan en su respuestas y argumentaciones a un problema no rutinario que implica el TFC?

***Objetivos.*** El objetivo de este estudio es:

- Documentar dificultades y niveles de razonamiento de los estudiantes para resolver un problema no rutinario que implica al TFC y determinar la relación de tales dificultades y razonamientos con el modelo intuitivo de área bajo la curva de la integral.

***Metas.*** Con dicho objetivo en mente nos propusimos las siguientes metas:

- Seleccionar un problema matemático sobre el concepto del TFC; cuya solución del problema implique interpretar su derivada e integral en términos de la razón de cambio y acumulación.
- Aplicar el problema a estudiantes que han acreditado su primer curso de cálculo.
- Identificar en las soluciones al problema por parte de los estudiantes el uso de modelos intuitivos de la derivada y de la integral.
- Determinar los niveles de razonamiento de los estudiantes inferidos de sus respuestas.
- Analizar y caracterizar las concepciones de los estudiantes sobre el primer teorema fundamental del cálculo que se muestran en sus soluciones.
- Mostrar la relación de estas con el uso de los modelos intuitivos de la derivada y de la integral.

## Antecedentes

En esta parte se resume los libros de texto y los artículos de investigación que se revisaron para este trabajo de tesis:

**Natanson, Isidor** (1984) indica en su prefacio lo siguiente sobre el cálculo integral: "en su forma moderna, es una materia bastante compleja, ya que llegó a conjugar muchas ideas muy diferentes" (p. 5). Sin embargo, el autor dice que hubo un concepto fundamental que dio origen a esta rama de las matemáticas. "Este concepto es el de límite de la suma de un número infinitamente creciente de cantidades infinitamente decrecientes" (p. 5). Por tanto, para Natanson el concepto de acumulación de cantidades decrecientes es significativo para la comprensión y resolución de problemas del cálculo integral. De hecho, el autor dice "es muy útil dominar este concepto ya que permite resolver gran número de importantes problemas de geometría y de física" (p. 5). En conclusión, la concepción sobre la integral para Natanson es límite de sumas infinitas de cantidades decrecientes en lugar de área bajo la curva.

**Apóstol, Tom** (1990) menciona en su prólogo lo siguiente respecto al temario de su libro: "La disposición de este libro ha sido sugerida por el desarrollo histórico y filosófico del Cálculo y la Geometría Analítica" (p. VII). Es por ello por lo que en su libro se estudia la integración antes que la diferenciación. En palabras del autor "es el mejor camino para hacer presente la verdadera conexión entre derivada y la integral" (p. VII). Además, cuando Apóstol explica el teorema fundamental del cálculo, él lo hace en los siguientes términos "En esta Sección se estudiará la importante conexión existente entre integración y diferenciación [...]. El tipo de relación entre estos dos procesos es en cierta forma semejante al que hay entre <elevar al cuadrado> y <extraer la raíz cuadrada [positiva]>" (p. 247). En conclusión, la concepción sobre la derivada y la integral para Apóstol es de operaciones inversas.

**Spivak, Michael** (1992) presenta el capítulo de derivadas (p. 197) antes de integrales (p. 345). Lo que indica que el autor no consideró un orden de desarrollo histórico como en el libro de Apóstol (1990). Mientras que el teorema fundamental del cálculo (p. 399) es presentado en tres partes: primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal (p. 399); Corolario (p. 403); y segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal (p. 405). El autor explica en el prefacio "El orden de los [...] capítulos es, intencionadamente, inflexible del todo, ya que el propósito de este libro es presentar el Cálculo como la evolución de una idea y no como una colección de materias" (p. VII). En conclusión, la concepción sobre el TFC para Spivak es que relaciona la derivada con la integral.

En los tres párrafos anteriores se muestran algunos puntos de vista de matemáticos, que a su vez son autores de libros de texto, sobre la integral, la derivada y el TFC; en lo que sigue veremos comentarios sobre los mismos temas hechos por educadores matemáticos.

**Carlson, Persson & Smith** (2003) comentan lo siguiente sobre el TFC "Las dificultades de los estudiantes con el teorema fundamental del cálculo se han atribuido principalmente a su visión empobrecida de la función y la tasa de cambio" (p. 165). Para los autores una característica de esa dificultad del razonamiento con el TFC es que "implica acciones mentales de coordinación de la acumulación de la tasa de cambio con la acumulación de la variable independiente" (p. 165). Luego, para coordinar esas acumulaciones, los autores proponen lo que llaman razonamiento covariable. "El razonamiento covariacional se refiere a la coordinación de una imagen de dos cantidades variables, al tiempo que se ocupa de cómo cambian entre sí" (p. 165). Para desarrollar ese razonamiento covariable los autores propusieron un curso donde se aplicaba una serie de problemas sobre el TFC relativos a funciones de acumulación. El curso presenta una perspectiva teórica con el siguiente marco de cuatro partes que describen las habilidades del razonamiento covariacional: "Parte A: Entendimientos fundacionales y habilidades de razonamiento"; "Parte B: Razonamiento covariable con cantidades acumuladas"; "Parte C: Aspectos de notación de la acumulación"; "Parte D: Las declaraciones y relaciones del TFC", (p. 166). Entre las conclusiones que los autores dicen se tiene que "los estudiantes […] completaron el curso con una sólida comprensión de los aspectos de notación de la acumulación. También ellos demostraron la capacidad de coordinar la acumulación de la variable de entrada de una función con la acumulación de la tasa de cambio instantánea" (p. 172). En conclusión, la concepción sobre el TFC para Carlson, et al., es de relacionar la integral con razón de cambio a partir de funciones de acumulación (covariación).

**Thompson, Patrick** (2008) investiga el concepto de acumulación en cálculo. El concepto de acumulación lo describe de manera intuitiva "acumulas una cantidad al obtener más" (p. 1). Paralelamente el autor se interesa por la notación de las funciones $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ que "involucra tantas partes móviles que es comprensible que los estudiantes tengan dificultades para entenderla y emplearla" (p. 1). De aquí, Thompson propone en su investigación una agenda de trabajo "Explicar la compleja estructura de las funciones de acumulación; Ilustrar las dificultades de los estudiantes para comprender matemáticamente la acumulación; Señalar los enfoques para ayudar a los estudiantes a conceptualizar las funciones de acumulación; Colocar la comprensión de los estudiantes en las funciones de acumulación" (p. 2). Entre las conclusiones se tiene "las complejidades de comprender la acumulación a menudo se reducen al cálculo de productos y límites sin entender el significado de ninguno de ellos" (p. 10). Además, sin un enfoque adicional en la construcción, representación y comprensión de las sumas de Riemann, "hay pocas razones para creer que los estudiantes entiendan que las funciones de acumulación desempeñan un papel central en el TFC" (p. 11).

**Thompson, Patrick** (2013) reporta un curso que aborda el cálculo con el objetivo de "que los estudiantes construyan una relación reflexiva entre los conceptos de acumulación y tasa de cambio" (p. 125). Según el autor la relación anterior es imposible sin tecnología (p. 125, 139). En este sentido Thompson critica la enseñanza de cálculo *tradicional* al decir: "lo que ha ocurrido es en gran medida una retención de ideas de cálculo tradicionales ahora respaldadas por gráficos dinámicos para ilustración y manipulación simbólica para cálculo" (p. 124). Por otra parte, la concepción que el autor tiene respecto al TFC es "Se puede pensar que el cálculo aborda dos situaciones fundamentales: (a) sabes qué tan rápido está cambiando una cantidad y quieres saber cuánto hay, y (b) sabes qué cantidad hay y quieres saber qué tan rápido está cambiando" (p. 125). Las dos situaciones se corresponden con las dos partes del curso. El curso es una secuencia de enseñanza relacionada con la covariación "La primera característica es que todas las partes [del curso] están impregnadas con las ideas de variación, covarianza y función como una relación invariable entre cantidades covariables" (p. 127). Lo que implica que los estudiantes "deben capturar procesos de variación, cambio y acumulación simbólicamente" (p. 127). Finalmente, entre los hallazgos se tiene "El objetivo era enseñar esquemas de significado que dieran coherencia al pensamiento de los estudiantes sobre la acumulación y la tasa de cambio. […] la tecnología hizo posible el desarrollo conceptual" (p. 140).

**Sealey, Vicki** (2014) indica que los estudiantes pueden evaluar integrales definidas aplicando el teorema fundamental. Sin embargo, "luchan por resolver problemas verbales que involucran integrales definidas" (p. 230). Entonces su objetivo en la investigación es examinar los obstáculos “que se encuentran los estudiantes y las formas en que superan esos obstáculos al resolver problemas sobre integrales” (p. 230). Con el fin de obtener una idea de cómo los estudiantes podrían desarrollar una comprensión de la estructura de la integral de Riemann, la autora propone un marco conceptual basado en la descomposición matemática de la integral de Riemann “nivel producto; nivel suma; nivel límite; nivel función” (p. 232). Entre los resultados de su investigación se tiene que “los mayores obstáculos encontrados por los estudiantes en este estudio se relacionaron con la capa de productos del marco integral de Riemann” (p. 242). Este estudio sugiere que, al enseñar el concepto de la integral, “debemos estar conscientes de estas dificultades y darles a nuestros estudiantes la oportunidad de participar en actividades que requieran que ellos le den sentido a estos términos para que puedan usarlos de manera eficaz en la integral” (p. 243).

**Swidan, Osama** (2019) sugiere “que se necesita un cambio conceptual” (p. 2), para proporcionar a los estudiantes la oportunidad de que logren una comprensión del TFC. El cambio que propone el autor es pasar “de reconocer una integral como un área obtenida por un límite de rectángulos aproximados a [el cambio] ver el área como un vehículo para abordar una idea más general de acumulación de cualquier cantidad para la cual se conoce la tasa de acumulación” (p. 2). El autor, al igual que Thompson (1994), concibe el TFC como “un medio para expresar la relación entre la acumulación de una cantidad y la tasa de cambio de la acumulación” (p. 4). Otra característica en el trabajo de Swidan es el uso de herramientas digitales; en palabras del autor “pueden permitir a los estudiantes formular una comprensión profunda de los conceptos en el cálculo” (p. 5). Entre los hallazgos que este autor menciona se tiene que “el TFC involucraba muchos parámetros dinámicos que los estudiantes deben reconocer para comprender el teorema” (p. 18). Mas, sin embargo, el autor opina que la herramienta digital permitió a los estudiantes conocer varios componentes del TFC. “Utilizando las herramientas dinámicas, los estudiantes pudieron verificar o refutar las conjeturas que plantearon. Por lo tanto, es razonable concluir que las interacciones combinadas con el artefacto ayudaron a el significado de los componentes del TFC” (p. 19).

# Capítulo II. Marco conceptual

El presente marco conceptual tiene como objetivo explicar los principales aspectos a estudiar en esta investigación como los conceptos clave y su relación entre ellos. En general, esta investigación explora el razonamiento de los estudiantes sobre un aspecto del primer teorema fundamental del cálculo relacionado con las limitaciones del modelo de integral como área bajo la curva. Para conseguir lo anterior, se ha elaborado un marco conceptual que precisa los conceptos de intuición y razonamiento, así como el teorema fundamental para funciones continuas. Estos conceptos ayudan a interpretar las formas de razonamiento de los estudiantes en la resolución del problema que se les administró (NCTM, 2010; Fischbein, 2002).

A continuación, se hace la explicación del marco conceptual por medio de los siguientes apartados A) Modelos didácticos intuitivos, B) El área bajo la curva como modelo didáctico de la integral, C) Intuición en matemáticas y D) Razonamiento matemático. En la sección A se presenta la definición de *modelo intuitivo*, el concepto de integral, y el primer teorema fundamental del cálculo. En la sección B se analiza un ejemplo de modelo intuitivo, a saber, el modelo de área bajo la curva. Por otro lado, en la sección C se muestra el concepto de intuición y sus propiedades. En la sección D se especifica lo que se entiende como razonamiento y se abordan los términos *sincretismo* y *complejos* que son tipos de razonamiento.

## A) Modelos didácticos intuitivos

Un modelo didáctico es una representación icónica o pictórica, y "cada una de estas imágenes visuales es una imagen conceptualizada, controlada por significados abstractos" (Fischbein, 1977, p. 154). En general "los modelos constituyen un lenguaje, porque sus significados son más o menos convencionalmente fijos y porque poseen la capacidad de expresar una variedad infinita [en nuestro caso nos basta con un gran número] de ideas mediante el uso de un número limitado de elementos y reglas de combinación" (Fischbein, 1977, p. 154). Por otro lado, un modelo intuitivo es un modelo didáctico que es autoevidente, es decir, se perciben fácilmente sus componentes principales. De las características para los modelos intuitivos que Fischbein (1977) cita nos interesa las siguientes: “son generativos, internamente consistentes e internamente bien estructurados” (p. 155). Vale la pena aclarar las características de los modelos intuitivos que propone Fischbein.

1. **Generativo**. Significa que el modelo es productivo; en palabras de Fischbein (1977) “un modelo […] es productivo, si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes” (p. 155).
2. **Internamente consistente**. Significa que el procesamiento de los componentes del modelo no lleva a contradicciones dentro del propio modelo. Según Fischbein (1977) “el modelo debe ser relativamente autónomo con respecto al original [concepto matemático]. Un problema [matemático] se traduce en los términos del modelo correspondiente. El problema se resuelve mediante el uso del modelo solamente” (p. 159). Lo anterior se interpreta que la consistencia del modelo es la propiedad de que no haya contradicciones lógicas si se resuelve un problema matemático con el modelo.
3. **Internamente bien estructurados**. Significa que todos los elementos del modelo deberían representar la *misma estructura matemática* del concepto correspondiente. La estructura del modelo es asegurada por la estructura del original. Por ejemplo, si el concepto es el grupo simétrico, el modelo debería representar la misma estructura matemática de un grupo simétrico, en este caso, una permutación, reflexión o giro. (Fischbein, 1977, 161)

Fischbein considera que si el modelo intuitivo cumple las tres características anteriores entonces se tiene “un buen modelo heurístico” (Fischbein, 1977, 155). Sin embargo, es probable que los modelos didácticos que se proponen en este trabajo de investigación no cumplan las tres características a la vez. Por tanto, se plantea la siguiente proposición.

En el presente trabajo se considera que un modelo didáctico es intuitivo si al menos se cumple una de las características mencionadas por Fischbein, a saber, que sea generativo, internamente consistente o internamente bien estructurado.

## B) El área bajo la curva como modelo didáctico de la integral

**Definición de integral**. “Sea $f$ una función, la función $f$ es integrable en $[a, b]$ si y sólo si el supremo de las sumas inferiores es igual al ínfimo de las sumas superiores” (Apóstol, 1992, p. 91).

Los conceptos de sumas superior e inferior se pueden expresar analíticamente sin referencia alguna al plano cartesiano. No obstante, la gráfica de la función constituye un referente útil para representar de manera intuitiva a la integral, es decir, ofrece un modelo intuitivo. A continuación, se ilustra un modelo intuitivo para la integral.

**Modelo de área bajo la curva**. El concepto de integral definida de una función se suele representar como el área bajo la curva (que representa a la función) entre dos valores de la abscisa. Si $f$ es una función sobre los números reales, entonces $\int_a^b f dx$ representa el área limitada por la gráfica de $f$, y el eje $X$, y las rectas $x = a$ y $x = b$. Ver Imagen 2.1.

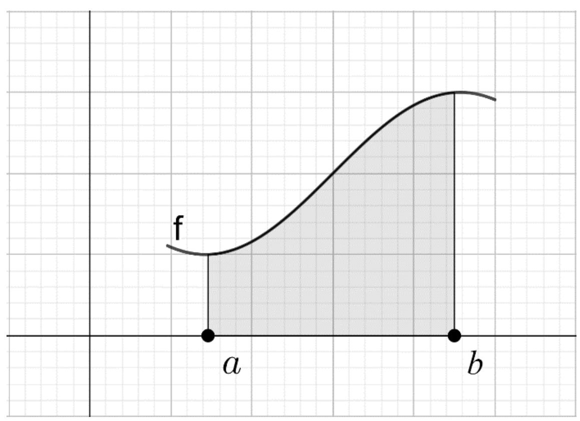



Imagen 2.1

En caso de que la función sea negativa, por convención se considera que la integral es el área entre la curva, el eje X y las verticales a y b, pero con un signo negativo. Esta convención es necesaria para la consistencia del modelo. Por extensión y abusando del lenguaje a veces se dice que es un “área negativa”, pero estrictamente no es correcta esta expresión. Ver Imagen 2.2.

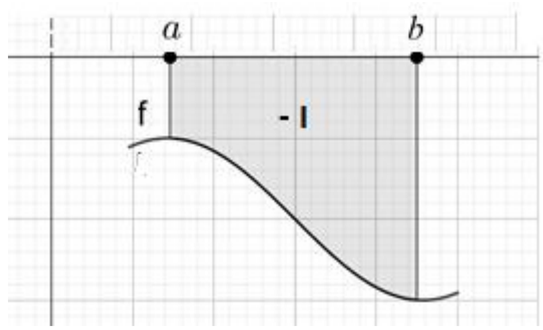



Imagen 2.2

El modelo de área bajo la curva es un modelo intuitivo según las propiedades de Fischbein (1977). Primero nótese que el modelo es generativo porque es capaz de producir nuevas situaciones, por ejemplo, se puede representar el teorema del valor medio para integrales (ver Imagen 2.3): Existe un número $c$, tal que $a \leq c \leq b$ que cumple:

$$\int_a^b f dx = f(c)\,(b-a)$$

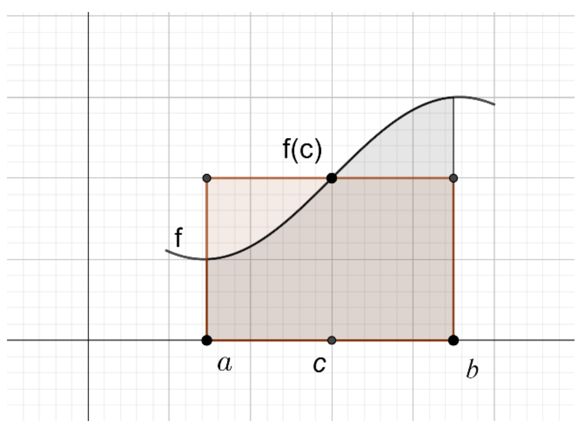



Imagen 2.3

En segundo lugar, el modelo es consistente, es decir, se pueden proponer problemas sin llegar a una contradicción, por ejemplo, se usa el modelo para resolver lo siguiente: sea $c$ un número real, entonces $\int_a^b cf dx = c\int_a^b f dx$, ver Imagen 2.4. En tercer lugar, el modelo está bien estructurado, puesto que la estructura matemática es sobre la integración (en particular representada como área), se tiene que el modelo representa áreas de figuras geométricas. Por lo tanto, como al menos se cumple una de las características propuestas por Fischbein, se concluye que el modelo es intuitivo.

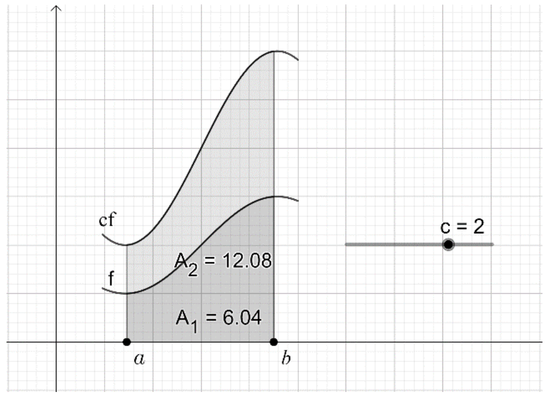



Imagen 2.4

Conviene notar que el modelo de la integral como área bajo una curva es una de las representaciones posibles del concepto de integral, pero la integral no es un área. Hay otros contextos en los que surgen integrales que no son áreas, por ejemplo, la longitud de una curva, la presión ejercida por un líquido sobre la superficie en el fondo de un recipiente, la suma de una serie de cantidades que se vuelven cada vez más pequeñas (Natanson, 1984). No obstante, la representación de la integral como un área es útil para ver de manera más concreta relaciones que sin este recurso pueden ser bastante abstractas. Por ejemplo, el primer teorema fundamental del cálculo establece una relación bastante sorprendente que puede ser interpretado con el modelo intuitivo de área bajo la curva para verlo de manera más concreta. En seguida se detalla este ejemplo.

**Primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)**. Sea $f$ una función integrable en $[a,x]$ para cada $x$ de $[a,b]$. Sea $x$ tal que $a \leq x \leq b$ y definamos una nueva función $A$ del siguiente modo:

$$A(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{si} \quad a \leq x \leq b.$$

Existe entonces la derivada $A'(x)$ en cada punto $x$ del intervalo abierto $(a,b)$ en el que $f$ es continua, y para tal $x$ tenemos $A'(x) = f(x)$. (Apóstol, 1990, p. 247)

**Interpretación geométrica**. La figura 2.5 muestra la gráfica de una función $f$ en un intervalo $[a,b]$. En la figura, $h$ es positivo y

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = A(x+h) - A(x).$$

El ejemplo es el de una función continua en todo el intervalo $[x, x+h]$. Por consiguiente, por el teorema del valor medio para integrales, tenemos

$$A(x+h) - A(x) = hf(z), \text{ donde } x \leq z \leq x+h.$$

Luego, resulta

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(z),$$

y puesto que $x \leq z \leq x+h$, encontramos que $f(z) \to f(x)$ cuando $h \to 0$ con valores positivos. Si $h \to 0$ con valores negativos, se razona en forma parecida. Por consiguiente, $A'(x)$ existe y es igual a $f(x)$.

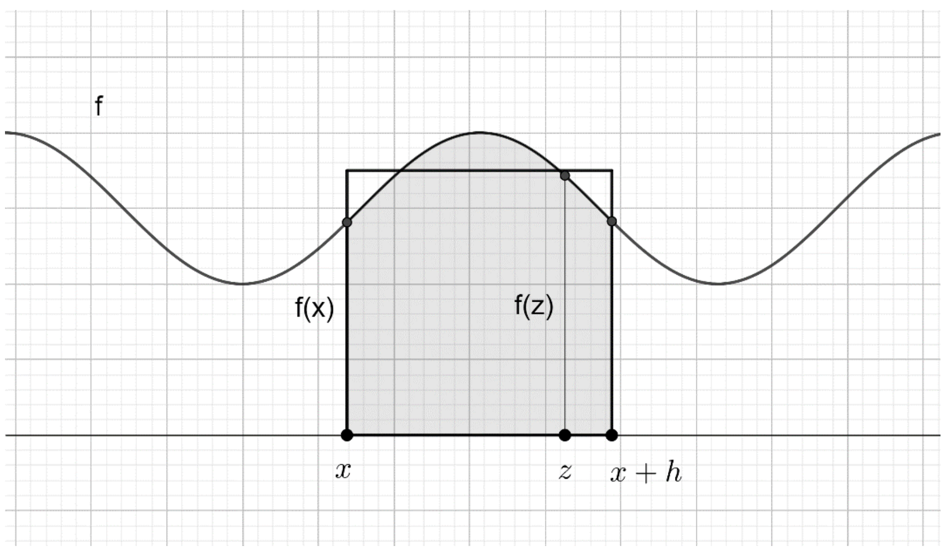



Imagen 2.5

A las funciones $A(x) = \int_c^x f(t)dt$ del teorema anterior se conocen como funciones de acumulación, nótese que la variable $x$ se encuentra en el límite superior de la integral y por tanto $A(x)$ asigna un número real en función de $x$.

## C) Intuición en matemáticas

El término intuición se utiliza para indicar una categoría de cogniciones de la gente que funcionan como conocimientos que no necesitan una justificación o interpretación explícita. Para Fischbein (1987) “el conocimiento intuitivo es conocimiento inmediato; es decir, una forma de cognición que parece presentarse a una persona como evidente por sí misma” (p. 6). Fischbein (1987) caracteriza el concepto de intuición con varias propiedades, sin embargo, las características que nos interesa son las siguientes: “auto evidencia [obviedad] y certeza intrínseca” (p. 43). Vale la pena aclarar las propiedades de la intuición que propone Fischbein.

1. **Auto evidencia [obviedad]**. Es la característica de que las cogniciones intuitivas hechas por el sujeto son verdaderas por sí mismas sin la necesidad de ninguna justificación. Fischbein (1987) identifica la siguiente *raíz* de la auto evidencia: “[…] captación de un invariante a través de diversas transformaciones de una estructura dada” (p. 45). Esto significa que en la característica obviedad se descubre de manera tácita lo invariante en las transformaciones, “uno tiene la sensación de la evidencia intrínseca de una relación que conecta el concepto con un atributo u otro concepto” (Fischbein, 2002, p. 44).
2. **Certeza intrínseca**. Es la característica de que las cogniciones intuitivas se aceptan como ciertas. Aunque algunas intuiciones no sean auto–evidentes el sujeto puede considerarlas como verdaderas gracias a experiencias sociales o culturales, por ejemplo, la existencia de dios. Fischbein (1987) menciona una relación entre intuición, certeza y obviedad “Una alta obviedad y certeza con respecto a una determinada solución determinan la robustez de las respectivas visiones intuitivas” (p. 47).

Fischbein (1987) escribe que "Una intuición es, entonces, una idea que posee las dos propiedades fundamentales de una realidad concreta, objetivamente dada; inmediatez [obviedad] y certeza [intrínseca]” (p. 21).

Hay que recordar que el teorema fundamental del cálculo relaciona el concepto de derivada con el concepto de integral. Una representación de la derivada es la pendiente de rectas tangente (Apóstol, 1992); y como se ha dicho una representación de la integral es el área bajo la curva. Entonces se tiene dos representaciones diferentes relacionados en un teorema. No obstante, las hipótesis del teorema fundamental podrían implicar una cognición intuitiva de la siguiente manera.

**Intuición del TFC**. Se considera una intuición del TFC cuando el estudiante interpreta el primer teorema fundamental como una proposición que relaciona los operadores derivación e integración como operadores inversos, sin considerar los límites de integración. Es decir, sea $f$ una función sobre los reales, se considera una intuición del estudiante si efectúa $\frac{d}{dx}\int f(t)dt = f(t)$, en vez de $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$. En términos de Fischbein esta es una intuición secundaria, pues sería resultado de la educación matemática que han recibido los estudiantes. Muchos de estos aceptan dicha proposición, pero muy probablemente sin ser capaces de dar una demostración. Es un conocimiento que han obtenido por haberlo escuchado, o visto enunciado en un libro, y fortalecido con experiencias prácticas particulares.

**D) Razonamiento matemático**

De acuerdo con NCTM (2010) "el razonamiento puede considerarse como el proceso de sacar conclusiones sobre la base de evidencia o suposiciones declaradas" (p. 2). Aparte, NCTM (2010) ofrece una descripción para situar el inicio del razonamiento: "el razonamiento a menudo comienza con exploraciones, conjeturas en una variedad de niveles, falsos comienzos y explicaciones parciales antes de llegar a un resultado" (p. 3). Se rescata la idea anterior porque se van a analizar las exploraciones y conjeturas que los estudiantes escriban en sus respuestas al cuestionario para evidenciar, o reconstruir, el razonamiento de cada uno. Fischbein (1987) considera que las intuiciones son necesarias para disparar procesos de razonamiento, pues el sujeto las toma como premisas a partir de las cuales puede derivar otras proposiciones.

Las proposiciones son necesarias para llevar a cabo razonamientos, por lo que es conveniente mencionar que una proposición se forma con conceptos. Así el razonamiento también depende de la formación de conceptos. Una teoría sobre el proceso de formación de conceptos la proporciona Vygotsky (2015). Este proceso tiene una génesis y desarrollo en las personas y antes de que alguien posea totalmente un concepto concibe cogniciones previas al concepto. Dos de esas formas preconceptuales que propone Vygotsky son sincretismo y complejo.

**Sincretismo**. De acuerdo con Vygotsky (2015) el sincretismo es una cognición de una etapa en la formación temprana de conceptos en la que se asocia a una palabra hechos y otros conceptos de diversa índole y sin una conexión real o válida. Vygotsky escribe "En la percepción, el pensamiento y la acción, el niño [el estudiante] tiende a mezclar los más diversos elementos en una imagen indiferenciada, basándose en alguna impresión casual" (p. 177). En particular, para el presente trabajo se define el sincretismo como la tendencia de mezclar diversos conceptos matemáticos y a un producto obtenido mediante esta tendencia se le califica como sincrético.

**Complejo**. Según Vygotsky (2015) un complejo es un tipo de cognición ligada a situaciones concretas, sin posibilidades de concebirse de manera independiente a tales situaciones. Vygotsky (2015) especifica lo siguiente: "En un complejo, los vínculos entre los componentes son *concretos y empíricos* [cursiva en el original], no abstractos y lógicos" (p. 179). Es decir, se dice que el alumno razona en complejos si vincula dos o más conceptos matemáticos de forma concreta o empírica.

Si las proposiciones que un estudiante utiliza en un razonamiento están formadas por nociones sincréticas la calidad del razonamiento será deficiente o incorrecto; en cambio, si las proposiciones se forman con complejos el razonamiento puede prefigurar un razonamiento válido y ser una transición a un razonamiento más formal. En las argumentaciones de los estudiantes al problema que se les pide que resuelvan convendría distinguir aquellos razonamientos basados en sincretismos y aquellos basados en complejos. En el análisis de sus respuestas se tratará de detectar cómo ocurren específicamente estos tipos de razonamiento.

**Observación general**. Se propone un *continuo* en el proceso de razonamiento del alumno. En un extremo el razonamiento empieza con exploraciones, conjeturas, falsos comienzos y explicaciones parciales (NCTM, 2010). En otro extremo el razonamiento avanza en sacar conclusiones sobre la base de evidencia o suposiciones declaradas (NCTM, 2010). Sin embargo, estas conclusiones muchas veces están basadas en nociones sincréticas y otras en complejos (Vygotsky, 2015). Se dice que una conclusión es un sincretismo si se mezcla dos conceptos matemáticos. Se dice que una conclusión es un complejo si se relacionan dos conceptos matemáticos mediante hechos particulares (concretos). Esta etapa de formar complejos se puede asociar a modelos intuitivos como lo advierte Fischbein (1977) “Para comprender o resolver problemas, es necesario que los esquemas conceptuales y la representación intuitiva funcionen de la mano” (p. 154). Acorde con lo anterior, por lo tanto, lo que se va a hacer en los siguientes capítulos es justificar el uso de un modelo intuitivo en nuestro instrumento de trabajo.

# Capítulo III. Método

En este capítulo se describe el método usado en la presente investigación, lo que incluye detallar características sobre los participantes, el cuestionario, entre otros. En general, la investigación explora el razonamiento de los estudiantes sobre el primer teorema fundamental del cálculo. Para conseguir lo anterior, se ha elaborado un cuestionario de preguntas *abiertas* para recolectar datos que informen sobre su razonamiento. Los datos que se obtienen son párrafos de texto donde los estudiantes muestra la resolución del problema y tratan de expresar su comprensión sobre el TFC. Por consiguiente, este estudio de investigación se ubica en el método cualitativo (Miles y Huberman, 1994) y de manera particular se adopta un enfoque de estudio de caso (Flyvbjerg, 2011). Por otra parte, el análisis de datos está motivado en los procedimientos de codificación y categorización que se usan en estudios de teoría fundamentada (Teppo, 2015). Sin embargo, el análisis de datos sólo se limitó a hacer descripciones sobre la manera en que los estudiantes resuelven los problemas y a formular algunas interpretaciones de los razonamientos de los estudiantes. A continuación, se procede a puntualizar los aspectos particulares del método por secciones, a saber: A) los sujetos encuestados, B) el instrumento aplicado, C) discusión del cuestionario, D) procedimiento ejecutado, E) método de análisis, F) estudio de caso, G) análisis de datos.

## A) Los sujetos encuestados

Se trabajó con 24 estudiantes de una universidad privada ubicada al poniente de la ciudad de México. Los estudiantes estaban matriculados como ingenieros y cursaban el tercer semestre de su carrera. Además, sus edades oscilaban entre los 18 y 23 años. En ese momento, ellos cursaban la asignatura de ecuaciones diferenciales y, según el plan de estudios de dicha universidad, ya habían cursado las materias de cálculo diferencial y de cálculo integral.

## B) El instrumento aplicado

El instrumento es un cuestionario que consiste en un problema con cuatro preguntas abiertas (ver Anexo 1). Toda la situación del problema se reprodujo de uno de los problemas que la autora Carlson (2003) presenta en su instrumento de investigación. Se eligió ese problema porque las hipótesis relacionan una función de acumulación con la razón de cambio de dicha acumulación. Además, en palabras de Carlson (2003) el teorema fundamental "expresa la relación entre la acumulación de una cantidad y la tasa de cambio de la acumulación" (p. 166). Por lo tanto, el problema es referente al teorema fundamental del cálculo y se tiene la posibilidad de analizar el razonamiento de los estudiantes sobre dicho teorema cuando se resuelva el cuestionario.

**C) Discusión del cuestionario**

La situación del problema es la siguiente:

*Considere un círculo que se expande en tamaño de* $r = 0$ *a* $r = x$ *(ver Imagen 3.1).*

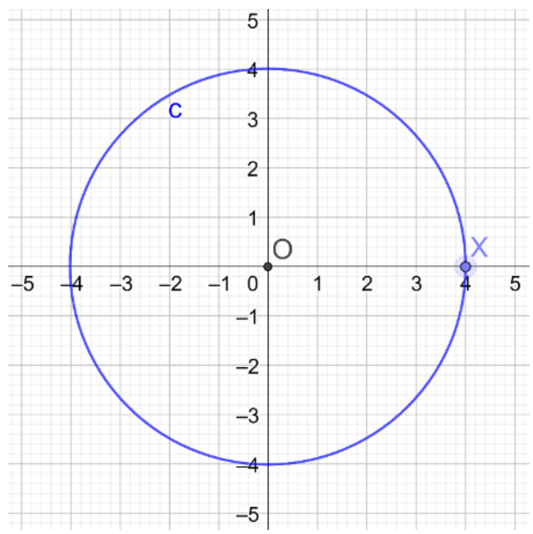



Imagen 3.1

*Sea* $A(x) = \int_0^x 2\pi r \, dr$ *una función en* $x$.

Respecto a los incisos, son cuatro preguntas referentes a la función de acumulación $A(x)$. En seguida se discute cada problema presentando una descripción con una solución analítica.

1. *¿Qué representa* $A(x) = \int_0^x 2\pi r \, dr$*? ¿Por qué?*

Esta pregunta es sobre una función de acumulación de área, un paso importante en la solución es percatarse de que el integrando es una función lineal. Entonces $A(x)$ representa el área del círculo de radio $x$ ya que al calcular la integral $A(x) = \pi x^2$ se obtiene la fórmula del área de dicho círculo: $A(x) = \pi x^2$.

2. *Construya un círculo e ilustre lo que representa* $A(x) = \int_2^4 2\pi r\, dr$

La pregunta 2 es sobre la misma función de acumulación de área de la pregunta 1, pero ambos límites de integración son números constantes. Si $A(x)$ representa el área del círculo de radio $x$, entonces por propiedades de la integral $\int_2^4 2\pi r dr = A(4) - A(2)$. Por lo tanto, $\int_2^4 2\pi r dr$ representa el área del *anillo* formado por las circunferencias concéntricas de radio 2 y 4. Luego se tiene el siguiente diagrama donde el área está representada por la región sombreada, ver Imagen 3.2.

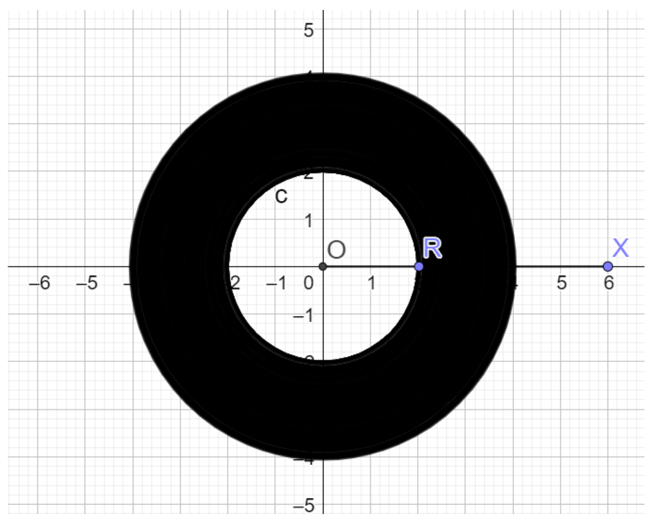



Imagen 3.2

Es importante aclarar que en este momento el autor de la tesis notó un error de notación que conviene tener en cuenta. Mientras que el lado izquierdo se denota con la expresión $A(x)$ que depende de la variable $x$, la parte derecha es una constante. En su lugar, hubiera convenido formular la pregunta así: construya un círculo e ilustre lo que representa $c = \int_2^4 2\pi r dr$. A pesar de esta falta se notó que por parte de los estudiantes el problema se pudo entender porque hubo respuestas correctas. Al final de cuentas el error se corregirá posteriormente.

*3. Construya una gráfica para $A(x)$ y calcule el área debajo de la gráfica de $A(x)$ de $r = 2$ a $r = 4$*

Este problema es sobre la gráfica de la función de acumulación $A(x)$, además se pide la integral de dicha función de $r = 2$ a $r = 4$. Un aspecto importante para solucionar el problema es diferenciar los conceptos entre la función $A(x)$ y la integral de $A(x)$. Entonces para resolver el problema se puede hacer una tabulación (Tabla 3.3); graficar los puntos coordenados e intuir cuál es la gráfica de $A(x)$ (Imagen 3.4).

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{A(x)}$ |
|---|---|
| **0** | 0 |
| **1** | $\pi$ |
| **2** | $4\pi$ |
| **3** | $9\pi$ |
| **4** | $16\pi$ |
| **−1** | $\pi$ |
| **−2** | $4\pi$ |
| **−3** | $9\pi$ |
| **−4** | $16\pi$ |

Tabla 3.3

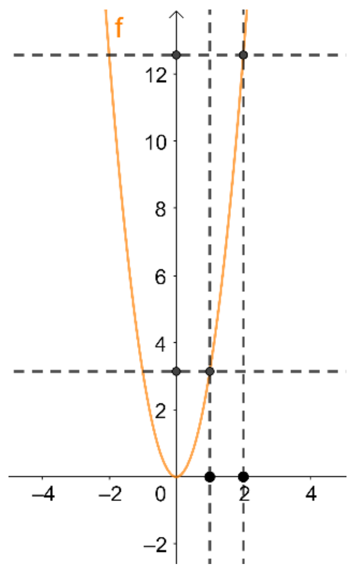


Imagen 3.4

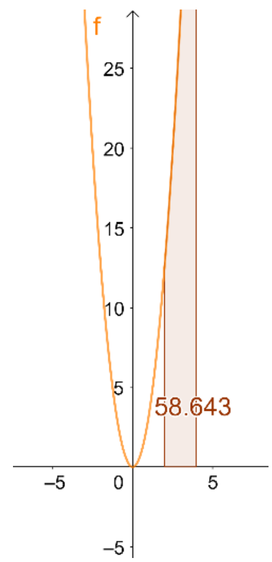


Imagen 3.5

O bien, se puede simplificar e interpretar la función $A(x) = \int_0^x 2\pi r dr = \pi x^2$; que es la estructura de una ecuación cuadrática, y por lo tanto $A(x)$ es *una parábola que ramifica hacia arriba* (ver Imagen 3.4).

En cualquier caso, lo siguiente es calcular el área bajo la gráfica de $A(x)$ de $r = 2$ a $r = 4$ (ver Imagen 3.5). Entonces

$$\int_2^4 A(x)dx = \int_2^4 \int_0^x 2\pi r dr\, dx = \int_2^4 \pi x^2 dx = \frac{\pi x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{56}{3}\pi \approx 58.64306287$$

*4. Determina lo que es $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr$ e interprétalo en relación con el círculo*

Esta última pregunta es sobre el primer teorema fundamental del cálculo. Interpretar el resultado en relación con el circulo, significa interpretar la fórmula obtenida en términos de la circunferencia de radio $x$. Por el primer teorema fundamental del cálculo se tiene $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr = 2\pi x$ lo cual representa el perímetro del círculo de radio $x$. O bien, si se calcula la integral y luego la derivada, se tiene $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr = \frac{d}{dx}(\pi x^2) = 2\pi x$ lo cual representa el perímetro del círculo de radio $x$.

## D) Procedimiento ejecutado

En primer lugar, se les pidió a los estudiantes el apoyo voluntario para resolver el cuestionario, ellos aceptaron con la condición de permanecer en el anonimato. De nuestra parte no se les habló sobre consentimiento informado, ni remuneración económica. Una semana después, el día 19 de octubre del 2019, se les aplicó el cuestionario y lo que se hizo fue distribuir las hojas de las preguntas e insistirles que la solución era o individual o en equipo, pero si trabajaban en equipo, entregar una sola hoja de respuestas. Ellos disponían de una hora para resolver los cuatro incisos del problema. Por otro lado, el *rol* del autor de la tesis se limitó a leer las instrucciones del cuestionario y aclarar cualquier duda que pudiera haber sobre la notación usada en las preguntas. Es importante comentar que al inicio se trabajó con 24 alumnos, pero sólo 4 de ellos trabajaron en equipos de dos integrantes, lo que significa que de estos entregaron 2 hojas de solución, por lo tanto, únicamente se tienen 22 cuestionarios resueltos.

## E) Método de análisis

En este trabajo de investigación se usa los primeros procedimientos de la teoría fundamentada, el cual es un método de investigación que se caracteriza por la recopilación y el análisis de datos de manera coordinada. Según la autora Teppo (2015) este método incluye “análisis comparativo constante, codificación […], integración teórica de códigos y categorías, y memorandos” (p. 4). Al inicio los datos se codifican mediante una comparación conjunta, para esto “la comparación constante utiliza el razonamiento inductivo para abstraer conceptos […] a partir de patrones identificados en los datos” (Teppo, 2015, p. 5). A medida que se generan códigos, "también se crean categorías para expresar elementos comunes entre grupos de códigos" (Teppo, 2015, p. 5). El ciclo anterior continúa "a medida que la recopilación y el análisis de datos adicionales prueben la validez de los temas emergentes" (Teppo, 2015, p. 5).

**F) Estudio de caso**

En este trabajo de investigación se adopta el enfoque de estudio de caso. El estudio de caso es "Un análisis intensivo de una unidad individual (como persona o comunidad) que enfatiza los factores de desarrollo en relación con el medio ambiente" (Flyvbjerg, 2011, p. 301). Respecto a nuestro trabajo el caso es el conjunto de respuestas de los estudiantes al cuestionario. En palabras de Stake (1978) "no es necesario que el caso sea una persona o empresa. Puede ser cualquier sistema acotado" (p. 7). Por otra parte, el estudio de caso permite analizar los razonamientos de los estudiantes, sus aciertos y dificultades en el procedimiento de solución del problema y percibir las nociones relacionadas con el primer teorema fundamental del cálculo. En palabras de Flyvbjerg (2011) "los estudios de caso comprenden más detalles, riqueza, integridad y varianza, es decir, profundidad" (p. 301).

**G) Análisis de datos**

Este trabajo de investigación en general se apoya en los pasos iniciales de la teoría fundamentada, cuyo proceso se llevó a cabo en las siguientes etapas:

1) Se ordena la información en tablas que muestran las respuestas de los estudiantes para cada pregunta del cuestionario. Ver Anexo 2.

2) Se hacen comentarios a cada respuesta y se encuentran patrones de solución. Los comentarios consisten en describir la respuesta del alumno a manera de clarificar su solución para el investigador y comparándola con la solución normativa del problema. Los patrones permiten codificar los datos. Ver anexo 2.

3) Se definen los códigos y se describen su significado. Se analiza las características y relaciones del código. Ver capítulo IV.

4) Si se encuentran relaciones entre las respuestas en un código, se define una categoría y se presentan ejemplos. Ver capítulo V.

# Capítulo IV. Resultados

En este capítulo se presentan los códigos que se obtuvieron después de la comparación constante de los datos. Para cada pregunta del cuestionario se describe el significado de los códigos, se muestra un ejemplo particular del mismo y el porcentaje de frecuencia.

Se comienza con citar el contexto general del cuestionario. El cual es un problema sobre el teorema fundamental del cálculo que no es inmediatamente asimilable al modelo intuitivo de la integral como área bajo la curva.

**Situación**: *Considere un círculo que se expande en tamaño de* $r = 0$ *a* $r = x$ (ver Imagen 5.1). *Sea* $A(x) = \int_0^x 2\pi r dr$ *una función en* $x$.

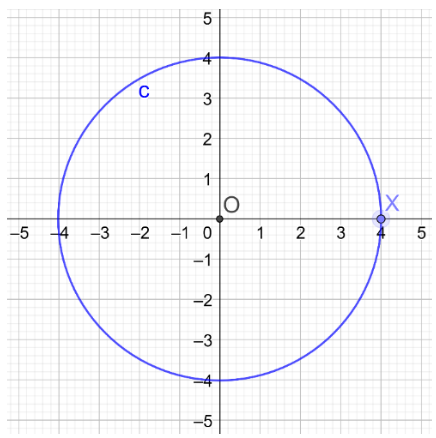



Imagen 5.1

Después de estas hipótesis, la primera pregunta es:

1. *¿Qué representa* $A(x) = \int_0^x 2\pi r dr$*? ¿Por qué?*

En esta pregunta una respuesta aceptable es la siguiente:

$A(x)$ representa el área del círculo de radio $x$. A esta conclusión se puede llegar mediante cualquiera de los siguientes argumentos: a) porque $A(x)$ es una función de acumulación de área; o b) porque al calcular la integración se obtiene la fórmula del área de dicho círculo.

A partir de la comparación constante a los resultados de los estudiantes, se proponen los siguientes códigos que se muestran en la tabla 5.1. En la tabla se distingue el nombre del código, una imagen como ejemplo representativo y el porcentaje de frecuencia. Después de la tabla 5.1 se muestra una descripción general de los códigos.

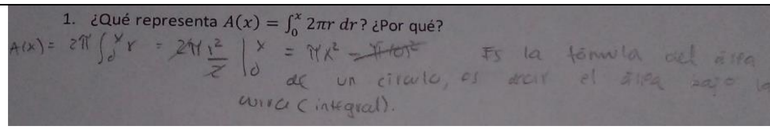
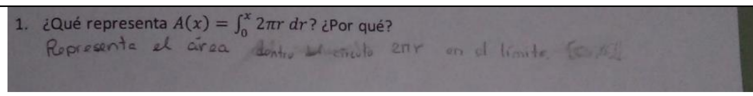
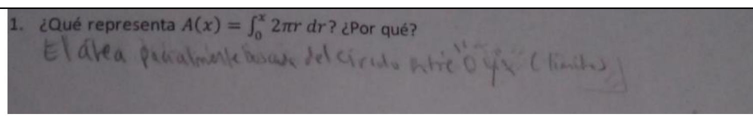
| Código | Ejemplo de respuesta | Frecuencia |
|---|---|---|
| Asocia la integral con el área del círculo |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“$A(x) = 2\pi \int_0^x r = \frac{2\pi r^2}{2}\Big\|_0^x = \pi x^2 - \pi \cdot 0^2$. Es la fórmula del área de un círculo, es decir el área bajo la curva (integral)” | 11/22 |
| Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“Representa el área dentro del círculo $2\pi r$ en el límite $[0, x]$” | 10/22 |
| Yuxtaposición |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“El área parcialmente buscada del círculo entre ‘0’ y ‘$x$’ (límite)” | 1/22 |

Tabla 5.1

En el primer código de *asocia la integral con el área del círculo* se observó que los estudiantes calcularon la integral e interpretaron esos resultados en función del área del círculo. No tuvieron dificultad en la resolución de la integral. Sin embargo, algunos estudiantes mostraron una confusión entre la variable muda y la variable independiente porque intercambiaron el valor de las variables ya que refirieron a un círculo de radio $r$ en vez de un círculo de radio $x$. Por otro lado, ningún estudiante mencionó rasgos de la función $A(x)$. Es decir, no se encontró ninguna mención de que $A(x)$ es una función de acumulación o que el integrando es una función lineal. Pero los estudiantes sí mostraron interés en escribir que $A(x)$ corresponde al área bajo la curva de la circunferencia.

En el segundo código de *confusión de la función* $2\pi r$ *con el círculo* se notó que los estudiantes mezclaron dos conceptos matemáticos distintos, puesto que ellos relacionaron la función lineal $2\pi r$ con el circulo de radio $x$. Luego se observó que usaron la interpretación de la integral como área bajo la curva para resolver el problema. En consecuencia, concluían que $A(x)$ representa el área de la mitad del círculo o el área de un cuarto del círculo según los límites de integración. En ninguna respuesta señalaron que $A(x)$ es una función de acumulación y muy pocos de ellos integraban para comprobar su respuesta. Por tanto, se clasificaron en un código diferente al primero.

En el tercer código de *yuxtaposición* se vio que el estudiante unía los conceptos área y límite sin especificar alguna relación. Como él no aportaba más información en su solución del problema, no se podría ubicar en alguno de los códigos anteriores y fue indispensable apartarlo en otro.

Continuando, la segunda pregunta es:

*2. Construya un círculo e ilustre lo que representa* $A(x) = \int_2^4 2\pi r dr$

En esta pregunta una respuesta aceptable es:

Como $A(x)$ representa el área del círculo de radio $x$, entonces $\int_2^4 2\pi r dr = A(4) - A(2)$. Por lo tanto, la integral $\int_2^4 2\pi r dr$ representa el área negra en el siguiente diagrama (Imagen 5.2).

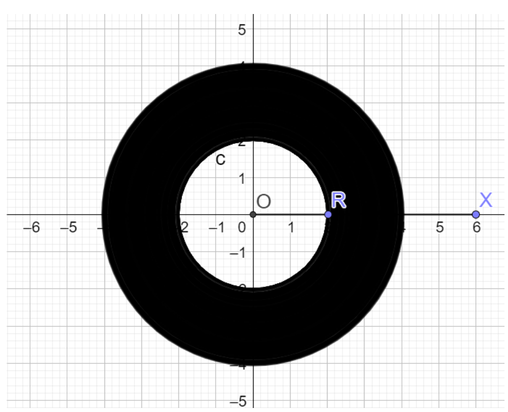



Imagen 5.2

Después de la comparación constante de los datos de investigación, se proponen los siguientes códigos que se exhiben en la tabla 5.2. En esta se muestra el nombre del código, una imagen como ejemplo y el porcentaje de frecuencia. Debajo de la tabla se añade una descripción de los códigos obtenidos.

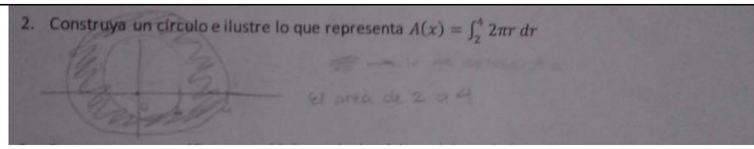
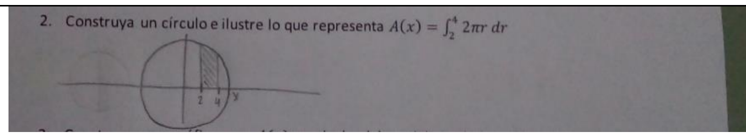
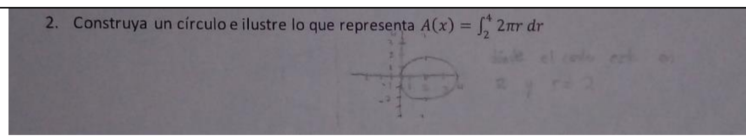
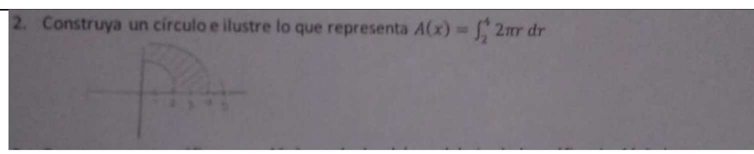
| Código | Ejemplo de respuesta | Frecuencia |
|---|---|---|
| Representación de acumulación en anillo |   “■ → lo que representa. El área de 2 a 4” | 10/22 |
| Sincretismo entre función $2\pi r$ y área bajo la curva |   “[Dibujo de una circunferencia que indica área bajo la curva]” | 6/22 |
| Confusión entre integral y gráfica del círculo |   “Dónde el centro está en 2 y $r = 2$” | 5/22 |
| Sincretismo |   “[Dibujo de un cuarto de circunferencia]” | 1/22 |

Tabla 5.2

En el código *representación de acumulación de anillo* se observó que los alumnos dibujaron dos circunferencias concéntricas de radio 2 y de radio 4. Luego sombrearon la región limitada por las dos circunferencias. Esto significa que ellos ilustraron la acumulación de área desde la circunferencia de radio 2 a radio 4.

En el código *sincretismo entre función $2\pi r$ y área bajo la curva* se encontró que los estudiantes interpretaron que la función lineal $2\pi r$ del integrando de $A(x)$ es el círculo de radio $x$. Además, se guiaron por la representación de la integral como área bajo la curva e interpretaron que $\int_2^4 2\pi r dr$ es el área bajo la curva $2\pi r$ (para ellos la circunferencia de radio

$x$) en el intervalo $(2, 4)$. Esto indica que dibujaron la circunferencia de radio $x$ e ilustraron la acumulación de área limitada por la circunferencia y las recta $x = 2$ y $x = 4$.

En el código *confusión entre integral y gráfica del círculo* se presenció que los alumnos interpretaron a $\int_2^4 2\pi r dr$ como una circunferencia con centro en el punto $(2, 0)$ y que pasa por el punto $(4, 0)$. Se nota que las abscisas de los puntos proceden de los límites de integración. Por consiguiente, ellos trazaron una circunferencia con centro en $(2,0)$ y radio $2$. En ningún dibujo se aprecia un sombreado, lo que significa que no hubo interpretación de acumulación de área por parte de los estudiantes.

En el código *sincretismo* se vio que el estudiante mezcló métodos de solución. Por un lado, representó la acumulación de área de las dos circunferencias concéntricas de radio 2 y 4. Por otro lado, consideró la representación de la integral como el área bajo la curva $2\pi r$ (para él la circunferencia de radio $r$). En consecuencia, el estudiante simbolizó la acumulación de área de una cuarta parte del *anillo* de radio 2 a radio 4.

Pasando a la tercera pregunta se tiene:

*3. Construya una gráfica para $A(x)$ y calcule el área debajo de la gráfica de $A(x)$ de $r = 2$ a $r = 4$*

Para esta cuestión una respuesta aceptable es

En este caso se puede hacer una tabulación (Tabla 5.3); e intuir cuál es la gráfica de $A(x)$ (Imagen 5.3)

| $x$ | $A(x)$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $\pi$ |
| $2$ | $4\pi$ |
| $-1$ | $\pi$ |
| $-2$ | $4\pi$ |

Tabla 5.3

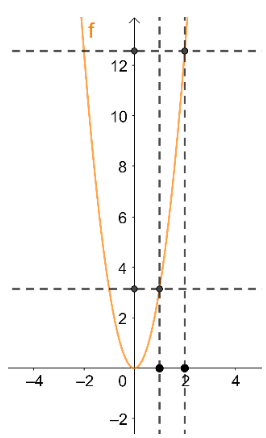



Imagen 5.3

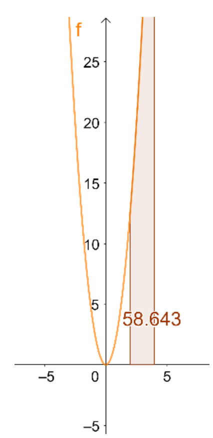


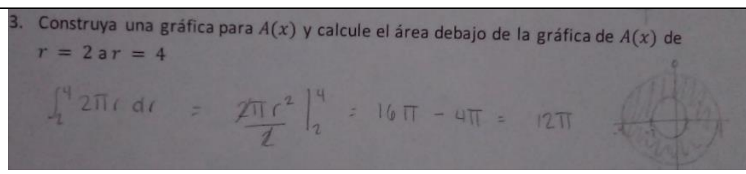
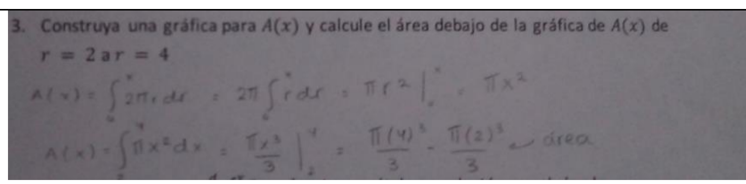
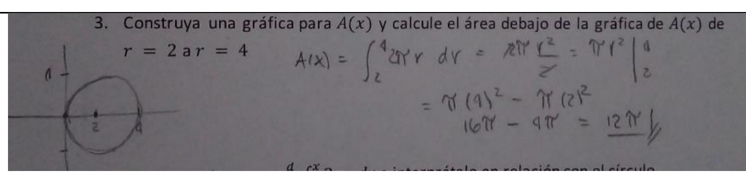

Imagen 5.4

O bien, se puede interpretar la función $A(x) = \int_0^x 2\pi r dr = \pi x^2$; que es la estructura de una ecuación cuadrática, y por lo tanto $A(x)$ es *una parábola que ramifica hacia arriba* (ver Imagen 5.4).

En cualquier caso, lo siguiente es obtener (ver Imagen 5.4)

$$\int_2^4 A(x)dx = \int_2^4 \int_0^x 2\pi r dr\, dx = \int_2^4 \pi x^2 dx = \frac{\pi x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{56}{3}\pi \approx 58.64306287$$

Luego de hacer la comparación constante de los resultados del cuestionario, se proponen los siguientes códigos que se exponen en la tabla 5.4. En la tabla se tiene el nombre del código, la imagen del ejemplo representativo y el respectivo porcentaje de frecuencia. En seguida de la tabla se indica una descripción de cada código.

| Código | Ejemplo de respuesta | Porcentaje |
|---|---|---|
| Confusión entre $A(x)$ y la integral de $A(x)$ | <br>" $\int_2^4 2\pi r\, dr = \frac{2\pi r^2}{2}\Big\|_2^4 = 16\pi - 4\pi = 12\pi$" | 14/22 |
| Doble integral | <br>"$A(x) = \int_2^4 2\pi r\, dr = 2\pi \int_2^4 r\, dr = \pi r^2 \Big\|_0^x = \pi x^2$<br>$A(x) = \int_2^4 \pi x^2\, dx = \frac{\pi x^3}{3}\Big\|_2^4 = \frac{\pi(4)^3}{3} - \frac{\pi(2)^3}{3}$ " | 1/22 |
| Confusión entre $A(x)$ y la integral de $A(x)$; dibuja el círculo trasladado | <br>"$A(x) = \int_2^4 2\pi r\, dr = \frac{2\pi r^2}{2}\Big\|_2^4 = 16\pi - 4\pi = 12\pi$" | 5/22 |

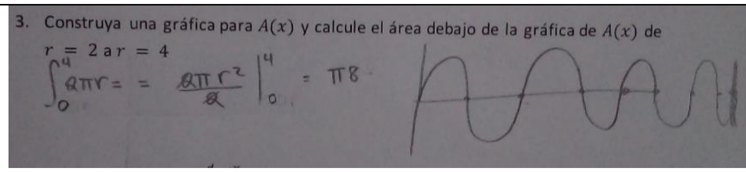
| | | |
|---|---|---|
| Yuxtaposición |   " $\int_0^4 2\pi r == \frac{2\pi r^2}{2}\Big\|_0^4 = \pi 8$" | 2/22 |

Tabla 5.4

En el primer código de *confusión entre* $A(x)$ *y la integral de* $A(x)$ se observó que los estudiantes resolvieron $A(4) - A(2)$ en vez de $\int_2^4 A(x)dx$. Significa que obtuvieron el valor de $c = \int_2^4 2\pi r dr$ del problema 2, en lugar de $\int_2^4 \pi x^2 dx$. Lo que indica que por parte de los estudiantes hubo una confusión entre la función de acumulación $A(x)$ y la integral de $A(x)$. En cambio, cuando ellos graficaron $A(x) = \int_0^x 2\pi r dr$ se observó que dibujaron el mismo diagrama que presentaron en la pregunta 2; esto es la acumulación de área simbolizada por $\int_2^4 2\pi r dr$.

En el segundo código de *doble integral* se vio que el alumno calculó los valores de $\int_0^x 2\pi r dr$ y $\int_2^4 \pi x^2 dx$. A ambos valores los denota con el mismo nombre de la función $A(x)$. A pesar de ello, interpretó los cálculos algebraicos y obtuvo la respuesta correcta. En ningún momento el estudiante intentó la gráfica de $A(x)$.

En el tercer código de *confusión entre* $A(x)$ *y la integral de* $A(x)$*; dibuja el círculo trasladado* se tiene a los estudiantes que también resolvieron $A(4) - A(2)$ en vez de $\int_2^4 A(x)dx$. Lo que significa que ellos obtuvieron el valor $c = \int_2^4 2\pi r dr$ a falta de $\int_2^4 \pi x^2 dx$. Por otro lado, cuando graficaron $A(x)$ se notó que dibujaron el mismo diagrama que presentaron en la pregunta 2. En cuyo caso es un círculo con centro en el punto $(2, 0)$ que pasa por el punto $(4, 0)$.

En el cuarto código de *yuxtaposición* se vio que los estudiantes unían distintos conceptos matemáticos. Como se ve en su solución ellos evaluaban $A(4)$ mientras consideraban a la gráfica de $A(x)$ como la gráfica de una función sinusoidal. Estos dos últimos estudiantes no aportaron más información en sus soluciones del problema, entonces no fueron agregados en un código anterior y fue forzoso distinguirlos en un nuevo código.

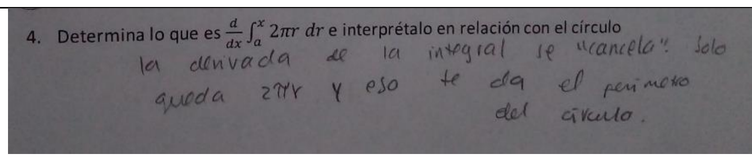
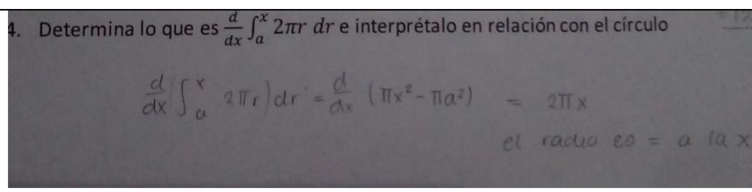
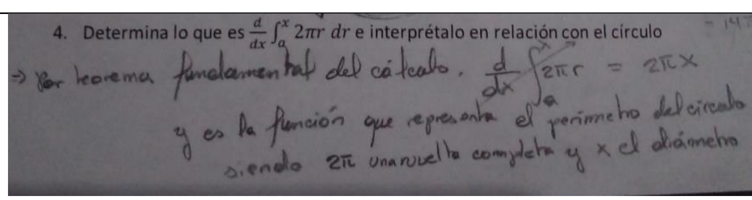
Por último y no menos importante, la cuarta pregunta es:

*4. Determina lo que es* $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr$ *e interprételo en relación con el círculo*

En este caso, una respuesta es:

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr = 2\pi x$ lo cual representa el perímetro del círculo de radio $x$. O bien, calculando se tiene $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr = \frac{d}{dx}\pi x^2 = 2\pi x$ lo cual representa el perímetro del círculo de radio $x$.

Posterior a la comparación constante de los datos de la investigación, se proponen los siguientes códigos que se enseñan con la tabla 5.5. La tabla proporciona el nombre del código, la imagen de un ejemplo distintivo y el porcentaje de frecuencia. Inmediatamente después se escribe una descripción de todos los códigos.

| Código | Ejemplo de respuesta | Porcentaje |
|---|---|---|
| Intercambio entre las variables $r$ y $x$ | <br><br>“La derivada de la integral se cancela, solo queda 2πr y eso te da el perímetro del círculo” | 11/22 |
| Integrar-<br>Derivar | <br><br>" $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr = \frac{d}{dx}(\pi x^2 - \pi a^2) = 2\pi x$<br>El radio es = a la $x$” | 5/22 |
| Uso del TFC | <br> | 5/22 |

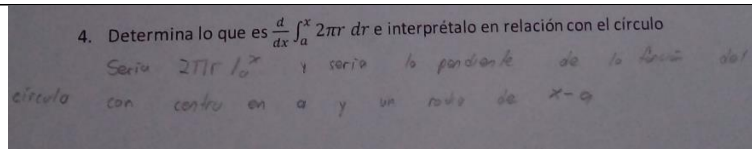
| | | |
|---|---|---|
| | “Por el teorema fundamental del cálculo, $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r = 2\pi x$ y es la función que representa el perímetro del círculo siendo $2\pi$ una vuelta completa y $x$ el diámetro” | |
| Sincretismo | <br>4. Determina lo que es $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r\, dr$ e interprétalo en relación con el círculo<br>Sería $2\pi r \Big\|_a^x$ y sería la pendiente de la función del círculo con centro en a y un radio de $x-a$<br><br>“Sería $2\pi r \Big\|_a^x$ y sería la pendiente de la función del círculo con centro en $a$ y un radio de $x - a$” | 1/22 |

Tabla 5.5

En el código *intercambio entre las variables* $r$ *y* $x$ se observó que los estudiantes intentaron usar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. Sin embargo, se notó que sus cálculos son en términos de la variable muda $r$ en lugar de la variable independiente $x$. Esta elección de variables no está incluida en el Teorema Fundamental. Por tanto, se propone que ellos usaron la Intuición del Teorema Fundamental que se describió en el capítulo II. Esto es, la relación del Primer Teorema Fundamental como *funciones inversas* entre los operadores derivación e integración. Es decir, sea $f$ una función sobre los reales, se considera una intuición del estudiante si efectúa $\frac{d}{dx}\int f(t)dt = f(t)$, en vez de $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$.

En el código *integrar-derivar* se vio que los alumnos hicieron los cálculos algebraicos para obtener la integral de la función lineal $2\pi r$ y después la derivada de ese resultado. Lo anterior se efectúo sin haber usado el Teorema Fundamental. Nótese que en este método se tiene un resultado en términos de la variable independiente $x$ en lugar de la variable muda $r$.

En el código *uso del TFC* se notó que los estudiantes usaron el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. El uso correcto del Teorema Fundamental implica la elección de la variable independiente $x$ sin tomar en cuenta la variable muda $r$. Por tanto, se decidió identificar en otro código a estos alumnos porque es muy significativo el distinguir la variable correcta en el uso del TFC.

En el código *sincretismo* se encuentra el alumno cuya solución muestra una mezcla de conceptos matemáticos aparentemente diferentes. Por un lado, él usa el Teorema Fundamental para resolver el problema. Por otro lado, el considera el significado de la derivada como pendiente de rectas tangentes. De forma particular, él señaló que $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr$ es la pendiente de la función del círculo con centro en $a$ y un radio de $x - a$.

En este punto termina la descripción de los códigos de cada pregunta del cuestionario; lo que sigue por hacer es discutir cada código y se va a efectuar en el siguiente capítulo.

# Capítulo V. Discusión

El presente capítulo exhibe la discusión de los códigos y resultados mostrados en el Capítulo IV. También se formulan algunas interpretaciones del razonamiento de los estudiantes sobre una aplicación del primer teorema fundamental del cálculo relacionado con las limitaciones del modelo de integral como área bajo la curva. Para conseguir aquellas interpretaciones se utiliza el marco conceptual del Capítulo II para obtener características de los códigos de cada pregunta del cuestionario de investigación. Luego se generan hipótesis a partir de las características para interpretar el razonamiento de los alumnos. El análisis continúa con la propuesta de las categorías, su definición y ejemplos. De acuerdo con la teoría fundamentada, las categorías expresan elementos comunes entre grupos de códigos (Teppo, 2015) El capítulo finaliza con observaciones generales sobre dichas categorías.

Se comienza con la primera pregunta que es:

- ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r dr$? ¿Por qué?

En el cual los códigos que se establecieron fueron:

1. Asocia la integral con el área del círculo (frecuencia de 11/22)
2. Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo (frecuencia de 10/22)
3. Yuxtaposición (frecuencia de 1/22)

De estos códigos se hacen los siguientes comentarios:

a. Del código 1 se tiene que el razonamiento de los estudiantes comenzó con calcular el valor de la integral de la función de acumulación $A(x)$ y continuo con la explicación de que la función $A(x)$ representa el área del círculo. La afirmación es correcta y por parte de los estudiantes se tiene que su razonamiento es una conexión entre el concepto de integral y los métodos de integración. Este tipo de conexión lo conocemos como un complejo. Como se dijo en el Capítulo II, un complejo es el vínculo de dos conceptos de forma concreta y empírica. Según Vygotsky (2015) un complejo es "largo y persiste en el desarrollo del pensamiento [del estudiante], está enraizado en su experiencia práctica" (p. 181). **Conclusión 1**. En efecto, diremos que la experiencia práctica enseña al estudiante ciertas formas de agrupamiento conceptual. En el caso del código 1 el agrupamiento conceptual es la conexión entre el concepto de integral y los métodos de integración. La enseñanza enraizada en los estudiantes debida a la experiencia práctica es un razonamiento operacional (cálculos algebraicos).

b. En el código 2 se tiene que el razonamiento de los estudiantes fue caracterizado por el uso del modelo intuitivo de área bajo la curva. Para ellos el modelo implica que $A(x)$ representa un área bajo la curva. Como se dijo en el Capítulo II, el modelo intuitivo de área bajo la curva permite representar a una integral $\int_a^b f(x)dx$ como el área limitada por la gráfica de $f$, el Eje $X$ y las rectas $x = a, x = b$. Entonces se sabría que $A(x) = \int_0^x 2\pi r dr$ representa el área limitada por la gráfica de $2\pi r$, el Eje $X$ y las rectas $r = 0, r = x$. Sin embargo, cuando los estudiantes usaron el modelo intuitivo se observa que lo aplicaron de manera incorrecta porque creyeron que $A(x)$ representa el área limitada por $\sqrt{x^2 - r^2}$ (en lugar de $2\pi r$), el Eje $X$ y las rectas $r = 0, r = x$; es decir, el área de un cuarto de la circunferencia de radio $x$. Esto significa que los estudiantes confundieron el integrando de $A(x)$ con el diagrama de la circunferencia del problema. **Conclusión 2**. Se tiene la evidencia de que por parte de los estudiantes desconocen la representación gráfica de las funciones de acumulación, como la función $A(x)$.

c. En el código 3 el razonamiento del único estudiante de este código inició con exploraciones y conjeturas, que resultaron ser falsos comienzos. Se tiene que él hizo una unión de conceptos matemáticos (área bajo la curva y límite) sin relación intrínseca para la resolución del problema. El estudiante mezcló el concepto de área como un límite de la integral entre 0 y $x$. Este tipo de unión lo conocemos como un sincretismo. Como se dijo en el Capítulo II, un sincretismo es la tendencia de mezclar diversas entidades en una sola. Estas relaciones sincréticas del alumno y los conceptos agrupados en torno a la interpretación de la integral "reflejan también vínculos objetivos [intuitivos]", en la medida en que estos coinciden con la resolución del problema, (Vygotsky, 2015, p. 177). De acuerdo con Fischbein (1987) la intuición se caracteriza por la certeza intrínseca, es decir las intuiciones "se aceptan como ciertas” (p. 47). **Conclusión 3**. Es un razonamiento intuitivo por parte de los estudiantes que las funciones de acumulación representen límites de área conforme cambia la variable $x$.

De las conclusiones anteriores se infiere que los estudiantes confunden los elementos y partes de una función de acumulación, por ejemplo, la función $A(x)$ de nuestro cuestionario. Se tiene la evidencia que confundieron el integrando con la gráfica de una circunferencia; o la gráfica con los límites de integración. En palabras de Thompson (2008): “la idea matemática de una función de acumulación, representada como $\mathrm{F(x)} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)\,dt}$, involucra tantas partes móviles que es comprensible que los estudiantes tengan dificultades para entenderla y emplearla*”* (p. 2).

Por otro lado, a pesar de que sólo la mitad de los participantes obtuvo la respuesta aceptada (frecuencia 11/22), se presentó que todos los participantes apuntaron que $A(x)$ representa un área. Sea porque los alumnos vieron la figura geométrica del círculo, o sea porque ellos relacionaron en el símbolo de integral de $A(x)$ un área bajo la curva, en todas las respuestas nos hablan de que $A(x)$ representa alguna área. Se infiere que relacionar el concepto de área con el concepto de integral es un razonamiento intuitivo por parte de los estudiantes. Lo anterior es posible a pesar de que se tienen otras referencias para el concepto de integral como longitud de curva o presión sobre áreas debido a un líquido (Natanson, 1984), es decir, la integral no siempre representa un área. Según Fischbein (1987) “si bien la intuición no es la fuente perfectamente confiable para el conocimiento absoluto, es, sin embargo, la expresión de nuestra necesidad fundamental de puntos de referencia absolutos e intrínsecamente confiables en un esfuerzo de razonamiento” (p. 13). Esto implica que para los estudiantes el concepto de área es una referencia del concepto de integral.

Se continua con la segunda pregunta que es:

- Construya un círculo e ilustre lo que representa $A(x) = \int_2^4 2\pi r dr$

En el cual los códigos que se formaron fueron:

4. Representación de acumulación en anillo (frecuencia de 10/22)
5. Sincretismo entre función $2\pi r$ y área bajo la curva (frecuencia de 6/22)

6. Confusión entre integral y gráfica del círculo (frecuencia de 5/22)
7. Sincretismo (frecuencia de 1/22)

De aquí se hacen los siguientes comentarios:

d. En el código 4 se tiene que los estudiantes dibujaron el anillo determinado por las circunferencias concéntricas de radio 2 a 4. Lo que se ve es que ellos trazaron su dibujo sin usar el modelo intuitivo de área bajo la curva. Se sabe que al usar el modelo de la integral se interpretaría que $A(x) = \int_2^4 2\pi r dr$ representa el área limitada por la gráfica de $2\pi r$, el Eje $X$ y las rectas $r = 2, r = 4$. Lo que da como resultado el diagrama de la Imagen 5.1.

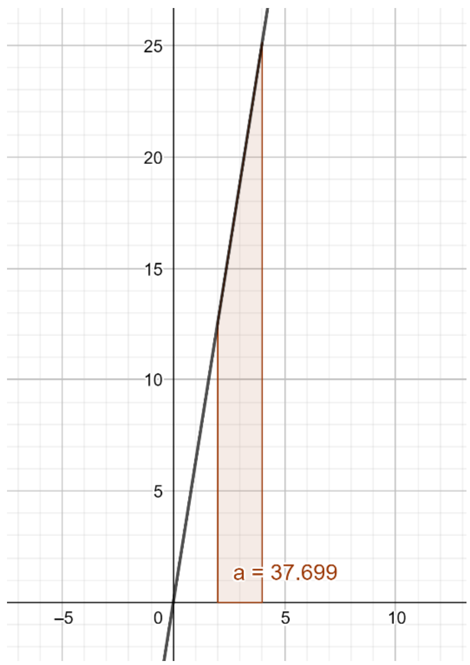



Imagen 5.1

Sin embargo, al resolver el problema prescindiendo del modelo intuitivo se tiene en evidencia la razón de acumulación. Lo que da como resultado el diagrama de la Imagen 5.2.

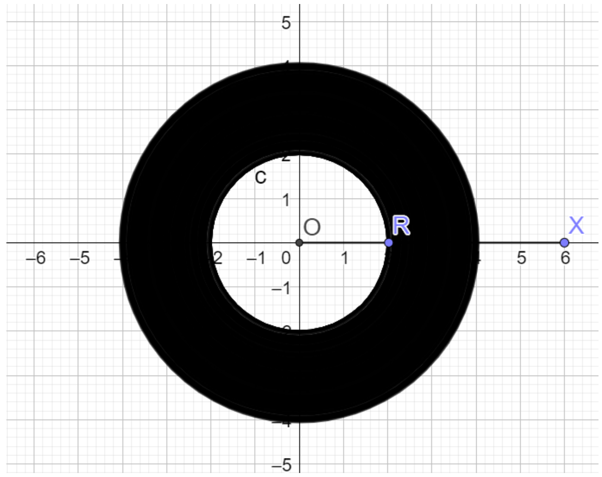



Imagen 5.2

**Conclusión 4**. Prescindiendo del modelo intuitivo de área bajo la curva es posible la representación de acumulación.

e. En el código 5 se tiene que los estudiantes usaron el modelo intuitivo de área bajo la curva para resolver este problema. Se sabe que al usar dicho modelo se tendría que $A(x) = \int_2^4 2\pi r dr$ representa el área limitada por la gráfica de $2\pi r$, el Eje $X$ y las rectas $r = 2, r = 4$. Ver Imagen 5.1. Sin embargo, los estudiantes continuaron considerando que el integrando $2\pi r$ corresponde a la circunferencia de radio $x$ de la gráfica que muestra la acumulación de área. Ver Imagen 5.2. Los datos sugieren que usar el modelo intuitivo con las funciones de acumulación es un obstáculo para la comprensión de otros conceptos matemáticos como la acumulación de área. De acuerdo con Thompson y Silverman (2008) se debe discutir "la importancia de que los estudiantes puedan concebir las integrales definidas como algo más que un área bajo una curva, aunque los libros de texto a menudo presentan el concepto como área" (Citado en Sealey, 2014, p. 231). **Conclusión 5**. El modelo intuitivo de área bajo la curva es un obstáculo para la comprensión de acumulación de área.

f. En el código 6 se tiene que los estudiantes propusieron un modelo pictórico para resolver el problema. El modelo pictórico consistía en que $A(x) = \int_2^4 2\pi r dr$ representa una circunferencia con centro en $(2,0)$ y que pasa por $(4,0)$. Sin embargo, ese modelo no es un modelo intuitivo que permita resolver dicho problema matemático. Cuando decimos que no es un modelo intuitivo nos referimos a que no se cumple alguna de las características de Fischbein (1977) sobre los modelos intuitivos. En efecto, el modelo pictórico que los estudiantes proponen no es internamente consistente porque $\int_a^c 2\pi r dr + \int_c^b 2\pi r dr = \int_a^b 2\pi r dr$ no es posible resolverlo con el modelo pictórico. **Conclusión 6**. Acorde con Thompson (1977) "Para comprender o resolver problemas, es necesario que los esquemas conceptuales y la representación intuitiva funcionen de la mano" (p. 154).

g. En el código 7 se tiene que los estudiantes hicieron un sincretismo. Como se dijo en el Capítulo II, un sincretismo es la tendencia de mezclar diversos conceptos matemáticos. Por un lado, los estudiantes intentaron representar la acumulación de área y, por otro lado, usaron el modelo intuitivo de área bajo la curva. Como resultado se tiene una mezcla de conceptos que se aprecia como una mezcla de representaciones. Ver Imagen 5.3. **Conclusión 7**. En palabras de Vygotsky (2015) "debido a su origen sincrético, dicha imagen es sumamente inestable" (p. 177).

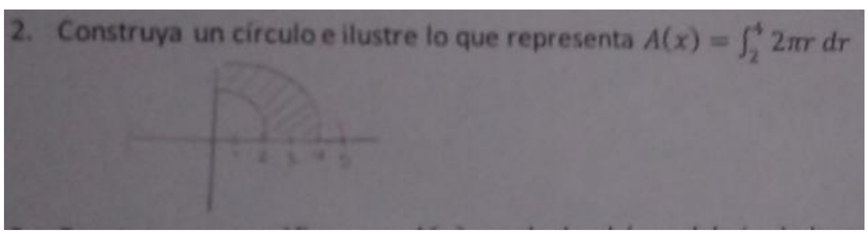



Imagen 5.3

A partir de las conclusiones anteriores se infiere que el modelo intuitivo de área bajo la curva se convierte en una concepción que frena o impide la comprensión del concepto de acumulación. Este está presente en funciones de acumulación que son funciones sobre los reales del tipo $F(x) = \int_c^x f(x)dx$. Estas funciones desempeñan un papel clave en el primer teorema fundamental del cálculo. Para una comprensión del TFC por parte de los estudiantes se sugiere proveer a los estudiantes de otro modelo para la integral que muestre más cobertura y potencia que el modelo intuitivo de área bajo la curva. Por otro lado, un rasgo al que también habría que prestar atención es el papel de la variable del límite superior de la integral. Según Thompson (2008) "Cuando los estudiantes no ven que el límite superior varía, es difícil, si no imposible, concebir que la función de acumulación tiene una tasa de cambio para cada valor en el que se define” (p. 8). Sin embargo, se sale del propósito de este trabajo de investigación analizar sobre el límite superior.

Se sigue con la tercera pregunta que es:

- Construya una gráfica para $A(x)$ y calcule el área debajo de la gráfica de $A(x)$ de $r = 2$ a $r = 4$

En el cual los códigos que se formaron fueron:

8. Confusión entre $A(x)$ y la integral de $A(x)$ (frecuencia de 14/22)
9. Doble integral (frecuencia de 1/22)
10. Confusión entre $A(x)$ y la integral de $A(x)$; dibuja el círculo trasladado (frecuencia de 5/22)
11. Yuxtaposición (frecuencia de 2/22)

De aquí se hacen los siguientes comentarios:

h. Respecto al código 8 se sabe que el problema pide calcular $\int_2^4 A(x)dx$. Pero se tiene que los estudiantes usaron el modelo intuitivo de área bajo la curva. Al usar el modelo intuitivo se tendría que $\int_2^4 A(x)dx$ representa el área limitada por la curva de $A(x)$ y el Eje $x$, entre las rectas $x = 2, x = 4$. Sin embargo, los estudiantes aplicaron de otra manera el modelo intuitivo porque ellos insistieron que $\int_2^4 A(x)dx$ representa el área limitada por la curva de $2\pi r$ y el Eje $x$, entre las rectas $x = 2, x = 4$. Por otra parte, se aprecia que ellos dibujaron la misma gráfica del problema 2; lo que significa que conciben la gráfica de $A(x)$ como la representación de acumulación. **Conclusión 8**. Otra vez se aprecia que el modelo intuitivo de área bajo la curva fue un obstáculo para comprender el concepto de acumulación. Sin embargo, las limitaciones que se presentan al usar el modelo intuitivo es el manejo adecuado de la notación matemática, porque se ve que los estudiantes confundían $A(x)$ con $\int A(x)dx$. En palabras de Thompson (2008) “la idea de límite y el uso de la notación son dos de los aspectos más sutiles y complejos para entender las funciones de acumulación” (p. 5).

i. En el código 9 se tiene al estudiante que resolvió el problema de forma correcta. Él sólo resolvió la integral y no intentó la gráfica de $A(x)$. En su resolución no hay ninguna referencia al modelo intuitivo de área bajo la curva. **Conclusión 9**. Se considera que el alumno no tuvo ninguna limitación en la resolución del problema a pesar de no haber usado el modelo intuitivo. Además, no se tiene otra evidencia para hacer otra inferencia. Pero se comparte las palabras de Thompson (2008) “no debemos pensar que estamos enseñando la idea de la función de acumulación haciendo que los estudiantes calculen integrales definidas específicas” (p. 5).

j. En el código 10 se tienen las mismas observaciones que en el apartado VIII porque los estudiantes hicieron lo mismo. La única diferencia es que estos estudiantes dibujaron su gráfica del problema 2.

k. En el código 11 se vio que los estudiantes unían distintos conceptos matemáticos. Como se ve en su solución ellos evaluaban $A(4)$ como valor particular, mientras consideraban a la gráfica de $A(x)$ como una curva sinusoidal. Estos dos últimos estudiantes no aportaron más información para hacer algunas inferencias.

De las conclusiones anteriores se infiere que el modelo intuitivo de área bajo la curva limita la comprensión de notación de las funciones de acumulación. El uso correcto de notación permite mayor manejo algebraico en conceptos importantes como el teorema fundamental (Thompson, 2008). Por ejemplo, hay un estudio por parte de Sealey (2014) donde establece cuatro niveles o etapas para “examinar los obstáculos con los que se encuentran los estudiantes y las formas en que superan esos obstáculos al resolver problemas integrales definidos sin relacionarse con el área bajo una curva” (p. 230). Los cuatro niveles que propone Sealey son relativos a las sumas de Riemann y uno de los obstáculos que se presentó fue el manejo de notación por parte de los estudiantes, “la investigación futura deberá estudiar cómo los estudiantes llegan a comprender la notación involucrada” (p. 243)

Finalmente, la cuarta pregunta es:

- Determina lo que es $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr$ e interprételo en relación con el círculo

En el cual los códigos que se establecieron fueron:

12. Intercambio entre las variables $r$ y $x$ (frecuencia de 11/22)
13. Integrar-Derivar (frecuencia de 5/22)
14. Uso del TFC (frecuencia de 5/22)
15. Sincretismo (frecuencia de 1/22)

De aquí se hacen los siguientes comentarios:

l. En el código 12 se tiene a los estudiantes que usaron el primer teorema fundamental del cálculo para resolver el problema. Pero con un error de notación porque su respuesta es en términos de la variable $r$ en lugar de la variable $x$. Entonces se tiene la evidencia de que ellos usaron la intuición del TFC. Acorde con lo descrito en el capítulo II se considera una intuición del estudiante si efectúa $\frac{d}{dx}\int f(t)dt = f(t)$, en vez de $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$. Según Fischbein (1987) "las intuiciones se refieren a declaraciones autoevidentes que exceden los hechos observables" (p. 14). Entonces para los estudiantes fue evidente efectuar $\frac{d}{dx}\int f(t)dt = f(t)$, en lugar de $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$. Por otra parte, el papel de la variable $t$ es tratado en libros de texto como variable "muda" o "ficticia" (Apóstol, 1990; Spivak, 1992). Sin embargo, Thompson (2008) propone que $t$ cumple un papel conceptual porque no se puede pensar que $f$ tenga el mismo argumento que $\int_c^x f(t)\, dt$. "Pensar que $t$ ya ha variado a través del dominio de $f$ antes de que $x$ varíe a través de un subconjunto del dominio de $f$ permite entonces pensar que $\int_c^x f(t)\, dt$ representa la acumulación de área dentro de una región ya delimitada" (p. 4). **Conclusión 12**. Por tanto, se aprecia que la intuición del TFC es un apoyo para comprender el teorema fundamental del cálculo. Sin embargo, las limitaciones que se presentan al usar la intuición del TFC es el manejo adecuado de la notación matemática, porque se ve que los estudiantes confundían la variable $r$ con la variable $x$

m. En el código 13 se tiene a los estudiantes que hicieron cálculos algebraicos para obtener la respuesta, a saber, integrar la función lineal $2\pi r$ y después derivar este resultado. Lo anterior se efectúo sin haber usado el primer teorema fundamental del cálculo. Cabe decir que en este método se tiene un resultado en términos de la variable independiente $x$ en lugar de la variable muda $r$. Como se dijo en el apartado I se tiene una conexión entre el concepto de integral y los métodos de integración. Este tipo de conexión lo conocemos como un complejo. Como se dijo en el Capítulo II, un complejo es el vínculo de dos conceptos de forma concreta y empírica. Como se dijo en el apartado I la enseñanza enraizada en los estudiantes debida a la experiencia práctica es un razonamiento operacional (cálculos algebraicos).

n. En el código 14 se tiene que los estudiantes usaron el primer teorema fundamental del cálculo para resolver el problema. El uso correcto del teorema fundamental implica que el resultado está en términos de la variable independiente $x$ sin tomar en cuenta la variable muda $r$. No hay ninguna evidencia de que los alumnos usaron el modelo intuitivo de área bajo la curva o que usaron la intuición del TFC. Por tanto, no se tiene más inferencias al respecto.

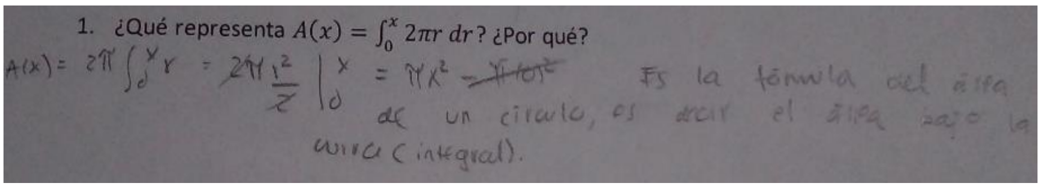
o. En el código 15 se vio que los estudiantes unían distintos conceptos matemáticos. Como se ve en su solución ellos aplicaron el teorema fundamental y a su vez consideraron el significado de la derivada como pendiente de rectas tangentes. Bajo estas suposiciones la solución del estudiante presenta dificultades para responder correctamente el problema. En palabras de Kirsh (2014) cuando él se pregunta ¿qué significa $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt$?, nos dice “Esta pregunta es muy difícil de responder si solo se piensa en la derivada como la pendiente de la línea tangente” (p. 691). Este último estudiante no aportó más información para hacer algunas inferencias.

Tomando en cuenta la frecuencia de los códigos 12, 13 y 14, se tiene que 21 de 22 estudiantes tuvo la respuesta correcta de la pregunta 4. Lo que podría indicar que la manipulación del teorema fundamental es muy alta por parte de los estudiantes.

A continuación, se presentan algunas categorías establecidas a partir de las características de los quince códigos anteriores. En cada categoría se muestra la definición y algunos ejemplos. Este proceso es parte de la teoría fundamentada. Según Teppo (2015) a medida que se generan códigos, “también se crean categorías para expresar elementos comunes entre grupos de códigos” (p. 5).

A. **Operaciones algorítmicas**. *Aplicación de un número* finito de pasos para resolver un problema matemático. En el caso de la integral se requiere la aplicación de reglas algorítmicas o artificios de integración para resolver la integral; y para ejecutar este procedimiento se necesita el manejo del álgebra elemental.

Ejemplo A1. Se tiene que el estudiante aplicó un número finito de pasos para resolver el problema, en este caso fórmulas de integración.

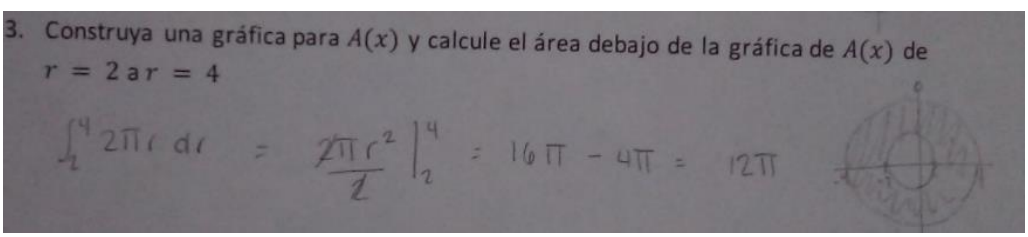


1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?

$A(x) = 2\pi \int_0^x r = \frac{2\pi r^2}{2} \Big|_0^x = \pi x^2 - \cancel{\pi \cdot 0^2}$ Es la fórmula del área de un círculo, es decir el área bajo la curva (integral).

"$A(x) = 2\pi \int_0^x r = \frac{2\pi r^2}{2}\Big|_0^x = \pi x^2 - \pi \cdot 0^2$. Es la fórmula del área de un círculo, es decir el área bajo la curva (integral)"

Ejemplo A2. Se tiene que el estudiante aplicó leyes algebraicas para obtener la integración.

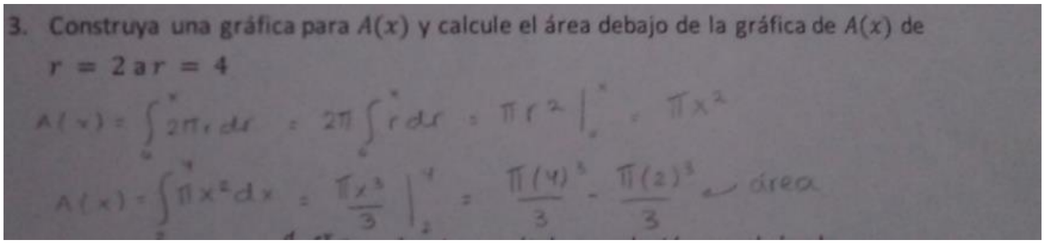


3. Construya una gráfica para $A(x)$ y calcule el área debajo de la gráfica de $A(x)$ de $r = 2$ a $r = 4$

$\int_2^4 2\pi r\, dr = \frac{2\pi r^2}{2}\Big|_2^4 = 16\pi - 4\pi = 12\pi$

" $\int_2^4 2\pi r\, dr = \frac{2\pi r^2}{2}\Big|_2^4 = 16\pi - 4\pi = 12\pi$"

Ejemplo A3. Se tiene que el estudiante aplicó fórmulas de integración para obtener la integral de la función $A(x)$.


3. Construya una gráfica para $A(x)$ y calcule el área debajo de la gráfica de $A(x)$ de $r = 2$ a $r = 4$

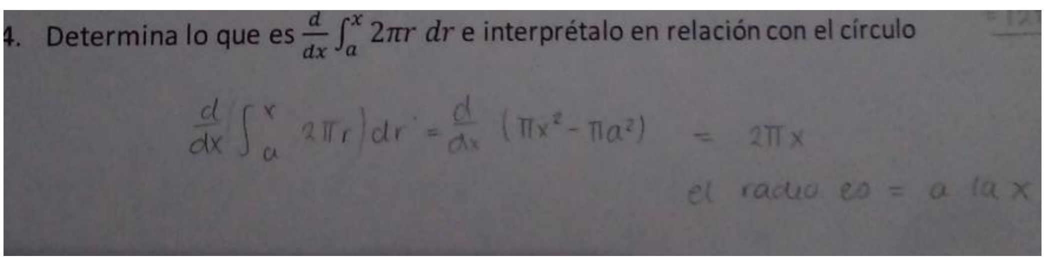
$A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr = 2\pi \int_0^x r\, dr = \pi r^2 \Big|_0^x = \pi x^2$

$A(x) = \int_2^4 \pi x^2 dx = \frac{\pi x^3}{3} \Big|_2^4 = \frac{\pi (4)^3}{3} - \frac{\pi(2)^3}{3}$ área

$$"A(x) = \int_2^4 2\pi r\, dr = 2\pi \int_2^4 r\, dr = \pi r^2 \Big|_0^x = \pi x^2$$

$$A(x) = \int_2^4 \pi x^2\, dx = \frac{\pi x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{\pi(4)^3}{3} - \frac{\pi(2)^3}{3}"$$

Ejemplo A4. Se tiene que el estudiante aplicó fórmulas de cálculo para obtener la integración de la función $2\pi r$; después obtiene la derivación. Los cuales son catalogados como operaciones algorítmicas.


4. Determina lo que es $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r\, dr$ e interprétalo en relación con el círculo

$\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r\, dr = \frac{d}{dx}(\pi x^2 - \pi a^2) = 2\pi x$

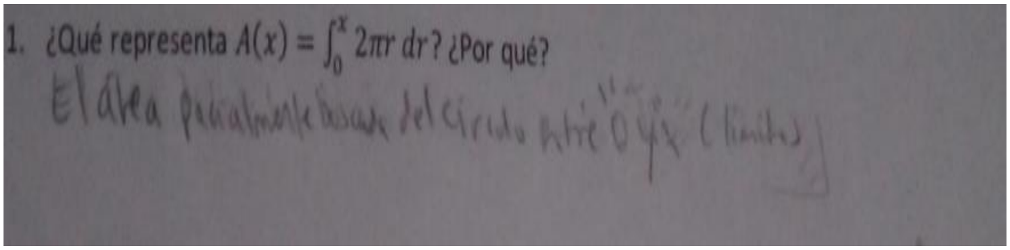
el radio es = a la x

$$"\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r dr = \frac{d}{dx}(\pi x^2 - \pi a^2) = 2\pi x$$

El radio es = a la $x$"

B. **Intuición**. Es una categoría de cognición sin la necesidad de justificación o interpretación, que parece presentarse a una persona como evidente por sí misma.

Ejemplo B1. El estudiante relaciona el concepto de integral con el concepto de área y para él es evidente por sí mismo.

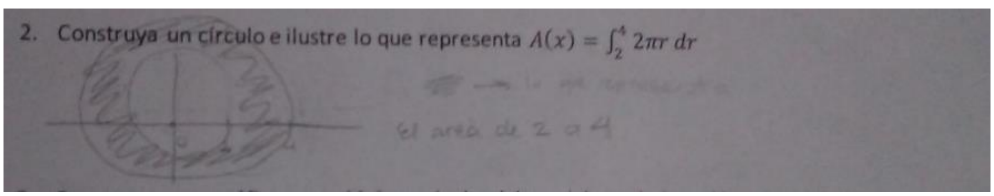


1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?

El área parcialmente buscada del círculo entre "0" y "x" (límite)

“El área parcialmente buscada del círculo entre ‘0’ y ‘$x$’ (límite)”

Ejemplo B2. El estudiante relaciona el concepto de integral con el concepto de área según el modelo de área bajo la curva.



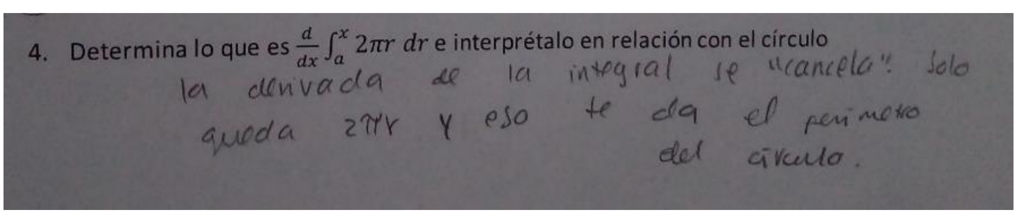
2. Construya un círculo e ilustre lo que representa $A(x) = \int_2^4 2\pi r\, dr$

→ lo que representa

el área de 2 a 4

“■ → lo que representa. El área de 2 a 4”

Ejemplo B3. El estudiante relaciona el concepto de derivada con el concepto de pendiente y para él es evidente por sí mismo.



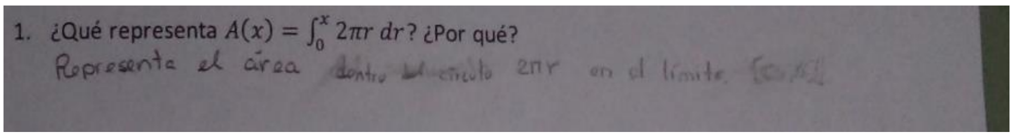
4. Determina lo que es $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r\, dr$ e interprétalo en relación con el círculo

la derivada de la integral se "cancela". Solo queda 2πr y eso te da el perímetro del círculo.

“La derivada de la integral se cancela, solo queda 2πr y eso te da el perímetro del círculo”

C. **Modelo Intuitivo**. Es una representación visual que es autoevidente de un concepto. Estas imágenes visuales tienen la capacidad de expresar una variedad de ideas mediante el uso de los elementos del modelo.

Ejemplo C1. Uso del modelo intuitivo de área bajo la curva en la pregunta 1 del cuestionario de investigación.

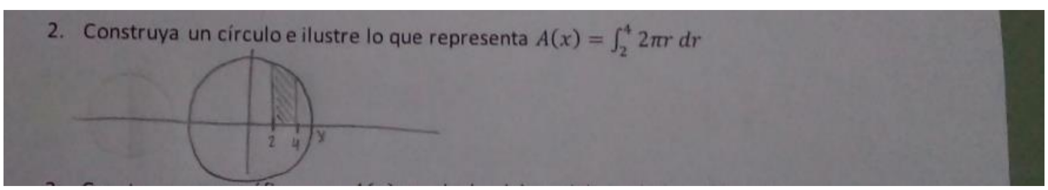


1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r \, dr$? ¿Por qué?

Representa el área dentro del círculo $2\pi r$ en el límite

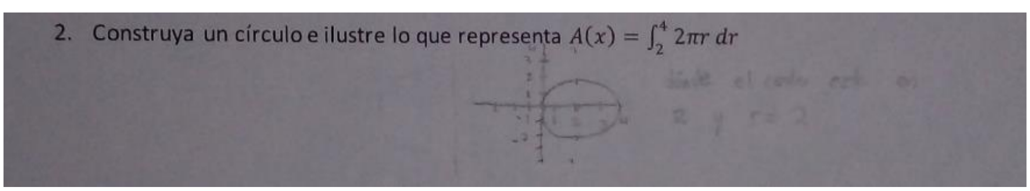
“Representa el área dentro del círculo $2\pi r$ en el límite $[0, x]$”

Ejemplo C2. Uso del modelo intuitivo de área bajo la curva en la pregunta 2 del cuestionario de investigación.



2. Construya un círculo e ilustre lo que representa $A(x) = \int_2^4 2\pi r \, dr$



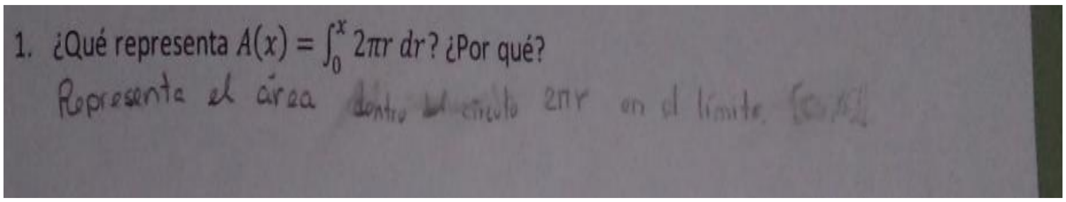


2. Construya un círculo e ilustre lo que representa $A(x) = \int_2^4 2\pi r \, dr$

“Dónde el centro está en 2 y $r = 2$”

D. **Razonamiento covariación**. El razonamiento covariable se refiere a la coordinación de una imagen de dos cantidades variables, al tiempo que se ocupa de cómo cambian entre sí (Carlson, 2003, p. 165).

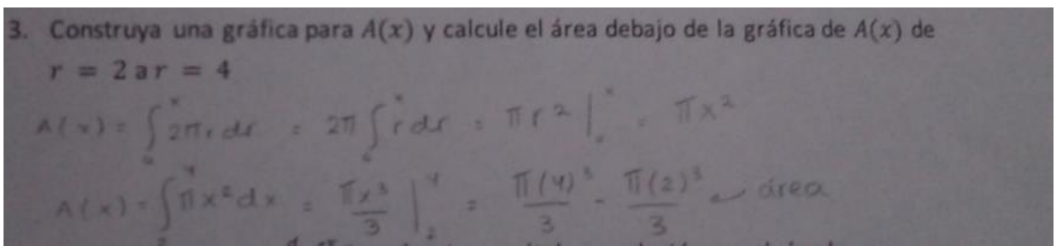
Ejemplo D1. Se tiene una solución que implica un razonamiento covariable, debido a las dos funciones que a la vez varían $x$ y $\int_0^x 2\pi r dr$ en la función de acumulación $A(x)$.



1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?

Representa el área dentro del círculo $2\pi r$ en el límite $[0, x]$

“Representa el área dentro del círculo $2\pi r$ en el límite $[0, x]$”



3. Construya una gráfica para $A(x)$ y calcule el área debajo de la gráfica de $A(x)$ de $r = 2$ a $r = 4$

$$"A(x) = \int_2^4 2\pi r\, dr = 2\pi \int_2^4 r\, dr = \pi r^2 \Big|_0^x = \pi x^2$$

$$A(x) = \int_2^4 \pi x^2\, dx = \frac{\pi x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{\pi(4)^3}{3} - \frac{\pi(2)^3}{3}"$$

En resumen, lo que se hizo en este capítulo fue obtener algunas conclusiones sobre el análisis de los códigos. A partir de estas conclusiones se especificaron algunas características entre códigos de tal manera que se formaron unas categorías. Se presentaron las categorías con su definición y ejemplos. En el siguiente capítulo se va a presentar una conclusión general y comentarios sobre la relación entre las categorías que se mostraron.

# Capítulo VI. Conclusiones

En este capítulo se presentan las respuestas a las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo I. Las respuestas son inferidas a partir de la discusión hechas en el capítulo anterior en donde se obtuvieron conclusiones alcanzadas por medio de la ejecución de los primeros pasos de la teoría fundamentada. Después se muestra una conclusión general; se pasa a hablar sobre las limitaciones de este estudio y se escribe una perspectiva de lo que seguiría por investigar al respecto.

La pregunta de investigación en este trabajo es: ¿Qué dificultades y niveles de razonamiento de los estudiantes se revelan en sus respuestas y argumentaciones a un problema no rutinario que implica el TFC? Se responde la pregunta en dos partes, primero se describen los niveles de razonamiento de los estudiantes y después se consideran las dificultades presentadas en sus respuestas.

**Respuesta 1**. Los estudiantes utilizan el modelo de área bajo la curva para responder las preguntas del problema, pero no ajustan la situación con el modelo, sino que los superponen de manera mecánica dando lugar a distorsiones. Esas distorsiones comprometen la resolución correcta de las preguntas del cuestionario, sin embargo, nos permitió identificar las concepciones empleadas por los estudiantes. Como se vio en el Capítulo IV, entre las concepciones vistas en las respuestas de los estudiantes se tiene la operación algorítmica, la intuición o el sincretismo.

**Operación algorítmica**. La integral es un procedimiento que requiere la aplicación de reglas algorítmicas o artificios de integración. Este procedimiento requiere el manejo del algebra elemental. Su construcción matemática está sustentada por las sumas de Riemann.

**Intuición**. Es una categoría de cogniciones sin la necesidad de justificación o interpretación explícita. El conocimiento intuitivo es una forma de cognición que parece presentarse a una persona como evidente por sí misma.

**Modelo intuitivo**. Es una representación visual intuitiva de un concepto. Cuando decimos intuitiva nos referimos que es obvio. Estas imágenes visuales tienen la capacidad de expresar una variedad de ideas mediante el uso de los elementos del modelo. Por parte de los estudiantes, el principal modelo intuitivo usado en la resolución del cuestionario de investigación fue el modelo de área bajo la curva.

**Sincretismo**. Es la tendencia de mezclar diversas entidades en una sola. Para los estudiantes es lo mismo el concepto que su modelo, así, la integral siempre es un área bajo la curva.

Como se dijo en el Capítulo II, esas concepciones implican un nivel de razonamiento. Según lo visto en el Capítulo V, los niveles de razonamiento de los estudiantes se relacionan con los conceptos que involucra el teorema fundamental; a saber, área, acumulación, función, y covariación.

**Respuesta 2**. Para comentar sobre las dificultades que se presentaron a los estudiantes durante la solución del problema se consideran los siguientes puntos.

- La experiencia práctica del estudiante limitó la resolución del problema en el uso exclusivo de operaciones algorítmicas; esto es, fórmulas de derivadas e integrales. Por consiguiente, el estudiante no fue capaz de identificar el concepto de acumulación.
- En el caso de los estudiantes se desconoce la representación gráfica de las funciones de acumulación, lo cual dificultó la representación del teorema fundamental. Incluso el uso del modelo intuitivo entorpeció la representación.
- También se tiene que el uso del modelo intuitivo obstaculizó el manejo adecuado de la notación matemática, por ejemplo, se ve que los estudiantes confundían $A(x)$ con $\int A(x)dx$.

**Conclusión general**. El modelo intuitivo de área bajo la curva es un modelo que permite introducir el tema de la integral a los alumnos. Con este modelo se puede apreciar la comprobación de propiedades de la integral (Apóstol, 1990). El modelo de área bajo la curva también es útil para interpretar (o comprobar visualmente) el primer teorema fundamental del cálculo (Capítulo II). No obstante, dicho modelo no es completo, en el sentido de que permita representar todas las situaciones en que interviene el concepto de integral, por lo que en determinadas situaciones la identificación del modelo con la integral puede obstaculizar la solución de un problema o distorsionarla. En el presente trabajo, se muestra alguna evidencia de que los estudiantes usan el modelo de área bajo la curva de manera inapropiada al tratar de responder las preguntas de un problema relativo al teorema fundamental en el que dicho modelo no resulta útil. Entre las dificultades se tiene el manejo inadecuado de la notación matemática implicada por la notación de funciones de acumulación. Otro obstáculo es la incomprensión del concepto de acumulación de área que está contemplado en el teorema fundamental. La siguiente limitación es la confusión por parte de los estudiantes entre la gráfica de la función de acumulación y el área bajo la curva indicada por el modelo intuitivo. Como se vio en el análisis de datos (Capítulo IV y V) todas estas dificultades impiden resolver el problema de forma correcta (o se resuelve parcialmente). Para superar estas limitaciones se sugiere no dilatar mucho el uso del modelo de área bajo la curva e introducir lo más pronto posible un modelo didáctico distinto. Acorde con Thompson (1977) “Para comprender o resolver problemas, es necesario que los esquemas conceptuales y la representación intuitiva funcionen de la mano” (p. 154). La sugerencia es un modelo didáctico concerniente al problema por resolver. Esto, por supuesto, requiere de investigación para decir más al respecto.

**Limitaciones de este estudio**. Para analizar más variables sobre las concepciones de la integral respecto de este estudio indicaremos que es necesario agregar más preguntas al cuestionario con el objetivo de estudiar el papel de la variable superior de la integral de $A(x)$, y así relacionarlo con el problema de notación matemática, y con la definición de covarianza.

**Investigación futura**. Como se advirtió en este trabajo de tesis, el modelo intuitivo de área bajo la curva presenta restricciones para los estudiantes en el proceso de razonamiento al resolver problemas no rutinarios sobre el primer teorema fundamental del cálculo. Entonces, se sugiere desarrollar modelos intuitivos asociados a la idea de acumulación.

**Descripción**. Por ejemplo, retomando el problema no rutinario visto en este trabajo de investigación (Capítulo II) se propone un modelo pictórico sobre el problema. El modelo consiste en una representación en GeoGebra de la pregunta del cuestionario (ver Imagen 6.1). En este modelo se aprecian dos pantallas. Del lado izquierdo se representa la circunferencia $c$ que se expande de $r = 0$ a $r = X$. Del lado derecho se muestra la gráfica de la función de acumulación $f$ en términos del área de $c$. Es decir, la función $f$ representa el área acumulada de la circunferencia. La función $g$ es la recta tangente de $f$ en $F_a$. Esto es, $g$ es la razón de cambio de acumulación de $f$. A partir del problema se debería deducir que $f$ es una función de acumulación y que $g$ se obtiene al derivar $f$. Luego, al derivar una función de acumulación se puede usar el teorema fundamental del cálculo. Por tanto, se podría decir que este modelo es un modelo didáctico sobre el teorema fundamental en términos del problema presentado en esta tesis.

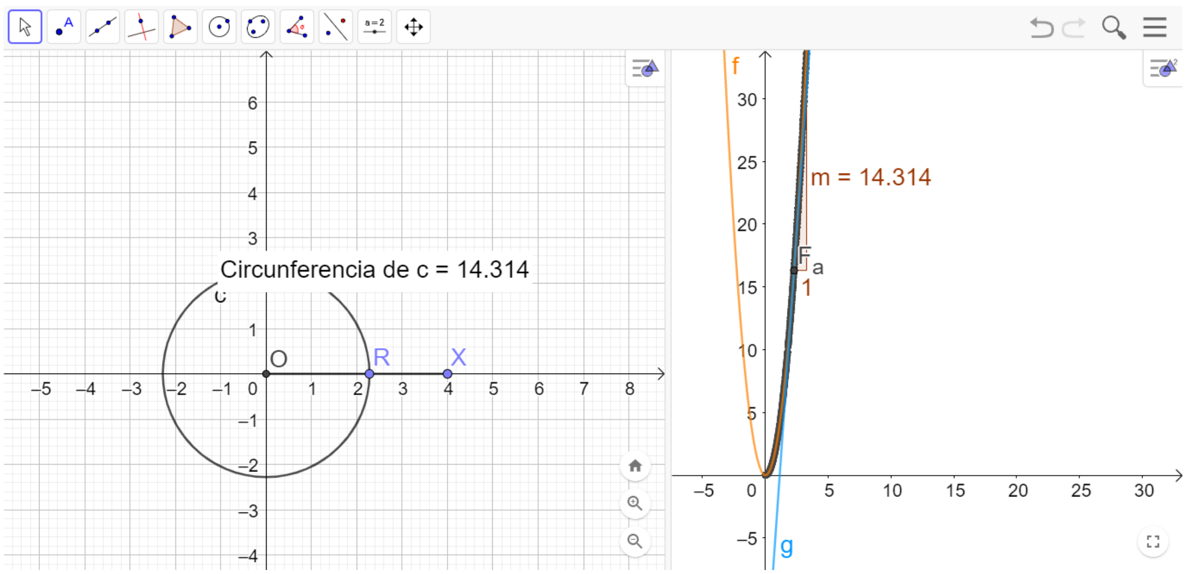



Imagen 6.1

Se sugieren las siguientes preguntas, ¿el modelo didáctico es un modelo intuitivo bajo las características de Fischbein (1977)? ¿Qué limitaciones presentaría este modelo pictórico para los estudiantes durante el proceso de razonamiento sobre el teorema fundamental? Sin embargo, continuar con la descripción de la *investigación futura* sale del propósito de este trabajo y hasta aquí dejamos el escrito.

# Referencias


Apóstol, T. M., (1990), *Calculus 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal,* España, Editorial Reverté.

Carlson, M. P., Persson, J., & Smith, N. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the fundamental theorem of calculus. *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA*, 2, 165-172. Honolulu, HI.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational studies in mathematics, 8*(1977), 153-165.

Fischbein, E., (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach,* Tel aviv, Israel, Kluwer academic publishers.

Flyvbjerg, B. (2011). Case study. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (pp. 301-316). Thousand Oaks, CA.

Natanson, I. P., (1984), *La suma de cantidades infinitamente pequeñas,* México, Limusa.

National Council of Teachers of Mathematics. (2008). *Focus in high school mathematics: reasoning and sense making,* NCTM.

Spivak, M., (1992), *Calculus. Cálculo infinitesimal,* España, Editorial Reverté.

Stake, R. E. (1978). The case study method in social inquiry. *American Educational Research Association*, *7*(2), 5-8.

Teppo, A. (2015). Grounded theory methods. In A. Bikner-Ahsbahs et al. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 3-21). Dordrecht: Springer,

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational studies in mathematics, 26*(1994), 229-274.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in* *undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Vygotsky, L. S., (2015), *Pensamiento y lenguaje*, México, Booket-Paidós.

# Anexo 1

A continuación, se reproduce el cuestionario que se empleó como instrumento.

**Departamento de Matemática Educativa**

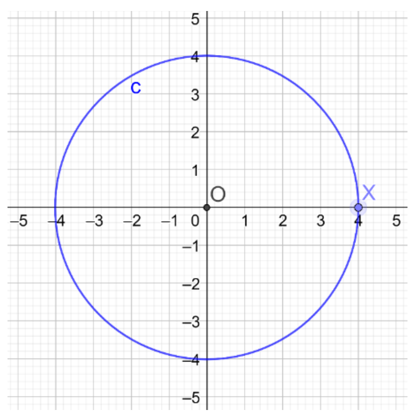
**CINVESTAV-IPN**

**Test**

**Profesor: Eduardo Bernabé**

eduardo.bernabe@cinvestav.mx

**Instrucciones**. Resuelva el siguiente problema y describa su procedimiento lo más claro posible. **Problema**. Consideren un círculo que se expande en tamaño de $r = 0$ a $r = x$.

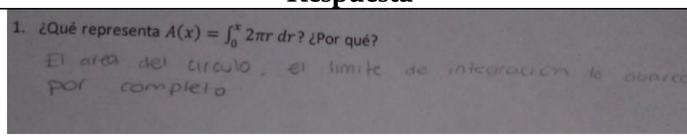
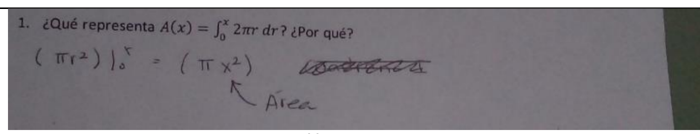
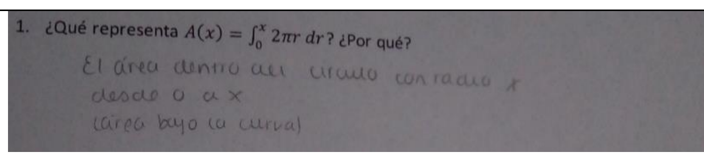
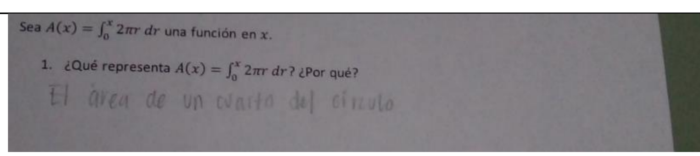


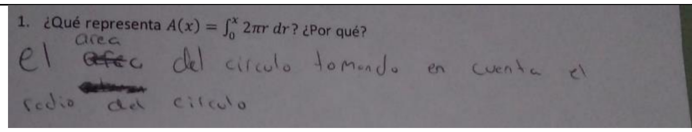
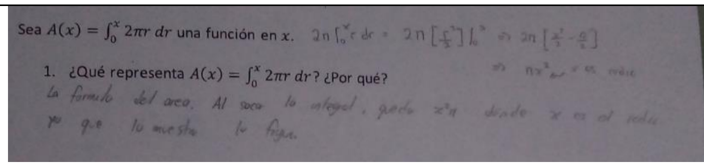
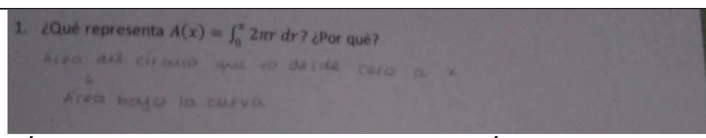
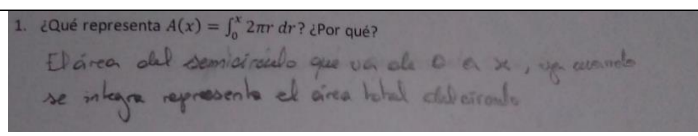
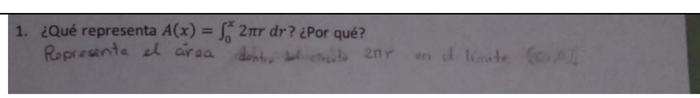

Sea $A(x) = \int_0^x 2\pi r\,dr$ una función en $x$.

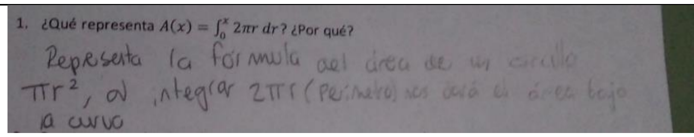
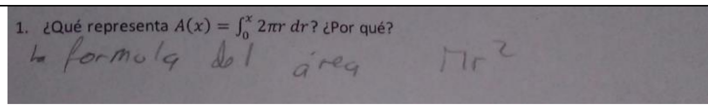
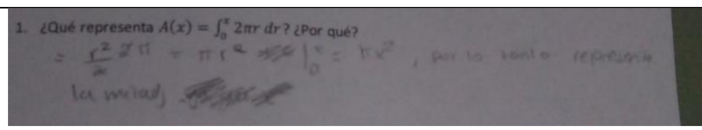
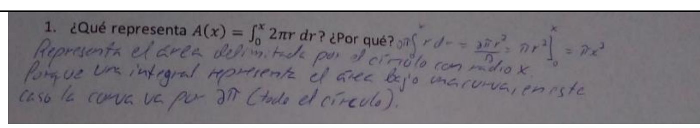
1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\,dr$? ¿Por qué?
2. Construya un círculo e ilustre lo que representa $A(x) = \int_2^4 2\pi r\,dr$
3. Construya una gráfica para $A(x)$ y calcule el área debajo de la gráfica de $A(x)$ de $r = 2$ a $r = 4$
4. Determina lo que es $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r\,dr$ e interprétalo en relación con el círculo

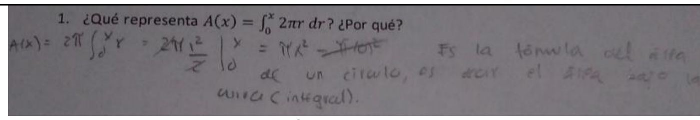
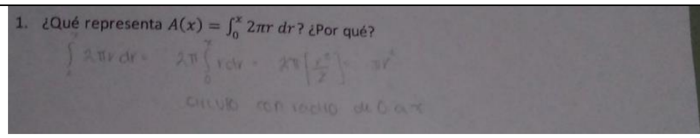
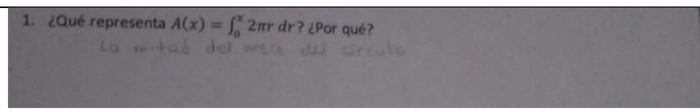
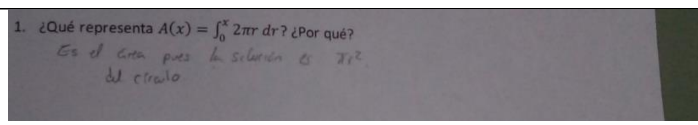
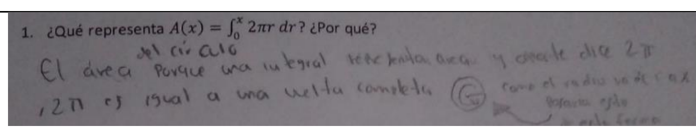
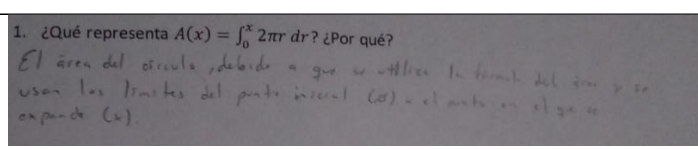
# Anexo 2

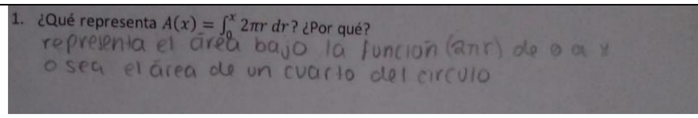
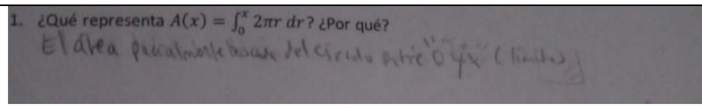
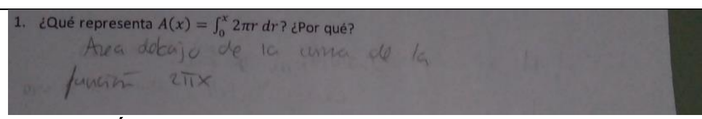
Como ejemplo, en seguida se presenta el procedimiento de codificación de la primera pregunta del cuestionario.

| **Alumno** | **Respuesta** | **Comentario** |
|---|---|---|
| Estudiante 01 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué? El area del circulo, el limite de integracion lo abarca por completo<br>“El área del círculo, el límite de integración lo abarca por completo” | El estudiante relaciona $A(x)$ con el área de un círculo, sin embargo, no aclara si se refiere al círculo de radio $x$.<br><br>**Código**: Asocia la integral con el área de un círculo |
| Estudiante 02 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué? $(\pi r^2)\Big\vert_0^x = (\pi x^2)$ Área<br>“$(\pi r^2)\Big\vert_0^x = (\pi x^2)$ Área” | Calculó el valor de la integral y el estudiante notó que es el área; pero sólo interpreta el resultado como área sin especificar de qué círculo.<br><br>**Código**: Asocia la integral con un área |
| Estudiante 03 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué? El área dentro del circulo con radio $x$ desde 0 a $x$ (área bajo la curva)<br>“El área dentro del círculo con radio $x$ desde 0 a $x$ (área bajo la curva)” | Expresa bien el resultado, pero el contenido del paréntesis delata que confunde la función $2\pi r$ con el círculo.<br><br>**Código**: Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo |
| Estudiante 04 |  Sea $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$ una función en $x$. 1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué? El área de un cuarto del círculo<br>“El área de un cuarto del círculo” | Respuesta incorrecta, el estudiante interpretó $2\pi r$ como la función que grafica el círculo, y lo relacionó con un significado de la integral (área bajo la curva). |

| | | |
|---|---|---|
| | | **Código**: Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo |
| Estudiante 05 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>"El área del círculo tomando en cuenta el radio del círculo" | Respuesta correcta, pero no argumentó nada.<br><br>**Código**: Asocia la integral con el área del círculo |
| Estudiante 06 | <br>Sea $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$ una función en $x$.<br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>"La fórmula del área. Al sacar la integral, queda $x^2\pi$ donde $x$ es el radio ya que lo muestra la figura" | Respuesta correcta, el estudiante lo concluyó al obtener la integral y darse cuenta de que es la fórmula del área de la circunferencia.<br><br>**Código**: Asocia la integral con el área del círculo y la calcula |
| Estudiante 07 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>"Área del círculo que va desde cero a $x$. Área bajo la curva" | Respuesta correcta, pero no argumentó nada.<br><br>**Código**: Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo |
| Estudiante 08 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>"El área del semicírculo que va de 0 a $x$, ya cuando se integra representa el área total del círculo" | Incorrecto, el estudiante interpretó la integral como el área bajo la curva y como la integración es de los límites de 0 a $x$, él concluyó que es el área del semicírculo.<br><br>**Código**: Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo |
| Estudiante 09 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>"Representa el área dentro del círculo $2\pi r$ en el límite $[0, x]$" | Correcto, pero no explicó por qué es cierto. Además, hay confusión cuando expresa que $2\pi r$ es una circunferencia. |

| | | |
|---|---|---|
| | | **Código**: Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo |
| Estudiante 10 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>Representa la fórmula del área de un circulo $\pi r^2$, al integrar $2\pi r$ (perímetro) nos dará el área bajo la curva<br><br>"Representa la fórmula del área de un circulo $\pi r^2$, al integrar $2\pi r$ (perímetro) nos dará el área bajo la curva" | Correcto, obtuvo el valor de la integral y lo relacionó con el área de la circunferencia. Aunque no queda claro a qué se refiere con área bajo la curva.<br><br>**Código**: Asocia la integral con el área del círculo |
| Estudiante 11 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>La formula del área $\pi r^2$<br><br>"La fórmula del área $\pi r^2$" | Correcto, pero no argumentó nada. No se sabe si él integró o no.<br><br>**Código**: Asocia la integral con un área |
| Estudiante 12 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br><br>"$= \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \pi r^2 \Big\|_0^x = \pi x^2$, por lo tanto, representa la mitad" | Parcialmente correcto, el estudiante obtuvo la integral y no pudo concluir que era el área del círculo, pues él escribió que representa la mitad del área.<br><br>**Código**: Confusión integral con área del círculo |
| Estudiante 13 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br><br>"$2\pi \int_0^x r dr = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2 \Big\|_0^x = \pi x^2$<br>Representa el área delimitada por el círculo con radio $x$. Porque una integral representa el área bajo una curva, en este<br>caso la curva va por $2\pi$ (todo el círculo)" | Parcialmente correcto, él obtuvo el valor de la integral y concluyó que es área del círculo. Pero el comentario final puede indicar que él pensaba que $2\pi r$ representa la gráfica del círculo.<br><br>**Código**: Relación integral con área del círculo |

| | | |
|---|---|---|
| Estudiante 14 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“$A(x) = 2\pi \int_0^x r = \frac{2\pi r^2}{2}\Big\vert_0^x = \pi x^2 - \pi \cdot 0^2$. Es la fórmula del área de un círculo, es decir el área bajo la curva (integral)” | Parcialmente correcto, obtuvo el valor de la integral y concluyó que es el área de la circunferencia.<br><br>**Código**: Relación integral con área del círculo |
| Estudiante 15 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“$\int_0^x 2\pi r dr = 2\pi \int_0^x r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right] = \pi r^2$ circulo con radio de 0 a $x$” | Obtuvo la integración, pero no argumentó nada.<br><br>**Código**: Asocia la integral con área del círculo |
| Estudiante 16 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“La mitad del área del círculo” | Incorrecto y no escribió ningún argumento.<br><br>**Código**: Confusión con la función $2\pi r$ y el círculo |
| Estudiante 17 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“Es el área pues la solución es $\pi r^2$ del círculo” | Correcto, pero su argumento no lo sostiene con ninguna ecuación.<br><br>**Código**: Asocia la integral con el área del círculo |
| Estudiante 18 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“El área del círculo porque una integral representa área y aparte dice $2\pi$, $2\pi$ es igual a una vuelta completa [dibujo de una circunferencia] como el radio va de $r$ a $x$ pasaría esto [señala el dibujo] de esta forma sabrías el área” | Correcto pero su argumento es con la idea de integración con coordenadas polares al hablarnos de giros.<br><br>**Código**: Confusión con la función $2\pi r$ y el círculo |
| Estudiante 19 |  1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\, dr$? ¿Por qué?<br>“El área del círculo, debido a que se utiliza la fórmula del área y se usan los límites del punto inicial (0) a el punto en el que se expande $(x)$” | Correcto, pero su argumento está incompleto, porque sólo indica los límites de integración y no sabemos si integró. |

| | | |
|---|---|---|
| | | **Código**: Asocia la integral con el área del círculo |
| Estudiante 20 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\,dr$? ¿Por qué?<br>representa el área bajo la función (2πr) de 0 a x o sea el área de un cuarto del círculo<br>“Representa el área bajo la función ($2\pi r$) de 0 a $x$ o sea el área de un cuarto del círculo” | Al comienzo usa la interpretación de la integral como área bajo la curva, pero se equivoca al creer que el círculo es la gráfica de $2\pi r$.<br><br>**Código**: Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo |
| Estudiante 21 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\,dr$? ¿Por qué?<br>El área parcialmente buscada del círculo entre "0" y "x" (límite)<br>“El área parcialmente buscada del círculo entre “0” y “$x$” (límite)” | No hay Ningún argumento válido que sustente la respuesta del estudiante, es decir, si integró o si se refiera a la interpretación área bajo la curva.<br><br>**Código**: Confusión de integración y límite |
| Estudiante 22 | <br>1. ¿Qué representa $A(x) = \int_0^x 2\pi r\,dr$? ¿Por qué?<br>Área debajo de la curva de la función 2πx<br>“Área debajo de la curva de la función $2\pi x$” | Sólo interpretó por el significado de la integral como área bajo la curva, pero le asigna la función incorrecta (en vez de $2\pi r$); además no concluye qué representa $A(x)$.<br><br>**Código**: Confusión de la función $2\pi r$ con el círculo |