Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Comportamiento logarítmico y depreciación de la unidad: la *práctica de estimar cantidades* en edades tempranas

Tesis que presenta

José Antonio Bonilla Solano

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Ciudad de México **Abril, 2021**

Dedicatoria:

A mis padres Amada y Antonio
A mis hermanos Javier, Luis y Faustino
A mis sobrinos
A Marcela mi segunda madre

Agradecimientos

- Este camino no lo hubiera logrado sin el apoyo de mis padres, Amada y Antonio, gracias, porque con su amor, su trabajo y su tenacidad me han enseñado más de lo que se imaginan. También agradezco a mis hermanos y sobrinos quienes me han dado momentos de alegría en tiempos adversos.
- Parte esencial de lo que soy se lo agradezco a Marcela, mi segunda madre, que se ha convertido en pilar de mi vida y me ha mostrado el amor a la disciplina.
- Agradezco a mis profesores que me guiaron hasta aquí, a Magaly Méndez, gracias por su confianza y por animarme en momentos difíciles. A Manuel Trejo, gracias por la amistad que me has brindado. A mis profesores del departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, Dra. Rosa María, Dra. Gisela Montiel, Dr. Francisco Cordero, Dra. Claudia Acuña, gracias por todas las enseñanzas en este tiempo.
- En especial, quiero agradecer al Dr. Ricardo Cantoral, por la confianza, el acompañamiento y el diálogo, que sin duda me han forjado una formación en esta disciplina.
- A mis colegas y amigos: primero agradezco a mi grupo de amigas; Arelis, Aline, Alicia, Marite, Madai, Rosa y Yadhi, gracias por estar y seguir estando después de mucho (JCH). También quiero agradecer a Alberto que me ha brindado su amistad incondicional. Para concluir este párrafo, agradezco a Vicente por todo su apoyo brindado.
- También a mis colegas de la bella Latinoamérica, que entre hondureños, colombianos, ticos y mexicanos se desarrolló una familia hermosa; Sindi, Jimy, Carlos, Sofi, Elena, Viridiana, gracias por este tiempo y por sus reflexiones en cada seminario.
- En particular, quiero agradecer a José Luis y Luis Carlos, por su amistad en este caminar y el debate académico que sin duda aportó también a este trabajo de investigación. Agrego a este agradecimiento a Eleany que en poco tiempo se volvió amiga y cómplice, complementando perfectamente este cuarteto de #Cotorros.

- También quiero agradecer a Arturo que, a pesar de la adversidad, continua aquí, apoyándome y siendo cómplice en esta etapa de mi vida, A^3.
- Agradezco a mis colegas del PIDPDM; Rodolfo, Selvin, Cristian, Wendolyne, Rebeca, Abraham, Maximiliano, Julieta, por todos los momentos vividos y todos los comentarios a este trabajo.
- También, a mis nuevos colegas, Henry y Sharon, que, entre risas y llantos, se forjo una bonita amistad.
- Un especial agradecimiento a Adriana Parra, que siempre me recibía con una sonrisa cuando necesitaba de su apoyo. También a Jacqueline Desfassiaux, mi paisana que, estuvo atenta al material bibliográfico que ocupaba, para la realización de este trabajo.
- Y a todos, los que de alguna manera han sido parte de esta bonita historia.

Seremos fuertes a medida que estemos unidos, débiles a medida que estemos divididos.
El don de esparcir discordia y enemistad es muy grande. Podemos combatirlo demostrando un lazo de amistad y confianza igualmente fuertes.

-

Albus Dumbledore

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo para lograr mis estudios de maestría.

CV: 672723
Jose Antonio Bonilla Solano

Un agredecimiento especial al Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav-IPN por toda la gestión para poder realizar mis estudios de maestria.

Contenido

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Resumen

Este es un trabajo de investigación, de metodología cualitativa y de carácter exploratorio, que muestra un acercamiento al estudio de *lo logarítmico* en niños. Se retoma como referencia a (Ferrari, 2008), donde se reporta una primera mirada al estudio de la función logaritmo en niños desde la idea de la relación explícita de dos progresiones, una regida por la adición y otra por la multiplicación.

A partir de ello, comenzamos una búsqueda de elementos que ayudaron a evidenciar *lo logarítmico* en contextos previos a su aparición formal en la escuela. En estas búsquedas se localizaron tres elementos que sirvieron al problema de investigación, a saber; la estimación de cantidades, los *comportamientos logarítmicos* y la *depreciación de la unidad*. El primero se refiere, a estudios que muestran que cuando las personas estiman cantidades, particularmente ubicando su posición sobre la línea recta, la distribución de esas cantidades responde a un tipo de regla logarítmica. El segundo se obtiene de la revisión bibliográfica, donde la covariación de dos progresiones relaciona comportamientos logarítmicos. Mientras que el tercero, narra una característica particular de la escala logarítmica, donde la magnitud entre los números de la derecha y los de la izquierda se ubican en distintas distancias.

Estos tres elementos los reflejamos en las actividades desarrolladas en diferentes contextos, y puestas en escena a Javier, un niño de 8 años que cursaba el tercer año de primaria, donde la *práctica de estimar*, retomada desde la Teoría Socioepistemológica, es un medio para estudiar las acciones y actividades que hace él. Algunos de los resultados que obtuvimos tiene que ver con lo que llamamos, el cambio entre lo lineal y lo logarítmico el cual se expresa en las actividades donde se tiene que

dar valor a la unidad en diferentes contextos. Con esto se muestra el camino hacia un estudio más amplio donde se promueva el desarrollo del pensamiento logarítmico desde la educación primaria.

Abstract

This is a research work, of qualitative methodology and of exploratory nature, which shows an approach to the study of the logarithmic in children. It takes up as a reference (Ferrari, 2008), where he reports a first look at the study of the logarithmic function in children from the idea of the explicit relationship of two progressions, one governed by addition and the other by multiplication.

On this basis, we began a search for elements that helped to highlight the logarithmic in contexts prior to its formal appearance in school. In these searches, three elements were located that served the research problem, namely; the estimation of quantities, *logarithmic behaviour* and the *depreciation of the unit*. The first refers to studies that show that when people estimate quantities, particularly by locating their position on a straight line, the distribution of these quantities responds to a type of logarithmic rule. The second is drawn from the literature review, where the covariation of two progressions relates logarithmic behaviour. While the third one narrates a particular characteristic of the logarithmic scale, where the magnitude between the numbers on the right and those on the left are located at different distances.

These three elements are reflected in the activities developed in different contexts, and staged with Javier, an 8-year-old boy in the third year of primary school, where the practice of estimating, taken from the Socioepistemological Theory, is a means to study the actions and activities that he does. Some of the results we obtained have to do with what we call the change between the linear and the logarithmic, which is expressed in the activities where we have to give value to the unit in different contexts. This shows

the way towards a broader study where the development of logarithmic thinking is promoted from primary school.

Introducción

Proponemos esta investigación bajo un carácter exploratorio (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), debido a que abordamos un tema de investigación con pocas reflexiones en nuestro medio disciplinar. Con esto nos referimos a que, en este trabajo se aproxima la idea de *lo logarítmico* en escenarios que no han sido reportados ampliamente. Tomamos como referencia el estudio socioepistemológico reportado en (Ferrari, 2008) sobre la función logaritmo, en ese trabajo se da un acercamiento al estudio de nociones que acompañan a *lo logarítmico,* como es el caso de la búsqueda de patrones, en particular de patrones aritméticos vinculados con patrones geométricos. El interés principal de Ferrari (2008) era estudiar cómo la vinculación de estas dos progresiones promovía una mirada distinta del concepto de *función logarítmica,* el cual ha sido un tema complejo en su enseñanza, y que aún se considera como una problemática vigente al día de hoy (Ferrari y Fárfan, 2017).

En nuestro interés de contribuir a la mejora en la enseñanza y el aprendizaje del logaritmo, en este trabajo se buscaron elementos que propicien su construcción pero con el fin de estructurar un camino para comprender el desarrollo del pensamiento matemático asociado a *lo logarítmico*. Primero, se reflexionó sobre los elementos que se relacionan con la construcción del logaritmo, y si estos pueden aparecer previamente a su presentación formal en tanto función escolar. A partir de este cuestionamiento, se comenzó una revisión bibliográfica que se muestra en el primer capítulo, de donde se configura el problema de investigación que atiende este trabajo.

En el capítulo dos, mostramos cómo en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2016), el desarrollo del pensamiento matemático es un objetivo primordial, pero para lograr esto se necesita de un análisis profundo. En este sentido, se requieren de métodos para obtener datos empíricos que prueben o refuten la hipótesis sobre la construcción de conocimiento.

En el caso de este trabajo, se proponen una serie de actividades, que se conforman a partir de dos elementos que se le asocia a *lo logarítmico*. Mismos que tomamos como componentes de análisis para dar respuestas relativas al problema de esta investigación.

Una particularidad de este trabajo, es que lo hacemos enfocados en la educación primaria, donde las edades oscilan entre 7 y 12 años (Butto y Rojano, 2010), por eso, al referirnos a *edades tempranas* entendemos este intervalo de edad, donde buscamos evidencia de cómo *lo logarítmico* puede aparecer en ese nivel. Según García (2019) la investigación en didáctica de la matemática se debe potenciar en las primeras edades, con el fin de conseguir un buen aprendizaje posterior. Por su parte, Stelzer et al. (2018) menciona que identificar los factores cognitivos asociados a un conocimiento matemático, permitirá reconocer de manera temprana a niños y niñas con potenciales dificultades en el aprendizaje posterior de la matemática. En ambas visiones la investigación en esas edades se refiere a la búsqueda de obstáculos que irrumpen el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, en nuestro trabajo la investigación en edades tempranas considera la búsqueda de elementos que ayuden a potenciar el desarrollo de un pensamiento matemático en edades posteriores.

1. CAPÍTULO I. CONSIDERACIONES INICIALES

1.1 Justificación

Este escrito comienza mostrando las justificaciones asociadas al proyecto de investigación. La primera deviene de Bonilla, (2018), quien localiza los argumentos con respecto de la *covariación logarítmica* que brinda el estudiantado universitario al modelar, con plegado de papel (**Error! Not a valid bookmark self-reference.**) y geometría dinámica (Figura 2), un caracol Nautilos que se asemeja a una espiral logarítmica, es decir la función logaritmo, pero en el plano polar.

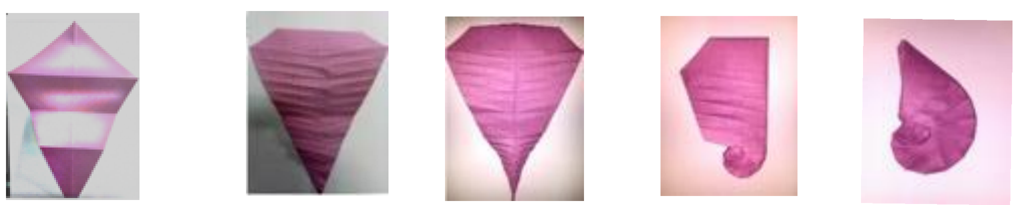


Figura 1. Procedimiento en plegado de papel (Bonilla, 2018)

En el plegado de papel interesaba reconocer qué cambia y cómo cambia, reconociendo así a los triángulos como elementos importantes para el estudio del cambio. La segunda parte consistió en el estudio del cambio en la sucesión de triángulos que, donde los ángulos y las hipotenusas de los triángulos revelaban la naturaleza de variables polares (radio y ángulo).

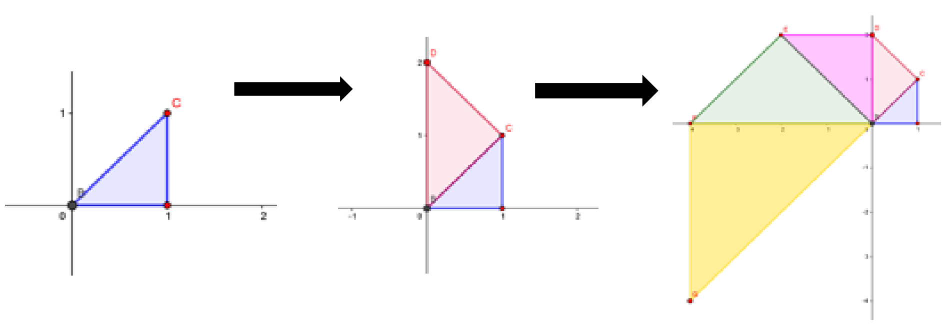


Figura 2. Construcción de la sucesión de triángulos (Tomado de Bonilla, 2018)

Al analizar la variación de la medida del radio y la naturaleza constante del ángulo, se les conducía al estudio de la progresión geométrica y la progresión aritmética, elementos clave para configurar la *covariación logarítmica*.

Finalmente, se pidió argumentar sobre la curva que envolvía a los puntos estudiados, con el fin de buscar la expresión algebraica que delineaba a la gráfica de la función.

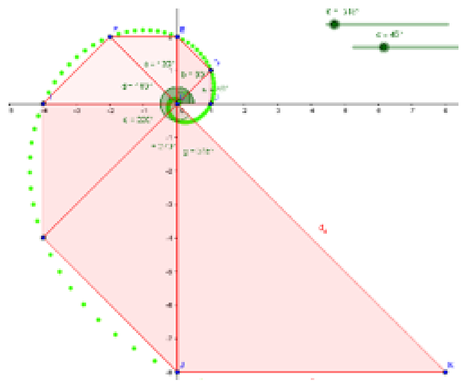


Figura 3. Espiral logarítmica de base 2 (Tomado de Bonilla, 2018)

De esta manera, previamente generamos una red de modelos donde se evidencia, mediante argumentos estudiantiles la covariación logarítmica polar.

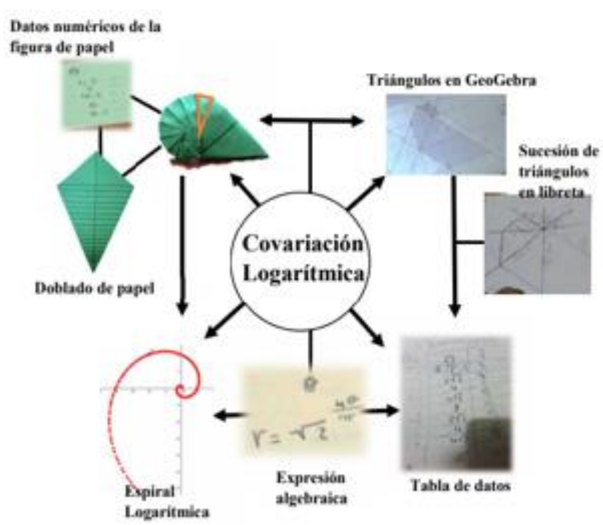


Figura 4. Red de modelos para evidenciar la covariación logarítmica en el plano polar. Tomado de (Bonilla, 2018).

Las intenciones fueron las de extender los estudios reportados en (Ferrari, 2008), quien mediante un estudio socioepistemológico propone a la función logarítmica desde distintos escenarios, a saber; desde la epistemología, su dimensión escolar, entre matemáticos educativos, con profesores y con estudiantes.

Ferrari (2008) identifica que lo logarítmico surge al seno de dos prácticas; una relativa al comercio cuando busca herramientas que *faciliten los cálculos* y la otra en la intención de *modelar* el movimiento de un objeto con cierta resistencia. Esto, se obtuvo al revisar los trabajos de Napier (1614) relativos a su tabla de logaritmos de 1616 con la explicación de su uso y las particularidades de su construcción, así también los aportes de Briggs (1620), para afinar su funcionamiento a fin de "facilitar los cálculos". Extiende el estudio de esta práctica mediante un análisis en otras épocas y lugares, como en las civilizaciones babilónicas, egipcias, chinas o hincas.

Las ideas de base de la práctica de *"modelar*", parten de una necesidad de matematización de la naturaleza y en particular del movimiento. Ferrari parte de la revisión de las primeras interpretaciones de Aristóteles, pasando por el medievo con Oresme, Bradwardine y el renacimiento con Galileo, para llegar a los trabajos de Huygens y Newton en la época moderna; estos últimos utilizan la idea del logaritmo para describir, entre otros fenómenos naturales, la caída de los cuerpos en medios resistentes.

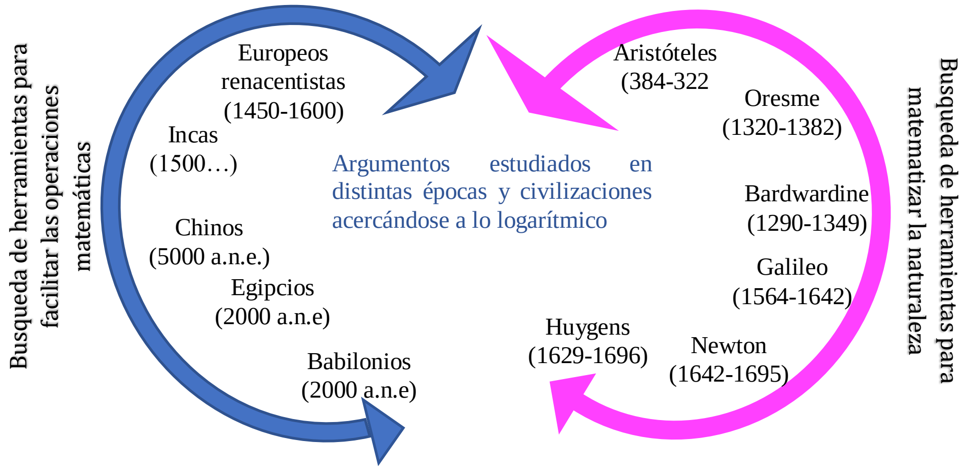


Figura 5. Resumen en la busqueda de lo logarítmico. Tomado de (Ferrari, 2008, p. I/V-134)

Como consecuencia de este análisis, confecciona una hipótesis epistemológica donde la incorporación explícita de la relación entre progresiones, una aritmética y una geométrica, a la que denomina *Covariación Logarítmica,* es la esencia misma de los logaritmos (Ferrari y Farfán, 2010). Las ideas covariacionales en este trabajo tiene base en los aportes didácticos de Confrey y Smith (1994, 1995) citado en (Ferrari, 2008), donde la noción covariación es explicada como aquella que vincula el movimiento entre valores sucesivos de una variable coordinándolo con un movimiento entre los correspondientes valores sucesivos de la otra variable. De esta manera al referirse a covariación, Ferrari considera una idea relevante, la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades.

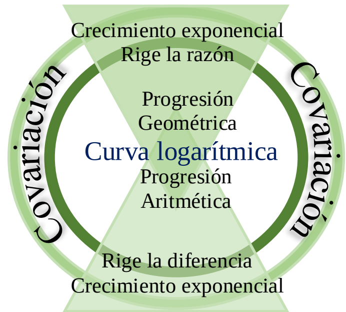


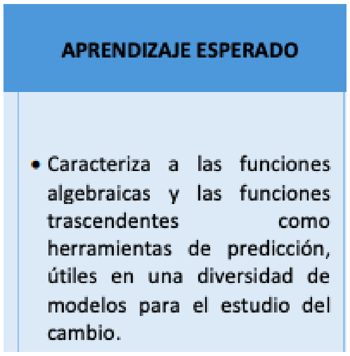
Figura 6. Covariación Logarítmica. Tomada de (Ferrari, 2008, p. I/II-46)

Con este escenario, se realizaron actividades puestas a alumnos de bachillerato para construir la idea de la función logaritmo. Se contemplaron tres momentos que establecían su estudio epistemológico; los logaritmos como *transformación*, los logaritmos como *modelizadores* y los logaritmos como *objetos teóricos*. En las conclusiones, después de analizar la producción de un participante de la puesta en escena, se menciona lo siguiente:

> "Efectivamente, la covariación logarítmica va más allá de poder describir una fórmula, involucra la posibilidad de movilizar argumentos como la regla de multiplicar sumando, o dividir restando, de aceptar la existencia de un exponente, de no ser sólo un juego de números discreto y muy arreglado para que las cosas funcionen. El intento de construir una red de modelos de Antonio nos acerca a lo que consideramos la antesala a un pensamiento covariacional logarítmico" (Ferrari, 2008, p. 597)

Las idas y venidas entre la red de modelos que se tejió en el diseño evidencian lo que llama Ferrari "la antesala del pensamiento logarítmico" que, desde su perspectiva, tiene como transversal la naturaleza explícita de la covariación logarítmica en el estudio de la función logarítmica.

En este análisis ya se anunciaba que se puede lograr el desarrollo de un tipo de pensamiento asociado a la idea logarítmica, donde la covariación juega un papel importante para su estudio como función, misma que Bonilla (2018) retoma en su diseño. Ahora bien, el logaritmo como objeto de enseñanza sobresale en el currículo escolar mexicano del nivel medio superior en el estudio de funciones, en particular en funciones transcendentes (Figura 7).


APRENDIZAJE ESPERADO

- Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.

Figura 7. Cuadro de contenidos de Cálculo Diferencial de la Media Superior (S.E.P., 2017, p. 16)

Pero, qué sucede previo a esto, ¿existirán elementos o argumentos que favorezcan el entendimiento de *lo logarítmico* antes de su presentación como función? Esta pregunta sirvió como detonante para iniciar la investigación. Como primera evidencia, identificamos que Ferrari (2008) coloca un apartado de una experiencia de divulgación científica donde cuenta cómo fue trabajar con niños, adolecentes y adultos fuera de un ambiente escolar, esto a través del "juego de las fichitas". El juego consistió en dos retos, el primero era completar una secuencia dada en unas fichas con la secuencia 4, 6, 8, 12, en la parte superior de la ficha y en la parte inferior por 2, 3,4, 6, es decir las fichas eran regida por la relación (arriba) $2x/x$ (abajo) (Figura 8) y la segunda regida por una relación 2^x / x.

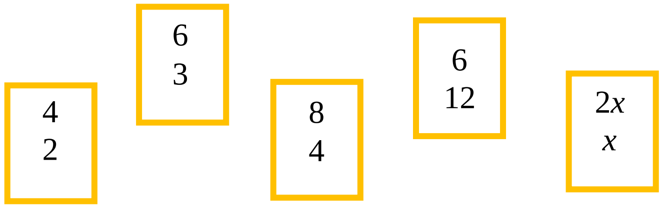


Figura 8. Ilustración de las fichas del "juego de las fichas"

En su puesta con niños de primaria reporta dos casos con dos niños; los nombres y edades eran: Hugo de 8 años, Gerardo de 10 años, Raymundo y Brenda de quienes no se menciona su edad, pero cursaban el sexto de primaria, es decir entre los 11 y 12 años.

Para el caso de Hugo a quien se le propone el juego de las fichas, pero con una modificación, se coloca una covariación lineal con las fichas que corresponden a la regla $2x\,/\,x$, donde logra descifrar las fichas que faltaban en el juego. Por otro lado, con niños de cuarto año, de edades de 9 años, descubre que algunos niños logran concluir el juego con el arreglo lineal, y más aún logran entender las fichas logarítmicas.

Para este último retoma el caso de Gerardo, quien, al proponer las fichas logarítmicas, que corresponde a la regla $2^x/\,x$, de forma rápida logra extender y construir más fichas, donde Ferrari menciona que su razonamiento estaba cercano al covariacional. Al preguntarle sobre la regla de construcción el escribe: "Tenemos que seguir una secuencia para poder doblar las cantidades poco a poco hasta llegar al final o se puede llegar hasta donde se pueda". Con esta idea logra también construir fichas a la izquierda, construyendo así las fichas 2/1 y 1/0. Gerardo sigue sorprendiendo, pues también logra entender la regla de multiplicar-sumando. Esto al ver que intentaba encontrar una ficha que correspondía al número 128, la entrevistadora interviene y se obtiene el siguiente diálogo.

> **Entrevistador**: mmm… ¿qué has encontrado?
> **Gerardo**: me da 128 pero abajo 10 y esa ficha no esta…
> **Entrevistador**: ¿Tenemos una ficha con 128?
> **Gerardo**: Sí… (busca entre las fichas) ésta…
> **Entrevistadora**: aja… a ver… hiciste 32 por 4 ¿verdad? Y te da 128, ¿qué pasa con los números de abajo?
> **Gerardo**: (luego de observar un instante) …se suman!!!! Cinco más dos es siete… entonces se multiplica arriba y se suma abajo.

De esta manera Gerardo logra identificar la regla y coloca en sus conclusiones sobre lo que aprendió del juego: “yo aprendí que las reglas de este juego son como podemos multiplicar y sumar para encontrar el resultado o en este caso solo sumando las cifras de abajo y podemos obtener el resultado o dividiendo y restando o viceversa”. Con esto se logra evidenciar las reglas que Ferrari proponía para este juego de fichas.

Al explorar con niños de sexto de primaria, Brenda y Raymundo, y dada su experiencia escolar, no fue complicado comenzar con las fichas logarítmicas donde descubren de forma rápida la sucesión que envuelve las fichas. Al preguntar sobre las reglas del juego, se encontraron varias respuestas, aquellas que estaban cercanas a un pensamiento variacional, como Brenda que menciona que la regla es “los números de arriba se duplican y los números de abajo van de 1 en 1”, o uno más cercano a la idea de escribir el número que sigue como en el conteo, como Raymundo que menciona “sumar abajo y multiplicar arriba” en particular abajo “es una secuencia”.

En el trabajo con estudiantes de secundaria se logra atrapar la idea que envuelve el juego y se intenta dar un paso más al pedir que hagan fichitas menores a 2/1. Donde por un momento algunos participantes rechazan la idea de un cero porque eso anularía el juego, en este caso no se logra la intención de extender las fichas después del 1/0.

En estos tres escenarios de exploración, podemos notar que en su momento lo que le interesaba a Ferrari era analizar la idea *covariacional* y la *regla de multiplicar-sumando*, mismas como proximidades de generar relaciones covariacionales y en particular la relación logarítmica. Ferrari concluye que estos datos estaban fuera del alcance a lo que se refería su investigación, y que se necesitarían métodos de análisis mas robustos para concluir cuestiones interesantes.

Estas conclusiones motivaron a que en esta investigación se continuara con la búsqueda de *lo logarítmico* en otros escenarios distintos a los ya reportados, es decir dados los estudios en dos niveles escolares diferentes (Ferrari, 2008; Bonilla, 2018), y con ciertos acercamientos a otros, nos cuestionamos si habrá referentes previos a estos grados, coligados con *lo logarítmico*.

2.1 Rumbo de la actual investigación

A partir de lo anterior, el rumbo de esta investigación se enmarca de la siguiente manera: En primer lugar, nos interesa robustecer la *problematización* alrededor de la noción logaritmo, desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2016) la cual se explica en el tercer capítulo. En esta problematización se tiene como objetivo entender los usos y razón de ser del conocimiento matemático estudiado. Esto se hace necesario por dos consideraciones; por un lado, están los trabajos que se gestaron después del estudio de Ferrari (2008), de tal manera que conviene revisar las nuevas preguntas y descubrimientos alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la noción logaritmo, y, por otro lado, la teoría donde se consolida esta investigación ha tenido un proceso de evolución organizativa, de donde tomaremos algunos constructos importantes para esta investigación.

En segundo lugar, nos interesa buscar elementos que robustezcan la caracterización de *lo logarítmico.* Si bien Ferrari pone a consideración ciertos elementos que dan carácter a esta noción, se considera que aún hay elementos que pueden dar más extensión a esta caracterización. Por lo tanto, nos importa que a partir de la revisión de la literatura encontremos componentes interesantes de ser estudiados. Además, debido al estudio de Ferrari, podemos dar cuenta que en edades tempranas quizás existan factores que nos inciten a ver *lo logarítmico* en las formas de razonamiento de los más pequeños. En este sentido, también va a interesar si se ha discutido este tema en edades tempranas. El rumbo de esta investigación se resume en el siguiente esquema (Figura 9).

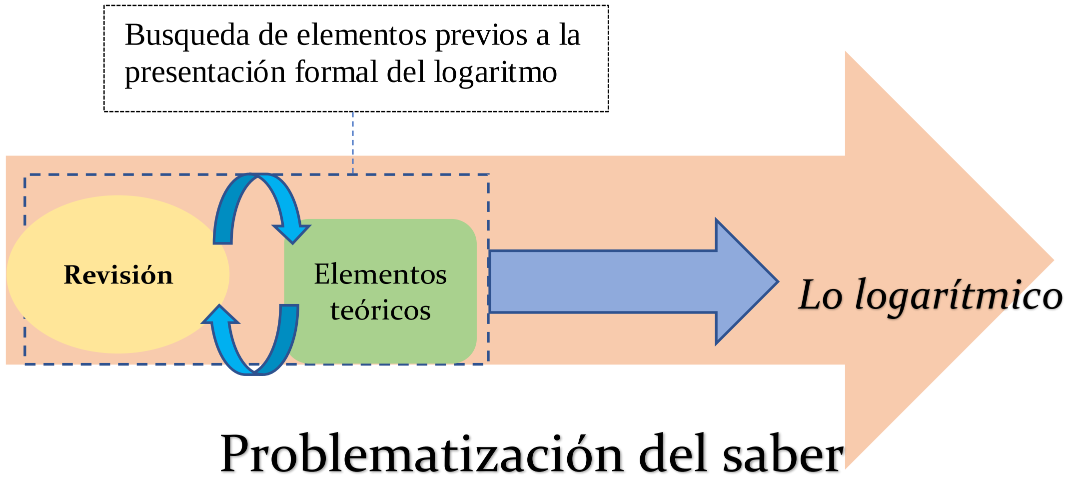


Figura 9. Esquema general del rumbo de la investigación

Por lo anterior, en el segundo capítulo se muestra los antecedentes acerca del logaritmo, de donde se toma como decisión metodológica revisar todo lo producido después de Ferrari (2008). Después, como consecuencia de la revisión, se explica la problemática que emerge a partir de esta. En el capítulo 3 se muestra los elementos de la teoría que enmarca esta investigación, así como los métodos asociados para resolver el problema de investigación.

Se continua en el capítulo 4 mostrando los resultados de una puesta en escena de actividades exploratorias derivadas de la revisión de la literatura. Finalmente, mostramos las conclusiones de este trabajo, así como las prospectivas que deja hasta el momento la investigación.

2. CAPÍTULO II. ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

2.1 Antecedentes

En este segundo capítulo se relatan dos momentos importantes de la investigación: el primero, la revisión de la bibliografía que concierne a los estudios sobre la enseñanza de la noción logaritmo y su estado actual. En esta parte, se analizan los trabajos encontrados con buscadores académicos para las palabras (en español e inglés); logaritmo, función logaritmo, progresión geométrica + aritmética, pensamiento + logaritmo y escala logarítmica. De los cuales se clasificaron y se reportan en dos rubros; aportes a la didáctica de los logaritmos e ideas relacionadas a su entendimiento desde la covariación. A partir de esta búsqueda, se encontraron otros trabajos relacionados al logaritmo, donde éste se estudia como un emergente que da significados a resultados en la búsqueda de las formas del pensamiento humano, esto desde otras disciplinas como la neurociencia o las ciencias cognitivas.

En el segundo momento y como consecuencia de la revisión, se da el planteamiento de la problemática que busca atender esta investigación. En este apartado se hace un análisis sobre lo que se encontró en la literatura que puede dar elementos sobre los argumentos ligados a *lo logarítmico* que están previos a su enseñanza formal, donde la idea de estimar toma un rol importante para esta investigación.

2.1.1 Estudios sobre la enseñanza de los logaritmos

El estudio de la noción logaritmo sigue siendo un tema vigente en la disciplina, pero con poca producción, esto se puede notar por la escasa literatura al indagar en buscadores académicos. Para la revisión de los antecedentes sobre los logaritmos, como se mencionó anteriormente, se tomó la decisión metodológica de revisar todas las producciones después del trabajo que realizó Ferrari (2008).

2.1.1.1 Sobre la función logaritmo

Es común encontrar en la literatura aquellos trabajos que tratan de dar significado del logaritmo a través de la presentación de su forma conceptual (Almoloud, 2011; Weber, 2019), al identificar los errores que comenten los alumnos al operar con ellos (Velázquez et al., 2017) o mirando como el profesor presenta la idea en su salón de clases (Díaz y Poblete, 2018). En las propuestas didácticas encontramos que al dar significado a la función logaritmo este se hace a través de la función exponencial. Por ejemplo, Leivas y Carneiro (2010) hacen una sugerencia didáctica para la enseñanza y la construcción de la función logaritmo, a partir de una íntima relación entre la imaginación, la capacidad espacial, los diagramas y la representación gráfica de la función exponencial. Estos autores construyen la función logaritmo con argumentos de la función inversa, usan el eje de simetría para construir punto a punto la función logarítmica a partir de la función exponencial, finalizan la construcción con la presentación del algoritmo $y = a^x \leftrightarrow \log_a y = x$, una expresión muy común para definir el logaritmo en los libros de texto.

Por su parte, Vargas et al. (2018), analizan la práctica de un profesor con relación a la enseñanza de los logaritmos, donde a través de lo que ellos llaman mecanismos de interiorización de acciones encontraron cómo los profesores introducen este tema. En particular un profesor toma un problema donde la incógnita es el exponente y lo lleva a la interpretación del logaritmo como el número al que debo de elevar una cantidad para obtener la potencia, al final de la clase el profesor remarca; "logaritmo en base dos de ocho es tres porque dos elevado a la tres es ocho. Entonces que no se les olvide cuando nos digan logaritmo de cualquier cosa, es buscar el exponente" (Vargas et al., 2018, p. 1598), de esta manera se evidencia la idea que tiene el profesor sobre el logaritmo, que es buscar el exponente de algo, un argumento que no ha desaparecido del aula de clases. En esta misma dirección, Esper y Juárez (2017) proponen una planeación de clase para la función exponencial y logaritmo con elementos que plantea la "Enseñanza para la comprensión", esto se basa principalmente con el estudio de gráficas, expresiones algebraicas y datos numéricos, sin profundizar sobre la propia naturaleza de ambas funciones, dejándolas como dependientes.

Estos trabajos tratan de mostrar la relación entre la función exponencial y la logarítmica, que a decir verdad no son ajenas, sin embargo, el considerarla dependientes una de la otra inhibe la propia naturaleza de ambas funciones, por tanto, su significación.

Por otro lado, se encuentran aportes donde tratan de mostrar la idea de función logaritmo desde la búsqueda de un área, por ejemplo, Dogan et al. (2012) quienes, con ayuda de dos softwares de geometría dinámica, proponen una serie de actividades donde calculan el área de la función $f(x) = 1/x$ para obtener el logaritmo natural, con esta misma idea propone descubrir las propiedades de los logaritmos.

Por su parte, Gacharná (2015) hace una propuesta didáctica para estudiantes de 14 años, donde promueve las relaciones de progresiones que conforman al logaritmo. En la primera actividad propone "explorar tablas", una que corresponda a una progresión geométrica y otra a una progresión aritmética, en la segunda actividad llamada “Multiplicación egipcia” se plantea la regla de suma–multiplicación y la de sustracción–división, la tercera parte es la exploración con situaciones cotidianas, tratando de abarcar la idea de lo discreto a lo continuo, tomando al tiempo como la variable dependiente es decir la progresión aritmética, los autores comentan que de esta manera se intenta cambiar la idea tradicional de enseñar la función logaritmo.

Desde la perspectiva de la matemática realista, Anggraini et al. (2019) nos mencionan que la idea de la función logaritmo se puede construir con el entendimiento de dos elementos claves; el contexto de un crecimiento exponencial y los gráficos. Bajo esta hipótesis presentan como un contexto realista el caso del crecimiento del “Euglena Viridis” (una eucariota que generalmente estudiantes de décimo grado conocen), donde se promueve el entendimiento de la idea logarítmica. En la propuesta se marca una trayectoria hipotética de aprendizaje, donde los estudiantes observaban la reproducción de esta *eucariota* la cual se multiplica al dividirse en dos nuevos individuos con el mismo progenitor en cierto tiempo. Al analizar la gráfica del crecimiento de este ser vivo se pide en las actividades obtener la expresión algebraica que representa la gráfica, después se pide que calculen el área en cierto tiempo, con el fin que el logaritmo se introduzca como el tiempo que tiene que transcurrir para obtener ciertas áreas. En el desarrollo de estas actividades se obtiene a la función logaritmo y se comparan ambas gráficas, exponencial-logarítmico, concluyendo sobre el logaritmo como la función inversa de la función exponencial.

Estos trabajos, marcan una tendencia en querer mostrar a la función logaritmo distinta del discurso clásico de su enseñanza. En su interés por esto, proponen ideas didácticas para su estudio desde diferentes perspectivas como área bajo la curva o ideas relacionadas en el estudio de progresiones y el crecimiento de una planta. Si bien, estos aportes son importantes, se considera que faltan elementos que propicien un entendimiento sin dependencia de otros elementos como en el caso de la función inversa de la exponencial, además que la mayoría de estos trabajos reincide en finalizar con la idea algorítmica de la función logaritmo, en donde el simple hecho de su escritura ya representa una complejidad para el alumno y más aún su significado.

2.1.1.2 El logaritmo como covariación

Dentro de la revisión encontramos aquellos trabajos que promueven la idea covariacional como elemento necesario para fenómenos con comportamientos logarítmicos o exponenciales vista desde dos progresiones. Por ejemplo, Ellis et al. (2015) revisan esta idea con un experimento de enseñanza que realizan con estudiantes de bachillerato, donde exploran el crecimiento de un cactus (Figura 10), tomando como variables la altura conforme pasa el tiempo. De esto reportan tres cambios conceptuales en los estudiantes; el primero es la coordinación del crecimiento multiplicativo, y (altura de la planta), con el crecimiento aditivo, x (el tiempo), el segundo cambio es, la coordinación del crecimiento x con y a la coordinación de las relaciones constantes entre y_2 y y_1 con incrementos aditivos en x durante períodos cortos de tiempo a una semana. El tercer momento es de las relaciones constantes a la coordinación dentro de las unidades para los correspondientes intervalos de tiempo $(x_2 - x_1) < 1$.

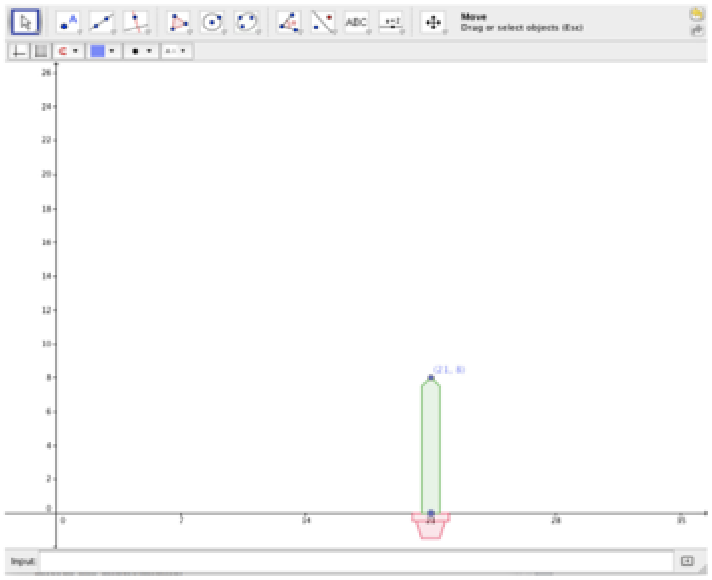


Figura 10. Contexto usados por Ellis et al. (2015)

Con lo anterior en esta investigación los autores sugieren que el énfasis en la coordinación del crecimiento multiplicativo y aditivo para la exponencial puede apoyar las habilidades de los estudiantes para moverse flexiblemente entre las vistas de covariación y correspondencia de la función.

En este mismo sentido Ellis et al. (2016) dan tres etapas para el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje del crecimiento exponencial; 1) razonamiento pre-funcional, 2) ver la covariación y 3) ver la correspondencia. De esta manera proponen que: ”situar una exploración del crecimiento exponencial en un escenario en el que los estudiantes pueden manipular continuamente cantidades covariantes en un entorno dinámico puede fomentar su capacidad para coordinar el crecimiento multiplicativo en *y* con el crecimiento aditivo en *x*, un elemento clave para comprender la naturaleza del crecimiento exponencial[1].” (Ellis et al., 2016, p. 176).

[1] “…situating an exploration of exponential growth in a scenario in which students can manipulate continuously covarying quantities in a dynamic environment can foster their ability to coordinate multiplicative growth in *y*

Ambas investigaciones anteriores están integradas hacia el crecimiento exponencial como un elemento clave para promover la idea covariacional, con el fin de estudiar la función exponencial y logarítmica.

Siguiendo una similar dirección, Ferrari-Escolá et al. (2017) llaman covariación logarítmico-exponencial a la coexistencia de una variación regida por razones constantes y otra por diferencias constantes. Esto lo hacen evidente cuando analizan el razonamiento covariacional de estudiantes de bachillerato, al proponer experimentos de enseñanza relacionados con la búsqueda de patrones. Los autores mencionan que este experimento logró que los alumnos establecieran las reglas de multiplicar-sumando y dividir-restando, misma como un argumento fuerte para hablar de la relación entre dos progresiones.

Estos trabajos, muestran la idea de cómo a través de identificar comportamientos de la relación de dos variables como el crecimiento de una planta respecto del tiempo o en la búsqueda de patrones, se pueden lograr acercar a conceptos del tipo exponencial o logarítmico.

Otro trabajo interesante de analizar es el de Gruver (2018), quién acepta la importancia de desarrollar la idea covariacional. Sin embargo, él se preocupa por la idea de continuidad y propone una actividad donde el estudio de la covariación no solo se quede en la idea discreta sino de un paso hacia la continuidad. Gruver observa las prácticas matemáticas que emergen en el aula cuando se les pide a los estudiantes hacer una línea del tiempo sobre la historia de la tierra, con un intervalo de 15 mil millones

---

with additive growth in *x*, a key element in understanding the nature of exponential growth" (Ellis et al., 2016, p. 176).

de años atrás hasta el día de hoy y marcar sobre la línea los eventos más relevantes durante ese tiempo. Este trabajo se dejó en grupo y al final de la clase se presentaron 3 enfoques diferentes de solución; el primero es una recta en forma lineal, la cuál se creó de partir la recta en mitades, es decir entre 15 mil millones y el ahora, colocando a la mitad 7500 y así sucesivamente las demás mitades de mitades, el segundo enfoque también tenía naturaleza lineal pero la forma de construir era distinta, esta se construyó haciendo grupos de eventos relevantes en la historia con diferentes escalas, que después era unidos para formar una sola línea en una sola escala, este fue nombrado “enfoque de varios trozos”. El último fue diferente a los otros dos, esta consiste en una línea de número exponencial donde se trazan sucesivamente potencias de 10, donde el espacio entre cada potencia medió una pulgada, el cuál fue obtenido como el primer enfoque, haciendo mitades de mitades (Figura 11).

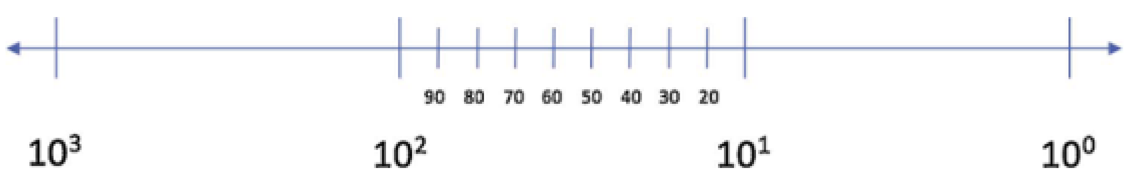


Figura 11. Recreación del autor para mostrar la construcción de la línea del enfoque 3 (Gruver, 2018, p.6)

El autor muestra que logra identificar cinco prácticas matemáticas (Gruver, 2018) las cuales están acompañadas de lo que llaman, las formas normativas del razonamiento, que podemos entender como las acciones o argumentos expresados por los alumnos.

0) Revisión: Trata de aspectos matemáticos que los alumnos tenían que revisar, pero no tenían nada que ver con los exponenciales y logaritmos. Por ejemplo,

cuestiones sobre lo que es una línea del tiempo o recordar como es la conversión entre una notación estándar y una científica, o revisar que significa una potencia con fracción.

1) Desarrollar la estructura macro-multiplicativa: Se refiere a que en una línea numérica exponencial existe una secuencia geométrica entre las marcas etiquetadas. Por ejemplo, saber que el termino anterior en una secuencia se multiplica por 10 para obtener el siguiente o encontrar factores sobre varios segmentos.
2) Subdivisión de los segmentos: Se refiere a entender que hay una correspondencia uno a uno entre cómo se divide el segmento y cómo se divide el exponente. Esto era cuando dividían los segmentos y tenían que preservar la relación multiplicativa dentro de los segmentos.
3) Encontrar exponentes fraccionales: Es sobre los métodos que utilizan los estudiantes para colocar escritos en la forma $10^{\frac{a}{b}}$. Esto sucede cuando subdividen las extensiones que abarcan múltiples segmentos.
4) Razonar sobre las sucesiones: Es el establecimiento de una definición para las sucesiones aditivas y multiplicativas. Esto se daba al definir que una "sucesión multiplicativa" tiene relacionada un múltiplo constante, además que se introduce otra tarea para identificar una "sucesión aditiva" como aquella relacionada con una suma constante.
5) Interpretar logaritmos: Tratar de dar sentido e interpretar los logaritmos. Esto al discutir las dos actividades propuestas, destacando finalmente a los logaritmos como exponentes.

Finalmente, concluye que con esto se ha contribuido a la literatura de la enseñanza y aprendizaje de los logaritmos en tanto que fue un análisis social que documenta el desarrollo colectivo de un aula.

En particular, este trabajo muestra la dificultad de hacer un cambio de una relación lineal a una “exponencial”, por ejemplo, cuando se piden etiquetar una línea recta, la primera reacción es hacerlo de forma lineal buscando que cada espacio entre cada número tenga la misma distancia, pero cuando los datos que tenemos que acomodar sobre la línea son del tipo; “presentar 15 mil millones de años de historia”, conlleva a pensar en otra forma de comunicarla, donde la escala logarítmica puede jugar un rol importante, pero esta no es la primera estrategia de los individuos. Esto lo podemos acuñar en las técnicas que usualmente se enseñan en la escuela, como dividir a la mitad y obtener mitades de mitades, como algo rápido y eficiente.

Continuando con la indagación se encontró un trabajo muy reciente de Kuper y Carlson (2020) quienes ponen su atención a la idea de desarrollar en los estudiantes un pensamiento al que lo llaman “Formas fundacionales de pensar[2]” para entender la idea del logaritmo. Esta idea la proponen desde el constructivismo radical, que en términos generales menciona que el conocimiento se construye en la mente del individuo por tanto nadie puede acceder a él. Estos autores hacen un análisis conceptual para describir las operaciones mentales de los estudiantes, con ayuda de las preguntas “por qué y cómo lo hace”. Con esto propone la introducción de un tipo de lenguaje al que denominan “Tuplicación[3]” como precursor de la construcción de lo exponencial que

[2] Foundational ways of thinking.
[3] Tupling

tendrá como consecuencia el logaritmo. La Tabla 1muestra la comprensión deseable, según estos autores, que el estudiante debería enfrentar para la idea del logaritmo.

Tabla 1. Taxonomía de la idea logaritmo

Orden hipotético de instrucción	Tópicos o ideas fundacionales para aprender la idea de logaritmo.	Comprensión del estudiante deseada
1	La división como medida	Para medir un valor de la cantidad A en términos de una cantidad de valor B, escribimos $\frac{Valor\ de\ la\ cantidad\ A}{Valor\ de\ la\ cantidad\ B}$. Si $\frac{Valor\ de\ la\ cantidad\ A}{Valor\ de\ la\ cantidad\ B} = m$, Decimos que la cantidad A es m veces mayor que la cantidad B.
2	n —unidad factor de crecimiento	Cuando se coordinan los valores de dos cantidades, si el valor de la primera cantidad aumenta en n-unidades mientras que el siguiente valor de la segunda cantidad es m veces mayor que su valor actual, entonces el factor de crecimiento de n unidades es m
3a	Para m *-tuplas* (verbo)	Si el valor de una cantidad llega a ser m veces más grande, decimos que el valor de la cantidad m -tupla
3b	*m-tuplicando* (sustantivo)	Un m -tupling es el evento en el que el valor de una cantidad se convierte en m veces mayor
4	*m-tupling* periodo	Un m-tupling periodo es la cantidad de cambio en la cantidad independiente de una función exponencial necesaria para que la cantidad dependiente de la función exponencial se convierta en m veces mayor.
5	Crecimiento exponencial	Cuando se relacionan dos cantidades continuas, la Cantidad A y la Cantidad B, si por cambios iguales en la Cantidad A, la Cantidad B crece por un factor constante, entonces las dos cantidades se relacionan exponencialmente
6a	Exponente (en un valor b)	El número de períodos *b-tuplicación* transcurridos. Escrito b^x donde x es el número de periodos b-tuplicación transcurridos.
6b	b^x. Un factor de crecimiento	El factor por el cual una cantidad crecerá a lo largo de x, b-tupling periodos es b^x.
7	Conversión del factor de crecimiento.	Si $c^1 = b^x$, entonces un periodo de c-tupling es el mismo que x periodos de b-tupling.

8a	Factores de crecimiento equivalentes y la función exponencial.	Suponga los dos puntos $(0, a)$ y $(x, f(x))$ que satisfacen una relación exponencial. También supongamos que b representa el factor unidad de crecimiento. Entonces para cualquier cambio de x en la cantidad independiente, la cantidad independiente se convertirá en $\frac{f(x)}{a}$ o b^{x-a} veces más grande. Por lo tanto, $\frac{f(x)}{a} = b^{x-a}$ o $f(x) = ab^{x}$. Esta función relaciona dos cantidades que varían de tal manera que cada valor de x determina exactamente un valor de $f(x)$.
8b	La notación logarítmica y la función logarítmica	$\log_b x$, representa el número de periodos de b-tuplicaciones que se necesitan (el valor inicial de una función exponencial) para obtener una duplicación-x. Esta notación describe una relación covariacional entre una tuplicación x y el número de períodos de tuplicación b necesarios para experimentar una tuplicación-x ($log_b\, x$). Estas dos cantidades varían de tal manera que cada valor de la duplicación x determina exactamente un valor del número de períodos de duplicación b necesarios para experimentar una duplicación x.

Fuente: Traducción propia desde Kuper y Carlson (2020, p. 5)

Con estas ideas, los autores construyen un experimento de enseñanza sobre el crecimiento de un cactus con la ayuda de un software, donde el objetivo es ayudar al estudiante a entender a los logaritmos con la conceptualización de cantidades, sus relaciones y como varían en conjunto. En sus conclusiones mencionan que los estudiantes se benefician al revisar las ideas de duplicar, triplicar, en general "b-*tuplicar*" y para un período "b-*tuplicación*", a lo largo de una intervención instructiva en apoyo a la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas y cómo se relacionan.

Como se puede notar, la idea covariacional es un aporte genuino que ha dado buenos resultados para la comprensión de la idea función, en particular de la función exponencial y logaritmo. De hecho, Ferrari (2008), hace explicita a la covariación como elementos necesarios para entender a la función logaritmo.

La covariación permite describir la relación entre dos variables al estudiar la forma en cómo cambia una cuando cambia la otra, y parece ser que su único objeto de estudio es la idea de función. Desde nuestra perspectiva *lo logarítmico* va más allá de solo su estudio como función. Por eso al aludir a *lo logarítmico*, se hace referencia a su construcción social, a lo que estaba asociado a él en su emergencia, a la relación de su uso y de los fenómenos en donde se adhiere para dar significado.

Lo que identificamos hasta este momento, tiene que ver con los *comportamientos logarítmicos*, que acuñamos al estudio de dos secuencias, una regida por la suma y otra por la multiplicación. A demás, basta con observar el análisis de Gruver (2018) quién implícitamente nos menciona sobre la complejidad de un cambio de relación lineal a uno de relación logarítmica, mismas ideas que tiene que ver con la relación del comportamiento de dos secuencias, y para concretar Kuper y Carlson (2020) nos mencionan sobre una necesidad de promover la idea de la relación covariacional a través de razonamientos fundacionales para la comprensión del logaritmo. Pero ¿los *comportamientos logarítmicos* solo están en el estudio explícito de función logarítmica? ¿cómo podemos identificarlos de otra manera? Estas preguntas surgieron después de encontrar trabajos, donde la idea logarítmica parece transcender más allá de la idea escolar, apareciendo como un concepto que ayuda a explicar fenómenos de naturaleza humana y relacionadas con el propio pensamiento humano.

2.1.2 La emergencia de la idea logarítmica desde otras perspectivas de estudio

En la búsqueda del estado actual de lo logarítmico, se encontraron algunos trabajos en donde pareciera ser que la idea logarítmica es un objeto omnipresente en la vida de los seres humanos. Uno de los primeros trabajos revisados fue el de Stanislas Dahaene, un neurocientífico francés, de profesión matemático, quien dentro de su campo estudia la idea de número a través de la forma en que las personas estiman cantidades, sus resultados han mostrado que el cerebro de las personas parece obedecer a una *regla logarítmica de estimación* (escala logarítmica), esto al comparar los resultados de niños y adultos al momento de estimar cantidades sobre una línea numérica (Dehaene, 2016).

Con estas afirmaciones se revisaron algunas de sus obras, una en particular del cual derivan varios de sus trabajos, es su libro "The number sense" (El sentido numérico) y su versión en español "El cerebro matemático" (Dehaene, 2016), donde narra cómo ha sido la evolución biológica del cerebro a la par de la cultura, la cual por un lado la evolución biológica ha sido muy lenta mientras que por otro, la cultura ha evolucionado más rápido, trayendo como consecuencia que el conocimiento no se deba a la evolución de nuestro cerebro, sino a que la cultura ha logrado acomodarlo (etiquetarlo) a la estructura de la arquitectura cerebral. A esto se estarían refiriendo Radford y André (2009) cuando escribían que "un cerebro sano no es una condición facilitadora de aprendizaje… para adquirir en la escuela los conocimientos que la humanidad ha elaborado durante milenios se requiere más que un buen cerebro: se necesita cultura" (p. 243).

Dehaene en su profesión de matemático, propone un modelo de "representación numérica mental" la cual llama *log-gaussian model* (Figura 12. Modelo Log-Gaussian. Tomado de (Dehaene, 2007, p.529)), el cual postula que cada numerosidad de algún conjunto se representa internamente por una ruidosa distribución de activación en lo que llama una "línea numérica mental". El término numerosidad lo utiliza para referirse a la propiedad cardinal de los conjuntos y para distinguirla de los numerales dependientes de la cultura o de los símbolos numéricos como la palabra "tres".

Matemáticamente el modelo significa que, la numerosidad de un conjunto de n puntos se representa internamente por una variable aleatoria Gausiana X (el representante interno de n) con mediana $q(n)$ y desviación estándar $w(n)$. El autor menciona que hay varias opciones para $q(n)$ y $w(n)$, ya que estas están implicadas en una fuerte observación empírica y además están asociadas a otro tipo de cuestiones como la ley de Weber[4], la cual establece que el cambio numérico mínimo que puede discriminarse aumenta en proporción directa a la magnitud de las numerosidades involucradas. Un postulado simple para esto es que la variabilidad interna es la misma para todos los números representados, es decir $w(n)=w$, para que la ley de Weber se mantenga, la variable interna tiene que variar entonces como el logaritmo de la numeración representada en n, es decir, $q(n)=Log(n)$. Para este caso, la distribución de probabilidad que especifica la probabilidad de que una cifra n está representada, en un momento dado, por un valor determinado x de la variable aleatoria interna X viene dada por:

[4] Esta ley se relaciona con la percepción humana, más especificamente entre la relación de un cambio real en un estimulo fisico y el cambio percibido.Para otro ejemplo veáse página 91 de este trabajo.

$$p(X \in [x, x+dx]) = G\left(\frac{x - Log(n)}{w}\right)dx = \frac{e^{-\frac{(x-Log(n))^2}{2w^2}}}{\sqrt{2\pi}w}dx$$

Figura 12. Modelo Log-Gaussian. Tomado de (Dehaene, 2007, p.529)

Donde G es la curva normal. **Observación**: En este modelo vamos a entender que la notación que usa el autor se refiere en primera instancia a la función acumulativa de distribución $G\left(\frac{x-Log(n)}{w}\right)dx$, para después escribirla en su forma de función de densidad de probabilidad $\frac{e^{-\frac{(x-Log(n))^2}{2w^2}}}{\sqrt{2\pi}w}dx$, para ambas expresiones el autor multiplica por un dx, en su explicación en el artículo usa la palabra "likelihood", que según, la mejor traducción al español, se refiere a encontrar la "mejor distribución de los datos dado un valor particular", es decir, la variación que se puede hacer en dx para encontrar la "mejor distribución" entre el intervalo $[x, x+dx]$.

En un ejemplo, este modelo básicamente significa que para la representación mental de un conjunto (por ejemplo, de puntos) va a ser representada, en una línea numérica mental, por valores que tienden a agruparse a un lugar correspondiente a *Log* (*n*). Supongamos que tenemos el siguiente conjunto de puntos (Figura 13) del cual nos piden que en un tiempo corto estimemos la cantidad de puntos que hay (es decir su numerosidad) y contestamos que son 63, el modelo dice que existe una probabilidad de que la ubicación de ese número sobre "la línea recta mental" sea representada en la posición *Log* (63).

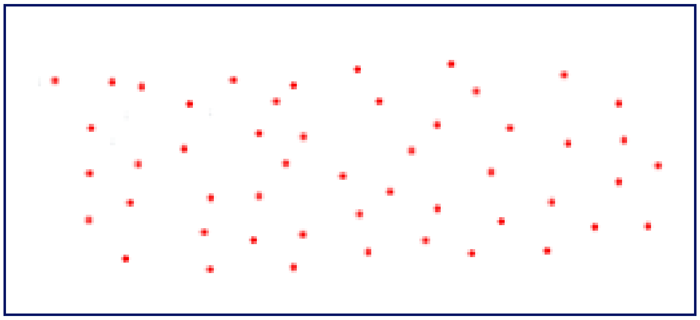


Figura 13. Conjunto de puntos

El autor complementa estas ideas extendiendo la teoría con pruebas neuronales que validan el modelo matemático. Este descubrimiento nos hizo reflexionar sobre la propia naturaleza del pensamiento y sobre las actividades asociadas a esta relación logarítmica que menciona este autor, así que se continuó con la exploración.

En esta misma dirección, pero desde las ciencias cognitivas, Siegler y Both (2004) hacen un estudio con niños de preescolar, primero y segundo año de primaria, donde la idea básica del experimento que hacen con ellos era pedirles ubicar una cantidad, representada en símbolo arábigo, en un tiempo corto (5 segundos) sobre una línea recta con etiqueta a los extremos entre 0 y 100. Los resultados muestran que, al graficar sus resultados de la forma "cantidad estimada" vs "cantidad a estimar" (tomando como referencia las medianas de todos los niños), en los niños de preescolar y primer año, la tendencia en sus estimaciones se ajustaba a una curva logarítmica y en los niños de segundo año a una línea recta (Figura 14).

Este fenómeno podría ser causado, dicen los autores, por la poca familiaridad que tenían los niños más pequeños con el número 100, dado que este mismo fenómeno sucedía con niños de grado más altos (tercero, cuarto y quinto), al presentarles la misma actividad, pero con la diferencia que el rango era una línea recta entre 0 y 1000

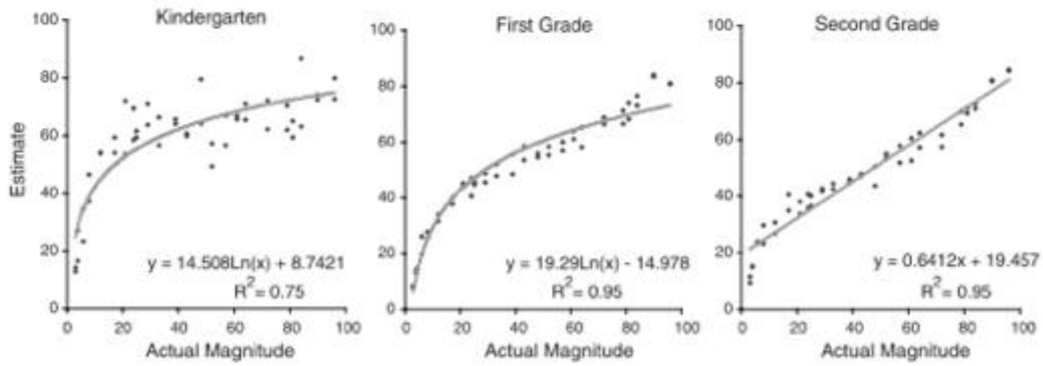


Figura 14. Resultados al graficar la mediana de las estimaciones de los niños sobre la línea recta (Siegler y Both, 2004, p.433)

Estas mismas ideas fueron desarrolladas por Dehaene et al. (2008), quienes realizan un estudio con una tribu de las amazonas llamada "Mundurukus", con ellos aplican las actividades de estimar, pero en este caso, lo hacen con conjuntos de puntos entre 1 y 10, dado que en la lengua de esta tribu su conteo llegaba hasta tres, después de ese número se referían a todo lo siguiente como "mucho". Para el estudio usaron un dispositivo móvil que mostraba una línea recta con un punto del lado izquierdo y diez puntos del lado derecho (Figura 15) y pedían a las personas que estimaran un conjunto de puntos sobre esa línea.

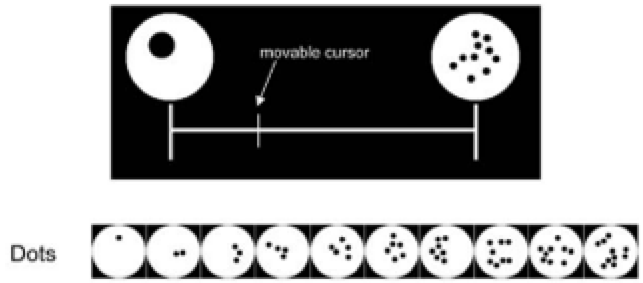


Figura 15. Elementos usados para el experimento (Dehaene et al., 2008, p. 1218)

Los resultados de estos investigadores muestran que los Mundurukus al igual que los niños, sus estimaciones se ajustaban más a una curva logarítmica que a una lineal. El mismo experimento fue hecho con ciudadanos norteamericanos que, al contrario, sus datos en la estimación se ajusto a una línea recta (Figura 16).

En este trabajo los autores muestran que el fenómeno de "la regla logarítmica" no solo sucede con niños a temprana edad. El contraste en estos experimentos se refiere a dos comunidades de adultos con diferentes contextos, diferentes idiomas y diferentes sistemas de numeración. Por un lado, en la tribu de las amazonas predomina y quizás solo el significado hasta el número tres, esto quiere decir que más allá de ese número no hay una forma de representación o que sea útil para su vida diaria, y por el otro lado, las personas de ciudad que han sido formadas bajo un currículo escolar donde predomina más el uso de los números, les permite tener una idea formal de número y estimar su posición "correcta" en la recta, es decir manteniendo distancias iguales entre cada número, logrando así una distribución lineal.

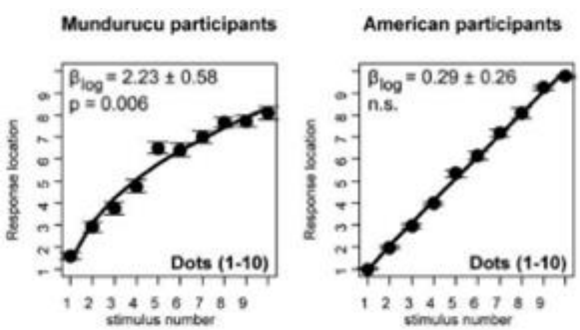


Figura 16. Ajuste de curvas de las estimaciones de los Mundurucus y ciudadanos norteramericanos (Dehaene et al., 2008)

Estas ideas se siguieron desarrollando, pero con variaciones en las actividades de estimar. Por ejemplo, Siegler y Opfer (2003) colocan etiquetas de algunos números sobre la recta para conocer como influye tener una referencia numérica al momento de estimar, de donde concluye que los niños conocen y utilizan múltiples representaciones de cantidades numéricas, además que en los propios números enteros se puede obtener un patrón logarítmico o lineal de estimaciones dependiendo del contexto numérico. Por su parte, Ebersbach et al. (2015) toma como referencia la familiaridad de los participantes con los rangos de números a estimar. Gordon (2004) hace un estudio con gente de las amazonas, pero haciendo énfasis en la importancia del lenguaje para una estimación correcta. Por último, Dotan y Dehaene (2016) realizan un trabajo de doble actividad, es decir, que hacen que las personas estimen cantidades a la par de estar etiquetando colores que se muestran en un dispositivo electrónico, evidenciando que, aún en los adultos tienden a estimar acercándose a una regla logarítmica.

Estos trabajos revisados nos acercan a la idea de *comportamiento logarítmico* sin la necesidad explicita del estudio de dos variables, es decir, que las personas que hacían una estimación de acuerdo con la regla logarítmica no estaban razonando sobre la relación entre la cantidad a estimar y la posición sobre la recta. Sino más bien se guiaban de una percepción entre lo que significa la cantidad y su representación sobre la recta.

En este sentido encontramos que, este fenómeno, de la regla logarítmica, no sucede en cualquier tipo de estimación de cantidades, pues se requiere que la persona no tenga un sentido exacto de lo que representa dicha cantidad. Como menciona Siegler y Booth (2004) este fenómeno puede suceder por ejemplo en adultos cuando se les pide estimar sobre un intervalo donde la cantidad le sea poco familiar, por ejemplo estimar un número entre 0 y 100,000,000. De hecho, Landy, Charlesworth y Ottmar (2017) muestran los resultados que obtienen al proponer a estudiantes universitarios que estimen en un intervalo entre 1000 y 100, 000, 000, donde el comportamiento de los resultados responde a una escala logarítmica (Figura 17).

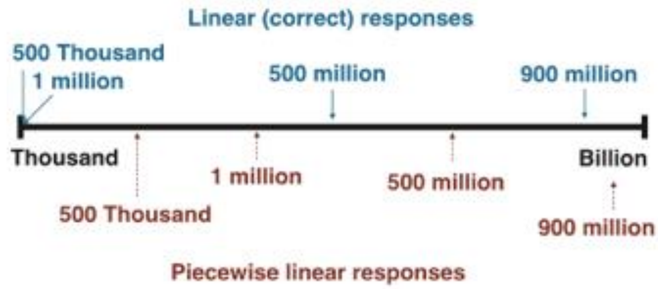


Figura 17. Posiciones correctas e incorrectas que colocan estudiantes universitarios en una línea numérica entre mil y cien millones (Landy et al., 2017, p.4)

De estos trabajos se identifican algunos elementos importantes, primero se puede inferir que uno de los intereses de estos estudios está arraigado a la idea de representación de cantidades pues de esta manera se aproximan a la idea abstracta de número, donde de los resultados obtenidos la idea del logaritmo parece jugar un rol interesante de estudio.

Ahora bien, también se identifica que la idea asociada a este fenómeno es aquella de estimar, la cual en estos estudios se toman como una herramienta para identificar cómo representan las personas un número, en particular sobre la línea recta, este último es otro elemento importante. La idea de estimar cantidades sobre la línea recta hizo pensar en que las personas al momento de estimar lo hacen obedeciendo a la regla de la escala logarítmica, es decir, que perciben que los primeros números a la izquierda de la recta son más grandes, en magnitud entre uno y otro, que los que están a la derecha (Figura 18), por ejemplo, la magnitud entre uno y dos ya no es la misma entre ocho y nueve, a esto lo hemos denominado, la *depreciación de la unidad*.

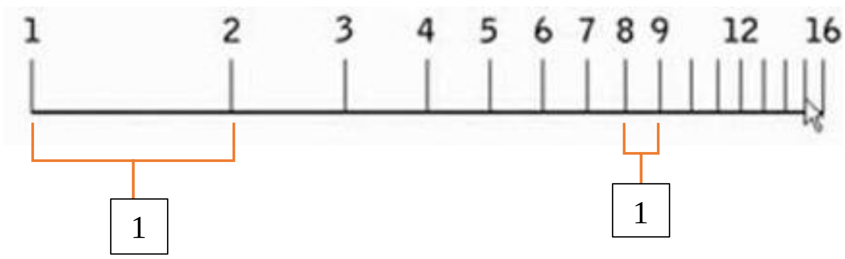


Figura 18. La escala logarítmica

Pero esta acción mental pareciera tener mas significados del que se da en la línea recta, y con esto nos referimos a significados asociados a experiencias de la vida cotidiana. Por ejemplo, desde la percepción, si tenemos dos platos de comida en lugar de uno, nuestra percepción es que tenemos mucha comida para una persona, por el contrario, si tenemos 11 platos de comida y nos agregan una más, en este caso no notamos una gran diferencia en ese “uno más” pues sigue siendo mucha comida con o sin él, al igual que la escala logarítmica, la magnitud entre el 1 y el 2 es más grande que entre el 11 y el 12. Desde el ámbito de lo cotidiano, si vas dos veces al tianguis y, la primea vez compras 6 manzanas y la segunda vez compras 23 manzanas, hay mas probabilidad que el tendero te regale una manzana mas en la segunda vez que en la primera, ¿por qué sucede esto? ¿tendrá que ver con la peculiaridad de la escala logarítmica? Pongamos un último ejemplo, a quién no le ha pasado que cuando escribía un título en una cartulina las primeras letras quedaban espaciadas igualmente, pero sin darte cuenta los últimos ya no quedaban en igual medida (Figura 19)es decir, que al desconocer la medida exacta de la cartulina tu estimación para que quedara distribuida equitativamente no se lograba, dando lugar a este fenómeno de distribución.

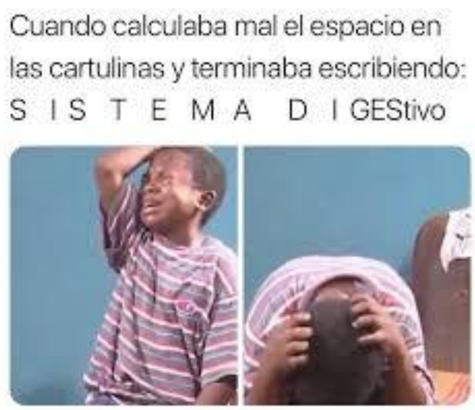


Figura 19. Imagen tomada de:

https://m.facebook.com/1354151385/posts/10219240892597154/?d=m

Pareciera que, en estos ejemplos sencillos y populares, se encuentran particularidades que corresponden a los trabajos científicos que mencionamos antes. Y que ahora le hemos puesto el nombre *depreciación de la unidad*, debido a que la unidad pierde valor en la escala logarítmica, y que ahora comparamos también con situaciones de la vida cotidiana. Por tanto, conviene preguntar ¿será que este tipo de reacciones corresponden a que pensamos de acuerdo con una escala logarítmica? ¿Así opera la mente humana ante ciertas actividades como estimar?

Estas preguntas son las que hacen que emerja una problemática para esta investigación, dada la revisión de la literatura y la propia postura que se toma para describir *lo logarítmico*, la cual mencionamos en el siguiente apartado.

2.1.3 Resumen del capítulo II

La primera parte de los antecedentes muestran el estado actual de la enseñanza de los logaritmos en la literatura de nuestra disciplina, donde encontramos que hay dos tendencias, aquellas que se enfocan en dar propuestas didácticas desde ambientes digitales pero centradas en las ideas tradicionales de su enseñanza y aquellas que van hacia sugerir la introducción de ideas covariacionales como argumento principal para el estudio de la función logaritmo, en esta parte identificamos la idea de *comportamientos logarítmicos* como el estudio del comportamiento de dos secuencias, uno regido por la suma y otro por la multiplicación. En un segundo momento, identificamos trabajos donde la idea logarítmica parece dar significado a diversos experimentos realizados en la búsqueda de la representación numérica en los niños y adultos sin una educación formal, además la idea de *comportamientos logarítmicos* emerge sin el estudio explícito de dos variables, trayendo consigo una característica más a la que denominamos *depreciación de la unidad* como aquella característica particular de una escala logarítmica y que comparábamos con ideas cercanas a la vida diaria. Esto último nos lleva a cuestionarnos sobre ¿Cómo vive *lo logarítmico* en el cotidiano de las personas? ¿Estos experimentos están dando prueba que el pensamiento de las personas en la tarea de estimar es de forma logarítmica? Si es así ¿Qué significa estimar logarítmicamente? y ¿Qué aportes pueden dar estos resultados para la enseñanza del concepto logaritmo en la escuela?

2.2 Problemática emergente

El interés principal en este trabajo es robustecer los aportes a la investigación realizada respecto del logaritmo la cual, desde la bibliografía revisada, sigue siendo un problema vigente en la enseñanza de las matemáticas. Como mencionamos al principio de este escrito, se toma como referencia el trabajo de Ferrari (2008) quien reporta que hay una dislexia en la presentación escolar del logaritmo en tanto facilitador de operaciones y su estudio como función, problema que no ha desaparecido. En los siguientes párrafos se va describiendo la búsqueda de elementos asociados a *lo* *logarítmico,* donde se considera otro fenómeno que no se ha reportado, pero que podría estar asociados a esta idea, nos referimos a la práctica de estimar. Con estos hallazgos se articula la problemática de esta investigación.

2.2.1 Búsqueda de lo asociado a la idea logarítmica

Como mencionamos anteriormente *lo logaritmo* va a referir a su construcción social. Pues el conocimiento se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, y donde la especie humana desarrolló la capacidad de construir explicaciones sobre el mundo en el que vive mediante complejos procesos de construcción de significados compartidos, por tanto, el punto de partida para la construcción del saber es la actividad humana normada por emergentes sociales, que desde esta postura se denominan *prácticas sociales* (Cantoral, 2016).

Por lo anterior y dada la revisión, enmarcamos una problemática la cual se atenderá en este trabajo de investigación. Al principio mencionábamos que uno de los intereses era encontrar elementos que nos ayuden a entender *lo logarítmico* antes de su presentación formal como función. En la revisión bibliográfica podemos notar que la estimación es una práctica interesante de analizar, pues parece asociarse con la idea logarítmica. En este sentido, presentamos a continuación una breve revisión de los trabajos alrededor de esta idea.

2.2.1.1 Una breve revisión sobre "estimar"

Esta tarea, se plantea como una actividad que para el cotidiano de las personas se constituye como algo muy orgánico. El diccionario de la Real Academia Española distingue varias acepciones para la palabra estimar; 1) calcular o determinar el valor de algo, 2) atribuir un valor a algo, 3) sentir afecto o aprecio hacia alguien, 4) creer y considerar algo a partir de los datos que se tienen, 5) creer o considerar que algo es de una determinada manera, 6) aceptar una petición demanda o recurso. Estas definiciones transmiten la idea general de esta palabra, la cual está entre una noción de juicio o valoración.

Pizarro (2015) hace una compilación sobre definiciones que dan algunos autores sobre "estimar":

- Bright (1976) define estimar como "un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales y manipulativos".
- Cockcrof (1982) lo define como "la habilidad para evaluar si es razonable el resultado de un cálculo o de una medida; la capacidad de hacer juicios subjetivos acerca de una variedad de medida.
- Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) la definen como "juicio del valor del resultado de una operación numérica o de la medida de cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite".
- Clayton (1996) lo refiere como "la habilidad para conjeturar sobre el valor de una distancia, costo, tamaño, etc. o cálculo".
- Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010) mencionan que estimar "se refiere a un número que es una aproximación adecuada para un número exacto dado el contexto particular, que se sustenta en algún tipo de razonamiento".
- Clements y Sarama (2014) consideran que una estimación no solo es una adivinanza, sino es a lo menos "una adivinanza matemáticamente

adecuada”, es un proceso para resolver problemas que exige una evaluación aproximada o provisional de una cantidad.

En esta lista se percibe que hay una diversidad en la acepción de la palabra estimar de la cuales en términos generales podemos identificar como; una actividad mental, una operación de cálculo, asignar un valor no necesariamente exacto, una actividad que requiere información de referencia o simplemente como una habilidad de las personas.

Por su parte Albarracín et al. (2013) mencionan que en la literatura se pueden percibir tres tipos de estimación como objeto de estudio:

- La numerosidad: Estos estudios se centran en la capacidad de estimar visualmente el número de objetos presentes en una distribución.
- Estimación computacional: Estos estudios se enfocan en el estudio de los procesos a través de los cuales se aproximan los valores de un cálculo.
- Estimación de medidas: Estos trabajos se centran en la habilidad perceptiva de estimar longitudes, superficies, tiempos, pesos u otras medidas de magnitudes continuas.

Por su parte Segovia y Castro (2009) hacen una distinción entre aproximación y estimación, donde aproximar es obtener un resultado suficientemente preciso para un determinado propósito, es decir que la aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable, en tanto que la estimación tiene en cuenta el error, pero de manera menos precisa, donde a veces este no tiene un control asegurado. Estas observaciones hechas por los autores van a ser importantes por el hecho en que en este trabajo se reconoce la diferencia entre ambas denominaciones; la aproximación por un lado como ente de exactitud que se puede lograr con técnicas numéricas y la estimación en tanto que es de forma juiciosa, perceptiva en donde influye la propia experiencia de quien esté realizando la tarea de estimar para algún propósito.

Continuando con la idea de estimación, Siegler y Booth (2004) se basan en un supuesto explícito sobre el proceso mental de estimación: la estimación es un proceso de traducción entre alternativas cuantitativas y cualitativas. Y las clasifican en tres procesos:

1. Cantidades no numéricas a no numéricas: Este proceso consta de transformar una cantidad no numérica expresada en algo no numérico, por ejemplo, un rayo de luz que tiene que ser operado mentalmente para ser representado en un pedazo de recta.

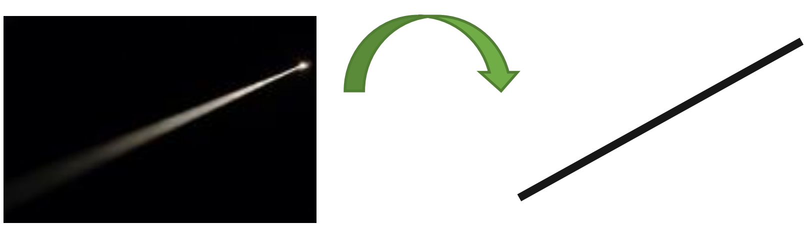


Figura 20. Proceso de transformación no numéricas a no numérica.

2. Cantidad numérica a numérica: Este proceso se refiere a la idea computacional de hacer cálculos, por ejemplo, una multiplicación de dos números, donde el resultado es otro número.

3. Cantidad numérica a no numérica: Este es la traducción de un número en una cantidad que no es numérica, por ejemplo, la ubicación de un número sobre la línea recta.

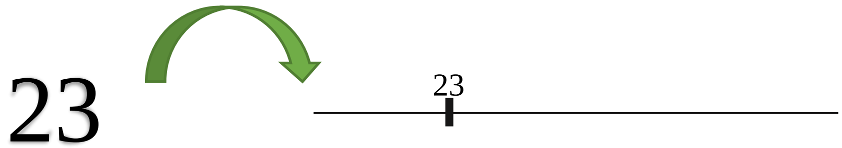


Figura 21. Proceso de transformación de numérica a no numérica.

La idea número tres, es de donde se basan los trabajos que se mencionaron en la parte de los antecedentes, que tiene que ver con la estimación de cantidades. Si bien, los experimentos que se realizaron eran de corte cuantitativo, no se sabía por qué es que los niños y las personas operaban de esa manera. Es decir, en el procedimiento de estimación de números sobre la recta, solo se tomaban en cuenta la posición que se colocaba en la recta. Pero, qué es lo que hace hacer a las personas lo que hacen, cómo es que lo hacen, y por qué lo hacen. Consideramos que dentro de este tipo de actividades se pueden obtener más resultados que den cuenta de lo qué pasa en el procedimiento de esta actividad. Por ejemplo, en estos trabajos de estimación no se hace explícito el papel que juega el símbolo arábigo de la cantidad a estimar, o si la recta como sistema de referencia tenía alguna complicación en el actuar de los niños.

En este sentido, y dado el rumbo de la investigación, se buscaron elementos acerca de la estimación en la educación básica, particularmente de la educación primaria, que nos den fundamento, sobre cómo surge esta actividad en la educación y para qué es usada.

2.2.1.2 La idea de estimar en el currículo básico mexicano

Haciendo una revisión simple al marco curricular mexicano sobre los aprendizajes que se esperan sobre matemáticas en nivel preescolar y primaria, se identifica que esta actividad es promovida en algunos momentos de la educación básica, por ejemplo, el eje de “número, álgebra y variación”, en el tema de número observamos su aparición hasta el tercer ciclo que corresponde al 5to y 6to grado (Figura 22) donde se usa para interpretar los números mayas.

EJES	Temas	PREESCOLAR			PRIMARIA				PRIMARIA	
					PRIMER CICLO		SEGUNDO CICLO		TERCER CICLO	
		1°	2°	3°	1°	2°	3°	4°	5°	6°
		Aprendizajes esperados								
ARIACIÓN	Número	•Cuenta colecciones no mayores a 20 elementos. •Comunica de manera oral y escrita los primeros 10 números en diversas situaciones y de diferentes maneras, incluida la convencional. •Compara, iguala y clasifica colecciones con base en la cantidad de elementos. •Relaciona el número de elementos de una colección con la sucesión numérica escrita del 1 al 30. •Identifica algunas relaciones de equivalencia entre monedas de \$1, \$2, \$5 y \$10 en situaciones de compra y venta. •Resuelve problemas a través del conteo y con acciones sobre las colecciones.			•Comunica, lee, escribe y ordena números naturales hasta 1 000.		•Comunica, lee, escribe y ordena números naturales de hasta cinco cifras. •Usa fracciones con denominador hasta 12 para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.		•Lee, escribe y ordena números naturales hasta de cualquier cantidad de cifras, fracciones y números decimales. •Estima e interpreta números en el sistema de numeración maya. •Lee y escribe números romanos. •Resuelve problemas que impliquen el uso de números enteros al situarlos en la recta numérica, y al compararlos y ordenarlos.	

Figura 22. Dosificación de aprendizajes esperados, eje número, algebra y variación (SEP, 2017)

En otro eje donde se localiza esta actividad es en el "forma, espacio y medida", en el tema de magnitudes y medidas, donde aparece de forma más seguida en el primer y segundo ciclo, correspondientes a los 1ro, 2do, 3ro y 4to año de educación primaria (Figura 23).

EJES	Temas	PREESCOLAR			PRIMARIA			
					PRIMER CICLO		SEGUNDO CICLO	
		1°	2°	3°	1°	2°	3°	4°
		Aprendizajes esperados						
FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	Magnitudes y medidas	•Identifica la longitud de varios objetos a través de la comparación directa o mediante el uso de un intermediario. •Compara distancias mediante el uso de un intermediario. •Mide objetos o distancias mediante el uso de unidades no convencionales. •Usa unidades no convencionales para medir la capacidad con distintos propósitos. •Identifica varios eventos de su vida cotidiana y dice el orden en que ocurren. •Usa expresiones temporales y representaciones gráficas para explicar la sucesión de eventos.			•Estima, mide, compara y ordena longitudes y distancias, pesos y capacidades, con unidades no convencionales, y con metro no graduado en centímetros, así como kilogramo y litro, respectivamente. •Estima, compara y ordena eventos usando unidades convencionales de tiempo: minuto, hora, semana, mes y año.		•Estima, compara y ordena longitudes y distancias, pesos y capacidades con unidades convencionales, medios y cuartos así como decímetro, centímetro, milímetro, mililitro y gramo. •Compara y ordena la duración de diferentes sucesos usando unidades convencionales de tiempo, incluyendo media hora, cuarto de hora y minuto. Lee el tiempo en relojes de manecillas y digitales. •Estima, compara y ordena superficies de manera directa, con unidades no convencionales y convencionales.	

Figura 23. Dosificación de aprendizajes esperados, eje forma, espacio y medida (SEP, 2017)

En esta parte encontramos que, en el primer ciclo, la estimación aparece como herramienta para estimar longitudes y distancias con la intención de medir, además que se usa para trabajar con el tiempo y sus unidades de medida. En efecto, la estimación aparece como ente necesario para desarrollar temas como las magnitudes y medidas.

Se hizo también una revisión simple a los libros de texto del segundo ciclo de la educación primaria, y concretamente al libro de tercer grado de primaria, donde se encontraron, de diferentes partes del libro, consignas que corresponden a la estimación acompañado de otros componentes. Por ejemplo, en la siguiente tarea (Figura 24) se pide ordenar de mayor a menor un conjunto de clavos de diferentes tamaños:

23 Orden por tamaño

Consigna 1

En equipos, realicen lo que se solicita. Deben utilizar las tiras del material recortable (página 181).

1. Ordenen, de acuerdo con su longitud, las tiras de papel y escriban las letras en el orden en que las acomodaron.

2. Escriban en orden, del menos largo al más largo, los números de los clavos de la imagen de la derecha.

3. Si a los clavos anteriores se aumentan los de la imagen de la izquierda, ¿cuál sería el orden de los números? Escriban su respuesta.

Figura 24. Orden por tamaño (SEP, 2019)

En esta consigna, se ponen en juego el ordenamiento, la comparación y la estimación, como componentes que resuelvan lo encomendado. El ordenamiento en el sentido de organizar de mayor a menor de acuerdo con el tamaño de los clavos, y las otras dos están relacionadas, es decir comparar para estimar tamaños. En las siguientes consignas el discurso va cambiando de solo comparar y estimar tamaños a ser más precisos en la medida de los objetos.

Por ejemplo, en la siguiente consigna (Figura 25) se solicita estimar objetos de acuerdo con un intervalo de medida:

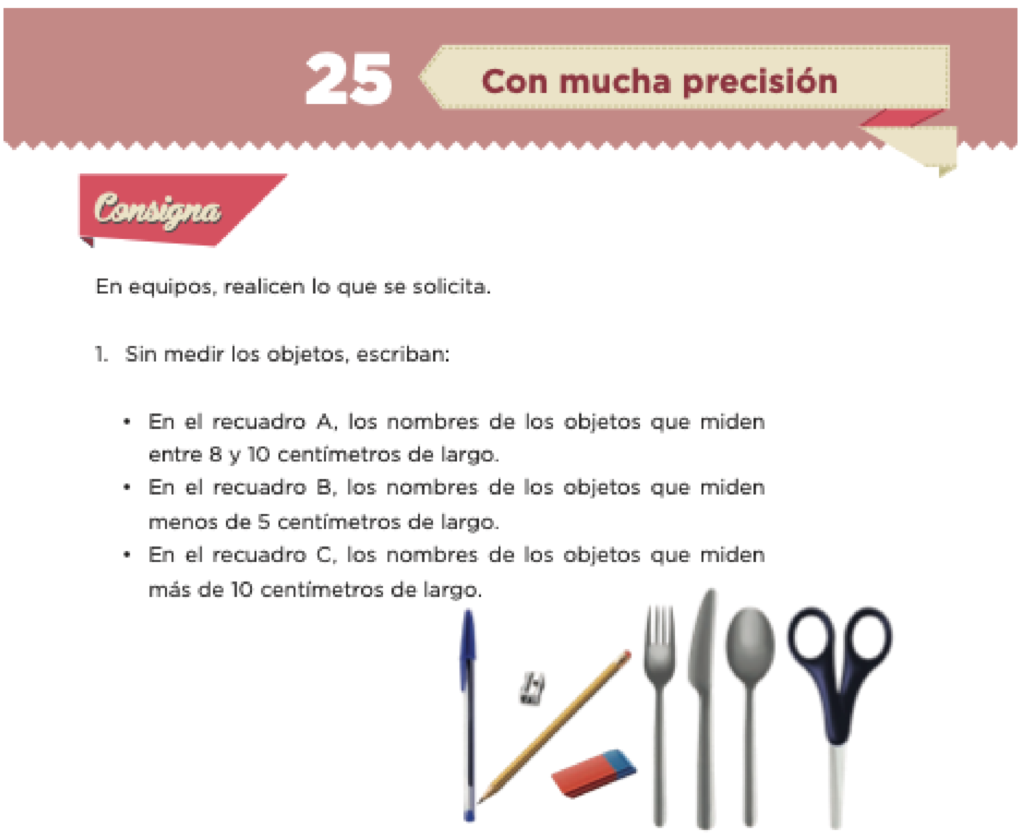


Figura 25. Con mucha precisión (SEP, 2019)

En este nivel se requiere conocer el largo que equivale a la cantidad expresada en centímetros, por tanto, la necesidad de estimar cantidades está presente. Una estrategia sencilla es comparar los objetos en tamaños, estimar la medida del tamaño y finalmente clasificar. Obviamente, como se mencionó, requerirá de la experiencia de haber trabajado con herramientas de medir como la regla escolar.

Mas adelante y de forma explícita se da la consigna "¡A estimar!" (Figura 26), este apartado se da la encomienda de hacer cálculos sin ser precisos, estos cálculos tienen que ver con operaciones aritméticas, donde se trata de responder si una suma o resta de dos cantidades es mayor o menor a otra cantidad. En este sentido la estimación esta en comparar el resultado del cálculo con otra cantidad.

Podemos notar que la estimación si está presente en diferentes encomiendas y desde diferentes perspectivas, y la forma de su aparición va de ir de lo intuitivo a lo exacto, en este sentido lo entendemos como el proceso para pasar de la estimación a la aproximación.


40 ¡A estimar!

Consigna

De manera individual, realiza lo que se solicita en cada caso.

1. Trata de responder sin hacer el cálculo exacto.

a) 435 + 285, ¿será mayor o menor que 700?

b) 567 − 203, ¿será mayor o menor que 300?

c) 567 − 243, ¿será mayor o menor que 300?

d) 418 + 283, ¿será mayor o menor que 600?

e) 639 − 278, ¿será mayor o menor que 400?

f) 1990 + 510, ¿será mayor o menor que 2000?

639 - 278

Figura 26. ¡A estimar! (SEP, 2019)

Ahora bien, la postura que vamos a tomar con respeto de la estimación tiene que ver con lo que ya se ha reportado en la teoría en la que nos posicionamos y específicamente dentro de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje

Variacional (Cantoral, 2019), a quién dedicaremos un apartado particular más adelante (apartado 3.5). En esta línea, la estimación se reconoce como una práctica socialmente compartida para el estudio de comportamientos.

En este sentido, consideramos que la estimación va más allá de un carácter práctico de acercarse a cantidades a través de técnicas o cálculos, más bien la relacionamos con el sentido de la percepción, de la vivencia y próximas a la idea del propio pensamiento humano. Esto lo podemos ilustrar con situaciones cotidianas, por ejemplo, Albarracín y Gorgorió (2013) mencionas que se realiza una estimación cuando se pretende responder a preguntas como ¿cuánto tiempo tardaré en llegar a la parada del autobús? ¿cuántos botes de pintura de 5 kg necesito para pintar el comedor entero? O ¿cuántas cucharadas soperas de aceite son las necesarias para cubrir los 30 gramos que pone la receta? Otro es cuando vamos a cruzar la calle y vemos un automóvil a lo lejos, podemos tomar la decisión de cruzar o no ¿cómo hacemos esto? ¿si no sabemos exactamente la velocidad del coche ni la distancia exacta a la que está?, esto lo atribuimos a la idea de estimar mediante la percepción, con esto somos capaces de identificar si podemos cruzar o no la calle. En otro ejemplo, cuándo vamos al supermercado y no llevamos la cuenta de lo que vamos colocando en el carrito, pero al ver el volumen de la cantidad de las cosas, y con el factor de conocer el valor monetario de algunas de ellas podemos estimar si nos va a alcanzar el dinero que llevamos.

Con estas ideas formamos la emergencia de la problemática, donde la tarea de estimar cantidades es una interesante actividad para explorar y nos puede ayudar a encontrar evidencia de *lo logarítmico* en distintos escenarios, más allá de los propios escenarios formales. En este sentido, tomamos a la estimación de cantidades como herramienta para analizar fenómenos de *comportamiento logarítmicos*. Por lo anterior, retomamos las ideas sobre estimar cantidades sobre la línea recta, complementándolas con otras actividades propias a la estimación y que detallaremos más adelante.

A diferencia de los fenómenos estudiados en la literatura, nos enfrentamos a uno en dónde no analizamos cuánto crece una planta con el tiempo o cómo es el crecimiento de un microorganismo con respecto del tiempo, en general, no se trata de construir la función logaritmo. La actividad para estudiar tiene que ver con un proceso exploratorio donde podamos evidenciar *lo logarítmico*, sin la necesidad del estudio explícito de dos variables. Tal y como se hace desde la idea covariacional, la cual les permite describir la relación entre dos variables al estudiar la forma en cómo cambia una cuando cambia la otra. Desde nuestra postura, en este trabajo vamos a tener un acercamiento hacia *lo logaritmo* desde la idea variacional (Cantoral, 2019). Asumimos que la variación es una noción que no se percibe de manera directa por los sentidos, por tanto, no está presente de manera explícita en los fenómenos (Caballero-Pérez, 2019), al mismo tiempo que se acepta que la idea covariacional está dentro de la variación, debido a que se parte de la premisa que las cantidades no cambian de manera independiente, sino que se requiere de otra cantidad para determinar que la primera ha cambiado. Por ejemplo, la altura de una persona cambia conforme a su edad, la superficie de un globo depende del volumen del aire en su interior, o el crecimiento de una planta conforme al tiempo, con esto se quiere decir que, si bien las variables pueden no ser explicitas, la variación involucra al menos dos variables (Caballero-Pérez, 2019)

2.2.1.3 Logaritmo y Estimación desde algunos libros de texto de Cálculo

Para continuar con la conformación del problema de esta investigación, revisamos algunos libros de texto con el fin de encontrar si el argumento de la estimación en estos está asociado con el concepto del logaritmo. El libro de texto como objeto cultural, es un medio mediante el cual se construye el consenso educativo, por tanto, sirve para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento escolar (Cantoral et al., 2015).

Para este análisis, que dimensionamos como descriptivo, utilizamos el método sugerido por Cantoral et al. (2015) el cual conlleva dos fases; una fase descriptiva, que contextualiza y sitúa el tema a analizar, en este caso el de logaritmo en el sistema educativo, y dos, un análisis cualitativo de la actividad matemática que proponen los libros, a partir de las acciones concretas que debe llevar a acabo quién trabaja con él.

2.2.1.3.1 Fase descriptiva

El logaritmo se presenta en el nivel medio superior de la educación en México, en este nivel existen dos programas educativos, el bachillerato general y el bachillerato tecnológico, en particular nos interesa el bachillerato tecnológico por el acercamiento y experiencia que se ha tenido con este programa. En él, el logaritmo se presenta hasta el cuarto semestre (Figura 27) dentro de la asignatura del cálculo diferencial.

1er. semestre	2o. semestre	3er. semestre	4o. semestre	5o. semestre	6o. semestre
Álgebra 4 horas	Geometría y Trigonometría 4 horas	Geometría Analítica 4 horas	Cálculo Diferencia 4 horas	Cálculo Integral 5 horas	Probabilidad y Estadística 5 horas
Inglés I 3 horas	Inglés II 3 horas	Inglés III 3 horas	[illegible] 3 horas	Inglés V 5 horas	Temas de Filosofía 5 horas
Química I 4 horas	Química II 4 horas	Biología 4 horas	Física I 4 horas	Física II 4 horas	Asignatura propedéutica* (1-12)** 5 horas
Tecnologías de la Información y la Comunicación 3 horas	Lectura, Expresión Oral y Escrita II 4 horas	Ética 4 horas	Ecología 4 horas	Ciencia, Tecnología, Sociedad y Valores 4 horas	Asignatura propedéutica* (1-12)** 5 horas
Lógica 4 horas	Módulo I 17 horas	Módulo II 17 horas	Módulo III 17 horas	Módulo IV 12 horas	Módulo V 12 horas
Lectura, Expresión Oral y Escrita I 4 horas					

Figura 27. Mapa curricular bachillerato tecnológico (SEP, 2017)

Específicamente, el contenido está dentro de la introducción básica de funciones transcendentales (Figura 28), en la tabla se establecen los aprendizajes esperados de acuerdo con el eje del pensamiento y lenguaje variacional, y el componente cambio y predicción: elementos del cálculo. En el marco de este nuevo modelo educativo, se menciona que hay una gran importancia por la jerarquización de los contenidos académicos a las asignaturas del Cálculo Diferencial, donde se considera no solo la comprensión de los procesos e ideas claves del campo disciplinar, sino incursionar en la forma de descripción, explicación y modelación propias de la asignatura (SEP, 2017).

CONTENIDOS CENTRALES	CONTENIDO ESPECÍFICO	APRENDIZAJE ESPERADO	PRODUCTO ESPERADO
Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición. Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.	• El tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos. Tablas, gráficas, texto, expresión oral, movimiento físico, funciones y derivadas. ¿Cómo represento el cambio?, ¿puedo representar mi posición en una gráfica dependiente del tiempo? ¿Qué es el cambio y qué la variación? • Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes. ¿Si una función pasa de crecer a decrecer hay un punto máximo en el medio? ¿Al revés, un punto mínimo? ¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día?	• Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio. • Construye y analiza sucesiones numéricas y reconoce los patrones de crecimiento y de decrecimiento. • Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.	• Representar el cambio numérico de patrones de crecimiento en tablas y gráficas. • Predecir la situación óptima de un fenómeno de cambio del tipo no lineal y parabólico. • Establecer conjeturas del tipo ¿cómo serán las sumas de funciones crecientes?

Figura 28. Contenidos específicos (SEP, 2017)

Los libros de texto que se van a analizar tienen dos categorías, primero nos referimos a algunas obras conocidas en el medio, a saber; Cálculo de una variable (Stewart, 2008), Cálculo con geometría analítica (Larson, et al., 2006) y el segundo es un texto sugerido en la bibliografía del programa de estudio del componente básico del marco curricular común de la educación Media Superior (SEP, 2017), a saber; Cálculo Diferencial para bachillerato (Ylé et al., 2012).

Para el análisis de estos libros solo nos vamos a referir al estudio de la función logaritmo y los usos que se le dan para ejemplificarla. Ferrari (2008) contempló que los argumentos centrales en algunos textos de cálculo se sustentan en tres supuestos: “la simetría”, al presentar el logaritmo y la exponencial de forma conjunta, “lo numérico”, que registra valores en tablas y analiza derivadas sucesivas; “la cuadratura” que se basa en el área bajo la curva. En este sentido, lo que ahora vamos a revisar son los ejercicios propuestos en los libros y el rol de la estimación en ellos, esto a través de la segunda fase del método que estamos utilizando, es decir a las tareas de los libros de texto se plantearan las preguntas *qué debe hacer*, *cómo lo debe hacer* y *para qué lo debe hacer*.

2.2.1.3.2 Fase dos del análisis de los libros de texto

Dado que nuestro objeto de estudio no es estudiar únicamente libros de texto, nuestro análisis no será tan robusto, como los propio a este tipo de investigaciones.

En los libros de Stewart (2008) y Larson et al. (2006) encontramos que se da un apartado particular al estudio de la función logaritmo en la sección de funciones transcendentes. En el hilo de tópicos de Stewart (2008) primero aparece la función exponencial y después de un preámbulo sobre cómo obtener una función inversa (Figura 29) finalmente llega a la función logaritmo.

5 CÓMO ENCONTRAR LA FUNCIÓN INVERSA DE UNA FUNCIÓN f UNO A UNO

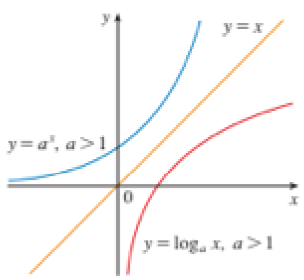
ETAPA 1 Escriba $y = f(x)$.

ETAPA 2 Resuelva la ecuación para x en términos de y (de ser posible).

ETAPA 3 Para expresar f^{-1} como una función de x, intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Figura 29. Procedimiento para obtener una función inversa (Stewart, 2008, p. 62)

Por tanto, la función logaritmo es introducida como la función inversa de la función exponencial (Figura 30). Continuando, se prueban las propiedades de los logaritmos y se define el logaritmo natural. Los ejemplos que se muestran después de cada definición solo son de orden algorítmico. Finalmente, en el apartado de ejercicios encontramos alguno de ellos interesantes de analizar.



$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Figura 30. Presentación de la función logaritmo (Stewart, 2008)

En el ejercicio 57 de la página 71 observamos el siguiente problema: Si una población de bacterias inicia con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, luego el número de bacterias una vez que transcurren t horas en $n = f(t) = 100 * 2^{\frac{t}{3}}$ (véase el ejercicio 25 en la sección 1.5).

a) Encuentra la inversa de esta función y explique su significado.

b) ¿Cuándo llegará la función a 50,000?

Para resolver este problema el libro da como sugerencia volver a un problema mencionado anteriormente. El problema 25 de la sección 1.5, dedicado a la función exponencial, dice lo siguiente: Se sabe que en condiciones ideales cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Suponga que al principio hay 100 bacterias.

a) ¿Cuántas bacterias existen después de 15 horas?

b) ¿Cuántas bacterias existen después de t horas?

c) Estime el tamaño de población después de 20 horas

d) Dibuje la función poblacional y estime el tiempo que se requiere para que la población llegué a 50,000.

Analizando cada inciso de este último problema, mientras que comentamos a la par de las preguntas de apoyo, qué debe de hacer, cómo lo debe hacer, para qué lo debe hacer. En el inciso "a" se pide dar la cantidad de bacterias transcurridas 15 horas. Una respuesta rápida es el uso de una tabla que corresponda a los datos del enunciado.

Tabla 2. Solucionando el inciso "a".

0	3	6	9	12	15
100	200	400	800	1600	3200

Lo qué debe hacer es usar la tabla como medio de información recurrente a crecimiento exponencial, esto se sabe porque en la sección se promueve el uso de las tablas. El inciso "b" se refiere a una generalización o búsqueda del modelo, aunque lo que se sugiere en el libro para esto, es usar una calculadora capaz de encontrar el modelo a través de una regresión lineal.

Para la solución de esta generalización, podemos recurrir al estudio de tablas desde la idea covariacional que menciona Ferrari (2008). Por ejemplo, al hacer la diferencia de la parte superior de la tabla 2 obtenemos la constante 3, supongamos $t =$

$3n$ y de la parte de abajo podemos notar que el crecimiento es exponencial de la forma $f(t) = 2^n \cdot 100$. De esta forma $n = \frac{t}{3}$ sustituyendo t en la otra ecuación $f(t) = 2^{\frac{t}{3}} \cdot 100$.

De esta manera, para cualquier tiempo se puede obtener la cantidad de bacterias. Sin embargo, este tipo de razonamiento no son explícitos en la sección de función exponencial. El inciso "c" hace explícito la estimación, en este caso para estimar la cantidad de bacterias en un tiempo. Consideramos que mencionan "estimar" porque para obtener ese valor sería muy impreciso solo sustituir en la ecuación que modela el fenómeno. En el inciso "d" también es clara la idea de estimar, y que nosotros la referimos al estudio del comportamiento que tiene el crecimiento de las bacterias, es decir, a través de dibujar el gráfico se busca estimar en qué tiempo se obtiene una cantidad de bacterias. En este sentido la estimación es un medio para la predicción, sin embargo, este razonamiento no sucede sin las preguntas adecuadas.

Ahora, regresando al primer problema que tiene que ver con la sección de logaritmos, la intención del inciso "a" está en obtener la función de inversa de la función que modela el crecimiento de bacterias, que efectivamente va a referir a los pasos que se muestran previamente (Figura 29). En el inciso "b" también se puede ver la idea de estimación, siempre y cuando se sepa el comportamiento del fenómeno.

En este libro encontramos evidencia de la estimación como práctica para predecir, sin embargo, en el discurso del libro no se notan estos énfasis a pesar de qué en sus ejercicios pudieran estar presentes.

En libro de Larson (2006), la sección del logaritmo comienza con la definición del logaritmo natural como el área bajo la curva (Figura 31)

Definición de la función logaritmo natural

La **función logaritmo natural** se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad x > 0.$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.

Figura 31. Definición de logaritmo (Larson, 2006)

Continúa presentando las propiedades de los logaritmos, pasa a la solución de ecuaciones logarítmicas y finaliza mostrando métodos de derivación para logaritmos.

En los ejercicios podemos notar que la mayoría de ellos están centrados en cuestiones algebraicas en el uso de las propiedades logarítmicas y cuestiones gráficas, comparando expresiones algebraicas con gráficos, etc. En el ejercicio 1 de la sección 5.1 páginas 329, encontramos un ejercicio donde se requiere aproximar integrales, después graficar los valores y compararlas con la función logaritmo natural, como se muestra en la imagen (Figura 32)

1. Completar la tabla usando la computadora y la regla de Simpson con $n = 10$, aproximar la integral $\int_1^x (1/t)\, dt$.

x	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\int_1^x (1/t)\, dt$							

2. *a)* Dibujar los puntos generados en el ejercicio 1 y conectarlos con una curva suave. Comparar el resultado con la gráfica de $y = \ln x$.

b) Usar la computadora para representar la gráfica $y = \int_1^x (1/t)\, dt$ para $0.2 \leq x \leq 4$. Comparar los resultados con la gráfica de $y = \ln x$.

Figura 32. Ejercicio propuesto (Larson, 2006)

Por tanto, lo que se debe hacer es usar la técnica para aproximar integrales de forma numérica. Para después comparar los puntos construidos y finalmente compararlos con la gráfica de la función logaritmo natural. Continuando con la indagación encontramos que en los demás ejercicios se sugiere el uso de computadoras para la solución, por ejemplo, el ejercicio 105, muestra el modelo para determinar los intereses que genera una hipoteca con el paso de los años. En este modelo se encuentra el logaritmo natural para determinar el crecimiento de intereses con el paso de los años.

Casa de empeño El término t (en años) de una hipoteca de \$120 000 a 10% de interés puede aproximarse por

$$t = \frac{5.315}{-6.7968 + \ln x}, \quad x > 1000$$

donde x es la mensualidad en dólares

a) Representar el modelo en una computadora.
b) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de \$1 167.41 de mensualidad. ¿Cuál es la cantidad total a pagar?
c) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de \$1 068.45. ¿Cuál es la cantidad total a pagar?
d) Encontrar el ritmo de cambio instantáneo o tasa de t con respecto a x cuando $x = 1\,167.41$ y $x = 1\,068.45$.
e) Escribir un pequeño párrafo describiendo las ventajas de pagar mensualidades altas.

Figura 33. Problema propuesto (Larson, 2006)

Consideramos que en este tipo de problemas solo se necesita operar de forma algebraica la ecuación dada. Por lo tanto, en este libro no encontramos muchas evidencias que pudieran referir a la práctica de estimar. En la tabla 3 se resume el análisis de estos dos libros.

En el libro de Ylé et al. (2012) el logaritmo es presentando como la función inversa de la función exponencial, en especial hace referencia al logaritmo en base 2.

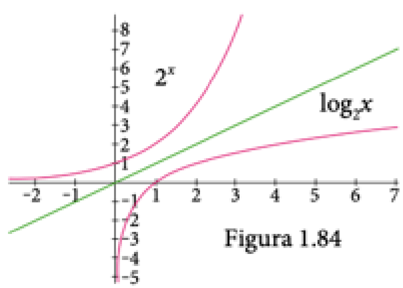


Figura 34. Función logaritmo en base 2 (Ylé et al., 2012, p. 175)

Después de explicar las propiedades logarítmicas, da un ejemplo del uso de la escala logarítmica para medir magnitudes que crecen muy rápido. En particular menciona la escala de Richter para medir la intensidad de movimientos sísmicos (Figura 35).

Ejemplo 94: Para medir magnitudes que crecen muy rápidamente se utiliza la llamada ***escala logarítmica.*** Por ejemplo la magnitud ***R*** de un terremoto en la ***escala de Richter*** se mide utilizando la expresión $R = log_{10}\dfrac{I}{I_0}$ en la que ***I*** es la intensidad del terremoto y I_0 la de un terremoto utilizado como patrón. ¿Cuál es la razón entre las intensidades de un terremoto de magnitud 8.3 (Yokohama 1923) con uno de magnitud 7.2 (Kobe 1995)? ¿Cuál es la intensidad del terremoto patrón?

Resolución: La razón entre las intensidades es $\dfrac{I_y}{I_k}$, si tomamos logaritmos tendremos $log_{10}\left(\dfrac{I_y}{I_k}\right) = log_{10}\left(\dfrac{I_y/I_0}{I_k/I_0}\right) = log_{10}\dfrac{I_y}{I_0} - log_{10}\dfrac{I_k}{I_0} = 8.3 - 7.2 = 1.1$, luego, usando una calculadora científica se obtiene: $\dfrac{I_y}{I_k} = 10^{1.1} \approx 12.6$. O sea, la intensidad del terremoto de 1923 fue aproximadamente 12.6 veces la del de 1995.

Figura 35. Ejemplo del uso de logaritmos (Ylé et al., 2012)

En este ejemplo se da una explicación de cómo se comparan las intensidades de dos sismos ocurridos en diferentes momentos. El procedimiento consiste en resolver la ecuación que representa la escala de Richter que contiene un logaritmo en base 10. Por tanto, entendemos que el uso en este problema puede llegar a ser confuso pues solo se centra en la operación algebraica de la ecuación. Bajo esta idea, se proponen algunos otros ejercicios donde se ponga en práctica la ecuación que se mencionó anteriormente.

Act-155) Tres terremotos ocurrieron en las localidades A, B y C con magnitudes 3, 5 y 8 en la escala Richter. ¿Cuántas veces más fuerte fue el terremoto: (a) B en relación con A? (b) C en relación con B? (c) C en relación con A?

Act-156) En el año 1908 ocurrió un terremoto en San Francisco de California de intensidad 8.3 en la escala de Richter y otro en la frontera de Colombia y Ecuador de intensidad 8.9. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Suramérica que el de San Francisco?

Act-157) Calcule la intensidad relativa de un terremoto cuyo número de Richter es de 6.4 en comparación con uno cuyo número de Richter es de 7.8.

Figura 36. Ejercicios propuestos (Ylé et al., 2012)

La intención de estos ejercicios es operar algebraicamente y de distintas maneras el modelo de la escala de Richter. Desde nuestra perspectiva, la comparación de intensidades en sismos estima el tamaño de desastre que ocasionó, en este sentido, la estimación pudiera estar presente en la dirección de percibir el movimiento y lo qué este pudiera ocasionar. En la siguiente tabla hacemos un resumen de los resultados de este breve análisis descriptivo.

Tabla 3. Resumen del análisis descriptivo de libros de textos.

Libro	Función logaritmo	Ejercicios	Estimación
Cálculo de una variable (Stewart, 2008)	Función inversa de la función exponencial	Crecimiento de bacterias en el tiempo.	Estimar para predecir
Cálculo con geometría analítica (Larson et al., 2006)	Área bajo la curva de $y = 1/x$.	Procedimiento algebraicas y gráficos	No hay cercanos
Cálculo diferencial para bachillerato (Ylé et al., 2012)	Función inversa de la función exponencial	Usos de logaritmos en modelos de medición.	Comparar para *estimar* comportamientos

Fuente: Elaboración propia

En general, estos libros de texto inician con una definición de logaritmo usando su forma algebraica y su relación con la exponencial, consideramos que su naturaleza aún es compleja y el actual *discurso Matemático Escolar* demanda una cierta dosis de credulidad, ya que no se encuentran argumentos de tipo constructivo, sino ostensivo (Ferrari, 2008) por lo tanto vacío de significados.

La estimación en estos libros juega un papel que no es obvio a la luz de quién los lee, reconocemos la estimación como un elemento importante para el estudio de comportamientos, en particular de *comportamientos logarítmicos*. Esto último deviene del estudio de comportamientos desde la covariación, es decir el estudio de una variable con respecto de la otra.

En el análisis observamos que existen elementos de la propia variación (véase apartado 3.5) que ya han sido estudiados, a saber; predecir, comparar y estimar. Sin embargo, desde *lo logarítmico,* este aún no ha sido abordado, por tanto, lo que nos interesa es estudiar *lo logarítmico* desde la idea de *estimación de cantidades* bajo la mirada de las prácticas variacionales, que explicamos con detalle más adelante.

2.3 Hacia la conformación del problema de investigación

Dada la revisión, contemplamos dos elementos importantes para la conformación del problema, primero es el *comportamiento logarítmico* y el segundo es la *depreciación de la unidad*, ambas contempladas desde la práctica de estimar. En los estudios revisados comprendemos que un fenómeno con *comportamiento logarítmico* es aquel resultado de estudiar la naturaleza cambiante de dos variables, una regida por una progresión geométrica y otra aritmética. Sobre la *depreciación de la unidad*, la comprendemos como una característica de la escala logarítmica que aparece en momentos donde la percepción juega un papel importante. Para estudiar estos elementos, nos valemos de la práctica de estimar cantidades en diferentes contextos, de donde tenemos lo siguiente como hipótesis de partida.

2.4 Hipótesis de Investigación

Se plantea la hipótesis de investigación a partir de la revisión de la literatura combinada con los intereses propios de este trabajo, donde la estimación de cantidades juega un papel importante para el estudio de *lo logarítmico* en otros escenarios distintos a los reportados anteriormente.

> *La práctica de estimar cantidades como medio exploratorio, nos permite robustecer lo logarítmico a través de evidenciar dos elementos coligados a esta idea; comportamientos logarítmicos y la depreciación de la unidad*.

Esta hipótesis surge después de analizar el estado de arte sobre el logaritmo en dos vertientes, primero en tanto objeto de enseñanza escolar y segundo como idea que explica fenómenos relacionados con la representación de cantidades. En la revisión bibliográfica se muestra que, la enseñanza de lo logarítmico es un problema vigente y que se están buscando nuevas formas de enseñarlo, incluso acercándose a la inclusión de formas de pensar a través de nuevos lenguajes (Kuper y Carlson, 2020), pero desde nuestra postura consideramos que los estudios para el desarrollo de nuevos pensamientos tienen un proceso más largo. En este sentido, consideramos primero buscar elementos, en nuestro caso, que robustezcan la caracterización de *lo logarítmico* para después buscar como tendrían que evolucionar a los argumentos que propicien la construcción del *pensamiento logarítmico*.

2.5 Objetivo de la investigación

Derivado de nuestra hipótesis, para este trabajo en particular nos hemos propuesto el siguiente objetivo:

Robustecer la problematización de lo logarítmico a través de analizar la práctica de estimar cantidades como un medio que nos acerque al estudio de lo logarítmico a través de las características del comportamiento logarítmico y la depreciación de la unidad, previas a su aparición formal en la escuela, en particular en edades tempranas.

Como mencionamos al principio nos interesa el tema de las edades tempranas, pues consideramos que el trabajo con estas edades puede ayudarnos a comprender lo que es previo a ideas tan abstractas como es el caso del logaritmo.

2.6 Pregunta de investigación

Como mencionamos en el objetivo, nos interesa robustecer la problematización de *lo logarítmico*, a través de la *práctica de estimar cantidades*, por tanto, para favorecer al objetivo nos planteamos la siguiente pregunta específica de investigación.

¿Cómo se evidencia lo logarítmico a través de estudiar la práctica de estimar cantidades en edades tempranas?

Si bien Ferrari (2008) hace una problematización sobre *lo logarítmico*, desde nuestra perspectiva esto no es algo que este acabado y que no pueda seguir expandiéndose, por el contrario basta con considerar apectos que no se atendieron en su momento y estudiar como eso robustece la problematización, misma idea que guía esta investigación.

Derivado de nuestros tres elementos que proponen el problema de investigación de este trabajo, consideramos que esto aportaría al estudio de *lo logarítmico*, y que ilustramos con el siguiente esquema (Figura 37).

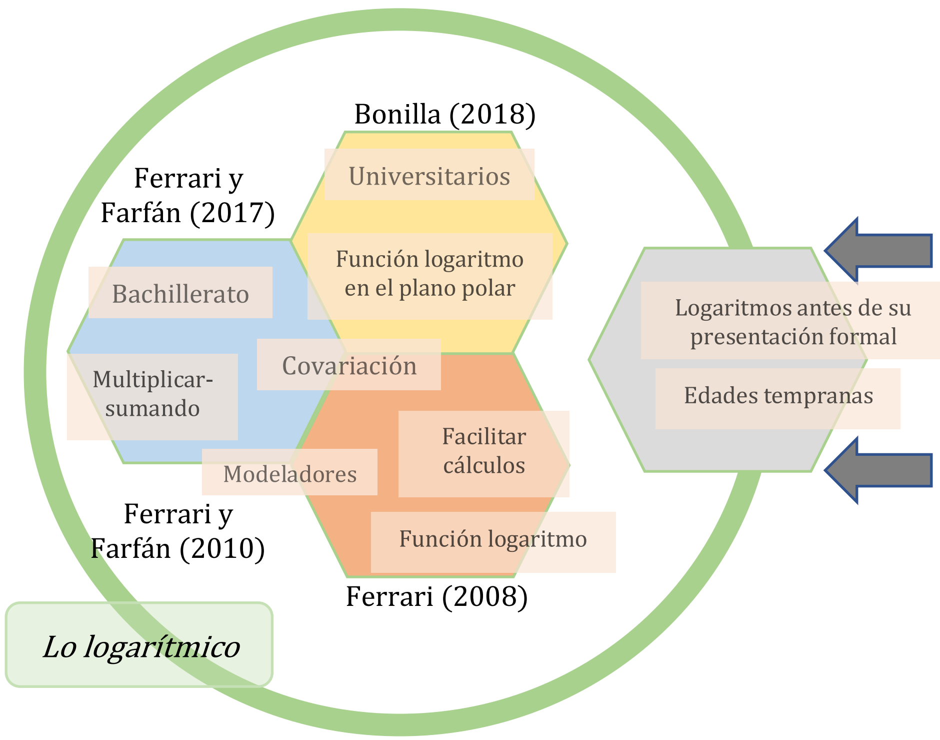


Figura 37. Aporte al estudio de lo logarítmico

3. CAPÍTULO III. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

3.1 Marco Teórico

En este capítulo abordamos en primer lugar la postura teórica y los elementos que tomamos de ella para este trabajo. En un segundo momento mencionamos el método que se usó en esta investigación y finalmente mostramos las actividades que se realizaron para lograr obtener datos que evidencia lo propio al problema de investigación que planteamos.

3.1.1 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

Desde nuestra perspectiva consideramos que, el conocimiento matemático se construyó fuera de las aulas escolares y cuando este se introduce al sistema educativo se *despersonaliza*[5] y *descontextualiza*[6], reduciéndose a cuestiones aisladas y secuenciadas. Nuestra postura radica en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) donde se asume la legitimidad de todas las formas del saber, ya sea este saber popular, técnico o científico, ya que todos ellos constituyen la sabiduría humana (Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez, 2018, citando a Cantoral, 2013).

La Teoría Socioepistemológica es una teoría de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de construcción social del conocimiento y su difusión institucional, partiendo desde una perspectiva múltiple al incorporar a sus estudios las

[5] El conocimiento carece de sentido para quien lo estudia.
[6] Un conocimiento sin significado.

interacciones entre distintas dimensiones del propio saber, su dimensión epistemológica (dE), su dimensión sociocultural (dS), los procesos cognitivos asociados – dimensión cognitiva (dC) y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza – dimensión didáctica (dD) (Cantoral, 2016), de esta manera el saber matemático será entendido como la construcción social del conocimiento matemático.

La Socioepistemología postula que, para atender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento, a nivel de las cuatro dimensiones del saber, en la vida de los seres humanos, se deberá de *problematizar el saber* en el más amplio sentido del término, situándole en el entorno de la vida del aprendiz (individual o colectivo), además, se asume que las Matemáticas están asociadas a *Prácticas Sociales*, la cual se entiende como un emergente social del ejercicio intencional de prácticas que tienen como característica coadyudar al tránsito del conocimiento al saber a través de una funcionalidad con valor de uso.

3.1.1.1 Dimensiones del saber

En este trabajo nos interesa interactuar con las dimensiones del saber que responden a la problematización, en este caso con respecto de la noción logaritmo. Por tanto, nos disponemos a describir cada una de ellas retomadas de Cantoral (2016).

- La dimensión didáctica: Es relativa a su naturaleza como objeto de enseñanza, tanto en el ámbito escolar como en el no escolar, en la vida cotidiana, la esfera profesional o en la enseñanza de las artes u oficios, en las prácticas comunitarias de acompañamiento.
- La dimensión epistemológica: Es un análisis a profundidad de las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento

matemático, su razón de ser. Al mismo tiempo concierne a las formas en que el saber matemático puede ser conocido, el tipo de relaciones que el sujeto establece frente a un objeto.

- La dimensión cognitiva: Es un análisis de las formas de apropiación y significación progresiva que experimentan quienes se encuentran en situación de construcción de conocimiento.
- La dimensión social y cultural: En esta se analizan los usos del saber en situaciones específicas.

Estas dimensiones pueden ser acompañadas de preguntas que ayuden a entender, en cierta manera, su estudio (Tabla 4).

Tabla 4. Cuestionamiento a las dimensiones.

Dimensión Didáctica	Dimensión Epistemológica	Dimensión Cognitiva	Dimensión Social
¿Cómo se produce la difusión institucional?	¿Cuál era la situación contextual durante la construcción del conocimiento matemático?	¿Cómo se desarrolla el pensamiento matemático?	¿Dónde contextualizar el aprendizaje? Contexto de significancia.

Fuente: Tomado de (Reyes-Gasperini, 2016, p. 57)

Al mirar sistemáticamente estas dimensiones (Figura 38) podemos dar cuenta de la *problematización del saber*, mismas que evidencian la construcción social del conocimiento.

Si bien el estudio sistemático de estas dimensiones demanda una investigación mucho más amplia, en este trabajo se tiene un acercamiento con la dimensión cognitiva asociada a la pregunta ¿cómo se desarrolla el pensamiento matemático?, esto es dado la naturaleza de nuestros intereses en buscar elementos relacionados con la formas de pensar de niños ante situaciones que provoquen fenómenos relacionados con *lo logarítmico*.

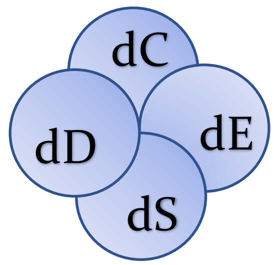


Figura 38. Unidad de Análisis Socioepistémica -UASE
(Reyes-Gasperini, 2013 en Cantoral, 2016)

3.1.1.2 Lo matemático

En la socioepistemología se reconoce la importancia de estudiar *lo matemático,* esto como una expresión de la pluralidad epistemológica, en esencia, la matemática y *lo matemático* expresan una diferencia conceptual y vivencial: mientras la matemática se concibe desde argumentos conceptuales donde prevalecen la búsqueda de mecanismos y del orden, *lo matemático* es de carácter vivencial pues se expresa en las cualidades de las relaciones (Cordero et al., 2015).

El término *lo matemático* no va a ser un problema de loísmo, sino más bien representa la caracterización con enfoque socioepistemológico de la construcción social del conocimiento matemático, o más particular del pasaje del objeto a las prácticas (Cantoral et al., 2015). Por tanto, cuando nos referimos a *lo logarítmico* estamos aludiendo a todo lo que está y estuvo alrededor de él, cómo se concibió, cómo vive en el cotidiano, cómo es usado, cómo es funcional a las personas.

Podemos identificar esta idea de "*lo*" en los primeros auges de la Socioepistemología. En los años 90 en la literatura de la disciplina dominaba una visión que sostenía que se había de estudiar la construcción de la noción función, sin importar las diferencias entre los tipos de funciones, por mencionar algunos, Dubinsky y Harel (1992), Kaput (1992), Duval (1995) citados en Ferrari y Farfán (2017). Sin embargo, para el grupo socioepistemológico interesó investigar sobre la naturaleza de funciones particulares, pues esta estaba marcada junto a su historia. De esta manera se comenzó a concebir, por ejemplo, *Lo trigonométrico* (Montiel, 2005), *Lo exponencial* (Lezama, 1999), *Lo logarítmico* (Ferrari, 2008), *Lo proporcional* (Reyes-Gasperini, 2016), *Lo variacional* (Cantoral, et al., 2018), como un llamado a estudiar en particular ciertas funciones o comportamientos, como *Lo errático* (Hernández-Zavaleta, 2019).

En esta investigación, como se viene mencionando, nos interesa estudiar *lo logarítmico,* que si bien Ferrari estudia a fondo, consideramos que aún hay elementos que robustecen la caracterización actual. Dados los nuevos hallazgos en la revisión bibliográfica, consideramos que nos enfrentamos a un reto donde de cierta manera queremos vislumbrar el camino hacia caracterizar el pensamiento logarítmico. Por lo tanto, nos va interesar la idea del pensamiento, en esencia la del pensamiento matemático, que después se caracteriza en pensamientos particulares.

3.1.2 El Pensamiento Matemático

Haciendo una breve revisión sobre los trabajos acerca del Pensamiento Matemático, se pueden encontrar una variedad de posturas acerca de este. Por ejemplo, aquellas sobre entender el pensamiento como un carácter para la adquicisión de conocimientoss guiados por procesos como la asimilación y la acomodación (Corredor de Porras, 2011). También, otras definiciones lo refieren a los procesos internos propios del pensamiento humano, donde el Pensamiento Matemático es el producto final de varios procesos neuropsicológicos y estos provienen y se desarrollan desde diferentes áreas y requieren variedad de habilidades del individuo (Luci-Arriagada y Reyes-Santander, 2016). Por otro lado, encontramos aquellos que intentan conectar la idea del pensamiento con la cultura, donde se afirma que la conexión entre estos dos es el lenguaje (Albanese y Perales, 2013).

Otros trabajos interesantes en el estudio del Pensamiento Matemático, son aquellos con miras al estudio de la fuente primaria del pensamiento, con esto nos referimos al estudio del cerebro. Por ejemplo, Radford y André (2009) examinan la relación entre el cerebro y las matemáticas, poniendo de particular el estudio del cerebro relacionado con el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico, ellos concluyen realzando sobre la relación entre el cerebro y el pensamiento las siguientes preguntas; ¿El pensamiento no es en el fondo una relación neurológica? o ¿el cerebro no es más que el subtracto del pensamiento, uno de los elementos, que con otros artefactos culturales, lo mediatiza?, dejando como debate las respuestas, además, mencionan que un cerebro sano es una condición facilitadora de aprendizaje, pero en ningún caso es suficiente, pues para adquirir en la escuela los conocimientos que la humanidad ha elaborado durante milenios se requiere más que un buen cerebro, se necesita una cultura.

Por su parte Vargas (2013) menciona que la evidencia científica acumulada, con esto se refiere a la neurociencia y matemáticas, hasta el momento parece confirmar la máxima greco-latina del balance cuerpo y mente: mente sana en cuerpo sano, y para ello la orientación de los educadores y la práctica de actividades físicas, artísticas e intelectuales en épocas tempranas de la vida son fundamentalmente para garantizar el desarrollo adecuado de un pensamiento matemático.

Sobre estas mismas ideas, Tall (2019) escribe que el desarrollo del pensamiento matemático tiene que ver con tres momentos; las matemáticas prácticas, la matemática teórica y las matemáticas formales axiomáticas. Estos tres momentos los podemos referir al desarrollo escolar de la matemática. Tall da algunos consejos prácticos de como promover este desarrollo, pero desde las investigaciones del funcionamiento del cerebro.

Estos son ejemplos de algunas posturas que se mantienen en los trabajos de la disciplina, dejando ver que no hay un consenso único sobre la definición del Pensamiento Matemático, pero si un devenir de definiciones profundas asociadas a los avances tecnológicos y propios a diferentes teorías de aprendizaje.

Desde de la TSME, en los primeros tiempos, cuando se comenzaba a mencionar el Pensamiento Matemático, podemos notar que, por ejemplo en Alanís et al. (2000), no se podía dejar de aludir al pensamiento humano, al razonamiento, a la memoria o la abstracción, y al referirse a esto se pensaba en la propia psicología y el estudio de las funciones mentales.

> “¿De qué podría tratar entonces el Pensamiento Matemático? Sabemos por ejemplo que la psicología se ocupa de entender cómo aprende la gente y de cómo realiza diversas actividades. De este modo usaremos el término pensamiento matemático para referirnos a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas. Los investigadores sobre el pensamiento matemático se ocupan de entender cómo interpreta la gente un contenido específico, en nuestro caso las matemáticas” (Alanís et al., 2000, p. 18)

De esta manera, interesa entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática, al mismo tiempo que nos ocupamos por descifrar los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen en la formación del Pensamiento Matemático (Cantoral, 2016).

Por tanto, entendemos al Pensamiento Matemático como todo aquello que incluye pensamientos sobre tópicos matemáticos, pero también procesos avanzados del pensamiento como la abstracción, justificación, visualización, *estimación*, razonamientos deductivos, inductivos y abductivos o de razonamiento bajo hipótesis (Cantoral, 2019).

Ahora bien, si tenemos que referirnos al desarrollo del Pensamiento Matemático, tenemos que considerar las diferentes posturas y la forma en que lo interpretan; por un lado, se entiende como una reflexión espontánea propia de los profesionales de la matemática y sobre el proceso de descubrimiento e invención en matemáticas, mientras que, por otro lado se puede entender al Pensamiento Matemático como un ambiente en donde las tareas matemáticas surgen, se desarrollan y resolucionan, y finalmente la postura que propone que todos los seres humanos desarrollan el pensamiento matemático en contextos sociales, cuando emplean y enfrentan multiplicidad de tareas (Cantoral, 2019).

Pero, ¿cómo se puede estudiar el desarrollo del Pensamiento Matemático en la TSME?, esta parte resulta interesante, pues no es algo a priori de donde se pueda dar elementos concretos para su desarrollo. Consideramos necesario llevar un proceso evolutivo del objeto matemático estudiado. Por ejemplo, en esta investigación estudiamos al logaritmo como objeto matemático, sin embargo para su adjudicación como *lo logarítmico* tuvo que pasar por un proceso de estudio que involucraba algunos escenarios; 1) con matemáticos educativos, donde se fundamenta el estudio de la naturaleza de funciones particulares, 2) la epistemología donde la "covariación entre progresiones" es un elemento importante para enteder su sentido como función, 3) la del discurso Matemático Escolar, referida al estudio de libros de textos y el sentir de profesores y alumnos, donde se reporta que estos recaen en el uso de repeticiones continuas sobre entender el logaritmo desde la función exponencial, y 4) el escenario con alumnos donde se ponen en juego las prácticas de "modelar" y "facilitar cálculos" para desarrollar la construcción de *lo logarítmico*.

Así pues, en términos generales, podemos componer que para el desarrollo del pensamiento matemático, desde nuestra postura teórica, se requiere el momento de la *problematización del saber*, referida a la búsqueda de la construcción social del conocimiento matemático y guiadas por las cuatro dimensiones del saber, mencionadas al principio del capítulo. Este proceso lo podemos denominar en busca de "*lo*" y en el caso del logaritmo lo podemos resumir en el siguiente esquema (Figura 39).

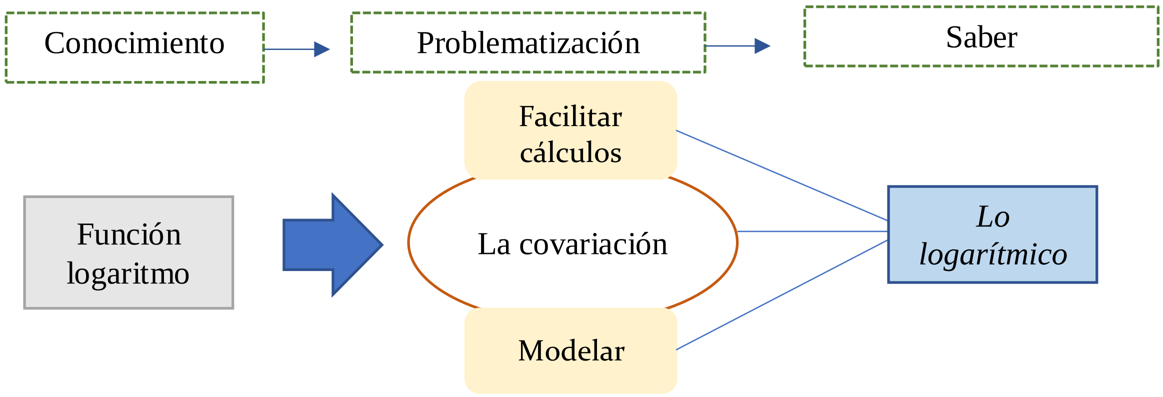


Figura 39. En búsqueda de *lo logarítmico*

En el objetivo de esta investigación está robustecer esta problematización y se quiere hacer a partir de la interacción con las dimensiones del saber, donde la intención es buscar prácticas relacionadas al logaritmo antes de su presentación formal. Regresando a la idea del pensamiento matemático, podemos esquematizar el proceso general como la búsqueda de prácticas que se sugieren como alternativas al objeto matemático. Estas alternativas están enmarcadas en prácticas sociales, de donde el desarrollo intencional de ellas generan lo que determinamos como pensamiento matemático. En este sentido el esquema anterior se amplía y se trata de generalizar de la siguiente manera (Figura 40).

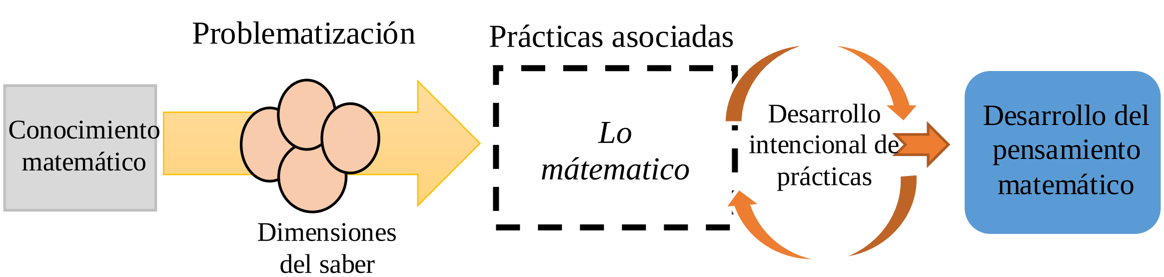


Figura 40. Desarrollo del pensamiento matemático

Aunque en este trabajo no se llega hasta el desarrollo del pensamiento logarítmico, sí consideramos que se contribuye a la búsqueda de prácticas que promuevan la construcción de ello.

La constante pregunta dentro de la TSME, si ¿existe una manera matemática de pensar que pueda ser difundida socialmente? Es la que lleva a marcar un camino metodológico dentro de la propia teoría. En este sentido, en el siguiente apartado se comenta sobre el camino metodológico asociado a la búsqueda de formas de pensar matemáticamente en la postura teórica en la que nos enmarcamos.

3.2 RUTA METODOLÓGICA

3.2.1 Método de investigación

Enmarcamos esta investigación en el esquema metodológico para la investigación en socioepistemología (Montiel y Buendía, 2012) (Figura 41) el cual formaliza el esquema (Figura 40) sobre el desarrollo del pensamiento matemático. Este esquema esboza un rumbo global de la investigación en la postura teorica que adoptamos, sin embargo, para efectos de esta investigación solo nos ocuparemos de atender algunos momentos de ella, a saber; Problemática y Análisis socioepistemológico.

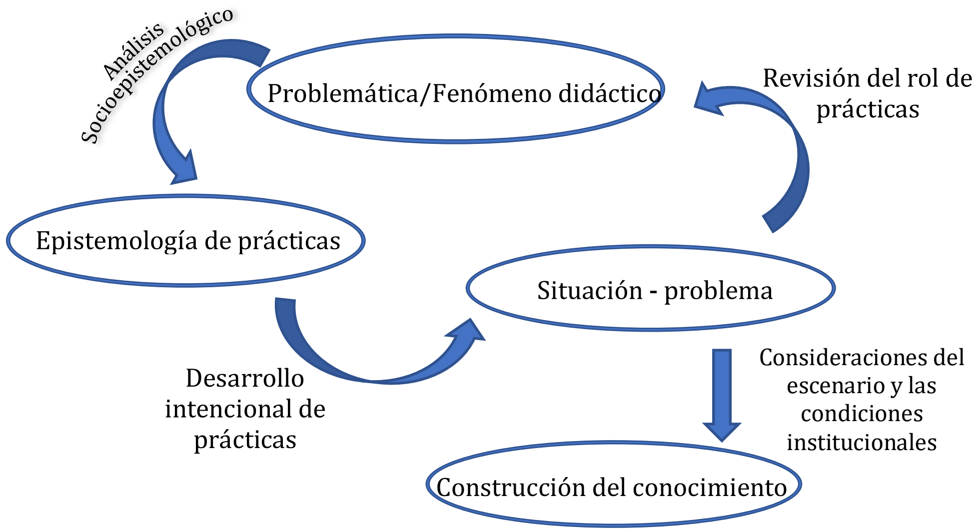


Figura 41. Esquema metodológico (Montiel y Buendía, 2012)

Cada uno de los momentos en este esquema se consolidan en ciertos principios metodológicos que señalan el origen y razones fundamentales de una investigación. Al considerar su naturaleza social, las investigaciones socioepistemológicas han problematizado el saber matemático en, al menos, tres aspectos: su naturaleza epistemológica, su resignificación y sus procesos de transmisión (Montiel y Buendía, 2012). Este esquema se conforma de dos elementos, los momentos de investigación (óvalos) y las acciones relacionantes (flechas).

1.- Momento - Planteamiento de una problemática o un fenómeno didáctico: consiste en explicitar el problema y los objetivos de investigación asociados a la problematización del saber matemático. En esta investigación, la problematización está asociada hacia *lo logarítmico*, donde planteamos la problemática de buscar, elementos enmarcados en prácticas, que puedan dar evidencia de *lo logarítmico* antes de su presentación formal como función.

1.1.- Acción relacionante - Análisis socioepistemológico: Dado el momento anterior y la problemática a estudiar, se procede a realizar el respectivo análisis basado en las prácticas y usos del saber, de lo que caracteriza la naturaleza del saber matemático. Las preguntas que guían a esta revisión son del tipo ¿Por qué se hace lo que se hace? o ¿Por qué se sabe lo que se sabe? Si hacemos un acercamiento a la flecha de acción podemos encontrar los tipos de análisis que se hacen en este (Figura 42).

Figura 42. Análisis socioepistemológico (Montiel y Buendía, 2012)

Como se ha venido mencionando, el interés principal de esta investigación es robustecer la problematización de *lo logarítmico*. Si observamos detenidamente, este análisis sociopistemológico está asociado a las dimensiones del saber, por tal motivo, es que nos colocamos en esta acción como parte del objetivo de este trabajo. Si bien, Ferrari (2003; 2008) hace un acercamiento epistemológico y un acercamiento al discurso Matemático Escolar, consideramos aportar nuevos elementos desde la dimensión cognitiva del conocimiento a partir de las nuevas referencias y nuevos descubrimientos respecto de la noción logaritmo.

2.- Momento – Epistemología de prácticas: En este momento se formula una explicación al problema de investigación o problemática educativa que se aborda a partir del estudio socioepistemológico realizado.

2.1 Acción relacionante – Del desarrollo intencional de prácticas hacia la situación problema: La relación entre las prácticas y la generación de conocimiento matemático reconoce el carácter social de las matemáticas y ello da una base de significación distinta a la matemática escolar.

3.- Momento – Construcción del conocimiento: Una situación problema da cuenta de la resignificación del conocimiento matemático. Si consideramos que esta resignificación busca referirse a la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, tendrá que considerarse plenamente al escenario y las condiciones institucionales para proponer, por ejemplo, la reorganización de la matemática escolar.

Este panorama general, nos ubica en el rumbo de la investigación, donde centramos nuestra atención al análisis socioepistemológico sobre la construcción social del logaritmo, esto a partir de robustecer su caracterización de *lo logarítmico*. En particular nos interesa estudiarlo desde la práctica de estimar cantidades, donde la *estimación* ya ha sido reportada dentro de la línea de investigación del pensamiento y lenguaje variacional pero desde otras miradas.

3.2.2 Pensamiento y Lenguaje Variacional

El pensamiento y lenguaje variacional (PyLV) estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida (Cantoral, 2019). En un sentido amplio, consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio, estudiadas desde orientaciones que atienden a las distintas dimensiones humanas, la cultural, la individual y la social (González, 1999; Caballero-Perez, 2018).

El interés por estudiar el cambio y la variación se deriva de una necesidad inherente al ser humano, la necesidad de predecir, ya que, ante la incapacidad de adelantar el tiempo a voluntad para observar resultados próximos, se han desarrollado herramientas basada en el estudio del cambio y orientadas por la práctica social de *Prædiciere* para anticipar el comportamiento de sistemas complejos (Cantoral, 2016)

Aunque pareciera ser que el objetivo de esta línea está relacionada con caracteres estrictamente de movimiento con dependencia del tiempo, se ha mostrado que, por ejemplo, en el estudio de la comparación, puede hacerse de forma dinámica, donde la variable temporal juega un papel central, y otra de forma estática, donde la comparación se realiza sin la dinámica temporal-secuencial (Cantoral, 2019) como fue el caso de Salinas (2003) y Galo-Alvarenga (2019).

En los estudios del pensamiento y lenguaje variacional se tuvieron que construir escenarios que explicaran la forma en que la acción del individuo es influenciada por la actividad del grupo y éstas a su vez se regulan por prácticas de referencia, mismas que se norman por prácticas sociales (Cantoral, 2019), la articulación de estas se analizan con el modelo de anidación de prácticas.

Figura 43. Modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2016)

Como se menciona anteriormente la *prática social* es un emergente social, que se infiere al estudiar el uso de un conocimiento matemático en diferentes *prácticas de referencia* (Fallas-Soto, 2019) que es la expresión material e ideológica de un paradigma (idiológico, disciplinar o cultural) (Romero, 2020).

Caballero- Pérez (2018) hace un estudio donde evidencia el carácter evolutivo de prácticas variacionales a partir de su organización, donde se reporta una evolución pragmática que parte de la comparación, pasando por la seriación y finalizando con la estimación y predicción.

Tabla 5. Anidación de prácticas variacionales

Práctica social	*Prædiciere*
Práctica de Referencia	Toxicología Física etc.
Práctica socialmente compartida	Predicción Estimación
Actividad	Comparación Seriación
Acción	Ordenar Agrupar Medir Girar Mover etc.

Fuente: Caballero-Perez (2018)

En esta investigación se considera la práctica de estimar cantidades en el sentido de ser analizada como un generador de comportamientos logarítmicos sin estar necesariamente asociado a fenómenos con variable tiempo. La idea de estimar ya ha sido reportada desde diferentes formas en esta línea de investigación y que explicamos a continuación.

3.2.3 Estimación en el PyLV

En la línea del PyLV la estimación ha sido caracterizada como una *práctica socialmente compartida*, la cual consiste en una organización de las acciones y las actividades que orienten al estudiante hacia el desarrollo de prácticas predictivas (Rios-Jarquin, 2020) en este caso el estudio de comportamientos. Caballero-Pérez (2018) define la estimación como "la acción de anticipar comportamientos y tendencias en la variación del fenómeno de un intervalo, por ejemplo, en un análisis de temperatura la estimación se usa para saber si habrá un crecimiento o disminución en un periodo determinado, la temperatura se estabilizará en un tiempo o si habrá un intervalo con un incremento súbito de temperatura, es decir la estimación anticipa comportamientos en intervalos concretos" (p.59). Por ejemplo, esta caracterización de la práctica de estimar es compartida por la comunidad de cardiólogos, pues es fundamental para los procesos de diagnósticos y de tratamientos de las enfermedades (Moreno-Durazo, 2019).

En el estudio de fenómenos que involucran una variación acotada, la estimación se caracteriza como el hecho de conocer estados cambiantes, estableciendo características globales del comportamiento de un fenómeno, en la intención de acercarse a algo que se desea determinar (Fallas-Soto, 2019). En un mismo sentido, pero en un escenario de estudio de lo no deterministas, se menciona que estimar consiste en la acción de anticipar comportamientos o tendencias en la variación de algún fenómeno de manera global (Hernéndez-Zavaleta, 2019). La estimación se va a presentar como la descripción cualitativa o cuantitativa del comportamiento de una variable en un intervalo, ya sea mediante descripciones verbales, dibujos, gráficas o indicaciones numéricas.

La mayoría de las caracterizaciones hechas en los trabajos mencionados, y que aceptamos, están centradas en el estudio de *comportamientos* locales o globales. Ahora bien, en este trabajo reconocemos la práctica de estimar como una acción de describir estados cambiantes, a partir de la percepción y la representación de esos cambios.

Además, nos estamos refiriendo a la *práctica de estimar cantidades* como una herramienta que nos ayuda a estudiar características de comportamientos en tareas propias de la estimación y asociadas con la distribución y colocación de cantidades, así como diferentes situaciones donde la percepción toma un rol importante. En este sentido, en el siguiente apartado describimos las actividades que utilizamos para estudiar estas ideas.

3.3 Pautas para las actividades exploratorias

Al principio, en el apartado 2.2 se menciona que los experimentos realizados por Siegler y Both (2004), sobre los estudios de estimación en la línea recta con niños y adultos de tribus nativas del amazonas, son relacionados con la escala logarítmica y que comparábamos también con cuestiones cotidianas en el sentido de la percepción.

En este apartado vamos a comentar componentes referentes al *comportamiento logarítmico* y a una característica particular de la escala logarítmica que denominamos *depreciación de la unidad*. El primero lo estudiamos desde la covariación logarítimica (Ferrari, 2008; Ferrari y Farfán, 2010, 2017) y el otro con elementos que caracterizan a la idea de la escala logarítmica en el sentido de la percepción, con el fin de construir actividades exploratorias que nos ayuden a comprobar nuestras hipótesis.

3.3.1 Comportamiento logarítmico

En la revisión de la bibliografía identificamos tres formas de la presentación del logaritmo (Figura 44): como función inversa, como área bajo la curva y la relación de dos progresiones, la mayoría de ellas enmarcadas en estudios involucrados con la variable tiempo. Estos trabajos se relacionaban al comportamiento sobre el cambio en contexto de crecimiento de alguna planta o microorganismos. En otro sentido, también encontramos que el logaritmo ayudó a dar sentido a cierto fenómenos relacionados con la estimación de cantidades.

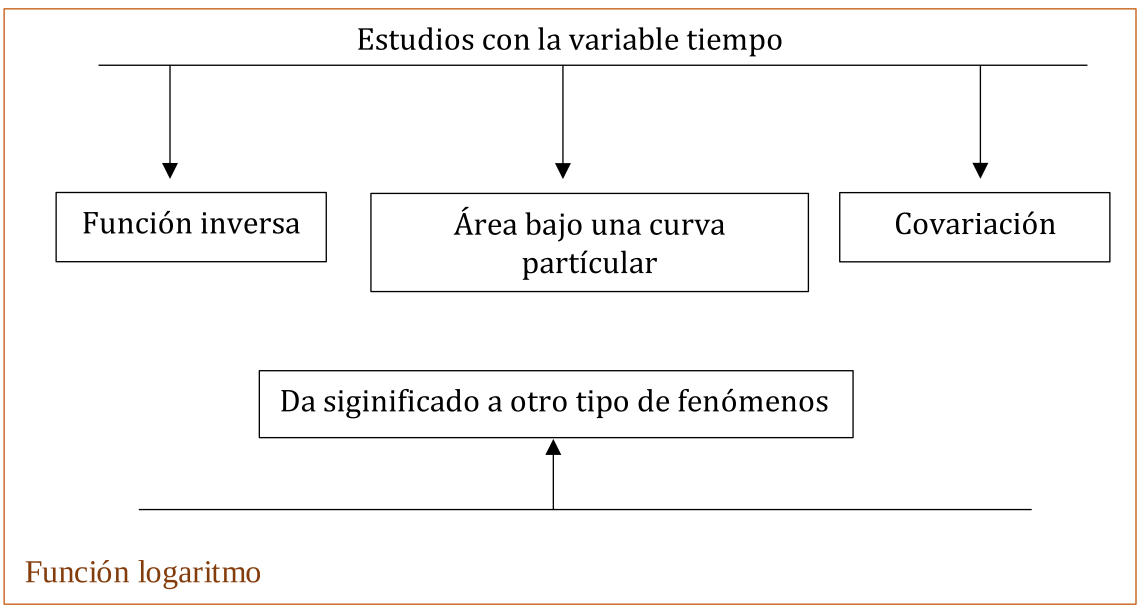


Figura 44. Estado actual de los estudios sobre la función logaritmo

Ahora bien, cuándo hacemos mención a *comportamientos logarítmicos* nos referimos a la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas o la *covariación logarítmica*. En (Ferrari, 2008) se hace un acercamiento a la epistemología de los logaritmos revisando varios trabajos de científicos relacionados a ellos. Por ejemplo, revisa a Napier (1560-1617) quien hace un aporte importante con sus tablas de logaritmos en 1614, y la completa en 1619 explicando su uso y construcción. Napier explica sus logaritmos mediante la relación de una progresión aritmética y una geométrica, esto al recurrir a un modelo mecánico (Figura 45), donde se describe el desplazamiento de un punto que se mueve con velocidad constante, es decir, recorriendo espacios iguales en tiempos iguales, en correspondencia con el movimiento de otro punto el cual se mueve con velocidad proporcional al desplazamiento, misma que admite una explicación algebraica, distancias que van creciendo linealmente (números enteros) versus distancias que van decreciendo.

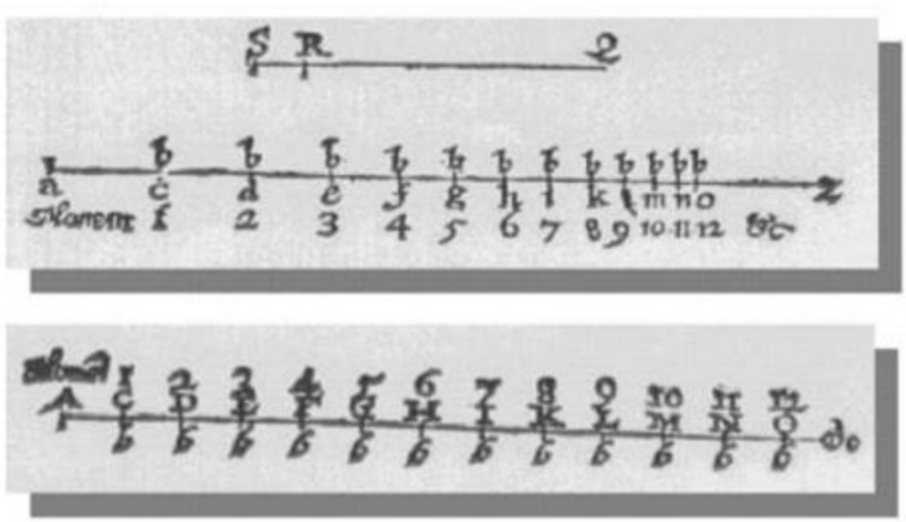


Figura 45. Modelo mecánico de Napier (Ferrari, 2008, p. I/V-136)

Ferrari menciona que esto último podría explicar el nombre que Napier les asigna: logos = razón; arithmos = número, es decir repetir un número tantas veces como sea necesario. El trabajo de Napier se refiere al comportamiento logarítmico dado por la covariación de dos progresiones, pero la descripción que otorga Ferrari también da una característica a este modelo, donde se describe dos crecimiento uno por la forma lineal con números enteros y otro por la distancias que van decreciendo. Esto lo podemos referir a los experimentos de estimar cantidades en rectas, donde la distancia de cantidades de lado izquierdo de la recta que hacen los niños se hace cada vez menor comparado con el lado derecho, como se muestra en la imagen (Figura 44).

Henry Briggs (1556-1630) contribuye al trabajo de Napier y otorga una nueva tabla en la que no se trabajará con las magnitudes de los segmentos sino con números, tomando la base 10 para facilitar los cálculos. Este advierte que toda relación entre una progresión geométrica y una aritmética genera un sistema logarítmico en términos de su autor, pero percibe que la única manera de facilitar cálculos es tomar la dupla (1,0), una de las primeras convenciones que se encuentran en este aporte (Ferrari, 2008).

3.3.2 Depreciación de la unidad

Los aportes de estos matemáticos contribuyeron después a la realización de instrumentos de cálculos. Edmund Gunter (1581-1616) diseña una calculadora mecánica llamada "regla de Gunter", este intrumento aparece en la obra *Canom Triangulorum* en 1620, en esta regla (Figura 46), se transportaban de un punto original, los segmentos con un largo proporcional a los logaritmos de los números inscritos.

Figura 46. Regla de Gunter (Ferrari, 2008, p. I/V-141)

En esta regla se dibuja por primera vez una escala logarítmica que años después se convertirían en los llamados papeles logarítmicos utilizados en la graficación de curvas para linealizarlas (Ferrari, 2008).

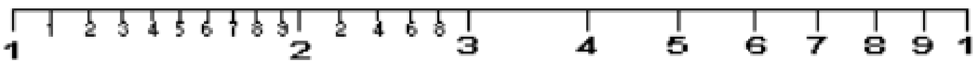


Figura 47. Escala logarítmica de la regla (Ferrari, 2008, I/V-141)

Después de estos aportes, varios autores por su parte crearon diferentes herramientas de cálculos donde la escala logarítmica era un elemento necesario para estos instrumentos. Las escalas logarítmicas actualmente son utilizadas en diversas áreas, a los fines de representar datos que tienen una variación muy grande o un rango de variabilidad muy amplio (Abrate y Pochulu, 2007). En relación con una representación lineal de números, una representación logarítmica exagera la distancia entre las magnitudes de los números en el extremo inferior del rango y minimiza la distancia entre las magnitudes de los números en los extremos medio y superior del rango (Siegler y Both, 2004). Es decir, si comparamos la distancia de la magnitud entre uno y dos con la magnitud entre 8 y 9, podemos notar que tiene diferentes distancias a pesar de ser números consecutivos. A esta característica la hemos denominado la *depreciación de la unidad* referida a la pérdida de valor de la unidad y muy partícularmente la hemos ejemplificado con contextos desde la percepción, como se mencionaba en el apartado 2.2.

Esta característica de la escala logarítmica la comparamos con la llamada ley de Weber que se acerca más hacia la idea de la percepción del cambio en las personas. Esta ley establece que: el menor cambio perceptible en la magnitud de un estímulo es proporcional a la magnitud del estímulo. Por ejemplo, si estamos sosteniendo en nuestra mano una masa de 100 gramos, tal vez no lo podamos distinguir de otro de 105 gramos, pero sí de uno de 110 gramos. En este caso, el umbral para percibir el cambio de masa es de 10 gramos. Pero en el caso de sostener una masa de 1000 gramos, 10 gramos no serán suficientes para que notemos la diferencia, al ser el umbral proporcional a la magnitud del estímulo. En su lugar, nos hará falta añadir 100 gramos para notar la diferencia (Siegler y Opfer, 2003). Dicho de otro modo, nuestra capacidad de percepción ante un cambio se basa en el valor relativo de la variación respecto del valor de partida.

En este ejemplo, la percepción está anclada a la idea de sentir un cambio, al combinar la interacción entre lo que cambia con el sentir que cambia, en este caso el cambio en el peso. Desde nuestra postura, la percepción tiene que ver con el contexto en el que se desarrolla el estudio de lo que cambia.

Las actividades que proponemos están enmarcadas en dos vertientes; el primero es la estimación de cantidades, con la forma en que se percibe la representación de cantidades en la línea recta identificando *comportamientos logarítmicos*, y el segundo, en la estimación de cantidades en contextos diferentes, donde queremos evidenciar la característica de la escala logarítmica *depreciación de la unidad*. Con este último queremos decir que, a diferencia de la escala lineal, donde el razonamiento aditivo insinúa el aumento constante para cada una de las variables (Reyes-Gasperini, 2016), es decir, la relación a más, más, ya no emergen en la escala logarítimica y lo queremos evidenciar al proponer situaciones de estimación.

3.4 Actividades Exploratorias

Las actividades que vamos a describir a continuación son las que nos van a ayudar a robustecer la problematización de *lo logarítmico*. Nos interesa también, construir estas actividades para niños de educación primaria, donde reconocemos que la adquisición de conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años requiere una investigación que se lleve a cabo en diversos entornos de aprendizaje (Björklund, Heuvel-Panhuizen y Kullberg, 2020). En ese sentido diseñamos dos tipos de actividades exploratorias:

En el primer momento se propone realizar una replicabilidad de los experimentos hechos por Siegler y Both (2004) y Dehaene (2008). En el sentido de Norton (2015), una replicabilidad requiere de hacer el mismo experimento, pero con variaciones que contengan los nuevos objetivos estudiados.

3.4.1 Actividad “A: Estimación sobre la recta”

La siguiente tabla muestra la actividad sobre estimar cantidades sobre la línea recta. En esta actividad se utilizaron hojas de papel con una línea de 25 cm y diferentes intervalos. En la primera parte de exploración (A) se dieron 4 diferentes intervalos cada uno con una intención que se describe en la parte derecha de la tabla. La segunda parte de la exploración (A.1) Se hizo una variación al experimento cambiando la dinámica, donde se usan cantidades habladas para ser estimadas sobre la línea recta.

Tabla 6. Actividad A, estimación de cantidades sobre una recta.

Nombre	Descripción	Intención
A.1) Estimación de cantidades escritas sobre la línea recta	Se pide al niño estimar sobre la línea recta cantidades en diferentes intervalos. 1.- 0 – 100 2.- 0 – 500 3.- 0 – 1000	La parte 1 y 2, es evidenciar la distribución lineal de las cantidades sobre la recta.

	4.- 0 – 10, 000	La parte 3 y 4, es hacer el reto con cantidades no tan cotidianas para el niño.
A.2) Estimación de cantidades habladas sobre la línea recta.	Se pide estimar sobre una única recta cantidades entre un intervalo de 0 a 500 y de 0 a 1,000.	La intención es analizar la forma de distribución de las cantidades sobre la recta.

Fuente: Elaboración propia

Los números que se proponen para ser estimados son seleccionados al hacer un muestreo, de donde se toma como referencia lo mencionado en Siegler y Both (2004) donde con el fin de no beneficiar a los comportamientos lineales ni logarítmicos, se seleccionaron aleatoriamente 10 números antes del 30, y 14 entre el 30 y el 100. En este sentido se hicieron estas mismas adaptaciones a las cantidades que ahora se estiman. En la siguiente tabla se enlistan dichos números:

Tabla 7. Números seleccionados para ser estimados

Actividad A			
0 – 100	0 – 500	0 – 1000	0 – 10, 000
3	19	46	1350
4	26	79	1600
6	38	91	2700
8	47	108	3000
12	63	131	3660
17	79	148	4220
23	97	212	4775
25	111	237	4840
33	126	269	5248
39	147	298	5600
43	159	368	6500
48	168	391	6755
52	181	437	6883
61	239	463	7115

64	261	516	7450
65	276	597	7553
74	297	623	7600
76	314	649	8634
79	356	717	8881
81	377	739	8900
84	404	821	8953
90	427	849	9300
96	484	937	9435

Fuente: Eleboración propia

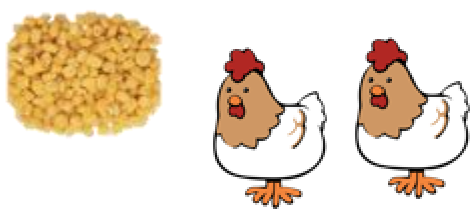
En esta actividad se pretende estudiar como la relación de las variables, cantidad a estimar – estimación, pueden generar *comportamientos logarítmicos* cuándo las cantidades son poco familiares para los niños.

En un segundo momento, se propone una serie de actividades relacionadas con la estimación en diferentes contextos. El primero refiere a la distribución de alimento para gallinas, el segundo a la venta de productos, el tercero a la cantidad de detergente que se usa para lavar ropa y finalmente a la preparación de limonada.

Con estas actividades se pretende evidenciar la característica de la escala logarítimica *la depreciación de la unidad*, donde consideramos que se manifiesta en el sentido de la percepción cuándo se estiman cantidades en un contexto diferente. En la Tabla 8 se presenta la descripción de la actividad y la intención de cada una de ellas.

3.4.2 Actividad "B: Alimentando gallinas"

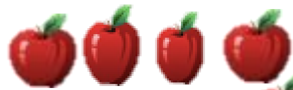
Tabla 8. Actividad B, criando gallinas.

Nombre	Descripción	Intención
B) Criando gallinas	Se da la siguiente situación: Tu tienes dos gallinas, y para darle de comer necesitamos esta cantidad de maíz (se muestra una gallina en dibujo y una cantidad de lentejas asemejando el maíz) 	Esta primera parte es para que identifique la relación, a dos gallinas una sola cantidad de alimento, como regla de correspondencia.
B.1)	Si un familiar te regala una gallina más ¿Cuánto maíz necesitarías para darle de comer a las gallinas? (Se agrega un dibujo más y se muestra que hay más alimento en un recipiente) Después se agrega una más y se vuelve a repetir la pregunta.	Esta segunda parte con la intención de encontrar la idea de a más gallina más alimento. (Relación lineal)
B.2)	Ahora imagina que tienes un corral con 11 gallinas y para que coman muy bien ocupo esta cantidad de maíz. (se coloca la cantidad de dibujos y la cantidad de maíz) Si te regalo una más ¿cuánto alimento necesitarías para alimentar a todas las gallinas?	Esto para evidenciar que la proporción más gallinas más alimento ya no se cumple y solo quede en la percepción de suficiente comida para todas.

Fuente: Elaboración propia

3.4.3 Actividad “C: Trabajando como tendero”

Tabla 9. Actividad C, trabajando como tendero

Nombre	Descripción	Intención
C) Trabajando como tendero	Tu trabajas en una frutería y dos personas llegan a comprarte manzanas. Luis te compra  María te compra  Si por la compra, Luis pago 11 pesos y María 28 pesos ¿A quién le podrías regalar una manzana más? ¿Por qué? ¿Cuántas manzanas tendría que comprar alguien para que le regales una más?	En esta actividad la intención es evidenciar el valor de la unidad relacionadas con el valor que adquiere una manzana más, cuándo se comparan las dos compras.

Fuente: Elaboración propia

3.4.4 Actividad "D: Lavando Ropa"

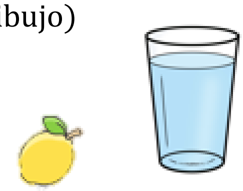
Tabla 10. Actividad D, Lavando ropa.

Nombre	Descripción	Intención
D) Lavando Ropa	Para lavar la ropa que se muestra  Se necesita la siguiente cantidad de detergente (se muestra la cantidad).  Si agregamos 4 prendas de ropa más ¿Cuánto detergente más necesitaríamos?	Esta primera actividad es para establecer la relación lineal entre cantidad de detergente y cantidad de ropa.
D.1	Ahora, para la siguiente pila de ropa  Se necesita la siguiente cantidad de detergente:  Si le agrego una prenda más ¿Necesitaría más detergente o es suficiente con el que tengo? ¿Por qué?	Hacer emerger la relación logarítmica a través del valor que posee la unidad, en este caso de una prenda más, en cantidades grandes.

Fuente: Elaboración propia

3.4.5 Actividad “E: Elaborando limonada”

Tabla 11. Actividad E, Elaborando limonada

Nombre	Descripción	Intención
E) Elaborando limonada	Si para prepararte una limonada ocupas un vaso del siguiente tamaño (se muestra el dibujo) y un limón de este tamaño (se muestra el dibujo)  Si quieres hacer una limonada para ti y para tu mamá ¿Cuánto limones ocupas para que los dos tenga suficiente limonada?	Hacer emerger le relación lineal de a un vaso un limón, para preparar limonada.
	Ahora, si tienes visita de tu familia y solo tienes una jarra del siguiente tamaño.  ¿Cuántos vasos de agua y limones necesitas para que alcance a todos limonada?	Explorar la estrategia para estimar cantidades cuándo no se conoce la relación para elaborar cantidades grandes de limonada.

Fuente: Elaboración propia

3.5 Una prueba piloto

Para probar cuál era la reacción de niños al enfrentarse a estas situaciones, se optó por hacer una prueba piloto de las actividades B, C, D y E, pero dadas las condiciones sobre la epidemia del Covid-19 se adaptó unos acetatos y se logró la colaboración de una profesora de la Escuela Nº 23 Remedios Escalada de San Martín Navarro de Buenos Aires, Argentina. Ella envío las actividades a tres estudiantes: Simón de 11 años, micaela de 10 años y Celeste de 9 años, de quién a continuación mostramos los resultados de esta prueba piloto.

En la primera tabla se muestran las respuestas de los tres niños con respecto a la primera actividad y de lado derecho se mencionan los aspectos que se tomaron para mejorar dichas actividades.

Tabla 12. Prueba piloto actividad B.

Actividad B y B.1		
Niño	Respuesta	Datos para la mejora de la actividad.
Simón	S: … ¿los puedo hacer con mis gallinas?, qué tengo acá, porque no sé cómo es ahí, porque ese poquito de alimento para dos gallinas tengo que dar de dos granitos a cada una, no se llena el buche la gallina, lo puedo hacer acá con mi maíz y mis gallinas.	Simón nos habla desde su experiencia al criar gallinas, nos dice que no puede pensar, porque la relación del alimento con la gallinas es absurda, pues con eso no se alimenta la gallina. Esta experiencia nos hizo pensar en no poner la situación plasmada en un papel sino buscar algo más tangible, por eso tomamos la decisión de

		usar dibujos recortables y el alimento en semillas.
Micaela	M: … necesitas un poco más de maíz para darle a la tercera gallina.	Micaela establece la relación a más gallinas más alimento, logrando el objetivo de esa primera situación.
Celeste	C: … un poco más se necesita para las cuatro gallinas, y para las doce gallinas un kilo	Celeste nos muestra que ella mide la cantidad en kilos, asemejándose a lo que quizás comentaba Simón, que la cantidad establecida en la situación no era la correcta.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 13. Prueba piloto actividad C.

Actividad C		
Niño	Respuesta	Datos para la mejora de la actividad.
Simón	S: "para mi no sé porque hizo una compra grande como en todos lados, si haces una compra grande siempre te regalan algo, no me acuerdo como se llama, a Ana yo le regalaría una manzana más porque hizo una compra grande el de las manzanas"	Simón nos habla nuevamente desde su experiencia, el considera que debe de regalarle una manzana a quién compró más manzanas, pues eso usalmente hacen en las tiendas, donde si haces una compra grande te regalan algo.
Micaela	M: "A quién le podría regalar una manzana más es a Luis porque tiene menos que Ana… debería de	Micaela y Celeste se van por el lado de la solidaridad, pues consideran que a la persona que

	comprarle para regalarle una más (leyendo la segunda pregunta) sería la cantidad de manzanas, tres o cinco para que le regales una más como le hicieron a Luis”	habría de regalarle una manzana más es a la que tiene menos. Por tanto, esto nos sirvió para buscar darle valor monetario a la compra de manzanas, como se muestra en la actividad que mencionamos anteriormente.
Celeste	C: “A quién le debería regalar una manzana más es a Luis, porque Ana tiene más y para quien alguien regala una manzana más a una persona, debería de comprar, 4, 3, 2 o 1”	

Fuente: Elaboración propia

Tabla 14. Prueba piloto actividad D.

Actividad D y D.1		
Niño	Respuesta	Datos para la mejora de la actividad.
Simón	S: “para lavar la ropa que se muestra, … dice, se necesita la siguiente cantidad de detergente, y marca la cantidad de detergente y después si le agregamos 4 prendas más ¿Cuánto detergente más necesitamos?, y yo creo que medio vasito detergente porque agata[7] un poquito tiene con tres prendas y con cuatro más yo creo que medio vasito”	En esta actividad Simón establece primero la relación a más ropas más detergente. Pero al ver la pila de ropa menciona que el detergente es suficiente, aunque se le agrege una ropa más.

[7] Expresión para decir que será muy poco detergente.

	S: "yo creo que con todo lo que tiene ahí, con eso le tiene que alcanzar para lavar toda esa ropa"	
Micaela	M: (No respondió)	
Celeste	C: "Se necesita, un poco más de detergente para lavar más ropa…Es suficiente lo que tiene porque eso es mucho"	Al igual que Simón, Celeste hace el mismo razonamiento, entre una cantidad pequeña de ropa y una más grande.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 15.Prueba piloto actividad E.

Actividad E y E.1		
Niño	Respuesta	Datos para la mejora de la actividad.
Simón	S: "necesitas un limón más para hacer otra limonada, un limón más con un vaso menos de lleno de agua" S: "Yo quisiera saber cuántos litros de agua le entran al vaso, cuántos litros o centímetros"	Simón propone la relación de un limón y un vaso para la limonada, para la segunda limonada ocupa lo mismo otro vaso con agua y otro limón. Pero para la jarra, ya no logra encontrar la relación y lo que solicita es la medida del vaso para poder responder.
Micaela	M: "Se necesitan para hacer una limonada dos limones cortados por la mitad y por pedacitos, y de agua debes echar un poco y probar, tienes que llevarla y tener que revolverla y revolver para que quede bien y bien limonada"	Micaela nos cuenta cuál es el procedimiento para hacer una limonada, por tanto, nos está hablando desde su experiencia dejando ver que se necesita ser más preciso en la pregunta que

		se hace con respecto de está actividad.
Celeste	C: (no contestó)	

Fuente: Elaboración propia

En esta primera prueba observamos que al resolver las actividades los niños comienzan por hacer una relación proporcional a más, más, por ejemplo a más ropa más detergente. Pero, cuando se trata de la unidad, para algunos de ellos no tiene sentido agregar más detergente, pues el que tienen es suficiente, es decir, su relación a más, más ya no se mantiene para este caso. Tambien tratan de obtener más información, por ejemplo, en la medida del vaso para el caso de la jarra de limonada, pues esto ayudaría a dar un valor más exacto de la cantidad necesaria. Además, no dejamos de lado la experiencia o acercamiento a estos contextos que nos cuentan los niños.

Con esta exploración se dio lugar a hacer ajustes a las propuestas de las actividades. Debido a que hubo varias cosas que nos hubiera gustado preguntarle a los participantes en el momento, decidimos hacer el experimento de forma presencial. Para este caso, tuvimos la oportunidad de poner en escena estas actividades con un niño, del cual reportamos en esta investigación.

3.6 Un estudio de caso

Para la aplicación de estas actividades se considera los estudios de caso, en el sentido de que la investigación con este elemento comprende un método global, que abarca la lógica del diseño, las técnicas de recopilación de datos y enfoques específicos del análisis de datos (Yin, 2009). Además, se reconoce que los estudios de casos no representan una muestra de la población o de un universo concreto, sino a proposiciones teóricas ya que el objetivo es ampliar o generalizar teorías (generalización análitica) y no enumerar frecuencias (generalización estadística) (Jimenez y Comet, 2016).

Con la contingencia por la pandemia del COVID-19, no se tenía acceso a centros escolares donde se pudieran poner en práctica las situaciones antes mencionadas. Se recurrió entonces al método de estudiar un solo caso. El estudio de un solo caso, confiere a que este cumpla con todas las condiciones para probar la teoría, donde se puede confirmar, desafiar o ampliar, por tanto, puede ser útil para determinar si las proposiciones de una teoría son correctas o si algun conjunto alternativo de explicaciones podría ser más relevante (Yin, 2009).

El participante para la exploración fue Javier, un niño de 8 años que gusta de los videojuegos y acaba de culminar el tercer grado de primaria, él vive con sus padres y sus dos hermanos en la colonia San Juan Pantitlán en la ciudad de México.

Se consideró que Javier cumplía con las características para poner a prueba las actividades diseñadas. Para la puesta en escena con Javier, se elaboraron tres sesiones en su casa de alrededor de 30 minutos cada una, la puesta en escena fue videograbada y se contó con el material necesario para su desarrollo.

La forma en que se analizan los datos obtenidos con Javier se hacen con la conformación de dos categorías de análisis que ya se anunciaban en el apartado 3.6.2 y 3.6.3, 1) lo relativo a *comportamientos logarítmicos*, esto se reconoce a partir de la observación de lo qué hace Javier en la primera actividad y 2) lo relativo a la característica *depreciación de la unidad,* esto a partir de analizar las *acciones* y *actividades* que hace Javier en las actividades exploratorias, donde nos apoyamos de las preguntas: *qué hace* y *cómo lo hace*. Estas preguntas están asociadas a la idea de la anidación de prácticas, Cantoral et al. (2015) mencionan que esta anidación se puede descomponer en dos mecanismos, uno de subida y otro de bajada (Figura 48). Podemos decir que en la idea "de subida" la construcción social comienza por la acción del sujeto con el medio y la idea "de bajada" la construcción social comienza con la norma que regula el quehacer de los individuos en colectividad.

En este sentido, esta investigación se posiciona en "la bajada" del modelo de anidación de prácticas, pues partimos de la *práctica socialmente compartida* "estimar" para analizar las acciones y actividades que hace el niño al momento de enfrentarse a situaciones reguladas por esta práctica.

Figura 48. Relación de bajada y de subida (Cantoral et al., 2015)

La siguiente tabla que mostramos es el instrumento que vamos a utilizar para el análisis de los datos, donde las categorías de análisis van acompañadas de indicadores y una descripción.

Tabla 16. Instrumento para el análisis de los datos.

Situación	**Categoría de análisis**	**Indicadores**	**Descripción**
Estimar cantidades sobre una recta	*Comportamientos logarítmicos*	**Acción** (por observación del investigador)	
		*Análisis estadístico	
Estimar cantidad en diferentes contextos	*Depreciación de la unidad*	**Acción** (¿qué hace?) **Actividad** (¿cómo lo hace?)	

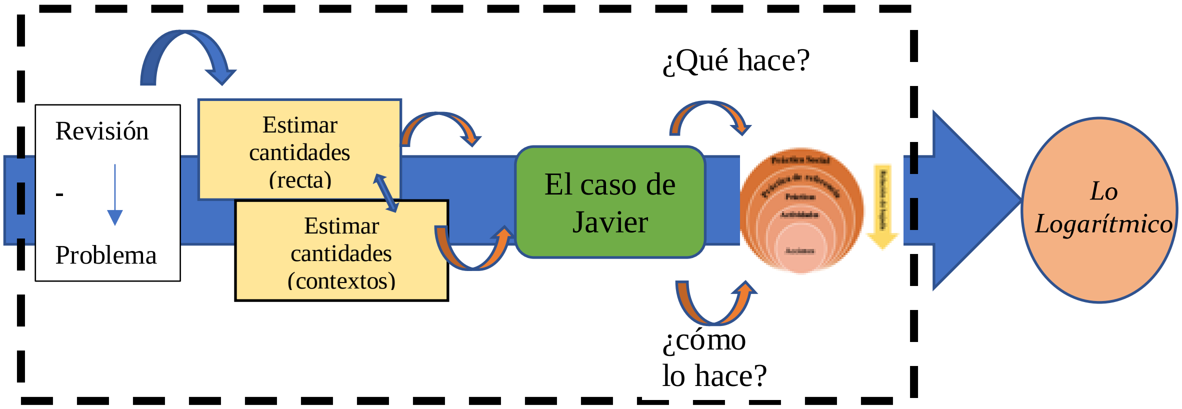
Fuente: Elaboración propia

Lo que vamos a entender por acción y actividad lo retomamos de la siguiente manera: La *acción* es la intervención directa del sujeto ante una situación específica. En este caso se consideran desde dos aspectos, la *acción* "por observación" qué es la que el investigador interpreta de lo qué hace o dice el participante sin necesidad de un cuestionamiento, y la acción "qué hace" la referimos al diálogo entre lo qué hace el participante y el investigador (Caballero-Pérez, 2018).

La *actividad* consiste en el establecimiento de una instrumentación mediada culturalmente que organiza a las acciones de forma consiente e intencional. En esta parte nos interesa conocer el procedimiento u operaciones que realiza Javier con las actividades exploratorias.

*En la tercera columna agregamos el análisis estadístico como un elemento que nos va a ayudar a estudiar los comportamientos de las posiciones de las cantidades sobre la recta, por tanto, este no va a referir a la acciones ni actividades que ejerce Javier.

En el siguiente esquema resumimos la ruta metodológica para esta investigación:



Análisis socioepistemológico.

4. CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1 Análisis de los resultados

En este capítulo hacemos un análisis de lo sucedido en las tres sesiones que se programaron con Javier. Para cada sesión se combinó una actividad sobre la estimación en la recta y otra sobre estimación en otros contextos. Primero se hace una análisis descriptivo de ambas actividades, donde se comenta cómo se desarrolló cada actividad, y después se hace un análisis con el instrumento de análisis propuesto en el capítulo anterior.

4.2 Primera sesión

En esta sesión se presentan las actividades A.1-1, A-2, B y B.1. Primero se da la indicación para la actividad **A.1-1**, se da una hoja con la línea recta con etiqueta en sus extremos de 0 a 100 y las cantidades a estimar escritas en la parte superior como se muestra en la imagen (Figura 49), para cada estimación se daba la indicación que tenía 4 segundos para hacerlo.

Figura 49. Instrumento para estimar cantidades sobre la recta.

La indicación era: “coloca una marca sobre la línea donde consideres que está ubicada la cantidad que está escrita en el papel”, de esta manera se hacía con cada una de las cantidades. En el desarrollo de esta actividad no hubo una retroalimentación, solo al final se le hizo la pregunta ¿Qué hiciste para elegir la posición de las cantidades?

A esta pregunta se da el siguiente diálogo con Javier:

> **Investigador (I):** ¿Qué hacías?
> **Javier (J):** Pensar
> **I**: ¿Pensar qué?
> **J:** Como los ponía cuando estaba en la escuela
> **I:** ¿cómo le hacen en la escuela?
> **J:** Cuadrito por cuadrito
> **I**: Ah bueno

En esta respuesta podemos ver que la técnica de Javier estaba en tratar de distribuir equitativamente usando lo que recordaba de su escuela, es decir tomando la idea de cuadrito por cuadrito, es decir dejar mismas distancias entre cada cantidad. Esta idea parece funcionarle, pues en el análisis de las posiciones se encontraron que los números se distribuyeron casi de forma equitativa.

Para analizar las posiciones de las cantidades estimadas hicimos una multiplicación sencilla dada por la medida de la posición con regla (MR) multiplicado por el valor que se obtiene de dividir la cantidad que representa la recta entre el tamaño de la recta (DR), es decir, para este caso $DR = \frac{100}{25} = 4$. De esta manera la ecuación queda así: $Estimación = MR \times DR$.

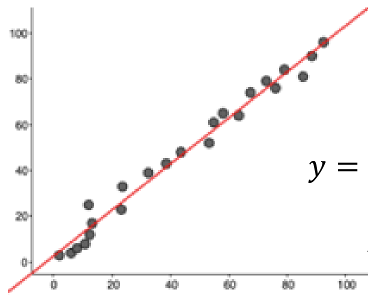
Es importante señalar que, las cantidades que se obtienen de esta operación también son aproximaciones, pues sería muy complicado dar una exactitud de la posición de cada cantidad. En la siguiente tabla se muestran tres columnas de esta primera actividad, en ellas están las cantidades a estimar, las medidas con regla y la estimaciones al hacer la operación.

Tabla 17. Datos de la actividad A.1-1.

Actividad A-1 (0 – 100)		
Cantidad por estimar	Medida con regla convencional	Posición de la cantidad estimada $MR \times DR$
3	0.5	2
4	1.5	6
6	2	8
8	2.7	10.8
12	3.1	12.4
17	3.3	13.2
23	5.8	23.2
25	3	12
33	5.9	23.6
39	8.1	32.4
43	9.65	38.6
48	10.9	43.6
52	13.3	53.2
61	13.7	54.8
64	15.85	63.4
65	14.5	58
74	16.85	67.4
76	19	76
79	18.2	72.8
81	21.35	85.4
84	19.75	79
90	22.1	88.4
96	23.1	92.4

Fuente: Elaboración propia

Para el análisis del comportamiento de las posiciones realizamos una regresión lineal tomando como variable dependiente las cantidades estimadas y variable independiente a las cantidades a estimar. Para esta primera actividad se obtuvo la siguiente gráfica.



$y = 1.0056x + 2.639$

$R^2 = 0.9802$

Figura 50. Regresión lineal de los datos (0-100)

La curva que mas se ajustaba a los puntos era una línea recta como se muestra en la imagen, el R^2 para este tipo de comportamiento se ajustaba más a una lineal que a una logarítmica. Estos resultados eran lo que esperábamos, pues estas cantidades eran familiares para Javier dada su experiencia escolar.

Además, entre lo que decía Javier cuándo resolvía la actividad era mencionar la palabra “la mitad”, haciendo referencia a la mitad de la recta y por tanto la mitad entre 0 y 100. Javier tomaba como referencia la mitad para distribuir las cantidades y por lo tanto, las cercanas a la mitad eran más precisas.

Para la actividad **A.1-2** seguimos el mismo procedimiento de análisis obteniendo los siguientes datos (Tabla 18):

Tabla 18. Datos de la actividad A.1-2.

Actividad A-2 (0-500)		
Cantidad por estimar	Medida con regla convencional	Posición de la cantidad estimada
19	2.9	58
26	2	40
38	1.8	36
47	7.5	150
63	4.6	92
79	7.6	152
97	14.3	286
111	9.3	186
126	12.4	248
147	8.9	178

159	14.8	296
168	8.9	178
181	7.1	142
239	10.9	218
261	7	140
276	12.1	242
297	13.3	266
314	14.6	292
356	14.7	294
377	13	260
404	20	400
427	17.2	344
484	19.2	384

Fuente: Elaboración propia

El comportamiento de la distribución tuvo puntos más dispersos en la gráfica, sin embargo la regresión lineal muestra que la curva (Figura 51) que mas se ajustaba era la lineal con un $R^2 = 0.7519$ en comparación con el logaritmo con un $R^2 = 0.6464$.

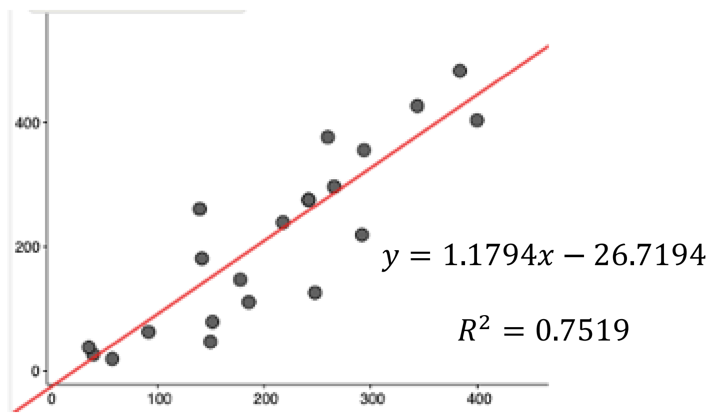


Figura 51. Regresión lineal de los datos (0-500)

Para la actividad **B** se utilizó dibujos de gallinas recortadas y un poco de lentejas como representación del alimento para estos animales. El investigador contiene la siguiente conversación con Javier:

Investigador (I): Yo te regalé dos gallinas, esas son tuyas. Y para que les des de comer y coman bien, tu nada más ocupas esta cantidad de comida… con esa cantidad tus gallinas comen muy bien. Si yo te regalo otra gallina más, ¿cuánta comida ocupas más o con esa es suficiente?

Javier (J): Las puedo compartir así (señalando a cada una de las gallinas)

La primera acción de Javier fue *dividir* equitativamente la cantidad de alimento entre las gallinas, como se muestra en la siguiente imagen (Figura, 52):

Figura 52. Distribución equitativa del alimento.

El investigador le comenta que ese alimento es para todo el día a lo que Javier solo trata de equilibrar la cantidad entre gallinas. Después de lograr lo más equilibrado posible, el investigador agrega una gallina más y se obtiene la siguiente conversación:

I: Ahora te regalo una gallina, ¿con esa te alcanza? O…
J: (no deja terminar a I) ¡No!
I: ¿Qué ocupas?
J: ¡Más!
I: ¿cuánto más ocuparías?... ¿otra poco así? O ¿menos?
J: Ándale así, con eso (I le coloca un poco más de granitos y J comienza a juntar todo y comienza a dividir todo en partes iguale para cada gallina)

En esta parte Javier identifica que necesita más comida porque se agrega una gallinas más, lo que hace es juntar toda la comida y comienza a *dividir* en partes iguales, en este sentido reconocemos que intenta hacer una distribución de forma lineal, a más gallina más comida para que todas tengan la misma cantidad.

Después se le colocan un total de 15 gallinas (Figura 53) con una cantidad de comida, se le pregunta qué pasa si le regalo una gallina más.

Figura 53. Cantidad total de gallinas que alimentar

I: ¿Qué pasa si te regalo una gallina más?
J: mmm
I: ¿Necesitas más alimento?
J: No, con ese me alcanza

Para Javier la cantidad de comida es suficiente para las gallinas, por tanto la relación de a más gallinas más comida ya no sobresale en este momento. Después, el investigador le comenta, qué sucede si le agregamos una gallina más, a lo que Javier contesta que ahora sí necesitaría más alimento. En este sentido, la cantidad de una gallinas más, hizo cambiar de parecer a Javier. En esta parte identificamos que la relación proporcional, que aparecía en el principio de la actividad, ya no emerge cuándo aumentamos el número de gallinas. Para estas actividades reportamos lo siguiente en el instrumento de análisis:

Tabla 19. Resultados de la sesión 1

Categoría de análisis	Indicadores	Descripción
Comportamientos logarítmicos	**Acción:** Dividir	Divide mentalmente la recta a la mitad y toma eso como referencia para estimar el valor de cada cantidad, acercándola o alejándola del punto medio de referencia.
	Análisis estadístico: Comportamiento lineal.	La distribución en las cantidades es más acertada por la referencia que toma Javier. <u>No hay comportamientos logarítmicos.</u>
Depreciación de la unidad	**Acción**: Dividir Distribuir Decidir	-Divide el alimento en partes iguales. -Distribuye a cada gallina el alimento. -Decide no agregar más alimento cuándo a un conjunto grande de gallinas se agrega una más.

	Actividad: Comparar Percibir	-Compara la cantidad de comida con la cantidad de gallinas. -Percibe que la cantidad de comida es suficiente cuando se agrega una gallina más.

Fuente: Elaboración propia

En la tabla, en la parte de comportamiento logarítmicos, observamos que el punto de referencia que toma Javier para estimar la posición de las cantidades, en este caso, el punto medio, le ayuda a distribuir de forma “correcta”, logrando que dicha distribución se acerque a un comportamiento lineal, es decir, Javier estaba preocupado por hacerlo en la forma como se lo habían enseñado en la escuela.

En la segunda parte, sobre la depreciación de la unidad, notamos que las acciones que hace Javier están relacionadas con su actividad, por ejemplo, cuando divide y distribuye el alimento, lo hace para que a todas las gallinas le toque la misma cantidad, considerando que la distribución sea justa, es decir, *compara* la cantidad de gallinas entre el alimento, para estimar cuánto alimento va a faltar si se agrega una gallina más.

Pero, cuando se tienen una cierta cantidad de gallinas y solo se agrega una más, él *percibe* que la cantidad de alimento que hay es suficiente. Decimos que *percibe* porque no pone en juego un razonamiento como al principio de la actividad, es decir, no divide la nueva cantidad de alimento entre las gallinas, sino que capta la cantidad de alimento y la compara con la cantidad de gallinas. En este sentido, la *percepción* en este escenario se caracteriza por ser la actividad para la toma de una decisión entre lo objetivo de la encomienda (dar de comer a las gallinas) y lo razonable (a más gallinas más alimento).

4.3 Segunda Sesión 2: Actividad “A, C y D”

Para esta sesión hicimos un cambio a la actividad **A.1-3**, en lugar de escribir las cantidades a estimar en la hoja que contiene a la recta, lo que se hizo fue colocar las cantidades en papelitos y colocarlos en un recipiente, donde la tarea fue sacar un papel y estimar sobre la recta la cantidad indicada (Figura 54).

Esta decisión se tomó por dos consideraciones; la primera fue que en la sesión anterior notamos que la cantidad escrita en la parte superior de la hoja donde estaba la recta distraía mucho a Javier, y para verificar si hubiera un cambio en la posición de las cantidades variamos la actividad. Y como segunda consideración fue para darle una actividad relativamente diferente a Javier.

Figura 54. Escenario con ajuste a la actividad A.1-3

Para la actividad **A.1-3** que es estimar cantidades entre 0 y 1000 se obtuvieron los siguientes datos:

Tabla 20. Datos de la actividad A-3.

Actividad A-3 (0 – 1,000)		
Cantidad para estimar	Medida con regla convencional	Posición de la cantidad estimada
46	2.3	92

79	3.3	132
91	2	80
108	2.9	116
131	3.7	148
148	4.7	188
212	8.2	328
237	6.6	264
269	5.4	216
298	8.1	324
368	4.8	192
391	9.9	396
437	10.5	420
463	9.5	380
516	14.1	564
597	12.5	500
623	17.4	696
649	14.9	596
717	16.6	664
739	21.1	844
821	21.5	860
849	21.3	852
899	21.4	856
937	20.9	836

Fuente: Elaboración propia

La regresión lineal de estos datos nos muestra que la curva que más se ajusta es la lineal (Figura 55). En contraposición con la de un comportamiento logarítmico con $R^2 = 0.883$, el comportamiento lineal parece explicar mejor a estos puntos con un $R^2 = 0.9395$.

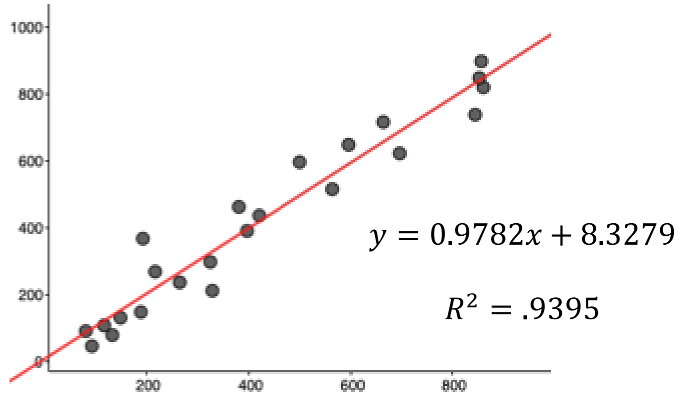


Figura 55. Regresión lineal de los datos (0 - 1,000)

En esta actividad Javier vuelve a su técnica empleada anteriormente, donde dividía la recta a la mitad, y tomaba ese punto como referencia para distribuir las cantidades. Esto deja ver que Javier conoce cuál es la mitad de 1000, y las cantidades que esta cerca de ella. Además, si se observa en la gráfica (Figura 55), hay un agrupamiento de puntos cerca del 0 y del 1000, por tanto podemos ver que estos puntos también fueron referencia para Javier, y dependiendo de la cantidad lo acercaba o alejaba de ese punto de referencia.

En la actividad **A.1-4** notamos un cambio en la distribución de los puntos, pues al analizar los datos encontramos que la curva que más se acomoda es la del logaritmo.

Tabla 21. Datos de la actividad A-4.

Actividad A-4 (0 - 10, 000)		
Cantidad por estimar	Medida con regla convencional	Posición de la cantidad estimada
1350	4.5	1800
1600	3.8	1520
2700	6.1	2440
3000	4.8	1920
3660	5.1	2040
4220	6.7	2680
4775	6.8	2720
4840	5.6	2240
5248	12.2	4880
5600	11	4400
6500	17.3	6920
6755	17.4	6960
6883	13	5200
7115	19.5	7800
7450	18.5	7400
7553	15.8	6320
7600	18.9	7560
8634	21.9	8760

8881	19.8	7920
8900	20.5	8200
8953	22	8800
9300	23.2	9280
9435	21.9	8760

Fuente: Elaboración propia

En esta actividad de estimación se muestra que el comportamiento entre la cantidad para estimar y lo estimado, se corresponde mejor a uno logarítmico con un $R^2 = 0.9084$ como se muestra a continuación:

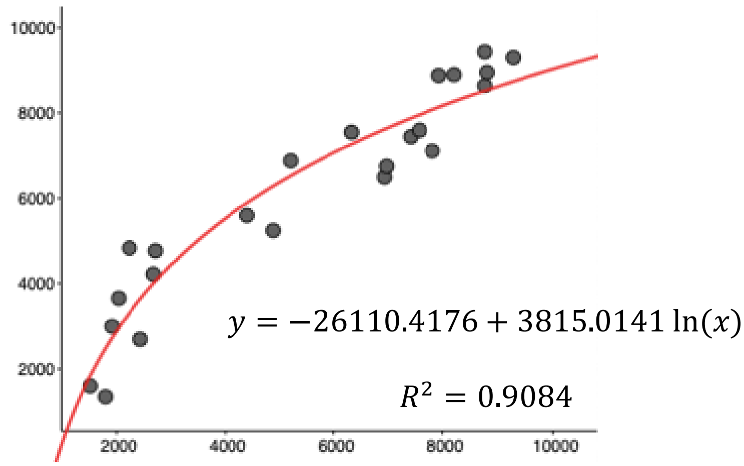


Figura 56. Regresión lineal de los datos (0-10,000)

Lo que identificamos es que Javier ya no estaba seguro de la ubicación exacta de las cantidades, pues al aumentar el tamaño del intervalo, sus conocimientos ya no son bastos para una colocación "correcta" de las cantidades. En este sentido notamos que Javier se confía de su *percepción* para colocar sobre la recta. Decimos *percepción* porque Javier se enfrenta a un escenario donde la cantidad es desconocida para él, esto lo observamos porque ya no se basa en su razonamiento anterior, donde tomaba el punto de referencia (la mitad de la recta) para la colocación, debido a que no conoce las cantidades cercanas a ese punto de referencia, es decir las cantidades cercanas a la mitad de 10000. Sin embargo, su experiencia previa le da ciertos elementos que le ayudan a tomar la decisión de colocar las cantidades en ciertos lugares, lo cual generó un comportamiento logarítmico en la distribución.

Para la actividad **C** y **D** se utilizó dibujos recortados para presentar la actividad. En la actividad **C** (Figura 57) se utilizó como referencia que sus hermanos "Berni" y "Carlos" eran los que le iban a comprar las manzanas, Berni era el que compraba más manzanas.

Figura 57. Escenario de la actividad B

Después de plantearle el escenario a Javier se obtiene el siguiente diálogo:

> **I:** ¿A quién le regalarías una manzana más?
> **J:** (cuenta las manzanas) A Berni
> **I:** ¿Por qué a Berni?
> **J:** Porque (se queda pensando)… *era como una oferta*
> **I:** ¡Ah! Como una oferta
> **J:** como una oferta, si me compran así (Señalando la mayor cantidad de manzanas) ya les doy estas.
> I: O sea, si compro esta cantidad ¿Me regalas una más?
> J: aja, *una más*.

Esta pequeña situación muestra que la relación a más manzanas más dinero no sobresale cuando se compran muchas manzanas, por tanto una sola manzana pierde su valor cuándo se compara con el total de manzanas compradas. Para Javier esta situación resulta familiar pues lo relaciona con la idea de oferta, que suele verse en los mercados o centros comerciales.

Para la actividad **D** se utilizó un recipiente de manera en que se represente la cantidad de detergente que se va a utilizar para lavar ropa. Para la parte D se le dijo que para lavar ciertas cantidades de prendas (3) se necesitaba una cantidad de detergente que llegaba hasta donde se mostraba la marca (Figura 58).

Figura 58. Elementos usados en la actividad D

Si se le agregaba una prenda más a esta cantidad, se le preguntó si necesitaría más detergente, a lo que contesta que se necesita más. Se le pide que señale cuánto más a lo que señala la medida de 100, es decir lo doble de lo que se necesitaba al principio. Después se le presenta una cantidad diferente de prenda y se obtuvo la siguiente conversación:

I: … Ahora, si yo tengo solamente este montón de ropa, si se junta toda, y para lavar la ropa ocupo todo esto como por aquí (señalando casi lleno el bote) … y, *si yo agrego una prenda más*, ¿con este detergente alcanza o abría que echarle más?
(J se queda pensando)
J: *con eso alcanza*.
I: ¿Por qué?
J: Porque es mucho

En esta parte, Javier menciona que cuándo se tiene menos ropa y se agrega una ropa más, implica agregar más detergente, incluso el doble. Pero, cuándo se tiene mucha ropa y mucho detergente, agregar una prenda más no hace diferencia, de tal manera que se tenga que agregar más detergente, pues el que hay es suficiente. En este sentido la unidad (una prenda) pierde el valor en cuanto al detergente que se usa para lavarla.

En esta segunda sesión obtuvimos los siguientes resultados de acuerdo con el instrumento de análisis.

Tabla 22. Resultados de la sesión 2

Categoría de análisis	Indicadores	Descripción
Comportamientos logarítmicos	**Acción:** Dividir **Actividad:** Percibir	-En la recta (0-1,000) divide y toma de referencia la mitad de la recta y la cantidad. -En la recta (0-10,000) toma la decisión de colocar según su *percepción* derivada de su experiencia previa.

	Análisis estadístico: -Comportamiento lineal. -*Comportamiento logarítmico*	-En la primera recta el análisis estadístico de los datos muestra que se ajusta a una línea. -La segunda recta, los datos se ajustan a una logarítmica (comportamiento logarítmico)
Depreciación de la unidad	**Acción:** Contar Agrupar Relacionar	-Cuenta la cantidad de manzanas que compro cada uno. -Agrupa las manzanas para ver quién compró más y a qué cantidad de ropa necesita más detergente o no. -Relaciona la primera cantidad de ropa con el detergente necesario para lavarla.
	Actividad: -Comparar -Percibir	- Compara las compras de las manzanas para decidir a quién regalarle una más. -Compara la cantidad de ropa con la de detergente. -Percibe que una prenda no cambia la cantidad de detergente.

Fuente: Elaboración propia

En la primera parte de la tabla, se puede observar que el cambio entre lo lineal y *lo logarítmico* está entre la acción de dividir teniendo un punto de referencia y la acción de decidir bajo la *percepción* ante lo desconocido. Esto provoca lo que ahora denominamos *comportamiento logarítmico* en la distribución de puntos sobre la recta.

En la segunda parte de la tabla, reportamos que, en la actividad de las manzanas él cuenta para *agrupar* y después *comparar* la cantidad de manzanas que compró cada uno de sus hermanos, con ese conteo relaciona a quién debe regalar una manzana más, en este sentido la manzana (en unidad) pierde valor en las cantidades mayor cuando son comparadas con las menores.

En la actividad del detergente, en la primera parte donde la cantidad son 3 prendas de ropa y se agrega una más, Javier a través de *señalar* la cantidad muestra que el valor de una ropa (la unidad) es mayor al doblar la cantidad de detergente que se usaría para lavarla. Al agregar más ropa y más detergente, y se agrega una más, el *percibe* que la cantidad de detergente es suficiente. Al igual que en la primera sesión, la *percepción* emerge para la toma de una decisión ante el objetivo de la actividad (lavar ropa) y lo razonable (a más prendas más detergente).

4.4 Sesión 3 – A.2.1 y E

En esta sesión la actividad **A.2.1** se realizó en dos momentos; el primer momento se pide a Javier estimar cantidades sobre una sola línea recta entre 0 y 500, y el segundo momento consistía en estimar las cantidades sobre una línea recta entre 0 y 1000, que iban a ser dictadas por el investigador.

En el primer momento fueron doce cantidades, se ocuparon las mismas que se utilizaron en la actividad A-2 (0-500). Los resultados que se obtuvieron fueron los que se muestran en la imagen (Figura 59).

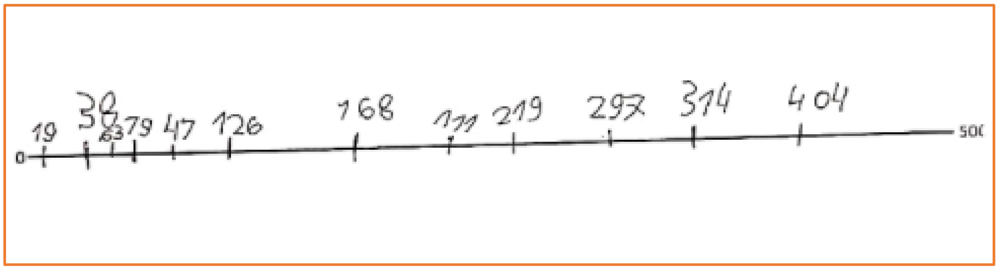


Figura 59. Estimación de Javier en la actividad A.2

El orden en el que las cantidades escritas fueron sacadas del recipiente es el siguiente; 219, 297, 168, 38, 19, 126, 314, 79, 63, 404, 111, 47. Podemos notar que las únicas cantidades que no corresponden al orden ascendente es el 47 y 111, esto se debe a que esas dos cantidades fueron las últimas en salir, por lo tanto Javier tuvo que colocarlos en espacios que estaban en blanco. En el análisis del comportamiento de estas estimaciones se encontró que la curva que mas ajustaba a los puntos es una línea recta (Figura 60).

De aquí podemos observar, que la primer cantidad que coloca Javier tiene un rol importante, pues funciona como referencia (además está escrita) para poder colocar las siguientes cantidades de una forma aproximada a su colocación convencional, por lo tanto los puntos de la gráfica tienen un comportamiento lineal.

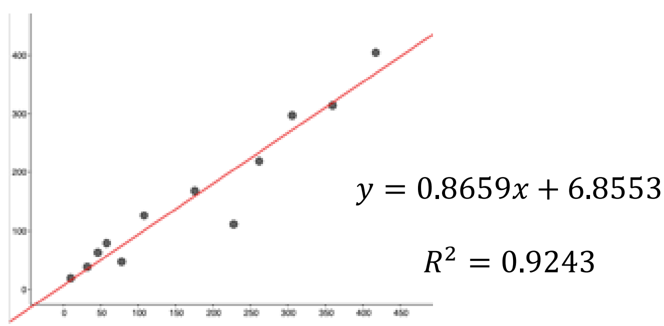
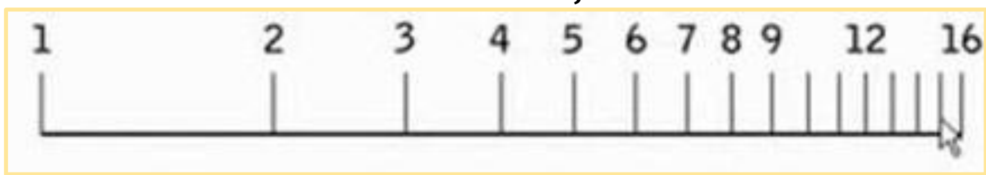


Figura 60. Regresión lineal de la actividad A.2.1.

Continuando con la actividad, en la segunda parte (**A.2.2**) donde las cantidades las dice el investigador, se dictaron los siguiente ocho números de forma ascendente; 115, 233, 342, 420, 630, 741, 810, 950. En la recta solo se colocaban las marcas de donde Javier consideraba que estaba ubicada la cantidad (Figura 61).

Estimación de Javier



Escala Logarítmica

Figura 61. Estimación de Javier vs Escala logarítmica

Lo que identificamos es que las distancias entre las cantidades son diferentes, las del lado izquierdo tienen más distancia y las del lado derecho tienen menos distancia entre si. La imagen de la estimación de Javier en la recta parece recordarnos a la escala logarítmica (Figura 61).

Al analizar los datos encontramos que la curva que mas se ajusta a estos puntos es la exponencial (Figura 62), esto se debe a que el comportamiento de las estimaciones en la recta estan representados de forma exponencial, tal y como al principio de este escrito lo haciamos ver con las características de la escala logarítmica.

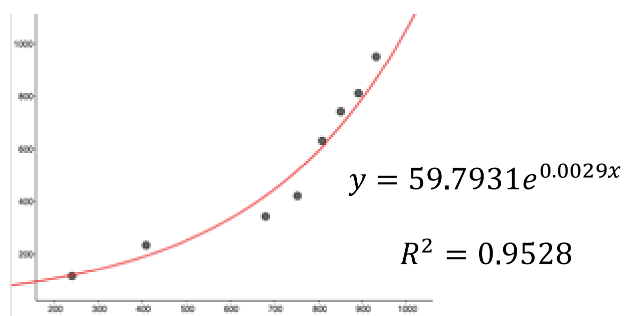


Figura 62. Regresión lineal de los datos de A.2.2

En estas dos actividades logramos notar las diferencias que hubo cuando se presentan cantidades escritas y habladas. Cuando son escritas, Javier logra tener algunos puntos de referencia para colocar las siguientes cantidades, pero cuando son habladas y no las escribe, las referencias ya no son tan obvias, obligando a confiar en su *percepción*. La percepción, como ya lo mencionamos anteriormente, es porque el razonamiento de utilizar los puntos de referencias para colocar las cantidades, ya no es un recurso sobresaliente, sino que Javier se basa en su experiencia anterior para lograr percibir la posición de las cantidades, provocando el fenómeno de un comportamiento exponencial en la distribución sobre la línea recta.

En la actividad **C** se da la indicación que para preparar un vaso de limonada se necesita la cantidad de un vaso de agua y un limón, es decir se establece una relación proporcional. En la primera pregunta se da la siguiente conversación.

> **I:** Si quieres hacer una para Berni y una para mi ¿cuánto ocupas de esto? (señalando las imágenes)
> **J**: ¿Tiene que saber buena o más o menos?
> **I:** Pues buena
> **J:** necesitaría… me dijo mi mamá que, para una limonada, para agua de limón, necesitas dos (limones) con un vaso así, necesitaría seis limones.

Lo primero que observamos es que Javier recurre a su experiencia haciendo limonadas y se da cuenta que para hacer un vaso de limonada se necesitan dos limones y no solo uno como se le estaba planteando. Por lo que, para hacer en este caso tres vasos de limonada el responde que necesita seis limones, de acuerdo a su nueva relación, a un vaso dos limones.

El siguiente reto es ahora estimar cuántos vasos y limones se necesitan para hacer una jarra de limonada, de esta actividad se obtiene el siguiente diálogo:

> **I**: A ver ahora, si quisieras hacer limonada para esta jarra, cuántos de estos ocuparías (señalando las imágenes).
> **J:** Pero ¿*Para cuántos vasos*?
> **I**: No, esta jarra y esta cantidad de vasos

(Javier comienza a colocar el vaso sobre la jarra tratando de ver cuántas veces cabe)
J: ¿Hasta llena o la mitad?
I: Sí, un poco llena.
(Pregunta esto para ver la posición del vaso en la parte superior)
J: Serían como cuatro (no seguro y todavía haciendo operaciones entre dientes) siete… (aún inseguro*) es de dos en dos*.
I: ¿Cuánto ocuparías entonces?
J: ¿Limones o agua?
I: de los dos, porque para una limonada se ocupa eso.
J: A ver el agua sería como por acá (señalando a la mitad de la jarra) … ya los limones
I: Pero, cuántos vaso ocupamos
J: Alrededor (comparando imágenes otra vez)
I: ujum
J: doce (esto al contar los vasos que caben)
I: doce, y ¿los limones?
J: … (se esfuerza por pensar y hacer cuentas)
I: Dime ¿cuántos crees?
J: ¿Cuántos limones?
I: si, con cuántos limones crees que se hace una de estas …
J: Catorce… creo

Lo primero a lo que recurre Javier es a preguntar la cantidad de vasos, pues lo que sabe hasta el momento es cuánto se ocupa de limones para un vaso de limonada. Para estimar la cantidad de vasos que puede necesitar lo que hace es *sobreponer* la imagen del vaso en la imagen de la jarra (Figura 63), *comparando* su tamaño y estimando la cantidad de vasos. Sigue comparando y empieza a decir entre dientes “de dos en dos” refiriéndose a la relación que estableció al principio para cada vaso. Al final de estar comparando las imágenes menciona que lo que se necesita de agua son doce vasos para la jarra. Cuándo se le pregunta sobre los limones, se queda pensando un rato y concluye que catorce pero no seguro de eso. Esto se debe a que necesitaba hacer la operación 12 por 2, pero no le resultó sencillo, así que solo se quedo en su *percepción*.

Figura 63. Javier comparando el tamaño del vaso con el de la jarra.

Los datos que obtuvimos de aquí según el instrumento de análisis es el siguiente:

Tabla 23. Resultados de la sesión 3

Categoría de análisis	**Indicadores**	**Descripción**
Comportamientos logarítmicos	**Acción:** Ordenar Distribuir	-Ordena las cantidades en forma ascedente de izquierda a derecha. -Distribuye los primeros números de forma uniforme dejando espacios con igual distancia entre ellos, los últimos números van disminuyendo acercando las distancias entre si.
	Análisis estadístico: Comportamiento lineal.	-En la recta de (0-500) los datos se ajustan a una recta. -En la recta de (0-1,000) lo datos se comportan de forma exponencial (comportamiento logarítmico)

	Comportamiento logarítmico	
Depreciación de la unidad	**Acción**: Relacionar Sobreponer Medir	-Relaciona la cantidad de vaso con limones. -Sobrepone el dibujo del vaso sobre la jarra -Mide la cantidad de vasos a ocupar para llenar la jarra, tomando como unidad el vaso.
	Actividad: Comparar Percibir	-Compara el tamaño de la jarra sobreponiendo el dibujo del vaso en el dibujo de la jarra. -Percibe la cantidad de limones que se ocupan sin hacer uso de la relación que dio al principio.

Fuente: Elaboración propia

En la primera parte de la tabla, reportamos que la distribución que hace Javier corresponde al factor de referencia, en la primera actividad, donde el comportamiento fue lineal, se debe a que el iba anotando los numerales en cada línea que marcaba, en cambio en la segunda parte, ya no se le permite hacer esto, lo cual lleva a que suceda el fenómeno de distribución donde los primeros números son iguales en distancia y los últimos números cambian de tamaño, haciendo más cortos en distancia comparados con los primeros.

En la segunda parte de la tabla observamos que, el cambio de referencia que hace la actividad de relacionar primero vasos-limones con la cantidad de personas a la relación de vasos-limones con una sola jarra, hace que a Javier se le dificulte estimar la cantidad de vasos y limones que ocupa, así que, su estrategia es *comparar* las imágenes para después estimar aunque deje de lado su primera relación lineal de a un vaso dos limones, pues el objetivo de la encomienda había cambiado a únicamente tener suficiente limonada en la jarra. Es decir, la *percepción* en este contexto parte de la acción de solucionar entre lo razonable y lo objetivo.

4.5 Resumen del capítulo 4

En los resultados que aquí se muestran se han identificado aspectos relevantes en cuanto a la *práctica de estimar cantidades*. Primero es que la percepción juega un rol importante en la mayoría de las actividades propuestas a Javier. En la actividad de estimar cantidades sobre la recta encontramos que, la *percepción* emerge cuando las cantidades para Javier ya no son conocidas, sin embargo, su interacción con las actividades previas hace que no razone la actividad como lo hizo al principio, donde se basaba en referencias específicas, sino que comprende la posición de las cantidades según su *percepción*.

Con esto afirmamos que, al estimar cantidades desconocidas se produce el fenómeno de *comportamientos logarítmicos* bajo la influencia de la *percepción*, en tanto que la *percepción* es una *actividad* que regula la acción de distribuir cantidades en circunstancias donde no se dimensiona la representación de una cantidad, en este caso, sobre una línea recta.

El segundo aspecto tiene que ver con la estimación de cantidades en distintas situaciones. En este caso encontramos como la *unidad*, representada por diferentes elementos (una gallina, una manzana, una prenda, una jarra), pierde en algún momento valor al ser comparada en dos situaciones; la primera es que, cuando se razona bajo una relación proporcional la unidad tiene un valor importante en la toma de una decisión (aumentar alimento, aumentar ganancias, aumentar detergente), y la segunda es que, cuando se da una cantidad para cierta correspondencia (alimentar gallinas, comprar manzanas, lavar ropa, beber limonada) la unidad en ese momento pierde un valor significativo debido a la finalidad de la situación.

A este fenómeno lo denominabos la *depreciación de la unidad*, que en otras palabras, lo podemos definir como la acción que se toma entre lo razonable y lo objetivo, el primero se refiere al valor de la unidad dependiendo de la razón de proporción y el segundo referido al proposito específico de la actividad involucrada.

5. CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS

5.1 Conclusiones

Con los resultados de esta investigación, se mostraron algunas diferencias en cuanto a lo que hacen investigadores como Deahene (2016) o Siegler y Both (2004) donde su intención es examinar si el tipo de perspectivas sobre el pensamiento humano, previo a su educación matemática formal, puede ayudar a investigadores a anticipar cambios con la edad y la experiencia. En sus trabajos se mostraba una insistente forma de contabilizar el número de veces que el fenómeno de la “regla logarítmica“ sucedía en los niños, dejando de lado las reflexiones alrededor de elementos cualitativos que expliquen la forma de actuar de los niños ante ciertas situaciones, como fue el caso de la estimación de cantidades.

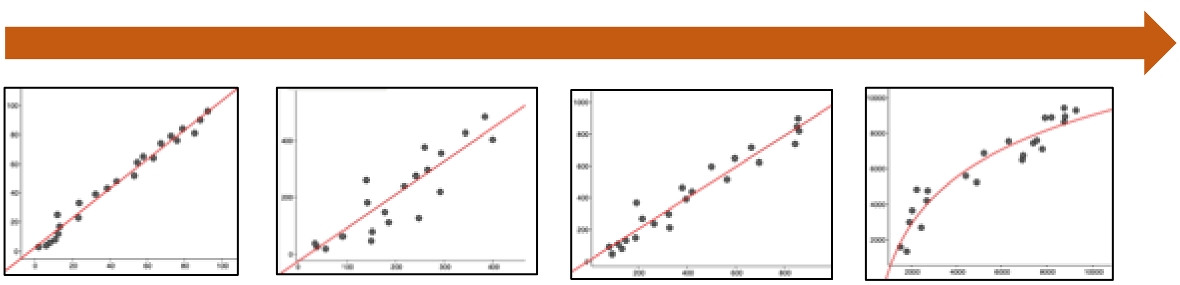
Nuestro trabajo partió de una primicia donde interesaba analizar el camino hacia el desarrollo del *pensamiento logarítmico*. Para ello, se buscaron elementos previos a su aparición formal, de donde derivaron actividades de tipo exploratoria que evidenciaron dos características que asociamos a *lo logarítmico* en un contexto distinto al de su estudio como función. La práctica de estimar cantidades, como herramienta mediadora entre las características y los datos empíricos, fue un elemento necesario y retribuible. A partir de los resultados en la puesta en escena con Javier, se han dado pruebas de dos elementos que robustecen a la problematización de *lo logarítmico*, a saber; *comportamientos logarítmico* y *la depreciación de la unidad*.

Estos últimos serían una respuesta relativa a la pregunta de investigación que se planteaba en el capítulo dos: ¿Cómo se evidencia *lo logarítmico* a través de estudiar la práctica de estimar cantidades en edades tempranas?

Consideramos que estas dos características que reportamos es lo que evidencia *lo logarítmico* edades tempranas, no únicamente como su estudio de función, sino que lo amplía a otros aspectos más cercanos al cotidiano de las personas. Para extender esta idea, en las siguientes subsecciones se explican estos dos aspectos relevantes en los resultados de la investigación.

5.1.1 Sobre comportamientos logarítmicos

En la primera actividad exploratoria podemos dar cuenta que el comportamiento en las estimaciones de Javier son más acertadas cuándo las cantidades son menores a 1,000. En el reto de 10,000 se observa que el comportamiento se ajusta mejor a un logarítmo, dando evidencia que a cantidades desconocidas la distribución no se comporta igual que a cantidades conocidas.



0 - 100 | 0 - 500 | 0 – 1,000 | 0 – 10,000

Figura 64. Evolución de los comportamiento con la estimación de diferentes intervalos de cantidades

Observando la imagen (Figura 64), podemos dar cuenta que en la distribución de 0 a 500 los puntos son más dispersos a comparación con los de 0 a 100 y 0 a 1,000, esto se debe a que en estos dos últimos Javier tenía claro cuál era la mitad de esas cantidades y apartir de esa referencia lograba colocar todas las demás cantidades. A diferencia que en la recta de 0 a 500 el punto medio no fue tan obvio complicando la distribución.

A pesar de que el punto medio le ayudó a la distribución, en la recta de 0 a 10,000 ya no fue tan efectiva, esto se debe a que no recordaba la mitad de esta cantidad o simplemente no la sabía. Por tanto, podemos decir que los *comportamientos logarítmicos* en la estimación de cantidades sobre la recta suceden cuando las cantidades son en cierta manera desconocidas por los niños. Esto se debe a lo que ya mencionamos sobre la práctica de *percibir* y su aparición cuando las cantidades son desconocidas.

Ahora bien, otro dato que reconocemos tiene que ver con la actividad donde Javier estima cantidades en dos momentos; uno con las cantidades escitas y dos con las cantidades habladas. En el primero observamos que a Javiera le beneficia tener escrita la representación de la cantidad en numerales arábigos, pues el ordenamiento se iguala a una distribución equitativa de espacios entre cada número, y en el segundo, cuando se le dan cantidades habladas, la distribución de Javier es diferente, pues tiene espacios iguales (espacio entre cada cantidad) al principio de la recta y espacios más pequeños al final de la recta. Esto lo atribuimos a las técnicas de emnumeración que ha aprendido en la escuela y que él mismo mencionó, es decir, que cuando estimaba las cantidades trataba de replicar lo que le habían enseñado, colocando cada número con espacios iguales entres si, en su caso de un cuadrito de espacio entre cada cantidad.

Con esta actividad, mostramos que la representación de una cantidad de forma no escrita, es mostrada por medio de magnitudes las cuales su posición sobre la línea recta se comportan de acuerdo a una escala logarítmica.

5.1.2 Sobre la depreciación de la unidad

En las actividades de estimación de cantidades en otros contextos identificamos que, la *percepción* y la *comparación* juegan un papel importante cuando se busca evidenciar la característica de la *depreciación de la unidad*. En este sentido, mostramos que esta característica evidencia lo que hemos denominado "entre lo razonable y lo objetivo" y que explicamos a continuación

En las actividades vemos el paso entre lo lineal y *lo logarítmico* bajo la característica de la *depreciación de la unidad*. Por ejemplo, en el principio de las actividades, en primer lugar se logró establecer relaciones de "forma lineal", pero cuando las cantidades aumentaban en el contexto, era sencillo depreciar el valor que aportaba la unidad. Lo mostramos con el alimento para gallinas, la venta de manzanas o lavando ropa. A este paso, lo denominamos la toma de decisiones entre lo *objetivo* y lo *razonable* (Figura 65), pues dependía del contexto y el objetivo de cada actividad.

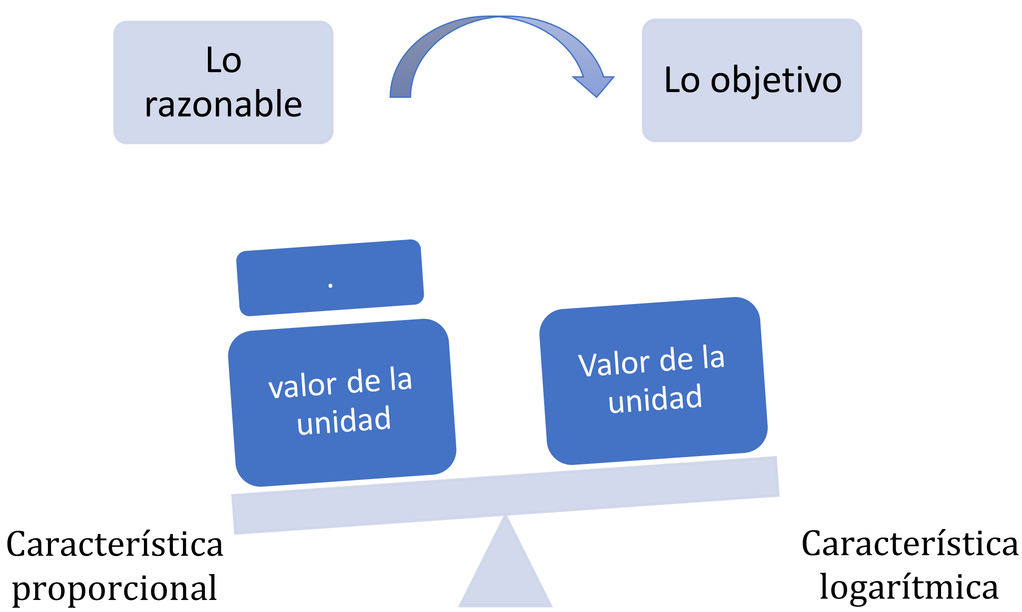


Figura 65. Característica de la depreciación de la unidad

En lo razonable la unidad tiene un valor mayor y en lo objetivo ese valor se pierde, tal y como sucede con la escala logarítmica, que la unidad pierde valor (su valor en este caso esta relacionado con las distancias entre cantidades consecutivas) en un momento específico, donde la unidad pierde magnitud conforme avanza la secuencia de las cantidades.

Ahora bien, de las acciones y actividades que realizaba Javier identificamos que la *percepción* y la *comparación* son transversales a esta característica, de esta manera asociamos estas dos prácticas vinculadas hacía *lo logarítmico* bajo la característica de la depreciación de la unidad, que detallamos en el apartado con lo relacionado al objetivo y la hipótesis de investigación.

5.1.3 Sobre el objetivo y la hipótesis

En este trabajo se dio un primer acercamiento al estudio de *lo logarítmico* en edades tempranas, estos resultados robustecen la problematización, lo cual era parte escencial del objetivo de esta investigación.

Al analizar la *práctica de estimar cantidades*, identificamos las *actividades* y *acciones* que resultan al interactuar con actividades con este tipo de ideas, mismas que nos dan evidencia de dos características de *lo logarítmico*, identificadas bajo el nombre *comportamiento logarítmico* y *depreciación de la unidad.*

Identificamos que la práctica de *percibir* y *comparar* juegan un papel importante al analizar ambas ideas en las dos actividades. La primera revela que a pesar de que Javier tenía una experiencia con ciertas cantidades (su representación en la recta) y técnicas de distribución sobre la línea recta, cuando se aleja de esos contextos la práctica de *percibir* sobresale como un ente natural en la forma de pensar ante este tipo de situaciones. En otras palabra, la *percepción* de cantidades es la que establece una representación de la cantidad (en este caso sobre la recta) derivado de una experiencia previa, lo cual produce fenómenos que ahora asociamos a la idea de *lo logarítmico*.

Por otra parte, la *percepción de cantidades* y la *comparación de cantidades* son actividades que establecen una regulación en la toma de una decisión entro algo razonable y algo objetivo. Esto se hace presente en las actividades con contextos, por ejemplo, para *comparar* cantidades de alimentos con cantidades de gallinas y *percibir* si la cantidad de alimento era suficiente o como en el caso de *comparar* la cantidad de detergente con cantidad de ropa o cantidad de manzanas con la cantidad de dinero.

En el siguiente esquema (Figura 66) organizamos las acciones y actividades asociadas a partir de estudiar la práctica de *estimar cantidades* y que evidencia dos características particulares de *lo logarítmico*.

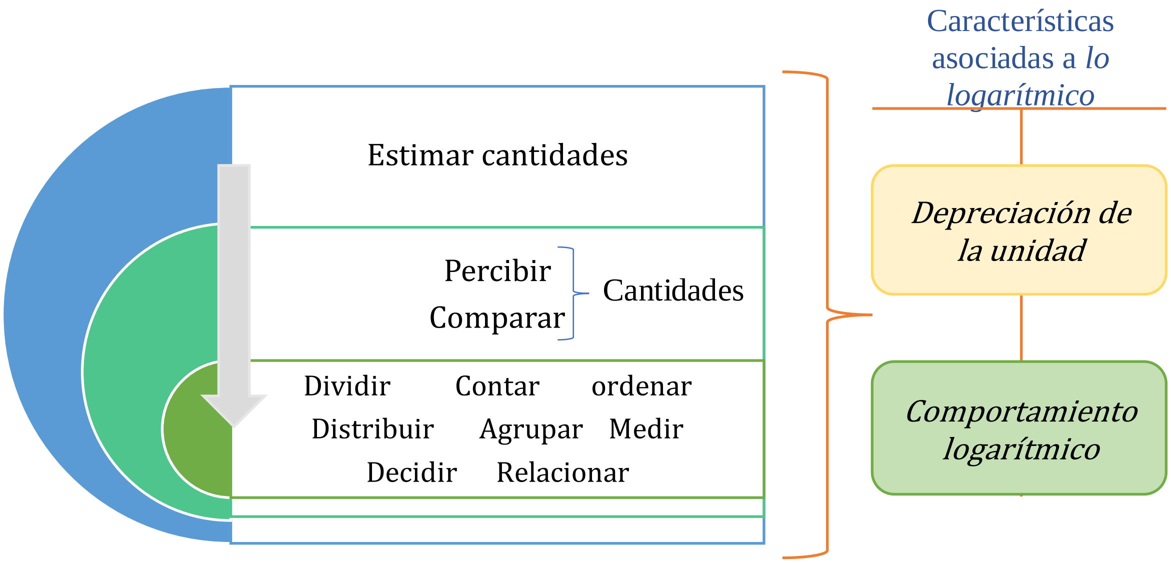


Figura 66. Esquema general de las prácticas asociadas a la estimación de cantidades, bajo el análisis de dos características vinculadas a lo logarítmico.

En tanto a la hipótesis, podemos dar cuenta que efectivamente la estimación de cantidades sí nos permite robustecer *lo logarítmico*, es decir, el análisis socioepistemológico sobre la práctica de estimar y la organización de las prácticas cuando se analizan la busqueda de las características *comportamiento logarítmico* y *depreciación de la unidad* , son elementos que robustecen la noción de *lo logarítmico*.

Este primer acercamiento a las ideas relacionadas a *lo logarítmico*, son un parteaguas en la búsqueda de los elementos necesarios para hablar de una caracterización del *Pensamiento Logarítmico* y su desarrollo. La práctica de *percibir* y *comparar* son actividades que pasan desapercibidas en la vida cotidiana o en la vida escolar, este estudio muestra que hay muchos elementos a su alrededor los cuales pueden ser retomados para fortalecer significados de conceptos, como el mismo logaritmo, desde edades muy tempranas. Además, evidenciar características tan vivas en el cotidiano (como estimar en forma logarítmica) proveen de significado a lo que en nuestra escolarización parece un error.

En el siguiente apartado se propone algunas prospectivas de investigaciones vinculadas a buscar más elementos que nos permitan seguir robusteciendo la idea de *lo logarítmico*, esto al ubicar algunas áreas de oportunidad que emergen después de este trabajo de investigación.

5.2 Prospectivas de investigación

El análisis socioepistemológico (Montiel y Buendia, 2012) que se presentó aquí, marca un camino de continuación, de donde las líneas a seguir surgen por algunas vertientes que devienen de los propios resultados de cada actividad y otras de las limitaciones que hubo en el proceso de la investigación.

1) Una de las primeras limitaciones la vamos a referir a la toma de datos: Dada la actual contingencia sanitaria por la COVID-19, las actividades no se lograron

poner a más participantes como se había pensado en un principio. Por ello, una de las primeras prospectivas es considerar proponer estas actividades en un ambiente de socialización, es decir que algunos niños puedan interactuar entre si con las actividades, dado que esto puede robustecer los resultados que aquí se muestran, en tanto se mantienen o se hacen nuevos descubrimientos. En este sentido, se propone tomar una muestra más grande que abarque varias edades tempranas haciendo las adecuaciones necesarias a las actividades respecto de cada edad.

2) Por otra parte, considerando los resultados del apartado *4.3 Sesión 3* en las actividades sobre estimar cantidades en la recta, se considera viable el diseño de más actividades donde las cantidades sean de forma hablada en lugar de escribirlas, esto puede dar más evidencia de la emergencia de la *depreciación de la unidad* y la de *comportamientos logarítmicos*. Siegler y Opfer (2003) mencionan que los niños conocen y utilizan múltiples representaciones de cantidad númerica, y que conformen se desarrollan dentro de su formación escolar se encausan en solo uno, y es la lineal dada por la secuencia numérica de los numerales arábigos. Es por ello que dentro de las actividades de estimación, el quitar la representaciones de cantidades (números arábigos) evidencia de forma clara la representación de las cantidades, acoplándolas a lo que ahora denominamos *depreciación de la unidad*.

3) Finalmente, una de las prospectivas más ambiciosas para la continuación del proyecto es una investigación longitudinal de *lo logarítmico* en lo escolar. La evidencia que mostramos en este trabajo dan un primer acercamiento a prácticas, a saber, percibir y comparar, con las que emergen lo que denominamos *comportamientos logarítmicos* y *depreciación de la unidad* en el contexto de la estimación de cantidades en edades tempranas, consideramos que si se logran hacer ajustes con este tipo de actividades en el nivel preescolar se podrían encontrar resultados similares a los aquí reportados.

En el esquema (Figura 67) mostramos cómo a través de un estudio longitudinal se pudiera caracterizar en diferentes niveles la emergencia de *lo logarítmico*, esto si consideramos algunos niveles donde no hay una reflexión extendida, por ejemplo, para el caso de preescolar y secundaria (marcadas con flechas negras y recuadros punteados) que colocamos en el esquema se muestra que algunos elementos previos con los que podemos generar hipótesis sobre *lo logarítmico* en esos niveles, son la idea de estimar y la búsqueda de patrones, el primero por lo referido a los resultados de esta investigación y el segundo por los resultados de Ferrari (2008) alrededor de la idea covariacional.

Con el estudio de investigaciones longitudinales se puede dar cuenta de la complejidad de las situaciones o problemáticas analizadas, los investigadores necesitan considerar una diversidad de variables que rebasan ampliamente el enfoque tradicional de enseñanza (Rico, 1998), en este caso el del logaritmo, donde pueden surgir variables del tipo cognitivas, actitudinales, sociales , socioeconómicas etc. Aunque creemos que esto no es un proceso sencillo consideramos que los elementos que conforman el cuerpo de nuestros resultados sobre *lo logarítmico* (Figura 66) se pueden desarrollar más actividades exploratorias para los niveles donde aún la reflexión no ha sido profunda.

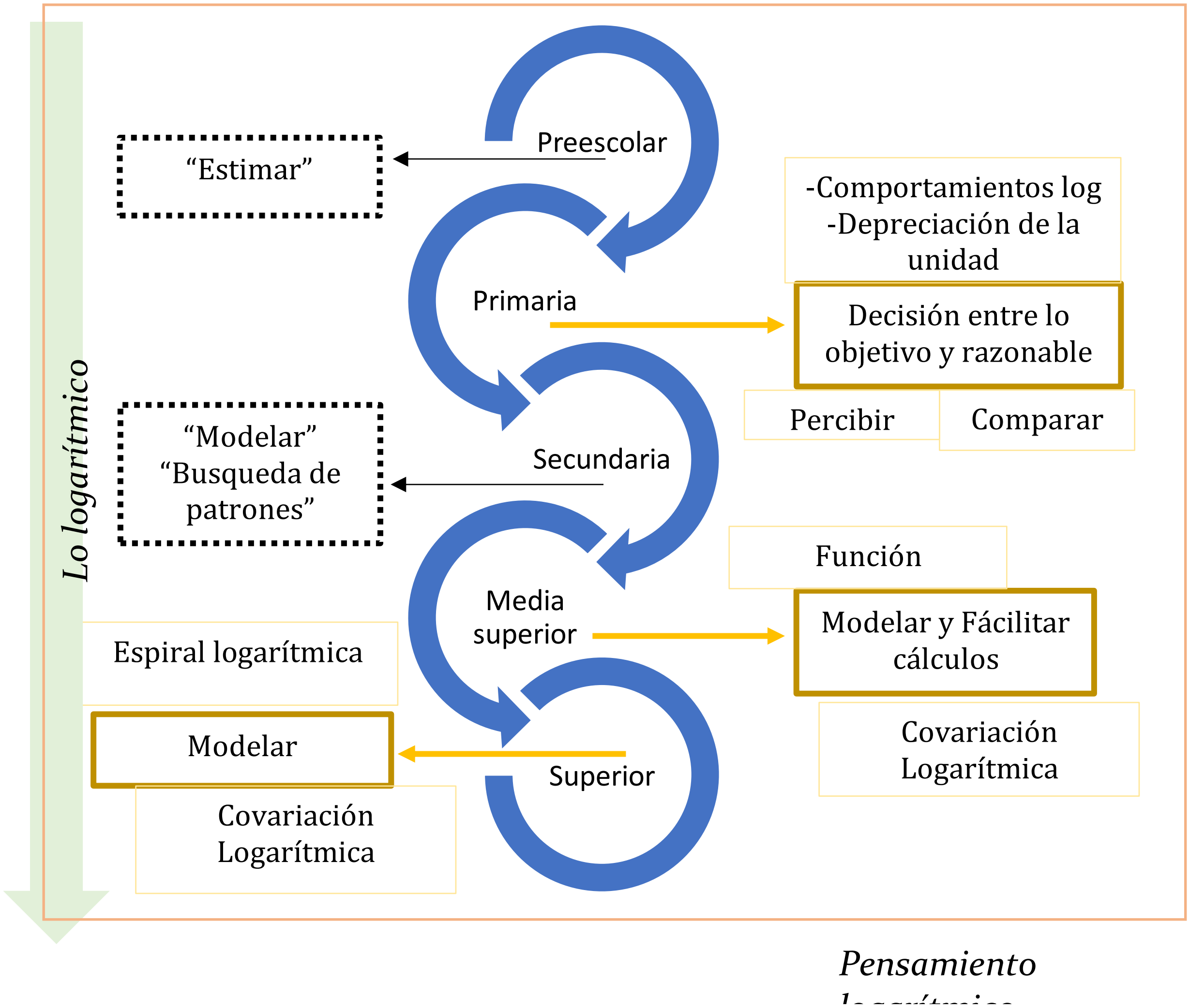


Figura 67. Esquema de las prospectivas hacia una investigación longitudinal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A. y Rodríguez, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas.

Abrate, R. y Pochulu, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. U*NION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 10, 77-94.

Albanese, V. y Perales, F.J. (2014). Pensar matemáticamente: una visión etnomatemática de a práctica artesanal soguera. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 261- 288. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1731

Albarracín, L., Lorente, C., Lopera, A., Pérez, H. y Gorgorió, N. (2015). Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de educación primaria. *Epsilon: Revista de Educación Matemática*, 32 (1-89), 19-33.

Almoloud, S.A. (2011). The transformation of scientific knowledge into taught knowledge: the case of logarithms. *Educar em Revista*, 1, 191-210. https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400013.

Anggraini, R., Somakin y Hapizah (2019). Students' understanding of logarithms using the growth of Euglena Viridis context. *Journal of Physics: Conference Series,* 1166.

Bonilla, J.A. (2018). *Un estudio de la covariación logarítmica en coordenadas polares*. Tesis de licenciatura. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). El pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22 (3), 55-86.

Björklund, C., Heuvel-Panhuizen, M. y Kullberg, A. (2020). Research on early childhood mathematics teaching and learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 52, 607-619. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01177-3

Cantoral, R. (2016). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber. Pensamiento y lenguaje variacional*. Gedisa.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. y Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 50 (3). https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Caballero-Pérez, M. (2018). Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Tesis doctoral. Cinvestav.

Corredor de Porras, M. (2011). Instrumentos cognitivos en el pensamiento matematico. *Praxis & Saber*, 2 (4), 103-126.

Cordero, F., Gomez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.

Dehaene, S. (2007). Symbols and quantities in parietal cortex: elements of a mathematical theory of number representation and manipulation. En P. Haggard & Y. Rossetti (Eds.), *Attention & Performance XXII. Sensorial-motor foundations of higher cognition*. Harvard University Press.

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático: cómo nacen, viven y a veces mueren los números en nuestra mente*. Siglo veintiuno editores.

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E. y Pica, P. (2008). Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in western and amazonian indigine cultures. *Science*, 320, 1217-1220. DOI: 10.1126/science.1156540

Díaz, V. y Poblete, Á. (2018). Uso de modelos didácticos de los docentes de matemáticas en la enseñanza de funciones logarítmicas, cuadráticas y exponenciales. *Revista Paradigma*, 39 (1), 353-372.

Dogan, M., Guner, P. y Soylu, M. (2012). A study of efficiency activity on logarithm. *Procedia Social and Behavioral Sciences,* 46, 4449-4453. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.273

Dotan, D. y Dehaene, S. (2016). On the origins of logarithmic number-to-position mapping. *Psychological Review*, 123 (6), 637-666. https://doi.org/10.1037/rev0000038

Eberbasch, M., Luwel, K. y Verschaffel, L. (2015). The relationship between children's familiarity with numbers and their performance in bounded and unbounded number line estimation. *Mathematical Thinking and Learning,* 17, 136-154. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016813

Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Dogan, M.F. y Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understand of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning,* 18 (3), 151-181. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090

Ellis, A.B., Özgür, Z., Kulow, T., William, C. & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *The Journal of Mathematical Behavior,* 39, 135-155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004

Esper, L. B. y Juárez, M.G. (2017). Innovación metodológica en la educación superior para favorecer la comprensión. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 30, 355-364.

Fallas-Soto, R. (2019). *Variación acotada y predicción. Prácticas socialmente compartidas en la significación de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial*. Tesis doctoral. Cinvestav.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar-sumando a una primitiva*. Tesis doctoral. Cinvestav.

Ferrari, M. y Farfán, R.M. (2017). Multiplicar sumando: una experiencia con estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(2), 137-166. http://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2021

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G. y Méndez-Guevara (2017). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior,* 42, 92-108. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003

García Majón-Cabeza, A. (2019). El juego de construcción para el desarrollo del pensamiento matemático en el aula de 2-3 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 8(1), 58-88.

Galo-Alvarenga, S. (2019). *El estudio del cambio en geometría euclidiana*. Tesis de maestría. Cinvestav.

Gacharná, O. (2015). Propuesta didáctica para abordar los logaritmos por medio de la regla de formación de la función logarítmica. *Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas*, 68, 60-66.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría. Cinvestav.

Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia. *Science*, 306, 496-499. DOI: 10.1126/science.1094492

Gruver, J. (2018). A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships. *The Journal of Mathematical Behavior,* 50, 1-22. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.003

Hernández-Zavaleta, E. (2019). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de "lo erratico"*. Tesis de doctorado. Cinvestav.

Hernández, R., Fernández, C: y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*, 5ª Ed. McGraw-Hill.

Kuper, E. y Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithmic. *Journal of Mathematical Behaviour*, 57, 1-18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

Landy, D., Charlesworth, A. y Ottmar, E. (2017). Categories of Large numbers in line estimation. *Cognitive Science,* 1-28. https://doi.org/10.1111/cogs.12342

Leivas, J.C. y Carneiro, M.T. (2010). La función logarítmica obtenida por la simetría de la función exponencial: explorar la visualización. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 23, 93-106.

Luci-Arriagada, G. y Reyes-Santander, P. (2016). Metáforas y desarrollo del pensamiento matemático: ¡cuánto antes mejor! *Atenas*, 3 (35).

Marsden, J. y Weinstein, A. (1981). *Calculus unlimited*. The Benjamín / cummings publishing company, Inc.

Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis doctoral. CICATA-IPN.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En Rosas A. y Romo, A. (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones*. CICATA-IPN.

Moreno-Durazo, A. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnostico y el tratamiento de enfermedades cardiacas*. Tesis de doctorado. Cinvestav.

Norton, J. D. (2015). Replicability of Experiment. *THEORIA. Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia*, 30(2), 229-248. DOI: 10.1387/theoria.12691

Pizarro, R. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Radford, L. y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 12 (2), 215-250.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas.* Gedisa.

Rico, L. (1998). Concepto de currículum desde la Educación Matemática. *Revista de estudio del currículum*, 1(4), 7-42.

Rios-Jarquín, W. (2020). *Socioepistemología y transversalidad: una reconstrucción racional de tres teoremas fundamentales*. Tesis de maestría. Cinvestav.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría. Cinvestav.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el departamento de didáctica de la matemática en la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7 (1), 499-536.

SEP, (2019). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado.*

SEP, (2017). Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior.

Siegler, R. y Booth, J. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75 (2), 428-444. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Siegler, R. y Opfer, J. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science,* 14 (3), 237-243. https://doi.org/10.1111/1467-9280.02438

Stelzer, F., Introzzi, I., Andrés, M., Richard's, M. y Urquijo, S. (2018). Factores cognitivos con la capacidad de cálculo de división en estudiantes de 4º año de educación primaria en Argentina. *Revista Electronica "Actualidades investigativas en Educación"*, 18(1), 1-26. https://doi.org/10.15517/aie.v18i1.31842

Tall, D. (2019). From biological brain to mathematical mind: the long-term evolution of mathematical thinking. En Danesi, M. (Ed.), *Interdisciplinary perspectives on math cognition*. Springer.

Vargas, J., González, M.T. y Vargas, N. (2018). Fuentes de información en un análisis de la práctica de los profesores: la función logarítmica en precálculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31, 1593-1601.

Velázquez, W., Villafañe, W. y Vega, J. (2017). Errores matemáticos cometidos por los estudiantes universitarios en el estudio de funciones. *Revista Paradigma*, 38 (2), 291-307.

Weber, C. (2019). Making sense of logarithms as counting divisions. *Mathematics Teacher,* 112 (5), 375-380.

Yim, R. K. (2009). *Case Study Research. Design and Methods*. 4ª Ed. Sage.