



Centro de Investigación y Estudios Avanzados del

**Instituto Politécnico Nacional**

Unidad Zacatenco

Departamento De Matemática Educativa

**LAS CONDICIONES Y LOS EFECTOS DE LOS ESTADOS  
EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO (SEGURIDAD O DUDA EN  
TORNO A HECHOS DE LAS MATEMÁTICAS) QUE SURGEN  
DURANTE LA RESOLUCIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS**

TESIS

Que presenta

**MARÍA ALEJANDRA BERNAL PINZÓN**

Para obtener el grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS**

En la especialidad de:

**MATEMÁTICA EDUCATIVA**

Directora de la Tesis:

**Dra. Mirela Rigo Lemini**

Ciudad de México

Mayo, 2022



Agradezco al  
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt)  
quien, a través de su apoyo, me ha permitido  
realizar mis estudios de maestría.

María Alejandra Bernal Pinzón

CVU 940742



*Dedico a mi mamá, Mary Luz, a mi papá, José Joaquín,  
y a mis hermanos, Carolina y Fabian, con mucho amor.*

*Sin su apoyo no hubiese sido posible.*

*Y por supuesto a mi hija, Sara Gabriela, por ella todo.*



## AGRADECIMIENTOS

Cuando decidí iniciar mis estudios de maestría lejos de mi familia, de mis amigos, mis estudiantes, de mi país... Estuve lejos de imaginar cuanto cambiaría mi vida, lejos de contemplar que la gratitud que siento me sobrepasa.

Quiero iniciar agradeciendo a Dios por cada una de sus bendiciones.

Además, y con una mirada en retrospectiva, quiero valorar y resaltar a las personas que fueron partícipes de este proceso formativo en mi vida.

Infinita gratitud a quienes me apoyaron desde siempre, a quienes a pesar de los kilómetros que nos separaban siguen ahí, justo donde los he necesitado. A mis papás y a mis hermanos por creer en mí y por su apoyo incondicional. A Andrey por su amor, por impulsarme, y por acompañarme durante este proceso.

Quiero agradecer al país que me recibió con las puertas abiertas, México. Y a cada uno de los mexicanos que tuve el honor de conocer.

Especialmente agradezco a la Dra. Mirela, por aceptarme en su grupo de investigación, por trabajar “codo a codo” con nosotras, por cada una de sus enseñanzas, y porque muchas de sus reflexiones llegaron justo a tiempo y perdurarán en mi para siempre. Mi admiración a ella y a su compromiso por la investigación.

Por supuesto a Caro, a ella gratitud infinita, por el excelente equipo que construimos y por su amistad incondicional. Al igual que a todos mis compañeros de cohorte: a Sofi por su espontaneidad, amistad y cariño; a Mike por irradiarnos de su jovialidad; a Maritza por compartirnos un poco

de su experiencia docente; a Gaby por su espontaneidad; y a Eli por su laboriosidad.

Al Cinvestav, en especial quienes fueron partícipes de mi proceso: el Dr. Quintero, el Dr. Ulises, la Dra. Aurora, la Dra. Sonia y Dra. Valdemoros, a ellos gracias por sus seminarios y compartir con nosotros sus conocimientos. Por supuesto, y con un aprecio muy especial, a Adrianita y Allan, por estar siempre dispuestos a ayudarnos.

Por último, y no menos importante, agradezco a quienes han sido familia en México: Aleja C, Fredy, Andrea, Dani y Luis Carlos, porque ellos junto a mi hija y Andrey han hecho de México, un lugar con color colombiano, un lugar con olor a hogar.

¡Gracias!

## ÍNDICE

<b>RESUMEN</b> .....	<b>13</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>15</b>
<b>CONTEXTO EN EL QUE SE HA DESARROLLADO EL TRABAJO DE TESIS: EL PROGRAMA INTERDISCIPLINARIO SOBRE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO (PEEC)</b> .....	<b>17</b>
PRESENTACIÓN .....	17
EL PROGRAMA INTERDISCIPLINARIO SOBRE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO (PEEC) .....	20
UNA PROPUESTA DE CARACTERIZACIÓN DE LOS EEC.....	22
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>27</b>
<b>CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES</b> .....	<b>29</b>
LOS EEC Y LA INTUICIÓN .....	30
DIFERENCIAS ENTRE CONVICCIÓN Y VALIDEZ.....	31
SOBRE CALIBRACIÓN .....	31
LA CONSIDERACIÓN DE LOS EEC (EL CALIFICADOR MODAL) EN LA MODELACIÓN DE ARGUMENTOS MATEMÁTICOS.....	33
SOBRE LA DUDA Y LA INCERTIDUMBRE .....	34
CONSIDERACIONES SOBRE LA REVISIÓN DE LA LITERATURA: LAS DEFINICIONES DE LOS EEC.....	35
EMOCIONES EPISTÉMICAS .....	38
<b>CAPÍTULO 2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b> .....	<b>41</b>
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN .....	42
OBJETIVO GENERAL .....	43

OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	44
<b>CAPÍTULO 3 MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE DATOS, HERRAMIENTAS ANALÍTICAS Y METODOLOGÍA.....</b>	<b>45</b>
MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE DATOS .....	45
ASPECTOS METODOLÓGICOS Y HERRAMIENTAS ANALÍTICAS .....	48
<b>CAPÍTULO 4 EXPOSICIÓN DE LOS RESULTADOS EMPÍRICOS.....</b>	<b>57</b>
CASO DE MICHAELLE (TAREA DE LAS MADEJAS).....	61
CASO DE HANNIA (TAREA DE LAS MADEJAS) .....	72
CASO DE ERIK (TAREA DE LAS MADEJAS).....	78
CASO DE ALESSANDRA (TAREA DE LAS MADEJAS) .....	83
CASO DE ALESSANDRA (TAREA DE LAS TELAS) .....	96
<b>CAPÍTULO 5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS .....</b>	<b>109</b>
METAS Y LOS REQUERIMIENTOS DE VERDAD .....	109
CONDICIONES PARA LA SEGURIDAD .....	111
CONDICIONES PARA LA DUDA .....	113
EFECTOS DE LA SEGURIDAD Y LA DUDA .....	116
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES.....</b>	<b>119</b>
UTILIDAD DE LA INVESTIGACIÓN .....	122
PERSPECTIVAS.....	123
<b>CAPÍTULO 7 REFERENCIAS.....</b>	<b>129</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>135</b>
ANEXO 1: CUESTIONARIO CONCEPTUAL.....	135
ANEXO 2: CUESTIONARIO PROCEDIMENTAL .....	141

ANEXO 3: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA MICHAELLE.....144  
ANEXO 4: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA RAÚL .....149  
ANEXO 5: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA PAOLA.....154  
ANEXO 6: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA HANNIA .....160  
ANEXO 7: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA ALESSANDRA .....165  
ANEXO 8: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA ERICK .....171



## RESUMEN

En esta investigación, orientada por un enfoque cualitativo de la Teoría Fundamentada, se exponen los resultados de un estudio sobre los estados epistémicos de convencimiento (eec), como la seguridad y la duda.

Con base en los datos empíricos recabados (provenientes de las producciones ilustrativas de cuatro alumnos, al resolver tareas de valor faltante) y herramientas cualitativas de la Teoría Fundamentada, se construye un modelo teórico de las trayectorias de esos estados que surgen durante la resolución de tareas matemáticas. En el modelo se consideran los factores que condicionan la experiencia de esos estados y los efectos que ellos ejercen sobre el trabajo matemático. Se trata de una herramienta que permite generar unas primeras explicaciones y comprensiones de esos eec y sus relaciones con el trabajo matemático.

Se recurre a la Teoría Fundamentada porque el estudio sobre la naturaleza y características de los eec es de tipo exploratorio y esta teoría ofrece, para este tipo de estudios iniciales, herramientas analíticas para construir categorías teóricas encaminadas a generar hipótesis y conjeturas fundadas en datos empíricos y para construir esas primeras explicaciones y comprensiones.

Se identificaron las posibles condiciones que generan los eec: la presencia de Metas Epistémicas que, con base en ciertos Requerimientos de Verdad que el alumno se impone, valora como satisfechas o no satisfechas. Se reconocieron también los posibles efectos de los eec en torno a algún hecho

de las matemáticas (H), sobre el trabajo matemático, generando tendencias a favor de H o de alejamiento.

Se argumenta que los eec funcionan como un sistema de alarma que informa a la persona sobre el estatus de esas necesidades y como un sistema que las prepara para actuar en consecuencia.

## ABSTRACT

In this research, guided by a qualitative approach of the Grounded Theory, the results of a study on the epistemic states of conviction (eec), such as security and doubt, are presented.

Based on the empirical data collected (from the illustrative productions of four students, when solving missing value tasks) and qualitative tools of the Grounded Theory, a theoretical model of the trajectories of these states that arise during the resolution of tasks is built. math. The model considers the factors that condition the experience of these states and the effects they have on mathematical work. It is a tool that allows generating some initial explanations and understandings of these eec and their relationships with mathematical work.

The Grounded Theory is used because the study on the nature and characteristics of the eec is of an exploratory nature and this theory offers, for this type of initial studies, analytical tools to build theoretical categories aimed at generating hypotheses and conjectures based on empirical data and to build those first explanations and understandings.

The possible conditions that generate the eec were identified: the presence of Epistemic Goals that, based on certain Truth Requirements that the student imposes, values as satisfied or not satisfied. The possible effects of the eec around some fact of mathematics (H), on the mathematical work, generating tendencies in favor of H or away from it were also recognized.

It is argued that the eec work as an alarm system that informs the person about the status of these needs and as a system that prepares them to act accordingly.

# CONTEXTO EN EL QUE SE HA DESARROLLADO EL TRABAJO DE TESIS: EL PROGRAMA INTERDISCIPLINARIO SOBRE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO (PEEC)

M. Rigo Lemini

## PRESENTACIÓN

El trabajo cuyos resultados aquí se exponen forma parte de uno más amplio, desarrollado en el marco de un Programa de investigación interdisciplinario. El Programa se centra en el estudio de la seguridad, la confianza, el convencimiento, la certeza o la duda (llamados 'estados epistémicos de convencimiento' y denotados como 'eec', por Rigo-Lemini (2013)) que las personas experimentan alrededor de (la veracidad de) axiomas, postulados, teoremas, algoritmos de la matemática escolar, resultados de esos algoritmos, resultados de tareas matemáticas escolares y, en general, alrededor de la veracidad de afirmaciones de contenido matemático (denotadas como 'H').

Los expertos – sostiene Rigo-Lemini (2009) y Martínez (2020)- han dado cuenta de la presencia constante de esos eec en las actividades disciplinares, básicamente asociadas a la prueba, que realizan los profesionales de las matemáticas. Esos eec acompañan las etapas heurísticas que preceden a las pruebas (Balacheff, 2000; de Villiers, 2010; Hanna & Jahnke, 1996). Por ejemplo, un matemático -afirma (de Villiers, 2010)- tiene que estar razonablemente convencido de la verdad de una afirmación matemática antes de invertir energía y tiempo en una prueba. Los eec también están

presentes durante la prueba, en forma de criterio en los procesos de verificación: para que sea incluido dentro de las matemáticas, un teorema debe ser consecuencia de una prueba que convenza a la comunidad de los expertos (Tymoczko, 1986). Y los eec están también presentes después de la prueba: una vez que un teorema ha sido aprobado, este se utiliza, se aplica o se generaliza cuando alcanza un estado de 'rock bottom', es decir cuando la comunidad está profundamente convencida del teorema (Davis & Hersh, 1983). En muchos casos, los eec actúan como impulso que incentiva y orienta los trabajos matemáticos: Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007), por ejemplo, encontraron que la poca probabilidad de verdad (interpretada por los autores como duda) que estudiantes de posgrado de matemáticas asignaron a una proposición los orientó a buscar un contraejemplo para refutarla. No obstante, y en contraparte, también se ha advertido que esos eec pueden representar un obstáculo para el desarrollo de los trabajos matemáticos: en contextos de prueba, Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007) observaron que cuando un estudiante asoció confianza a una afirmación basada en garantías inductivas no tuvo después necesidad de construir una prueba que soportara dicha afirmación. De hecho, muchos pasajes de la historia de las matemáticas ilustran cómo los eec pueden llegar a representar un impedimento para el avance del conocimiento: el caso de la certeza incuestionada que Saccheri experimentó en torno a la verdad del V Postulado es un ejemplo paradigmático (Heath, 1956; Kline, 1985, 2009; Martínez, 2020)

Los eec surgen también durante los distintos trabajos matemáticos que se realizan en el ámbito escolar. Como se puede ver en la reseña bibliográfica incluida en este documento (y en Martínez (2020) y Rigo-Lemini (2009)), los agentes educativos (estudiantes y maestros de todos los niveles educativos) experimentan eec diversos cuando realizan actividades matemáticas. De igual forma, en la bibliografía (Duval, 1999; Fischbein, 1987; Inglis et al., 2007) se ha reportado que los eec que experimentan los actores educativos pueden incidir de manera positiva favoreciendo sus aprendizajes y coadyuvando al éxito de las resoluciones de las tareas.

No obstante -como se aprecia también en la literatura-, los eec pueden igualmente obstruir los procesos cognitivos y los de construcción de conocimientos matemáticos.

¿Cuáles serán las condiciones en el aula bajo las cuales los eec (que experimentan los alumnos) pudieran operar como un motor de los aprendizajes y no como un freno? ¿Es posible generar esas condiciones? ¿Cómo hacerlo y cuál sería el papel que debiera jugar el profesor con sus formas habituales de justificar y de convencer a sus alumnos (muchas veces inconscientes)? ¿Y cuál el papel de los libros de texto y el del currículum de matemáticas? Estos son problemas de la pedagogía y de la didáctica de la matemática que se expresan en todos los niveles educativos, que es muy probable que desconozcan los educadores (incluyendo a los investigadores), los responsables del currículum y los de la elaboración de los libros de texto y cuya consideración y resolución resulta inaplazable.

Otras problemáticas de la misma índole, algunas sí multicitadas en la literatura, son: ¿Con qué argumentos o justificaciones se suelen convencer los estudiantes? ¿Cómo conseguir que los alumnos se convenzan con el tipo de justificaciones o razonamientos que corresponden a su nivel escolar (e.g., con justificaciones matemáticas vs las basadas en la autoridad; con justificaciones deductivas vs inducciones empíricas (v. Fischbein (1987)))? o bien, ¿Cómo conseguir que el alumno tienda a sentir seguridad o certeza en afirmaciones matemáticamente correctas o argumentos lógicamente válidos y a experimentar duda en afirmaciones matemáticamente incorrectas o argumentos inválidos (ie, conseguir que el alumno esté bien calibrado? (Fischbein, 1987; Foster, 2016)

### **EL PROGRAMA INTERDISCIPLINARIO SOBRE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO (PEEC)**

Con el fin de poder proponer estrategias iniciales de intervención en el aula, adecuadas y efectivas que tengan la finalidad de ofrecer posibles soluciones a estas y otras problemáticas relacionadas con los eec, se creó un Programa de Investigación Interdisciplinario centrado en el estudio de los estados epistémicos de convencimiento en H's (Peeec) que experimentan agentes educativos o profesionales de la disciplina al realizar trabajos matemáticos; específicamente, se enfoca en el análisis de la (posible) influencia que esos eec ejercen sobre el desarrollo de esos trabajos matemáticos (el Peeec está coordinado por M. Rigo-Lemini).

Seguramente existen muchas maneras de afrontar los problemas educativos antes descritos.

Sin embargo, en el Peec se considera que para elaborar propuestas didácticas y pedagógicas, fundamentadas teórica y empíricamente y éticamente responsables, resulta necesario construir primeramente un Marco Teórico sobre los estados epistémicos de convencimiento (MEEC), con bases empíricas, que dé cuenta desde una perspectiva multidisciplinaria de diversos fenómenos relacionados con los eec: sobre la posible naturaleza de los eec y sobre la forma más útil (desde el punto de vista de la investigación) de conceptualizarlos; se trata, específicamente, de buscar explicaciones sobre cómo operan los eec y cuál es su principal función o sobre cuáles son sus posibles componentes. Que permita adicionalmente explicar el por qué los eec emergen durante el trabajo matemático y el papel que ahí juegan y dar cuenta de las posibles condiciones que generan el surgimiento de los eec durante la resolución de problemas matemáticos o de la elaboración de pruebas, y de las posibles consecuencias que tienen esos eec sobre la evolución del trabajo matemático y sobre la de los aprendizajes; de la posible relación que pudiera existir entre los eec que experimentan los estudiantes de una clase de matemáticas con las formas con las que ahí habitualmente se justifica (i.e., con la micro cultura de racionalidad que ahí prevalece (Rodríguez, 2018)); que permita discernir si se pueden entrenar las personas para que experimenten ciertos eec ante ciertas condiciones y si pueden ellas aprender a regularlos, sobre cómo sería esto posible y si esto resulta viable en el contexto del aula, entre muchas otras cuestiones.

De manera que en el Peec se planea: i) comprender (la posible naturaleza de los eec); ii) explicar (fenómenos relacionados con los eec en la clase de

matemáticas); y iii) diseñar y aplicar (estrategias didácticas y pedagógicas para afrontar las problemáticas relacionadas con los eec en el aula).

Para conseguir los primeros dos objetivos se ha aplicado la perspectiva de análisis cualitativo que ofrece la Teoría Fundamentada (TF). La TF ofrece un conjunto de herramientas analíticas orientadas a la construcción de teorías integradas por categorías basadas en datos empíricos, y cuya finalidad es la formulación de explicaciones de las problemáticas bajo estudio.

Posteriormente, estos estudios cualitativos se podrán complementar con otros de tipo cuantitativo. Se ha trabajado y se trabajará en distintos niveles educativos y a nivel de la matemática disciplinar.

#### **UNA PROPUESTA DE CARACTERIZACIÓN DE LOS EEC**

Como se explicó, para encarar los problemas pedagógicos y didácticos relativos a los eec en el aula, en el Peec resulta ineludible e inaplazable la construcción del MEEC, cuyo fin es sugerir una caracterización de los eec para comprender su posible naturaleza.

A partir de las primeras investigaciones empíricas realizadas en el Peec y de la sensibilidad teórica de los investigadores (i.e, de sus conocimientos teóricos y experiencias en la investigación, (Corbin & Strauss, 2015)), se planteó la hipótesis de que los eec son un cierto tipo de emoción, con fuerte carga cognitiva.

Esta hipótesis indujo a los investigadores del Peec a buscar en el campo de la psicología y las neurociencias la teoría sobre las emociones que mejor se adecuara a los objetivos (metodológicos, ontológicos y epistemológicos y didácticos) de la investigación en tanto que sería completamente ineficaz

ignorar estos desarrollos teóricos. Se eligió la teoría de las emociones construidas, propuesta por Lisa Feldman (2019), y el cognoscitismo fundamentado de Barsalou (Barsalou, 2016; Lebois et al., 2020; Wilson-Mendenhall & Barsalou, 2007), entre otras cosas por su enfoque constructivista y sus posturas con respecto a la relación mente/cuerpo y pensamientos/emociones y el papel de la cultura en la construcción de las emociones. De estos modelos sobre la mente y las emociones se retomaron en el Peec un conjunto de conceptos que han fungido como referente germinal en la definición de categorías (siempre provisionales) para caracterizar a los eec. Esto es posible hacerlo en el contexto de la TF, siempre y cuando se dé prioridad a los datos empíricos recolectados en la investigación y se definan y redefinan las categorías las veces necesarias intentando el mejor ajuste con esos datos (esto se ha hecho -y se seguirá haciendo- a través de muestreos teóricos en los que se han ido validando esas categorías con base en distintos y nuevos conjuntos de datos empíricos). Selye, biólogo de profesión, aclaró: “no se trata de ver o descubrir algo por primera vez; lo que constituye la esencia de un descubrimiento específico es establecer conexiones sólidas entre lo previamente conocido y lo hasta ahora desconocido” (Corbin & Strauss, 2015, p. 79). Justo este tipo de conexiones se intentarán establecer entre la teoría de las emociones construidas, por una parte, y el Meec y sus aplicaciones al ámbito educativo, por la otra.

Ya específicamente y con base en los modelos teóricos mencionados, en el Peec se considera que las emociones son estados mentales que surgen en

‘situaciones afectivas’ en las que alguna necesidad de tipo psíquico o social (que tiene que ver con algún área del bienestar de las personas) se pone en juego. Ante situaciones así, se comienzan a realizar cambios en el cerebro y en el cuerpo de la persona para poder interpretar la situación y para prever y dar una respuesta intentando cubrir dicha necesidad (o preservarla): se realizan cambios corporales, se generan pensamientos e inferencias acordes con la situación y surgen en la persona ciertas tendencias y motivaciones. Todo ello lo ensambla dinámicamente y lo coordina el cerebro de la persona con el propósito de atender (i.e., de entender y responder a) esas necesidades (o preservaras).

Tomando como inspiración y base los conceptos antes expuestos, pero sobreponiendo a ello lo que hacen y dicen los participantes en las investigaciones empíricas realizadas en el Peec (siguiendo los principios de la TF), en el Peec se ha planteado la conveniencia de conceptualizar a los eec como un cierto tipo de emoción, con fuerte carga cognitiva (Rigo-Lemini & Martínez, 2017).

En investigaciones previas a la que se expone en este documento, se han aportado evidencias empíricas que sugieren que los eec que surgen durante la resolución de tareas matemáticas están asociados a cierto tipo de necesidades, que llamamos ‘necesidades epistémicas’, y que la persona desarrolla su resolución en el intento -entre otros- de atender o satisfacer esas necesidades epistémicas. Se ha mostrado también que la seguridad se puede asociar a necesidades epistémicas cubiertas y la duda a necesidades epistémicas no cubiertas.

En el trabajo que aquí se expone, se han precisado esas categorías de 'necesidades epistémicas' -aquí se les ha llamado 'metas epistémicas'- y se han precisado los efectos de la satisfacción (o no) de esas necesidades epistémicas en el contexto de la resolución de problemas. Se ha identificado lo que los eec 'les dicen a las personas' y qué tipo de función cumplen.

Lo anterior ha permitido abonar a favor de la hipótesis de que los eec se pueden pensar como un cierto tipo de emoción epistémica.

Como se dijo, estas comprensiones sobre la naturaleza de los eec servirán de base para comenzar a sugerir posibles explicaciones de algunos de los fenómenos relacionados con la presencia de los eec en las actividades matemáticas que se dan en ámbitos educativos y esto, en un futuro y siempre con nuevos datos empíricos, servirá como plataforma para plantear intervenciones didácticas, teórica y empíricamente validadas.



## INTRODUCCIÓN

En este documento se exponen los resultados de una investigación sobre estados epistémicos de convencimiento, como la seguridad y la duda, que estudiantes de secundaria experimentan en torno a hechos de las matemáticas. Con base en los datos empíricos recabados y herramientas analíticas de la Teoría Fundamentada, se construye un modelo teórico de las trayectorias de esos estados que surgen durante la resolución de tareas de proporcionalidad. En el modelo se consideran los factores que condicionan la experiencia de dichos estados y los efectos que ejercen sobre el trabajo matemático. Es decir, este modelo es una herramienta que permite generar unas primeras explicaciones y comprensiones de esos eec y sus relaciones con el trabajo matemático.

El documento inicia con los Antecedentes, los que se exponen en el Capítulo 1, en el que se expone la revisión y análisis de la literatura realizada con el fin de poner en relación la investigación que aquí se presenta con respecto a lo que otros investigadores han hecho. Se utiliza la literatura para hacer comparaciones, mejorar la sensibilidad del investigador, y principalmente para confirmar hallazgos. Corbin y Strauss (2015) mencionan que cuando la investigación ha terminado y es el momento de escribir los hallazgos, la literatura puede usarse para confirmar los hallazgos o simplemente los hallazgos pueden usarse para ilustrar si la literatura es incorrecta, simplista o solo explica parcialmente los fenómenos. Lo anterior permite extender, validar y refinar el conocimiento en un campo.

Luego, en el Capítulo 2 se plantea el problema a estudiar, las preguntas y los objetivos de esta investigación.

En el tercer capítulo se describe la población, además cómo se recolectaron los datos y se especifican aspectos de tipo metodológico; de manera puntual, se hace una descripción de la Teoría Fundamentada en la versión de Corbin y Strauss (2015) y se exponen las herramientas analíticas utilizadas a la hora de analizar los datos.

En el Capítulo 4 se exponen los resultados empíricos; en éste se presenta el análisis de las resoluciones de cuatro estudiantes a una tarea de proporción directa, y la resolución de una de las estudiantes a una tarea de proporcionalidad inversa. Dicho análisis se presenta en cuatro partes: antecedentes; esquema de resolución de la tarea; reconstrucción; y se finaliza con las posibles trayectorias de los estados epistémicos de convencimiento.

En el Capítulo 5, se expone la discusión de los resultados, en el que se expone el punto de vista de las investigadoras acerca de las condiciones y los efectos de los eec, a partir de la reconstrucción de las producciones de los alumnos. Esta discusión se divide en cuatro aspectos: las Metas y los Requerimientos de Verdad, las condiciones para la seguridad, las condiciones para la duda y los efectos de la seguridad y la duda.

Se finaliza con las conclusiones (Capítulo 6), en las que se da respuesta a las preguntas de investigación planteadas.

## Capítulo 1

### ANTECEDENTES

Este trabajo versa sobre la confianza, la seguridad, la duda o la certeza en hechos de las matemáticas (H) que estudiantes de secundaria experimentan cuando resuelven una tarea matemática.

Muchos estudios sobre la seguridad y la confianza que se realizan en el ámbito de la educación matemática (y de la educación en general) están centrados, por ejemplo, en la confianza que el estudiante tiene en sí mismo como resolutor de problemas, en su seguridad (o inseguridad) sobre su desempeño en temas de matemáticas o bien, en la falta de confianza que puede experimentar el docente al impartir la materia. Se enfocan, en síntesis, en la experiencia de seguridad o inseguridad (confianza o desconfianza) en torno al desempeño o competencia que experimentan los agentes educativos al realizar alguna actividad de matemática. A este tipo de seguridad (Rigo-Lemini, 2009) le llama “seguridad auto-referida”. Por ejemplo, entre las investigaciones sobre confianza o falta de confianza del profesor en torno a su trabajo docente están, entre otras, las realizadas por Zembylas (2011) y por Galligan, Axelsen, Pennicott, Addle, Galbralth y Woolcott (2019).

En contraposición a la “seguridad auto-referida”, esta investigación está centrada en el análisis de fenómenos relacionados con la seguridad, la duda, la inseguridad y la incertidumbre en hechos de las matemáticas H (entre otros, todos aquellos resultados de tareas de contenido matemático o de operaciones; estrategias, o reglas y leyes de la matemática escolar). Por

ejemplo, la certeza en la regla de tres; la confianza en el resultado de una tarea; la duda en la estrategia elegida para resolver un problema, o la seguridad en el resultado de una multiplicación. A esos estados (Rigo-Lemini, 2013) los denomina 'estados epistémicos de convencimiento en torno a H', denotados como 'eec'.

## LOS EEC Y LA INTUICIÓN

Algunos investigadores han aportado evidencias de que la seguridad y la duda en torno a algún H están presentes en la matemática escolar (Fischbein, 1987; Segal, 2000).

Fischbein estudia la intuición, específicamente la importancia de las formas intuitivas del conocimiento en el razonamiento matemático. Él considera "la intuición como un tipo de conocimiento" (Fischbein, 1982, p. 12), además afirma que "el concepto de intuición expresa una tendencia fundamental y muy consistente de la mente humana: la búsqueda de la certeza" (Fischbein, 1987, p. 14), y considera que una de las propiedades que caracterizan a la intuición es la certeza intrínseca (Fischbein, 1987).

Una de las implicaciones didácticas del trabajo de Fischbein, tiene que ver con ir más allá de enseñar conceptos; para él, existe un mundo de expectativas y creencias que influyen profundamente en la recepción y el uso del conocimiento matemático y científico, por ello el autor considera relevante identificar y tener en cuenta la intuición, término que, como se dijo, hace referencia a la convicción y a la confianza en un H, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Fischbein, 1987).

## **DIFERENCIAS ENTRE CONVICCIÓN Y VALIDEZ**

En investigaciones como la de (Segal, 2000), cuyo enfoque principal es la distinción entre convicción y validez, se estudia el convencimiento de estudiantes universitarios de Matemáticas en torno a un  $H$ , a partir de datos recolectados en tres ocasiones durante un año. (Segal, 2000) realiza un estudio en el que se pide a estudiantes de precálculo juzgar cuatro justificaciones del mismo resultado en términos de su convicción y validez. Este autor considera la distinción entre los aspectos público y privado de una prueba, es decir, entre convencerse a uno mismo y persuadir a los demás. El autor menciona que la convicción pertenece al ámbito de lo privado; se trata de un aspecto psicológico, mientras que la validez es el aspecto público de la prueba. Asimismo él encuentra que la convicción personal está claramente diferenciada de la validez pública en el caso empírico, pero no hay evidencia de esto en el deductivo.

## **SOBRE CALIBRACIÓN**

Foster (2016) presenta un estudio realizado a un grupo de 345 estudiantes del Reino Unido, que versa sobre la posible relación que existe entre la confianza y la competencia de los estudiantes en un tema de las matemáticas escolares, los números direccionales (positivos y negativos); el estudio se basa en los comentarios que los estudiantes realizan acerca de la 'confianza de su respuesta', es decir, qué tan seguros están de que la respuesta que acaban de dar es correcta (Foster, 2016). Para establecer las calificaciones de confianza de los estudiantes frente a las respuestas que brindaban, se pidió a cada uno de ellos indicar la seguridad que tenían de la

respuesta dada a cada ítem haciendo uso de una escala del 0 al 10 en donde 0 representaba el nivel más bajo de confianza (el estudiante no tiene idea de si su respuesta es correcta) y 10 el nivel más alto (donde se siente muy seguro de que la respuesta que brindó era correcta).

Foster (2016) resalta la importancia de que las personas sean conscientes de lo que saben en cualquier ámbito; de manera específica en el ámbito educativo, resalta la importancia de que los alumnos conozcan lo que saben ya que esto les permite identificar malentendidos, conceptos erróneos fuertemente arraigados, además de reconocer en qué se debe trabajar y si se requiere ayuda de otra persona, un ordenador o una fuente de referencia.

Foster (2016) considera que investigaciones que involucren niveles de confianza que tienen los alumnos en sus respuestas a trabajos matemáticos podrían ayudar al docente a apoyarlos en el crecimiento de su confianza conceptual. Por ejemplo, si un alumno tiene alta competencia pero baja confianza el maestro podría llevar al estudiante a ideas preconcebidas de las que esté seguro y construir a partir de ellas conceptos que le generen confianza; en otro caso cuando un alumno muestre un nivel alto de confianza pero un nivel de competencia bajo, el maestro podría orillar al alumno a que experimente algún conflicto cognitivo, que lleve al estudiante a tener un choque entre lo que considera cierto con lo que la experiencia muestra, para con esto desafiar conceptos erróneos relevantes.

Es importante mencionar que según la investigación desarrollada por Fischhoff, Slovic y Lichtenstein (Citada por (Foster, 2016)) cuando la competencia de un estudiante coincide estrechamente con su confianza se

dice que está bien calibrado, es decir, se considera que un estudiante está calibrado si su nivel de confianza es alto y su competencia también o si de manera contraria tanto su nivel de confianza como su competencia son bajos.

Sin embargo, y a pesar de su relevancia, investigadores como Foster (2016) afirman que esos estados han sido poco explorados en la matemática escolar. Lo que en esta investigación se afirma es que son inexistentes los trabajos que en los que se analizan las posibles relaciones o mutuas determinaciones entre los trabajos matemáticos que realizan las personas, y los eec que ellas experimentan durante esos trabajos.

#### **LA CONSIDERACIÓN DE LOS EEC (EL CALIFICADOR MODAL) EN LA MODELACIÓN DE ARGUMENTOS MATEMÁTICOS**

Al respecto, Inglis, Mejía-Ramos, y Simpson (2007) mencionan que, aunque existen investigaciones en donde se modelan argumentos matemáticos generados por los estudiantes, se minimiza el papel de los grados de confianza (que coinciden con el calificador modal del esquema de Toulmin) que ellos le asocian a un H.

Inglis, Mejía-Ramos, y Simpson (2007) hacen un estudio de la estructura del argumento, usando el esquema completo de Toulmin, con estudiantes (con gran talento) de posgrado de Matemáticas. Además demuestran el valor de examinar el calificador modal y categorizan algunas de las diferentes formas de argumentación utilizadas por los matemáticos en contextos de prueba realistas. Ellos consideran que al usar el esquema completo de Toulmin es posible obtener acceso a una gama más amplia de

distinciones en el argumento matemático. Asimismo ellos mencionan que es importante la capacidad de emparejar adecuadamente las garantías con los calificadores modales y que quizás desde un enfoque más pedagógico el objetivo de la instrucción no debería ser eliminar cualquier rastro de razonamiento inductivo o intuitivo de los argumentos de los estudiantes, sino asegurarse de que los estudiantes califiquen este tipo de garantías de manera adecuada.

A pesar de que Inglis, Mejía-Ramos, y Simpson (2007) asignan un calificador modal a los argumentos dados por los estudiantes, no explicitan los parámetros o criterios con los que se determina un estado de seguridad o de duda asociado a un H. Menos aún intentan dar alguna explicación sobre lo que es la naturaleza de esos eec.

## **SOBRE LA DUDA Y LA INCERTIDUMBRE**

Existen estudios que centran su atención en la duda e incertidumbre, como es el caso de Zaslavsky (2005) quien hace una explicación del diseño e implementación de tareas matemáticas que evocan incertidumbre para el alumno. A pesar de resaltar el potencial de la incertidumbre como motor en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, también se aclara que es necesario tratarla con precaución, debido a que un estado de conflicto puede conducir fácilmente a la frustración.

Por otro lado, Brown (2014) examina el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para mantener la duda, en un contexto de evidencia empírica. En el momento de analizar la incertidumbre, Brown (2014) la acota a tres situaciones en las que los estudiantes expresaron explícitamente, o

indicaron de otra manera, que una declaración era de valor de verdad desconocido: (1) no tenían motivos para creer o no creer en la declaración (camino desconocido o conclusión cuestionable); (2) vieron los terrenos existentes como contradictorio, es decir, como base tanto para la creencia como para la incredulidad (afirmaciones en competencia); o (3) vieron un resultado como no verificable (resultados no verificables).

Por su parte, Hadas, Hershkowitz, y Schwarz (2000) analizan las conjeturas, los métodos de trabajo y las explicaciones dadas por los estudiantes ante actividades geométricas destinadas a causar contradicción e incertidumbre, para hacer frente a la convicción de los estudiantes basada únicamente en la experiencia empírica y para crear una necesidad de explicaciones deductivas. Al resolver estas actividades los estudiantes se enfrentaron a contradicciones entre conjeturas y hallazgos. Los autores resaltan que los estudiantes dejaron a un lado las pruebas formales y se dedicaron a construir y evaluar argumentos en los que la certeza y la comprensión estaban en juego. Los estudiantes tuvieron que usar su conocimiento geométrico para explicar contradicciones y superar la incertidumbre.

## **CONSIDERACIONES SOBRE LA REVISIÓN DE LA LITERATURA: LAS DEFINICIONES DE LOS EEC**

En la revisión de la literatura cuyos resultados se describen en los párrafos precedentes, se pudo identificar que si bien en esos reportes se hace referencia a la certeza, seguridad, convicción o duda, entre otros eec, y la investigación que se expone está centrada en esos eec, en ninguno se

definen o cuando se definen se hace de manera circular, es decir, se define un eec aludiendo a otro. A continuación, se describe la revisión realizada en relación con este aspecto.

Segal (2000) estudia lo que se percibe como los aspectos público y privado de una prueba matemática: la convicción frente a la validez. En los antecedentes de este artículo es posible encontrar una revisión acerca del “concepto mal definido de validez” (Segal, 2000, p. 194), además una discusión acerca de la distinción entre convicción y validez. Específicamente acerca de la convicción se estudia la diferencia de registro entre convencerse a uno mismo y convencer a la comunidad matemática, sin embargo, no se define la convicción.

En el caso de Foster (2016) se hace referencia a la "confianza en la respuesta" de un alumno como la certeza que tiene de que la respuesta que acaba de dar es correcta, es decir, describe el nivel de confianza usando otro estado epistémico, la certeza.

Como se mencionó anteriormente Inglis, Mejía-Ramos, y Simpson (2007) hacen un estudio de la estructura del argumento, usando el esquema completo de Toulmin, es decir las seis categorías que él propone; entre ellas el calificador modal, la categoría que califica la conclusión expresada en grados de confianza. A la hora de describir el calificador modal los autores utilizan términos como la certeza y la incertidumbre, enfocados a identificar cuando se busca preservar la certeza, reducir la incertidumbre o eliminar la incertidumbre, sin embargo no se definen estos términos.

En el caso de Zaslavsky (2005) presenta un relato reflexivo del diseño y la implementación de tareas matemáticas que evocan incertidumbre para el alumno. En este documento se aclara que la palabra incertidumbre se utiliza como término unificador para abarcar las diversas construcciones que tienen sus raíces en la noción de pensamiento reflexivo de Dewey (Citado por (Zaslavsky, 2005)), tales como conflicto, duda, perplejidad.

Brown (2014) aclara la diferencia entre incertidumbre y escepticismo, el autor considera que el escepticismo es una tendencia que emana del individuo y obliga a actuar de maneras particulares, mientras que la incertidumbre es un estado mental conectado a una situación específica. En el documento se aclara que estos dos términos, incertidumbre y escepticismo, se diferencian por la fuente de acción del alumno; la incertidumbre se manifiesta cuando las bases para la creencia son insuficientes o están en conflicto; y el escepticismo se manifiesta cuando una tendencia a actuar se impone en la situación. De acuerdo con lo anterior y a afirmaciones como: “el alumno carece de convicción (es decir, carece de creencia)” (Brown, 2014, p. 314) es posible identificar que el autor hace referencia al término certidumbre como sinónimo de creencia, por tanto la incertidumbre se considera como la carencia de creencia.

Por su parte Hadas, Hershkowitz, y Schwarz (2000), en su artículo *El papel de la contradicción y la incertidumbre promoviendo la necesidad de probar en ambientes de geometría dinámica*, describen dos actividades diseñadas con el fin de hacer frente a la convicción de los estudiantes basada únicamente en la experiencia empírica y crear la necesidad de explicaciones deductivas,

dichas actividades fueron desarrolladas para causar sorpresa e incertidumbre. En el documento se aclara que una prueba puede necesitar estar motivada por la incertidumbre que queda sin la prueba, o que los entornos de geometría dinámica pueden brindar oportunidades para la creación de incertidumbre, sin embargo no se explicita una definición del término incertidumbre.

En relación con la definición y categorización de los eec es posible notar que además de que los trabajos acerca de este tema son escasos, no hay trabajos en los que se busque explorar y analizar la naturaleza de los eec, es decir trabajos que busquen responder: ¿qué son los eec? ¿en qué condiciones surgen los eec? ¿cuáles son los posibles efectos de los eec?, entre otros. De igual forma las caracterizaciones son especulativas y a veces, redundantes.

### **EMOCIONES EPISTÉMICAS**

Otro tipo de investigaciones encontradas en la literatura están relacionadas con las emociones epistémicas. En el ámbito de la investigación de las emociones epistémicas (que surgen cuando el foco son el conocer o el conocimiento), Muis et al. (2015), desde un enfoque cuantitativo, examinan los antecedentes y consecuencias de ese tipo de emociones en el contexto de la resolución de problemas matemáticos complejos. En su trabajo ellos buscaron explorar si el control percibido por los estudiantes y el valor para el aprendizaje de las matemáticas fueron antecedente de las emociones epistémicas que los estudiantes experimentaron durante la resolución de problemas matemáticos, y si las emociones predijeron la planificación y el establecimiento de metas, el uso de estrategias cognitivas superficiales y

profundas, así como estrategias metacognitivas profundas. Las emociones epistémicas en las que ellos centran su atención son sorpresa, curiosidad, disfrute, confusión, ansiedad, aburrimiento. No obstante, los autores no incluyen lo que aquí se llaman eec.

De manera análoga a la investigación reportada por Muis y colaboradores, en esta investigación se busca contribuir a la reflexión de la problemática de las posibles relaciones entre los eec y el trabajo matemático. Pero a diferencia de la investigación citada, en esta investigación -orientada por un enfoque cualitativo de la Teoría Fundamentada-, se modelan trayectorias de los eec (que surgen en el contexto de resolución de tareas de contenido de proporcionalidad), buscando identificar sus condiciones y sus efectos, como una herramienta que permita generar primeras explicaciones y comprensiones de esos eec y de sus relaciones con el trabajo matemático. Se recurre a la Teoría Fundamentada porque el estudio sobre la naturaleza y características de los eec es de tipo exploratorio y la Teoría Fundamentada ofrece, para este tipo de estudios iniciales, herramientas analíticas para construir categorías teóricas encaminadas a generar hipótesis y conjeturas fundadas en datos empíricos y para construir esas primeras explicaciones y comprensiones.



## CAPÍTULO 2

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A partir de lo expuesto en el Capítulo 1, es posible mencionar que hay poca investigación sobre la confianza, la certeza, la convicción, la duda o la incertidumbre en el ámbito de la Educación Matemática. Aunque, como se vio en el dicho capítulo, hay trabajos que versan en torno a las relaciones entre los eec y los trabajos matemáticos, son **inexistentes** los trabajos que intentan abordar temas relacionados con la naturaleza de este tipo de estados internos que experimentan los agentes educativos durante sus actividades de contenido matemático, que se proponen definir lo que son los eec, explicar con fundamentos empíricos las posibles relaciones entre los eec y el trabajo matemático, aquellos que dan cuenta de lo que puede eventualmente estar en sus orígenes y las causas o efectos. Es decir, ni en el marco de esta investigación ni de la que se ha hecho en el Programa de Investigación sobre los eec en el que este trabajo está inscrito se han encontrado estudios -ya en los de la educación matemática o en los de educación en general- que tengan estos propósitos.

En esta investigación se exploran las posibles relaciones que existen entre los eec y los trabajos matemáticos y a partir de ello, se sugieren algunas propiedades que pueden caracterizar a los eec y se establecen algunas hipótesis sobre su posible naturaleza.

Esta investigación teórica, fundamentada en datos empíricos (orientada por la perspectiva cualitativa de la Teoría Fundamentada) nos parece no solo importante sino imprescindible tanto para la investigación como para

el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, dado que el conocimiento de la posible naturaleza de los eec y sus posibles relaciones con los trabajos matemáticos puede ayudar a los profesores a reconocer y orientar el manejo de los eec, tanto en él como en sus estudiantes, puede ayudar a que los eec funcionen como un motor que impulse los aprendizajes y no como un obstáculo que los detenga.

Lo anterior nos lleva a la necesidad de estudiar a profundidad a los eec, tratar de descubrir su naturaleza y ver la manera en la que acompañan a los trabajos matemáticos. Este es el objetivo central de la presente investigación.

### **PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

La presente investigación es lo que en Teoría Fundamentada se conoce como 'trabajo exploratorio' porque las preguntas de investigación que aquí se plantean tienen la peculiaridad que (parecen) no haberse formulado en el marco de la investigación en Educación Matemática, ni en la investigación educativa en general. Las que aquí se formulan no son preguntas que se retomen de otros trabajos (fuera del Programa sobre los eec), o problemáticas o temáticas extraídas de otras investigaciones. Aunque el trabajo que aquí se expone está enmarcado en dicho Programa de investigación sobre los eec, es completamente original y novedosa con respecto a la literatura existente y también original en el sentido de que aporta incluso al trabajo que se ha hecho en el Programa sobre los eec.

Las preguntas de investigación que se buscan responder son:

1. ¿Cuál es la posible relación existente entre los eec y el trabajo matemático que se realiza en el contexto de la resolución de tareas de

contenido matemático (específicamente en tareas de proporcionalidad)?

Esta pregunta de exploración se desdobra en la siguientes:

1.1. ¿Cuáles son las condiciones a las que está asociada la experiencia de algún eec durante la resolución de una tarea matemática de proporcionalidad?

1.2. ¿Cuáles son los efectos que tienen los eec que experimentan los estudiantes sobre los trabajos matemáticos (específicamente en decisiones o en las producciones) que ellos realizan, en el contexto de la resolución de una tarea de proporcionalidad?

1.3. ¿Cuál es la posible trayectoria de los eec (considerando condiciones de los eec y sus efectos) durante la resolución de una tarea matemática de proporcionalidad?

2. ¿Cuál es la posible naturaleza de los eec que surgen durante la resolución de una tarea de contenido matemático de proporcionalidad? Esta también es una pregunta de exploración.

### **OBJETIVO GENERAL**

Verificar y/o modificar las categorías desarrolladas en el Modelo de los Estados Epistémicos de Convencimiento (MEEC), específicamente las que pretenden explicar los factores condicionantes y las consecuencias de los eec en el contexto de resolución de tareas de contenido matemático.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Hacer un muestreo teórico<sup>1</sup> para verificar y, si resulta necesario, redefinir (con relación a nuevos datos empíricos), las categorías relacionadas con los factores que condicionan a los eec en el contexto de resolución de tareas matemáticas, es decir, categorías que permitan describir algunas de las condiciones que están asociadas a la presencia de eec en la resolución de una tarea matemática (específicamente en tareas de proporcionalidad).
- Hacer un muestreo teórico para verificar y, si resulta necesario, para redefinir las categorías relacionadas con las consecuencias de los eec en el contexto de la resolución de tareas, es decir, categorías que permitan describir los efectos que la experiencia de los eec tiene sobre el trabajo matemático que se realiza en el contexto de la resolución de una tarea matemática (específicamente en tareas de proporcionalidad).
- Construir un modelo teórico de una posible trayectoria de los eec - conformado por categorías que hacen referencia a los factores condicionantes de esos eec y a los efectos- que surge durante la resolución de una tarea de contenido matemático (de proporcionalidad).
- Sugerir primeras comprensiones y explicaciones sobre posibles características de los eec y sobre su posible naturaleza.

---

<sup>1</sup> De acuerdo con Corbin y Strauss (2015), el muestreo teórico es “un método de recolección de datos basado en conceptos derivados de otros datos” (p. 134). En el capítulo de metodología (Capítulo 3) se explicita con mayor detalle este término.

## **Capítulo 3**

### **MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE DATOS, HERRAMIENTAS ANALÍTICAS Y METODOLOGÍA**

En este capítulo se describe la población de esta investigación, y cómo se realizó la recolección de la información. Además, se exponen aspectos de tipo metodológico, acerca de la Teoría Fundamentada en la versión de Corbin y Strauss (2015) y las herramientas analíticas utilizadas para el análisis de los datos.

#### **MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE DATOS**

Los datos empíricos de este estudio provienen de las producciones escritas y de los testimonios verbales de 6 estudiantes de tercero de secundaria de una escuela pública de Ciudad de México, de edades entre los 14 y 15 años. La elección de los sujetos la realizó la maestra titular de la asignatura de matemáticas, a quien se le solicitó que fueran estudiantes con excelencia académica. La recolección de los datos se realizó de dos maneras: con dos cuestionarios y con una entrevista semiestructurada.

## **EL PRIMER CUESTIONARIO, EL CONCEPTUAL (VER ANEXOS**

Anexo 1: Cuestionario Conceptual), estaba compuesto de 6 tareas de valor faltante; los datos de las 5 primeras implicaban relaciones de proporcionalidad; los datos de la otra tarea no estaban relacionados de manera proporcional. Con relación a las tareas de proporcionalidad, 2 eran de proporcionalidad simple directa, 1 implicaba una relación de proporcionalidad simple inversa, 1 era una relación de proporcionalidad múltiple directa, y otra era una relación de proporcionalidad múltiple directa e inversa. Al final de cada reactivo se les pidió a los alumnos que reportaran el eec que experimentaron (en una escala que incluía seguro, parcialmente seguro y totalmente inseguro) con respecto a la respuesta dada y que explicaran en qué basaban su nivel de seguridad (ítem i y ii). Se les pidió también dar respuesta a una pregunta de convicción (ítem iii), las que se diseñaron tomando como inspiración la lista de preguntas de convicción que propone Abelson (1988). Un ejemplo es “Si tuviera que resolver este ejercicio dentro de una semana, ¿mantendrías tu respuesta?”.

Para el caso del segundo cuestionario, el procedimental (ver Anexo 2: Cuestionario Procedimental), se solicitó a los estudiantes calcular el valor del término desconocido en 6 ecuaciones de primer grado con una incógnita. Este cuestionario procedimental tenía como objetivo brindar información sobre el desempeño de cada estudiante y sus posibles competencias aritméticas y con la resolución de ecuaciones de primer grado.

La construcción de los cuestionarios se realizó con tareas que estuvieran al alcance de los estudiantes, pero que no fueran rutinarias. En el caso del

cuestionario conceptual se construyó tomando algunas tareas de Block et al. (2010) y Vergnaud (1991), se eligieron tareas de valor faltante que pudieran ser familiares para los estudiantes, es decir, que tuvieran cierto parecido a las tareas escolares, pero que a la vez representaran un reto cognitivo para ellos.

Para la elección de las tareas se tuvo en cuenta el pilotaje realizado con estudiantes de tercero de secundaria de una escuela pública de Ecatepec, e incluso se tuvo en consideración las actividades desarrolladas en los seminarios dirigidos por la M. Rigo-Lemini en la cohorte 2018-II, en los que fue posible determinar que las tareas de valor faltante son tareas que pueden llegar a representar retos a los profesores en ejercicio. Además se tuvo en consideración que fueran tareas cuyo enunciado es comprendido por el alumno, que pueden irse complejizando, que los alumnos suelen tener herramientas para resolverlas (como la regla de tres), es decir, que están al alcance conceptual y cognitivo del alumno, pero que a la vez, los alumnos muchas veces creen o confían que pueden hacerlas y no es el caso, porque sabemos del uso indiscriminado que ellos hacen de la regla de tres en problemas de valor faltante. Las tareas propuestas a los estudiantes son tareas que presentan toda esa riqueza.

Después de los cuestionarios se aplicó, de manera individual, una entrevista no estructurada (Birks & Mills, 2015; Corbin & Strauss, 2015), la cual se grabó en audio y se transcribió (ver Anexos 3 al 8) enumerando cada participación (en la reconstrucción, el numeral que aparece entre paréntesis hace referencia a esta numeración).

Los datos se recolectaron en la institución educativa, en un espacio facilitado por la dirección; cada estudiante dio solución a los cuestionarios de manera individual en ese espacio. De igual forma, las entrevistas fueron realizadas justo después de que los alumnos terminaron de resolver los cuestionarios. No se dio límite de tiempo para la aplicación de los cuestionarios, ni para las entrevistas; aproximadamente para la resolución de los cuestionarios los estudiantes se llevaron entre 20 a 60 minutos, y las entrevistas tuvieron una duración de entre 9 a 17 minutos.

Este documento está centrado en el análisis interpretativo de cuatro estudiantes, Michaelle, Hannia, Alessandra y Erik.

Se eligió a estos cuatro estudiantes porque sus resoluciones al cuestionario y sus declaraciones en la entrevista brindaron información valiosa sobre los conceptos centrales que se examinan en esta investigación.

## **ASPECTOS METODOLÓGICOS Y HERRAMIENTAS ANALÍTICAS**

Esta investigación está orientada por los principios de la Teoría Fundamentada (TF) en la versión de Corbin y Strauss (2015). La TF es una forma interpretativa de investigación cualitativa cuya finalidad es construir categorías teóricas fundadas en datos empíricos con el propósito último de edificar teorías que expliquen por qué las cosas suceden. En correspondencia con la TF, el análisis que se hace en esta investigación está basado en datos empíricos y orientado por esos datos.

Para dar respuesta a los objetivos de esta investigación se considera pertinente el uso de la TF porque la TF brinda un conjunto de herramientas y constructos metodológicos para saturar las categorías previamente

desarrolladas en el MEEC, mediante el muestreo teórico. En la TF, la saturación de las categorías se da cuando todas las categorías principales están completamente desarrolladas, muestran variaciones y están integradas.

Además, la TF, a través del análisis de contexto y de proceso, permite ofrecer unas primeras explicaciones de cómo los sujetos responden a ciertas condiciones cambiantes e identificar las consecuencias de sus acciones (Corbin & Strauss, 1990).

Para el análisis de los datos se usaron herramientas analíticas de la TF, como formular preguntas; hacer comparaciones constantes; hacer microanálisis; escribir notas; hacer diagramas; realizar muestreo teórico; hacer análisis de contexto; y hacer análisis de proceso.

Como se dijo, uno de los objetivos de esta investigación consiste en realizar un muestreo teórico de las categorías conceptuales que se han desarrollado en el MEEC (Martínez, 2020), por lo que el muestreo teórico se considera una de las herramientas analíticas centrales en este trabajo. Otras herramientas analíticas centrales para este trabajo son el análisis de contexto y el análisis de proceso, debido a que estas se usaron principalmente para la construcción de las trayectorias (Capítulo 4) y para generar unas primeras explicaciones sobre la naturaleza de los eec.

Por lo anterior a continuación se da una explicación exhaustiva de estas tres herramientas y de su aplicación en el contexto de este trabajo.

## Muestreo Teórico

En esta investigación se parte de un marco teórico previamente desarrollado, en el que se describen las primeras explicaciones de lo que en el Programa de Investigación en el que se inscribe este trabajo se ha denominado " estados epistémicos de convencimiento" (eec). En este marco teórico, llamado Modelo de los Estados Epistémicos de Convencimiento (MEEC), se desarrollaron una serie de categorías; entre ellas las Metas epistémicas, los Requerimientos de Verdad y la Verificación, mismas que se sugiere forman parte de las condiciones que pueden generar Estados epistémicos. Por otra parte, se considera que los Estados epistémicos tienen efectos sobre los trabajos matemáticos.

El muestreo teórico es una herramienta analítica de la TF que permite **aprender más sobre determinados conceptos** previamente desarrollados en el marco de trabajos orientados por la TF, reajustar o precisar sus caracterizaciones, definir nuevas propiedades y dimensiones o redefinir quizás las dadas previamente. Así que el muestreo teórico se centra específicamente en el estudio (en el 'muestreo', como dicen (Corbin & Strauss, 2015)) **de conceptos y categorías** teóricas anteriormente construidas (en investigaciones realizadas con TF).

Para el muestreo teórico el investigador recolecta nuevos datos y los analiza **a la luz de los conceptos y categorías (previamente desarrolladas) que le interesa muestrear**. Los nuevos datos -que le generan nuevas preguntas- le permiten al investigador verificar la aplicabilidad de las categorías y hacer las correcciones necesarias a esas categorías (redefinirlas,

introducir nuevas propiedades y dimensiones). En un segundo ciclo, el análisis empírico de los datos, realizado con base en las categorías previamente redefinidas, lleva al investigador de nueva cuenta a los conceptos, y en este ámbito conceptual, lo conduce a una nueva revisión de esos conceptos, y a introducir otra vez los ajustes necesarios en el ámbito conceptual. Este proceso (Figura 1) continúa hasta que la investigación esté bien desarrollada en términos de densidad y variación de las categorías en ciernes (Corbin & Strauss, 2015).

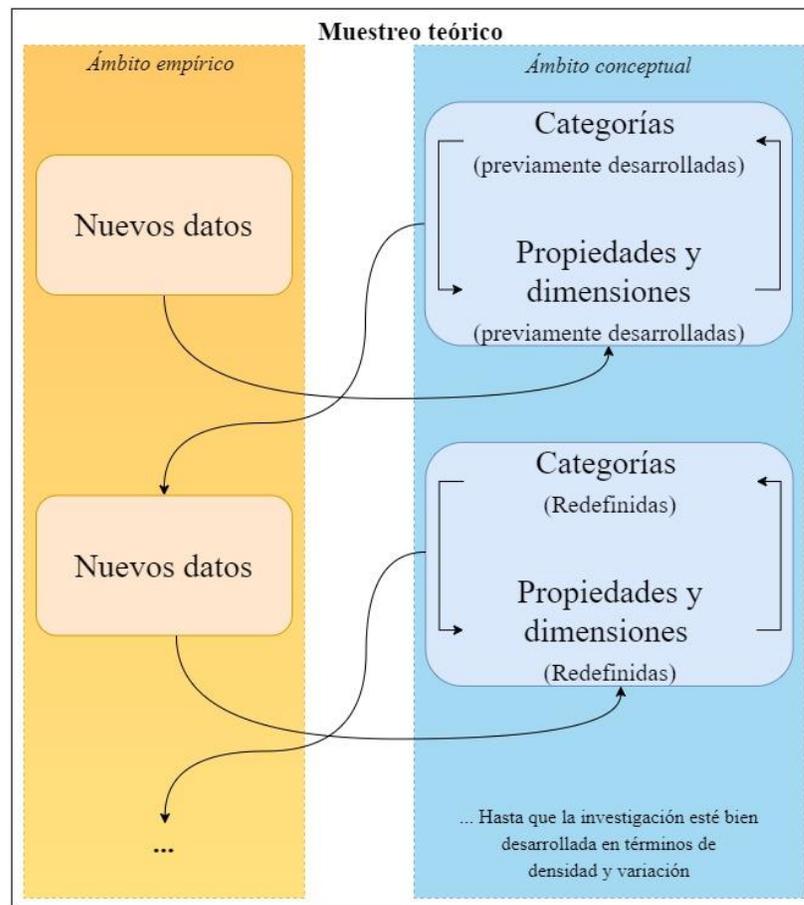


Figura 1. Muestreo Teórico (Adaptado de (Peña, 2019))

## **Análisis de contexto**

Según Corbin y Strauss (2015), el análisis de contexto (AC) parte de la premisa de que cuando las personas actúan e interactúan están respondiendo conscientemente a algo que requiere una respuesta; están buscando satisfacer una Meta. Eso a lo que las personas responden cuando actúan, en el análisis de contexto se le llama condiciones. De éstas y de las acciones de las personas se suele desprender algún resultado, que en el AC se le denomina consecuencias o efectos. Al hacer uso del análisis de contexto, el investigador busca ofrecer conexiones de las acciones-interacciones que llevan a cabo las personas, con las condiciones de sus acciones y con sus consecuencias. Dicho de otro modo. Esto significa establecer un conjunto de condiciones (que responden al por qué, cuándo y cómo de sus acciones) en las cuales un sujeto realiza determinada acción (las respuestas de las personas reales), y establecer también la liga entre esas acciones y el conjunto de consecuencias que se desprenden de ellas (los resultados reales o anticipados de las acciones).

El análisis de contexto es central en la versión de la TF que ofrecen Corbin y Strauss, al considerar que esta herramienta analítica permite formular explicaciones de los fenómenos bajo estudio, con base en las categorías introducidas; el análisis de contexto, según Corbin y Strauss, hace posible el tránsito de la simple descripción de los fenómenos al dominio de las explicaciones teóricas.

Siguiendo la perspectiva de la TF de Corbin y Strauss (2015) y considerando lo planteado en el MEEC, el análisis de contexto que aquí se

presenta busca explicar las razones en las que se basan los estudiantes para experimentar sus eec. Dicho en otras palabras, se buscan identificar las condiciones o factores condicionantes que se dan asociados a la experiencia de esos eec. También se buscan identificar y describir los efectos que sobre el trabajo matemático tiene la experiencia de los eec, y en general, ofrecer unas primeras ideas sobre la posible naturaleza de los eec

### **Análisis de proceso**

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, se considera que las acciones están vinculadas con las condiciones a las que las personas responden cuando interactúan. Las acciones a su vez están vinculadas con las consecuencias. Cuando se habla de Análisis de Contexto se considera que las condiciones son estáticas, sin embargo no lo son, las condiciones están sujetas a tiempo y a lugar. En el Análisis de Procesos se considera que, para alcanzar las metas o resultados deseados, las personas deben relacionar las interacciones con los cambios en las condiciones. Por tanto, se considera que la acción e interacción tiene formas cambiantes y repetitivas, pausas, interrupciones y movimientos variables.

De acuerdo con Corbin y Strauss (2015) el proceso es un aspecto importante del análisis porque da vida a la acción e interacción. Muestra la capacidad de las personas para adaptarse y responder a cambios sutiles en lo que sucede a su alrededor. Se considera que el proceso tiene propiedades:

- El proceso tiene una naturaleza variable. En el proceso, se hace referencia a los continuos ajustes en la acción-interacción (secuencia de

actos relacionados) cuando las personas intentan adaptarse a los cambios en las condiciones.

- A menudo el proceso es visto como un desarrollo, por fases o etapas, lo que implica un carácter lineal o progresivo. Sin embargo no siempre es así, el proceso puede ser una serie de actos relacionados tomados hacia algún fin. Las acciones e interacciones que conforman el proceso siempre se están ajustando.
- El estudio del proceso es importante para comprender las situaciones rutinarias y no rutinarias o problemáticas. Estudiar la interacción acción-rutinaria tiene amplias implicaciones para el desarrollo del conocimiento. Estudiar la rutina permite a los investigadores identificar los patrones de acción e interacción que hacen posible establecer y mantener la estabilidad y el orden social, ampliando nuestra comprensión de cómo las personas o grupos logran pasar por la vida cotidiana.
- El proceso se puede dividir en subprocesos, estos explican con más detalle cómo se expresa el proceso más amplio.

En el Análisis de proceso, los investigadores deben tratar de capturar la capacidad de los seres humanos para pensar y ajustar su acción e interacción para resolver problemas y alcanzar objetivos, ya sea actuando solos o en conjunto con otros.

En esta investigación con el Análisis de Proceso se busca estudiar los eec que se generan durante la resolución de un problema de proporcionalidad, considerando los cambios que se puedan dar en los factores condicionantes

del eec. Se considera además que durante la resolución de la tarea los efectos de un eec modifican directamente las condiciones del siguiente subproceso en el que surge otro eec, es decir, los efectos de un eec forman parte de las condiciones para un siguiente eec. La manera en la que el análisis de proceso se aplicó en este estudio se ejemplificará en el Capítulo 4.



## CAPÍTULO 4

### EXPOSICIÓN DE LOS RESULTADOS EMPÍRICOS

Este Capítulo tiene como finalidad exponer posibles trayectorias de los estados epistémicos de convencimiento (denotados como 'eec') involucrados en las resoluciones de cuatro estudiantes a una tarea de proporción directa, y la resolución de una de las estudiantes a una tarea de proporcionalidad inversa.

La exposición de esas trayectorias se basa en un microanálisis de la resolución que los cuatro estudiantes elegidos (Michaelle, Hannia, Alessandra y Erik), dieron a la tarea: "Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter ¿Cuánto pesa el suéter?", así como de la resolución que Alessandra propuso para la tarea: "Un vendedor de telas descubre, al hacer cuentas, que su ingreso fue de \$1,285.00 en lugar de \$1,290.00. Supone que el problema está en el metro que usa para medir. Si así fuera, ¿Cuánto mediría su metro?".

En cada uno de los análisis se examinan los estados epistémicos de convencimiento que posiblemente experimentaron los estudiantes al resolver las tareas mencionadas. En el análisis también se identifican las condiciones que están asociadas a la activación de esos eec y se distinguen también los posibles efectos que esos eec tuvieron sobre el trabajo matemático realizado durante la resolución de las tareas. De modo que las trayectorias -que son modelos teóricos (resultado de la reconstrucción de los investigadores), se elaboraron de acuerdo con las propuestas analíticas de lo que Corbin y Strauss llaman 'análisis de contexto' (AC) y 'análisis de

proceso' (AP) (2015). Se trata de herramientas interpretativas que proponen Corbin y Strauss para analizar procesos dinámicos en el contexto de fenómenos sociales y educativos.

Así que las trayectorias están integradas por las Condiciones de los eec y los Efectos. Estas categorías generales contienen, a su vez, (sub)categorías analíticas que permiten examinar e interpretar distintos aspectos relacionados con dichas Condiciones y Efectos.

Dentro de las *Condiciones* se han considerado las Metas que un estudiante se plantea al realizar la tarea, pero sobre todo, las Metas de carácter epistémico, es decir, que tienen que ver con aspectos de la corrección o veracidad de la tarea. Se trata así propiamente de 'Metas epistémicas', aunque por brevedad se hará referencia a ellas simplemente como Metas. Las Metas dependen de la tarea, de los antecedentes (sobre todo los de índole matemática) con los que el estudiante cuenta para resolverla, de los retos que le representa esa resolución, así como también de su entrenamiento con los eec (cómo siente seguridad, cuáles son sus Requerimientos de Verdad, en qué condiciones siente duda, entre otros).

Otra categoría que ha sido incluida dentro de los Antecedentes es la de 'Requerimientos de veracidad'. Y es que las Metas epistémicas y su satisfacción (o no) están asociadas al acato (o no) de ciertos Requerimientos de Verdad (RV); estos RV son los que el alumno (posiblemente) se impone para garantizar la satisfacción de la Meta epistémica.

Y asociado a los RV está la posible 'Valoración' que hace el estudiante del cumplimiento de esos RV. En caso de que esos RV se cumplan, la Meta se

satisfará; en caso de que esos RV no se cumplan, la Meta es posible que no se satisfaga.

En la categoría de *Efectos* de los eec sobre el trabajo matemático se han incluido dos subcategorías: la de la 'Respuesta', en la que se describen las decisiones que el alumno toma y/o las acciones que el alumno realiza, como resultado de las experiencias de sus eec y el 'Plan Matemático', que se refieren a los planes específicos que realizará en lo subsiguiente y que son consecuencia de la Respuesta.

Como se ve claramente en la descripción de las categorías, se trata de categorías interpretativas, es decir, en la que los investigadores interpretan lo que posiblemente el alumno pensó, experimentó, decidió, interpretó o planeó.

Cabe aclarar que a lo largo de la investigación se analizaron las resoluciones de otras tareas y se identificaron las posibles trayectorias de los eec. Para esta exposición se eligieron las trayectorias de estos estudiantes porque ahí ellos dejan ver con claridad las categorías centrales que se estudian en esta investigación y proporcionan una fuente de datos rica en información para satisfacer las necesidades analíticas que se tienen en la misma (Birks & Mills, 2015).

Para cada uno de los casos analizados se presentan los *Antecedentes* que se lograron identificar a partir de la solución de los dos cuestionarios (conceptual y procedimental) y la entrevista; el *Esquema de Resolución de la Tarea*, en el que se describe cómo el alumno en cuestión soluciona la tarea propuesta de acuerdo con su producción y la entrevista; luego se expone la

*Reconstrucción* de la resolución de la tarea propuesta elaborada por las investigadoras, basada en los reportes que cada alumno hizo (en el cuestionario y en la entrevista) sobre sus experiencias de seguridad y duda en torno a algún H durante esa resolución y durante la resolución de otras tareas incluidas en el cuestionario; finalmente, se muestra una representación gráfica de la *Trayectoria* en la que se identifican los Factores Condicionantes: Metas epistémicas, asociadas al acato de ciertos Requerimiento de Verdad (RV), y la Valoración (V) que hace el estudiante del cumplimiento de esos RV que eventualmente lo llevó a la satisfacción de la Meta. Asimismo, se registraron los Efectos que los eec en H tuvieron sobre los trabajos matemáticos, en forma de Respuestas y Planes Matemáticos, acordes con la Respuesta.

En los Anexo 3 al 8 se incluyen las transcripciones de todas las entrevistas realizadas en el marco de la investigación, con el objeto de que el lector pueda cotejar la interpretación que en este estudio se hizo de los datos que ahí aparecen. A lo largo del análisis se hace referencia a diferentes fragmentos de las entrevistas o apartados de los cuestionarios; en caso de que la declaración provenga de la entrevista y se refiera a la resolución de una tarea  $n$ , en lo subsiguiente se pondrá  $ET_n$ ; en caso de que la producción provenga del cuestionario conceptual y se refiera a la resolución de una tarea  $n$ , se pondrá  $CcT_n$ , en cuanto al cuestionario procedimental se pondrá  $CpT_n$ .

## CASO DE MICHAELLE (TAREA DE LAS MADEJAS)

### Antecedentes

- Michaele respondió de manera incorrecta los seis reactivos del cuestionario conceptual. En el cuestionario procedimental tuvo un porcentaje de aciertos del 83%.
- Del cuestionario procedimental es posible ver que la estudiante cuenta con competencia al realizar operaciones básicas (suma, resta y multiplicación, y las divisiones con residuo 0).
- La estudiante deja ver en los dos cuestionarios problemas para dividir, cuando el residuo es diferente de cero, por ejemplo, una de las divisiones que realiza para solucionar la primera tarea del cuestionario procedimental (Figura 2).

$$\begin{array}{r} 62 \\ 29 \overline{) 174} \\ \underline{50} \phantom{0} \\ 02 \end{array}$$

Figura 2. División CpT1

- A lo largo del análisis de los dos cuestionarios la estudiante se identifica una tendencia a resolver problemas de valor faltante con Regla de tres y a resolverla a través de un cociente, como se muestra en la Figura 3.

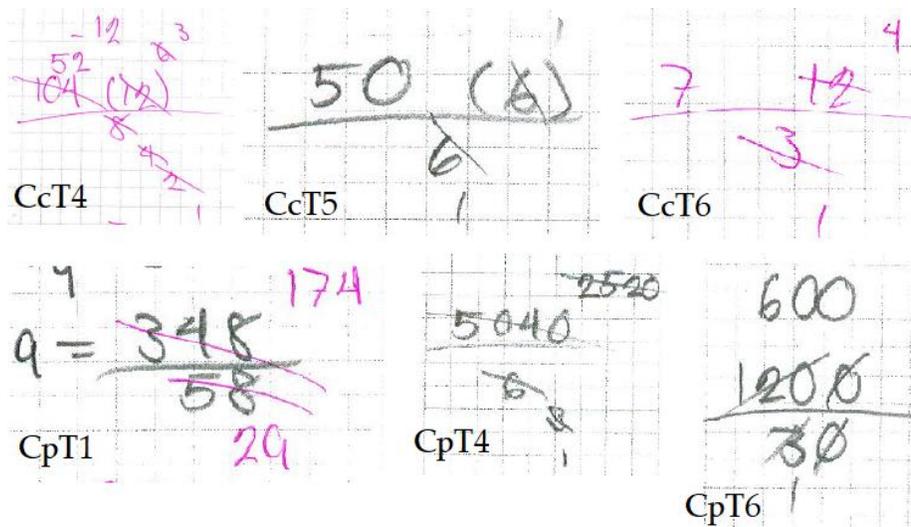


Figura 3. Soluciones mediante cociente (Michaelle)

- En la entrevista Michaëlle hace explícita lo que ella entiende sobre la regla de 3: “Ah pues es que nada más tienes que leer bien porque te dan los datos y uno debe ser el que vale tanto y es como el verdadero y el que te dan siempre le falta algo, siempre le tiene que faltar un detalle o un número o algo así y eso es lo que tienes que encontrar” (ET1-18).

## Esquema de resolución de la tarea

(N)

d)

$$\begin{array}{r} 533 \\ 3 \overline{) 1600} \\ \underline{10} \phantom{0} \\ 10 \phantom{0} \\ \underline{10} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

Nombre E  
Escuela S  
Edad \_\_\_\_\_

Contesta por favor todas las preguntas que se formulan a continuación, de tal forma que te sientas satisfecho con tu respuesta. Realiza con pluma (en el papel que se te proporciona) todas las anotaciones y operaciones que consideres necesarias (no borres ni taches nada). Para cada inciso i marca con una X la opción que más se parezca a tu manera de pensar y en el inciso ii, explica en qué basas tu nivel de seguridad del inciso correspondiente.

e)

$$\begin{array}{r} 53300 \\ 3 \overline{) 16000} \\ \underline{10} \phantom{00} \\ 10 \phantom{00} \\ \underline{10} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \end{array}$$

PRIMER MOMENTO

b)

$$\begin{array}{r} 200(8) \\ 3 \overline{) 200} \\ \underline{16} \phantom{00} \\ 40 \phantom{0} \\ \underline{30} \phantom{0} \\ 10 \phantom{0} \end{array}$$

1. Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter, ¿Cuánto pesa el suéter?

a)

$$\begin{array}{l} 200g - 3m \\ x - 8m \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{r} 60 \\ 3 \overline{) 200} \\ \underline{20} \phantom{0} \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 5033 \\ 3 \overline{) 1600} \\ \underline{10} \phantom{0} \\ 10 \phantom{0} \\ \underline{10} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

d)

$$R = 5033$$

h)

$$R = 48 \text{ 30 gramos}$$

i. La respuesta que acabas de dar es correcta:				
Seguro	<input checked="" type="checkbox"/>	Parcialmente seguro	<input type="checkbox"/>	Totalmente inseguro
ii. Explica en qué basas tu nivel de seguridad del inciso i:				
Porque solo se deve de hacer una regla de 3				
iii. Si tuviera que resolver este ejercicio dentro de una semana, ¿Mantendrías tu respuesta?:				
Si	<input type="checkbox"/>	No	<input type="checkbox"/>	Quizá <input checked="" type="checkbox"/>

Figura 4. Producción tarea madejas Michaelle (CcT1)

A continuación se realiza la reconstrucción del plan de resolución de Michaelle de la tarea de la madejas a partir de la producción de la estudiante (Figura 4), y la explicación que ella da en la entrevista de cómo la

resolvió: “ahí se supone que tenemos hacer una regla de 3, porque se supone si de los... ¿no sé si eran carretes?, de los tres carretes eran 200 gramos y necesitabas 8 para hacer un sólo suéter, entonces ahí me confundí un poco porque hice la regla de 3, pero me salía no sé cuánto y ya después dividí lo que pesaba con los 3 carretes y así multipliqué y ya salió. . .” (ET1-4).

Al iniciar la solución de la tarea Michaelle plantea la relación de proporcionalidad con un valor faltante, usando la regla de 3 (CcT1-a). Enseguida hace su primer intento para encontrar el valor faltante, al parecer como habitualmente lo hace (de acuerdo con la solución que da Michaelle a las demás tareas incluidas en el cuestionario), simplificando. Es decir, cuando Michaelle multiplica 200 por 8 y divide entre 3, ella llega al cociente  $\frac{1600}{3}$  (CcT1-b). Este cociente lo intenta simplificar (como lo suele hacer en las demás tareas), esto es posible verlo con el “5” que se encuentra en la parte superior derecha (CcT1-b). Michaelle al efectuar esta operación no muestra evidencia de que haya hecho un análisis dimensional.

Al parecer, al no serle posible simplificar de manera inmediata la razón, opta por efectuar la operación 1600 dividido entre 3 (CcT1-c). En ésta se evidencia un error al efectuar el algoritmo convencional de la división. Michaelle dio como primera respuesta (CcT1-d) a la tarea, el cociente de esa primera división (CcT1-c). De otra manera no se explica d (CcT1).

Sin embargo, ella realiza dos intentos más de la división 1600 entre 3, en la que a pesar de cometer algunos errores en el algoritmo parece que su competencia va mejorando, pero no llega al resultado correcto.

Al tener problemas con la división (CcT1-d, e y f), ella cambia de estrategia y decide usar el valor unitario, para lo que divide 200 entre 3 y obtiene como cociente 6.0, resultado erróneo nuevamente por dificultades al resolver divisiones con cociente decimal.

Finalmente, efectúa la multiplicación (de manera mental) de 6 por 8, dando como respuesta a la tarea 48.

### **Reconstrucción**

#### *Primer segmento: Seguridad en la estrategia la regla de 3*

Michaelle afirma en el cuestionario y en la entrevista haber experimentado un eec de **seguridad** en la estrategia de la regla de tres, elegida inicialmente: “. . . me sentía segura al principio, porque estaba segura de lo que iba a hacer . . .” (ET1-8).

Es razonable suponer que Michaelle se siente segura porque aplica una regla escolar previamente aprendida. Ella considera la regla de 3 como una estrategia que es válida aplicar en situaciones de valor faltante. Tiene sentido afirmar esto de acuerdo con la respuesta que da la estudiante a la pregunta: “¿Cómo sabes cuándo usar la regla de 3?” y ella responde: “Ah pues es que nada más tienes que leer bien, porque cuando te dan los datos y uno debe ser el que dice pues esto vale tanto y es como el verdadero y el que te dan siempre le falta algo, siempre le tiene que faltar un detalle o un número o una cifra o algo así y eso es lo que tienes que encontrar” (ET1-22).

Sin embargo, pareciera que la alumna no tenía una certeza o una seguridad completa, porque en la entrevista incluye mitigadores cuando se refiere a esa estrategia de la regla de tres “ahí se **supone** que tenemos hacer

una regla de 3, porque se **supone** si de los... ¿no sé si eran carretes?, de los tres carretes eran 200 gramos y necesitabas 8 para hacer un sólo suéter, . . .” (ET1-4).

La seguridad (casi completa) que ella tenía por la estrategia la llevó a continuar con la solución de la tarea, en este caso ella decidió simplificar el cociente (CcT1-b) derivado del planteamiento de la regla de 3.

*Segundo segmento: Duda en resolución del problema mediante la regla de tres*

Para dar solución a la tarea mediante la regla de tres Michaelle usa dos formas para resolver las operaciones que indica dicha estrategia:

*Primer momento: Duda al simplificar la expresión que surge del planteamiento de la regla de 3*

Al considerar las resoluciones que Michaelle ofrece para las distintas tareas propuestas, se observa un patrón, y es el de plantear una regla de tres y resolverla mediante la simplificación de la razón (CcT1-b), como ya se comentó en los Antecedentes. Si esto es efectivamente un hábito o un patrón en ella, es muy probable que esta estrategia con este procedimiento de resolución le genere niveles relativamente altos de seguridad.

Sin embargo, a pesar de la seguridad que puede tener en el procedimiento, Michaelle abandona esta forma de resolución a través de la simplificación de la razón, quizás porque se percata de la imposibilidad que ella tiene de operar ese cociente, debido a que no tiene residuo cero y por tanto no sabe cómo continuar. Esto es posible afirmarlo ya que en todos los

casos en que aplica la simplificación y lo hace correctamente (Figura 3) es porque la división es entera.

Por lo que decide cambiar la forma para resolver las operaciones que indica la Regla de 3; para esto opta por resolver la división usando el algoritmo convencional.

*Segundo momento: Duda de la resolución de la división mediante algoritmo convencional, que surge del planteamiento de la regla de 3.*

A pesar de sus dudas Michaelle opta por continuar con la resolución de la tarea; ella afirma que lo hace porque le han aconsejado que no deje una pregunta en blanco (ET1-10), pero en este caso de la tarea de las madejas, hace mucho más que no dejar en blanco; en particular, ella decide recurrir al algoritmo convencional de la división.

Ella no solo no abandona el Trabajo Matemático, sino que se compromete en un procedimiento, el del algoritmo de la división, algoritmo que, como se comentó en los Antecedentes, ella tiene problemas para aplicar de manera correcta. En sus cuatro intentos (CcT1-c, e, f y g) ella busca ajustar los resultados obtenidos para que le hagan sentido (que no le salga “no sé cuánto”, ET1-4), y en cuya manipulación se sienta eficiente (“sin perder mucho tiempo”, ET1-8). Todo ello con el fin de sentir que lo hizo bien (ET1-6, 8), que es la Meta (o Necesidad) que ella se plantea en este caso para experimentar seguridad (ET1-6, 8). Sin embargo, ella misma reconoce que no lo logra. En varias ocasiones ella insiste en lo mismo: afirma que sintió que estaba mal su división (ET1-6); que sintió que le falló algo, y que sintió que estaba mal (ET1-8). Ella derivó una duda en los resultados de esa

operación, mostrando su conciencia del eec que experimentaba y de las Metas o Necesidades insatisfechas a las que estaba atada su duda; ella así lo dice: “siento que estaba mal mi división, entonces dije no, ese resultado no puede ser si estoy **dudando** de una parte de mi problema” (ET1-6).

Cuando se le pregunta a la estudiante “¿Cómo sabes cuándo ésta ya es tu respuesta correcta? ¿Hay manera de saberlo?” (ET1-25), ella responde: “Si, puedes verificarla varias veces y si te da lo mismo sí, y ya” (ET1-26). Es posible interpretar que cuando Michaelle realiza los cuatro intentos para resolver la división  $1600 \div 3$ , busca realizar una verificación, sin embargo, al no obtener el mismo resultado considera que su división no es correcta.

Esta duda da lugar a que ella realice una reflexión metacognitiva “. . .sentía que estaba mal entonces dije no pues vamos a volver a leer todo el problema y a tomarlo por partes y a empezar a hacer otro procedimiento y así” (ET1-8), Michaelle toma la decisión de abandonar la solución de la tarea usando la regla de 3 y decide realizar un nuevo intento usando otra estrategia, el valor unitario.

### ***Tercer segmento: Ambivalencia en la solución usando valor unitario***

Para dar una respuesta a la tarea usando el valor unitario e identificar los posibles eec que Michaelle sintió durante este segmento de su solución, se distinguen dos momentos:

#### ***Primer momento: Seguridad en la estrategia del valor unitario***

Michaelle busca deliberadamente salir de esa duda. Para satisfacer la Meta (no sentir que estaba mal), se plantea explícitamente un primer objetivo, a través de una reflexión metacognitiva, que consiste en llevar a

cabo un monitoreo de la resolución (“leer todo el problema, tomarlo por partes, empezar a hacer otro procedimiento”, ET1-8).

Esta toma de conciencia la lleva a la decisión de cambiar el rumbo de su resolución (de introducir una corrección). Se plantea entonces la estrategia del cálculo del valor unitario.

Es probable que Michaelle haya experimentado seguridad en torno a esa estrategia, ya que incluye un enfatizador cuando se refiere a ella en la entrevista “. . . y ya después dividí lo que pesaba con los 3 carretes y así multipliqué y ya salió. . .” (ET1-4).

*Segundo momento: Duda de los resultados de la división*

El valor unitario la conduce de todas formas a hacer una división; no obstante, su resultado posee un poco más de sentido para ella, en el contexto del problema, ya que es el que elige en calidad de resultado final.

Así que Michaelle elige el resultado “que está en rosa” (ET1-14) y afirma que se siente más segura con esta respuesta que con la otra (CcT1-d: 5033). Sin embargo, al confirmar la veracidad de su respuesta cuando las investigadoras le preguntan: “O sea esta es la que sientes que está mal [5033], y esta la que está bien [48]” (ET1-19), ella construye una particular descripción del eec que ella experimenta en torno a ese resultado: “Si, pero quien sabe” (ET1-20). Posiblemente se genera un eec de ambivalencia que se desprende de una cierta seguridad en su estrategia (del valor unitario) y una inseguridad o duda de los resultados de las divisiones involucradas.

## **Trayectoria**

En la Figura 5 se expone gráficamente el modelo teórico, de una posible trayectoria de los eec que Michaelle experimentó durante la resolución de la tarea 1, resaltando los Factores Condicionantes de esos eec y sus Efectos sobre el Trabajo Matemático. Se divide en tres apartados que corresponden a cada uno de los segmentos descritos previamente.

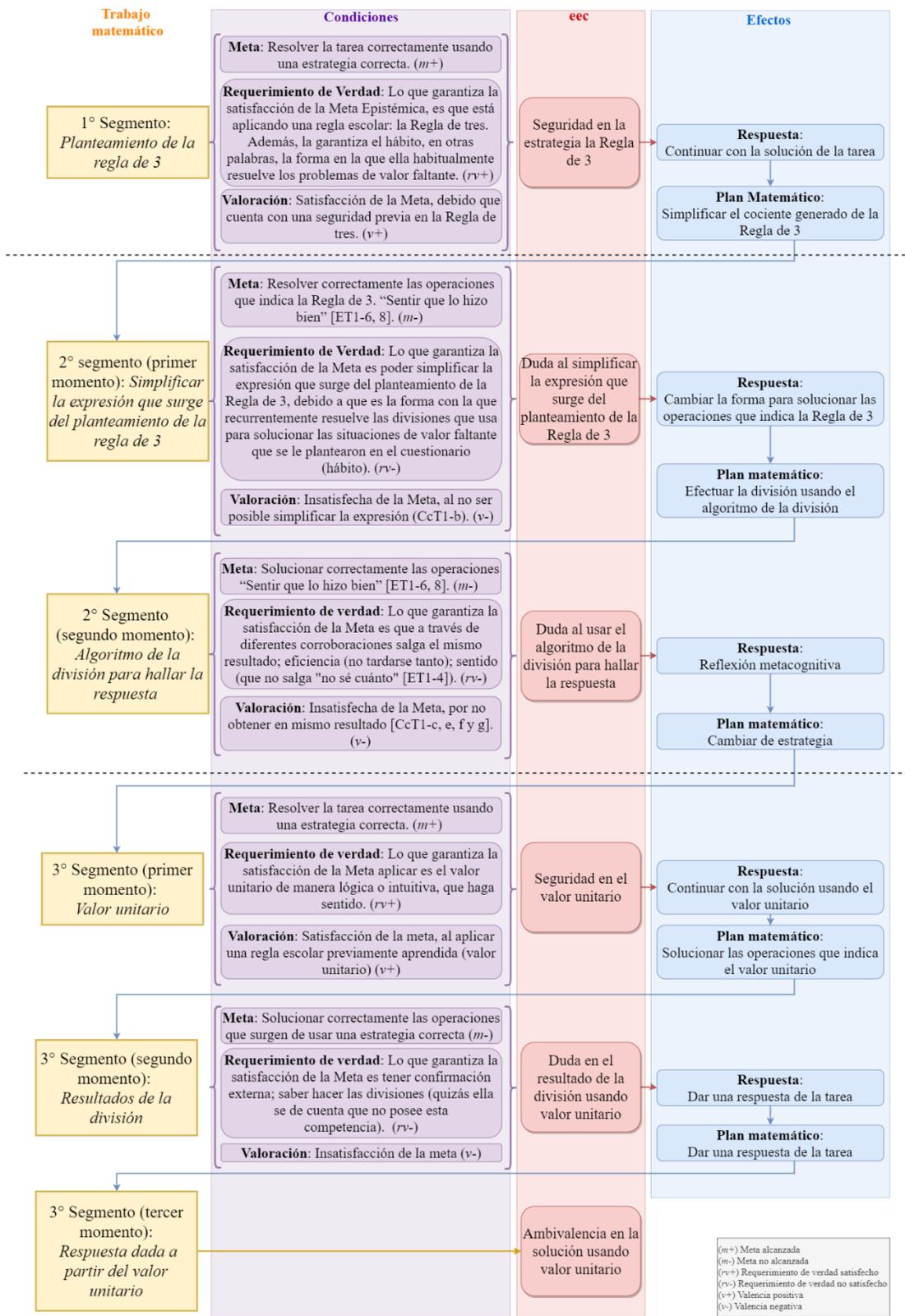


Figura 5. Trayectoria tarea de las madejas Michaelle

## CASO DE HANNIA (TAREA DE LAS MADEJAS)

### Antecedentes

- Hannia en el cuestionario conceptual respondió correctamente la primera tarea de proporcionalidad simple directa, tarea de las madejas, y la tarea no proporcional.
- En cuanto al cuestionario procedimental obtuvo un porcentaje de aciertos del 100%. Es posible interpretar que la estudiante soluciona correctamente ecuaciones de primer grado con una incógnita. Además que domina operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división)

## Esquema de resolución de la tarea

1. Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter, ¿Cuánto pesa el suéter?

1 a)  $3 m = 200g$        $8 = \text{suéter}$

2 b)  $66.6$        $1 = 66.66g$        $66.6$

3  $3 \overline{)200}$        $\times 8$

4  $20$        $532.8$

5  $20$

6

7

8 c)  $R = 532.8g$

9

10

11

i. La respuesta que acabas de dar es correcta:

Seguro	<input checked="" type="checkbox"/>	Parcialmente seguro	<input type="checkbox"/>	Totalmente inseguro	<input type="checkbox"/>
--------	-------------------------------------	---------------------	--------------------------	---------------------	--------------------------

ii. Explica en qué basas tu nivel de seguridad del inciso i:

En mi procedimiento, ya que estoy segura de que por la manera en que lo resolví obtuve el resultado correcto.

iii. Si tuviera que resolver este ejercicio dentro de una semana, ¿Mantendrías tu respuesta?:

Si	<input checked="" type="checkbox"/>	No	<input type="checkbox"/>	Quizá	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	----	--------------------------	-------	--------------------------

Figura 6. Producción tarea de las madejas Hania (CcT1)

De la producción de Hannia (Figura 6) es posible identificar que inicialmente ella hace un planteamiento de la resolución del problema en la que identifica los datos dados en el enunciado (CcT1-a). Enseguida la estudiante procede a realizar las operaciones que considera necesarias para llegar a la solución. En el caso de la tarea de las madejas calcula el cociente 200 entre 3, encontrando con esta operación el peso de una madeja de lana. Como última operación realiza el producto entre el peso de una madeja de

lana, 66.6 y 8 que son la cantidad de madejas que se necesitan para hacer el suéter (CcT1-b). Por último, da la respuesta al problema (CcT1-c).

## **Reconstrucción**

### ***Primer Segmento: Seguridad en la Estrategia***

En el cuestionario Hannia manifestó de manera explícita su seguridad en la estrategia (Figura 6, ítem i y ii). En la entrevista, cuando las investigadoras le preguntaron “(. . .) ¿A qué se debe tu seguridad?” (ET1-311), ella confirmó esa seguridad y expresó a qué estaba ligada: “(...) sé que el procedimiento [estrategia] que realicé para solucionarlo, sé que pues fue correcto..., entonces en eso se basa mi seguridad” (ET1-312). Al reportar que su seguridad en el procedimiento está basada en que ella sabe que es correcto, deja ver lo que necesita para experimentar esa seguridad: ella necesita saber que procedió de manera acertada. Ella no basó su seguridad sólo en suponer que su procedimiento fue correcto, o en creerlo, intuirlo o imaginarlo (Cfr. (Villoro, 2002)); para estar segura, ella se exige saber que actuó adecuadamente.

Aunque las garantías o razones en las que sustentó su saber no las explicita, en la entrevista insinuó algunas pistas sobre lo que para ella significa confiar. Al preguntarle: “Oye y para ti ¿Qué es estar segura?” (ET1-317), ella responde: “(. . .) confiada de lo que tú hiciste o lo que dijiste o lo que haces... que no te arrepientas de lo que ya hiciste, tienes que estar como centrada” (ET1-318), “(. . .) estar... como que... cero nervios, relajada, como segura jaja con lo que tú realizaste, que te sientas satisfecha” (ET1-320); a esto se le pregunta: “¿Satisfecha de qué?” (ET1-321) y ella responde: “(. . .)

como de lo que logras o lo que ya hiciste” (ET1-322). En seguida retoma: “. . .) de lo que ya hice, [que hice] lo que me pidieron, [y] lo que hice estuvo bien y por ello estoy relajada” (ET1-324), y después asegura: “. . .) [cuando] no (. . .) sigo un procedimiento que me enseñaron sí me siento más insegura del resultado que obtuve” (ET1-340). De esto, es plausible suponer que el “hacer lo que le pidieron” (ET1-324) o el “aplicar un procedimiento que le enseñaron” (ET1-340) son las razones en las que posiblemente Hannia basó su ‘saber’ que su estrategia era correcta.

Esta seguridad lleva a Hannia a continuar con la solución de la tarea; para esto continua con la solución de las operaciones.

***Segundo Segmento: Inseguridad en las Operaciones (realizadas en un primer intento)***

Siguiendo la estrategia elegida, Hannia realizó las operaciones correspondientes (Figura 6, CcT1-b). En la entrevista ella también externalizó los eec que experimentó durante la ejecución de esas operaciones, y aclaró en qué basaba esos eec. Hannia comenta que su seguridad la basa en el procedimiento realizado, “. . .) sé que el procedimiento que realicé para solucionarlo, sé que pues fue correcto, o estuvo bien los cálculos que yo hice, entonces en eso se basa mi seguridad” (ET1-312) y al preguntarle sobre cómo sabe que sus cálculos están bien, ella expresa: “. . .) los rectifiqué varias veces cuando ya había obtenido el resultado final y ya fue que pude hacer mis conclusiones y ya” (ET1-314). Por la respuesta, se consideró importante preguntar si eso es algo que ella

suele hacer, a lo que ella respondió: “sí, cuando no me siento muy segura, o cosas así (. . .) a veces sí rectifico mis operaciones” (ET1-316).

Al igual que en el caso de la estrategia, en el de las operaciones Hannia aclara que necesitaba saber que eran correctas para poder experimentar seguridad, imponiéndose la necesidad epistémica de saber de la corrección de los cálculos para experimentar confianza. Pero, a diferencia del primero, en este segmento la alumna sí especificó las razones en las que descansó su saber: en la verificación de operaciones. En la entrevista, Hannia revela que, si ella no verifica los cálculos, no puede saber que son correctos y por tanto ella experimenta inseguridad en torno a ellos. Así que, respecto a su resolución de la tarea de las madejas, es posible suponer que en el primer intento, es decir, en este segundo segmento, Hannia se sintió insegura de sus operaciones, pues como ella aclaró, las verificó para estar segura del resultado final (ET1-314).

*Tercer segmento: Seguridad en las operaciones (realizadas en un segundo intento) y seguridad en el resultado final*

Tanto en su producción como en la entrevista, Hannia no dejó evidencia de la rectificación de operaciones. Suponemos que ese trabajo fue hecho de manera mental. Al lograr el objetivo de “rectificar varias veces” (ET1-314) las operaciones, supo que eran correctas (satisfizo su necesidad epistémica de saber) y sintió una experiencia de seguridad que reporta en 312 (ET1): “sé (. . .) que mis cálculos son correctos, en eso se basa mi seguridad”. Pertrechada en esa seguridad, ya pudo hacer sus conclusiones y ya (ET1-

314), es decir, pudo proponer con toda confianza su resultado final, “sin arrepentirse” (ET1-318), dando por terminado el ejercicio.

## Trayectoria

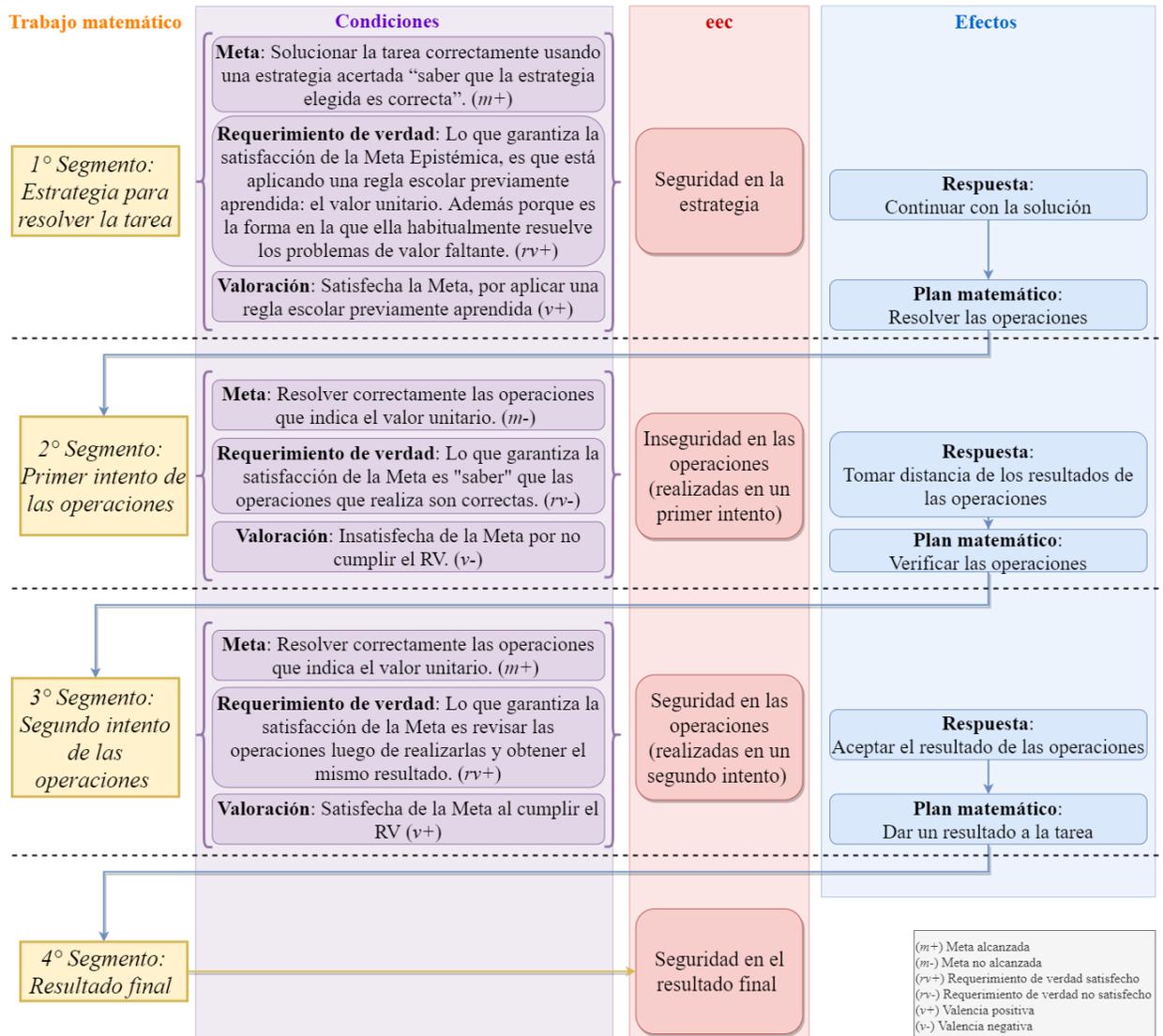


Figura 7. Trayectoria tarea de las madejas Hannia

## CASO DE ERIK (TAREA DE LAS MADEJAS)

### Antecedentes

- De la producción de Erik en el cuestionario conceptual es posible identificar que en los problemas de proporcionalidad que se plantean en el cuestionario, en el 2, el 4 y el 5, para resolverlos Erick acude al cálculo del valor unitario. En el caso del ejercicio 4, que es un problema de proporcionalidad directa simple, hace el cálculo del valor unitario de manera acertada y resuelve correctamente el problema. En el caso de la tarea 2 y 5 son problemas de proporcionalidad múltiple y no calcula correctamente el valor unitario, debido a que intenta resolver la tarea omitiendo la proporcionalidad múltiple (tal vez por desconocimiento). Con esto es posible ver que el cálculo del valor unitario es una estrategia habitual en Erik, para resolver problemas de valor faltante.
- El porcentaje de aciertos en el cuestionario conceptual fue de 33%, y se considera relevante mencionar que tardó 20 minutos en dar solución al cuestionario conceptual. Erick fue el primer estudiante en terminar el cuestionario, los demás estudiantes tardaron alrededor de 60 minutos.
- En cuanto al cuestionario procedimental presentó un error al resolver una resta lo que le dio un 83% de aciertos del cuestionario. Además, es posible ver que en la mayoría de los reactivos que realizó de cierta manera hizo una comprobación de las operaciones realizadas, usando la operación inversa. De lo anterior es posible afirmar que Erik cuenta

con un dominio de operaciones básicas: suma, resta y multiplicación. Además, soluciona correctamente ecuaciones de primer grado con una incógnita.

- De los dos cuestionarios y lo anteriormente mencionado es posible interpretar que el estudiante tiene una idea intuitiva relativamente correcta sobre la proporcionalidad directa, especialmente cuando está involucrada la razón unitaria.

### Esquema de resolución de la tarea

1. Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter, ¿Cuánto pesa el suéter?

1  
2  
3  
4  
5

a) 
$$\begin{array}{r} 200 \\ \times 8 \\ \hline 1600 \end{array}$$

6  
7 b)  $M = \text{El suéter pesa } 1600\text{gr}$   
8  
9  
10  
11

i. La respuesta que acabas de dar es correcta:				
Seguro	✓	Parcialmente seguro		Totalmente inseguro
ii. Explica en qué basas tu nivel de seguridad del inciso i:				
Es un problema muy fácil de multiplicación, solo se multiplica con la información dada				
iii. Si tuviera que resolver este ejercicio dentro de una semana, ¿Mantendrías tu respuesta?:				
Si	✓	No		Quizá

Figura 8. Producción tarea de las madejas Erik (CcT1)

El plan de resolución de la tarea que Erick toma inicia con el producto de 200 gramos por 8 madejas de lana (CcT1-a), luego con el resultado de esa operación da el resultado de la tarea (CcT1-b). En la entrevista cuando el estudiante explica cómo solucionó la tarea, él afirma: “. . . te dice que tienes 3 madejas de lana de 200 gramos y necesitas 8 para hacer un suéter pues, si necesitas 8 y te pide el peso, no más tienes que multiplicar el peso de lo que se necesita por las 8 de las que se necesitan y ya” (ET1-476), es posible ver que Erik interpreta del enunciado que cada madeja de lana pesa 200 gramos y no que las 3 madejas de lana pesan 200 gramos en total. Ignorando los datos del problema, Erick asume que lo que está en juego es una razón unitaria y procede como si lo fuera. En estos casos él sabe cómo resolver exitosamente los problemas como lo mostró en el caso de la tarea 4. Además, se puede considerar que desde la interpretación que él hace del enunciado considera que su solución es correcta, y el dato dado de 3 madejas o lo considera innecesario o por alguna razón lo ignora o lo pasa por alto. Esto mismo lo vuelve a hacer en la entrevista, donde él vuelve a leer el enunciado completo de la tarea y vuelve a ignorar el dato de las tres madejas y vuelve a hacer la interpretación como si se tratara de una razón unitaria.

## **Reconstrucción**

### ***Primer segmento: Seguridad en la estrategia***

En la producción y en la entrevista Erik manifiesta haber experimentado un eec de **seguridad** de la estrategia utilizada para solucionar el problema. En este caso realiza una multiplicación entre 200 gramos y 8 madejas, y

considera que la tarea “es un problema fácil de multiplicación, solo se multiplica la información dada” (CcT1-ítem ii).

Además de considerar la tarea como “fácil”, él menciona que se siente seguro porque: “pues creo que eso es un problema como muy sencillo donde pues, sólo es multiplicación, los datos lo dan y sólo haces la operación y ya” (ET1-478). Aquí es posible ver que cuando Erik dice “los datos lo dan” está pasando por alto que hay una interpretación que él hace. De igual manera Erik menciona que él sabe que está seguro: “por [sus] conocimientos más que nada, digo ‘si yo sé cómo se hace’ . . .” (ET1-490). De acuerdo con esto es posible afirmar que el estudiante soporta su seguridad en la estrategia, en saber cómo se hace, es decir, en elegir una estrategia previamente aprendida, que sea fácil y/o sencilla.

De acuerdo con los antecedentes se considera que Erik acudió a la estrategia: calcular el valor unitario para resolverla. Pero hizo un cálculo mecánico, o apresurado, o descuidado, o rutinario, pero por alguna razón él interpretó que los 200g se referían a **una** madeja, y que eso era un **dato dado** (que estaba dado en la información). Lo que le impidió dudar sobre la posibilidad de que su lectura de los datos pudiera estar equivocada, o de otra forma, sintió un eec de seguridad en torno a lo que se “decía en los datos” y en su lectura. Parece que esta seguridad quizás actuó como obstáculo para revisar o corroborar su resultado. Es decir, su seguridad actuó como obstáculo para revisar su lectura y para revisar sus resultados. Y quizás esa seguridad está derivada de alguna creencia falsa (de que ese tipo

de problemas involucran siempre a la razón unitaria), en la cual él confía y tampoco ha verificado.

La seguridad que él siente por la estrategia lo lleva a continuar con la solución de la multiplicación planteada.

### *Segundo segmento: Seguridad en la operación*

Luego de plantear la multiplicación de 200 por 8, Erik la efectúa de manera horizontal (Figura 8, CcT1-a). En la entrevista el estudiante manifestó que luego de solucionar esta operación no le fue necesario comprobar “porque eso estaba muy fácil” (ET1-486), de donde es plausible que Erik haya sentido un eec de **seguridad** en la operación realizada o como él lo afirma: “. . . tengo la seguridad de lo que hice . . .” (ET1-490).

En este caso la seguridad que él sintió de las operaciones realizadas, es decir, sentir que estaban demasiado fáciles lo llevó a continuar con la tarea y dar una respuesta sin comprobar.

### *Tercer segmento: Seguridad en el resultado*

El estudiante aclara que “Cuando no considero [la tarea] fácil creo que sí debo hacer dos o tres veces la operación para sentirme más seguro de mi resultado” (ET1-488) y que lo contrario a estar seguro es “. . . cuando te sientes . . . no sé . . . inseguro de lo que estás haciendo como cuando pones la respuesta y te pones a pensar: no, pues creo que lo hice mal, como que entras en duda con tus propios saberes y entonces sí te pones un poco nervioso” (ET1-494). Sin embargo, él aclara que en la solución del cuestionario no se sintió inseguro (ET1-496).

Así que después de saber cómo se hace (estrategia), tener la seguridad de lo que hizo (operación), sentirse bien consigo mismo (confianza auto referida) y con lo que puso (ET1-490) Erik da un resultado final de la tarea sintiendo un eec de **seguridad**.

### Trayectoria

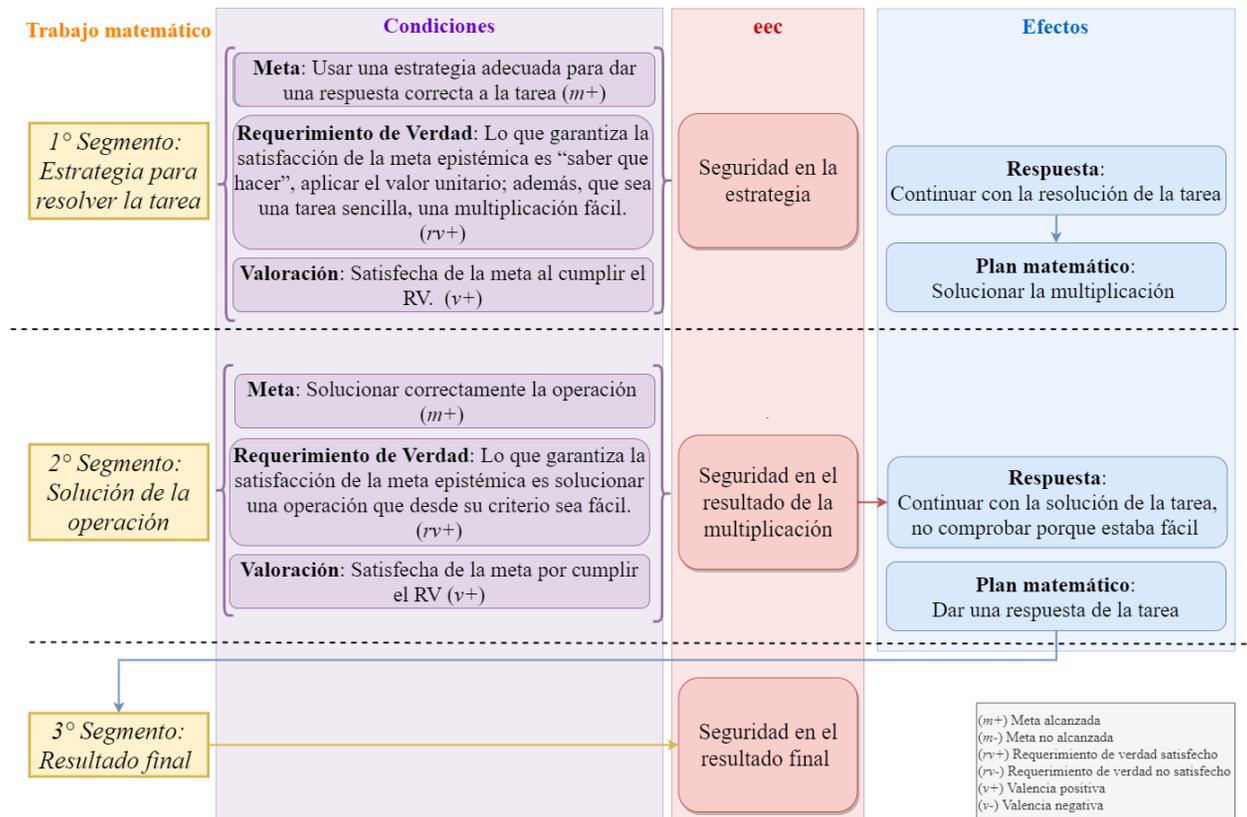


Figura 9. Trayectoria tarea de las madejas Erick

## CASO DE ALESSANDRA (TAREA DE LAS MADEJAS)

### Antecedentes

- Alessandra en el cuestionario conceptual respondió correctamente las tareas de proporcionalidad simple directa, y la tarea no proporcional. En segundo cuestionario tuvo un porcentaje de aciertos del 66%.

- La estudiante considera que los problemas de valor faltante se pueden resolver acudiendo a la noción de proporcionalidad directa (que ella ha construido). Esto es posible interpretarlo a partir de lo que la estudiante manifiesta en:

*380. A: Se me hizo muy relajada, esa sí se me hizo muy sencilla, porque no es como complicada de entender qué necesitas hacer o la relación. (ET1)*

Y en:

*410. A: Si, y es que no entendí qué es lo que tenía que hacer del todo, entonces por eso saqué la razón de proporcionalidad con la cantidad de centímetros y según sale que es más pequeño. (ET3)*

Alessandra asocia los términos ‘razón de proporcionalidad’ y ‘relación’ con “lo que necesitas hacer” para darle solución a la tarea en ciernes (T3 o T1). Se puede decir entonces que esa noción de proporcionalidad (con sus distintas expresiones) está en la base de las estrategias para resolver esas tareas. Tomar a la proporcionalidad (directa) como el concepto central de la estrategia que permite resolver problemas de valor faltante, es una tendencia en Alessandra que forma parte de sus prácticas previas.

- Alessandra padece dislexia, trastorno de aprendizaje lectoescritor. En la entrevista ella habló así del tema: “Tengo un poco de dislexia, de repente muevo los números y a veces confundo los resultados” (ET1-392). La alumna es consciente de su dislexia, lo que quizás la ha llevado a construir tácticas para enfrentarla. En la entrevista afirmó:

“Esa [resolución de la tarea 5] creo que fue más por lógica. Confío más en mi lógica” (ET1-426). Las investigadoras indagaron: “¿Normalmente u hoy? (ET1-429); Alessandra respondió: “Normalmente, porque a veces como tengo problemas con los números, no puedo andar confiando tanto en si está bien o no (. . .)” (ET1-430).

### Esquema de resolución de tarea

1. Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter, ¿Cuánto pesa el suéter?

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11

a)  $200 \div 3 = 66.6 \times 8$

d) El suéter pesa 532.8g

c)

54	
66.6	
x 8	
532.8	

b)

$6 \times 8 = 48$

$66.6$

$3 \overline{) 200.0}$

20

20

2

i. La respuesta que acabas de dar es correcta:

<input checked="" type="checkbox"/> Seguro	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> Parcialmente seguro	<input type="checkbox"/> Totalmente inseguro
--	--------------------------	--	--

ii. Explica en qué basas tu nivel de seguridad del inciso i:

En la logica que utilice con la razón:

1 sueter = 8 madejas.

3 madeja = 200g

iii. Si tuviera que resolver este ejercicio dentro de una semana, ¿Mantendrías tu respuesta?:

<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Quizá
--	--------------------------	-----------------------------	--------------------------------

Figura 10. Producción tarea de las madejas Alessandra (CcT1)

A Ale se le planteó la siguiente tarea (tarea 1): “Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter, ¿Cuánto pesa el suéter?”. La Figura 10 muestra la producción que Alessandra plasmó en el cuestionario. Para iniciar la resolución de la tarea Alessandra calcula cuánto pesa cada madeja, para esto plantea la división 200 entre 3 (CcT1-a), es decir, calcula el valor unitario. Para ello utiliza el algoritmo de la división y encuentra que el cociente es igual a 66.6 (CcT1-b), resultado que completa en (CcT1a)

Luego de tener el valor unitario, multiplica 8 por el valor de una madeja (CcT1-c), operación que al aparecer expresa en (CcT1-a), en la que se identifica un error de notación pues la igualdad planteada no es correcta ( $200 \div 3 \neq 66.6 \times 8$ ). Aunque podría creerse que cuando ella escribió el  $\times 8$  alejado del 66.6, solo buscaba expresar las operaciones a realizar.

En la producción de la estudiante también se encuentran dos multiplicaciones escritas (CcT1-b), se cree que las utilizó a la hora de calcular el peso de las 8 madejas. Tal vez recordaba el resultado de  $6 \times 7$ , pero no el de  $6 \times 8$ , así que de esta forma lo calculó.

Finalmente, da su respuesta teniendo en cuenta las dimensiones del resultado (CcT1-d), a pesar de que antes de esto parece haberlas dejado a un lado.

## Reconstrucción

### *Primer Segmento: Seguridad en la estrategia de la resolución (basada en la noción de proporcionalidad) para encontrar el valor faltante*

Alessandra reporta en el cuestionario que ella basa su seguridad (de que su respuesta es correcta) en “la lógica que utilizó con **la razón: 1 suéter=8 madejas; 3madejas=200 g**” (CcT1-ítem ii). En este testimonio Alessandra emplea el término ‘razón’ para hacer referencia a lo que ella entiende por la noción matemática de proporcionalidad simple directa (que, aunque su representación no es correcta, ella la interpreta de manera acertada). En otras declaraciones de la alumna también hace referencia a esa noción de proporcionalidad, aunque para ello utiliza otros términos, como se muestra en lo que sigue.

En la tarea 3 Alessandra informa: “no estoy completamente segura de que esa sea la respuesta porque no encuentro la **razón**” (CcT1-ítem ii). Y en la entrevista, ella relata: “(. . .) es que no entendí **qué es lo que tenía que hacer del todo**, entonces por eso saqué la **razón de proporcionalidad** con la cantidad de centímetros (. . .)” (ET3-410). Por otra parte, con relación a la tarea 2, a la pregunta que las investigadoras le hacen sobre por qué puso ‘parcialmente segura’ (CT2), Alessandra declara: “Porque no entendí **si la razón es correcta**” (ET2-400). Y cuando las investigadoras le cuestionan (ET1-379) sobre cómo se sintió en la tarea 1, Alessandra responde: “Se me hizo muy relajada, esa sí se me hizo muy sencilla, porque no es como complicada de entender **qué necesitas hacer o la relación**” (ET1-380). Al igual que con el término ‘razón’ que aparece en la tarea 1, en estas

intervenciones los términos ‘razón de proporcionalidad’, ‘razón’ o ‘relación’ se refieren a la noción que la estudiante ha construido sobre la proporcionalidad directa.

Aunque no lo explicita, en el caso de la tarea 1 se puede suponer que Alessandra siente un eec de **seguridad** en su estrategia y en su idea de proporcionalidad. Porque si careciera de esa seguridad, no tendría seguridad en su respuesta del ejercicio, la que en cuestionario dice basar en “la lógica que usó en la **razón...**” (CcT1-ítem ii). Este supuesto se refrenda cuando Alessandra describe sus experiencias en entrevista (al hacer referencia de la tarea 4); ahí las investigadoras averiguan: “¿Qué te hace estar **segura** [de la respuesta a la tarea 4]?” (ET4-419), y Alessandra contesta: “Lo mismo que las anteriores, **la razón de proporcionalidad**: de los 104 pesos (. . .)” (ET4-420).

A lo largo de la entrevista, Alessandra aclara aquello en lo que basa su seguridad en la estrategia (que como se dijo, está centrada en la noción de proporcionalidad): en 449 de la entrevista (ET6) las investigadoras inquieren: “¿Cómo haces para saber que estás segura?”; Alessandra les explica: “(. . .) eso lo sé porque me costó mucho trabajo **entender** cómo factorizar y eso, (. . .) para mí me da una seguridad porque entonces eso quiere decir que ya mejoré y que ya lo **entiendo**; **si es algo que entiendo estoy segura**” (ET6-450).

Por otra parte, en el cuestionario Alessandra afirma que su seguridad (en su resultado) la basa “en la **lógica** que utilizó en la razón: (. . .)” (CcT1-ítem ii). Como se vio en los antecedentes, ella es consciente de su dislexia y ha

diseñado tácticas para enfrentar ese problema. Una de ellas es ‘confiar más en su lógica’ (que en sus procedimientos o sus operaciones). Su lógica es un recurso que le brinda confianza (y seguridad). Es así otra condición o requerimiento de verdad (RV) que, complementada con la previa, la lleva a experimentar seguridad.

Haciendo una síntesis se puede afirmar que Alessandra siente seguridad en la estrategia y en su concepto central (e. g., proporcionalidad), cuando logra entender a través de la lógica (cómo aplicar) ese concepto (a los datos de una tarea); es plausible suponer que en esta situación (de seguridad) ella logra dotar de sentido y significado a la tarea y a lo que es necesario hacer para resolverla y que justo esto forma parte de sus condiciones o RV para sentir seguridad.

La seguridad en su estrategia tuvo efectos sobre su trabajo subsiguiente: reconocer que su estrategia es correcta la llevó, de manera natural, a aceptarla y esto la impulsó a realizar las operaciones de acuerdo con los pasos que esa estrategia y su concepto central de proporcionalidad, le marcaban.

***Segundo Segmento: Duda en las (primeras) operaciones realizadas debido a su dislexia y seguridad como resultado de la revisión***

Los contenidos matemáticos que en este segundo segmento están en juego son las operaciones aritméticas de división y multiplicación y sus resultados (ver b y c de Figura 10). Para identificar los posibles eec que Alessandra sintió con respecto a estos contenidos, se distinguen dos momentos, considerando el posible desarrollo cronológico de la resolución.

Por claridad en la exposición se inicia la reconstrucción con el segundo momento.

*Segundo Momento (después de la revisión de sus operaciones): seguridad (parcial) en el resultado de las operaciones*

Las investigadoras le preguntan a Alessandra: “¿Por qué te sientes segura de tu respuesta [de la tarea 1]?” (ET1-385); a esto la alumna responde:

“Porque según lo que revisé, mi multiplicación y mi división, este... el resultado de la división y la multiplicación estaban bien” (ET1-386).

En ese testimonio Alessandra dice estar segura de su respuesta a la tarea; y para justificar ese eec hace referencia a sus operaciones. Así que se puede suponer que la seguridad en su solución a tarea 1 está correlacionada (también) con la seguridad de sus operaciones: al igual que con la estrategia, si la alumna no hubiera sentido seguridad en sus operaciones y sus resultados, no hubiera sentido seguridad en la solución final de la tarea.

Una segunda evidencia de su seguridad en los resultados de las operaciones consiste en que ella estima que “estaban bien” (ET1-386); como ya se vio, para Alessandra, “(. . .) la seguridad... [es] saber que estás bien (. . .)” (ET5-438). Así que para ella, asegurar la verdad de H es seguridad en H; en particular, asegurar la verdad en los resultados es seguridad en los resultados. No obstante, cabe precisar, la seguridad que reporta en 386 (ET1) parece ser solo parcial: se puede inferir por los mitigadores que ella usa en esa expresión (Martínez & Rigo, 2014): ‘según lo que revisé’; ‘este...’ y el modo del verbo cuando se refiere a los resultados: ‘estaban bien’, en lugar

de 'están bien', dejando ver que en la entrevista quizás ya no podría seguir garantizando su veracidad.

Las condiciones o RV que en este caso ella se impone para suponer la veracidad en los resultados de las operaciones y para experimentar esa seguridad (parcial), Alessandra lo revela en 386 (ET1): revisar las operaciones. Esa es otra táctica a la que ella recurre para intentar paliar los efectos de su dislexia, táctica reforzada seguramente por la cultura escolar. No se cuentan con evidencias de cómo Alessandra lleva a cabo su revisión; en su producción lo que se nota es que ella efectúa con detenimiento los algoritmos aritméticos, lo que quizás le permite revisarlos o rehacerlos de manera mental.

Cuando Alessandra habla de revisión, ella revela duda. Y es que, si no la hubiera experimentado, (posiblemente) no hubiera tenido necesidad de revisar (también pudo haber revisado como un acto rutinario impulsado por la cultura escolar). Y esto lleva al primer momento de este segundo segmento, en el que (es del todo probable que) Alessandra experimentó duda en los resultados de sus operaciones.

*Primer Momento (antes de revisar): duda en los resultados de las operaciones*

Alessandra reflexiona, como reacción a las preguntas de las investigadoras:

389. A: *¿Y la duda qué sería?*

390. E: *La duda sería... mmm... Yo en mi caso tengo problemas con los números porque de repente los cambios de lugar, mi duda sería en saber si lo hice completamente bien porque muchas veces, aunque lo revise, vuelvo a cambiar mi*

*número; sólo sería ese en mi caso la duda. La duda sería que hubiera algo en lo cual no estuviese segura, algo en lo que dijeras puede que me haya equivocado por un procedimiento que estuvo mal.*

391. E: *¿Cómo es eso de cambiar de lugar los números?*

392. A: *Tengo un poco de dislexia, de repente muevo los números y a veces confundo con los resultados.*

394. A: *(. . .) En mi caso eso es lo que genera la duda.*

395. E: *A medida que te han tratado la dislexia, ¿Has mejorado? ¿La duda ha cambiado?*

396. A: *En su mayoría, no del todo, porque de vez en cuando tengo errores, entonces según yo ya lo revisé y está bien y lo vuelvo a revisar y está bien y después cuando me entregan los resultados es... ¿Por qué puse este número si yo sabía que era el otro?*

En la entrevista ella dice: “(. . .) como tengo problemas con los números, no puedo andar confiando tanto en si está bien o no, porque por ejemplo un número de 3 cifras puedo confundir 618, puedo cambiarlo por 681, aunque yo sé que es 618 lo puedo llegar a cambiar e inconscientemente pensar que estoy bien” (ET5-430).

En la introspección que en la entrevista comparte Alessandra sobre su dislexia y de los efectos que tiene sobre su trabajo aritmético se descubre la duda que parece sentir de manera sistemática o frecuente frente a los resultados de sus procedimientos aritméticos. Es muy posible entonces que ella dudó de los resultados de la multiplicación y división que realizó para resolver tarea 1 (aunque ella no lo dijo directamente). Y siendo consistente

con sus experiencias de seguridad, al dudar de los resultados, dudó de su veracidad. Así lo puso ella: “(. . .) mi duda sería en saber si lo hice completamente bien (. . .) La duda sería (. . .) algo en lo que dijeras puede que me haya equivocado por un procedimiento que estuvo mal” (ET1-390). Así, al dudar de sus resultados, Alessandra se abstiene de suscribir su verdad; no asume un compromiso con esa verdad. Está frente a un dilema: ¿qué es lo correcto, 618 o 681?

Alessandra siente duda porque, aunque sabe que es 618, lo puede llegar a cambiar e inconscientemente pensar que está bien. Y esto responde a su dislexia, lo que hace que ella escriba involuntariamente un resultado erróneo, que en ocasiones y a pesar de recurrir a la revisión reiterada, carece de posibilidades de enmendarlo. Siente dudas porque es consciente que no cuenta con las herramientas cognitivas para poder resolver el dilema.

En lo expuesto se han aportado evidencias de que antes de revisar las operaciones Alessandra (muy posiblemente) sintió duda en la veracidad de sus resultados (Primer Momento). Duda alimentada, como se dijo, por la desconfianza que le genera la posibilidad de haber cambiado números. Esto tuvo consecuencias. Una posible fue que la duda (en la verdad de los primeros resultados) la llevó naturalmente a tomar distancia de esos resultados (tendencia de acción) y eso, a su vez, la llevó (en el Segundo Momento) a realizar un escrutinio de lo hecho (e.e.c como guía del trabajo matemático). La revisión de las operaciones le permitió cubrir sus condiciones o RV para poder experimentar seguridad (aunque fuera solo seguridad parcial) en los resultados arrojados por sus procedimientos. Esta

seguridad en la verdad de esos resultados también tuvo efectos: aceptar esos resultados y, en consecuencia con esa tendencia, a concluir su ejercicio, como se observa en el Tercer Segmento.

***Tercer Segmento: Seguridad en el resultado final del ejercicio***

La seguridad experimentada en torno a la estrategia (que se describió en el Primer Segmento); en conjunción con la duda en las primeras operaciones realizadas que en el Segundo Segmento encaró y resolvió, a través del procedimiento de revisión, llevó a Alessandra a aceptar el resultado final de la tarea, con un eec de seguridad, de acuerdo con lo que reportó en el cuestionario y en la entrevista.

## Trayectoria

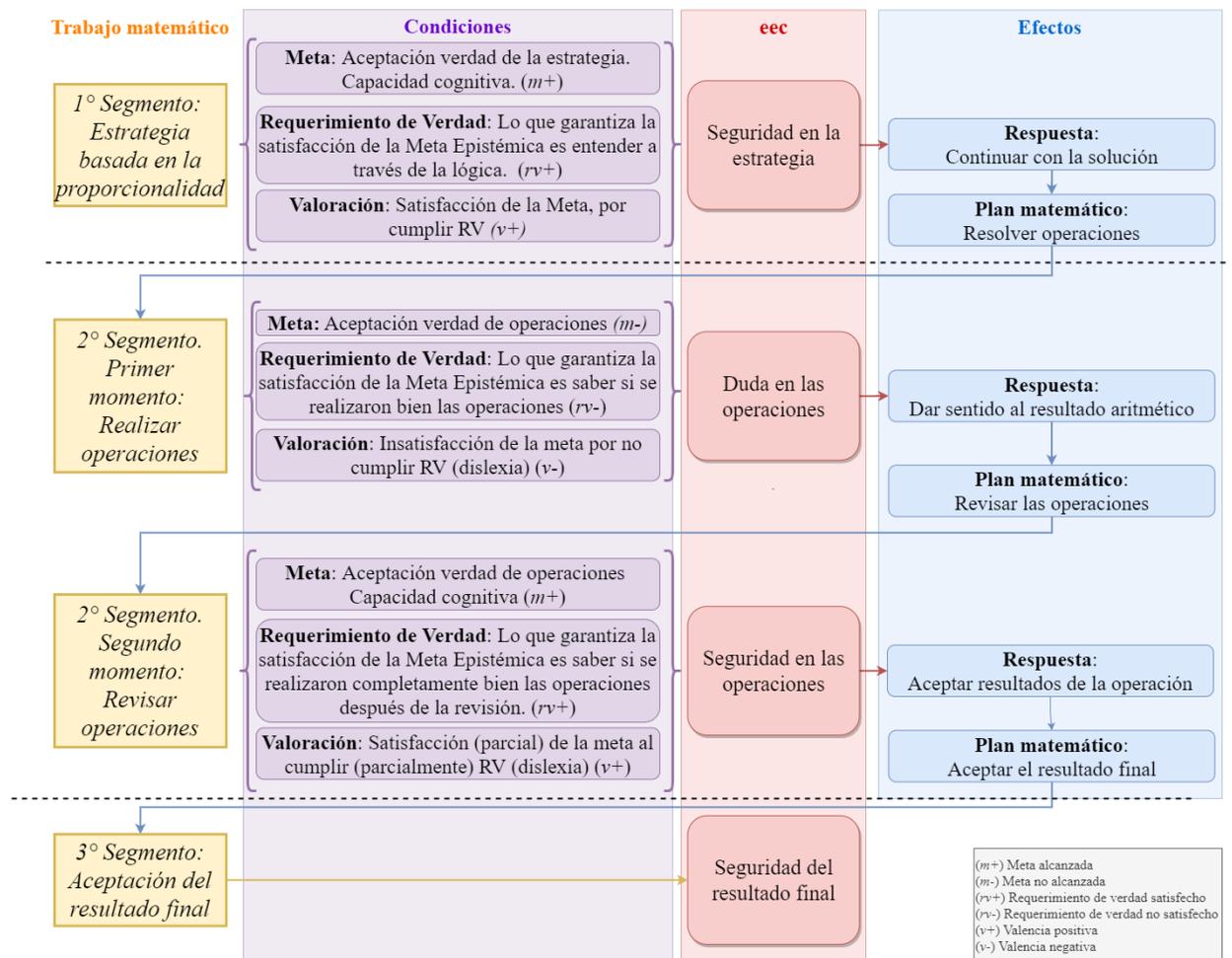


Figura 11. Trayectoria tarea de las madejas Alessandra

A partir de la trayectoria de la tarea de las madejas de Alessandra se dejar ver la capacidad de introspección de la estudiante y se considera relevante realizar el análisis de la tarea 3, tarea de las telas que ella resolvió. Además, en la tarea de las telas fue posible identificar diferentes matices de los eec y características de estos.

## CASO DE ALESSANDRA (TAREA DE LAS TELAS)

### Antecedentes

- Como se mostró en el Esquema de Resolución de Tarea de las madejas de Alessandra la estrategia que ella utiliza para resolver dicha tarea es el valor unitario, al igual que lo hace en las tareas 2, 4 y 5. A pesar de que la solución dada para estas tareas de proporcionalidad múltiple (tarea 2 y 5) y la tarea de proporcionalidad simple directa (tarea 4) fueron incorrectas, es posible ver que ella recurre frecuentemente a resolver problemas de valor faltante a partir del valor unitario.
- Alessandra cuenta con experiencia de venta de telas debido a que su mamá trabaja en este sector, como ella lo menciona: “(. . .) bueno mi mamá trabaja con telas (. . .)” (ET3-408).
- En cuanto a su competencia aritmética, en el cuestionario procedimental Alessandra tuvo un 66% de aciertos y se pudo observar que tiene una buena competencia para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Los desaciertos que tuvo fueron en tareas en la que usó como estrategia el valor externo. Además, se evidencia diferentes formas de verificación a través de realizar operaciones adicionales, principalmente multiplicaciones y divisiones, y remplazar el valor encontrado en la incógnita.

## Esquema de resolución de la tarea

3. Un vendedor de telas descubre, al hacer cuentas, que su ingreso fue de \$1,285.00 e lugar de \$1,290.00. Supone que el problema está en el metro que usa para medir. Si as fuera, ¿Cuánto mediría su metro?

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22

a) 
$$\begin{array}{r} 12.9 \\ 100 \overline{) 1290.0} \\ \underline{290} \\ 900 \end{array}$$

b)  $\$12.9 \times 1 \text{ metro}$

c)  $1285 \div 12.9 = 9.9$

e) Su metro mediría 99 cm.

d) 
$$\begin{array}{r} 9.9 \\ 129 \overline{) 1285.0} \\ \underline{1240} \end{array}$$

i. La respuesta que acabas de dar es correcta:			
Seguro	<input type="checkbox"/>	Parcialmente seguro <del>X</del>	Totalmente inseguro
ii. Explica en qué basas tu nivel de seguridad del inciso i:			
No estoy completamente segura de que esa sea la respuesta porque no encuentro la razón.			
iii. Si alguien diera una respuesta distinta, ¿Mantendrías tu respuesta?:			
De acuerdo	<input type="checkbox"/>	Parcialmente de acuerdo <del>X</del>	Totalmente en desacuerdo

Figura 12. Producción tarea de las telas Alessandra (CcT3)

A Alessandra se le planteó la siguiente tarea (Tarea 3): Un vendedor de telas descubre, al hacer cuentas, que su ingreso fue de \$1,285.00 en lugar de \$1,290.00. Supone que el problema está en el metro que usa para medir. Si así fuera, ¿cuánto mediría su metro?

A continuación se realiza la reconstrucción del plan de resolución de Alessandra en esta tarea, a partir de la producción que la estudiante plasmó en el cuestionario (Figura 12), y el fragmento de la entrevista en el que se refiere a su resolución (ET3-406).

*406. A: Me confundió un poco, porque dice que va a hacer las cuentas de su ingreso, pero no dice si son semanas, días, meses, entonces lo hice a la razón de lo que mide un metro que son 100 cm, entonces hice la división de la cantidad que se supone que debería estar ganando y eso equivaldría al metro en este caso, en este caso serían 12.9 pesos que equivale a un metro, (. . .)*

De acuerdo con la entrevista (ET3-406) es posible que Alessandra haya intentado solucionar la tarea usando una relación de proporcionalidad entre el ingreso y el tiempo, porque frecuentemente se involucra la variable tiempo en las tareas escolares de proporcionalidad; o porque de acuerdo con lo que ella menciona, su mamá trabaja con telas y en este sector es común que el ingreso se relacione con el tiempo.

Al no ser posible plantear la relación de proporcionalidad entre el ingreso y el tiempo, ella determina resolver la tarea con una relación de proporcionalidad simple directa entre el ingreso y la medida del metro (como se muestra en la Tabla 1.), que ella posiblemente se plantea de

manera mental. Para plantear la relación ella aclara que utiliza que “1 metro es igual a 100 centímetros” (ET3-406).

Luego de plantear una relación de proporcionalidad simple directa, Alessandra divide 1290 entre 100 y obtiene de manera acertada 12.9 (CcT3-a), ella escribe en la expresión (b) la interpretación que hace al cociente, “\$12.9 x 1 metro”, pero esta expresión es incorrecta, pues el resultado de la división (CcT3-a) representa el ingreso por cada centímetro de tela, es decir, \$12.9 por cada centímetro y no \$12.9 por cada metro de tela como ella lo expresa en (CcT3-b).

Al realizar  $1285 \div 12.9 = 9.9$  (CcT3-c) Alessandra no considera que al dividir \$1290 en 100 centímetros, obtiene \$12.9 que representa el ingreso por centímetro de tela, y que \$1285 representa el ingreso por un metro de tela (teniendo en cuenta el razonamiento que ella expone en la entrevista). Sin embargo, ella opera estos dos valores; se interpreta que con esta operación ella desea encontrar el valor desconocido usando el factor interno. El factor interno (incorrecto) que ella usa es  $1285 \div 12.9 = 9.9$ , hay que tener en cuenta que el factor interno (correcto) sería  $1285 \div 1290 = 0.99$ .

*Tabla 1. Relación de proporcionalidad*

<b>Medida del metro</b>	<b>Ingreso</b>
<b><math>M_1 = 100 \text{ cm}</math></b>	\$1 290
<b><math>M_2 = x</math></b>	\$1 285

Es notorio que Alessandra desconoce que la relación de proporcionalidad en esta tarea es inversa y no directa, como ella lo supone. Además al operar

\$1285 y \$12.9 ella incurre en el error de operar sin considerar las dimensiones adecuadamente.

Al efectuar la división (CcT3-c) Alessandra comete el error de no multiplicar 1285.0 por 10, al igual que hizo con 12.9. Por tanto, (CcT3-c) y (CcT3-d) no son expresiones equivalentes,  $1285 \div 12.9 \neq 1285 \div 129$ .

Finalmente, la estudiante escribe su respuesta al problema, en la que dice que el metro debería medir 99 cm. De esta respuesta se desconoce el procedimiento que ella usó para pasar del cociente de la división (d) 9.9 a dar como respuesta 99. Se podría pensar que ella “ajusta” o “acomoda” su resultado para hacerlo más creíble, es decir que haya una congruencia entre su lógica y su resultado aritmético. Al parecer hace un análisis dimensional, aunque implícito pero incorrecto.

## **Reconstrucción**

*Primer segmento: Confusión por falta de datos en el enunciado para plantear la relación de proporcionalidad tiempo e ingreso.*

En la entrevista Alessandra manifiesta **confusión** en este segmento. En 406 ella afirma: “Me confundió un poco, porque dice que va a hacer las cuentas de su ingreso, pero no dice si son semanas, días, meses (. . .)” (ET3-406). De esto es posible interpretar que ella inicialmente planea solucionar la tarea con una relación de proporcionalidad simple directa entre el ingreso y el tiempo. La confusión surge porque ella considera que hacen falta datos relacionados con la variable tiempo

Al no ser posible plantear la relación de proporcionalidad entre tiempo e ingreso, ella busca cambiar las variables en la relación de proporcionalidad.

*Segundo segmento: Seguridad baja en una estrategia de proporcionalidad directa que la lleva a un resultado numérico*

Los contenidos matemáticos que en este segundo segmento están en juego son la relación de proporcionalidad entre la medida del metro y el ingreso, el valor unitario (ver a y b de la Figura 12), el factor interno (ver c y d de la Figura 12), y la respuesta aritmética (CcT3-e). En este segmento se identifican dos EEC, inicialmente una **seguridad baja** cuando planteó la relación de proporcionalidad directa (entre la medida del metro y el ingreso), como parte de sus tendencias y hábitos de resolver problemas de valor faltante con proporcionalidad directa.

Del cuestionario es posible determinar que Alessandra tiene una tendencia en todas sus resoluciones de resolver los problemas de valor faltante usando proporcionalidad directa, esa estrategia es parte de sus predicciones, y esto genera cierta seguridad, esto le da un cierto camino en sus resoluciones. No obstante, en este caso ella reconoce que: “(. . .) no entendí qué es lo que tenía que hacer del todo, entonces por eso saque la razón de proporcionalidad con la cantidad de centímetros y según sale que es más pequeño” (ET3-410). Así que se ve que aplicó la proporcionalidad directa solo de manera rutinaria, quizás como para explorar, sin entender lo que tenía que hacer del todo (ET3-410), lo que generó en ella una seguridad inicial pero quizás muy baja, al inicio de este segmento.

En este segmento también se identifica el inicio de un segundo EEC en este caso de **duda**, se considera el inicio de esta duda debido a los errores que se identifican en la solución de las operaciones que efectúa o en las

interpretaciones que realiza; por ejemplo, al hacer la interpretación del \$12.9 (CcT3-b) o al no hacer un adecuado análisis dimensional en la división (CcT3-d). No es posible identificar el momento exacto en el que ella inicia a sentir duda, pero sí es posible ver que cuando ella empieza a presentar errores o dificultades en la solución de sus operaciones está dando cuenta de que no se siente satisfecha.

Además, cuando ella da su respuesta aritmética materializa la duda que había iniciado en la solución de sus operaciones, debido a que cuando Alessandra hace un “ajuste” al resultado de su división (CcT3-d), da una respuesta aritmética a la tarea “su metro mediría 99 cm” (CcT3-e). Y enseguida ella marca que está **parcialmente segura** de la respuesta dada, explicando que “no está completamente segura de que esa sea la respuesta porque no encuentro la razón” (CcT3-ítem ii).

Por lo anterior, ella continua con la solución del problema, pero en este caso decide hacer una verificación de su resultado aritmético.

### *Tercer segmento: Seguridad relativa al análisis de la tarea desde su experiencia practica*

Luego de dar una respuesta aritmética, “su metro mediría 99 cm”, pareciera que Alessandra decide verificar. Para verificar ella analiza la tarea desde su experiencia práctica, esto lo deja ver en la entrevista cuando explica que el metro debería ser más grande “porque está perdiendo una ganancia y bueno mi mamá trabaja con telas entonces ella tiene que medir entonces si se equivoca, si se pasa es una pérdida, eso quiere decir que el

metro tiene que ser más grande para que esté perdiendo; si no, tendría que estar ganando más, si fuera más pequeño el metro” (ET3-408).

Ella en la entrevista también menciona que: “. . .) no tiene sentido que, si el metro es más pequeño, esté perdiendo dinero, estaría ganando dinero (. . .)” (ET3-416), fragmento en el que deja ver que ella necesita llegar a una respuesta que tenga sentido.

Por tanto, pareciera haber implícito una **eec de seguridad relativa en esta resolución práctica**; es seguridad porque el razonamiento que ella hace a partir de su experiencia tiene sentido. Sin embargo, no es una seguridad completa, ya que no la elige como respuesta final.

*Cuarto Segmento: Duda de su resultado al no encontrar correspondencia entre su resultado aritmético y su ‘lógica’*

Para finalizar Alessandra coteja su resultado aritmético y el análisis de la tarea desde su experiencia práctica. Esto le genera un conflicto, el que hace explícito en la entrevista: “. . .) es algo que me **complicó mucho** porque se supone que el metro tendría que estar un poco más grande según mi lógica, pero según mis multiplicaciones es más pequeño; eso me confundió por eso no estoy segura de mi resultado” (ET3-406).

Ella tiene la necesidad de llegar a una respuesta aritmética que tenga sentido, en otras palabras, aplicar la lógica a un concepto matemático (el de proporcionalidad, o razón, como ella lo denota en algunos pasajes) que la lleve a un resultado. Esto es posible identificarlo cuando ella menciona que su “. . .) razonamiento tendría más sentido” (ET3-412), haciendo referencia al razonamiento de la resolución práctica, pero no lo incluye como

resolución de la tarea “porque no sé cuál es la cantidad, iba poner de hecho más de un metro” (ET3-414).

Es notorio un EEC de **duda** generada por una falta de correspondencia entre el resultado aritmético que da (segmento 2) y su experiencia práctica (segmento 3).

Es importante mencionar que cuando Alessandra tuvo un conflicto entre su lógica y sus operaciones, debido a que no entendió qué hacer del todo (ET3-410), se debe al conflicto que surge porque no encuentra un camino matemático ‘basado en la razón’ (ie, donde puede aplicar la razón de proporcionalidad y que le dé un resultado numérico) que coincida con su lógica, ie, al que le pueda dar un sentido. En eso consiste su ‘paquete de seguridad’. Y como no puede constituir o armar el paquete completo, se queda muy insatisfecha, como lo manifiesta “No me satisface, en lo absoluto” (ET3-418).

De modo general Alessandra se plantea el requerimiento de verdad de dar significado y sentido al resultado numérico de una tarea cuando ella entendió, a través de la lógica, la aplicación del concepto matemático en juego. Y cuando se cumplen estos rv, ella siente seguridad o incluso certeza. En este caso no pudo completar su rv porque no es solo la lógica que ella quiere aplicar, es la lógica de cómo aplicar un concepto matemático, en este caso quiere forzar que el concepto matemático sea la proporcionalidad directa, aunque parece percatarse o sospechar que este concepto no le sirve

Además, parece que en esta tarea su dislexia no afecta, tal vez porque su atención en este caso está centrada en sus dificultades para resolver la tarea, y por eso su dislexia parece pasar a segundo plano.

# Trayectoria

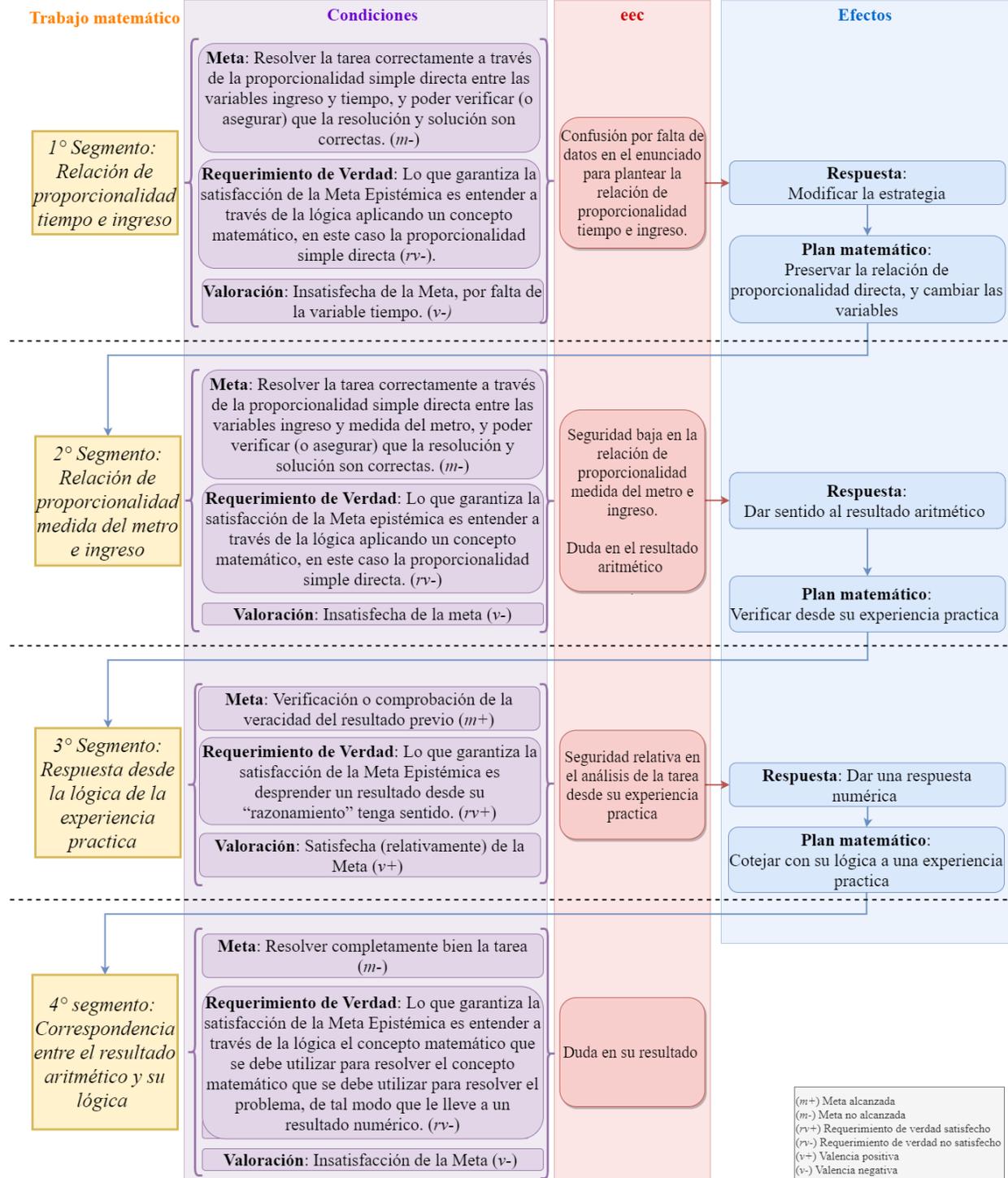


Figura 13. Trayectoria tarea de las telas Alessandra

Si bien la trayectoria se representa de forma lineal, se considera que el eec que le genera su 'resolución basada en su experiencia práctica o su resolución lógica' (segmento 3) se activa de manera simultánea con el eec que activa su resolución basada en procesos aritméticos. Se ve además, que Alessandra tiene presente su necesidad de que su respuesta aritmética tenga sentido, es decir, que concuerde con la que obtuvo a través de su experiencia práctica (Ver Figura 14).

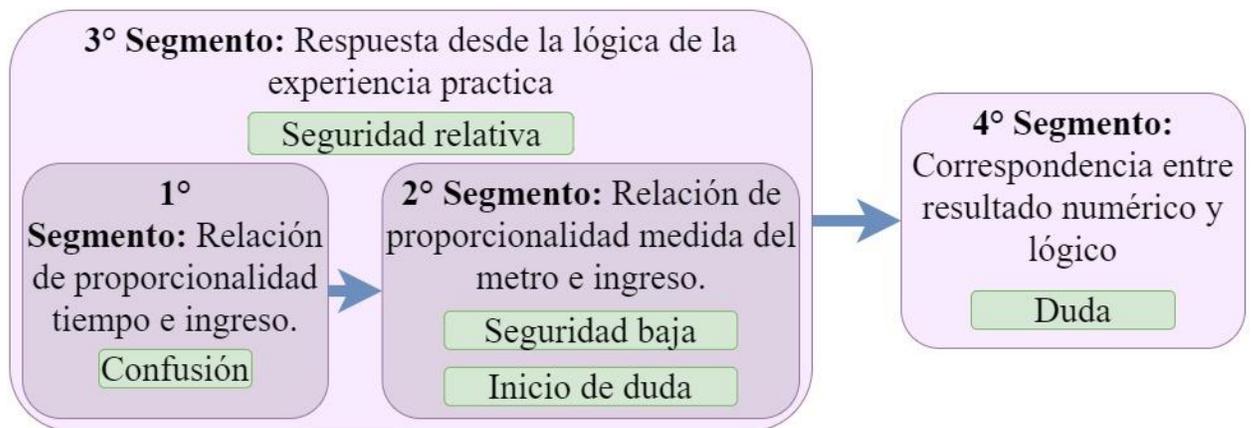


Figura 14



## CAPÍTULO 5

### DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En esta investigación -orientada por la perspectiva cualitativa en la versión de la Teoría Fundamentada-, se modelaron trayectorias de los eec (que surgen en el contexto de resolución de tareas de proporcionalidad), en las que fue posible verificar la existencia de condiciones que permiten ayudar a explicar los eec y la existencia de posibles consecuencias que se desprenden de esos eec. En lo que sigue se expone el punto de vista de las investigadoras al respecto, a partir de la reconstrucción de las producciones de los alumnos que ellas realizaron, en la que pudieron distinguir dichas condiciones y efectos de los eec.

#### **METAS Y LOS REQUERIMIENTOS DE VERDAD**

Esta investigación se encuentra en filiación con trabajos anteriores de Rigo-Lemini (2009, 2013) y Martínez (2020) y en ella se buscan verificar resultados encontrados previamente en dichas investigaciones. Dicho en términos técnicos de la Teoría Fundamentada, lo que en esta investigación se ha hecho es un muestreo teórico mediante el cual se han buscado nuevas evidencias empíricas para categorías derivadas en dichos trabajos previos, categorías específicamente relacionadas con las condiciones de los eec y sus efectos.

Lo que se ha confirmado en este trabajo es que, en el marco de la resolución de problemas y específicamente de problemas de valor faltante, los estudiantes se suelen plantear ciertos objetivos, propósitos o metas, que tienen que ver con la verdad, veracidad o la corrección de la respuesta que

han dado, o de la estrategia que han desarrollado, para resolver el problema o la tarea planteada (es decir, en torno al H que está en cuestión). En este trabajo, a estas metas se les ha llamado 'Metas Epistémicas', por su contenido relacionado con la veracidad de los H's que se han puesto en juego durante la resolución. En muchos casos, los estudiantes no se plantean esas metas de manera explícita; pero a la pregunta de las investigadoras al respecto, ellos dejan ver que durante la resolución del ejercicio o después, sí se plantearon implícitamente y de una manera u otra, dichas Metas Epistémicas. Algunas de las Metas Epistémicas que se plantearon los alumnos entrevistados fue 'el saber que lo hizo bien' o 'el saber que procedió correctamente'.

Además fue posible observar que bajo ciertas consideraciones o situaciones el alumno se plantea lo que aquí se ha denominado ciertos 'Requerimientos de verdad'. Se trata de los criterios que el estudiante de manera idiosincrática se plantea y con base en los cuales él valora las Metas epistémicas como satisfechas o no satisfechas. En esta investigación fue posible ver que en todos los casos los alumnos se plantean estas condiciones. Cuando se preguntó a los estudiantes acerca de su resolución ellos hablaron al respecto, (casi de manera espontánea) tanto de sus Metas como de los Requerimientos que él se plantea para satisfacer sus Metas; generalmente ellos tienen claro cuando se cumplieron dichos Requerimientos y se satisfizo esa Meta o cuando no la pudieron satisfacer. Por ejemplo los estudiantes explicitaron la Meta cuando usaban expresiones como: "quiero saber si lo que hice fue correcto", o "si fue válido", o "si es

verdadero”; dejaron ver los criterios que ellos se planteaban para satisfacerla, por ejemplo aplicar una regla escolar previamente aprendida o verificar usando la operación inversa y cómo ellos valoraban el cumplimiento o no de esos criterios.

### **CONDICIONES PARA LA SEGURIDAD**

Con base en lo anterior y en las trayectorias descritas en el capítulo previo (Capítulo 4), es posible sugerir, con cierto fundamento razonable, las condiciones en las que se puede generar o suscitar un eec de seguridad. En el contexto de la resolución de problemas (de valor faltante) es razonable suponer (o plantear como una hipótesis a verificar en trabajos posteriores) que la seguridad se da cuando el alumno valora como satisfechas las Metas Epistémicas que se ha planteado relacionadas con H's que surgen durante dicha resolución; esa valoración positiva la hace cuando el alumno considera que ha alcanzado o cubierto ciertos Requerimientos de Verdad que él se ha planteado. Es decir, una persona siente seguridad cuando, ante ciertas Metas epistémicas (que, insistimos, tiene que ver con la veracidad del H), valora como cubiertos ciertos Requerimientos de Verdad que satisfacen las Metas; como se explicó en el párrafo precedente, estos Requerimientos de Verdad se los plantea cada persona para satisfacer las Metas.

Algunos ejemplos pueden ilustrar lo antes dicho.

De la reconstrucción de Hannia a la tarea de las madejas se puede decir que el imbricado de condiciones que generaron su seguridad en la estrategia, y luego en las operaciones, incluyó el haber alcanzado algún Requerimiento de Verdad que ella se planteó, específicamente, verificar

operaciones; esto le permitió satisfacer su Meta epistémica de saber que su trabajo era correcto.

En el caso de la resolución de Erick para la tarea de las madejas se identificó que su eec de seguridad parece haberse desprendido de su consideración de que la operación a realizar para resolver la tarea, que solo era una multiplicación, era fácil; ya que pudo cubrir ese Requerimiento de Verdad, valoró como satisfecha su Meta Epistémica de 'saber cómo se hace'. Erick parece decir: "Si la única operación que debo realizar para resolver la tarea es una multiplicación y esa es muy fácil (Requerimiento de Verdad cubierto), entonces sé cómo se hace (sé cómo se resuelve la tarea) (Meta Epistémica satisfecha) y por tanto me siento seguro (de la resolución y la solución de la tarea)".

Por su parte, Alessandra en la tarea de las madejas parece experimentar seguridad cuando 'sabe que está bien', Meta Epistémica que se plantea alcanzar, de manera implícita, durante la resolución de la tarea. Y a lo largo de la resolución de esa tarea ella busca cubrir esa Meta con base en distintos Requerimientos de Verdad: que pueden ser 'el entender ...' o el 'utilizar la lógica, o el 'revisar los resultados'.

La seguridad parece entonces surgir en cada uno de los estudiantes ante una Meta de carácter epistémico (muy posiblemente implícita y que guía inconscientemente sus acciones) que ellos consideran que han podido satisfacer: la Meta de poder determinar la veracidad de un H dado, por una parte y por la otra, la de valorar positivamente que poseen elementos (e. g., cognitivos) para hacer esa determinación. Y la satisfacción de la Meta está

en función de haber cumplido ciertos Requerimientos de Verdad que cada estudiante se impone.

### CONDICIONES PARA LA DUDA

Una consideración, en cierto sentido simétrica a la seguridad, se puede hacer con respecto a la duda. A continuación se describen las condiciones (que se identificaron a partir de las reconstrucciones realizadas) bajo las cuales el estudiante puede llegar a sentir un eec de duda.

Como se ilustrará en los ejemplos siguientes, se sugiere en este trabajo que cuando una persona no alcanza ciertas Metas Epistémicas debido a que no satisface los Requerimientos de Verdad que ella se propuso para satisfacer dicha Meta, se genera un eec de duda en torno al H en cuestión.

En el contexto de la resolución de problemas de valor faltante, se considera que el imbricado de condiciones que generaron duda en Hannia (e.g., en las operaciones) incluye (entre otros factores) el no haber alcanzado ciertos Requerimientos de Verdad (e.g., el de verificar), lo que le impidió cubrir su Meta de saber que su trabajo estaba bien hecho.

De la resolución de Michaelle y de la reconstrucción de su trabajo, es posible suponer que la Meta Epistémica de la estudiante es 'sentir que hizo bien la división', esto se puede inferir a partir de las explicaciones que dio la estudiante en la entrevista: "sentí que estaba mal la división", "sentí que falló algo". Michaelle a lo largo de sus intervenciones 4, 6 y 8 (ET1), menciona cómo no satisfizo esa Meta: "porque me salía no sé cuánto"; "perdía mucho tiempo". O dicho de manera equivalente, la Meta de sentir que hacía bien la división se hubiera satisfecho si el resultado hubiera sido

el previsible y si no hubiera perdido tanto tiempo; esos son los Requerimientos de Verdad que hubieran satisfecho su Meta; la duda surgió al no poder cumplir esos Requerimientos.

En la resolución de la tarea de las madejas de Alessandra, cuando ella siente duda en torno a un contenido matemático  $H$  dado se dan dos fenómenos: ella no se compromete con su veracidad, por una parte; pero por la otra, ella no lo hace porque (considera que) carece de elementos conceptuales o cognitivos (o de otro tipo) que le impiden decidir.

En la tarea de las Telas, Alessandra se plantea la Meta Epistémica de resolver correctamente la tarea; la satisfacción de esa Meta está directamente relacionada con la experiencia práctica con la que cuenta la estudiante, debido a que su mamá trabaja con telas. De manera que para satisfacer su Meta epistémica ella se propone dar sentido a la solución, es decir, su Requerimiento de Verdad es encontrar una respuesta aritmética que tenga sentido a partir de su experiencia práctica. Sin embargo, como Alessandra esta insatisfecha de su Meta por no lograr satisfacer su Requerimiento de Verdad, termina la solución de la tarea con un eec de duda.

La duda parece surgir ante una Meta Epistémica (muy posiblemente implícita y que guía inconscientemente las acciones del sujeto) que la estudiante considera que no puede satisfacer: la de poder determinar la veracidad de un  $H$ . Y esto no lo logra por considerar que carece de las herramientas para tomar la decisión, lo que le impide acatar los Requerimientos de Verdad que considera necesarios para cumplir las

condiciones dadas, entre otros, que después de revisar los resultados pudiera estar completamente segura de que 'estaban bien'.

De lo anterior es posible determinar que las Metas que cada sujeto se plantea son distintas e idiosincráticas: dependen de cada uno de los estudiantes, de sus antecedentes, su experiencia y su conocimiento en general. Dependen también de la tarea en juego. Por ejemplo, Alessandra en la tarea de las telas se planteó la Meta de saber si podía resolver correctamente la tarea (y su Requerimiento de verdad para satisfacer esa Meta es entender a través de la lógica el concepto matemático que se debe utilizar para resolver el problema, de tal modo que la lleve a un resultado numérico) y sintió duda porque verificó que no podía alcanzar esa Meta; y en la tarea de las madejas ella se planteó saber si podía resolver bien la tarea y si podía asignar un valor de verdad a los resultados de los cálculos y verificarlos, ella sintió un eec de duda parcial porque no pudo alcanzar completamente esa Meta.

En este trabajo se pudo sugerir, con fundamento empírico, que las Metas Epistémicas suelen responder al porqué y cuándo la persona se siente segura, esto es, en qué basa su seguridad o, en última instancia, qué significa la seguridad para ella o cómo parece vivirla a nivel conceptual o cognitivo.

Además, se pudo determinar que los Requerimientos de Verdad a los que recurre para satisfacer sus Metas Epistémicas pueden ser de carácter matemático, como verificar las operaciones, deducir un resultado, o checarlo para un cierto número de casos, o pueden ser de carácter extra-matemático,

como hacer lo que le pidieron, o tener la aprobación de una autoridad (e.g. el docente de matemáticas).

## EFFECTOS DE LA SEGURIDAD Y LA DUDA

De las condiciones y de los eec en torno a un H, se suele desprender algún resultado o consecuencia, denominado Efectos de los eec.

Se pudo verificar empíricamente que los eec generan en algunas ocasiones efectos 'automáticos', como lo menciona Martínez (2020): los eec generan *Efecto a favor* del H en ciernes, cuando se trata de eec (como la certeza, la seguridad o la confianza) que provienen de la valoración de Metas Epistémicas satisfechas por haber alcanzado ciertos Requerimientos de Verdad; o los eec generan *Efectos de alejamiento* cuando se trata de eec (como la duda o la incertidumbre) que se generan de Metas Epistémicas que no se han cubierto por no haber logrado cubrir ciertos Requerimientos de Verdad.

A continuación se describen los efectos de los eec de seguridad que fue posible identificar en las trayectorias previamente descritas de cada uno de los estudiantes.

Se observó que la seguridad que experimentó Hannia en la tarea de las madejas la llevó a aceptar los resultados objeto de su seguridad y a continuar con el Trabajo Matemático en concordancia con su tendencia de aceptación. Este Efecto a favor o de aceptación fue posible verlo también en la seguridad en la estrategia que se identificó en la tarea de las madejas de todos los estudiantes (Hannia, Michaelle, Erick y Alessandra); la seguridad

los llevo a continuar con la solución de la tarea conforme a lo que indica la estrategia elegida.

Además, cuando Hannia y Alessandra sintieron seguridad en sus operaciones o Erick sintió seguridad en la multiplicación, ellos aceptaron el resultado de sus operaciones y dieron un resultado a la tarea.

En el caso de los efectos de un eec de duda, fue posible ver empíricamente cómo cuando Hannia duda en las operaciones, ella toma distancia de los resultados obtenidos y decide verificarlos; por su parte, Alessandra responde a la duda buscando dar sentido al resultado aritmético y para esto decide verificar las operaciones. En ambos casos se puede apreciar, efectivamente, una toma de distancia de los contenidos matemáticos H's de los que se duda para verificar su veracidad.

Para dar respuesta a la primera duda, la de simplificar la expresión que surge del planteamiento de la Regla de 3, Michaelle decide cambiar la forma de resolver las operaciones y lo hace usando el algoritmo convencional de la división; sin embargo, se genera un nuevo eec de duda al usar dicho algoritmo de la división, lo que la llevó a realizar una reflexión metacognitiva y decidir un cambio de estrategia. En este caso, la duda lleva a la estudiante no solo a tomar distancia sino a desechar los contenidos matemáticos, objeto de la duda, y a elegir otra opción matemática.

De los Efectos de los eec en las decisiones sobre el trabajo matemático y sobre los resultados del trabajo matemático, con base en las evidencias empíricas recolectadas en esta investigación es razonable conjeturar que cuando el sujeto experimenta seguridad (Meta satisfecha) genera un cierto

compromiso con H y orienta específicamente sus trabajos matemáticos hacia H conforme a ello. Cuando construye una experiencia de duda, ante Metas Epistémicas insatisfechas, genera una distancia o reticencia hacia H y orienta específicamente sus trabajos matemáticos de acuerdo con esa tendencia.

Es posible ver cómo y de qué manera influyen los eec en el trabajo matemático y viceversa, es decir, se identificaron algunas relaciones o mutuas determinaciones entre los trabajos matemáticos que realizan los estudiantes, y los eec que ellos experimentan durante esos trabajos.

En este análisis interpretativo se pudieron distinguir trayectorias de los eec, los cuales acompañaron al trabajo matemático y, de acuerdo con lo que fue posible verificar en el análisis de los casos, mutuamente se determinaron. Es decir, los eec surgieron en el trabajo matemático y los eec tuvieron efectos sobre ese trabajo matemático. Esas trayectorias se dan de manera concomitante o sincrónica al trabajo matemático. Los eec, como la seguridad y la duda, orientan el trabajo matemático; lo pueden impulsar pero también lo pueden detener, en suma, los eec pueden modificar las decisiones que toma la persona con respecto al trabajo matemático.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES

Del análisis de los datos, realizado con base en categorías que en esta investigación se densificaron, se actualizaron y se enriquecieron, a partir de categorías construidas previamente (en el marco del Programa de Investigación sobre los Estados Epistémicos de Convencimiento), es posible responder a las preguntas de investigación (aunque sea de manera inicial) y desprender unas primeras explicaciones y comprensiones de los eec que permiten sugerir algunas de sus características

En el capítulo precedente, sobre Discusión de Resultados, se aportaron evidencias empíricas sobre una posible trayectoria de los eec (en el contexto de la resolución de tareas de contenido matemático), que avanza de manera concomitante al trabajo matemático realizado.

Se pudo identificar también que existe una determinación mutua entre los trabajos matemáticos y los eec asociados: los trabajos matemáticos generan eec y los eec influyen en el desarrollo de ese trabajo matemático. Se pudo verificar cómo es que se da esta mutua determinación. Específicamente, se identificaron las posibles condiciones que generan los eec: la presencia de Metas Epistémicas que, con base en ciertos Requerimientos de Verdad que el alumno se impone, valora como satisfechas o no satisfechas. Se reconocieron también los posibles efectos de los eec en torno a algún H, sobre el trabajo matemático, generando tendencias a favor de H o de alejamiento. Con esto se responde a la primera pregunta de investigación.

Con respecto a la segunda pregunta de investigación, relacionada con la posible naturaleza de los eec se puede concluir lo siguiente, también a partir del análisis realizado con base en las categorías aquí introducidas.

- **Granularidad con respecto a los eec.** Se pudo distinguir que en ciertos casos los estudiantes tienen un semáforo dicotómico (bien o mal) con respecto a sus eec, como se observó en la Trayectoria de Michaelle, pues no hay matices al nombrar sus eec. Sin embargo, en casos como el de Alessandra en la resolución de la tarea de las telas, es posible observar diferentes matices de los eec. En la trayectoria de la estudiante asociada a esta tarea se identifica en primera instancia un estado de confusión, que luego de modificar las variables de la relación de proporcionalidad, desprende dos eec: una seguridad baja en la relación de proporcionalidad y la duda en el resultado aritmético. Al momento de dar respuesta a los dos eec anteriores Alessandra se propone dar sentido al resultado numérico verificándolo con su razonamiento, en este segmento de la respuesta desde la lógica de la experiencia práctica se genera una seguridad relativa debido a que de su razonamiento no le fue posible dar una respuesta numérica. Finalmente, al no lograr encontrar una correspondencia entre el resultado numérico y su lógica se genera un eec de duda en el resultado. Sin embargo no siempre le es posible a los estudiantes nombrar el eec, como fue posible verlo en el caso de Michaelle, quien no puede nombrar su eec final, el eec de la respuesta dada a la tarea a partir del valor unitario; dicho estado parece haber

sido generado a partir de todos los eec que había vivido a lo largo de su proceso. Ella logra hacer el recorrido, pero no le fue posible sintetizar en un eec, pues es un eec en el que hay seguridad en una parte e inseguridad en otra.

- **Efectos favorables o adversos de los eec sobre el trabajo**

**matemático.** Los eec pueden tener efectos desfavorables en las decisiones y acciones del alumno, como fue posible ver en el caso de Erick debido a que él no puso en tela de juicio, no dudó, sobre la posibilidad de que su lectura de los datos pudiera estar equivocada, o de otra forma, sintió un eec de seguridad en torno a lo que se 'decía en los datos' y en su lectura. Parece que la seguridad actuó como un obstáculo para revisar o corroborar su resultado. Él inició su resolución con una mala calibración (seguridad en la lectura errónea de los datos) y eso lo llevó a no revisar y a dar un resultado erróneo.

- **Los eec permiten mantener o restablecer estados de equilibrio**

**epistémico.** Para aclarar el punto se acude a un caso ilustrativo, el de Hannia. Un propósito destacable de los eec en Hannia es que le permitieron enfrentar y solventar situaciones donde están involucradas Metas Epistémicas: cuando están cumplidas, para preservarlas, porque ella se compromete con el H y orienta el trabajo matemático conforme a ello; y cuando no lo están, para saldarla, porque Hannia responde a su duda tomando distancia y planteándose la verificación de las operaciones con el fin de satisfacer la Meta epistémica.

- **Posible naturaleza de los eec.** Luego de analizar las resoluciones de tareas matemáticas parece probable que los eec se pueden concebir como un sistema que ayuda a monitorear (con respeto a la verdad) los trabajos ya hechos y a tomar decisiones en consecuencia. Es decir, un sistema de alarma, de Metas Epistémicas satisfechas o no satisfechas (por ejemplo: se pudo o no asignar un valor de verdad a H; los Requerimientos de Verdad se cumplieron adecuadamente, el presupuesto conceptual está en números blancos). E incluyen un programa de acción: qué hacer cuando esas Metas están o no satisfechas (ya no es necesario comprobar: sáltate la verificación, como Erick; o es necesario cambiar de plan, como Michaelle). En otras palabras, los eec funcionan como un sistema de detección de necesidades y metas epistémicas y que prepara para la acción, esto es, impulsa a la ejecución de los trabajos matemáticos, en función del cumplimiento o no de dichas metas.

## UTILIDAD DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con Foster (2016) e Inglis et al. (2007) son escasos los estudios relacionados con los eec asociados a un H. En este sentido, las explicaciones acerca de este fenómeno que aquí se presentan resultan novedosas. Además, resultan pertinentes pues hay evidencias de que la seguridad y la duda en torno a algún H están presentes en la matemática escolar (Fischbein, 1987; Segal, 2000). Pero no solo eso. Hay evidencias empíricas, que a la fecha resultan ya significativas, que muestran que los eec pueden representar un

impulso para el aprendizaje, pero también pueden actuar como un obstáculo.

Las explicaciones aquí expuestas aportan significativamente a la investigación en educación matemática pues pueden representar la base para la paulatina construcción teórica de un compendio de comprensiones sobre el fenómeno, fundamentadas empíricamente.

Además las explicaciones de los eec pueden ser útiles en el proceso de enseñanza de las matemáticas, porque permiten, a mediano plazo, impulsar intervenciones didácticas centradas en los eec fundamentadas teóricamente, bien orientadas y éticamente responsables.

De igual forma se considera que puede aportar a un cambio en el currículo de matemáticas o en los textos escolares de esta misma área, pues se brindan herramientas conceptuales a las personas encargadas del diseño y elaboración de estos en los que se tenga en cuenta los eec.

## **PERSPECTIVAS**

En este trabajo se encontraron nuevas evidencias empíricas que, en el contexto de resolución de tareas matemáticas, corroboran la presencia (en algunos casos implícita pero en otros, de manera más explícita) de necesidades o metas epistémicas, de los requerimientos de verdad a los que recurren los alumnos (que son una especie de criterios para valorar la satisfacción o no de las metas) y también de la evaluación del cumplimiento de esos requerimientos. Pareciera que estos procesos coordinados funcionan como detonadores de un eec específico. Es decir, a las metas epistémicas satisfechas los estudiantes asocian estados de seguridad y a las metas

insatisfechas los estudiantes asocian estados de duda (hay que decir que en muchos casos estas correlaciones las hacen los alumnos de manera implícita), o dicho de otra forma, la experiencia de metas epistémicas satisfechas la interpretan los alumnos como seguridad y la experiencia de metas epistémicas insatisfechas la interpretan como duda. Como respuesta de la activación de los eec, y de acuerdo con esas condicionantes (en particular, con el cumplimiento o no de las metas epistémicas) y con la interpretación -de duda o seguridad- que hicieron de su experiencia, los alumnos planean acciones, toman decisiones y realizan los trabajos matemáticos subsiguientes.

De modo que existe una mutua determinación entre los trabajos matemáticos ejecutados y los eec que va experimentando el alumno: los trabajos matemáticos realizados forman parte de los detonantes que generan eec y éstos a su vez, influyen en el derrotero que van a seguir los trabajos matemáticos. Es posible visualizar estas mutuas influencias en los gráficos sobre la trayectoria de los eec que se introdujeron en este trabajo y que son otra de las aportaciones. Dicho sea de paso, esta trayectoria permite darle a la resolución de la tarea una ilación, una continuidad, mirarla como un proceso continuo, vertebrado en torno a los eec, y no como una sucesión de hechos aislados y discretos e inarticulados.

Se ha dicho que los eec, con sus condicionantes, funcionan como sistemas de alarma (ante la satisfacción o no de necesidades epistémicas); pero ese sistema de alarma está justamente relacionado con la corrección o veracidad de las respuestas. Esto es un aspecto central en los eec, porque la verdad y la

corrección de las respuestas de las operaciones o de tareas y ejercicios de contenido matemático son todo un tema, al cual los interesados en educación matemática debieran dirigir más frecuentemente su atención (como sostiene, entre otros, Chevallard et al. (1998)).

Las necesidades epistémicas, con sus requerimientos de veracidad y sus evaluaciones, así como los efectos de los eec, son recursos de procesamiento que las personas ensamblan durante la construcción de sus eec en el contexto de la resolución de tareas matemáticas. Son componentes o partes integrantes de esos eec: pareciera que los eec se desdoblaron en estos componentes, los que los detonan y las acciones que se desprenden de ellos.

Y es que, la identificación de posibles condiciones de los eec, con sus necesidades epistémicas y sus requerimientos de veracidad, y posibles efectos y planes de acción (con otros componentes que se irán identificando) es un punto de arranque y referencia muy importante para las futuras investigaciones sobre los fenómenos didácticos relacionados con el tema de los eec. El manejo conceptual de los eec como ideas o conceptos sólidos e indescomponibles no representa la mejor alternativa para la investigación científica (con su tendencia hacia el análisis por las grandes ventajas que la perspectiva analítica representa para la comprensión de los fenómenos).

La posibilidad de analizar, o desbrozar los eec en sus componentes, permite formular preguntas en el terreno de la didáctica mucho más específicas y acotadas. Para verificar si el profesor o el libro de texto o el currículum influye en los eec, es mucho más puntual y específico y menos general investigar cómo inducen esas instancias las metas epistémicas

específicamente, y sobre todo cómo influyen en los requerimientos de verdad, que es en los que se fundamentan las convicciones. Es decir, se da paso a preguntas como: ¿Cómo interviene la cultura de racionalidad en las metas epistémicas y los requerimientos de verdad que cada estudiante se plantea? ¿Cuáles son los requerimientos de verdad de los alumnos y qué relación tienen con la cultura de racionalidad escolar o la que se fomenta en su aula? ¿Cómo incidir en esos requerimientos de verdad y si es posible hacerlo? ¿Cuáles son los efectos de los eec y cómo influir en esos efectos? ¿Cuáles son las condiciones bajo las cuales los eec pueden actuar como un freno o las condiciones en las que los eec actúan como un motor?

Por otra parte, las explicaciones que aquí se han sugerido sobre cómo posiblemente operan los eec durante los procesos de resolución matemática, sobre cuáles son sus posibles funciones y sobre los posibles componentes de los eec abonan a la hipótesis de los eec como un cierto tipo de emoción con fuerte carga cognitiva. Dejan ver que esta hipótesis puede tener sentido en el contexto de la resolución de problemas de contenido matemático.

Esto, como se dijo en el capítulo inicial de Contexto del Trabajo, permite sobrepasar ciertos retos teóricos, metodológicos y operativos cuando uno quiere pasar de la descripción para formular ciertas explicaciones, porque sobre esta base es posible comenzar a proponer investigaciones específicas en torno a fenómenos educativos sobre los eec y posibles explicaciones y, para el futuro y con nuevos datos empíricos, hacer intervenciones didácticas conducentes.

Por ejemplo, si los eec son como las emociones, resulta que son construcciones que dependen del contexto; es decir, que se aprenden en el medio social y cultural en el que se ha desenvuelto o se desenvuelve la persona. Esto sería una base para suponer razonablemente que los eec se enseñan o entrenan en los espacios escolares y en particular en el aula de matemáticas y que eventualmente pueden depender de los medios didácticos y pedagógicos que ahí se le proporcionan al alumno, por ejemplo, de la cultura de racionalidad que el profesor promueva en su clase, o de la cultura de racionalidad que subyace al libro de texto o al currículum. Este es un ejemplo de posibles investigaciones que, entre muchas otras, se pueden hacer en el futuro tomando como base los resultados que se exponen en esta tesis.



## CAPÍTULO 7

### REFERENCIAS

- Alberson, R. P. (1988). Conviction. *American Psychologist*, 43(4), 267–275.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1037/0003-066X.43.4.267>
- Balacheff, N. (2000). *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- Barsalou, L. W. (2016). Situated conceptualization offers a theoretical account of social priming. *Current Opinion in Psychology*, 12, 6–11.  
<https://doi.org/10.1016/j.copsyc.2016.04.009>
- Birks, M., & Mills, J. (2015). *Grounded Theory: A Practical Guide* (Jai Seaman, Ed.; Second). <https://doi.org/10.1123/apaq.28.3.277>
- Block, D., Mendoza, T., & Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Ediciones SM.
- Brown, S. A. (2014). On skepticism and its role in the development of proof in the classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 311–335.  
<https://doi.org/10.1007/s10649-014-9544-4>
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Biblioteca del Normalista de la SEP.
- Corbin, J., & Strauss, A. (1990). Grounded Theory Research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Research Journal of Pharmacy and Technology*, 14, 3–21.

- Corbin, J., & Strauss, A. (2015). Basics of Qualitative Research. In *Journal of Marketing Research* (Fourth). <https://doi.org/10.2307/3172751>
- Davis, P., & Hersh, R. (1983). *The mathematical experience*. Penguin Books.
- de Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 205–221). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5\\_14](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_14)
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Feldman Barrett, L. (2019). *La vida secreta del cerebro*. Paidós México.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *Learning of Mathematics*, 3(2), 9–18.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*.
- Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 271–288. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9660-9>
- Galligan, L., Axelsen, T., Pennicott, T., Addie, R., Galbraith, P., & Woolcott, G. (2019). It's part of my life and the modelling process. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22, 355–378. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10857-019-09426-3>
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). Costs of secondary parasitism in the facultative hyperparasitoid *Pachycrepoideus dubius*: Does host size matter? *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127–150. <https://doi.org/10.1023/A>

- Hanna, G., & Jahnke, H. (1996). Proof and proving. In Bishop A.J., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J., & Laborde C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 877–908). Springer Netherlands.  
[https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0\\_24](https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_24)
- Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications.
- Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3–21.  
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8>
- Kline, M. (1985). *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI.
- Kline, M. (2009). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. FCE.
- Lebois, L. A. M., Wilson-Mendenhall, C. D., Simmons, W. K., Barrett, L. F., & Barsalou, L. W. (2020). Learning situated emotions. *Neuropsychologia*, 145, 106637. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2018.01.008>
- Martínez, B. (2020). *La influencia de los estados de confianza y duda sobre la competencia matemática. Propuesta de un modelo teórico explicativo fundamentado en datos empíricos* [Tesis de Doctorado]. Cinvestav
- Martínez, B., & Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? In M. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445–454). SEIEM.
- Muis, K. R., Psaradellis, C., Lajoie, S. P., di Leo, I., & Chevrier, M. (2015). The role of epistemic emotions in mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, 42, 172–185.  
<https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.06.003>

- Peña, C. (2019). *Categorías para valorar el desempeño de estudiantes sobresalientes de tercero de secundaria ante tareas de congruencia de polígonos: Una propuesta de ordenamiento conceptual* [Tesis de maestría]. Cinvestav
- Rigo-Lemini, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria* [Tesis de doctorado]. Cinvestav
- Rigo-Lemini, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 71–91. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9466-6>
- Rigo-Lemini, M., & Martínez, B. (2017). Epistemic States of Convincement. A study based on the professional practice of mathematics and on a neurobiological model of affect. In U. Xolocotzin (Ed.), *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning* (pp. 98–129). Elsevier.
- Rodríguez, S. (2018). *La cultura de racionalidad en la escuela* [Tesis de doctorado]. Cinvestav
- Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 191–210. [https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(99\)00028-0](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)00028-0)
- Tymoczko, T. (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243–266). Birkhäuser.
- Vergaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad*. Trillas Editorial.
- Villoro, L. (2002). *Creer, saber, conocer*. Siglo veintiuno editores.

- Wilson-Mendenhall, C. D., & Barsalou, L. W. (2007). A fundamental role for conceptual processing in emotion. In L. F. Barrett, M. Lewis, & J. M. Haviland-Jones (Eds.), *The handbook of emotions* (4th ed., pp. 547–563). The Guilford Press.
- Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 297–321.  
<https://doi.org/10.1007/s10649-005-0606-5>
- Zembylas, M. (2011). New Understandings of Teacher’s Work Emotions and Educational Change. In C. Day & J. Chi-Kin Lee (Eds.), *Teaching and Teacher Emotions: A Post-structural Perspective*.  
[https://doi.org/10.1007/978-94-007-0545-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0545-6_3)





















### ANEXO 3: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA MICHAELLE

#### Tarea 1

1. E: ¿En general cómo te fue?
2. M: Pues según yo, bien. Lo que me complicó un poquito son los problemas porque eran capciosos entonces tuve dificultades ahí.
3. E: Por ejemplo, en el primero pláticanos.
4. M: ahí se supone que tenemos hacer una regla de 3, porque se supone si de los... ¿no sé si eran carretes?, de los tres carretes eran 200 gramos y necesitabas 8 para hacer un sólo suéter, entonces ahí me confundí un poco porque hice la regla de 3, pero me salía no sé cuánto y ya después dividí lo que pesaba con los 3 carretes y así multipliqué y ya salió. Fue lo único, porque las ecuaciones fueron como muy sencillo
5. E: ¿Cuándo dices que te dio no sé cuánto por qué lo descartas?
6. M: Porque o sea dije no, o sea no. Cuando hice la división, o sea siento que estaba mal mi división entonces dije mmm no, ese resultado no puede ser si estoy dudando de una parte de mi problema.
7. E: ¿Cómo se siente esa duda? ¿Por qué sabes que estabas dudando?
8. M: Porque o sea... este... me sentía segura al principio, porque estaba segura de lo que iba a hacer y ya después cuando lo hice, siento que me falló algo o siento que una parte de la división estaba mal. Entonces cuando la volvía a hacer perdía mucho tiempo entonces... y aparte, aunque perdiera el tiempo y todo eso, sentía que estaba mal entonces dije no pues vamos a volver a leer todo el problema y a tomarlo por partes y a empezar a hacer otro procedimiento y así.
9. E: ¿En algún momento pensaste en dejar y no hacerlo?
10. M: no, porque siempre me han dado el consejo de que nunca deje nada en blanco.
11. E: ¿Te sentiste ya segura con tu respuesta?
12. M: Sí.
13. E: ¿Cuál es tu respuesta?
14. M: la del 48... No me diga mi respuesta señorita por favor, es la que está en rosa. Aunque no sé si está bien.
15. E: ¿Pero con esa te sentiste segura?
16. M: Sí, más que con la otra.

17. E: ¿La otra está en algún lugar de la hoja?
18. M: Si, es la de aquí (señala R: 5033)
19. E: O sea esta es la que sientes que está mal (5033), y esta la que está bien (48)
20. M: Si. Pero quién sabe
21. E: ¿Cómo sabes cuándo usar la regla de 3?
22. M: Ah pues es que nada más tienes que leer bien, porque cuando te dan los datos y uno debe ser el que dice pues esto vale tanto y es como el verdadero y el que te dan siempre le falta algo, siempre le tiene que faltar un detalle o un número o una cifra o algo así y eso es lo que tienes que encontrar.
23. E: Decías que hacerlo por partes, que eso te ayuda a entenderlo mejor
24. M: siempre he dicho que hay que leerlo bien o a veces imagínate el problema... y te va ayudando y siempre todos los datos tomarlos en cuenta y ya los que no sirven ir descartándolos
25. E: ¿Cómo sabes cuándo esta ya es tu respuesta correcta? ¿Hay manera de saberlo?
26. M: Si, puedes verificarla varias veces y si te da lo mismo sí, y ya. Otra forma es que ya que te hayas sacado las respuestas y en tu examen hayas sacado 0.05, pues ya las vas comprobando con otros compañeros y vas diciendo ahh no pues me equivoque en tal parte y tengo que mejorar tal cosa.

## **Tarea 2**

27. E: Aquí, ¿Cómo lo resolviste?
28. M: Ahhh dice ahí que son 3 gallinas en 3 días y 3 huevos o sea que por día las gallinas te van dando un huevo y te lo piden en dos docenas que son doce, y doce por dos 24 y ya empiezas a hacerlo todo.
29. E: ¿Por qué pusiste que estás parcialmente segura?
30. M: No sé o sea estoy intermedias, porque también siento que me faltó algo, no sé o sea todavía tengo la duda ahí pendiente.
31. E: ¿Cómo una sospecha?
32. M: Ajá
33. E: Pero ¿Qué sientes? ¿Algo en tu cuerpo?
34. M: Cuando lo veo es como de espera, y si me faltó esto y si me faltó otro detalle o sea te quedas con el pendiente.
35. E: ¿Y habría manera para quitarte eso, resolver eso?

36. M: Escuchar música, después de hacer el examen escuchas música y se me olvida. Y ya cuando te lo entregan ves y empiezas a reflexionar. O ya después cuando acabas el examen empiezas a analizar o acordarte de las partes y dices creo que me faltó esta división y así
37. E: En este caso que no vamos a regresar el examen, ¿te vas a quedar con el pendiente?
38. M: Pues no, es un examen. Con el que si me quedase es con el que voy a hacer en julio, con este no, no tengo mucha duda.
39. E: ¿Es el de la prepa?
40. M: Si

### Tarea 3

41. E: ¿Cómo te fue en este?
42. M: No, en ese sí tengo duda porque o sea te da unos precios, pero no te dice cuánto cuesta un metro. Y ahí me da duda porque te dan el resultado total, de lo que ganó y de lo debería haber ganado pero nunca te dicen cuánto cuesta un metro entonces ahí te preguntan cuál sería la falla, o si tiene más o tiene menos el metro, ahí si tengo mucha duda. O sea estamos también viendo eso ahorita que acabamos el examen, estábamos viendo y comprobando eso, y todos dimos resultados muy diferentes entonces sigo teniendo la duda ahí porque literalmente, el problema siento que sí está bien planteado pero le falta la parte esa de que te diga cuánto cuesta un metro
43. E: ¿Si yo te dijera cuánto cuesta un metro lo podrías solucionar sin problema?
44. M: yo creo que sí, pero también depende. Es que el planteamiento del problema siento que aparte de que le falta eso, siento que le falta un poco más estructura.
45. E: ¿Qué le pondrías tú?
46. M: O sea a parte del precio del metro, la pregunta no me convence, la pregunta que te dice en qué falla el metro o cuántos centímetros le falta, porque ahí te pregunta en qué está mal el metro, ¿cuánto mediría su metro?, te quedas con la duda porque si un metro vale 100 cm, o sea mide más o menos porque ahí te dicen que faltan 5 pesos para tener lo que él quiere entonces cuánto vale un metro para que te falten 5 pesos y digas que el metro está mal
47. E: ¿Que podría haber pasado ahí?

48. M: O sea una de dos, o el vendedor nunca se daba cuenta y media más, que le sobraban así por ejemplo, les daba 5 cm de más o 10 cm de más, cuando esos 5 cm tenían que valer más. O sea siento que ese es el problema, no encuentro otra solución.
49. E: ¿Y esa duda con la que te quedaste en este ejercicio que le vas a hacer?
50. M: Voy a analizarla porque si sigo teniendo la duda, y la sigo analizando pero... no, sigo sin encontrar
51. E: ¿Podrías decirnos o explicarnos cómo se siente la duda?
52. M: ¿Por qué tendría que explicar eso? ¡Es una duda! O sea te quedas con el pendiente, sientes a la vez miedo y a la vez sientes felicidad, pero no sabes si en realidad estas bien porque tienes dos opciones, pero tú nunca... cuando empiezas a ver el problema y ya no lo respondes y el maestro te dice no, estas mal entonces preguntas pero ¿Por qué? ¿Qué hice mal? ¿Qué me falta? Y te empiezan a dar una descripción que tú ni siquiera la pensaste por algo, dices ¡ah chinga! pero ¿Por qué? Ese es el problema, el porqué, de dónde lo sacas, cómo lo haces, cómo planteaste la solución o por qué ese es el resultado.
53. E: ¿Qué podría convencerte?
54. M: Que alguien me dijera que estoy bien, así de "sí, sí estás bien".
55. E: ¿Cualquiera?
56. M: Bueno, alguien que tuviera las respuestas del problema, sí. Y aparte como no es de opción múltiple es como lo que tu hayas dado... es como de ¿pues cuál es?
57. E: ¿Se te facilitaría un poquito más ver las respuestas?
58. M: Ya de tu ahí vas eligiendo o descartando.
59. E: ¿Y eso de sentir algo diferente en tu cuerpo? Es que por ejemplo hay algunos que dicen que cuando dudan sus manos tiemblan...
60. M: Ah sí, es diferente.
61. E: ¿tú que has notado?
62. M: ¿Cuándo me estreso?
63. E: Con la duda...
64. M: Me empiezo a estresar y cuando me estreso... se tensa mi cuerpo y mi cuello me empieza a doler y no lo puedo mover mucho y luego se empiezan a tensar las demás partes de mi cuerpo y me sigue doliendo, y en eso me ha pasado los

últimos tres días y me han tenido que sobar por la tensión y el estrés lo cual no debería tener en esta edad

65. E: ¿Qué es lo contrario a tener duda?

66. M: La seguridad

67. E: ¿Y esa cómo la sientes?

68. M: Es complicado porque si la duda es lo contrario a la seguridad es cuando sabes que lo hiciste bien, cuando ya tú sabes que estas bien, que todo lo que hiciste está perfecto y muchas personas te dicen si estás bien y te lo comprueban, o sea siempre necesitas de alguien para comprobar que estás bien, y que... porque un problema no... bueno si tienen varias soluciones, pero siempre llegas al mismo resultado.

69. E: ¿Y en el cuerpo sientes algo diferente con la seguridad?

70. M: Pues sientes felicidad, tranquilo, siente que respiras mejor, te sientes más tranquilo, no hay estrés.

#### **Tarea 4**

71. E: ¿Cuál es tu respuesta acá? ¿Y en este como lo hiciste?

72. M: Tambien... O sea muchos de los problemas fueron por regla de tres, varios, o sea según yo, no sé.

73. E: Acá pusiste parcialmente seguro, nuevamente ¿Por qué no está segura?

74. M: Sí... hay unos que también... siento que en algo de la operación podría estar mal o no es la operación correcta, aunque siento que si es pero...

75. E: ¿La operación o resultado es correcto?

76. M: Yo siento que es la operación correcta

77. E: ¿Tu resultado es el correcto, o ahí es donde está la duda?

78. M: Si podría ser donde estoy dudando porque la respuesta no es definitiva, no tienes otras que digas, ¡ah no! pues tengo opciones, para elegir.

79. E: ¿Eso podría ayudarte a comprobar o a tener más seguridad?

80. M: Sí, porque así como preguntas abiertas es como muy complicado, o sea te sientes así como... sientes la duda, la tensión, si estaré bien, si lo hice bien.

#### **Tarea 5 y 6**

81. E: ¿Los dos últimos también los hiciste por regla de tres cierto? Te gustaría explicarnos algo de ellos

82. M: Ah, el de los gatos ese si no lo hice por regla de tres, al principio si lo hice pero no encontrabas la lógica ahí porque decía que 6 gatos matan a 6 ratones en 6 minutos y ahí te dicen cuántos gatos tú necesitas para matar a 100 ratones en 50 minutos y ahí por regla 3 como que no te sale, porque los datos que te dan aunque le falte uno te dan otros dos que lo complementan, entonces ahí ya fue casi más por lógica y por operaciones.
83. E: ¿Si yo en la segunda parte te preguntara cómo te sentiste?
84. M: Muy segura
85. E: ¿Por qué?
86. M: Por las ecuaciones no están difíciles, solo tienes que cambiar si estas multiplicando pasas a dividir, si estas dividiendo pasas a multiplicar, si estas sumando pasa a restar y ya... No es tan complicado las ecuaciones, solo hay que entender lo que tienes, y aparte como no eran números positivos, ni negativos, no tenías como ese... tenías que dividir para decir ¡ah no! lo tienes que pasar al negativo
87. E: ¿Y si hubiera tenido números negativos?
88. M: Ah es igual fácil, solo tienes que saberte la ley de los signos.
89. E: Finalmente hago una pregunta de una percepción, ¿me parece que no quieres ver lo que respondiste o es mi percepción?
90. M: No, no quiero.
91. E: ¿Por qué?
92. M: Porque no, porque si ya lo respondí y ya tendrá lo que tenga que pasar, porque ya lo revisé dos veces antes de entregárselo.
93. E: ¿Y ya no quieres volverlo a ver?
94. M: No, hasta que... tal vez hasta que me lo entreguen con calificación si lo quiera ver.

#### **ANEXO 4: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA RAÚL**

##### **Tarea 1**

95. E: En general, ¿Cómo te sentiste?
96. R: Bien, sí, bien.
97. E: ¿Cómo es eso de bien? pláticanos
98. R: No creo que estuvo tan complicado, pero si tenías que usar un poco la cabeza.

99. E: ¿No siempre hay que usar la cabeza?
100. R: No
101. E: Nos puedes explicar cómo resolviste el primero por favor
102. R: A ver 3 madejas de lana pesan 200 gr, se necesitan 8 para hacer un suéter, cuánto pesa el suéter pues solamente multiplique 8 por 200, saque el resultado y da 1600 gramos o bien 1.6 kilos, kilogramos
103. E: ¿Te sentiste seguro?
104. R: Sí
105. E: ¿Qué hizo que te sintieras seguro?
106. R: Pues al leerlo sentí que estaba muy fácil, así que, ¿lo hice bien?... ¿Si está bien o no?
107. E: Oye y ¿Cómo es eso de estar seguro? ¿Qué es para ti la seguridad?
108. R: Mmm pues en este caso que tu respuesta sea sensata y esté bien...saber que está bien
109. E: “Saber que algo está bien” ¿En la vida diaria también? ¿Se podría decir así?
110. R: Depende, en el contexto, pues en este estas seguro de tu respuesta es porque sabes que está bien
111. E: Y por ejemplo, ¿Cómo tú sabes cuándo estás seguro de algo?
112. R: Pues sabiendo que está bien.
113. E: ¿Cómo sabes que la división es un procedimiento adecuado? ¿En el que puedes confiar?
114. R: Porque me lo enseñaron, bueno me enseñaron cómo resolver ese tipo de problemas, así que yo simplemente lo hice y ya

## Tarea 2

115. E: ¿Cómo resolviste el segundo?
116. R: No usé tanto las operaciones, sino fue más bien por el tanteo pues vi que 3 gallinas ponen 3 huevos en 3 días, siguiendo la lógica de 3, 3, 3, pues dos docenas son 24, gallinas en 2 docenas de días, 2 docenas de gallinas, dos docenas de días, dos docenas de huevos, son 24 huevos.
117. E: ¿Por qué te sentiste parcialmente seguro?
118. R: Porque es tanteo, con tanteo no puedo estar completamente seguro, no hice operación entonces no puedo estar totalmente seguro de que hice la respuesta correcta.

119. E: ¿Por qué no te gustaría explicarles a tus compañeros tu respuesta?
120. R: Porque es tanteo o sea no les podría darles una forma precisa de llegar al resultado
121. E: ¿Si supieras una forma precisa, con operaciones estarías seguro y te gustaría explicarles?
122. R: Sí
123. E: ¿Sueles explicarles a tus compañeros cuando entiendes algo?
124. R: Si, cuando entiendo algo y sé que estoy seguro de no darles resultados incorrectos, si se los explico
125. E: ¿De lo contrario no les explicas?
126. R: De lo contrario, no.

### Tarea 3

127. E: ¿Cómo hiciste el de la tela?
128. R: En este... nada más transformé las unidades.
129. E: ¿A qué te refieres con transformar unidades?
130. R: Cambié el dinero por centímetros.
131. E: ¿Y cómo sabemos que eso está bien?
132. R: Porque dice: "se supone que el problema está en el metro que se usa para medir, si así fuera ¿cuánto mediría su metro?" se supone que esto es ... lo quiere en centímetros, ¿no? ¿Sí? Bueno eso entiendo
133. E: Quiero saber lo que tu entendiste
134. R: Por eso también estaba parcialmente seguro
135. E: ¿Por qué?
136. R: Porque no sé si comprendí bien el problema para estar totalmente seguro.
137. E: ¿Cuándo sabes que comprendiste bien el problema?
138. R: Pues cuando lo leí y pues en mi cabeza entró: "ah tenemos que hacer esto"
139. E: "Entró" ¿Cómo es esto?
140. E: ¿Estas nervioso?
141. R: No
142. E: ¿Cómo entra algo a la cabeza?
143. R: Como en el primer problema que estaba muy fácil, es comprenderlo, si no lo comprendo bien por eso siento que no estoy tan seguro de que está bien.
144. E: ¿Cómo te sientes cuando comprendes algo y cuando no lo comprendes?

145. R: Cuando comprendo algo, se cómo resolverlo, cuando no comprendo algo pues... se me complica un poco encontrar el resultado.

#### **Tarea 4**

146. E: ¿Qué hiciste?

147. R: Pues dividí primero la cantidad de dinero que gana en sus 8 horas pues entre las 8 horas y así obtuve cuánto gana por hora, cuánto le queda en un día que trabaja 12 horas, si va a trabajar 12 horas, 12 por 13 serían 156 menos los 12 pesos que gana de transporte son 144.

148. E: ¿Y por qué estás parcialmente seguro?

149. R: Porque bueno... también había como que otra cosa, de ida se gastó 6 pesos de su sueldo anterior del día anterior, porque esto apenas se lo van a dar cuando termine su jornada laboral, o sea no puede gastar los 12 pesos de ... en sí porque ya había venido

150. E: ¿Y por eso no estás totalmente seguro?

151. R: Sí

#### **Tarea 5**

152. E: ¿El de los gatos, cómo lo hiciste?

153. R: Bueno según yo cada gato mata un ratón porque 6 gatos matan 6 ratones y luego la misma cantidad de gatos es la misma cantidad de tiempo pero aquí no es así, es la mitad por eso se tiene que duplicar la cantidad de gatos que hay para matar los ratones y como hay 100 ratones y cada gato mata un ratón pero tienes que duplicarlo porque lo tienes que hacerlo en la mitad del tiempo lo tienes que multiplicar por 400 gatos

154. E: ¿Estás seguro?

155. R: Sí, totalmente seguro.

156. E: ¿En el Tarea2 y el 5 no usaste los mismos razonamientos?

157. R: No

158. E: ¿Cuál es la diferencia?

159. R: Aquí pues no lo comprendía muy bien, aquí sí lo comprendí porque a ver ... aquí te daban como más cosas, como 100 ratones en 50 minutos y aquí solo 3 gallinas ponen 3 huevos en 3 días y aquí 100 gatos, 100 ratones en 50 minutos.

160. E: Entonces te sentiste seguro y ¿En este?

## Tarea 6

161. R: En este pues solamente multipliqué.
162. E: Multiplicaste y te sentiste seguro o sea que de este también ¿Podemos decir en tus palabras que lo comprendiste?
163. R: Sí
164. ¿Podemos decir “entró”?
165. R: Sí
166. E: ¿Viste alguna diferencia entre éste (haciendo referencia a procedimental) y éste (conceptual)?
167. R: Pues ecuaciones... problemas
168. E: ¿Viste alguna diferencia en ti? ¿en la forma de resolverlo y en cómo te sentiste?
169. R: No
170. E: ¿Igual? Si yo te pregunto en estas cómo te sentiste, seguro, parcialmente seguro, totalmente inseguro... ¿Qué me dirías?
171. R: ¿En general? Parcialmente seguro
172. E: ¿Por qué?
173. R: Es que esta fue la única que no comprendí de todas (referencia a ecuaciones)
174. E: ¿Y si la quitamos?
175. R: Seguro

## ANEXO 5: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA PAOLA

### Tarea 1

176. E: ¿Cómo te sentiste?
177. P: La segunda parte se me hizo más fácil
178. E: ¿Por qué?
179. P: No sé es que se me complica un poco más como problemas, pero las ecuaciones son más fáciles para mí.
180. E: ¿Normalmente se te hace más fácil?
181. P: Aja.
182. E: Pusiste que estás parcialmente segura de tu respuesta, ¿Por qué?
183. P: Pues no estoy completamente segura y no sé si esté completamente mal
184. E: ¿Completamente mal?
185. P: O sea si está mal o bien, solamente así como que...
186. E: ¿Y cómo podrías saberlo?
187. P: Mmm no sé, ja.
188. E: ¿Hay algo que podamos hacer para que te sientas segura de tu respuesta?
189. P: Mmm... tenía una duda que si a ocho se refería a las madejas
190. E: Sí.
191. P: Ah ok
192. E: Nos explicas cómo lo hiciste por favor
193. P: Sí, este... pues si 3 tienen 200 gramos y necesitamos 8 para hacer un suéter, pues el doble son 300 gramos o sea como por 6, entonces dividí 200 entre 3 para sacar como el de cada una y luego eso lo multiplique por 2 que son las dos madejas que me faltan entonces se lo sume a 300 que son 6.
194. E: Ok ¿el doble de qué?
195. P: De las 3 madejas con los 200 gramos
196. E: ¿O sea, sacaste el doble de tres?
197. P: “¡Uuuh!” ahí está el problema.
198. E: ¿Cuál es el problema?
199. P: Eran 400, creo
200. E: ¿Pero si hubieses puesto 400...?, supongamos que hubieses puesto 400 ¿algo cambia?

201. P: Si, eh... sería, según yo daba ([en voz baja] 33. 2)... serían 100 más, ah con razón, si, aquí si me daba eran 500...
202. E: ¿Cómo?
203. P: Ajá, es que luego lo multipliqué por 8 y me daba 500. Ahí estaba la diferencia.
204. E: ¿Y por qué multiplicaste por 8?
205. P: Porque si cada una, o sea en cada madeja había aproximadamente 600.6 gramos por 8 sería el resultado porque necesito más 8.
206. E: ¿Como la comprobación?
207. P: Ajá.
208. E: ¿Y por qué comprobaste?
209. P: Para estar segura, pero ni me dio jaja.
210. E: ¿Y normalmente compruebas? En clase de matemáticas, ¿Sueles comprobar?
211. P: Cuando es un problema, así como no de especialmente de un tema, si lo hago, pero si es como que apenas nos dieron como resolver y así, no, no lo hago.
212. E: Si lo viste pronto, ¿No lo compruebas?
213. P: Ajá
214. E: Si lo viste antes, ¿Si lo compruebas?
215. P: Ajá
216. E: ¿Si este número te hubiera dado igual a este número?
217. P: Según yo, estaba bien
218. E: ¿Y hubieses puesto que estabas segura o no?
219. P: No
220. E: ¿Por qué no?
221. P: Se me hacen más difíciles como si no te ponen incisos.
222. E: Oye Paola y ¿Qué es estar seguro? ¿Qué es la seguridad?
223. P: Que el resultado que obtuviste para ti es correcto que otro no estaría bien
224. E: ¿Y eso cómo lo podríamos saber?
225. P: Mmm sí... no sé, haciendo... comparando tal vez con mis compañeros o hasta con el maestro, de que este bien
226. E: ¿Que sería lo opuesto a estar seguro?
227. P: Mmmm pues que no supe cómo hacerlo bien entonces me inventé algo
228. E: ¿Podría ser "tener duda"?

229. P: Ajá
230. E: ¿Qué es la duda para ti?
231. P: Algo que te dice que no está completamente bien
232. E: ¿Te ha pasado que sientes algo en tu cuerpo o en tu manera de pensar que cambia cuando sientes duda o seguridad?
233. P: Si, pues no sé a veces pienso en algo que dices que es completamente seguro pero luego pasa otra cosa y te hace cambiar de opinión, mmm.
234. E: ¿En tu cuerpo notas algo?
235. P: No sé, es que como soy muy nerviosa... regularmente no sé jajaja
236. E: ¿Cuándo estás muy confiada de algo, notas algo diferente?
237. P: No siento nervios y estoy segura de mí
238. E: ¿Cómo más tranquila?
239. P: Aja

## Tarea 2

240. E: ¿Este como lo resolviste?
241. P: Con regla de 3
242. E: ¿Cómo es la regla de 3?
243. P: Si los mismos datos son aquí y aquí arriba, pues voy a usar cualquiera, entonces multipliqué como la del Pececito que nos enseñó mi maestro de física el año pasado y entonces 24 por 3 entre 3 y me dio 24
244. E: ¿Ok y por qué estás parcialmente segura?
245. P: Jaja pues no sé, es que regularmente no me gusta tener la mentalidad lo que yo pienso es como completamente lo cierto.
246. E: ¿Y por qué?
247. P: No sé es como algo en mí que no me gusta como ser muy... como crearme superior a algo, le pongo parcialmente segura entonces por si no y por si sí ja ja
248. E: ¿Hay alguna razón en específico por la cual no te gusta "creerte" dices tú?
249. P: Tal vez, pero no se siempre hago lo mismo
250. E: ¿Siempre prefieres estar en el punto medio?
251. P: Ajá.
252. E: ¿Explicarles a tus compañeros, lo haces regularmente?

253. P: Si me lo piden, o por si yo les pregunto, o sea si tengo dudas, les digo como lo hice y ya me pueden ayudar en que cambiar o si estoy mal en lo que estoy haciendo.
254. E: ¿O sea, regularmente te apoyas en tus compañeros?
255. P: Ajá o en mi maestro

### **Tarea 3**

256. E: Cuéntame sobre este
257. P: jajaja, ahí si no tengo idea, lo hice como aproximando yo creo, aquí creo que si adiviné
258. E: ¿Por qué crees que adivinaste?
259. P: Mmmmmmm
260. E: ¿Qué hiciste o qué intentaste hacer?
261. P: Según yo intenté ver cuánto era por un metro, pero nada más nos daban como cuánto costaba, no nos daban una medida, así que lo puse aproximada.
262. E: O sea tú crees que mide aproximadamente 1.30 m o sea que mide más que un metro
263. P: Ajá
264. E: ¿Por alguna razón tú crees que mide más?
265. P: Ajá, porque... mmm porque pues tomé como punto de partida el precio que se supone que debe de ser que son 1290 entre lo que mide un metro y pues según yo.
266. E: Usaste una palabra que me parece muy interesante: "tanteo" ¿Qué entiendes por tanteo?
267. P: Pues jaja como ver si sí o si no es.
268. E: ¿Cómo adivinándole, calculándole?
269. P: Aja
270. E: Pusiste parcialmente segura, por lo mismo supongo
271. P: Ajá

### **Tarea 4**

272. E: Aquí
273. P: En este si estaba segura.
274. E: ¿Entonces acá leíste mal?
275. P: Ah sí perdón pensé que era totalmente segura.

276. E: En este su puedes decir que estas totalmente segura.
277. P: Aja
278. E: ¿Qué cambió en este con las anteriores?
279. P: Creo que también aquí (señalando el punto 6) vi mal.
280. E: Totalmente seguro. ¿Qué cambió en este con los otros?
281. P: Pues aquí se me hizo mucho más fácil y como que algo que si manejo, entonces se me hizo más fácil, entonces llegué como rápido y según yo bien al resultado.
282. E: ¿Cómo puedes saber cuándo dices ya o sea mi respuesta ya está para mandarla, entregarla al profesor?
283. P: Mmm cuando vuelvo a ver qué hice, vuelvo a hacer rápido las multiplicaciones, operaciones y así y digo ya yo digo que así es.
284. E: ¿Verificas?
285. P: Mmm ajá, casi siempre.
286. E: Me dijiste acá que por lo general no te gustaba “creértelas” pero acá si te sientes segura, ¿Qué cambio?
287. P: Mmm pues cómo lo hice, yo digo que sí, así es, algo me dice que sí era.
288. E: ¿Ese algo lo sentiste diferente? ¿Cambió algo?
289. P: Pues como mmm... no es confiarme, sino pues a veces, confiar de que lo hice bien.
290. E: ¿En este confiaste de que lo hiciste bien, en estos no?
291. P: Mmm jajaja más o menos

## **Tarea 5**

292. E: ¿Y en éste?
293. P: Ahhh en este no hice operaciones más bien lo hice como por lógica observando los datos y lo que tenía para sacar el resultado.
294. E: Tu respuesta es 200
295. P: Ajá.
296. E: Y parcialmente segura, ¿Por qué?
297. P: Porque tampoco sé si está bien.
298. E: Acá (referencia parte 2), Si te preguntara tu nivel de seguridad en estos, ¿Qué nos dirías?
299. P: En estas si pondría que segura

300. E: ¿En todas?
301. P: Sí.
302. E: ¿Por qué?
303. P: Porque pues aparte de que se me hicieron más fáciles, pues llegué muy fácil a los resultados y aparte verifico, por ejemplo, que me diga 6 yo ya multipliqué por 58 para ver si sí estaba correcta y pues si me daba.
304. E: Ok, entonces verificando ¿Eso es algo que normalmente sueles hacer?
305. Si

## ANEXO 6: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA HANNIA

### Tarea 1

306. E: Vamos a hacerte unas preguntas de lo que nos respondiste en los cuestionarios, puedes responder todo lo que gustes y decidir si algo no quieres responderlo libremente.
307. E: ¿Cómo te sentiste en general?
308. H: Pues me sentí bien, como que no me sentí tan nerviosa o presionada respecto al cuestionario y sí, como que se me hizo algo sencillo o algo que no tuvo algún problema hacia mi o cosas así.
309. E: ¿Me puedes explicar cómo resolviste el primer punto?
310. H: El primer punto nada más ... pues aquí dice que eran 3 y eran 200 gr entonces nada más saqué lo unitario y me salió el valor de uno, entonces el valor de uno lo multiplique por 8 y eso me dio la respuesta de cuánto pesaba el suéter.
311. E: Marcaste que estás segura ¿A qué se debe tu seguridad?
312. H: Pues al procedimiento, sé que el procedimiento que realicé para solucionarlo, sé que pues fue correcto o estuvo bien los cálculos que yo hice, entonces en eso se basa mi seguridad.
313. E: ¿Cómo sabes que tus cálculos están bien hechos?
314. H: Ah bueno, los rectifiqué varias veces cuando ya había obtenido el resultado final y ya fue que pues pude hacer mis conclusiones y ya.
315. E: ¿Eso es algo que sueles hacer?
316. H: Sí, para cuando no me siento muy segura, o cosas así, de que se me fue un número o cosas así a veces si rectifico mis operaciones.
317. E; ¿Oye y para ti que es estar seguro?
318. H: Mmm, estar como confiado de lo que tú hiciste o lo que dijiste o lo que haces, que no te sientas... que no te arrepientas de lo que ya hiciste, tienes que estar como centrado.
319. E: Ahorita dijiste: "estar confiado" ¿qué sería eso?
320. H: Mmm, no sé, estar... como que... no sé, pienso que cero nervios, relajada, como segura jaja con lo que tú realizaste, que te sientas satisfecho.
321. E: ¿Satisfecho de qué?
322. H: Pues como de lo que logras o lo que ya hiciste.

323. E: Me acordé de cuando comes que luego dicen: no gracias, ya estoy satisfecho, entonces ya tienes satisfecha la “necesidad” de comer, entonces ahora “estás satisfecha”, pero ¿De qué sería?
324. H: Yo creo que de lo que ya hice, lo que me pidieron, lo que hice estuvo bien y por ello estoy relajada.
325. E: ¿Si dices siento y le haces así (señalando su cuerpo) es porque sientes algo en tu cuerpo o algo así?
326. H: Ahhh pues creo que es algo más mental, no es tanto de sentirte muy ...como algo relacionado con el cuerpo, siento que más mental, no sé, como sentirte segura o relajada...

## **Tarea 2**

327. E: ¿Cómo hiciste este? (referencia al de las gallinas)
328. H: Pues nada más fui registrando los datos y ya de ahí me dijo que dos docenas y una docena pues tiene doce, son dos de dos días entonces serían veinticuatro días y pues ya solamente, ... como tenían relaciones estos pues lo relacioné también con que era la misma cantidad y ya
329. E: ¿Y por qué pusiste parcialmente segura?
330. H: Ahhh es que tenía como una duda de los datos, porque no sabía si las 3 gallinas habían puesto cada una tres huevos o las 3 gallinas en conjunto ya habían tenido los 3 huevos, entonces por eso tenía alguna duda nada más en los datos y ya.
331. E: Ahorita dijiste que tenías varias dudas, ¿Cuándo tienes una duda que haces?
332. H: Ahhh pues por ejemplo si encuentro alguien que... por ejemplo en este caso a veces pregunto o intento yo misma resolverlo pues por mi lógica, resolver lo que no entiendo o analizar bien el problema y ya.

## **Tarea 3**

333. E: ¿Cómo hiciste éste? (referencia a problema del metro)
334. H: Ah en este... primero tenía duda porque pues nada más eran 5 pesos de diferencia pero pues supuse que... es que primero tenía dudas de lo del metro y ya, primero tenía la conclusión de que eran mil cm pero ya después como que descarté esa opción y puse que eran uno y medio considerando los cinco pesos

como mitad de metro, entonces puse que cuánto medía su metro y ya le puse nada más el metro que media más los otros 0.5

335. E: ¿Cómo le dices a esto (haciendo referencia a 1 metro 30 cm)?

336. H: Uno y medio

337. E: Y pusiste totalmente insegura?... ¿Por qué?

338. H: sí, porque[eeee] (sic) éste sí lo hice más por lógica que por un procedimiento que me hayan enseñado... un procedimiento fijo, entonces como lo hice más por lógica pues sí me sentí insegura de la respuesta que yo tuve.

339. E: ¿Y siempre recurres a eso? ¿Cuándo no utilizas una operación o un procedimiento que te enseñaron, te sientes más insegura?

340. H: Ajá, porque como no lo sigo por un procedimiento que me enseñaron si me siento más insegura del resultado que obtuve.

#### **Tarea 4**

341. E: ¿Aquí cuál es tu respuesta?

342. H: Este[eee], ah sí, aquí nada más a los 104 pesos les resté 12 que me dio 92 pesos, y como sólo era de 8 horas ya después sólo dividí 92 entre 8 para evaluar nada más de una hora y el valor de una hora lo multipliqué por 12 y ya me dio el resultado final de cuantos pesos.

343. E: Y en ese te sentiste segura. ¿Por qué?

344. H: Mmm bueno igual como en el primero, el procedimiento y mis operaciones fueron correctas entonces sí me sentí segura al hacerlo

345. E: ¿Verificaste tus operaciones?

346. H: En este sí.

347. E: ¿Cómo verificas tus operaciones?

348. H: Ah bueno, multiplicaciones lo intento hacer igual que la otra vez y sí incluso éstas multiplicaciones se me facilitan por ejemplo en las restas a veces me confundo, pero pues ahí sólo sumo estas dos para que me dé el resultado de arriba y ya es lo único que verifico en sí.

349. E: ¿Y las divisiones?

350. H: Ah no, en ellas también me siento confiada de lo que obtuve.

#### **Tarea 5**

351. E: ¿Que paso con los gatos y los ratones?

352. H: Ehhh... este, igual aquí vi cuánta diferencia había entre ambos y de ahí me dijo que eran 50, entonces para obtener este resultado nada más lo que ya me había obtenido aquí pues le sumé 50 y me dio 150, entonces pues yo deduzco que los gatos eran 150.
353. E: ¿Por qué la resta?
354. H: Ah este[eee], la diferencia nada más de cuanto era del 6 para el 50 que son 44, del 6 para el 100 que son 94, la resta fue restar 94 y 44 para saber cuánto hay de diferencia en estos dos y ya después sólo sumé el 94 para ver el número de aquí.
355. E: ¿Por qué usaste una resta?
356. H: ¿Una resta? Nada más para saber pues las diferencias que había y saber el valor de cuantos había de diferencia entre cada uno.
357. E: ¿Parcialmente segura? ¿Por qué?
358. H: Sí... mmm... pues como que era como el del principio, entonces si dudaba un poco del resultado que había obtenido pero como que ya después cuando regresamos de recreo pues ya lo analicé más, entonces ya me sentí como un poco más confiada de mi respuesta y le puse quizá porque quizá otros de mis compañeros pusieron otras respuestas entonces podemos analizar entre todos y tal vez cambiar nuestras respuestas.
359. E: ¿En el descanso pensaste en el problema? O simplemente el hecho de salir.... ¿Qué crees que sirvió para que te sintieras más segura?
360. H: Yo creo que pensar el problema.
361. E: ¿Lo pensaste afuera?
362. H: Aja, creo que fue más como pensarlo.... Lo que llevé a cabo del procedimiento y el planteamiento del problema y ya fue todo lo que hice.
363. E: ¿El tiempo afuera te ayuda?
364. H: a veces, si yo pienso que salirme, a veces, no siempre porque como tenía en cuenta que esto sólo era una prueba pienso que también como que me relajé y sí como que el tiempo afuera me sirvió, pero por ejemplo en el COMIPEMS que son horas que ya te ponen, siento que en ese momento si como que no tengo la oportunidad de salir entonces si me centro en lo que hago.
365. E: ¿Tú decías al principio “cero nervios”, crees que los nervios tengan algo que ver con la inseguridad?

366. H: Ah yo pienso que sí, porque como te pones nervioso y así no piensas bien, como que no te sientes seguro de tu respuesta.
367. E: ¿Cómo es eso de “no pensar bien”?
368. H: Ah como no sé, como que tus nervios te confunden por ejemplo si no lees bien o te saltas algún dato, siento que esos nervios te pueden como perjudicar, no te ayudan.

## **Tarea 6**

369. E: ¿En este finalmente, te sentiste segura?
370. H: Ah sí, nada más otra vez puse los datos que eran 7 vueltas y 3 de Miriam y ya vi la diferencia otra vez de éstos y como aquí decía que Miriam corrió 12 y la diferencia era de 4 entonces le sume 4 y me dio como resultado 16 y ya.
371. E: ¿Recuerdas en qué orden solucionaste estos?
372. H: Ajá, primero el 5 y luego el 6.
373. E: Hannia, ¿viste alguna diferencia entre la primera parte y la segunda parte?
374. H: Ah pues en cuanto a los problemas sí, en cuanto a mi desarrollo no, y en cuanto a la facilidad, pues tampoco se me hizo difícil, la otra prueba sólo fue otro tema que ya había visto entonces me siento segura con lo que obtuve.
375. E: ¿En este verificaste, comprobaste?
376. H: Ajá, comparé el resultado que tuve con lo que aplicaba y ya fue todo lo que hice.
377. E: ¿O sea, en ese te sentiste segura, parcialmente segura o totalmente insegura?
378. H: Mmm segura.

## ANEXO 7: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA ALESSANDRA

### Tarea 1

379. E: Vamos a platicar un ratito contigo sobre el cuestionario ¿Cómo te sentiste en la primera pregunta?
380. A: Se me hizo muy relajada, esa si se me hizo muy sencilla, porque no es como complicada de entender que necesitas hacer o la relación.
381. E: Nos explicas como lo resolviste, por favor.
382. A: Ah sí, te dice que 3 madejas equivalen a 200 gr, eso quiere decir que para sacar cuánto pesa cada madeja tienes que dividir los 200 gr entre los 3, después si necesitas ocho para hacer un suéter, y te pide el peso del suéter eso quiere decir que el peso del suéter será igual a las 8 madejas por el resultado de la división y ya.
383. E: Marcaste que estás segura...
384. A: Sí.
385. E: ¿Por qué te sientes segura de tu respuesta?
386. A: Porque según lo que revisé mi multiplicación y mi división, este... el resultado y la multiplicación estaban bien.
387. E: ¿Oye y qué es estar seguro?
388. A: Estar seguro... eh... tener la sensación de que está bien y no tener dudas de eso.
389. E: ¿Y la Duda qué sería?
390. A: La duda sería... mmm... Yo en mi caso, tengo problemas con los números porque de repente los cambio de lugar, mi duda sería en saber si lo hice completamente bien, porque muchas veces, aunque lo revise vuelvo a cambiar mi número, sólo sería ese en mi caso la duda. La duda sería que hubiera algo en lo cual no estuviese segura, algo en lo que dijeras puede que me haya equivocado por un procedimiento que estuvo mal.
391. E: ¿Cómo es eso de cambiar de lugar los números?
392. A: Tengo un poco de dislexia, de repente muevo los números y a veces confundo con los resultados.
393. E: ¿Pero esa dislexia te la están tratando?
394. A: Si, por eso intentando hacer los números mas decentes, y hago ejercicios yo en mi casa. En mi caso eso es lo que genera la duda.

395. E: A medida que te han tratado la dislexia, ¿Has mejorado? ¿La duda ha cambiado?

396. A: En su mayoría, no del todo, porque de vez en cuando tengo errores, entonces según yo ya lo revisé y está bien y lo vuelvo a revisar y está bien y después cuando me entregan los resultados es... ¿Por qué puse este número si yo sabía que era el otro?

## **Tarea 2**

397. E: Nos explicas tu segunda resolución

398. A: Según lo que entendí, porque tengo problema de entendimiento con el problema. Según lo que entendí, 3 gallinas ponen 3 huevos en 3 días, eso quiere decir que son 3 huevos por 3 días, haces la multiplicación de la cantidad de días que son dos docenas, equivalen a 24 días, multiplicas la cantidad de huevos por un día y la cantidad de gallinas. Eso sí entendí bien el problema, porque si no por el otro lado hubieran sido solamente 24, pero entendí el problema con esa razón, que son: 3 gallinas ponen 3 huevos cada una en los 3 días.

399. E: Pusiste parcialmente segura, ¿Por qué?

400. A: Porque no entendí si la razón es correcta.

401. E: ¿Te gustaría explicar a tus compañeros tu forma de resolver el problema?

402. A: Sí, sí me gustaría.

403. E: Y si alguno de ellos tuviera la misma respuesta, pero un procedimiento totalmente diferente, ¿Qué harías?

404. A: Hablaría con él para ver qué fue lo que él hizo y por qué llegamos a la misma conclusión, aunque fue diferente manera y después de entenderlo también lo aceptaría como una segunda opción para hacer el problema.

## **Tarea 3**

405. E: ¿Cómo te sentiste en este? (Haciendo referencia al de las telas)

406. A: Me confundió un poco, porque dice que va a hacer las cuentas de su ingreso pero no dice si son semanas, días, meses, entonces lo hice a la razón de lo que mide un metro que son 100 cm, entonces hice la división de la cantidad que se supone que debería estar ganando y eso equivaldría al metro en este caso, en este caso serían 12.9 pesos que equivale a un metro, su ganancia está bajando porque ... es algo que me complicó mucho porque se supone que el metro tendría estar un poco más grande, según mi lógica pero según mis

multiplicaciones es más pequeño , eso me confundió por eso no estoy segura de mi resultado

407. E: ¿Por qué, según tú, el metro debería ser más grande?

408. A: Porque está perdiendo una ganancia y bueno mi mamá trabaja con telas entonces ella tiene que medir entonces si se equivoca, si se pasa es una pérdida, eso quiere decir que el metro tiene que ser más grande para que esté perdiendo sino tendría que estar ganando más, si fuera más pequeño el metro.

409. E: ¿Entonces hay hubo un conflicto entre tu lógica y tus operaciones?

410. A: Si, y es que no entendí qué es lo que tenía que hacer del todo, entonces por eso saque la razón de proporcionalidad con la cantidad de centímetros y según sale que es más pequeño.

411. E: ¿En cuál te sientes más segura?, si te pudiéramos a elegir entre tu respuesta con las operaciones o tu razonamiento a partir de lo que sabes de tu mamá

412. A: Mi razonamiento, tendría más sentido.

413. E: ¿Por qué no pusiste tu razonamiento?

414. A: Porque no sé cuál es la cantidad, iba poner de hecho más de un metro

415. E: O sea poner el número, pero confías más en tu razonamiento

416. A: Sí, confío más en mi razonamiento. Porque no tiene sentido que si el metro es más pequeños, este perdiendo dinero, estaría ganando dinero.

417. E: ¿Tu respuesta te satisface?

418. A: No me satisface, en lo absoluto

#### **Tarea 4**

419. E: En ésta (referencia a la del sueldo) ¿Qué te hace estar segura?

420. A: Lo mismo que las anteriores, la razón de proporcionalidad, de los 104 pesos que gana en 8 horas de trabajo solamente tienes que saber cuánto equivale una hora de trabajo y lo multiplicas por las 12 horas y restas doble pasaje porque es ir y venir son 24 pesos en total se lo restas al total de la cantidad de horas por lo que vale una

421. E: Has hablado de proporcionalidad, ¿Qué es la proporcionalidad?

422. A: Mmm, ajá, es cuando haces lo mismo en ambas

423. E: ¿Cómo?

424. A: Es que no tengo otra manera de explicarlo

## Tarea 5

425. E: En el problema de los gatos y ratones, ¿Cómo te sentiste?
426. A: Ese creo que fue más por lógica. Confío más en mi lógica
427. E: ¿Confías más en tu lógica?
428. A: Sí
429. E: ¿Normalmente u hoy?
430. A: Normalmente, porque a veces como tengo problemas con los números, no puedo andar confiando tanto en sí está bien o no, porque por ejemplo un número de 3 cifras, puedo confundir 618 puedo cambiarlo por 681, aunque yo sé que es 618 lo puedo llegar a cambiar e inconscientemente pensar que estoy bien.
431. E: ¿Eso me ha hecho que confíes más en mi lógica/razonamiento?
432. A: Si, entonces te piden, te dicen que son 100 ratones y según lo que viene anteriormente la cantidad de ratones es proporcional a los minutos, más bien igual a los minutos entonces si fueran 100 gatos serian 100 ratones en 100 minutos pero son 100 ratones y te piden la mitad del tiempo entonces serían 200 gatos, dos gatos por ratón para intentar cazarlos. Además de que la probabilidad aumentaría...
433. E: ¿La probabilidad?
434. A: Sí, la probabilidad de que dos gatos intentaran cazar un ratón cortaría el tiempo, entonces si fueran 100 gatos se tardarían más tiempo en cazar cada uno un ratón
435. E: ¿Cómo nos explicarías la probabilidad? ¿qué es la probabilidad para ti?
436. A: La probabilidad para mí, ay no sé cómo decirlo sin la palabra... que pueda pasar algo, que haya una certeza que pueda pasar algo y se pudiera calcular con números o en este caso con cantidades no exactas
437. E: ¿Qué es para ti la certeza?
438. A: La certeza... la seguridad... saber que estas bien... igual que estar seguro
439. E: ¿Cómo un sinónimo de seguridad?
440. A: Ujum

## Tarea 6

441. E: Y finalmente acá, estás segura ¿Cómo lo hiciste?

442. A: Restas la diferencia en realidad la diferencia no va a cambiar porque si corren así, corren al mismo tiempo entonces, restas la primer diferencia que son siete vueltas contra las tres de Miriam que da el resultado de cuatro, es la diferencia de vueltas que se dan, a las de Miriam se le van a agregar esas cuatro.
443. E: ¿Por qué “quizá” mantendrías la respuesta ante tu grupo?
444. A: Mmm porque puede que haya otra manera de resolverlo y tal vez de otro resultado, los números en ese sentido dependiendo de lo que se quiera hacer pueden ser muy cambiantes, estaría dispuesta a aceptar otra respuesta si tuvieran una manera más favorable de sustentarla o que yo pudiese entender
445. E: ¿Viste alguna diferencia entre la primera y segunda parte?
446. A: Mmmm sí y no, aquí te formulan el problema (haciendo referencia al primer cuestionario) y en realidad la mayoría de los ejercicios si no es que todos se pueden resolver igual con una ecuación entonces ahí me vienen ecuaciones.
447. E: ¿Y si acá (segundo cuestionario) te preguntara que si estás segura, parcialmente segura, totalmente insegura que nos responderías?
448. A: Segura
449. E: ¿Cómo haces para saber que está segura?
450. A: Mmm eso lo sé porque me costó mucho trabajo entender cómo factorizar y eso, entonces verlo y que se me facilite eso, para mi me da una seguridad porque entonces eso quiere decir que ya mejoré y que ya lo entiendo, si es algo que entiendo estoy segura.
451. E: ¿Entonces sentiste que estaba más fácil y eso te hizo sentirte más segura?
452. A: Ajá.
453. E: ¿Te has dado cuenta de que cuando confías o dudas algo cambie en tu manera de pensar?
454. A: Mmm sí, la mayoría de las veces me pasa.
455. E: ¿Cómo cambia?
456. A: Puede ser más explícita mi manera de dudarle porque es extraño pero cuando estoy pensando algo y tengo la duda saco como en mi cabeza un mapa mental, entonces tengo las dos maneras de resolver algo o las tres o las cuatro y busco la manera más fácil para mí o la más corta entonces como después para explicarlo es complicado, es como... es que pensé primero en esto y luego en esto luego entonces tengo que buscar la manera que una palabra abarque todo un renglón para que sea más corto, para sintetizar mi procedimiento.

457. E: ¿En tu cuerpo notas algo? Cuando dudas o estás más segura
458. A: Sí, cuando dudo, a veces empiezo a hacer eso (tronar dedos) o veo que solos mis dedos se mueven o como si estuviera tocando un instrumento con los dedos.
459. E: ¿Y cuando estás segura?
460. A: Mmm tiendo a sentarme de manera diferente así como si no estuviera pasando nada
461. E: ¿Así como ahorita?
462. A: Mmm ajá, respondo y ya, no hay como un cambio, normal, por así decirlo.
463. E: ¿Normalmente en clase ustedes discuten sus respuestas?
464. A: Mmm algunas veces, es 50 y 50.
465. E: Pero digamos si tu das una respuesta y un compañero da una respuesta diferente ¿Es algo habitual en clase?
466. A: Mmm, sí.
467. E: Y llegan a consensos y miran cual está bien y...
468. A: Sí, en las de matemáticas por lo regular, bueno hay diferencias de opiniones en clases que tiene que ver eventos históricos.

## ANEXO 8: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA ERICK

### Tarea 1

469. E: ¿En general cómo te sentiste?
470. W: Bien, tranquilo, creo que estuvo fácil.
471. E: ¿Notaste alguna diferencia entre el primero y el segundo?
472. W: Pues que el primero te pedía como tu explicación de lo que debías haber hecho y el segundo no
473. E: ¿Alguno que te gustara más?
474. W: Éste (referencia al procedimental) creo que fue el más fácil.
475. E: ¿Nos puedes explicar cómo lo resolviste? Por favor
476. W: Claro te dice que tienes 3 madejas de lana de 200 gramos y necesitas 8 para hacer un suéter pues, si necesitas 8 y te pide el peso, nomás tienes que multiplicar el peso de lo que se necesita por las 8 de las que se necesitan y ya.
477. E: ¿Nos dices que estás seguro de tu procedimiento, que te hace sentir seguro?
478. W: pues creo que eso es un problema como muy sencillo donde pues, sólo es multiplicación, los datos lo dan y sólo haces la operación y ya
479. E: ¿Mantendrías tu respuesta en una semana?
480. W: Sí
481. E: ¿Sin ningún problema?
482. W: Sí
483. E: ¿Cómo puedes saber cuándo tu respuesta es la correcta?
484. W: Pues creo que lo compruebo dos o tres veces con otros métodos o lo que sea y ya, y si yo ya estoy seguro de la respuesta pues nada más lo entrego.
485. E: ¿Comprobaste aquí?
486. W: No, porque eso estaba muy fácil
487. E: ¿Entonces haces la comprobación del procedimiento cuando no lo consideras muy fácil?
488. W: Cuando no lo considero fácil creo que si debo hacer dos o tres veces la operación para sentirme más seguro de mi resultado.
489. E: ¿Oye y cómo sabes cuando estás seguro? ¿Un resultado o procedimiento?

490. W: Por mis conocimientos más que nada, digo si yo sé cómo se hace y tengo la seguridad de que lo hice "pus" (sic) ... y yo me siento bien conmigo mismo y con lo que puse, yo pienso que ya con eso estas seguro de lo que haces.
491. E: Bien contigo mismo te refieres a bien con tus conocimientos...
492. W: Sí, bien con lo que sabes
493. E: ¿Oye y qué sería lo contrario?
494. W: Pues cuando te sientes ... no se ... inseguro de lo que estás haciendo como cuando pones la respuesta y te pones a pensar: no pues creo que lo hice mal como que entras en duda con tus propios saberes y entonces si te pones un poco nervioso
495. E: ¿Te pasó algo así en este cuestionario?
496. W: No

## **Tarea 2**

497. E: Nos platicas de éste por favor
498. W: Claro, dice que son 3 gallinas 3 huevos 3 días entonces eso quiere decir que una gallina pone un huevo en un día, cuántos huevos pueden poner dos docenas, son 24 gallinas, entonces ponen 24 huevos por día, era multiplicar los 24 huevos por los 24 días y te da resultado 156
499. E: ¿Entonces estás seguro de que tu respuesta es la correcta?
500. W: Sí.
501. E: ¿Y por qué solo en algunos casos te gustaría explicarles a tus compañeros?
502. W: Porque creo que yo me revuelvo mucho cuando hablo, porque creo que hablo muy rápido y se me enreda a veces lo que quiero decir entonces por eso no me gusta así hablar mucho de ello.
503. E: Si un compañero te pidiera ayuda
504. W: Si se la doy, pero si es como explicarles a todos, general a todos, me pongo nervioso entonces se me enreda y ...
505. E: ¿Y si tu compañero tiene una respuesta igual a la tuya y un procedimiento totalmente diferente, tú qué harías?
506. W: Trataría de probarlo también con el otro procedimiento, hacer los dos procedimientos y asegurarme más de lo que hice.

## **Tarea 3**

507. E: Este, me lo explicas, por favor

508. W: Esto... lo que yo pensé es que dice, aquí te pone el dinero pero eso no tiene mucha relevancia, porque no te pone una medida de cuánto dinero se vende por metro o por centímetro y la pregunta es cuánto mediría su metro, como no sé cómo un metro individual... así que yo no me puse a pensar mucho en lo que era el precio porque no te dice cuánto dinero necesitas por cada metro, no te dice que es un metro de los que usan para medir casas entonces pues un metro mide 1000 cm

#### **Tarea 4**

509. E: Y este (referencia al sueldo)

510. W: Este creo que es fácil, si le dan 104 pesos por 8 horas se tiene que dividir cuánto gana por hora entonces gana 13 pesos por hora si trabaja 12 horas gana esta cantidad de dinero y se le resta lo que gasta en transporte para ir al trabajo y así queda esta cantidad de dinero

511. E: ¿Qué es lo contrario a una operación simple?

512. W: Pues yo creo que ya lo que vas a ver después, como ecuaciones, bueno no me refiero a que son operaciones básicas, quería referirme a eso, suma resta, división, multiplicación, pero después de lo básico, es lo que estamos viendo.

513. E: ¿O sea, para ti todos los problemas que incluyen esas operaciones son más fáciles?

514. W: Pues creo que son más fáciles

#### **Tarea 5**

515. E: y éste (referencia gatos)

516. W: Con este si me revolví un poco porque al principio no lo podía procesar bien, luego me puse a pensar... es que creo que yo soy muy visual para esto, debo tener varios, pues me puse a pensar un gato mata un ratón en un minuto, entonces si tienes 50 minutos debes matar 2 ratones al minuto entonces necesitas el doble de ratones que hay para que puedan comerse a los ratones, entonces se necesita el doble.

517. E: ¿Cómo le hiciste para salir del “revuelto”?

518. W: Digo que con lo visual, con los dibujos... es que digo que soy, me identifico, bueno no me identifico, más bien entiendo más cuando tengo un elemento visual que me represente algo entonces ya me pongo a pensar: ah sí tengo esta cantidad de gatos y esta cantidad de ratones y cada gato se come un

ratón entonces sí quiero que se coman dos ratones voy a necesitar el doble de (gatos).

519. E: Y quedaste seguro con tu procedimiento después de esto

520. W: Sí.

## Tarea 6

521. E: Finalmente éste

522. W: Creo que este es el más fácil de todos porque dice que Uriel corrió 7 vueltas cuando Miriam corrió 3 entonces nada más se le debe restar la cantidad y si corren a la misma velocidad pues creo que van a la par, entonces sólo sería sumar las vueltas que corrió antes que ella

523. E: Cuando tienes una duda, ¿Qué haces?

524. W: Depende mucho si es una clase o un examen, porque por ejemplo si es un examen me pongo a de pensar en las clases que tuve, es que como tengo memoria fotográfica, puedo ver todo lo que voy aprendiendo, si estoy preparado no me pongo tan nervioso.

525. E: y si fuera en un examen?

526. Pues igual me pongo a pensar en los trabajos que he hecho, y pues si estudié bien y me siento preparado no creo me pondría tan nervioso.

527. E: ¿Si es en una explicación?

528. W: Como siempre he sido muy visual entonces cuando ponen los dibujos, los trazos, todo es como que comprendo más lo que me están explicando.

529. E: ¿Si en esta segunda parte te hubiéramos preguntado si te sientes seguro inseguro parcialmente que hubieras respondido?

530. W: Que estoy seguro de mi respuesta.

531. E: ¿Cómo justificarías que estás seguro de tus respuestas?

532. W: Por el procedimiento que realicé, esto te da el resultado de esto, tienes que sacar cuánto vale q que entonces pues nada más es ver qué número multiplicado por este número te da el resultado y ya pues con el procedimiento.

533. E: ¿Veo que comprobaste en varios casos, cierto?

534. W: Es que así aprendí yo, con este tipo de operaciones o sea restar multiplicar para sacar el resultado.

535. E: ¿Y te enseñaron a comprobar o fue algo que tu...?

536. W: Si me lo enseñaron, pero es algo que yo he ido modificando con lo que voy aprendiendo cada año.
537. E: ¿Y siempre sueles llegar a comprobar o verificar?
538. W: Sí.
539. E: ¿Esto te sirve de algo, te hace sentir diferente?
540. W: Sí, como le digo, me hace sentir más seguro de mi respuesta porque claro que sí es una operación básica como suma o resta compruebo algo muy simple, pero si es así, lo hago no tan complicado más bien como yo me sienta seguro de hacerlo.